ДЖ. Л. СИНГ

КЛАССИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

Перевод с английского
Л. С. ПОЛАКА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

HANDBUCH DER PHYSIK
ENCYCLOPEDIA OF PHYSICS
EDITED BY
S. FLÜGGE/MARBURG
VOLUME III/1
Springer-Verlag/Berlin·Göttingen·Heidelberg 1960

CLASSICAL DYNAMICS

by

J. L. SYNGE

Дж. Л. Синг
КЛАССИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

М., Физматгиз, 1963 г., 448 стр. с илл.

Редактор *Г. К. Пожарицкий.*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод.* Корректор *Е. В. Кузнецова.*

Сдано в набор 3/III 1963 г. Подписано к печати 2/VIII 1963 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 14. Условн. печ. л. 22,96. Уч.-изд. л. 21,31.
Тираж 10 000 экз. Цена книги 1 р. 27 к. Заказ № 678.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Московская типография № 5 Мосгорсовнархоза. Москва, Трехпрудный пер., 9.

ОГЛАВЛЕНИЕ

В. ДИНАМИКА ЧАСТИЦЫ

Е. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Предлагаемая вниманию читателя книга является переводом раздела Classical Dynamics, написанного Дж. Л. Сингом (на английском языке) для первой части третьего тома нового издания немецкой энциклопедии Handbuch der Physik (Springer-Verlag, 1960).

Имя ирландского ученого, профессора Дж. Л. Синга, одного из крупнейших специалистов по классической механике, хорошо известно нашему читателю по изданным на русском языке переводам трех его книг (Дж. Л. Синдж, Тензорные методы в динамике, Изд-во иностр. лит-ры, Москва, 1947; Дж. Л. Синдж, Релятивистский газ, Атомиздат, Москва, 1960; Дж. Л. Синг, Общая теория относительности, Изд-во иностр. лит-ры, Москва, 1963 [1]).

В нашей научной литературе имеются две книги, посвященные классической механике [2]). Книга Дж. Синга отличается от них и по подходу, и по характеру изложения. Она интересна как весьма своеобразной «геометрической» точкой зрения, так и органическим сочетанием классической и релятивистской механики. Изложение — оригинальное и не только сообщает некоторую сумму

---

[1]) На титульных листах первых двух книг его фамилия транскрибирована как Синдж. На мой запрос автору он ответил, что фамилия Synge происходит от староанглийской формы глагола singe (петь) и произносится Синг.

Дж. Л. Синг родился в 1897 г. в Дублине. Член Английской и Ирландской Академий наук. В настоящее время работает в Дублине в Институте развития наук. Ему принадлежат многочисленные статьи и книги по механике, математике, частной и общей теории относительности, теории поля и т. д.

[2]) Голдстейн Г., Классическая механика, перевод с англ., Гостехиздат, Москва, 1947; Лич Дж., Классическая механика, перевод с англ., Изд-во иностр. лит-ры, Москва, 1961.

знаний, но, что, может быть, гораздо важнее, стимулирует мысль читателя.

В книге имеется некоторое количество мест, вызывающих возражения как с точки зрения строгости (см., например, стр. 272, 307—319), так и с точки зрения ясности отдельных формулировок (см., например, стр. 120, 247). Что касается первых, то сам проф. Синг в начале книги заявляет, что он не претендует на совершенную строгость изложения, и поэтому такие места оставлены без изменения, так как в конце концов предел нестрогости определяется поставленной автором задачей. Неясные же формулировки в переводе по возможности уточнены. Казалось явно нецелесообразным еще загромождать книгу примечаниями, которых в ней и без того много.

Обозначения автора, в общем мало отличающиеся от применяемых в нашей литературе по механике, сохранены. Что касается наименований отдельных механических величин, то в переводе они даны в виде, общепринятом в нашей научной литературе; впрочем, надо заметить, что единообразие наименований в различных изданных у нас за последнее время книгах по механике (отечественных и переводных) пока еще не достигнуто.

Автор дает большое количество ссылок в подстрочных примечаниях; там, где он ссылается на работы, переведенные на русский язык, ссылки даны мною на эти переводы с указанием соответствующих страниц русских изданий. К приложенной в конце книги небольшой библиографии основных, по мнению проф. Дж. Л. Синга, трудов, мною добавлено несколько работ на русском языке, которые могут оказаться полезными для читателя, интересующегося основными проблемами классической механики.

Л. Полак

А. ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Классическая динамика. Область применения. Почти два столетия (от 1700 до 1900) физики изучали только одну динамическую теорию[1]). Теперь их три, причем последняя может быть подразделена еще на две:

1. Ньютонова динамика.

2. Релятивистская динамика (квантовая теория исключается).

3. а) Ньютонова квантовая динамика, основанная на абсолютном пространстве и времени Ньютона. б) Релятивистская квантовая динамика, основанная на плоском пространстве — времени Минковского или на искривленном пространстве — времени Эйнштейна.

Настоящая книга содержит изложение только 1-й и 2-й динамики, которые резко отличаются от 3-й в философском вопросе формулировки принципа причинности. Однако в книгу включены отнюдь не все вопросы 1-й и 2-й динамики, а именно, полностью опущена статика и также механика сплошных сред; в разделах, посвященных релятивистской динамике, рассматривается только специальная теория относительности, и то весьма кратко.

В современном понимании классическая динамика[2]) означает динамику частиц и твердых тел, причем особое

---

[1]) В этой книге даются только отдельные исторические справки. Об истории динамики см. Dugas R., Histoire de la Mécanique (Neuchatel, Editions du Griffon, 1950) и La Mécanique au XVII siècle (1954). Много исторических фактов можно найти в книге Уиттекера [28] (см. список основной литературы, стр. 439).

[2]) Согласно принятому в настоящее время обычаю термин «*механика*» включает *динамику* и *статику*, причем динамика рассматривает системы в движении, а статика — покоящиеся системы. Это словоупотребление пренебрегает буквальным значением термина «динамика» (δύναμις — сила) и вызвало решительный протест со стороны В. Томсона и Тэта, которые писали: «Для того чтобы сохранить буквальный смысл языка и следуя примеру авторов, наи-

внимание уделяется общей теории. Она включает также существенные разделы кинематики: теорию конечных перемещений, геометрию масс, а также систем сил и обобщенных координат.

Что касается области применимости классической динамики, то можно сказать, что ньютонова динамика блестяще описывает физические явления в условиях, которые могут быть названы «обычными», т. е. когда она приложена к проблемам техники в широком смысле слова и к физическим проблемам, включающим системы, которые не слишком велики и не слишком малы. Расхождения между теорией и экспериментом в этих областях обычно оказываются результатом чрезмерного упрощения применяемой математической модели (см. § 2), например, пренебрежения трением в модели или заменой упругого (физически) тела твердым (математически) телом.

Ньютонова динамика может быть также успешно применена в кинетической теории газов и в небесной механике (однако, с учетом сказанного ниже). Промахи в предсказании явлений появляются когда 1) относительные скорости (u) уже не являются малыми по сравнению со скоростью света (c) или 2) когда в рассмотрение вводятся массы атомных масштабов. Так как в лабораторных условиях высокие скорости могут быть достигнуты только для очень легких частиц, то эти два условия практически совпадают. Однако мы можем разделить их для целей анализа. Действительно, они представляют 1) границу, где ньютонова динамика должна быть заменена релятивистской динамикой, и 2) границу, где классическая динамика должна быть заменена квантовой динамикой.

более глубоко изучивших логическую сторону вопроса, мы употребляем слово «динамика» в его истинном смысле как наименование науки, которая рассматривает действие *сил*, поддерживают ли они относительный покой или производят ускорение в относительном движении. Соответствующие два отдела динамики, таким образом, удобно назвать *статика* и *кинетика* (Preface to Treatise on Natural Philosophy, т. I, часть 1. Cambridge, University Press, 1879). Однако наименование *кинетика* не привилось, может быть, из-за большого сходства с термином *кинематика*. Оно, однако, применяется немецкими авторами: G r a m m e l [8], стр. 305, и W i n k e l m a n n и G r a m m e l [29], стр. 373.

Ошибки порядка $(u/c)^2$ появляются, когда ньютонова динамика прилагается к изучению очень быстрых движений тел. Однако нельзя так же просто оценить ошибки, возникающие при применении классической динамики к задачам атомных масштабов. Хотя в квантовой динамике употребляется много старых слов, математические понятия, соответствующие этим словам, коренным образом отличаются от математических понятий классической динамики. Никто уже не пытается с какой-либо уверенностью формулировать атомные проблемы классическим путем. Однако классические понятия и тут не полностью теряют свое значение; так, например, сохранение импульса и энергии находит применение при рассмотрении задач столкновения, аннигиляции или рождения частиц атомных и субатомных масштабов (§ 120 и сл.).

В небесной механике ньютонова динамика остается стандартной основой вычислений и является исключительно продуктивной. Тем не менее существуют некоторые малые расхождения между предвидениями и наблюдениями [1]). Наиболее заметное из них — вращение перигелия Меркурия. Оно более просто объясняется общей теорией относительности Эйнштейна, чем специальными ньютоновыми силами, вводимыми для его объяснения. Можно считать поэтому, что теория Эйнштейна есть лучшая математическая модель [2]) и что ньютонову динамику надо с осторожностью применять при очень тонких вычислениях в небесной механике.

Ньютонова динамика может применяться в космологии [3]) как альтернатива общей теории относительности для кинематической космологии Милна. Природа этого предмета исследования, однако, такова, что вряд ли

---

[1]) Ср. Chazy J., Théorie de la Relativité et la mécanique céleste, т. 1, гл. IV, V. Paris, Gauthier — Villars, 1928; McVittie G. C., General Relativity and Cosmology, гл. V, New York, Wiley, 1956 [имеется русский перевод (*Прим. перев.*)].

[2]) Теория гравитации Уайтхеда, основанная на специальной теории относительности, приводит к тому же вращению перигелия, как общая теория относительности Эйнштейна (ср. Eddington A. S., Nature, London **113**, 192 (1924); Synge J. L., Proc. Roy. Soc. London, Ser. A**211**, 303 (1952)).

[3]) Обсуждение и ссылки см. Bondi H., Cosmology, стр. 7~, 172. Cambridge, University Press, 1952.

возможно сказать, какая из этих теорий лучше согласуется с наблюдением.

Однако научное значение классической динамики, в частности и ньютоновой динамики, не исчерпываются только физическими предсказаниями, которые делаются непосредственно на их основе. Ньютонова динамика состоит из совокупности математических выводов и заключений, полученных подчинением некоторых простых понятий некоторым простым законам. В математическом развитии предмета были развернуты общие схемы (в частности, лагранжев и гамильтонов метод), которые позволяют заменить первоначальные примитивные понятия более общими (такими как пространство конфигураций и фазовое пространство). Оказалось, что эти новые математические понятия могут быть использованы, чтобы представить физические понятия, отличные от тех, рассмотрение которых было источником понятий математических. Таким образом, ньютонова динамика породила новые физические выводы путем приложения внутренне присущих ей математических идей за пределами их исходной области применения. Примерами этого могут быть применение лагранжевых методов к теории электрических контуров и (что еще более удивительно) применение гамильтоновых методов в развитии квантовой механики.

При дальнейшем рассмотрении вопроса надо отметить, что ньютонова динамика ставит перед нами задачу решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений; можно поэтому с математической точки зрения классифицировать предмет ньютоновой динамики как ОДУ (обыкновенные дифференциальные уравнения).

Гамильтоновы методы вводят дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка и при таком рассмотрении динамика Гамильтона может быть обозначена как ЧПДУ$_1$ (уравнения в частных производных первого порядка). Переход к квантовой теории через уравнение Шредингера заключает в себе переход к дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка, что, в тех же обозначениях, как и выше, может быть записано как ЧПДУ$_2$.

Рассматривая ньютонову динамику в свете этого процесса математического развития (ОДУ $\rightarrow$ ЧПДУ$_1$ $\rightarrow$

$\to$ ЧПДУ$_2$), мы видим, что она имеет значение намного большее того, которое заключалось в первоначальной сфере ее применения; она есть источник новых теорий, в которых первоначальные понятия были обобщены и стали более тонкими, хотя при этом никогда полностью не были упущены из виду.

§ 2. Математические схемы или модели. Перефразируя известное определение геометрии, можно сказать: физика есть то, что делают физики. Физики сравнительно мало задумываются над тем, почему и как они делают то, что они делают, и против этого нельзя сильно возражать, так как человеческая активность подавляется самоанализом. Однако имеются случаи, когда опасность интеллектуальной путаницы больше опасности самоанализа. Как это можно, спрашиваем мы, терпеть сосуществование нескольких различных динамических теорий, которые все имеют целью описать поведение единственного реального мира? Является ли одна из этих теорий правильной, а остальные ложными? Или они все ложные? Нет сомнения в том, что существует несколько теорий, поскольку люди работают над ними. Природа также существует. Вопрос состоит в том, как эти теории относятся к природе?

Удовлетворительный ответ на этот вопрос не может быть найден, если рассматривать только одно: дают или не дают те или иные из этих теорий правильные предсказания результатов некоторых экспериментов. Вопрос имеет гораздо более глубокий смысл; кажется, что к ответу на него можно приблизиться, только признав, что математические теории (в какой бы степени они ни были подсказаны природой) являются не более чем схемами или моделями природы. «Частица» реального мира (планета, атом или электрон) должна быть не более смешиваема с «частицей», которая является ее представителем в динамической теории, чем настоящий город с типографским пятном, представляющим его на карте.

Однако даже эта аналогия не дает правильного представления об огромной пропасти, отделяющей реальный мир от его математических моделей. В самом деле, пятно типографской краски на листе бумаги по крайней мере существует в реальном мире (так же как и представляемый им город), в то время как сущность математических схем или моделей существует только в нашем разуме, даже если математические символы написаны на бумаге; математические операции, включающие идею бесконечности (дифференцирование и интегрирование), являются чисто интеллектуальными идеями, и принадлежат к природе только поскольку человеческий разум принадлежит природе.

Если допустить, что математические модели должны быть резко различаемы от природы, то каково тогда их отношение к природе?

Отношение это, как кажется, основано на некоторых понятиях, наименование которых требует общего языка для всех физиков — экспериментаторов и математиков. Эти понятия появляются как *математические* понятия в математической модели и как физические в прямом обсуждении природы. Мы имеем как бы трехстолбцовый словарь:

Наименование понятия	Математические понятия	Физические понятия
Масса	Положительное число (m)	Количество вещества в теле. Мера сопротивления тела изменению скорости. Мера способности тела гравитационно притягивать другое тело

Здесь приведены три отдельные записи. Записи первых двух столбцов являются полными. Однако третья запись является только наводящей на мысли, так как для описания физического понятия требуется изучить все пути, которыми идея массы входит в наше понимание природы, и, фактически, никакое описание с помощью слов не может быть удовлетворительным, ибо часть нашего понимания массы возникает из мускульных ощущений и не может быть полностью описана.

Этот гипотетический словарь применяется следующим образом. Физическая задача сначала формулируется с помощью физических понятий. Затем эта формулировка переводится на язык математических понятий, причем те же слова употребляются теперь в их математическом значении. Математические законы (обычно дифференциальные уравнения) находятся подобным же переводом физических законов, впервые установленных с помощью физических понятий. Применение этих законов к рассматриваемым проблемам представляет тогда чисто математическую задачу, и когда эта задача решена, решение и выводы из него переводятся на язык реальности с помощью восстановления физического смысла слов, употреблявшихся при математическом решении.

Такое описание стандартной процедуры в теоретической физике было до смешного тщательно разработано столетие назад, когда не было ясного различения между физическими и математическими понятиями (даже в геометрии и в умах математиков). Это различение существовало для современной чистой математики, так как иначе математическая аргументация может стать путаной и неясной из-за контакта с путанной природой. Однако современные физики могут прямо и честно оспаривать указанное различение понятий, так как их практикой и желанием может быть сохранение математических понятий в неразрывном смешении с физическими понятиями, как изобильном источнике новых идей. Ясность и плодотворность мысли отнюдь не одно и то же.

Если проведенный выше анализ приемлем, то он расчищает путь к решению вопроса относительно сосуществования нескольких динамических теорий. Ни одна из этих теорий не является истинной более, чем карта является истинным представлением страны. И как удобно иметь различные карты (разных масштабов), чтобы изучать географию страны, так удобно иметь много схем и моделей природы. Легко преувеличить разницу между этими моделями; однако надо помнить, что при обычных условиях (см. § 1) они дают одну и ту же информацию.

Интересно сравнить эти идеи с идеями Бриджмена[1]). Согласно его операционному методу понятия определяются

---

[1]) Bridgman P. W., The Logic of Modern Physics, стр. 5. New York, McMillan, 1951. См. также Bridgman P. W., The Nature of some of our Physical Concepts. New York, Philosophical Library, 1952.

с помощью и в терминах физических операций, понятие является синонимом соответствующей совокупности операций. Так, например, понятие абсолютного ньютонова времени должно быть отброшено, так как невозможно описать эксперименты, с помощью которых оно может быть измерено.

Это может означать, что в нашем гипотетическом словаре первый столбец мог бы читаться «абсолютное время», второй — «число t», но третий был бы чистым, так как нет соответствующего физического понятия. Однако имеет ли это на самом деле место? Многие физики, астрономы и инженеры употребляют слово время, относя его к переменной t, встречающейся в некоторых уравнениях.

Когда они решат эти уравнения, они переходят от формул к физической реальности, делают предсказания, которые иногда имеют очень большую степень точности, например, в небесной механике. Ясно, что в *их* словарях третий столбец не является пустым. Если бы это было так, они не могли бы использовать свои результаты для физических предсказаний. На самом деле в третьем столбце могут отсутствовать *слова*, запись может лежать в подсознательной области, в которой происходит значительная часть нашего мышления. Но запись такого рода не позволила бы перевести формулы, приводящие к численным значениям переменной t, на язык прямых указаний куда и как надо направить телескоп.

Хотя операционный метод и является очень ценным для уяснения наших идей, однако кажется, что физические понятия слишком сложны и путаны для нас, и поэтому нельзя требовать, чтобы они всегда удовлетворяли операционным критериям.

§ 3. **Аксиоматика.** Слово *логика* имеет широкую область значений, в соответствии с контекстом, в котором оно употребляется, от обычной логики ежедневных общений людей, через логику диагностиков-экспертов или детективов, до основной логики математиков [1]) двадцатого века;

---

[1]) Любая логическая система, если избегать порочного круга, должна начинать с неопределенных терминов и недоказуемых предложений. Ср. Veblen O. and Young J. W., Projective Geometry, т. 1, стр. 1. Boston, Ginn, 1910.

и сверх того до недавно развитой математической логики. Физические понятия, которые по своей природе являются неясными, не могут рассматриваться с логической строгостью. С другой стороны, классическая динамика, рассматриваемая как чисто математическая теория, допускает аксиоматическое обоснование, как это сделал Гамель [10] и другие[1]).

Поэтому кажется правильным, что любое систематическое изложение классической динамики должно было бы начинаться с тщательно сформулированных аксиом, на которых все построение этой науки должно покоиться так же, как дом покоится на своем фундаменте.

Эта аналогия с домом является, однако, ложной. Теории создаются, так сказать, высоко в воздухе и развиваются как по направлению вверх, так и вниз. Ни тот, ни другой процесс никогда не завершается. Вверх разветвления могут расширяться во все стороны; вниз — аксиоматический фундамент должен непрерывно перестраиваться по мере того, как изменяются наши взгляды на то, что составляет логическую точность. Действительно, здесь не видно даже обещания конца, так как мы, по-видимому, движемся по направлению к идее, что логика есть вещь, сотворенная человеком, игра, в которую играют по правилам, обладающим весьма большой степенью и широтой произвольности.

Для физика, всесторонне знакомого с классической динамикой в ее обычном понимании, всегда существует элемент искусственности в создании полной аксиоматической базы, так как он знает, что эти аксиомы выбраны так, чтобы подходить теории, которую, как он считает, он уже понимает достаточно ясно, и которая вовсе не изменится в результате введения этой аксиоматики.

---

[1]) Новые работы на эту тему и ссылки на старые работы см. McKinsey J. C. C., Sugar A. C. and Suppes P., Axiomatic foundations of classical particle mechanics. J. Rational Mech. Anal. 2, 253—272 (1953); McKinsey J. C. C. and Suppes P., Transformations of systems of classical particle mechanics. J. Rational Mech. Anal. 2, 273—289 (1953); McKinsey J. C. C. and Suppes P., Phylosophy and the axiomatic foundations of physics. Proc. XI'h Internat. Congr. of Phylosophy, т. VI, стр. 49—54, 1953; Rubin H. and Suppes P., Transformations of systems of relativistic particle mechanics. Pacif. J. Math. 4, 563—601 (1954).

Однако когда этот физик оказывается лицом к лицу с двумя различными теориями и стремится понять, в чем они согласны и в чем расходятся, он вынужден обращаться к аксиоматике для того, чтобы понять это согласие и это расхождение. Можно сказать, что аксиоматика вторгается в жизнь и вызывает интеллектуальное возбуждение за пределами ограниченного круга специалистов по аксиоматике только тогда, когда серьезно обдумывается создание новых теорий путем изменения аксиом — новых теорий, имеющих физическое значение. Поэтому хотя эта книга не содержит такого изложения классической динамики, которое могло бы рассматриваться как аксиоматическое в современном смысле слова, тем не менее отношение между ньютоновой и релятивистской динамикой настолько интересно, что два следующих параграфа посвящены сравнению этих динамик на основе совершенно аксиоматического подхода.

§ 4. Ньютонова и релятивистская динамика частицы. В этом и следующих параграфах, мы, ради краткости, вместо слов «ньютонова динамика» будем писать НД; вместо «релятивистская динамика» — РД.

Слово «событие» употребляется и в НД и в РД. Математически можно представить событие совокупностью четырех чисел (координат) или понятием, эквивалентным этому,— точкой в четырехмерном пространственно-временнóм континууме, который представляет физически все возможные события. Физическое понятие *события* есть явление, происходящее в весьма малой области пространства в течение очень малого промежутка времени.

В дальнейшем в этом параграфе (а также и во всей книге) понятия рассматриваются только как математические понятия. Как объяснено в § 2, соответствующие физические понятия иногда чрезвычайно сложны; мы не можем рассуждать о них с точностью, удовлетворяющей современным требованиям. Для этих физических понятий читатель может составить свой собственный трехстолбцовый словарь (см. § 2); если требуемого понятия не окажется в третьем столбце, его нужно позаимствовать из других источников информации.

В НД событие имеет *абсолютное положение* и *абсолютное время* (t). Совокупность всевозможных положений образует *абсолютное пространство*. Два абсолютных положения определяют *расстояние*, и абсолютное пространство будет евклидовым, если это расстояние определяет метрику. Это означает существование координат x, y, z таких, что элемент длины $d\sigma$ имеет вид

$$d\sigma = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.1}$$

Существует взаимно однозначное соответствие между всеми возможными событиями и множеством четверок чисел x, y, z, t, изменяющихся в пределах $-\infty$, $+\infty$.

В РД (здесь рассматривается только специальная теория относительности) два события определяют *интервал*. Существуют координаты (x, y, z, t), изменяющиеся от $-\infty$ до $+\infty$, так что интервал ds между двумя близкими событиями есть[1])

$$ds = | dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 |^{1/2}. \tag{4.2}$$

Существует взаимно однозначное соответствие между всеми возможными событиями и такими четверками чисел (x, y, z, t).

И в НД и в РД употребляется слово *частица*. *История* частицы это кривая в пространстве — времени (*мировая линия*); она может быть описана уравнениями вида

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{4.3}$$

В НД производные функций в уравнениях (4.3), т. е. компоненты *скорости*, могут принимать любые значения. В РД эти производные ограничены условием

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 < 1, \tag{4.4}$$

так что вдоль мировой линии частицы имеем

$$ds = (dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)^{\frac{1}{2}}; \tag{4.5}$$

---

[1]) Обычно в формуле (4.2) перед dt^2 стоит множитель c^2 (ср. § 107), но мы можем положить $c=1$, изменив единицы, в которых измеряется t.

это — так называемый элемент *собственного времени*. Мы можем использовать собственное время в качестве параметра мировой линии, записав ее уравнения в виде

$$x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad z = z(s), \qquad t = t(s) \tag{4.6}$$

вместо уравнений (4.3). Эти четыре функции удовлетворяют уравнению

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1. \tag{4.7}$$

Как в НД, так и в РД употребляется слово масса (в РД используется термин «масса покоя» или «собственная масса», но здесь мы будем говорить просто «масса»). Это — число m, связанное с частицей [1]; оно может быть постоянным, а может и изменяться вдоль мировой линии частицы.

В НД на частицу *действует сила с компонентами* (X, Y, Z). В этом случае мировая линия удовлетворяет следующим уравнениям движения:

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = X, \quad \frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right) = Y,$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dz}{dt}\right) = Z. \tag{4.8}$$

Если (X, Y, Z) — заданные функции величин

$$m, \ x, \ y, \ z, \ \frac{dx}{dt}, \ \frac{dy}{dt}, \ \frac{dz}{dt}, \tag{4.9}$$

то мы говорим, что частица движется в *заданном поле силы*. В этом случае уравнения движения вместе с уравнением $m = m(t)$ (обычно $m = \text{const}$) определяют единственную мировую линию, соответствующую заданным начальным значениям величин (4.9).

---

[1] В РД собственная масса часто обозначается через m_0, символ m используется для дорелятивистской массы (ср. § 108). Заметим, что в настоящем параграфе m означает собственную массу.

В РД на частицу может действовать 4-сила с компонентами (X, Y, Z, T). Тогда уравнениями движения являются уравнения

$$\frac{d}{ds}\left(m\frac{dx}{ds}\right) = X, \quad \frac{d}{ds}\left(m\frac{dy}{ds}\right) = Y,$$

$$\frac{d}{ds}\left(m\frac{dz}{ds}\right) = Z, \quad \frac{d}{ds}\left(m\frac{dt}{ds}\right) = T. \tag{4.10}$$

Из (4.7) следует, что эти уравнения движения заключают в себе уравнение

$$\frac{dm}{ds} = T\frac{dt}{ds} - X\frac{dx}{ds} - Y\frac{dy}{ds} - Z\frac{dz}{ds}. \tag{4.11}$$

Если (X, Y, Z, T) — заданные функции величин (4.9), мы говорим, что частица движется в *заданном поле* силы. Тогда уравнения (4.10) определяют единственную мировую линию и массу m вдоль нее, соответствующую начальным значениям переменных (4.9).

Пусть теперь $m = \text{const}$ в НД и РД. В НД уравнения движения примут вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z. \tag{4.12}$$

В РД мы имеем согласно уравнению (4.11)

$$T = X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}, \tag{4.13}$$

так что в этом случае произвольно заданными можно считать X, Y, Z, но не T. Последнее из уравнений (4.10) заключено в первых трех и если мы возьмем t в качестве параметра, то уравнения движения могут быть записаны следующим образом:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = P, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Q, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = R, \tag{4.14}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&P = \frac{X}{\gamma^2} - \frac{m}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}\frac{dx}{dt}, \quad Q = \frac{Y}{\gamma^2} - \frac{m}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}\frac{dy}{dt},\\
&R = \frac{Z}{\gamma^2} - \frac{m}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}\frac{dz}{dt}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}},\\
&v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.
\end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

Сравнивая уравнения (4.12) для НД с уравнениями (4.14) для РД, мы замечаем только формальную замену (X, Y, Z) на P, Q, R. Однако здесь имеется существенное различие. Предположим, что (X, Y, Z) не зависят от скорости (dx/dt, dy/dt, dz/dt), как это часто имеет место в НД. В то же время (P, Q, R) зависят от скорости, стремясь к нулю, когда v приближается к единице, т. е. когда γ стремится к ∞. Этот факт и неравенство (4.4) отличают РД от НД, пока речь идет о движении частицы постоянной массы в *заданном* поле силы.

Значительно более важное различие между НД и РД возникает, когда мы рассматриваем не отдельную частицу в заданном поле силы, а *систему частиц*, движущихся под действием сил, которые *обусловлены* только взаимодействием частиц.

§ 5. Ньютонова и релятивистская динамика системы. Рассмотрим проблему на конкретных физических примерах:

(I) солнечная система,

(II) свободное твердое[1]) тело.

---

[1]) Это слово дает хороший пример той путаницы относительно физических понятий (§ 2), которая затрудняет их логическое исследование. В одном случае физик может сказать: «Я установил интерферометр на твердой основе» (подразумевая, возможно, каменную плиту). В другом случае он может сказать: «Не существует твердых тел» (подразумевая при этом, что любое тело деформируется при достаточно большом напряжении). Эти утверждения имеют смысл, когда они берутся отдельно; написанные подряд, они противоречат друг другу и подрывают логическую аргументацию. В математических моделях нельзя, конечно, путать понятия такого вида.

Для солнечной системы ньютонова динамика (НД) устанавливает в качестве математической модели систему P частиц с постоянными массами m_i ($i = 1, 2, \ldots, P$). Для нескольких частиц мы имеем уравнения движения следующего вида:

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = X_i, \quad m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = Y_i,$$

$$m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = Z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, P), \tag{5.1}$$

где силы (X_i, Y_i, Z_i) в соответствии с законом тяготения Ньютона определяются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} X_i &= Gm_i \sum_j \frac{m_j (x_j - x_i)}{r_{ij}^3}, \\ r_{ij}^2 &= (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

и аналогичными выражениями для Y_i и Z_i. Суммирование по j производится от $j = 1$ до $j = P$ при $j \neq i$; G — гравитационная постоянная. Мы имеем, таким образом, в уравнениях (5.1) и (5.2) совокупность уравнений, достаточных для определения (x_i, y_i, z_i) ($i = 1, 2, \ldots, P$) как функций t и значений

$$x_i, \; y_i, \; z_i, \; \frac{dx_i}{dt}, \; \frac{dy_i}{dt}, \; \frac{dz_i}{dt} \qquad (i = 1, 2, \ldots, P) \tag{5.3}$$

при $t = 0$.

В случае свободного твердого тела опять берем систему P частиц и уравнения движения (5.1). Мы присоединяем к ним условия твердости,

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = a_{ij}^2, \tag{5.4}$$

где $a_{ij} = \text{const}$ — постоянные расстояния между частицами. Что касается сил, то они задаются в форме

$$X_i = \sum_j X_{ij}, \quad Y_i = \sum_j Y_{ij}, \quad Z = \sum_j Z_{ij}, \tag{5.5}$$

где

$$X_{ij} = -X_{ji} = A_{ij}(x_j - x_i). \qquad (5.6)$$

Здесь A_{ij} $(= A_{ji})$ неизвестны; исключив их, мы получим в уравнениях (5.1), (5.4), (5.5), (5.6) группу уравнений, достаточных для определения (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, \ldots, P)$ как функций t и начальных значений (5.3). Эти последние нужно выбрать так, чтобы удовлетворялись условия (5.4) и уравнения, полученные дифференцированием (5.4) по t.

Эти математические модели солнечной системы и твердого тела математически ясны и физически удовлетворительны. На их основе были сделаны многочисленные удовлетворительные физические предсказания. Однако мы можем спросить: какова самая общая модель системы частиц с постоянными массами, допускаемая ньютоновой динамикой?

Пытаясь ответить на этот вопрос, ограничимся рассмотрением системы P частиц. Система *замкнута* или *изолирована* в том смысле слова, что все силы вызваны только взаимодействием этих частиц (и нет никаких внешних воздействий). Частицы системы *свободны* в том смысле слова, что не имеется никакой жесткой связи между ними. Мы записываем 3P уравнений движения в виде (5.1), имея в виду, что силы (X_i, Y_i, Z_i) зависят только от мгновенного положения системы. Для простоты предположим, что они зависят только от положений и скоростей частиц, так что силы — функции $6P$ величин

$$x_j,\ y_j,\ z_j,\ \frac{dx_j}{dt},\ \frac{dy_j}{dt},\ \frac{dz_j}{d} \qquad (j = 1, 2, \ldots, P). \qquad (5.7)$$

Спрашивается: какие функции допустимы?

Частично ответ на этот вопрос дает третий закон[1]) Ньютона. Этот закон ограничивает возможные действующие силы, которыми действуют друг на друга две частицы, A и B, требованием, чтобы силы были направлены по прямой AB в противоположных направлениях и имели одну и ту же величину. Это эквивалентно утверждению,

---

[1]) Цит. в сноске к § 26.

что (X_i, Y_i, Z_i) имеют вид, определенный уравнениями (5.5) и (5.6), но это не дает никакой информации о природе коэффициентов A_{ij}, кроме условия их симметрии $A_{ij} = A_{ji}$; они могли бы быть произвольными функциями переменных (5.7). Более полный ответ на этот вопрос дает следующая *аксиома однородности и изотропности пространства*:

совокупность уравнений, определяющая движение системы, имеет одну и ту же форму для всех координатных систем (x, y, z), полученных одна из другой переносом и вращением осей.

Чтобы пояснить это утверждение, заметим, что (4.1) определяет систему прямоугольных декартовых координат только в пределах ортогональных преобразований (ср. § 9). Приведенная выше аксиома требует инвариантности уравнений движения относительно таких ортогональных преобразований, при условии, что это — собственные преобразования (т. е. группа преобразований не включает отражений). Инвариантность относительно переноса начала координат означает *однородность* пространства, а инвариантность относительно вращения — его *изотропность*. Инвариантность по отношению к отражению относительно плоскости (несобственное преобразование) означала бы эквивалентность винтов с правой и левой резьбой.

Чтобы узнать, каков самый общий тип системы сил, удовлетворяющей приведенной аксиоме, заметим, что рассматриваемое преобразование точно соответствует перемещению твердого тела. *Таким образом, аксиома выполняется, если система сил «жестко связана» с мгновенной конфигурацией частиц.* Чтобы увидеть, что это означает, рассмотрим систему четырех частиц, например, на рис. 1.

Пусть A, B, C, D — положения частиц в момент времени t, а скорости их — четыре вектора, обозначенные через v. Мы должны определить четыре вектора, обозначенные через F, т. е. силы, действующие на частицы. Аксиома требует, чтобы эти силы можно было определить, зная тетраэдр $ABCD$ и четыре вектора v, жестко связанные с этим тетраэдром. При этом зависимость должна быть такой, что если эти определяющие элементы все вместе жестко перемещаются в пространстве, то силы F также жестко переносятся вместе с ними. Идея предельно проста; понятия элементарной евклидовой геометрии заменяют формальные уравнения. Если мы отказываемся от третьего закона Ньютона, но принимаем аксиому однородности и изотропности, то допускаем любую

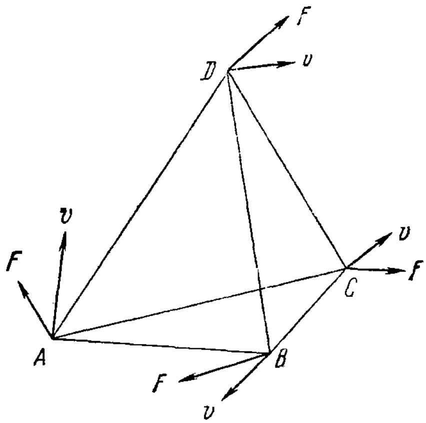


Рис. 1. Взаимодействие в ньютоновой динамике.

систему сил, построенную таким образом. Если потребовать также инвариантность по отношению к отражениям, то при отражении определяющих элементов относительно плоскости силы должны отражаться относительно этой же плоскости.

Третий закон Ньютона совместим с аксиомой однородности и изотропности, но он ограничивает силы взаимодействия между частицами: они должны быть направлены по линиям, соединяющим частицы и, таким образом, закон не позволяет охватить электродинамические взаимодействия, кроме простого притяжения и отталкивания Кулона. Однако электродинамические взаимодействия можно истолковать релятивистски; в систематическом развитии ньютоновой динамики мы примем третий закон Ньютона, так как иначе мы не смогли бы доказать основные теоремы об импульсе и моменте импульса (§ 44).

Переходим теперь к релятивистской динамике (РД) системы. Требование, чтобы интервал между близкими событиями имел форму (4.2), ограничивает класс допустимых систем координат (x, y, z, t) теми системами, которые получаются из данной преобразованием Лоренца (§ 106). Как в НД мы требовали выполнения аксиомы однородности и изотропности пространства, так в РД формулируем аналогичную аксиому для пространства — времени.

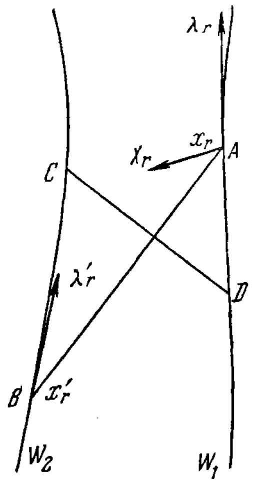


Рис. 2. Взаимодействие в релятивистской динамике.

Для замкнутой или изолированной системы частиц *аксиома однородности и изотропности пространства—времени* имеет следующую формулировку: *уравнения, определяющие движение системы, должны быть инвариантны относительно собственного преобразования Лоренца*[1]).

Преобразование Лоренца можно рассматривать как перенос и вращение в пространстве — времени, как преобразование твердого тела, «твердость» которого понимается в смысле интервала (4.2). Отсюда, точно так же как возможные ньютоновы системы сил можно рассматривать с помощью жесткой конструкции в пространстве, так и возможные системы релятивистских сил можно обсуждать в смысле аналогичной жесткой конструкции в пространстве — времени. Однако на этом и кончается аналогия между НД и РД. В НД мы имеем в какое-нибудь (абсолютное) время t конфигурацию частиц с приложенными к ним векторами скорости (например, система рис. 1). В РД мы имеем только множество мировых линий и нет очевидного пути для установления единственного соответствия между событиями на нескольких мировых линиях. Для того чтобы установить

[1]) Преобразование Лоренца это — линейное преобразование с детерминантом $+1$ или -1. В первом случае это — *собственное* преобразование, во втором — *несобственное*. (Ср. § 106).

соответствие между несколькими событиями и одним и тем же значением t, не существует никакого лоренц-инвариантного метода.

Наиболее естественный путь установить соотношение между событиями на мировых линиях — выделить нулевую линию. Рассмотрим систему, состоящую из двух частиц с постоянными собственными массами m_1, m_2. Пусть W_1, W_2 — их мировые линии (рис. 2). При рассмотрении вопроса удобно использовать координаты Минковского x_r (индексы малых латинских букв принимают значения 1, 2, 3, 4 и предполагается, что по повторяющимся индексам ведется суммирование). Полагаем

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3, \quad it = x_4, \tag{5.8}$$

где $i = \sqrt{-1}$. Пусть A с координатами x_r — событие на мировой линии W_1. Проведем из A как из вершины нулевой конус[1]) в прошлое, пусть он пересечет линию W_2 в точке B с координатами x_r', тогда BA — нулевая линия, и мы имеем

$$(x_r - x_r')\,(x_r - x_r') = 0. \tag{5.9}$$

Пусть (см. рис. 2)

$$\lambda_r = \frac{dx_r}{ds} \text{ в точке } A, \qquad \lambda_r' = \frac{dx_r'}{ds'} \text{ в точке } B, \tag{5.10}$$

где ds, ds' — элементы собственного времени соответственно на W_1, W_2.

Две мировые линии и события A, B на них доставляют нам следующие векторы:

$$x_r - x_r', \ \lambda_r, \ \lambda_r', \ \frac{d\lambda_r}{ds}, \ \frac{d\lambda_r'}{ds'}, \ldots \tag{5.11}$$

Уравнения вида

$$\frac{d^2x_r}{ds^2} = X_r \tag{5.12}$$

---

1) Ср. § 107.

для мировые линии W_1, вместе с аналогичными уравнениями для W_2, представляют удобную формулировку проблемы двух тел в РД, при условии, что X_r — вектор, построенный из векторов (5.11) и из инвариантов, образованных из них. Легко видеть, что это требование выполнено для

$$X_r = \alpha\,(x_r - x_r') + \beta\lambda_r + \gamma\lambda_r' + \delta\,\frac{d\lambda_r}{ds} + \varepsilon\,\frac{d\lambda_r'}{ds'}, \tag{5.13}$$

где коэффициенты — заданные функции инвариантов

$$\left.\begin{aligned} &w = (x_n - x_n')\,\lambda_n, \quad w' = (x_n' - x_n)\,\lambda_n', \quad \lambda_n\lambda_n', \\ &W = (x_n - x_n')\,\frac{d\lambda_n}{ds}, \quad W' = (x_n' - x_n)\,\frac{d\lambda_n'}{ds'}, \\ &\lambda_n\,\frac{d\lambda_n'}{ds'}, \quad \lambda_n'\,\frac{d\lambda_n}{ds}, \quad \frac{d\lambda_n}{ds}\,\frac{d\lambda_n'}{ds'}. \end{aligned}\right\} \tag{5.14}$$

Записывая уравнения для W_2, мы используем события C, D (см. рис. 2) вместо событий A, B и вносим соответствующие изменения в уравнения.

Сохранение массы m_1 обеспечено условием

$$X_r\lambda_r = 0 \tag{5.15}$$

или

$$\alpha w - \beta + \gamma\lambda_r\lambda_r' + \varepsilon\lambda_r\,\frac{d\lambda_r'}{ds'} = 0 \tag{5.16}$$

(ср. с (4.11)); сохранение массы m_2 гарантировано аналогичным условием.

Хотя уравнения вида (5.12) удовлетворяют условию лоренц-ковариантности, они представляют проблему значительно более сложную, чем та, с которой мы встречаемся в НД. Эти уравнения появляются как дифференциальные уравнения, но так как они включают два события A и B, то по своей природе это — разностные уравнения вследствие эффекта «запаздывания» имеющего место для события B. Общепринятыми уравнениями движения для двух частиц, несущих электрические заряды e_1, e_2, являются уравнения вида (5.12); коэффициенты в уравнении (5.13) даны выражениями[1])

$$\left.\begin{aligned} 4\pi c^2\alpha &= \frac{e_1e_2}{w'^2}\left(\frac{W'-1}{w'}\lambda_n\lambda_n' - \lambda_n\frac{d\lambda_n'}{ds'}\right), \\ 4\pi c^2\gamma &= -\frac{e_1e_2w}{w'^2}\frac{W'-1}{w'}, \\ 4\pi c^2\varepsilon &= \frac{e_1e_2w}{w'^2}; \end{aligned}\right\} \quad (5.17)$$

другие коэффициенты равны нулю.

Подведем итоги. Для одной частицы в заданном поле силы, как в ньютоновой, так и в релятивистской динамике, необходимо решить систему из трех дифференциальных уравнений. Но для системы взаимодействующих частиц дифференциальные уравнения ньютоновой механики заменяются в теории относительности дифференциально-разностными уравнениями; эти уравнения представляют столь значительные математические трудности, что только некоторые предельные случаи могут быть разрешены приближенными методами[2]).

---

[1]) Заряды измерены в рациональных единицах Хевисайда; чтобы перевести их в гауссовы электростатические единицы, надо зачеркнуть множитель 4π. Множитель c — скорость света. Вывод этих формул см. В. Паули, Теория относительности, пер. с нем., Москва, 1947. Ср. также J. L. Synge, Relativity, The Special Theory, стр. 394, 423, Amsterdam, North-Holland, 1956.

[2]) Ср. Darwin C. G., Phil. Mag. (6) 39, 537 (1920); Synge J. L., Proc. Roy. Soc., Lond., Ser. A177, 118 (1940).

Б. КИНЕМАТИКА

ГЛАВА I

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

§ 6. Перемещения, параллельные плоскости. Положение твердого тела вполне определяется положением какой-нибудь плоскости его сечения, и то же верно относительно перемещений твердого тела, которые параллельны фиксированной плоскости; их можно исследовать, рассматривая перемещения пластинки в своей плоскости.

Такое перемещение можно описать, указав, что две точки пластинки, занимавшие первоначально положения A и B, переместились в положения A' и B'.

Это перемещение можно разбить на два последовательных: I) поступательное перемещение точки из A в точку A' и II) вращение вокруг A'.

Можно также начать с вращения, а затем произвести поступательное перемещение.

Чтобы описать перемещения в плоскости, удобно использовать комплексные числа ($z = x + iy$). Перенос, представленный комплексным числом t, равносилен преобразованию $z' = z + t$. Вращение на угол ϑ вокруг точки c означает преобразование

$$z' - c = (z - c)\, e^{i\vartheta}.$$

Если принять T и R за символы операций переноса и вращения, а комбинированные операции обозначить через RT и TR (читать справа налево), то мы имеем для двух последовательностей операций следующие преобразования:

$$\left.\begin{aligned} RT: &\quad z' = c + (z + t - c)\, e^{i\vartheta}, \\ TR: &\quad z' = t + c + (z - c)\, e^{i\vartheta}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.1)$$

Вообще говоря, это — различные преобразования ($RT \neq TR$) и это, возможно, простейший пример *некоммутативных* операций в механике. Равенство $RT = TR$ имеет место только в тех исключительных случаях, когда $t = 0$ или $\vartheta = 0$.

Рассмотрим первое из преобразований (6.1). Чтобы найти неподвижную точку для перемещения RT, мы должны положить $z' = z$; это дает уравнение для z:

$$z\,(1 - e^{i\vartheta}) = c + t\,(t - c)\, e^{i\vartheta}. \qquad (6.2)$$

Если $\vartheta = 0$ (или кратно 2π,) то уравнение имеет единственное решение. Отсюда *при каждом жестком плоском перемещении (исключая чистое поступательное перемещение) имеется одна-единственная неподвижная точка.* Утверждение, эквивалентное этому, может быть высказано так: любое жесткое плоское перемещение (исключая поступательное) можно представить как вращение вокруг соответствующим образом выбранного центра.

Этот центр может быть найден (а приведенная теорема доказана) простым построением. Пусть перемещение переводит точку A в B и точку B в C. Тогда, если только перемещение не есть чистое поступательное перемещение, перпендикуляры, проведенные через середины отрезков AB и BC, пересекаются в некоторой точке D; D есть искомый центр.

Результат двух плоских перемещений (D_2D_1) есть поэтому результат двух вращений (R_2R_1), следовательно, это тоже вращение (R_3) и можно написать

$$R_3 = R_2R_1. \qquad (6.3)$$

Два вращения вокруг различных центров некоммутативны ($R_2R_1 \neq R_1R_2$). Легко привести пример, который иллюстрирует это положение. Пусть A_1, A_2— два центра ϑ_1, ϑ_2— углы вращения. Тогда углы вращения R_1R_2 и R_2R_1 равны, а именно, $2\varphi = \vartheta_1 + \vartheta_2$, а их центрами являются точки C_{12} и C_{21} (рис. 3); эти центры являются взаимными отражениями друг друга относительно прямой A_1A_2.

Тонкая пластинка, движущаяся в плоскости (или твердое тело, движущееся параллельно плоскости), имеет три степени свободы, так как положение пластинки определено, когда мы знаем две координаты какой-нибудь

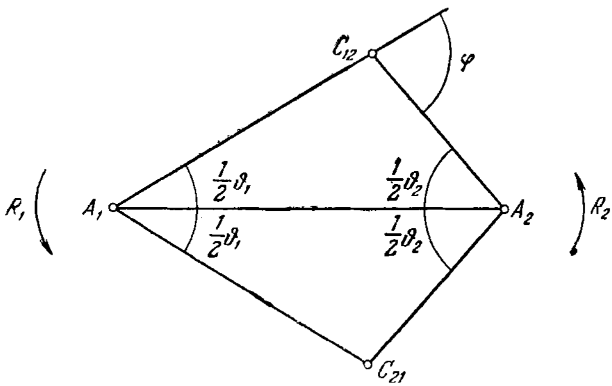


Рис. 3. Результирующая двух вращений в плоскости. C_{12} — центр вращения R_1R_2, а C_{21} — центр вращения R_2R_1.

ее точки и угол, образуемый какой-нибудь прямой на ней с фиксированным направлением. Для такого движения пространство конфигураций трехмерно (§ 62). Оно того же типа связности, что и бесконечный цилиндр; это означает, что имеется один, нестягиваемый в точку, контур, соответствующий полному повороту пластинки (§ 63); это пространство — плоское по отношению к кинематическому линейному элементу (§ 84).

§ 7. Теорема Эйлера. Рассмотрим твердое тело с неподвижной точкой O. Проведем сферическую поверхность S единичного радиуса с центром в точке O. Положение тела вполне определяется положениями тех точек его, которые лежат на поверхности S, и любое перемещение тела, которое оставляет неподвижной точку O, есть жесткое преобразование S в себя.

Теорема Эйлера: *Произвольное жесткое перемещение сферической поверхности в себя оставляет неподвижными две точки этой поверхности, лежащие на одном диаметре.*

Эту теорему можно доказать (и найти неподвижные точки) построением, приведенным после уравнения (6.2); нужно только перпендикуляры к серединам отрезков в плоскости заменить окружностями больших кругов на сфере. Исключительный случай (чистый перенос на плоскости) не может возникнуть, так как две окружности больших кругов обязательно пересекаются[1]).

Теорему Эйлера можно выразить, сказав, что любое вращение вокруг неподвижной точки равносильно вращению вокруг некоторой прямой, проходящей через эту точку. Это свойство (неподвижная точка подразумевает неподвижную прямую) обусловлено *нечетностью* размерности пространства.

Как и в случае плоскости (см. рис. 3), можно рассматривать сложение двух вращений вокруг точки; при этом прямые на плоскости нужно заменить окружностями больших кругов на сфере. Теперь точки A_1 и A_2 — точки, в которых сфера пересекается с двумя осями вращений; точка A_1 лежит на одной оси, точка A_2 — на другой. Существенное различие состоит только в том, что хотя угол результирующего вращения по-прежнему равен 2φ (φ — соответствующий угол рис. 3), мы имеем теперь

$$2\varphi = \vartheta_1 + \vartheta_2 - 2E, \qquad (7.1)$$

где E — сферический избыток треугольника $A_1A_2C_{12}$.

Ясно, что два вращения вокруг двух точек некоммутативны ($R_2R_1 \neq R_1R_2$), если только это не вращения вокруг общей прямой[2]).

Вращение полностью определяется тремя параметрами, а именно, углом вращения и двумя направляющими косинусами оси вращения. Следовательно, твердое тело, имеющее неподвижную точку, обладает тремя сте-

---

[1]) Доказательство теоремы Эйлера, основанное на том факте, что действительная ортогональная матрица имеет одно собственное значение равное ± 1, см. Голдстейн, [7], стр. 134—140.

[2]) Многочисленные интересные специальные выводы о конечных вращениях и более полное изложение этого вопроса см. Ламб [14], гл. 1.

пенями свободы, т. е. тем же числом, что и пластинка, движущаяся в плоскости. Однако несмотря на аналогию между этими двумя системами, между ними имеется и большое алгебраическое различие. В плоском случае мы очень просто можем использовать комплексные числа, как это было сделано в случае уравнения (6.1), но чтобы рассмотреть вопрос о конечных вращениях вокруг точки, требуются значительно более сложные методы, как мы это увидим из следующих параграфов. Пространство конфигураций (§ 62) в обоих случаях трехмерно и имеет одинаковую связность (оно имеет один нестягиваемый в точку контур, § 63). Однако пространство конфигураций пластинки — плоское по отношению к кинематическому линейному элементу (§ 84), а пространство конфигураций для тела, имеющего неподвижную точку, искривленное.

§ 8. Общие перемещения твердого тела. Пусть D обозначает перемещение твердого тела. Предположим, что D переводит некоторую точку тела из положения A в положение A'. Тогда D может быть составлено из двух перемещений: (I) поступательное по AA' и (II) вращение вокруг точки A'. Это — стандартный путь описания общего перемещения. Точку тела A называют *полюсом* или *опорной точкой*[1]).

Множество ортогональных триэдров, оси которых параллельны между собой, остается таким же и после применения преобразования D. Отсюда ясно, что вращение (т. е. направление его оси и угол вращения) не зависит от выбора полюса. Однако от выбора ее зависит поступательное перемещение.

Т е о р е м а Ш а л я. *Произвольное перемещение твердого тела в пространстве эквивалентно винтовому движению.*

Винтовое движение определяется как результирующая вращения и поступательного перемещения тела в направлении, параллельном оси вращения. Легко видеть, что для винтового движения перенос и вращение коммута-

---

[1]) Base-point — мы пользуемся распространенным (хотя и не общепринятым) в нашей литературе термином: полюс. Наименование — опорная точка — имеет свои преимущества. (*Прим. перев.*)

тивны. Для того чтобы доказать теорему Шаля, выберем какую-нибудь опорную точку и разобьем поступательное перемещение на два: одно (назовем его T_1) — параллельное оси вращения и другое (назовем его T_2) — перпендикулярное этой оси. Затем, так как перенос T_2 и вращение представляют собой плоские перемещения в общей плоскости, то их можно объединить в одно-единственное вращение с новой осью, параллельной прежней оси (ср. § 6). Взятые вместе, это вращение и T_1 образуют винтовое движение, что и доказывает теорему Шаля.

Общее перемещение твердого тела может быть получено двумя полуоборотами. Полуоборот — это вращение вокруг прямой на два прямых угла. Оси двух полуоборотов пересекают перпендикулярно ось эквивалентного винтового движения; они удалены от этой оси на расстояние в полшага винтового движения, а угол между ними равен половине угла вращения винтового движения[1]).

Свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы: три — поступательного перемещения и три — вращательного движения. Его шестимерное пространство конфигураций имеет один нестягиваемый в точку контур и оно искривлено по отношению к кинематическому линейному элементу (§ 84).

Мы уже отметили аналогию между плоским перемещением (перенос + вращение) и перемещением трехмерного твердого тела, имеющего неподвижную точку (вращение). Подобная аналогия существует между общим перемещением твердого тела (перенос + вращение) и перемещением четырехмерного твердого тела, имеющего неподвижную точку (вращение). Мы не встречаем четырехмерных твердых тел в ньютоновской физике, но в специальной теории относительности преобразования Лоренца с неподвижным началом координат (для этого нужно положить $B_r = 0$ в преобразовании (107.5)) можно рассматривать как четырехмерное вращение, если, конечно, при этом принять во внимание особенности метрики пространства — времени.

---

[1]) Дополнительные детали и другие свойства конечных перемещений см. Ламб [14], гл. 1.

§ 9. Ортогональные матрицы. Для матриц будут употребляться следующие обозначения:

$\widetilde{M}$ — транспозиция матрицы M (транспонированная матрица),

M^+ — комплексная сопряженная матрицы M,

1 — единичная матрица,

M — ортогональная матрица, если $M \cdot \widetilde{M} = 1$ (или, что то же, $M^{-1} = \widetilde{M}$), и собственная или несобственная, в зависимости от того, чему равен $\det M$: $+1$ или -1,

M — унитарная матрица, если $MM^+ = 1$ (или, что то же, $M^{-1} = M^+$),

M — симметричная матрица, если $\widetilde{M} = M$,

M — эрмитова матрица, если $M^+ = M$,

r — одностолбцовая матрица (x, y, z).

Пусть (I, J, K) — ортогональный триэдр единичных векторов с началом в точке O (ортонормальный триэдр). Пусть твердое тело имеет заданное вращение вокруг O. И пусть в результате вращения (I, J, K), которые мы считаем неподвижными относительно тела, переводятся в ортонормальный триэдр (i, j, k). Тогда существует матрица скалярных произведений (или соответствующих направляющих косинусов):

$$M = \begin{pmatrix} I\cdot i & I\cdot j & I\cdot k \\ J\cdot i & J\cdot j & J\cdot k \\ K\cdot i & K\cdot j & K\cdot k \end{pmatrix}. \tag{9.1}$$

Используя ортогональные проекции и вводя одностолбцовые матрицы векторов

$$T = \begin{pmatrix} I \\ J \\ K \end{pmatrix}, \qquad t = \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}, \tag{9.2}$$

можно выразить связь между двумя этими триэдрами в следующих формулах:

$$t = \widetilde{M}T, \qquad T = Mt. \tag{9.3}$$

Пусть орт i имеет направляющие косинусы (l_1, m_1, n_1) в системе (I, J, K). Аналогичные обозначения введем и для ортов $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$. Тогда матрицы $\boldsymbol{M}$ и $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ имеют следующий вид:

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\boldsymbol{M}}=\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix}. \tag{9.4}$$

Из ортонормальности триэдров имеем шесть условий, первые два из которых таковы:

$$l_1^2+l_2^2+l_3^2=1, \quad l_1m_1+l_2m_2+{}_3m_3=0. \tag{9.5}$$

Из них следует, что $\boldsymbol{M}$ — ортогональная матрица, так как

$$\boldsymbol{M}\widetilde{\boldsymbol{M}}=1=\widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{M}. \tag{9.6}$$

Отсюда $\det \boldsymbol{M}=\pm 1$. Если триэдр неподвижен, то $\boldsymbol{M}=1$, $\det \boldsymbol{M}=1$; поэтому, вследствие непрерывности, $\boldsymbol{M}$ — собственная матрица всех вращений. Несобственная ортогональная матрица соответствует вращению с отражением относительно начала координат. Мы ограничимся исследованием случая вращения, хотя некоторые из формул приложимы и к несобственным ортогональным преобразованиям.

До сих пор мы избегали употребления координат. Пусть теперь $OXYZ$ — оси, неподвижные в пространстве, и пусть $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K})$ совпадают с этими осями, так что $\boldsymbol{I}=(1, 0, 0)$, $\boldsymbol{J}=(0, 1, 0)$, $\boldsymbol{K}=(0, 0, 1)$. Рассмотрим какую-нибудь точку тела. Пусть (x, y, z) — ее координаты до вращения, (x', y', z') — после вращения. Тогда начальный и конечный радиусы-векторы точки равны соответственно

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r}&=x\boldsymbol{I}+y\boldsymbol{J}+z\boldsymbol{K}, \\ \boldsymbol{r}'&=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}, \end{aligned}\right\} \tag{9.7}$$

так что

$$x'=\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{I}=l_1x+l_2y+l_3z \quad \text{и т. д.} \tag{9.8}$$

и преобразование координат можно выразить в матричной форме следующим образом:

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{M}\boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{r}=\widetilde{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{r}'; \tag{9.9}$$

вторая формула следует из первой на основании (9.6). Отметим наиболее важный факт — линейность этого преобразования. Отметим, кроме того, сравнивая формулы (9.3) и (9.9), формальную взаимную перестановочность M и $\widetilde{M}$.

Для данного вращения матрица M зависит от выбора векторов (I, J, K) или, что то же, от выбора осей $OXYZ$. Направляя вектор K вдоль оси вращения, можно упростить матрицу M и привести ее к виду

$$M = \begin{pmatrix} \cos\chi & -\sin\chi & 0 \\ \sin\chi & \cos\chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9.10}$$

где χ — угол вращения.

Рассматривая несколько последовательных вращений, мы, как правило, для каждого нового вращения выбираем новую неподвижную систему координат $OXYZ$. Мы можем последовать схеме

$$T \underset{M_1}{\longrightarrow} T_1 \underset{M_2}{\longrightarrow} T_2 \underset{M_3}{\longrightarrow} \ldots \underset{M_{n-1}}{\longrightarrow} T_{n-1} \underset{M_n}{\longrightarrow} t, \tag{9.11}$$

на которой показаны матрицы вида (9.1) или (9.4), соответствующие каждому переходу от одного триэдра к другому. Результирующее вращение будет представлено тогда формулой, аналогичной (9.3),

$$t = \widetilde{M}T, \quad \widetilde{M} = \widetilde{M}_n\widetilde{M}_{n-1} \ldots \widetilde{M}_1. \tag{9.12}$$

Чтобы получить соответствующее преобразование координат, используя неподвижные оси, совпадающие с T, мы должны, как и в случае перехода от (9.3) к (9.9), заменить M транспонированной матрицей; тогда получим

$$r' = Mr, \quad M = M_1M_2 \ldots M_n. \tag{9.13}$$

Заметим, что матрицы написаны здесь в порядке возрастания номера, но на самом деле операции выполняются в обратном порядке.

Разница между преобразованиями (9.12) и (9.13) (перемена местами M и $\widetilde{M}$) может быть источником незначительной путаницы. Существует еще *третья* точка зрения на вращение. Мы можем считать точку *неподвижной в пространстве* и рассматривать ее координаты (x, y, z) в старом триэдре T, а координаты (x', y', z') — в новом триэдре t. Тогда преобразование имеет вид

$$r' = Mr, \tag{9.14}$$

что аналогично представлению (9.12).

Чтобы пояснить сказанное, подведем итог: собственную ортогональную 3×3 матрицу M можно представить следующими четырьмя согласующимися между собой способами:

(I) Таблица скалярных произведений (9.1) старой и новой системы векторов (I, J, K) и (i, j, k).

(II) Вращение ортонормального триэдра, $T \to t$ с $t = \tilde{M}T$.

(III) Преобразование координат, при котором оси остаются неподвижными в пространстве, а точка перемещается вместе с телом,

$$r \to r' \quad \text{с} \quad r' = Mr.$$

(IV) Преобразование координат, при котором одна точка пространства остается неподвижной, а оси перемещаются вместе с телом, $r \to r'$ с $r' = \tilde{M}r$.

§ 10. Вращение, представленное с помощью его оси и угла (параметры Эйлера). Упорядоченный ортогональный триэдр (I, J, K) может иметь две ориентации — правую или левую. В некоторой точке земной поверхности мы получим правый триэдр, если выберем вектор I горизонтальным и направленным на восток, J — горизонтальным и направленным на север и K — направленным вверх.

В этом параграфе (если только не оговорено противное) все триэдры векторов, включая и системы координат, будут правыми, как это и принято обычно.

Положительное направление вращения вокруг оси K — это направление вращения на 90°, в результате которого вектор I совмещается с вектором J.

Какое-нибудь вращение вокруг оси, совпадающей по направлению с единичным вектором U, можно описать символом $[U, \chi]$, где χ — угол вращения, положительный в указанном выше смысле. Однако соответствие между вращениями и такими представлениями многозначно.

Если R обозначает вращение вокруг U, мы можем написать в символической форме:

$$R = [U,\ \chi + 2n\pi] = [-U,\ -\chi + 2n\pi], \qquad (10.1)$$

где n — произвольное целое число.

Мы уменьшим многозначность такого соответствия, введя вектор V и скаляр ϱ следующим образом:

$$V = U \sin \frac{1}{2}\chi, \quad \varrho = \cos \frac{1}{2}\chi. \qquad (10.2)$$

Пусть компоненты вектора V по каким-нибудь осям равны (λ, μ, ν). Тогда из (10.2) следует уравнение

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \varrho^2 = 1. \qquad (10.3)$$

Легко видеть, что любая совокупность значений (λ, μ, ν), удовлетворяющая условию (10.3), определяет единственное вращение, но что данному вращению соответствуют две системы значений этих величин. Итак, мы можем написать в символической форме:

$$R = \{\lambda, \mu, \nu, \varrho\} = \{-\lambda, -\mu, -\nu, -\varrho\}. \qquad (10.4)$$

Величины $(\lambda, \mu, \nu, \varrho)$ называются параметрами Эйлера[1]). Они удобны для описания конфигураций твердого тела, имеющего неподвижную точку. Итак, можно перейти от какой-нибудь данной начальной конфигурации C_0 к конечной конфигурации C с помощью некоторого определенного вращения R; R определяется параметрами $(\lambda, \mu, \nu, \varrho)$. Будем считать $(\lambda, \mu, \nu, \varrho)$ прямоугольными декартовыми координатами точки в четырехмерном евклидовом пространстве. Тогда, принимая во внимание уравнение (10.3) и запись (10.4), мы можем высказать следующие утверждения:

(I) Точка на гиперсфере (10.3) определяет конечную конфигурацию тела.

---

[1]) Мы следуем в обозначениях Мурнагану (Murnaghan F. D., The Theorie of Group Representations, стр. 328, Baltimore, Johns Hopkins Press, 1938). Уиттекер [28], стр. 17—20 использует обозначения (ξ, η, ζ, χ).

(II) Конечная конфигурация тела определяет пару диаметрально противоположных точек на гиперсфере (10.3).

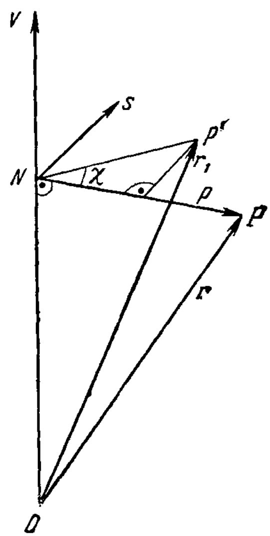


Рис. 4. Ось V и угол вращения χ.

(III) Существует непрерывное взаимное однозначное соответствие между конечными конфигурациями тела и прямыми линиями пространства четырех измерений, проходящими через начало координат.

Так как (λ, μ, ν, ϱ) определяют вращение вокруг неподвижной точки, то матрицу M из § 9 можно выразить через них. Это делается следующим образом:

Пусть $P(\boldsymbol{r})$ и $P'(\boldsymbol{r}')$ (рис. 4) — начальное и конечное положения точки тела, подвергнутого вращению (10.2). Пусть N — общее основание перпендикуляров, опущенных из точек P и P' на V; пусть, кроме того, $\overrightarrow{NP}=\boldsymbol{p}$, и пусть $\boldsymbol{s}$ — единичный вектор, такой, что ($\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{s}$, V) образуют правый ортогональный триэдр векторов. Тогда

$$\boldsymbol{r}'=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP'}=\overrightarrow{ON}+\boldsymbol{p}\cos\chi+\boldsymbol{s}p\sin\chi. \qquad (10.5)$$

Но, с другой стороны,

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{r}-\overrightarrow{ON}, \qquad \boldsymbol{s}=\frac{V\times\boldsymbol{p}}{Vp}=\frac{V\times\boldsymbol{r}}{Vp}$$

и, значит, согласно (10.2)

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}\cos\chi+\overrightarrow{ON}(1-\cos\chi)+\frac{\sin\chi\,(V\times\boldsymbol{r})}{V}=$$

$$=\boldsymbol{r}(\varrho^2-V^2)+2V^2\overrightarrow{ON}+2\varrho\,(V\times\boldsymbol{r}). \qquad (10.6)$$

Кроме того,

$$V^2\overrightarrow{ON}=V\,(V\cdot\boldsymbol{r}), \qquad (10.7)$$

и, следовательно, преобразование $r \to r'$ имеет вид

$$r' = r(\varrho^2 - V^2) + 2V(V \cdot r) + 2\varrho(V \times r), \tag{10.8}$$

а в матричной форме $r' = Mr$, где

$$M = \begin{pmatrix} \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + \varrho^2 & 2(\lambda\mu - \nu\varrho) & 2(\nu\lambda + \mu\varrho) \\ 2(\lambda\mu + \nu\varrho) & \mu^2 - \nu^2 - \lambda^2 + \varrho^2 & 2(\mu\nu - \lambda\varrho) \\ 2(\nu\lambda - \mu\varrho) & 2(\mu\nu + \lambda\varrho) & \nu^2 - \lambda^2 - \mu^2 + \varrho^2 \end{pmatrix}, \tag{10.9}$$

λ, μ, ν — компоненты вектора V, так что имеют место условия

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \sin^2 \frac{1}{2}\chi, \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \varrho^2 = 1. \tag{10.10}$$

Заметим, что M не изменяется, если $(\lambda, \mu, \nu, \varrho)$ заменить на $(-\lambda, -\mu, -\nu, -\varrho)$, как конечно, и должно быть.

§ 11. Углы Эйлера[1]**.** Пусть вращение вокруг точки O переводит ортонормальный триэдр (I, J, K) в (i, j, k).

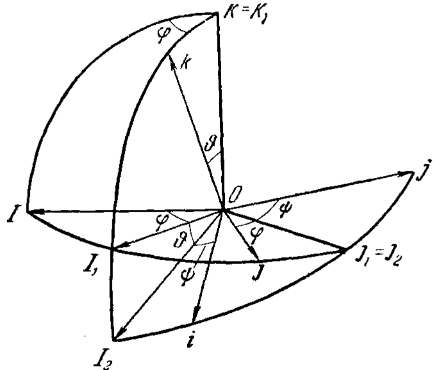


Рис. 5. Углы Эйлера ϑ, φ, ψ.

Разобьем это вращение на три (рис. 5). Во-первых,

[1]) Здесь мы принимаем обозначения Уиттекера [28], стр. 18; они имеют то преимущество, что ϑ, φ— обычные полярные углы вектора k. Другие обозначения см. Tietz H., Handbuch der Physik, 1960, т. II, стр. 135; Аппель [2], II, гл. XX, (он меняет местами φ и ψ); Голдстейн [7], стр. 123—124 (он обсуждает преимущества тех или иных обозначений).

вращение вокруг K такое, чтобы в новом положении плоскость (I, K) содержала вектор k. Предположим, что это вращение на угол φ; оно дает преобразование

$$(I, J, K) \to (I_1, J_1, K_1) \begin{cases} I_1 = I\cos\varphi + J\sin\varphi, \\ J_1 = -I\sin\varphi + J\cos\varphi, \\ K_1 = K. \end{cases} \tag{11.1}$$

Во-вторых, вращение вокруг J_1 такое, чтобы совместить вектор K_1 с вектором k; пусть это будет вращение на угол ϑ; оно дает преобразование:

$$(I_1, J_1, K_1) \to (I_2, J_2, k) \begin{cases} I_2 = I\cos\vartheta - K_1\sin\vartheta, \\ J_2 = J_1, \\ k = I_1\sin\vartheta + K_1\cos\vartheta. \end{cases} \tag{11.2}$$

Наконец, вращение вокруг k такое, чтобы совместить вектор I_2 с вектором i, а вектор J_2 с j; пусть это будет вращение на угол ψ; это вращение дает преобразование

$$(I_2, J_2, k) \to (i, j, k) \begin{cases} i = I_2\cos\psi + J_2\sin\psi, \\ j = -I_2\sin\psi + J_2\cos\psi, \\ k = k. \end{cases} \tag{11.3}$$

Углы $(\vartheta, \varphi, \psi)$ называют углами Эйлера. Их значения определяют положение триэдра векторов (i, j, k) относительно системы (I, J, K). Они могут иметь произвольные значения, но все положения (i, j, k) определяются следующими пределами изменения этих углов:

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \\ 0 \leqslant \psi < 2\pi. \end{aligned}\right\} \tag{11.4}$$

С помощью приведенных преобразований можно выразить (i, j, k) как линейные функции (I, J, K) и отсюда получить матрицу скалярных произведений M вида (9.1) или матрицу направляющих косинусов вида (9.4). Эта матрица M компактно показана в следующей таблице, в которой для краткости обозначено: $c = \cos$, $s = \sin$, а индексы 1, 2, 3 относятся соответственно к ϑ, φ, ψ:

	i	j	k
I	$c_1c_2c_3 - s_2s_3$	$-c_1c_2s_3 - s_2c_3$	s_1c_2
J	$c_1s_2c_3 + c_2s_3$	$-c_1s_2s_3 + c_2c_3$	s_1s_2
K	$-s_1c_3$	s_1s_3	c_1

(11.5)

Мы имеем здесь иллюстрацию сложения вращений согласно формуле (9.13), ибо, транспонируя элементы в (11.1)—(11.3), можно получить матрицы M_1, M_2, M_3 и непосредственно убедиться, что матрица M (11.5) представима в виде

$$M = M_1M_2M_3 =$$
$$= \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_1 & 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (11.6)$$

Сравнивая матрицу (11.5) с матрицей (10.9), легко получить параметры Эйлера, выраженные через углы Эйлера,

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \varepsilon \sin\frac{1}{2}\vartheta \sin\frac{1}{2}(\psi - \varphi), \\ \mu &= \varepsilon \sin\frac{1}{2}\vartheta \cos\frac{1}{2}(\psi - \varphi), \\ \nu &= \varepsilon \cos\frac{1}{2}\vartheta \sin\frac{1}{2}(\psi + \varphi), \\ \varrho &= \varepsilon \cos\frac{1}{2}\vartheta \cos\frac{1}{2}(\psi + \varphi), \end{aligned}\right\} \qquad (11.7)$$

где $\varepsilon = \pm 1$. Для определенности мы можем взять $\varepsilon = 1$, определив тогда $(\lambda, \mu, \nu, \varrho)$ через $(\vartheta, \psi, \varphi)$ единственным образом.

§ 12. Кватернионы. Кватернион q имеет форму

$$q = ai + bj + ck + d, \tag{12.1}$$

где a, b, c, d — обыкновенные числа (мы будем считать их действительными) и i, j, k — кватернионные единицы или единичные векторы[1]), подчиненные следующим алгебраическим правилам:

$$\left.\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = 1, \\ jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j, \quad ij = -ji = k. \end{aligned}\right\} \tag{12.2}$$

Векторная часть Vq, скалярная часть Sq, сопряженный кватернион Kq, норма Nq и обратный кватернион q^{-1} — определяются следующими формулами[2]):

$$\left.\begin{aligned} &Vq = ai + bj + ck, \quad Sq = d, \quad q = Vq + Sq, \\ &Kq = -Vq + Sq, \\ &Nq = (qKq)^{\frac{1}{2}} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}, \; q^{-1} = \frac{Kq}{(Nq)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{12.3}$$

Векторную часть Vq можно рассматривать как обыкновенный вектор, при этом i, j, k являются единичными векторами координатных осей. Если $Sq = 0$, кватернион q вырождается в вектор с нормой $Nq = 1$, если это единичный вектор.

Каждый кватернион q определяет положительное число h, единичный вектор p и угол χ $(0 \leqslant \chi \leqslant 2\pi)$. Соотношение между ними выражается формулой

$$q = h\left(\cos\frac{1}{2}\chi + p\sin\frac{1}{2}\chi\right). \tag{12.4}$$

---

[1]) Следуя традиции, мы используем здесь обычный шрифт для кватернионов.

[2]) См. Brand L., Vector and Tensor Analysis (New York, Wiley, 1947) гл. 10 с кратким изложением теории кватернионов. Бранд определяет норму как qKq. Джоли (Joly C. J., A Manual of Quaternions, London, Macmillan, 1905, стр. 12) пишет $qKq = (Tq)^2$ и называет Tq *тензором* q; однако, кажется целесообразным обойти исторический термин «*тензор*» из-за того, что в наши дни принято вкладывать в этот термин другой смысл в тензорном исчислении.

Тогда $Nq = h$ и получаем

$$q^{-1} = h^{-1}\left(\cos\frac{1}{2}\chi - p\sin\frac{1}{2}\chi\right). \qquad (12.5)$$

Пусть r — какой-нибудь вектор и q — какой-нибудь кватернион. Тогда формула

$$r' = qrq^{-1} \qquad (12.6)$$

определяет преобразование $r \to r'$, такое, что $Sr' = Sr = 0$ (т. е. r' — вектор), и это преобразование на самом деле является вращением вокруг оси p на угол χ, где p и χ определены соотношением (12.4). Это можно показать следующим образом[1]).

Очевидно, что $h\,(= Nq)$ сокращается в формуле (12.6) и мы можем взять, не умаляя общности, $Nq = 1$, полагая, таким образом,

$$q = \lambda i + \mu j + \nu k + \varrho, \qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \varrho^2 = 1. \qquad (12.7)$$

Тогда

$$q^{-1} = -\lambda i - \mu j - \nu k + \varrho \qquad (12.8)$$

и, воспользовавшись выражением (12.6), при

$$r = xi + yj + zk, \qquad r' = x'i + y'j + z'k$$

находим в матричных обозначениях

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{M}\boldsymbol{r}, \qquad (12.9)$$

где $\boldsymbol{M}$ имеет точно форму (10.9). Следовательно, преобразование (12.6) определяет вращение, а числа (λ, μ, ν, ϱ), введенные в формулах (12.7) действительно являются эйлеровыми параметрами вращения (§ 10). Полагая $n = 1$ в выражении (12.4), получим следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &Vq = p\sin\frac{1}{2}\chi, \quad (NVq)^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \sin\frac{1}{2}\chi, \\ &Sq = \varrho = \cos\frac{1}{2}\chi, \end{aligned}\right\} \qquad (12.10)$$

---

[1]) Другие доказательства см. Brand, цит. соч., стр. 417, и Joly, цит. соч., стр. 18.

так что (ср. с (10.2)) Vq есть не что иное, как вектор V из § 10 (направленный вдоль оси вращения), а угол χ кватерниона, определенный формулой (12.4), есть угол вращения.

§ 13. Стереографическая проекция[1]) **и параметры Кэли — Клейна.** Спроектируем сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ из точки (0, 0, 1) на плоскость $z = 0$ (стереографическая

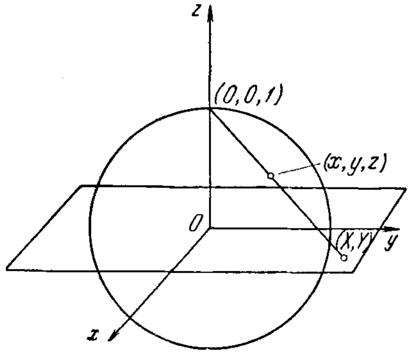


Рис. 6. Стереографическая проекция.

проекция); пусть точка (X, Y) на плоскости — проекция точки сферы с координатами (x, y, z) (рис. 6). Тогда, как легко видеть,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{1-z}{1}; \quad X = \frac{x}{1-z}, \quad Y = \frac{y}{1-z};\\ &x = \frac{2X}{X^2+Y^2+1}, \quad y = \frac{2Y}{X^2+Y^2+1};\\ &z = \frac{X^2+Y^2-1}{X^2+Y^2+1}; \quad 1-z = \frac{2}{X^2+Y^2+1}. \end{aligned}\right\} \qquad (13.1)$$

Простой подсчет дает

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{4\,(dX^2 + dY^2)}{(X^2+Y^2+1)^2} = \frac{4dZ\,d\bar{Z}}{(Z\bar{Z}+1)^2}, \qquad (13.2)$$

---

[1]) Ср. Tietz H., Handbuch der Physik, 1960, т. II, стр. 187.

где $Z = X + iY$ и черточка означает комплексное сопряженное.

Преобразование $Z \to Z'$ на плоскости вызывает преобразование единичной сферы в себя $(x, y, z) \to (x', y', z')$. Оно будет жестким (т. е. движением твердого тела), если сохраняется элемент $dx^2 + dy^2 + dz^2$, т. е. если

$$\frac{dZ'd\bar{Z}'}{(Z'\bar{Z}'+1)^2} = \frac{dZ\,d\bar{Z}}{(Z\bar{Z}+1)^2}. \tag{13.3}$$

Легко убедиться, что это условие выполняется при преобразовании

$$Z' = \frac{pZ+q}{-\bar{q}Z+\bar{p}}, \tag{13.4}$$

где p, q — произвольные комплексные числа (стереографические параметры), удовлетворяющие условию

$$p\bar{p} + q\bar{q} = 1, \tag{13.5}$$

так что три из них могут быть заданы произвольно.

Вычисление показывает, что

$$\frac{1}{Z'\bar{Z}+1} = \frac{(\bar{q}Z-\bar{p})(q\bar{Z}-p)}{Z\bar{Z}+1}, \tag{13.6}$$

и отсюда, принимая во внимание (13.1), получим формулы

$$\left.\begin{aligned}
x' + iy' &= \frac{2Z'}{Z'\bar{Z}'+1} = \\
&= p^2(x+iy) - q^2(x-iy) - 2pqz, \\
x' - iy' &= \bar{p}^2(x-iy) - \bar{q}^2(x+iy) - 2\overline{pq}z, \\
z' &= \frac{Z'\bar{Z}-1}{Z'\bar{Z}'+1} = \\
&= p\bar{q}(x+iy) + \bar{p}q(x-iy) + (p\bar{p}-q\bar{q})z.
\end{aligned}\right\} \tag{13.7}$$

Итак, мы имеем преобразование $r' = Mr$, матрица M которого такова:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(p^2+\bar{p}^2-q^2-\bar{q}^2) & \frac{1}{2}i(p^2-\bar{p}^2+q^2-\bar{q}^2) & -pq-\bar{p}\bar{q} \\ \frac{1}{2}i(-p^2+\bar{p}^2+q^2-\bar{q}^2) & \frac{1}{2}(p^2+\bar{p}^2+q^2+\bar{q}^2) & i(pq-\bar{p}\bar{q}) \\ \bar{p}q+p\bar{q} & i(p\bar{q}-\bar{p}q) & p\bar{p}-q\bar{q} \end{pmatrix}. \tag{13.8}$$

Преобразование $r \to r'$, как нетрудно заметить, является жестким преобразованием единичной сферы в себя, но так как оно линейно и однородно, то оно представляет жесткое вращение всего пространства.

Некоторые свойства вращения очевидны из формулы (13.4). Так, если в (13.4) подставить $Z = -q/p$, то $Z' = 0$; следовательно, точка на единичной сфере, соответствующая точке $Z = -q/p$ на плоскости, переходит при этом преобразовании в точку $(0,0,-1)$. Аналогично, подстановка $Z = \bar{p}/\bar{q}$ дает $Z' = \infty$, так что соответствующая точка сферы переходит в $(0,0,1)$. Ось вращения может быть найдена, если положить $Z' = Z$ и решить получающееся таким образом квадратное уравнение.

Мы свяжем параметры Эйлера $(\lambda, \mu, \nu, \varrho)$ со стереографическими параметрами (p, q)[1], сравнив матрицы (10.9) и (13.8); ранее мы выразили $(\lambda, \mu, \nu, \varrho)$ через углы Эйлера $(\vartheta, \varphi, \psi)$ формулами (11.7), если $\varepsilon = 1$.

Существует, конечно, неопределенность в выборе знака в выражениях параметров Эйлера через стереографические параметры, потому что матрица (13.8) не изменяется, если одновременно изменить знаки p и q. Выбирая определенный знак, получим

$$\left.\begin{aligned} p &= \varrho + i\nu = \cos\frac{1}{2}\vartheta e^{\frac{1}{2}i(\varphi+\psi)}, \\ q &= i\lambda - \mu = -\sin\frac{1}{2}\vartheta e^{\frac{1}{2}i(\varphi-\psi)}. \end{aligned}\right\} \tag{13.9}$$

---

[1]) Необходимые элементы теории групп см. Murnaghan, стр. 328 (цит. соч. в § 10).

Параметры Кэли — Клейна (α, β, γ, δ) определяются следующими формулами[1]):

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= p = \varrho + i\nu = \cos\frac{1}{2}\,\vartheta e^{\frac{1}{2}i(\varphi+\psi)},\\
\beta &= -iq = \lambda + i\mu = i\sin\frac{1}{2}\,\vartheta e^{\frac{1}{2}i(\varphi-\psi)},\\
\gamma &= -i\bar{q} = -\lambda + i\mu = i\sin\frac{1}{2}\,\vartheta e^{-\frac{1}{2}i(\varphi-\psi)},\\
\delta &= \bar{p} = \varrho - i\nu = \cos\frac{1}{2}\,\vartheta e^{-\frac{1}{2}i(\varphi+\psi)}.
\end{aligned}\right\} \tag{13.10}$$

Вследствие (13.5) они удовлетворяют условию унимодулярности:

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix} = \alpha\delta - \gamma\beta = 1; \tag{13.11}$$

воспользовавшись этими обозначениями, можно записать матрицу (10.9) или (13.8) в виде

$$M = \begin{pmatrix}
\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2) & \frac{1}{2}i(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2) & -\varepsilon(\alpha\beta+\gamma\delta)\\
\frac{1}{2}i(-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2+\delta^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2) & -\alpha\beta+\gamma\delta\\
i(\alpha\gamma+\beta\delta) & -\alpha\gamma+\beta\delta & \alpha\delta+\beta\gamma
\end{pmatrix}. \tag{13.12}$$

§ 14. Спиновые матрицы Паули. Две 2×2 спиновые матрицы Паули и единичная квадратная матрица определяются следующим образом[2])

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad 1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{14.1}$$

---

[1]) Мы следуем в обозначениях Уиттекеру [28], стр. 25—27.

[2]) В обозначениях мы следуем Голдстейну [7], стр. 132—134 и Pauli W. (Handbuch der Physik, т. V, стр. 109). Murnaghan (цит. соч. в § 10, стр. 191) и Tietz (Handbuch der Physik, т. II, стр. 191) определяют вторую матрицу с обратным знаком.

Заметим, что все матрицы σ-эрмитовы (то есть $\sigma^+ = \sigma$) и все они унитарные ($\sigma\sigma^+ = 1$) и что след[1]) каждой равен нулю.

Легко непосредственно проверить следующую таблицу умножения

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 &= 1, \\ \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 &= i\sigma_1, \\ \sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 &= i\sigma_2, \\ \sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 &= i\sigma_3. \end{aligned}\right\} \tag{14.2}$$

Сравнение с правилами (12.2) показывает, что три матрицы $\tau_\varrho = -i\sigma_\varrho$ ($\varrho = 1, 2, 3$) подчиняются правилам для кватернионов[2]).

Любая 2×2-матрица может быть выражена в виде линейной комбинации матриц σ_1, σ_2, σ_3 и $\mathbf{1}$; независимо от того, какие заданы значения для коэффициентов a, b, c, d, будем иметь

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(b+c)\,\sigma_1 + \frac{1}{2}\,i\,(b-c)\,\sigma_2 + \\ + \frac{1}{2}(a-d)\,\sigma_3 + \frac{1}{2}(a+d)\,\mathbf{1}. \tag{14.3}$$

Если след данной матрицы равен нулю ($a + d = 0$), последний член исчезает. Если, кроме того, матрица эрмитова (a, d — действительные числа, $c = \bar{b}$), то коэффициенты при σ_i — действительные числа.

Матрицы Паули связаны с трехмерной геометрией тождеством

$$P = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} = x\sigma_1 + y\sigma_2 - z\sigma_3; \tag{14.4}$$

любая точка (x, y, z) определяет, таким образом, матрицу,

---

1) След (trace или spur) матрицы — сумма ее диагональных элементов.

2) В § 12 гамильтоновы обозначения (i, j, k) использованы для кватернионных единиц; но если $\sqrt{-1}$ имеет обычный смысл как в матрицах (14.1), то путаницы можно избежать, переменив обозначения (i, j, k) на (I, J, K) или (e_1, e_2, e_3).

и обратно, каждая эрмитова 2×2-матрица со следом, равным нулю, определяет точку (x, y, z).

Рассмотрим теперь какую-нибудь 2×2-матрицу U. Предположим, что она унитарна ($UU^+ = U^+U = 1$), но вообще не эрмитова ($U^+ \neq U$). Если P-матрица вида (14.4), то формула

$$P' = UPU^+ \qquad (14.5)$$

определяет 2×2-матрицу P'. Легко показать, что P' — эрмитова матрица со следом, равным нулю и поэтому формула (14.5) определяет преобразование пространства в себя $(x, y, z) \to (x', y', z')$. Так как $UU^+ = 1$, то $\det U \cdot \det U' = 1$ и отсюда $\det P' = \det P$; поэтому выполняется условие

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad (14.6)$$

так что единичная сфера преобразуется в себя. Кроме того, формула преобразования (14.5) ıет $dP' = UdPU^+$ и отсюда, как и выше,

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \qquad (14.7)$$

и, таким образом, преобразование есть жесткое вращение вокруг начала координат[1]).

Пусть χ — действительное число; положим $c = \cos\frac{1}{2}\chi$, $s = \sin\frac{1}{2}\chi$. Тогда легко видеть, что три матрицы,

$$U_1(\chi) = c1 - is\sigma_1, \qquad U_2(\chi) = c1 - is\sigma_2, \qquad U_3(\chi) = c1 - is\sigma_3, \qquad (14.8)$$

согласно (14.2) унитарные. Рассмотрим преобразование

$$P' = U_3(\chi) P U_3^+(\chi) = (c1 - is\sigma_3)(x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3)(c1 + is\sigma_3). \qquad (14.9)$$

Проведя алгебраические вычисления с учетом (14.2), находим, что при этом преобразовании

$$x' = x\cos\chi - y\sin\chi, \qquad y' = x\sin\chi + y\cos\chi, \qquad z' = z. \qquad (14.10)$$

---

[1]) В § 15 станет ясным, что это преобразование — собственное. Доказательство см. Murnaghan (цит. соч. в § 10, стр. 298), где обсуждается теория групп, связанная с матрицами Паули.

Это преобразование (относительно осей, неподвижных в пространстве) соответствует вращению на угол χ вокруг оси z. Если в (14.9) вместо $U_3(\chi)$ подставить $U_1(\chi)$ или $U_2(\chi)$, то вследствие симметрии выражений (14.2) и (14.8) получатся аналогичные вращения вокруг осей x или y соответственно.

§ 15. Связи между матрицами Паули и другими способами представления вращений. Свяжем сначала матрицы Паули с углами Эйлера. Три матрицы формулы (11.6) соответствуют следующим вращениям: на угол φ вокруг оси z, на угол ϑ вокруг новой оси y и на угол ψ — вокруг новой оси z. Эти вращения соответствуют матрицам $U_3(\varphi)$, $U_2(\vartheta)$, $U_3(\psi)$; в таком случае преобразование $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{M}\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{M}$ задается формулой (11.6), то же самое, что и преобразование

$$\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{T}\boldsymbol{P}\boldsymbol{T}^+, \tag{15.1}$$

где $\boldsymbol{P}$ — матрица вида (14.4)[1]), а

$$\boldsymbol{T} = U_3(\varphi)\,U_2(\vartheta)\,U_3(\psi) =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\vartheta & -\sin\frac{1}{2}\vartheta \\ \sin\frac{1}{2}\vartheta & \cos\frac{1}{2}\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}i\psi} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}i\psi} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\vartheta e^{-\frac{1}{2}i(\varphi+\psi)} & -\sin\frac{1}{2}\vartheta e^{-\frac{1}{2}i(\varphi-\psi)} \\ \sin\frac{1}{2}\vartheta e^{\frac{1}{2}i(\varphi-\psi)} & \cos\frac{1}{2}\vartheta e^{\frac{1}{2}i(\varphi+\psi)} \end{pmatrix}. \tag{15.2}$$

Выражая $\boldsymbol{T}$ через стереографические параметры, имеем согласно (13.9)

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \bar{p} & \bar{q} \\ -q & p \end{pmatrix}, \tag{15.3}$$

---

[1]) Матрица $\boldsymbol{T}$ отличается от соответствующей матрицы, данной Голдстейном и имеющей в двух элементах множитель i. Это отличие вызвано тем, что наше вращение (11.2) — это вращение вокруг оси y, в то время как у Голдстейна [7], стр. 133, в определении углов Эйлера второе вращение выбрано вокруг оси x. В результате, в его работе появляется σ_1 там, где у нас стоит σ_2.

так что преобразование (15.1) можно написать в виде

$$\left.\begin{aligned} &\begin{pmatrix} z' & x'-iy' \\ x'+iy' & z' \end{pmatrix} = \\ &\quad = \begin{pmatrix} \bar p & \bar q \\ -q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & -\bar q \\ q & \bar p \end{pmatrix}, \\ &\qquad\qquad p\bar p + q\bar q = 1. \end{aligned}\right\} \tag{15.4}$$

Унитарность матрицы T может быть показана без труда. Выражая T через параметры Эйлера, имеем согласно (13.9)

$$T = \begin{pmatrix} \varrho - i\nu & -i\lambda - \mu \\ -i\lambda + \mu & \varrho + i\nu \end{pmatrix} \tag{15.5}$$

или

$$T = -i\lambda\sigma_1 - i\mu\sigma_2 - i\nu\sigma_3 + \varrho 1, \tag{15.6}$$

так что преобразование (15.4) можно записать в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} x'\sigma_1 + y'\sigma_2 + z'\sigma_3 = (-i\lambda\sigma_1 - i\mu\sigma_2 - i\nu\sigma_3 + \varrho 1) \times \\ \times (x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3)(i\lambda\sigma_1 + i\mu\sigma_2 + i\nu\sigma_3 + \varrho 1), \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \varrho^2 = 1. \end{aligned}\right\} \tag{15.7}$$

Такое представление эквивалентно кватернионной формуле (12.6):

$$\left.\begin{aligned} x'i + y'j + z'k = (\lambda i + \mu j + \nu k + \varrho) \times \\ \times (xi + yj + zk)(-\lambda i - \mu j - \nu k + \varrho), \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \varrho^2 = 1. \end{aligned}\right\} \tag{15.8}$$

§ 16. Бесконечно малые перемещения. Бесконечно малое перемещение твердого тела можно свести к бесконечно малому переносу и бесконечно малому вращению. Благодаря их инфинитезимальному характеру перенос и вращение коммутативны, так как можно пренебречь всеми дифференциалами выше первого порядка. Это делает исследование бесконечно малых перемещений сравнительно простым.

Для того чтобы рассмотреть бесконечно малое вращение, возьмем угол вращения χ, который входит в формулы (10.2), бесконечно малым, так что $V = \frac{1}{2}\chi$ и $\varrho = 1$. Пусть $\boldsymbol{\chi}$ — бесконечно малый вектор (с абсолютной величиной χ), направленный вдоль оси вращения. Тогда $\boldsymbol{\chi} = 2\boldsymbol{V}$, и уравнение (10.8) дает для бесконечно малого перемещения, получающегося вследствие вращения на угол χ, выражение

$$\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\chi} \times \boldsymbol{r}. \tag{16.1}$$

Из векторного характера этого уравнения заключаем, что бесконечно малые вращения можно суммировать, складывая соответствующие векторы $\boldsymbol{\chi}$ по правилу параллелограмма.

В матричной форме уравнение (16.1) имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0 & -\chi_3 & \chi_2 \\ \chi_3 & 0 & -\chi_1 \\ -\chi_2 & \chi_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{16.2}$$

где χ_1, χ_2, χ_3 — компоненты вектора $\boldsymbol{\chi}$. Матрица — кососимметрична. Легко непосредственно доказать, что любая ортогональная матрица, бесконечно мало отличающаяся от единичной матрицы, отличается от нее на кососимметричную матрицу.

ГЛАВА II

КИНЕМАТИКА

§ 17. Система отсчета. Скорость частицы. Пусть S_0 — абсолютно неподвижное пространство (см. § 4) и пусть S — какое-нибудь твердое тело, находящееся в покое или движущееся. S — представляет *систему отсчета.* Если $Oxyz$ — любые взаимно перпендикулярные оси, неподвижные относительно S, то любому событию соответствуют четыре числа (x, y, z, t), где t — ньютоново абсолютное время (см. § 4).

Кинематика рассматривает только относительные движения и для нее S так же пригодно, как и S_0. Различие между S и S_0 появляется только в собственно динамике (т. е. когда рассматриваются силы, производящие движение).

Пусть P — движущаяся точка или частица. Ее *скорость* относительно S есть вектор

$$v = \dot{r} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \tag{17.1}$$

Здесь точки означают дифференцирование по t. Скорость направлена по касательной к траектории точки P и имеет величину $\dot{s}$, где s — длина дуги на траектории. Пусть x^ρ — криволинейные координаты в S, тогда линейный элемент S имеет форму $ds^2 = g_{\rho\sigma}\, dx^\rho\, dx^\sigma$, где индексы ρ, σ принимают значения 1, 2, 3 и предполагается, что по повторяющимся индексам ведется суммирование.

Векторы

$$v^\rho = \dot{x}^\rho, \quad v_\rho = g_{\rho\sigma}\dot{x}^\sigma \tag{17.2}$$

являются соответственно контравариантным и ковариантным векторами скорости. *Физическая компонента* скорости по направлению единичного вектора с контравариантными компонентами λ^ρ (и ковариантными компонентами λ_ρ) есть ортогональная проекция вектора скорости (17.1) на это направление, т. е. это инвариант[1])

$$v(\lambda) = v_\rho \lambda^\rho = v^\rho \lambda_\rho. \tag{17.3}$$

В цилиндрических координатах (r, φ, z) физические компоненты скорости по координатным линиям суть

$$(\dot{r},\ r\dot{\varphi},\ \dot{z}). \tag{17.4}$$

В сферических полярных координатах (r, ϑ, φ) физические компоненты скорости суть

$$(\dot{r},\ r\dot{\vartheta},\ r\sin\vartheta\dot{\varphi}). \tag{17.5}$$

В системе координат (p, r) на плоскости (рис. 7) компо-

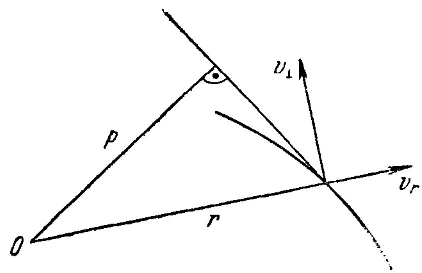


Рис. 7. Координаты (p, r).

ненты v_r (вдоль радиуса-вектора) и $v_\perp$ (перпендикулярно ему) равны

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\perp = -\frac{p\dot{r}}{\sqrt{r^2 - p^2}}. \tag{17.6}$$

---

[1]) Если координаты ортогональны (т. е. $g_{\rho\sigma} = 0$ при $\rho \neq \sigma$), то это определение удовлетворительно. Если же система координат косоугольная, то иногда удобно определить физические компоненты разложением по осям косоугольной системы координат. Это необходимо сделать, чтобы избежать путаницы. Ср. Truesdell C., Z. angew. Math. Mech. **33**, 345 (1953); **34**, 69 (1954).

§ 18. Ускорение частицы. Годограф. *Ускорение* $\boldsymbol{a}$ точки или частицы — это скорость изменения скорости,

$$\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=\ddot{\boldsymbol{r}}=(\ddot{x},\ \ddot{y},\ \ddot{z}). \tag{18.1}$$

Разложение по векторам $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$, т. е. по единичным векторам соответственно касательной к траектории и ее главной нормали, дает

$$\boldsymbol{a}=\dot{v}\boldsymbol{i}+\frac{v^2}{\varrho}\boldsymbol{j}=v\frac{dv}{ds}\boldsymbol{i}+\frac{v^2}{\varrho}\boldsymbol{j}, \tag{18.2}$$

где v — абсолютная величина скорости и ϱ — радиус кривизны траектории.

Для криволинейных координат x^ϱ с элементом длины $ds^2=g_{\rho\sigma}\,dx^\rho dx^\sigma$ (ср. § 17) контравариантный вектор ускорения есть[1])

$$a^\rho=\ddot{x}^\rho+\begin{Bmatrix}\varrho\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu, \tag{18.3}$$

где символ Кристоффеля определяется следующим образом:

$$\begin{Bmatrix}\varrho\\ \mu\nu\end{Bmatrix}=g^{\rho\sigma}\,[\mu\nu,\ \sigma],\quad 2\,[\mu\nu,\ \sigma]=$$

$$=\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma},\quad g^{\rho\mu}g_{\sigma\mu}=\delta^\rho_\sigma. \tag{18.4}$$

Здесь δ^ρ_σ — дельта-символ Кронекера $\left(\delta^\rho_\sigma=\begin{cases}1, & \text{если } \varrho=\sigma\\ 0, & \text{если } \varrho\neq\sigma\end{cases}\right)$.

Обычно легче вычислить вектор ковариантного ускорения

$$a_\rho=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{x}^\rho}-\frac{\partial T}{\partial x^\rho},\quad T=\frac{1}{2}g_{\rho\sigma}\dot{x}^\rho\dot{x}^\sigma. \tag{18.5}$$

---

[1]) Ср. McConnell A. J., Applications of the Absolute Differential Calculus, Chap. 17, London and Glasgow, Backie, 1931. Sokolnikoff I. S., Tensor Analisis, гл. 4, New York, Wiley, 1951; Synge J. L. and Schild A., Tensor Calculus, гл. 5, Toronto, University of Toronto Press, 1952.

Физическая компонента [1]) ускорения по направлению единичного вектора λ^ρ есть

$$a(\lambda) = a_\rho \lambda^\rho = a^\rho \lambda_\rho. \tag{18.6}$$

В цилиндрических координатах имеем

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\varphi^2 + dz^2 \tag{18.7}$$

и физические компоненты ускорения по координатным осям будут

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}), \quad a_z = \ddot{z}. \tag{18.8}$$

В сферических полярных координатах (r, ϑ, φ) имеем

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2 \tag{18.9}$$

и физические компоненты ускорения по координатным линиям равны [2])

$$\left.\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\sin^2\vartheta\cdot\dot{\varphi}^2, \\ a_\vartheta &= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\vartheta}) - r\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot\dot{\varphi}^2, \\ a_\varphi &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\vartheta\cdot\dot{\varphi}). \end{aligned}\right\} \tag{18.10}$$

Кривая, уравнение которой $r' = v(t)$, где $v(t)$ — скорость движущейся точки, называется *годографом* движения. Для движения с постоянной скоростью годограф — одна точка; для постоянного ускорения это — прямая линия; для движения, при котором $a = kr/r^3$ (ускорение обратно пропорционально квадрату расстояния) годограф — окружность [3]).

§ 19. Угловая скорость твердого тела. Пусть S_0 — твердое тело, относительно которого движется второе твердое тело S. Для простоты описания мы можем счи-

---

[1]) См. сноску в § 17 в связи с криволинейными координатами.

[2]) Эти и другие ускорения можно также вычислить с помощью движущихся осей; ср. Уиттекер [28], стр. 32—35, где рассмотрены различные специальные системы координат.

[3]) Ср. MacMillan [17], I, стр. 285.

тать S_0 неподвижным в абсолютном пространстве. Выбрав частицу P_0 тела S в качестве полюса, можно описать бесконечно малое смещение S, задавая смещение точки P_0 и вращение вокруг нее. Последнее есть бесконечно малый вектор $\boldsymbol{\chi}$ вида (16.1). Мы определяем угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ тела S следующим уравнением:

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\omega}\, dt, \tag{19.1}$$

где dt — бесконечно малый интервал времени, в течение которого происходит перемещение. Тогда скорость $\boldsymbol{v}$ частицы P тела S можно представить в виде суммы

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \tag{19.2}$$

где $\boldsymbol{v}_0$— скорость точки P_0 и $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки P относительно P_0.

Векторы $\boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{r}$ можно определить, если задать их компоненты в некоторый момент времени t в каком-нибудь ортонормальном триэдре $\boldsymbol{T}$, который может быть неподвижным относительно S_0 или относительно S или может двигаться относительно их обоих. Обычно удобнее всего закрепить $\boldsymbol{T}$ относительно S, но в случаях симметрии, может быть, лучше, как это будет показано позже (§ 56), выбрать один из векторов $\boldsymbol{T}$ неподвижным относительно S и совместить другие с плоскостью, неподвижной в S_0.

Так как $\boldsymbol{v}_0$ отделено от $\boldsymbol{\omega}$ в уравнении (19.2), то можно рассматривать угловую скорость тела S так, как если бы точка P_0 была неподвижной. Для того чтобы выразить $\boldsymbol{\omega}$ через углы Эйлера (§ 11), возьмем в качестве T три вектора $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ (рис. 5) неподвижными относительно S. Перемещение за время dt может быть произведено бесконечно малыми вращениями $d\vartheta$, $d\varphi$, $d\psi$ соответственно вокруг $\boldsymbol{J}_1$, $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{k}$, так что будет иметь место уравнение

$$\boldsymbol{\omega}\, dt = \boldsymbol{J}_1\, d\vartheta + \boldsymbol{K}\, d\varphi + \boldsymbol{k}\, d\psi. \tag{19.3}$$

Разлагая $(\boldsymbol{J}_1, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{k})$ по осям $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, получим

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \boldsymbol{i} + \omega_2 \boldsymbol{j} + \omega_3 \boldsymbol{k}, \qquad && \omega_1 = \dot{\vartheta} \sin\psi - \dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\psi, \\ &\omega_2 = \dot{\vartheta} \cos\psi + \dot{\varphi} \sin\varphi \sin\psi, && \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{19.4}$$

Аналогично можно разложить $(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{k})$ по осям $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K})$ неподвижным относительно S_0 (рис. 5), получим при этом

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \Omega_1\boldsymbol{I} + \Omega_2\boldsymbol{J} + \Omega_3\boldsymbol{K}, \\ \Omega_1 &= -\vartheta\sin\varphi + \dot\psi\sin\vartheta\cos\varphi, \\ \Omega_2 &= \dot\vartheta\cos\varphi + \dot\psi\sin\vartheta\sin\varphi, \\ \Omega_3 &= \dot\varphi + \dot\psi\cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{19.5}$$

Чтобы исследовать угловую скорость с помощью кватернионов и параметров Эйлера, положим, что кватернионные единицы (i, j, k) соответствуют осям, неподвижным относительно S_0. Положение r частицы в момент времени t определяется уравнением вида (12.6),

$$r = qr_0q^{-1}, \tag{19.6}$$

где $r_0 = x_0i + y_0j + z_0k$ — *начальное* положение частицы и

$$\left.\begin{aligned} q &= \lambda i + \mu j + \nu k + \varrho, \\ q^{-1} &= -\lambda i - \mu j - \nu k + \varrho, \\ \lambda^2 &+ \mu^2 + \nu^2 + \varrho^2 = 1. \end{aligned}\right\} \tag{19.7}$$

Из выражения (19.6) имеем

$$\dot r = \dot q r_0 q^{-1} + q r_0 \frac{d}{dt}(q^{-1}) =$$

$$= \dot q q^{-1} r + rq\frac{d}{dt}(q^{-1}) = \dot q q^{-1} r - r\dot q q^{-1}. \tag{19.8}$$

Заметим, что

$$\dot q q^{-1} = (\dot\lambda i + \dot\mu j + \dot\nu k + \dot\varrho)(-\lambda i - \mu j - \nu k + \varrho), \tag{19.9}$$

и, кроме того, что

$$S(\dot q q^{-1}) = S(q^{-1}\dot q) = \lambda\dot\lambda + \mu\dot\mu + \nu\dot\nu + \varrho\dot\varrho = 0, \tag{19.10}$$

так что эти произведения являются векторами.

Если

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_1 i + \Omega_2 j + \Omega_3 k \tag{19.11}$$

есть угловая скорость, разложенная по неподвижным осям, то согласно (19.2) при $v_0 = 0$ имеет место уравнение

$$\dot{r} = \frac{1}{2}(\Omega r - r\Omega). \tag{19.12}$$

Сравнивая этот результат с уравнением (19.8), получаем

$$ar - ra = 0, \tag{19.13}$$

где

$$a = \Omega - 2\dot{q}q^{-1}. \tag{19.14}$$

Так как a — вектор и r — произвольный вектор, то уравнение (19.13) означает, что $a = 0$ и поэтому угловая скорость равна

$$\Omega = 2\dot{q}q^{-1}; \tag{19.15}$$

выражая это произведение с помощью (19.9), найдем компоненты угловой скорости по неподвижным осям $(i,\ j,\ k)$:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= 2(\dot{\lambda}\varrho - \lambda\dot{\varrho} - \dot{\mu}\nu - \mu\dot{\nu}),\\ \Omega_2 &= 2(\dot{\mu}\varrho - \mu\dot{\varrho} - \dot{\nu}\lambda + \nu\dot{\lambda}),\\ \Omega_3 &= 2(\dot{\nu}\varrho - \nu\dot{\varrho} - \dot{\lambda}\mu + \lambda\dot{\mu}). \end{aligned}\right\} \tag{19.16}$$

Согласно (19.15) имеем

$$q^{-1}\Omega q = 2q^{-1}\dot{q} = \omega_1 i + \omega_2 j + \omega_3 k. \tag{19.17}$$

Этим уравнением определяются ω_1, ω_2, ω_3; отсюда, очевидно,

$$\Omega = \omega_1 qiq^{-1} + \omega_2 qjq^{-1} + \omega_3 qkq^{-1}, \tag{19.18}$$

и мы находим ω_1, ω_2, ω_3 как компоненты угловой скорости по осям того триэдра, который первоначально совпадал с $(i,\ j,\ k)$. Проводя вычисление в (19.17), найдем компоненты угловой скорости по движущимся осям[1]):

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= 2(\dot{\lambda}\varrho - \lambda\dot{\varrho} + \dot{\mu}\nu - \mu\dot{\nu}),\\ \omega_2 &= 2(\dot{\mu}\varrho - \mu\dot{\varrho} + \dot{\nu}\lambda - \nu\dot{\lambda}),\\ \omega_3 &= 2(\dot{\nu}\varrho - \nu\dot{\varrho} + \dot{\lambda}\mu - \lambda\dot{\mu}). \end{aligned}\right\} \tag{19.19}$$

---

[1]) Другой вывод см. Уиттекер [28], стр. 29—30.

§ 20. Подвижные оси. Абсолютная и относительная скорости изменения вектора. Теорию движущихся осей часто считают трудной и неясной из-за тех требований, которые она предъявляет к нашей способности наглядно представить тела в движении. Наилучший метод избежать возникающей таким образом неясности состоит в рассмотрении проблемы с помощью бесконечно малых смещений, разлагая действительные перемещения, которые происходят за время dt, на совокупность элементарных смещений, каждое из которых вызвано своей причиной. При этом порядок, в котором действуют эти причины, не важен, так как бесконечно малые перемещения коммутативны. Для краткости при дальнейшем выводе формул мы не рассматриваем эти причины бесконечно малых перемещений.

Пусть $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ — ортогональный триэдр, вращающийся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Пусть компоненты вектора $\boldsymbol{V}$ по осям этого триэдра равны (V_1, V_2, V_3), так что

$$\boldsymbol{V} = V_1\boldsymbol{i} + V_2\boldsymbol{j} + V_3\boldsymbol{k}. \tag{20.1}$$

Скорость изменения векторов $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ не зависит от того, закреплено или движется начало триэдра. Эти скорости определяются единственно только угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Если начало неподвижно, эти скорости совпадают со скоростями точек с радиусами-векторами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ и, следовательно, согласно (19.2) имеем

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}, \qquad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}, \qquad \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k}. \tag{20.2}$$

Дифференцируя выражение (20.1), видим, что *абсолютная скорость изменения* вектора есть

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{\delta \boldsymbol{V}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}, \tag{20.3}$$

где

$$\frac{\delta \boldsymbol{V}}{\delta t} = \frac{dV_1}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dV_2}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dV_3}{dt}\boldsymbol{k}; \tag{20.4}$$

это *относительная* скорость изменения $\boldsymbol{V}$.

Если, в частности, $V = \omega$, то имеем соотношение

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\delta\omega}{\delta t} \tag{20.5}$$

и, таким образом, абсолютная и относительная скорости совпадают.

Для абсолютной второй производной имеем выражение

$$\frac{d^2V}{dt^2} = \frac{\delta^2 V}{\delta t^2} + 2\omega \times \frac{\delta V}{\delta t} + \frac{\delta\omega}{\delta t} \times V + \omega \times (\omega \times V). \tag{20.6}$$

Применим эти формулы к вычислению скорости и ускорения. Пусть S_0 абсолютно неподвижно, а S — твердое тело, находящееся в некотором движении. С телом связан и ортогональный триэдр $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, начало O которого имеет радиус-вектор $\boldsymbol{r}_0(t)$ относительно некоторого начала неподвижной системы координат. Пусть P — какая-либо движущаяся точка или частица, не обязательно принадлежащая телу S; ее абсолютный радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ (относительно начала в S_0) может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}', \tag{20.7}$$

где

$$\boldsymbol{r}' = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{20.8}$$

Этот последний вектор в действительности не что иное, как вектор $\overrightarrow{OP}$; (x, y, z) — координаты точки P с точки зрения наблюдателя, связанного с телом S. Тело S есть тогда *движущаяся система отсчета*. Согласно (20.3) абсолютная скорость точки P равна

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_0}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}' + \omega \times \boldsymbol{r}', \tag{20.9}$$

где $\boldsymbol{v}_0$ — абсолютная скорость начала координат O, $\boldsymbol{v}' = \frac{\delta \boldsymbol{r}'}{\delta t}$ — относительная скорость точки P, измеряемая наблюдателем, движущимся вместе с S; ее компоненты равны $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, ω — угловая скорость тела S.

Если точка P принадлежит S, то $\boldsymbol{v}' = 0$, поэтому оставшаяся часть $(\boldsymbol{v}_0 + \omega \times \boldsymbol{r}')$ называется *переносной скоростью*.

Дифференцирование выражения (20.9) дает абсолютное ускорение точки P в виде

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_c + \boldsymbol{a}_t, \tag{20.10}$$

где

$\boldsymbol{a}_0 = \dfrac{d\boldsymbol{v}_0}{dt}$ — абсолютное ускорение точки O,

$\boldsymbol{a}' = \dfrac{\delta^2 \boldsymbol{r}'}{\delta t^2} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k}$ — относительное ускорение,

$\boldsymbol{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'$ — ускорение Кориолиса (или дополнительное), (20.11)

$$\boldsymbol{a}_t = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}') - \omega^2 \boldsymbol{r}'. \tag{20.12}$$

Здесь $\dot{\boldsymbol{\omega}} = d\boldsymbol{\omega}/dt = \delta\boldsymbol{\omega}/\delta t$.

Если P принадлежит телу S, то $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}_c = 0$ и

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_t. \tag{20.13}$$

Эта часть выражения (20.10) называется *переносным ускорением*.

Если угловая скорость постоянна ($\boldsymbol{\omega} = \text{const}$), то имеет место соотношение

$$\boldsymbol{a}_t = -\boldsymbol{R}\omega^2, \tag{20.14}$$

где $\boldsymbol{R}$ — вектор, проведенный в точку P и перпендикулярный к оси $\boldsymbol{\omega}$; его можно назвать *центростремительным ускорением*.

ГЛАВА III

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАСС И СИСТЕМЫ СИЛ

§ 21. Центры масс. Моменты и произведения инерции. Центром масс системы частиц с массами m_i и радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_i$ является точка, радиус-вектор которой определяется уравнением

$$\boldsymbol{r}=\frac{\sum\limits_i m_i\cdot\boldsymbol{r}_i}{\sum\limits_i m_i}. \tag{21.1}$$

Если система жестко перемещается, то ее центр масс перемещается с ней.

В однородном гравитационном поле гравитационные силы, действующие на систему частиц, статически эквивалентны (или эквиполентны) одной силе, действующей на центр масс. Поэтому центр масс обычно называют *центром тяжести*. Иногда также употребляют название *барицентр*. В этой книге всюду будет употребляться термин *центр масс*.

Для континуума плотности ϱ центр масс определяется формулой, аналогичной (21.1), в которой суммирование заменено интегрированием:

$$\boldsymbol{r}=\frac{\int \varrho\boldsymbol{r}\,d\tau}{\int \varrho\,d\tau}. \tag{21.2}$$

Эта формула применима в случаях распределения масс по объемам, поверхностям или кривым. В этих случаях $d\tau$ означает соответственно элемент объема, поверхности или длины, а ϱ — соответствующую плотность.

Если система S состоит из n частей S_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ с массами m_i и центрами масс r_i, то центр масс системы S можно найти по формуле (21.1), если заменить каждую часть S_i частицей с массой m_i, сосредоточенной в точке r_i.

Линейным моментом частицы относительно начала координат называют вектор mr, а ее *квадратичным моментом* относительно осей координат — матрицу или тензор

$$\begin{pmatrix} mx^2 & mxy & mxz \\ myx & my^2 & myz \\ mzx & mzy & mz^2 \end{pmatrix}. \tag{21.3}$$

Линейный и квадратичный моменты системы получаются суммированием или интегрированием.

С квадратичным моментом тесно связаны моменты и произведения инерции. *Момент инерции* частицы P с массой m относительно прямой L есть произведение mp^2, где p — расстояние точки P от L. *Произведение инерции* частицы относительно двух взаимно перпендикулярных плоскостей есть mpq, где p, q — расстояния частицы P от плоскостей, взятые с соответствующими знаками. Моменты и произведения инерции системы находятся суммированием или интегрированием[1]). Таким образом, для системы дискретных частиц моменты инерции относительно осей координат $Oxyz$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} A = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad B = \sum_i m_i (z_i^2 + x_i)^2, \\ C = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2), \end{aligned}\right\} \tag{21.4}$$

а произведения инерции относительно координатных плоскостей —

$$F = \sum_i m_i y_i z_i, \quad G = \sum_i m_i z_i x_i, \quad H = \sum_i m_i x_i y_i. \tag{21.5}$$

Если $V = (l, m, n)$ — единичный вектор, проходящий через начало координат, то момент инерции системы

[1]) Если система с общей массой m имеет момент инерции I относительно прямой L, то радиус инерции k относительно L определяется уравнением $mk^2 = I$.

относительно V, по определению, будет равен

$$I=\sum_i m_i p_i^2=\sum_i m_i\,|\,r_i\times V\,|^2=$$
$$=Al^2+Bm^2+Cn^2-2Fmn-2Gnl-2Hlm. \qquad (21.6)$$

Так как I — величина, не зависящая от выбора направления осей координат, то элементы симметричной матрицы инерции

$$I=\begin{pmatrix} A & -H & -G\\ -H & B & -F\\ -G & -F & C\end{pmatrix} \qquad (21.7)$$

являются компонентами тензора второго ранга.

Для непрерывного распределения масс имеем для всех этих величин аналогичные выражения:

$$\left.\begin{aligned} A&=\int\varrho\,(y^2+z^2)\,d\tau, & B&=\int\varrho\,(z^2+x^2)\,d\tau,\\ C&=\int\varrho\,(x^2+y^2)\,d\tau, & F&=\int\varrho yz\,d\tau,\\ G&=\int\varrho zx\,d\tau, & H&=\int\varrho xy\,d\tau. \end{aligned}\right\} \qquad (21.8)$$

§ 22. Теорема о параллельных осях. Главные оси инерции. Пусть L — некоторая прямая и пусть L_0 — параллельная ей прямая, проходящая через центр масс системы. *Теорема о параллельных осях* утверждает, что

$$I=I_0+mp^2, \qquad (22.1)$$

где I, I_0 — моменты инерции системы соответственно относительно L, L_0, m — полная масса системы и p — расстояние между параллельными прямыми L и L_0. Теорему легко доказать; имеет место и аналогичная теорема для произведений инерции.

Из формулы (22.1) следует, что момент инерции относительно прямой L_0, проходящей через центр масс, меньше, чем момент инерции относительно любой прямой L, параллельной L_0.

Главные оси определяются через стационарные значения моментов инерции. Каждому единичному вектору V, проходящему через начало координат (которым может быть любая точка), соответствует момент инерции I вида (21.6). Направляющие косинусы (l, m, n) вектора V, для которого I имеет стационарное значение, удовлетворяют равенствам

$$\left.\begin{aligned} Al - Hm - Gn &= H, \\ -Hl + Bm - Fn &= Im, \\ -Gl - Fm + Cn &= In, \end{aligned}\right\} \tag{22.2}$$

где I — указанное стационарное значение. Три *главных* момента инерции относительно начала координат являются теми стационарными значениями, которые равны корням кубического детерминантного уравнения:

$$\begin{vmatrix} A-I & -H & -G, \\ -H & B-I & -F \\ -G & -F & C-I \end{vmatrix} = 0. \tag{22.3}$$

Три корня этого уравнения действительные и положительные: действительные — так как матрица (21.7) симметрична, и положительные — так как квадратичная форма (21.6) положительно определенная[1]).

Направления, определенные формулами (22.2), для которых I принимает какое-либо одно из значений, полученных решением уравнения (22.3), называются *главными осями инерции* относительно начала координат. Эти оси образуют ортогональный триэдр[2]), и три плоскости, определенные им, называются *главными плоскостями*. Произведения инерции относительно главных плоскостей равны нулю и поэтому (поскольку это значительно упрощает расчеты) почти всегда оси координат

---

[1]) За исключением случая, когда все массы лежат на одной прямой, проходящей через начало; тогда она полуопределенная и один корень равен нулю, а два других — положительные, равные между собой.

[2]) Если два из главных моментов инерции равны, то определяется только один вектор триэдра и к нему можно добавить любую взаимно ортогональную пару векторов, ортогональных уже найденному вектору триэдра; это — случай *аксиальной симметрии*. Если все три главных момента инерции равны, то произвольный ортогональный триэдр есть главный; это — случай *сферической симметрии*.

выбираются совпадающими с главными осями инерции. Тогда инерциальные свойства системы описываются тремя *главными моментами инерции* A, B, C. Момент инерции относительно произвольной прямой, проходящей через начало координат и имеющей направляющие косинусы $(l,\ m,\ n)$, определяется формулой

$$I = Al^2 + Bm^2 + Cn^2. \qquad (22.4)$$

Для геометрического представления инерциальных свойств системы используют эллипсоид инерции[1]), уравнение которого имеет вид

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Fyz - 2Gzx - 2Hxy = 1. \qquad (22.5)$$

Момент инерции относительно прямой L, проходящей через начало координат, равен $1/r^2$, где r — радиус-вектор этого эллипсоида, проведенный вдоль направления L.

Два распределения масс называются *равномоментными*, если их моменты инерции относительно произвольной прямой равны. Отсюда следует, что две равномоментные системы имеют общий центр масс, одну и ту же полную массу, одни и те же главные моменты инерции. Справедливо также и обратное.

Однородная треугольная пластинка с массой m равномоментна системе из трех частиц с массами $m/3$, помещенными в серединах сторон этого треугольника. Однородный тетраэдр с массой m равномоментен системе пяти частиц, одна из которых, с массой $4m/5$, помещена в центре масс, а остальные четыре, каждая с массой $m/20$, расположены в вершинах тетраэдра[2]).

§ 23. Импульс. *Импульсом* частицы называют произведение mv, где m — масса частицы, а v — ее скорость. Импульсом M системы называют сумму импульсов

---

[1]) Дополнительные детали относительно эллипсоида инерции и гирационного эллипсоида и теорию моментов инерции вообще см. Routh [22], I, стр. 16—22; см. также Ames and Murnaghan [1], стр. 191—196; П. Аппель [2], гл. XVII, и Jung [12].

[2]) Ср. Routh [22], I, стр. 22—27.

ее частей,

$$M=\sum_i m_i v_i, \qquad M=\int \varrho v\, d\tau. \tag{23.1}$$

Все выводы, которые будут здесь получены, приложимы и к системам дискретных частиц, и к континуальным системам, так что имеют место два типа формул: в одном выполняется суммирование, в другом — интегрирование. Так как переход от одного типа к другому совершенно очевиден, то обычно в дальнейшем мы будем писать только формулы с суммированием.

Скорость v_i любой частицы системы можно представить в виде

$$v_i = v + v_i', \tag{23.2}$$

где v — скорость центра масс, а v_i' — скорость относительно центра масс[1]). Согласно определению (21.1) имеем

$$\sum_i m_i r_i' = 0, \tag{23.3}$$

где r_i' — радиус-вектор частицы относительно центра масс; отсюда следует уравнение

$$\sum_i m_i v_i' = 0, \tag{23.4}$$

и вследствие (23.1) и (23.2) импульс системы равен

$$M = mv, \tag{23.5}$$

где m — полная масса системы. Импульс какой-либо системы частиц может быть заменен импульсом единственной воображаемой частицы, движущейся вместе с центром масс системы и обладающей массой, равной полной массе системы.

---

[1]) Под скоростью точки A относительно точки O здесь, как и в дальнейшем, подразумевается скорость по отношению к поступательно движущейся системе с началом в точке O. (*Прим. перев.*)

§ 24. Момент импульса. Моментом импульса[1]) частицы для точки O называют выражение

$$h = r \times M = r \times mv = m\,(r \times v), \tag{24.1}$$

где m — масса частицы, v — ее абсолютная скорость[2]) и r — ее радиус-вектор относительно точки O. Его три компоненты имеют вид

$$\left.\begin{aligned} h_x &= m\,(y v_z - z v_y), \\ h_y &= m(z v_x - x v_z), \\ h_z &= m(x v_y - y v_x). \end{aligned}\right\} \tag{24.2}$$

Абсолютное значение момента импульса относительно прямой, проходящей через точку O, есть ортогональная проекция вектора h на эту прямую. Таким образом, если V — единичный вектор этой прямой, то абсолютная величина момента импульса равна

$$V \cdot (r \times M) = r \cdot (M \times V) = M \cdot (V \times r). \tag{24.3}$$

Момент импульса системы есть сумма моментов импульса ее частей:

$$h = \sum_i r_i \times m_i v_i = \sum_i m_i\,(r_i \times v_i). \tag{24.4}$$

---

[1]) Старый термин момент *момента* (moment of momentum) вышел из употребления. Можно назвать его, следуя Аппелю ([2], II, стр. 37, 55), *кинетическим моментом* (moment cinétique). В английском языке принят термин *угловой момент*. Для него трудно подобрать подходящий символ, который устранял бы всякую возможность путаницы с ранее введенными обозначениями. В этой книге, следуя обозначениям Уиттекера ([28], стр. 74), используется символ h; так как квантовая механика в настоящей книге исключается из рассмотрения, то h нельзя принять за постоянную Планка. Но в других контекстах целесообразны другие обозначения. Голдстейн ([7], стр. 162) использует обозначение L, несмотря на принятое всеми обозначение L для лагранжевой функции; Аппель (цит.) и Пере [20] используют символ σ.

[2]) Мы все еще имеем дело с кинематикой и ньютоново абсолютное пространство не вводится. Абсолютная скорость здесь означает скорость относительно той самой системы отсчета S_0, которая во всех наших рассуждениях рассматривалась как закрепленная.

Точка O, для которой вычисляют момент импульса, может быть закрепленной или движущейся. Для того чтобы исследовать влияние перехода от одной такой точки к другой, рассмотрим две точки O, O^*, абсолютные скорости которых $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}^*$, и пусть $\overrightarrow{OO^*} = \boldsymbol{r}$ (рис. 8). Пусть имеется некоторая система частиц P_i с радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{r}_i'$ соответственно относительно точек O, O^*, так что

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{r}_i'. \qquad (24.5)$$

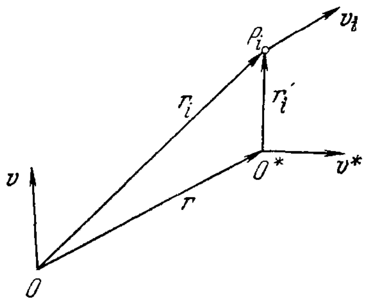


Рис. 8. Момент количества движения.

Тогда моменты импульса соответственно для точек O, O^* равны

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h} &= \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i, \\ \boldsymbol{h}^* &= \sum m_i \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{v}_i, \end{aligned} \qquad (24.6)$$

где $\boldsymbol{v}_i$ — абсолютная скорость частицы P_i. Пусть $\boldsymbol{v}_i'$ — скорость частицы P_i относительно точки O^*, так что

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}^* + \boldsymbol{v}_i'; \qquad (24.7)$$

тогда выражения моментов импульса можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h} &= \sum_i m_i (\boldsymbol{r}_i' + \boldsymbol{r}) \times (\boldsymbol{v}^* + \boldsymbol{v}_i'), \\ \boldsymbol{h}^* &= \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i' \times (\boldsymbol{v}_i^* + \boldsymbol{v}_i'); \end{aligned} \qquad (24.8)$$

и отсюда

$$\boldsymbol{h} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}^* + \boldsymbol{r} \times \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i' + \boldsymbol{h}^*, \qquad (24.9)$$

где m — полная масса системы. Эта формула особенно полезна, когда O^* — центр масс. В этом случае средний член исчезает, и мы имеем выражение

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_0 + \boldsymbol{h}^*, \qquad (24.10)$$

где

$$\boldsymbol{h}_0 = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}^*, \qquad \boldsymbol{h}^* = \sum_i \boldsymbol{r}_i' \times (m_i \boldsymbol{v}_i'). \qquad (24.11)$$

Вектор $\boldsymbol{h}_0$ можно назвать орбитальным моментом импульса, а $\boldsymbol{h}^*$ — спиновым моментом импульса, заимствуя термины, принятые в квантовой механике. Отметим, что $\boldsymbol{h}_0$ есть момент импульса для точки O некоторой воображаемой частицы массы m, движущейся вместе с центром масс системы. Отметим также, что $\boldsymbol{h}^*$ — момент импульса системы для центра масс; действительно, при вычислении $\boldsymbol{h}^*$ безразлично, используем ли мы скорости частиц относительно центра масс (как в формулах (24.11)) или абсолютные скорости.

Нужно подчеркнуть, что при конкретном вычислении момента импульса необходимо точно указать I) систему отсчета, относительно которой измеряются скорости, и II) точку, для которой взяты моменты.

Для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки O с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, момент импульса для точки O равен

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h} = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) = \\ = \boldsymbol{\omega} \sum_i m_i r_i^2 - \sum m_i \boldsymbol{r}_i (\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{r}_i). \qquad (24.12)\end{aligned}$$

Это векторное уравнение можно представить в виде следующих уравнений для его трех компонент по осям некоторого ортогонального триэдра:

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= A\omega_1 - H\omega_2 - G\omega_3, \\ h_2 &= -H\omega_1 + B\omega_2 - F\omega_3, \\ h_3 &= -G\omega_1 - F\omega_2 + C\omega_3, \end{aligned}\right\} \qquad (24.13)$$

где $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$ и A, B, C, F, G, H — моменты и произведения инерции относительно триэдра.

Если оси триэдра совпадают с главными осями инерции, то уравнения упрощаются и приводятся к следующему виду:

$$h_1 = A\omega_1, \quad h_2 = B\omega_2, \quad h_3 = C\omega_3. \qquad (24.14)$$

Для того чтобы эти простые выражения имели место в течение всего движения, необходимо, вообще говоря, закрепить триэдр в теле. Однако в случае симметрии ($A = B$) достаточно, чтобы один из векторов триэдра совпадал с осью симметрии. Тогда триэдр не закреплен ни в пространстве, ни в теле. Заметим, что в уравнениях (24.14) компоненты угловой скорости — это компоненты угловой скорости тела, а не триэдра.

§ 25. Кинетическая энергия. *Кинетическая энергия* частицы равна $T=\frac{1}{2}mv^2$, где m — масса частицы, а v — ее абсолютная скорость; для системы частиц кинетическая энергия равна

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i. \tag{25.1}$$

Пусть $\mathbf{v}$ — абсолютная скорость центра масс системы, $\mathbf{v}_i$ — абсолютная скорость частицы системы, и $\mathbf{v}'_i$ — ее скорость относительно центра масс. Тогда $\mathbf{v}_i = \mathbf{v} + \mathbf{v}'_i$, и выражение (25.1) превращается в следующее:

$$T = \frac{1}{2} mv^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2, \tag{25.2}$$

так как $\sum_i m_i \mathbf{v}'_i = 0$; здесь m — полная масса системы. Это теорема Кёнига: *кинетическая энергия какой-либо системы представляет собой сумму двух слагаемых*: (I) *абсолютной кинетической энергии некоторой фиктивной частицы массы m, движущейся вместе с центром масс этой системы, и* (II) *кинетической энергии движения относительно центра масс.*

Для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} (A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 - 2F\omega_2\omega_3 - 2G\omega_3\omega_1 - 2H\omega_1\omega_2), \tag{25.3}$$

где A, B, C, F, G, H — моменты и произведения инерции. Если оси триэдра совпадают с главными осями инерции, то это выражение сводится к следующему:

$$T = \frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2). \tag{25.4}$$

Если положения главных осей определяются углами Эйлера (§ 11), то согласно формулам (19.4) кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2}A(\dot\vartheta\sin\psi - \dot\varphi\sin\vartheta\cos\psi)^2 + \\ + \frac{1}{2}B(\dot\vartheta\cos\psi + \dot\varphi\sin\vartheta\sin\psi)^2 + \\ + \frac{1}{2}C(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta)^2. \tag{25.5}$$

При вращении вокруг неподвижной оси (независимо от того, главная это ось инерции или нет) имеем выражение

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2, \tag{25.6}$$

где I — момент инерции системы относительно этой оси.

Выражая кинетическую энергию через члены симметричной матрицы инерции I_{rs} (21.7), получаем для кинетической энергии следующее выражение:

$$T = T(\omega) = \frac{1}{2}I_{rs}\omega_r\omega_s, \tag{25.7}$$

причем суммирование производится от 1 до 3 по повторяющимся индексам, и согласно выражениям (24.13) имеем следующие равенства:

$$h_r = I_{rs}\omega_s, \quad T = \frac{1}{2}h_r\omega_r. \tag{25.8}$$

Применяя обратную матрицу J_{rs}, удовлетворяющую условию $I_{rs}J_{st} = \delta_{st}$, имеем соотношение

$$\omega_r = J_{rs}h_s, \quad T = T(h) = \frac{1}{2}J_{sr}h_rh_s. \tag{25.9}$$

Поэтому

$$\frac{\partial T(\omega)}{\partial\omega_r} = h_r, \quad \frac{\partial T'(h)}{\partial h_r} = \omega_r. \tag{25.10}$$

В случае, когда оси триэдра совпадают с главными осями инерции системы, кинетическая энергия выражается следующими формулами:

$$T = \frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{h_1^2}{A} + \frac{h_2^2}{B} + \frac{h_3^2}{C}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + h_3\omega_3). \qquad (25.11)$$

§ 26. **Системы сил.** Рассмотрим силы F_i $(i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, P)$, действующие на P частиц с радиусами-векторами r_i относительно полюса O. Будем рассматривать силы F_i как состоящие из двух сил: *внешней* силы F'_i и *внутренней* F''_i, причем последняя представляет собой результирующую *реакций*, действующих на частицу i со стороны остальных частиц системы.

Примем как гипотезу или аксиому третий закон Ньютона[1]). Он утверждает, что сила, с которой частица i действует на частицу j, равна и противоположна силе, с которой частица j действует на частицу i, и что обе силы направлены по прямой, соединяющей эти частицы. Этот закон *обычно называется законом действия и противодействия*. Он может быть записан следующим образом:

$$F''_i = \sum_{j=1}^{P} A_{ij}(r_j - r_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, P), \qquad (26.1)$$

где A_{ij} — скалярные множители, удовлетворяющие условию $A_{ij} = A_{ji}$.

Для любой системы сил F_i, действующих на r_i, главный вектор (или полная сила) F и главный момент (или момент вращения) G для центра приведения O равны

---

[1]) «Каждому действию всегда имеется равное, противоположно направленное противодействие, или — взаимные действия двух тел друг на друга всегда равны и направлены в противоположные стороны». И. Ньютон, Математические начала натуральной философии. Собр. трудов акад. А. Н. Крылова, т. 7, изд. АН СССР, М.—Л., 1936, стр. 41. Ср. § 5 формулировку более общего закона, согласующуюся с аксиомой однородности и изотропности пространства.

соответственно

$$F=\sum_{i=1}^{p} F_i, \qquad G=\sum_{i=1}^{p} r_i \times F_i. \tag{26.2}$$

Говорят, что данная система сил эквиполентна[1]) одной силе F, приложенной в точке O, и паре сил G.

Заметим, что F — связанный вектор, а G — скользящий вектор. Если изменить полюс O, то G изменится, а вектор F останется неизменным. Подходящим выбором точки O можно свести систему сил к $G = pF$, где p — скалярный множитель.

Векторная пара (F, G) называется *мо́тором*[2]) или торсором[3]). Она не изменится, если перенести векторы F_i вдоль их линий действия. Отсюда легко видеть, что внутренние силы F_i'' не вносят в нее никакого вклада. Поэтому главный вектор и главный момент определяются следующими формулами:

$$F=\sum_{i=1}^{p} F_i', \qquad G=\sum_{i=1}^{p} r_i \times F_i', \tag{26.3}$$

в которые входят только внешние силы. Тот факт, что внутренние силы можно исключить, имеет фундаментальное значение в ньютоновой динамике.

Работа, произведенная силой[4]) F при перемещении ее точки приложения на δr, равна $F\delta r$; в случае системы сил работа выражается формулой

$$\delta W=\sum_{i} F_i\cdot\delta r_i. \tag{26.4}$$

Если силы действуют на твердое тело, и это тело испытывает бесконечно малое перемещение, состоящее из бесконечно малого поступательного перемещения δr_0 и бесконечно малого вращения $\delta\chi$ вокруг полюса, то

$$\delta r_i=\delta r_0+\delta\chi\times r_i', \tag{26.5}$$

[1]) Часто употребляют слово «эквивалентна», но это неточно, так как эквивалентность имеет место только в том случае, когда частицы, на которые действуют силы, образуют твердое тело.

[2]) Данные о мо́торной символике см. в § 49.

[3]) Ср. Pérès [20], стр. 9.

[4]) Работа *против* этой силы равна $-F\delta r$.

где r_i' — радиус-вектор относительно опорной точки. Работа, произведенная на этом перемещении, равна

$$\delta W = \boldsymbol{F} \cdot \delta \boldsymbol{r}_0 + \sum_{i=1}^{P} \boldsymbol{F}_i (\delta \boldsymbol{\chi} \times \boldsymbol{r}_i') = \boldsymbol{F} \cdot \delta \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{G} \delta \boldsymbol{\chi}, \tag{26.6}$$

если воспользоваться обозначениями уравнений (26.2).

Пусть дана плоскость П, проходящая через точку O. Любое бесконечно малое вращение вокруг точки O можно разложить на два бесконечно малых вращения: на вращение ($\delta_1\chi$) вокруг оси, перпендикулярной к плоскости, и на вращение ($\delta_2\chi$) вокруг оси, лежащей в П. Если пара сил состоит из двух равных по величине и противоположных по направлению сил (с абсолютной величиной P и расстоянием между ними p) в плоскости П, то работа, произведенная парой сил при бесконечно малом вращении, равна $\pm\, pP\delta_1\chi$. Знак берется в зависимости от того, совпадают или нет направления пары и вращения.

Если две равные и противоположно направленные силы $\boldsymbol{F}$, $-\boldsymbol{F}$ действуют на точки $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'$, тогда работа, произведенная при произвольном бесконечно малом перемещении, равна

$$\delta W = \boldsymbol{F}(\delta \boldsymbol{r} - \delta \boldsymbol{r}'). \tag{26.7}$$

Если, кроме того, силы направлены вдоль линии, соединяющей точки, мы можем написать $\boldsymbol{F} = \vartheta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$, где ϑ — некоторый скалярный множитель, и выражение (26.7) примет вид

$$\delta W = \vartheta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \cdot \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'). \tag{26.8}$$

Это выражение обращается в нуль, если расстояние $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$ не изменяется при перемещении. Так как по третьему закону Ньютона реакции между любыми двумя частицами системы удовлетворяют приведенным выше условиям, наложенным на $\boldsymbol{F}$, то отсюда следует, что реакции в твердом теле не производят никакой работы. Другими случаями сил, *не производящих работы*, являются: а) реакции гладких контактов; б) реакции контактов качения (без скольжения). Все такие реакции исчезают из тех общих уравнений динамики, которые основаны на понятиях энергии или работы.

ГЛАВА IV

ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ

§ 27. Голономные системы. Связи, зависящие от времени. Конфигурацию системы, состоящей из P частиц, всегда можно описать, задав $3P$ координат частиц. Однако если эти $3P$ координат должны удовлетворять уравнениям связей, то достаточно меньшего числа координат. Так, если система неизменяемая и имеет неподвижную точку, достаточно трех координат (например, углов Эйлера; § 11). Любая совокупность параметров, которая полностью определяет конфигурацию системы, называется *обобщенными координатами*, а скорости их изменения — *обобщенными скоростями.*

Предположим, что N обобщенных координат q_ρ (и это число не может быть уменьшено) описывают конфигурацию системы. Предположим также, что можно изменять координаты q_ρ произвольно и независимо, не нарушая связей (например, жесткие связи); тогда система называется *голономной с N степенями свободы.*

Примеры голономных систем (с указанными числами степеней свободы):

твердое тело, имеющее неподвижную точку (3),

свободное твердое тело (6),

твердое тело, движущееся параллельно плоскости (3),

твердое тело, касающееся неподвижной плоскости (5).

Система может быть подчинена связям, меняющимся со временем (например, частица должна двигаться по поверхности, которая сама движется некоторым заданным образом). Тогда для описания конфигурации системы, кроме обобщенных координат q_ρ, следует еще ввести и время t. Система голономна, если произвольные независимые изменения q_ρ и t не нарушают связей. Система с не зависящими явно от времени связями называется *склерономной*, система со связями, изменяющимися со временем — *реономной*.

Если (x_i, y_i, z_i) — координаты i-й частицы системы в неподвижной системе координат $Oxyz$, то обобщенные координаты должны быть выбраны так, чтобы выполнялись уравнения

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_N, t), \quad y_i = y_i(q_1, q_2, \ldots, q_N, t),$$
$$z_i = z_i(q_1, q_2, \ldots, q_N, t), \tag{27.1}$$

причем в случае склерономной системы[1]) t не входит в уравнения.

Кинетическая энергия реономной системы равна

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{\rho,\sigma=1}^{N} a_{\rho\sigma}\dot{q}_\rho\dot{q}_\sigma + \sum_{\rho=1}^{N} a_\rho\dot{q}_\rho + a; \tag{27.2}$$

здесь $a_{\rho\sigma}$, a_ρ, и a — функции $q_1, q_2, \ldots, q_N, t$. Для склерономной системы это выражение сводится согласно определению T к положительно определенной квадратичной форме[2])

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\rho,\sigma=1}^{N} a_{\rho\sigma}\dot{q}_\rho\dot{q}_\sigma, \tag{27.3}$$

где коэффициенты $a_{\rho\sigma}$ — функции $q_1, \ldots, q_N$.

---

[1]) Однако даже для системы со связями, не зависящими от времени, может быть удобно использовать уравнения в форме (27.1). Например, чтобы изучить движение твердого тела (скажем, ракеты) относительно Земли (движение последней известно), можно положить, что координаты $q_1, q_2, \ldots, q_6$ описывают положение тела относительно осей, неподвижных на Земле. Тогда уравнения, которые выражают координаты частиц тела в неподвижной системе координат, будут иметь форму (27.1), так как время t входит в них из-за движения Земли. С точки зрения аналитической иногда удобно употреблять слово — «склерономный», когда t не входит в уравнения (27.1) и «реономный», когда оно входит в них, без того, чтобы рассматривать физическую систему по существу.

[2]) $T > 0$, если $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N$ не обращаются в нуль одновременно.

§ 28. Неголономные системы. Рассмотрим твердую пластинку, которая может свободно скользить по неподвижной плоскости. Это — склерономная голономная система с тремя степенями свободы. Предположим теперь, что на пластинке имеется маленькое острое лезвие, которое может двигаться только вдоль направления своей длины. Если (x, y) — декартовы координаты какой-либо точки лезвия и ϑ — угол его наклона к оси x, то (x, y, ϑ) образуют систему обобщенных координат для пластинки, но они подчинены неинтегрируемому соотношению

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \vartheta. \tag{28.1}$$

Число обобщенных координат не может быть сделано меньшим трех, но эти три координаты не могут изменяться независимо друг от друга.

Мы назовем систему *неголономной*, если невозможно описать конфигурацию с помощью обобщенных координат q_ρ $(\rho = 1, 2, \ldots, N)$ и времени t, которые могли бы свободно и независимо изменяться. В таких случаях имеются определенные неинтегрируемые[1]) уравнения связей вида

$$\sum_{\rho=1}^{N} A_{c\rho} dq_\rho + A_c dt = 0 \quad (c = 1, 2, \ldots, M), \tag{28.2}$$

где $A_{c\rho}$ и A_c — функции переменных (q, t). В этом случае говорят, что система имеет $N - M$ степеней свободы.

Для неголономных систем остаются справедливыми формулы (27.2) и (27.3), определяющие кинетическую энергию.

Неголономность обычно появляется в системах с контактами качения. Условием качения является равенство мгновенных скоростей двух частиц в точке контакта;

---

[1]) Pérès [20], стр. 218 называет систему полуголономной, если уравнения связей интегрируемы, причем постоянные интегрирования зависят от начальных условий. Математически полуголономная система мало отличается от голономной системы, так как с помощью проинтегрированных уравнений связей можно уменьшить число обобщенных координат.

частицы принадлежат двум касающимся[1]) телам. Следующие примеры иллюстрируют неголономные связи, вызванные качением.

α) *Шар, катящийся по горизонтальной плоскости.* Пусть ($\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$) — неподвижный ортонормальный триэдр с началом O в заданной плоскости и пусть вектор $\boldsymbol{K}$ направлен по вертикали (рис. 9). Возьмем в качестве обобщенных координат (x, y, ϑ, φ, ψ), где (x, y) — координаты точки касания в системе координат Oxy, причем оси x, y совпадают с $\boldsymbol{I}$ и $\boldsymbol{J}$, а (ϑ, φ, ψ) — углы Эйлера (см. § 11), которые описывают положение ортонормального триэдра ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$), закрепленного в шаре, относительно триэдра ($\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$).

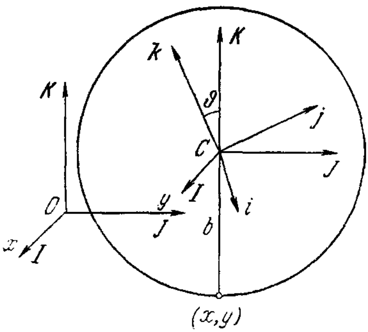


Рис. 9. Шар, катящийся по плоскости.

Радиус-вектор точки касания относительно центра шара, точки C, равен $b\boldsymbol{K}$, где b — радиус шара. Поэтому согласно уравнению (19.2) мгновенная скорость этой частицы шара, когда она касается плоскости, равна

$$\dot{x}\boldsymbol{I} + \dot{y}\boldsymbol{J} + \boldsymbol{\omega} \times (-b\boldsymbol{K}), \tag{28.3}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость шара. Разлагая угловую скорость на составляющие по осям ($\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$), имеем выражение

$$\boldsymbol{\omega} = \Omega_1\boldsymbol{I} + \Omega_2\boldsymbol{J} + \Omega_3\boldsymbol{K}, \tag{28.4}$$

где коэффициенты выражены через углы Эйлера и их производные по времени, как в формулах (19.5). Подста-

[1]) Это не означает, что при обсуждении неголономных систем всегда желательно использовать обобщенные координаты; R o u t h ([22], II, стр. 105—205) с большой элегантностью применяет прямые методы. Широкое исследование неголономных систем с проблемами, разработанными в деталях и с рассмотрением нелинейных связей см. H a m e l [11], стр. 464—507. См. также W i n k e l m a n n and G r a m m e l [29], стр. 434—440. В настоящей книге динамику неголономных систем см. в § 46, 48, 85.

вляя значение ω из (28.4) в выражение скорости (28.3) и приравнивая нулю результат (условие качения), получим следующие два неинтегрируемых уравнения связей:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} - b(\dot{\vartheta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi) = 0, \\ \dot{y} - b(\dot{\vartheta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{28.5}$$

Шар имеет $5-2=3$ степени свободы.

β) *Круглый диск, катящийся по горизонтальной плоскости*[1]). Пусть $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K})$ — неподвижный ортонормальный триэдр с началом O в заданной плоскости и пусть вектор $\boldsymbol{K}$ направлен по вертикали (рис. 10). Примем $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K})$ за оси координат, тогда радиус-вектор точки C — центра диска равен

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{I} + y\boldsymbol{J} + z\boldsymbol{K}. \tag{28.6}$$

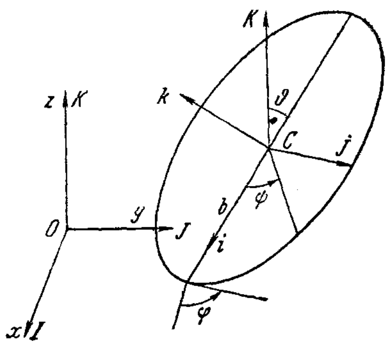


Рис. 10. Круглый диск, катящийся по плоскости.

Пусть $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ — второй ортонормальный триэдр с началом в точке C, вектор $\boldsymbol{i}$ направлен в точку касания, $\boldsymbol{j}$ — горизонтально, $\boldsymbol{k}$ — перпендикулярно к плоскости диска. Пусть ϑ — угол наклона вектора $\boldsymbol{i}$ к оси $\boldsymbol{K}$, φ — угол наклона к оси $\boldsymbol{I}$ касательной к диску в точке контакта и ψ — угол наклона неподвижного радиуса в диске к $\boldsymbol{i}$. Тогда (если b равно радиусу диска)

$$z = b\cos\vartheta \tag{28.7}$$

и $(x, y, \vartheta, \varphi, \psi)$ образуют систему обобщенных координат.

Скорость центра C равна

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{I} + \dot{y}\boldsymbol{J} - b\sin\vartheta\dot{\vartheta}\boldsymbol{K}, \tag{28.8}$$

---

[1]) Динамику катящегося диска см. А п п е л ь [2], гл. 21.

а угловая скорость диска

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\vartheta}\boldsymbol{j} + \dot{\varphi}\boldsymbol{K} + \dot{\psi}\boldsymbol{k}; \tag{28.9}$$

в этом можно убедиться, поочередно изменяя углы. Отсюда, согласно (19.2), мгновенная скорость частицы диска, находящейся в контакте с плоскостью, равна

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times b\boldsymbol{i} = \dot{x}\boldsymbol{I} + \dot{y}\boldsymbol{J} - b\sin\vartheta\dot{\vartheta}\boldsymbol{K} + b\dot{\vartheta}\boldsymbol{k} + b(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\sin\vartheta)\boldsymbol{j}, \tag{28.10}$$

так как

$$\boldsymbol{K} = -\cos\vartheta\boldsymbol{i} + \sin\vartheta\boldsymbol{k}. \tag{28.11}$$

В результате подстановки соотношений

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{j} &= \cos\varphi\boldsymbol{I} + \sin\varphi\boldsymbol{J}, \\ \boldsymbol{k} &= \cos\vartheta\sin\varphi\boldsymbol{I} - \cos\vartheta\cos\varphi\boldsymbol{J} + \sin\vartheta\boldsymbol{K} \end{aligned}\right\} \tag{28.12}$$

в (28.10), условие качения приводит к следующим двум неинтегрируемым уравнениям связей:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} + b\cos\vartheta\sin\varphi\dot{\vartheta} + b\cos\varphi(\dot{\psi} + \sin\vartheta\dot{\varphi}) &= 0, \\ \dot{y} - b\cos\vartheta\cos\varphi\dot{\vartheta} + b\sin\varphi(\dot{\psi} + \sin\vartheta\dot{\varphi}) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{28.13}$$

Диск имеет 5—2 = 3 степени свободы.

γ) *Два колеса, соединенные осью, которые катятся по плоскости.* Предположим, что каждое колесо свободно вращается вокруг оси (если бы они оба были неподвижно прикреплены к оси, то это была бы голономная система с одной степенью свободы). Пусть b — радиус каждого из колес и $2c$ — длина оси. Выберем обобщенные координаты (x, y, ϑ, ψ, ψ'), как показано на рис. 11. Вычислим затем компоненты мгновенной скорости — параллельные и перпендикулярные к оси — двух частиц в точке касания и приравняем эти компоненты нулю, чтобы удовлетворить условию качения. Тогда получим следующие три уравнения связей:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi &= 0, \\ -\dot{x}\sin\varphi + \dot{y}\cos\varphi + c\dot{\varphi} + b\dot{\psi} &= 0, \\ -\dot{x}\sin\varphi + \dot{y}\cos\varphi - c\dot{\varphi} + b\dot{\psi}' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{28.14}$$

Последние два дают интегрируемую комбинацию

$$2c\dot{\varphi} + b\,(\dot{\psi} - \dot{\psi}') = 0. \tag{28.15}$$

Если заданы начальные значения трех углов, то в результате интегрирования имеем

$$2c\varphi = A - b\,(\psi - \psi'), \tag{28.16}$$

где A — заданная постоянная. Можно затем взять $(x,\ y,\ \psi,\ \psi')$ в качестве обобщенных координат, имея при этом

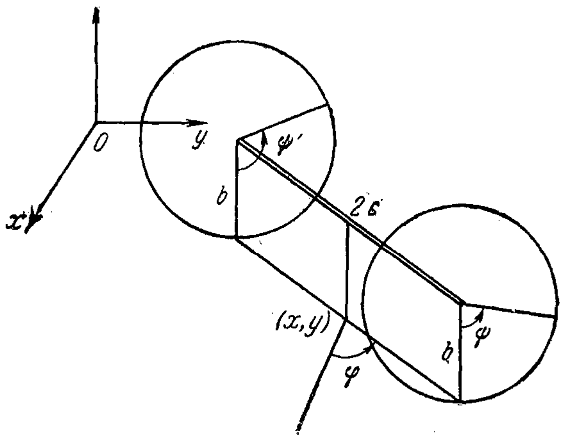


Рис. 11. Два колеса, соединенные осью, которые катятся по плоскости.

два неинтегрируемых уравнения связей:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi &= 0,\\ -\dot{x}\sin\varphi + \dot{y}\cos\varphi + \frac{1}{2}\,b\,(\dot{\psi} + \dot{\psi}') &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{28.17}$$

Система имеет $4 - 2 = 2$ степени свободы.

§ 29. Обобщенные силы. Работа. Потенциальная функция. Рассмотрим систему P частиц, вообще говоря, реономную и неголономную. Пусть на частицы с координатами $(x_i,\ y_i,\ z_i)$ действуют силы с компонентами $(X_i^*,\ Y_i^*,$

Z_i^*). Тогда для любой совершенно произвольной совокупности бесконечно малых перемещений частиц работа, произведенная этими силами, равна (причем все связи не принимаются во внимание):

$$\delta W = \sum_{i=1}^{P} (X_i^* \delta x_i + \overset{*}{Y}_i \delta y_i + \overset{*}{Z}_i \delta z_i). \tag{29.1}$$

Если теперь конфигурации системы описываются с помощью (q_ϱ, t), то мы получим уравнения вида (27.1). Следовательно, работа, произведенная при перемещении, соответствующем произвольным вариациям (δq_ϱ, δt), равна

$$\delta W = \sum_{\rho=1}^{N} \overset{*}{Q}_\rho \delta q_\rho + \overset{*}{Q} \delta t, \tag{29.2}$$

где

$$Q_\rho^* = \sum_{i=1}^{P} \left(X_i^* \frac{\partial x_i}{\partial q_\rho} + Y_i^* \frac{\partial y_i}{\partial q_\rho} + Z_i^* \frac{\partial z_i}{\partial q_\rho} \right), \tag{29.3}$$

$$\overset{*}{Q} = \sum_{i=1}^{P} \left(\overset{*}{X}_i \frac{\partial x_i}{\partial t} + \overset{*}{Y}_i \frac{\partial y_i}{\partial t} + \overset{*}{Z}_i \frac{\partial z_i}{\partial t} \right). \tag{29.4}$$

Величины Q_ρ^* называются *обобщенными силами*; обычно их легче вычислить по формуле (29.2), чем по формуле (29.3).

Полная сила (X_i^*, Y_i^*, Z_i^*), действующая на частицу системы, может быть разложена на две части:

(X_i, Y_i, Z_i) — заданная сила[1]), например, такая, как сила притяжения,

$$(X_i', Y_i', Z_i') \text{ — сила связи.} \tag{29.5}$$

Следовательно, полная обобщенная сила Q_ρ^* может быть разделена на две части:

$$Q_\rho^* = Q_\rho + Q_\rho', \tag{29.6}$$

так что Q_ρ — *заданная* обобщенная сила, а Q_ρ' — обобщенная сила *связи*. Предположим, что Q_ρ — известные функции

---

[1]) Называемая также *приложенной силой*.

переменных $q_1, \ldots, q_N, t, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N$ и, возможно, также вторых производных $\ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_N$.

Важность такого разложения полной силы обусловлена тем фактом, что во многих динамических системах силы связей не *производят работы*; под этим подразумевается, что эти силы не производят работы при перемещении δq_ρ, удовлетворяющем мгновенной связи (при $\delta t = 0$). Это заключает в себе условие

$$\sum_{\rho=1}^{N} Q'_\rho \delta q_\rho = 0, \tag{29.7}$$

так что работа, произведенная всеми силами при этом перемещении, равна

$$\delta W = \sum_{\rho=1}^{N} Q_\rho \delta q_\rho. \tag{29.8}$$

Если существует функция $V(q_1, \ldots, q_N, t)$, такая, что имеют место равенства

$$Q_\rho = -\frac{\partial V}{\partial q_\rho}, \tag{29.9}$$

так что согласно (29.8) произведенная при перемещении работа выражается через V следующим образом:

$$\delta W = -\delta V, \tag{29.10}$$

то говорят, что V есть *потенциальная функция*[1] или *потенциальная энергия системы*. В более общем случае, если существует функция $V(q_1, \ldots, q_N, t, \dot{q}, \ldots, \dot{q}_N)$, такая, что

$$Q_\rho = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\rho} - \frac{\partial V}{\partial q_\rho}, \tag{29.11}$$

то V называют обобщенной *потенциальной функцией*.

---

[1]) Французские авторы предпочитают употреблять термин *силовая* функция U, причем $U = -V$.

B. ДИНАМИКА ЧАСТИЦЫ

ГЛАВА I

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

§ 30. Основные уравнения. Первые два закона Ньютона объединены в уравнении

$$\frac{d}{dt}(mv) = F, \tag{30.1}$$

где m — масса частицы, v — ее абсолютная скорость и F — сила, действующая на частицу. Если m — постоянна (как мы это и предполагаем), то уравнение (30.1) эквивалентно следующему:

$$ma = F, \tag{30.2}$$

где a — абсолютное ускорение.

Пусть x^ρ — криволинейные координаты в абсолютном пространстве (ср. с § 17, 18). Тогда, согласно выражению (18.3), уравнение движения (30.2) можно записать в контравариантной форме:

$$ma^\rho \equiv m\left(\ddot{x}^\rho + \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right) = F^\rho, \tag{30.3}$$

где F^ρ — контравариантный вектор силы. Ковариантный вектор силы F_ρ можно вычислить из инвариантной формулы

$$\delta W = F_\rho \delta x^\rho, \tag{30.4}$$

где δW — работа, произведенная силой при произвольном перемещении δx^ρ, и F^ρ — получена из F_ρ по формуле

$$F^\rho = g^{\rho\mu} F_\mu. \tag{30.5}$$

Согласно (18.5) ковариантная форма уравнения движения[1]) имеет вид

$$ma_\rho \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\rho} - \frac{\partial T}{\partial x^\rho} = F_\rho, \tag{30.6}$$

где T, кинетическая энергия частицы, определяется формулой

$$T = \frac{1}{2}\, m g_{\rho\sigma} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma. \tag{30.7}$$

Если существует функция[2]) $V(x, t)$ (ср. (29.9)), такая, что

$$F_\rho = -\frac{\partial V}{\partial x^\rho}, \tag{30.8}$$

или если существует обобщенная потенциальная функция $V(x, \dot{x}, t)$, такая, что

$$F_\rho = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{d\dot{x}^\rho} - \frac{\partial V}{\partial x^\rho}, \tag{30.9}$$

то уравнение движения (30.6) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\dot{x}^\rho} - \frac{\partial L}{\partial x^\rho} = 0, \tag{30.10}$$

где L — *лагранжева функция*

$$L = T - V. \tag{30.11}$$

В случае движения в плоскости наиболее удобными координатами являются обычно прямоугольные декартовы координаты (x, y), в которых уравнения движения выглядят так:

$$m\ddot{x} = X, \quad m\ddot{y} = Y, \tag{30.12}$$

---

1) Это — уравнение Лагранжа вида (46.17).

2) Здесь и далее вместо трех величин x^ρ пишем x, и вместо $\dot{x}^\rho$ — просто $\dot{x}$.

либо полярные координаты (r, ϑ), в которых эти уравнения принимают вид

$$m(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2) = R, \quad m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\vartheta}) = \Theta, \tag{30.13}$$

где R и Θ — радиальная и трансверсальная компоненты силы.

В трехмерном пространстве удобно использовать цилиндрические (18.8) или сферические полярные (18.10) координаты.

§ 31. Энергия. Момент импульса. Из уравнения (30.2) выводим следующее соотношение:

$$\frac{dT}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}, \tag{31.1}$$

так что скорость возрастания кинетической энергии равна мощности силы $\boldsymbol{F}$. Если существует потенциальная функция (не зависящая от t), то уравнение (31.1) приводит к интегралу энергии,

$$T + V = E = \text{const}, \tag{31.2}$$

где E — полная энергия.

Так же, согласно (30.2), получим уравнение

$$\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{31.3}$$

или уравнение

$$\frac{d\boldsymbol{h}}{dt} = \boldsymbol{G}, \tag{31.4}$$

где $\boldsymbol{h}$ — момент импульса для начала O, а $\boldsymbol{G}$ — момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно O. Если линия действия проходит через точку O, то $\boldsymbol{G} = O$, поэтому

$$\boldsymbol{h} = \text{const}. \tag{31.5}$$

Это — интеграл момента импульса. В случае движения частицы в плоскости под действием сил, направленных к началу координат или от него, он приводит к уравнению

$$r^2\dot{\vartheta} = \text{const}, \tag{31.6}$$

из которого следует, что радиус-вектор, проведенный из начала координат к частице, описывает в равные времена равные площади. Полезно запомнить, что

$$r^2\dot{\vartheta} = pv, \tag{31.7}$$

где v — абсолютная величина скорости и p — перпендикуляр, опущенный из начала координат на касательную к орбите.

§ 32. Движущиеся системы отсчета. Пусть S — твердое тело, которое движется заданным образом относительно абсолютного пространства. Это движение можно описать, если выбрать определенный полюс O в теле S, задать абсолютную скорость $v_0(t)$ точки O и задать, кроме того, угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ тела S. Примем S за движущуюся систему отсчета. Тогда абсолютное ускорение $\boldsymbol{a}$ частицы, возникающее под действием силы $\boldsymbol{F}$, можно разбить на четыре слагаемых вида (20.10) и написать уравнение движения (30.2) в следующей форме:

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_t, \tag{32.1}$$

где m — масса частицы и

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{F}_0 &= -m\boldsymbol{a}_0, \\ \boldsymbol{F}_c &= -m\boldsymbol{a}_c = -2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}', \\ \boldsymbol{F}_t &= -m\boldsymbol{a}_t = -m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') = \\ &= -m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}' - m\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}') + m\omega^2\boldsymbol{r}'. \end{aligned}\right\} \tag{32.2}$$

В уравнении (32.1) $\boldsymbol{a}'$ — относительное ускорение, т. е. то ускорение, которое измеряет наблюдатель, движущийся вместе с телом S. Можно сказать, что для движущейся системы отсчета закон Ньютона приобретает форму

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F}', \tag{32.3}$$

где $\boldsymbol{F}'$ — сумма реальной силы $\boldsymbol{F}$ и трех *фиктивных сил* $\boldsymbol{F}_0$, $\boldsymbol{F}_c$, $\boldsymbol{F}_t$. Здесь $\boldsymbol{F}_0$ — сила, которая возникает только вследствие ускорения полюса (она существует даже если S не вращается); $\boldsymbol{F}_c$ — сила Кориолиса, имеющая большое значение в метеорологии и во всех явлениях, связанных с вращением Земли; F_t — по своей природе принадлежит к *центробежным* силам, хотя этот термин обычно применяется только в том случае, когда $\omega = \mathrm{const}$, и тогда (ср. (20.14))

$$F_t = mR\omega^2. \tag{32.4}$$

Если движение тела S равномерное, то $a_0 = \omega = 0$, и уравнение движения (32.1) превращается в уравнение

$$ma' = F, \tag{32.5}$$

которое означает, что такая система отсчета — ньютонова. Этот результат известен как относительность в смысле Ньютона. Исходя от абсолютного пространства S_0 и ньютонова закона движения относительно S_0 — находим, что этот закон выполняется также в любой системе S, движущейся равномерно.

ГЛАВА II

ОДНОМЕРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

§ 33. Простой гармонический осциллятор. Затухание. Простой гармонический осциллятор представляет собой частицу, которая движется по некоторой прямой под влиянием восстанавливающей силы, направленной к точке O на этой линии, а по величине пропорциональной расстоянию частицы от точки O. Если одновременно на точку действует сила трения, обусловливающая затухание (ее часто называют демпфирующей силой), пропорциональная скорости и противоположная ей по направлению, а также вынуждающая сила, то уравнение движения принимает вид

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + p^2x = X, \tag{33.1}$$

где

$$\left.\begin{array}{ll} \text{восстанавливающая сила} & = -mp^2x, \\ \text{демпфирующая (сила трения)} & = -2m\mu\dot{x}, \\ \text{вынуждающая сила} & = mX, \end{array}\right\} \tag{33.2}$$

и m — масса частицы. Для незатухающего невозмущенного движения осциллятора движение описывается уравнениями

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{x} + p^2x = 0, \\ x = a\cos(pt+\varepsilon), \end{array}\right\} \tag{33.3}$$

где a — амплитуда колебания[1]), $\frac{2\pi}{p}$ — период, $\frac{p}{2\pi} = \nu$ — частота, $p = 2\pi\nu = \omega$ — круговая частота, $pt+\varepsilon = \varphi$ — фаза, ε — начальная фаза.

---

[1]) Иногда амплитудой называют величину $2a$, а величину a — полуамплитудой.

Говорят, что для двух значений φ, отличающихся на целое кратное 2π, осциллятор находится «в одной и той же фазе». Решение уравнения (33.3) можно также записать в комплексной форме

$$x = Ae^{ipt}, \tag{33.4}$$

где A — комплексная амплитуда, которая включает фазовую постоянную. Физическое смещение x равно действительной части комплексного числа (33.4).

Если $X = 0$, то общее решение уравнения затухающих колебаний (33.1) в комплексной форме имеет вид

$$x = Ae^{n_1 t} + Be^{n_2 t}, \tag{33.5}$$

где n_1, n_2 — корни уравнения

$$n^2 + 2\mu n + p^2 = 0. \tag{33.6}$$

Эти корни могут быть действительными или комплексными. В первом случае имеет место непериодическое движение (апериодическое затухание), во втором — затухающие колебания[1]).

Если действует демпфирующая сила, а также вынуждающая сила, заданная как функция времени t, то общее решение уравнения (33.1) будет иметь вид

$$x = Ae^{n_1 t} + Be^{n_2 t} + \\ + \frac{1}{n_1 - n_2} \int_0^t X(\tau) \left\{ e^{n_1(t-\tau)} - e^{n_2(t-\tau)} \right\} d\tau. \tag{33.7}$$

Для синусоидальной вынуждающей силы

$$X(t) = X_0 e^{iqt}, \tag{33.8}$$

решение (33.7) преобразуется к следующему виду:

$$x = A'e^{n_1 t} + B'e^{n_2 t} + \frac{X_0 e^{iqt}}{n_1 - n_2} \left(\frac{1}{iq - n_1} - \frac{1}{iq - n_2} \right), \tag{33.9}$$

1) Так как коэффициент затухания μ положителен, то действительная часть каждого из корней обязательно отрицательна; детали см. Synge and Griffith [26], стр. 163—166.

где A' и B' — новые произвольные постоянные. При $t \to \infty$ два первых члена исчезают и мы получаем для выражения *вынужденных колебаний*

$$x = \frac{X_0 e^{iqt}}{(iq - n_1)(iq - n_2)} = \frac{X_0 e^{iqt}}{p^2 - q^2 + 2i\mu q}. \qquad (33.10)$$

Амплитуда велика (*резонанс*), если малы $(p - q)$ и μ, т. е. если частота возмущающей силы близка к частоте незатухающего свободного колебания, а затухание мало [1]).

§ 34. Круговой и циклоидальный маятники. Рассмотрим частицу массы m, движущуюся под действием силы тяжести по гладкому вертикальному кругу радиуса l (круговой маятник). Если ϑ — угол отклонения от направленной вниз вертикали, то полная энергия этой частицы равна

$$\frac{1}{2} ml^2\dot{\vartheta}^2 + mgl(1 - \cos\vartheta) = E = \text{const}, \qquad (34.1)$$

и уравнение движения имеет вид

$$\ddot{\vartheta} + p^2 \sin\vartheta = 0, \quad p^2 = \frac{g}{l}. \qquad (34.2)$$

Для малых амплитуд оно сводится к уравнению (33.3) для гармонического осциллятора и период колебания равен

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (34.3)$$

Вообще мы получаем колебательное движение, если

$$\omega_0 = |\dot{\vartheta}|_{\vartheta=0} < 2p, \qquad (34.4)$$

и движение определяется уравнением

$$\sin\frac{1}{2}\vartheta = \sin\frac{1}{2}\alpha \operatorname{sn} p(t - t_0), \qquad (34.5)$$

[1]) Ср. (104.19), которое является обобщением уравнения (33.10) на случай колебания системы с бóльшим количеством степеней свободы.

где α — максимальное значение ϑ, так что

$$\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{p}. \tag{34.6}$$

Величина t_0 в уравнении (34.5) — произвольная постоянная и эллиптическая функция Якоби sn имеет в качестве модуля[1]) $\sin\frac{1}{2}\alpha$.

Период колебания выражается следующим образом:

$$\tau = \frac{4}{p}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} =$$

$$= \frac{2\pi}{p}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4+\ldots\right], \tag{34.7}$$

где $k = \sin\frac{1}{2}\alpha$; это дает с точностью до членов порядка α^2

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\alpha^2}{16}\right). \tag{34.8}$$

Если $\omega_0 > 2p$, движение уже не является колебательным, частица описывает круг за кругом по окружности. В этом случае решение[2]) таково:

$$\sin\frac{1}{2}\vartheta = \operatorname{sn}\frac{p}{k}(t-t_0), \tag{34.9}$$

где $k = 2p/\omega_0 < 1$, и модуль функции sn есть k.

Если $\omega_0 = 2p$, то частица достигает наивысшей точки круга при $t=\infty$; движение определяется формулой

$$\sin\frac{1}{2}\vartheta = \operatorname{th} p\,(t-t_0). \tag{34.10}$$

Для движения под действием силы тяжести по некоторой гладкой кривой в вертикальной плоскости урав-

---

[1]) Уиттекер [28], стр. 88; Synge and Griffith, [26], стр. 371.

[2]) Уиттекер [28], стр. 88—89.

нением движения является следующее уравнение:

$$\ddot{s} + g\frac{dz}{ds} = 0, \tag{34.11}$$

где s — длина дуги и z — высота над некоторым фиксированным уровнем. Если

$$z = ks^2, \tag{34.12}$$

то получаем уравнение

$$\ddot{s} + 2gks = 0,$$

т. е. уравнение того же вида, что и для гармонического осциллятора. Период тогда не зависит от амплитуды и кривая (34.12), которая является циклоидой, называется *таутохроной* для силы тяжести[1]).

[1]) О таутохронах и брахистохронах (кривые наибыстрейшего спуска) см. А п п е л ь [II], т. 1, стр. 390—408; M a c m i l l a n [17], т. I, стр. 322—329.

ГЛАВА III

ДВУМЕРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

§ 35. Движение частицы в однородном гравитационном поле в сопротивляющейся среде. Для частицы с массой m, которая движется в однородном гравитационном поле в сопротивляющейся среде, плотность которой зависит только от высоты, уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x} = -f(v, y)\frac{\dot{x}}{v}, \quad \ddot{y} = -g - f(v, y)\frac{\dot{y}}{v}. \tag{35.1}$$

Здесь ось x — горизонтальна, ось y направлена вертикально вверх и $mf(v, y)$ — сила сопротивления движению; v — абсолютная величина скорости.

Если $f = 0$, мы получаем элементарную параболическую траекторию

$$x = a + bt, \quad y = c + et - \frac{1}{2}gt^2, \tag{35.2}$$

где a, b, c, e — постоянные, определяемые начальными условиями[1]. Если $f = kv$, уравнения (35.1) имеют простые экспоненциальные решения[2]. Уравнения интегрируются до конца[3] также для случая $f = k_0 + kv^n$, который содержит как частный случай[4] сопротивление, пропорциональное квадрату скорости ($f = kv^2$).

Интегрирование уравнений в форме (35.1) является центральной задачей внешней баллистики; здесь функция

---

[1]) Геометрические построения, связанные с параболическими траекториями см. Аппель [2], 1, стр. 304—306; Ламб [13], стр. 95—96; Synge and Griffith [26], стр. 151.

[2]) См. Synge and Griffith [26], стр. 159.

[3]) См. Аппель [2], 1, стр. 306—313; Macmillan [17], 1, стр. 256. Это — интегрируемый случай Лежандра.

[4]) См. Synge and Griffith [26], стр. 157.

$f(x, y)$ задается численно или некоторой эмпирической формулой[1]). Применяется также численное интегрирование.

§ 36. Проблема Кеплера[2]). В проблеме Кеплера частица с массой m притягивается к неподвижной точке O (или отталкивается от нее) с силой, обратно пропорциональной квадрату ее расстояния r до точки O. Пусть направленная к точке O компонента этой силы равна $m\mu/r^2$ (μ — положительно в случае притяжения и отрицательно при отталкивании). Вследствие симметрии орбита — плоская кривая, и уравнения движения, выраженные в полярных координатах (ϑ, r) в плоскости орбиты, имеют следующий вид (ср. (30.13)):

$$\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}, \quad r^2\dot{\vartheta} = h, \tag{36.1}$$

где $h = \text{const}$ есть момент количества движения единичной массы (ср. (31.6)). Кинетическая и потенциальная энергии единичной массы равны

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\ }^2 + r^2\dot{\vartheta}^2), \quad V = -\frac{\mu}{r}. \tag{36.2}$$

Мы имеем уравнение энергии

$$T + V = E, \tag{36.3}$$

где $E = \text{const}$ — полная энергия единичной массы.

Полагая $u = 1/r$ и исключая t из уравнений (36.1), мы получим

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}, \tag{36.4}$$

---

[1]) О прежних подходах к внешней баллистике см. Charbonnier P., Traité de Balistique extérieure (два тома) (Paris, Doin & Gauthier — Villars, 1921—1927) и о современных подходах см. McShane E. J., Kelley J. L. and Reno F., Exterior Ballistics (Denver, University Press 1953).

[2]) О решении проблемы Кеплера при помощи уравнения Гамильтона — Якоби см. § 78 или Аппель [2], т. 1, стр. 485—488. О релятивистской проблеме Кеплера см. § 115. О силе вида $r^2\Phi(\vartheta)$ см. Аппель [2], т. 1, стр. 332.

и, следовательно,

$$u = \frac{\mu}{h^2} + C\cos(\vartheta - \vartheta_0), \tag{36.5}$$

где C, ϑ_0 — постоянные интегрирования. Постоянная C определяется из уравнения (36.3) через E и h; кроме того, соответствующим выбором линии $\vartheta = 0$ можно сделать $\vartheta_0 = 0$. Тогда уравнение орбиты может быть записано в виде

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{l}(1 + e\cos\vartheta), \tag{36.6}$$

где

$$l = \frac{h^2}{\mu}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{\mu^2}}. \tag{36.7}$$

Орбита является коническим сечением с эксцентриситетом e. В зависимости от того, какое из соотношений имеет место, $E < 0$, $E = 0$ или $E > 0$, эта кривая соответственно эллипс, парабола или гипербола. Центр силы совпадает с фокусом конического сечения.

В случае силы отталкивания $\mu < 0$, $E > 0$ и орбита может быть только гиперболической; это — ветвь гиперболы, обращенная выпуклостью к точке O.

Эллиптическая орбита определяется большой полуосью a и эксцентриситетом e, или постоянными E и h. Связь между этими константами выражается формулами

$$\left.\begin{aligned} a &= -\frac{\mu}{2E}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{\mu^2}}, \\ E &= -\frac{\mu}{2a}, \quad h = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{36.8}$$

Абсолютное значение скорости v на расстоянии r от точки O определяется выражением

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \tag{36.9}$$

а период равен

$$\tau = \frac{2\pi a^2}{h}\sqrt{1-e^2} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = \frac{\pi\mu}{\sqrt{-2E^3}}. \quad (36.10)$$

Мы не можем здесь входить в детали исследования эллиптических (планетных) орбит, наиболее интересных для небесной механики[1]).

§ 37. Общий случай центральных сил. Для частицы с массой m, отталкивающейся от неподвижной точки O силой $mF(u)$, где $u = 1/r$, уравнения (30.13) приводятся к виду

$$\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 = F, \quad r^2\dot{\vartheta} = h, \quad (37.1)$$

и отсюда к уравнению

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u = -\frac{F}{h^2u^2}. \quad (37.2)$$

Эти уравнения охватывают и случай притяжения, тогда F — отрицательна. Потенциал V в этом случае существует и определяется выражением

$$V(u) = -\int_{r_0}^{r} F\,dr, \quad (37.3)$$

где r_0— некоторая постоянная. Уравнение энергии $T + V = \text{const}$ приводит к выражению

$$\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 + u^2 = \frac{2(E-V)}{h^2}, \quad (37.4)$$

которое является, конечно, первым интегралом уравнения (37.2). Это уравнение[2]) может быть решено в квадратурах,

---

[1]) Об аномалиях, уравнении Кеплера, теореме Ламберта см. Аппель [2], 1, стр. 332; Уиттекер [28], стр. 101—110. Также Macmillan [17], I, стр. 278—292, где рассмотрены и отталкивательные силы.

[2]) Уравнение этого типа приводит, вообще говоря, к периодическим решениям и часто встречается в динамике. Эллиптические функции можно рассматривать с помощью таких уравнений; см. Pérès [20], стр. 107—122, Synge and Griffith [26], стр. 364—370.

так как оно имеет форму

$$\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 = f(u) = \frac{2(E-V)}{h^2} - u^2. \qquad (37.5)$$

Для того чтобы связать время t с переменными (u, ϑ), мы имеем согласно уравнениям (37.1)

$$dt = \frac{r^2 d\vartheta}{h} = \pm \frac{du}{hu^2 \sqrt{f(u)}}, \qquad (37.6)$$

знак выбирается так, чтобы дифференциал dt был положительным.

Апсидами какой-либо орбиты являются те точки, в которых r максимально или минимально. Таким образом, апсидам соответствуют точки $u = u_1$, $u = u_2$, где

$$f(u_1) = 0, \quad f(u_2) = 0. \qquad (37.7)$$

Апсидальный угол, по определению, равен

$$\alpha = \int\limits_{u=u_1}^{u=u_2} d\vartheta = \int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}. \qquad (37.8)$$

Уравнение всей орбиты можно получить из уравнения части ее, заключенной между двумя соседними апсидами, так как орбита симметрична относительно любого апсидального радиуса. Вся орбита заключена между двумя концентрическими окружностями (и касается их), но в исключительных случаях радиус внутренней окружности может обращаться в нуль, а радиус внешней — в бесконечность.

Заимствуя термины из астрономии, мы можем назвать одну из апсид внутренней окружности перигелием и одну из внешних апсид — афелием.

Если сила пропорциональна $r (F = \varepsilon k^2 r,\ \varepsilon = \pm 1)$, то движение проще исследовать с помощью декартовых прямоугольных координат; в этом случае имеем уравнения

$$\ddot{x} = \varepsilon k^2 x, \quad \ddot{y} = \varepsilon k^2 y. \qquad (37.9)$$

Если $\varepsilon = -1$, то орбита — эллипс, центр которого совпадает с началом координат и уравнения которого имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x &= A\cos kt + B\sin kt, \\ y &= C\cos kt + D\sin kt. \end{aligned}\right\} \qquad (37.10)$$

Если $\varepsilon = +1$, решение аналогичным образом выражается через гиперболические функции. В этом случае орбита — центральная гипербола. В специальных случаях (при обращении в нуль момента импульса) орбитой является прямая линия, проведенная через начало координат. Тогда в случае $\varepsilon = -1$ мы имеем простой гармонический осциллятор.

§ 38. Устойчивость круговой орбиты. Для круговой орбиты радиуса $r = 1/u$ мы требуем выполнения условий

$$f(u) = 0, \quad f'(u) = 0. \qquad (38.1)$$

Первое условие есть следствие уравнения (37.5), второе же следует из (37.2), которое эквивалентно уравнению

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} = \frac{1}{2} f'(u). \qquad (38.2)$$

Полагая $u = u_0$ для круговой орбиты, мы пишем для возмущенной орбиты

$$u = u_0 + \xi \qquad (38.3)$$

(предполагая, что ξ — мало) и, отбрасывая члены выше первого порядка в ξ, получаем из уравнений (38.2) и (38.1) следующее уравнение:

$$\frac{d^2\xi}{d\vartheta^2} = \frac{1}{2}\xi f''(u_0). \qquad (38.4)$$

Уравнение имеет синусоидальное решение, обеспечивающее устойчивость тогда (и только тогда), когда выполняется условие

$$f''(u_0) < 0. \qquad (38.5)$$

Таким образом, имеет место следующий критерий устойчивости круговой орбиты радиуса $r = \frac{1}{u}$, описанной частицей под действием центральной силы притяжения:

$$\frac{1}{2} f''(u) = -1 - \frac{1}{h^2}\frac{d}{du}\left(\frac{F}{u^2}\right) < 0. \tag{38.6}$$

Здесь сила F — отрицательна, а сила притяжения по величине равна mF. Согласно уравнению (37.2) имеем далее в случае круговой орбиты

$$h^2 = -\frac{F}{u^3}. \tag{38.7}$$

Следовательно, критерий устойчивости можно записать в виде

$$3F < u\frac{dF}{du}, \tag{38.8}$$

или

$$3F + r\frac{dF}{dr} < 0. \tag{38.9}$$

Если сила притяжения пропорциональна r^{-n}, то движение устойчиво тогда и только тогда, когда $n < 3$.

§ 39. Колебания под действием силы тяжести на неподвижной поверхности[1]. Пусть S — гладкая неподвижная поверхность и O — точка на ней, и пусть касательная плоскость к поверхности в точке O горизонтальна. Пусть $Oxyz$ — система координат, в которой ось Oz направлена вертикально вверх и плоскость Oxy совпадает с плоскостью, образуемой главными направлениями кривизны поверхности S, так что приближенно ее уравнение в окрестности точки O имеет вид

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2}\right), \tag{39.1}$$

где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны. Если частица с массой m движется по поверхности S под действием силы тяжести, ее точные уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x} = \lambda N, \quad \ddot{y} = \mu N, \quad \ddot{z} = \nu N - g, \tag{39.2}$$

[1]) Ср. Аппель [2], 1, стр. 410—442.

где mN — реакция поверхности и λ, μ, ν — направляющие косинусы нормали. С точностью до величин первого порядка относительно x, y имеем соотношения

$$\lambda = -\frac{x}{R_1}, \quad \mu = -\frac{y}{R_2}, \quad \nu = 1; \tag{39.3}$$

отсюда $N = g$ и

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x} + k_1^2 x = 0, \quad \ddot{y} + k_2^2 y = 0, \\ &k_1^2 = \frac{g}{R_1}, \qquad k_2^2 = \frac{g}{R_2}. \end{aligned}\right\} \tag{39.4}$$

Решение имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x &= A \cos (k_1 t + B), \\ y &= C \cos (k_2 t + D). \end{aligned}\right\} \tag{39.5}$$

Эти кривые в плоскости xy (называемые фигурами Лиссажу [1])) представляют собой результат сложения простых гармонических движений с различными частотами. Это — замкнутые кривые, если k_1/k_2 — рациональное число; в противном случае они заполняют [2]) весь прямоугольник $x^2 \leqslant A^2$, $y^2 \leqslant C^2$.

Сферический маятник состоит из тяжелой частицы, подвешенной к неподвижной точке на легкой нерастяжимой нити. По существу, это тот же случай, что и частица, движущаяся под действием силы тяжести по гладкой неподвижной сфере. Чтобы исследовать малые колебания, мы полагаем $R_1 = R_2$ в изложенной выше теории; период колебания равен

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{R_1}{g}} \tag{39.6}$$

и орбита (39.5) является эллипсом с центром, совпадающим с началом координат.

Значительно более сложны конечные колебания под действием силы тяжести на гладкой сфере. Выбирая центр сферы за начало системы координат, ось Oz которой

---

1) О получении фигур Лиссажу с помощью маятника Блэкберна см. Ламб [13], стр. 101—103.

2) Ср. Аппель [2], 1, стр. 427.

направлена вертикально вверх, мы найдем четыре уравнения

$$\left.\begin{gathered}\ddot{x} = -\frac{x}{a}N, \quad \ddot{y} = -\frac{y}{a}N, \quad \ddot{z} = -\frac{z}{a}N - g,\\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\end{gathered}\right\} \tag{39.7}$$

где a — радиус сферы. Затем можно использовать либо сохранение энергии (mE), либо сохранение момента импульса (mh) относительно оси Oz. Мы получаем уравнения[1])

$$\left.\begin{gathered}(a^2 - z^2)\dot{\varphi} = h, \quad \dot{z}^2 = f(z),\\ f(z) = \frac{2g}{a^2}\left[(z^2 - a^2)\left(z - \frac{E}{g}\right) - \frac{h^2}{2g}\right],\end{gathered}\right\} \tag{39.8}$$

в которых (r, φ, z) — цилиндрические координаты. Три корня z_1, z_2, z_3 кубического уравнения $f(z)$ обязательно действительные и удовлетворяют условию $-a < z_1 < z_2 < < a < z_3$ и решение может быть выражено следующим образом с помощью эллиптических функций:

$$\left.\begin{aligned}z - z_1 &= (z_2 - z_1)\,\mathrm{sn}^2\, p(t - t_0),\\ z_2 - z &= (z_2 - z_1)\,\mathrm{cn}^2\, p(t - t_0),\\ z_3 - z &= (z_3 - z_1)\,\mathrm{dn}^2\, p(t - t_0),\end{aligned}\right\} \tag{39.9}$$

где

$$p = \sqrt{\frac{g(z_3 - z_1)}{2a^2}} \tag{39.10}$$

и модуль эллиптических функций равен k, где

$$k^2 = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}. \tag{39.11}$$

Когда колебания малы, проекция орбиты на плоскость xy есть небольшой эллипс, который вращается на малый угол $3A/4a^2$ за оборот орбиты; A — площадь эллипса. Это вращение (в том же направлении, в каком описывается орбита) нельзя смешивать с вращением Фуко (ср. § 43).

---

[1]) Детали доказательства см. у Аппеля [2], т. 1, стр. 433—442; Synge and Griffith [26], стр. 375—381.

ГЛАВА IV

ТРЕХМЕРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

§ 40. Заряженная частица в электромагнитном поле[1]**.** Когда частица с массой m, несущая электрический заряд e, движется в электромагнитном поле с электрическим вектором $\boldsymbol{E}$ и магнитным вектором $\boldsymbol{H}$, уравнение движения[2] имеет вид

$$ma = e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}). \tag{40.1}$$

Это дает уравнение:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} mv^2\right) = e\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E}, \tag{40.2}$$

следовательно, если $\boldsymbol{E}$ имеет потенциал[3] ($\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} V$), то интеграл энергии имеет вид

$$\frac{1}{2} mv^2 + eV = \text{const}. \tag{40.3}$$

Если $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ — константы (однородное электромагнитное поле), то уравнение (40.1) легко решается следующим образом. В случае, если $H = 0$, траекторией будет парабола. Если $H \neq 0$, мы представим $\boldsymbol{v}$ в форме

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{E} + v_2\boldsymbol{H} + v_3\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}. \tag{40.4}$$

---

[1]) Ср. Аппель [2], 1, стр. 315.

[2]) Мы измеряем E в электростатических единицах, а H — в электромагнитных; если H выражено в электростатических единицах, то вместо v нужно подставить v/c, где c — отношение этих единиц, т. е. скорость света. Релятивистские уравнения имеют ту же правую часть, что и данное уравнение. Ср. (115.8).

[3]) Это условие всегда выполняется, если поле не зависит от времени.

Подставляя это значение в уравнение (40.1) и записывая в компонентах, получаем следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= -AH\sin(kHt+B), \\ v_2 &= C-\frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}}{H^2}\{kt-AH\sin(kHt+B)\}, \\ v_3 &= \frac{1}{H^2}-A\cos(kHt+B), \end{aligned}\right\} \tag{40.5}$$

где $k=-e/m$ и A, B, C — постоянные интегрирования. Радиус-вектор частицы, представленный в форме аналогичной (40.4), определится тогда интегрированием уравнений (40.5).

Если и электрическое и магнитное поля оба постоянны и ортогональны, мы имеем $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}=0$ и отсюда $v_2=\mathrm{const}$. Направляя оси $Oxyz$ по векторам $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$, так что $\dot{x}=v_1E$, $\dot{y}=v_2H$, $\dot{z}=v_3EH$, имеем затем

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0+A'\cos(kHt+B), \\ y &= y_0+C't, \\ z &= z_0+\frac{Et}{H}-A'\sin(kHt+B), \end{aligned}\right\} \tag{40.6}$$

где $A'=AE/k$, $C'=CH$. Если $C=0$, то уравнения представляют движение по окружности в плоскости, перпендикулярной к $\boldsymbol{H}$ с угловой скоростью kH; при этом центр окружности движется по прямой линии, перпендикулярной к $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ со скоростью E/H.

Если $E=0$, то траектория — круговая спираль с осью, параллельной магнитному полю, описываемая частицей с азимутальной угловой скоростью He/m.

§ 41. Аксиально-симметричные электромагнитные поля. В статическом электромагнитном поле электрический потенциал V и магнитный потенциал Ω являются гармоническими функциями. Если поле имеет ось z осью симметрии, эти функции могут быть разложены в степенные ряды

$$\left.\begin{aligned} V &= V_0(z) + \frac{1}{2}R^2V_1(z) + \frac{1}{24}R^4V_2(z) + \ldots, \\ \Omega &= \Omega_0(z) + \frac{1}{2}R^2\Omega_1(z) + \frac{1}{24}R^4\Omega_2(z) + \ldots, \end{aligned}\right\} \quad (41.1)$$

где $R^2 = x^2 + y^2$, и мы находим из уравнения Лапласа следующие соотношения:

$$V_0''(z) + 2V_1(z) = 0, \quad V_1''(z) + \frac{4}{3}V_2(z) = 0, \ \ldots \quad (41.2)$$

и аналогичные уравнения для Ω, так что коэффициенты в разложениях (41.1) зависят только от аксиальных потенциалов V_0, Ω_0. Уравнения движения (40.1) заряженной частицы, движущейся вблизи оси z, могут быть рассмотрены приближенно. Из интеграла (40.3) находим $z = w$, $w^2 = 2k(V_0 - C)$, где $k = -e/m$ и $C = \mathrm{const}$, и после исключения времени получаем комплексное уравнение траектории:

$$\left.\begin{aligned} &\zeta'' + P\zeta' + Q\zeta = 0, \quad P = \frac{w'}{w} + \frac{ik\Omega_0'}{w}, \\ &\zeta = x + iy, \quad Q = \frac{1}{2}\left(\frac{w''}{w} + \frac{w'^2}{w^2}\right) + \frac{ik\Omega_0''}{2w}. \end{aligned}\right\} \quad (41.3)$$

Штрих означает производную $\frac{d}{dz}$. Здесь P и Q — заданные функции z. Это дифференциальное уравнение второго порядка — фундаментальное в электронной оптике; им в основном и определяется образование изображения в электронном микроскопе[1]. Чтобы исследовать аберрации, нужно привлечь приближения высших порядков[2].

---

[1] Некоторые детали см. Synge and Griffith [22], стр. 387—403.

[2] О принципах геометрической оптики см. статью A. Maréchal, Handbuch der Physik, Vol. XXIV; об электронной оптике и электронных микроскопах см. статьи W. Glaser and S. Leisegang, Vol. XXXIII. См. также W. Glaser, Grundlagen der Elektronenoptik. Vienna: Springer, 1952.

§ 42. Движение относительно вращающейся Земли[1]. Мы пренебрегаем здесь орбитальным движением вокруг Солнца и рассматриваем Землю как твердое тело, вращающееся с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$. Пусть $Oxyz$ — прямоугольная система координат (рис. 12) с началом O в точке земной поверхности. Ось Oz направлена вертикально вверх (т. е. по отвесной линии) и ось Ox направлена на юг. Пусть орты $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ ортонормального триэдра направлены как оси координат этой системы. Для того чтобы исследовать движение относительно земной поверхности, будем использовать эту систему отсчета так, как если бы она была неподвижной, добавляя фиктивные силы как в уравнении (32.1). Пусть λ — широта точки O и R — расстояние от точки O до земной оси. Тогда

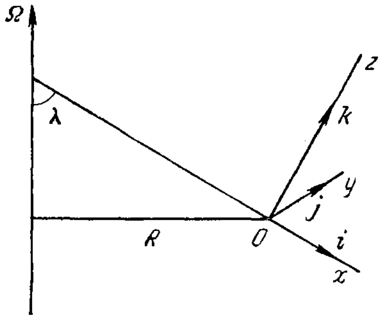


Рис. 12. Оси, связанные с вращающейся Землей.

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} &= -\Omega\cos\lambda\boldsymbol{i} + \Omega\sin\lambda\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{a}_0 &= -R\Omega^2\sin\lambda\boldsymbol{i} - R\Omega^2\cos\lambda\boldsymbol{k}; \end{aligned}\right\} \qquad (42.1)$$

следовательно, если $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$ теперь означают радиус-вектор и скорость частицы в системе $Oxyz$ и $\dot{\boldsymbol{v}}$ — ее относительное ускорение, то, согласно выражению (32.1), имеем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} + mR\Omega^2(\sin\lambda\boldsymbol{i} + \cos\lambda\boldsymbol{k}) - \\ - 2m\Omega(-\cos\lambda\boldsymbol{i} + \sin\lambda\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{v} - m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}), \end{aligned} \qquad (42.2)$$

где $\boldsymbol{F}$ — действительная сила, действующая на частицу. Пусть $\boldsymbol{F}_0$ — сила тяжести, действующая в точке O. Пусть g определяется тем, что натяжение нити со свинцовым грузом массы m, подвешенным в точке O, равно mg.

---

[1]) Ср. Аппель [2], II, стр. 248—253, а также Synge and Griffith [26], стр. 403—408.

Тогда уравнение (42.2) удовлетворяется при

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_0 + mg\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{v} = 0, \qquad \boldsymbol{r} = 0 \tag{42.3}$$

и поэтому мы имеем соотношение

$$\boldsymbol{F}_0 + mg\boldsymbol{k} + mR\Omega^2(\sin\lambda\boldsymbol{i} + \cos\lambda\boldsymbol{k}) = 0. \tag{42.4}$$

Вычтем теперь (42.4) из (42.2), отбросив последний член в (42.2) в силу малости Ω. Это дает следующие уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= X + 2m\Omega\sin\lambda\cdot\dot{y}, \\ m\ddot{y} &= Y - 2m\Omega(\sin\lambda\cdot\dot{x} + \cos\lambda\cdot\dot{z}), \\ m\ddot{z} &= Z - mg + 2m\Omega\cos\lambda\cdot\dot{y}, \end{aligned}\right\} \tag{42.5}$$

где (X, Y, Z) — компоненты разности между полной действительной силой, действующей на частицу, и силой тяжести, действующей на нее в точке O.

В случае свободной частицы (снаряд в вакууме) мы полагаем $X = Y = Z = 0$, если можно пренебречь изменением силы тяжести с положением. Пренебрегая величинами порядка Ω^2, мы получаем для частицы, начинающей двигаться от начала координат в момент времени $t = 0$ со скоростью (u_0, v_0, w_0), следующие уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 t + \Omega v_0 t^2 \sin\lambda, \\ y &= v_0 t - \Omega t^2(u_0\sin\lambda + \omega_0\cos\lambda) + \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{3}\Omega g t^3\cos\lambda, \\ z &= w_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + \Omega v_0 t^2\cos\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{42.6}$$

В свободном падении с высоты h (из состояния покоя) частица отклоняется к востоку на величину

$$\frac{1}{3}\Omega\cos\lambda\cdot 2h\sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{42.7}$$

Для снаряда, движущегося по настильной траектории (w_0 — мало́), проекция радиуса-вектора на горизонтальную плоскость Oxy возрастает с постоянной скоростью и поворачивается также с постоянной скоростью $-\Omega \sin \lambda$; это означает отклонение направо в северном полушарии и налево — в южном (закон Фереля).

§ 43. Маятник Фуко[1]. Частица массы m подвешена на легкой нити длиной l в точке (O, O, l) (ср. рис. 12). Тогда O есть положение равновесия и если частица выведена из него, то она движется согласно уравнениям (42.5), в которых

$$X = -\frac{x}{l} S, \quad Y = -\frac{y}{l} S, \quad Z = \frac{l-z}{l} S, \qquad (43.1)$$

где S — натяжение нити. Для малых возмущений z — величина второго порядка малости, и мы получаем следующее соотношение:

$$S = Z = mg - 2m\Omega \cos \lambda \cdot \dot{y}, \qquad (43.2)$$

как следствие последнего из уравнений (42.5). Два других уравнения принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2\Omega \sin \lambda \cdot \dot{y} + p^2 x = 0, \\ \ddot{y} + 2\Omega \sin \lambda \cdot \dot{x} + p^2 y = 0, \end{aligned} \right\} \qquad (43.3)$$

где $p^2 = g/l$. Вводя переменную $\zeta = x + iy$, мы записываем оба эти уравнения в виде

$$\ddot{\zeta} - 2i\Omega \sin \lambda \cdot \dot{\zeta} + p^2 \zeta = 0, \qquad (43.4)$$

а его решение, пренебрегая Ω^2, в виде

$$\zeta = (Ae^{ipt} + Be^{-ipt})\, e^{-i\Omega t \sin \lambda} \qquad (43.5)$$

Первый множитель справа представляет движение по неподвижному центральному эллипсу, второй множитель

---

[1]) Ср. Аппель [2], т. II, стр. 254—257; Synge and Griffith [26], стр. 408—411.

превращает его в эллипс, вращающийся с угловой скоростью — $\Omega \sin \lambda$; вращение направлено по часовой стрелке в северном полушарии и против нее — в южном.

Вращение Фуко нельзя смешивать с похожим явлением, имеющим место в случае малых колебаний сферического маятника (§ 39). Если маятник начинает движение из положения покоя (например, при пережигании поддерживающей нити), то орбита должна была бы быть прямой линией, если бы Земля не вращалась. В действительности орбитой является эллиптическая линия и секториальная скорость равна

$$\frac{3}{8} \alpha^2 \Omega \sin \lambda,$$

где α — начальная угловая амплитуда. Так как α мало́, то этот эффект значительно меньше, чем вращение Фуко.

Г. ДИНАМИКА СИСТЕМ ЧАСТИЦ И ТВЕРДЫХ ТЕЛ

ГЛАВА I

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

§ 44. Теоремы об импульсе и моменте импульса. Р смотрим систему из P частиц с массами m_i ($i=1, 2, .$ и радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_i$ относительно начала коор ‚г, неподвижного в абсолютном пространстве S_0. Н эти частицы действуют силы $\boldsymbol{F}_i$, которые мы разложим на эш-ние $\boldsymbol{F}'_i$, и внутренние, $\boldsymbol{F}''_i$, как в § 26. Уравнения же-ния отдельных частиц можно написать в виде

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}'_i + \boldsymbol{F}''_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ P) \qquad 4.1)$$

и, так как $\sum\limits_{i=1}^{P} \boldsymbol{F}''_i = 0$, получаем

$$\dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{F}, \qquad (44.2$$

где

$$\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{P} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i, \qquad \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{P} \boldsymbol{F}'_i, \qquad (44.3)$$

а $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{F}$ представляют собой соответственно импульс системы (§ 23) и главный вектор внешних сил (§ 26). Уравнение (44.2) выражает теорему об импульсе: *скорость изменения импульса системы равна главному вектору внешних сил.*

Можно также записать уравнение (44.2) в форме

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}, \qquad (44.4)$$

где m — масса всей системы и $\boldsymbol{a}$ — ускорение центра масс.

Так как $\sum_{i=1}^{p} r_i \times F_i'' = 0$, то выражение (44.1) дает так же как следствие уравнение

$$\dot{h} = G, \tag{44.5}$$

где

$$h = \sum_{i=1}^{p} m_i r_i \times \dot{r}_i, \qquad G = \sum_{i=1}^{p} r_i \times F_i', \tag{44.6}$$

h и G соответственно полный момент абсолютного импульса, взятый для неподвижного начала отсчета и главный момент всех внешних сил относительно этого начала. Отсюда имеем теорему момента импульса в ее первой форме: *скорость изменения момента импульса, взятого для неподвижной точки, равна сумме моментов внешних сил относительно этой точки.*

Принимая во внимание выражения (24.11), легко получим из (44.4) и (44.5) уравнение

$$h^* = G^*, \tag{44.7}$$

где h^* — момент относительного импульса, взятый для центра масс O^*, если рассматривать движение относительно точки O^* [1]), а G^* — сумма моментов внешних сил относительно точки O. Это — вторая форма теоремы момента импульса, когда движение рассматривается не относительно неподвижной точки, а относительно центра масс.

Смысл приведенного вывода состоит в исключении внутренних сил на основании третьего закона Ньютона [2]). Теоремы об импульсе и моменте импульса справедливы для любой ньютоновой системы. Мы можем, конечно, заменить абсолютное пространство S_0 какой-нибудь ньютоновой системой S, равномерно движущейся относительно S_0 (ср. § 32).

---

[1]) Имеется в виду импульс по отношению к системе отсчета, движущейся поступательно с началом в центре масс.

[2]) Ср. § 26. Аксиомы однородности и изотропности пространства (§ 5) здесь было бы недостаточно.

§ 45. Принцип Даламбера. Энергия. Пусть $\delta\boldsymbol{r}_i$ ($i = 1, \ldots, P$) — произвольная совокупность бесконечно малых векторов. Согласно (44.1) имеем уравнение

$$\sum_{i=1}^{P} m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{P} \boldsymbol{F}_i\delta\boldsymbol{r}_i = \delta W, \tag{45.1}$$

где δW — работа, произведенная силами $\boldsymbol{F}_i$ на перемещениях $\delta\boldsymbol{r}_i$. Эти перемещения называются *виртуальными*, в отличие от перемещений, действительно происходящих при движении, а именно таких, что $d\boldsymbol{r}_i = \dot{\boldsymbol{r}}_i\, dt$.

Для того чтобы придать соотношению (45.1) вид принципа виртуальной работы в статике, назовем векторы $m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ *эффективными силами*, а векторы, противоположные этим ($-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$) — *силами инерции*, тогда соотношения (45.1) можно сформулировать в любой из двух следующих форм (принцип Даламбера):

1. *При любом виртуальном перемещении работа, произведенная эффективными силами, равна работе, произведенной активными силами.*

2. *При любом виртуальном перемещении полная работа, произведенная силами инерции и активными силами, равна нулю.*

Значение принципа Даламбера обусловлено двумя фактами: а) система *векторных* уравнений (44.1) заменяется одним *скалярным* уравнением; б) δW содержит только те силы, которые производят работу при перемещении $\delta\boldsymbol{r}_i$. Отсюда, если система имеет связи, не производящие работы (§ 26), и перемещение допускается ими, то силы связи не входят в выражение принципа.

Теоремы об импульсе и моменте импульса (§ 44) исключают внутренние силы; принцип Даламбера исключает реакции связей, не производящие работы[1]).

Если возможно выбрать виртуальные перемещения $\delta\boldsymbol{r}_i$ так, чтобы они совпадали с действительными перемещениями при движении ($\delta\boldsymbol{r}_i = \dot{\boldsymbol{r}}_i\, dt$), то уравнение (45.1)

---

[1]) Обсуждение принципа Даламбера см. Аппель [2], 11, стр. 262—264 и Lanczos, [15], стр. 92. О приложениях к сервомеханизмам см. Аппель [2], 11, стр. 344—355.

принимает следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{P} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{i=1}^{P} \boldsymbol{F}_i \dot{\boldsymbol{r}}_i = \dot{W}. \tag{45.2}$$

Это уравнение эквивалентно следующему:

$$\dot{T} = \dot{W}, \tag{45.3}$$

где T — кинетическая энергия. *Скорость изменения кинетической энергии равна скорости изменения работы (мощности) всех сил, действующих на систему*; сюда входят все силы, производящие работу — внешние и внутренние.

Если система склерономна и существует потенциальная функция V (ср. (29.9)), то уравнение (45.3) приводит к *уравнению энергии или к интегралу энергии*

$$T + V = \text{const}. \tag{45.4}$$

Это фундаментальное уравнение будет выведено еще раз в § 46 в более общей форме (46.21).

§ 46. Уравнения Лагранжа. Игнорируемые координаты. а) *Общая теория.* Рассмотрим систему из P частиц, такую же, как в § 44 и 45. Предположим, что система подчинена связям, вообще говоря, реономным и неголономным. Пусть q_ρ ($\rho = 1, \ldots, N$) — обобщенные координаты, так что радиусы-векторы частиц можно записать как функции:

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q, t) \qquad (i = 1, \ldots, P). \tag{46.1}$$

Пусть уравнения связей имеют вид (28.2), т. е.

$$\sum_{\rho=1}^{N} A_{c\rho} dq_\rho + A_c\, dt = 0 \quad (c = 1, \ldots, M), \tag{46.2}$$

где коэффициенты — заданные функции $N + 1$ переменных (q, t). Скорости частиц выражаются уравнениями

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{\rho=1}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\rho} \dot{q}_\rho + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \qquad (i = 1, \ldots, P), \tag{46.3}$$

так что компоненты скорости являются функциями $2N+1$ переменных $(q, \dot{q}, t)$. Как легко проверить, частные производные этих функций удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_\rho} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\rho}, \quad \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_\rho} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\rho}$$

$$(i = 1, \ldots, P; \ \varrho = 1, \ldots, N). \tag{46.4}$$

Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{P} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i, \tag{46.5}$$

также является функцией $(q, \dot{q}, t)$ и ее частные производные имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_\rho} &= \sum_{i=1}^{P} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_\rho}, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\rho} &= \sum_{i=1}^{P} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_\rho} = \sum_{i=1}^{P} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\rho}. \end{aligned}\right\} \tag{46.6}$$

Отсюда, принимая во внимание систему уравнений (46.4), приходим к уравнениям

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\rho} - \frac{\partial T}{\partial q_\rho} = \sum_{i=1}^{P} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\rho} \qquad (\varrho = 1, \ldots, N). \tag{46.7}$$

Пусть δq_ρ $(\varrho = 1, \ldots, N)$ — произвольная совокупность бесконечно малых величин и пусть $\delta \boldsymbol{r}_i$ — соответствующие им смещения частиц системы, полученные дифференцированием уравнений (46.1) при фиксированном t, т. е.

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{\rho=1}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\rho}\delta q_\rho \qquad (i = 1, \ldots, P). \tag{46.8}$$

Умножая уравнения (46.7) на δq_ρ и суммируя по ϱ, получаем уравнение

$$\sum_{\rho=1}^{N}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\rho}-\frac{\partial T}{\partial q_\rho}\right)\delta q_\rho=\sum_{i=1}^{P} m_i\ddot{r}_i\cdot\delta r_i. \qquad (46.9)$$

Отметим, что это чисто кинематический результат. При получении его не использованы ни силы, ни уравнения движения; оно не включает также и уравнений связей (46.2).

Вводим затем обобщенную силу Q_ρ^* (29.6), представленную в виде двух слагаемых, как в (29.6):

$$Q_\rho^* = Q_\rho + Q'_\rho \qquad (\varrho = 1, \ldots, N), \qquad (46.10)$$

где Q_ρ — заданная (или приложенная) сила, а Q'_ρ — сила реакции связей. Предполагаем, что связи не производят работы в том смысле, что

$$\sum_{\rho=1}^{N} Q'_\rho\,\delta q_\rho = 0 \qquad (46.11)$$

для всех значений δq_ρ, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{\rho=1}^{N} A_{c\rho}\delta q_\rho = 0 \qquad (c = 1, 2, \ldots, M). \qquad (46.12)$$

Вернемся теперь к принципу Даламбера в форме (45.1). Выберем какие-нибудь δq_ρ, удовлетворяющие условиям (46.12), и пусть δr_i — соответствующие перемещения частиц системы, данные формулой (46.8). Заменим первый член уравнения (45.1) с помощью уравнения (46.9); для последнего члена уравнения (45.1), приняв во внимание (46.11), имеем

$$\delta W = \sum_{\rho=1}^{N} Q_\rho^*\,\delta q_\rho = \sum_{\rho=1}^{N} Q_\rho\delta q_\rho. \qquad (46.13)$$

Таким образом, уравнение (45.1) преобразуется к виду

$$\sum_{\rho=1}^{N}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\rho}-\frac{\partial T}{\partial q_\rho}-Q_\rho\right)\delta q_\rho = 0 \qquad (46.14)$$

для всех δq_ρ, удовлетворяющих условиям (46.12).

Из этого последнего уравнения получим лагранжевы *уравнения движения неголономной системы*,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\rho} - \frac{\partial T}{\partial q_\rho} = Q + \sum_{c=1}^{M} \vartheta_c A_{c\rho}, \qquad (\varrho = 1, \ldots, N), \tag{46.15}$$

где ϑ_c — неопределенные множители. К этим уравнениям нужно добавить уравнения связей (46.2) в форме

$$\sum_{\rho=1}^{N} A_{c\rho}\dot{q}_\rho + A_c = 0 \qquad (c = 1, \ldots, M), \tag{46.16}$$

так что имеем $N + M$ уравнений для определения $N + M$ величин (q_ρ, ϑ_c). Можно записать уравнения (46.15) для любой системы в явном виде, как только мы зададим вид функции T и функций Q_ρ. Последние функции легче всего получить, вычисляя работу δW и используя (46.13).

β) *Голономные системы.* Для голономной системы можно принять за N наименьшее возможное число обобщенных координат. Тогда члены с множителями ϑ исчезают из уравнений (46.15) и лагранжевы уравнения *движения для голономной системы* имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\rho} - \frac{\partial T}{\partial q_\rho} = Q_\rho \qquad (\varrho = 1, \ldots, N). \tag{46.17}$$

Но даже когда система голономна, иногда удобно рассматривать число координат больше, чем минимально необходимое. Тогда система уравнений движения состоит из уравнений (46.15) и из (интегрируемых) уравнений вида (46.16).

Если силы голономной системы имеют потенциальную функцию, т. е. имеют место уравнения (29.9) (другими словами, система имеет потенциальную энергию) или если существует обобщенная потенциальная функция вида (29.11), то уравнения движения можно записать в следующей форме:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} - \frac{\partial L}{\partial q_\rho} = 0 \qquad (\varrho = 1, \ldots, N), \tag{46.18}$$

где

$$L = T - V. \tag{46.19}$$

Здесь L — функция $2N + 1$ переменных (q, $\dot{q}$, t; она называется *лагранжевой функцией* или *кинетическим потенциалом*. Особое достоинство уравнений (46.18) состоит в том, что уравнения движения системы могут быть составлены сразу, если задана одна-единственная функция. Необходимо указать также, что если две различные физические системы имеют лагранжеву функцию одной и той же формы, то они ведут себя одинаково.

Если умножить уравнения (46.18) на $\dot{q}_\rho$ и просуммировать по ρ, то результат можно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{\rho=1}^{N} \dot{q}_\rho \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} - L\right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0. \tag{46.20}$$

Если L не зависит явно от t (а это может быть даже в случае реономной системы), мы имеем $\partial L/\partial t = 0$; в этом случае уравнение (46.20) имеет интеграл

$$\sum_{\rho=1}^{N} \dot{q}_\rho \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} - L = K. \tag{46.21}$$

Кинетическая энергия — функция второй степени относительно обобщенных скоростей ($\dot{q}_\rho$) и ее можно представить в виде суммы

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \tag{46.22}$$

где индексы указывают степень однородности выражения относительно обобщенных скоростей. Если $V = V(q)$ — обычная потенциальная функция, то, прилагая теорему Эйлера для однородных функций к уравнению (46.21), получим

$$T_2 - T_0 + V = K. \tag{46.23}$$

Если, кроме того, система склерономна — имеет место $T = T_2$ и выражение (46.23) принимает следующий вид:

$$T + V = K, \tag{46.24}$$

т. е. получаем уравнение энергии или интеграл энергии вида (45.4).

γ) *Игнорируемые координаты.* Рассмотрим голономную систему с лагранжевой функцией L. Если одна из координат q_ρ не входит в L, то говорят, что эта координата игнорируемая[1]).

Если координата q_ρ — игнорируемая, то соответствующее уравнение движения системы (46.8) дает интеграл

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} = c_\rho. \tag{46.25}$$

Это — первый интеграл уравнений движения. Если $q_1, \ldots, q_M$ — игнорируемые координаты, то имеются M интегралов, аналогичных (46.25). Решая эти уравнения, получаем скорости, соответствующие игнорируемым координатам (т. е. $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_M$), как функции остальных координат и скоростей, времени t и констант $c_1, \ldots, c_M$. *Функция Рауса* R, определенная уравнением

$$R = L - \sum_{\rho=1}^{M} \dot{q}_\rho \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} = L - \sum_{\rho=1}^{M} \dot{q}_\rho c_\rho, \tag{46.26}$$

может быть выражена в следующей форме:

$$R = R\,(q_{M+1}, \ldots, q_N, t, \dot{q}_{M+1}, \ldots, \dot{q}_N, c_1, \ldots, c_M). \tag{46.27}$$

Этой функцией, как мы сейчас покажем, можно заменить функцию L в уравнениях движения.

Так как динамическая система может рассматриваться в любой конфигурации в любой момент времени с любыми

---

[1]) Употребляют также термины *киностеническая* и *циклическая* координаты, особенно часто последний, что очень жаль, так как термин «циклический» может оказаться необходимым в топологическом смысле слова; ср. § 63. Слово «игнорируемый» используется в различных смыслах: (I) координата не входит в T и (II) она отсутствует в L; ср. Голдстейн [7], стр. 62; Lanczos [15], стр. 125.

обобщенными скоростями, то $2N - M + 1$ величин

$$q_{M+1}, \ldots, q_N, \; t, \; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N \tag{46.28}$$

можно считать независимыми переменными; соответственно $2N - M + 1$ величин

$$q_{M+1}, \ldots, q_N, \; t, \; c_1, \ldots, \; c_M, \; \dot{q}_{M+1}, \ldots, \dot{q}_N \tag{46.29}$$

тоже являются независимыми переменными; используя эти переменные для составления вариации раусовой функции R, получим из (46.27) и (46.26), приняв во внимание интегралы (46.25), выражение

$$\begin{aligned} \delta R = \sum_{\rho=M+1}^{N} \frac{\partial R}{\partial q_\rho} \delta q_\rho + \frac{\partial R}{\partial t} \delta t + \sum_{\rho=M+1}^{N} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\rho} \delta \dot{q}_\rho + \\ + \sum_{\rho=1}^{M} \frac{\partial R}{\partial c_\rho} \delta c_\rho = \sum_{\rho=M+1}^{N} \frac{\partial L}{\partial q_\rho} \delta q_\rho + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \\ + \sum_{\rho=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} \delta \dot{q}_\rho - \sum_{\rho=1}^{M} (\dot{q}_\rho \delta c_\rho + c_\rho \delta \dot{q}_\rho) = \\ = \sum_{\rho=M+1}^{N} \frac{\partial L}{\partial q_\rho} \delta q_\rho + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \sum_{\rho=M+1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} \delta \dot{q}_\rho - \sum_{\rho=1}^{M} \dot{q}_\rho \delta c_\rho. \end{aligned} \tag{46.30}$$

Отсюда, считая вариации величин (46.29) независимыми, найдем уравнения

$$\frac{\partial R}{\partial q_\rho} = \frac{\partial L}{\partial q_\rho}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\rho} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} \qquad (\varrho = M + 1, \ldots, N) \tag{46.31}$$

и

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}, \quad \frac{\partial R}{\partial c_\rho} = -\dot{q}_\rho \qquad (\varrho = 1, \ldots, M). \tag{46.32}$$

Подставляя в лагранжевы уравнения (46.18) значения частных производных функций L из (46.31), получаем уравнения движения в форме

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\rho}-\frac{\partial R}{\partial q_\rho}=0 \qquad (\rho=M+1, \ldots, N). \qquad (46.33)$$

Неизвестными в этих уравнениях являются только $N-M$ неигнорируемых координат q_ρ. Уравнения содержат постоянные $c_1, \ldots, c_M$. Исходные дифференциальные уравнения (46.18) представляют собой систему N уравнений второго порядка.

В уравнениях (46.33) мы имеем систему $N-M$ уравнений второго порядка, причем лагранжева форма сохраняется с заменой L на R. Переход от уравнений (46.18) к (46.33) называется операцией исключения игнорируемых координат.

Если система (46.33) разрешена относительно неигнорируемых координат, то игнорируемые координаты определяются формулами

$$q_\rho=-\int\frac{\partial R}{\partial c_\rho}\,dt \qquad (\rho=1, \ldots, M). \qquad (46.34)$$

§ 47. Уравнения Гамильтона. Рассмотрим систему с N степенями свободы, движение которой задано уравнениями Лагранжа (46.18), где L — некоторая функция обобщенных координат q_ρ, их производных $\dot{q}_\rho$ и времени t. Определим *обобщенные импульсы* p_ρ следующим образом:

$$p_\rho=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} \qquad (\rho=1, \ldots, N). \qquad (47.1)$$

Если

$$\det\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\rho\,\partial \dot{q}_\sigma}\neq 0, \qquad (47.2)$$

что имеет место в общем случае, то уравнения (47.1) можно разрешить относительно обобщенных скоростей, так что мы получаем выражения

$$\dot{q}_\rho=f_\rho(q, t, p) \qquad (\rho=1, \ldots, N). \qquad (47.3)$$

Тогда функцию L можно выразить как функцию $2N+1$ переменных (q, t, p) и определить так называемую *гамильтонову функцию* H при помощи уравнения

$$H(q, t, p) = \sum_{\rho=1}^{N} p_\rho \dot{q}_\rho - L. \tag{47.4}$$

Будем считать теперь $2N+1$ величин (q, t, p) независимыми переменными. Обобщенные скорости выражаются через них по формулам (47.3). Для произвольной вариации функции H имеем следующее выражение:

$$\begin{aligned}\delta H &= \sum_\rho \frac{\partial H}{\partial p_\rho}\delta p_\rho + \sum_\rho \frac{\partial H}{\partial q_\rho}\delta q_\rho + \frac{\partial H}{\partial t}\delta t = \\ &= \sum_\rho \dot{q}_\rho \delta p_\rho + \sum_\rho p_\rho \delta \dot{q}_\rho - \sum_\rho \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho}\delta \dot{q}_\rho - \\ &\qquad - \sum_\rho \frac{\partial L}{\partial q_\rho}\delta q_\rho - \frac{\partial L}{\partial t}\delta t, \end{aligned} \tag{47.5}$$

где суммирование производится от 1 до N. Согласно (47.1), вторая и третья суммы правой части взаимно уничтожаются и мы получаем уравнения

$$\frac{\partial H}{\partial p_\rho} = \dot{q}_\rho, \quad \frac{\partial H}{\partial q_\rho} = -\frac{\partial L}{\partial q_\rho}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \qquad (\varrho = 1, \ldots, N). \tag{47.6}$$

Используя уравнения (47.1), мы можем теперь написать уравнения Лагранжа (46.18) в форме

$$\dot{q}_\rho = \frac{\partial H}{\partial p_\rho}, \quad \dot{p}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial q_\rho} \quad (\varrho = 1, \ldots, N). \tag{47.7}$$

Это — *уравнения движения* в форме Гамильтона; их называют также *каноническими уравнениями*. Переход от лагранжевых уравнений к уравнениям Гамильтона — чисто математический процесс, не имеющий никакого отношения к исходной динамической системе. Для любой системы, описываемой уравнениями Лагранжа в форме (46.18), будут иметь место уравнения Гамильтона; в частности, уравнениями движения любой голономной системы (реономной или склерономной), допускающей потенциальную функцию V или обобщенную потенциальную функцию, будут уравнения (47.7).

Можно определить скорость изменения H, принимая во внимание систему (47.7):

$$\dot{H} = \sum_{\rho=1}^{N} \left(\frac{\partial H}{\partial q_\rho} \dot{q}_\rho + \frac{\partial H}{\partial p_\rho} \dot{p}_\rho \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \qquad (47.8)$$

Таким образом, если H не зависит явно от t, т. е. $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, то как следствие имеем

$$H = \text{const}. \qquad (47.9)$$

Это равенство можно называть интегралом энергии. Если T представлено суммой (46.22), $T = T_2 + T_1 + T_0$ и $V = V(q)$, то

$$H = \sum_{\rho=1}^{N} \dot{q}_\rho \frac{\partial L}{\partial q_\rho} - L = T_2 - T_0 + V. \qquad (47.10)$$

Если $T = T_2$ (случай, наиболее часто встречающийся в динамике), то получим

$$H = T + V, \qquad (47.11)$$

так что в этом случае H равно *полной энергии системы*, т. е. сумме *кинетической* и *потенциальной* энергий.

Если, кроме сил, имеющих потенциальную функцию V (или обобщенную потенциальную функцию), на систему действуют силы Q_ρ, то уравнения Лагранжа (46.18) преобразуются к виду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} - \frac{\partial L}{\partial q_\rho} = Q_\rho \qquad (\varrho = 1, \ldots, N). \qquad (47.12)$$

Для того чтобы преобразовать эти уравнения к форме гамильтоновых, заметим, что уравнения (47.6) были получены чисто математическими преобразованиями безотносительно к уравнениям движения и поэтому они имеют место и в данном случае. Следовательно, уравнения

Гамильтона (47.7) примут вид

$$\dot{q}_\rho = \frac{\partial H}{\partial p_\rho}, \quad \dot{p}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial q_\rho} + Q_\rho \qquad (\varrho = 1, \ldots, N). \tag{47.13}$$

§ 48. Уравнения Аппеля[1]**.** Для системы из P частиц *энергия ускорения* определяется следующим выражением:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{P} m\ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}_i, \tag{48.1}$$

где в выражении кинетической энергии скорости заменены ускорениями. Если q_ρ ($\varrho = 1, \ldots, N$) — обобщенные координаты, так что $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q, t)$, то, очевидно,

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}}_i &= \sum_{\rho=1}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\rho} \dot{q}_\rho + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}, \\ \ddot{\boldsymbol{r}}_i &= \sum_{\rho=1}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\rho} \ddot{q}_\rho + \sum_{\rho, \sigma=1}^{N} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\rho \partial q_\sigma} \dot{q}_\rho \dot{q}_\sigma + \\ &\qquad + 2 \sum_{\rho=1}^{N} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\rho \partial t} \dot{q}_\rho + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t^2}. \end{aligned}\right\} \tag{48.2}$$

Мы можем, следовательно, написать

$$S = S(q, \dot{q}, \ddot{q}, t). \tag{48.3}$$

Эта функция $3N + 1$ переменных называется *функцией Аппеля*: она второй степени относительно производных $\ddot{q}_\rho$ и ее частные производные по $\ddot{q}_\rho$ выражаются следующим образом (ср. (46.7)):

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\rho} = \sum_{i=1}^{P} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial \ddot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \ddot{q}_\rho} = \sum_{i=1}^{P} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\rho} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\rho} - \frac{\partial T}{\partial q_\rho}$$
$$(\varrho = 1, \ldots, N). \tag{48.4}$$

---

[1]) Ср. P. Appel, Sur une forme générale des équations de la dynamique. Paris.: Gauthier — Villars, 1925; Аппель [2], II, стр. 322—343; Nordheim [18], стр. 69; Pérès [20], стр. 219.

Таким образом, если система голономна и если обобщенные координаты q_ρ образуют систему координат с наименьшим числом независимых координат, то уравнения Лагранжа (48.18) приводят сразу к *уравнениям движения Аппеля*:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\rho} = Q_\rho \qquad (\rho = 1, \ldots, N). \tag{48.5}$$

Предположим теперь, что на систему наложены связи (46.2):

$$\sum_{\rho=1}^{N} A_{c\rho} dq_\rho + A_c\, dt \qquad (c = 1, \ldots, M), \tag{48.6}$$

связи, вообще говоря, неголономные, так что уравнения Лагранжа надо писать в форме (46.15). Используя чисто кинематический результат (48.4), можно выразить уравнения (46.14) следующим образом:

$$\sum_{\rho=1}^{N} \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\rho} \delta q_\rho = \sum_{\rho=1}^{N} Q_\rho \delta q_\rho \tag{48.7}$$

для всех δq_ρ, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{\rho=1}^{N} A_{c\rho} \delta q_\rho = 0 \qquad (c = 1, \ldots, M). \tag{48.8}$$

Согласно (48.6) имеем уравнения связей

$$\sum_{\rho=1}^{N} A_{c\rho} \dot{q}_\rho + A_c = 0 \qquad (c = 1, \ldots, M) \tag{48.9}$$

и отсюда дифференцированием по t получаем

$$\sum_{\rho=1}^{N} A_{c\rho} \ddot{q}_\rho + B_c(q, \dot{q}, t) = 0 \qquad (c = 1, \ldots, M), \tag{48.10}$$

где B_c — функции указанных $2N+1$ переменных. С помощью этих последних уравнений можно выразить $\ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_M$ через $3N - M + 1$ величин

$$q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, \ddot{q}_{M+1}, \ldots, \ddot{q}_N, t.$$

Итак, мы можем написать

$$S(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, \ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_N, t) =$$
$$= \overline{S}(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, \ddot{q}_{M+1}, \ldots, \ddot{q}_N, t). \quad (48.11)$$

Если мы придаем вариациям $\delta\ddot{q}_1, \ldots, \delta\ddot{q}_N$ произвольные значения, удовлетворяющие только условиям

$$\sum_{\rho=1}^{N} A_{c\rho}\delta\ddot{q}_\rho = 0 \qquad (c = 1, \ldots, M), \qquad (48.12)$$

то из уравнений (48.10) и (48.11) следует, что

$$\sum_{\rho=1}^{N} \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\rho}\delta\ddot{q}_\rho = \sum_{r=M+1}^{N} \frac{\partial \overline{S}}{\partial \ddot{q}_r}\delta\ddot{q}_r. \qquad (48.13)$$

Это эквивалентно утверждению, что

$$\sum_{\rho=1}^{N} \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\rho}\delta q_\rho = \sum_{r=M+1}^{N} \frac{\partial \overline{S}}{\partial \ddot{q}_r}\delta q_r \qquad (48.14)$$

для всех вариаций $\delta q_1, \ldots, \delta q_N$, которые удовлетворяют условиям

$$\sum_{\rho=1}^{N} A_{c\rho}\delta q_\rho = 0 \qquad (c = 1, \ldots, M). \qquad (48.15)$$

Определим теперь $\overline{Q}_{M+1}, \ldots, \overline{Q}_N$ следующим условием:

$$\sum_{\rho=1}^{N} Q_\rho \delta q_\rho = \sum_{r=M+1}^{N} \overline{Q}_r \delta q_r \qquad (48.16)$$

для всех вариаций, удовлетворяющих (48.15). Тогда согласно (48.14) и (48.16) мы можем переписать уравнение (48.7) в форме

$$\sum_{r=M+1}^{N} \frac{\partial \overline{S}}{\partial \ddot{q}_r}\delta q_r = \sum_{r=M+1}^{N} \overline{Q}_r \delta q_r, \qquad (48.17)$$

и так как вариации произвольны, то имеем

$$\frac{\partial \overline{S}}{\partial \ddot{q}_r} = \overline{Q}_r \qquad (r = M+1, \ldots, N), \qquad (48.18)$$

т. е. приходим к уравнениям движения Аппеля в форме, важной для неголономных систем[1]).

§ 49. Уравнения движения твердого тела. Рассмотрим твердое тело массы m с центром масс в точке O и главными моментами инерции A, B, C относительно точки O. Четыре числа m, A, B, C определяют тело как динамическую систему.

Пусть q_1, q_2, q_3 — обобщенные координаты, описывающие положение точки O в абсолютном пространстве S_0, и пусть q_1', q_2', q_3' — обобщенные координаты, описывающие положение тела относительно точки O, т. е. определяющие направления главных осей, неподвижных в теле по отношению к системе координат, неподвижной в пространстве. По теореме Кёнига (§ 25) можно записать кинетическую энергию тела так:

$$T = T_0(q, \dot{q}) + T'(q', \dot{q}'), \tag{49.1}$$

где T_0 — кинетическая энергия частицы с массой m, движущейся вместе с точкой O, а T' — кинетическая энергия движения относительно точки O; эти функции имеют вид

$$T_0 = \sum_{\rho,\,\sigma=1}^{3} a_{\rho\sigma}(q)\,\dot{q}_\rho \dot{q}_\sigma, \qquad T' = \sum_{\rho,\,\sigma=1}^{3} a'_{\rho\sigma}(q')\,\dot{q}'_\rho \dot{q}'_\sigma. \tag{49.2}$$

Если координаты q — прямоугольные декартовы координаты (x, y, z), то имеем

$$T_0 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \tag{49.3}$$

а если координаты q' — углы Эйлера $(\vartheta, \varphi, \psi)$, то имеем, как в выражении (25.5),

$$T' = \frac{1}{2} A (\dot{\vartheta} \sin\psi - \dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\psi)^2 + \\ + \frac{1}{2} B (\dot{\vartheta} \cos\psi + \dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\psi)^2 + \\ + \frac{1}{2} C (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos\vartheta)^2. \tag{49.4}$$

---

[1]) О приложении этих уравнений к сервомеханизмам см. Аппель [2], II, стр. 344—355.

В случае осевой симметрии ($A = B$) это выражение упрощается и принимает вид

$$T' = \frac{1}{2}A\,(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta) + \frac{1}{2}C\,(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta)^2. \qquad (49.5)$$

Пусть Q_ρ, Q'_ρ ($\rho = 1, 2, 3$) — обобщенные силы, такие, что работа, произведенная ими при произвольном перемещении, выражается формулой

$$\delta W = \sum_{\rho=1}^{3} Q_\rho \delta q_\rho + \sum_{\rho=1}^{3} Q'_\rho \delta q'_\rho. \qquad (49.6)$$

Тогда имеем шесть лагранжевых уравнений движения, полностью аналогичных (46.17),

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_\rho} - \frac{\partial T_0}{\partial q_\rho} &= Q_\rho, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T'}{\partial \dot{q}'_\rho} - \frac{\partial T'}{\partial q'_\rho} &= Q'_\rho \end{aligned} \quad (\rho = 1, 2, 3). \right\} \qquad (49.7)$$

В левых частях уравнений координаты q отделены от координат q', но это разделение, вообще говоря, не распространяется на правую часть; другими словами, задача движения твердого тела в общем случае не разделяется на две.

Эти лагранжевы уравнения имеют место для твердого тела без связей. Они могут быть распространены также на случай наличия связей при условии, что мы включим в Q_ρ и Q'_ρ силы реакции связей.

При исследовании движения твердого тела часто более удобно применять теоремы об импульсе и моменте импульса вместо лагранжевых уравнений. Согласно (44.4) и (44.7) (отбрасывая звездочки), имеем два векторных уравнения

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}, \qquad (49.8)$$

$$\dot{\boldsymbol{h}} = \boldsymbol{G}, \qquad (49.9)$$

где $\boldsymbol{a}$ — ускорение центра масс O, $\boldsymbol{h}$ — момент импульса, взятый для точки O (движения относительно O), $\boldsymbol{F}$ — главный вектор внешних сил, G — главный момент внешних сил относительно точки O.

Для того чтобы с помощью этих уравнений определить движение, мы должны разложить их на компоненты по осям ортонормального триэдра. Для этого можно выбрать триэдр, неподвижный в абсолютном пространстве, либо триэдр, движущийся с телом, либо, наконец, какой-то третий. Позднее мы будем рассматривать триэдр, неподвижный относительно абсолютного пространства; для практических же целей лучше выбрать движущийся триэдр, оси которого совпадают с главными осями инерции тела.

Рассмотрим сначала произвольный ортонормальный триэдр $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, вращающийся с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$. Разлагая $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{\Omega}$ по осям этого триэдра, получим

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{h} &= h_1\boldsymbol{i} + h_2\boldsymbol{j} + h_3\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{G} &= G_1\boldsymbol{i} + G_2\boldsymbol{j} + G_3\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{\Omega} &= \Omega_1\boldsymbol{i} + \Omega_2\boldsymbol{j} + \Omega_3\boldsymbol{k}. \end{aligned}\right\} \tag{49.10}$$

Тогда, согласно (20.3), можно написать уравнение (49.9) в виде

$$\frac{\delta \boldsymbol{h}}{\delta t} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{h} = \boldsymbol{G}, \tag{49.11}$$

или в координатной форме,

$$\left.\begin{aligned} \dot{h}_1 - h_2\Omega_3 + h_3\Omega_2 &= G_1, \\ \dot{h}_2 - h_3\Omega_1 + h_1\Omega_3 &= G_2, \\ \dot{h}_3 - h_1\Omega_2 + h_2\Omega_1 &= G_3. \end{aligned}\right\} \tag{49.12}$$

Пусть $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ — главные оси инерции тела для точки O, а A, B, C моменты инерции для этих осей. Если $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела, то согласно (24.14) имеем

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \omega_1\boldsymbol{i} + \omega_2\boldsymbol{j} + \omega_3\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{h} &= A\omega_1\boldsymbol{i} + B\omega_2\boldsymbol{j} + C\omega_3\boldsymbol{k}. \end{aligned}\right\} \tag{49.13}$$

Могут иметь место три случая:

а) Несимметричное тело (A, B и C — все различны). В этом случае триэдр $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, если он совпадает с главными осями инерции, должен быть закреплен в теле. Поэтому $\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\omega}$, и равенства (49.12) вместе с (49.13) дают эйлеровы *уравнения движения твердого тела*:

$$\left.\begin{aligned} A\dot{\omega}_1-(B-C)\,\omega_2\omega_3&=G_1,\\ B\dot{\omega}_2-(C-A)\,\omega_3\omega_1&=G_2,\\ C\dot{\omega}_3-(A-B)\,\omega_1\omega_2&=G_3. \end{aligned}\right\} \tag{49.14}$$

β) *Тело имеет ось симметрии* ($A=B\neq C$). Тогда уравнения (49.14) упрощаются и принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} A\dot{\omega}_1-(A-C)\,\omega_2\omega_3&=G_1,\\ A\dot{\omega}_2-(C-A)\,\omega_3\omega_1&=G_2,\\ C\dot{\omega}_3&=G_3. \end{aligned}\right\} \tag{49.15}$$

В этом случае для того чтобы направления ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$) были главными, фиксировать их все в теле не обязательно. Достаточно зафиксировать в теле одно только направление $\boldsymbol{k}$. Тогда имеем условия

$$\Omega_1=\omega_1,\qquad \Omega_2=\omega_2; \tag{49.16}$$

Ω_3 остается произвольным, и уравнения (49.12) превращаются в следующую систему:

$$\left.\begin{aligned} A\dot{\omega}_1-A\,\omega_2\Omega_3+C\omega_3\omega_2&=G_1,\\ A\dot{\omega}_2-A\,\omega_1\Omega_3+C\omega_3\omega_1&=G_2,\\ C\dot{\omega}_3&=G_3. \end{aligned}\right\} \tag{49.17}$$

Первые два уравнения можно представить в комплексной форме[1]) так:

$$\left.\begin{aligned} &A\dot{\omega}+(A\Omega_3-C\omega_3)\,i\omega=\Gamma,\\ &\omega=\omega_1+i\omega_2,\qquad \Gamma=G_1+iG_2. \end{aligned}\right\} \tag{49.18}$$

---

[1]) Эта форма полезна для баллистики и других проблем устойчивости; ср. K. L. Nielsen and J. L. Singe: Quart. Appl. Math. 4, 201 (1946); E. J. McShane, J. L. Kelley and F. V. Reno: Exterior Ballistics, стр. 176. (Denver: University Press 1953); S. O' Brien and J. L. Singe: Proc. Roy. Irish. Akad. A56, 23 (1954). Комплексные обозначения полезны также в теории волчка Ковалевской (§ 56).

γ) *Тело со сферической симметрией* ($A = B = C$). Теперь уравнения (49.14) еще более упрощаются,

$$A\dot{\omega}_1 = G_1, \quad A\dot{\omega}_2 = G_2, \quad A\dot{\omega}_3 = G_3 \tag{49.19}$$

для осей, закрепленных в теле. В этом случае мы можем выбрать Ω произвольно: если мы принимаем $\Omega = 0$, то система (49.12) дает уравнения (49.19), но при этом компоненты берутся по осям, неподвижным в пространстве.

Возвратимся теперь к рассмотрению движения центра масс, определяемому уравнением (49.8); здесь также можно использовать подвижный триэдр ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$). Пусть v — абсолютная скорость точки O и сила $\boldsymbol{F}$ разложены на компоненты по осям триэдра ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$)

$$\begin{gathered} v = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{F} = F_1\boldsymbol{i} + F_2\boldsymbol{j} + F_3\boldsymbol{k}. \end{gathered} \tag{49.20}$$

Тогда уравнение (49.8) можно переписать в виде

$$m\left(\frac{\delta v}{\delta t} + \boldsymbol{\Omega} \times v\right) = \boldsymbol{F}, \tag{49.21}$$

или в координатной форме:

$$\left.\begin{aligned} m\,(\dot{v}_1 - \Omega_3 v_2 + \Omega_2 v_3) &= F_1, \\ m\,(\dot{v}_2 - \Omega_1 v_3 + \Omega_3 v_1) &= F_2, \\ m\,(\dot{v}_3 - \Omega_2 v_1 + \Omega_1 v_2) &= F_3. \end{aligned}\right\} \tag{49.22}$$

В случае α) мы полагаем $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$. Уравнения (49.14) и (49.22) представляют собой систему шести уравнений для шести компонент векторов v и $\boldsymbol{\omega}$. Если мы найдем их как функции t, то для полного определения движения требуется еще один шаг. Задавая для тела шесть обобщенных координат q, мы выразим шесть компонент v и $\boldsymbol{\omega}$ как функции (q, $\dot{q}$); затем, так как v и $\boldsymbol{\omega}$ известны, мы имеем шесть дифференциальных уравнений первого порядка, чтобы определить координаты (q) как функции t, и, таким образом, полностью описать движение.

Аналогично исследуются случаи β) и γ). В случае γ) мы можем положить $\Omega = 0$ и тогда уравнения (49.22) преобразуются к виду

$$m\dot{v}_1 = F_1, \quad m\dot{v}_2 = F_2, \quad m\dot{v}_3 = F_3. \qquad (49.23)$$

Эта теория охватывает важный случай *твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки* (см. § 55—57). Тело имеет три степени свободы и его движение определено уравнением (44.5), которое формально идентично уравнению (49.9). Но теперь h — момент импульса, взятый для неподвижной точки, а G — суммарный момент сил относительно этой точки. При этом изменении интерпретации приложима вся теория, начиная с уравнений (49.10) до (49.19) включительно; но теперь A, B, C — главные моменты инерции также для неподвижной точки, а не для центра масс.

В случае свободно движущегося твердого тела явное отнесение к центру масс обходят, вводя моторную символику (Motorrechnung) Штуди и Мизеса[1]).

§ 50. Движущиеся системы отсчета[2]). Пусть S — твердое тело, находящееся в заданном движении самого общего характера. Возьмем S в качестве системы отсчета и найдем уравнения движения динамической системы относительно этого тела. В § 32 мы решали такую задачу для одной частицы. Теперь рассмотрим динамическую систему, состоящую из P частиц со склерономными голономными связями, так что имеются обобщенные координаты q_ρ ($\rho = 1, 2, \ldots, N$), определяющие конфигурацию системы *относительно тела* S; эти координаты могут свободно изменяться, не нарушая связей.

Так, например, S может быть Землей, которая находится в орбитальном движении вокруг Солнца и одновременно вращается вокруг своей оси; система может быть

---

[1]) R. von Mises: Z. angew. Math. Mech. 4, 155, 193 (1924). Франк [5], гл. IV — Biezeno C. B.: Handbuch der Physik, т. 5, стр. 247—250. Springer, Berlin, 1927;—Winkelmann and Grammel [29], стр. 373—378;— Brand L., гл.II, of. cit. § 12. Raher W.: Öst. Ing.-Arch. 9, 55 (1954).

[2]) О других методах исследования относительного движения см. Аппель [2], т. II, стр. 239.

твердым телом, одна точка которого закреплена на Земле; q_ρ могут быть тремя углами Эйлера относительно триэдра, закрепленного на Земле. Наш план исследования состоит в том, чтобы привести S к ньютоновой системе при помощи введения фиктивных сил. Аналогично уравнению (32.1), для одной частицы, уравнения движения частиц можно записать в виде

$$m_i a_i' = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{0i} + \boldsymbol{F}_{ci} + \boldsymbol{F}_{ti} \qquad (i = 1, \ldots, P); \qquad (50.1)$$

здесь $\boldsymbol{F}_i$ — полная сила, действующая на частицу (активная сила + сила реакции связи), а другие три вектора правой части — те же, что выражения (32.2), но с индексами i, при символах m, $\boldsymbol{r}'$, v'. Пусть δq_ρ — произвольные вариации обобщенных координат и пусть $\delta \boldsymbol{r}_i'$ — соответствующие смещения частиц относительно S. Умножив скалярно (50.1) на $\delta \boldsymbol{r}_i'$ и суммируя по i от 1 до P, получаем уравнение

$$\sum_{i=1}^{P} m_i \boldsymbol{a}_i' \delta \boldsymbol{r}_i' = \sum_{i=1}^{P} \boldsymbol{F}_i \delta \boldsymbol{r}_i' + \sum_{i=1}^{P} \boldsymbol{F}_{0i} \delta \boldsymbol{r}_i' + \\ + \sum_{i=1}^{P} \boldsymbol{F}_{ci} \delta \boldsymbol{r}_i' + \sum_{i=1}^{P} \boldsymbol{F}_{ti} \delta \boldsymbol{r}_i'. \qquad (50.1\text{a})$$

Так как $\boldsymbol{a}_i'$ — ускорение частицы относительно тела S, то согласно чисто кинематической формуле (46.9) имеем следующее уравнение:

$$\sum_{i=1}^{P} m \boldsymbol{a}_i' \delta \boldsymbol{r}_i' = \sum_{\rho=1}^{N} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_\rho} - \frac{\partial T'}{\partial q_\rho} \right) \delta q_\rho, \qquad (50.2)$$

где $T'(q, q')$ — кинетическая энергия движения *относительно* S, т. е.

$$T'(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{P} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i' \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{P} m_i v_i'^2. \qquad (50.3)$$

Для того чтобы провести суммирование в уравнении (50.1a) по другим индексам, определим прежде всего обобщенные силы Q_ρ следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{P} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i' = \sum_{\rho=1}^{N} Q_\rho \delta q_\rho; \qquad (50.4)$$

это — работа, произведенная активными силами; в течение виртуального перемещения система отсчета S остается неподвижной. При этом силы реакции связей не входят в Q_ρ. Затем определяем A_ρ, B_ρ, C_ρ ($\varrho = 1, \ldots, N$) уравнениями (ср. с (32.2)):

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{P} \boldsymbol{F}_{oi}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i' = -\sum_{i=1}^{P} m_i\boldsymbol{a}_0\cdot\delta\boldsymbol{r}_i' = \sum_{\rho=1}^{N} A_\rho\delta q_\rho,\\
&\sum_{i=1}^{P} \boldsymbol{F}_{ci}\delta\boldsymbol{r}_i' = -2\sum_{i=1}^{P} m\,(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_i')\cdot\delta\boldsymbol{r}_i' = \sum_{\rho=1}^{N} B_\rho\delta q_\rho,\\
&\sum_{i=1}^{P} \boldsymbol{F}_{ti}\delta\boldsymbol{r}_i' = -\sum_{i=1}^{P} m\,(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}_i')\,\delta\boldsymbol{r}_i' - \boldsymbol{\omega}\sum_{i=1}^{P} m_i\,(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_i')\,\delta\boldsymbol{r}_i' +\\
&\qquad\qquad + \omega^2\sum_{i=1}^{P} m\boldsymbol{r}_i'\cdot\delta\boldsymbol{r}_i' = \sum_{\rho=1}^{N} C_\rho\delta q_\rho,
\end{aligned}\right\} \tag{50.5}$$

в которых вариации δq_ρ — произвольные. В этих выражениях $\boldsymbol{a}_0$ и $\boldsymbol{\omega}$ являются соответственно ускорением полюса O (неподвижного относительно S) и угловой скоростью тела S; они даны как функции t (так как движение S задано). Отсюда A_ρ и C_ρ — функции переменных $(q,\ t)$, в то время как B_ρ — функция $(q,\ \dot q,\ t)$.

После этих предварительных замечаний мы можем использовать уравнение (50.1а) для того, чтобы получить уравнения в форме Лагранжа для движения системы относительно тела S в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T'}{\partial \dot q_\rho'} - \frac{\partial T'}{\partial \dot q_\rho'} = Q_\rho + A_\rho + B_\rho + C_\rho$$

$$(\varrho = 1, \ldots, N); \tag{50.6}$$

последние три члена, которые являются фиктивными обобщенными силами, обусловлены движением тела S.

ГЛАВА II

СИСТЕМЫ БЕЗ СВЯЗЕЙ

§ 51. Проблема двух тел. Рассмотрим две частицы с массами m_1, m_2, притягивающиеся или отталкивающиеся друг от друга с равными и противоположно направленными силами, действующими вдоль прямой, соединяющей частицы, и зависящими только от расстояния между этими массами. Рис. 13 иллюстрирует случай отталкивания.

Пусть $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ — радиусы-векторы частиц относительно некоторого неподвижного начала координат, и пусть $\boldsymbol{P}$ — сила, с которой первая частица действует на вторую. Тогда уравнения движения этих частиц имеют вид

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -\boldsymbol{P}, \qquad m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{P}. \tag{51.1}$$

Радиус-вектор второй частицы относительно первой, очевидно, выражается так:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \tag{51.2}$$

и из уравнений (51.1) получаем

$$M\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{P}, \qquad M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{51.3}$$

Таким образом, отказываясь от абсолютной системы отсчета и употребляя систему, движущуюся с ускорением и связанную с первой частицей, мы приводим проблему двух тел к задаче одного тела; при этом масса второй частицы будет фиктивно изменена[1]), но сила останется неизменной. Мы можем теперь приложить к уравнению (51.3) теорию центральных сил, развитую в § 37. Заметим,

[1]) Величина M в уравнении (51.3) называется *приведенной массой*.

однако, что F в уравнении (37.1) — сила, действующая на единичную массу; используя (37.1), мы должны положить $F = P/M$, где $|P|$ — абсолютная величина силы P, и P — положительно для случая отталкивания и отрицательно для случая притяжения. Потенциал V (37.3) выражается теперь так:

$$V = -M^{-1}\int_{r_0}^{r} P\,dr. \qquad (51.4)$$

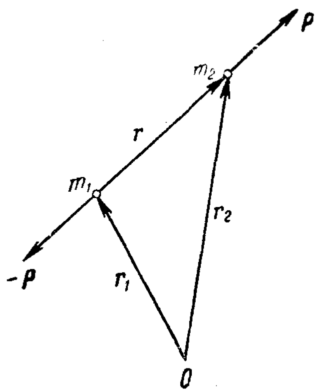


Рис. 13. Проблема двух тел.

Можно также упростить проблему двух тел удачным подбором ньютоновой системы отсчета. Согласно (51.1), имеем уравнение

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = 0, \qquad (51.5)$$

которое означает, что центр масс движется без ускорения; система, в которой он неподвижен, является ньютоновой. Выбирая эту систему и принимая за начало координат центр масс, имеем уравнение

$$m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 = 0. \qquad (51.6)$$

Тогда достаточно рассматривать в дальнейшем только одно из уравнений (51.1). Если скалярный закон отталкивания или притяжения имеет вид $P = P(r)$, то второе уравнение из (51.1) можно переписать в виде

$$m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2}P(r), \qquad r = \frac{m_1+m_2}{m_1}r_2. \qquad (51.7)$$

Мы имеем опять задачу одного тела. Теперь масса остается неизменной, а закон действия силы изменяется. В случае, когда сила обратно пропорциональна квадрату расстояния между точками, имеем $P = k/r^2$ и движение относительно центра масс определяется уравнением

$$m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2\frac{k}{r_2^3}\boldsymbol{r}_2. \qquad (51.8)$$

Орбиты двух частиц, рассматриваемые в неподвижной системе отсчета, представляют собой переплетенные пространственные кривые.

Гораздо проще изучать движение в движущейся системе координат, связанной либо с одной частицей, как в случае (51.3), либо с центром масс — случай (51.7). В такой системе орбиты — плоские кривые.

Заметим, что введенное выше предположение, относящееся к взаимодействию между частицами, исключает из рассмотрения магнитное взаимодействие и запаздывающие электромагнитные явления.

§ 52. **Захват и рассеяние**[1]). Рассмотрим вновь две частицы, взаимодействующие как в § 51. Пусть r — расстояние между частицами, а $P(r)$ — скалярная величина силы взаимодействия, положительная при отталкивании и отрицательная в случае притяжения. Мы предполагаем, что при больших r эта сила есть бесконечно малая величина, порядка не меньшего, чем $r^{-1-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$), так что при $r_0 = \infty$ существует потенциал V вида (51.4). При $t = -\infty$ частицы находятся бесконечно далеко друг от друга. Они сближаются и взаимодействуют. Нас интересует результат столкновения (т. е. состояние системы в $t = +\infty$).

Если $r \to 0$ при $t \to \infty$ или r остается ограниченным при $t \to \infty$, то будем говорить, что имеет место *захват*. Если $r \to \infty$ при $t \to \infty$, имеет место *рассеяние*. Мы хотим определить по заданным начальным условиям исход некоторого столкновения, т. е. выяснить, получится ли в

---

[1]) Ср. Corben and Stehle [3], стр. 86—90. Голдстейн [7], стр. 96—105.— Д. Бом. Квантовая теория, Изд-во Иностр. лит-ры, Москва, 1961, гл. XXI.О деталях теории столкновений частиц, подчиняющихся различным частным законам сил, столкновений шаров, гладких и шероховатых. см. Chapman S. and Cowling T. G., The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, гл. 10, 11. Cambridge, University Press, 1952. [Имеется русский перевод. (*Прим. перев.*).] См. также Grad H., Comm. Pure Appl. Math. **2**, 331 (1949) и его статью о кинетической теории газов в Handbuch der Physik, т. XII. О захвате и рассеянии неподвижным центром в теории относительности см. Singe J. L., Relativity: The Special Theorie, стр. 426. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1956

результате захват или рассеяние, и определить в последнем случае, в каких направлениях рассеиваются частицы.

Целесообразно рассмотреть некоторые частные случаи столкновений в трех системах отсчета:

S_M — система, в которой неподвижен центр масс,
S_R — относительная система, в которой неподвижна частица m_1,
S_L — лабораторная система, в которой частица m_1, находится в покое при $t = -\infty$.

Оси всех трех систем параллельны между собой. Системы S_M и S_L — ньютоновы, система S_R движется с ускорением; однако S_R — ньютонова система при $t = -\infty$, а в случае рассеяния также при $t = +\infty$.

Мы будем обозначать начальные скорости через v_1, v_2 с индексами M, R или L, указывающими на систему отсчета, например $(v_1)_M$, $(v_2)_R$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} &m_1(v_1)_M + m_2(v_2)_M = 0, \qquad (v_1)_R = (v_1)_L = 0, \\ &(v_2)_R = (v_2)_L = (v_2)_M - (v_1)_M = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)(v_2)_M, \end{aligned}\right\} \tag{52.1}$$

так что во всех трех системах v_2 имеет одно и то же направление.

В S_M начальные условия доставляют пару бесконечных параллельных прямых [асимптоты начальных (при $t \to -\infty$) траекторий]; в S_R и S_L мы имеем точку (положение m_1) и бесконечную прямую (асимптоту начальной траектории частицы m_2). Рис. 14 поясняет начальные данные столкновения независимо от того, какая система при этом выбрана. Здесь k — единичный вектор направления v_2. В системе S_R или S_L точка O совпадает с начальным положением частицы m_1, а в S_M начало координат — это некоторая точка асимптоты начальной траектории частицы m_1. Вектор $\boldsymbol{b}$ проведен из точки O до пересечения с направлением k перпендикулярно к нему. Это — *вектор соударения* и его абсолютное значение b — *параметр соударения или параметр столкновения*; в действительности — это

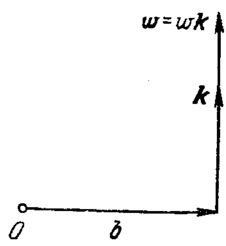


Рис. 14. Схема, показывающая начальное состояние перед столкновением.

кратчайшее расстояние между двумя асимптотами начальных траекторий, рассматриваемых в некоторой неускоренной системе. Относительная скорость, фигурирующая на рис. 14, равна

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 = w\boldsymbol{k}; \tag{52.2}$$

она, конечно, одна и та же во всех системах.

Рассмотрев первоначально столкновение в системе S_R, мы перейдем сразу к результатам в системе S_M и несколько более сложным путем к результатам в S_L.

В S_R частица m_1 остается постоянно в точке O (рис. 14) и частица m_2 описывает орбиту в плоскости $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{k})$. Согласно уравнениям (37.5), (51.3) и (51.4), эта орбита определяется следующими уравнениями:

$$\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 = f(u), \quad f(u) = \frac{2(E-V)}{h^2} - u^2, \tag{52.3}$$

где

$$u = \frac{1}{r}, \quad V(u) = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \int\limits_r^\infty P(r)\, dr; \tag{52.4}$$

(r, ϑ) — полярные координаты в плоскости движения, а величины E и h выражаются через начальные данные в виде

$$E = \frac{1}{2} w^2, \quad h = bw. \tag{52.5}$$

Время определяется формулой

$$t = \frac{1}{h} \int\limits_0^u \frac{du}{u^2 \sqrt{f(u)}} \tag{52.6}$$

(ср. (37.6)). Исход столкновения зависит исключительно от функции $f(u)$, т. е. от вида функции $V(u)$, масс частиц и двух постоянных (b, w). Имеем

$$f(0) = \frac{2E}{h^2} = \frac{1}{b^2} > 0, \tag{52.7}$$

так что график функции $f(u)$ начинается выше оси u (рис. 15). Если график $f(u)$ вовсе не пересекает эту ось (кривая C_1), то $f(u) > 0$ для всех u и орбита спирально навивается на точку O, давая в результате захват (рис. 16). Если кривая касается оси u в точке $u = u_0$ (кривая C_2 на рис. 15), то имеется апсида с апсидальным расстоянием $r = r_0 = \dfrac{1}{u_0}$. Эта апсида никогда не достигается, потому что $f(u)$ содержит множитель $(u - u_0)^2$, и интеграл формулы (52.6) расходится. Результат столкновения — захват,

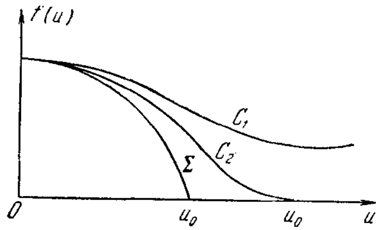


Рис. 15. Графики функции $f(u)$: захват в случае C_1 и C_2, рассеяние в случае Σ.

как показано на рис. 17. Если, наконец, кривая пересекает ось u (кривая Σ на рис. 15), апсида появляется в конечный момент и мы имеем рассеяние, как показано на рис. 18.

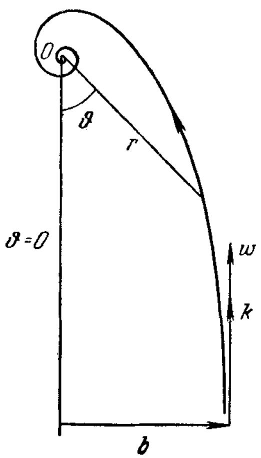


Рис. 16. Захват: $r \to 0$ при $t \to \infty$.

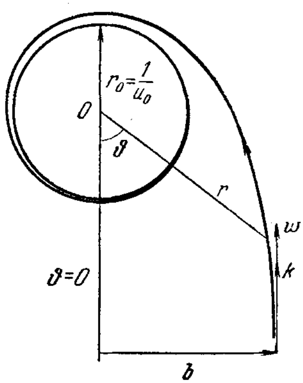


Рис. 17. Захват: $r \to r_0$ при $t \to \infty$.

Если не рассматривать лобовые соударения, для которых $b = 0$, то ясно, что захват невозможен в случае силы отталкивания, так как такая сила отклоняет траекторию от точки O.

Предполагая теперь, что имеет место рассеяние (сила либо отталкивающая, либо притягивающая), перейдем к вычислению угла рассеяния χ_R, показанного на рис. 18. На чертеже показаны также полярная ось $\vartheta = 0$, две

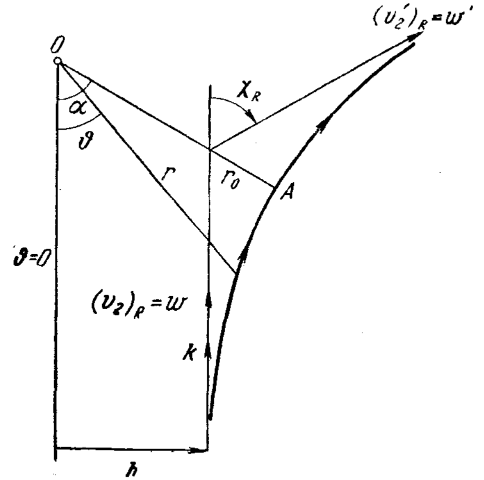


Рис. 18. Рассеяние в релятивистской системе S_R: угол рассеяния есть угол χ_R.

асимптоты орбиты и апсида A, для которой имеет место условие $\dfrac{du}{d\vartheta} = 0$. Апсидальное расстояние равно $OA = r_0 = \dfrac{1}{u_0}$ и апсидальный угол, как показано, равен

$$\alpha = \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}. \tag{52.8}$$

Так как орбита симметрична относительно апсидальной прямой OA, то угол рассеяния χ_R будет

$$\chi_R = \pi - 2\alpha = \pi - 2\int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}. \tag{52.9}$$

Если принять для знаков введенное выше условие, то для рассеяния отталкивания $0 \leqslant x \leqslant \pi$, а для рассеяния при притяжении имеем $-\infty < \chi_R \leqslant 0$. Для того чтобы вычислить χ, надо оценить интеграл, верхний предел которого определяется решением уравнения

$$f(u_0) = 0, \quad f(u) = \frac{1}{b^2} - \frac{2V(u)}{b^2 w^2} - u^2. \tag{52.10}$$

Угол рассеяния χ является, таким образом, функцией двух основных параметров (b, w):

$$\chi = \chi(b, w); \tag{52.11}$$

вид этой функции зависит от вида функции $V(u)$, полученной из силовой функции $P(r)$ по формуле (52.4).

Обозначим штрихами конечные скорости. Согласно (51.3) имеем в системе S_R уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} M\dot{r}^2\right) = \boldsymbol{P}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}; \tag{52.12}$$

интегрирование дает следующее условие:

$$(v_2'^2)_R = (v_2^2)_R. \tag{52.13}$$

Так как

$$(v_1')_R = (v_1)_R = 0, \tag{52.14}$$

то имеем инвариантное уравнение

$$w' = w, \tag{52.15}$$

справедливое во всех системах отсчета; *величина относительной скорости частиц не изменяется при столкновении.* Если обозначить через s_R единичный вектор направления рассеяния, то конечную скорость можно записать в виде

$$(v_2')_R = w s_R. \tag{52.16}$$

Переходим теперь к системам отсчета S_M и S_L. Это — ньютоновы системы и, следовательно, в них сохраняется импульс. Кроме того, относительная скорость инвариантна относительно изменения системы отсчета. Отсюда имеем уравнения

$$\left.\begin{aligned} m_2 (v_2')_M + m_1 (v_1')_M &= 0,\\ (v_2')_M - (v_1')_M &= w' = w s_R,\\ m_2 (v_2')_L + m_1 (v_1')_L &= m_2 (v_2)_L = m_2 w,\\ (v_2')_L - (v_1')_L &= w' = w s_R, \end{aligned}\right\} \qquad (52.17)$$

которые дают конечные скорости в виде

$$\left.\begin{aligned} (m_1 + m_2)(v_1')_M &= -m_2 w s_R,\\ (m_1 + m_2)(v_2')_M &= m_1 w s_R,\\ (m_1 + m_2)(v_1')_L &= m_2 w - m_2 w s_R,\\ (m_1 + m_2)(v_2')_L &= m_2 w + m_1 w s_R. \end{aligned}\right\} \qquad (52.18)$$

Поэтому единичные векторы s_M и s_L направлений рассеяния (т. е. соответственно направлений $(v_2')_M$ и $(v_2')_L$) определяются выражениями

$$s_M = s_R,$$

$$s_L = \frac{m_2 k + m_1 s_R}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2 m_1 m_2 k \cdot s_R}}. \qquad (52.19)$$

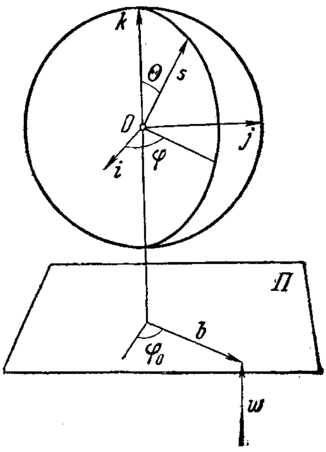


Рис. 19. Сферическое представление рассеяния.

Здесь k, как и выше, единичный вектор направления начальной относительной скорости w, которая имеет то же направление, что и $(v_2)_L$. Отметим, что направления рассеяния одни и те же в системах S_R и S_M и что направление рассеяния для S_L выражено через его направление в системе S_R формулой (52.19).

Построим теперь сферическое представление рассеяния (рис. 19), видоизменив рис. 14 для трехмерного случая. Вектор w (начальная относительная скорость) задан, но мы рассматриваем все векторы удара b, перпендикулярные к нему. Ради удобства чертежа мы проводим b

в смещенной плоскости П и строим единичную сферу с центром в точке O и со сферическими полярными координатами (θ, φ) на ней. Процесс рассеяния для данного $\boldsymbol{b}$ дает единичный вектор рассеяния $\boldsymbol{s}$, с концом в виде точки на единичной сфере. На самом деле, *рассеяние отображает плоскость* П *на единичную сферу*. В системах S_R и S_M имеет место одно и то же отображение, в S_L — отличное от них.

В системе S_R мы имеем в соответствии с рис. 18

$$\boldsymbol{s}_R = \frac{\boldsymbol{b}}{b} \sin \chi_R + \boldsymbol{k} \cos \chi_R = \\ = \boldsymbol{i} \cos \varphi_0 \sin \chi_R + \boldsymbol{j} \sin \varphi_0 \sin \chi_R + \boldsymbol{k} \cos \chi_R, \tag{52.20}$$

где φ_0 — азимут вектора $\boldsymbol{b}$ относительно единичных векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, которые вместе с вектором $\boldsymbol{k}$ образуют ортогональный триэдр; таким образом, углы (Θ_R, φ_R) для вектора $\boldsymbol{s}_R$ определяются следующими выражениями:

$$\left.\begin{array}{c} \sin \Theta_R \cos \varphi_R = \sin \chi_R \cos \varphi_0, \\ \sin \Theta_R \sin \varphi_R = \sin \chi_R \operatorname{s\,n} \varphi_0, \\ \cos \Theta_k = \cos \chi_R \\ (0 \leqslant \Theta_R \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi_R < 2\pi). \end{array}\right\} \tag{52.21}$$

Для рассеяния при отталкивании имеем равенства

$$\Theta_R = \chi_R, \quad \varphi_R = \varphi_0, \tag{52.22}$$

а для рассеяния при притяжении (зависящего от величины угла χ_R, который согласно теории может принимать любое отрицательное значение) имеем две следующие возможности:

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi_R = \varphi_0, & \Theta_R = \chi_R, \\ \text{либо } \varphi_R = \pi + \varphi_0, & \Theta_R = -\chi_R. \end{array}\right\} \tag{52.23}$$

Получив, таким образом, углы (Θ_R, φ_R) для вектора $\boldsymbol{s}_R$ (углы (Θ_M, φ_M) те же самые), найдем углы (Θ_L, φ_L) для $\boldsymbol{s}_L$

из уравнений (52.19). Имеем следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\Theta_L\cos\varphi_L &= \beta\sin\Theta_R\cos\varphi_R,\\
\sin\Theta_L\sin\varphi_L &= \beta\sin\Theta_R\sin\varphi_R,\\
\cos\Theta_L &= \beta\left(\frac{m_2}{m_1}+\cos\Theta_R\right),\\
\beta^{-1} &= \sqrt{1+\frac{m_2^2}{m_1^2}+2\frac{m_2}{m_1}\cos\Theta_R}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{52.24}$$

Поэтому

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_L &= \varphi_R,\\
\sin\Theta_L &= \beta\sin\Theta_R,\\
\mathrm{tg}\,\Theta_L &= \frac{\sin\Theta_R}{\dfrac{m_2}{m_1}+\cos\Theta_R}.
\end{aligned}\right\} \tag{52.25}$$

Последнее уравнение ограничивает угол Θ_L пределами $(0, \pi)$. Отметим еще следующую формулу:

$$\frac{\sin\Theta_R\,d\Theta_R}{\sin\Theta_L\,d\Theta_L} = \frac{\sin^3\Theta_R}{\sin^3\Theta_L}\,\frac{1}{1+\dfrac{m_2}{m_1}\cos\Theta_R} = \frac{\left(1+\dfrac{m_2^2}{m_1^2}+2\dfrac{m_2}{m_1}\cos\Theta_R\right)^{3/2}}{1+\dfrac{m_2}{m_1}\cos\Theta_R}. \tag{52.26}$$

Рассмотрим столкновения с начальными элементами ($\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{w}$) (см. рис. 19), с фиксированной относительной скоростью $\boldsymbol{w}$ и с переменным вектором соударения $\boldsymbol{b}$. Мы рассматриваем $\boldsymbol{b}$ как радиус-вектор точки в плоскости П, тогда любой точке плоскости П соответствует один из двух результатов — захват или рассеяние. Определим *полное поперечное сечение захвата* как площадь Π_c плоскости П, соответствующую захвату; Π_c может быть нулевой, конечной или бесконечно большой величиной.

Можно представить процесс рассеяния как отображение Π (за исключением площади Π_c) на единичную сферу с помощью вектора рассеяния $\boldsymbol{s}$, причем отображения совпадают для систем S_R, S_M, а отображение в S_L отличается от них. Определим *дифференциальное поперечное сечение рассеяния в телесном угле* $d\Omega$ как площадь $d\Pi$, которая отображается на элемент $d\Omega$ единичной сферы. Обозначая их отношение через σ

$$\sigma = \frac{d\Pi}{d\Omega}, \tag{52.27}$$

получим для дифференциального поперечного сечения равенство

$$\sigma\, d\Omega = d\Pi. \tag{52.28}$$

Назовем σ *плотностью*; это действительно относительная плотность вероятности на единичной сфере, соответствующая постоянной плотности вероятности на Π. Существуют, конечно, две плотности $\sigma_M = \sigma_R$ и σ_L.

Целесообразно различать два случая рассеяния: нулевое рассеяние ($\Theta = 0$) и рассеяние под конечными углами ($\Theta > 0$). Нулевое рассеяние может иметь место тогда и только тогда, когда с ростом расстояния взаимодействие прекращается, т. е. если $P(r) = 0$ для $r > r_1$, так что если $b > r_1$, то частицы минуют одна другую, не изменив своего прямолинейного движения.

Определим *полное поперечное сечение рассеяния* как площадь Π_s плоскости Π, соответствующую рассеянию под конечными углами; таким образом,

$$\Pi_s = \int \sigma\, d\Omega, \tag{52.29}$$

где несобственный интеграл берется по поверхности единичной сферы с исключенной точкой $\Theta = 0$. Если Π_0— площадь на плоскости Π, соответствующая нулевому рассеянию, то полная бесконечная площадь $\Pi = \Pi_c + \Pi_s + \Pi_0$ и, следовательно, по крайней мере одна из площадей Π_c, Π_s, Π_0 бесконечно велика.

Определение плотности σ сводится к нахождению отношения отображения (52.27). Вектор рассеяния есть

$$s = \boldsymbol{i}\sin\Theta\cos\varphi + \boldsymbol{j}\sin\Theta\sin\varphi + \boldsymbol{k}\cos\Theta, \qquad (52.30)$$

он описывает телесный угол

$$d\Omega = |\sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi|. \qquad (52.31)$$

Отсюда

$$\sigma = \frac{d\Pi}{d\Omega} = \frac{|b\, dp\, d\varphi_0|}{|\sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi|} = \frac{b}{\sin\Theta}\left|\frac{db}{d\Theta}\right|, \qquad (52.32)$$

так как $d\varphi_0 = d\varphi_R = d\varphi_L$.

В системе S_R нам известен угол χ_R как функция (b, w) (ср. (52.11)). Найдем b как функцию (χ_R, w) и подставим затем $\chi_R = \Theta_R$ (52.22) для рассеяния при отталкивании и $\chi_R = \pm\Theta_R + 2\pi k$ (52.23) для рассеяния при притяжении. Таким образом, получим[1])

$$b = b(\Theta_R, w). \qquad (52.33)$$

Из выражения (52.32) находим значение плотности в виде

$$\sigma_M = \sigma_R = \frac{b}{\sin\Theta_R}\left|\frac{db}{d\Theta_R}\right|; \qquad (52.34)$$

правая часть, очевидно, есть функция Θ_R и w; здесь, как и при других дифференцированиях, w считается постоянным.

Для лабораторной системы отсчета S_L получаем из выражения (52.32)

$$\sigma_L = \frac{b}{\sin\Theta_L}\left|\frac{db}{d\Theta_L}\right| = \sigma_R\left|\frac{\sin\Theta_R\, d\Theta_R}{\sin\Theta_L\, d\Theta_L}\right| \qquad (52.35)$$

и согласно (52.26) это выражение можно переписать

---

[1]) Это может быть многозначная функция в случае рассеяния при притяжении.

следующим образом:

$$\sigma_L = \sigma_R \frac{\sin^3 \Theta_R}{\sin^3 \Theta_L} \frac{1}{\left| 1 + \frac{m_2}{m_1} \cos \Theta_R \right|} =$$

$$= \sigma_R \frac{\left(1 + \frac{m_2^2}{m_1^2} + 2 \frac{m_2}{m_1} \cos \Theta_R \right)^{3/2}}{\left| 1 + \frac{m_2}{m_1} \cos \Theta_R \right|}. \qquad (52.36)$$

Мы хотели бы выразить σ_L как явную функцию Θ_L и w, но не можем сделать этого. Наилучшая возможность — считать формулы (52.25) и (52.36) выражениями Θ_L и σ_L через параметр Θ_R для данного w. Можно, однако, написать упрощенное приближенное выражение в том случае, когда отношение масс m_2/m_1 мало́, так как тогда Θ_L и σ_L мало отличаются от Θ_R и σ_R.

Ввиду симметрии отображения относительно оси k (см. рис. 19) часто удобно употреблять *дифференциальное поперечное сечение рассеяния в кольце* Θ, $\Theta + d\Theta$. Это площадь плоскости П, которая отображается на кольцо, и ее величина равна

$$2\pi\sigma \sin \Theta \, | \, d\Theta \, | = 2\pi b \, | \, db \, |. \qquad (52.37)$$

Рассмотрим более детально некоторые специальные случаи рассеяния:

а) *гладкие упругие шары.* Столкновение между двумя гладкими упругими шарами можно рассматривать как удар двух частиц с прекращением взаимодействия при $r = D$, где D — сумма радиусов шаров; мы принимаем $V(u) = 0$ для $u < 1/D$ и $V(u) \to \infty$, когда $u \to 1/D$ снизу. Решением уравнения (52.10) является $u_0 = 1/D$ и согласно (52.9) угол рассеяния равен

$$\chi_R = \pi - 2 \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{b^{-2} - u^2}} = \pi - 2 \arcsin \frac{b}{D}. \qquad (52.38)$$

Таким образом, $b = D\cos\frac{1}{2}\chi_R = D\cos\frac{1}{2}\Theta_R$ и согласно формуле (52.34) плотность определяется выражением

$$\sigma_M = \sigma_R = \frac{1}{4}D^2, \tag{52.39}$$

которое не зависит от Θ_R и w. Для того чтобы получить σ_L, надо применить (52.25) и (52.36).

β) *Кулоново рассеяние.* Возьмем

$$P(r) = \frac{\mu}{r^2}, \quad V(u) = ku, \quad k = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\mu \tag{52.40}$$

($k > 0$ для отталкивания, $k < 0$ для притяжения). Тогда согласно (52.10) имеем

$$f(u) = \frac{1}{b^2} - \frac{2ku}{b^2w^2} - u^2 = (u_0 - u)(u + u_1), \tag{52.41}$$

где

$$u_0 = \frac{1}{b^2w^2}\left(-k + \sqrt{k^2 + b^2w^4}\right),$$

$$u_1 = \frac{1}{b^2w^2}\left(k + \sqrt{k^2 + b^2w^4}\right). \tag{52.42}$$

Согласно (52.9) угол рассеяния выражается следующим образом:

$$\chi_R = \pi - 2\int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{(u_0 - u)(u + u_1)}} =$$

$$= \pi - 4\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{u_0}{u_1}}, \tag{52.43}$$

так что для $k > 0$ выполняется условие $0 < \chi_R < \pi$ и для $k < 0$ имеет место условие $-\pi < \chi_R < 0$; таким образом, в обоих случаях $\Theta_R = |\chi_k|$. Из выражений (52.42) получаем

$$\sqrt{\frac{u_0}{u_1}} = \frac{\sqrt{k^2 + b^2w^4} - k}{bw^2}. \tag{52.44}$$

Подставив в (52.43) это отношение и решив полученное уравнение, находим

$$bw^2 = k\,\mathrm{ctg}\,\frac{1}{2}\,\chi_R = |\,k\,|\,\mathrm{ctg}\,\frac{1}{2}\,\Theta_R. \qquad (52.45)$$

Согласно (52.34) плотность имеет следующее значение:

$$\sigma_M = \sigma_R = \frac{b}{\sin\Theta_R}\left|\frac{db}{d\Theta_R}\right| = \frac{k^2}{4w^4}\,\mathrm{cosec}^4\,\frac{1}{2}\quad\Theta_R. \quad (52.46)$$

Это формула рассеяния Резерфорда; она справедлива для кулонова поля как в случае притяжения, так и в случае отталкивания. Для системы отсчета S_R энергия другой частицы на бесконечности равна $\frac{1}{2}m_2w^2$.

Для лабораторной системы имеем согласно уравнениям (52.25) и (52.36)

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tg}\,\Theta_L &= \frac{\sin\Theta_R}{\dfrac{m_2}{m_1} + \cos\Theta_R}, \\ \sigma_L &= \frac{k_2}{4w^4}\,\mathrm{cosec}^4\,\frac{1}{2}\,\Theta_R\,\frac{\left(1 + \dfrac{m_2^2}{m_1^2} + 2\,\dfrac{m_2}{m_1}\cos\Theta_R\right)^{3/2}}{\left|1 + \dfrac{m_2}{m_1}\cos\Theta_R\right|}; \end{aligned}\right\} \qquad (52.47)$$

таким образом, Θ_L и σ_L выражены через параметр Θ_R. Для двух частиц одной и той же массы $m_1 = m_2$ получаем уравнения

$$\Theta_L = \frac{1}{2}\,\Theta_R, \quad \sigma_L = \frac{k^2}{w_4}\cos\Theta_L\,\mathrm{cosec}^4\,\Theta_L. \qquad (52.48)$$

γ) *Закон* $1/r^3$. Принимаем

$$P(r) = \frac{\mu}{r^3}, \qquad (u) = \frac{1}{2}\,ku^2, \quad k = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\,\mu \qquad (52.49)$$

($k > 0$ для отталкивания, $k < 0$ для притяжения).

Согласно (52.10) имеем

$$f(u) = \frac{1}{b^2} - u^2\left(\frac{k}{b^2 w^2} + 1\right). \tag{52.50}$$

Захват происходит, если $k < -b^2w^2$. Если k превышает это значение, то имеет место рассеяние с углом

$$\left.\begin{aligned} \chi_R &= \pi - 2\int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} = \pi\left(1 - \frac{bw}{\sqrt{k + b^2w^2}}\right), \\ u_0 &= \frac{w}{\sqrt{k + b^2w^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{52.51}$$

В случае отталкивания имеем $\Theta_R = \chi_R$ и

$$\frac{k}{b^2w^2} = \frac{\pi^2}{(\pi - \Theta_R)^2} - 1, \tag{52.52}$$

откуда

$$\sigma_M = \sigma_R = \frac{\pi^2 k}{w^2 \sin\Theta_R} \cdot \frac{\pi - \Theta_R}{\Theta_R^2 (2\pi - \Theta_R)^2}. \tag{52.53}$$

δ) *Закон* $1/r^5$ *). Принимаем

$$P(r) = \frac{\mu}{r^5}, \quad V(n) = \frac{1}{2}kn^2, \quad k = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\mu. \tag{52.54}$$

Мы имеем согласно (52.10) выражение для функции

$$f(u) = \frac{1}{b^2} - \frac{ku^4}{2b^2w^2} - u^2 =$$

$$= \frac{k}{2b^2w^2}(u_0^2 - u^2)(u^2 + u_1^2), \tag{52.55}$$

---

*) Отталкивание, изменяющееся обратно пропорционально пятой степени расстояния, имеет значение в кинетической теории газов; ср. C h a p m a n and C o l w i n g (цит. соч. в предыдущем примечании, стр. 170—174), где рассматриваются силы, зависящие от любой степени расстояния.

где

$$\left.\begin{aligned} u_0^2 &= \frac{w}{k}\left(-b^2w + \sqrt{b^4w^2+2k}\right), \\ u_1^2 &= \frac{w}{k}\left(b^2w + \sqrt{b^4w^2+2k}\right). \end{aligned}\right\} \tag{52.56}$$

Угол рассеяния определяется эллиптическим интегралом

$$\chi_R = \pi - \frac{4bw}{\sqrt{2k}} \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{(u_0^2-u^2)(u^2+u_1^2)}}. \tag{52.57}$$

§ 53. Проблема n тел. Проблемой n тел называется задача о движении n частиц, притягивающихся друг к другу с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Если m_i $(i = 1, \ldots, n)$ — массы частиц, $\boldsymbol{r}_i$ — их радиусы-векторы и $\boldsymbol{r}_{ij} = -\boldsymbol{r}_{ji} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$, то уравнения движения имеют вид

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = -G\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r}_{ij}\frac{m_im_j}{r_{ij}^3}, \tag{53.1}$$

где G — гравитационная постоянная.

Система имеет три интеграла импульса и три интеграла момента импульса; в векторной форме они имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i &= \boldsymbol{M} = \text{const}, \\ \sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{r}}_i &= \boldsymbol{h} = \text{const}. \end{aligned}\right\} \tag{53.2}$$

Имеется также интеграл энергии

$$T + V = E = \text{const}, \tag{53.3}$$

где

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\dot{\boldsymbol{r}}_i, \\ V &= -\sum_{\substack{i,\,j=1 \\ j>i}}^{n} \frac{Gm_im_j}{r_{ij}}. \end{aligned} \tag{53.4}$$

Скорость центра масс постоянна, и мы можем, если хотим, принять систему отсчета, в которой центр масс всегда неподвижен.

Эти семь интегралов существуют также, если действуют силы более общего типа, при условии, что они подчиняются третьему закону Ньютона и зависят только от взаимных расстояний между частицами. Закон обратной пропорциональности силы квадрату расстояния заключен в уравнении Якоби, которое имеет вид

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = 2T + V, \tag{53.5}$$

где

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} m_i r_i^2. \tag{53.6}$$

Этот поразительный результат легко доказать[1]), исходя из уравнений движения в форме Гамильтона (§ 47) для системы с N степенями свободы, имеющей гамильтонову функцию вида

$$H(q, p) = T(p) + V(q), \tag{53.7}$$

где T — однородная функция второй степени относительно обобщенных импульсов (p) и V — однородная функция степени -1 относительно обобщенных координат (q). Гамильтонова функция проблемы n тел имеет именно эту форму. Благодаря однородности функций T и V справедливы уравнения

$$\sum_{\rho=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial p_\rho} p_\rho = 2T, \quad \sum_{\rho=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial q_\rho} q_\rho = -V. \tag{53.8}$$

Если определить Ψ следующим образом:

$$\Psi = \sum_{\rho=1}^{N} p_\rho q_\rho, \tag{53.9}$$

[1]) Ср. Уиттекер [28], стр. 389, где дано другое доказательство.

то, согласно уравнениям Гамильтона (47.7), имеет место уравнение

$$\frac{d\Psi}{dt} = \sum_{\rho=1}^{N} \left(p_\rho \frac{\partial H}{\partial p_\rho} - \frac{\partial H}{\partial q_\rho} q_\rho \right) = 2T + V. \tag{53.10}$$

Это общая форма уравнения Якоби; в случае проблемы n тел имеем уравнение

$$\frac{d\Phi}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i r_i = \sum_{\rho=1}^{N} p_\rho q_\rho = \Psi, \tag{53.11}$$

а (53.10) приводит к уравнению (53.5).

Величина

$$\Phi' = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^{n} \frac{m_i m_j}{M} r_{ij}^2, \tag{53.12}$$

где M — полная масса системы, не зависит от системы отсчета, и легко видеть, что $\Phi' = \Phi$, если за начало координат выбран центр масс. Отсюда уравнение Якоби можно также переписать в виде

$$\frac{d^2\Phi'}{dt^2} = 2T' + V, \tag{53.13}$$

где T' — кинетическая энергия относительно центра масс.

Если $n = 2$, имеем проблему двух тел (§ 51), которая легко решается. Но при $n > 2$ решение проблемы встречает большие математические трудности. Случай $n = 3$ (проблема трех тел) представляет особый интерес для математиков; по этой проблеме имеется обширная литература[1]).

В проблеме трех тел имеются девять координат и девять импульсов и мы имеем систему из 18 гамильтоновых

---

[1]) Современные изложения см. Wintner [30], гл. 5; Зигель К. Л., Лекции по небесной механике, пер. М. С. Яров-Ярового, ред. Г. Н. Дубошина, ИЛ, Москва, 1959; текущую литературу по проблеме трех тел см. Mathematical Reviews, раздел Астрономия, проблема трех и n тел; каждый год появляется в среднем около 14 исследований.

уравнений движения. С помощью интегралов (53.2) и (53.3), применяя канонические преобразования[1]), удается уменьшить число уравнений системы с 18 до 6[2]). Если частицы движутся в плоскости, число уравнений уменьшается до четырех.

Хотя не известно никакого общего формального решения проблемы трех тел, однако существуют частные решения проблемы, известной как задача Лагранжа[3]), в которой конфигурация этих тел представляет собой либо жесткую прямую линию, либо треугольник; это следующие движения:

а) частицы остаются всегда на прямой линии, вращающейся с произвольной постоянной угловой скоростью, которая определяет взаимные расстояния частиц;

б) треугольник, образованный частицами, остается равносторонним со сторонами постоянной длины, вращаясь в своей плоскости с произвольной постоянной угловой скоростью, которая определяет размеры треугольника.

§ 54. Периодические структуры. Пусть частицы массы m закреплены через равные интервалы на бесконечной прямой струне (массой которой можно пренебречь). Если частицы испытывают малые поперечные колебания, то перемещения $y_p(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{y}_p = a^2(y_{p+1} - 2y_p + y_{p-1}) \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{54.1}$$

где $a^2 = S/(md)$, S — натяжение, d — расстояние между частицами.

---

1) О канонических преобразованиях см. § 87, 91, 95.

2) См. Уиттекер [28], гл. XIII; Франк [5], стр. 71—80; Grammel [8], стр. 346; Birkhoff G. D., Dynamical Systems, гл. 9, стр. 406, New York, American Mathematical Society, 1927.

3) Ср. Уиттекер [28], стр. 445—448; Routh [22], I, стр. 232; Carathéodory C., Sitzgsber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-nat. Abt. 1933, 257 (Gesammelte mathematische Schriften, т. 2, стр. 387, München, Beck, 1955). Об элементарных решениях проблемы n тел см. Hamel [11], стр. 449—464. Об устойчивости движения в задаче Лагранжа см. Уиттекер [28], стр. 448—450 и Grammel [8], стр. 370—372.

Если заданы следующие начальные условия:

$$y_p = \alpha_p, \qquad \dot{y} = \beta_p \quad \text{при} \quad t = 0, \tag{54.2}$$

то решение уравнений (54.1) имеет вид

$$y_p = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\alpha_{p+l} J_{2l}(2at) + \beta_{p+l} \int_0^t J_{2l}(2a\tau)\, d\tau \right], \tag{54.3}$$

где J_{2l} — бесселева функция порядка $2l$. Легко упростить это выражение, используя рекуррентные формулы для функции Бесселя[1]).

Выше приведен простейший пример колебания решетки, которая может в общем случае рассматриваться как бы состоящей из частиц различных масс, и может быть двумерной или трехмерной (кристаллическая решетка трехмерного тела). Пространственная периодичность системы является ее существенной чертой[2]).

Для струны конечной длины с закрепленными концами, несущей n частиц равной массы, прикрепленных к ней через равные промежутки, имеем уравнения движения вида (54.1), однако в этом случае имеются граничные условия в виде

$$\left.\begin{aligned} \ddot{y}_p &= a^2 (y_{p+1} - 2y_p + y_{p-1}) \qquad (p = 1, \ldots, n), \\ y_0 &= y_{n+1} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{54.4}$$

---

[1]) Очень удобный список формул бесселевых функций дан в книге McLachlan N. W., Bessel Functions for Engeneers, Oxford, Clarendon Press, 1934.

[2]) Теорию колебаний решеток, с историческим введением и исследованием электрических схем, математически эквивалентных механическим структурам, см. Бриллюэн Л., Пароди М., Распространение волн в периодических структурах, ИЛ, Москва, 1959. В добавление к истории вопроса, данной Бриллюэном, можно заметить, что Гамильтон глубоко разработал этот вопрос в статье, названной «Динамика света», но опубликовал только короткий доклад об этой работе; см. Hamilton W. R., Mathematical Papers, т. 2, стр. 413—607. Гамильтон получил формулу (54.3) операционными методами, функции Бесселя появлялись при этом как интегралы (цит. соч., стр. 451, 576).

О нагруженных струнах, цепях или гиростатах и сетках см. Routh [22], II, гл. 9; о нагруженных струнах и молекулах см. Corben and Stehle [3], гл. 8; о теории удельной теплоемкости твердых тел Борна — Кармана см. Blackman M., Handbuch der Physik, т. VII, ч. 1, стр. 330.

Чтобы решить эти уравнения, подставляем в них

$$y_p = \eta_p \cos(\omega t + \varepsilon) \qquad (p = 0, 1, \ldots, n+1), \tag{54.5}$$

где η_p, ω и ε — константы; тогда уравнения (54.4) превращаются в следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} a^2\eta_{p+1} + (\omega^2 - 2a^2)\eta_p + a^2\eta_{p-1} = 0 \quad (p = 1, \ldots, n),\\ \eta_0 = \eta_{n+1} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{54.6}$$

Эта система уравнений удовлетворяется величинами

$$\eta_p = \operatorname{Re} z_p \qquad (p = 0, 1, \ldots, n+1), \tag{54.7}$$

если комплексная переменная z удовлетворяет уравнениям

$$\left.\begin{aligned} a^2 z_{p+1} + (\omega^2 - 2a^2) z_p - a^2 z_{p-1} = 0 \quad (p = 1, \ldots, n),\\ \operatorname{Re} z_0 = \operatorname{Re} z_{n+1} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{54.8}$$

Возьмем $z_0 = -i\beta$ чисто мнимым и напишем

$$z_p = -i\beta e^{ip\varphi} \qquad (p = 0, 1, \ldots, n+1). \tag{54.9}$$

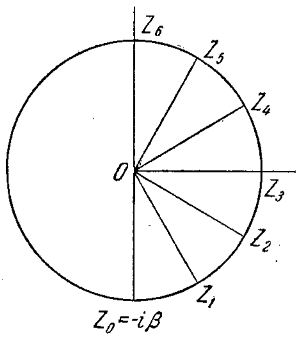


Рис. 20. Комплексные амплитуды нагруженной струны с закрепленными концами для случая пяти частиц ($n = 5$), колеблющихся на фундаментальной моде ($r = 1$).

Тогда все уравнения (54.8) удовлетворяются при условии, что выполняются только два уравнения, а именно:

$$\left.\begin{aligned} a^2 e^{i\varphi} + (\omega^2 - 2a^2) +\\ + a^2 e^{-i\varphi} = 0,\\ \operatorname{Re} i\beta e^{i(n+1)\varphi} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{54.10}$$

Второе уравнение выполняется, если φ принимает одно из следующих значений:

$$\varphi_r = \frac{r\pi}{n+1} \qquad (r = 1, \ldots, n), \tag{54.11}$$

первое же из уравнений (54.10) удовлетворяется, если при

$\varphi = \varphi_r$ постоянная ω имеет значение

$$\omega_r = 2a \sin \frac{1}{2} \varphi_r \qquad (r = 1, \ldots, n). \tag{54.12}$$

Таким образом, нормальными частотами (или собственными частотами) нагруженной струны с закрепленными концами будут:

$$\nu_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = \frac{a}{\pi} \sin \frac{r\pi}{2(n+1)} \qquad (r = 1, \ldots, n) \tag{54.13}$$

и общее колебание дается наложением нормальных мод

$$y_p = -\operatorname{Re} \sum_{r=1}^{n} i\beta \exp(ip\varphi_r) \cos(\omega_r t + \varepsilon_r) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \beta_r \sin \frac{pr\pi}{n+1} \cos\left(2at \sin \frac{r\pi}{2(n+1)} + \varepsilon_r\right) \tag{54.14}$$

$$(p = 1, \ldots, n).$$

Комплексные амплитуды z_p (54.9) можно представить с помощью круговой диаграммы в комплексной плоскости, как на рис. 20.

ГЛАВА III

ТВЕРДОЕ ТЕЛО, ИМЕЮЩЕЕ ОДНУ НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

§ 55. Твердое тело, на которое не действуют никакие силы [1]**.** Рассмотрим твердое тело, на которое не действуют никакие внешние силы. Согласно уравнению (44.4) его центр масс имеет постоянную скорость, а согласно (44.7) движение относительно центра масс удовлетворяет уравнению

$$\dot{\boldsymbol{h}}^* = 0, \qquad (55.1)$$

где $\boldsymbol{h}^*$ — момент относительного импульса, взятый для центра масс. Относительно этого центра тело имеет три степени свободы, и трех скалярных уравнений, содержащихся в уравнении (55.1), достаточно для определения движения.

Если на тело действуют внешние силы, которые, однако, не имеют результирующего момента относительно центра масс, то движение относительно центра масс по-прежнему выражается уравнением (55.1). Этот случай встретится, когда твердое тело движется в однородном гравитационном поле; тогда центр масс движется по параболе, но сила тяжести не влияет на движение относительно центра масс.

Если твердое тело не свободно, а имеет неподвижную точку O, вокруг которой оно может свободно поворачи-

---

[1]) Детали выводов и чертежи см. Аппель [2], II, гл. XX; Macmillan [17], II, стр. 192—216; Routh [22], II, гл. 4, Synge and Griffith [26], стр. 418—429; Уиттекер [28]. стр. 162—171; Winkelmann and Grammel [29], стр. 390—404; Grammel R., Der Kreisel, т. 1, стр. 121—164, Berlin, Springer, 1950.

ваться, и если на тело не действуют никакие внешние силы, кроме реакции, вызванной этой связью, то, как в случае (44.5), имеем

$$\dot{\boldsymbol{h}} = 0, \tag{55.2}$$

где $\boldsymbol{h}$ — момент импульса, взятый для неподвижной точки.

Математические задачи, выраженные уравнениями (55.1) и (55.2), тождественны, за исключением того факта, что в уравнениях (55.1) моменты инерции берутся для центра масс, а в уравнениях (55.2) — для неподвижной точки. В дальнейшем с помощью уравнения (55.2) мы будем рассматривать задачу о вращении тела вокруг закрепленной точки O; заметим, однако, что все рассуждения приложимы также к случаю движения вокруг центра масс в свободном движении.

Пусть $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ — главный (с ортами, взятыми вдоль главных осей инерции) ортонормальный триэдр, закрепленный в теле, и пусть $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела и триэдра. Тогда

$$\boldsymbol{h} = A\omega_1\boldsymbol{i} + B\omega_2\boldsymbol{j} + C\omega_3\boldsymbol{k}, \tag{55.3}$$

где A, B, C — главные моменты инерции для неподвижной точки O. Согласно уравнению (55.2), вектор $\boldsymbol{h}$ неподвижен в пространстве, и его абсолютная величина h постоянна. Следовательно,

$$A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = h^2. \tag{55.4}$$

Согласно уравнению (25.4), кинетическая энергия имеет вид

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = 2T, \tag{55.5}$$

и она постоянна, так как реакция связи не совершает работы.

Движение может быть очень наглядно описано методом Пуансо[1]). Эллипсоид Пуансо, определяемый уравнением

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 2T, \tag{55.6}$$

---

[1]) Poinsot L., Théorie nouvelle de la Rotation des corps., Paris, Bachelier, 1851. Эта работа интересна исторически, потому что Пуансо восставал против чисто аналитического подхода к динамике, выдвинутого Лагранжем.

неподвижен в теле и движение описывается следующим образом: эллипсоид катится по неизменяемой плоскости (неподвижной в пространстве), проведенной перпендикулярно к неподвижному вектору $\boldsymbol{h}$ на расстоянии $2T/h$ от точки O. Вектор, проведенный из точки O в точку касания, есть вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$; кривые, вычерчиваемые этой точкой касания на эллипсоиде и на плоскости, называются соответственно *полодия* и *герполодия*.

Согласно уравнениям Эйлера (49.14) компоненты угловой скорости удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 - (B - C)\,\omega_2\omega_3 = 0, \qquad B\dot{\omega}_2 - (C - A)\,\omega_3\omega_1 = 0,\\ C\dot{\omega}_3 - (A - B)\,\omega_1\omega_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{55.7}$$

Уравнения (55.4) и (55.5) являются интегралами этих уравнений. Полагая тело несимметричным (A, B и C все различны) и выбирая триэдр $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ так, что $A > B > C$, получим аналитическое решение проблемы следующим путем. Уравнения (55.4) и (55.5) нужно разрешить относительно ω_1 и ω_3 и подставить решения во второе уравнение (55.7). Таким образом получим дифференциальное уравнение для ω_2, решением которого является эллиптическая функция. Нужно различать два случая в зависимости от того, какое из соотношений имеет место: $h^2 < 2BT$ или $h^2 > 2BT$.

Итак, решение, выраженное через эллиптические функции Якоби модуля k, таково[1]):

для $h^2 > 2BT$:

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1 = \alpha\,\mathrm{dn}\,p\,(t - t_0), \qquad \omega_2 = \beta\,\mathrm{sn}\,p\,(t - t_0),\\ &\qquad\qquad \omega_3 = \gamma\,\mathrm{cn}\,p\,(t - t_0),\\ &\beta = \sqrt{\frac{2AT - h^2}{B(A - B)}}, \quad p = \sqrt{\frac{(h^2 - 2CT)(A - B)}{ABC}},\\ &\qquad k = \sqrt{\frac{B - C}{A - B}\cdot\frac{2AT - h^2}{h^2 - 2CT}}; \end{aligned}\right\} \tag{55.8}$$

[1]) Если $h^2 = 2BT$, то решение экспоненциальное; ср. R o u t h [22], II, стр. 120.

для $h^2 < 2BT$:

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1 = \alpha \operatorname{cn} p\,(t - t_0), \quad \omega_2 = \beta \operatorname{sn} p\,(t - t_0), \\ &\qquad\qquad \omega_3 = \gamma \operatorname{dn} p\,(t - t_0), \\ &\beta = \sqrt{\frac{h^2 - 2CT}{B\,(B - C)}}, \quad p = \sqrt{\frac{(2AT - h^2)(B - C)}{ABC}}, \\ &\qquad\qquad k = \sqrt{\frac{A - B}{B - C} \cdot \frac{h^2 - 2CT}{2AT - h^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{55.9}$$

В обоих случаях имеем

$$\alpha = \sqrt{\frac{h^2 - 2CT}{A\,(A - C)}}, \quad \gamma = -\sqrt{\frac{2AT - h^2}{C\,(A - C)}}. \tag{55.10}$$

Как только найдены эти компоненты угловой скорости, описание движения завершается введением углов Эйлера ϑ, φ, ψ (§ 11), описывающих положение триэдра ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$) относительно неподвижного триэдра ($\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{K}$). Выбирая $\boldsymbol{K}$ совпадающим по направлению с вектором $\boldsymbol{h}$, получим ϑ и ψ из уравнений

$$\cos\vartheta = \frac{C\omega_3}{h}, \quad \operatorname{tg}\psi = -\frac{B\omega_2}{A\omega_1}, \tag{55.11}$$

а φ найдем квадратурой из уравнения

$$\sin\vartheta\dot{\varphi} = \omega_2 \sin\psi - \omega_1 \cos\psi. \tag{55.12}$$

В этих вычислениях мы воспользовались последней строкой из (11.5) и (19.4).

Уравнения (55.7) имеют частные решения, в которых какая-либо одна компонента угловой скорости постоянна, а две другие обращаются в нуль. Эти решения соответствуют установившимся вращениям вокруг трех главных осей.

Чтобы исследовать устойчивость этих установившихся движений, заметим, что (55.4) и (55.5) можно также выразить через компоненты $\boldsymbol{h}$ по осям $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$:

$$\left.\begin{aligned} h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 &= h^2, \\ \frac{h_1^2}{A} + \frac{h_2^2}{B} + \frac{h_3^2}{C} &= 2T. \end{aligned}\right\} \tag{55.13}$$

Принимая (h_1, h_2, h_3) за декартовы ортогональные координаты в пространстве представлений, мы видим, что установившиеся вращения соответствуют точкам $(h, 0, 0)$, $(0, h, 0)$, $(0, 0, h)$. Изображающая точка движется по кривой, которая согласно уравнениям (55.13) является линией пересечения сферы и эллипсоида. Исследуя формы этих кривых, легко увидеть, что *установившиеся вращения вокруг наибольшей и наименьшей осей инерции устойчивы, тогда как установившееся вращение вокруг промежуточной оси инерции неустойчиво*[1]).

Если осью симметрии тела является главная ось инерции, так что $A = B \neq C$, то движение значительно упрощается. Эллипсоид Пуансо становится эллипсоидом вращения, и мы опишем движение качением прямого кругового конуса, фиксированного в теле (подвижной полодии), по неподвижному в пространстве прямому круговому конусу (герполодии). Нужно различать случаи $A > C$ и $A < C$; в первом случае один конус находится вне другого, в последнем — конус полодии (или конус тела) содержит внутри себя конус герполодии (или пространственный конус)[2]).

§ 56. Вращающийся волчок. Волчок представляет собой твердое тело вращения, которое приведено во вращение вокруг своей оси симметрии и касается горизонтальной плоскости. Существенная особенность этой системы состоит в том, что волчок представляет собой твердое тело, движущееся под действием двух сил, а именно, силы тяжести, приложенной в центре масс, и силы реакции в точке касания. Поверхности в точке контакта можно

---

[1]) Удобство этого представления обусловлено тем фактом, что мы имеем дело со сферой и эллипсоидом, в то время как если ввести в рассмотрение угловую скорость, то уравнения (55.4) и (55.5) привели бы нас к двум эллипсоидам. Об исследовании этих двух приближений (с чертежами) см. Шефер [23], стр. 322—349.

[2]) Описание и чертёжи см. Synge and Griffith [26], стр. 427.

считать гладкими; в этом случае система голономна. Они могут быть достаточно шероховатыми, чтобы предотвратить скольжение; тогда система неголономна. Они также могут быть не абсолютно шероховатыми; в этом случае тело скользит или катится, в зависимости от обстоятельств [1]).

a) Несимметричный волчок. При обычной математической идеализации волчок считается твердым телом, с неподвижной точкой O (вершина волчка); он движется под действием двух сил, а именно, силы тяжести, приложенной в центре масс D, и силы реакции связи в точке O, такой, что точка O остается неподвижной. Динамические свойства определяются заданием семи чисел: массы m, главных моментов A, B, C для точки O и координат ξ, η, ζ точки D относительно главных осей с началом в точке O. Теория такого волчка приложима также к движению свободного твердого тела относительно его центра масс под действием сил, эквивалентных одной силе с постоянной абсолютной величиной и направлением, приложенной к точке неподвижной в теле. При такой интерпретации теория имеет значение в баллистике, где эта сила обусловлена сопротивлением воздуха.

Волчок называется *симметричным*, если

$$A = B, \qquad \xi = \eta = 0, \tag{56.1}$$

так что OD — ось динамической симметрии. Если условие (56.1) не выполняется, хотя бы по одному из равенств, то волчок называется *несимметричным*.

Для того чтобы исследовать движение несимметричного волчка, можно применить уравнения Лагранжа,

---

1) Наилучшее общее исследование этой проблемы см. Routh [22], II, гл. 5. Об эффектах трения см. также Jelett J. H., A Treatise on the Theory of Friction, гл. 5, 8 (London, Macmillan, 1872); Grammel, op. cit., § 55, стр. 107—121. В новой игрушке tippe-top тело имеет сферическую основу и волчок опрокидывается, если его приводят во вращение с достаточно большой угловой скоростью: теорию см. Braams C. M., Physica, Haag 18, 497 (1952); Fokker A. D., Physica, Haag 18, 503 (1952); Haringx F. A. De Ingenieur 4, Technisch Wetenschappelijk Onderzoek 2 (1952); Hugenholtz N. M., Physica, Haag 18, 515 (1952); Brien S. O. and Synge, Proc. Roy. Irish. Akad. A56, 23 (1954); Parkyn D. G., Math. Gaz. 40, 260 (1956).

выразив при этом кинетическую энергию через эйлеровы углы (ϑ, φ, ψ), аналогично тому, как это сделано в (49.4). Однако физический смысл проблемы выявляется более отчетливо, если воспользоваться уравнениями Эйлера (49.14), которые можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} A\dot{\omega}_1-(B-C)\,\omega_2\omega_3&=-mg\,(\eta K_3-\zeta K_2),\\ B\dot{\omega}_2-(C-A)\,\omega_3\omega_1&=-mg\,(\zeta K_1-\xi K_3),\\ C\dot{\omega}_3-(A-B)\,\omega_1\omega_2&=-mg\,(\xi K_2-\eta K_1),\end{aligned}\right\}\qquad(56.2)$$

где

$$\boldsymbol{K}=K_1\boldsymbol{i}-K_2\boldsymbol{j}+K_3\boldsymbol{k}\qquad(56.3)$$

— единичный вектор, направленный вертикально вверх (рис. 21). Так как направление $\boldsymbol{K}$ фиксировано, то имеем уравнение

$$0=\dot{\boldsymbol{K}}=\frac{\delta\boldsymbol{K}}{\delta t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{K}\qquad(56.4)$$

или, в координатной форме,

$$\left.\begin{aligned} \dot{K}_1+\omega_2K_3-\omega_3K_2&=0,\\ \dot{K}_2+\omega_3K_1-\omega_1K_3&=0,\\ \dot{K}_3+\omega_1K_2-\omega_2K_1&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(56.5)$$

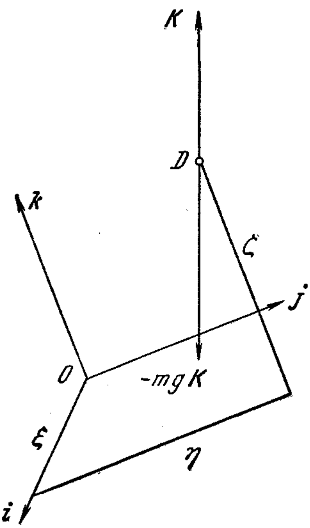


Рис. 21. Несимметричный волчок: $mg\boldsymbol{K}$ — сила гравитации.

Шесть дифференциальных уравнений (56.2) и (56.5) — первого порядка относительно ω_1, ω_2, ω_3, K_1, K_2, K_3, причем эти величины могут быть выражены через три угла Эйлера и их первые производные.

Эти уравнения допускают интегралы, которые являются следствиями постоянства полной энергии, обращения в нуль момента силы тяжести относительно вертикали, проходящей через точку O, а также того факта, что $\boldsymbol{K}$ —

единичный вектор:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}(A\omega_1^2+B\omega_2^2+C\omega_3^2)&+\\+mg(\xi K_1+\eta K_2+\zeta K_3)&=\text{const},\\A\omega_1K_1+B\omega_2K_2+C\omega_3K_3&=\text{const},\\K_1^2+K_2^2+K_3^2&=1.\end{aligned}\right\}\tag{56.6}$$

В некоторых специальных случаях существуют еще другие интегралы. Наиболее замечательный из них — интеграл Ковалевской, который имеет место в случае

$$A=B=2C,\qquad \zeta=0.\tag{56.7}$$

Переходом к новым главным осям $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ мы приводим η к нулю. Тогда уравнения (56.2) и (56.5) дают выражения

$$\left.\begin{aligned}2\dot{\omega}+i\omega\omega_3&=i\beta K_3,\\\dot{K}+iK\omega_3&=i\omega K_3,\end{aligned}\right\}\tag{56.8}$$

где $\omega=\omega_1+i\omega_2$, $K=K_1+iK_2$, $\beta=mg\xi/C$. Исключая K_3, получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}(\omega^2-\beta K)+i\omega_3(\omega^2-\beta K)=0,\tag{56.9}$$

а отсюда

$$\frac{d}{dt}\ln(\omega^2-\beta K)=-i\omega_3.\tag{56.10}$$

Складывая (56.10) с комплексной сопряженной величиной, получим искомый интеграл

$$(\omega^2-\beta K)(\bar{\omega}^2-\beta\bar{K})=\text{const}\tag{56.11}$$

или

$$(\omega_1^2-\omega_2^2-\beta K_1)^2+(2\omega_1\omega_2-\beta K_2)^2=\text{const}.\tag{56.12}$$

Этот интеграл вместе с первыми двумя интегралами (56.6) дает нам три уравнения для эйлеровых углов и их первых производных. Эти уравнения можно разрешить и выразить их решения через гиперэллиптические функции[1]).

β) *Симметричный волчок: общее движение.* Для того чтобы рассмотреть симметричный волчок, удовлетворяющий уравнению (56.1), удобно использовать два ортонормальных триэдра ($\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$), ($\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}$), показанных на рис. 22. Триэдр ($\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}$) неподвижен в пространстве и вектор $\boldsymbol{K}$ направлен вертикально вверх; вектор $\boldsymbol{k}$ направлен вдоль

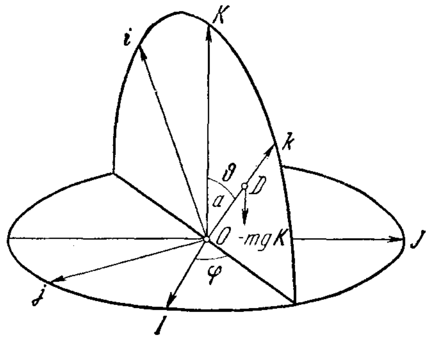


Рис. 22. Закрепленный триэдр ($\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}$) и движущийся триэдр ($\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$) для симметричного волчка.

оси симметрии OD, а вектор $\boldsymbol{j}$ — горизонтален. Положение триэдра ($\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$) описывается углом ϑ, дополнительным к широте, и азимутальным углом φ, показанным на рис. 22.

Угловые скорости $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ тела и триэдра ($\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$) соответственно выражаются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \omega_1\boldsymbol{i} + \omega_2\boldsymbol{j} + \omega_3\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{\Omega} &= \Omega_1\boldsymbol{i} + \Omega_2\boldsymbol{j} + \Omega_3\boldsymbol{k}, \end{aligned}\right\} \tag{56.13}$$

---

[1]) В приведенном доказательстве мы следовали R o u t h [22], II, стр. 159—161, и А п п е л ь [2], 11, стр. 181—185. Об исследовании волчка Ковалевской с помощью уравнений Лагранжа см. У и т т е к е р [28], стр. 184—188. Здесь же можно получить сведения о других интегрируемых случаях несимметричного волчка. Детальное исследование по несимметричному волчку, включающее использование уравнений Гамильтона см. H a m e l [11], стр. 407—449. См. также G r a m m e l, op. cit. § 55, стр. 164—214.

где

$$\omega_1 = \Omega_1 = \sin\vartheta\dot{\varphi}, \quad \omega_2 = \Omega_2 = -\dot{\vartheta}, \quad \Omega_3 = \cos\vartheta\dot{\varphi}. \tag{56.14}$$

Момент импульса для точки O равен

$$\boldsymbol{h} = A\omega_1\boldsymbol{i} + A\omega_2\boldsymbol{j} + C\omega_3\boldsymbol{k}; \tag{56.15}$$

а момент силы тяжести относительно точки O

$$\boldsymbol{G} = a\boldsymbol{k}\times(-mg\boldsymbol{K}) = -mga\sin\vartheta\boldsymbol{j}, \tag{56.16}$$

где $OD = a$.

Уравнение движения имеет вид

$$\dot{\boldsymbol{h}} = \boldsymbol{G}; \tag{56.17}$$

оно приводит к трем дифференциальным уравнениям для ϑ, φ и ω_3. Удобнее, однако, продолжать исследование не прямым путем[1]). Согласно уравнениям (49.17) имеем

$$\omega_3 = s = \mathrm{const} \tag{56.18}$$

(s — *спин* волчка). Мы имеем также уравнения

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{K}) = \dot{\boldsymbol{h}}\cdot\boldsymbol{K} = \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{K} = 0, \\ \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{K} = \alpha, \end{aligned}\right\} \tag{56.19}$$

постоянная α — момент импульса относительно оси K; кроме того, имеем интеграл энергии

$$T + V = \frac{1}{2}A(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}C\omega_3^2 + mga\cos\vartheta = E, \tag{56.20}$$

$E = \mathrm{const}$. Подставляя значения ϑ и φ из (56.14), (56.15) и (56.18) в уравнения (56.19) и (56.20), получаем следующие два уравнения для ϑ и φ:

$$\left.\begin{aligned} A\sin^2\vartheta\dot{\varphi} = \alpha - \beta\cos\vartheta, \\ A(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) + \frac{\beta^2}{C} = 2(E - mga\cos\vartheta), \end{aligned}\right\} \tag{56.21}$$

---

1) О прямом исследовании симметричного волчка с помощью уравнений Лагранжа см. Уиттекер [28], стр. 174—183, где введены и углы Эйлера, и параметры Кэли — Клейна. О симметричном волчке на гладкой плоскости см. Уиттекер [28], стр. 183—184.

где $\beta = Cs$. Исключая $\dot{\varphi}$ и полагая $\cos\vartheta = x$, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}^2 = f(x),\\ &f(x) = \frac{1}{A}\left(2E - \frac{\beta^2}{C} - 2mgax\right)(1 - x^2) - \frac{(\alpha - \beta x)^2}{A^2}. \end{aligned}\right\} \quad (56.22)$$

Так как $f(x)$ положительна во все время движения (исключая моменты, когда $\dot{x} = 0$) и так как $f(-1) < 0$, $f(1) < 0$, то эта функция есть кубический многочлен относительно x и имеет три действительных корня x_1, x_2, x_3, таких, что

$$-1 < x_1 < x_2 < 1 < x_3; \quad (56.23)$$

специальные случаи равенства корней здесь не рассматриваются. Переменная x колеблется в пределах (x_1, x_2) и решением является выражение

$$\cos\vartheta = x = x_1 + (x_2 - x_1)\,\mathrm{sn}^2\, n(t - t_0), \quad (56.24)$$

где

$$n = \sqrt{\frac{mga(x_3 - x_1)}{2A}}, \quad k = \sqrt{\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}}, \quad (56.25)$$

k — модуль эллиптической функции Якоби sn. Азимутальный угол φ задается уравнением

$$\dot{\varphi} = \frac{\alpha - \beta x}{A(1 - x^2)}. \quad (56.26)$$

Ясно, что $\dot{\varphi}$ имеет один и тот же знак во время движения тогда и только тогда, когда α/β лежит вне интервала (x_1, x_2).

Лучше всего изучить это движение, исследуя траекторию конца вектора k на единичной сфере; полярные координаты на ней — (ϑ, φ). Траектория заключена между двумя окружностями, $x = x_1$ (верхней) и $x = x_2$ (нижней);

траектория имеет самопересечения тогда и только тогда, когда во время движения $\dot{\varphi}$ меняет знак[1]).

γ) *Симметричный волчок*; *регулярная прецессия*. Любое движение волчка может быть исследовано, если воспользоваться сравнением моментов $G = \dot{h}$, согласно (56.17). Рассмотрим (принимая обозначения рис. 22) установившееся движение, заданное условиями

$$\vartheta = \text{const}, \quad \varphi = pt, \quad \omega_3 = s, \tag{56.27}$$

где p и s — некоторые постоянные. Согласно (56.14) и (56.15) имеем уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1 = \Omega_1 = p\sin\vartheta, \quad \omega_2 = \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = p\cos\vartheta, \\ &\boldsymbol{h} = Ap\sin\vartheta\boldsymbol{i} + Cs\boldsymbol{k}, \\ &\dot{\boldsymbol{h}} = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{h} = p\sin\vartheta\,(Ap\cos\vartheta - Cs)\,\boldsymbol{j}. \end{aligned}\right\} \tag{56.28}$$

Момент сил, требуемый для поддержания этого движения, равен моменту силы тяжести (56.16), при условии, что p и s удовлетворяют уравнению

$$Csp - Ap^2\cos\vartheta = mga. \tag{56.29}$$

Это уравнение определяет установившиеся движения симметричного волчка, с осью, наклоненной под углом ϑ к вертикали; s — спин и p — угловая скорость *прецессии*, с которой ось волчка вращается вокруг вертикали, проведенной через вершину волчка.

Если заданы некоторые значения величин p и ϑ, то можно найти спин s, удовлетворяющий уравнению (56.29). Пусть, наоборот, заданы s и ϑ; тогда уравнение (56.29)

---

[1]) Дальнейшие детали о движении симметричного волчка см. Аппель [2], т. II, стр. 181—188; Macmillan [17], т. II, стр. 216—249; Routh [22], т. II, гл. 5; Synge and Griffith [26], стр. 432—440; Winkelmann and Grammel [29], стр. 406—422. Можно сослаться также на классическое исследование Klein F. and Sommerfeld A., Über die Theorie des Kreisels, Leipzig, Teubner, 1897—1910. Более подробные сведения о теории волчка и приложениях гироскопов см. Gray A., A Treatise on Gyrostatik and Rotational Motion, London, Macmillan, 1918, и Граммель Р., Гироскоп, его теория и применения, т. 1, 2, ИЛ, Москва, 1952.

удовлетворяется при двух действительных значениях p, а именно,

$$p=\frac{1}{2A\cos\vartheta}\left(Cs\pm\sqrt{C^2s^2-4Amga\cos\vartheta}\right), \quad (56.30)$$

при условии, что

$$s^2>\frac{4Amga\cos\vartheta}{C^2}. \quad (56.31)$$

Если s велико, то одна из этих угловых скоростей прецессии мала, а другая — велика; малая величина равна приблизительно

$$p=\frac{mga}{Cs}; \quad (56.32)$$

это — очень полезная простая формула, из которой можно вычислить спин при помощи измерения медленной прецессии.

δ) *Устойчивость спящего волчка.* Симметричный волчок называется спящим, если он вращается вокруг своей оси симметрии, причем эта ось сохраняет вертикальное направление. В этом движении постоянные α, β, E, которые входят в кубичную функцию $f(x)$ формулы (56.22), имеют следующие значения:

$$\alpha=\beta=Cs, \qquad E=\frac{1}{2}Cs^2+mga, \quad (56.33)$$

где s — спин движения, а функция $f(x)$ равна

$$f(x)=\frac{2mga}{A}(1-x^2)\left(1+x-\frac{C^2s^2}{2Amga}\right) \quad (56.34)$$

Функция имеет двойной корень в точке $x=1$ и простой корень в точке

$$x=x_0=\frac{C^2s^2}{2Amga}-1, \quad (56.35)$$

кроме случая $x_0=1$, когда корень является трехкратным. Предположим, что $x_0\neq 1$. Имеем тогда два случая:

$x_0 > 1$, показанный на рис. 23, и $x_0 < 1$, показанный на рис. 24.

Любое возмущенное движение, для которого постоянные α, β, E мало отличаются от значений (56.33),

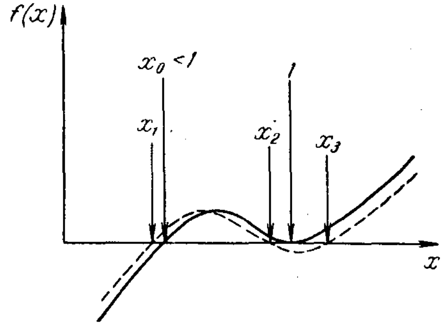


Рис. 23. График основной кубической функции для устойчивого спящего волчка.

колеблется в пределах (x_1, x_2), определяемых кубичной функцией $f(x)$, аналогичной функции (56.22), график которой мало отличается от графиков рис. 23 или 24,

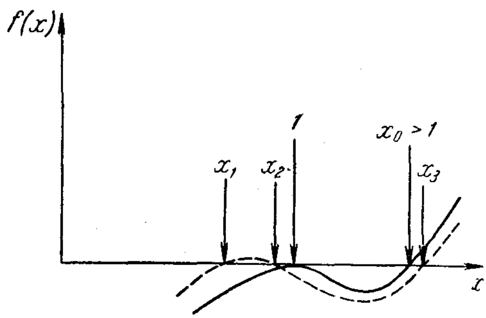


Рис. 24. График основной кубической функции для неустойчивого спящего волчка.

каждый из которых относится к невозмущенному движению. График возмущенного движения (показанный на чертеже пунктиром), согласно (56.23) будет иметь нули в точках

(x_1, x_2), где $x_1 < x_2 < 1$. В случае, показанном на рис. 23, эти точки близки к 1, а в случае, показанном на рис. 24, x_1 близок к x_0, x_2 близок к 1. В первом случае амплитуда колебаний в возмущенном движении мала, во втором случае она конечна (приблизительно от $x = x_0$ до $x = 1$). Первое означает устойчивость, второе — неустойчивость.

Проведя аналогичные рассуждения, найдем, что $x_0 = 1$ дает устойчивость; итак, мы имеем как необходимое и достаточное условие устойчивости спящего волчка $x_0 \geqslant 1$ или эквивалентное этому условию неравенство

$$s^2 \geqslant \frac{4Amga}{C^2}, \tag{56.36}$$

где s — спин и (C, A) — осевой и экваториальный моменты инерции волчка[1]).

§ 57. Гироскопическая «жесткость». Гирокомпас.

а) *Гироскопическая «жесткость».* *Гироскоп* (или *гиростат*) — это твердое тело с осью симметрии, вокруг которой тело вращается с большой угловой скоростью. Всякий, кто имел дело с гироскопом, знает, что вращение придает ему род «жесткости», так что кажется, будто гироскоп оказывает сопротивление изменению направления его оси. Это только грубое мускульное впечатление. Необходимо тщательное математическое исследование для того, чтобы объяснить это явление. Обсудим три аспекта гироскопической «жесткости»; в первых двух симметрия тела не используется.

Рассмотрим твердое тело, имеющее одну неподвижную точку, или свободное твердое тело; в последнем случае ограничимся только движением относительно центра масс. В любом из этих случаев основное уравнение можно написать в виде (ср. с (49.9))

$$\dot{\boldsymbol{h}} = \boldsymbol{G}, \tag{57.1}$$

где $\boldsymbol{h}$ и $\boldsymbol{G}$ — момент импульса и момент сил относительно

---

[1]) О различных исследованиях устойчивости спящего волчка с использованием уравнений Лагранжа см. Уиттекер [28], стр. 231—233.

неподвижной точки или относительно центра масс, соответственно тому, какой случай имеет место.

В качестве первой оценки гироскопической жесткости рассмотрим скорость изменения направления вектора $\boldsymbol{h}$, направление которого описывает единичный вектор $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{h}/h$. Тогда

$$\dot{\boldsymbol{h}} = h\dot{\boldsymbol{U}} + \dot{h}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{G}, \quad \boldsymbol{U}\dot{\boldsymbol{U}} = 0, \tag{57.2}$$

откуда следует, что

$$\dot{h} = \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{G}, \tag{57.3}$$

и из (57.2) получаем следующее соотношение:

$$\dot{\boldsymbol{U}} = \frac{\boldsymbol{W}}{h}, \tag{57.4}$$

где

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{G} - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{G}); \tag{57.5}$$

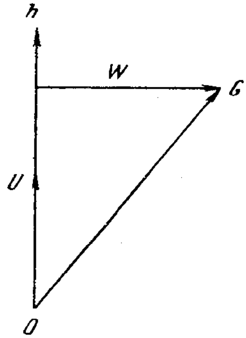


Рис. 25.

$\boldsymbol{W}$ представляет собой вектор, проведенный из конца $\boldsymbol{G}$ перпендикулярно к вектору $\boldsymbol{h}$ до пересечения с ним (рис. 25). Теперь $\dot{\boldsymbol{U}}$ есть скорость точки, в которой вектор $\boldsymbol{h}$ пересекает единичную сферу. Из уравнений (57.4) и (57.5) видно, что абсолютная величина скорости этой точки удовлетворяет неравенству

$$|\dot{\boldsymbol{U}}| \leqslant \frac{|\boldsymbol{G}|}{h}, \tag{57.6}$$

так что она стремится к нулю, когда h стремится к бесконечности. В этом смысле *большой момент импульса движения как бы сообщает «жесткость» направлению вектора момента импульса.*

Во-вторых, пусть $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ — главный ортонормальный триэдр, неподвижный относительно тела. В момент $t = 0$ пусть тело вращается вокруг оси $\boldsymbol{k}$ с угловой скоростью s. Пусть к телу приложен момент $\boldsymbol{G}$. Рассмотрим соответствующее движение изображающей точки $\boldsymbol{k}$ на единичной сфере. Ее скорость и ускорение в произвольный момент времени имеют следующие выражения:

$$\dot{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k}, \qquad \ddot{\boldsymbol{k}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{k} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k}). \tag{57.7}$$

В момент $t = 0$ имеем условия

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = s, \tag{57.8}$$

и, следовательно, согласно уравнениям Эйлера (49.14) имеем уравнения

$$A\dot{\omega}_1 = G_1, \quad B\dot{\omega}_2 = G_2, \quad C\dot{\omega}_3 = G_3. \tag{57.9}$$

Таким образом, в момент времени $t = 0$ скорость и ускорение равны

$$\dot{\boldsymbol{k}} = 0, \qquad \ddot{\boldsymbol{k}} = -\frac{G_1}{A}\boldsymbol{j} + \frac{G_2}{B}\boldsymbol{i}. \tag{57.10}$$

Спин s не входит в это ускорение, которое имеет тот же вид, как и в случае, когда $s = 0$. Поскольку *рассматривается вторая производная вектора* $\boldsymbol{k}$ *по времени* (*т. е. ускорение*), *гироскопическая жесткость не имеет места.*

В-третьих, рассмотрим тело, у которого ось симметрии совпадает с вектором $\boldsymbol{k}$, а моменты инерции равны (A, A, C). Пусть $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K})$ — ортонормальный триэдр, неподвижный в пространстве, и пусть тело приведено в движение так, что его спин $s\boldsymbol{k}$ и вектор $\boldsymbol{k}$ вращаются в плоскости $(\boldsymbol{KI})$ с (прецессионной) угловой скоростью $p\boldsymbol{J}$. Тогда его угловая скорость и момент импульса равны

$$\boldsymbol{\omega} = p\boldsymbol{J} + s\boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{h} = Ap\boldsymbol{J} + Cs\boldsymbol{k}, \tag{57.11}$$

а момент сил, необходимый для поддержания этого движения, выражается следующим образом:

$$\boldsymbol{G} = \dot{\boldsymbol{h}} = Cs\dot{\boldsymbol{k}} = Cs\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k} = Csp\boldsymbol{i}, \tag{57.12}$$

где вектор $\boldsymbol{i}$ таков, что $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{k})$ образуют ортонормальный триэдр, как показано на рис. 26. Этот момент вращения известен под названием *гироскопическая пара*; так как он пропорционален s, то *гироскопическая пара есть проявление гироскопической жесткости*. Квадранты на единичной сфере, изображенные на рис. 26, поясняют, какой смысл имеют указанная пара, прецессия и спин.

β) *Гирокомпас.* Рассмотрим твердое тело с осью динамической симметрии, проходящей через центр масс O. Пусть оно установлено так, что может свободно вращаться вокруг точки O, а эта точка закреплена на поверхности вращающейся Земли. Это тело можно назвать *свободным гирокомпасом.* Его движение определено уравнением (57.1), где h и G измеряются относительно точки O. Момент сил G обусловлен только притяжением к Земле. Предположим, что Земля однородна и имеет сферическую форму, тогда результирующая сил притяжения, действующих на частицы твердого тела, проходит через центр Земли. Но, вообще говоря, она не проходит через точку O, так что $G \neq 0$. Однако этот момент вращения в действительности так мал, что на практике им можно пренебречь. Полагая $G = 0$, мы имеем $h = \text{const}$ и движение гирокомпаса есть движение Пуансо (§ 55). Ось симметрии гирокомпаса вращается с постоянной угловой скоростью прецессии вокруг некоторой неподвижной в пространстве прямой, определенной начальными условиями. Действительно, свободный гирокомпас указывает земному наблюдателю неизменное направление в пространстве.

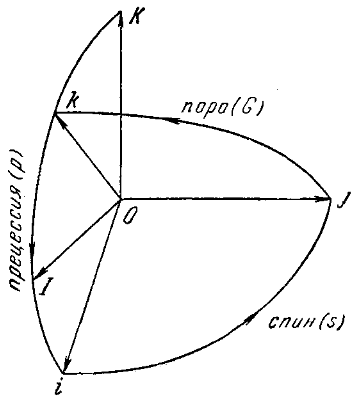


Рис. 26. Гироскопическая пара, прецессия и спин.

Рассмотрим теперь случай, когда ось симметрии гирокомпаса вынуждена (благодаря связи не совершающей работы) оставаться в горизонтальной плоскости[1]). На

[1]) Это есть математическое упрощение связи, применяемое практически, см. Л а м б [14], гл. 8, § 60; P ö s c h l Th., Handbuch der Physik, т. 5, стр. 543—552 (1927); D e i m e l R. F., Mechanics of the Giroscope (New York, Macmillan, 1929); R a w l i n g s A. L., The Theory of the Giroscopic Composs (New York, Macmillan, 1929); F e r r y E. S., Applied Gydrodynamics (New York, Wiley, 1932); G r a m m e l R., Der Kreisel, т. 2 (Berlin, 1950).

рис. 27 PQ — часть земной оси (направленной с юга на север); $\boldsymbol{K}$ — единичный вектор, параллельный PQ; OQ — горизонтальная прямая (направленная с юга на север; λ — широта точки O; $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ — ортонормальный триэдр, у которого вектор $\boldsymbol{j}$ вертикален, а вектор $\boldsymbol{k}$ направлен вдоль оси симметрии гироскопа, ϑ — угол, который вектор $\boldsymbol{k}$ образует с осью OQ (положительное направление отсчета — с востока на запад). Круг в перспективе представляет горизонтальную плоскость, касающуюся земной поверхности в точке O. Угловая скорость гироскопа складывается из угловой скорости Земли $\Omega\boldsymbol{K}$, угловой скорости триэдра относительно Земли, $\dot{\vartheta}\boldsymbol{j}$, и спина, $s_0\boldsymbol{k}$. Отсюда момент импульса для точки O равен

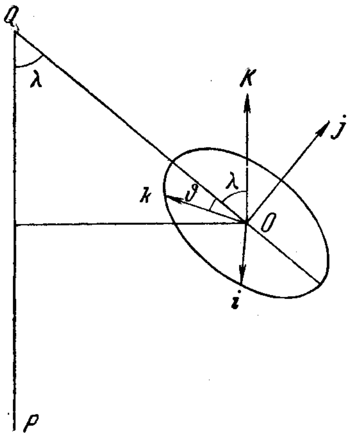


Рис. 27. Гирокомпас с осью, лежащей в горизонтальной плоскости.

$$\boldsymbol{h} = -A\Omega \sin\vartheta \cos\lambda \boldsymbol{i} + A(\dot{\vartheta} + \Omega \sin\lambda)\boldsymbol{j} + Cs\boldsymbol{k}, \quad (57.13)$$

где (A, A, C) — моменты инерции для точки O и $s = s_0 + \Omega \cos\vartheta \cos\lambda$.

Пренебрегая, как и раньше, моментом сил притяжения Земли, найдем, что момент $\boldsymbol{G}$, поддерживающий ось в горизонтальной плоскости, имеет направление вектора $\boldsymbol{i}$.

В координатной форме по осям $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{j}$ уравнение (57.1) дает $s = \text{const}$ и

$$A\ddot{\vartheta} + Cs\Omega\cos\lambda\sin\vartheta - A\Omega^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\cos^2\lambda = 0. \quad (57.14)$$

Это уравнение описывает колебания гирокомпаса около горизонтальной прямой OQ, проведенной с юга на север. Если пренебречь членом, содержащим Ω^2, то получим уравнение вида (34.2), которое описывает конечные колебания кругового маятника. Для малых колебаний период равен

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{A}{Cs\Omega \cos\lambda}}. \qquad (57.15)$$

Аналогично исследуются случаи, когда плоскость, ограничивающая движение, не горизонтальна или когда неподвижная точка на земной поверхности не является центром масс (барогироскоп [1]).

---

[1]) Ср. Аппель [2], 11, стр. 320—322.

ГЛАВА IV

ДВИЖЕНИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ УДАРНОГО ИМПУЛЬСА

§ 58. Ударный импульс и момент ударного импульса. Уравнения Лагранжа. Уравнение движения (30.1) для частицы дает следующее соотношение:

$$mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\,dt, \tag{58.1}$$

индексы 1 и 2 относятся соответственно к моментам времени t_1 и t_2. Переходя к пределу, когда $\boldsymbol{F}$ стремится к бесконечности, а интервал $t_2 - t_1$ стремится к нулю, приходим к понятию *ударного импульса* $\hat{\boldsymbol{F}}$, который, будучи приложен к частице, вызывает конечное мгновенное изменение скорости, определяемое формулой

$$m\,\Delta v = \hat{\boldsymbol{F}}. \tag{58.2}$$

В ходе математического исследования ударные импульсы можно рассматривать аналогично обычным силам. Можно говорить о *моменте* $\boldsymbol{r} \times \hat{\boldsymbol{F}}$ *ударного импульса* $\hat{\boldsymbol{F}}$, приложенного в точке $\boldsymbol{r}$, и о *работе ударного импульса*, определенной следующим образом:

$$\delta\hat{W} = \hat{\boldsymbol{F}} \cdot \delta\boldsymbol{r}. \tag{58.3}$$

Мы должны, конечно, постоянно иметь в виду, что добавление слов «под действием ударного импульса» изменяет природу основного понятия силы; это выражается в том, что размерность ее изменяется, а именно, умножается на время.

Интегрируя уравнения движения в других формах по короткому промежутку времени и переходя к пределу так же, как это было сделано выше, мы получим законы для ударного импульса из законов обычной динамики. Таким образом, уравнение (44.2) приводит к теореме об изменении импульса для движения под действием ударных импульсов, выраженной в следующем виде:

$$\Delta \boldsymbol{M} = \hat{\boldsymbol{F}}, \tag{58.4}$$

где $\hat{\boldsymbol{F}}$ — сумма всех внешних ударных импульсов, а (44.4) приводит к уравнению

$$m\,\Delta \boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{F}}, \tag{58.5}$$

где $\boldsymbol{v}$ — скорость центра масс системы. Кроме того, согласно уравнениям (44.5) и (44.7) имеем соотношения

$$\Delta \boldsymbol{h} = \hat{\boldsymbol{G}}, \qquad \Delta \boldsymbol{h}^* = \hat{\boldsymbol{G}}^*; \tag{58.6}$$

первое уравнение относится к случаю какой-нибудь неподвижной точки, второе — к случаю центра масс; здесь $\hat{\boldsymbol{G}}$ и $\hat{\boldsymbol{G}}^*$ — моменты ударных импульсов.

Однако, что касается энергии, то переход от обычной динамики к динамике движений под действием ударного импульса нельзя осуществить таким простым путем. Согласно уравнению (45.3) приращение кинетической энергии системы равно

$$\Delta T = \int_{t_1}^{t_2} \dot{W}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{P} \boldsymbol{F}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i\,dt, \tag{58.7}$$

где суммирование производится по P частицам, которые образуют систему. Но когда мы переходим к пределу, устремляя силы к бесконечности, а интервал времени $t_2 - t_1$ — к нулю, то получаем следующее уравнение:

$$\Delta T = \sum_{i=1}^{P} \hat{\boldsymbol{F}}_i \cdot \overline{\boldsymbol{v}}_i, \tag{58.8}$$

где $\overline{\boldsymbol{v}}_i$ — неизвестные средние значения скоростей. Хотя, может быть, и удобно говорить о работе импульса, однако мы не будем связывать ее с приращением энергии. Дело в том, что в динамике движения под действием ударного импульса механическая энергия может превращаться в теплоту; этой форме энергии нет места в ньютоновой динамике[1]).

Рассмотрим теперь уравнения Лагранжа (46.17) для голономной системы. Так как обобщенные скорости остаются конечными при переходе к пределу, то получаем уравнения

$$\Delta \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\rho} = \hat{Q}_\rho \qquad (\varrho = 1, \ldots, N), \tag{58.9}$$

где $\hat{Q}_\rho$ — обобщенный ударный импульс, который может быть вычислен, если использовать понятие работы ударного импульса, по формуле

$$\sum_{\rho=1}^{N} \hat{Q}_\rho \delta q_\rho = \delta\hat{W} = \sum_{i=1}^{P} \hat{F}_i . \delta r_i. \tag{58.10}$$

Математические проблемы динамики движения под действием ударного импульса гораздо проще, чем проблемы обычной динамики, потому что вместо дифференциальных имеют место только алгебраические уравнения.

§ 59. Соударения. Коэффициент восстановления. Развитие теории соударений было вызвано (в значительной степени) играми с шарами, в частности биллиардом; в то же время эта теория доставляет модели для молекулярных столкновений, когда принимаются в расчет моменты импульса[2]).

Рассмотрим два твердых тела, S_1 и S_2, движущихся произвольным образом. В некоторый момент времени они коснутся друг друга и продолжение их движения должно было бы вызвать вдавливание их друг в друга; этого не происходит благодаря действию пары ударных импульсов, равных по величине и противоположных по направлению, приложенных в точке контакта C (рис. 28)

---

[1]) В теории относительности тепло, возникающее при соударении, включается в схему механики с помощью возрастания собственной массы; ср. § 12 и S y n g e J. L., Relativity (the Special Theory), стр. 184, North-British Publishing Co, 1956.

[2]) В § 52 соударяющимися телами были частицы без моментов импульса.

Пусть O_1, O_2 — центры масс в момент столкновения и $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ — радиусы-векторы точки C соответственно относительно точек O_1, O_2. Пусть m_1, m_2 — массы тел, а $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ — скорости центров масс перед соударением, $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2$— моменты импульса для центров масс также перед столкновением. Те же величины после соударения отмечены штрихами. Пусть $-\hat{\boldsymbol{F}}$ и $\hat{\boldsymbol{F}}$ — обозначения ударных импульсов, действующих соответственно на тела S_1 и S_2.

Тогда уравнения (58.5) и (58.6) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} m_1(\boldsymbol{v}_1'-\boldsymbol{v}_1) &= -\hat{\boldsymbol{F}}, & m_2(\boldsymbol{v}_2'-\boldsymbol{v}_2) &= \hat{\boldsymbol{F}}, \\ \boldsymbol{h}_1'-\boldsymbol{h}_1 &= -\boldsymbol{r}_1\times\hat{\boldsymbol{F}}, & \boldsymbol{h}_2'-\boldsymbol{h}_2 &= \boldsymbol{r}_2\times\hat{\boldsymbol{F}}. \end{aligned}\right\} \quad (59.1)$$

Здесь $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$, $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ — известны и, таким образом, имеем 12 скалярных уравнений для 15 неизвестных, а именно, для компонент пяти векторов,

$$\boldsymbol{v}_1', \ \boldsymbol{v}_2', \ \boldsymbol{h}_1', \ \boldsymbol{h}_2', \ \hat{\boldsymbol{F}}. \quad (59.2)$$

Так как известны положения тел и моменты инерции, то $\boldsymbol{h}_1'$ определяет угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_1'$, и обратно; то же верно относительно $\boldsymbol{h}_2'$ и $\boldsymbol{\omega}_2'$. Таким образом, без дополнительных предположений проблема определения движения, получающегося в результате соударения, имеет $15-12=3$ степени произвола.

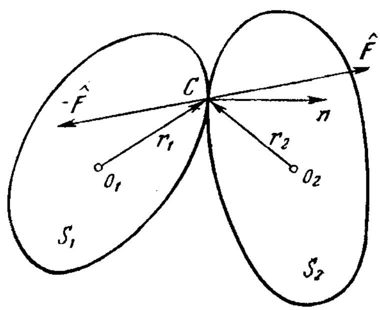


Рис. 28. Столкновение твердых тел.

Мы предполагаем теперь, что тела *гладкие*[1]); это означает, что ударные импульсы действуют под прямым углом

---

[1]) Детальное исследование соударений шероховатых или гладких тел см. Hamel [11], стр. 395—402; Routh [22], I, стр. 257—266; Bouligand G., Mecanique rationelle, гл. 18, 19 (Paris, Vuibert, 1954); Pöschl Th., Handbuch der Physik, т. 6, стр. 503—525 (Berlin, Springer, 1928). Исследование с помощью моторного исчисления (Motorrechnung) см. Raher W., Öst. Ing.— Arch., 9, 55 (1954). Соударение двух гладких упругих шаров исследовано другим путем в § 52 настоящей книги.

к общей касательной плоскости, так что имеем равенство

$$\hat{\boldsymbol{F}} = \hat{F}\boldsymbol{n}, \quad \hat{F} > 0, \tag{59.3}$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали, направленный от S_1 к S_2. Это предположение сводит число неизвестных к 13, а именно,

$$\boldsymbol{v}_1', \ \boldsymbol{v}_2', \ \boldsymbol{h}_1', \ \boldsymbol{h}_2', \ \hat{F}. \tag{59.4}$$

Оставшуюся неопределенность можно устранить, если предположить, что имеет место закон сохранения энергии

$$T' = T. \tag{59.5}$$

Здесь T известно, а T' можно выразить через $\boldsymbol{v}_1'$, $\boldsymbol{v}_2'$, $\boldsymbol{h}_1'$, $\boldsymbol{h}_2'$.

Но можно воспользоваться и более общим способом, который содержит изложенный как частный случай. Пусть $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ — скорости двух частиц, соприкасающихся в точке C, так что

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_1, \\ \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{r}_2, \end{aligned}\right\} \tag{59.6}$$

где $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ — угловые скорости тел. Можно считать, что формулы такого вида имеют место не только в начале соударения, но и в течение всего короткого времени, пока соударение длится. Введем *скорость сжатия* c, определенную следующим образом:

$$c = \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2). \tag{59.7}$$

В начальный момент она положительна, так как тела стремятся вдавиться друг в друга. Все соударение разбивается на два периода: (I) период сжатия, когда $c > 0$, и (II) период восстановления, когда $c < 0$. В период сжатия действуют ударные импульсы, как раз достаточные для того, чтобы свести c к нулю. Обозначая их через $(-I\boldsymbol{n}, I\boldsymbol{n})$, а скорости соответствующих частиц в момент окончания периода сжатия — через $\boldsymbol{v}_1''$, $\boldsymbol{v}_2''$, ..., получим

$$\left.\begin{aligned} m_1(\boldsymbol{v}_1'' - \boldsymbol{v}_1) &= -I\boldsymbol{n}, & m_2(\boldsymbol{v}_2'' - \boldsymbol{v}_2) &= I\boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{h}_1'' - \boldsymbol{h}_1 &= -\boldsymbol{r}_1 \times I\boldsymbol{n}, & \boldsymbol{h}_2'' - \boldsymbol{h}_2 &= \boldsymbol{r}_2 \times I\boldsymbol{n}, \\ c'' &= \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{u}_1'' - \boldsymbol{u}_2'') = 0. \end{aligned}\right\} \tag{59.8}$$

Из 13 скалярных уравнений, заключенных в (59.8), можно определить I и движение в конце периода сжатия.

Что касается периода восстановления, то предполагается, что ударные импульсы для этого периода пропорциональны ударным импульсам в течение сжатия; коэффициент пропорциональности, обозначенный через e, называется *коэффициентом восстановления*. Его величина изменяется от $e = 0$ (*неупругий удар*) до $e = 1$ (*абсолютно упругий* удар); удары с промежуточными значениями e называются *полуупругими*.

Конечный результат столкновения получим, если подставим значения $\hat{\boldsymbol{F}}$,

$$\hat{\boldsymbol{F}} = (1 + e) I\boldsymbol{n}, \tag{59.9}$$

в уравнения (59.1); при этом величина I находится из (59.8).

Можно показать, что условие $e = 1$ заключает в себе $T' = T$ (59.5).

Для того чтобы дать пример коэффициента восстановления, рассмотрим удар двух гладких однородных шаров. В этом случае ударные импульсы не имеют моментов относительно центров масс, и уравнения (59.8) сводятся к следующим:

$$\left.\begin{aligned} m_1(\boldsymbol{v}_1'' - \boldsymbol{v}_1') = -I\boldsymbol{n}, \quad m_2(\boldsymbol{v}_2'' - \boldsymbol{v}_2) = I\boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{v}_1'' - \boldsymbol{v}_2'') = 0. \end{aligned}\right\} \tag{59.10}$$

Отсюда получаем

$$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = \frac{m_1 m_2 c}{m_1 + m_2}, \tag{59.11}$$

где c — начальная скорость сжатия. Согласно уравнениям (59.1) и (59.9) имеем

$$m_1(\boldsymbol{v}_1' - \boldsymbol{v}_1) = -(1 + e) I\boldsymbol{n}, \quad m_2(\boldsymbol{v}_2' - \boldsymbol{v}_2) = (1 + e) I\boldsymbol{n} \tag{59.12}$$

и поэтому скорости после соударения равны:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_1 - \frac{m_2 c}{m_1 + m_2}(1 + e)\boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 + \frac{m_1 c}{m_1 + m_2}(1 + e)\boldsymbol{n}. \end{aligned}\right\} \tag{59.13}$$

Потеря кинетической энергии выражается следующим образом:

$$T - T' = \frac{m_1 m_2 c^2}{2(m_1 + m_2)} (1 - e^2). \tag{59.14}$$

§ 60. Минимальные теоремы при движении под действием ударных импульсов. Если на систему из P частиц действуют ударные импульсы $\hat{F}_i$, то

$$\sum m_i (v_i' - v_i) \cdot w_i = \sum \hat{F}_i \cdot w_i, \tag{60.1}$$

где w_i — произвольные векторы и v_i, v_i' — скорости частиц до и после приложения ударных импульсов. Здесь и ниже суммирование производится по $i = 1, \ldots, P$.

Уравнение (60.1) можно рассматривать как особую форму принципа Даламбера (§ 45), справедливую для движения под действием ударного импульса[1]).

Система может быть подчинена связям, вследствие которых определенные частицы должны оставаться неподвижными или двигаться по гладким неподвижным кривым или поверхностям; связи могут быть также такими, что расстояния между некоторыми частицами остаются постоянными (жесткость). Такие связи могут сохраниться при действии ударных импульсов; они могут также внезапно появиться или внезапно разрушиться. В любом случае можно разбить ударный импульс на две части:

$$\hat{F}_i = \hat{P}_i + \hat{R}_i, \tag{60.2}$$

где $\hat{P}_i$ — данные (или приложенные) ударные импульсы, а $\hat{R}_i$ — ударные импульсы, обусловленные связями. Последние удовлетворяют условию

$$\sum \hat{R}_i \cdot w_i = 0, \tag{60.3}$$

если w_i — скорости, удовлетворяющие связи.

---

1) Ср. Routh [22], I, стр. 298—304; Аппель [2], II, стр 448—462.

α) *Теорема Карно (первая часть).* Если к системе не приложены ударные импульсы, то внезапное наложение связей уменьшает кинетическую энергию системы[1]).

Для того чтобы доказать эту теорему, выберем w_i равными v_i; правая часть уравнения (60.1) обращается в нуль по (60.3) и имеем уравнение

$$\sum m_i (v_i' - v_i)\cdot v_i' = 0. \tag{60.4}$$

Потеря кинетической энергии, может быть, поэтому представлена положительно определенным выражением

$$T - T' = \frac{1}{2}\sum m_i v_i\cdot v_i - \frac{1}{2}\sum m_i v_i'\cdot v_i' =$$
$$= \frac{1}{2}\sum m_i (v_i - v_i')\cdot(v_i - v_i') > 0. \tag{60.5}$$

β) *Теорема Карно (вторая часть).* Кинетическая энергия возрастает, если жесткие[2]) связи разрушаются «взрывом».

В случае «взрыва» ударные импульсы, действующие между частицами системы, попарно равны и противоположно направлены вдоль прямых, соединяющих их (подобно действию и противодействию в третьем законе Ньютона). Хотя они и появляются такими «взаимно уравновешивающимися» парами, это именно ударные импульсы $\hat{F}_i$, а не ударные импульсы $\hat{R}_i$, обусловленные связями; последние и будут представлены в тех жестких связях, которые остаются после взрыва неразрушенными.

По тем же геометрическим соображениям, согласно которым реакции обыкновенных жестких связей не совершают работы, имеет место уравнение

$$\sum \hat{P}_i\cdot v_i = 0. \tag{60.6}$$

---

[1]) Кинетическая энергия не изменяется в исключительном случае, когда внезапное наложение связей не изменяет скорости. Исключительные случаи, подобные этому, опускаются в формулировках и доказательствах.

[2]) В данном случае под термином «жесткие» автор подразумевает связи, удерживающие некоторые из частиц системы на постоянных расстояниях друг от друга. (*Прим. перев.*)

Здесь v_i — скорости перед взрывом. Имеем также уравнение

$$\sum \hat{R}_i \cdot v_i = 0, \tag{60.7}$$

а отсюда, полагая в уравнении (60.1) $w_i = v_i$, получаем

$$\sum m_i (v_i' - v_i) \cdot v_i = 0. \tag{60.8}$$

Следовательно, приращение кинетической энергии можно представить положительно определенным выражением

$$T' - T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i' \cdot v_i' - \frac{1}{2} \sum m_i v_i \cdot v_i =$$
$$= \frac{1}{2} \sum m_i (v_i' - v_i) \cdot (v_i' - v_i) > 0. \tag{60.9}$$

γ) *Теорема Кельвина.* Если система, первоначально находившаяся в покое, приведена в движение ударными импульсами, приложенными к некоторым определенным частицам системы, причем ударные импульсы таковы, что скорости этих частиц приобретают наперед заданные значения, то кинетическая энергия этого движения меньше, чем кинетическая энергия любого мыслимого движения, возможного при связях, наложенных на систему, для которого все указанные частицы имеют те же наперед заданные скорости.

Пусть v_i — действительные скорости и v_i'' — скорости в мыслимом движении, так что для выбранных частиц $v_i' = v_i''$. Тогда если $w_i = v_i' - v_i''$, то имеет место уравнение

$$\sum \hat{P}_i \cdot w_i = 0, \tag{60.10}$$

потому что $\hat{P}_i = 0$ для всех частиц, кроме выбранных, а для них $w_i = 0$. Кроме того, выполняется уравнение

$$\sum \hat{R}_i \cdot w_i = 0, \tag{60.11}$$

так как v_i', v_i'' удовлетворяют связям. Полагая в уравнении (60.1) $v_i = 0$ (так как первоначально система находится в покое), имеем уравнение

$$\sum m_i v_i' \cdot (v_i' - v_i'') = 0. \tag{60.12}$$

Отсюда $T'' - T'$ можно представить положительно определенным выражением

$$T''-T'=\frac{1}{2}\sum m_i v_i''\cdot v_i''-\frac{1}{2}\sum m_i v_i'\cdot v_i'=$$
$$=\frac{1}{2}\sum m_i(v_i''-v_i')\cdot(v_i''-v_i')>0. \qquad (60.13)$$

б) *Теорема Бертрана.* Пусть на некоторую движущуюся систему действуют данные ударные импульсы, вследствие чего ее кинетическая энергия делается равной T'. Тогда $T'>T''$, где T'' — кинетическая энергия, возникающая вследствие приложения тех же ударных импульсов к системе в том же начальном движении, но подчиненной связям, совместным с этим движением.

Пусть v_i — начальные скорости, v_i' — конечные скорости при отсутствии дополнительных связей и v_i'' — скорости при наличии этих связей. Если $\hat{R}_i'$ и $\hat{R}_i''$ — ударные импульсы связей в этих двух случаях, то имеем уравнения

$$\sum \hat{R}_i'\cdot v_i''=0, \qquad \sum \hat{R}_i''\cdot v_i''=0, \qquad (60.14)$$

принимая во внимание только *дополнительные* связи. Поскольку согласно уравнению (60.1) $\hat{P}_i$ — заданные ударные импульсы, то получаем уравнения

$$\left.\begin{aligned}\sum m_i(v_i'-v_i)\cdot v_i''&=\hat{P}_i\cdot v_i'',\\ \sum m_i(v_i''-v_i)\cdot v_i''&=\hat{P}_i\cdot v_i''.\end{aligned}\right\} \qquad (60.15)$$

Затем, вычитая их друг из друга, получаем уравнение

$$\sum m_i(v_i'-v_i'')\cdot v_i''=0. \qquad (60.16)$$

Поэтому $T'-T''$ можно представить положительно определенным выражением

$$T'-T''=\frac{1}{2}\sum m_i v_i' v_i'-\frac{1}{2}\sum m_i v_i'' v_i''=$$
$$=\frac{1}{2}\sum m_i(v_i'-v_i'')\cdot(v_i'-v_i'')>0. \qquad (60.17)$$

Д. ОБЩАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

ГЛАВА I

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДИНАМИКИ

§ 61. Значение общей динамической теории. Наиболее очевидная цель всей динамики состоит в том, чтобы решать динамические проблемы, которые возникают в физике и астрономии. Начав с рассмотрения физической модели (§ 2), такой, например, как солнечная система, мы переходим к соответствующему математическому понятию или математической модели, и пытаемся решить дифференциальные уравнения, относящиеся к этой модели.

Однако в общем недостаточно ясно, что́ мы подразумеваем, когда говорим о *решении* системы дифференциальных уравнений. В самом деле, проблема считается решенной, когда координаты частиц модели в момент времени t выражены как простые функции времени t и тех параметров, которые определяют их начальные положения и скорости. Но что такое *простые* функции? Мы будем, далее, считать функцию $f(t)$ не формальным выражением, содержащим t, а величиной, определяемой переменной t, тогда невозможно четко разграничить простые и непростые функции. Если мы опускаем слово *простые* и говорим только *функции*, то каждая динамическая проблема разрешена как только она хорошо сформулирована, потому что дифференциальные уравнения с начальными условиями и начальным значением t определяют координаты в момент времени t. Это не только «домыслы» математиков, но и реальный факт, потому что в современных методах численного решения динамических проблем с помощью электронных вычислительных машин можно получить решение с любой желаемой степенью точности после замены дифференциальных уравнений разностными. Например, в баллистике этот современный метод в значительной степени вытеснил метод отыскания формул, представляющих решение[1]).

Однако хотя точные определения как бы ускользают от нас, не может быть сомнений в том, что проблема двух тел имеет простое решение, а проблема трех тел — нет. В случае проблемы двух тел мы имеем формулы, содержащие параметры; мы можем, изменяя значения этих параметров, изучить то, что можно назвать *математической структурой* класса всех решений, достигнув интеллектуального удовлетворения и понимания. Более того, мы можем образовать точные живые мысленные образы поведения двух тел, так что их движение становится для нас почти столь же реальным, как движение детали машины, работающей перед нашими глазами.

В случае проблемы трех тел численное решение, основанное на заданных значениях определяющих параметров задачи, показывает нам, как движутся эти тела при заданных условиях движения. Но ни одно численное решение, ни набор таких решений не обнаруживают *математической структуры* проблемы. В этом случае, как и во многих других, мы должны искать понимания математической структуры, исследуя сами дифференциальные уравнения.

Но мы могли потребовать большего. Мы можем стремиться не только к пониманию математической структуры некоторой отдельной динамической проблемы, но к пониманию математической структуры класса проблем столь широкого, что в конце концов мы можем считать всю динамику находящейся в поле нашего зрения. Мы будем рассматривать те системы, для которых имеют место уравнения движения в форме Лагранжа или в форме Гамильтона; этот класс и в самом деле включает очень широкий круг проблем.

При изучении общих методов динамики мы преследуем две цели. Первая, практическая цель, увеличить наши возможности решения частных проблем, разработав стандартную технику с широкой областью применимости. Вторая, интеллектуальная цель, понять математическую структуру динамики. Но все обстоит совсем

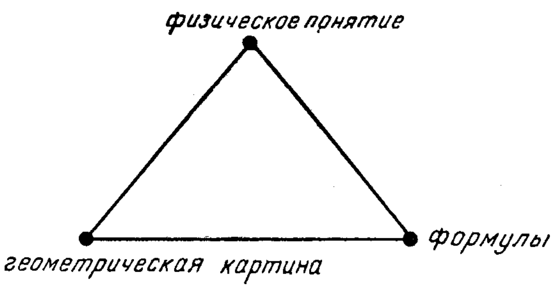
---

[1]) История развития идеи «неразрешимых» динамических проблем обсуждается в работе Wintner [30], стр. 143.

не так просто. Развитие квантовой механики вне классической динамики показывает, что понимание математической структуры динамики может иметь бо́льшие практические последствия (т. е. результаты, которые увеличивают наши знания физического мира), чем сосредоточение внимания на частных задачах того типа, для которого первоначально были разработаны динамические методы. Имея это в виду, при дальнейшем изложении общей динамической теории основное внимание будем обращать на изучение ее математической структуры, частные же динамические задачи будем рассматривать скорее как иллюстрации, чем как самостоятельные предметы исследования.

Таким образом, мы стремимся понять математическую структуру динамики. Но здесь мы наталкиваемся на громадную трудность, потому что *понимание* — весьма индивидуальное дело. Это ведь не вопрос признания той или иной теоремы, а вопрос построения всеобщей картины, в которой конкретные детали подчинены центральной идее. Мнения же о том, какая центральная идея является наилучшей, различаются очень сильно. Что́ психологически удовлетворяет одного человека, может не понравиться другому.

В элементарной динамике мы все исходим из общих оснований, потому что обладаем наглядной геометрической интуицией движения частицы, и этой интуиции подчиняем формулы, которыми пользуемся. В самом деле, существует такой треугольник звеньев человеческого мышления:



Однако когда мы переходим к более сложным динамическим системам, становится все труднее и труднее следовать геометрическим образам и, хотя это является шагом назад, но динамика становится областью, в которой рассматриваются только одни формулы. Это удовлетворит тех, кто находит удовольствие в чисто формальных доказательствах, но для большинства из нас потеря геометрической интуиции есть серьезное препятствие.

В настоящей книге сделана попытка дать геометрической интуиции необходимое место в общей динамической теории, систематически употребляя пространства представлений, в которых движение изображающей точки соответствует движению динамической системы[1]).

Общая динамическая теория занимает любопытное положение в физике. Исторически она была создана и развилась в форме ньютоновой динамики частиц и твердых тел. Но мы чувствуем настоятельную необходимость дать ей более широкую область применения, рассматривая ее как последовательную математическую теорию, приложимую к любой физической системе, поведение которой можно выразить в лагранжевой или гамильтоновой форме. Здесь возникает соблазн рассматривать эту теорию как чистую математику.

Наше изложение носит компромиссный характер. Аргументация не является достаточно строгой, чтобы удовлетворить современного чистого математика, но во всем изложении делается попытка представить математическую структуру независимо от предшествующей части этой книги (исключая допущения и истолкование). Все изложение основано на лагранжиане или гамильтониане, или на эквивалентной величине. Кинетическая энергия, столь важная в прямых физических приложениях ньютоновой динамики, играет второстепенную роль

---

[1]) Геометрический подход к динамике, по-видимому, впервые развит Герцем; см. Герц Г., Принципы механики, изложенные в новой связи, пер. с нем., изд. АН СССР, Москва, 1959. В книге содержатся также статьи Г. Гельмгольца и А. Пуанкаре. См. также Ricci G., Levi-Civita T., Méthodes de calcul absolu et leurs applications, Math. Ann. 54, 125—201 (1901); Гиббс Дж., Основные принципы статистической механики, пер. с англ., Гостехиздат, Москва, 1946; Synge J. L., Phil. Trans. Roy. Soc., London, ser. A226, 31—106 (1926); Brillouin L., Les Tenseurs en mécanique et en élasticité (Paris, Masson, 1938); Lanczos [15]; Prange [21].

(в иллюстративных примерах и в § 84, 85), и гамильтониан не ограничен требованием быть квадратичной функцией обобщенных импульсов, как это всегда имеет место в ньютоновой динамике.

§ 62. Пространства представлений. При изложении динамической теории мы будем пользоваться следующими пространствами представлений[1]):

Название	Символическое обозначение	Размерность	Координаты
Пространство конфигураций	Q	N	q_ρ
Пространство событий	QT	$N+1$	q_ρ, t; или x_r
Пространство импульса и энергии	PH	$N+1$	p_ρ, H; или y_r
Фазовое пространство	QP	$2N$	q_ρ, p_ρ
Пространство состояний	QTP	$2N+1$	q_ρ, t, p_ρ
Пространство состояний и энергии	$QTPH$	$2N+2$	q_ρ, t, p_ρ, H; или x_r, y_r

Здесь и во всем разделе Д (если не оговаривается противное) маленькие греческие индексы пробегают значения $1, \ldots, N$, а маленькие латинские индексы — значения $1, \ldots, N+1$, причем условие суммирования по повторяющимся индексам выполняется в каждом случае.

Пространства представлений в приведенной таблице перечислены в порядке возрастания размерностей. Мы будем рассматривать их в другом, несколько более удобном порядке.

Наша цель состоит в том, чтобы представить динамическую теорию совершенно абстрактным образом так, чтобы полученные результаты могли быть приложимы вне

---

[1]) Могут быть рассматриваемы также другие пространства представлений, такие как $3N$-мерное пространство с координатами q_ρ, $\dot{q}_\rho$, p_ρ, используемое П. Дираком [см. сборник: Вариационные принципы механики, под ред. Л. С. Полака, Физматгиз, Москва, 1950, стр. 705—722]. (*Прим. перев.*)

традиционной ньютоновой динамики. Но для того чтобы сохранить связь с источником этой теории, рассмотрим кратко эти пространства представлений в ньютоновой системе (голономной, склерономной или реономной) с N степенями свободы и обобщенными координатами q_ρ. Система имеет лагранжиан $L(q, t, \dot{q})$ и движется в соответствии с лагранжевыми уравнениями движения (§ 46); соответственно она имеет гамильтониан $H(q, t, p)$ и движется согласно уравнениям Гамильтона (§ 47). Мы будем называть систему *консервативной*, если t не входит явно в H (или, что эквивалентно, не входит в L), так что имеем

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0; \tag{62.1}$$

это выражение, так же как и (47.9), заключает в себе соотношение

$$H = E, \tag{62.2}$$

являющееся константой движения. Все движения, для которых E имеет одно общее для всех движений значение, составляют *изоэнергетическую* динамику[1]).

Простейшим из всех пространств представлений является Q. Если система состоит из одной частицы, движущейся в обычном пространстве, то Q — обычное пространство; а если частица под действием связей вынуждена двигаться по поверхности или по кривой, то пространство Q есть эта поверхность или кривая. Однако картина траекторий в целом несколько усложнена, потому что траектория не определяется точкой пространства Q и направлением в Q (т. е. отношениями $dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_N$). Для консервативной системы заданному направлению в точке соответствует ∞^1 множество траекторий (например, частица в гравитационном поле). Для неконсервативных систем имеется ∞^2 множество траекторий.

Множество всех траекторий в целом легче представить себе в пространстве QT; в нем траектория определяется

---

[1]) Семейство орбит, имеющих одну и ту же постоянную энергии, называется также *естественным семейством*; ср. Уиттекер [28], стр. 425.

точкой и направлением в ней (т. е. отношениями $dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_N : dt$, которые являются обобщенными скоростями). Это относится и к консервативным и к неконсервативным системам. Более того, рассмотрение времени t наравне с координатами q_ρ делает пространство QT подходящим основанием для релятивистской динамики.

Пространство PH имеет более второстепенное значение. Им полезно пользоваться, когда рассматриваются столкновения, в которых некоторое количество частиц, находившихся первоначально в свободном движении, попадает под влияние друг друга, а затем удаляются друг от друга, причем конечное их движение опять оказывается свободным. Когда частицы движутся свободно (до и после столкновения), то изображающая точка остается неподвижной в PH. В результате столкновения изображающая точка переходит из одного такого положения в другое.

Благодаря в основном работам по статистической механике Гиббса пространство QP есть, вероятно, наиболее известное из всех перечисленных выше. В случае консервативной системы множество траекторий образуют конгруэнцию кривых и через каждую точку пространства QP проходит только одна кривая. Эта картина является достаточно простой, но она усложняется для неконсервативной системы. В последнем случае через каждую точку пространства QP проходит ∞^1 траекторий. Более того, пространство QP становится неудобным в теории относительности, в которой t должно рассматриваться как переменная, равноправная с координатами q_ρ.

В пространстве QTP время t рассматривается как переменная, равноправная с координатами q_ρ и импульсами p_ρ. Гамильтониан $H(q, t, p)$ является функцией положения в этом пространстве. Картина траекторий для неконсервативной системы в этом пространстве проще, чем в пространстве QP, потому что теперь мы имеем конгруэнцию кривых, а через каждую точку проходит одна кривая. Пространство QTP отличается от пространств QP и $QTPH$ тем, что оно имеет нечетную размерность; с математической точки зрения это различие является существенным.

Использование пространства $QTPH$ создает наибольшие возможности для общего рассмотрения динамики. В этом пространстве t и H рассматриваются как переменные, равноправные с q_ρ и p_ρ, так что здесь имеет место полная формальная симметрия. В таком случае $2N+2$ координат распадаются на две группы (q, t) и (p, H). Эти две группы почти взаимозаменяемы в динамической теории. Для того чтобы сохранить симметрию, лучше всего построить динамическую теорию, воспользовавшись не функцией $H(q, t, p)$, а уравнением энергии, заключающим в себе, вообще говоря, все $2N+2$ координат пространства $QTPH$. Это уравнение определяет $2N+1$-мерную поверхность в пространстве $QTPH$ и изображающая точка должна находиться на этой поверхности. Однако иногда удобно употреблять функцию энергии вместо уравнения энергии для того, чтобы иметь дело с пространством, а не только с этой поверхностью.

Надо заметить, что оптический метод Гамильтона[1]), в котором все координаты пространства рассматриваются как равноправные, наводит на мысль использовать пространство $QTPH$. Симметричное построение динамики было предуказано гамильтоновым исчислением главных отношений[2]). В наше время этот подход к динамике возрожден в ряде работ[3]). Вся теория, развитая в пространстве $QTPH$, может быть немедленно перенесена на рассмотрение изоэнергетической динамики в QP простым уменьшением размерности.

§ 63. Топологические замечания. Как простую иллюстрацию топологической ситуации, часто встречающейся в более сложной форме, рассмотрим частицу, движущуюся

---

1) Hamilton W. R., Mathematical Papers, I, Cambridge University Press, 1931. См. примечание в § 67.

2) Hamilton W. R., Mathematical Papers, II, стр. 297—410, Cambridge, University Press, 1940. См. также Гамильтон У. Р., Исчисление основных соотношений, в сб. Вариационные принципы механики, под ред. Л. С. Полака, Физматгиз, Москва, 1959, стр. 763—767.

3) Dirac P. A. M., Proc. Cambridge Phil. Soc., 29, 389—400 (1933); Corben and Stehle [3], стр. 298; Lanczos [15], стр. 185.

по окружности, уравнение которой —

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2, \tag{63.1}$$

где (ξ, η) — прямоугольные декартовы координаты, и $a = \text{const}$. Пространство конфигураций Q есть в данном случае сама окружность и мы можем задать обобщенную координату q, написав

$$\xi = a\cos q, \quad \eta = a\sin q, \quad -\infty < q < +\infty. \tag{63.2}$$

Тогда любое значение q определяет конфигурацию (точку пространства Q), но любой конфигурации (или точке пространства Q) соответствует бесконечное множество значений q (отличающихся друг от друга на 2π). Мы

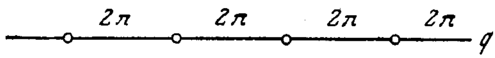


Рис. 29. Пространство изображений Q'. Бесконечное множество конгруэнтных точек, циклическая координата q которых отличается на кратное 2π, соответствует одной-единственной конгруэции или точке пространства Q.

можем тогда говорить о пространстве изображений (скажем, Q'), которое есть бесконечная прямая с отложенными на ней через 2π значениями q (рис. 29). Однако мы всегда должны помнить, что соответствие между конфигурациями и точками пространства не взаимно однозначное. Можно назвать q *циклической* [1]) координатой, а приращение ее, которое приводит к той же самой конфигурации, ее циклической постоянной (в нашем случае это 2π). Множество точек в пространстве Q', полученное прибавлением к циклической координате любого числа, кратного циклической постоянной, можно назвать множеством *конгруэнтных* точек.

---

[1]) Во многих динамических проблемах циклические координаты есть игнорируемые координаты (ср. § 46) и слово циклическая часто считается синонимом термина *игнорируемая*; ср. Голдстейн [7], стр. 62. В этой книге слово *циклическая* имеет только отмеченный выше топологический смысл.

Это многозначное представление вызывает возражения, но оно практично и потому широко применяется. Можно получить взаимно однозначное соответствие между конфигурациями и значениями q, приняв вместо определения (63.2) следующее:

$$\xi = a\cos q, \quad \eta = a\sin q, \quad 0 \leqslant q < 2\pi. \qquad (63.3)$$

Однако теперь соответствие разрывное, так как, придав частице малое смещение от конфигурации $q = 0$ в сторону уменьшения q, мы получаем значение q, отличающееся от исходного сразу на 2π.

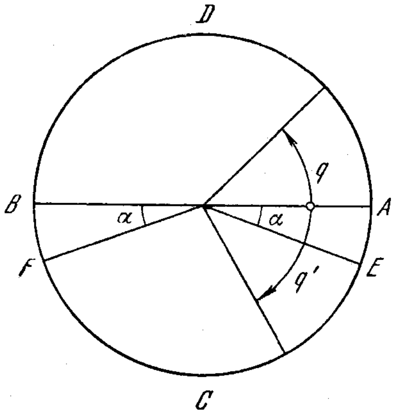


Рис. 30. Перекрывающиеся координатные системы.

Такие разрывные представления вызывают еще большие возражения, чем многозначные представления; мы возвращаемся поэтому к знакомому топологическому плану. Он включает использование двух координатных систем, частично перекрывающихся. Мы задаем координаты q, q' следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\xi = a\cos q, \quad \eta = a\sin q, \quad -\alpha \leqslant q \leqslant \pi + \alpha, \\ &\xi = a\cos q', \quad \eta = -a\sin q', \quad 0 \leqslant q' \leqslant \pi. \end{aligned}\right\} \qquad (63.4)$$

На рис. 30 на дуге $EADBF$ определена переменная q, а на дуге $AECFB$ — q'. Очевидно, перекрываются дуги AE и BF. В пересечении AE и BF мы задаем преобразования

$$AE \quad q = -q', \quad BF: q - \pi = \pi - q'. \qquad (63.5)$$

Рассматривая частицу, которая движется по окружности против часовой стрелки, начиная от точки A, мы применяем координату q до тех пор, пока точка не достигает BF. Здесь мы переходим к координате q' и пользуемся ею, пока не достигнем AE, где снова переходим к координате q. Таким образом, вне пересечения областей мы имеем непрерывное взаимно однозначное соответствие между точками Q и значениями соответствующих координат (q или q'); в каждой же области пересечения мы можем выбирать между двумя координатами, и когда мы оставляем это пересечение, то переходим в некоторую область с соответствующей ей координатой. Хотя это и более грубое представление, чем то, которое имеется при использовании циклической координаты, однако во многих отношениях это наиболее удовлетворительный метод.

В обычной динамике мы начинаем рассмотрение с физической системы, которую мы могли бы, если нужно, построить в сфере нашего опыта. Тогда на топологические вопросы относительно пространства конфигураций Q можно было бы ответить, апеллируя к нашей интуиции об обычном пространстве. Однако такая интуиция непригодна, когда мы начинаем развивать общую динамическую теорию; эта теория должна быть построена на математическом основании; если наша интуиция правильна и полезна, мы смогли бы избегать чисто формальных аргументов.

Недостаточно сказать, что мы будем обсуждать динамическую систему с обобщенными координатами q_ρ и лагранжевой функцией $L(q, t, \dot{q})$. Должна быть задана топология пространства Q. Для этого имеются четыре способа.

1. Можно сказать, что каждая из координат q_ρ изменяется в границах $-\infty, +\infty$ с непрерывным взаимно однозначным соответствием между конфигурациями (или точками пространства Q) и множеством значений $(q_1, q_2, \ldots)$. Это простейший случай (евклидова топология). Мы не должны, однако, применять обязательно только эти координаты; мы можем перейти к другим, при условии, что в рассматриваемой области пространства Q преобразование гладкое и его якобиан отличен от нуля.

2. Можно рассматривать пространство Q, как погруженное в евклидово пространство более высокой размерности. Тогда топология пространства Q заключена в уравнениях, которые определяют Q как подпространство.

3. Можно слегка изменить случай 1, добавив циклические координаты, и заменив, таким образом, Q пространством Q'. Точка пространства Q соответствует множеству (вообще говоря, бесконечному) конгруэнтных точек в пространстве Q'.

4. Можно ввести не одну координатную систему, а несколько с частично перекрывающимися областями и с такими преобразованиями координат в этих пересечениях, уравнения которых не имеют сингулярных точек [1]).

Нам понадобятся следующие топологические термины:

Контур — это замкнутая кривая в пространстве изображений. Это — *приводимый* контур, если непрерывным преобразованием пространства его можно стянуть в одну точку; в противном случае он *неприводим*. Два контура называются *совместимыми*, если непрерывным преобразованием можно преобразовать один в другой; если этого нельзя сделать, они называются *несовместимыми*.

Все приводимые контуры совместимы. Два неприводимых контура могут быть либо совместимы, либо нет. Если они несовместимы, они называются *независимыми*. Пространство, обладающее несовместимыми контурами, есть *многосвязное* пространство, если же пространство не имеет таких контуров, то это *односвязное* пространство. Пространство — *двухсвязное* [2]), если имеется один независимый неприводимый контур; оно *трехсвязное*, если имеется два таких контура и т. д.

Поверхность сферы односвязна [3]); внешняя область круга или поверхность цилиндра — двусвязна; поверхность тора трехсвязна.

Если для цилиндра мы введем азимутальный угол φ как циклическую координату и отложим z вдоль обра-

---

[1]) В пространстве Q мы могли бы требовать гладкость класса $C^2: \partial^2 q'_\rho/\partial q_\rho\, \partial q_\tau$ — непрерывны. В пространствах QP или $QTPH$ мы могли бы требовать каноническое преобразование (§ 87).

[2]) Потому что тогда имеется *два* существенно различных пути перехода от одной точки к другой.

[3]) Тем не менее, для частицы, движущейся по сфере, не существует системы координат с непрерывным взаимно однозначным соответствием с точками Q. Общепринятый способ — ввести азимутальный угол φ как циклическую координату и исключить полюсы $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$.

зующей, то стягиваемым в точку контуром будет контур вида Г на рис. 31; нестягиваемым будет контур вида Г'[1]).

Движение по контуру, который можно стянуть в точку, называется *либрацией*, движение по неприводимому контуру называется *вращением*.

Конфигурационное пространство для твердого тела, движущегося в обычном пространстве, шестимерное. Пусть (ξ, η, ζ) — прямоугольные декартовы координаты опорной точки, выбранной в теле. Конфигурационное пространство свободного тела есть *произведение* двух трехмерных пространств. В первом из них координатами являются (ξ, η, ζ) и оно имеет топологию евклидова пространства. Точка во втором пространстве соответствует конфигурации твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Это второе пространство есть *пространство вращений*.

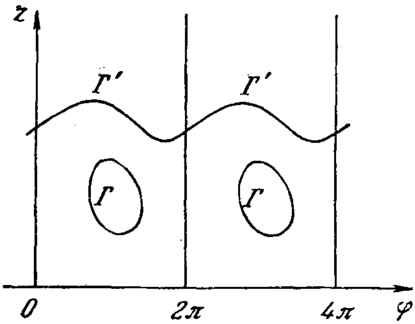


Рис. 31. Пространство Q' для частицы, движущейся по цилиндру (φ— циклическая координата); Г — приводимый контур, а Г' — неприводимый.

Обычный путь рассмотрения пространства вращений в динамике это — ввести углы Эйлера ϑ, φ, ψ (§ **11**), рассматривая φ и ψ как циклические координаты, так что имеем пространство Q', в котором конгруэнтные точки в углах бесконечного ряда кубов со сторонами 2π соответствуют одной и той же конфигурации (если рассматривать при этом φ и ψ как прямоугольные декартовы координаты).

Конфигурации, для которых $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$, исключаются из этого представления.

Имеется другой путь для рассмотрения пространства вращений. Согласно § 10 точки этого пространства нахо-

[1]) Здесь представлены только простейшие случаи; стягиваемый и нестягиваемый контуры могут быть значительно сложнее.

дятся в непрерывном взаимно однозначном соответствии с парами диаметрально противоположных точек на гиперсфере в четырехмерном евклидовом пространстве; гиперсфера имеет следующее уравнение:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \varrho^2 = 1. \tag{63.6}$$

Таким образом, топология пространства Q для твердого тела, одна точка которого закреплена, такова же, как топология гиперсферы эллиптического типа, диаметрально противоположные точки которой «отождествлены» одна с другой (конгруэнтные точки). Это пространство — двухсвязное; неприводимый контур соответствует полному вращению тела вокруг какой-нибудь оси.

Кратко изложить динамику, с должным углублением в топологию, практически невозможно; сделанные выше замечания имеют целью только ввести читателя в круг связанных с этой проблемой вопросов[1]).

До тех пор пока мы рассматриваем достаточно малую область пространства изображений («динамика в малом»), топологические вопросы не возникают, и мы можем предположить поэтому, что малая область имеет простую топологию внутренности евклидовой сферы соответствующей размерности. Эта книга следует в основном традициям математической физики, в которой топологические вопросы являются предметом для исследования ad hoc в частных случаях. Они могут быть оставлены без внимания до тех пор, пока мы не перейдем к рассмотрению переменных действие — угол (§ 98, 99).

[1]) В обширной литературе по современной топологии трудно найти какое-нибудь исследование, в котором бы физический интерес не был сильно затемнен строгостью изложения, необходимой в чистой математике. Живое введение в топологию см. в книге Курант Р. и Роббинс Г., Что такое математика?, перев. с англ., Гостехиздат, Москва, 1947.

ГЛАВА II

ПРОСТРАНСТВО СОБЫТИЙ (QT)

§ 64. Однородный лагранжиан $\Lambda(x, x')$ и обыкновенный лагранжиан $L(q, t, \dot{q})$. Рассмотрим $N+1$-мерное пространство событий QT с координатами $q_1, \ldots, q_N, t$. Ради удобства обозначений, а также имея в виду приложения к теории относительности, положим

$$q_\rho = x_\rho, \qquad t = x_{N+1}, \tag{64.1}$$

так что координатами в пространстве QT являются x_r (см. обозначения § 62).

Пусть Γ — какая-нибудь кривая в пространстве QT, уравнения которой имеют вид

$$x_r = x_r(u). \tag{64.2}$$

Мы предполагаем, что эти функции гладкие (класс C^2) и что все производные

$$x_r' \equiv \frac{dx_r}{du}$$

не обращаются в нуль одновременно ни при каких рассматриваемых значениях u. Параметр u не имеет особого значения; в нашем распоряжении имеется целый класс параметров, полученных один из другого преобразованием C^2 с необращающейся в нуль положительной первой производной, так что все параметры возрастают одновременно. Итак, имеется *кривая* Γ в пространстве QT с некоторым определенным направлением на ней, но без какой-либо частной параметризации, так что перед нами геометрический объект; он соответствует возможному движению системы.

Введем *однородную лагранжеву*[1]) *функцию*

$$\Lambda(x_1, \ldots, x_{N+1}, x'_1, \ldots, x'_{N+1}) \qquad \left(x'_r = \frac{dx_r}{du}\right), \quad (64.3)$$

которую обозначим ради краткости через $\Lambda(x, x')$. Потребуем, чтобы эта функция была положительной и однородной первой степени относительно производных x'_r, так что выполняется условие

$$\Lambda(x, kx') = k\Lambda(x, x') \qquad (k > 0), \quad (64.4)$$

и согласно теореме Эйлера для однородных функций имеют место соотношения

$$x'_r \frac{\partial \Lambda}{\partial x'_r} = \Lambda. \quad (64.5)$$

Что касается гладкости, то мы будем предполагать существование и непрерывность производных до того порядка, который может потребоваться. Если все-таки разрывы появляются при рассмотрении того или иного вопроса, то их можно обсудить особо.

В области пересечения координатных систем Λ преобразуется как инвариант в смысле тензорного исчисления. Если x^*_r и x_r — две системы координат, а Λ^* и Λ — два лагранжиана, то

$$\Lambda^*(x^*, x^{*\prime}) = \Lambda(x, x'). \quad (64.6)$$

Лагранжево действие[2]) вдоль некоторой направленной кривой Γ, проведенной из точки B^* (где $u = u_1$) в точку B

---

1) Настоящее обсуждение проводится намеренно несколько абстрактно для того, чтобы не ограничивать область возможных приложений теории. Слово «лагранжиан» связывает наши рассуждения с более конкретной теорией § 46, а поэтому и с физическими понятиями (§ 2).

2) К сожалению, одним простым словом «*действие*» обычно называют интеграл $\int \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} dq_\rho$ (ср. Голдстейн [7], стр. 249; Уиттекер [28], стр. 277) и нет общепринятого названия для более фундаментального интеграла (64.7). В этой книге мы будем называть его *лагранжевым действием*.

(где $u = u_2 > u_1$), определяется следующим образом:

$$A_L(\Gamma) = \int_{u_1}^{u_2} \Lambda(x, x')\, du, \qquad (64.7)$$

так что $A_L(\Gamma)$ — функционал; он зависит от выбора кривой Γ. Вследствие однородности Λ, $A_L(\Gamma)$ не зависит от параметризации. *Элемент лагранжева действия* есть

$$dA_L = \Lambda(x, x')\, du = \Lambda(x, dx). \qquad (64.8)$$

Вообще говоря, между действием от точки B^* к B и действием от точки B к B^* не существует никакой связи, даже если кривая одна и та же в обоих случаях.

Определяя в пространстве QT элемент действия $\Lambda(x, dx)$, мы превращаем его в *пространство Финслера* (выражаясь на геометрическом языке). Если $\Lambda(x, dx)$ — квадратный корень из однородной дифференциальной квадратичной формы, то QT — *пространство Римана.*

Элемент лагранжева действия (64.8) можно написать более подробно так:

$$dA_L = \Lambda(x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}, x'_1, \ldots, x'_N, x'_{N+1})\, du. \qquad (64.9)$$

Вследствие однородности Λ элемент лагранжева действия dA_L не зависит от выбора параметра u. Примем $u = t$; тогда согласно (64.1) справедливо равенство

$$dA_L = \Lambda(q_1, \ldots, q_N, t, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, 1)\, dt. \qquad (64.10)$$

Определим функцию $L(q, t, \dot{q})$ следующим образом:

$$L(q_1, \ldots, q_N, t, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N) = \Lambda(q_1, \ldots, q_N, t, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N, 1). \qquad (64.11)$$

Элемент лагранжева действия равен тогда

$$dA_L = L(q, t, \dot{q})\, dt. \qquad (64.12)$$

Эта функция $L(q, t, \dot{q})$ называется *обыкновенной лагранжевой функцией* (ср. § 46).

Две функции, Λ (функция $2N + 2$ переменных, положительная и однородная первой степени относительно последних $N+1$ из них) и L (функция $2N+1$ переменной, не ограниченная никаким таким условием), эквивалентны друг другу в том смысле, что одна определяет другую. Если дана функция Λ, мы получим функцию L из уравнений (64.11); наоборот, пусть задана L, мы получим функцию Λ, приравняв (64.9) и (64.12) и разделив на du. Таким образом,

$$\Lambda(x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}, x_1', \ldots, x_N', x_{N+1}') =$$
$$= L(q_1, \ldots, q_N, t, \dot q_1, \ldots, \dot q_N)\, t' =$$
$$= L\left(x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}, \frac{x_1'}{x_{N+1}'}, \ldots, \frac{x_N'}{x_{N+1}'}\right) x_{N+1}', \qquad (64.13)$$

что удовлетворяет требованию однородности.

Для того чтобы найти соотношения между частными производными функций $\Lambda(x,\ x')$ и $L(q,\ t,\ \dot q)$, варьируем x_r и x_r' в (64.13). Получаем

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_r}\,\delta x_r + \frac{\partial\Lambda}{\partial x_r'}\,\delta x_r' =$$
$$= t'\left(\frac{\partial L}{\partial q_\rho}\,\delta q_\rho + \frac{\partial L}{\partial t}\,\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot q_\rho}\,\delta \dot q_\rho\right) + L\,\delta t'. \qquad (64.14)$$

Но

$$\dot q_\rho = \frac{q_\rho'}{t'}, \quad \delta \dot q_\rho = \frac{\delta q_\rho'}{t'} - \frac{q_\rho'\,\delta t'}{t'^2}. \qquad (64.15)$$

Подставляя эти значения в (64.14), заменяя δq_ρ на δx_ρ, а $\delta q_\rho'$ — на $\delta x_\rho'$, $\delta t'$ — на $\delta x'_{N+1}$ и приравнивая коэффициенты при $2N+2$ независимых вариациях δx_r, $\delta x_r'$, получаем

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\Lambda}{dx_\rho} = t'\,\frac{\partial L}{\partial q_\rho}, \quad \frac{\partial\Lambda}{\partial x_{N+1}} = t'\,\frac{\partial L}{\partial t},\\ &\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\rho'} = \frac{\partial L}{\partial \dot q_\rho}, \quad \frac{\partial\Lambda}{\partial x_{N+1}'} = L - \dot q_\rho\,\frac{\partial L}{\partial \dot q_\rho}. \end{aligned}\right\} \qquad (64.16)$$

§ 65. Первая форма принципа Гамильтона. Лагранжевы уравнения движения. Пусть Г (рис. 32) — какая-нибудь кривая, соединяющая точки B^* и B. Пусть Γ_1 — одна из соседних варьированных кривых с концами в точках D^*, D. Выберем для Γ_1 тот же параметр u, что и на

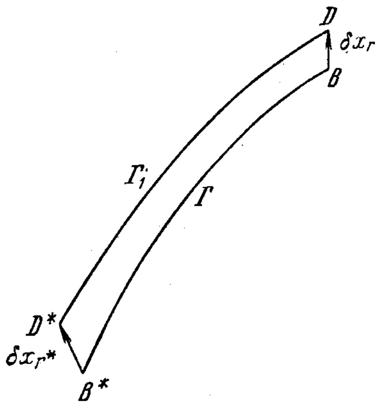


Рис. 32. Вариация действия Лагранжа.

кривой Г, с теми же значениями на концах: u_1, u_2. Тогда вариация лагранжева действия равна

$$\delta A_L = A_L(\Gamma_1) - A_L(\Gamma) = \int_{u_1}^{u_2} \delta\Lambda\, du = \\ = \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_r} \delta x_r + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_r'} \delta x_r' \right) du. \quad (65.1)$$

Интегрирование по частям дает

$$\delta A_L = \left| \frac{\partial \Lambda}{\partial x_r'} \delta x_r \right|_{u=u_1}^{u=u_2} - \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{d}{du} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_r'} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_r} \right) \delta x_r\, du. \quad (65.2)$$

Ограничим теперь варьированную кривую Γ_1 требованием, чтобы ее концевые точки совпадали с точками B^*,

B. Тогда первый член правой части (65.2) исчезает. Если $\delta A_L = 0$ для всех вариаций от Γ к Γ_1, совершенно произвольных, за исключением условия фиксированности конечных точек, то кривая Γ удовлетворяет уравнениям Эйлера — Лагранжа:

$$\frac{d}{du}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_r} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_r} = 0. \tag{65.3}$$

Мы можем рассматривать эти уравнения как *лагранжевы уравнения движения*, а кривые, удовлетворяющие им, как лучи или траектории[1]).

Вариационное уравнение

$$\delta \int \Lambda(x, x')\, du = 0 \tag{65.4}$$

для случая с закрепленными концами эквивалентно системе дифференциальных уравнений (65.3). Назовем уравнение (65.4) *первой формой принципа* Гамильтона[2]).

Этот принцип можно также написать в виде

$$\delta \int L(q, t, \dot{q})\, dt = 0, \tag{65.5}$$

---

[1]) Слово *траектория* связывает математическое понятие с физическими понятиями динамики. Слово *луч* связывает его с оптикой, так что может показаться, что ему нет места в настоящем изложении. Однако волновая механика де Бройля и Шредингера уничтожила барьер между динамикой и оптикой. Если в динамике нам нужно слово *волна*, то слово *луч* естественно сопровождает его. Более того, настоящее изложение общей динамической теории столь же обязано методу Гамильтона в оптике, сколько и его методу в динамике, так как в его оптике все координаты были равноправны, тогда как в его динамике время было на особом положении.

[2]) С математической точки зрения (65.3) и (65.4) являются различными способами выражения одного и того же утверждения. Мы видим здесь пример многозначности словоупотребления; однако, как было указано в § 2, слова важны. Дифференциальные уравнения (65.3) не могут быть выражены в словах, которые бы более ясно осветили суть дела, чем голые формулы. Наоборот, принцип Гамильтона может быть выражен таким образом: лагранжево действие имеет стационарное значение для действительной траектории. Эти слова легче связать с физическими понятиями. чем математические формулы.

при фиксированных значениях q_ρ и t на концах; он приводит сразу же к лагранжевым уравнениям движения в следующей форме (ср. с (46.18)):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} - \frac{\partial L}{\partial q_\rho} = 0. \tag{65.6}$$

Эти уравнения эквивалентны системе (65.3). Появляющееся здесь выражение называют *лагранжевой производной функции* L.

Система (65.3) состоит из $N+1$ уравнений, а (65.6) — только из N. Однако уравнения (65.3) не являются независимыми, так как в силу однородности функции Λ имеет место следующее тождество:

$$x'_r\left(\frac{d}{du}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_r} - \frac{\partial\Lambda}{\partial x_r}\right) = \frac{d}{du}\left(x'_r\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_r}\right) - x''_r\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_r} - x'_r\frac{\partial\Lambda}{\partial x_r} =$$

$$= \frac{d\Lambda}{du} - \frac{d\Lambda}{du} = 0. \tag{65.7}$$

При условии, что уравнения (65.6) можно разрешить относительно $\ddot{q}_\rho$ (а мы будем предполагать, что это можно сделать), эти уравнения определяют в пространстве QT луч, соответствующий заданным начальным значениям переменных q_ρ, t, $\dot{q}_\rho$. Тогда *через каждую точку* x_r *пространства* QT *и в каждом направлении* (*определенном отношениями* $dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_{N+1}$) *проходит единственный луч или траектория.*

Мы можем употреблять термин Λ-*динамика*, когда нужно сказать, что теория основана на вариационном уравнении (65.4) и его экстремалях (65.3). Аналогично можно ввести термин L-*динамика* для уравнения (65.5) и экстремалей (65.6).

По существу, они эквивалентны друг другу; L-динамика есть форма Λ-динамики, в которой t рассматривается двояко: как координата в пространстве QT и как параметр на кривой в QT. Мы объединим их под общим названием *лагранжева динамика.*

§ 66. Два примера. Лагранжевы уравнения (65.6) связывают наиболее часто встречающиеся динамические системы и излагаем абстрактную теорию. Эта теория приложима ко всем физическим системам, которые ведут себя согласно уравнениям (65.6), независимо от того, действительно ли эта система динамическая или нет. Система может состоять из электрических контуров с обобщенными скоростями, соответствующими токам. В чисто динамической области благодаря (46.18) настоящая теория приложима ко всем голономным системам, для которых обобщенные силы можно получить дифференцированием потенциальной функции или обобщенной потенциальной функцию. В таких системах кинетическая энергия всегда выражается через квадраты обобщенных скоростей и таким же является лагранжиан $L(=T-V)$, когда V — обычная потенциальная функция. В настоящей общей теории на функцию $L(q, t, \dot{q})$ не накладывается никаких таких ограничений; ее можно считать произвольной функцией $2N+1$ аргументов.

Приведем два примера, иллюстрирующих общие выводы.

α) *Релятивистская система* (РС). Берем однородный лагранжиан

$$\Lambda(x, x') = \sqrt{b_{rs} x'_r x'_s} + A_r x'_r, \tag{66.1}$$

где $b_{rs}\,(=b_{sr})$ и A_r — функции переменных x_r. Это — обобщение релятивистского лагранжиана для случая заряженной частицы, движущейся в заданном электромагнитном поле[1]). Однородный лагранжиан проще чем обычный, который согласно обозначениям (64.11) имеет вид

$$L(q, t, \dot{q}) = (b_{\rho\sigma}\dot{q}_\rho\dot{q}_\sigma + 2b_{\rho,\,N+1}\dot{q}_\rho + b_{N+1,\,N+1})^{1/2} + \\ + A_\rho\dot{q}_\rho + A_{N+1}. \tag{66.2}$$

β) *Обыкновенная динамическая система* (ОДС). Это голономная, склерономная, консервативная система с

---

[1]) Ср. с § 114.

обычной потенциальной функцией, так что

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q) = \frac{1}{2} a_{\rho\sigma}\dot{q}_\rho \dot{q}_\sigma - V, \qquad (66.3)$$

коэффициенты $a_{\rho\sigma}(= a_{\sigma\rho})$ и V — функции переменных q. Таким образом, t не входит явно в L. В этом случае однородный лагранжиан согласно соотношению (64.13) равен

$$\Lambda(x, x') = \frac{\frac{1}{2} a_{\rho\sigma}x'_\rho x'_\sigma}{x'_{N+1}} - Vx'_{N+1}; \qquad (66.4)$$

это выражение имеет не столь простой вид, как выражение для $L(q, \dot{q})$.

Ясно, что теория для РС упростится, если положить в основу $\Lambda(x, x')$, а теория для ОДС будет проще, если построить ее на $L(q, \dot{q})$. Принцип Гамильтона выражается в этих случаях так:

$$\text{РС:} \quad \delta \int [(b_{rs}\, dx_r\, dx_s)^{1/2} + A_r\, dx_r] = 0, \qquad (66.5)$$

$$\text{ОДС:} \quad \delta \int \left(\frac{1}{2} a_{\rho\sigma}\dot{q}_\rho \dot{q}_\sigma - V\right) dt = 0. \qquad (66.6)$$

Уравнения Лагранжа в случае РС принимают вид

$$\frac{d}{du}\left[\frac{b_{rs} x'_s}{\sqrt{b_{mn}x'_m x'_n}} + A_r\right] - \frac{\frac{\partial b_{st}}{\partial x_r} x'_s x'_t}{\sqrt{b_{mn}x'_m x'_n}} - \frac{\partial A_s}{\partial x_r} x'_s = 0, \qquad (66.7)$$

а если мы выберем за u параметр на луче, который обращает в единицу выражение

$$b_{mn}x'_m x'_n = 1, \qquad (66.8)$$

то уравнения упрощаются и превращаются в следующие

$$\frac{d}{du}(b_{rs}x_s') + \left(\frac{\partial A_r}{\partial x_s} - \frac{\partial A_s}{\partial x_r}\right) x_s' - \frac{\partial b_{st}}{\partial x_r} x_s' x_t' = 0, \quad (66.9)$$

или

$$b_{rs}x_s'' + \left(\frac{\partial A_r}{\partial x_s} - \frac{\partial A_s}{\partial x_r}\right) x_s' + \\ + \left(\frac{\partial b_{rs}}{\partial x_t} - \frac{\partial b_{ts}}{\partial x_r}\right) x_s' x_t' = 0. \quad (66.10)$$

В случае ОДС лагранжевы уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\rho} - \frac{\partial T}{\partial q_\rho} = -\frac{\partial V}{\partial q_\rho}, \quad (66.11)$$

или

$$a_{\rho\sigma}\ddot{q}_\sigma + [\mu\nu, \varrho]\,\dot{q}_\mu\dot{q}_\nu = -\frac{\partial}{\partial q_\rho}, \quad (66.12)$$

или

$$\ddot{q}_\rho + \begin{Bmatrix} \varrho \\ \mu\nu \end{Bmatrix} \dot{q}_\mu\dot{q}_\nu = -a^{\rho\sigma}\frac{\partial V}{\partial q_\sigma}, \quad (66.13)$$

где символы Кристоффеля равны

$$\left.\begin{aligned} [\mu\nu, \sigma] &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{\mu\sigma}}{\partial q_\nu} + \frac{\partial a_{\nu\sigma}}{\partial q_\mu} - \frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial q_\sigma}\right), \\ \begin{Bmatrix} \varrho \\ \mu\nu \end{Bmatrix} &= a^{\rho\sigma}[\mu\nu, \sigma], \quad a^{\rho\sigma}a_{\mu\sigma} = \delta^\rho_\mu. \end{aligned}\right\} \quad (66.14)$$

§ 67. Уравнение энергии $\Omega(x, y) = 0$ и гамильтониан $H(q, t, p)$. Начнем рассуждения сначала. До сих пор мы рассматривали $(N+1)$-мерное пространство QT с координатами x_r, выражающимися через q_ρ и t как

$$x_\rho = q_\rho, \qquad x_{N+1} = t \quad (67.1)$$

Будем рассматривать вместо лагранжиана $\Lambda(x,\ x')$ или $L(q,\ t,\ \dot{q})$ в пространстве QT уравнение энергии[1])

$$\Omega(x,\ y) = 0, \tag{67.2}$$

связывающее координаты x_r точки в пространстве QT с вектором y_r. С геометрической точки зрения это уравнение можно рассматривать как сопоставляющее каждой точке QT-пространства N-мерную поверхность в $(N+1)$-мерном пространстве, касательном QT, причем y_r — координаты в этом касательном пространстве.

В области, где частично перекрываются две координатные системы $(x,\ x^*)$, y_r преобразуется как ковариантный вектор

$$y_r^* = y_s \frac{\partial x_s}{\partial x_r^*}. \tag{67.3}$$

Это дает условие

$$y_r^*\, dx_r^* = y_r\, dx_r, \tag{67.4}$$

так что эта форма Пфаффа есть инвариант преобразования.

Для общей теории часто лучше рассматривать все координаты симметрично, поэтому мы оставляем уравнение (67.2) в этой общей форме. Но иногда удобно разрешить уравнение энергии относительно y_{N+1}, так что оно принимает вид[2])

$$y_{N+1} + \omega(x_1,\ \ldots,\ x_N,\ x_{N+1},\ y_1,\ \ldots,\ y_N) = 0. \tag{67.5}$$

Определим p_ρ и H следующими уравнениями:

$$y_\rho = p_\rho,\ y_{N+1} = -H \tag{67.6}$$

(подчеркиваем наличие знака минус). Тогда уравнение (67.2) выражает соотношение между $2N+2$ величинами q_ρ, t, p_ρ, H, а уравнение (67.5) выражает H как функцию

---

[1]) Причина такого названия выяснится, когда мы введем уравнение (67.8).

[2]) Уравнение может иметь несколько корней, так что ω — многозначная функция; в этом случае мы выделяем одно значение. Можно, конечно, разрешить уравнение относительно произвольного y, в данном случае лучше всего взять y_{N+1}.

остальных переменных,

$$H = \omega(q_1, \ldots, q_N, t, p_1, \ldots, p_N), \qquad (67.7)$$

или, кратко, можно записать ее в виде

$$H = H(q, t, p). \qquad (67.8)$$

Для последующих целей представляется соблазнительным связать найденную функцию с физическими понятиями, назвав H *гамильтонианом*, а y_r — *вектором импульса — энергии*; ради краткости можно называть y_r просто *импульсом*, если нет опасности какой-либо путаницы. Так как для простейших систем гамильтониан равен энергии, то удобнее назвать (67.2) уравнением энергии, ибо оно эквивалентно уравнению (67.8)[1]).

§ 68. Вторая форма принципа Гамильтона. Гамильтоновы канонические уравнения движения. Пусть Γ — какая-нибудь кривая в пространстве QT, соединяющая точки B^* и B. Мы определим *гамильтоново действие* вдоль кривой Γ следующим интегралом:

$$A_H(\Gamma) = \int y_r\, dx_r = \int (p_\rho\, dq_\rho - H\, dt). \qquad (68.1)$$

---

[1]) В этом изложении динамической теории я следую методу Гамильтона в геометрической оптике, который в основном тот же, что и его динамический метод, но более компактен, так как здесь он более симметричен. Чтобы добиться этой компактности, приходится рассматривать координаты q_ρ наравне с временем t и импульсы p_ρ — наравне с отрицательным гамильтонианом H. Симметрия здесь достигается по существу, хотя ее может и не быть в обозначениях; см. Картан Э., Интегральные инварианты, пер. Г. Н. Бермана, под ред. В. В. Степанова, Гостехиздат, Москва, 1940. Мы встречаем ее также у Ланчоша [15], стр. 185—192, и у Голдстейна [7], стр. 269. Ланчош употребляет для уравнения (67.2) название *вспомогательное условие*. В гамильтоновой оптике это уравнение служит уравнением поверхности, а величины y_r являются компонентами «нормальной медленности» (т. е. обратной скорости. — Л. П.); см. Hamilton W. R., Mathematical Papers, т. 1, стр. 291, 303 (Cambridge, University Press, 1931). Из современных общих исследований по геометрической оптике см. Carathеodory C., Geometrische Optik, Berlin, 1937, или более тесно связанную с идеями Гамильтона работу Synge J. L., J. Opt. Cos. Amer. 27, 75—82 (1937).

Поле векторов y_r вдоль кривой Г задано каким-нибудь образом, совместимым с уравнением энергии (67.2). Таким образом, гамильтоново действие зависит не только от одной кривой Г, но также и от задания поля y_r вдоль Г.

Варьируем кривую Г (как на рис. 32 § 65) и в то же время проварьируем y_r каким-либо образом, совместным с уравнением (67.2). Получаем следующее выражение для вариации гамильтонова действия:

$$\delta A_H = \int (\delta y_r\, dx_r + y_r \delta\, dx_r) =$$

$$= | y_r \delta x_r | + \int (\delta y_r\, dx_r - \delta x_r\, dy_r). \quad (68.2)$$

Так как $\Omega = 0$ для кривой Г и для варьированной кривой, то имеем

$$\delta \Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial x_r} \delta x_r + \frac{\partial \Omega}{\partial y_r} \delta y_r = 0. \quad (68.3)$$

Если концы кривой закреплены, то уравнение (68.2) примет вид

$$\delta A_H = \int (\delta y_r\, dx_r - \delta x_r\, dy_r). \quad (68.4)$$

Если принять во внимание условие (68.3), то кривая стационарного гамильтонова действия, т. е. кривая, удовлетворяющая уравнениям

$$\delta \int y_r\, dx_r = 0, \qquad \Omega(x, y) = 0, \quad (68.5)$$

и имеющая закрепленные концевые точки, удовлетворяет также следующим уравнениям:

$$dx_r = dw \frac{\partial \Omega}{\partial y_r}, \quad dy_r = -dw \frac{\partial \Omega}{\partial x_r}, \quad (68.6)$$

где dw — *бесконечно малый множитель Лагранжа.* Поэтому экстремаль удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\frac{dx_r}{dw} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_r}, \quad \frac{dy_r}{dw} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x_r}. \quad (68.7)$$

Назовем уравнения (68.5) *второй формой принципа Гамильтона*, а уравнения (68.7) — *уравнениями движения в форме Гамильтона* или *каноническими уравнениями*.

Кривую с соответственными векторами y_r, удовлетворяющими этому принципу (или, что то же, этим дифференциальным уравнениям), назовем *лучом* или *траекторией*. Кривая в пространстве QT и соотнесенное ей векторное поле описываются уравнениями вида

$$x_r = x_r(w), \quad y_r = y_r(w). \tag{68.8}$$

Эти функции определяются уравнениями (68.7), если заданы начальные значения переменных x и y.

Параметр w в уравнениях (68.7) есть специальный параметр в том смысле, что его нельзя изменить, если только задана функция Ω. Так как элемент гамильтонова действия равен

$$dA_H = y_r\,dx_r = y_r \frac{dx_r}{dw}\,dw = y_r \frac{\partial \Omega}{\partial y_r}\,dw, \tag{68.9}$$

то это соотношение и определяет dw. Но, конечно, некоторое *соотношение* может быть выражено различными *уравнениями*, и если мы перейдем от уравнения $\Omega = 0$ к уравнению $\Omega^* = 0$, и оба выражают одно и то же соотношение, то соответствующие параметры удовлетворяют условию

$$\frac{dw^*}{dw} = \frac{d\Omega}{d\Omega^*}. \tag{68.10}$$

Отметим, что уравнение $\Omega = \text{const}$ является прямым формальным следствием дифференциальных уравнений (68.7), ибо имеем

$$\frac{d\Omega}{dw} = \frac{\partial \Omega}{\partial x_r}\frac{dx_r}{dw} + \frac{\partial \Omega}{\partial y_r}\frac{dy_r}{dw} = 0. \tag{68.11}$$

Изложенная здесь теория имеет фундаментальное значение в классической динамике; выразим ее также в несимметричных обозначениях. Принцип Гамильтона (68.5) имеет следующую формулировку [1]):

$$\delta \int (p_\rho \, dq_\rho - H \, dt) = 0, \qquad H = H(q, t, p), \tag{68.12}$$

если концы фиксированы в пространстве QT. Полная вариация этого интеграла выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta A_H = \int (\delta p_\rho \, dq_\rho + p_\rho \delta \, dq_\rho - \delta H \, dt - H\delta \, dt) = \\ = \left| p_\rho \delta q_\rho - H \, \delta t \right| + \\ + \int (\delta p_\rho \, dq_\rho + \delta q_\rho \, dp_\rho - \delta H \, dt + \delta t \, dH). \end{aligned} \tag{68.13}$$

Но так как

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial q_\rho} \delta q_\rho + \frac{\partial H}{\partial t} \delta t + \frac{\partial H}{\partial p_\rho} \delta p_\rho, \tag{68.14}$$

то вариацию можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \delta A_H = \left| p_\rho \, \delta q_\rho - H \, \delta t \right| + \int \left\{ \delta p_\rho \left(dq_\rho - \frac{\partial H}{\partial p_\rho} dt \right) - \right. \\ \left. - \delta q_\rho \left(dp_\rho + \frac{\partial H}{\partial q_\rho} dt \right) + \delta t \left(dH - \frac{\partial H}{\partial t} dt \right) \right\}. \end{aligned} \tag{68.15}$$

Первый член справа обращается в нуль, если концы фиксированы, а на остальной части кривой δq_ρ, δp_ρ, δt остаются произвольными. Отсюда вариационное уравнение (68.12) приводит к уравнениям движения в форме Гамильтона для лучей или траектории, именно, к уравнениям

$$\dot{q}_\rho = \frac{\partial H}{\partial p_\rho}, \qquad \dot{p}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial q_\rho}, \tag{68.16}$$

согласующимся с уравнениями (47.7). Это — *канонические уравнения*, так же как уравнения (68.7). Мы получаем

---

[1]) Эта общая формулировка принципа Гамильтона дана Гельмгольцем; ср. Леви-Чивита и Амальди [16], II_2, стр. 452.

так же как следствие

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{68.17}$$

Это означает, что H есть *постоянная величина вдоль луча или траектории, если t не входит явно в функцию $H(q, t, p)$* (система консервативна, ср. с § 62).

Можно использовать термин Ω-динамика, чтобы указывать, что теория основана на уравнениях (68.5), или термин H-динамика в случае, когда теория основана на уравнении (68.12). Это только различные способы выражения и мы объединим их под общим названием *гамильтонова динамика.*

Относительные преимущества и слабости этих двух аспектов гамильтоновой динамики находятся в тесной аналогии с относительными достоинствами и недостатками выражения уравнения поверхности в двух формах, $f(x, y, z)=0$ и $z=f(x, y)$; впрочем, для того чтобы улучшить аналогию, следовало бы рассматривать любое число переменных. Ω-динамика кажется предпочтительнее по общим причинам, когда желательно поставить все $2N+2$ переменных в равное положение. H-динамика во многих отношениях предпочтительнее с аналитической точки зрения. Таким образом, уравнения движения (68.16) представляют собой, очевидно, систему $2N$ уравнений первого порядка, в то время как в (68.7), очевидно, систему $2N+2$ уравнений. Число уравнений последней системы можно уменьшить до $2N+1$, разделив все уравнения на dx_{N+1}/dw, так что x_{N+1} (т. е. время) становится независимой переменной; а уравнение энергии $\Omega(x, y)=0$ делает возможным дальнейшее уменьшение числа уравнений до $2N$. Мы вернемся к этому вопросу в § 91.

Сравнивая (68.7) и (68.16), видим, что в H-динамике специальным параметром w является время t. В Ω-динамике w не имеет простого физического смысла, но если с помощью уравнения $\Omega(x, y)=0$ превратить функцию $\Omega+1$ в однородную функцию первой степени относительно y_i, так что будут иметь место уравнения

$$y_r\frac{\partial\Omega}{\partial y_r}=y_r\frac{\partial}{\partial y_r}(\Omega+1)=\Omega+1=1, \tag{68.18}$$

то из (68.9) следует, что w есть гамильтоново действие A_H.

В своих оптических исследованиях Гамильтон использует эту операцию как стандартный прием. Однако в этой книге мы не будем прибегать к нему, потому что более удобным оказывается не подчинять форму функции $\Omega(x, y)$ никаким ограничениям.

§ 69. Эквивалентность лагранжевой и гамильтоновой динамики. Под *лагранжевой динамикой* мы понимаем теорию, изложенную в § 64 и 65, основанную на однородном лагранжиане $\Lambda(x, x')$ или на обычном лагранжиане $L(q, t, \dot{q})$, под *гамильтоновой динамикой* — теорию, развитую в § 67 и 68, основанную на уравнении энергии $\Omega(x, y) = 0$ или гамильтониане $H(q, t, p)$. Мы покажем, что эти две динамики, по существу говоря, эквивалентны, хотя гамильтонова динамика является несколько более общей в том, что касается определения вектора импульса — энергии.

Мы покажем эту эквивалентность, установив соответствие

$$\Lambda(x, x') \longleftrightarrow \Omega(x, y) = 0 \tag{69.1}$$

или, что то же самое,

$$L(q, t, \dot{q}) \longleftrightarrow H(q, t, p). \tag{69.2}$$

После того как это сделано, безразлично, излагать ли динамику в терминах Λ или L или положить в основу уравнение $\Omega = 0$ или H. Соответствие устанавливается требованием равенства лагранжева и гамильтонова действий для произвольной кривой в пространстве QT.

Будем считать, что задан однородный лагранжиан $\Lambda(x, x')$ и *определим* y_r следующим образом:

$$y_r = \frac{\partial \Lambda}{\partial x'_r}. \tag{69.3}$$

Эти частные производные — однородные функции нулевой степени относительно производных x'_r, поэтому содержат только N отношений $x'_1 : x'_2 : \ldots : x'_{N+1}$, и, конечно, координаты x'_r. Исключение этих отношений из $N+1$

уравнений (69.3) дает уравнение, которое мы запишем[1]) в виде

$$\Omega(x, y) = 0. \tag{69.4}$$

Тогда вдоль любой кривой с параметром u и с уравнением $x'_r = dx_r/du$ элемент лагранжева действия согласно (64.8) выражается так:

$$dA_L = \Lambda(x, x')\, du = x'_r \frac{\partial\Lambda}{\partial x'_r}\, du = y_r\, dx_r. \tag{69.5}$$

Согласно определению (69.1) это — элемент гамильтонова действия dA_H, соответствующий уравнению энергии (69.4). Действительно, dA_H является более общей функцией, чем dA_L потому, что вектор импульса — энергии, входящий в него, ограничен только уравнением энергии (69.4), тогда как тот же вектор в dA_L точно определяется для каждой кривой посредством уравнения (69.3). Однако если мы варьируем гамильтонов луч или траекторию, закрепив концы, то $\delta A_H = 0$ для всех вариаций δy_r, совместных с уравнением $\Omega = 0$, и поэтому, в частности, для δy_r, совместных с условием (69.3). Таким образом, уравнение $\delta A_H = 0$ содержит в себе $\delta A_L = 0$, и это означает, что лагранжевы лучи совпадают с гамильтоновыми лучами.

Эти рассуждения устанавливают однозначное соответствие

$$\Lambda(x, x') \longrightarrow \Omega(x, y) = 0. \tag{69.6}$$

Если задан однородный лагранжиан, то уравнение энергии получается исключением x'_r из уравнений (69.3), как это описано выше. Эквивалентное однозначное соответствие

$$L(q, t, \dot q) \longrightarrow H(q, t, p) \tag{69.7}$$

можно получить непосредственно из $N+1$ уравнений

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot q_\rho}, \qquad H = \dot q_\rho \frac{\partial L}{\partial \dot q_\rho} - L, \tag{69.8}$$

[1]) Мы предполагаем здесь, что в результате этого исключения получается только одно уравнение, но их может быть и больше. Ср. П. Дирак, Обобщенная гамильтонова динамика, в сб. Вариационные принципы механики, стр. 705—722.

исключив N величин q_ρ и выразив H как функцию $H(q, t, p)$.

Будем исходить теперь из гамильтоновой динамики, записав уравнение энергии в общем виде:

$$\Omega(x, y) = 0. \tag{69.9}$$

На произвольной кривой в пространстве QT, уравнениями которой являются $x_r = x_r(u)$, вектор импульса — энергии y_r можно считать произвольным, за исключением только одного условия: он должен удовлетворять уравнению энергии. Ограничим теперь класс допустимых векторов требованием, чтобы они удовлетворяли уравнениям

$$\frac{dx_r}{du} = \vartheta \frac{\partial \Omega}{\partial y_r}, \tag{69.10}$$

где ϑ — неопределенный множитель. Будем называть такие y_r *естественными*. Эти уравнения, очевидно, совпадают с одной группой уравнений движения (68.7). Разрешив $N+2$ уравнений (69.9) и (69.10) и выразив, следовательно, y_r и ϑ как функции x_r и их производных $x_r' = dx_r/du$, определим функцию Λ следующим образом:

$$\Lambda(x, x') = y_r x_r'. \tag{69.11}$$

Тогда элемент гамильтонова действия можно представить в виде

$$dA_H = y_r\, dx_r = y_r x_r'\, du = \Lambda(x, x')\, du, \tag{69.12}$$

но это — элемент лагранжева действия для однородного лагранжиана $\Lambda(x, x')$ того же вида, что и (64.8) (об однородности Λ см. ниже).

Объединяя все эти уравнения, можем сказать, что из уравнений

$$x_r' = \vartheta \frac{\partial \Omega}{\partial y_r}, \qquad \Lambda = y_r x_r', \qquad \Omega(x, y) = 0 \tag{69.13}$$

получено однозначное соответствие

$$\Omega(x, y) = 0 \longrightarrow \Lambda(x, x') \tag{69.14}$$

исключением ϑ и y_r и выражением Λ через оставшиеся переменные. Что касается однородности, то если эти уравнения выполняются при некоторых значениях $(\Lambda, x_r', \vartheta)$, то они выполняются также и при значениях $(k\Lambda, kx_r', k\vartheta)$ для любого k. Это и означает, что функция $\Lambda(x, x')$ — однородная первой степени, но не обязательно положительно однородная. Однако функция Λ может иметь несколько ветвей; умножение на отрицательное k может привести к переходу с одной ветви на другую. Иллюстрацией может служить пример § 70. В § 64 требуется только положительная однородность.

Аналогично однозначное соответствие

$$H(q, t, p) \longrightarrow L(q, t, \dot{q}), \tag{69.15}$$

благодаря которому мы переходим от заданного гамильтониана к эквивалентному лагранжиану, можно получить из уравнений

$$\dot{q}_\rho = \frac{\partial H}{\partial p_\rho}, \quad L = \dot{q}_\rho p_\rho - H. \tag{69.16}$$

Для этого надо исключить p_ρ и выразить L в виде $L(q, t, \dot{q})$.

Мы установили, по существу, эквивалентность лагранжевой и гамильтоновой динамики. Соответствия между ними иллюстрируются в § 70, а их геометрическая сущность рассматривается в § 71.

§ 70. Примеры соответствий лагранжевой и гамильтоновой динамик. Рассмотрим вновь системы РС и ОДС (§ 66).

В РС мы исходим из лагранжиана

$$\Lambda(x, x') = \sqrt{b_{rs}x_r' x_s'} + A_r x_r'. \tag{70.1}$$

Тогда уравнение (69.3) выглядит так:

$$y_r = \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\nu'} = \frac{b_{rs}x_s'}{\sqrt{b_{mn}x_m' x_n'}} + A_r, \tag{70.2}$$

и исключение x_r' дает уравнение энергии в следующем виде:

$$\Omega(x, y) \equiv \frac{1}{2}\left[b^{rs}(y_r - A_r)(y_s - A_s) - 1\right] = 0, \tag{70.3}$$

где $b^{rs}b_{rm}=\delta^s_m$; множитель $\frac{1}{2}$ введен для удобства записи.

Если исходить из уравнения энергии (70.3) и пытаться вывести из него функцию Λ, то надо записать уравнения (69.14), которые в данном случае принимают следующий вид:

$$x_r'=\vartheta b^{rs}(y_s-A_s),\qquad \Lambda=y_rx_r',\qquad \Omega(x,\,y)=0. \tag{70.4}$$

Отсюда следуют уравнения

$$\left.\begin{aligned} y_r-A_r&=\vartheta^{-1}b_{rs}x_s',\\ 2\Omega&=\vartheta^{-2}b_{rs}x_r'x_s'-1=0,\\ \vartheta&=\varepsilon\sqrt{b_{rs}x_r'x_s'},\end{aligned}\right\} \tag{70.5}$$

где $\varepsilon=\pm 1$ (все квадратные корни берутся положительными). Поэтому имеют место уравнения

$$y_r=A_r+\frac{\varepsilon b_{rs}x_s'}{\sqrt{b_{mn}x_m'x_n'}}, \tag{70.6}$$

и мы получаем два лагранжиана:

$$\left.\begin{aligned}\Lambda_+(x,\,x')&=A_rx_r'+\sqrt{b_{rs}x_r'x_s'},\\ \Lambda_-(x,\,x')&=A_rx_r'-\sqrt{b_{rs}x_r'x_s'}.\end{aligned}\right\} \tag{70.7}$$

При $k>0$ имеем тогда условие однородности

$$\Lambda_+(x,\,kx')=k\Lambda_+(x,\,x'),\quad \Lambda_-(x,\,kx')=k\Lambda_-(x,\,x'), \tag{70.8}$$

а при $k<0$ оно принимает вид

$$\Lambda_+(x,\,kx')=k\Lambda_-(x,\,x'),\quad \Lambda_-(x,\,kx')=k\Lambda_+(x,\,x'). \tag{70.9}$$

Таким образом, уравнение энергии (70.3) дает два лагранжиана; оба они положительно однородные первой степени, но не однородные в общем случае, так как в случае отрицательного множителя k в (70.9) возможен переход с одной ветви функции на другую.

В ОДС мы начинаем рассуждения с обычного лагранжиана

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} a_{\rho\sigma}\dot{q}_\rho \dot{q}_\sigma - V. \qquad (70.10)$$

Затем вследствие уравнения (69.8) получаем соотношения

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} = a_{\rho\sigma}\dot{q}_\sigma, \qquad \dot{q}_\rho = a^{\rho\sigma}p_\sigma, \qquad (70.11)$$

и гамильтониан равен

$$H(q, p) = \dot{q}_\rho p_\rho - L = \frac{1}{2} a^{\rho\sigma}p_\rho p_\sigma + V. \qquad (70.\ 2)$$

Если исходить от этого гамильтониана, то имеют место уравнения вида (69.16)

$$\dot{q}_\rho = \frac{\partial H}{\partial p_\rho} = a^{\rho\sigma}p_\sigma, \qquad p_\rho = a_{\rho\sigma}\dot{q}_\sigma, \qquad (70.13)$$

и мы получаем из них соотношение

$$L(q, \dot{q}) = \dot{q}_\rho p_\rho - H = \frac{1}{2} a_{\rho\sigma}\dot{q}_\rho \dot{q}_\sigma - V, \qquad (70.14)$$

придя, таким образом, вновь к лагранжиану (70.10).

§ 71. Теорема взаимности. Соотношение между лагранжевой и гамильтоновой динамикой становится ясным, если подойти к этому вопросу с геометрической точки зрения[1].)

Пусть $\Lambda(x, x')$ — однородный лагранжиан и пусть $\Omega(x, y) = 0$ — соответствующее уравнение энергии, полученное исключением отношений $x'_1 : x'_2 : \ldots : x'_{N+1}$ из уравнений

$$y_r = \frac{\partial \Lambda}{\partial x'_r}. \qquad (71.1)$$

---

[1]) Ср. Hadamard J., Leçons sur le calcul des variations, т. 1, стр. 75, 76, 96, 97 (Paris; Hermann, 1910); Carathéodory C., Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, стр. 243—248 (Leipzig, Berlin, Teubner, 1935). Каратеодори называет S_L *индикатрисой*, а S_H — *фигуратрисой*.

Рассмотрим пространство Z_{N+1}, касательное к пространству QT в точке x_r. В пространстве Z_{N+1} определена евклидова метрика и прямоугольные декартовы координаты z_r. Проведем в пространстве Z_{N+1} сферу единичного радиуса

$$S: \quad z_r z_r = 1. \tag{71.2}$$

Рассмотрим две N-мерные поверхности, уравнения которых

$$\left.\begin{aligned} S_L: &\quad \Lambda(x, z) - 1 = 0, \\ S_H: &\quad \Omega(x, z) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{71.3}$$

Здесь z_r — текущие координаты; величины x_r — обычные постоянные, так как наша геометрия осуществляется в касательном пространстве Z_{N+1}. Будем называть S_L — *поверхностью лагранжиана*, а S_H — *поверхностью гамильтониана*.

Полярная плоскость для любой точки z_r^* относительно S имеет уравнение

$$z_r z_r^* = 1, \tag{71.4}$$

а поверхность, взаимно полярная к поверхности S_L относительно S, представляет огибающую этих плоскостей, когда z_r^* пробегает поверхность S_L. Для того чтобы найти эту огибающую, имеем уравнения

$$\left.\begin{aligned} z_r \delta z_r^* = 0, &\quad \frac{\partial \Lambda(x, z^*)}{\partial z_r^*} \delta z_r^* = 0, \\ z_r z_r^* = 1, &\quad \Lambda(x, z^*) = 1. \end{aligned}\right\} \tag{71.5}$$

Отсюда следует соотношение

$$z_r = \varphi \frac{\partial \Lambda(x, z^*)}{\partial z_r^*}, \tag{71.6}$$

где φ — вначале неопределенный множитель; легко видеть, что

$$\varphi = \varphi \Lambda(x, z^*) = \varphi z_r^* \frac{\partial \Lambda(x, z^*)}{\partial z_r^*} = z_r z_r^* = 1, \tag{71.7}$$

так что уравнение (71.6) принимает следующий вид:

$$z_r = \frac{\partial \Lambda(x, z^*)}{\partial z_r^*}. \tag{71.8}$$

Поверхность, взаимно полярную с S_L, можно теперь найти, исключив из этих уравнений отношения $z_1^* : z_2^* : \ldots : z_{N+1}^*$. Однако сравнивая этот вывод с уравнениями (71.7), видим, что это — тот же путь, каким мы получили уравнение энергии $\Omega = 0$. Поверхностью, взаимно полярной с S_L, является поэтому поверхность S_H. Точно так же нахождение поверхности, взаимно полярной с S_H, даст S_L. Имеем теорему взаимности: *поверхность гамильтониана есть взаимнополярная поверхность лагранжиана, и обратно.* Рис. 33 иллюстрирует это соотношение.

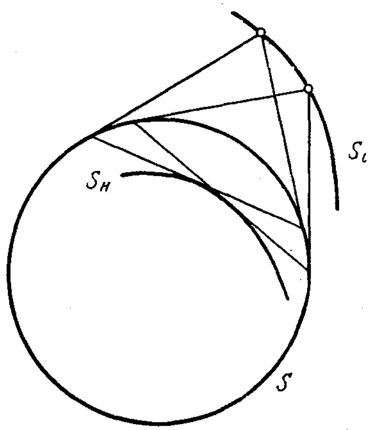


Рис. 33. Соотношение взаимности между поверхностью лагранжиана S_L и поверхностью гамильтониана S_H.

Уравнения

$$y_r = \frac{\partial \Lambda(x, x')}{\partial x_r'} \tag{71.9}$$

сопоставляют любой кривой $x_r = x_r(u)$ естественный вектор импульса — энергии y_r. Обратно, пусть задан y_r — вектор импульса — энергии, удовлетворяющий уравнению энергии. Он определяет направление кривой, для которой этот вектор импульса — энергии является естественным. При нахождении поверхности, взаимно полярной к поверхности $\Omega(x, y) = 0$ (где y_r рассматриваются как текущие координаты) в форме $\Lambda(x, x') = 1$ (где текущими координатами являются x_r), нам приходится иметь дело с уравнениями

$$x_r' = \vartheta \frac{\partial \Omega(x, y)}{\partial y_r}, \tag{71.10}$$

где ϑ — неопределенный множитель. Эти уравнения подобно уравнениям (71.9) устанавливают соотношение между вектором y_r и направлением кривой, т. е. между y_r и отношениями величин x'_r. Из обратимости операций определения взаимно полярных поверхностей следует, что уравнения (71.9) и (71.10) представляют собой различные способы выражения единственного соотношения между направлением в пространстве QT и соответствующим естественным вектором импульса — энергии y_r. В (L, H)-обозначениях эти уравнения дают следующую систему:

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho}, \qquad \dot{q}_\rho = \frac{\partial H}{\partial p_\rho}. \tag{71.11}$$

Эти последние уравнения являются двумя эквивалентными способами выражения единственного соотношения между скоростью $\dot{q}_\rho$ и естественным импульсом p_ρ.

Для того чтобы иллюстрировать проведенное геометрическое изложение, рассмотрим системы РС и ОДС (§ 66 и 70). Примем для простоты в РС $b_{rs} = \delta_{rs}$. Тогда, согласно уравнению (70.1), S_L — поверхность второго порядка, а S_H, согласно уравнению (70.3),— сфера с центром в точке A_r. Что касается ОДС, то согласно представлению (68.4), S_L — поверхность второго порядка, проходящая через начало координат и имеющая уравнение

$$\frac{1}{2}\, a_{\rho\sigma} z_\rho z_\sigma - V z_{N+1}^2 = z_{N+1}, \tag{71.12}$$

а S_H, согласно (70.12), — поверхность второго порядка с уравнением

$$z_{N+1} + \frac{1}{2}\, a^{\rho\sigma} z_\rho z_\sigma + V = 0. \tag{71.13}$$

(Действительно, это — эллипсоид вследствие положительной определенности кинетической энергии.) Если в ОДС рассматривается одна частица, движущаяся в пространстве, то S_L является поверхностью вращения, а S_H — сферой.

§ 72. Гамильтонова двухточечная характеристическая или главная функция [1]). Уравнение Гамильтона — Якоби. Рассмотрим $N+1$-мерное пространство QT и в нем лагранжеву или гамильтонову динамику. Вследствие соответствия, установленного в § 69, безразлично, какую из этих двух динамик рассматривать и использовать при этом однородный лагранжиан $\Lambda(x, x')$ или обычный лагранжиан $L(q, t, \dot{q})$ (§ 64 и 65), уравнение энергии $\Omega(x, y)=0$ или гамильтониан $H(q, t, p)$ (§ 67 и 68).

Пусть Γ — луч (или траектория), соединяющий точки B^* и B. Определим *двухточечную* [2]) *характеристическую*, или *главную*, функцию как лагранжево или гамильтоново действие (они равны) от точки B^* до B вдоль этого луча. Обозначим ее через $S(B^*, B)$. Это — функция двух точек в пространстве QT. Она может не существовать для некоторого выбора двух точек, так же как может не существовать луч, соединяющий эти точки. Она может быть однозначной (две точки соединяют один луч) или многозначной (две точки соединяют несколько лучей). Но мы не будем сейчас касаться этих тонкостей. В случае многозначности будем выделять одно значение функции.

Характеристическая функция зависит от $2N+2$ аргументов, именно, координат точек B^* и B, скажем, x_r^*

---

[1]) В динамике Гамильтона имелось различие между характеристической функцией и главной функцией; его отмечали многие авторы (ср. Голдстейн [7], стр. 283), которые должны были бы считать функцию, рассматриваемую нами, главной функцией, а не характеристической; последняя является несколько менее общей. Однако в этой книге мы следуем оптическому методу, в котором *характеристическая* функция имеет требуемую общность и любая попытка употреблять два названия, характеристическая и главная, вызывала бы путаницу. Мы будем употреблять здесь слово «*характеристическая*», а термин «*главная*» считать эквивалентным понятием. К сожалению, существует еще третий термин «эйконал», введенный в 1895 г. Брунсом, который вновь открыл гамильтонов оптический метод в несколько специализированной форме; см. Hamilton W. R., Mathematical Papers, т. 1, стр. 488, Cambridge, University, Press, 1931. Наименование «эйконал» проникло и в динамику, см. Nordheim and Fues [19], стр. 127; Голдстейн [7], стр. 333.

[2]) В § 74 будет введена *одноточечная* характеристическая функция, а в § 79 — характеристическая функция в пространстве импульса—энергии и смешанная характеристическая функция.

и x_r. Напишем ее в виде

$$S(B^*, B) = S(x^*, x) = S(x_1^*, \ldots, x_{N+1}^*, x_1, \ldots, x_{N+1}) = \\ = \int_{B^*}^{B} \Lambda(x, x')\, du = \int_{B^*}^{B} y_r\, dx_r, \qquad (72.1)$$

или

$$S(B^*, B) = \int_{B^*}^{B} L(q, t, \dot{q})\, dt = \int_{B^*}^{B} (p_\rho\, dq_\rho - H\, dt). \qquad (72.2)$$

Необходимо сделать несколько замечаний относительно характеристической функции:

I) Координатная система для точки B^* не должна быть той же самой, что и для точки B. Может существовать область, где они частично перекрываются (ср. § 63). Даже если это не имеет места, мы можем для общности преобразовать координаты для точки B^*, а возможно, и для B, но произвести эти преобразования независимо друг от друга. Тогда существует различие между обозначениями $S(B^*, B)$ и $S(x^*, x)$, ибо первое указывает только на то, что S — функция двух точек (число, определяемое этими двумя точками, не зависит от используемой при этом системы координат), в то время как второе предполагает определенную форму функциональной зависимости. Эта форма изменяется при преобразовании координат. Функция S есть инвариант (в смысле тензорного исчисления) относительно независимых преобразований *двух* координатных систем.

II) Строго говоря, переход от (72.1) к (72.2) возможен при условии, что t монотонно возрастает при движении от B^* к B. Можно поэтому предпочесть более общую форму (72.1) в случае, когда мы хотим рассматривать систему, «движущуюся обратно во времени», или в случае (при некоторых приложениях общей теории), когда переменная t соответствует не физическому понятию времени, а чему-то отличному от него.

III) Вообще говоря, не существует связи между $S(B^*, B)$ и $S(B, B^*)$, так как требуется только положительная однородность функции $\Lambda(x, x')$. Но если мы решим, что точки B^* и B будут появляться в наших рассуждениях только в одном порядке, насколько это допускается определением (72.1) (может быть, в порядке возрастания t), то мы вольны определить функцию $S(B^*, B)$, как это потребуется; обычно удобно определить ее так, чтобы выполнялось условие

$$S(B, B^*) = -S(B^*, B). \tag{72.3}$$

IV) Если точка B совпадает с B^*, то по крайней мере одно значение функции $S(B^*, B)$ обращается в нуль. Но это условие не заключает в себе обязательно $S(x, x) = 0$, потому что, возможно, для точек B^* и B используются различные координатные системы.

Принимая во внимание сказанное в пункте (I), целесообразно будет ввести различные обозначения для лагранжианов в точках B^* и B, а также для соответствующих уравнений энергии:

$$\Lambda^*(x^*, x^{*\prime}), \quad \Lambda(x, x'), \quad \Omega^*(x^*, y^*) = 0, \quad \Omega(x, y) = 0. \tag{72.4}$$

Мы будем рассматривать B^* как *начальную* точку, а B — как *конечную*.

Для того чтобы определить, как изменяется $S(B^*, B)$ с изменением концевых точек, обратимся к выражению (68.2); отбрасывая входящий в него интеграл, так как мы имеем дело с лучом, получаем выражение

$$\delta S = y_r \delta x_r - y_r^* \delta x_r^*. \tag{72.5}$$

Если вариации δx_r, δx_r^* произвольны и независимы[1]), то получаем систему

$$\frac{\partial S}{\partial x_r} = y_r = \frac{\partial \Lambda}{\partial x_r'}, \qquad \frac{\partial S}{\partial x_r^*} = -y_r^* = -\frac{\partial \Lambda^*}{\partial x_r^{*\prime}}. \tag{72.6}$$

Согласно уравнению энергии (72.4) функция $S(x^*, x)$ удовлетворяет следующим двум уравнениям в частных

[1]) Тем самым мы требуем существование лучей или траекторий, соединяющих любую точку в окрестности B^* с любой точкой в окрестности B. В исключительных случаях, когда B^* и B — фокусы (или сопряженные точки), это требование не выполняется, и уравнения (72.6) не имеют места.

производных:

$$\Omega\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0, \qquad \Omega^*\left(x^*, -\frac{\partial S}{\partial x^*}\right) = 0. \tag{72.7}$$

Первое уравнение в более подробной записи имеет вид

$$\Omega\left(x_1, \ldots, x_{N+1}, \frac{\partial S}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial x_{N+1}}\right) = 0. \tag{72.8}$$

Это — гамильтоновы *уравнения в частных производных*; уравнение (72.8) называется уравнением Гамильтона — Якоби[1]).

Если зафиксирован луч и точка B на нем, а точка B^* скользит по лучу, то значение y_r (импульс — энергия в точке B) остается неизменным. Поэтому из первого уравнения системы (72.6) следует

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x_r\, \partial x_s^*}\, \delta x_s^* = 0, \tag{72.9}$$

и поэтому характеристическая функция удовлетворяет $(N+1) \times (N+1)$ детерминантному уравнению

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial x_r\, \partial x_s^*} = 0. \tag{72.10}$$

Переведем этот вывод на язык других обозначений, положив

$$\left.\begin{aligned} x_\rho &= q_\rho, & x_{N+1} &= t, \\ y_\rho &= p_\rho, & y_{N+1} &= -H. \end{aligned}\right\} \tag{72.11}$$

Согласно (72.5) имеем

$$\delta S = p_\rho\, \delta q_\rho - H\, \delta t - p_\rho^*\, \delta q_\rho^* + H^*\, \delta t^*, \tag{72.12}$$

---

[1]) Возражения Якоби против второго из этих уравнений см. Jacobi C. G. J., Gesammelte Werke, т. IV, стр. 73, 74, а также в сб. Вариационные принципы механики, стр. 289—314; некоторые замечания по этому вопросу см. McConnell A. J. and Conway A. W.; см. Hamilton W. R., Mathematical Papers, т. 2, стр. 613—621. Cambridge, University Press, 1940.

а согласно (72.6)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial S}{\partial q_\rho} = p_\rho, \qquad &&\frac{\partial S}{\partial t} = -H(q, t, p), \\ &\frac{\partial S}{\partial q_\rho^*} = -p_\rho^*, \qquad &&\frac{\partial S}{\partial t^*} = H^*(q^*, t^*, p^*). \end{aligned}\right\} \tag{72.13}$$

Уравнение Гамильтона — Якоби немедленно получается в форме

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, t, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0. \tag{72.14}$$

Это есть несимметричная форма (координата t играет особую роль) общего симметричного уравнения (72.8). В этой форме оно главным образом и употребляется.

В связи с двухточечной характеристической функцией $S(x^*, x)$ имела место некоторая путаница. Якоби казалось, что в уравнениях (72.7) требуется слишком много, именно, чтобы *одна* функция удовлетворяла *двум* дифференциальным уравнениям в частных производных. Для того чтобы выяснить этот вопрос, рассмотрим рассуждения, которые определяют функцию $S(x^*, x)$.

Мы вовсе не будем касаться практических вычислений, которые приводят к *формуле* для этой функции. В этом смысле очень немногие динамические проблемы «разрешимы». Поскольку рассматривается математическая структура динамики, то речь идет только об определении последовательности операций, которые должны иметь место. Поэтому в дальнейшем мы говорим о «решении» системы обыкновенных дифференциальных уравнений только в смысле такой «определенности» и «нахождения» характеристической функции.

Функция $S(x^*, x)$ выводится из уравнения энергии $\Omega(x, y) = 0$ при помощи следующих операций [для простоты будем использовать только одну систему координат (для всех точек)]:

I) Выбираем точку x_r^* и точку x_r.

II) Выбираем y_r^*, совместные с уравнением

$$\Omega(x^*, y^*) = 0. \tag{72.15}$$

III) Решаем обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{dx_r}{dw} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_r}, \qquad \frac{dy_r}{dw} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x_r} \tag{72.16}$$

с начальными условиями $x_r = x_r^*$, $y_r = y_r^*$ при $w = 0$; получаем таким образом луч Г, проходящий через точку x_r^*.

IV) Придаем y_r^* всевозможные значения, совместные с уравнением (72.15); получаем пучок всех лучей $\{\Gamma\}$, проходящих через точку x_r^*.

V) Выбираем из этого пучка тот луч Г, который проходит и через точку x_r, выбранную в пункте (I). Если такого луча не существует, то для выбранных точек не существует функции $S(x^*, x)$. Если же найдется такой луч, то полагают

$$S(x^*, x) = \int_{x^*}^{x} y_r\, dx_r, \tag{72.17}$$

где интеграл берется по лучу Г.

Функция $S(x^*, x)$, построенная таким образом, удовлетворяет двум дифференциальным уравнениям в частных производных (72.7) (в которых Ω^* нужно заменить на Ω, так как была введена только одна система координат).

§ 73. Динамика, основанная на выбранной двухточечной характеристической функции. В § 72 двухточечная характеристическая функция $S(x^*, x)$ была определена через лагранжеву функцию $\Lambda(x, x')$ или уравнение энергии $\Omega(x, y) = 0$. Мы видели, что она удовлетворяет детерминантному уравнению

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial x_r\, \partial x_s^*} = 0. \tag{73.1}$$

В сущности говоря, это наиболее фундаментальное уравнение гамильтоновой теории, так как оно имеет одну форму для *всех* динамических систем, в то время как уравнение энергии меняет свою форму при переходе от одной динамической системы к другой.

Заметим, что уравнение (73.1) есть инвариант относительно преобразований одних только переменных x или x^*. Величины

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x_r\, \partial x_s^*} \tag{73.2}$$

(при фиксированном s) являются компонентами вектора, ковариантного по отношению к преобразованиям переменных x, а при фиксированном r они являются компонентами вектора, ковариантного по отношению к преобразованиям переменных x^*. Будем предполагать, что ранг матрицы из величин (73.2) равен N, что и будет иметь место в общем случае.

Мы покажем теперь, что любую выбранную функцию $S(x^*, x)$, удовлетворяющую уравнению (73.1), можно положить в основу динамики[1]). Пусть выбрана любая такая функция; пишем уравнения 72

$$y_r = \frac{\partial S(x^*, x)}{\partial x_r}, \qquad y_r^* = -\frac{\partial S(x^*, x)}{\partial x_r^*}. \tag{73.3}$$

Так как имеет место уравнение (73.1), то можно исключить переменные x_r^* из уравнений первой группы, и переменные x_r — из второй группы (73.3); получаем уравнения вида

$$\Omega(x, y) = 0, \qquad \Omega^*(x^*, y^*) = 0. \tag{73.4}$$

Это — уравнения энергии, соответствующие двухточечной характеристической функции $S(x^*, x)$; Ω и Ω^* — различные функции, так как мы предполагаем, что для начальной и конечной точек введены различные системы координат.

Но для получения лучей или траекторий уравнения энергии не нужны; их можно получить непосредственно из функции $S(x^*, x)$ следующим образом.

Во-первых, пусть заданы начальная точка x_r^* и начальное направление D^*; луч или траектория определяется

1) Гамильтон показал, что эта функция является основой оптики; см. Mathematical Papers, т. 1, стр. 170. Cambridge, 1931.

тогда уравнениями

$$\frac{\partial^2 S(x^*, x)}{\partial x_r \, \partial x_s^*} dx_s^* = 0, \qquad (73.5)$$

где dx_s^* соответствуют направлению D^*. Эти уравнения позволяют выразить переменные x через один параметр.

Во-вторых, пусть заданы две точки x_r^* и x_r; луч или траектория, соединяющие их, определяются следующими уравнениями:

$$\frac{\partial S(x^*, X)}{\partial X_r} + \frac{\partial S(X, x)}{\partial X} = 0, \qquad (73.6)$$

где переменные X — текущие координаты луча.

Однако важнее всего, по-видимому, отметить, что если мы исходим из уравнения энергии и выводим двухточечную характеристическую функцию (либо наоборот), то уравнения

$$y_r^* = -\frac{\partial S(x^*, x)}{\partial x_r^*} \qquad (73.7)$$

являются уравнениями луча в конечной точке траектории, проходящей через начальную точку x_r^* с начальным импульсом — энергией y_r^*, совместным, конечно, с уравнением $\Omega^*(x^*, y^*) = 0$; в уравнениях (73.7) переменные x означают текущие координаты.

§ 74. Когерентные системы лучей или траекторий. Одноточечная характеристическая функция. Предположим, что имеет место уравнение энергии

$$\Omega(x, y) = 0 \qquad (74.1)$$

и введем только одну систему координат — и для начальной и для конечной точек. Лучи или траектории удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx_r}{dw} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_r}, \qquad \frac{dy_r}{dw} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x_r}. \qquad (74.2)$$

Рассмотрим систему лучей (рис. 34), образующих подпространство R в пространстве QT, или, может быть, заполняющих все QT (в этом случае R совпадает с QT). Первая группа уравнений из (74.2) сопоставляет каждой точке в R вектор y_r. Можно дать эквивалентное и более явное выражение y_r через однородный лагранжиан

$$y_r = \frac{\partial \Lambda (x, x')}{\partial x'_r}. \qquad (74.3)$$

Мы говорим, что система лучей или траекторий образует *когерентную систему*[1]), если для каждого стягиваемого в точку контура в подпространстве R имеет место условие

$$\oint y_r \, dx_r = 0. \qquad (74.4)$$

В частности, легко увидеть из (72.5), что система лучей или траекторий, проведенных из данной точки, образует в пространстве QT когерентную систему.

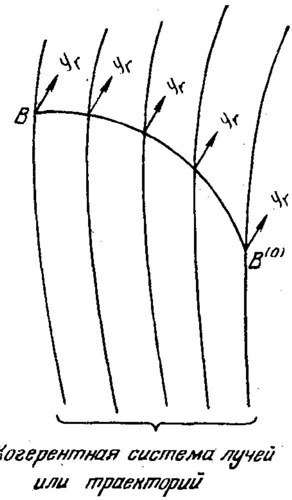


Рис. 34. Одноточечная характеристическая функция $U(B) = \int^{B} y_r \, dx_r$.

Пусть имеется когерентная система; выберем какую-нибудь точку $B^{(0)} \in R$ и пусть B — любая другая точка R. Соединим точки $B^{(0)}$ и B кривой C и обозначим

$$U(B) = \int^{B} y_r \, dx_r, \qquad (74.5)$$

где интеграл берется по кривой C. Мы опускаем запись нижнего предела $B^{(0)}$, так как точку $B^{(0)}$ мы раз и навсегда считаем фиксированной. Заметим, что в выражении (74.5) y_r не является естественным вектором импульса — энергии, соотнесенным C (ср. с (69.10)); это — вектор

---

[1]) Или семейство: ср. Dirak P. A. M., Canad. J. Math. **3**, 1—23 (1951), который замечает, что «по-видимому, это семейство имеет в природе весьма глубокое значение, до сих пор еще недостаточно понятое».

поля, заданного уравнениями (73.4), для когерентной системы. Согласно условию (74.4) интеграл (74.5) имеет одно и то же значение для всех совместимых контуров в R. Это означает, что если R — односвязное пространство, то U — однозначная функция тех координат, которые определяют положение точки B. Если R — многосвязно, то U — многозначная функция. Пусть C_1, $C_2, \ldots$ $\ldots, C_m$— полная система независимых неприводимых контуров. Тогда две любые кривые, проходящие через точку $B^{(0)}$, различаются числом контуров, которые они охватывают; имеем, таким образом,

$$U(B) = U_0(B) + n_1 J_1 + n_2 J_2 + \ldots + n_m J_m, \tag{74.6}$$

и $U_0(B)$ — какое-либо значение функции (74.5), а

$$J_1 = \oint\limits_{C_1} y_r\, dx_r, \ \ldots, \ J_m = \oint\limits_{C_m} y_r\, dx_r, \tag{74.7}$$

и $n_1, n_2, \ldots, n_m$ — целые числа, положительные, отрицательные или равные нулю[1]).

Если лучи или траектории заполняют пространство QT (образуя конгруэнцию кривых), то в уравнении (74.5) координатам точки B (назовем их x_r) можно придавать произвольные вариации. Тогда

$$y_r = \frac{\partial U(x)}{\partial x_r}, \tag{74.8}$$

или, что то же самое,

$$p_\rho = \frac{\partial U(q, t)}{\partial q_\rho}, \qquad -H = \frac{\partial U(q, t)}{\partial t}, \tag{74.9}$$

и поэтому, согласно уравнению (74.1), U удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби

$$\Omega\left(x, \frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0, \tag{74.10}$$

---

[1]) Тот факт, что $U(B)$ — многозначная функция, если R многосвязно, внутренне связан с правилами квантования; ср. Einstein A., Verh. dtsch. phys. Ges. **19**, 82—92 (1917); Synge J. L., Phys. Rev. **89**, 467—471 (1953). См. также § 98, 99, где функции J — переменные действия.

или в несимметричной форме

$$\frac{\partial U}{\partial t}+H\left(q,\,t,\,\frac{\partial U}{\partial q}\right)=0. \qquad (74.11)$$

Назовем $U(B)$ — *одноточечной характеристической функцией* когерентной системы лучей или траекторий. Правда, она зависит от точки $B^{(0)}$, но это тривиальная зависимость — изменение точки $B^{(0)}$ — самое большее добавляет постоянную к $U(B)$.

§ 75. Волны постоянного действия (лагранжева или гамильтонова) [1]**. Построение Гюйгенса.** Определим волны постоянного действия (лагранжева или гамильтонова; в обоих случаях они одни и те же) для когерентной системы лучей или траекторий, введенной в § 74, следующим условием [2]:

$$U\,(B)=\text{const}. \qquad (75.1)$$

Лучи пересекают волны, как показано на рис. 35, на котором изображены волны W^*, W с точками B^*, B на них; кривая, соединяющая эти точки, и есть луч Г. Действие вдоль этого луча равно действию вдоль любого другого пути, проведенного от W^* к W, и равно интегралу $\int y_r\,dx_r$, взятому по произвольной кривой в R, проведенной от W^* к W; вектор y_r принадлежит полю, определенному когерентной системой уравнений (74.3).

В развитой здесь теории не имеет смысла вопрос о том, ортогонально или неортогонально пересекаются лучи и поверхности. Мы не имеем римановой метрики в пространстве QT, а понятие ортогональности кривой и подпространства неинвариантно относительно преобразований координат. Однако это возражение не относится к вектору импульса — энергии y_r, так как это — ковариантный

---

[1] О волнах в пространстве конфигураций Q см. § 81.

[2] На языке вариационного исчисления это — *трансверсали*, лучи или траектории — экстремали уравнений. Условие когерентности называется условием Майера: можно рассматривать его как условие отсутствия вихрей в гидродинамике, ср. Einstein A., Sitzsber. preuss. Akad. Wiss. phys.-math. Kl. 46, 606—608 (1917). Каратеодори (цит. выше в § 71, стр. 249) называет семейство экстремалей и волн vollständige Figur.

вектор (чтобы $y_r\, dx_r$ было инвариантом, нужно сделать dx_r контравариантным). Вектор y_r действительно ортогонален к поверхностям в том смысле, что выполняется соотношение

$$y_r\, \delta x_r = 0 \tag{75.2}$$

для каждого бесконечно малого смещения δx_r вдоль волн. Этот вывод следует из определения (74.5), так как U равно нулю при таких перемещениях.

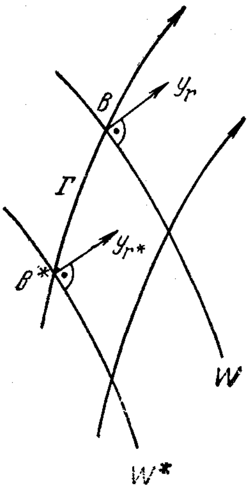


Рис. 35. Лучи или траектории в QT, пересекающие волны W^*, W.

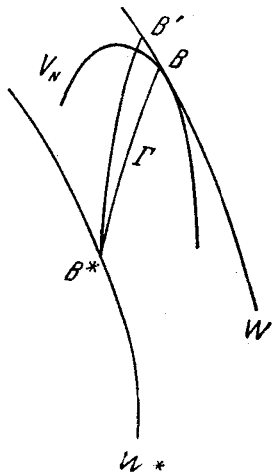


Рис. 36. Построение Гюйгенса в пространстве QT.

Волну W можно получить из волны W^* построением Гюйгенса (рис. 36). Из точки B^* проводим лучи во всех направлениях в пространстве QT и определяем вдоль них величину действия следующим образом:

$$A = U(W) - U(W^*), \tag{75.3}$$

где $U(W)$ и $U(W^*)$ — значения U на двух волнах. Таким образом, мы получим N-мерное пространство (назовем его V_N), уравнение которого имеет вид

$$S(x^*,\ x) = A, \tag{75.4}$$

где S — двухточечная характеристическая функция. Пространство V_N, таким образом, само является волной, а точка B^* — ее источником. В формуле (75.4) величины x_r^* фиксированы (координаты точки B^*), а величины x — текущие координаты поверхности V_N. Покажем, что V_N касается W в точке B, в которой луч Γ, идущий из точки B^*, пересекает волну W.

Во-первых, точка B должна лежать на V_N, потому что эта точка входит в класс всех точек, лежащих на расстоянии-действии A от точки B^*. Кроме того, если мы придаем точке B некоторое бесконечно малое перемещение δx_r, переводящее ее в соседнее положение B' на волне W, то действие вдоль луча, соединяющего точки B^* и B', превосходит A на величину $y_r\,\delta x_r$ (ср. (72.5)). Эта разность обращается в нуль согласно условию (75.2). Таким образом, с точностью до членов первого порядка B' лежит на V_N, а это и доказывает, что волны V_N и W касаются в точке B. Ясно затем, что в пространстве R когерентной системы W есть огибающая семейства N-мерных пространств (75.4); при этом значение A остается постоянным, а точка B^* находится на поверхности начальной волны W^*. Так как эти N-пространства сами являются волнами, исходящими из источников на W^*, то имеем построение Гюйгенса.

Можно, конечно, рассматривать возникновение одной волны из другой, как если бы имели место бесконечно малые приращения (тем самым A было бы бесконечно малым). Считая все величины конечными или бесконечно малыми, мы имеем *контактное* преобразование, которое устанавливает соответствие между точками и касательными элементами в этих точках двух волновых поверхностей. Касательный элемент здесь означает совокупность бесконечно малых векторов δx_r, удовлетворяющих условию (75.2) для данных y_r.

§ 76. Определение волн по начальным данным. Метод характеристических кривых[1]**.** В предыдущих параграфах область, заполненная когерентной системой лучей, была

---

[1]) Ср. Carathéodory, op. cit., § 71, гл. 3, а также T. Levi-Civita, Caratteristiche dei sistemi differentiali e propagazione ondoza (Bologna: Zanichelli, 1931), или, в переводе на французский язык, Caractéristiques des systèmes différentiels et propagation des ondes (Paris, Alcan, 1932).

подпространством R пространства QT, или, может быть, самим пространством QT. Предположим теперь, что лучи заполняют QT или часть его, так что они образуют конгруэнцию. Попытаемся определить волны при соответствующих начальных данных. Мы хотим, таким образом, решить дифференциальное уравнение в частных производных для функции U

$$\Omega(x, y) = 0, \qquad y_r = \frac{\partial U}{\partial x_r}, \tag{76.1}$$

с начальными условиями $U = U_0$ в подпространстве Σ_M пространства QT (вообще говоря, U_0, конечно, не постоянная); размерность M может быть любым числом от нуля (одна точка) до N[1]. Волны будут тогда иметь уравнения $U = \text{const}$, а U будет одноточечной характеристической функцией когерентной системы лучей или траекторий, удовлетворяющих указанным начальным условиям.

Это так называемый метод характеристических кривых, которые в каждый данный момент являются лучами или траекториями. Пишем обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{dx_1}{\dfrac{\partial\Omega}{\partial y_1}} = \ldots = \frac{dx_{N+1}}{\dfrac{\partial\Omega}{\partial y_{N+1}}} = \frac{dy_1}{-\dfrac{\partial\Omega}{\partial x_1}} = \ldots = \frac{dy_{N+1}}{-\dfrac{\partial\Omega}{\partial x_{N+1}}}, \tag{76.2}$$

или эквивалентную им систему, вводя параметр w,

$$\frac{dx_r}{dw} = \frac{\partial\Omega}{\partial y_r}, \qquad \frac{dy_r}{dw} = -\frac{\partial\Omega}{\partial x_r}. \tag{76.3}$$

Эти уравнения определяют единственное решение

$$x_r = x_r(w), \qquad y_r = y_r(w), \tag{76.4}$$

если заданы значения x_r и y_r при $w = 0$.

---

[1]) Случай $M = 0$ изучается в § 71 и его можно не рассматривать здесь. Ясно также, что пространство QT $N+1$-мерное и латинские индексы изменяются от 1 до $(N+1)$; ср. § 62.

Пусть B^* с координатами x_r^* — произвольная точка на Σ_M (рис. 37) и пусть y_r^* выбраны так, что они удовлетворяют уравнению

$$\Omega(x^*, y^*) = 0, \tag{76.5}$$

а также

$$y_r^* \delta x_r^* = \delta U_0 \tag{76.6}$$

для каждого бесконечно малого перемещения на Σ_M. Невозможно рассмотреть все относящиеся сюда случаи. Условия (76.5) и (76.6) могут оказаться несовместимыми; в этом случае не существует решения уравнения (76.1), удовлетворяющего начальным условиям. И даже если эти условия совместимы, могут возникнуть некоторые случаи вырождения. В следующем, общем рассуждении мы предполагаем, что уравнения (76.5) и (76.6) содержат $M+1$ условие и поэтому величины y_r^* имеют $N-M$ степеней свободы. Пусть x_r^* и y_r^* будут начальными значениями для системы (76.3). Из первых уравнений (76.3) следует, что эти значения определяют направление в пространстве QT. Существует ∞^{N-M} таких направлений в каждой точке Σ_M и существуют ∞^M точек в Σ_M. Это означает, что мы получаем конгруэнцию кривых (лучей или траекторий), заполняющих пространство QT.

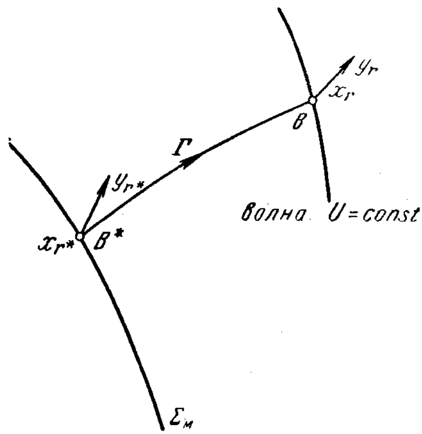


Рис. 37. Волны в QT, полученные из начальных данных с помощью метода характеристических кривых.

Пусть B — произвольная точка пространства QT с координатами x_r. Через точку B проходит кривая Γ, принадлежащая описанной выше конгруэнции; пусть Γ пересекает Σ_M в точке B^* с координатами x_r^*. Определим затем $U(x)$ следующим образом:

$$U(x) = U(x^*) + \int_{B^*}^{B} y_r\, dx_r, \tag{76.7}$$

где слагаемое $U(x^*)$ имеет заданное значение U_0 и интеграл берется по кривой Г. Варьируя B и, следовательно, B^*, мы получаем

$$\delta U(x) = \delta U(x^*) + y_r \delta x_r - y_r^* \delta x_r^* + \\ + \int (\delta y_r\, dx_r - \delta x_r\, dy_r). \tag{76.8}$$

Теперь уравнения (76.3) заключают в себе уравнение $d\Omega/dw = 0$ и поэтому, принимая во внимание (76.5), найдем

$$\Omega(x,\ y) = 0. \tag{76.9}$$

Отсюда $\delta\Omega = 0$ и интеграл в выражении (76.8) обращается в нуль. Так как, кроме того, имеет место условие (76.6), то уравнение (76.8) сводится к следующему:

$$\delta U(x) = y_r\, \delta x_r. \tag{76.10}$$

Поэтому справедливы уравнения

$$y_r = \frac{\partial U}{\partial x_r}. \tag{76.11}$$

Итак, согласно (76.9), U удовлетворяет уравнению в частных производных (76.1), а согласно (76.7) U удовлетворяет начальным условиям. Таким образом, искомое решение найдено.

Чтобы вернуться к результатам, полученным в § 72, нет необходимости находить формулы для $U(x)$ или находить схему, которая определяет эту величину и указывает условия, при которых она может не существовать.

§ 77. Полный интеграл Якоби уравнения Гамильтона — Якоби. Предположим, что мы отыскиваем все лучи или траектории и соотнесенные им векторы импульса — энергии для динамической системы с уравнением энергии

$$\Omega(x,\ y) = 0 \tag{77.1}$$

или, что то же самое, с гамильтоновой функцией

$$H = H(q, t, p). \tag{77.2}$$

Метод Якоби состоит в том, чтобы, не пытаясь прямо интегрировать обыкновенные дифференциальные уравнения движения, разрешить уравнение Гамильтона — Якоби, которое в соответствии с (77.2) имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + H\left(q, t, \frac{\partial U}{\partial q}\right) = 0. \tag{77.3}$$

Якоби свел задачу о движении к другой задаче: найти *полный интеграл* уравнения (77.3) в форме

$$U = J(q_1, \ldots, q_N, t, a_1, \ldots, a_N) + a_{N+1}. \tag{77.4}$$

Здесь a_i — произвольные постоянные; полный интеграл должен содержать $N + 1$ постоянных величин a_i, но одна может быть аддитивной, так как в уравнение (77.3) входят только производные функции U.

Теорема Якоби утверждает, что если b_ρ — некоторые постоянные, то уравнения

$$b_\rho = \frac{\partial J}{\partial a_\rho} \tag{77.5}$$

определяют совокупность всех лучей или траекторий, а уравнения

$$p_\rho = \frac{\partial J}{\partial q_\rho} \tag{77.6}$$

определяют соотнесенные им импульсы или (что то же самое), что вследствие (77.5) и (77.6) выполняются уравнения

$$\dot{q}_\rho = \frac{\partial H}{\partial p_\rho}, \tag{77.7}$$

и

$$\dot{p}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial q_\rho} \tag{77.8}$$

и что (77.5) и (77.6) содержат все решения уравнений (77.7) и (77.8).

Для того чтобы доказать это, заметим, во-первых, что N уравнений системы (77.5) содержат q_ρ и t и, следовательно, определяют функции $q_\rho(t)$ для любых значений постоянных. Кроме того, система (77.6) дает соответствующие импульсы p_ρ. Производные функций q и p получаются дифференцированием по t уравнений (77.5) и (77.6); это дает следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial a_\rho\, \partial q_\sigma}\,\dot{q}_\sigma + \frac{\partial^2 J}{\partial a_\rho\, \partial t} = 0, \tag{77.9}$$

и

$$\dot{p}_\rho = \frac{\partial^2 J}{\partial q_\rho\, \partial q_\sigma}\,\dot{q}_\sigma + \frac{\partial^2 J}{\partial a_\rho\, \partial t}\,. \tag{77.10}$$

Так как функция (77.4) удовлетворяет уравнению (77.3), то для произвольных значений a имеем соотношение

$$\frac{\partial J}{\partial t} + H\left(q,\, t,\, \frac{\partial J}{\partial q}\right) = 0 \tag{77.11}$$

и, следовательно, имеют место уравнения

$$\frac{\partial^2 J}{\partial a_\rho\, \partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\,\frac{\partial^2 J}{\partial q_\sigma\, \partial a_\rho} = 0. \tag{77.12}$$

Сравнивая эту систему с (77.9), видим, что действительно уравнения (77.7) удовлетворяются. Дифференцируя теперь (77.11) по q_ρ, получаем уравнения

$$\frac{\partial^2 J}{\partial q_\rho\, \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_\rho} + \frac{\partial H}{\partial p_\sigma}\,\frac{\partial^2 J}{\partial q_\sigma\, \partial q_\rho} = 0. \tag{77.13}$$

Принимая во внимание (77.7) и сравнивая полученное уравнение с (77.10), видим, что удовлетворяются и уравнения (77.8).

Так как число постоянных $(a_\rho,\, b_\rho)$ равно $2N$ и равно числу начальных значений $(q_\rho,\, p_\rho)$, необходимых для определения решения систем (77.7) и (77.8), то теорема Якоби доказана. Можно сказать, что любая динамическая проблема, по существу, решена, если только может быть найден полный интеграл вида (77.4).

Если дан полный интеграл уравнений Гамильтона — Якоби вида (77.4), то двухточечная характеристическая функция

$$S\,(q_1^*,\ \ldots,\ q_N^*,\ t^*,\ q_1,\ \ldots,\ q_N,\ t)$$

получается[1]) исключением N постоянных a_ρ из $N+1$ уравнений

$$\left.\begin{aligned} S = J\,(q,\ t,\ a) - \quad (q^*,\ t^*,\ a),\\ \frac{\partial J\,(q,\ t,\ a)}{\partial a_\rho} = \frac{\partial J\,(q^*,\ t^*,\ a)}{\partial a_\rho}. \end{aligned}\right\} \tag{77.14}$$

Соотношение между полным интегралом и двухточечной характеристической функцией тесно связано со следующим фактом. Полный интеграл дифференциального уравнения в частных производных

$$\Omega\left(x,\ \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0, \tag{77.15}$$

(назовем его $S(x^*,\ x)$) (в котором x_r^* — произвольные постоянные) можно рассматривать так же как любое решение того же уравнения, если принять за независимые переменные $2N+2$ величины x_r и x_r^*, из которых переменные x_r^* не входят явно в уравнение. Какую бы точку зрения мы не приняли, мы придем к фундаментальному детерминантному уравнению вида (73.1)

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial x_r\,\partial x_s^*} = 0. \tag{77.16}$$

Теорему Якоби можно сформулировать в следующей симметричной форме. Пусть $S\,(x^*,\ x)$ — полный интеграл уравнения

$$\Omega\left(x,\ \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0, \tag{77.17}$$

---

[1]) См. C o n w a y A. W. and Mc C o n n e l l A. J., Proc. Roy. Irish Akad. A61, 18—25 (1932); H a m i l t o n W. R., Mathematical Papers, т. 2, стр. 613—621; а также Lanczos [15], стр. 262.

а величины x_r^* — произвольные постоянные. Тогда, определяя y_r как

$$y_r = \frac{\partial S}{\partial x_r}, \tag{77.18}$$

имеем уравнения

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_s} \frac{\partial^2 S}{\partial x_s\, \partial x_r^*} = 0, \tag{77.19}$$

и

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_r} + \frac{\partial \Omega}{\partial y_s} \frac{\partial^2 S}{\partial x_s\, \partial x_r} = 0. \tag{77.20}$$

Определим y_r^* следующим образом:

$$y_r^* = -\frac{\partial S}{{}_r^*}. \tag{77.21}$$

Теперь система (77.19) заключает в себе детерминантное уравнение (77.16), а поэтому (77.21) содержит в себе некоторое соотношение между величинами x_r^* и y_r^*, имеющее вид

$$\Omega^*(x^*,\ y^*) = 0. \tag{77.22}$$

Если задать этим переменным произвольные постоянные значения, совместные с этим уравнением, то уравнения

$$y_r = \frac{\partial S\,(x^*,\ x)}{\partial x_r}, \qquad y_r^* = -\frac{\partial S\,(x^*,\ x)}{\partial x_r^*} \tag{77.23}$$

определяют кривую $x_r(w)$ и соотнесенный ей вектор $y_r(w)$, удовлетворяющие (при некотором параметре w) уравнениям

$$\frac{dx_r}{dw} = \frac{\partial \Omega\,(x,\ y)}{\partial y_r}, \qquad \frac{dy_r}{dw} = -\frac{\partial \Omega\,(x,\ y)}{\partial x_r}. \tag{77.24}$$

Для того чтобы доказать это утверждение, продифференцируем (77.23) по w; получим таким образом

$$\frac{\partial y_r}{\partial w} = \frac{d^2 S}{\partial x_r\, dx_s} \frac{dx_s}{dw}, \qquad 0 = \frac{\partial^2 S}{\partial x_r^*\, \partial x_s} \frac{dx_s}{dw}. \tag{77.25}$$

Доказательство следует из сравнения этих уравнений с (77.19) и (77.20). Нужно отметить, что в действительности нам не нужно уравнение (77.22), ибо для того, чтобы определить кривую и соотнесенный ей вектор y_r, требуется только $2N+1$ уравнений. За эти уравнения можно принять (77.23), отбросив одно уравнение второй группы, так что в уравнения входят только N величин y_r^*; этим величинам и x_r^* можно задать произвольные значения.

§ 78. Практическое использование теоремы Якоби. Разделение переменных. Пусть гамильтонова функция не содержит явно времени (консервативная система; ср. § 62; этот случай часто встречается на практике). Применим теорию, развитую в предыдущем параграфе; будем отыскивать функцию J, как в (77.4), в форме

$$J = -Et + K(q_1, \ldots, q_N, a_1, \ldots, a_{N-1}, E), \tag{78.1}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{N+1}, E$ — произвольные постоянные. Тогда согласно (77.3) функция K должна удовлетворять уравнению

$$H\left(q_1, \ldots, q_N, \frac{\partial K}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial K}{\partial q_N}\right) = E. \tag{78.2}$$

Когда такой полный интеграл найден, уравнения (77.5) и (77.6) дают для траекторий следующие уравнения:

$$b_1 = \frac{\partial K}{\partial a_1}, \ldots, \quad b_{N-1} = \frac{\partial K}{\partial a_{N-1}}, \quad b_N = -t + \frac{\partial K}{\partial E}, \tag{78.3}$$

и

$$p_1 = \frac{\partial K}{\partial q_1}, \ldots, p_{N-1} = \frac{\partial K}{\partial q_{N-1}}, \quad p_N = \frac{\partial K}{\partial q_N}. \tag{78.4}$$

Первые $N-1$ уравнений (78.3) определяют кривую в пространстве Q, а последнее — время t. Величина H имеет постоянное значение в течение движения (это — следствие условия $\partial H/\partial t = 0$) и это постоянное значение равно E.

Уравнение Гамильтона — Якоби (78.2) иногда можно решить с помощью метода *разделения переменных*. Пусть H — функция вида

$$H(q, p) = \frac{H_1 + H_2 + \ldots + H_N}{A_1 + A_2 + \ldots + A_N}, \tag{78.5}$$

где H_1, A_1 — зависят только от переменных q_1, p_1; H_2, A_2 зависят только от q_2, p_2 и т. д. Тогда уравнение (78.2) можно написать в форме

$$D_1 + D_2 + \ldots + D_N = 0, \tag{78.6}$$

где

$$D_1 = H_1\left(q_1, \frac{\partial K}{\partial q_1}\right) - EA_1\left(q_1, \frac{\partial K}{\partial q_1}\right), \tag{78.7}$$

$D_2, \ldots, D_N$ имеют аналогичные выражения. Уравнение (78.6) будет удовлетворено, если положить

$$K = K_1(q_1, a_1, E) + K_2(q_2, a_2, E) + \ldots + K_N(q_N, a_N, E). \tag{78.8}$$

Потребуем при этом, чтобы $K_1, K_2, \ldots, K_N$ удовлетворяли уравнениям вида

$$H_1\left(q_1, \frac{dK_1}{dq_1}\right) - EA_1\left(q_1, \frac{dK_1}{dq_1}\right) = a_1, \tag{78.9}$$

где величины $a_1, a_2, \ldots, a_N$ — произвольные постоянные, связанные единственным условием

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_N = 0, \tag{78.10}$$

так что $N-1$ из них независимы. Теперь уравнение (78.9) — обыкновенное дифференциальное уравнение. Если разрешить его относительно dK_1/dq_1, то K_1 получается квадратурой; аналогично квадратурами получаются $K_2, \ldots, K_N$, и имеем полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби (78.2) в форме (78.8), содержащей N произвольных постоянных (напоминаем, что аддитивная постоянная отбрасывается при переходе от U к J).

Одним из частных случаев, когда $H(q, p)$ может быть представлена в виде (78.5), являются системы типа Лиувилля [1]), для которых кинетическая и потенциальная энергии имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(A_1 + \ldots + A_N)(B_1\dot{q}_1^2 + \ldots + B_N\dot{q}_N^2), \\ V &= \frac{V_1 + \ldots + V_N}{A_1 + \ldots + A_N}, \end{aligned}\right\} \quad (78.11)$$

где A_1, B_1, V_1 зависят только от q , A_2, B_2; V_2 — только от q_2 и т. д. Соответствующая гамильтонова функция при этом имеет вид

$$H = \frac{\frac{1}{2}(p_1^2/B_1 + \ldots + p_N^2/B_N) + V_1 + \ldots + V_N}{A_1 + \ldots + A_N}. \quad (78.12)$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения типа (78.9), с помощью которых задача сводится к квадратурам, имеют в данном случае следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{dK_1}{dq_1}\right)^2 &= 2B_1(EA_1 - V_1 + a_1), \ \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(\frac{dK_N}{dq_N}\right)^2 &= 2B_N(EA_N - V_N + a_N). \end{aligned}\right\} \quad (78.13)$$

В качестве простого примера рассмотрим проблему Кеплера [2]) (§ 36). В полярных координатах (r, ϑ) имеем следующую лагранжеву функцию:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) + \frac{\mu}{r}. \quad (78.14)$$

---

[1]) Дополнительные детали, а также сведения о более общих системах Штеккеля, которые также решаются методом разделения переменных, см. Аппель [2], II, стр. 374—376; Леви-Чивита и Амальди [16], II_2, стр. 343—345.

[2]) Ср. Corben and Stehle [3], стр. 251—257, где подробно исследован трехмерный случай с рассмотрением квантовых условий Бора — Зоммерфельда. См. также Аппель [2], [1], гл. XI.

а импульсы равны

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \dot{r}, \qquad p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = r^2\dot{\vartheta} \tag{78.15}$$

(считаем, что масса частицы равна единице). Гамильтонова функция равна тогда

$$H = \dot{r}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\vartheta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - L = T + V =$$

$$= \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\vartheta^2\right) - \frac{\mu}{r}, \tag{78.16}$$

но это выражение имеет форму (78.12). Уравнение Гамильтона — Якоби (78.2) выглядит теперь так:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial K}{\partial \vartheta}\right)^2\right] - \frac{\mu}{r} = E. \tag{78.17}$$

Полный интеграл его получаем в форме

$$K = F(r, a, E) + a\vartheta, \tag{78.18}$$

где a и E — произвольные постоянные, а F получается квадратурой из уравнения

$$\left(\frac{dF}{dr}\right)^2 = 2E + \frac{2\mu}{r} - \frac{a^2}{r^2}. \tag{78.19}$$

Согласно (78.3) траектории определяются уравнениями

$$b_1 = \frac{dF}{da} + \vartheta, \qquad b_2 = -t + \frac{\partial F}{\partial E}. \tag{78.20}$$

Очевидно, что такой метод можно применить, когда потенциал является любой функцией r.

Метод разделения переменных требует специального выбора системы координат. Так, в проблеме Кеплера ничего не удалось бы сделать, пользуясь прямоугольными декартовыми координатами. В проблеме с двумя центрами притяжения можно разделить переменные, преобразуя прямоугольные декартовы координаты (x, y) в эллиптические координаты (q_1, q_2) по формулам

$$x = c \operatorname{ch} q_1 \cos q_2, \quad y = c \operatorname{sh} q_1 \sin q_2, \tag{78.21}$$

если центры притяжения находятся в точках $x = \pm c$. Если один притягивающий центр удаляется на бесконечность, а сила притяжения к нему бесконечно возрастает, то приходим в пределе к задаче о заряженной частице, движущейся в поле, которое является наложением однородного электрического поля на поле Кулона (штарк-эффект)[1].

Релятивистская проблема Кеплера исследована в § 116.

---

[1]) Подробное исследование см. Corben and Stehle [3], стр. 258—264; см. также Аппель [2], I, стр. 349—352; Grammel [8], стр. 321; Pérès [20], стр. 243, 244. Лагранжево решение задачи двух центров см. Уиттекер [28], стр. 112—114.

ГЛАВА III

ПРОСТРАНСТВО ИМПУЛЬСА — ЭНЕРГИИ (*PH*)

§ 79. Пространство *PH* и характеристическая функция в пространстве импульса — энергии. В главе ДII мы принимали за основу динамической теории $N+1$-мерное пространство событий QT с координатами x_r, где[1])

$$x_\rho = q_\rho, \quad x_{N+1} = t. \tag{79.1}$$

Рассмотрим теперь динамику в $N+1$-мерном пространстве PH импульса — энергии. Координатами в нем являются y_r, где

$$y_\rho = p_\rho, \quad y_{N+1} = -H. \tag{79.2}$$

Начиная развивать теорию, предположим, что имеет место уравнение энергии

$$\Omega(x, y) = 0 \tag{79.3}$$

или, что то же самое, уравнение

$$H = H(q, t, p), \tag{79.4}$$

если разрешить уравнение (79.3) относительно y_{N+1}. Для произвольной кривой Г в пространстве PH, заданной уравнениями $y_r = y_r(u)$, определим новый тип действия как интеграл

$$\widetilde{A} = \int x_r \, dy_r, \tag{79.5}$$

где величины $x_r(u)$ должны удовлетворять уравнению (79.3), а в остальном произвольны. Записывая это

[1] Обозначения см. в § 62.

уравнение в эквивалентном виде

$$\tilde{A} = \int (q_\rho \, dp_\rho - t dH), \tag{79.6}$$

и варьируя Г, получаем следующее выражение:

$$\delta\tilde{A} = [x_r \, \delta y_r] + \int (\delta x_r \, dy_r - \delta y_r \, dx_r). \tag{79.7}$$

Если концевые точки Г закреплены (т. е. граничные значения y_r постоянны), то вариационное уравнение

$$\delta\tilde{A} = \delta \int x_r \, dy_r = 0 \tag{79.8}$$

вместе с условием (79.3) сразу приводит к каноническим уравнениям

$$\frac{dx_r}{dw} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_r}, \qquad \frac{dy_r}{dw} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x_r}, \tag{79.9}$$

при некотором параметре w. Эти уравнения совпадают с уравнениями (68.7) и можно, как и прежде, называть кривые, удовлетворяющие им, лучами или траекториями.

Тогда очевидно, что динамика в пространстве *PH* основана на уравнении энергии (79.3) и вариационном уравнении (79.8), так же как динамика в пространстве *QT* основана на том же уравнении энергии и на принципе Гамильтона (68.5), т. е. на уравнении

$$\delta A = \delta \int y_r \, dx_r = 0 \tag{79.10}$$

при закрепленных концевых точках в пространстве *QT*. Два действия связаны соотношением

$$A + \tilde{A} = \int y_r \, dx_r + \int x_r \, dy_r = x_r y_r - x_r^* y_r^*, \tag{79.11}$$

где (x^*, y^*) относятся к начальной точке, а (x, y) — к конечной. В пространстве *QT* мы считаем x_r текущими координатами некоторой кривой, а y_r — соотнесенным этой кривой векторным полем; в пространстве *PH* они меняются ролями. Между двумя этими представлениями существует формальное сходство. Мы могли бы, например, использовать приемы § 69 для того, чтобы определить «однородный лагранжиан» в PH как функцию величин y и y' (где $y'_r = dy_r/du$ и перейти к «обыкновенному лагранжиану», т. е. к функции переменных p_ρ, H и dp_ρ/dH.

Введем теперь в PH характеристическую функцию в пространстве импульса — энергии[1]) $W(C^*, C)$, определенную следующим образом:

$$W(C\ , C) = \int x_r\, dy_r; \tag{79.12}$$

интеграл берется вдоль луча или траектории, соединяющей точки C^* и C пространства PH. Варьируя эти концевые точки, получаем из уравнения (79.7)

$$\delta W = x_r\, \delta y_r - x_r^* \delta y_r^*. \tag{79.13}$$

Если вариации δy_r и δy_r^* можно взять произвольными (т. е. если существуют лучи, соединяющие произвольно варьируемые точки C^* и C), то справедливы уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial y_r} = x_r, \qquad \frac{\partial W}{\partial y_r^*} = -x_r^*, \tag{79.14}$$

и отсюда, согласно уравнению (79.3), $W(y^*, y)$ удовлетворяет дифференциальным уравнениям в частных производных

$$\Omega\left(\frac{\partial W}{\partial y}, y\right) = 0, \qquad \Omega\left(-\frac{\partial W}{\partial y^*}, y^*\right) = 0. \tag{79.15}$$

Значения x_r^* и x_r определяют луч или траекторию, а поэтому они определяют и y_r^*, и y_r; наоборот, значения y_r^* и y_r, вообще говоря, определяют луч или траекторию, а отсюда и x_r^*, и x_r. Соотношение между двухточечной характеристической функцией $S(x^*, x)$ и характеристической функцией импульса — энергии $W(y^*, y)$ выра-

[1]) В оптике это — гамильтонова T-функция, известная также под названием угловой характеристической функции и углового эйконала. Она является основой теории аберрации оптических инструментов. Здесь она обозначена через W для того, чтобы не спутать ее с кинетической энергией.

жается следующим уравнением:

$$W(y^*, y) + S(x^*, x) = x_r y_r - x_r^* y_r^*. \tag{79.16}$$

Кроме этих двух характеристических функций, существуют еще две *смешанные характеристические функции*

$$F(x^*, y) = S(x^*, x) - x_r y_r, \tag{79.17}$$

$$G(x, y^*) = S(x^*, x) + x_r^* y_r^*. \tag{79.18}$$

Если допустимы произвольные вариации, то имеем уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial x_r^*} = -y_r^*, \qquad \frac{\partial F}{\partial y_r} = -x_r, \tag{79.19}$$

и

$$\frac{\partial G}{\partial x_r} = y_r, \qquad \frac{\partial G}{\partial y_r^*} = x_r^*. \tag{79.20}$$

§ 80. Столкновения. Следуя (79.13), предполагалось, что точкам C^* и C можно придавать произвольные смещения δy_r^* и δy_r в пространстве PH, однако существуют важные частные случаи, в которых этого нельзя делать. Рассмотрим в пространстве QT луч или траекторию Γ, соединяющую точки B^* и B (рис. 38). Предполагаем, что в области $M^* \in QT$, содержащей точку B^*, функция $\Omega(x, y)$ не зависит от первой группы аргументов, т. е. от x, и что то же имеет место в области M, содержащей точку B. Напишем затем уравнение энергии

$$\Omega^*(y^*) = 0 \quad \text{в} \quad M^*, \qquad \Omega(y) = 0 \quad \text{в} \quad M. \tag{80.1}$$

Согласно (79.9) все y постоянны вдоль луча в области M^* или в M; действительно, луч есть прямая линия в каждой из этих областей пространства QT. Тогда из уравнений (80.1) ясно, что переменным y_r^* и y_r нельзя придавать произвольные вариации.

Решая уравнения (80.1), получаем

$$y_{N+1}^* = -\omega^*(y_1^*, \ldots, y_N^*), \quad y_{N+1} = -\omega(y_1, \ldots, y_N) \tag{80.2}$$

или, соответственно,

$$H^* = H^*(p^*), \qquad H = H(p). \tag{80.3}$$

В самом деле, мы рассматриваем систему, для которой в начальной и конечной точках гамильтонова функция зависит только от импульсов, как это, например, имеет место в случае свободной частицы или системы свободных частиц, не

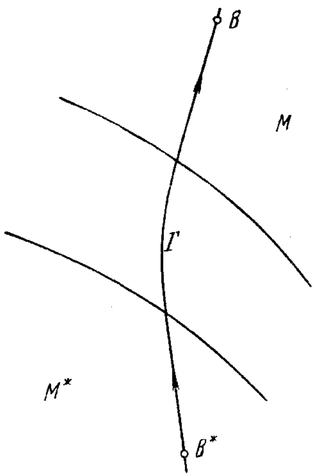


Рис. 38. Луч или траектория в пространстве событий QT с прямолинейными начальными и конечными участками.

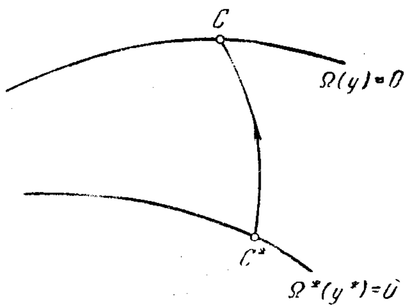


Рис. 39. Столкновение, рассматриваемое в пространстве PH. В начале мы имеем фиксированную точку C^*, а в конце — фиксированную точку C.

взаимодействующих друг с другом. Уравнение (79.13) дает затем следующее выражение:

$$\delta W = \left(x_\rho - x_{N+1}\frac{\partial\omega}{\partial y_\rho}\right)\delta y_\rho - \left(x^*_\rho - x^*_{N+1}\frac{\partial\omega}{\partial y^*_\rho}\right)\delta y^*_\rho, \tag{80.4}$$

которое показывает, что W зависит только от $2N$ величин y_ρ, y^*_ρ. В других обозначениях уравнение (80.4) имеет вид

$$\delta W = \left(q_\rho - t\frac{\partial H}{\partial p_\rho}\right)\delta p_\rho - \left(q^*_\rho - t^*\frac{\partial H^*}{\partial p^*_\rho}\right)\delta p^*_\rho, \tag{80.5}$$

т. е. W — функция только импульсов p_ρ, p_ρ^*. При таких обстоятельствах W должна рассматриваться как произвольная функция своих $2N$ аргументов, и не требуется, чтобы она удовлетворяла какому бы то ни было дифференциальному уравнению в частных производных вида (79.15). Так как переменным p_ρ, p_ρ^* можно придавать произвольные независимые вариации, то уравнение (80.5) дает следующую систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial p_\rho^*} &= -q_\rho^* + t^* \frac{\partial H}{\partial p_\rho^*}, \\ \frac{\partial W}{\partial p_\rho} &= q_\rho - t\frac{\partial H}{\partial p_\rho}. \end{aligned}\right\} \tag{80.6}$$

Если считать функцию W заданной, то эти уравнения определяют начальный и конечный луч или траекторию; импульсы p_ρ, p_ρ^* имеют постоянные значения вследствие канонических уравнений (79.9). Когда мы рассматриваем задачу в пространстве QT, эти начальный и конечный лучи являются прямыми линиями. Когда имеем задачу в PH, это просто две *точки*, каждая из которых лежит на некоторой N-мерной поверхности, заданной уравнениями (80.1) или (80.3) (рис. 39).

Рассмотрим теперь столкновение системы n частиц, взаимодействующих друг с другом (именно этот случай имеет место в кинетической теории газов). Обобщенные силы можно получить дифференцированием потенциальной функции или из обобщенной потенциальной функции и, следовательно, в этом случае столкновение описывается гамильтоновой динамикой. Обозначим через $m_1 = m_2 = m_3$ массу первой частицы, а через q_1, q_2, q_3 — ее прямоугольные декартовы координаты; через $m_4 = m_5 = m_6$ обозначим массу второй частицы, через q_4, q_5, q_6 — ее координаты и т. д. Тогда лагранжева функция имеет вид

$$L = \frac{1}{2}\sum_{A=1}^{N} m_A \dot{q}_A^2 - V(q, \dot{q}), \tag{80.7}$$

где $N = 3n$. Мы предполагаем, что V — функция положений и, может быть, скоростей частиц, обращающаяся в нуль, когда расстояние между частицами стремится к бесконечности.

Пусть вначале частицы находятся бесконечно далеко друг от друга, а затем начинают сближаться, взаимодействуют и, наконец, снова удаляются на бесконечное расстояние. Чтобы избежать затруднения с пределами $t \to \pm\infty$, предположим, что взаимодействие полностью отсутствует при $t < t_0^*$ и $t > t_0$ и может начинаться и прекращаться так, постепенно как мы этого пожелаем. Это означает, что мы должны изменить функцию (80.7), а именно: написать $U(q, t, \dot{q})$ вместо $V(q, \dot{q})$, понимая при этом, что $V = 0$ для всех t, кроме $t_0^* < t < t_0$. Тогда имеем следующее уравнение энергии для начального и конечного положений:

$$\left.\begin{aligned} H^* &= \frac{1}{2}\sum_{A=1}^{N} m_A^{-1} p_A^{*2} \quad \text{для} \quad t^* < t_0^*, \\ H &= \frac{1}{2}\sum_{A=1}^{N} m_A^{-1} p_A^{2} \quad \text{для} \quad t > t_0. \end{aligned}\right\} \tag{80.8}$$

Мы можем теперь описать явление любого возможного столкновения в гамильтоновой динамике с помощью одной-единственной функции W, зависящей от следующих аргументов:

$$\overset{*}{p}_1, \ldots, \overset{*}{p}_N, p_1, \ldots, p_N. \tag{80.9}$$

Это означает, что если задана такая характеристическая функция, то начальная и конечная траектории определяются уравнениями (80.6), величины (80.9) имеют произвольные постоянные значения, а функции H^*, H имеют вид (80.8).

Функция W не является совершенно произвольной, так как мы предполагаем, что имеет место аксиома однородности и изотропности ньютоновой динамики (§ 5). Если $\boldsymbol{p}^{*(1)}, \ldots, \boldsymbol{p}^{*(n)}$ — векторы импульсов (в обычном пространстве) индивидуальных частиц перед столкновением, а $\boldsymbol{p}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{p}^{(n)}$ — векторы импульсов после столкновения, то $6n$ компонент этих векторов могут входить в W только в форме, инвариантной относительно жестких перемещений твердого тела. Таким образом, если существуют только две частицы, то W должна быть функцией девяти скалярных произведений или эквивалентной совокупности аргументов

$$\left.\begin{array}{c} \boldsymbol{p}^{(1)}\cdot\boldsymbol{p}^{(1)}, \quad \boldsymbol{p}^{(1)}\cdot\boldsymbol{p}^{(2)}, \quad \boldsymbol{p}^{(2)}\cdot\boldsymbol{p}^{(2)}, \\ \boldsymbol{p}^{*(1)}\cdot\boldsymbol{p}^{*(1)}, \quad \boldsymbol{p}^{*(1)}\cdot\boldsymbol{p}^{*(2)}, \quad \boldsymbol{p}^{*(2)}\cdot\boldsymbol{p}^{*(2)}, \\ \boldsymbol{p}^{(1)}\cdot\boldsymbol{p}^{*(1)}, \quad \boldsymbol{p}^{(2)}\cdot\boldsymbol{p}^{*(2)}, \\ \boldsymbol{p}^{(1)}\cdot\boldsymbol{p}^{*(2)}+\boldsymbol{p}^{(2)}\cdot\boldsymbol{p}^{*(1)}; \end{array}\right\} \tag{80.10}$$

последние два произведения представлены суммой ради симметрии.

ГЛАВА IV

ПРОСТРАНСТВО КОНФИГУРАЦИЙ (Q)[1]

§ 81. Интерпретация динамики в пространстве Q. Лучи и волны в когерентной системе[2]). Пространство конфигураций Q, в котором координатами изображающей точки являются N обобщенных координат q_ρ динамической системы, дает ее наиболее естественное геометрическое представление. Если система состоит из одной частицы, то изображающая точка в пространстве Q совпадает с положением частицы в обычном пространстве. Всему, что сказано в гл. Д II о динамике в пространстве QT, можно дать интерпретацию и в Q. Луч или траектория (которые были некоторой кривой в QT) появляются в Q как движущаяся точка; время t здесь является только параметром, но не координатой; координаты q_ρ и сопряженные им импульсы p_ρ удовлетворяют каноническим уравнениям

$$\dot{q}_\rho = \frac{\partial H}{\partial p_\rho}, \quad \dot{p}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial q_\rho}. \tag{81.1}$$

Однако хотя пространство Q может показаться более наглядным, чем пространство QT, волны постоянного действия для когерентной системы, рассмотренные в § 75, представляются в пространстве конфигураций более сложной движущейся картиной. В пространстве QT лучи

---

1) Это пространство часто называют q-пространством.

2) См. Леви-Чивита и Амальди, цит. соч. в § 76. Некоторые интересные общие замечания относительно волновой механики см. Levi-Civita T., Bull. Amer. Math. Soc. 39, 535—563 (1933).

или траектории — это неподвижные кривые; волны — неподвижные N-мерные поверхности, как показано на рис. 35 (стр. 246). В пространстве Q первые представляют собой движущиеся точки, а последние — N—1-мерные движущиеся поверхности с уравнениями

$$U(q, t) = \text{const}, \quad (81.2)$$

где U — одноточечная характеристическая функция. На рис. 40 Г есть луч или траектория, а DD' — положения изображающей точки на нем соответственно в моменты t, $t + dt$. W — волна, которая проходит через точку D в момент t, а W' — та же самая волна в момент $t + dt$. Необходимо отметить, что, вообще говоря, точка D' не лежит на W'; другими словами, *изображающая точка не переносится поверхностью волны.*

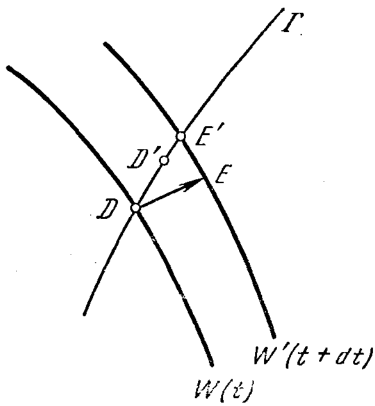


Рис. 40. Луч или траектория Г в Q и движущаяся волна постоянного действия — лагранжева или гамильтонова. За время dt перемещение вдоль луча равно DD', а перемещение волны — DE'.

Для того чтобы исследовать соотношение между скоростью изображающей точки (лучевой скоростью) и скоростью волны (волновой скоростью), заметим, во-первых, что лучевая скорость равна $\dot{q}_\rho$, но что для общей гамильтоновой динамической системы не существует метода, с помощью которого можно было бы превратить этот контравариантный вектор в инвариантную величину скорости. Для того чтобы исследовать волновую скорость, берем точку E на поверхности W', близкую к точке D, и обозначим смещение DE через δq_ρ. Так как речь идет об одной движущейся волне, то согласно (81.2) имеем уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial q_\rho}\,\delta q_\rho + \frac{\partial U}{\partial t}\,dt = 0 \quad (81.3)$$

или, принимая во внимание (74.9), уравнение

$$p_\rho\,\delta q_\rho - H\,dt = 0. \tag{81.4}$$

Следуя обычному методу нахождения волновой скорости, нужно взять перемещение δq_ρ вдоль нормали к волне W в точке D. Как известно, существует нормаль, определенная производной $\partial U/\partial q_\rho (= p_\rho)$, однако это — ковариантный вектор, в то время как δq_ρ— контравариантный. Поэтому, не умаляя общности динамической теории, нельзя (ни в каком инвариантном смысле) говорить о них как об имеющих одно и то же направление. Лучшее что мы можем сделать, это взять δq_ρ вдоль луча (так чтобы E совпало с E' на рис. 40), следовательно, будет иметь место уравнение

$$R\delta q_\rho = dq_\rho = \dot{q}_\rho\,dt, \qquad (81.5$$

где множитель пропорциональности R может быть представлен с помощью следующего отношения:

$$R = \frac{\text{лучевая скорость}}{\text{волновая скорость, измеренная вдоль луча}}. \tag{81.6}$$

Умножая уравнение (81.5) на p_ρ и принимая во внимание (81.4), получаем уравнение

$$R = \frac{p_\rho \dot{q}_\rho}{H} = \frac{p_\rho}{H}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_\rho}. \qquad (81.\ )$$

Наше изложение до сих пор имело максимальную общность. Рассмотрим теперь обыкновенную динамическую систему[1]) (ОДС) § 66 и 70; имеем для нее

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\,a_{\rho\sigma}\dot{q}_\rho\dot{q}_\sigma, \qquad L = T - V(q),\\ H &= \frac{1}{2}\,a^{\rho\sigma}p_\rho p_\sigma + V. \end{aligned}\right\} \tag{81.8}$$

---

[1]) Существенное требование здесь — тензорный характер $a_{\rho\sigma}$; это имеет место также в случае реономной системы (ср. с (27.2)). В последнем случае необходимо некоторое небольшое изменение формулируемых положений.

Тензор $a_{\rho\sigma}$ позволяет ввести инвариантный кинематический линейный элемент ds в пространстве Q, определенный следующим образом[1]):

$$ds^2 = a_{\rho\sigma}\, dq_\rho\, dq_\sigma. \tag{81.9}$$

Естественно определить абсолютную величину лучевой скорости следующим образом:

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = a_{\rho\sigma}\dot{q}^\rho \dot{q}_\sigma = 2T = 2(E - V), \tag{81.10}$$

где E — постоянная[2]) полная энергия ($E = H = T + V$). Если воспользоваться метрикой (81.9), то волна W имеет контравариантную единичную нормаль n^ρ, определяемую формулами

$$n^\rho = \frac{a^{\rho\sigma}\dfrac{\partial U}{\partial q_\rho}}{\sqrt{a^{\mu\nu}\dfrac{\partial U}{\partial q_\mu}\dfrac{\partial U}{\partial q_\nu}}} =$$

$$= \frac{a^{\rho\sigma}p_\sigma}{\sqrt{a^{\mu\nu}p_\mu p_\nu}} = \frac{a^{\rho\sigma}p_\sigma}{\sqrt{2T}} = \frac{a^{\rho\sigma}p_\sigma}{\sqrt{2(E-V)}}. \tag{81.11}$$

Для того чтобы найти нормальную скорость распространения волны, возьмем точку E на нормали к W и D, так что

$$\delta q_\rho = a^{\rho\sigma}p_\sigma\, d\vartheta, \tag{81.12}$$

---

1) Этот кинематический линейный элемент более полно обсуждается в § 84.

2) Постоянная для луча или траектории Г; нет необходимости полагать E повсюду постоянным для когерентной системы. Вывод формулы (81.14) для волновой скорости из уравнения Гамильтона — Якоби см. Э. Шредингер, Квантование как задача о собственных значениях (2-е сообщение), в сб. Вариационные принципы механики, стр. 679—704. См. также Brillouin L., Les Tenseurs en mécanique et en élasticité, гл. VIII (Paris, Masson, 1938), и Голдстейн [7], стр. 330.

где $d\vartheta$ — бесконечно малый множитель, и уравнение (81.4) дает следующее соотношение:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{H}{a^{\rho\sigma}p_\rho p_\sigma}. \tag{81.13}$$

Отсюда нормальная скорость u волны определяется выражениями

$$\dot{u}^2 \frac{a_{\rho\sigma}\delta q_\rho \delta q_\sigma}{dt^2} = a^{\rho\sigma}p_\rho p_\sigma \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 =$$

$$= \frac{H^2}{a^{\rho\sigma}p_\rho p_\sigma} = \frac{H^2}{2(H-V)} = \frac{E^2}{2(E-V)}. \tag{81.14}$$

§ 82. Изоэнергетическая динамика в пространстве Q и ее отношение к общей динамике в QT. Рассмотрим консервативную динамическую систему; время t не входит явно в гамильтониан, так что имеем

$$H = H(q, p). \tag{82.1}$$

Тогда вдоль любой траектории выполняется уравнение

$$H(q, p) = E. \tag{82.2}$$

Будем называть E *полной энергией*, так как E имеет точно этот смысл в обыкновенных динамических системах.

Будем изучать *изоэнергетическую динамику* (ср. § 62) в пространстве Q; под изоэнергетической динамикой мы понимаем, что $E = \text{const}$ не только вдоль каждой траектории, но и для всей системы рассматриваемых траекторий, а также и для тех варьированных кривых, которые придется ввести в ходе исследования. Итак, E — постоянная величина в изоэнергетической динамике.

Пусть E — заданное число, и пусть мы начинаем рассматривать систему в точке D^* пространства Q в момент t^* и с некоторыми начальными импульсами, удовлетворяющими условию (82.2). Пусть Γ — кривая, описанная точкой в пространстве Q в соответствии с уравнениями движения. Затем, если D — положение изображающей точки на Γ в момент времени t, то гамильтоново действие от точки D^* до точки D согласно (68.1) равно

$$A_H(\Gamma) = \int\limits_{\Gamma} (p_\rho \, dq_\rho - H \, dt) = \int\limits_{\Gamma} p_\rho \, dq_\rho - (t - t^*) E. \qquad (82.3)$$

Рассмотрим какую-нибудь близкую кривую Γ_1, соединяющую точки D^* и D, описанную в тот же интервал времени (t^*, t) и имеющую соотнесенное ей векторное поле p_ρ, удовлетворяющее уравнению (82.2) и почти такое же, как соответствующее векторное поле для Γ. Тогда

$$A_H(\Gamma_1) = \int\limits_{\Gamma_1} p_\rho \, dq_\rho - (t - \overset{*}{t}) E$$

и отсюда

$$\delta A_H = A_H(\Gamma_1) - A_H(\Gamma) = \delta \int p_\rho \, dq_\rho .$$

Но согласно принципу Гамильтона (68.12) имеем $\delta A_H = 0$, поэтому траектория в пространстве Q удовлетворяет (безотносительно ко времени t) следующему вариационному уравнению и условию:

$$\delta \int p_\rho \, dq_\rho = 0, \qquad H(q, p) - E = 0; \qquad (82.4)$$

при этом концевые точки в пространстве Q закреплены.

Если сравнить теперь эту изоэнергетическую динамику в Q с общей динамикой в QT, основанной на вариационном уравнении (68.5), т. е. на

$$\delta \int y_r \, dx_r = 0, \qquad \Omega(x, y) = 0, \qquad (82.5)$$

то увидим полную тождественность двух динамик, за исключением тривиальных различий в размерности: N — для случая (82.4) и $N + 1$ — для (82.5). Переход от одной динамики к другой осуществляется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x_r \to q_\rho, \qquad y_r \to p_\rho, \\ \Omega(x, y) = 0 \to H(q, p) - E = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (82.6)$$

Вся теория, развитая в гл. Д II для общей динамики в пространстве QT, сохраняется для изоэнергетической динамики в пространстве Q; некоторые аспекты ее мы обсудим в § 83.

Заметим, что время t исчезло из уравнений (82.4), так что если мы не используем ничего, кроме них, то трудно ожидать, что в дальнейшем время вновь появится в уравнениях. Однако дело обстоит именно так. В самом деле, если применить к уравнениям (82.4) метод, с помощью которого мы находили экстремали уравнения (68.5), то получаем уравнения

$$\frac{dq_\rho}{dw} = \frac{\partial H}{\partial p_\rho}, \qquad \frac{dp_\rho}{dw} = -\frac{\partial H}{\partial q_\rho}, \tag{82.7}$$

где w — некоторый специальный параметр. Однако мы знаем, что траектории удовлетворяют каноническим уравнениям (68.16), т. е. уравнениям

$$\frac{dq_\rho}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\rho}, \qquad \frac{dp_\rho}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\rho}. \tag{82.8}$$

Сравнивая их с уравнениями (82.7), видим, что хотя мы исключили время t, оно войдет как специальный параметр в канонические дифференциальные уравнения, выведенные из (82.4).

Если мы решили динамическую проблему в пространстве Q, получив некоторую кривую и поле импульсов вдоль нее, то можно использовать какое-нибудь одно из уравнений системы (82.8) для того, чтобы найти время t; но можно для этой цели вывести и новое уравнение, например уравнение

$$dt = \frac{p_\rho \, dq_\rho}{p_\sigma \, \partial H / \partial p_\sigma}. \tag{82.9}$$

Имеется другой путь нахождения времени движения в изоэнергетической динамике, который, однако, может быть причиной немалой путаницы. Согласно этому методу каждой варьированной кривой ставится в соответствие параметр t следующим образом. Пусть дано некоторое произвольное движение $q_\rho = q_\rho(t)$, вообще говоря, не удовлетворяющее каноническим уравнениям (82.8), а естественный импульс (ср. (71.11)) $p_\rho(t)$ пусть задан в виде

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho}, \tag{82.10}$$

где L — лагранжева функция. Подбирая параметр t, можно добиться, чтобы удовлетворялось уравнение $H(q, p) = E$; тогда можно записать вариационное уравнение (82.4) в более ограниченной форме, именно,

$$\delta \int \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} \dot{q}_\rho \, dt = 0, \quad H\left(q, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - E = 0, \tag{82.11}$$

при варьировании концевые точки закреплены в Q, но не закреплены во времени, причем время t на каждой кривой получается из второго уравнения (82.11). Это вариационное уравнение является более узким, чем (82.4), потому что равенства (82.10) накладывают более жесткие ограничения, чем уравнение $H(q, p) = E$. Видимо, все же будет меньше сомнений, если использовать более общее уравнение (82.4) и определять время только на траекториях с помощью уравнения (82.9) или каким-нибудь эквивалентным способом.

§ 83. Действие Мопертюи. Двухточечная характеристическая функция для изоэнергетической системы. Однородный лагранжиан. Принцип наименьшего действия Якоби. Определим действие Мопертюи[1]) в изоэнергетической динамике в пространстве Q следующим

---

[1]) Хотя интеграл $\bar{A}$ вида (83.1), (83.3) или (83.4) принято называть одним словом «действие» (ср. Уиттекер [28], стр. 277; Голдстейн [7], стр. 253, 254), кажется целесообразным иметь какое-то прилагательное, чтобы отличать этот интеграл от лагранжева или гамильтонова действия; § 64, 68. Обычно с интегралом $\bar{A}$ (в частности в форме (83.4) или в форме $m \int v \, ds$ для одной частицы) связывают имя Мопертюи. Будем употреблять этот термин, хотя, может быть, исторически справедливо было бы назвать этот интеграл «действием Эйлера»; ср. Dugas, цит. соч., § 1, стр. 250—264.

образом:

$$\bar{A} = \int p_\rho \, dq_\rho, \tag{83.1}$$

где переменные p и q удовлетворяют уравнению энергии

$$H(q, p) = E. \tag{83.2}$$

Если, кроме того, ограничиться только естественными импульсами p_ρ вида (82.10), то будем иметь уравнение

$$\bar{A} = \int \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} \dot{q}_\rho \, dt. \tag{83.3}$$

Для системы ОДС при условиях (81.8) имеем

$$\bar{A} = 2 \int T \, dt. \tag{83.4}$$

Продолжая аналогию с общей гамильтоновой динамикой в пространстве QT, определим в изоэнергетической динамике в Q двухточечную характеристическую функцию следующим образом:

$$\bar{S}(D^*, D) = \int p_\rho \, dq_\rho, \tag{83.5}$$

где интеграл берется вдоль луча или траектории, соединяющей точки D^* и D. Вариация концевых точек дает уравнение

$$\delta \bar{S} = p_\rho \delta q_\rho - p_\rho^* \delta q_\rho^* . \tag{83.6}$$

Отсюда, если допустимы произвольные вариации (как это имеет место в общем случае), получим систему

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial q_\rho} = p_\rho, \qquad \frac{\partial \bar{S}}{\partial q_\rho^*} = -p_\rho^* . \tag{83.7}$$

Из уравнения (83.2) следует, что S удовлетворяет двум уравнениям в частных производных:

$$H\left(q, \frac{\partial \bar{S}}{\partial q}\right) = E, \qquad H\left(q^*, -\frac{\partial \bar{S}}{\partial q^*}\right) = E. \tag{83.8}$$

Это уравнение Гамильтона — Якоби в форме (78.2).

В изоэнергетической динамике в пространстве Q, в которой время исключено, когерентная система лучей или траекторий представляет собой семейство неподвижных кривых, а соответствующие им волны — семейства неподвижных поверхностей, причем две волны отстоят одна от другой на постоянную величину действия Мопертюи.

Так же как в пространстве QT можно с помощью уравнений (69.14) перейти от уравнения энергии $\Omega(x, y) = 0$ к однородному лагранжиану $\Lambda(x, x')$, так в изоэнергетической динамике можно найти однородный лагранжиан $\bar{\Lambda}(q, q')$ (где $q'_\rho = dq_\rho/du$, а u — любой параметр), исключив ϑ и p_ρ из $N + 2$ уравнений

$$q'_\rho = \vartheta \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_\rho}, \quad \bar{\Lambda} = p_\rho q'_\rho, \quad H(q, p) - E = 0. \tag{83.9}$$

Лучи или траектории в пространстве Q удовлетворяют вариационному уравнению

$$\delta \int \bar{\Lambda}(q, q')\, du = 0, \tag{83.10}$$

при закрепленных концевых точках в Q.

Проведем эти рассуждения для системы с лагранжевой функцией

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} a_{\rho\sigma}\dot{q}_\rho \dot{q}_\sigma + a_\rho \dot{q}_\rho - V, \tag{83.11}$$

где $a_{\rho\sigma}\,(=a_{\sigma\rho})$, a_ρ и V зависят только от переменных q. (Это немного более общий случай, чем ОДС в § 66 и (81.8), где $a_\rho = 0$.) Прежде всего находим гамильтонову функцию следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} p_\rho &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} = a_{\rho\sigma}\dot{q}_\sigma + a_\rho, \qquad \dot{q}_\rho = a^{\rho\sigma}(p_\sigma - a_\sigma), \\ H(q, p) &= \dot{q}_\rho \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} - L = \frac{1}{2} a_{\rho\sigma}\dot{q}_\rho \dot{q}_\sigma + V = \\ &= \frac{1}{2} a^{\rho\sigma}(p_\rho - a_\rho)(p_\sigma - a_\sigma) + V. \end{aligned}\right\} \tag{83.12}$$

Далее, согласно (83.9), получаем следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} q'_\rho &= \vartheta a^{\rho\sigma}(p_\sigma - a_\sigma), \qquad p_\rho = a_\rho = \vartheta^{-1} a_{\rho\sigma} q'_\sigma, \\ H(q, p) - E &= \frac{1}{2}\vartheta^{-2} a_{\rho\sigma} q'_\rho q'_\sigma + V - E = 0, \\ \vartheta^2 &= \frac{\frac{1}{2} a_{\rho\sigma} q'_\rho q'_\sigma}{E - V}, \\ \overline{\Lambda} &= p_\rho q'_\rho = q'_\rho(\vartheta^{-1} a_{\rho\sigma} q'_\sigma + a_\rho). \end{aligned}\right\} \quad (83.13)$$

Таким образом, получаем однородный лагранжиан для изоэнергетической динамики в пространстве Q:

$$\overline{\Lambda}(q, q') = \sqrt{2(E - V)}\sqrt{a_{\rho\sigma} q'_\rho q'_\sigma} + a_\rho q'_\rho. \quad (83.14)$$

Вариационное уравнение (83.10) можно записать в виде

$$\delta \int \left(\sqrt{2(E - V)}\sqrt{a_{\rho\sigma}\, dq_\rho\, dq_\sigma} + a_\rho\, dq_\rho\right) = 0. \quad (83.15)$$

Если положить $a_\rho = 0$, так что система становится ОДС, и использовать кинематический линейный элемент (81.9), то уравнение принимает следующий вид:

$$\delta \int \sqrt{(E - V)}\, ds = 0. \quad (83.16)$$

Это уравнение известно как принцип наименьшего действия Якоби[1]).

---

[1]) Другие выводы этого принципа см. Аппель [2], 11, стр. 388—392; Голдстейн [7], стр. 253—254. Написанный в эквивалентной форме $\delta \int T\, dt = 0$ при условии $\delta E = 0$, принцип называется иногда принципом Гёльдера. Этот принцип и принцип Гамильтона оба содержатся в принципе $\delta \int (2T - \lambda E)\, dt = 0$ при условии $\delta (E^{\lambda-1}\, dt^\lambda) = 0$, где λ — произвольная постоянная; ср. Storchi E., Atti Acead. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis.-Mat. Nat. [8] 14, 771—778 (1953).

Его можно интерпретировать геометрически, сказав, что траектории являются геодезическими в пространстве Q, если в нем задан риманов линейный элемент

$$ds_1^2 = (E - V)\, ds^2 = (E - V)\, a_{\rho\sigma}\, dq_\rho\, dq_\sigma, \qquad (83.17)$$

который можно назвать *линейным элементом действия*. Эта метрика обладает особенностью при $V = E$, которая соответствует состоянию мгновенного покоя системы, так как $V = E$ заключает в себе $T = 0$.

§ 84. Кинематический линейный элемент. В этом и следующих параграфах мы временно оставляем гамильтонову динамику. Рассмотрим динамическую систему с кинетической энергией

$$T = \frac{1}{2}\, g_{\rho\sigma}\dot{q}^\rho \dot{q}^\sigma. \qquad (84.1)$$

Так как все рассуждения проводятся с помощью тензорного исчисления, то лучше обозначить координаты через q^ρ (нежели через q_ρ), так как dq^ρ — контравариантный вектор. Мы представляем систему точкой в пространстве Q, в котором задан кинематический линейный элемент[1])

$$ds^2 = 2T\, dt^2 = g_{\rho\sigma}\, dq^\rho\, dq^\sigma, \qquad (84.2)$$

который мы уже вводили в (81.9). (Здесь a заменены на g для того, чтобы не было путаницы с ускорением.)

Прежде чем вводить силы, рассмотрим кинематическую сторону проблемы. Любое движение $q^\rho = q^\rho(t)$ определяет кривую в пространстве Q, и в каждой точке кривой — контравариантный *вектор скорости*

$$v^\rho = \dot{q}^\rho, \qquad (84.3)$$

который можно написать в виде

$$v^\rho = v\lambda^\rho, \qquad (84.4)$$

где

$$\lambda^\rho = \frac{dq^\rho}{ds} \qquad (84.5)$$

---

[1]) Это почти линейный элемент Герца (стр. 78, 84. Цит. в § 61); он делит этот линейный элемент на полную массу системы, с тем чтобы ds имел размерность длины.

— единичный вектор касательной к кривой. Имеется также контравариантный *вектор ускорения*

$$a^\rho = \frac{\delta v^\rho}{\delta t}, \tag{84.6}$$

который равен абсолютной производной скорости v^ρ; абсолютная производная векторного поля $V^\rho(u)$ вдоль кривой $q^\rho(u)$ равна следующему выражению[1]:

$$\frac{\delta V^\rho}{\delta u} = \frac{dV^\rho}{du} + \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} V^\mu \frac{dq^\nu}{du}. \tag{84.7}$$

Подставляя значение скорости (84.4) в (84.6), получаем

$$a^\rho = \dot{v}\lambda^\rho + \varkappa v^2 \nu^\rho = v \frac{dv}{ds} \lambda^\rho + \varkappa v^2 \nu^\rho, \tag{84.8}$$

где ν^ρ — единичный вектор главной нормали к кривой движения и $\varkappa$ — кривизна[2], определенная формулами

$$\frac{\delta \lambda^\rho}{\delta s} = \varkappa \nu^\rho, \qquad g_{\rho\sigma} \nu^\rho \nu^\sigma = 1, \qquad \varkappa \geqslant 0. \tag{84.9}$$

Таким образом, ускорение изображающей точки можно разложить по касательной и главной нормали и прийти к выражениям, аналогичным формуле (18.2) для движущейся частицы.

Так как мы имеем фундаментальный тензор $g_{\rho\sigma}$ в пространстве Q и контравариантный сопряженный ему тензор $g^{\rho\sigma}$, то можно перейти от контравариантных компонент к ковариантным и обратно. Ковариантное ускорение выражается следующей формулой:

$$a_\rho = g_{\rho\sigma} a^\sigma = \frac{\delta v_\rho}{\delta t} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\rho} - \frac{\partial T}{\partial q^\rho}. \tag{84.10}$$

Переходя от кинематики к динамике, мы вводим обоб-

---

[1] Дополнительные детали об абсолютных производных см. Synge J. L. and Schild A., Tensor calculus, стр. 47—51, Toronto, 1952. О символах Кристоффеля см. (18.4).

[2] Можно назвать ее *геометрической* кривизной, в отличие от *динамической* кривизны § 85. С точностью до постоянного множителя $\varkappa$ равна кривизне Герца; ср. Герц, цит. соч. в § 61, стр. 89—93.

щенную силу Q_ρ, ковариантный вектор которой определен следующим образом:

$$Q_\rho \delta q^\rho = \delta W, \tag{84.11}$$

где δW — работа, произведенная при перемещении δq^ρ (δW есть инвариант). Лагранжевы уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\rho} - \frac{\partial T}{\partial q^\rho} = Q_\rho, \tag{84.12}$$

и могут быть переписаны в виде

$$a_\rho = Q_\rho \quad \text{или} \quad a^\rho = Q^\rho, \tag{84.13}$$

где Q^ρ — ковариантный вектор силы. Выраженные словами, эти уравнения означают: ускорение = силе[1]. Нужно заметить, что в то время как физические размерности отдельных компонент вектора зависят от выбора координат, величина v вектора скорости имеет размерность $\left[M^{\frac{1}{2}} LT^{-2}\right]$, а величина a вектора ускорения имеет размерность $\left[M^{\frac{1}{2}} LT^{-2}\right]$.

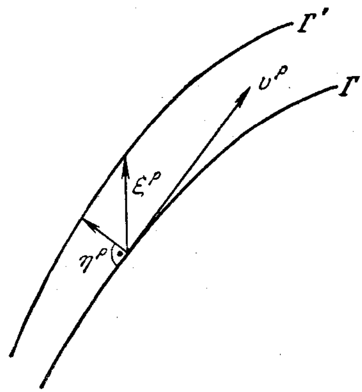


Рис. 41. Девиация траектории в пространстве Q с изохронным вектором девиации ξ_Q и нормальным вектором девиации η^Q.

Можно построить геометрическую картину проблемы устойчивости; пусть на рис. 41 Γ и Γ′ — две близкие траектории. Соответствие между их точками можно установить одним из следующих способов:

I) изохронное соответствие, при котором сопоставляются точки с одним и тем же значением t; бесконечно

[1]) Если $Q_\rho = 0$, то $a_\rho = 0$, и отсюда согласно (84.8) $\varkappa = 0$, так что если никакие силы не действуют, траектория есть геодезическая линия.

малый вектор девиации (отклонения) изображен вектором ξ^ρ, рис. 41;

(II) нормальное соответствие, при котором бесконечно малый вектор отклонения η^ρ ортогонален траектории Γ, т. е.

$$\eta^\rho v_\rho = 0. \tag{84.14}$$

Между этими двумя типами векторов отклонения существует соотношение

$$\xi^\rho = \eta^\rho + \vartheta v^\rho, \tag{84.15}$$

в котором вследствие условия (84.14)

$$\vartheta = \frac{\xi^\sigma v_\sigma}{v^2}. \tag{84.16}$$

Изохронный вектор ξ^ρ удовлетворяет уравнению девиации[1])

$$\frac{\delta \xi^\rho}{\delta t^2} + R^\rho_{\cdot\sigma\mu\nu} v^\sigma \xi^\mu v^\nu = Q^\rho_{1\sigma} \xi^\sigma, \tag{84.17}$$

где $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ — тензор кривизны в пространстве Q с метрикой (84.2):

$$R^\rho_{\cdot\sigma\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial q^\mu}\begin{Bmatrix}\varrho\\ \sigma\nu\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial q^\nu}\begin{Bmatrix}\varrho\\ \sigma\mu\end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{Bmatrix}\tau\\ \sigma\nu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varrho\\ \tau\mu\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\tau\\ \sigma\mu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varrho\\ \tau\nu\end{Bmatrix}, \tag{84.18}$$

а $Q^\varrho_{1\sigma}$ — ковариантная производная контравариантной

---

[1]) Ср. Синдж Дж., Тензорные методы в динамике, ИЛ, Москва, 1947. Эта книга содержит библиографию работ, касающихся динамики с точки зрения римановой геометрии; см. также Synge J. L., Phil. Trans. Roy. Soc., Lond. A226, 31—106 (1926).

силы

$$Q^{\rho}_{1\sigma} = \frac{\partial Q^{\rho}}{\partial q^{\sigma}} = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} Q^{\mu}. \tag{84.19}$$

Уравнение девиации для нормального соответствия несколько более сложно. Подставляя значение (84.15) в (84.17), получаем с помощью соотношений (84.13) следующее уравнение:

$$\frac{\delta^2 \eta^{\rho}}{\delta t^2} + \frac{d^2\vartheta}{dt^2} v^{\rho} + 2\frac{d\vartheta}{dt} Q^{\rho} + R^{\rho}_{.\sigma\mu\nu} v^{\sigma} \eta^{\mu} v^{\nu} = Q^{\rho}_{1\sigma}\eta^{\sigma}; \tag{84.20}$$

вместе с соотношением (84.14) имеем $N+1$ уравнений для величин ϑ и η^{ρ}.

§ 85. Наименьшая кривизна. Сохраняя обозначения § 84, определим для произвольного кинематически возможного движения с ускорением a^{ρ} при наличии заданных сил Q^{ρ} *динамическую кривизну* K, как положительный квадратный корень из выражения

$$K^2 = g_{\rho\sigma} (a^{\rho} - Q^{\rho}) (a^{\sigma} - Q^{\sigma}). \tag{85.1}$$

Так как кинетическая энергия — положительно определенная функция, то это выражение неотрицательно; $K = 0$ тогда и только тогда, когда удовлетворяются уравнения движения (84.13).

Наложим на систему связи (вообще говоря, неголономные) с уравнениями

$$A_{c\rho} v^{\rho} + A_c = 0 \tag{85.2}$$

(ср. (46.2)). Все A — функции координат и t, а индекс c принимает значения $1, 2, \ldots, M$, так что система со связями имеет $N - M$ степеней свободы. Дифференцирование дает соотношения

$$A_{c\rho} a^{\rho} + B_c = 0 \tag{85.3}$$

для любого движения со связями; B_c не зависит от ускорения.

Зададимся теперь вопросом: какое из ускорений a^ρ, удовлетворяющих уравнениям (85.3), обращает K в минимум? Если считать a^ρ прямоугольными декартовыми координатами в N-мерном евклидовом пространстве, то эта задача эквивалентна задаче о нахождении точки касания эллипсоида (85.1) (с заданным центром Q и положением) и гиперплоскости, представленной уравнением (85.3). Легко видеть, что искомые минимизирующие a^ρ удовлетворяют уравнениям

$$g_{\rho\sigma}(a^\sigma - Q^\sigma) = \sum_{c=1}^{M} \vartheta_c A_{c\rho}, \tag{85.4}$$

где ϑ_c — неопределенные множители. Но эти уравнения точно совпадают с лагранжевыми уравнениями движения (46.15), и мы заключаем, что *подчиненная связям траектория, удовлетворяющая уравнениям движения, обращает в минимум динамическую кривизну K, если сравнивать ее с кривизной для произвольных связанных движений с теми же положениями и скоростью.*

Для системы частиц выражение (85.1) в обычных обозначениях выглядит как

$$K^2 = \sum m\left[\left(\ddot{x} - \frac{X}{m}\right)^2 + \left(\ddot{y} - \frac{Y}{m}\right)^2 + \left(\ddot{z} - \frac{Z}{m}\right)^2\right]; \tag{85.5}$$

суммирование производится по всем частицам, а (X, Y, Z) — заданная сила, действующая на частицу. Если K имеет эту форму, то теорема $K = \text{minimum}$ известна под названием *гауссовой теоремы наименьшей кривизны или наименьшего принуждения*[1]).

Для более ограниченного случая склерономных связей имеет место условие

$$A_{c\rho} v^\rho = 0, \tag{85.6}$$

где $A_{c\rho}$ зависит только от координат. Остается справедливой теорема о минимуме кривизны, когда кривизна

[1]) См. Аппель [2], II, стр. 426; Уиттекер [28], стр. 284—288; Lanczos [15], стр. 106—110. Обсуждение принципа Гаусса, Герца и Журдена см. Nordheim [18], стр. 62—69.

понимается в геометрическом смысле § 84. Рассмотрим:

C — траекторию при заданных силах Q_ρ, в том случае, когда на движение не наложены связи;

C' — произвольное движение, подчиненное связям;

C'' — траекторию, подчиненную связям при наличии заданных сил Q_ρ.

Все три движения имеют общую конфигурацию и скорость. По-прежнему определяем вектор кривизны равенством (84.9), т. е.

$$\varkappa^\rho = \frac{\delta\lambda^\rho}{\delta s} = \varkappa\nu^\rho \tag{85.7}$$

и определим k' и k'', которые представляют соответственно кривизны C' и C'' *относительно* C, следующим образом:

$$\begin{aligned} k'^2 &= g_{\rho\sigma}(\varkappa'^\rho - \varkappa^\rho)(\varkappa'^\sigma - \varkappa^\sigma), \\ k''^2 &= g_{\rho\sigma}(\varkappa''^\rho - \varkappa^\rho)(\varkappa''^\sigma - \varkappa^\sigma). \end{aligned} \tag{85.8}$$

Тогда

$$\begin{aligned} k'^2 - k''^2 = g_{\rho\sigma}(\varkappa'^\rho - \varkappa''^\rho)(\varkappa'^\sigma - \varkappa''^\sigma) &+ \\ + 2g_{\rho\sigma}(\varkappa'^\rho - \varkappa''^\rho)&(\varkappa''^\sigma - \varkappa^\sigma). \end{aligned} \tag{85.9}$$

Из уравнений движения для C и C'' имеем, согласно (84.8) и (84.13), следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa^\rho v^2 &= Q^\rho - \dot{v}\lambda^\rho = Q^\rho - \lambda^\rho Q^\sigma\lambda_\sigma, \\ \varkappa''^\rho v^2 &= Q^\rho - \lambda^\rho Q^\sigma\lambda_\sigma + Q'^\rho, \end{aligned}\right\} \tag{85.10}$$

где Q'^ρ — сила реакции связи, а отсюда

$$(\varkappa''^\rho - \varkappa^\rho)\, v^2 = Q'^\rho; \tag{85.11}$$

для связанных движений C', C'' имеем

$$\left.\begin{aligned} A_{c\rho}\lambda'^\rho &= 0, \\ A_{c\rho}\lambda''^\rho &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{85.12}$$

дифференцирование этих уравнений дает

$$A_{c\rho}(\varkappa'^\rho - \varkappa''^\rho) = 0. \tag{85.13}$$

Но согласно (46.15) или (85.4) сила реакции связи есть

$$Q'_\rho = \sum_{c=1}^{M} \vartheta_c A_{c\rho}, \qquad (85.14)$$

где ϑ_c — неопределенный множитель; из уравнений (85.11) и (85.13) следует, что последний член в (85.9) обращается в нуль. Имеем тогда

$$k'^2 - k''^2 = g_{\rho\sigma}(\varkappa'^\rho - \varkappa''^\rho)(\varkappa'^\sigma - \varkappa''^\sigma) \geqslant 0; \qquad (85.15)$$

из всех подчиненных связям движений, с заданными конфигурацией и скоростью, действительная траектория имеет наименьшую геометрическую кривизну по сравнению с траекторией, на которую не наложены связи.

ГЛАВА V

ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ И ЭНЕРГИИ ($QTPH$)

§ 86. Поверхность энергии и функция энергии. Некоторые важные аспекты динамической теории лучше всего иллюстрировать, рассматривая изображающие точки в пространствах более высоких измерений, чем $N+1$-мерное пространство событий QT. Эти пространства: $(2N+2)$-мерное пространство состояний и энергии[1]) $QTPH$, $(2N+1)$-мерное пространство состояний[2]) QTP и $2N$-мерное фазовое пространство QP (как всегда, N обозначает число степеней свободы системы). Рассмотрим теперь пространство $QTPH$, отложив QTP до гл. ДVI, а QP — до гл. ДVII. Как мы увидим, теорию, развитую для пространства $QTPH$, можно приложить к QP простым изменениям обозначений, при условии, что система в QP консервативна $(\partial H/\partial t = 0)$.

В $QTPH$ мы берем в качестве координат[3]) изображающей точки $(2N+2)$ величин q_ρ, t, p_ρ, H или, в обозначениях (64.1) и (67.6)[4]),

$$\left.\begin{aligned} x_\rho &= q_\rho, & x_{N+1} &= t, \\ y_\rho &= p_\rho, & y_{N+1} &= -H. \end{aligned}\right\} \tag{86.1}$$

Переменные y_r называют *переменными, сопряженными* x_r.

---

[1]) Ланчош называет его расширенным фазовым пространством.

[2]) Картан называет его l'espace des états; Картан Э., Интегральные инварианты, стр. 15.

[3]) Мы будем рассматривать их в малой окрестности точки. В противном случае могут потребоваться перекрывающиеся координатные системы (ср. § 63), причем в областях перекрывания (ср. § 87) должны иметь место канонические преобразования переменных.

[4]) Как и в § 62, греческие индексы принимают значения 1, 2, ..., N, а малые латинские 1, 2, ..., $N+1$ с соответствующими суммированиями в обоих случаях.

Динамическая система определена, если задана $(2N+1)$-мерная *поверхность энергии* в $QTPH$ и находящаяся на этой поверхности изображающая точка. Будем вообще писать уравнение поверхности энергии в виде

$$\Omega(x, y) = 0. \tag{86.2}$$

Данной поверхности соответствует бесконечно много уравнений, каждое из которых представляет ее. Если разрешить уравнение (86.2) относительно y_{N+1}, то уравнение поверхности энергии можно написать в форме

$$\Omega(x, y) = y_{N+1} + \omega(x_1, \ldots, x_{N+1}, y_1, \ldots, y_N) = 0 \tag{86.3}$$

или, в эквивалентном виде[1]),

$$H = \omega(q, t, p). \tag{86.4}$$

Целесообразно расширить рамки динамики в $QTPH$, введя в рассмотрение *функцию энергии* $\Omega(x, y)$ вместо поверхности энергии. Заданной функции энергии соответствует единственная поверхность энергии с уравнением $\Omega(x, y) = 0$; данной поверхности энергии соответствует бесконечно много функций энергии.

Определим *лучи* или *траектории* в пространстве $QTPH$ посредством вариационного принципа и дополнительного условия

$$\delta \int y_r\, dx_r = 0, \qquad \Omega(x, y) = \text{const} \tag{86.5}$$

(ср. с (68.5)), причем концевые значения x_r фиксированы. Отсюда получаем канонические уравнения

$$\frac{dx_r}{dw} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_r}, \qquad \frac{dy_r}{dw} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x_r}, \tag{86.6}$$

---

[1]) При исследовании пространства $QTPH$ может возникнуть путаница, если писать $H = H(q, t, p)$, потому что H входит и как координата, и как функциональный символ; чтобы пояснить это, приведем пример: в обычном пространстве уравнение между x, y, z определяет поверхность. Можно написать уравнение этой поверхности в форме $f(x, y, z) = 0$. (Эта форма соответствует уравнению (86.2)) или в форме $z = F(x, y)$ (что соответствует уравнению (86.4)). Опасно писать уравнение в форме $z = z(x, y)$, если может представиться случай говорить о точке (x, y, z), которая не лежит на поверхности, потому что тогда имеем $z \neq z(x, y)$.

где w — специальный параметр. Эти уравнения, конечно, заключают в себе условие $\Omega = \text{const}$ вдоль каждого луча или траектории. Решения системы (86.6) заполняют пространство $QTPH$, образуя *естественную конгруэнцию* лучей или траекторий, так что через каждую точку пространства проходит один луч конгруэнции; часть этих кривых заполняют поверхность энергии $\Omega = 0$. Таким образом, вся совокупность динамических траекторий, включая те, которые лежат вне поверхности энергии, представляет собой более простую геометрическую картину, чем та, которую мы имели в QT, где через любую точку проходили траектории в любом направлении.

§ 87. Канонические преобразования. Билинейный инвариант. При произвольном преобразовании $(x, y) \to (x', y')$ канонические уравнения (86.6) примут вид

$$\frac{dx'_r}{dw} = X_r(x', y'), \qquad \frac{dy'_r}{dw} = Y_r(x', y'). \tag{87.1}$$

Эти новые уравнения будут иметь каноническую форму только в том случае, если правые части уравнений удовлетворяют условиям [1])

$$\frac{\partial X_r}{\partial y'_s} = \frac{\partial X_s}{\partial y'_r}, \qquad \frac{\partial Y_r}{\partial x'_s} = \frac{\partial Y_s}{\partial x'_r}, \qquad \frac{\partial X_r}{\partial x'_r} + \frac{\partial Y_r}{\partial y'_r} = 0. \tag{87.2}$$

Для некоторых целей необходимо допускать общие преобразования, но особенное значение имеют *канонические преобразования* [2]) $(x, y) \to (x', y')$, которые сохраняют кано-

[1]) Здесь нет суммирования по одинаковым индексам.

[2]) В литературе по динамике термины «канонические преобразования» и «контактные преобразования» используются почти как синонимы. Справки см. Голдстейн [7], стр. 261; Ланчош [28] — «контактный». Corben и Stehle [3], стр. 302, употребляют выражение *обобщенное контактное преобразование* для канонического преобразования в $QTPH$. О математической связи между каноническими и контактными преобразованиями см. Carathéodory, op. cit., § 71, стр. 107; Tietz H., Handbuch der Physik, т. II, стр. 193; Wintner [30], стр. 31. В настоящей книге будет употребляться только термин *каноническое преобразование*. О канонических преобразованиях, производимых в пространстве QTP с помощью естественной конгруэнции, см. § 95; о канонических преобразованиях в QP см. § 96

ническую форму уравнений лучей или траекторий, т. е. те преобразования, которые переводят уравнения

$$\frac{dx_r}{dw}=\frac{\partial\Omega}{\partial y_r},\qquad \frac{dy_r}{dw}=-\frac{\partial\Omega}{\partial x_r}\tag{87.3}$$

в уравнения

$$\frac{dx_r'}{dw}=\frac{\partial\Omega}{\partial y_r'},\qquad \frac{dy_r'}{dw}=-\frac{\partial\Omega}{\partial x_r'}.\tag{87.4}$$

Понятно, что при каноническом преобразовании (которое мы ради краткости будем обозначать КП) специальный параметр w должен оставаться неизменным, а функция энергии Ω должна рассматриваться как инвариант в смысле тензорного исчисления $[\Omega(x, y) = \Omega'(x', y')]$. Мы рассматриваем только несингулярные (обратимые) преобразования.

Напишем уравнения

$$\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\qquad \delta\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}\delta x\\ \delta y\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{z}'=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix},\qquad \delta\boldsymbol{z}'=\begin{pmatrix}\delta x'\\ \delta y'\end{pmatrix},\tag{87.5}$$

где все правые части представляют собой $(2N+2)\times 1$-матрицы. Тогда любое несингулярное преобразование дает соотношения в дифференциальной форме,

$$\delta\boldsymbol{z}=\boldsymbol{J}\,\delta\boldsymbol{z}',\qquad \delta\boldsymbol{z}'=\boldsymbol{J}^{-1}\,\delta\boldsymbol{z},\tag{87.6}$$

где $\boldsymbol{J}$ — матрица Якоби порядка $(2N+2)\times(2N+2)$:

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x_r}{\partial x_m'} & \dfrac{\partial x_r}{\partial y_n'}\\[2ex] \dfrac{\partial y_s}{\partial x_m'} & \dfrac{\partial y_s}{\partial y_n'}\end{pmatrix},\qquad \det\boldsymbol{J}\neq 0.\tag{87.7}$$

Имеем затем

$$\boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}\\[2ex] \dfrac{\partial\Omega}{\partial y}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{W}'=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\Omega}{\partial x'}\\[2ex] \dfrac{\partial\Omega}{\partial y'}\end{pmatrix}\tag{87.8}$$

и вводим знак «тильда» для обозначения транспонирования, которое преобразует одностолбцовую матрицу в матрицу из одной строки. Из существования инварианта

$$\widetilde{W}\,\delta z = \delta\Omega = \widetilde{W}'\,\delta z' \tag{87.9}$$

или каким-нибудь другим способом, легко заключить, что W преобразуется согласно закону

$$W' = \widetilde{J}W, \quad W = \widetilde{J}^{-1}W'. \tag{87.10}$$

Введем теперь кососимметричную $(2N+2)\times(2N+2)$ числовую матрицу Γ, которая действительно является ключом к алгебре КП:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{87.11}$$

где 1 поставлена вместо $(N+1)\times(N+1)$ единичной матрицы. Заметим, что

$$\widetilde{\Gamma} = -\Gamma, \quad \det\Gamma = 1, \quad \Gamma^2 = -1_{(2N+2)}, \quad \Gamma^{-1} = -\Gamma. \tag{87.12}$$

В этих обозначениях канонические уравнения (87.3) имеют вид

$$dz = dw\cdot\Gamma W. \tag{87.13}$$

Имеем затем согласно (87.6) и (87.10) следующее соотношение:

$$dz - dw\cdot\Gamma W = J\,(dz' - dw\cdot J^{-1}\Gamma\widetilde{J}^{-1}W'), \tag{87.14}$$

и ясно, что *условие*

$$J^{-1}\Gamma\widetilde{J}^{-1} = \Gamma \tag{87.15}$$

является необходимым и достаточным ограничением, наложенным на J для того, чтобы преобразование с матрицей Якоби, равной J, было бы каноническим. Это условие можно записать в эквивалентной форме [1]):

$$J\Gamma\widetilde{J} = \Gamma, \quad \widetilde{J}\Gamma J = \Gamma. \tag{87.16}$$

---

[1]) Вспомним, что мы наложили условие $w' = w$; если ослабить это условие, то необходимым и достаточным условием для КП будет $J\Gamma\widetilde{J} = \mu\Gamma$, где μ — скалярный множитель. Линейное преобразование $z = Jz'$ называется симплектичным (или матрица J называется симплектичной), если J удовлетворяет (87.16); ср. Weyl H., The Classical Groups, Chap. 6 (Princeton, University Press, 1946), Wintner [30], стр. 17, обозначает матрицу Γ через J; Siegel (op. cit. § 53, стр. 9) обозначает ее $\mathfrak{J}$.

Из (87.16) следует, что $\det J = \pm 1$; позднее, в (88.29), мы докажем, что $\det J = 1$.

Пусть $\delta_1 z$ и $\delta_2 z$ — произвольные независимые вариации; тогда

$$\delta_1 \tilde{z} \cdot \Gamma \cdot \delta_2 z = (\delta_1 x, \quad \delta_2 y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_2 x \\ \delta_2 y \end{pmatrix} = \delta_1 x_r \delta_2 y_r - \delta_2 x_r \delta_1 y_r \tag{87.17}$$

являются билинейной формой. Применяя КП (87.6), получаем

$$\delta_1 \tilde{z} \cdot \Gamma \cdot \delta_2 z = \delta_1 z' \cdot \tilde{J} \Gamma J \cdot \delta_2 z' = \delta_1 \tilde{z}' \cdot \Gamma \cdot \delta_2 z', \tag{87.18}$$

и, следовательно, КП имеет *билинейный инвариант*

$$\delta_1 x_r \delta_2 y_r - \delta_2 x_r \delta_1 y_r = \delta_1 x_r' \delta_2 y_r' - \delta_2 x_r' \delta_1 y_r'. \tag{87.19}$$

Легко видеть, что (87.19) есть достаточное условие для каноничности преобразования. Эта инвариантная билинейная форма может рассматриваться как основа теории КП, так же как известные инвариантные квадратичные формы $(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ и $(dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2)$ могут считаться соответственно основами преобразования твердого тела в пространстве и лоренц-преобразований в пространстве времени. Так же как эти квадратичные формы определяют квадраты инвариантных элементов длины, так билинейная форма определяет инвариантный элемент площади

$$\{u, v\}\, du\, dv = \{u, v\}'\, du\, dv \tag{87.20}$$

в 2-пространстве с уравнениями $x_r = x_r(u, v)$, $y_r = y_r(u, v)$, погруженном в $QTPH$; здесь $\{u, v\}$ и $\{u, v\}'$ — скобки Лагранжа (см. § 89):

$$\left.\begin{aligned} \{u, v\} &= \frac{\partial x_r}{\partial u}\frac{\partial y_r}{\partial v} - \frac{\partial x_r}{\partial v}\frac{\partial y_r}{\partial u}, \\ \{u, v\}' &= \frac{\partial x_r'}{\partial u}\frac{\partial y_r'}{\partial v} - \frac{\partial x_r'}{\partial v}\frac{\partial y_r'}{\partial u}. \end{aligned}\right\} \tag{87.21}$$

Канонические преобразования образуют группу, ибо они содержат тождественное преобразование и каждому

КП $(x, y) \to (x', y')$ соответствует единственное обратное КП $(x', y') \to (x, y)$, а из (87.16) или из билинейного инварианта следует, что последовательное применение двух КП есть также КП.

§ 88. Производящие функции. Пусть $(x, y) \to (x', y')$ — некоторое несингулярное преобразование, не обязательно каноническое. Пусть A, B — две любые точки пространства $QTPH$ и C — какая-нибудь кривая, соединяющая их. Рассмотрим интеграл

$$I(A, B; C) = \int (y_r\, dx_r - y'_r\, dx'_r), \tag{88.1}$$

взятый по кривой C от A до B. Здесь

$$dx'_r = \frac{\partial x'_r}{\partial x_s} dx_s + \frac{\partial x'_r}{\partial y_s} dy_s, \tag{88.2}$$

так что на самом деле интеграл имеет вид

$$I(A, B; C) = \int (X_s\, dx_s + Y_s\, dy_s), \tag{88.3}$$

где

$$X_s = y_s - y'_r \frac{\partial x'_r}{\partial x_s}, \quad Y_s = -y'_r \frac{\partial x'_r}{\partial y_s}. \tag{88.4}$$

Договоримся раз и навсегда считать точку A фиксированной, тогда можно обозначить интеграл через $I(B; C)$. А если взять точку B совпадающей с A, так что C — замкнутый контур, то интеграл можно обозначить $I(C)$. Ниже употребляются и другие, очевидно совершенно аналогичные обозначения.

Придавая A, B и C произвольные вариации, получим из (88.1) интегрированием по частям

$$\delta I(A, B; C) = [y_r\, \delta x_r - y'_r\, \delta x'_r]_A^B + \\ + \int [(dx_r\, \delta y_r - \delta x_r\, dy_r) - (dx'_r\, \delta y'_r - \delta x'_r\, dy'_r)]. \tag{88.5}$$

Предположим, что преобразование $(x, y) \to (x', y')$ — каноническое. Тогда вследствие существования билинейного инварианта (87.19) интеграл в правой части выражения (88.5) обращается в нуль, т. е. имеем выражение

$$\delta I(A,\ B;\ C) = [y_r\, \delta x_r - y'_r\, \delta x'_r]_A^B. \tag{88.6}$$

Отсюда вытекают следствия:

I) Так как вариация I обращается в нуль, когда A и B закреплены, то I $(A,\ B,\ C)$ имеет одно и то же значение для всех допустимых кривых, соединяющих A и B; в символической форме $I\ (A,\ B;\ C) = I\ (A,\ B)$.

II) Если точка A фиксирована, то $I\ (B;\ C) = I\ (B)$, т. е. интеграл — функция только точки B, многозначная в случае многосвязной области; имеем

$$y_r\, \delta x'_r - y'_r\, \delta x'_r = \delta I(B) \tag{88.7}$$

для произвольной вариации[1]) B.

III) Если A и B совпадают, так что C — замкнутый контур и можно обозначить рассматриваемый интеграл через $I\ (C)$, то $\delta I\ (C) = 0$ для произвольной вариации контура. Этот результат заключает в себе условие, что $I\ (C)$ имеет одно и то же значение для всех совместимых контуров и $I\ (C) = 0$ для стягиваемых в точку контуров. Эквивалентно

$$\oint y_r\, dx_r = \oint y'_r\, dx'_r \tag{88.8}$$

для каждого стягиваемого в точку контура. Этот результат можно выразить следующим образом: *циркуляция действия по стягиваемому в точку контуру инвариантна относительно КП*. В случае неприводимого контура КП увеличивает или уменьшает циркуляцию на величину, одинаковую для всех совместимых контуров.

Согласно (88.7) имеем следующий вывод: если $(x,\ y) \to (x',\ y')$ — КП, то пфаффиан

$$y_r\, dx_r - y'_r\, \delta x'_r = X_s\, \delta x_s + Y_s\, \delta y_s \tag{88.9}$$

---

[1]) То есть при произвольных вариациях $(x,\ y)$, или, эквивалентно, $(x',\ y')$, КП может быть таким, что переменным $(x,\ x')$ нельзя придавать произвольные независимые вариации. Это имеет место в случае преобразований Матье (см. ниже).

есть полный дифференциал. Докажем обратное утверждение. Дано преобразование $(x, y) \to (x', y')$, так что

$$y_r\,\delta x_r - y'_r\,\delta x'_r = \delta I(B), \tag{88.10}$$

где $I(B)$ — некоторая функция переменных (x, y). Возьмем 2-пространство $x_r = x_r(u, v)$, $y_r = y_r(u, v)$, так что (x, y, x', y', I) все являются функциями переменных u и v. Тогда справедливо уравнение

$$y_r\frac{\partial x_r}{\partial v} - y'_r\frac{\partial x'_r}{\partial v} = \frac{\partial I}{\partial v}. \tag{88.11}$$

Дифференцируя его по u, меняя местами u и v, и вычитая один результат из другого, получаем

$$\{u, v\} = \{u, v\}', \tag{88.12}$$

пользуясь обозначениями (87.21). Тем самым установлено существование билинейного инварианта, а отсюда и канонический характер преобразования $(x, y) \to (x', y')$.

Теперь мы имеем три критерия для установления каноничности преобразования: I) критерий симплектичности (87.16), основанный на матрице $\mathbf{\Gamma}$, II) критерий билинейного инварианта (87.19) и III) критерий полного дифференциала (88.10).

Канонические преобразования могут быть осуществлены следующим образом. Пусть $G_1(x, x')$ — некоторая произвольная функции. Если определить (y, y') как

$$y_r = \frac{\partial G_1(x, x')}{\partial x_r}, \quad y'_r = -\frac{\partial G_1(x, x')}{\partial x'_r}, \tag{88.13}$$

то

$$y_r\,\delta x_r - y'_r\,\delta x'_r = \delta G_1(x, x'), \tag{88.14}$$

т. е. $\delta G_1(x, x')$ — полный дифференциал в пространстве (x, x'). Однако изложенное отнюдь не обязательно определяет преобразование $(x, y) \to (x', y')$, потому что нет уверенности в том, что из уравнений (88.13) можно выразить (x, y) через (x', y') или наоборот. Для того чтобы исследовать этот вопрос, продифференцируем (88.13), получив при этом

$$\left.\begin{aligned} \delta y_r &= \frac{\partial^2 G_1}{\partial x_r\, \partial x_s}\,\delta x_s + \frac{\partial^2 G_1}{\partial x_r\, \partial x'_s}\,\delta x'_s, \\ \delta y'_r &= -\frac{\partial^2 G_1}{\partial x'_r\, \partial x_s}\,\delta x_s - \frac{\partial^2 G_1}{\partial x'_r\, \partial x'_s}\,\delta x'_s. \end{aligned}\right\} \tag{88.15}$$

Наложим на $G_1(x, x')$ условие

$$\det \frac{\partial^2 G_1}{\partial x_r\, \partial x'_s} \neq 0. \tag{88.16}$$

Тогда уравнение (88.15) можно разрешить относительно $(\delta x, \delta y)$, выразив их через $(\delta x', \delta y')$, и наоборот. Эти решения можно проинтегрировать, потому что если в пространстве (x, x') мы обходим малый контур, то и в пространствах (x, y) и (x', y') мы также обходим малые контуры. Отсюда получаем обратимое преобразование: $(x, y) \to (x', y')$; *вследствие уравнения* (88.14) *это* КП.

Таким образом, начав с *производящей функции* $G_1(x, x')$, на которую наложено единственное условие (88.16), мы получаем КП из (88.13) или (88.14). Этот мощный метод установления КП не дает, однако, всех КП. Он не дает тех канонических преобразований, для которых переменные (x, x') связаны одним или более соотношениями[1]; таким путем, в частности, не получаются также КП Матье, для которых[2])

$$y_r\, \delta x_r - y'_r\, \delta x'_r = 0. \tag{88.17}$$

Точно так же с помощью других производящих функций, описанных ниже, не удается получить некоторые специальные КП. Но для понимания общей теории КП целесообразно пренебречь такими специальными случаями и предположить, что КП, встречающиеся в рассуждениях, таковы, что любая из следующих совокупностей $(2N + 2)$ переменных образует координатную систему в пространстве *QTPH* в том смысле, что переменные любой такой

[1]) См. Уиттекер [28], стр. 324.
[2]) См. Уиттекер [28], стр. 333.

совокупности можно варьировать произвольно и независимо:

$$(x,\ y),\ (x',\ y'),\ (x,\ x'),\ (x,\ y'),\ (y,\ x'),\ (y,\ y').$$

Формула (88.14) может быть записана в следующих эквивалентных формах:

$$y_r\,\delta x_r - y_r'\,\delta x_r' = \delta G_1, \tag{88.18a}$$

$$x_r\,\delta y_r - x_r'\,\delta y_r' = \delta G_2, \tag{88.18b}$$

$$y_r\,\delta x_r + x_r'\,\delta y_r' = \delta G_3, \tag{88.18c}$$

$$x_r\,\delta y_r + y_r'\,\delta x_r' = \delta G_4, \tag{88.18d}$$

где

$$\left.\begin{aligned} G_2 &= x_r y_r - x_r' y_r' - G_1, \\ G_3 &= x_r' y_r' + G_1, \\ G_4 &= x_r y_r - G_1. \end{aligned}\right\} \tag{88.19}$$

Имеются, таким образом, четыре различных способа порождения КП:

$$y_r = \frac{\partial G_1(x,\ x')}{\partial x_r}, \qquad y_r' = -\frac{\partial G_1(x,\ x')}{\partial x_r'}, \tag{88.20a}$$

$$x_r = \frac{\partial G_2(y,\ y')}{\partial y_r}, \qquad x_r' = -\frac{\partial G_2(y,\ y')}{\partial y_r'}, \tag{88.20b}$$

$$y_r = \frac{\partial G_3(x,\ y')}{\partial x_r}, \qquad x_r' = \frac{\partial G_3(x,\ y')}{\partial y_r'}, \tag{88.20c}$$

$$x_r = \frac{\partial G_4(y,\ x')}{\partial y_r}, \qquad y_r' = \frac{\partial G_4(y,\ x')}{\partial x_r'}. \tag{88.20d}$$

Любая из этих формул дает КП; производящая функция, входящая в них, должна удовлетворять только одному — неравенству вида (88,16).

Можно привести некоторые особенно простые примеры КП. Во-первых, применяя формулы (88.20а), имеем

$$\left.\begin{aligned} &G(x, x') = x_r x_r', \quad \det \frac{\partial^2 G}{\partial x_r \, \partial x_s'} = 1, \\ &y_r = x_r', \qquad y_r' = -x_r, \end{aligned}\right\} \qquad (88.21)$$

так что при этом преобразовании переменные меняются местами, причем в одном случае изменяется знак. Во-вторых, взяв другую производящую функцию, применяя при этом формулы (88.20с),

$$\left.\begin{aligned} &G(x, y') = x_r y_r', \quad \det \frac{\partial^2 G}{\partial x_r \, \partial y_s'} = 1, \\ &y_r = y_r', \qquad\qquad x_r' = x_r, \end{aligned}\right\} \qquad (88.22)$$

получим тождественное преобразование. Наконец, в-третьих, вновь применим (88.20с), выбирая новую функцию $G(x, y')$:

$$G(x, y') = f_r(x)\, y_r', \quad \det \frac{\partial^2 G}{\partial x_r \, \partial y_s'} = \det \frac{\partial f_s}{\partial x_r} \neq 0, \qquad (88.23)$$

причем на произвольные функции $f_s(x)$ накладывается только это последнее условие. Получаем

$$y_r = \frac{\partial f_s}{\partial x_r} y_s', \qquad x_r' = f_r(x), \qquad (88.24)$$

следовательно, имеем произвольное преобразование $(x) \longrightarrow (x')$, а y_r преобразуется как ковариантный вектор. Это *обобщенное точечное преобразование*[1]).

---

[1]) Уиттекер [28], стр. 324; Голдстейн [7], стр. 260, называет его просто точечным преобразованием. См. там же дополнительные детали о КП и примеры. См. также Wintner [30], стр. 34, Carathéodory, op. cit., § 71, стр. 102.

В обозначениях (q, t, p, H) (ср. с (86.1)) каноническое преобразование (88.20) принимает следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &G_1 = G_1(q, t, q', t'):\\ &p_\rho = \frac{\partial G_1}{\partial q_\rho}, \qquad -H = \frac{\partial G_1}{\partial t},\\ &p'_\rho = -\frac{\partial G_1}{\partial q'_\rho}, \qquad -H' = -\frac{\partial G_1}{\partial t'}; \end{aligned}\right\} \tag{88.25a}$$

$$\left.\begin{aligned} &G_2 = G_2(p, H, p', H'):\\ &q_\rho = \frac{\partial G_2}{\partial p_\rho}, \qquad t = -\frac{\partial G_2}{\partial H},\\ &q'_\rho = -\frac{\partial G_2}{\partial p'_\rho}, \qquad t' = \frac{\partial G_2}{\partial H'}; \end{aligned}\right\} \tag{88.25b}$$

$$\left.\begin{aligned} &G_3 = G_3(q, t, p', H'):\\ &p_\rho = \frac{\partial G_3}{\partial q_\rho}, \qquad -H = \frac{\partial G_3}{\partial t},\\ &q'_\rho = \frac{\partial G_3}{\partial p'_\rho}, \qquad t' = -\frac{\partial G_3}{\partial H'}; \end{aligned}\right\} \tag{88.25c}$$

$$\left.\begin{aligned} &G_4 = G_4(p, H, q', t'):\\ &q_\rho = \frac{\partial G_4}{\partial p_\rho}, \qquad t = -\frac{\partial G_4}{\partial H},\\ &p'_\rho = \frac{\partial G_4}{\partial q'_\rho}, \qquad -H = \frac{\partial G_4}{\partial t'}. \end{aligned}\right\} \tag{88.25a}$$

Следующие КП оставляют неизменным время:

$$\left.\begin{aligned} &G_3(q, t, p', H') = -tH' + g(q, t, p'):\\ &p'_\rho = \frac{\partial g}{\partial q_\rho}, \quad H = H' - \frac{\partial g}{\partial t}, \quad q'_\rho = \frac{\partial g}{\partial p'_\rho}, \quad t' = t; \end{aligned}\right\} \tag{88.26c}$$

$$\left.\begin{aligned}&G_4(p, H, q', t') = -Ht' + g(p, q', t'):\\ &q_\rho = \frac{\partial g}{\partial p_\rho}, \quad t = t', \quad p'_\rho = \frac{\partial g}{\partial q'_\rho}, \quad H' = H - \frac{\partial g}{\partial}.\end{aligned}\right\} \tag{88.26d}$$

Следующие КП оставляют неизменным гамильтониан:

$$\left.\begin{aligned}&G_3(q, t, p', H') = -tH' + g(q, p'):\\ &p_\rho = \frac{\partial g}{\partial p_\rho}, \quad H = H', \quad q'_\rho = \frac{\partial g}{\partial p'_\rho}, \quad t' = t - \frac{\partial g}{\partial H'}.\end{aligned}\right\} \tag{88.27c}$$

$$\left.\begin{aligned}&G_4(p, H, q', t') = -Ht' + g(p, H, q'):\\ &q_\rho = \frac{\partial g}{\partial p_\rho}, \quad t = t' - \frac{\partial g}{\partial H}, \quad p'_\rho = \frac{\partial g}{\partial q'_\rho}, \quad H' = H.\end{aligned}\right\} \tag{88.27d}$$

Следующие КП оставляют неизменными и время, и гамильтониан:

$$\left.\begin{aligned}&G_3(q, t, p', H') = -tH' + g(q, p'):\\ &p_\rho = \frac{\partial g}{\partial q_\rho}, \quad H = H', \quad q'_\rho = \frac{\partial g}{\partial p'_\rho}, \quad t' = t;\end{aligned}\right\} \tag{88.28c}$$

$$\left.\begin{aligned}&G_4(p, H, q', t') = -Ht' + g(p, q'):\\ &q_\rho = \frac{\partial g}{\partial p_\rho}, \quad t = t', \quad p'_\rho = \frac{\partial g}{\partial q'_\rho}, \quad H' = H.\end{aligned}\right\} \tag{88.28d}$$

Покажем теперь[1]), что КП унимодулярны в том смысле, что

$$\det J = 1. \tag{88.29}$$

Пусть КП вводится формулами, аналогичными (88.20c); продифференцируем их. В матричных обозначениях имеем уравнения

$$\delta y = A\,\delta x + B\,\delta y, \quad \delta x' = \widetilde{B}\,\delta x + C\,\delta y', \tag{88.30}$$

[1]) Ср. Carathéodory, цит. соч., § 71, стр. 92.

где

$$A = \left(\frac{\partial^2 G_3}{\partial x_r\, \partial x_s}\right), \qquad B = \left(\frac{\partial^2 G_3}{\partial x_r\, \partial x_s}\right), \qquad C = \left(\frac{\partial^2 G_3}{\partial y_r\, \partial y'_s}\right). \tag{88.31}$$

Эти уравнения можно записать в виде

$$\delta y - A\,\delta x = B\,\delta y', \qquad -B\,\delta x = -\delta x' + C\,\delta y', \tag{88.32}$$

или

$$\begin{pmatrix} -A & 1 \\ -\widetilde{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ -1 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x' \\ \delta y' \end{pmatrix}. \tag{88.33}$$

Сравнивая это последнее уравнение с (87.6), имеем следующее соотношение:

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ -1 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & 1 \\ -B & 0 \end{pmatrix} J. \tag{88.34}$$

Выражение (88.29) получается, если вычислить детерминанты матриц, стоящих справа и слева.

§ 89. Скобки Пуассона и скобки Лагранжа в $QTPH$[1]).

Пусть u, v — две функции $(2N + 2)$ независимых переменных (x, y); скобки Пуассона $[u, v]$ определяются следующим образом:

$$[u, v] = \frac{\partial u}{\partial x_r}\frac{\partial v}{\partial y_r} - \frac{\partial v}{\partial x_r}\frac{\partial u}{\partial y_r} = -[v, u]. \tag{89.1}$$

Пусть (x, y) — функции двух независимых переменных u, v; скобки Лагранжа $\{u, v\}$ определяются формулами

$$\{u, v\} = \frac{\partial x_r}{\partial u}\frac{\partial y_r}{\partial v} - \frac{\partial x_r}{\partial v}\frac{\partial y_r}{\partial u} = -\{v, u\}. \tag{89.2}$$

---

[1]) Обычно скобки Пуассона обозначаются через (u, v), а скобки Лагранжа — через $[u, v]$; ср. Уиттекер [28], стр. 330, 332. Эти обозначения использует Tietz H., Handbuch der Physik, т. II, стр. 194, 195. Но в приложениях классической динамики в квантовой теории оказывается более удобно обозначать скобки Пуассона через $[u, v]$, скобки Лагранжа — через $\{u, v\}$; ср. Дирак П., Принципы квантовой механики, Физматгиз, Москва, 1961, стр. 125.

В § 97 мы будем употреблять эти же обозначения, подставляя q_ρ, p_ρ вместо x_r, y_r; во всех следующих результатах можно немедленно перейти от обозначений (x, y) к (q_ρ, p_ρ).

Если u, v, w — три произвольные функции переменных (x, y), то

$$[[u, v], w] - [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0. \tag{89.3}$$

Это тождество Пуассона — Якоби легко доказать непосредственным вычислением[1]).

Пользуясь матричными обозначениями (87.11), имеем

$$\left.\begin{aligned} [u, v] &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \Gamma \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}, \\ \{u, v\} &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\right) \Gamma \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{89.4}$$

При произвольном преобразовании $(x, y) \to (x', y')$, в котором u и v рассматриваются как инварианты, имеем следующие формулы преобразования (ср. 87.6) и (87.10)):

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x'}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y'}{\partial u} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \tilde{J}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y'} \end{pmatrix}, \tag{89.5}$$

и такие же уравнения, в которых u заменено на v. Отсюда

---

1) Непрямое доказательство см. Аппель [2], II, стр. 380—382; Nordheim and Fues [19], стр. 107; Carathéodory, цит. соч., § 71, стр. 55.

уравнения (89.4) дают

$$\left.\begin{aligned} [u,\ v] &= \left(\frac{\partial u}{\partial x'},\ \frac{\partial u}{\partial y'}\right) \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\tilde{\boldsymbol{J}}^{-1}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial v}{\partial x'}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y'}\end{pmatrix},\\ \{u,\ v\} &= \left(\frac{\partial x'}{\partial u},\ \frac{\partial y'}{\partial u}\right)\tilde{\boldsymbol{J}}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{J}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x'}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y'}{\partial v}\end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \qquad (89.6)$$

Если преобразование каноническое, то согласно (87.15) и (87.16) эти уравнения принимают следующий вид:

$$[u,\ v] = [u,\ v]',\quad \{u,\ v\} = \{u,\ v\}', \qquad (89.7)$$

т. е. скобки Пуассона и скобки Лагранжа инвариантны относительно канонических преобразований.

Возвратимся к произвольному преобразованию $(x,\ y) \to (x',\ y')$. Пусть u_A представляют переменные $x'_1, \ldots, x'_{N+1}, y'_1, \ldots, y'_{N+1}$; большие латинские индексы принимают значения $1, 2, \ldots, 2N+2$ с обычным условием суммирования. Мы имеем затем две кососимметричные $(2N+2)\times(2N+2)$ матрицы — матрицу Пуассона $\boldsymbol{P}$, элементами которой являются $P_{AB}=[u_A,\ u_B]$, и матрицу Лагранжа $\boldsymbol{L}$ с элементами $L_{AB}=\{u_A,\ u_B\}$. Элемент AC произведения $\boldsymbol{LP}$ равен тогда

$$(LP)_{AC} = \{u_A,\ u_B\}\,[u_B,\ u_C] = \\ = \left(\frac{\partial x_r}{\partial u_A}\frac{\partial y_r}{\partial u_B} - \frac{\partial x_r}{\partial u_B}\frac{\partial y_r}{\partial u_A}\right)\left(\frac{\partial u_B}{\partial x_s}\frac{\partial u_C}{\partial y_s} - \frac{\partial u_C}{\partial x_s}\frac{\partial u_B}{\partial y_s}\right). \qquad (89.8)$$

Кроме того,

$$\frac{\partial x_r}{\partial u_B}\frac{\partial u_B}{\partial y_s} = \frac{\partial y_r}{\partial u_B}\frac{\partial u_B}{\partial x_s} = 0, \qquad \frac{\partial x_r}{\partial u_B}\frac{\partial u_B}{\partial x_s} = \frac{\partial y_r}{\partial u_B}\frac{\partial u_B}{\partial y_s} = \delta_s^r \qquad (89.9)$$

и отсюда

$$(LP)_{AC} = -\frac{\partial u_C}{\partial y_r}\frac{\partial y_r}{\partial u_A} - \frac{\partial u_C}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial u_A} = -\delta_A^C. \qquad (89.10)$$

В самом деле, имеем

$$LP = -1, \quad L = -P^{-1}, \quad P = -L^{-1}. \tag{89.11}$$

Это соотношение между матрицами Пуассона и Лагранжа справедливо для произвольного преобразования $(x, y) \to (x', y')$. Кроме того, для произвольных независимых вариаций имеем

$$\begin{aligned}(\delta_1 x', \ \delta_1 y') L \begin{pmatrix} \delta_2 x' \\ \delta_2 y' \end{pmatrix} &= \delta_1 u_A \{u_A, u_B\} \delta_2 u_B = \\ &= \left(\frac{\partial x_r}{\partial u_A} \frac{\partial y_r}{\partial u_B} - \frac{\partial x_r}{\partial u_B} \frac{\partial y_r}{\partial u_A} \right) \delta_1 u_A \delta_2 u_B = \\ &= \delta_1 x_r \delta_2 y_r - \delta_2 x_r \delta_1 y_r = (\delta_1 x, \ \delta_1 y)\, \Gamma \begin{pmatrix} \delta_2 x \\ \delta_2 y \end{pmatrix} = \\ &= (\delta_1 x', \ \delta_1 y')\, \tilde{J} \Gamma J \begin{pmatrix} \delta_2 x' \\ \delta_2 y' \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{89.12}$$

Поэтому при произвольном преобразовании $(x, y) \to (x', y')$ матрица Лагранжа L связана с матрицей Якоби J соотношением

$$L = \tilde{J} \Gamma J. \tag{89.13}$$

Для КП имеем тогда согласно (87.16)

$$L = \Gamma, \quad P = -L^{-1} = -\Gamma^{-1} = \Gamma. \tag{89.14}$$

В изложенной теории скобки Пуассона и Лагранжа не имели никакого отношения к функции энергии Ω. Введем ее и рассмотрим луч или траекторию, удовлетворяющую каноническим уравнениям (86.6). Пусть $F(x, y)$ — произвольная функция. Тогда если изображающая точка движется вдоль луча или траектории, то справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dw} &= \frac{\partial F}{\partial x_r} \frac{dx_r}{dw} + \frac{\partial F}{\partial y_r} \frac{dy_r}{dw} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_r} \frac{\partial \Omega}{\partial y_r} - \frac{\partial F}{\partial y_r} \frac{\partial \Omega}{\partial x_r} = [F, \Omega]. \end{aligned} \tag{89.15}$$

В частности, и сами канонические уравнения могут быть записаны через скобки Пуассона в виде

$$\frac{dx_r}{dw} = [x_r, \Omega], \qquad \frac{dy_r}{dw} = [y_r, \Omega]. \tag{89.16}$$

Таким образом, скобки Пуассона внутренне связаны с движением динамической системы.

Из уравнения (89.15) и тождества Пуассона — Якоби (89.3) следует, что для любых двух функций $f(x, y)$ и $F(x, y)$ имеет место соотношение

$$\frac{d}{dw}[f, F] = [[f, F], \Omega] = -[[F, \Omega], f] - [[\Omega, f], F]. \tag{89.17}$$

Если f и F — постоянные движения, т. е.

$$\frac{df}{dw} = [f, \Omega] = 0, \qquad \frac{dF}{dw} = [F, \Omega] = 0, \tag{89.18}$$

то из (89.17) следует, что скобка Пуассона $[f, F]$ также является постоянной движения (теорема Пуассона)[1].

Будем теперь употреблять обозначения (q, t, p, H), связанные с обозначениями (x, y) уравнениями (86.1); возьмем функцию энергии в виде (86.3), т. е.

$$\Omega(x, y) = y_{N+1} + \omega(x_1, \ldots, x_{N+1}, y_1, \ldots, y_N), \tag{89.1 }$$

или, что то же самое, в виде

$$\Omega(x, y) = -H + \omega(q, t, p). \tag{89.20}$$

Канонические уравнения (86.6) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dq_\rho}{dw} = \frac{\partial\omega}{\partial p_\rho}, \qquad \frac{dp_\rho}{dw} = -\frac{\partial\omega}{\partial q_\rho}, \\ &\frac{dt}{dw} = 1, \qquad -\frac{dH}{dw} = -\frac{\partial\omega}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{89.21}$$

[1]) Ср. Аппель [2], II, стр. 382—383.

Таким образом, $t = w + \text{const}$, и мы имеем следующие уравнения:

$$\frac{dq_\rho}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial p_\rho}, \quad \frac{dp_\rho}{dt} = -\frac{\partial\omega}{\partial q_\rho}, \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial t}. \tag{89.22}$$

На поверхности энергии $\Omega = 0$ можно подставить H вместо w и уравнения примут обычную форму

$$\frac{dq_\rho}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\rho}, \quad \frac{dp_\rho}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\rho}, \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{89.23}$$

Для произвольной функции $F(q, t, p, H)$ имеем согласно (89.15) следующее уравнение:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_\rho}\frac{\partial\Omega}{\partial y_\rho} + \frac{\partial F}{\partial x_{N+1}}\frac{\partial\Omega}{\partial y_{N+1}} - \frac{\partial\Omega}{\partial x_\rho}\frac{\partial F}{\partial y_\rho} - \\ - \frac{\partial\Omega}{\partial x_{N+1}}\frac{\partial F}{\partial y_{N+1}} = \frac{\partial F}{\partial q_\rho}\frac{\partial\omega}{\partial p_\rho} + \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial\omega}{\partial q_\rho}\frac{\partial F}{\partial p_\rho} + \frac{\partial\omega}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial H}. \tag{89.24}$$

На поверхности энергии $\Omega = 0$ и можно писать H вместо ω, получив таким образом

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial H} + [F, H]_{qp}, \tag{89.25}$$

где

$$[F, H]_{qp} = \frac{\partial F}{\partial q_\rho}\frac{\partial H}{\partial p_\rho} - \frac{\partial H}{\partial q_\rho}\frac{\partial F}{\partial p_\rho}. \tag{89.26}$$

Если $F = F(q, t, p)$, это уравнение превращается в следующее:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H]_{qp}, \tag{89.27}$$

а если $F = H$, оно превращается в простое уравнение:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{89.28}$$

§ 90. Канонические преобразования, производимые каноническими уравнениями. Основной относительный интегральный инвариант. КП, которые мы рассматривали, были конечными преобразованиями. Для того чтобы получить бесконечно малое КП, т. е. преобразование, близкое к тождественному, вспомним, что тождественное преобразование было дано формулами (88.22); соответственно следуя плану (88.20с), вводим производящую функцию

$$G_3(x,\ y') = x_r y_r' + F(x,\ y')\,du, \tag{90.1}$$

где функция F произвольна, а du — бесконечно малая постоянная величина. Эта формула дает КП

$$y_r = y_r' + du\cdot\frac{\partial F(x,\ y')}{\partial x_r},\quad x_r' = x_r + du\cdot\frac{\partial F(x,\ y')}{\partial y_r'} \tag{90.2}$$

или, с точностью до членов первого порядка, выражения

$$\left.\begin{aligned} dx_r &= x_r' - x_r = du\,.\,\frac{\partial F(x\,,y)}{\partial y_r}\,,\\ dy_r &= y_r' - y_r = -\,du\,.\,\frac{\partial F(x,\ y)}{\partial x_r}\,. \end{aligned}\right\} \tag{90.3}$$

Здесь мы заменили в частных производных y' на y. Если напишем канонические уравнения (86.6) в форме

$$dx_r = dw\cdot\frac{\partial\Omega(x,\ y)}{\partial y_r},\qquad dy_r = -\,dw\,.\,\frac{\partial\Omega(x,\ y)}{\partial x_r} \tag{90.4}$$

и сравним их с (90.3), то можно сказать, что *канонические уравнения порождают бесконечно малое* КП, приращение dw специального параметра w играет роль инфинитезимальной постоянной du, а функция энергии Ω — роль функции F.

Однако здесь имеет место существенное изменение в точке зрения, которое может быть источником серьезных недоразумений. До сих пор мы рассматривали КП как изменение, так сказать, «этикетки», прикрепленной к неподвижной точке в пространстве $QTPH$, а канонические уравнения — как описание движения изображающей точки в $QTPH$ в некоторой неподвижной системе координат. Этот дуализм интерпретации имеет место во всей теории преобразований, и мы сталкиваемся с ним, когда исследуем две возможные интерпретации КП.

I) Имеем совокупность геометрических объектов (точки в $QTPH$), которым могут быть сопоставлены различные группы «этикеток» (x, y), (x', y').

II) Имеем евклидово пространство E_{2N+2} с одной фиксированной системой прямоугольных координат и (x, y), (x', y') — координаты двух различных точек этого пространства E_{2N+2} в этой системе координат.

Согласно первой точке зрения преобразование $(x, y) \to (x', y')$ изменяет «этикетки», прикрепленные к неподвижным точкам; согласно второй — преобразование смещает точки, а пространство E_{2N+2} в целом преобразуется в себя. Если положить $F = \Omega$ и $du = dw$, то существует полная формальная согласованность между уравнениями (90.3) и (90.4); эту общую форму можно интерпретировать геометрически любым из указанных двух способов.

До сих пор мы изучали только бесконечно малые КП, порождаемые каноническими уравнениями. В приведенной выше интерпретации II) мы рассматриваем все точки пространства E_{2N+2}, как заданные бесконечно малыми перемещениями, соответствующими некоторому фиксированному бесконечно малому значению dw. Однако из групповых свойств КП следует, что последовательное выполнение бесконечно малых КП есть опять КП и, следовательно, приходим к заключению, что если мы переместим точки пространства E_{2N+2} вдоль лучей или траекторий с общим значением конечного приращения Δw для всех их, то тогда результирующее преобразование пространства E_{2N+2} в себя будет конечным КП. Покажем теперь, как может быть построена производящая функция этого конечного КП (предполагается, что канонические уравнения движения интегрируемы).

Для произвольной кривой C в пространстве $QTPH$, вдоль которой задан монотонный параметр u, интеграл

$$G = \int \{y_r\, dx_r - \Omega(x, y)\, du\} \tag{90.5}$$

имеет смысл. Полная вариация этого интеграла дает

$$\delta G = [y_r\,\delta x_r - \Omega\,\delta u] + \\ + \int (\delta y_r\,dx_r - \delta x_r\,dy_r - \delta\Omega\,du + d\Omega\,\delta u). \quad (90.6)$$

Попытаемся отыскать те кривые C, для которых $\delta G = 0$, если на вариацию кривой наложены только следующие условия:

1) концевые значения x_r^*, x_r постоянны,

2) приращение Δu параметра u вдоль кривой постоянно.

Мы можем положить в (90.6) $\delta u = 0$; тогда получим

$$\delta G = \int\left\{\delta x_r\left(-dy_r - \frac{\partial\Omega}{\partial x_r}du\right) + \delta y_r\left(dx_r - \frac{\partial\Omega}{\partial y_r}du\right)\right\}. \quad (90.7)$$

Поэтому искомые кривые удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx_r}{du} = \frac{\partial\Omega}{\partial y_r}, \qquad \frac{dy_r}{du} = -\frac{\partial\Omega}{\partial x_r}. \quad (90.8)$$

Это означает, что такие кривые являются лучами или траекториями, а также, что параметр u на любой из этих кривых есть специальный параметр ($u = w$). Более того, из природы вариационного принципа, приведенного здесь, следует, что $2N + 3$ величин x^*, x, Δw, выбранные произвольно, определяют значение интеграла

$$G(x^*,\, x,\, \Delta w) = \int \{y_r\,dx_r - \Omega(x,\, y)\,dw\}, \quad (90.9)$$

вычисленного вдоль луча или траектории (рис. 42).

Задавая произвольные вариации $2N + 3$ величинам (x^*, x, Δw), получаем из (90.6)

$$\frac{\partial G}{\partial x_r} = y_r, \qquad \frac{\partial G}{\partial x_r^*} = -y_r^*, \quad (90.10)$$

а также

$$\frac{\partial G}{\partial \Delta w} = -\Omega(x,\, y) = -\Omega(x^*,\, y^*). \quad (90.11)$$

Вдоль луча или траектории $\Omega = \text{const}$, согласно уравнениям (90.8). Мы видим, что (90.10) совпадает с КП (88.20c) и, следовательно, заключаем, что для *любого заданного значения Δw функция $G(x^*, x, \Delta w)$, полученная интегрированием вдоль лучей или траекторий, является производящей функцией конечного* КП, *которое преобразует пространство $QTPH$ в себя.* В самом деле, мы имеем однопараметрическое семейство КП с параметром Δw.

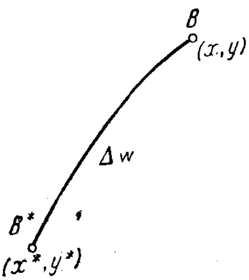


Рис. 42. Построение производящей функции $G(x^*, x, \Delta w)$ в $QTPH$.

Предполагая, что канонические уравнения (90.8) проинтегрированы, можно построить производящую функцию следующим образом:

I) Берем в пространстве $QTPH$ произвольную точку B^* с координатами x^*, y^*.

II) Через точку B^* проводим луч или траекторию C, удовлетворяющую уравнениям (90.8), и продолжаем ее до тех пор, пока ее специальный параметр w не возрастет на заданную величину Δw. Пусть $B(x, y)$ — точка, полученная таким образом. Тогда имеем функциональные соотношения

$$x_r = x_r(x^*, y^*, \Delta w), \qquad y_r = y_r(x^*, y^*, \Delta w). \tag{90.12}$$

III) Решаем первую систему этих уравнений, получая при этом

$$y_r^* = y_r^*(x^*, x, \Delta w). \tag{90.13}$$

IV) Вычисляем интеграл (90.9) от B^* до B по кривой C, причем (x, y) — функции $(x^*, y^*, \Delta w)$ вида (90.12); таким образом, G оказывается функцией $(x^*, y^*, \Delta w)$.

V) Подставляем в (90.5) значения y_r^* (90.13), чтобы получить $G(x^*, x, \Delta w)$.

Формулами (88.8) установлена инвариантность циркуляции действия относительно КП. Этот результат допускает двойную интерпретацию согласно тому способу, каким мы рассматриваем КП. В случае уравнений (88.8) это, как мы видели, было вопросом изменения «этикеток» неподвижных точек. Чтобы получить другую точку зрения, проще всего начать все рассуждения снова.

Рис. 43 показывает контур C в пространстве $QTPH$ и трубку, содержащую C; эта трубка состоит из лучей или траекторий (часть естественной конгруэнции). Удобно сохранить обозначение d для смещения вдоль естественной конгруэнции, чтобы были справедливы уравнения

$$\left.\begin{aligned} dx_r &= dw \,.\, \frac{\partial \Omega}{\partial y_r}, \\ dy_r &= -\, dw \,.\, \frac{\partial \Omega}{\partial x_r}. \end{aligned}\right\} \qquad (90.14)$$

Для обозначения перемещений вдоль контура C мы будем употреблять знак δ, так что циркуляция по C равна

$$\varkappa(C) = \oint_C y_r\, \delta x_r. \qquad (90.15)$$

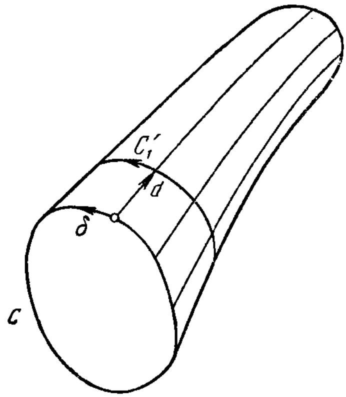


Рис. 43. Контур C и трубка, образованная кривыми естественной конгруэнции в $QTPH$.

Если переместить C в положение C_1 вдоль естественной конгруэнции, то получим уравнение

$$\varkappa(C_1) - \varkappa(C) = d\varkappa(C) = \\ = d \oint_C y_r\, \delta x_r = \oint_C (dy_r\, \delta x_r - dx_r\, \delta y_r) \qquad (90.16)$$

или, согласно (90.14),

$$d\varkappa(C) = -\oint_C dw\, \delta\Omega, \qquad (90.17)$$

где переменная интегрирования Ω, а dw — бесконечно малый скаляр, заданный вдоль C.

Если $dw = \text{const}$, то для стягиваемого в точку контура получаем

$$d\varkappa(C) = -\, dw \oint_C \delta\Omega = 0. \qquad (90.18)$$

Таким образом, *циркуляция действия по стягиваемому в точку контуру остается неизменной при смещении этого контура вдоль естественной конгруэнции на фиксированное бесконечно малое приращение специального параметра, а следовательно, также и на фиксированное конечное приращение.*

Отметим, как второй вывод из уравнения (90.17), что если C проведен на поверхности энергии $\Omega = 0$ (или, более общий случай, на $\Omega = \text{const}$), то $\delta\Omega = 0$, и отсюда $d\varkappa(C) = 0$. Нет необходимости полагать dw постоянным, а поэтому *циркуляция действия имеет общее значение для всех контуров (приводимых и неприводимых), проведенных на поверхности энергии, которая может быть деформирована в другую смещением вдоль естественной конгруэнции.*

В обозначениях (q, t, p, H) циркуляция по любому контуру есть

$$\varkappa(C) = \oint_C y_r\,\delta x_r = \oint_C (p_\rho\,\delta q_\rho - H\,\delta t). \tag{90.19}$$

Для контура на поверхности энергии H задана как функция переменных (q, t, p).

Так как имеет место условие

$$\oint_C y_r\,\delta x_r = -\oint_C x_r\,\delta y_r, \tag{90.20}$$

то этот же результат справедлив для циркуляции, определенной как

$$\oint_C x_r\,\delta y_r = \oint_C (q_\rho\,\delta p_\rho - t\,\delta H). \tag{90.21}$$

Циркуляция действия есть пример относительного интегрального инварианта. Интегральные инварианты определяются следующим образом.

Пусть S_M — некоторое M-мерное подпространство $QTPH$ или может быть само $QTPH$, так что $1 \leqslant M \leqslant 2N + 2$. Проведем через S_M естественную конгруэнцию и получим из S_M систему подпространств $S_M(w)$, откладывая вдоль лучей или траекторий одни и те же значения w, начиная с $w=0$ на S_M; таким образом, $S_M = S_M(0)$. Если какой-либо интеграл, взятый по S_M, остается неизменным при такой операции, т. е. если I для $S_M(w)$ не зависит от w, то I называют *интегральным инвариантом*, *абсолютным*, если S_M — открытое пространство, и *относительным*, если оно замкнутое (как для контура C, например). Интегральные инварианты в пространстве QP будут обсуждены в § 98.

§ 91. Преобразование естественной конгруэнции к прямым линиям с помощью решения уравнения Гамильтона — Якоби. В § 90 мы исследовали две различные точки зрения на преобразование. Примем здесь второй взгляд: рассмотрим евклидово пространство E_{2N+2}, в котором имеются неподвижные оси координат, а преобразование $(x, y) \longrightarrow (x', y')$ означает перемещение точек этого пространства в новые положения. Для того чтобы обойти трудный вопрос о топологии пространства $QTPH$, будем рассматривать только малые области пространства $QTPH$, топология которых совпадает с топологией евклидова пространства.

С этой точки зрения естественная конгруэнция лучей или траекторий, удовлетворяющих каноническим уравнениям

$$\frac{dx_r}{dw} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_r}, \qquad \frac{dy_r}{dw} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x_r}, \tag{91.1}$$

является системой кривых в пространстве E_{2N+2}. Каноническое преобразование изменяет эти кривые. Будем искать КП $(x, y) \longrightarrow (x', y')$, которое переводит естественную конгруэнцию в конгруэнцию *параллельных прямых*.

Пусть $G(x, y')$ — какое-нибудь решение дифференциального уравнения в частных производных,

$$\Omega\left(x, \frac{\partial G}{\partial x}\right) = y'_{N+1}, \tag{91.2}$$

рассматриваемого в области $(2N + 2)$ независимых переменных (x, y'); это решение таково, что

$$\det \frac{\partial^2 G}{\partial x_r \, \partial y'_s} \neq 0. \tag{91.3}$$

Тогда, как и в случае (88.20c), уравнения

$$y_r = \frac{\partial G}{\partial x_r}, \qquad x'_r = \frac{\partial G}{\partial y'_r} \tag{91.4}$$

определяют КП $(x, y) \to (x', y')$. Для функции энергии, всегда рассматриваемой как инвариант в смысле тензорного исчисления, имеем

$$\Omega'(x', y') = \Omega(x, y) = \Omega\left(x, \frac{\partial G}{\partial x}\right) = y'_{N+1}. \tag{91.5}$$

Следовательно, новые уравнения естественной конгруэнции имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx'_\rho}{dw} &= \frac{\partial \Omega'}{\partial y'_\rho} = 0, & \frac{dx'_{N+1}}{dw} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y'_{N+1}} = 1, \\ \frac{dy'_\rho}{dw} &= -\frac{\partial \Omega'}{\partial x'_\rho} = 0, & \frac{dy'_{N+1}}{dw} &= -\frac{\partial \Omega'}{\partial x'_{N+1}} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{91.6}$$

а интегрирование их дает

$$\left.\begin{aligned} x'_\rho &= a_\rho, & x'_{N+1} &= w, \\ y'_\rho &= b_\rho, & y'_{N+1} &= k, \end{aligned}\right\} \tag{91.7}$$

где a_ρ, b_ρ и k — постоянные в количестве $(2N + 1)$, значения которых зависят от рассматриваемого луча или траектории. Заметим, что специальный параметр w равен координате x'_{N+1}, а тривиальная постоянная интегрирования опущена. Так как при произвольных значениях постоянных система (91.7) представляет собой конгруэнцию прямых линий, параллельных оси x'_{N+1}, то мы и пришли к преобразованию естественной конгруэнции в конгруэнцию параллельных прямых. Поверхность энергии $\Omega = 0$ преобразуется при этом в плоскость y'_{N+1}.

Рассматривая пространство $QTPH$ вместо QT, мы можем представить теорию § 77 в более общем виде. В самом деле, дифференциальное уравнение в частных производных (91.2) является уравнением Гамильтона — Якоби в общей форме. Для того чтобы установить эту связь, перейдем к обозначениям (q, t, p, H), полагая, что функция энергии имеет форму

$$\Omega(x, y) = y_{N+1} + \omega(x_1, \ldots, x_{N+1}, y_1, \ldots, y_N). \qquad (91.8)$$

Тогда согласно (86.1) уравнение (91.2) примет вид

$$\frac{\partial G}{\partial t} + H\left(q, t, \frac{\partial G}{\partial q}\right) = -H', \qquad (91.9)$$

где H написан как функциональный символ вместо ω; мы хотим найти решение $G(q, t, p', H')$ такое, чтобы выполнялось условие

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 G}{\partial q_\rho \partial p'_\sigma} & \dfrac{\partial^2 G}{\partial q_\rho \partial H'} \\ \dfrac{\partial^2 G}{\partial t \partial p'_\sigma} & \dfrac{\partial^2 G}{\partial t \partial H'} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (91.10)$$

Можно считать (91.9) дифференциальным уравнением в частных производных с независимыми переменными (q, t), а величины (p', H') рассматривать как постоянные. Первый шаг в интегрировании состоит в том, чтобы положить

$$G = -H' + U(q, t). \qquad (91.11)$$

Тогда функция U должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t} + H\left(q, t, \frac{\partial U}{\partial q}\right) = 0, \qquad (91.12)$$

которое действительно является уравнением Гамильтона — Якоби (77.3). Для того чтобы выполнить преобразование (91.4), нужно найти полный интеграл этого уравнения.

§ 92. Уменьшение числа канонических уравнений с помощью первого интеграла. Возвратимся к вопросу о числе уравнений движения, возникшему в конце § 68.

Пусть дана функция энергии $\Omega(x, y)$, удовлетворяющая системе $2N+2$ канонических уравнений:

$$\frac{dx_r}{dw}=\frac{\partial\Omega}{\partial y_r}, \quad \frac{dy_r}{dw}=-\frac{\partial\Omega}{\partial x_r}. \tag{92.1}$$

Умножив их на dw/dx_{N+1}, получим

$$\frac{dx_\rho}{dx_{N+1}}=\frac{\dfrac{\partial\Omega}{\partial y_\rho}}{\dfrac{\partial\Omega}{\partial y_{N+1}}}, \quad \frac{dy_\rho}{dx_{N+1}}=-\frac{\dfrac{\partial\Omega}{\partial x_\rho}}{\dfrac{\partial\Omega}{\partial y_{N+1}}}, \tag{92.2}$$

$$\frac{dy_{N+1}}{dx_{N+1}}=-\frac{\dfrac{\partial\Omega}{\partial x_{N+1}}}{\dfrac{\partial\Omega}{\partial y_{N+1}}}. \tag{92.3}$$

Это — система $2N+1$ уравнений; независимая переменная x_{N+1} входит явно в Ω.

Известно, что вдоль каждой траектории выполняется условие

$$\Omega(x, y)=c. \tag{92.4}$$

Разрешая это уравнение относительно y_{N+1}, имеем

$$y_{N+1}=-\omega(x_1, \ldots, x_{N+1}, y_1, \ldots, y_N, c). \tag{92.5}$$

Подставляя это значение в (92.2), получим систему $2N$ уравнений, содержащую постоянную c. Если эти уравнения разрешены относительно $x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_N$, то y_{N+1} определяется формулой (92.5). Таким образом, систему канонических уравнений (92.1) можно свести к системе $2N$ уравнений, но полученные уравнения (92.2) уже не будут каноническими.

Предположим теперь, что вместо заданной функции энергии (которая приводит к естественной конгруэнции, заполняющей $QTPH$) задана поверхность энергии уравнением

$$\Omega(x, y, = 0. \tag{92.6}$$

Траектории теперь проходят через точки этой поверхности. Все еще остаются справедливыми уравнения (92.1) — (92.3), а также (92.4) и (92.5) при $c = 0$. Однако сейчас мы интересуемся *поверхностью*, и уравнение этой поверхности можно взять в различных формах. В самом деле, форма функции Ω не задана раз навсегда; мы имеем право изменить ее так, что уравнение поверхности энергии примет вид

$$\Omega(x, y) = y_{N+1} + \omega(x_1, \ldots, x_{N+1}, y_1, \ldots, y_N) = 0. \tag{92.7}$$

Таким образом получим

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_{N+1}} = 1, \tag{92.8}$$

и уравнения (92.2) преобразуются к виду

$$\frac{dx_\rho}{dx_{N+1}} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_\rho}, \qquad \frac{dy_\rho}{dx_{N+1}} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x_\rho}. \tag{92.9}$$

Это — система $2N$ уравнений. *Если положить в основу динамики поверхность энергии в пространстве QTPH, то уравнения движения можно свести к системе $2N$ уравнений с сохранением канонической формы, если при этом* I) *писать уравнение поверхности энергии в форме* (92.7) *и* II) *выбрать в качестве параметра* x_{N+1}. Заметим, что параметр x_{N+1} содержится теперь в Ω, в то время как w не входил явно в Ω в уравнениях (92.1).

Обычный переход от переменных (x, y) к (q, t, p, H) определяется формулами вида

$$\left.\begin{aligned} x_\rho &= q_\rho, & x_{N+1} &= t, \\ y_\rho &= p_\rho, & y_{N+1} &= -H. \end{aligned}\right\} \tag{92.10}$$

Однако вследствие симметрии формул при обозначениях (x, y) нет необходимости настаивать именно на этом переходе. Мы вправе переставить индексы при x_r (сделав такую же перестановку и у y_r). Таким образом, в уравнении (92.7) y_{N+1} отнюдь не обязательно обозначает $-H$; он может означать p_1, и в этом случае параметром в уравнениях (92.9) является не t, а q_1. Никогда нельзя забывать многозначности обозначений (x, y).

В дальнейшем мы будем предполагать, что задана функция энергии. Рассмотрим систему, которая обладает первым интегралом $F(x, y)$, т. е.

$$\frac{dF}{dw} = [F, \Omega] = 0 \tag{92.11}$$

(ср. с (89.15)), так что вдоль каждой траектории

$$F(x, y) = \mathrm{const}. \tag{92.12}$$

Обсудим, как с помощью этого первого интеграла[1]) уменьшить число канонических уравнений с $2N+2$ до $2N$, сохраняя каноническую форму уравнений и специальный параметр w.

Пусть $G(x, y')$ — решение дифференциального уравнения в частных производных,

$$F\left(x, \frac{\partial G}{\partial x}\right) = y'_{N+1}, \tag{2.13}$$

удовлетворяющее условию

$$\det \frac{\partial^2 G}{\partial x_r \, \partial y'_s} \neq 0. \tag{92.14}$$

Рассуждения аналогичны рассуждениям § 91, в которых уравнение Гамильтона — Якоби (91.2) заменено уравнением (92.13), и можно спросить, есть ли смысл тратить время на рассмотрение (92.13), когда решение уравнения (91.2) дает решение задачи движения. Ответ заключается в том, что практические возможности получения такого решения в большой степени зависят от сложности функции (соответственно Ω или F). Может случиться, что функция F значительно проще, чем Ω.

---

[1]) Доказательство, данное здесь, будучи проведенным в пространстве *QTPH*, имеет, по-видимому, бо́льшую общность, чем другие исследования; ср. Nordheim and Fues [19], стр. 115. Детальное обсуждение вопроса об упрощении системы канонических уравнений, если известен первый интеграл, см. Prange [21], стр. 713—726.

Решив уравнение (92.13), применим КП

$$y_r = \frac{\partial G}{\partial x_r}, \qquad x'_r = \frac{\partial G}{\partial y'_r} \tag{92.15}$$

и уравнения движения преобразуются к следующему виду:

$$\frac{\partial x'_r}{dw} = \frac{\partial \Omega'}{\partial y'_r}, \qquad \frac{dy'_r}{dw} = -\frac{\partial \Omega'}{\partial x'_r}, \tag{92.16}$$

где Ω' — новая функция энергии

$$\Omega'(x', y') = \Omega(x, y). \tag{92.17}$$

Имеем тогда

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial x'_{N+1}} = -\frac{dy'_{N+1}}{dw} = -\frac{d}{dw} F\left(x, \frac{\partial G}{\partial x}\right) =$$

$$= -\frac{d}{dw} F(x, y) = 0, \tag{92.18}$$

так что переменная x'_{N+1} не входит явно в Ω':

$$\Omega' = \Omega'(x'_1, \ldots, x'_N, y'_1, \ldots, y'_N, y'_{N+1}). \tag{92.19}$$

Если теперь выделить из (92.16) $2N$ уравнений

$$\frac{dx'_\rho}{dw} = \frac{\partial \Omega'}{\partial y'_\rho}, \qquad \frac{dy'_\rho}{dw} = -\frac{\partial \Omega'}{\partial x'_\rho}, \tag{92.20}$$

то получим систему $2N$ канонических уравнений, что и требовалось; новая функция энергии содержит y'_{N+1} как постоянную.

Если ограничиться рассмотрением траектории на поверхности энергии $\Omega = 0$, то возможно понизить порядок системы еще на 2. В новых координатах поверхность энергии имеет уравнение

$$\Omega'(x'_1, \ldots, x'_N, y'_1, \ldots, y_{N+1}) = 0; \tag{92.21}$$

разрешаем это уравнение относительно одного из y', например y'_N, и продолжаем рассуждать как в случае (92.7), получим $2N - 2$ канонических уравнений, аналогичных системе (92.9). Таким образом, используя первый интеграл и уравнение поверхности энергии, можно уменьшить число уравнений системы до $2N-2$.

Далее следуют некоторые примеры.

α) *Уменьшение числа уравнений с помощью игнорируемой координаты или с помощью интеграла энергии в случае консервативной системы.* Как мы увидим, все эти рассуждения тривиальны, но они помогают объяснить метод. Предположим, что одна из координат, например x_{N+1}, не входит явно в $\Omega(x, y)$. Принимая во внимание все, что сказано выше о симметрии обозначений, можно утверждать, что либо I) система имеет игнорируемую координату (§ 46), либо II) система консервативна (t не входит явно в $H(q, t, p)$). Следующее рассуждение охватывает оба случая.

Итак, предполагаем, что

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_{N+1}} = 0, \tag{92.22}$$

а следовательно, имеем первый интеграл

$$F(x, y) = y_{N+1} = \text{const}. \tag{92.23}$$

Дифференциальное уравнение в частных производных (92.13) имеет очень простую форму:

$$\frac{\partial G}{\partial x_{N+1}} = y'_{N+1}; \tag{29.24}$$

решение его можно взять в виде

$$G(x, y') = x_r y'_r. \tag{92.25}$$

Согласно (92.15) эта функция определяет тождественное преобразование

$$y_r = y'_r, \qquad x'_r = x_r, \tag{92.26}$$

и задача уменьшения числа уравнений системы до $2N$ состоит просто в том, что из канонических уравнений нужно выбрать $2N$ уравнений:

$$\frac{dx_\rho}{dw} = \frac{\partial\Omega}{\partial y_\rho}, \qquad \frac{dy_\rho}{dw} = -\frac{\partial\Omega}{\partial x_\rho}. \tag{92.27}$$

Для того чтобы уменьшить это число до $2N - 2$ на поверхности энергии, напишем уравнение поверхности в форме

$$\Omega(x, y) = y_N + \omega(x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_{N-1}, y_{N+1}) = 0. \tag{92.28}$$

Тогда уравнения (92.27) дают, как и в случае (92.9), систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dx_N} &= \frac{\partial\omega}{\partial y_1}, \ \ldots, \ \frac{dx_{N-1}}{dx_N} = \frac{\partial\omega}{\partial y_{N-1}}, \\ \frac{dy_1}{dx_N} &= -\frac{\partial\omega}{\partial x_1}, \ \ldots, \ \frac{dy_{N-1}}{dx_N} = -\frac{\partial\omega}{\partial x_{N-1}}. \end{aligned}\right\} \tag{92.29}$$

Перейдем теперь к обозначениям q, t, p, H, используя формулы перехода (92.10). Исходим из функции энергии

$$\Omega(q, p, -H); \tag{92.30}$$

по предположению, t не входит явно в эту функцию. Имеем первый интеграл

$$H = E \tag{92.31}$$

и уравнения движения вида (92.27)

$$\frac{dq_\rho}{dw} = \frac{\partial\Omega}{\partial p_\rho}, \quad \frac{dp_\rho}{dw} = -\frac{\partial\Omega}{\partial q_\rho}. \tag{92.32}$$

Возьмем теперь поверхность энергии $\Omega = 0$ и напишем ее уравнение в новой форме,

$$\Omega = p_N + \omega(q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_{N-1}, -E) = 0; \tag{92.33}$$

вместо H здесь подставлена постоянная E. Тогда имеем следующие уравнения движения, аналогичные (92.29):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_1}{dq_N} &= \frac{\partial\omega}{\partial p_1}, \ \ldots, \ \frac{dq_{N-1}}{dq_N} = \frac{\partial\omega}{\partial p_{N-1}}, \\ \frac{dp_1}{dq_N} &= -\frac{\partial\omega}{\partial q_1}, \ \ldots, \ \frac{dp_{N-1}}{dq_N} = -\frac{\partial\omega}{\partial q_{N-1}}. \end{aligned}\right\} \tag{92.34}$$

Здесь ω содержит независимую переменную q_N. Таким образом, *для консервативной системы с помощью инте-*

грала энергии $H = E$ можно уменьшить[1] *число канонических уравнений до* $2N - 2$.

β) *Уменьшение числа уравнений с помощью интеграла, линейного относительно импульсов.* Предположим, что система имеет первый интеграл

$$y_1 + y_2 + y_3 = \text{const}. \tag{92.35}$$

Удобно несколько изменить план исследования, ввести производящую функцию $G(x', y)$ и получить КП

$$x_r = \frac{\partial G}{\partial y_r}, \qquad y_r' = \frac{\partial G}{\partial x_r'}. \tag{92.36}$$

Итак, ищем функцию G, которая удовлетворяла бы уравнению

$$y_1 + y_2 + y_3 = y_1' = \frac{\partial G}{\partial x_1'}. \tag{92.37}$$

Таким решением может быть

$$G = x_1'(y + y_2 + y_3) + x_2' y_2 + \ldots + x_{N+1}' y_{N+1}; \tag{92.38}$$

эта функция удовлетворяет условию

$$\det \frac{\partial^2 G}{\partial x_r' \, \partial y_s} \neq 0, \tag{92.39}$$

так что (92.36) дает КП $(x, y) \to (x', y')$. Так как y_1' — постоянная движения, то $\Omega'(x', y')$ не содержит переменной x_1', следовательно, новые уравнения движения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_2'}{dw} &= \frac{\partial \Omega'}{\partial y_2'}, \ \ldots, \ \frac{dx_{N+1}'}{dw} = \frac{\partial \Omega'}{\partial y_{N+1}'}, \\ \frac{dy_2'}{dw} &= -\frac{\partial \Omega'}{\partial x_2'}, \ \ldots, \ \frac{dy_{N+1}'}{dw} = -\frac{\partial \Omega'}{\partial x_{N+1}'}, \end{aligned}\right\} \tag{92.40}$$

---

[1] Ср. Уиттекер [28], стр. 345, где дано другое изложение процесса уменьшения числа уравнений.

т. е. они представляют собой систему $2N$ уравнений. Интегралы приведенного выше типа встречаются в проблеме трех тел (§ 53); в этом случае мы имеем три интеграла количества движения:

$$\left.\begin{aligned} y_1+y_4+y_7&=y_1', \\ y_2+y_5+y_8&=y_2', \\ y_3+y_6+y_9&=y_3'; \end{aligned}\right\} \tag{92.41}$$

здесь в правых частях стоят постоянные движения. Система имеет девять степеней свободы ($N = 9$). Выбирая производящую функцию в виде

$$\begin{aligned} G(x', y) = x_1'(y_1+y_4+y_7) + x_2'(y_2+y_5+y_8) &+ \\ + x_3'(y_3+y_6+y_9) + x_4'y_4 + \ldots &+ x_{10}'y_{10}, \end{aligned} \tag{92.42}$$

исключаем x_1', x_2', x_3' из преобразованной функции Ω, в которую y_1', y_2', y_3' входят как постоянные. Вследствие этого число канонических уравнений, взятых в форме (92.1), сводится с 20 до $20 - 6 = 14$. Но если мы рассматриваем задачу в пространстве QP (§ 96), используя вместо $\Omega(x, y)$ функцию энергии $H(q, p)$, то при этом число уравнений уменьшается с 18 до 12 [1]).

γ) *Уменьшение числа уравнений с помощью интеграла площадей.* Предположим, что

$$F(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1 = y_1' \tag{92.43}$$

является постоянной движения. Согласно (92.13) мы должны решить дифференциальное уравнение в частных производных

$$x_1\frac{\partial G}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial G}{\partial x_1} = y_1'. \tag{92.44}$$

Легко проверить, что $G(x, y')$ есть решение:

$$\begin{aligned} G(x, y') = y_1'\left[y_2'(x_1^2+x_2^2) + \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\right] &+ \\ + x_3y_3' + \ldots &+ x_{N+1}y_{N+1}'. \end{aligned} \tag{92.45}$$

---

[1]) Об уменьшении числа уравнений в проблеме трех тел с 18 до 6 см. Уиттекер [28], стр. 371—388.

$G(x, y')$ удовлетворяет детерминантному условию (92.14) и дает КП

$$\left.\begin{aligned}
y_1 &= \frac{\partial G}{\partial x_1} = 2y_1'y_2'x_1 - \frac{y_1'x_2}{x_1^2 + x_2^2},\\
y_2 &= \frac{\partial G}{\partial x_2} = 2y_1'y_2'x_2 - \frac{y_1'x_1}{x_1^2 + x_2^2},\\
y_3 &= \frac{\partial G}{\partial x_3} = y_3',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_1' &= \frac{\partial G}{\partial y_1'} = y_2'(x_1^2 + x_2^2) + \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1},\\
x_2' &= \frac{\partial G}{\partial y_2'} = y_1'(x_1^2 + x_2^2),\\
x_3' &= \frac{\partial G}{\partial y_3'} = x_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (92.46)$$

Переменная x_1' не входит в новую функцию энергии. Производящую функцию (92.45) легко получить, используя полярные координаты $x_1 = r\cos\vartheta$, $x_2 = r\sin\vartheta$.

ГЛАВА VI

ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ (QTP)

§ 93. Теорема циркуляции. В $(2N+1)$-мерном пространстве состояний QTP координатами[1]) изображающей точки являются q_ρ, t, p_ρ. Гамильтонова функция H здесь не координата, а функция положения в пространстве QTP:

$$H = H(q, \ t, \ p). \tag{93.1}$$

Канонические уравнения движения здесь следующие:

$$\dot{q}_\rho = \frac{\partial H}{\partial p_\rho}, \qquad \dot{p}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial q_\rho}. \tag{93.2}$$

Напишем их в форме

$$\frac{dq_1}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dq_N}{\dfrac{\partial H}{\partial p_N}} = \frac{dp_1}{-\dfrac{\partial H}{\partial q_1}} = \ldots = \frac{dp_N}{-\dfrac{\partial H}{\partial q_N}} = \frac{dt}{1}, \tag{93.3}$$

чтобы сделать все координаты равноправными; тогда эти уравнения представляют естественную конгруэнцию траекторий в QTP, причем через каждую точку пространства проходит одна кривая. Отметим, что уравнения (93.2) заключают в себе уравнение

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{93.4}$$

---

1) Мы будем вести рассмотрение только в малых областях и обойдемся без перекрывающихся координатных систем (§ 63). Обозначения см. § 62.

Для того чтобы обсудить циркуляцию в *QTP* независимо от теории, изложенной в § 90 для *QTPH*, определяем циркуляцию по любому контуру C следующим образом:

$$\varkappa(C) = \oint_C (p_\rho\,\delta q_\rho - H\,\delta t). \tag{93.5}$$

Придавая контуру C произвольное бесконечно малое смещение d (не обязательно вдоль естественной конгруэнции) и интегрируя варьированное выражение по частям, получаем

$$d\varkappa(C) = \oint_C (dp_\rho\,\delta q_\rho - dq_\rho\,dp_\rho - dH\,\delta t + dt\,\delta H) =$$

$$= \oint_C \left[\delta q_\rho \left(dp_\rho + \frac{\partial H}{\partial q_\rho}\,dt\right) + \delta p_\rho \left(-\,dq_\rho + \frac{\partial H}{\partial p_\rho}\,dt\right) + \right.$$

$$\left. + \,\delta t \left(-\,dH + \frac{\partial H}{\partial t}\,dt\right)\right]. \tag{93.6}$$

Если теперь перемещение d происходит вдоль естественной конгруэнции, то из (93.3) и (93.4) следует, что

$$d\varkappa(C) = 0. \tag{93.7}$$

С другой стороны, если $d\varkappa(C) = 0$ для произвольного C и для перемещения d, взятого вдоль некоторой конгруэнции, то эта конгруэнция должна удовлетворять уравнениям (93.3) и (93.4) и, следовательно, это — естественная конгруэнция. В самом деле, условие циркуляции (93.7) эквивалентно каноническим уравнениям (93.2).

§ 94. Преобразование координат в *QTP*. Форма Пфаффа. Произведем общее преобразование

$$(q,\ t,\ p) \to (x), \tag{94.1}$$

где (x) означает совокупность $2N + 1$ переменных. Будем обозначать эти переменные через x_A, где индексы A принимают значения $1, 2, \ldots, 2N + 1$, и условимся суммировать по повторяющимся индексам. Тем самым мы приписываем точкам пространства *QTP* совершенно произвольные координаты.

При преобразовании (94.1) получаем

$$p_\rho \delta q_\rho - H(q, t, p)\,\delta t = X_A \delta x_A, \tag{94.2}$$

где X — функция переменных x_A. Циркуляция по контуру C равна теперь

$$\varkappa(C) = \oint_C X_A\, \delta x_A, \tag{94.3}$$

и если придать C произвольное смещение d, то получим

$$d\varkappa(C) = \oint_C (dX_A\, \delta x_A - dx_A\, \delta X_A); \tag{94.4}$$

преобразуем это выражение, обозначив $\partial X_A/\partial x_B = X_{A,B}$,

$$d\varkappa(C) = \oint_C X_{A,B}\,(dx_B\, \delta x_A - dx_A\, \delta x_B) = \\ = \oint_C (X_{A,B} - X_{B,A})\, dx_B\, \delta x_A. \tag{94.5}$$

Если dx_A — перемещение вдоль естественной конгруэнции, то $d\varkappa(C) = 0$ для произвольного контура C (ср. с § 93); поэтому траектории должны удовлетворять уравнениям

$$(X_{A,B} - X_{B,A})\, dx_B = 0. \tag{94.6}$$

Это есть форма, которую принимают канонические уравнения, если используется общая координатная система в пространстве QTP.

Этот важный результат можно рассмотреть несколько иначе; dx_A — компоненты контравариантного вектора относительно произвольных преобразований (можно писать dx^A, чтобы подчеркнуть этот факт); $X_{A,B} - X_{B,A}$ — компоненты кососимметричного тензора; поэтому уравнения (94.6) представляют собой векторные уравнения, справедливые при любом выборе координат, если они справедливы для одной системы координат[1]. Однако если

[1]) Интересно сравнить уравнение (94.6) с уравнением (73.5), в котором полная размерность та же, но детерминант из коэффициентов обращается в нуль согласно (73.1).

координаты x_A выбраны следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= q_1, \ldots, x_N = q_N, \\ x_{N+1} &= p_1, \ldots, x_{2N} = p_N, \\ x_{2N+1} &= t, \end{aligned}\right\} \tag{94.7}$$

то, принимая во внимание тождество (94.2), мы видим, что имеют место равенства

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= p_1, \ldots, X_N = p_N, \\ X_{N+1} &= 0, \ldots, X_{2N} = 0, \\ X_{2N+1} &= -H(q, t, p). \end{aligned}\right\} \tag{94.8}$$

Подставляя эти выражения в (91.6), получаем канонические уравнения (93.2), поэтому (94.6) представляют траектории во всех системах координат, так как это — уравнения траекторий в системе координат (94.7).

В уравнениях (94.6) мы имеем $2N+1$ однородных уравнений для $2N+1$ дифференциала; мы знаем (совершенно независимо от предыдущего доказательства), что они совместны, так как матрица коэффициентов, будучи кососимметричной и нечетного порядка, имеет самое большее ранг $2N$ (другими словами, ее детерминант обращается в нуль). Имеем тогда новый подход к динамике в пространстве QTP, основанный на форме Пфаффа[1])

$$X_A \, \delta x_A; \tag{94.9}$$

[1]) Теорию форм Пфаффа см. Darboux G., Le Problème de Pfaff (Paris, Gauthier-Villars, 1882); Картан Э., Интегральные инварианты, Москва, 1940; Goursat E., Leçons sur le problème de Pfaff (Paris, Hermann, 1922), а также очень общее исследование Schouten J. A. and v. d. Kulk W., Pfaff's Problem and its Generalizations (Oxford, Clarendon Press, 1949); см. также Уиттекер [28], стр. 327—328. Внешнее умножение и внешнее дифференцирование Картана (цит. выше, гл. 6, 7) приводит к весьма сжатым обозначениям, но, как всегда, когда к динамике применяются краткие обозначения, необходима большая практика, чтобы применять их с уверенностью. О приложении этих обозначений к механике см. Картан (цит. соч.); Dedecker P., Sur le théorème de la circulation de V. Bjerkness et la théorie des invariants integraux, Inst. Roy. Météorol. Belg. Misc., N 36, 1951; Gallisot F., Les formes extérieures en mecanique (Chartres: Durand, 1954 — Thèse, Paris, отдельное издание, а также в томе 4 Ann. Inst. Fourier). См. также: Cartan E., Les systèmes diffé-

здесь X_A — функции переменных x_A. Любой такой пфаффиан определяет траектории посредством уравнений (94.6). Это — инвариантный метод, не зависящий от какого бы то ни было частного выбора координат x_A.

Если имеем две формы Пфаффа,

$$X_A\,\delta x_A \quad \text{и} \quad X_A\,\delta x_A + \frac{\partial G(x)}{\partial x_A}\,\delta x_A, \tag{94.10}$$

где G — функция положения в пространстве QTP, то система (94.6) определяет одни и те же траектории для этих двух форм. Другими словами, *траектории не изменяются, если к форме Пфаффа прибавить полный дифференциал.*

Пусть (q, t, p) — канонические переменные в пространстве QTP, так что траектории удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dq_\rho}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\rho}, \quad \frac{dp_\rho}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\rho}. \tag{94.11}$$

Ассоциированная форма Пфаффа имеет вид

$$p_\rho\,\delta q_\rho - H(q, t, p)\delta t. \tag{94.12}$$

Применим преобразование $(q, t, p) \to (q', t', p')$. В преобразованном пфаффиане появятся члены, выраженные через $\delta q'_\rho$, $\delta p'_\rho$, $\delta t'$, и коэффициент при $\delta q'_\rho$, вообще говоря, не будет совпадать с p'_ρ. Но предположим, что преобразование таково, что в преобразованном пфаффиане можно выделить полный дифференциал, оставив пфаффиан, не содержащий дифференциала $\delta p'_\rho$ с коэффициентом при $\delta q'_\rho$, равным p'_ρ. Коэффициент при $\delta t'$ будет функцией переменных (q', t', p'); обозначая его через $-H'(q', t', p')$, получим

$$p_\rho\delta q_\rho - H(q, t, p)\,\delta t = p'_\rho\delta q'_\rho - H'(q', t', p')\,\delta t' + \delta G; \tag{94.13}$$

---

rentielles extérieures et leurs applications géometriques (Paris, Hermann, 1945); de Donder Th., Théorie des invariants intégraux (Paris, Gauthier-Villars, 1927); Ślebodziński W., Formes extérieures et leurs applications (Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1954).

δG — полный дифференциал, и канонические уравнения (94.11) преобразуются в следующие[1]):

$$\frac{dq'_\rho}{dt'} = \frac{\partial H'}{\partial p'_\rho}, \quad \frac{dp'_\rho}{dt'} = -\frac{\partial H'}{\partial q'_\rho}. \qquad (94.14)$$

§ 95. Канонические преобразования в *QTP*. Если мы хотим произвести в пространстве QTP преобразования координат, сохраняющие форму уравнений движения, то лучше всего свести все рассмотрение к форме Пфаффа (94.12); канонические уравнения, исследованные в § 87, могут быть применены в пространстве четного числа измерений. Таким пространством является фазовое пространство QP. Поэтому мы возвратимся к каноническим преобразованиям координат при исследовании QP в гл. Д VII. Однако прежде чем перейти к рассмотрению фазового пространства, покажем, как движение системы, представленное в пространстве QTP, может быть исследовано с помощью канонических преобразований между двумя поверхностями, на каждой из которых $t = \text{const}$; эти поверхности, будучи четной размерности, преобразуются одна в другую каноническим преобразованием.

Вернемся к двухточечной характеристической функции $S(x^*, x)$ § 72, которую запишем теперь в форме

$$S = S(q^*, \ t^*, \ q, \ t). \qquad (95.1)$$

Рассмотрим две поверхности Σ^*, Σ в пространстве QTP с $t = \text{const}$ на каждой из них. Естественная конгруэнция устанавливает соответствие $\Sigma^* \longleftrightarrow \Sigma$ между точками этих двух поверхностей; пусть E^* и E — точки пересечения поверхностей с одной из траекторий, как показано на рис. 44. Его нельзя смешивать с рис. 35 § 75, который показывает совокупность траекторий в $(N+1)$-мерном пространстве QT, образующих когерентную систему (∞^N множество кривых). На рис. 44 показаны изображающие кривые, взятые из конгруэнции *всех* траекторий (∞^{2N} множество кривых).

---

[1]) О связи этих уравнений с каноническими преобразованиями в пространстве QP см. § 97.

Согласно (72.12) имеем выражение

$$\delta S = p_\rho\, \delta q_\rho - H\, \delta t - p_\rho^*\, \delta q_\rho^* + H^*\, \delta t^* \qquad (95.2)$$

для произвольных вариаций E^* и E. Преобразование $E^* \to E$ задается поэтому уравнениями

$$p_\rho = \frac{\partial S}{\partial q_\rho}, \qquad p_\rho^* = -\frac{\partial S}{\partial q_\rho^*}; \qquad (95.3)$$

при этом t^* и t — заданные постоянные значения, которые

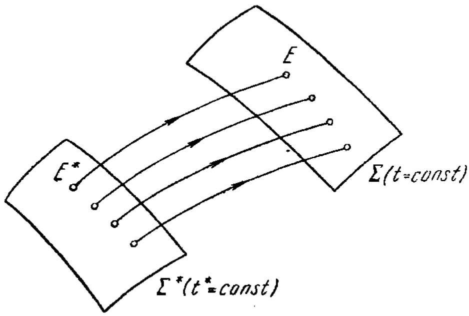


Рис. 44. Каноническое преобразование $E^* \to E$, производимое естественной конгруэнцией траекторий в QTP.

t имеет соответственно на поверхностях Σ^* и Σ. Преобразование функции H определяется уравнениями

$$H = -\frac{\partial S}{\partial t}, \qquad H^* = \frac{\partial S}{\partial t^*}. \qquad (95.4)$$

Мы видим, что (95.13) представляет собой каноническое преобразование

$$(q^*, p^*) \to (q, p); \qquad (95.5)$$

величины t^* и t входят как параметры в производящую функцию S. Если зафиксировать значение t^* и изменить t, то получается множество канонических преобразований, которые преобразуют начальную изохронную поверхность ($t = t^*$) во все последовательные изохронные поверхности.

Для того чтобы вывести каноническое преобразование, можно использовать также характеристическую функцию в пространстве импульса — энергии $W(y^*, y)$ (§ 79). Выражая эту функцию в виде

$$W = W(p^*, H^*, p, H), \tag{95.6}$$

получим преобразование

$$q_\rho = \frac{\partial W}{\partial p_\rho}, \qquad \overset{*}{q}_\rho = -\frac{\partial W}{\partial p^*_\rho} \tag{95.7}$$

(ср. с (79.14)). Поверхности, которые при этом канонически преобразуются одна в другую, являются поверхностями, на которых $H = \text{const}$. Это преобразование теряет смысл, если $\partial H/\partial t = 0$, так как тогда $H = \text{const}$ на каждом луче или траектории и, следовательно, эти уравнения не могут преобразовать одну поверхность $H = \text{const}$ в другую.

ГЛАВА VII

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО (*QP*)

§ 96. Основная теория для консервативных систем в *QP*. В главах Д II—VI были введены различные пространства изображений для того, чтобы пролить свет на математическую структуру гамильтоновой динамики. Несмотря на разнообразие представлений, все они связаны между собой теорией одного типа, теорией, основанной на допущении уравнения энергии $\Omega(x, y) = 0$ или на гамильтониане $H(q, t, p)$. Из этих пространств пространства QT, $QTPH$ и QTP лучше других подходят для обсуждения теории наиболее общего типа: PH имеет несколько более узкий интерес в связи с проблемами столкновений; Q — полезно в случае консервативных гамильтоновых систем (для которых $H = H(q, p)$), а также для негамильтоновой динамики.

Мы переходим к последнему пространству изображений — $2N$-мерному фазовому пространству QP, в котором координатами [1]) точки являются q_ρ, p_ρ. Вероятно, пространство QP наиболее знакомо физикам в связи с использованием его в статистической механике [2]).

[1]) Вообще говоря, в конечных областях может потребоваться существование перекрывающихся координатных систем (ср. § 63) с каноническими преобразованиями в пересечениях.

[2]) Гиббс Дж., Основные принципы статистической механики, Гостехиздат, Москва, 1946 (The Collected Works of J. Willard Gibbs, т. II (New York — London — Toronto, Longmans Green, 1928)). Гиббс (цит. соч., стр. 6, 10) ввел геометрическую идею фазового пространства, обладающего инвариантным фазовым интегралом $\int dp_1\, dp_2 \, \ldots \, dp_N\, dq_1 \ldots dq_N$. Полное и ясное обсуждение работы Гиббса см. в статьях Haas A. and Epstein P. S., Commentary on Scientific Writtings of J. Willard Gibbs, т. II

При изучении гамильтоновой динамики в QP нужно рассматривать время t как параметр, а гамильтониан — как заданную функцию $H(q, t, p)$ переменных (q, p) и этого параметра. Канонические уравнения

$$\dot{q}_\rho = \frac{\partial H}{\partial p_\rho}, \quad \dot{p}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial q_\rho} \tag{96.1}$$

описывают движение изображающей точки в пространстве QP. Нужно различать общий случай $(\partial H/\partial t \neq 0)$ и случай консервативности $(\partial H/\partial t = 0)$. В случае консервативной системы имеем

$$H = H(q, p) \tag{96.2}$$

и видим, что QP заполнено естественной конгруэнцией с уравнениями

$$\frac{dq_1}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dq_N}{\dfrac{\partial H}{\partial p_N}} = \frac{dp_1}{-\dfrac{\partial H}{\partial q_1}} = \ldots = \frac{dp_N}{-\dfrac{\partial H}{\partial q_N}}; \tag{96.3}$$

каждая кривая конгруэнции (т. е. каждая траектория) лежит на $(2N-1)$-мерной поверхности, уравнение которой имеет вид

$$H(q, p) = E, \tag{96.4}$$

где $E = \text{const}$. Соответствующая картина для случая, когда $H = H(q, t, p)$, более сложна потому, что направление траектории в точке пространства QP зависит от значения t, так что существует ∞^1 возможных направлений в точке пространства, зависящих от значения t.

В дальнейшем в этом параграфе мы будем рассматривать только консервативные системы, для которых функция H имеет вид (96.2).

(New Haven, Gale University Press, 1936). Пространство QP называется также μ-пространством (μ-Raum) или Γ-пространством соответственно способу, которым оно вводится в статистической теории; ср. M ü n s t e r A., Statistische Thermodynamik, стр. 27—99 (Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1956).

Сравнивая (86.6) и (96.1), видим, что *динамика консервативной системы в пространстве QP с гамильтоновой функцией $H(q, p)$ математически тождественна динамике в пространстве $QTPH$* с функцией энергии $\Omega(x, y)$. Единственное отличие заключается в обозначениях.

Этот изоморфизм интересен потому, что он объединяет вместе противоположные подходы к гамильтоновой динамике. С одной стороны, динамика в пространстве $QTPH$ имеет столь большую общность, какую только можно пожелать в настоящее время, причем как время t, так и гамильтониан H входят в уравнения математически равноправно с (q, p), так что теория вполне пригодна для применения в релятивистском случае. С другой стороны, динамика консервативной системы в QP охватывает те проблемы, которые являются наиболее известными в ньютоновой динамике и возникают из рассмотрения движения систем частиц и твердых тел.

Однако хотя динамика в пространстве $QTPH$ и динамика консервативных систем в QP математически изоморфны, их физические интерпретации совершенно различны и целесообразно перевести теорию, развитую для $QTPH$, в форму, приложимую к динамике консервативных систем в QP.

В таблице на стр. 336 приведены отмеченные соответствия[1]).

Если сместить контур C в пространстве QP на (dq, dp) вдоль естественной конгруэнции, то, как и в формуле (90.17), циркуляция изменится при этом на

$$d\varkappa(C) = d\oint_C p_\rho\,\delta q_\rho = -\oint_C dt\,\delta H. \qquad (96.5)$$

Поэтому циркуляция не изменяется при перемещении, если

1) контур C движется вместе с системой, так что $dt = \text{const}$, или

2) контур C проведен на изоэнергетической поверхности $H = \text{const}$.

---

[1]) Обозначения см. в § 62.

	Пространство состояний и энергии $QTPH$ $2N+2$-измерений	Фазовое пространство QP $2N$-измерений
Координаты точки	$x_r,\ y_r$	$q_\rho,\ p_\rho$
Функция энергии	$\Omega(x, y)$	Гамильтониан $H(q, p)$
Канонические уравнения	$\dfrac{dx_r}{dw} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial y_r}$, $\dfrac{dy_r}{dw} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial x_r}$	$\dfrac{dq_\rho}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\rho}$, $\dfrac{dp_\rho}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\rho}$
Специальный параметр на траектории	w	t
Циркуляция	$\oint\limits_C y_r \delta x_r$	$\oint\limits_C p_\rho\, \delta q_\rho$
Инвариантная билинейная форма	$\delta_1 x_r \delta_2 y_r - \delta_2 x_r \delta_1 y_r$	$\delta_1 q_\rho \delta_2 p_\rho - \delta_2 q_\rho \delta_1 p_\rho$
Скобки Пуассона	$[u, v] = \dfrac{\partial u}{\partial x_r}\dfrac{\partial v}{\partial y_r} - \dfrac{\partial v}{\partial x_r}\dfrac{\partial u}{\partial y_r}$	$[u, v] = \dfrac{\partial u}{\partial q_\rho}\dfrac{\partial v}{\partial p_\rho} - \dfrac{\partial v}{\partial q_\rho}\dfrac{\partial u}{\partial p_\rho}$
Скобки Лагранжа	$\{u, v\} = \dfrac{\partial x_r}{\partial u}\dfrac{\partial y_r}{\partial v} - \dfrac{\partial x_r}{\partial v}\dfrac{\partial y_r}{\partial u}$	$\{u, v\} = \dfrac{\partial q_\rho}{\partial u}\dfrac{\partial p_\rho}{\partial v} - \dfrac{\partial q_\rho}{\partial v}\dfrac{\partial p_\rho}{\partial u}$

Канонические преобразования (88.20) здесь принимают вид

$$p_\rho = \frac{\partial G_1(q, q')}{\partial q_\rho}, \quad p'_\rho = -\frac{\partial G'(q, q')}{\partial q'_\rho}; \tag{96.6a}$$

$$q_\rho = \frac{\partial G_2(p, p')}{\partial p_\rho}, \quad q'_\rho = -\frac{\partial G_2(p, p')}{\partial p'_\rho}; \tag{96.6b}$$

$$p_\rho = \frac{\partial G_3(q, p')}{\partial q_\rho}, \quad q'_\rho = \frac{\partial G_3(q, p')}{\partial p'_\rho}; \tag{96.6c}$$

$$q_\rho = \frac{\partial G_4(p, q')}{\partial p_\rho}, \quad p'_\rho = \frac{\partial G_4(p, q')}{\partial q'_\rho}. \tag{96.6d}$$

Здесь производящие функции произвольны и должны только удовлетворять условию несингулярности, а именно

$$\det \frac{\partial^2 G_1(q, q')}{\partial q_\rho \, \partial q'_\sigma} \neq 0. \tag{96.7}$$

Различные производящие функции, выполняющие одно и то же преобразование, связаны уравнениями вида (88.19).

В $QTPH$ функция Ω была инвариантом, а специальный параметр w оставался неизменным при КП. Поэтому в QP, H преобразуется как инвариант, а t не изменяется. Канонические уравнения (96.1) преобразуются в следующие:

$$\dot{q}'_\rho = \frac{\partial H'}{\partial p'_\rho}, \quad \dot{p}'_\rho = -\frac{\partial H'}{\partial q'_\rho}, \quad H'(q', p') = H(q, p). \tag{96.8}$$

Для того чтобы преобразовать траектории в пространстве QP в параллельные прямые, повторим рассуждения § 91 [1]). Находим функцию $G(q, p')$, удовлетворяющую уравнению Гамильтона — Якоби,

$$H\left(q, \frac{\partial G}{\partial q}\right) = p'_N, \qquad \det \frac{\partial^2 G}{\partial q_\rho \, \partial p'_\sigma} \neq 0. \tag{96.9}$$

Тогда КП

$$p_\rho = \frac{\partial G(q, p')}{\partial q_r}, \qquad q'_\rho = \frac{\partial G(q, p')}{\partial p'_\rho} \tag{96.10}$$

определяет гамильтониан

$$H'(q', p') = H(q, p) = p'_N, \tag{96.11}$$

и после интегрирования траектории будут представлены следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} q'_1 = a_1, \ \ldots, \ q'_{N-1} = a_{N-1}, \ q'_N = t, \\ p'_1 = b_1, \ \ldots, \ p'_{N-1} = b_{N-1}, \ p'_N = E, \end{aligned}\right\} \tag{96.12}$$

где a_i, b_i и E — постоянные.

---

[1]) Эта формальная аргументация имеет место только в малых областях; ср. с § 63, 100.

В случае консервативной системы всегда можно уменьшить число канонических уравнений на два с помощью интеграла энергии

$$H(q, p) = E, \tag{96.13}$$

который является очевидным следствием уравнений (96.1). Это уменьшение проводилось в § 92 и здесь достаточно отметить, как выполняется эта операция. Разрешаем уравнение (96.13) относительно одного из импульсов, например p_N, получая, таким образом,

$$p_N = -f(q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_{N-1}, E); \tag{96.14}$$

тогда система $2N - 2$ полученных уравнений имеет вид (92.34), с той лишь разницей, что ω заменена на f.

Если дан первый интеграл $F(q, p)$, т. е. постоянная движения, то можно уменьшить число уравнений движения на два, как в § 92, решая уравнение

$$F\left(q, \frac{\partial G}{\partial q}\right) = p'_N, \qquad \det \frac{\partial^2 G}{\partial q_\rho\, \partial p'_\sigma} \neq 0 \tag{96.15}$$

относительно $G(q, p')$ и применив КП (96.10). Так как p'_N — постоянная при движении, то новый гамильтониан $H'(q', p')$ не содержит q'_N и новые уравнения движения имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}'_1 &= \frac{\partial H'}{\partial p'_1}, \ \ldots, \ \dot{q}'_{N-1} = \frac{\partial H}{\partial p'_{N-1}}, \\ \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H'}{\partial q'_1}, \ \ldots, \ \dot{p}'_{N-1} = -\frac{\partial H'}{\partial q'_{N-1}}. \end{aligned}\right\} \tag{96.16}$$

Кроме этого, мы можем уменьшить число уравнений на два с помощью интеграла энергии (96.13).

Заметим, что решение уравнения (96.15) эквивалентно определению движения. Решение (96.15) может быть гораздо более простым, если $F(q, \varrho)$ будет простой функцией, аналогичной $p_1 + p_2 + p_3$ (ср. (92.35)).

§ 97. Неконсервативные системы. Канонические преобразования в QP. Скобки Пуассона и скобки Лагранжа[1]**.** Обратимся к рассмотрению неконсервативных систем с гамильтонианом $H(q, t, p)$, явно зависящим от времени, так что

$$\frac{\partial H}{\partial t} \neq 0. \tag{97.1}$$

Так как функция энергии в пространстве $QTPH$ имела вид $\Omega(x, y)$, а не $\Omega(x, y, \omega)$, то нельзя перенести теорию, развитую для $QTPH$, простым уменьшением размерности, как мы сделали это для консервативных систем в § 96. Правда, теория для пространства $QTPH$ остается справедливой во всей ее общности, однако она развита для пространства, в котором t является координатой, а в пространстве QP мы низводим t до роли простого параметра.

Рассмотрим функцию $G(q, q', t)$ и преобразование $(q, p) \to (q', p')$, заданное формулами

$$p_\rho = \frac{\partial G(q, q', t)}{\partial q_\rho}, \quad p'_\rho = -\frac{\partial G(q, q', t)}{\partial q'_\rho}. \tag{97.2}$$

Тогда имеет место уравнение

$$p_\rho\, \delta q_\rho - p'_\rho\, \delta q'_\rho = \delta G - \frac{\partial G}{\partial t}\, \delta t \tag{97.3}$$

или

$$p_\rho\, \delta q_\rho - H(q, t, p)\, \delta t = \\ = p'_\rho\, \delta q'_\rho - K(q', t, p')\, \delta t + \delta G, \tag{97.4}$$

где

$$K(q', t, p') = H(q, t, p) + \frac{\partial G(q, q', t)}{\partial t}. \tag{97.5}$$

Теперь G — функция положения в пространстве QTP (так как можно разрешить (97.2) относительно q'_ρ, выразив его через (q, t, p)) и мы можем применить доказа-

[1]) Ср. Уиттекер [28], гл. XI.

тельство Пфаффа, аналогичное проведенному на стр. 329; отсюда заключаем, что канонические уравнения преобра-

$$\dot{q}_\rho = \frac{\partial H}{\partial p_\rho}, \qquad \dot{p}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial q_\rho} \tag{97.6}$$

зуются в следующие: 159

$$\dot{q}'_\rho = \frac{\partial K}{\partial p'_\rho}, \qquad \dot{p}'_\rho = -\frac{\partial K}{\partial q'_\rho}, \tag{97.7}$$

причем гамильтониан изменяется согласно (97.5). Таким образом, (97.2) есть каноническое преобразование (КП) в пространстве QP; производящая функция G содержит время t как параметр.

Это исследование в пространстве QP является менее общим, чем исследование, данное в § 94 для пространства QTP, потому что в случае пространства QP время не подвергается преобразованию. О КП, сохраняющих время в $QTPH$, см. уравнения (88.26).

Пусть u и v — две произвольные функции $2N+1$ величин (q, p, t), т. е. функции положения в пространстве QP и параметра t; их скобки Пуассона определяются следующим образом:

$$[u, v] = \frac{\partial u}{\partial q_\rho}\frac{\partial v}{\partial p_\rho} - \frac{\partial v}{\partial q_\rho}\frac{\partial u}{\partial p_\rho}. \tag{97.8}$$

Когда изображающая точка движется вдоль траектории, скоростью изменения любой функции $F(q, p, t)$ будет

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_\rho}\dot{q}_\rho + \frac{\partial F}{\partial p_\rho}\dot{p}_\rho = \frac{\partial F}{\partial t} + [F, H]. \tag{97.9}$$

В частности, с помощью скобок Пуассона имеем другую возможную запись канонических уравнений:

$$\dot{q}_\rho = [q_\rho, H], \qquad \dot{p}_\rho = p_\rho, H]. \tag{97.10}$$

Покажем теперь, что *если* $u(q, p, t)$ *и* $v(q, p, t)$ *— две постоянные движения, то их скобки Пуассона* $[u, v]$ *также являются постоянной движения.*

Нам даны выражения

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+[u, H]=0, \qquad \frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+[v, H]=0. \quad (97.11)$$

Согласно (97.9) имеем уравнение

$$\frac{d}{dt}[u, v]=\frac{\partial}{\partial t}[u, v]+[[u, v], H]; \qquad (97.12)$$

последний член его можно изменить, приняв во внимание тождества Якоби — Пуассона

$$[[u, v], w]+[[u, w], v]+[[w, u], v]=0$$

(ср. с (89.3)), так что вследствие кососимметричности скобок Пуассона получаем соотношение

$$\frac{d}{dt}[u, v]=\frac{\partial}{\partial t}[u, v]-[[v, H], u]+[[u, H], v]. \quad (97.13)$$

Подставляя значения (97.11), получаем

$$\frac{d}{dt}[u, v]=\frac{\partial}{\partial t}[u, v]+\left[\frac{\partial v}{\partial t}, u\right]-\left[\frac{\partial u}{\partial t}, v\right]=0, \quad (97.14)$$

что и доказывает сформулированное утверждение.

Рассмотрим теперь ∞^2 семейство траекторий с уравнениями

$$q_\rho=q_\rho(u, v, t),\ p_\rho=p_\rho(u, v, t), \qquad (97.15)$$

где u и v — постоянны вдоль каждой траектории. Тогда скобки Лагранжа

$$\{u, v\}=\frac{\partial q_\rho}{\partial u}\frac{\partial p_\rho}{\partial v}-\frac{\partial q_\rho}{\partial v}\frac{\partial p_\rho}{\partial u} \qquad (97.16)$$

есть функции u, v и t; докажем непосредственным вычислением, что эти *скобки Лагранжа — постоянная движения*. Имеем уравнения

$$\frac{\partial q_\rho}{\partial t}=\dot{q}_\rho=\frac{\partial H}{\partial p_\rho}, \qquad \frac{\partial p_\rho}{\partial t}=\dot{p}_\rho=-\frac{\partial H}{\partial q_\rho}; \quad (97.17)$$

эти величины являются функциями u, v и t. Тогда

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_\rho}{\partial u}\frac{\partial p_\rho}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial q_\rho}{\partial u}\frac{\partial p_\rho}{\partial v}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial H}{\partial p_\rho}\right)\frac{\partial p_\rho}{\partial v}-\frac{\partial q_\rho}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\rho}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 H}{\partial p_\rho\,\partial q_\sigma}\frac{\partial q_\sigma}{\partial u}\frac{\partial p_\rho}{\partial v}+\frac{\partial^2 H}{\partial p_\rho\,\partial p_\sigma}\frac{\partial p_\sigma}{\partial u}\frac{\partial p_\rho}{\partial v}-$$

$$-\frac{\partial q_\rho}{\partial u}\frac{\partial^2 H}{\partial q_\rho\,\partial q_\sigma}\frac{\partial q_\sigma}{\partial v}-\frac{\partial q_\rho}{\partial u}\frac{\partial^2 H}{\partial q_\rho\,\partial p_\sigma}\frac{\partial p_\sigma}{\partial v}=$$

$$=\frac{\partial^2 H}{\partial p_\rho\,\partial p_\sigma}\frac{\partial p_\sigma}{\partial u}\frac{\partial p_\rho}{\partial v}-\frac{\partial^2 H}{\partial q_\rho\,\partial q_\sigma}\frac{\partial q_\rho}{\partial u}\frac{\partial q_\sigma}{\partial v}. \qquad (97.18)$$

Меняя местами u и v и вычитая из (97.18) полученное таким образом уравнение, приходим к уравнению

$$\frac{d}{dt}\{u,\ v\}=0, \qquad (97.19)$$

которое и доказывает наше утверждение.

§ 98. Неконсервативные системы. Абсолютные интегральные инварианты в пространстве QP. Теорема Лиувилля. Продолжаем рассматривать общую систему, для которой $H=H(q,\ t,\ p)$. Пусть большие индексы A, A_1, ... принимают значения $1, 2, \ldots, 2M$, где $M\leqslant N$, а N, как всегда, число степеней свободы системы. Рассмотрим ∞^{2M} семейство траекторий с уравнениями

$$q_\rho=q_\rho(u,t),\quad p_\rho=p_\rho(u,t), \qquad (98.1)$$

где u означает совокупность $2M$ величин u_A, которые постоянны вдоль каждой траектории.

Для любого фиксированного значения t уравнения (98.1) определяют $2M$-мерную поверхность в пространстве QP. Пусть D — некоторая область на этой поверхности, ограниченная пределами изменения u_A. Введем следующий $2M \times 2M$ детерминант, зависящий от u_A и t:

$$\Delta_M(\varrho_1, \ldots, \varrho_M, \sigma_1, \ldots, \sigma_M) =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial q_{\varrho_1}}{\partial u_1} & \frac{\partial q_{\varrho_1}}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial q_{\varrho_1}}{\partial u_{2M}} \\ \frac{\partial q_{\varrho_2}}{\partial u_1} & \frac{\partial q_{\varrho_2}}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial q_{\varrho_2}}{\partial u_{2M}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial q_{\varrho_M}}{\partial u_1} & \frac{\partial q_{\varrho_M}}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial q_{\varrho_M}}{\partial u_{2M}} \\ \frac{\partial p_{\sigma_1}}{\partial u_1} & \frac{\partial p_{\sigma_1}}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial p_{\sigma_1}}{\partial u_{2M}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial p_{\sigma_M}}{\partial u_1} & \frac{\partial p_{\sigma_M}}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial p_{\sigma_M}}{\partial u_{2M}} \end{vmatrix}. \tag{98.2}$$

Здесь $\varrho_1, \ldots, \varrho_M, \sigma_1, \ldots, \sigma_M$ — любые числа в пределах $1, 2, \ldots, N$. Тогда интеграл

$$\int_D \Delta_M(\varrho_1, \ldots, \varrho_M, \sigma_1, \ldots, \sigma_M)\, du_1 \ldots du_{2M} \tag{98.3}$$

инвариантен в том смысле, что он имеет одно и то же значение независимо от того, какие параметры[1]) u_A выбраны в области D. Определим Φ_M следующим образом:

$$\Phi_M = \Delta_M(\varrho_1, \ldots, \varrho_M, \varrho_1, \ldots, \varrho_M) \tag{98.4}$$

(с обычным условием суммирования). Далее определим:

$$I_M = \frac{1}{M!} \int_D \Phi_M\, du_1 \ldots du_{2M}. \tag{98.5}$$

---

[1]) При условии, что их ориентация не изменяется; ср. B l o c k H. D., Quart. Appl. Math. 12, 201—203 (1954).

Его значение не зависит от выбора параметров u_A в D.

Вводя символ перестановки $\varepsilon_{A_1 \ldots A_{2M}}$, который кососимметричен относительно всех своих индексов и равен единице, когда они пробегают значения $1, 2, \ldots, 2M$, можно записать детерминант (98.2) в явном виде. Однако нам нужна функция Φ_M только в форме (98.4); она имеет вид

$$\Phi_M = \varepsilon_{A_1 \ldots A_{2M}} \frac{\partial q_{\rho_1}}{\partial u_{A_1}} \cdots \frac{\partial q_{\rho_M}}{\partial u_{A_M}} \frac{\partial p_{\rho_1}}{\partial u_{A_{M+1}}} \cdots \frac{\partial p_{\rho_M}}{\partial u_{A_{2M}}}. \tag{98.6}$$

Здесь суммирование производится по каждому ρ в пределах $1 \ldots N$ и по каждому A в пределах $1 \ldots 2M$. Выражая Φ_M через скобки Лагранжа, имеем

$$\Phi_M = \left(\frac{1}{2}\right)^M \varepsilon_{A_1 \ldots A_{2M}} \{u_{A_1}, u_{A_{M+1}}\}\{u_{A_2}, u_{A_{M+2}}\} \ldots \\ \ldots \{u_{A_M}, u_{A_{2M}}\}. \tag{98.7}$$

Каждые скобки Лагранжа не зависят от t согласно (97.19). Поэтому Φ_M не зависит от t, и мы заключаем, что *интегралы I_M, определенные формулами* (98.5) *для $M = 1, 2, \ldots, N$, являются абсолютными*[1]) *интегральными инвариантами.*

Случай $M = N$ имеет особый интерес. Абсолютный интегральный инвариант

$$I_N = \frac{1}{N!} \int_D \Phi_N \, du_1 \ldots du_{2N} \tag{98.8}$$

представляет теперь интеграл, распространенный по части $2N$-мерной области D в $2N$-мерном фазовом пространстве QP. Эта область изменяется с t, изображающие точки перемещаются согласно каноническим уравнениям (рис. 45). Для любого произвольно выбранного значения t можно использовать (q, p) как координаты в области D, так

[1]) Они называются *абсолютными* (не *относительными*), потому что D не должно быть замкнутой областью (например, контуром).

что

$$u_1 = q_1, \ldots, u_N = q_N, \ u_{N+1} = p_1, \ldots, u_{2N} = p_N. \tag{98.9}$$

Уравнения (98.2) и (98.4) дают тогда

$$\left.\begin{aligned} \Delta_N(\rho_1, \ldots, \rho_N, \sigma_1, \ldots, \sigma_N) &= \varepsilon_{\rho_1 \ldots \rho_N} \varepsilon_{\sigma_1 \ldots \sigma_N}, \\ \Phi_N &= N! \end{aligned}\right\} \tag{98.10}$$

и интегральный инвариант I_N принимает следующий вид:

$$I_N = \int\limits_D dq_1 \ldots dq_N \, dp_1 \ldots dp_N = \int\limits_D dq \, dp \tag{98.11}$$

(если использовать сокращенное обозначение). Называя этот инвариант *объемом*[1]) D, имеем теорему Лиувилля: *объем любой части пространства QP сохраняется, если изображающие точки, которые образуют его, движутся согласно каноническим уравнениям.*

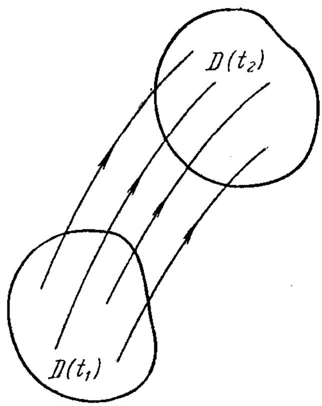


Рис. 45. Сохранение объема в QP (теорема Лиувилля).

Этот результат имеет столь большое значение в статистической механике, что мы рассмотрим его с двух точек зрения.

Во-первых, теорема Лиувилля в той форме, в какой она доказана им[2]), на самом деле более обща, так как в ней можно не требовать ни четности пространства, ни канонической формы уравнений движения. Рассмотрим уравнения

$$\frac{dx_A}{dt} = X_A(x, t), \tag{98.12}$$

[1]) Гиббс называет его extension-in-phase (фазовый объем). [См. Гиббс, Основные принципы статистической механики, Гостехиздат, Москва, 1946, стр. 23. (Прим. перев.)]

[2]) Известная теорема — побочный результат в его статье; см. Liouville J., J. de Math. 3, 342 (1838).

где правые части удовлетворяют условию

$$\frac{\partial X_A}{\partial x_A} = 0, \tag{98.13}$$

а индексы A пробегают значения 1, 2, ..., M (с обычным условием суммирования). Используем гидродинамическую терминологию вместо того, чтобы следовать рассуждениям Лиувилля. Уравнения (98.12) определяют поле скорости $v_A = X_A$ в M-мерном пространстве, в котором x_A выбраны в качестве декартовых прямоугольных координат. Так же как в обычной гидродинамике выражение

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

есть расходимость (скорость возрастания единицы объема), так и в этом M-пространстве $\partial v_A / \partial x_A$ имеет тот же смысл, а объем определяется как $\int dx_1 \ldots dx_M$. Тогда вследствие (98.13) объем сохраняется. Детали доказательства можно дополнить, выразив скорость возрастания объема, движущегося согласно уравнениям (98.12), через интеграл по ограничивающему его (M — 1)-пространству и применяя теорему Грина. Очевидно, что в частности условие (98.13) выполняется, если M четно и уравнения (98.12) — канонические.

Возможен другой подход с помощью канонических преобразований (КП). Суть дела здесь состоит в том, что якобиан КП равен единице (ср. с (88.29)); это остается справедливым даже в том случае, если КП $(q, p) \to (q', p')$ содержит t как параметр. Отсюда следуют два заключения. Во-первых, совершенно безотносительно к движению, видим, что интеграл I_N (98.11) есть удобное определение объема, так как объем, определенный таким образом, имеет одно и то же значение для всех координат (q, p) в пространстве QP, полученных из одной такой совокупности координат посредством КП[1]). Во-вторых, объем сохраняется при движении, потому что движение в соответствии с каноническими уравнениями состоит из бесконечно малого КП (ср. (90.4)).

---

[1]) Не существует определения объема, инвариантного относительно произвольных преобразований (q, p).

В статистической механике[1]) мы рассматриваем огромное число n идентичных гамильтоновых систем, отличающихся только их начальными условиями. Суперпозиция этих систем в пространстве QP дает ансамбль («облако тонкодисперсной пыли») изображающих точек с плотностью вероятности $f(q, p, t)$, такой, что $nf\,dq\,dp$ есть число изображающих точек в элементе объема $dq\,dp$ в момент времени t. Когда элемент $dq\,dp$ движется, согласно каноническим уравнениям его объем сохраняется, также сохраняется число изображающих точек в нем. Отсюда $df/dt = 0$ или, что эквивалентно,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0. \qquad (98.14)$$

Это — фундаментальное дифференциальное уравнение в частных производных, которому удовлетворяет плотность f; оно определяет f для любого t, если задано f для $t = 0$.

§ 99. Переменные действие — угол[2]). Переменные действие — угол были введены Делоне для исследования проблем астрономических возмущений в небесной механике. Позже они оказались чрезвычайно удобными для старой формы квантовой механики, так как квантование Бора — Зоммерфельда состояло в том, что каждая переменная — действие полагалась равной целому кратному постоянной Планка h.

---

[1]) См. Fowler R. H., Statistical Mechanics (Cambridge, University Press); Хинчин А. Я., Математические основания статистической механики (Москва, Гостехиздат, 1943); Münster A., Statistische Thermodynamik (Berlin, Springer, 1956); см. также статью Э. А. Гуггенхейма в части второй тома III Handbuch der Physik.

[2]) О различных исследованиях переменных действие — угол с примерами и ссылками на квантовые условия и адиабатические инварианты см. Борн М., Лекции по атомной механике, т. 2, Науч.-тех. изд-во Украины, Харьков — Киев, 1934; Corben and Stehle [3], стр. 239—264; Fues [6]; Голдстейн [7], стр. 311—321; Lanczos [15], стр. 243—254; Зоммерфельд А., Строение атома и спектры, пер. К. П. Гурова, под ред. И. Б. Боровского, Гостехиздат, Москва, 1956, т. 1, стр. 534—541.

Как показано ниже, теория переменных действие — угол зависит от разделения переменных в уравнении Гамильтона — Якоби. Пространство QP должно иметь евклидову топологию, одна или более разделяющихся переменных может быть циклической (как, например, азимутальный угол)[1]. Однако наличие циклических координат не является существенной чертой теории, просто они делают обсуждение несколько более сложным. Поэтому будем предполагать, что таких координат нет; существенные изменения, вызванные их наличием, будут отмечаться там, где это необходимо.

Пусть гамильтониан[2] $H(q, p)$ таков, что уравнение Гамильтона — Якоби допускает разделение переменных (§ 78). Поэтому мы замечаем, что в $2N$-мерном пространстве переменных (q, p') дифференциальное уравнение в частных производных

$$H\left(q, \frac{\partial G}{\partial q}\right) = p'_N \tag{99.1}$$

имеет решение вида

$$G(q, p') = G_1(q_1, p') + G_2(q_2, p') + \ldots + G_N(q_N, p'), \tag{99.2}$$

где p' подставлено вместо N величин p'_ρ и выполняется детерминантное условие

$$\det \frac{\partial^2 G}{\partial q_\rho\, \partial p_\sigma} \neq 0; \tag{99.3}$$

другими словами, (99.2) есть полный интеграл уравнения.

Каноническое преобразование (КП) определяется уравнениями

$$p_\rho = \frac{\partial G(q, p')}{\partial q_\rho}, \qquad q'_\rho = \frac{\partial G(q, p')}{\partial p'_\rho}. \tag{99.4}$$

---

[1]) Напомним, что слово «циклический» употребляется в топологическом смысле; этот термин нельзя путать с «игнорируемый» (§ 63).

[2]) Предполагается, что система консервативна, т. е. $\partial H/\partial t = 0$.

Отсюда можно видеть, чтó дает разделение переменных; в более подробной записи первая группа этих уравнений имеет вид

$$p_1 = \frac{\partial G_1(q_1, p')}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial G_2(q_2, p')}{\partial q_2}, \ \dots$$

$$\dots, p_N = \frac{\partial G_N(q_N, p')}{\partial q_N}; \tag{99.5}$$

каждое уравнение содержит только одну переменную p и соответствующую ей q, но, конечно, в каждое уравнение входят, вообще говоря, все величины p'_ρ.

Новый гамильтониан равен тогда

$$H'(q', p') = H(q, p) = H\left(q, \frac{\partial G}{\partial q}\right) = p'_N, \tag{99.6}$$

а новые уравнения движения имеют вид

$$\dot{q}'_\rho = \frac{\partial H'}{\partial p'_\rho}, \quad \dot{p}'_\rho = -\frac{\partial H'}{\partial q'_\rho}. \tag{99.7}$$

Поэтому все величины (q', p') — постоянные вдоль каждой траектории, исключая q'_N, ибо для нее имеем $\dot{q}'_N = 1$, так что $q'_N = t + \mathrm{const}$. Можно написать

$$p'_N = E, \tag{99.8}$$

где E — постоянное значение H на траектории. С помощью КП (99.4) мы преобразовали траекторию в параллельные прямые линии, как в § 96.

Рассмотрим изображающую плоскость Π_1, в которой q_1, p_1 выбраны за прямоугольные декартовы координаты (рис. 46). Если N величин p'_ρ остаются постоянными, то первое уравнение (99.5) определяет кривую в плоскости Π_1; обозначим эту кривую через $\Gamma_1(p')$. Аналогично другие уравнения в (99.5) определяют кривые $\Gamma_2(p')$, ..., $\Gamma_N(p')$ в изображающих плоскостях Π_2, ..., Π_N.

Предположим теперь, что все эти кривые замкнуты[1]). В каждой изображающей плоскости имеем ∞^N контуров $\Gamma_\rho\,(p')$; система контуров

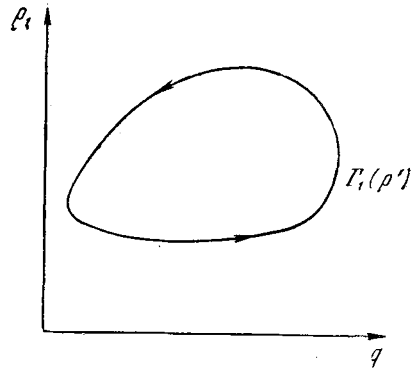


Рис. 46. Контур $\Gamma(p')$ или $\Gamma_1(y)$ в плоскости канонических переменных q, p.

(по одному в каждой плоскости) определяется значениями N величин p'_ρ.

Определим величины J_ρ формулами

$$J_1 = \oint\limits_{\Gamma_1(p')} p_1\,dq_1, \;\ldots,\; J_N = \oint\limits_{\Gamma_N(p')} p_N\,dq_N; \tag{99.9}$$

на самом деле это «площади», заключенные внутри[2]) нескольких контуров, определенных значениями p'_ρ. Предполагая затем, что

$$\det \frac{\partial\ \rho}{\partial p'_\sigma} \neq 0, \tag{99.10}$$

---

[1]) В случае циклической координаты может появиться контур, подобный Γ' (на рис. 31, стр. 208).

[2]) Или под контуром в случае, указанном в предыдущем примечании.

имеем обратное функциональное соотношение $(J) \longleftrightarrow (p')$ и можем выразить p'_ρ как функцию интегралов J_ρ:

$$p'_\rho = p'_\rho(J). \tag{99.11}$$

Подставляя эти функции в (99.1) и (99.2), получаем решение уравнения

$$H\left(q, \frac{\partial G^*}{\partial q}\right) = p'_N(J) \tag{99.12}$$

в $2N$-мерном пространстве переменных (q, J); это решение вида

$$G^*(q, J) = G_1^*(q_1, J) + G_2^*(q_2, J) + \ldots + G_N^*(q_N, J), \tag{99.13}$$

где переменные все еще разделены. Примем эту функцию за производящую функцию КП $(q, p) \longrightarrow (w, J)$, выраженного формулами

$$p_\rho = \frac{\partial G^*(q, J)}{\partial q_\rho}, \quad w_\rho = \frac{\partial G^*(q, J)}{\partial J_\rho}. \tag{99.14}$$

Величины J_ρ называются **переменными действия**, а величины w_ρ — **угловыми переменными**.

Когда употребляются угловые переменные, гамильтониан содержит только одну переменную действия; обозначим его через $H^*(J)$. Канонические же уравнения движения имеют вид

$$\dot{J}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial w_\rho} = 0, \quad \dot{w}_\rho = \frac{\partial H^*}{\partial J_\rho}, \tag{99.15}$$

так что все J_ρ постоянны вдоль каждой траектории и все w_ρ определяются выражениями

$$w_\rho = \nu_\rho t + \delta_\rho, \tag{99.16}$$

где ν_ρ и δ_ρ — постоянные, причем первые равны

$$\nu_\rho = \frac{\partial H^*}{\partial J_\rho}. \tag{99.17}$$

Постоянное значение H вдоль траектории есть

$$H = E = H^* (J),$$

постоянная E — полная энергия в обычных динамических системах.

§ 100. Свойство периодичности угловых переменных. Пусть $\Gamma(J)$ — некоторый контур в пространстве QP, такой, что все переменные действия J_ρ на нем постоянны. Положение изображающей точки B в пространстве QP определяет положения изображающих точек B_ρ в плоскостях Π_ρ (рис. 46) и когда точка B обходит один раз контур $\Gamma(J)$, эти точки B_ρ обходят соответствующие контуры $\Gamma_\rho(J)$, возможно, по нескольку раз. В символической форме можно написать

$$\Gamma(J) = n_\rho \Gamma_\rho (J), \tag{100.1}$$

где коэффициенты n_ρ — целые числа (положительные, отрицательные или равные нулю). В соотношении (100.1) и ниже имеет место обычное условие суммирования от 1 до N.

При обходе контура Γ точкой B производящая функция $G^*(q, J)$ возрастает на

$$\Delta_\Gamma G^* = \oint\limits_{\Gamma(J)} \frac{\partial G^*}{dq_\rho} dq_\rho = \oint\limits_{\Gamma(J)} p_\rho\, dq_\rho. \tag{100.2}$$

Для того чтобы исследовать это выражение, пишем первую группу уравнений преобразования (99.14):

$$p_1 = \frac{\partial G_1^*(q_1, J)}{\partial q_1}, \ \ldots, \ p_N = \frac{\partial G_N^*(q_N, J)}{\partial q_N}. \tag{100.3}$$

Первое из этих уравнений устанавливает связь между p_1 и q_1, которая одинакова для точки B на контуре $\Gamma(J)$ и для соответствующей точки B_1 на $\Gamma_1(J)$; поэтому согласно определению переменной J_1 (99.9) имеем

$$\oint\limits_{\Gamma(J)} p_1\, dq_1 = n_1 \oint\limits_{\Gamma_1(J)} p_1\, dq_1 = n_1 J_1. \tag{100.4}$$

Таким образом, уравнение (100.2) дает следующее соотношение:

$$\Delta_\Gamma G^* = n_\rho J_\rho. \tag{100.5}$$

Мы видим, что вследствие предположений (явных и неявных) функции $G_1^*(q_1, J) \ldots G_N^*(q_N, J)$ необходимо представляют собой многозначные функции аргументов q.

При бесконечно малом варьировании переменных действия J_ρ соответственно изменится контур $\Gamma(J)$. Коэффициенты n_ρ в выражении (100.5), будучи целыми числами, не изменяются при этой бесконечно малой вариации; получаем поэтому

$$\delta\Delta_\Gamma G^* = n_\rho\, \delta J_\rho. \tag{100.6}$$

С другой стороны, из уравнения (100.2) имеем

$$\delta\Delta_\Gamma G^* = \delta \oint\limits_{\Gamma(J)} p_\rho\, dq_\rho = \oint\limits_{\Gamma(J)} (\delta p_\rho\, dq_\rho - dq_\rho\, dp_\rho). \tag{100.7}$$

Последнее выражение есть билинейная форма, инвариантная относительно КП (ср. § 96), и поэтому

$$\delta\Delta_\Gamma G^* = \oint\limits_{\Gamma(J)} (\delta J_\rho\, dw_\rho - \delta w_\rho\, dJ_\rho). \tag{100.8}$$

Но все J_ρ постоянны на контурах Γ — варьированном и неварьированном; поэтому $dJ_\rho = 0$ и $\delta J_\rho = \text{const}$ и мы имеем новое уравнение,

$$\delta\Delta_\Gamma G^* = \delta J_\rho \Delta_\Gamma w_\rho, \tag{100.9}$$

где $\Delta_\Gamma w_\rho$ — приращение переменной w_ρ при одном обходе контура $\Gamma(J)$. Сравнивая это последнее уравнение с (100.6), мы можем сформулировать следующий результат. *Если изображающая точка B обходит в пространстве QP один раз некоторый контур $\Gamma(J)$, на котором все переменные действия J_ρ сохраняют постоянные значения, то приращение угловой переменной w_ρ есть*

$$\Delta_\Gamma w_\rho = n_\rho, \tag{100.10}$$

где n_ρ — число обходов, которое совершает точка B_ρ по контуру $\Gamma_\rho(J)$ в плоскости Π_ρ.

В частности, если все величины (q, J), кроме q_1, фиксированы, то точка B_1 движется по кривой $\Gamma_1(J)$ в плоскости Π_1, а точки $B_2, \ldots, B_N$ остаются неподвижными. Это вынуждает изображающую точку B в пространстве QP двигаться по некоторой кривой $\Gamma_1(J)$ и когда B_1 полностью обходит контур $\Gamma_1(J)$, B полностью обходит некоторый контур $\Gamma_1^*(J)$, для которого числа n_ρ формулы (100.1) равны

$$n_1 = 1, \quad n_2 = \ldots = n_N = 0. \tag{100.11}$$

Подставляя их в (100.10) и заменяя Γ на Γ_1^*, имеем уравнения

$$\Delta_{\Gamma_1^*} w_1 = 1, \ \ \Delta_{\Gamma_1^*} w_2 = 0, \ \ldots, \ \Delta_{\Gamma_1^*} w_N = 0. \tag{100.12}$$

Отсюда получаем более общие соотношения, принимая введенные выше обозначения

$$\Delta_{\Gamma_\rho^*} w_\sigma = \delta_{\rho\sigma}. \tag{100.13}$$

Пусть теперь вторая группа уравнений (99.14) разрешена относительно q_ρ:

$$q_\rho = q_\rho(w, J). \tag{100.14}$$

Фиксируя все величины (w, J), кроме w_1, мы оставляем тем самым изображающей точке в пространстве QP одну степень свободы. Что касается переменных p_ρ, то они задаются для этой одной степени свободы с помощью уравнений (100.3). Тогда B движется по некоторой кривой в пространстве QP, а «проектируемые» точки B_ρ движутся по кривым $\Gamma_\rho(J)$. Пусть w_1 непрерывно возрастает от нуля до 1, другие переменные w_ρ, как мы договорились, остаются неизменными. Из уравнений (100.12) следует, что по выполнении этой операции точка B_1 обойдет один раз контур $\Gamma_1(J)$, а точки $B_2, \ldots, B_N$ будут оставаться на своих исходных положениях, не обходя соответствующих контуров. Это же рассуждение можно провести для возрастания на единицу каждой угловой переменной в отдельности; заключаем, таким образом, что функции (100.14) — периодические функции относительно каждой переменной w_ρ с периодом 1[1]).

Можно поэтому разложить эти функции в ряды Фурье вида

$$q_\rho = \sum_{(n)} A_{\rho;\, n_1, \ldots, n_N} e^{2\pi i (n_1 w_1 + \ldots + n_N w_N)}; \qquad (100.15)$$

суммирование ведется по всем целочисленным значениям (положительным, отрицательным и равным нулю), а функции A_ρ — комплексные функции переменных действия J, так что перемена знаков всех n_ρ превращает A в ее комплексно сопряженную величину. Тогда согласно (99.16) движение системы определяется уравнениями

$$q_\rho = \sum_{(n)} B_{\rho;\, n_1, \ldots, n_N} e^{2\pi i (n_1 \nu_1 + \ldots + n_N \nu_N) t}, \qquad (100.16)$$

B — функции переменных J. В этом смысле величины ν_ρ являются «частотами». Если мы знаем функцию $H^*(J)$, то частоты можно сразу вычислить из (99.17), дифференцируя эту функцию.

Предполагалось, что кривые в плоскостях Π_ρ, определяемые уравнениями (100.3) (при фиксированных значениях J), замкнутые; эти замкнутые кривые являются в действительности контурами $\Gamma_\rho(J)$. Это предположение отнюдь не означает, что движение системы периодическое: мы видим из (100.16), что оно периодическое тогда и только тогда, когда отношения частот ν_ρ — рациональные числа.

Система называется вырожденной, если частоты удовлетворяют соотношению вида

$$s_1\nu_1 + s_2\nu_2 + \ldots + s_N\nu_N = 0, \qquad (100.17)$$

где $s_1, \ldots, s_N$ — целые числа или нули, среди которых по крайней мере два отличны от нуля. Вырождение

---

[1]) Циклическая координата не будет периодической. Она возрастает на свою циклическую постоянную и уравнения (100.15) и (100.16) изменяются — к ним добавляются другие члены; ср. Fues [6], стр 140; Голдстейн [7], стр. 115.

появляется, когда гамильтониан H^* (J) некоторым определенным образом содержит переменные действия. Поясним это следующим примером. Предположим, что гамильтониан имеет вид

$$\left.\begin{aligned} H^*(J) &= f(K, J_4, J_5, \ldots, J_N), \\ K &= m_1 J_1 + m_2 J_2 + m_3 J_3, \end{aligned}\right\} \tag{100.18}$$

где m_i — целые числа. Тогда имеют место уравнения

$$\nu_1 = \frac{\partial H^*}{\partial J_1} = m_1 \frac{\partial f}{\partial K}, \quad \nu_2 = m_2 \frac{\partial f}{\partial K}, \quad \nu_3 = m_3 \frac{\partial f}{\partial K}, \tag{100.19}$$

и мы получаем двойное вырождение:

$$m_2 \nu_1 - m_1 \nu_2 = 0, \quad m_3 \nu_1 - m_1 \nu_3 = 0. \tag{100.20}$$

Как отмечалось в § 63, изложение общей динамической теории (с точки зрения современной чистой математики) дано в этой книге на довольно низком уровне математической строгости. Пока дело касалось теории в малых областях, было нетрудно внести в нее добавления, которые делали ее строгой теорией, но переменные действие — угол выводят нас из бесконечно малых областей в конечные введением указанных выше контуров Γ_ρ (J). Отсюда возникают очень сложные топологические вопросы, которых мы в этой книге не рассматриваем.

ГЛАВА VIII

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ

§ 101. Приведение энергий к нормальной форме. Нормальные моды и частоты. Вырождение. Рассмотрим динамическую систему с N обобщенными координатами[1]) q^ρ и лагранжевой функцией

$$L = T - V, \quad T = \frac{1}{2} a_{\rho\sigma}(q)\, \dot{q}^\rho \dot{q}^\sigma, \quad V = V(q); \tag{101.1}$$

система движется согласно лагранжевым уравнениям движения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\rho} - \frac{\partial T}{\partial q^\rho} = - \frac{\partial V}{\partial q^\rho}. \tag{101.2}$$

Это — обыкновенная динамическая система § 66 (ОДС).

Рассмотрим задачу в пространстве конфигураций Q. Изображающая точка описывает траекторию в соответствии с уравнениями (101.2), траектория определяется начальной точкой q^ρ и начальной скоростью $\dot{q}^\rho$. Если в некоторой точке пространства Q имеем соотношение

$$\frac{\partial V}{\partial q^\rho} = 0, \tag{101.3}$$

тогда, если скорость обращается в нуль, никакого движения нет. Эти N уравнений определяют конфигурации

---

[1]) Для того чтобы согласовать обозначения с тензорным исчислением, будем писать индексы вверху. См. § 62 об условии суммирования.

равновесия и можно ожидать, вообще говоря, что будет найдено дискретное множество таких точек в пространстве Q, так как число уравнений равно числу координат. Рассмотрим теперь малые колебания около положения равновесия.

Изменив систему координат, можно сделать положение равновесия началом координат 0 (тогда $q^\rho = 0$) и положить также, что $V = 0$ в точке O (так как потенциальная энергия всегда определена с точностью до аддитивной постоянной). Раскладывая V и $a_{\rho\sigma}(q)$ в степенные ряды в окрестности точки O, получаем главные части функций T и V:

$$T = \frac{1}{2} a_{\rho\sigma} \dot{q}^\rho \dot{q}^\sigma, \qquad V = \frac{1}{2} b_{\rho\sigma} q^\rho q^\sigma. \tag{101.4}$$

Здесь коэффициенты — постоянные и $a_{\rho\sigma} = a_{\sigma\rho}$, $b_{\rho\sigma} = b_{\sigma\rho}$. Уравнения движения (101.2) теперь примут вид

$$a_{\rho\sigma} \ddot{q}^\sigma + b_{\rho\sigma} q^\sigma = 0. \tag{101.5}$$

Ради математической ясности стоит забыть, что мы имеем дело с приближениями и рассматривать уравнения (101.4) и (101.5) как точные уравнения, определяющие нашу задачу с конечными q_ρ; однородность системы позволяет это.

Непосредственный практический метод решения системы (101.5) состоит в том, чтобы подставить значения

$$q^\rho = \alpha^\rho e^{i\omega t}, \tag{101.6}$$

где α^ρ — постоянные комплексные амплитуды и ω — круговая частота. Исключая α^ρ из уравнений (101.5), получаем вековое уравнение

$$\det(a_{\rho\sigma}\omega^2 - b_{\rho\sigma}) = 0, \tag{101.7}$$

из которого надо определить значения ω. Любой положительный корень ω^2 дает действительное значение ω. Это — нормальная круговая частота, а соответствующая *нормальная мода колебания* является действительной частью q^ρ (101.6); амплитуды являются решениями уравнений

$$(a_{\rho\sigma}\omega^2 - b_{\rho\sigma})\,\alpha^\sigma = 0. \tag{101.8}$$

Отношения величин α — действительные числа, но они имеют некоторый общий произвольный комплексный множитель.

Приведенному методу трудно следовать, если вековое уравнение (101.7) имеет кратные корни; кроме того, мы достигаем значительно более глубокого проникновения в математическую структуру проблемы, представленной уравнениями (101.4) и (101.5), начиная с начала и используя геометрию пространства Q. Предполагаем, что кинетическая энергия — положительно определенная функция (что и имеет место в случае всех естественных систем); тогда квадратичная форма

$$A = a_{\rho\sigma} q^{\rho} q^{\sigma} \tag{101.9}$$

также положительно определенная и существует линейное однородное преобразование $(q) \to (q')$, которое превращает[1]) A в квадратичную форму:

$$A = q_1'^2 + q_2'^2 + \ldots + q_N'^2. \tag{101.10}$$

Если обозначить конечные приращения знаком Δ, то формула

$$D^2 = a_{\rho\sigma} \Delta q^{\rho} \Delta q^{\sigma} = \Delta q_1'^2 + \ldots + \Delta q_N'^2 \tag{101.11}$$

определяет конечное евклидово расстояние D между некоторыми двумя точками пространства Q. (Это интегрируемая форма кинематического линейного элемента § 84.) Кинетическая энергия выражается следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} a_{\rho\sigma} \dot{q}^{\rho} \dot{q}^{\sigma} = \frac{1}{2} (\dot{q}_1'^2 + \dot{q}_2'^2 + \ldots + \dot{q}_N'^2). \tag{101.12}$$

Можно теперь рассматривать Q как евклидово N-мерное пространство, q^{ρ} — как косоугольные, а q'_{ρ} — прямоугольные декартовы координаты. Мы хотим определить геометрическую форму эквипотенциальных поверхностей, которые имеют уравнения

$$B = b_{\rho\sigma} q^{\rho} q^{\sigma} = b'_{\rho\sigma} q'_{\rho} q'_{\sigma} = \text{const}, \tag{101.13}$$

---

[1]) Удобно обозначить новые координаты через q'_{ρ} (а не q'^{ρ}); для преобразований, сохраняющих форму (101.10), не существует различия между контравариантными и ковариантными величинами.

где $b'_{\rho\sigma}$ — новые коэффициенты, полученные в результате преобразования.

Для того чтобы исследовать главные оси эквипотенциальных поверхностей и выяснить, какого типа эти поверхности, эллиптического или гиперболического, проведем следующее рассуждение. Удобно иметь перед собой одновременно выражения в обеих координатных системах (q) и (q'). Будем записывать слева — первые, справа — вторые уравнения. На сфере S_{N-1}, уравнение которой

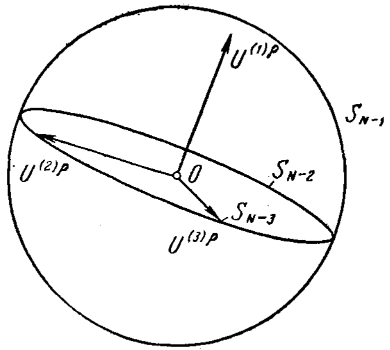


Рис. 47. Приведение к нормальным координатам методом максимума (случай, когда $N = 3$).

$$a_{\rho\sigma}q^\rho q^\sigma = 1 \quad \text{или} \quad q_1'^2 + q_2'^2 + \ldots + q_N'^2 = 1, \tag{101.14}$$

B есть функция положения; она достигает максимального значения (обозначим его λ_1) в двух или более точках сферы S_{N-1}. Пусть $U^{(1)\rho}$ (или $U_\rho'^{(1)}$) — координаты такой точки (рис. 47).

Теперь пересечем сферу S_{N-1} плоскостью, ортогональной этому последнему вектору; уравнение плоскости

$$a_{\rho\sigma}U^{(1)\rho}q^\rho = 0 \quad \text{или} \quad U_\rho'^{(1)}q_\rho' = 0, \tag{101.15}$$

получаем при этом $N-2$-мерную сферу (обозначим ее S_{N-2}). На сфере S_{N-2} величина B достигает максимума (λ_2) в двух или более точках; пусть $U^{(2)\rho}$ (или $U_\rho'^{(2)}$) координаты такой точки. Имеем условие ортогональности

$$a_{\rho\sigma}U^{(1)\rho}U^{(2)\sigma} = 0 \quad \text{или} \quad U_\rho'^{(1)}U_\rho'^{(2)} = 0. \tag{101.16}$$

Пересечем затем сферу S_{N-2} плоскостью, ортогональной $U^{(2)\rho}$, получаем сферу S_{N-3} и продолжаем те же рассуждения. Придем в конце концов к окружности S_1 и, наконец, к паре точек S_0.

Таким образом, мы получаем систему N взаимно ортогональных единичных векторов $U^{(\sigma)}\varrho$ или $U_\rho'^{(\sigma)}$ и числа λ_σ, связанные с ними; λ_σ — это максимумы функции B при условиях, установленных выше. Затем с помощью ортогонального преобразования

$$q'_\rho = A_{\rho\sigma} q''_\sigma, \qquad A_{\rho\sigma} A_{\rho\tau} = \delta_{\sigma\tau}, \tag{101.17}$$

перейдем к новым прямоугольным декартовым координатам q''_ρ, оси которых совпадают с полученными выше ортогональными векторами. Благодаря свойствам максимума легко показать, что в форме B отсутствуют все произведения членов, когда B выражена через координаты q''_ρ.

Опуская два штриха в конечных координатах, можно выразить этот результат так. *Даны две квадратичные формы A и B, причем A — положительно определенная, тогда существует линейное однородное преобразование, которое превращает A в сумму квадратов переменных, а B — в квадратичную форму, в которой отсутствуют произведения членов; соответственно этому кинетическую и потенциальную энергии* (101.41) *можно преобразовать к следующим выражениям*:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \ldots + \dot{q}_N^2\right), \\ V &= \frac{1}{2}\left(\lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2 + \ldots + \lambda_N q_N^2\right). \end{aligned}\right\} \tag{101.18}$$

Эти последние координаты называются *нормальными координатами*. В этих рассуждениях несущественно, являются ли λ_i положительными или их знаки различны; все они конечные действительные числа[1]), так как наша аргументация не выходила за пределы вещественной области.

Как только энергии приведены к нормальной форме (101.18), исследование движения становится предельно простым, ибо уравнения движения (101.2) принимают вид

$$\ddot{q}_1 + \lambda_1 q_1 = 0, \ \ldots \quad \ddot{q}_N + \lambda_N q_N = 0, \tag{101.19}$$

---

[1]) Преобразование энергий к нормальной форме вида (101.18) (на основании свойств максимума или другим способом) есть основание исследований по теории малых колебаний. Ср. Corben and Stehle [3], гл. 8 (где имеется большое число примеров систем с малыми и большими числами степеней свободы); Голдстейн [7], гл. X; Уиттекер [28], гл. VII.

в котором переменные разделены. Любое из этих уравнений имеет следующее решение (в зависимости от знака числа λ, входящего в уравнение):

$$\left.\begin{aligned} q &= a\cos\sqrt{\lambda}t + b\sin\sqrt{\lambda}t, &&\text{если}\quad \lambda > 0,\\ q &= at + b, &&\text{если}\quad \lambda = 0,\\ q &= a\,\mathrm{ch}\sqrt{-\lambda}t + b\,\mathrm{sh}\sqrt{-\lambda}t, &&\text{если}\quad \lambda < 0, \end{aligned}\right\} \quad (101.20)$$

где a и b — постоянные.

Равновесие устойчиво при любом из следующих эквивалентных условий:

I) Все λ — положительны.

II) $b_{\rho\sigma}q^\rho q^\sigma$ — положительно определенная форма.

III) V — потенциальная энергия — достигает истинного минимума в равновесии.

Если одно из чисел λ равно нулю или отрицательно, то равновесие неустойчиво. В случае устойчивости эквипотенциальные поверхности — эллиптического типа; в случае неустойчивости они либо эллиптические (V имеет максимум в центре), либо гиперболические, либо цилиндрические.

Предположим равновесие устойчивым так, что каждая нормальная координата изменяется синусоидально как в первом случае в (101.20). Тогда *нормальная мода* колебания есть та, в которой колеблется только одна нормальная координата, а другие равны нулю, а *нормальные частоты* ν_ρ и *нормальные круговые частоты* ω_ρ равны соответственно

$$\nu_\rho = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\lambda_\rho}, \qquad \omega_\rho = \sqrt{\lambda_\rho}. \qquad (101.21)$$

Если две (или более) из этих частот совпадают, то систему называют *вырожденной*[1]). В нормальной моде изображающая точка пространства Q совершает гармоническое колебание по прямой линии. Эти пря-

---

[1]) Это слово имеет много различных значений; ср. с § 100, где оно употребляется в другом смысле.

мые являются главными осями эквипотенциальных поверхностей (101.13), когда эти поверхности отнесены к координатной системе (q'). В невырожденной системе эти прямые фиксированы в пространстве. Для вырожденной системы они частично не определены; известно, что они лежат в плоскости двух или более измерений (соответственно степени вырождения) и нормальную моду можно представить на любой одной из этих линий, причем нормальные координаты в этом случае останутся частично не определенными. В совершенно вырожденной системе направление нормальной моды колебания совершенно произвольное. В этом случае эквипотенциальные поверхности являются сферами в системе координат (q').

При произвольных начальных условиях система совершает движение, которое есть наложение всех нормальных мод. Вообще говоря, орбита в пространстве Q есть очень сложная кривая и движение является периодическим тогда и только тогда, когда отношения нормальных частот — рациональные числа.

Корни уравнения

$$\det (a_{\rho\sigma}\lambda - b_{\rho\sigma}) = 0 \tag{101.22}$$

инвариантны относительно линейных преобразований координат q. Для нормальных координат, как в случае (101.18), эти уравнения принимают вид

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_N) = 0. \tag{101.23}$$

Следовательно, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ являются корнями уравнения (101.22). В самом деле, они представляют собой собственные значения матрицы $b_{\rho\sigma}$ относительно матрицы $a_{\rho\sigma}$. Если λ — какое-нибудь одно из этих собственных значений, то уравнения

$$\lambda a_{\rho\sigma}U^\sigma = b_{\rho\sigma}U^\sigma \tag{101.24}$$

определяют соответствующие собственные векторы для любой системы координат. Из инвариантности этих уравнений легко увидеть, используя нормальные координаты, что направления собственных векторов совпадают с направлениями нормальных мод колебания. Так как

(101.22)—то же уравнение, что и (101.8) (за исключением тривиальных изменений в обозначениях), то становится ясной математическая важность простой подстановки (101.6), которая остается самым практичным методом для исследования задачи теории колебаний. На вырождение указывает наличие кратных корней векового уравнения (101.7).

§ 102. **Действие связей.** Пусть на систему с кинетической и потенциальной энергиями вида (101.4) наложены связи

$$A_\rho q^\rho = 0, \tag{102.1}$$

где A_ρ — постоянные.

Если мы рассматриваем энергии в (101.4) как приближения, справедливые при малых значениях скоростей и координат, то (102.1) можно считать следствием любой связи, которая не зависит от времени; она может быть даже неголономной, так как в линейном приближении не существует никакого различия между голономными и неголономными связями.

Как и в случае (46.15), уравнения движения системы, на которую наложены связи, таковы:

$$a_{\rho\sigma}\ddot{q}_\sigma = -\, b_{\rho\sigma}q^\sigma + \vartheta A_\rho, \tag{102.2}$$

где ϑ — неопределенный множитель. Для того чтобы исследовать движение, подставим

$$q^\rho = \alpha^\rho e^{i\omega t} \tag{102.3}$$

в уравнения (102.1) и (102.2); исключая величины α^ρ и ϑ, получим следующее детерминантное уравнение для круговой частоты ω:

$$\begin{vmatrix} a_{\rho\sigma}\omega^2 - b_{\rho\sigma} & A_\rho \\ A_\sigma & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{102.4}$$

Таков план практических действий. Но для того чтобы найти соотношение между частотами свободной системы и системы, подчиненной связям, лучше использовать нормальные координаты свободной системы, как в выражениях (101.18). Тогда, если обозначить ω^2 через λ, уравнение (102.4) примет вид

$$\Delta(\lambda) = 0, \tag{102.5}$$

где

$$\Delta(\lambda) = -\begin{vmatrix} \lambda-\lambda_1 & 0 & \dots & & A_1 \\ 0 & \lambda-\lambda_2 & \dots & & A_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda-\lambda_N & A_N \\ A_1 & A_2 & & A_N & 0 \end{vmatrix}. \tag{102.6}$$

Числа A_ρ — коэффициенты в уравнении связи (102.1), выраженном через нормальные координаты. Разлагая в ряд, имеем

$$\left.\begin{aligned} \Delta(\lambda) = A_1^2 (\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\dots(\lambda-\lambda_N) + \\ + A_2^2 (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_3)\dots(\lambda-\lambda_N) + \\ + A_3^2 (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_N) + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + A_N^2 (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_{N-1}). \end{aligned}\right\} \tag{102.7}$$

Здесь $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ — квадраты круговых частот свободной системы.

Предположим, что свободная система невырождена; тогда простой перестановкой координат можно упорядочить λ так, что

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N. \tag{102.8}$$

Предположим, кроме того, что ни одна из величин A_ρ в уравнении (102.7) не обращается в нуль. Тогда

$$\Delta(\lambda_N) > 0, \quad \Delta(\lambda_{N-1}) < 0, \quad \Delta(\lambda_{N-2}) > 0, \dots \tag{102.9}$$

и поэтому $\Delta(\lambda)$ имеет $N-1$ действительных корней, разделяющих числа $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. При этих обстоятельствах (т. е., можно сказать, в общем случае) **частоты системы, подчиненной связям, разделяют частоты свободной системы.**

Для того чтобы сделать поправку на возможность обращения в нуль одного или более A_ρ, нужно ослабить это утверждение, а именно, положить

$$\nu_1 \leqslant \nu_1' \leqslant \nu_2 \leqslant \nu_2' \ldots \leqslant \nu_{N-1} \leqslant \nu_{N-1}' \leqslant \nu_N, \qquad (102.10)$$

где ν означают частоты свободной системы, а ν' — связанной. Вырождение может быть следствием введения связи; на геометрическом языке — эллипсоид допускает круговые сечения.

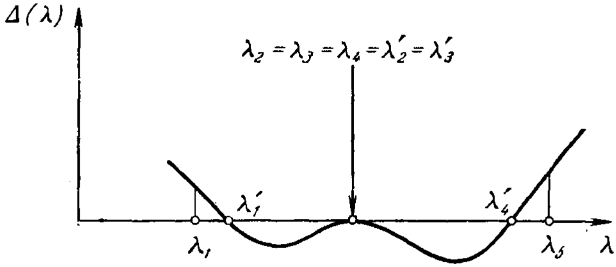


Рис. 48. Действие связи на вырожденную систему.

Эффект наложения связи на вырожденную систему лучше всего иллюстрировать примером. Возьмем $N = 5$ и предположим

$$\lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 < \lambda_5, \qquad (102.11)$$

так что в свободной системе имеет место тройное вырождение. Тогда уравнение (102.7) примет вид

$$\Delta(\lambda) = A_1^2 (\lambda - \lambda_2)^3 (\lambda - \lambda_5) + \\ +(A_2^2 + A_3^2 + A_4^2)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^2 (\lambda - \lambda_5) + \\ + A_5^2 (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^3. \qquad (102.12)$$

Предположим, что ни одна из величин A_ρ не обращается в нуль, тогда кривая $\Delta(\lambda)$ ведет себя так, как показано на рис. 48. Имеем, таким образом,

$$\Delta(\lambda_1) > 0, \qquad \Delta(\lambda_2) = 0, \qquad \Delta(\lambda_5) > 0, \qquad (102.13)$$

а вблизи $\lambda = \lambda_2$

$$\Delta(\lambda) \sim (A_2^2 + A_3^2 + A_4^2)(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^2 (\lambda_2 - \lambda_5) < 0. \qquad (102.14)$$

Система, подчиненная связям, имеет нормальные частоты $\nu_1' < \nu_2 = \nu_3' < \nu_4'$, как показано на рис. 48 (переход от λ' к ν' определяется соотношением $4\pi^2\nu'^2 = \lambda'$). Тройное вырождение сводится к двойному.

Устойчивая система остается устойчивой при наложении связи, а неустойчивая может быть сделана устойчивой с помощью связи.

Если система подчинена одной связи (как это было в рассмотренном случае), то можно исключить одну из координат и ввести $N-1$ новых нормальных координат. Такой ход рассуждений позволяет изучить действие дополнительных связей. В общем случае, когда нет никакого вырождения и связи не выбраны каким-либо специальным образом, мы имеем последовательные разделения в следующем виде:

Никаких связей:	ν_1	ν_2	ν_3	$\dots$	ν_{N-1}	ν_N
Одна связь:	ν_1'	ν_2'	ν_3'	$\dots$	ν_{N-1}'	
Две связи:	ν_1''	ν_2''	ν_3''	$\dots$	ν_{N-2}''	
$\dots$						
$N-2$ связи:	$\nu_1^{(N-2)}$	$\nu_2^{(N-2)}$	$\dots$			
$N-1$ связи:	$\nu_1^{(N-1)}$					

Все эти вопросы с геометрической точки зрения являются вопросами о длинах главных осей плоских сечений эллипсоида в многомерном евклидовом пространстве; если встать на эту точку зрения, то на некоторые из этих вопросов можно сравнительно легко ответить.

§ 103. Диссипативные системы. Гироскопическая устойчивость. Рассмотрим следующую систему N линейных дифференциальных уравнений с действительными постоянными коэффициентами

$$a_{\rho\sigma}\ddot{q}^{\sigma} + c_{\rho\sigma}\dot{q}^{\sigma} + b_{\rho\sigma}q^{\sigma} = 0. \qquad (103.1)$$

Такие уравнения встречаются при изучении диссипативных и гироскопических систем, а также в теории электрических контуров. Мы рассматриваем их как точные уравнения хотя на практике они могут быть только линейными приближениями более сложных точных уравнений. Нас интересует устойчивость решений системы (103.1); случай, когда $c_{\rho\sigma} = 0$, $a_{\rho\sigma} = a_{\sigma\rho}$ и $b_{\rho\sigma} = b_{\sigma\rho}$, уже изучен в § 101.

Рассмотрим систему, кинетическая и потенциальная энергии которой определяются выражениями

$$T = \frac{1}{2} a_{\rho\sigma}\dot{q}^\rho \dot{q}^\sigma, \qquad V = \frac{1}{2} b_{\rho\sigma}q^\rho q^\sigma. \tag{103.2}$$

Если, кроме обобщенной силы $-\partial V/\partial q_\rho$, приложена сила трения (затухание),

$$Q_\rho = -c_{\rho\sigma}\dot{q}^\sigma, \tag{103.3}$$

то уравнения движения принимают форму (103.1); отсюда имеем

$$\frac{d}{dt}(T + V) = Q_\rho \dot{q}^\rho = -c_{\rho\sigma}\dot{q}^\rho \dot{q}^\sigma. \tag{103.4}$$

Если мы принимаем естественное предположение, что работа демпфирующей силы затухания отрицательна, то квадратичная форма $c_{\rho\sigma}\dot{q}^\rho \dot{q}^\sigma$ — положительно определенная и величина $T + V$ постоянно убывает. Если система устойчива при отсутствии затухания, т. е. если V положительно определенная функция, то при затухании устойчивость не нарушается. Но если система без затухания неустойчива, то без привлечения изложенных ниже общих соображений нельзя сказать определенно, вызовет ли затухание устойчивость.

Уравнения в форме (103.1) получаются также для системы, имеющей лагранжиан вида

$$L = \frac{1}{2} a_{\rho\sigma}\dot{q}^\rho \dot{q}^\sigma + d_{\rho\sigma}\dot{q}^\rho q^\sigma - \frac{1}{2} b_{\rho\sigma}q^\rho q^\sigma. \tag{103.5}$$

Мы имеем здесь кососимметричную матрицу

$$c_{\rho\sigma} = d_{\rho\sigma} - d_{\sigma\rho}. \tag{103.6}$$

Лагранжиан такого вида встречается при рассмотрении реономных систем или в задаче с игнорируемыми координатами, в частности, в случае гироскопических систем. Поэтому устойчивость, возникающая благодаря наличию среднего члена в уравнении (103.1), называется гироскопической [1]).

Продолжаем исследовать устойчивость решений уравнения (103.1), подставив

$$q^\rho = \alpha^\rho e^{st}, \tag{103.7}$$

где все α и s — постоянные. Исключая первые величины, получим детерминантное уравнение для

$$\Delta(s) = \det(a_{\rho\sigma}s^2 + c_{\rho\sigma}s + b_{\rho\sigma}) = 0. \tag{103.8}$$

Критерий устойчивости таков: для устойчивости каждый корень этого уравнения должен иметь неположительную действительную часть [2]).

Легко установить следующий результат, отмеченный уже в связи с (103.4). Если $a_{\rho\sigma} = a_{\sigma\rho}$, $b_{\rho\sigma} = b_{\sigma\rho}$ (но $c_{\rho\sigma} \neq c_{\sigma\rho}$, вообще говоря), и если три квадратичные формы

$$A = a_{\rho\sigma}q^\rho q^\sigma, \quad B = b_{\rho\sigma}q^\rho q^\sigma, \quad C = c_{\rho\sigma}q^\rho q^\sigma \tag{103.9}$$

все положительно определенные, то система устойчива. Для того чтобы доказать это, заметим, что положительная определенность B заключает в себе условие $\det b_{\rho\sigma} \neq 0$ и поэтому (103.8) не имеет корней, равных нулю. Тогда для любого корня s имеем

$$(sa_{\rho\sigma} + c_{\rho\sigma} + s^{-1}b_{\rho\sigma})\,\alpha^\sigma = 0 \tag{103.10}$$

для некоторого не обращающегося в нуль (комплексного) вектора α^σ. Умножая это выражение на комплексное сопряженное $\bar{\alpha}^\rho$ и складывая полученное таким образом уравнение с сопряженным ему, получаем следующее уравнение:

$$(s + \bar{s})\,A' + 2C' + (s^{-1} + \bar{s}^{-1})\,B' = 0, \tag{103.11}$$

---

[1]) См. в § 105 рассмотрение колебаний около устойчивого движения с помощью гамильтониана.

[2]) Системы с затуханием, для которых все собственные значения s — действительные и отрицательные, обсуждены в работе Duffin R. J., J. Rational Mech. Anal. 4, 221 (1955).

где

$$A' = a_{\rho\sigma}\bar{\alpha}^\rho\alpha^\sigma, \; B' = b_{\rho\sigma}\bar{\alpha}^\rho\alpha^\sigma, \; 2C' = c_{\rho\sigma}\bar{\alpha}^\rho\alpha^\sigma + c_{\rho\alpha}\alpha^\rho\bar{\alpha}^\sigma. \tag{103.12}$$

Уравнение можно переписать в виде

$$(s + \bar{s})\left(A' + \frac{B'}{s\bar{s}}\right) + 2C' = 0, \tag{103.13}$$

откуда получаем $s + \bar{s} < 0$ (условие, заключающее в себе устойчивость), так как положительная определенность форм A, B, C означает, что A', B', C' положительны.

Обратимся к детерминантному уравнению (103.8), не накладывая никаких ограничений на матрицы $a_{\rho\sigma}$, $b_{\rho\sigma}$, $c_{\rho\sigma}$, за исключением одного условия:

$$\det a_{\rho\sigma} > 0. \tag{103.14}$$

Тогда, разлагая детерминант, мы получаем алгебраическое уравнение степени $2N$, в котором коэффициент при s^{2N} положителен. Мы отыскиваем необходимое и достаточное условие отрицательности действительных частей корней этого уравнения (это несколько более сильное условие, чем требование устойчивости, для которой достаточно также равенства действительных частей корней нулю).

В рассуждениях, которые следуют ниже [1]), четность степени уравнения не играет роли; удобно написать уравнение для s в следующем виде:

$$f(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots = 0, \quad a_0 > 0. \tag{103.15}$$

Если в комплексной плоскости s пробегает мнимую ось от $-\infty$ до $+\infty$, то приращение $\arg f(s)$ точно равно π-кратному числа корней с отрицательными действительными частями функции $f(s) = 0$. Для того чтобы использовать этот факт, пишем $s = iy$ и

$$f(s) = f(iy) = i^n (P_n - iP_{n-1}), \tag{103.16}$$

---

[1]) Routh E. J., Stability of Given State of Motion, гл. 3 (London: Macmillan, 1877); Pérès [20], стр. 265; Routh 22, II, гл. 6; Winkelmann and Grammel [29], стр. 480.

где

$$\left.\begin{aligned} P_n &= a_0 y^n - a_2 y^{n-2} + \ldots, \\ P_{n-1} &= a_1 y^{n-1} - a_3 y^{n-3} + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (103.17)$$

Таким образом, для s, пробегающих мнимую ось, имеем

$$\arg f(s) = \frac{1}{2} n\pi - \operatorname{arctg} \frac{P_{n-1}}{P_n}, \qquad (103.18)$$

и если все нули функции $f(s)$ имеют отрицательные действительные части, то $\operatorname{arctg}(p_{n-1}/p_n)$ уменьшается на $n\pi$,

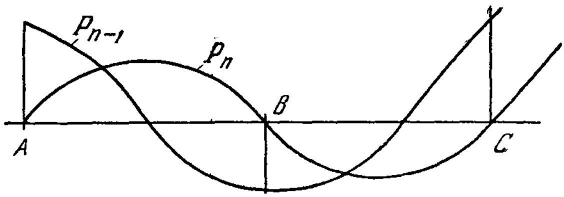


Рис. 49. Сцепленные полиномы.

когда y пробегает значения от $-\infty$ до $+\infty$. Это имеет место тогда и только тогда, когда полиномы (p_n, p_{n-1}) сцеплены в следующем смысле:

I) Все нули $p_n(y)$ действительные.

II) Все нули $p_{n-1}(y)$ действительные и разделяют нули полинома $p_n(y)$.

III) Взаимоотношение P_n и P_{n-1} показано на рис. 49; P_{n-1} — положителен в точке A и отрицателен в точке B. Точки A и B — последовательные нули полинома P_n, и полином P_n между ними положителен. Это отношение эквивалентно условию, что P_n и P_{n-1} имеют один и тот же знак в пределе при $y \to +\infty$ (на рис. 49 $\operatorname{arctg}(P_{n-1}/P_n)$ уменьшается на π, при переходе от A к B).

Соответственно вопрос об отрицательности действительных частей нулей функции $f(s)$ эквивалентен вопросу о сцеплении (P_n, P_{n-1}). Для того, чтобы обсудить это, изменим обозначения, положив

$$\left.\begin{aligned} P_n &= A_n y^n + B_n y^{n-2} + \ldots \\ P_{n-1} &= A_{n-1} y^{n-1} + B_{n-1} y^{n-3} + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (103.19)$$

Определим последовательность полиномов $P_{n-2}, P_{n-3}, \ldots, P_0$ и последовательность чисел $A_{n-2}, A_{n-3}, \ldots, A_0$ (коэффициентов при наивысших степенях переменных в этих полиномах) следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}
P_{n-2} &= A_{n-2}y^{n-2} + B_{n-2}y^{n-4} + \ldots = \\
&\qquad\qquad = A_n y P_{n-1} - A_{n-1}P_n,\\
P_{n-3} &= A_{n-3}y^{n-3} + B_{n-3}y^{n-5} + \ldots = \\
&\qquad\qquad = A_{n-1} y P_{n-2} - A_{n-2}P_{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
P_2 &= A_2 y^2 + B_2 \qquad = A_4 y P_3 - A_3 P_4\\
P_1 &= A_1 y \qquad\qquad = A_3 y P_2 - A_2 P_3\\
P_0 &= A_0 \qquad\qquad\; = A_2 y P_1 - A_1 P_2
\end{aligned}\right\} \tag{103.20}$$

Как и в (103.5), принимаем $A_n = a_0 > 0$. Предположим, что (P_n, P_{n-1}) сцеплены, так что и $A_{n-1} > 0$. Докажем, что тогда (P_{n-1}, P_{n-2}) сцеплены. Для этого заметим, что из первого уравнения (103.20) следует: в любом нуле полинома P_{n-1} полиномы P_{n-2} и P_n имеют противоположные знаки. Поэтому все нули P_{n-2} действительные и разделяют нули P_{n-1}. В пределе, при $y \to +\infty$, P_{n-2} имеет тот же знак, который он имел в наибольшем нуле полинома P_{n-1}. Этот знак совпадает, конечно, со знаком $-P_n$ в этом нуле и он положителен (ср. с рис. 49). Поэтому $A_{n-2} > 0$, таким образом, полиномы (P_{n-1}, P_{n-2}) сцеплены.

Продолжая шаг за шагом такое рассуждение, мы увидим, что все пары полиномов (P_{n-2}, P_{n-3}), $(P_{n-3}, P_{n-4}) \ldots (P_1, P_0)$ сцеплены[1] (задано, что $A_n > 0$), и заключаем, что сцепление полиномов (P_n, P_{n-1}) означает также, что

$$A_{n-1} > 0,\quad A_{n-2} > 0,\ \ldots\ A_1 > 0,\quad A_0 > 0. \tag{103.21}$$

Для того чтобы доказать обратное утверждение, предположим, что имеют место условия (103.21) и $A_n > 0$. Для больших y каждый из членов правых частей фор-

[1]) В случае сцепления полиномов (P_1, P_0) это означает просто, что P_1 имеет тот же знак, что и P_0, когда $y \to +\infty$.

мул (103.20) имеет более высокий порядок, чем соответствующие члены в левых частях этих равенств. Отсюда все полиномы P имеют один и тот же положительный знак при $y \to \infty$, именно, знак A_0. Таким образом, согласно последнему уравнению (103.20), P_2 положителен на бесконечности и отрицателен в $y = 0$, где $P_1 = 0$. Отсюда (P_2, P_1) сцеплены и, продолжая эти же рассуждения, мы придем к заключению, что и (P_n, P_{n-1}) также сцеплены.

Таким образом, неравенства (103.21) представляют собой необходимые и достаточные условия для сцепления полиномов (P_n, P_{n-1}) или, что то же самое, для того, чтобы действительные части всех корней функции $f(s)$ были отрицательны.

Величины, входящие в (103.21), можно выразить в следующей детерминантной форме через коэффициенты функции $f(s)$[1]), согласно (103.15):

$$\left.\begin{array}{l} A_{n-1} = a_1, \quad A_{n-2} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad A_{n-3} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad A_0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & & \dots & a_n \end{vmatrix}, \end{array}\right\} \tag{103.21}$$

имея в виду при этом, что $a_r = 0$ для $r > n$.

§ 104. Вынужденные колебания. Резонанс. Операционные методы. Если для системы, движущейся согласно уравнениям (103.1), все корни уравнения (103.8) имеют отрицательные действительные части, то независимо от того, какими были начальные условия, система в конечном счете стремится остановиться в начальном положении. Пусть теперь, кроме сил, представленных

[1]) Hermite Ch., Crelles J. 52, 39 (1850).—Hurwitz A., Math. Ann. 46, 273 (1895); ср. Grammel R. Der Kreisel, т. 1, стр. 259, Berlin, Springer, 1950.

в уравнении (103.1), к системе приложена возмущающая сила $Q_\rho(t)$, рассматриваемая как заданная функция t; уравнения движения примут вид:

$$a_{\rho\sigma}\ddot{q}^\sigma + c_{\rho\sigma}\dot{q}^\sigma + b_{\rho\sigma}q^\sigma = Q_\rho. \tag{104.1}$$

Если приложенная сила является гармонической силой с круговой частотой ω, то имеем

$$Q_\rho = F_\rho e^{i\omega t}. \tag{104.2}$$

После того как пройдет достаточно большое время, система будет стремиться (независимо от характера начальных условий) к вынужденным колебаниям, определяемым уравнениями

$$q^\rho = \alpha^\rho e^{i\omega t}. \tag{104.3}$$

Комплексные амплитуды α^ρ находятся подстановкой в (104.1). Они должны удовлетворять уравнениям

$$(-a_{\rho\sigma}\omega^2 + ic_{\rho\sigma}\omega + b_{\rho\sigma})\,\alpha^\sigma = F_\rho. \tag{104.4}$$

Эта задача не совпадает с проблемой собственных значений; в данном случае вопрос идет просто о решении системы линейных уравнений. Однако проблема собственных значений, представленная уравнением (103.8), тесно связана с решением системы уравнений (104.4), потому что амплитуды возрастают, когда возмущающая частота близка к собственной частоте или, выражаясь более точно, когда $i\omega$ близко к одному из корней уравнения (103.8). Тогда имеет место резонанс.

Такие задачи наиболее компактно решаются с помощью операционных методов. Мы покажем, как получить решение уравнений (104.1) для возмущающей силы общего вида, не обязательно имеющей форму (104.2). Выбираем начальные условия:

$$q^\rho = \pi^\rho, \quad \dot{q}^\rho = v^\rho \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{104.5}$$

Пусть I обозначает операцию[1]) интегрирования по

$$If(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau. \tag{104.6}$$

[1]) Подробно об операционном методе см. Jeffreys H. and Jeffreys B. S., Mathematical Physics, гл. 7 (Cambridge,

Применим оператор I к выражению (104.1) и примем во внимание условие (104.5); получаем таким образом

$$a_{\rho\sigma}(\dot{q}^\sigma - v^\sigma) + c_{\rho\sigma}(q^\sigma - \pi^\sigma) + b_{\rho\sigma} I q^\sigma = IQ_\rho. \quad (104.7)$$

Повторяя эту операцию, получим

$$A_{\rho\sigma} q^\sigma = B_\rho + I^2 Q_\rho, \quad (104.8)$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_{\rho\sigma} &= a_{\rho\sigma} + {}_{\rho\sigma} I + b_{\rho\sigma} I^2, \\ B_\rho &= a_{\rho\sigma}\pi^\sigma + a_{\rho\sigma} I v^\sigma + c_{\rho\sigma} I \pi^\sigma. \end{aligned}\right\} \quad (104.9)$$

Уравнение (104.8) эквивалентно (104.1) и (104.5); если оно удовлетворяется, то удовлетворяются и последние; в этом можно убедиться, продифференцировав (104.8).

Сущность операционного метода состоит в том, что с оператором I обращаются так, как если бы это было число. Правильность результатов, полученных таким образом, проверяется после. Мы рассматриваем $A_{\rho\sigma}$ как числовую матрицу и определяем $D^{\rho\sigma}$ как алгебраическое дополнение элемента $A_{\rho\sigma}$ так, что

$$D^{\rho\mu} A_{\rho\sigma} = \delta^\mu_\sigma D, \quad (104.10)$$

где D — детерминант вида

$$D = \det(a_{\rho\sigma} + c_{\rho\sigma} I + b_{\rho\sigma} I^2). \quad (104.11)$$

Умножив (104.8) на $D^{\rho\mu}$ и разделив затем на D, получаем уравнение

$$q^\mu = \frac{1}{D} D^{\rho\mu}(B_\rho + I^2 Q_\rho). \quad (104.12)$$

1956). Они употребляют обозначение Q для оператора интегрирования. Здесь этот символ заменен на I с тем, чтобы избежать путаницы с обобщенными силами. Много трудностей возникает в операционном методе при введении операторов Хэвисайда p и p^{-1}, которые некоммутативны; и хотя они вносят некоторую формальную простоту в теорию, мы не будем употреблять их здесь. Об операционных методах, основанных на преобразовании Лапласа см. Churchill R. Y., Modern Operational Mathematics in Engineering (New York and London: Macmillan, 1948); Wagner K. W.: Operationsrechnung (Leipzig, 1940); Sneddon I. N., Fourier Transforms (New York: McGraw Hill, 1951); Handbuch der Physik, т. II, стр. 251.

ные, зависящие от начальных данных, L_i — постоянные, не зависящие от начальных данных, а зависящие фактически только от трех матриц $a_{\rho\sigma}$, $b_{\rho\sigma}$, $c_{\rho\sigma}$. Подставим теперь выражения (104.16) в (104.12) и применим следующие формулы[1]):

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{1-\alpha I}\,1 &= e^{\alpha t}, \\ \frac{I}{1-\alpha I} f(t) &= \int_0^t f(\tau)\, e^{\alpha(t-\tau)} d\tau, \end{aligned}\right\} \qquad (104.17)$$

где α — некоторая постоянная. Решение (104.12) принимает вид

$$q^\mu = K_1^\mu e^{s_1 t} + K_2^\mu e^{s_2 t} + \ldots + K_{2N}^\mu e^{s_{2N} t} + \\ + \int_0^t [L_1^{\rho\mu} e^{s_1(t-\tau)} + L_2^{\rho\mu} e^{s_2(t-\tau)} + \ldots \\ \ldots + L_{2N}^{\rho\mu} e^{s_{2N}(t-\tau)}]\, Q_\rho(\tau)\, d\tau. \qquad (104.18)$$

Приведенный выше результат является весьма общим и ограничен только неявным предположением, сделанным в (104.16), что собственные значения различны. В случаях вырождения эти разложения должны быть изменены добавлением дробей с более высокими степенями в знаменателях.

Предположим теперь, что возмущающая сила — гармоническая вида (104.2). И предположим, кроме того, что все собственные значения различны и имеют отрицательные действительные части. Тогда, опуская те члены, которые стремятся к нулю при $t \to \infty$, получаем из (104.18) следующее выражение для вынужденного колебания, вызванного приложенной силой (104.2):

$$q^\mu = \left[\frac{L_1^{\rho\mu}}{i\omega - s_1} + \frac{L_2^{\rho\mu}}{i\omega - s_2} + \ldots + \frac{L_{2N}^{\rho\mu}}{i\omega - s_{2N}}\right] F_\rho e^{i\omega t}. \qquad (104.19)$$

[1]) Легко установить эти формулы; ср. Jeffreys H. and Jeffreys B. стр. 233, цит. выше в предыдущем примечании.

ные, зависящие от начальных данных, L_i — постоянные, не зависящие от начальных данных, а зависящие фактически только от трех матриц $a_{\rho\sigma}$, $b_{\rho\sigma}$, $c_{\rho\sigma}$. Подставим теперь выражения (104.16) в (104.12) и применим следующие формулы[1]):

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{1-\alpha I}\,1 &= e^{\alpha t}, \\ \frac{I}{1-\alpha I}\,f(t) &= \int_0^t f(\tau)\,e^{\alpha(t-\tau)}d\tau, \end{aligned}\right\} \qquad (104.17)$$

где α — некоторая постоянная. Решение (104.12) принимает вид

$$\begin{aligned} q^{\mu} = K_1^{\mu} e^{s_1 t} + K_2^{\mu} e^{s_2 t} + \ldots + K_{2N}^{\mu} e^{s_{2N} t} + \\ + \int_0^t \left[L_1^{\rho\mu} e^{s_1(t-\tau)} + L_2^{\rho\mu} e^{s_2(t-\tau)} + \ldots \right. \\ \left. \ldots + L_{2N}^{\rho\mu} e^{s_{2N}(t-\tau)}\right] Q_{\rho}(\tau)\,d\tau. \qquad (104.18) \end{aligned}$$

Приведенный выше результат является весьма общим и ограничен только неявным предположением, сделанным в (104.16), что собственные значения различны. В случаях вырождения эти разложения должны быть изменены добавлением дробей с более высокими степенями в знаменателях.

Предположим теперь, что возмущающая сила — гармоническая вида (104.2). И предположим, кроме того, что все собственные значения различны и имеют отрицательные действительные части. Тогда, опуская те члены, которые стремятся к нулю при $t \to \infty$, получаем из (104.18) следующее выражение для вынужденного колебания, вызванного приложенной силой (104.2):

$$q^{\mu} = \left[\frac{L_1^{\rho\mu}}{i\omega - s_1} + \frac{L_2^{\rho\mu}}{i\omega - s_2} + \ldots + \frac{L_{2N}^{\rho\mu}}{i\omega - s_{2N}}\right] F_{\rho} e^{i\omega t}. \qquad (104.19)$$

---

[1]) Легко установить эти формулы; ср. Jeffreys H. and Jeffreys B. стр. 233, цит. выше в предыдущем примечании.

Так как частота ω входит только явно, то формула ясно представляет явление резонанса[1]).

§ 105. Колебания около состояния установившегося движения или около сингулярной точки в фазовом пространстве (QP). Преобразование H к нормальной форме. Рассмотрим динамическую систему с N степенями свободы и гамильтонианом $H(q, p)$, в который не входят некоторые из координат (игнорируемые координаты). Установившееся движение — это движение, в котором неигнорируемые координаты и соответствующие им импульсы постоянны.

Пусть имеется M игнорируемых координат q_A ($A = 1, 2, \ldots, M$), неигнорируемые координаты обозначим через Q_Γ ($\Gamma = 1, 2, \ldots N - M$), аналогично обозначим импульсы. Тогда гамильтониан может быть написан

$$H = H(Q, p, P), \tag{105.1}$$

а уравнения движения — в виде

$$\dot{q}_A = \frac{\partial H}{\partial p_A}, \quad \dot{p}_A = -\frac{\partial H}{\partial q_A} = 0, \tag{105.2}$$

$$\dot{Q}_\Gamma = \frac{\partial H}{\partial P_\Gamma}, \quad \dot{P}_\Gamma = -\frac{\partial H}{\partial Q_\Gamma}. \tag{105.3}$$

Условия установившегося движения имеют вид

$$\dot{Q}_\Gamma = 0, \quad \dot{P}_\Gamma = 0. \tag{105.4}$$

Комбинируя эти последние условия с (105.2), получаем для установившегося движения

$$q_A = \alpha_A t + \text{const}, \; p_A = \text{const}, \tag{105.5}$$

где α_A — постоянные, так что игнорируемые координаты возрастают с постоянной скоростью, а соответствующие импульсы постоянны. Комбинируя условия (105.4)

---

[1]) Ср. с (33.10) для гармонического осциллятора.

с (105.3), получаем для установившегося движения уравнения

$$\frac{\partial H}{\partial Q_\Gamma} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial P_\Gamma} = 0. \tag{105.6}$$

Для того чтобы получить такое движение, должны удовлетворяться $2(N - M)$ уравнений, задавая подходящие значения $2N - M$ постоянным (Q, p, P). Таким образом, вообще говоря, можно ожидать, что мы найдем ∞^M установившихся движений, где M — число игнорируемых координат.

Если система, находящаяся в установившемся движении, возмущена таким образом, что постоянные p_A не изменяются, то можно исследовать колебания около такого движения (105.3), линеаризированные с помощью предположения, что (Q, P) принимают значения, близкие к тем постоянным значениям, которые они имеют в невозмущенном установившемся движении.

Имея сформулированную таким образом проблему колебаний около состояния установившегося движения системы, обладающей игнорируемыми координатами, мы представим теперь ту же проблему другим способом, безотносительно к такому движению или к игнорируемым координатам.

Дана гамильтонова функция $H(q, p)$; канонические уравнения

$$\dot{q}_\rho = \frac{\partial H}{\partial p_\rho}, \qquad \dot{p}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial q_\rho} \tag{105.7}$$

определяют направление движения в каждой точке фазового пространства (QP) за исключением тех **сингулярных** точек, где удовлетворяются $2N$ уравнений

$$\frac{\partial H}{\partial q_\rho} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_\rho} = 0. \tag{105.8}$$

Так как имеется $2N$ величин (q, p), то можно ожидать, вообще говоря, что мы найдем конечное число сингулярных точек в пространстве (QP). Каждая такая точка представляет полную историю системы, потому что уравнения движения (105.7) удовлетворяются при постоянных значениях (q, p), при условии, что эти значения удовлетворяют уравнениям (105.8).

Будем теперь исследовать траектории в пространстве (QP) вблизи сингулярной точки. Сравнивая (105.6) и (105.8), видим, что такое исследование есть в то же время исследование колебаний около состояния устойчивого движения для системы с игнорируемыми координатами. Такой подход имеет то преимущество, что мы входим сразу в существо дела.

Следующее обсуждение тесно связано с вопросами, рассмотренными в § 103. Однако здесь мы будем употреблять скорее гамильтоновы методы, чем лагранжевы. В методе Лагранжа мы ограничены преобразованиями координат (q), а преобразование импульсов (p) является производным преобразованием. В методе Гамильтона мы можем применять канонические преобразования (КП).

Сингулярные точки в пространстве (QP) инвариантны относительно КП. Уравнения (105.8) эквивалентны уравнению $\delta H = 0$ для любой вариации положения в пространстве (QP), а это последнее уравнение — инвариант, так как H есть инвариант КП.

Пусть $q_\rho = a_\rho$, $p_\rho = b_\rho$ — сингулярная точка. Производящая функция

$$G(q, p') = (q_\rho - a_\rho)(p'_\rho + b_\rho) \tag{105.9}$$

дает КП

$$p_\rho = \frac{\partial G}{\partial q_\rho} = p'_\rho + b_\rho, \qquad q'_\rho = \frac{\partial G}{\partial p'_\rho} = q_\rho - a_\rho, \tag{105.10}$$

так что сингулярной точкой становится точка $q'_\rho = 0$, $p'_\rho = 0$. Будем употреблять теперь эти новые канонические переменные, отбросив штрихи.

Предполагаем, что функция $H(q, p)$ разложима в степенно́й ряд в окрестности сингулярной точки. Постоянный член в разложении не имеет значения в (105.7) и мы его опустим. Тогда, принимая во внимание (105.8), имеем

$$H(q, p) = \frac{1}{2} A_{\rho\sigma} q_\rho q_\sigma + B_{\rho\sigma} q_\rho p_\sigma + \frac{1}{2} C_{\rho\sigma} p_\rho p_\sigma, \tag{105.11}$$

где включены члены до второго порядка и коэффициенты — постоянные.

Ради компактности введем обозначения § 87 с некоторыми изменениями размерностей, а именно, будем рассматривать $2N$-мерное пространство QP вместо $QTPH$ ($2N+2$ измерений). Имеем

$$z = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}; \tag{105.12}$$

тогда уравнение (105.11) можно написать в виде

$$2H = \tilde{z}Hz, \tag{105.13}$$

где H — симметричная $2N \times 2N$ матрица ($\tilde{H} = H$). Введем матрицу (87.11)

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{105.14}$$

где 1 есть теперь единичная $N \times N$ матрица; отметим свойства матрицы Γ:

$$\Gamma = -\tilde{\Gamma}, \quad \Gamma^{-1} = -\Gamma, \quad \Gamma^2 = -1_{(2N)}, \quad \det \Gamma = 1. \tag{105.15}$$

Тогда, как и в случае (87.13), уравнения движения имеют вид

$$\dot{z} = \Gamma H z. \tag{105.16}$$

Для того чтобы определить природу движения, попытаемся разделить переменные в этих уравнениях; сделаем это, применив КП, которое переводит матрицу H в простую (нормальную) форму [1]).

Рассмотрим линейные уравнения

$$\Gamma H z = \lambda z \quad \text{или} \quad Hz = -\lambda \Gamma z \tag{105.17}$$

и присоединенное детерминантное уравнение

$$\det(H + \lambda\Gamma) = 0, \tag{105.18}$$

которое имеет $2N$ корней, действительных или комплексных, и не обязательно различных. Для произвольного

---

[1]) Ср. Уиттекер [28], стр. 448—450; Lanczos C., [5], 20, 653—688; Зигель К., стр. 76—80, цит. соч. в § 53.

корня λ имеем уравнение

$$\det [\varGamma (H + \lambda \varGamma) \varGamma] = 0, \tag{105.19}$$

(так как $\det \varGamma = 1$). Транспонируя эту матрицу и принимая во внимание соотношения (105.15), получаем

$$\det (H - \lambda \varGamma) = 0. \tag{105.20}$$

Сравнение с уравнением (105.18) показывает, что если λ — корень, то корнем является также и $-\lambda$. Можем написать полную систему корней так: $\pm \lambda_1, \ldots, \pm \lambda_N$ и представить их в форме диагональной матрицы

$$L = \begin{pmatrix} L_0 & 0 \\ 0 & -L_0 \end{pmatrix}, \tag{105.21}$$

где L_0 — диагональная $N \times N$ матрица с элементами $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$.

Будем предполагать, что $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ — различны [1]). Тогда система решений уравнения (105.17) может быть охарактеризована $2N \times 2N$ матрицей Z такой, что

$$Z^{-1}\varGamma H Z = L. \tag{105.22}$$

Однако это уравнение не определяет Z единственным образом (и этот факт имеет большое значение). Если Z — какая-нибудь матрица-решение, то решением является также и матрица ZP, где P — произвольная диагональная матрица. Если Y и Z — две матрицы-решения, то имеет место соотношение

$$Z = YP, \tag{105.23}$$

где P — некоторая диагональная матрица.

Пусть Z — матрица-решение. Определим Y следующим образом:

$$Y = -(\varGamma \tilde{Z} \varGamma)^{-1} = -\varGamma \tilde{Z}^{-1} \varGamma. \tag{105.24}$$

---

[1]) Настоящее доказательство приложимо только к этому невырожденному случаю. Случай вырожденных корней заключен в рассмотрении устойчивости движения согласно исследованию Вейерштрасса методом контурного интегрирования Вейерштрасса, как это изложено у Уиттекера [28], стр. 220—228.

Тогда справедливы равенства

$$Y^{-1}\Gamma HY=\Gamma\tilde{Z}\cdot\Gamma H\cdot\Gamma\tilde{Z}^{-1}\Gamma=-\Gamma\tilde{Z}H\Gamma\tilde{Z}^{-1}\Gamma. \tag{105.25}$$

Однако, транспонируя (105.22), получаем соотношение

$$\tilde{Z}H\Gamma Z^{-1}=-L \tag{105.26}$$

и, следовательно,

$$Y^{-1}\Gamma HY=\Gamma L\Gamma=L. \tag{105.27}$$

Таким образом, Y тоже есть матрица-решение и это решение связано с Z соотношением (105.23), где P — некоторая диагональная матрица. Отсюда имеем

$$P=Y^{-1}Z=-\Gamma\tilde{Z}\Gamma Z, \qquad \Gamma P=\tilde{Z}\Gamma Z; \tag{105.28}$$

транспонируя эти матрицы, получаем

$$P\Gamma=\Gamma P, \tag{105.29}$$

откуда следует, что P-матрица имеет форму

$$P=\begin{pmatrix}P_0 & 0\\ 0 & P_0\end{pmatrix}, \tag{105.30}$$

где P_0 — диагональная $N\times N$ матрица.

Найдем в классе матриц-решений, удовлетворяющих условию (105.22), матрицу (назовем ее J), удовлетворяющую условию симплектичности (ср. с (87.16)),

$$\tilde{J}\Gamma J=\Gamma. \tag{105.31}$$

Мы сделаем это, выбрав произвольную матрицу-решение Z, образуя соответствующую диагональную матрицу P согласно (105.28) и определив D как

$$D=\begin{pmatrix}P_0^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{105.32}$$

и полагая затем

$$J=ZD. \tag{105.33}$$

Легко проверить, что выполняется равенство

$$D\Gamma D=\Gamma P^{-1}, \tag{105.34}$$

а поэтому согласно (105.28) равенство

$$\tilde{J}\Gamma J=D\tilde{Z}\Gamma ZD=D\Gamma PD=D\Gamma DP=\Gamma. \tag{105.35}$$

Тем самым доказано (105.31).

Пусть J определено формулой (105.33); применим КП

$$z = Jz' \tag{105.36}$$

и гамильтониан примет вид

$$2H = \tilde{z}'H'z', \qquad H' = \tilde{J}HJ. \tag{105.37}$$

Так как J — матрица-решение, то соотношение (105.26) дает

$$\tilde{J}H\Gamma\tilde{J}^{-1} = -L, \qquad \tilde{J}H = L\tilde{J}\Gamma, \tag{105.38}$$

и, следовательно,

$$H' = L\tilde{J}\Gamma J = L\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & L_0 \\ L_0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{105.39}$$

Таким образом, с помощью КП *можно преобразовать квадратичный гамильтониан к нормальной форме*

$$H' = \lambda_1 q_1' p_1' + \lambda_2 q_2' p_2' + \ldots + \lambda_N q_N' p_N', \tag{105.40}$$

где λ — *корни уравнения* (105.18). Новые координаты (q', p'), вообще говоря, комплексные.

Применим еще одно КП с производящей функцией

$$G(q', p'') = \sum_{\rho=1}^{N} \left(q_\rho' p_\rho'' - \frac{1}{2} \frac{p_\rho''^2}{\lambda_\rho} - \frac{1}{4} \lambda_\rho q_\rho'^2 \right), \tag{105.41}$$

так что будут иметь место уравнения (без обычного условия суммирования)

$$p_\rho' = \frac{\partial G}{\partial q_\rho'} = p_\rho'' - \frac{1}{2} \lambda_\rho q_\rho', \qquad q_\rho'' = \frac{\partial G}{\partial p_\rho''} = q_\rho' - \frac{p_\rho''}{\lambda_\rho}; \tag{105.42}$$

тогда гамильтониан преобразуется в другую нормальную форму

$$H'' = \frac{1}{2} (p_1''^2 + \ldots + p_N''^2 - \lambda_1^2 q_1''^2 - \ldots - \lambda_N^2 q_N''^2). \tag{105.43}$$

Если использовать форму (105.40), то уравнения движения имеют вид

$$\dot{q}_1' = \frac{\partial H'}{\partial p_1'} = \lambda_1 q_1', \ \ldots, \ \dot{p}_1' = -\frac{\partial H}{\partial q_1'} = -\lambda_1 p_1', \ \ldots, \qquad (105.44)$$

где переменные разделены; движение определяется уравнениями

$$q_1' = b_1 e^{\lambda_1 t}, \ \ldots, \ p_1' = -a_1 e^{-\lambda_1 t}, \ \ldots, \qquad (105.45)$$

где постоянные коэффициенты зависят от начальных условий. Ясно, что движение, определяемое этими уравнениями, устойчиво тогда и только тогда, когда все λ_i чисто мнимые.

Легко показать, что если $H(q, p)$ — положительно определенная функция, то все корни уравнения (105.18) чисто мнимые, даже в вырожденном случае кратных корней. Пусть λ, z (при $z \neq 0$) будет некоторым решением уравнения (105.17). Пусть $\bar{z}$ — комплексное сопряженное z, а $\bar{z}^+$ — транспозиция $\bar{z}$ (т. е. это матрица в одну строку). Тогда имеет место соотношение

$$\bar{z}^+ H \bar{z} = -\lambda \bar{z}^+ \Gamma \bar{z}. \qquad (105.46)$$

Из положительной определенности функции H следует, что левая часть — действительная и положительная. Поэтому $\lambda \neq 0$ (не нулевые корни) и

$$\bar{z}^+ \Gamma \bar{z} \neq 0. \qquad (105.47)$$

Легко видеть, что эта величина должна быть чисто мнимой и отсюда λ тоже чисто мнимое.

Мы получили следующий результат: *движение системы, имеющей однородный квадратичный гамильтониан H, устойчиво, если H положительно определенная функция*[1]).

§ 106. Возмущения.

Рассмотрим две динамические системы, S и S', с каноническими переменными (q, p) и (q', p') и гамильтонианами $H(q, t, p)$ и $H'(q', t, p')$.

[1]) Мы доказали это только для невырожденного случая различных собственных значений; о вырожденном случае см. предыдущее примечание.

Они совершенно независимы, их уравнения движения можно написать в следующей форме (опуская при этом индексы):

$$\left.\begin{array}{lll} S: & \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p}, & \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q}; \\ S': & \dot{q}' = \dfrac{\partial H'}{\partial p'}, & \dot{p}' = -\dfrac{\partial H'}{\partial q'}. \end{array}\right\} \qquad (106.1)$$

Представим теперь, что S и S' образуют как бы одну систему $S + S'$ с гамильтонианом

$$H(q, t, p) + H'(q', t, p') + K(q, q', t, p, p'), \qquad (106.2)$$

где K есть гамильтониан взаимодействия. В качестве очень простого примера можно взять за S и S' две свободные частицы; тогда K — потенциал, возникающий вследствие их взаимного гравитационного притяжения. Уравнения движения системы $S + S'$ имеют вид

$$S + S': \left\{\begin{array}{ll} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} + \dfrac{\partial K}{\partial p}, & \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} - \dfrac{\partial K}{\partial q}, \\ \dot{q}' = \dfrac{\partial H'}{\partial p'} + \dfrac{\partial K}{\partial p'}, & \dot{p}' = -\dfrac{\partial H'}{\partial q'} - \dfrac{\partial K}{\partial q'}. \end{array}\right\} \qquad (106.3)$$

Действие гамильтониана взаимодействия K возмущает исходные движения (106.1) систем S и S'. Если производные от K малы, то величины $\dot{q}, \dot{p}, \dot{q}', \dot{p}'$ в данной точке пространства QTP системы $S + S'$ для возмущенного и невозмущенного движений мало отличаются друг от друга. Однако за очень долгое время в движении могут накопиться существенные изменения; в этом случае говорят о *вековых изменениях*.

Для системы, образованной Солнцем и планетами, гамильтониан можно написать в форме

$$H = T(S) + \Sigma\, T(P) + \Sigma\, V(SP) + \Sigma\, V(PP'), \qquad (106.4)$$

где $T(S)$ — кинетическая энергия Солнца, $T(P)$ — кинетическая энергия планеты, $V(SP)$ — взаимная потенциальная энергия Солнца и планеты, $V\,(PP')$ — взаимная потенциальная энергия двух планет. Для того чтобы написать гамильтониан возмущенного движения, обозначим через S_0 фиктивное солнце, закрепленное в начале координат, и определим $V'\,(SP)$ следующим образом:

$$V'\,(SP) = V\,(SP) - V\,(S_0P). \tag{106.5}$$

Тогда гамильтониан (106.4) может быть написан в виде

$$H = H\,(S) + \sum H\,(P) + K, \tag{106.6}$$

где

$$H\,(S) = T\,(S), \quad H\,(P) = T\,(P) + V\,(S_0P), \tag{106.7}$$

а через K обозначены члены, не вошедшие в первые два гамильтониана; K есть гамильтониан возмущения.

Невозмущенное движение известно, ибо $H\,(S)$ соответствует свободному движению частицы, а $H\,(P)$ — проблеме Кеплера. Практическое значение уравнения (106.6) основано на том факте, что K малó. Действительное движение солнечной системы есть возмущение такого состояния движения, в котором солнце покоится, а планеты описывают эллиптические орбиты (с Солнцем в фокусе).

Фундаментальная идея, лежащая в основе теории возмущений, состоит в следующем: начиная с момента $t = t_1$ и до $t = t_2$ движение полной системы (включающей возмущение) мало отличается от невозмущенного движения, при условии, что мы начинаем рассматривать два движения в одной и той же точке пространства QTP и берем интервал $t_2 - t_1$ достаточно малым. Предположим, что невозмущенное движение известно; влияние возмущения в течение такого конечного интервала можно найти приближенными методами[1]).

Не применяя никаких приближений, основанных на малости возмущающего гамильтониана, общую задачу возмущенного движения можно поставить в следующем виде: пусть дано решение канонических уравнений

[1]) Подобное исследование возмущений с использованием переменных действие — угол см. Франк [5], стр. 87—100.

невозмущенного движения

$$\dot{q}_\rho = \frac{\partial H_0}{\partial p_\rho}, \qquad \dot{p}_\rho = -\frac{\partial H_0}{\partial q_\rho}. \tag{106.8}$$

Требуется установить метод определения движения, для которого гамильтониан имеет вид

$$H = H_0(q, \ t, \ p) + H_1(q, \ t, \ p), \tag{106.9}$$

где H_1 — возмущающий гамильтониан.

Пусть решение системы (106.8) есть

$$q_\rho = q_\rho(c, \ t), \qquad p_\rho = p_\rho(c, \ t), \tag{106.10}$$

где c означает $2N$ произвольных постоянных c_A, индексы A пробегают значения $1, \ldots, 2N$; эти величины остаются постоянными вдоль каждой невозмутимой траектории. Разрешая (106.10) относительно c_A, имеем

$$c_A = c_A(q, \ t, \ p). \tag{106.11}$$

Эти $2N$ функций определяются формой функции $H_0(q, t, p)$.

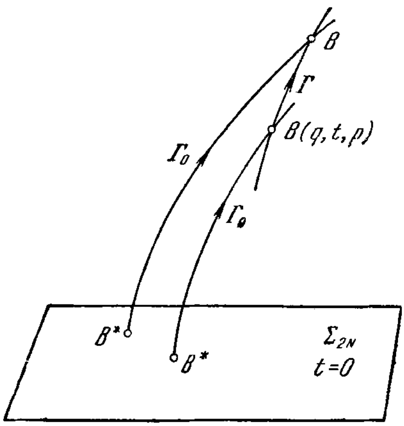


Рис. 50. Возмущение, наблюдаемое в QTP. Γ_0 — невозмущенные траектории, Г—возмущенная траектория.

Рассмотрим теперь задачу в пространстве QTP (рис. 50) [1]. Σ_{2N} — поверхность $t = 0$, B — какая-нибудь точка, и Γ_0 — невозмущенная траектория, проходящая через точку B и пересекающая поверхность Σ_{2N}, например в точке B^*. Так как c_A постоянны вдоль траектории Γ_0, то в точке B^* имеем

$$\overset{*}{q}_\rho = q_\rho(c, 0), \qquad \overset{*}{p}_\rho = p_\rho(c, 0). \tag{106.12}$$

[1]) Вспомним, что любая система канонических уравнений определяет конгруэнцию кривых в пространстве QTP; через каждую точку проходит одна кривая; ср. с § 93.

Таким образом, c_A образуют систему координат на Σ_{2N}, (c, t) образуют систему координат в QTP, вообще говоря, не канонических. Невозмущенные траектории Γ_0 образуют систему проектирующих линий, посредством которых точка B проектируется на точку B^*; соответствующие значения c_A определяются выражениями (106.11).

Рассмотрим теперь возмущенную траекторию Γ. В точке B ее направление отличается от направления Γ_0, и в то время, как изображающая точка B пробегает Γ, проекция этой точки B^* движется по поверхности Σ_{2N}. Поэтому метод, изложенный здесь, называется методом вариации произвольных постоянных, так как c_A постоянны для Γ_0, но не для Γ. Проблема возмущений сводится к изучению закона, по которому c_A изменяются с t, когда изображающая точка пробегает Γ. Если бы мы знали этот закон, то могли бы найти Γ; ее уравнения в форме

$$c_A = f_A(t) \tag{106.13}$$

определяют кривую в пространстве QTP в системе координат (c, t).

На кривой Γ согласно (97.9) имеет место уравнение

$$\dot{c}_A = \frac{\partial c_A}{\partial t} + [c_A, H_0 + H_1], \tag{106.14}$$

где c_A — функции (106.11); на Γ_0 (вследствие того, что $c_A = \text{const}$) эти уравнения превращаются в следующие:

$$0 = \frac{\partial c_A}{\partial t} + [c_A, H_0]. \tag{106.15}$$

Вычитая, получаем уравнение на Γ:

$$\dot{c}_A = [c_A, H_1]. \tag{106.16}$$

Вследствие (106.10) или эквивалентных уравнений (106.11) правая часть есть функция переменных (c, t) и, следовательно, мы имеем здесь систему $2N$ уравнений для определения функции (106.13), а отсюда и возмущенного движения.

Уравнения (106.16) можно представить в другой форме. Согласно (106.10) можно выразить H_1 как функцию (c, t):

$$H_1(q, t, p) = K(c, t). \tag{106.17}$$

Тогда

$$\frac{\partial H_1}{\partial q_\rho} = \frac{\partial K}{\partial c_B}\frac{\partial c_B}{\partial q_\rho}, \qquad \frac{\partial H_1}{\partial p_\rho} = \frac{\partial K}{\partial c_B}\frac{\partial c_B}{\partial p_\rho}, \tag{106.18}$$

и

$$[c_A, H_1] = \frac{\partial c_A}{\partial q_\rho}\frac{\partial H_1}{\partial p_\rho} - \frac{\partial H_1}{\partial q_\rho}\frac{\partial c_A}{\partial p_\rho} = [c_A, c_B]\frac{\partial K}{\partial c_B}. \tag{106.19}$$

Таким образом, уравнения (106.16) можно написать в виде

$$\dot{c}_A = [c_A, c_B]\frac{\partial K}{\partial c_B} \tag{106.20}$$

До сих пор все рассуждения были точными. Заметим теперь, что если производные H_1 малы, или, что то же самое, малы производные K, то правые части (106.16) и (106.20) также малы. Тогда проектируемая точка B^* движется медленно по поверхности Σ_{2N} и ее движение можно аппроксимировать в конечном интервале (t_1, t_2), подставляя в эти правые части значения c_A в $t = t_1$ и интегрируя в квадратурах[1]).

[1]) О теории возмущений, основанной на уравнениях Лагранжа и касательных преобразований, см. Corben and Stehle, [3], стр. 306—312.

Е. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА [1])

ГЛАВА I

ПРОСТРАНСТВО — ВРЕМЯ МИНКОВСКОГО И ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

§ 107. Преобразования Лоренца. Теперь маленькие латинские индексы будут принимать значения 1, 2, 3, 4, а греческие — 1, 2, 3 (суммирование в обоих случаях производится по повторяющимся индексам).

Пусть x^r — действительные координаты некоторого события в 4-мерном многообразии пространства — времени; и пусть интервал ds между двумя соседними событиями определяется формулой

$$ds^2 = \varepsilon g_{mn}\, dx^m\, dx^n, \qquad (107.1)$$

где коэффициенты — функции координат, а ε берется равным $+1$ или -1 так, чтобы сделать ds действительным.

В специальной теории относительности (а мы касаемся здесь только ее) пространство — время плоское; это

---

[1]) Основные законы ньютоновой и релятивистской динамики были сопоставлены в § 4 и 5. Здесь будут повторены основные формулы, но не будет более говориться о характерных трудностях, возникающих в релятивистских системах. Общие сведения о специальной теории относительности читатель может найти в Costa de Beauregard O., La Théorie de la Relativité restreine (Paris: Masson & Ge. 1949); Бергман П., Введение в теорию относительности, ИЛ, Москва, 1947, перев. П. Кунина и И. Таксара, под ред. В. Л. Гинзбурга, т. 1; Эйнштейн А., Сущность теории относительности, ИЛ, 1960; Halpern [9]; M. von Jane, Die Relativitätstheorie, т. I (5 th. Ed. Braunschweig: Vieweg, 1952); Möller C., The Theory of Relativity (Oxford, Clarendon Press, 1952), Papapetrou A., Spezielle Relativitätstheorie (Berlin, 1955); Synge I. L, Relativity: The Special Theory (Amsterdam, North—Holland Publishing, 1956).

означает, что существуют действительные координаты (x, y, z, t), такие, что

$$ds^2 = \varepsilon\,(dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2), \tag{107.2}$$

где c — фундаментальная постоянная (скорость света).

Удобно ввести координаты Минковского с «мнимым временем», определенные следующим образом:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict; \tag{107.3}$$

тогда выражение (107.2) можно компактно записать как

$$ds^2 = \varepsilon\, dx_r\, dx_r. \tag{107.4}$$

В этой книге всюду будут употребляться координаты Минковского. Они имеют то большое удобство, что для них ковариантные компоненты векторов и тензоров те же, что и контравариантные компоненты, и все векторы и тензоры можно написать с индексами внизу, избегая, таким образом, сложности в обозначениях. Если мнимое время x_4 окажется некоторым источником неясностей, то мы можем сразу перейти от координат Минковского x_r к действительным декартовым координатам x^r, положив $x_\rho = x^\rho$, $x_4 = ix^4$. Нам представится случай перейти к действительным координатам в § 111 для того, чтобы обсудить вопрос о знаке.

Группа преобразований Лоренца состоит из тех преобразований (обязательно линейных), которые сохраняют квадратичную форму $dx_r\, dx_r$. Любое такое преобразование имеет вид

$$x'_r = A_{rs}x_s + B_r, \tag{107.5}$$

где коэффициенты удовлетворяют условию

$$A_{rs}A_{rt} = \delta_{st}. \tag{107.6}$$

Сравнение с (9.6) показывает, что, формально говоря, A есть ортогональная матрица, и это наводит на мысль, что преобразование Лоренца — это «жесткое» преобразование пространства — времени в себя. В известном смысле это справедливо и очень важно для понимания преобразования Лоренца, но наличие мнимых элементов в A (обусловленных мнимостью времени) существенно отличает геометрию преобразований Лоренца от геометрии ортогональных преобразований 4-пространства с четырьмя действительными координатами.

Нулевой конус, проведенный из любого события a_r как из вершины (рис. 51), имеет уравнение

$$(x_r - a_r)(x_r - a_r) = 0. \tag{107.7}$$

События, лежащие вне нулевого конуса, удовлетворяют условию

$$(x_r - a_r)(x_r - a_r) > 0, \tag{107.8}$$

а лежащие внутри — условию

$$(x_r - a_r)(x_r - a_r) < 0. \tag{107.9}$$

События внутри конуса делятся на две совокупности в зависимости от того, положительно или отрицательно

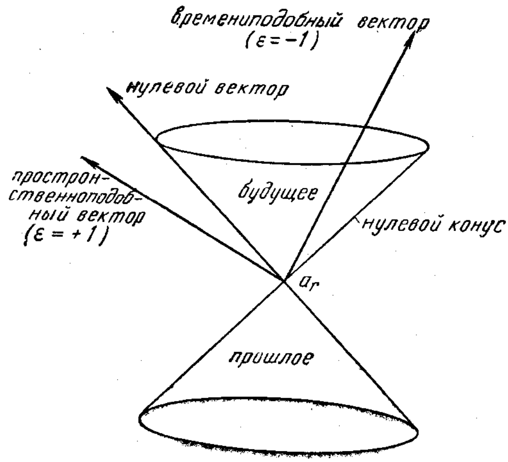


Рис. 51. Нулевой конус. Прошедшее и будущее. Времениподобный, пространственноподобный и нулевой векторы.

$(x_4 - a_4)/i$. Эти две совокупности представляют собой соответственно будущее или прошедшее по отношению к событию a_r.

Смещение dx_r из a_r в будущее или в прошедшее называется *времениподобным*, и для него $\varepsilon = -1$; смещение на нулевом конусе называется нулевым, а смещение, направленное во вне нулевого конуса, — *пространственноподобным смещением* ($\varepsilon = +1$).

Нулевой конус остается инвариантным при преобразованиях Лоренца, а следовательно, инвариантны и его внешняя и внутренняя области. Однако будущее и прошедшее могут поменяться местами; в нашем исследовании мы отбросим преобразования Лоренца, допускающие это изменение. Согласно (107.6) якобиан J преобразования Лоренца есть $J = \pm 1$; преобразование называется *собственным*, если $J = +1$, и несобственным, если $J = -1$.

Основной постулат теории относительности состоит в том, что все законы динамики должны быть инвариантными относительно собственных лоренцовых преобразований, сохраняющих будущее. Это эквивалентно утверждению, что законы допускают геометрическое построение с помощью геометрии пространства — времени Минковского (ср. § 5). Кроме того, предполагается, что любое перемещение материальной частицы dx_r вдоль мировой линии — временилодобное. Это эквивалентно утверждению, что ни одна частица не может передвигаться со скоростью света (ср. § 108 ниже).

Абстрактное понятие интервала ds приобретает физическое содержание при помощи утверждения, что вдоль мировой линии материальной частицы ds является мерой *собственного времени*, т. е. времени, определяемого стандартными часами, перемещающимися вместе с частицей.

Говорят, что наблюдатель *галилеев* (или, что употребляется чаще, *галилеева система отсчета*), если интервал ds между любыми двумя событиями можно выразить в виде (107.2) или (107.4) через его координаты. Когда два галилеевых наблюдателя, S и S', наблюдают одно и то же событие, их наблюдения связаны преобразованием Лоренца. При соответствующем выборе пространственных осей для обоих наблюдателей лоренц-преобразование, связывающее два наблюдения, может быть выражено в простой форме,

$$x' = \gamma(x - vt),\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \quad (107.10)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (107.11)$$

а v — относительная скорость S и S'; более точно, скорость наблюдателя S' относительно S есть $(v, 0, 0)$, а скорость наблюдателя S относительно S' есть $(-v, 0, 0)$.

§ 108. Кинематика в пространстве — времени. 4-импульс. *а) Скорость точки.* Рассмотрим движущуюся точку (не обязательно частицу). Уравнения ее мировой линии можно написать в виде

$$x_r = x_r(\chi), \tag{108.1}$$

где χ — монотонный параметр. 3-скорость точки равна

$$v_\rho = \frac{dx_\rho}{dt} = ic\,\frac{dx_\rho}{dx_4}. \tag{108.2}$$

Отсюда абсолютная величина скорости v, определенная как

$$v = \sqrt{v_\rho v_\rho}, \tag{108.3}$$

больше, равна или меньше, чем c, в зависимости от того, является 4-вектор $dx_r/d\chi$ пространственноподобным, нулевым или времениподобным.

Для материальной частицы этот 4-вектор времениподобный и мы определяем 4-скорость как времениподобный единичный вектор

$$\lambda_r = \frac{dx_r}{ds}, \tag{108.4}$$

удовлетворяющий условию

$$\lambda_r\lambda_r = -1. \tag{108.5}$$

Согласно определению (108.2) существуют следующие соотношения между 3-скоростью и 4-скоростью:

$$\left.\begin{aligned} &v_\rho = ic\,\frac{\lambda_\rho}{\lambda_4}, \qquad \lambda_\rho = \frac{\gamma v_\rho}{c}, \qquad \lambda_4 = i\gamma, \\ &\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{108.6}$$

Для точки, движущейся быстрее, чем свет, 4-скорость можно определить уравнениями (108.4); в (108.5) надо заменить —1 на +1, и соотношения для 3-скорости имеют вид (108.6), с той только разницей, что γ заменяется на γ^*, где

$$\gamma^* = \frac{1}{\sqrt{\frac{v^2}{c^2} - 1}}. \tag{108.7}$$

Для фотона предполагаем, что $dx_r/d\chi$ есть нулевой вектор. Таким образом, абсолютная скорость фотона есть c. Он не имеет допускающей определение 4-скорости; выражение (108.4) нельзя использовать потому, что $ds = 0$.

β) *Волновая скорость*. Уравнение

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \tag{108.8}$$

определяет 3-пространство в пространстве — времени. Его можно назвать 3-волной. Это есть, так сказать, история 2-волны; мгновенная 2-волна может быть получена, если положить $x_4 = \mathrm{const}$ в уравнении (108.8).

Легко видеть, что нормальная 3-скорость 2-волны есть[1])

$$u_\rho = -ic\frac{F_{,\rho} F_{,4}}{F_{,\sigma} F_{,\sigma}}, \tag{108.9}$$

где $F_{,r} = \partial F/\partial x_r$. Отсюда следует, что абсолютная величина скорости u распространения волны удовлетворяет уравнению

$$1 - \frac{c^2}{u^2} = \frac{F_{,r} F_{,r}}{(F_{,4})^2}. \tag{108.10}$$

Так как $F_{,4}$ — чисто мнимая, то u больше, равна или меньше, чем c, в зависимости от того, является ли 4-вектор $F_{,r}$ (который есть пространственновременна́я нормаль к 3-волне) времениподобным, нулевым или пространственноподобным.

---

[1]) См. Synge, цит. соч. в § 107, стр. 419.

γ) *4-ускорение.* Для материальной частицы 4-ускорение есть 4-вектор:

$$\frac{d\lambda_r}{ds} = \frac{d^2 x_r}{ds^2}. \tag{108.11}$$

Он ортогонален (в смысле пространства — времени) 4-скорости, потому что условие (108.5) дает

$$\lambda_r \frac{d\lambda_r}{ds} = 0. \tag{108.12}$$

3-ускорение, определенное ньютоновым способом как

$$a_\rho = \frac{d^2 x_\rho}{dt^2}, \tag{108.13}$$

можно выразить следующим образом:

$$a_\rho = \frac{c}{\gamma}\frac{d}{ds}\left(\frac{c}{\gamma}\lambda_\rho\right) = -\frac{c^2}{\lambda_4}\frac{d}{ds}\left(\frac{\lambda_\rho}{\lambda_4}\right), \tag{108.14}$$

так как $j\,ds = c\,dt$, $\lambda_4 = ij$.

δ) *Сложение скоростей.* Пусть S и S' — две галилеевы системы отсчета, связанные с помощью преобразования Лоренца соотношениями (107.10). Пусть частица движется со скоростью $(V, 0, 0)$ относительно S'. Тогда ее скорость относительно системы S равна $(u, 0, 0)$, где

$$u = \frac{v + V}{1 + \dfrac{vV}{c^2}}. \tag{108.15}$$

Этот закон сложения скоростей можно выразить через гиперболические функции в форме

$$\psi = \varphi + \Phi, \tag{108.16}$$

где

$$\operatorname{th}\psi = \frac{u}{c}, \quad \operatorname{th}\varphi = \frac{v}{c}, \quad \operatorname{th}\Phi = \frac{V}{c}. \tag{108.17}$$

ε) *4-импульс.* Мы связываем с частицей число m — ее собственную массу, которая инвариантна относительно преобразования Лоренца. 4-импульс частицы определяется как

$$M_r = m\lambda_r, \tag{108.18}$$

где λ_r есть 4-скорость. Все четыре компоненты имеют размерность массы, но можно прийти к размерности импульса или энергии, введя в правую часть множитель c или c^2.

Обозначив $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, введем следующие определения:

релятивистская масса $= m\gamma$,
релятивистский импульс (3-импульс) $= m\gamma v_\rho$,
релятивистская энергия $= E = m\gamma c^2$,
собственная энергия $= E_0 = mc^2$,
релятивистская кинетическая энергия $= T = mc^2(\gamma - 1)$.
Разлагая по степеням v/c, получаем

$$T = \frac{1}{2} mv\left(1 + \frac{3}{4}\frac{v^2}{c^2} + \ldots\right); \tag{108.19}$$

первый член совпадает со значением кинетической энергии в ньютоновой механике.

Четыре компоненты M_r можно выразить через релятивистский импульс и энергию следующим образом:

$$M_\rho = m\lambda_\rho = \frac{m\gamma c_\rho}{c},$$

$$M_4 = m\lambda_4 = im\gamma = \frac{iE}{c^2}. \tag{108.20}$$

Для фотона формула (108.18) теряет силу, так как для фотона $m = 0$ и компоненты λ_r становятся бесконечно большими.

Уравнение

$$\varphi = \varphi_0 \cos\frac{2\pi\nu}{c}(n_\rho x_\rho - ct), \tag{108.21}$$

где $n_\rho n_\rho = 1$, представляет плоские волны частоты ν, распространяющиеся в направлении единичного 3-вектора n_ρ с абсолютной скоростью c. Положим

$$f_\rho = \nu n_\rho, \quad f_4 = i\nu. \tag{108.22}$$

Можно написать (108.21) в форме

$$\varphi = \varphi_0 \cos \frac{2\pi}{c} f_r x_r. \tag{108.23}$$

Для того чтобы фазовый множитель мог быть инвариантным относительно преобразований Лоренца, необходимо и достаточно, чтобы f_r преобразовывался как 4-вектор. Таким образом, четыре величины (108.22) являются компонентами 4-вектора, т. е. при лоренцовом преобразовании (107.5) они преобразуются по закону

$$f'_r = A_{rs} f_s. \tag{108.24}$$

Употребим этот 4-вектор частоты f_r для того, чтобы определить 4-импульс M_r фотона, положив

$$M_\rho = \frac{h\nu}{c^2} n_\rho, \quad M_4 = \frac{ih\nu}{c^2}, \tag{108.25}$$

где h — постоянная Планка, ν — частота фотона и n_ρ — единичный 3-вектор в направлении движения фотона, так что 3-скорость фотона есть cn_ρ.

Компоненты импульса M_r имеют размерность массы. Мы определяем:

релятивистский импульс (3-импульс) фотона $= \dfrac{h\nu n_\rho}{c}$,

энергию фотона $= E = h\nu$.

Отметим, что

$$\left.\begin{aligned} &M_r M_r = -m^2 \text{ для материальной частицы,} \\ &M_r M_r = 0 \text{ для фотона.} \end{aligned}\right\} \tag{108.26}$$

§ 109. Уравнения движения частицы. Если на частицу действует 4-сила X_r, то предполагаем, что уравнения движения частицы имеют вид

$$\frac{d}{ds}(m\lambda_r) = X_r. \tag{109.1}$$

Эти уравнения согласно (108.12) приводят к следующим:

$$\frac{dm}{ds} = -X_r\lambda_r. \tag{109.2}$$

Следовательно, собственная масса изменяется, если только не имеет места условие

$$X_r\lambda_r = 0, \tag{109.3}$$

которое является условием ортогональности 4-силы и 4-скорости.

Используя соотношение $\gamma\, ds = c\, dt$, можно написать первые три уравнения (109.1) в форме

$$\frac{d}{dt}(m\gamma v_\rho) = \frac{c^2 X_\rho}{\gamma}; \tag{109.4}$$

эта квазиньютонова формула определяет скорость изменения релятивистского импульса. Последнее из уравнений (109.1) дает формулу для скорости изменения релятивистской энергии:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(m\gamma c^2) = -i\frac{c^3 X_4}{\gamma}. \tag{109.5}$$

Если уравнение (109.3) удовлетворяется, то имеем

$$-iX_4 = \frac{v_\rho X_\rho}{c} \tag{109.6}$$

и отсюда получаем формулу, связывающую скорость изменения энергии со скоростью изменения релятивистского импульса,

$$\frac{dE}{dt} = v_\rho \frac{c^2 X_\rho}{\gamma} = v_\rho \frac{d}{dt}(m\gamma v_\rho). \tag{109.7}$$

Условие ортогональности (109.3) удовлетворяется (и поэтому сохраняется собственная масса), если 4-сила зависит от 4-скорости следующим образом:

$$X_r = Y_{rs}\lambda_s, \tag{109.8}$$

где Y_{rs} — кососимметричный тензор, так что имеют место соотношения

$$Y_{rs} = -Y_{sr}. \tag{109.9}$$

4-сила такого типа появляется в случае заряженной частицы, движущейся в электромагнитном поле (ср. § 115, 116).

§ 110. Лагранжева и гамильтонова динамики. Можно не класть в основу динамики уравнения движения в форме (109.1), а построить релятивистскую динамику на лагранжиане или гамильтониане, употребляя методы гл. Д, которые достаточно общи и могут быть приложены к теории относительности. Так как мы рассматриваем только одну частицу, то полагаем $N = 3$. Пространство конфигураций Q становится мгновенным пространством галилеева наблюдателя, а пространство событий QT становится самим пространством — временем. Для описания релятивистской динамики полезны также другие пространства изображений, перечисленные в § 62. В частности, кажется интересным 8-мерное пространство $QTPH$, однако мы будем использовать только пространство QT и PH, со ссылками на пространство Q для физической интерпретации формул.

Будем употреблять координаты Минковского (107.3); напоминаем, что маленькие латинские индексы принимают значения 1, 2, 3, 4, а греческие — 1, 2, 3 и имеют место обычные условия суммирования. Все общие формулы легко перевести в действительные криволинейные координаты x^r по (107.1).

Некоторые важные формулы гл. Д нужно вывести снова с некоторыми изменениями в знаках (ср. (110.4) и (110.8)). Это изменение в знаке обсуждается в § 111.

Рассмотрим в пространстве — времени некоторую времениподобную кривую с параметром χ, возрастающим от прошлого к будущему. Пусть $\Lambda(x, x')$ — заданный инвариантный однородный лагранжиан[1]), где $x'_r = dx_r/d\chi$. Лагранжево действие есть

$$A_L = \int \Lambda(x, x')\, d\chi; \tag{110.1}$$

[1]) Положительно однородный первой степени относительно x'_r.

его значение не зависит от выбора параметра χ. Первая форма принципа Гамильтона имеет вид (ср. с (65.4))

$$\delta \int \Lambda (x, x') \, d\chi = 0, \tag{110.2}$$

для фиксированных концевых событий. Это уравнение приводит к следующим уравнениям движения Лагранжа:

$$\frac{d}{d\chi} \frac{\partial \Lambda}{\partial x'_r} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_r} = 0, \tag{110.3}$$

тождественно совпадающим с (65.7).

Итак, имеем релятивистскую динамику, основанную на выбранном лагранжиане. Релятивизм проявляется только в требовании, что лагранжиан должен быть инвариантным относительно преобразований Лоренца.

Можно также построить релятивистскую динамику на гамильтониане. Пусть y_r — гамильтонов 4-вектор[1]), соотнесенный событию x_r. Определим в пространстве — времени гамильтоново действие вдоль какой-нибудь кривой интегралом (68.1) (изменив при этом знак)[2])

$$A_H = - \int y_r \, dx_r. \tag{110.4}$$

Пусть

$$\Omega (x, y) = 0 \tag{110.5}$$

есть инвариантное уравнение энергии. Принцип Гамильтона во второй форме имеет вид (ср. (68.5))

$$\delta \int y_r \, dx_r = 0, \qquad \Omega (x, y) = 0. \tag{110.6}$$

---

[1]) Есть риск внести путаницу в терминологию, называя y_r 4-вектором импульса — энергии, потому что такой термин включает в себя действие, оказываемое полем на частицу (ср. (115.9)). По аналогии с оптикой Гамильтона y_r можно назвать 4-вектором медленности. Ср. Synge J. L., Geometrical Mechanics and de Broglie Waves, стр. 8. Cambridge, University Press,1954.

[2]) Желательно условиться, что действие положительно, когда y_r и dx_r оба времениподобные векторы, направленные в будущее; тогда имеем $y_r \, dx_r < 0$ и поэтому в определение (110.4) вносится знак минус. См. также § 111.

Он приводит к каноническим уравнениям Гамильтона в форме

$$\frac{dx_r}{dw} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_r}, \qquad \frac{dy_r}{dw} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x_r}, \tag{110.7}$$

где w — специальный параметр. Пусть дано начальное событие x_r и начальный гамильтонов 4-вектор y_r, удовлетворяющий условию (110.5); тогда уравнения (110.7) определяют мировую линию и поле векторов y_r вдоль нее. Это устанавливает гамильтонову динамику, основанную на выбранном уравнении энергии. Релятивизм требует инвариантности этого уравнения относительно преобразований Лоренца.

Итак, имеются три различных пути для построения релятивистской динамики. Первый связан с 4-силой (§ 109); второй — с выбором однородного лагранжиана $\Lambda(x, x')$ и третий — с выбором уравнения энергии $\Omega(x, y) = 0$.

Как и в § 69, мы объединяем эти два последние пути. Изменяя знак соответственно сделанному изменению в (110.4), переходим от $\Lambda(x, x')$ к $\Omega(x, y) = 0$, положив

$$y_r = -\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_r} \tag{110.8}$$

(ср. с (69.3)) и исключив производные x'_r. Мы можем перейти также от $\Omega(x, y) = 0$ к $\Lambda(x, x')$, написав (ср. с (69.14))

$$x'_r = \vartheta \frac{\partial \Omega}{\partial y_r}, \qquad \Lambda = -y_r x'_r, \qquad \Omega(x, y) = 0, \tag{110.9}$$

и исключив из этих уравнений y_r и ϑ. При таком объединении лагранжева и гамильтонова динамики представляют одно и то же, с общим для обеих форм динамики действием

$$A = \int \Lambda(x, x')\, d\chi = -\int y_r\, dx_r. \tag{110.10}$$

В лагранжевой динамике имеются два важных специальных случая выбора параметра χ, а именно, $\chi = s$ и $\chi = t$. Первый, будучи лоренц-инвариантным, удобен для общей теории; второй — удобен для того, чтобы провести сравнение между релятивистской и ньютоновой динамиками.

Если $\chi = s$, то

$$\Lambda(x, x')\, d\chi = \Lambda(x, dx) = \Lambda(x, \lambda)\, ds, \tag{110.11}$$

где $\lambda_r = dx_r/ds$ 4-скорость. Действие равно интегралу

$$A = \int \Lambda(x, \lambda)\, ds, \tag{110.12}$$

и уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda_r} - \frac{\partial\Lambda}{\partial x_r} = 0, \tag{110.13}$$

при специальном условии

$$\lambda_r\lambda_r = -1. \tag{110.14}$$

Здесь необходимо сделать некоторые замечания. Выполняя первое дифференцирование в уравнениях (110.13), мы должны взять Λ в форме однородного лагранжиана первой степени относительно 4-скорости. Если мы в какой-либо момент упростим Λ посредством (110.14), нарушив формальную однородность, то для того, чтобы восстановить однородность (имевшую место до дифференцирования), мы должны опять применить то же уравнение.

Если $\chi = t$, то можно написать

$$\Lambda(x, x')\, d\chi = \Lambda(x, dx) = L\, dt. \tag{110.15}$$

Обыкновенный лагранжиан L, определенный таким образом, есть функция семи величин x_ρ, t, $\dot{x}_\rho$. Действие определяется следующим интегралом:

$$A = \int L\, dt, \tag{110.16}$$

и уравнения Лагранжа имеют знакомую форму:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_\rho} - \frac{\partial L}{\partial x_\rho} = 0. \tag{110.17}$$

Отметим, что релятивистское требование состоит в лоренц-инвариантности $L\,dt$, но не самой функции L; L есть инвариант, разделенный на четвертую компоненту 4-вектора. Это любопытное требование выполняется автоматически, если мы выводим L из инвариантного однородного лагранжиана (как в уравнениях (110.15)).

В методе Гамильтона можно разрешить уравнение $\Omega(x, y) = 0$ относительно y_4, получив

$$y_4 - i\omega(x_1, x_2, x_3, t, y_1, y_2, y_3) = 0 \qquad (110.18)$$

(четвертая компонента вектора Минковского y_4 — чисто мнимая). Определим p_ρ и H уравнениями

$$p_\rho = y_\rho, \qquad H = \frac{cy_4}{i}; \qquad (110.19)$$

тогда выражение (110.18) приводит к гамильтониану

$$H = c\omega(x_1, x_2, x_3, t, p_1, p_2, p_3). \qquad (110.20)$$

Трудно подыскать какое-либо непретенциозное и недвусмысленное название для 3-вектора p_ρ. В случае свободной частицы (ср. § 111) p_ρ есть релятивистский импульс или 3-импульс, определенный в § 108. Но когда заряженная частица движется в электромагнитном поле (ср. § 115), то поле каким-то образом входит в p_ρ. Возможно, для p_ρ наиболее подходит название гамильтонов 3-импульс.

Действие теперь имеет вид

$$A = -\int y_r\, dx_r = \int (-p_\rho\, dx_\rho + H\, dt). \qquad (110.21)$$

Это определение согласуется с обычным выражением (68.1) гамильтонова действия с точностью до знака. Выражение (110.21) дает положительный элемент действия для частицы, находящейся в мгновенном покое ($dx_\rho = 0$) при условии, что H положительно.

Канонические уравнения Гамильтона имеют знакомую форму:

$$\dot{x}_\rho = \frac{\partial H}{\partial p_\rho}, \qquad \dot{p}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial x_\rho}. \qquad (110.22)$$

Отметим, что требование релятивизма состоит в том, что H должна преобразоваться как четвертая компонента 4-вектора, но не в том, чтобы H было лоренц-инвариантным,

§ 111. Свободная частица. В релятивистской динамике теория, связанная со свободной частицей, не тривиальна, ибо она служит для того, чтобы связать физические понятия и математическую схему.

Выбираем для свободной частицы постоянной массы инвариантный однородный лагранжиан

$$\Lambda(x, x') = mc\sqrt{-x'_r x'_r}, \tag{111.1}$$

так что элемент действия есть

$$\Lambda(x, x')\,d\chi = mc\sqrt{-x'_r x'_r}\,d\chi = mc\sqrt{-dx_r\,dx_r} = \\ = mc\,ds = mc\sqrt{-\lambda_r\lambda_r}\,ds. \tag{111.2}$$

Отметим,что он имеет правильную размерность действия $[ML^{-2}T^{-1}]$.

Уравнения Лагранжа (110.13) в рассматриваемом случае приводят к выражению

$$\frac{d\lambda_r}{ds} = 0, \tag{111.3}$$

так что мировой линией является прямая.

Для гамильтонова 4-вектора имеем, как в случае (110.8), выражение

$$y_r = -\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_r} = \frac{mcx'_r}{\sqrt{-x'_n x'_n}}, \tag{111.4}$$

и исключение производных x'_r приводит к уравнению энергии

$$2\Omega(x, y) = y_r y_r + m^2c^2 = 0, \tag{111.5}$$

в которое не входят пространственновременные координаты. Канонические уравнения (110.7) в данном случае имеют вид

$$\frac{dx_r}{dw} = y_r, \qquad -\frac{dy_r}{dw} = 0. \tag{111.6}$$

Мы можем выразить уравнения (111.4) через 4-скорость

$$y_r = mc\lambda_r. \tag{111.7}$$

Таким образом, в случае свободной частицы гамильтонов 4-вектор есть касательная мировой линии; для движущейся в поле частицы это, вообще говоря, несправедливо. Из уравнений (108.6), (110.9) и (111.7) видим, что гамильтонов 3-импульс есть

$$p_\rho = m\gamma v_\rho, \tag{111.8}$$

и имеем также

$$y_4 = im\gamma c = \frac{iE}{c}, \tag{111.9}$$

где E — энергия, определенная согласно § 108. Далее, имея в виду (110.19), получим

$$H = E. \tag{111.10}$$

Для того чтобы найти форму гамильтониана, мы должны разрешить (111.5) относительно y_4, получив при этом

$$y_4 = \pm i \sqrt{y_\rho y_\rho + m^2c^2}, \tag{111.11}$$

где знак $+$ должен быть выбран вследствие (111.9). Тогда, аналогично (110.20), гамильтониан равен

$$H = c\sqrt{p_\rho p_\rho + m^2c^2}. \tag{111.12}$$

Остается рассмотреть обыкновенный лагранжиан для свободной частицы. Применяя уравнение (110.15) к (111.2), получаем

$$L\,dt = mc\,ds = \frac{mc^2}{\gamma}\,dt\,, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\,, \tag{111.13}$$

так что

$$L = \frac{mc^2}{\gamma} = mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = mc^2 - \frac{1}{2}mv^2 + \ldots \tag{111.14}$$

ненаписанные члены содержат квадраты и более высокие степени v/c.

Это выражение отличается от лагранжиана

$$L = T = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (111.15,$$

для свободной частицы в ньютоновой динамике, во-первых, наличием постоянной mc^2, представляющей собственную энергию; во-вторых, знаком минус при $-\frac{1}{2}mv^2$, и в-третьих, членами, не выписанными в явном виде. Если лагранжиан есть просто подынтегральное выражение в вариационном уравнении для определения уравнений движения, то наличие слагаемого mc^2 тривиально, так как оно добавляет один и тот же член к интегралу $\int L\,dt$ для всех варьированных движений. Так же несуществен знак $-\frac{1}{2}mv^2$, так как лагранжиан $-L$ дает те же экстремали, что и L. Что касается ненаписанных членов, то они представляют род релятивистской поправки, которая, как можно предполагать, стремится к нулю вместе с v/c.

Однако если само действие имеет физический смысл, то имеет физический смысл и различие между (111.14) и (111.15). Для покоящейся частицы выражение (111.14) дает положительное действие $mc^2\int dt$, в то время как (111.15) дает нуль. Если сравнить две частицы, одна из которых находится в покое, а другая движется, то формула (111.14) приписывает (в данный интервал времени) большее действие покоящейся частице, в то время как (111.15) приписывает большее действие движущейся частице.

Возвратимся теперь к вопросу об изменении знака, введенного в (110.4) и соответственно в (110.8), и рассмотрим определение гамильтонова 4-вектора, когда координаты действительны.

Если применять действительные координаты x^r в пространстве — времени, то надо различать ковариантные и контравариантные векторы. Переход от одних к другим выполняется с помощью фундаментального тензора g_{mn} (107.1). Однако геометрия пространства — времени не изменится, если изменить знаки всех величин g_{mn} на обратные. Отсюда, когда мы приведем g_{mn} к диагональному виду, применяя вещественные декартовы координаты, могут иметь место два случая: можно взять диагональную форму в виде

$$(g_{mn}) = (+1,\ +1,\ +1,\ -1), \qquad (111.16)$$

или в виде

$$(\bar{g}_{mn}) = (-1,\ -1,\ -1,\ +1). \qquad (111.17)$$

Некоторые авторы предпочитают первую форму, другие — вторую. Между ними нет никакой физической разницы, однако (111.16) имеет то преимущество, что можно перейти к единичной матрице (координаты Минковского) при помощи введения одной мнимой координаты, в то время как в случае (111.17) для этого требуются три мнимые координаты. С помощью действительных координат и величин g_{mn} и $\bar{g}_{mn}$, определенных как указано выше, можно написать лагранжиан (111.1) в форме

$$\Lambda(x, x') = mc\sqrt{-g_{rs}x^{r'}x^{s'}} = mc\sqrt{\bar{g}_{rs}x^{r'}x^{s'}}\,; \qquad (111.18)$$

частное дифференцирование дает в обоих случаях один и тот же ковариантный вектор:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x^{r'}} = -mc\frac{g_{rs}x^{s'}}{\sqrt{-g_{mn}x^{m'}x^{n'}}} = mc\frac{\bar{g}_{rs}x^{s'}}{\sqrt{\bar{g}_{mn}x^{m'}x^{n'}}}. \qquad (111.19)$$

Этот единственный ковариантный вектор дает два (противоположных) контравариантных вектора в зависимости от того, какую из групп уравнений мы используем: (111.6) или (111.7); это соответственно векторы

$$\left.\begin{aligned} g^{rs}\frac{\partial\Lambda}{\partial x^{s'}} &= -\frac{mcx^{r'}}{\sqrt{-g_{mn}x^{m'}x^{n'}}}, \\ \bar{g}^{rs}\frac{\partial\Lambda}{\partial x^{s'}} &= \frac{mcx^{r'}}{\sqrt{\bar{g}_{mn}x^{m'}x^{n'}}}. \end{aligned}\right\} \qquad (111.20)$$

Первый из них направлен в прошлое, второй — в будущее. Итак, имеются два возможных определения ковариантного гамильтонова 4-вектора, а именно, $y_r = \pm\,\delta\Lambda/\delta x^{r'}$. Удобно выбрать тот знак, при котором соответствующий контравариантный 4-вектор направлен в будущее, по крайней мере в случае свободой частицы.

Таким образом, нам нужны два различных определения y_r:

$$y_r = -\frac{\partial \Lambda}{\partial x^{r\prime}} \quad \text{для} \quad (111.16), \tag{111.21}$$

$$y_r = \frac{\partial \Lambda}{\partial x^{r\prime}} \quad \text{для} \quad (111.17). \tag{111.22}$$

В координатах Минковского мы не должны делать различия между ковариантными и контравариантными векторами. Мы уже видели, что (111.21) — удовлетворительное определение, так как (111.7) показывает, что вектор y_r, определенный таким образом, направлен в будущее.

§ 112. Двухточечная характеристическая функция в пространстве событий и уравнение Гамильтона—Якоби. Обозначим через $S(x^*, x)$ характеристическую функцию, зависящую от координат двух точек в пространстве событий QTP. Это — функция (72.1), взятая с обратным знаком,

$$S(x^*, x) = -\int y_r\, dx_r; \tag{112.1}$$

интеграл берется вдоль траектории, соединяющей два события. Отсюда имеют место уравнения

$$y_r = -\frac{\partial S}{\partial x_r}, \qquad y_r^* = \frac{\partial S}{\partial x_r^*}. \tag{112.2}$$

Если подставить эти значения y_r, y_r^* в уравнение энергии $\Omega(x, y) = 0$, то получим уравнение Гамильтона — Якоби:

$$\Omega\left(x, -\frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0. \tag{112.3}$$

В данном случае, аналогично § 77, если мы имеем полный интеграл $S(x^*, x)$ уравнения (112.3), то уравнения (112.2) определяют траектории и соотнесенные им гамильтоновы 4-векторы. Величины (x^*, y^*) в этих уравнениях можно рассматривать как постоянные. На самом деле необходимо только шесть постоянных, так как имеется ∞^6 траекторий. Если одна из x^* берется как аддитивная постоянная для S, а другие три величины x^* и первые три из величин y^* выбраны произвольно, то первые три уравнения второй группы уравнений (112.2) определяют траекторию (в действительности все траектории, так как в уравнения входят шесть произвольных постоянных).

Для свободной частицы (§ 111) имеем следующую функцию:

$$S(x^*, x) = -y_r(x_r - x_r^*), \tag{112.4}$$

где y_r — постоянна вдоль траектории. Полагая

$$s = \sqrt{-(x_r - x_r^*)(x_r - x_r^*)}, \tag{112.5}$$

имеем аналогично уравнению (111.7)

$$y_r = mc\lambda_r = \frac{mc(x_r - x_r^*)}{s}, \tag{112.6}$$

а отсюда

$$S(x^*, x) = mc\sqrt{-(x_r - x_r^*)(x_r - x_r^*)} = mcs. \tag{112.7}$$

ГЛАВА II

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

§ 113. Гиперболическое движение. В ньютоновой динамике можно задать движение частицы и вычислить силу, которая вызывает это движение. Аналогично в теории относительности можно задать мировую линию и вычислить соответствующую 4-силу, согласующуюся с заданной постоянной собственной массой частицы; для этого надо использовать формулу

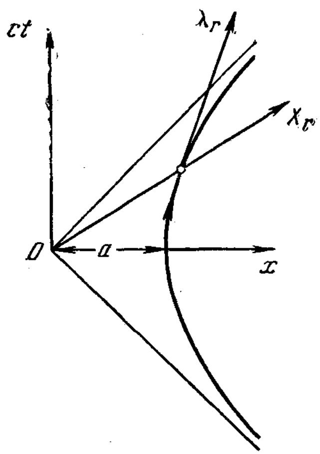


Рис. 52. Гиперболическое движение.

$$X_r = m\frac{d\lambda_r}{ds}. \qquad (113.1)$$

Одна из простейших мировых линий есть псевдоокружность, уравнения которой

$$x_1^2 + x_4^2 = a^2, \qquad x_2 = x_3 = 0, \qquad (113.2)$$

где a — постоянная. Так как первое уравнение в действительных координатах имеет вид

$$x^2 - c^2t^2 = a^2, \qquad (113.3)$$

то это движение называется гиперболическим (рис. 52).

Параметрические уравнения мировой линии таковы:

$$x_1 = a\,\mathrm{ch}\,\varphi, \qquad x_4 = ia\,\mathrm{sh}\,\varphi, \tag{113.4}$$

отсюда

$$ds^2 = -dx_1^2 - dx_4^2 = a^2\,d\varphi^2, \qquad (11\ .5)$$

так что отличные от нуля компоненты 4-скорости равны

$$\lambda_1 = \frac{dx_1}{ds} = \mathrm{sh}\,\varphi, \qquad \lambda_4 = \frac{dx_4}{ds} = i\,\mathrm{ch}\,\varphi. \tag{113.6}$$

Согласно уравнениям (113.1) искомая 4-сила есть

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \frac{m}{a}\,\mathrm{ch}\,\varphi = \frac{mx_1}{a^2}, \\ X_4 &= \frac{im}{a}\,\mathrm{sh}\,\varphi = \frac{mx_4}{a^2}, \\ X_2 &= X_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{113.7}$$

Таким образом, 4-сила направлена от начала координат пространства — времени и имеет величину, пропорциональную расстоянию Минковского.

§ 114. Частица в потенциальном поле. Гармонический осциллятор. Пусть $V(x_1, x_2, x_3)$ — потенциальная функция, и пусть

$$\Lambda(x, x') = mc\sqrt{-x'_r x'_r} - \frac{iVx'_4}{c} \tag{114.1}$$

— однородный лагранжиан для частицы постоянной собственной массы m, движущейся в этом поле. Это выражение не является лоренц-инвариантным; необходимо выбрать специальную систему отсчета.

Можно написать

$$\Lambda(x, \lambda) = mc\sqrt{-\lambda_r\lambda_r} - \frac{iV\lambda_4}{c}, \tag{114.2}$$

а соответствующий обыкновенный лагранжиан L определяется формулами

$$\left.\begin{aligned} L\,dt = \Lambda(x,\, dx) = mc\,ds + V\,dt, \\ L = \frac{mc^2}{\gamma} + V. \end{aligned}\right\} \qquad (114.3)$$

Согласно (110.13) уравнения движения принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{ds}(-mc\lambda_\rho) + \frac{i}{c}\frac{\partial V}{\partial x_\rho}\lambda_4 = 0, \\ \frac{d}{ds}\left(-mc\lambda_4 - \frac{iV}{c}\right) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (114.4)$$

так что имеют место следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\gamma v_\rho) = -\frac{\partial V}{\partial x_\rho}, \\ m\gamma c^2 + V = K, \end{aligned}\right\} \qquad (114.5)$$

где K — постоянная (постоянная энергии).

Для того чтобы обсудить движение гармонического осциллятора, рассмотрим движение вдоль оси x_1 при $V = \frac{1}{2}k^2x_1^2$. Пусть частица начинает двигаться от начала координат с начальной скоростью $v = v_0$. Тогда согласно последнему уравнению (114.5) имеем

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = K - V, \qquad \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} = K. \qquad (114.6)$$

Частица приходит в состояние покоя в $x = a$ (полагаем для простоты $x_1 = x$), где a определяется из выражения

$$mc^2 = K - \frac{1}{2}k^2a^2, \qquad (114.7)$$

и постоянные v_0 и a связаны соотношениями

$$\left.\begin{aligned} K = mc^2 + \frac{1}{2} k^2 a^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}, \\ \frac{1}{2} k^2 a^2 = mc^2 (\gamma_0 - 1), \quad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{114.8}$$

Согласно выражениям (114.6) получаем уравнение

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{(K - V)^2}}, \tag{114.9}$$

и следовательно, период гармонического осциллятора τ определяется следующими формулами:

$$\tau = 4 \int\limits_{x=0}^{x=a} dt = 4 \int\limits_0^a \frac{dx}{v} = \frac{4}{c} \int\limits_0^a \frac{(K - V)\, dx}{(K - V)^2 - m^2 c^4} =$$

$$= \frac{2a}{c\varkappa} \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(1 + 2\varkappa^2 \cos^2 \varphi)\, d\varphi}{\sqrt{1 + \varkappa^2 \cos^2 \varphi}}, \tag{114.10}$$

где

$$\varkappa^2 = \frac{k^2 a^2}{4mc^2}. \tag{114.11}$$

Формула (114.10) — точная; разлагая в ряд по степеням $\varkappa$, получаем

$$\tau = 2\pi \frac{\sqrt{m}}{k} \left(1 + \frac{3}{16} \frac{k^2 a^2}{mc^2} + \ldots\right), \tag{114.12}$$

в котором первый член есть ньютонов период.

§ 115. Заряженная частица в электромагнитном поле. Электромагнитное поле с электрическим вектором E_ρ и магнитным вектором H_ρ можно описать кососимметричным тензором F_{rs}, где

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= iF_{14}, & E_2 &= iF_{24}, & E_3 &= iF_{34}, \\ H_1 &= F_{23}, & H_2 &= F_{31}, & H_3 &= F_{12}; \end{aligned}\right\} \quad (115.1)$$

соответствующий 4-потенциал φ_r таков, что выполняется условие

$$F_{rs} = \varphi_{s,\,r} - \varphi_{r,\,s}, \quad (115.2)$$

где запятые обозначают частные производные.

Для частицы с постоянной собственной массой m и зарядом e, движущейся в заданном электромагнитном поле[1]), мы берем однородный лагранжиан в виде

$$\Lambda(x, x') = mc\sqrt{-x'_r x'_r} - \frac{e}{c}\varphi_r x'_r \quad (115.3)$$

или, выражая его через 4-скорость, в виде

$$\Lambda(x, \lambda) = mc\sqrt{-\lambda_r\lambda_r} - \frac{e}{c}\varphi_r\lambda_r. \quad (115.4)$$

Соответствующий обыкновенный лагранжиан есть

$$L = \frac{mc^2}{\gamma} - \frac{e}{c}\varphi_\rho \dot{x}_\rho + V, \quad (115.5)$$

где потенциальная энергия частицы V выражается следующим образом:

$$V = \frac{e\varphi_4}{i}. \quad (115.6)$$

Уравнения движения (110.13) дают следующие уравнения:

$$m\frac{d\lambda_r}{ds} = \frac{e}{c^2}F_{rn}\lambda_n, \quad (115.7)$$

где член в правой части есть лоренцова пондеромоторная сила. Это уравнение имеет форму (109.1); при этом вследствие кососимметричности электромагнитного тензора

---

[1]) Нами используются электростатические единицы.

удовлетворяется условие постоянства собственной массы (109.3). Эти уравнения можно также выразить в векторной форме (ср. (40.1) и (40.2))

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(m\gamma v = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{v}{c}\times\boldsymbol{H}\right), \\ &\frac{d}{dt}(m\gamma c^2) = ev\cdot\boldsymbol{E}. \end{aligned}\right\} \tag{115.8}$$

Для того чтобы получить уравнение энергии $\Omega(x, y) = 0$, напишем уравнение гамильтонова 4-вектора,

$$y_r = -\frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda_r} = mc\lambda_r + \frac{e}{c}\varphi_r, \tag{115.9}$$

и получаем, следовательно, уравнение

$$2\Omega(x, y) = \left(y_r - \frac{e}{c}\varphi_r\right)\left(y_r - \frac{e}{c}\varphi_r\right) + m^2c^2 = 0, \tag{115.10}$$

так как $\lambda_r\lambda_r = -1$.

Канонические уравнения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_r}{dw} = \frac{\partial\Omega}{\partial y_r} = y_r - \frac{e}{c}\varphi_r, \\ &\frac{dy_r}{dw} = -\frac{\partial\Omega}{\partial x_r} = \frac{e}{c}\left(y_n - \frac{e}{c}\varphi_n\right)\varphi_{n,r}. \end{aligned}\right\} \tag{115.11}$$

Согласно уравнению (110.20) гамильтониан выражается следующим образом (мы разрешили уравнение (115.10) относительно y_r):

$$H = \frac{cy_4}{i} =$$

$$= V \pm c\sqrt{\left(p_\rho - \frac{e}{c}\varphi_\rho\right)\left(p_\rho - \frac{e}{c}\varphi_\rho\right) + m^2c^2}. \tag{115.12}$$

Гамильтонов 3-импульс равен

$$p_\rho = m\gamma v_\rho + \frac{e}{c}\varphi_\rho. \tag{115.13}$$

Согласно уравнениям (112.3) и (115.10) уравнение Гамильтона — Якоби таково:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_r}+\frac{e}{c}\,\varphi_r\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x_r}+\frac{e}{c}\,\varphi_r\right)+m^2c^2=0. \qquad (115.14)$$

В случае электростатического поля полагаем $\varphi_\rho=0$, $e\varphi_4=iV$; имеем тогда

$$-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}-V\right)^2+\frac{\partial S}{\partial x_\rho}\frac{\partial S}{\partial x_\rho}+m^2c^2=0. \qquad (115.15)$$

Движение определяется через полный интеграл формулой (112.2).

§ 116. Релятивистская проблема Кеплера. Рассмотрим частицу с постоянной собственной массой m и зарядом e, движущуюся в поле заряда e' противоположного знака, помещенного в начале координат. Если e, e' измерены в гауссовых электростатических единицах, то поле и 4-потенциал определяются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} E_\rho = iF_{\rho 4} = \frac{e' x_\rho}{r^3}, \qquad F_{\rho\sigma}=0,\\ \varphi_\rho=0, \qquad \varphi_4=\frac{ie'}{r}. \end{aligned}\right\} \qquad (116.1)$$

Уравнения движения приводят к следующим соотношениям:

$$\frac{d}{dt}(\gamma v)=-\frac{kr}{r^3}, \qquad \frac{d}{dt}(\gamma c^2)=-\frac{k}{r^3}\,v\cdot r, \qquad (116.2)$$

где r — радиус-вектор движущегося заряда и

$$k=-\frac{ee'}{m}>0. \qquad (116.3)$$

Отсюда следует, что движение плоское и если ввести полярные координаты $(r,\ \vartheta)$ в плоскости орбиты, то получим интеграл момента количества движения

$$\gamma r^2 \dot{\vartheta} = A, \tag{116.4}$$

и интеграл энергии

$$\gamma c^2 - \frac{k}{r} = W, \tag{116.5}$$

где A и W — постоянные. Полагая $\varrho = 1/r$ и исключая время, получим уравнение орбиты в следующей форме[1]):

$$\frac{d^2\varrho}{d\vartheta^2} + \left(1 - \frac{k^2}{A^2c^2}\right)\varrho = \frac{Wk}{A^2c^2}. \tag{116.6}$$

Предполагая, что коэффициент ϱ положителен и полагая

$$p = \sqrt{1 - \frac{k^2}{A^2c^2}}, \tag{116.7}$$

получим уравнение орбиты в форме

$$\frac{1}{r} = \varrho = \frac{c}{Ap^2}\left[\left(\frac{W^2}{c^4} - p^2\right)^{1/2}\cos\left(p\vartheta + C\right) + \frac{kW}{Ac^3}\right], \tag{116.8}$$

где C — постоянная.

Условие конечности орбиты есть

$$-c^2 < W < c^2. \tag{116.9}$$

Конечную орбиту можно рассматривать как вращающийся эллипс, один фокус которого находится в начале координат, а перемещение перигелия за один оборот равно

$$2\pi\left(\frac{1}{p} - 1\right). \tag{116.10}$$

---

[1]) Ср. Бергман П., Введение в теорию относительности. ИЛ, Москва 1947, стр. 285; Synge, цит соч. в § 107, стр. 398.

Если скорость мала, то эта величина равна приближенно

$$\frac{\pi k^2}{A^2c^2}=\frac{4\pi^3a^2}{c^2\tau^2(1-\varepsilon^2)}, \tag{116.11}$$

где a — большая полуось эллипса, τ — период, ε — эксцентриситет. Это выражение дает одну шестую часть вращения, определяемого общей теорией относительности для движения планеты в гравитационном поле Солнца.

Решение релятивистской проблемы Кеплера может быть получено также методом разделения переменных в уравнении Гамильтона — Якоби[1]). При переходе к полярным координатам (r, ϑ, φ) уравнение (115.5) преобразуется к следующему:

$$-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}-V\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\vartheta}\right)^2+ \\ +\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2+m^2c^2=0, \tag{116.12}$$

где

$$V=\frac{ee'}{r}. \tag{116.13}$$

Мы получаем полный интеграл, положив

$$S=a_1+S_1(r,\ a_2,\ a_4)+S_2(\vartheta,\ a_2,\ a_3)+a_3\varphi+a_4t; \tag{116.14}$$

функции S_1 и S_2 находятся квадратурами; они должны удовлетворять уравнениям

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{c^2}(a_4-V)^2+\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2+m^2c^2&=\frac{a_2}{r^2},\\ \left(\frac{\partial S_2}{\partial\vartheta}\right)^2+\frac{a_3^2}{\sin^2\vartheta}&=-a_2.\end{aligned}\right\} \tag{116.15}$$

---

[1]) Ср. Зоммерфельд А., цит. соч. в § 99, стр. 541—544, где подход к проблеме слегка изменен.

Здесь a_i — произвольные постоянные. Как и в случае (112.2), движение определяется уравнениями

$$b_2 = \frac{\partial S_1}{\partial a_2} + \frac{\partial S_2}{\partial a_2}, \quad b_3 = \varphi + \frac{\partial S_2}{\partial a_3}, \quad b_4 = t + \frac{\partial S_1}{\partial a_4}, \tag{116.16}$$

где b_i — произвольные постоянные. Эти три уравнения дают r, ϑ, φ как функции t и шести произвольных постоянных a_2, a_3, a_4, b_2, b_3, b_4.

ГЛАВА III
ВОЛНЫ ДЕ БРОЙЛЯ

§ 117. Когерентные системы траекторий в пространстве — времени и связанные с ними волны. Теорию § 74 и 75 можно приложить к пространству — времени с тем только изменением в знаке, которое указано в § 110 и обсуждалось в § 111. Существенные стадии изложения этой теории следующие.

Принимаем за основу уравнение энергии

$$\Omega\,(x,\ y) = 0. \tag{117.1}$$

Для свободной частицы оно имеет вид (111.5):

$$2\Omega = y_r y_r + m^2c^2 = 0. \tag{117.2}$$

Для заряженной частицы в электромагнитном поле имеем более сложное уравнение (115.10); для частицы в потенциальном поле (как в § 114) имеем уравнение

$$2\Omega = y_\rho y_\rho + \left(y_4 - \frac{iV}{c}\right)^2 + m^2c^2 = 0. \tag{117.3}$$

Траектории определяются каноническими уравнениями

$$\frac{dx_r}{dw} = \frac{\partial\Omega}{\partial y_r}, \qquad \frac{dy_r}{dw} = -\frac{\partial\Omega}{\partial x_r}. \tag{117.4}$$

Выделяя множество траекторий, образующих подпространство R пространства — времени, мы связываем с каждым событием в R гамильтонов 4-вектор y_r, принадлежащий траектории, которая проходит через это событие. Этот 4-вектор y_r можно найти из первой группы уравнений (117.4), или, что эквивалентно, из уравнений

$$y_r = -\frac{\partial \Lambda}{\partial x^{r\prime}}, \tag{117.5}$$

где $\Lambda(x, x')$ — однородный лагранжиан, соответствующий уравнению энергии (117.1). Это множество траекторий образует когерентную систему, если

$$\oint y_r\, dx_r = 0 \tag{117.6}$$

для каждого приводимого контура в R. Одноточечная характеристическая функция в пространстве событий QT для когерентной системы определяется так:

$$U(x) = -\int y_r\, dx_r, \tag{117.7}$$

где интеграл берется вдоль любой кривой в R, от того события, которое раз навсегда зафиксировано, и до события x_r, для которого и вычисляется функция U.

Выбирая подпространство R односвязной 4-мерной областью в пространстве — времени и варьируя событие x_r, имеем уравнения (74.8) (в которых изменен только знак):

$$y_r = -\frac{\partial U}{\partial x_r}. \tag{117.8}$$

Функция U удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби,

$$\Omega\left(x, -\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0, \tag{117.9}$$

а волны, принадлежащие к когерентной системе, имеют уравнения

$$U(x) = \text{const}. \tag{117.10}$$

Отметим, что гамильтонов 4-вектор y_r есть нормаль к 3-волне в смысле пространства — времени.

Эт у волны являются волнами де Бройля в смысле геометрической механики.

§ 118. Скорость частицы и волновая скорость. Согласно формулам (108.9) и (117.8) нормальная скорость распространения волны $U = \text{const}$ равна

$$u_\rho = -ic\,\frac{y_\rho y_4}{y_\sigma y_\sigma}. \tag{118.1}$$

Как и в уравнении (108.10), абсолютная величина скорости u удовлетворяет условию

$$1 - \frac{c^2}{u^2} = \frac{y_r y_r}{y_4^2}. \tag{118.2}$$

Согласно уравнениям (117.4) скорость частицы есть

$$v_\rho = ic\,\frac{dx_\rho}{dx_4} = ic\,\frac{\partial\Omega/\partial y_\rho}{d\Omega/dy_4}. \tag{118.3}$$

Связь между волновой скоростью u_ρ и скоростью частицы v_ρ можно найти (для любого события x_r), исключив четыре величины y_r из семи уравнений (117.1) (118.1) и (118.3).

Для свободной частицы, при наличии уравнения энергии (117.2), согласно (118.3) скорость частицы равна

$$v_\rho = ic\,\frac{y_\rho}{y_4}. \tag{118.4}$$

Она имеет то же направление в пространстве, что и волновая скорость u_ρ, которая определяется выражением (118.1); это направление совпадает также с направлением гамильтонова 3-импульса p_ρ. Соотношение между двумя абсолютными значениями скоростей (u для волны и v — для частицы) таково:

$$uv = v_\rho u_\rho = c^2. \tag{118.5}$$

Это и есть уравнение де Бройля[1]).

---

[1]) О более сложном соотношении между двумя скоростями для заряженной частицы в электромагнитном поле см. Synge, цит. соч. в § 110, стр. 90.

§ 119. Де Бройлева длина волны и частота. Пусть L — мировая линия частицы в когерентной системе (рис. 53) и пусть W_1, W_2 — две 3-волны де Бройля, пересекающие L соответственно в событиях A, B. Пусть эти волны выбраны так, что действие вдоль AB равно h (постоянная Планка).

Считая h бесконечно малой, имеем

$$-y_r\,dx_r = h, \tag{119.1}$$

где y_r — гамильтонов 4-вектор, соответствующий L в точке A, и dx_r — смещение вдоль AB. Если CB проведена параллельно оси времени из точки C, которая лежит на W_1, то период волны де Бройля есть

$$\tau = \frac{BC}{c}, \tag{119.2}$$

где BC — интервал Минковского.

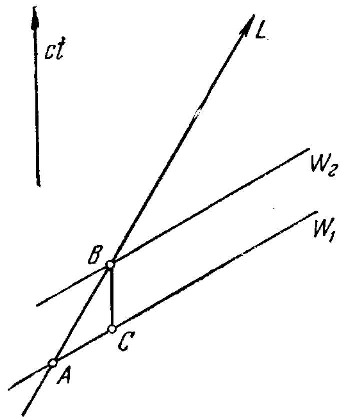


Рис. 53. Волны де Бройля с периодом BC/c.

Согласно уравнениям (117.8) y_r ортогонален волне W_1. Отсюда (так как смещение AB есть векторная сумма AC и CB) имеем из уравнения (119.1)

$$-y_r\,d\xi_r = h, \tag{119.3}$$

где $d\xi_r$ — перемещение CB. Но это последнее перемещение параллельно оси времени, следовательно,

$$d\xi_\rho = 0, \qquad d\xi_4 = iBC. \tag{119.4}$$

Поэтому уравнение (119.3) дает следующий результат:

$$BC = -\frac{h}{iy_4}, \tag{119.5}$$

и

$$\tau = -\frac{h}{icy_4}. \tag{119.6}$$

Это — приближенное выражение для периода волны де Бройля, так как h считается бесконечно малым.

В случае свободной частицы имеем (ср. (111.7))

$$y_4 = mc\lambda_4 = im\gamma c. \tag{119.7}$$

Итак, период τ и частота ν имеют следующие значения:

$$\tau = \frac{h}{m\gamma c^2}, \qquad h\nu = m\gamma c^2. \tag{119.8}$$

Так как абсолютная величина волновой скорости равна $u = c^2/v$, то длина волны де Бройля такова:

$$\lambda = u\tau = \frac{h}{m\gamma v}. \tag{119.9}$$

Эти выражения являются точными в наипростейшем случае, а именно, когда мировые линии когерентной системы параллельны и, следовательно, волны плоские и параллельные.

Возвращаясь к общему случаю частицы, движущейся в соответствии с некоторым уравнением энергии $\Omega(x, y) = 0$ или, что эквивалентно, в соответствии с некоторым гамильтонианом H, получаем из уравнений (110.19) и (119.6) выражения

$$\tau = -\frac{h}{icy_4} = \frac{h}{H}, \qquad h\nu = H. \tag{119.10}$$

ГЛАВА IV
РЕЛЯТИВИСТСКИЕ КАТАСТРОФЫ

§ 120. Сохранение 4-импульса. В последующем обсуждении катастроф слово **частица** означает как материальную частицу с 4-импульсом,

$$M_\rho = \frac{m\gamma v_\rho}{c}, \quad M_4 = im\gamma = \frac{iE}{c^2}, \tag{120.1}$$

так и фотон с 4-импульсом,

$$M_\rho = \frac{h\nu}{c^2} n_\rho, \quad M_4 = \frac{ih\nu}{c^2}. \tag{120.2}$$

Все эти компоненты (как в § 108) имеют размерность массы. Под словом **катастрофа** будем понимать удар или столкновение нескольких частиц, причем могут возникнуть новые частицы и число их после катастрофы может отличаться от исходного, или взрыв, в котором одна частица превращается в несколько.

Основное предположение состоит в законе сохранения 4-импульса, который может быть записан в виде

$$\Sigma M_r' = \Sigma M_r, \tag{120.3}$$

где суммирование в правой части ведется по всем частицам до катастрофы, а суммирование в левой части — по всем частицам после катастрофы; число частиц отнюдь не должно быть одним и тем же. Этот закон можно написать в эквивалентной форме:

$$\Sigma\, m'\gamma' v_\rho' + \Sigma \frac{h\nu'}{c} n_\rho' = \Sigma\, m\gamma v_\rho + \Sigma \frac{h\nu}{c} n_\rho, \tag{120.4}$$

$$\Sigma\, m'\gamma' c^2 + \Sigma\, h\nu' = \Sigma\, m\gamma c^2 + \Sigma\, h\nu, \tag{120.5}$$

где (120.4) выражает сохранение релятивистского импульса, а (120.5) — энергии. Эти законы имеют силу для всех галилеевых систем отсчета.

Пока мы не переходим к содержанию § 123, нет необходимости предполагать, что мировые линии участвующих в катастрофе частиц пересекаются при этом. Уравнение сохранения (120.3) введено безотносительно к положениям частиц.

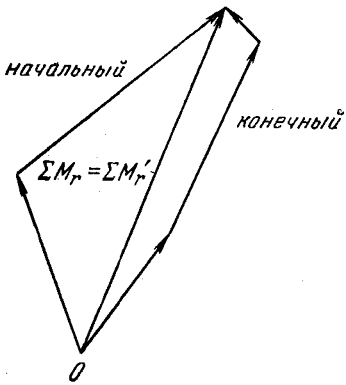


Рис. 54. Векторная диаграмма катастрофы в пространстве PH, показывающая сохранение 4-импульса.

Целесообразно рассмотреть 4-мерное пространство PH, в котором координатами точки являются M_r и которое имеет ту же геометрию, что и пространство — время, с той только разницей, что в PH начало координат есть точка, которую физически можно выделить, в то время как в пространстве — времени начало координат таким свойством не обладает. Имеем соотношение

$$M_r M_r = -m^2 \quad (120.6)$$

(для фотона $m = 0$), и это позволяет метризовать пространство PH. С такой точки зрения уравнение (120.3) представляет очень простую картину в пространстве PH, аналогичную полигонам сил в статике. Единственный результирующий вектор двумя различными путями разлагается на два вектора, из которых один соответствует начальному состоянию, а другой — конечному. Рис. 54 показывает катастрофу, имеющую место для двух начальных и трех конечных частиц.

Считая начальное состояние заданным, имеем четыре уравнения (120.3) для определения конечного состояния. Могут быть заданы дополнительные условия, например, собственные массы конечных частиц. Однако даже при таких условиях существует только один случай, при котором определено конечное состояние, и это тот случай, когда получается только о д н а частица. Ее 4-импульс определяется равенством

$$M'_r = \Sigma M_r, \tag{120.7}$$

а ее собственная масса определяется как

$$m'^2 = -M'_r M'_r. \tag{120.8}$$

Если имеются д в е частицы в конце рассматриваемого явления и известно, каковы их собственные массы, то имеем всего шесть уравнений, а именно, четыре уравнения (120.3) и два уравнения типа (120.8). Таким образом, конечное состояние имеет две степени свободы, т. е. положение такое же, как при столкновении двух упругих шаров в ньютоновой динамике, когда не задано направление прямой, соединяющей центры.

Если материальные частицы, возникающие в результате катастрофы, приходят в состояние покоя без изменения их собственных масс, и какие-либо фотоны, получающиеся при этой катастрофе, покидают рассматриваемую область, то остающаяся энергия будет равна полной релятивистской энергии $\Sigma m'c^2$. Таким образом, потеря энергии будет равна

$$Q = \Sigma h\nu + \Sigma m\gamma c^2 - \Sigma m'c^2. \tag{120.9}$$

Если катастрофа представляет собой взрыв одной частицы, находящейся в состоянии покоя и имеющей собственную массу m, то

$$Q = mc^2 - \Sigma m'c^2; \tag{120.10}$$

Q — *энергия связи взорвавшейся частицы* (некоторые авторы предпочитают обозначение $-Q$).

Система отсчета центра инерции это — галилеева система, которая имеет полный 4-импульс ΣM_r для оси времени. Когда употребляют эту систему, то правая часть уравнения (120.4) обращается в нуль. Использование этой системы иногда упрощает вычисления, но, конечно, это не относится к вопросу определения результатов катастрофы.

§ 121. Неупругое и упругое столкновения. При абсолютно неупругом ударе все сталкивающиеся частицы объединяются в одну частицу с 4-импульсом

$$M'_r = \sum M_r \tag{121.1}$$

и собственной массой m', определяемой по формуле

$$m'^2 = -M'_r M'_r. \tag{121.2}$$

Если число сталкивающихся частиц равно двум, то собственная масса одной конечной частицы определяется как

$$m'^2 = -(M_r + \widetilde{M}_r)(M_r + \widetilde{M}_r) = m^2 + \widetilde{m}^2 - 2M_r\widetilde{M}_r, \tag{121.3}$$

где m, $\widetilde{m}$ — собственные массы, M_r, $\widetilde{M}_r$ — 4-импульсы частиц.

Если, в частности, сталкивающиеся частицы являются фотонами с частотами ν, $\widetilde{\nu}$, движущимися в направлениях, заданных единичными векторами n_ρ, $\widetilde{n}_\rho$, то получаем

$$m'^2 = 2\,\frac{h^2\nu\widetilde{\nu}}{c^4}(1 - n_\rho\widetilde{n}_\rho) = 4\,\frac{h^2\nu\widetilde{\nu}}{c^4}\sin^2\frac{1}{2}\,\vartheta, \tag{121.4}$$

где ϑ — угол между направлениями движения фотонов. Это выражение описывает рождение одной вещественной частицы из двух фотонов. Если мы употребляем систему отсчета центра инерции, то имеют место соотношения $\widetilde{\nu} = \nu$, $\vartheta = \pi$, а также

$$m'c^2 = 2h\nu, \tag{121.5}$$

что очевидно, так как конечная частица может находиться в покое и иметь энергию $m'c^2$, а полная энергия фотонов равна $2h\nu$.

При абсолютно неупругом ударе двух материальных частиц, движущихся со скоростями v_ρ, $\widetilde{v}_\rho$, уравнение (121.3) принимает вид

$$m'^2 = m^2 + \widetilde{m}^2 + 2m\widetilde{m}\gamma\widetilde{\gamma}\left(1 - \frac{v_\rho\widetilde{v}_\rho}{c^2}\right), \tag{121.6}$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\tilde{v}^2}{c^2}}}. \tag{121.7}$$

Легко показать, что выполняется условие

$$\gamma\tilde{\gamma}\left(1 - \frac{v_\rho \tilde{v}_\rho}{c^2}\right) > 1 \tag{121.8}$$

(равенство наступает, если $v_\rho = \tilde{v}_\rho$, но в этом случае не имеет места столкновение) и отсюда

$$m' > m + \tilde{m}. \tag{121.9}$$

Таким образом, полная собственная масса всегда возрастает при абсолютно неупругом ударе. Возрастание полной собственной энергии равно

$$m'c^2 - mc^2 - \tilde{m}c^2; \tag{121.10}$$

если абсолютные значения скоростей сталкивающихся частиц малы по сравнению со скоростью света c, то легко показать, что это возрастание равно приблизительно количеству тепла, выделяющемуся при таком столкновении согласно ньютоновой динамике (ср. § 58, 59).

Аналогично исследуется абсолютно неупругое столкновение материальной частицы и фотона. Он представляет собой поглощение фотона материальной частицей. Здесь также полная собственная масса возрастает; так как собственная масса фотона равна нулю, то это означает, что получена материальная частица с большей собственной массой, чем масса исходной сталкивающейся материальной частицы.

Упругий удар характеризуется двумя условиями:

I) Число частиц остается неизменным.

II) Собственная масса каждой частицы остается неизменной.

Результат упругого столкновения двух материальных частиц очень легко описать с помощью системы отсчета центра масс. Абсолютные величины скоростей частиц не изменяются и они расходятся после столкновения в противоположных направлениях, причем эти направления не определяются законом сохранения. На рис. 55 показана векторная диаграмма в пространстве PH. При упругом столкновении материальной частицы и фотона (комптон-эффект, см. § 122) частота фотона не изменяется, когда применяется система отсчета центра масс.

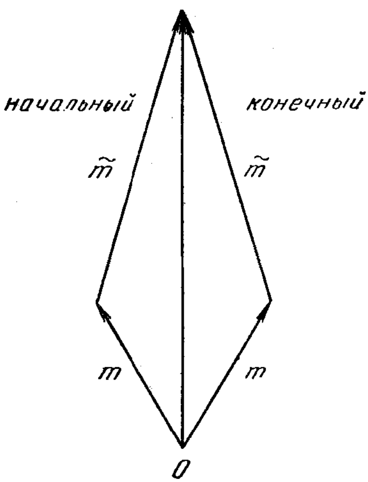


Рис. 55. Векторная диаграмма упругого удара.

§ 122. Комптон-эффект. Упругое столкновение материальной частицы и фотона называется комптон-эффектом. Как отмечено в § 120, существует двойная неопределенность в результате столкновения.

Для того чтобы обсудить столкновение в общей галилеевой системе отсчета, обозначим через M_r, M'_r 4-импульсы материальной частицы до и после столкновения, а через P_r, P'_r — 4-импульсы фотона. Имеют место следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} M'_r + P'_r &= M_r + P_r, \\ M'_r M'_r &= M_r M_r = -m^2, \\ P'_r P'_r &= P_r P_r = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (122.1)$$

Эти шесть уравнений содержат всю информацию, имеющуюся для определения восьми величин M'_r, P'_r.

Описание исхода столкновения зависит от используемой системы отсчета. Проще всего это описание в случае системы отсчета центра масс (см. § 121). Однако в обычном описании, которое дано ниже, употребляют лабораторную систему, в которой частица первоначально находится в покое[1]).

---

[1]) Дальнейшие детали и описания в других системах отсчета см. Synge, цит. соч., § 107, стр. 193—199.

Рис. 56 показывает фотон (с частотой ν), приближающийся слева и рассеивающийся (с частотой ν') под углом ϑ. Материальная частица испытывает отдачу под углом φ со скоростью, абсолютное значение которой равно v',

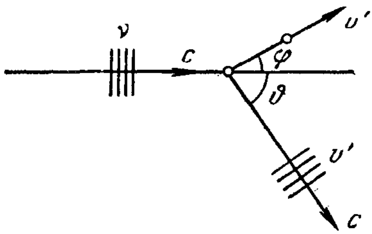


Рис. 56. Комптон-эффект в лабораторной системе отсчета.

как и показано на рис. 56. Из соотношений (120.4) и (120.5) следует, что три направления движения компланарны и что

$$\left.\begin{aligned} m\gamma' v' \cos\varphi + \frac{h\nu'}{c}\cos\vartheta &= \frac{h\nu}{c}, \\ m\gamma' v' \sin\varphi - \frac{h\nu'}{c}\sin\vartheta &= 0, \\ m\gamma' c^2 + h\nu' &= mc^2 + h\nu. \end{aligned}\right\} \tag{122.2}$$

Предполагая, что ϑ принимает любое значение (неопределенность проблемы заключена отчасти в этом), находим после небольших вычислений

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\vartheta}{1+k}, \\ \frac{v'}{c} &= \frac{2k\sin\frac{1}{2}\vartheta\sqrt{1+k(2+k)\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}}{1+2k(1+k)\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}, \end{aligned}\right\} \tag{122.3}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \gamma' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{1+2k(1+k)\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}{1+2k\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}, \\ \nu' &= \frac{\nu}{1+2k\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}, \end{aligned}\right\} \quad (122.4)$$

где

$$k = \frac{h\nu}{mc^2}. \quad (122.5)$$

§ 123. Момент импульса и центр масс[1]**.** Пусть x_r — какое-нибудь событие в истории частицы и пусть M_r — 4-импульс частицы в этом событии. Тогда момент импульса частицы в этом событии относительно начала пространственновременных координат определен кососимметричным тензором

$$H_{rs} = x_r M_s - x_s M_r. \quad (123.1)$$

Более общо, момент импульса относительно некоторого события определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} H_{rs}(a) &= (x_r - a_r) M_s - (x_s - a_s) M_r = \\ &= H_{rs} - a_r M_s - a_s M_r. \end{aligned} \quad (123.2)$$

Если частица свободна, то ее мировая линия есть прямая и M_r направлен вдоль нее. В этом случае $H_{rs}(a)$ не зависит от частного события x_r, выбранного на мировой линии.

Рассмотрим теперь систему частиц, взаимодействующих друг с другом только при катастрофе, в которой мировые линии пересекаются. Столкновение может быть упру-

---

[1]) См. книги M ø l l e r 'а и S y n g e 'а, цитированные в § 107; см. также M ø l l e r C., Ann. Inst. H. Poincaré 11, 251—278 (1949) и Comm. Dublin Inst. Adv. Studies, Ser. A, 1949.

гим или неупругим; частицы могут при этом соединяться и могут образоваться новые частицы; частицы могут быть вещественными частицами или фотонами. Существенное условие состоит в том, что 4-импульс должен сохраняться при каждой катастрофе и что каждая катастрофа происходит в один акт, т. е. катастрофа должна иметь место в одной-единственной точке пространства событий. Рис. 57 показывает мировые линии такой системы.

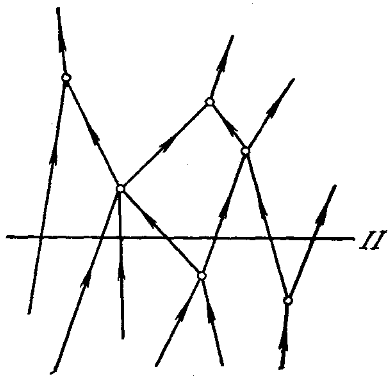


Рис. 57. Мировые линии системы частиц, взаимодействующих в точке катастрофы.

Пусть П — какое-нибудь пространственноподобное 3-пространство. Пусть x_r — событие, в котором обычная мировая линия пересекает П и пусть M_r — соответствующий 4-импульс. Тогда каждая мировая линия, пересекающая П, определяет момент импульса вида (123.1) относительно начала пространственновременных координат, а полный момент импульса для системы получаем сложением моментов импульсов отдельных частиц.

Если передвигать П в пространстве — времени, то этот полный момент импульса остается, конечно, постоянным до тех пор, пока точка катастрофы не окажется в пространстве П, потому что между катастрофами каждая частица является свободной. Кроме того, полный момент импульса не изменяется и тогда, когда точка катастрофы окажется в П, потому что она представляется только одним событием, и полный 4-импульс всех частиц сохраняется. На самом деле, как полный 4-импульс, так и полный момент импульса на мировой линии, пересекающей П, не зависят от выбора П; они являются постоянными системы.

Говоря о системе, будем употреблять те же обозначения, которые мы использовали для одной частицы, а именно: H_{rs} — полный момент импульса относительно начала, $H_{rs}(a)$ — полный момент импульса относительно события a_r, M_r — полный 4-импульс. Справедливо уравнение вида (123.2), в котором индексы имеют только что указанный смысл,

$$H_{rs}(a) = H_{rs} - a_r M_s + a_s M_r. \tag{123.3}$$

Рассмотрим четыре уравнения

$$H_{rs}(a)\, M_s = 0, \tag{123.4}$$

из которых только три независимых вследствие кососимметричности $H_{rs}(a)$. Подставив значение $H_{rs}(a)$ из (123.3), получим

$$H_{rs}M_s - a_r M_s M_s + M_r a_s M_s = 0. \tag{123.5}$$

Эти уравнения локализуют a_r на прямой линии в пространстве — времени с уравнениями

$$a_r = \frac{H_{rs}M_s}{M_n M_n} + \vartheta M_r, \tag{123.6}$$

где ϑ — переменный параметр. Это, так сказать, история центра масс системы, причем центр масс определяется релятивистски. Эта история параллельна M_r.

Если применить систему отсчета с осью времени, параллельной M_r (т. е. это система отсчета центра масс § 120), то имеем условие

$$M_\rho = 0;$$

выражение (123.6) означает, что центр масс закреплен в точке с координатами

$$a_\rho = \frac{H_{\rho 4}}{M_4}. \tag{123.7}$$

Если, с другой стороны, оставить все направления пространственновременных осей произвольными, но передвинуть начало координат в некоторое положение на мировой линии центра масс, то уравнение (123.5) удовлетворяется при $a_r = 0$ и поэтому имеет место

$$H_{rs}M_s = 0. \tag{123.8}$$

§ 124. Частицы со спином. Уравнение (123.8) предполагает, что спин или внутренний момент импульса частицы, имеющей 4-импульс M_r, должен быть представлен кососимметричным тензором H_{rs}, удовлетворяющим условию

$$H_{rs}M_s = 0. \qquad (124.1)$$

Тогда момент импульса частицы относительно какого-нибудь события a_r будет состоять из двух частей: орбитального момента импульса

$$(x_r - a_r)\,M_s - (x_s - a_s)\,M_r \qquad (124.2)$$

и спинового момента импульса H_{rs}, удовлетворяющего (124.1) и не зависящего от выбора начала координат и события a_r.

Любой кососимметричный тензор может быть представлен двумя 3-векторами, и мы можем описать спин двумя 3-векторами H_ρ и H_ρ^*, где

$$\left.\begin{aligned} &H_1 = iH_{14}, && H_2 = iH_{24}, && H_3 = iH_{34},\\ &H_1^* = H_{23}, && H_2^* = H_{31}, && H_3^* = H_{12}. \end{aligned}\right\} \qquad (124.3)$$

Множитель i внесен сюда для того, чтобы получить действительный 3-вектор, так как $H_{\rho 4}$, будучи координатами Минковского, чисто мнимые.

Четыре уравнения (124.1) дают векторное уравнение

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^* \times \frac{v}{c} \qquad (124.4)$$

(где v — скорость частицы), а также следующее скалярное уравнение:

$$\boldsymbol{H}\cdot v = 0, \qquad (124.5)$$

которое, конечно, является следствием уравнения (124.4). Согласно (124.4) два спиновых вектора взаимно перпендикулярны.

Если мы используем систему отсчета, покоящуюся относительно движущейся частицы, то, полагая $v = 0$, получим согласно (124.4) $\boldsymbol{H} = 0$ и поэтому имеем только один спин-вектор $\boldsymbol{H}^*$. Спиновый тензор дает возможность образовать лоренц-инвариантное выражение

$$\Omega^2 = \frac{1}{2}H_{rs}H_{rs} = H^{*2} - H^2. \qquad (124.6)$$

Это выражение всегда положительно, так как выбором системы соответствующего отсчета H можно сделать равным нулю, а поэтому Ω — действительное число.

Для частицы, движущейся под действием 4-силы X и момента Y_{rs} $(= -Y_{sr})$, могут быть предложены[1]) уравнения движения, которые в введенных в этой книге обозначениях имеют вид

$$\left.\begin{aligned} H_{rs}\lambda_s &= 0, \qquad \lambda_r\lambda_r = -1, \\ M_r' &= X_r, \qquad H_{rs}' = M_r\lambda_s - M_s\lambda_r + Y_{rs}; \end{aligned}\right\} \tag{124.7}$$

здесь λ_r — 4-скорость, а штрих означает d/ds, взятую вдоль мировой линии. Масса частицы определяется как $m = -M_r\lambda_r$; приведенные уравнения заключают в себе

$$M_r = m\lambda_r + H_{rs}\lambda_s' + Y_{rs}\lambda_s. \tag{124.8}$$

Если $X_r = 0$ и $Y_{rs} = 0$, то M_r — постоянный 4-вектор, а орбита есть окружность в той системе отсчета, для которой $M_1 = M_2 = M_3 = 0$.

---

[1]) Frenkel J., Lehrbuch der Elektrodynamik, т. 1, стр. 353. Berlin, Springer, 1926. Mathisson M., Acta Phys. Polon. **6**, 163, 218 (1937).— Weyssenhoff J. and Raabe A.: Acta Phys. Polon. **9**, 7, 19 (1947).— Weyssenhoff J., Acta Phys. Polon. **9**, 26, 46 (1947). См. также de Beauregard O. C., стр. 122 или op. cit., § 107.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Здесь подобраны курсы, книги и статьи по классической динамике с краткими замечаниями, в которых даны общие указания о содержании этих работ.

1. Ames J. S. and Murnaghan F. D., Theoretical Mechanics. Boston, Ginn, 1929.

Векторный анализ, включающий теорию винтов. Кинематика. Динамика частицы и твердого тела. Уравнения Лагранжа и Гамильтона. Вариационные принципы. Уравнение Гамильтона — Якоби. Скобки Пуассона. Теория относительности.

2. Appel P., Traité de Mécanique rationelle. Paris: Gauthier — Villars, т. I (1941); т. II (1953). Есть русский перевод: П. Аппель, Теоретическая механика, тт. 1, 2. Физматгиз, Москва, 1960.

Классическое исследование, в котором вопросы рассматриваются подробно и с большой ясностью. Редкое употребление векторных обозначений. Том I — кинематика, статика и динамика частицы. Том II — системы голономные и неголономные, уравнения Лагранжа и Гамильтона и связанная с ними общая теория, удар, взрыв, столкновение. Три дополнительных тома — непрерывные среды, вращение жидких масс и тензорное исчисление.

3. Corben H. C. and Stehle P., Classical Mechanics. New York: Wiley; London, Chapman & Hall, 1950.

Современный учебник; подчеркнуты те вопросы, которые наиболее важны для квантовой механики. Используется векторный и матричный аппарат. Теория Гамильтона, скобки Пуассона и касательные преобразования. Введение в специальную теорию относительности.

4. Finzi B., Meccanica Razionale, два тома, Bologna, 1948.

Общий учебник по механике, с особым вниманием к методам Лагранжа и Гамильтона. Релятивистская механика. Статистическая механика.

5. Frank Ph., Analytische Mechanik. Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, часть 2, стр. 1—176, Braunschweig, 1927.

Есть русский перевод несколько переработанного автором текста в книге: Франк Ф. и Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. II, ОНТИ, Москва, 1937.— Уравнения Лагранжа и Гамильтона, теория преобразований, уравнение Гамильтона — Якоби, переменные действие—угол, устойчивость, движения твердого тела, возмущения.

6. Fues E., Störungsrechnung, Handbuch der Physik, т. 1, стр. 131—177. Berlin, Springer, 1927.

Многопериодичные движения, переменные действие — угол, вырождение, адиабатические инварианты, разложение в степенной ряд по параметру, вековые возмущения, метод Делоне, возмущения, зависящие от времени.

7. Goldstein H., Classical Mechanics. Cambridge, 1950.

Есть русский перевод: Г. Голдстейн, Классическая механика, Гостехиздат, Москва, 1957.— Изложение, имеющее целью дать методы, требующиеся в квантовой механике. Используются матричный и векторный аппарат. Специальная теория относительности. Уравнения Гамильтона, канонические преобразования, малые колебания, знакомство с лагранжевой и гамильтоновой формулировками задач для непрерывных систем и полей.

8. Grammel R., Kinetik der Massenpunkte. Handbuch der Physik, т. V, стр. 305—372. Berlin, Springer, 1927.

Динамика частицы, свободной или подчиненной связям. Движение относительно вращающейся Земли. Проблема двух тел. Проблема трех тел. Устойчивость.

9. Halpern O., Relativitätsmechanik. Handbuch des Physik, т. V, стр. 578—616. Berlin, Springer, 1927.

Динамика частицы и континуума в специальной теории относительности. Квант света. Общая теория относительности.

10. Hamel G., Die Axiome der Mechanik. Handbuch der Physik, т. V, стр. 1—42, Berlin, Springer, 1927.

Законы Ньютона. Построение механики из аксиомы непрерывности, из гипотезы твердого тела и частицы. Построение ее на основе принципа Лагранжа и принципа сохранения энергии. Неклассические формы динамики. Непротиворечивость.

11. Hamel G., Theoretische Mechanik, Berlin, 1949.

Всесторонний, глубокий учебник, с подробным исследованием механики твердого тела, проблемы n-тел и неголономных систем; 263 стр. отведены задачам и их решениям.

12. Jung G., Geometrie der Massen. Encyklopädie der mathematische Wissenschaften, т. IV, стр. 279—344, Leipzig, Teubner, 1901—1908.

Специальная статья о моментах — линейных, квадратичных и высших степеней; приложена библиография, доведенная до 1903 г.

13. Lamb H., Dynamics. Cambridge, 1929.

Имеется русский перевод: Ламб Г., Теоретическая механика, т. 2, Динамика, Гостехиздат, Москва, 1935. Элементарный курс, без векторных обозначений, примечательный простым прямым изложением плоских задач.

14. Lamb H., Higher Mechanics. Cambridge, 1929 (Segreel to [13]). Имеется русский перевод: Ламб Г., Теоретическая механика, т. 3, более сложные вопросы, ОНТИ, Москва, 1936.

Геометрия конечных вращений, винтов и движение твердого тела в пространстве. Уравнения Лагранжа и Гамильтона. Колебания.

15. Lanczoc C., The Variational Principles of Mechanics. Toronto, 1949.

Принцип Даламбера. Уравнения Лагранжа и Гамильтона. Канонические преобразования. Теория Гамильтона — Якоби. Особое внимание к геометрии фазового пространства.

16. Levi-Civita T. and Amaldi U., Lezioni di Meccanica Razionale, Bologna; т. I, 1923; т. II_1, 1926; т. II_2, 1927.

Имеется русский перевод: Леви-Чивита Т. и Амальди У., Курс теоретической механики, т. 1; т. 2, ч. 1, ОНТИ, Москва, 1935; т. 2, ч. 2, ИЛ, Москва, 1951.

Исчерпывающее глубокое изложение, которое можно сравнить с трактатом Аппеля. Том I — кинематика, геометрия масс и статика; II — динамика частицы, уравнения Лагранжа, устойчивость колебаний. Том II — динамика твердого тела, теория Гамильтона, вариационные принципы, движение под действием ударного импульса.

17. Macmillan W. D., Theoretical Mechanics. New York — London, т. I, 1927; т. II, 1936.

Исчерпывающий учебник с большим количеством подробностей. Том I — орбиты, баллистические траектории, уравнения Лагранжа и Гамильтона и вариационные принципы для частицы. Том II — твердое тело, имеющее неподвижную точку или катящееся; ударные импульсы, общие лагранжевы и гамильтоновы методы, метод периодических решений.

18. Nordheim L., Die Prinzipe der Dynamik. Handbuch der Physik, т. V, стр. 43—90, Berlin, 1927.

Дифференциальный и интегральный принципы виртуальной работы, принцип Даламбера, принципы Гаусса, Герца, Гамильтона, Якоби.

19. Nordheim L. and Fues E., Die Hamilton — Jacobische Theorie der Dynamik. Handbuch der Physik. т. V, стр. 91—130. Berlin, Springer, 1927.

Канонические преобразования, скобки Пуассона и Лагранжа, уравнение Гамильтона — Якоби, эйконал.

20. Pérès J., Mécanique générale. Paris, 1953.

Компактный учебник, в котором рассматриваются моменты инерции, неголономные связи, принцип виртуальной работы, динамику частицы и твердого тела, уравнения Лагранжа, Аппеля и Гамильтона, уравнение Гамильтона — Якоби, устойчивость около положения равновесия или равномерного движения. Удар и возмущения.

21. Prange G., Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, т. IV_2, стр. 505—804, Leipzig, 1904—1935.

Подробное изложение принципа Даламбера, уравнений Лагранжа, вариационных принципов, вариации произвольных постоянных, оптики Гамильтона, характеристической функции, уравнений Гамильтона — Якоби, разделения переменных, интегральных инвариантов, систематическое интегрирование систем канонических уравнений, канонические преобразования, подстановки или производящие функции, эквивалентные системы.

22. Routh E. J., A Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies. London, т. I, 1897; т. II, 1905.

В книге используются совершенно устаревшие обозначения, тем не менее она остается наиболее полезным источником разнообразной информации по динамике твердых тел. Здесь исследуются струны и мембраны. Изложение несистематичное, но имеется хороший указатель.

23. Schaefer Cl., Einführung in die theoretische Physik, Bd. I. Berlin, 1950. Имеется русский перевод: Кл. Шефер, Теоретическая физика, т. 1, ч. 1. Общая механика. Механика твердого тела, Гостехиздат, Москва, 1934.

На первых 469 страницах книги исследуется динамика частиц и твердых тел с важными деталями, включая лагранжевы и гамильтоновы методы.

24. Schoenflies A. and Grübler M., Kinematik, Encyklopädie der mathematishen Wissenschaften, т. IV, ч. 1, стр. 190—278. Leipzig, 1901—1908.

Конечные перемещения, ускорение, механизмы.

25. Stäckel P., Elementare Dynamik der Punktsysteme und starren Korper, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, т. IV, ч. 1, стр. 436—684. Leipzig, 1901—1908.

Прямое исследование динамики частиц и твердых тел; библиография и подробные исторические ссылки. Более полно, с диаграммами, рассматривается гироскопическое движение.

26. Synge J. L. and Griffith B. A., Principles of Mechanics. New York—Toronto — London, 1959.

Учебник статики и динамики, включающей теорию гироскопа. Движение заряженных частиц в электромагнитном поле с аксиальной симметрией. Методы Лагранжа и Гамильтона. Колебания. Введение в теорию относительности.

27. Voss A., Die Prinzipien der rationellen Mechanik. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, т. IV, стр. 3—121. Leipzig, 1901—1908.

История и философия механики от Галилея и Ньютона. Исключение силы Кельвином и Герцем. Принцип Даламбера, Фурье, Гаусса, Гамильтона. Принцип энергии.

28. Whittaker E. T., A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, Cambridge, 1937. Имеется русский перевод: Уиттекер Е., Аналитическая динамика, ОНТИ, Москва, 1937.

Образцовое изложение с систематическим расположением материала, более компактное, чем у Аппеля [2] или Леви-Чивита и Амальди [16]; обычные проблемы динамики частиц и твердых тел исследуются методами Лагранжа без векторных обозначений и чертежей. Во второй половине книги рассматриваются гамильтоновы системы, интегральные инварианты, теория преобразований, первые интегралы, проблема трех тел, теория траекторий.

29. Winkelmann M. and Grammel R., Kinetik der starren Körper. Handbuch der Physik, т. V, стр. 373—483. Berlin, 1927.

Волчок симметричный и несимметричный, много чертежей. Относительное движение твердого тела на вращающейся Земле. Системы твердых тел. Гироскопическая устойчивость.

30. Wintner A., The Analytic Foundations of Celestial Mechanics, Princeton, 1947.

Главная тема — проблема n-тел, но книга содержит подробное критическое изложение методов Гамильтона и канонические преобразования с интересными историческими замечаниями и ссылками в конце.

Дополнительная литература на русском языке

Вариационные принципы механики, Сборник статей под ред. Л. С. Полака, Физматгиз, Москва, 1959.

Гантмахер Ф. Р., Лекции по аналитической механике, Физматгиз, Москва, 1950.

Ландау Л. Д. и Лившиц Е. М., Теоретическая физика, т. 1 Механика, Физматгиз, Москва, 1958.

Лич Дж. У., Классическая механика, перевод Я. И. Секерж-Зеньковича под ред. Л. Н. Сретенского, ИЛ, Москва, 1961.

Лурье А. И., Аналитическая механика. Физматгиз, Москва, 1961.

Полак Л. С., Вариационные принципы механики, их развитие и применение в физике, Физматгиз, Москва, 1960.

Розе Н. В., Лекции по аналитической механике, ч. 1, Ленинград, 1938.

Суслов Г. К., Теоретическая механика, Гостехиздат, Москва, 1946.

Френкель Я. И., Аналитическая механика, Кубуч, Ленинград, 1935.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ