ТЕНЗОРНЫЕ МЕТОДЫ В ДИНАМИКЕ

Дж. Л. Синдж

И∗Л

Государственное издательство
иностранной
литературы

*

UNIVERSITY OF TORONTO STUDIES
Applied Mathematics Series № 2

TENSORIAL METHODS IN DYNAMICS

By
J. L. SYNGE
Department of Applied Mathematics
University of Toronto

1936

Дж. Л. СИНДЖ

ТЕНЗОРНЫЕ МЕТОДЫ В ДИНАМИКЕ

Перевод с английского, под редакцией
А. М. ЛОПШИЦА

1947

Государственное издательство
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Основная задача, которую поставил автор этой небольшой, конспективно написанной книги, перевод которой мы предлагаем русскому читателю, заключалась в том, чтобы вскрыть глубокие связи, существующие между проблемами классической динамики системы и основными идеями новой ветви математического анализа и геометрии — тензорного анализа и его геометрических приложений.

Выяснение новых связей не только способствует лучшему уяснению существа изучаемых вопросов, но и создает новые пути исследования. Эти новые пути изучения механики системы, еще только намеченные работами, кратко изложенными в книге Синджа, несомненно могут быть продолжены, и нужно думать, что использование геометрических представлений и геометрических методов исследования будет способствовать изучению вопросов классической механики.

Чтение книги Синджа предполагает не только знакомство читателя с результатами классической механики системы, но и владение основным материалом из области тензорного анализа и многомерной диференциальной геометрии. Чтение этой книги потребует также и изучения литературы вопроса, ибо в своем изложении автор часто ограничивается лишь указанием окончательных результатов теории, отсылая читателя к первоисточникам.

Можно надеяться, что книга Дж. Синджа будет полезна как механикам, так и математикам, обогатив их указаниями на существенность тех сторон изучаемых вопросов, которые при прежнем характере исследования этих проблем — механических и геометрических—оставались для каждого из них на втором плане.

В заключение я хочу выразить благодарность Ю. В. Геронимусу за помощь, оказанную им при выполнении перевода этой книги.

А. М. Лопшиц

ТЕНЗОРНЫЕ МЕТОДЫ В ДИНАМИКЕ

ВВЕДЕНИЕ

Для того чтобы проследить, откуда берут свое начало тензорные методы в динамике, мы должны обратиться к идеям Лагранжа об общих свойствах динамических систем, а также к идеям Римана в области многомерной геометрии. Лагранж был противником применения современных ему геометрических средств к динамике. В введении к его „Аналитической механике" сказано: „В этом сочинении нет чертежей. Методы, в нем излагаемые, не требуют ни геометрических построений, ни механических рассуждений; они требуют лишь алгебраических операций, подчиненных правильному и однообразному ходу. Любители анализа с удовольствием увидят, что механика становится новой его отраслью, и будут признательны мне за такое расширение его области".

Нам неизвестно, как отнесся бы этот непримиримый аналитик к современной версии „Аналитической механики", в которой геометрическими иллюстрациями служат не образы трехмерного пространства, которыми должен был довольствоваться Лагранж, а образы более просторного и гибкого риманова пространства N измерений. Он имел бы, я полагаю, серьезные возражения. Переход от геометрических средств к аналитическим был долгим и трудным делом. Каждый прием должен был быть тщательно проверен перед включением его в новую схему: он должен был допускать непосредственное обобщение для случая N измерений и должен был быть очищен от излишних ассоциаций с понятиями эвклидовой геометрии. Нам, вполне освоившимся с понятием N-мерного пространства, кажется странным то медленное развитие этих идей, которое исторически имело место. Первые идеи были довольно неотчетливо изложены Риманом (Riemann) [1] [1]) в 1854 г. В 1869 г. Бельтрами (Beltrami) [1] и в 1872 г. Липшиц (Lipschitz) [1] воспользовались геометрическим

---

1) Библиографический указатель находится в конце книги.

языком с крайней осторожностью. Для иллюстрации медленного развития этих идей мы можем указать на тот факт, что лишь в 1917 г. Леви-Чивита (Levi-Civita) сделал понятие параллелизма достаточно гибким для того, чтобы оно нашло свое применение.

Тем не менее, идея многомерного риманова пространства постепенно завоевывала права, и к концу девятнадцатого столетия Дарбу (Darboux) [1] и Герц (Hertz) [1]' рассматривали динамическую систему как точку, движущуюся в N-мерном пространстве, причем Герц делал это особенно последовательно. В 1894 г. Пенлеве (Painlevé) [1] становится на точку зрения многомерного пространства, хотя и пользуется, главным образом, эвклидовой метрикой.

Развитие основных понятий римановой геометрии было все еще недостаточным. Только когда абсолютное диференциальное (или тензорное) исчисление получило определенную форму в работе Риччи (Ricci) и Леви-Чивита [1] в 1900 г., основные препятствия для развития тензорных методов в динамике можно было считать преодоленными. И действительно, в этой знаменитой статье Риччи и Леви-Чивита динамике посвящена целая глава.

Все же эти ранние усилия, направленные на создание союза между тензорным исчислением и динамикой, не были встречены с особым энтузиазмом. Тензорное исчисление можно было сравнить с маленьким ребенком, неизвестным вне узкого круга математиков-специалистов, тогда как динамика была зрелой трехсотлетней дамой, которая, по справедливости, могла оспаривать у любимицы Гаусса титул „Королевы наук" *). Но когда в 1916 г. мир был потрясен общей теорией относительности, тензорное исчисление сразу становится „героем дня", в то время как репутация классической динамики и физики несколько тускнеет. Ничто не мешало теперь этому, неравному прежде, союзу. Но вряд ли надо специально оговаривать, что такой математический союз не предполагает „верности" от его членов, и, действительно, тензорное исчисление никогда не рассматривало связь с динамикой иначе, как приятный эпизод в своей деловой жизни.

Предмет настоящей статьи лежит между аналитической динамикой, с одной стороны, и чистой римановой геометрией — с другой; вопрос о том, где проходит пограничная линия, зачастую бывает трудно решить. В качестве рабочего правила условимся не рассматривать сочинений по динамике, в которых не используются обозначения ковариантного и абсолютного

---

*) „Королевой наук" Гаусс называл теорию чисел. (*Прим. ред.*)

диференцирования, и сочинений по геометрии, слишком общих для того, чтобы получить применение при изучении конкретных динамических систем, встречающихся в природе. Я придерживаюсь, в основном, этого правила, указывая, впрочем, в библиографических ссылках некоторые работы, лежащие за указанными границами [1]).

Как было указано, тензорные методы в динамике ведут свое начало от статьи Риччи и Леви-Чивита 1900 г. Далее мы отметим работу Райта (Wright) [1] *) 1908 г. После долгого перерыва работы вновь стали появляться около десяти лет тому назад **); первая из них принадлежит Гораку (Horak) [1], она вышла в Чехословакии в 1924 г. В 1926 г. я дал систематическое изложение вопроса [2]). В этом же году появились статьи Леви-Чивита [1], [2] и Вранчеану (Vranceanu) [1], [2], [3]. Основными исследователями в этой области в то время были Горак, Вранчеану, Вундхейлер (Wundheiler) и я [3]). Крон (Kron) [1], [2], [3], [4] опубликовал в последнее время статьи и книги о приложениях тензорного исчисления к электротехнике, но, так как я до сих пор не был в состоянии понять его точку зрения, я принужден оставить эти работы без комментариев.

Прежде чем перейти к деталям, не лишнее будет сказать несколько слов о значении тензорных методов в динамике. Я ограничиваюсь здесь классической динамикой, оставляя в стороне релятивистскую и квантовую механику.

Тензорные методы прилагаются к динамике в первую очередь не для того, чтобы разрешать некоторые конкретные динамические задачи. Целью этих методов является скорее адэкватное изложение так называемых „общих проблем динамики", делающееся возможным при проникновении в динамику идей римановой или даже еще более общей геометрии. В этом направлении получены неожиданно прекрасные результаты. Мы обнаруживаем, что поведение общей динамической системы в точности такое, какое естественно приписать точке в N-мерном про-

---

1) В этой связи следует упомянуть о работах: Berwald und Frank [1]; Eisenhart [1]; Frank [1]; Hamel [1]; Kells [1]; Lipka [1], [2], [3], [4].

*) Переработка этой книги, выполненная в 1932 г. Вебленом (Veblen) [1], учитывает современное изложение вопроса. Русский перевод этой книги готовится к печати. (*Прим. ред.*)

**) Написано в 1936 г. (*Прим. ред.*)

2) Synge [1]; эта работа осталась, кажется, незамеченной многими авторами; она не упомянута в библиографии к работе Horak'a [8], опубликованной в 1934 г.

3) Wundheiler [3], стр. 123, дает сравнительную характеристику методов.

странстве. Таким образом, мы воскрешаем геометрический дух, столь тщательно изгнанный из работ Лагранжа и Гамильтона (Hamilton), и наглядно представляем себе движение системы, причем не как движение совокупности частиц в трехмерном эвклидовом пространстве, а как движение единственной точки риманова N-мерного пространства. Я старался не терять из вида, что предметом настоящей работы является в первую очередь динамика и лишь во вторую очередь — геометрия. Соблазн прочесть геометрическую проповедь на текст из динамики должен был быть преодолен. Вот почему наибольшее внимание я посвящу системам, наиважнейшим с динамической точки зрения. Менее важные в динамическом отношении системы, именно, неголономные системы и системы с подвижными связями, представляют особый интерес для геометров[1]). Я остановился на этих вопросах, но не входил в подробности.

Очень компактные обозначения Горака и Схоутена (Schouten) будут использованы лишь в § 9; например, они не будут введены при изучении неголономных систем в § 4. Это сделано частично для разнообразия, частично же из-за того, что менее компактные обозначения выявляют иногда геометрический смысл с большой легкостью.

По оглавлению можно судить о круге вопросов, являющихся предметом нашего исследования. Вследствие недостатка места лишь некоторые из перечисленных там вопросов будут рассмотрены более или менее детально; остальные будут изложены более сжато.

В сносках указаны основные сочинения; излагаемые мною методы не всегда совпадают с методами оригинальных работ.

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

Мы будем рассматривать динамическую систему наиболее общего типа. Она может быть подчинена переменным связям — случай *реономной* системы. Если связи постоянны, то система называется *склерономной*. Связи могут быть заданы неинтегрируемыми уравнениями Пфаффа; в этом случае они *неголономны*; в противном случае связи носят название *голономных*. Реономная неголономная система представляет собой самый об-

---

[1]) Литература по неголономной геометрии продолжает расти: Bortolotti [2]; Horak [2], [3]; Schouten [1], [2]; Schouten und Struik [1], Bd. I, II; Schouten und van Kampen [1], [2]; Synge [2]; Vranceanu [1], [2], [4], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [15], [17], [18]; Вагнер [1], [2], [3], [4], [5].

щий случай, включающий все остальные. Однако полезнее изучать сначала более простые системы, так как они обладают интересными свойствами, не имеющими места в общем случае.

Условимся, как это принято, что по каждой паре повторяющихся индексов производится суммирование; при этом мы предполагаем, что латинские индексы пробегают значения от 1 до N, а греческие — от 1 до M. Индексы, не носящие тензорного характера по отношению к преобразованиям координат, мы будем обычно заключать в скобки. Случаи, когда индексы пробегают другие системы значений, будут всякий раз особо оговорены.

a) Склерономные голономные (с. г.) системы. Конфигурация системы определяется значениями координат x^i, вариации которых могут принимать произвольные значения. Кинетическая энергия задается формулой

$$T = \frac{1}{2} a_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j. \tag{1.1}$$

На систему действуют обобщенные силы X_i, определяемые равенством

$$dW = X_i dx^i, \tag{1.2}$$

где dW — работа при произвольном перемещении. Уравнения движения имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i} = X_i. \tag{1.3}$$

Простым примером с. г. системы может служить твердое тело, свободно вращающееся вокруг неподвижной точки.

b) Склерономные неголономные (с. н.) системы. Конфигурация системы определена значениями координат x^i, но произвольные вариации этих координат могут противоречить связям. Вынужденное связями перемещение должно удовлетворять M уравнениям связей

$$\varphi_{(\alpha)i} dx^i = 0, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots M). \tag{1.4}$$

Эти уравнения не интегрируемы — в этом и состоит неголономный характер нашей системы.

На систему действуют приложенные к ней обобщенные силы X_i и реакции связей Y_i. Работа при произвольном, не подчиненном связям перемещении равна

$$dW = (X_i + Y_i)\, dx^i, \tag{1.5}$$

а для всякого перемещения, подчиненного связям,

(1.6) $$Y_i dx^i = 0;$$

поэтому

(1.7) $$Y_i = \vartheta_{(\alpha)} \varphi_{(\alpha) i},$$

где $\vartheta_{(\alpha)}$ остаются неопределенными.

Кинетическая энергия определяется формулой (1.1), а уравнения движения имеют следующий вид:

(1.8) $$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i} = X_i + Y_i, \quad \varphi_{(\alpha) i} \dot{x}^i = 0.$$

Простым примером с. н. системы может служить диск, катящийся по шероховатой неподвижной плоскости*).

c) Реономные голономные (р. г.) системы. Конфигурация этой системы определяется значениями координат x^i и времени t. Вариации координат могут принимать произвольные значения. Кинетическая энергия определяется формулой

(1.9) $$T = \frac{1}{2} a_{ij}(x, t) \dot{x}^i \dot{x}^j + a_i(x, t) \dot{x}^i + \frac{1}{2} A(x, t).$$

Система подвергается действию обобщенных сил X_i, удовлетворяющих равенству (1.2) для всех перемещений, соответствующих изменению одних лишь координат, при фиксированном времени t. Уравнения движения сохраняют форму (1.3). Простым примером р. г. системы может служить свободное вращение твердого тела вокруг точки, движущейся по заданному закону.

d) Реономные неголономные (р. н.) системы. Конфигурация системы определяется заданием x^i и t. Движение должно удовлетворять неинтегрируемым уравнениям связей

(1.10) $$\varphi_{(\alpha) i}(x, t)\, dx^i = \psi_{(\alpha)}(x, t)\, dt.$$

Про перемещение, удовлетворяющее равенствам

(1.11) $$\varphi_{(\alpha) i}\, dx^i = 0,$$

мы будем говорить, что оно удовлетворяет мгновенным связям. На систему действуют внешние обобщенные силы X_i и реакции связей Y_i. Работа, произведенная при произвольном, не подчиненном мгновенным связям перемещении, равна

(1.12) $$dW = (X_i + Y_i)\, dx^i,$$

*) Геометрические методы при изучении конкретных неголономных систем применил Вагнер в работе [6]. (*Прим. ред.*)

а для всякого перемещения, удовлетворяющего мгновенным связям, имеем:

(1.13) $$Y_i dx^i = 0.$$

Поэтому

(1.14) $$Y_i = \vartheta_{(a)} \varphi_{(a)i}.$$

Кинетическая энергия выражается формулой (1.9), а уравнения движения имеют вид:

(1.15) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i} = X_i + Y_i, \qquad \varphi_{(a)i}\dot{x}^i = \phi_{(a)}.$$

Простым примером р. н. системы может служить качение диска по шероховатой плоскости, которая перемещается по заданному закону.

Каждая из описанных выше систем называется *консервативной*, если существует потенциальная энергия V, такая, что

(1.16) $$X_i = -\frac{\partial V}{\partial x^i}$$

2. ДИНАМИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Будем рассматривать два многообразия: a) *многообразие конфигураций*, в котором точка соответствует конфигурации динамической системы, и b) *многообразие конфигураций и времени*, в котором точка соответствует конфигурации в данный момент времени. Легко видеть, что многообразие конфигураций применимо при изучении склерономных систем, а многообразие конфигураций и времени — при изучении реономных. Для склерономных систем пространство конфигураций может быть метризовано при помощи *кинематического линейного элемента*

(2.1) $$ds^2 = 2T dt^2 = a_{ij} dx^i dx^j, \qquad (a_{ij} = a_{ji}),$$

где T — кинетическая энергия; если система консервативна, то это можно также сделать с помощью *„линейного элемента действия"*

(2.2) $$ds^2 = (E - V)\, a_{ij}\, dx^i dx^j,$$

где E — постоянная общая энергия, а V — потенциальная энергия системы. Введение метрики в многообразие конфигураций и времени представляет собой более тонкую задачу; она будет рассмотрена в §§ 7, 8. Полезно отметить, что многообразие конфигураций с линейным элементом (2.1) или (2.2) является римановым многообразием, определенным той динамической системой, которую оно представляет, не только в малом, но и в целом [1]).

[1]) Synge [6].

3. МНОГООБРАЗИЕ КОНФИГУРАЦИЙ С КИНЕМАТИЧЕСКИМ ЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ ДЛЯ С. Г. СИСТЕМ:

$$ds^2 = 2T dt^2 = a_{ij} dx^i dx^j.$$

а) Кинематика[1]). В римановом N-мерном пространстве абсолютная производная контравариантного вектора A^i вдоль кривой $x^i = x^i(\sigma)$, где σ — параметр, определяется формулой

$$\frac{\delta A^i}{\delta\sigma} = \frac{dA^i}{d\sigma} + \left\{ {i \atop jk} \right\} A^j \frac{dx^k}{d\sigma}. \tag{3.1}$$

Если $\sigma = t$, мы можем говорить о *производной A^i по времени*.

Скоростью системы будем называть контравариантный вектор

$$v^i = dx^i/dt, \tag{3.2}$$

а *ускорением* — его производную по времени

$$f^i = \delta v^i/\delta t. \tag{3.3}$$

Модуль скорости равен при этом

$$v = (a_{ij} v^i v^j)^{\frac{1}{2}} = ds/dt. \tag{3.4}$$

Если λ^i — единичный вектор касательной к траектории, ν^i — единичный вектор главной (первой) нормали, а k — (первая) кривизна, то, согласно первой формуле Френе,

$$\frac{\delta\lambda^i}{\delta s} = k\nu^i. \tag{3.5}$$

Но

$$v^i = v\lambda^i, \tag{3.6}$$

и, следовательно,

$$f^i = \dot{v}\lambda^i + kv^2\nu^i, \qquad (\dot{v} = dv/dt). \tag{3.7}$$

Таким образом, *ускорение слагается из компоненты $\dot{v}$, направленной по касательной, и компоненты kv^2, направленной по главной нормали, как и в элементарной динамике точки.*

Верхние индексы могут быть, конечно, опущены с помощью фундаментального тензора a_{ij}: мы получаем ковариантную запись векторов скорости и ускорения

$$v_i = a_{ij} v^j, \quad f_i = a_{ij} f^j. \tag{3.8}$$

---

[1]) Hertz [1], гл. 7; Synge [1].

Легко непосредственно показать, что

$$(3.9) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}-\frac{\partial T}{\partial x^i}=f_i.$$

Это уравнение осуществляет связь между лагранжевым и тензорным методами.

b) Уравнения движения[1]. Из (1.3) и (3.9) следует, что уравнения движения могут быть записаны так:

$$(3.10) \qquad f_i=X_i, \text{ или } f^i=X^i .$$

Или словами: *ускорение равно силе* — замечательное обобщение второго закона Ньютона.

Если мы подставим значение f^i из (3.7), то уравнения движения примут форму:

$$(3.11) \qquad \dot{v}\lambda^i+kv^2\nu^i=X^i .$$

Это показывает, что три вектора: *вектор силы, вектор касательной к траектории и вектор главной нормали компланарны* (т. е. лежат в двумерном линейном многообразии).

Уравнение движения может быть записано также и в таком виде:

$$(3.12) \qquad \frac{\delta v^i}{\delta t}\equiv\frac{\delta^2 x^i}{\delta t^2}=X^i ,$$

или, если выбрать s за независимую переменную, в виде

$$(3.13) \qquad v^2\frac{\delta\lambda^i}{\delta s}+v\frac{dv}{ds}\lambda^i=X^i, \qquad \left(\lambda^i=\frac{dx^i}{ds},\ \lambda_i\lambda^i=1\right).$$

c) Устойчивость[2]. При изучении устойчивости движения системы мы рассмотрим однократно бесконечное множество (∞^1) траекторий, образующих двумерное пространство V_2; уравнения этих траекторий запишутся так:

$$(3.14) \qquad x^i=x^i(\sigma, \tau),$$

где σ — параметр, изменяющийся вдоль каждой траектории, а τ — параметр, постоянный для всех точек данной траектории. Точки траекторий мы будем называть соответственными, если они получаются при одном и том же значении параметра σ.

---

[1]) Wright [1]; Horak [1]; Synge [1]. См. также Hertz [1], точка зрения которого отлична от встречающейся в современных сочинениях.

[2]) Synge [1].

Из тензорного анализа известно, что если A^l есть векторное поле на поверхности V_2, то

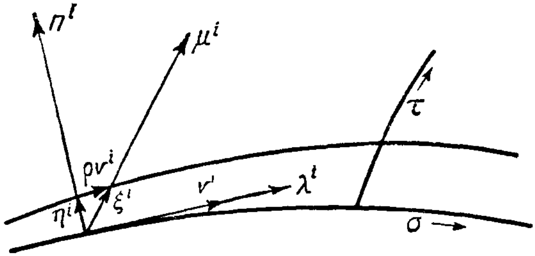
$$(3.15)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta^2 A^l}{\delta\sigma\delta\tau} - \dfrac{\delta^2 A^i}{\delta\tau\delta\sigma} = R^l_{.jkl} A^j \dfrac{\partial x^k}{\partial\sigma} \dfrac{\partial x^l}{\partial\tau}, \\ R^l_{.jkl} = \dfrac{\partial}{\partial x^k} \begin{Bmatrix} i \\ jl \end{Bmatrix} - \dfrac{\partial}{\partial x^l} \begin{Bmatrix} l \\ jk \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m \\ jl \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} i \\ mk \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} m \\ jk \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ ml \end{Bmatrix}. \end{cases}$$

Переходя для простоты к обозначениям

$$(3.16)\qquad \frac{\partial x^i}{\partial\sigma} = \frac{\delta x^i}{\delta\sigma}, \qquad \frac{\partial x^l}{\partial\tau} = \frac{\delta x^l}{\delta\tau},$$

положим

$$(3.17)\qquad A^l = \frac{\delta x^l}{\delta\sigma}.$$



Чертеж 1.

Принимая во внимание, что

$$(3.18)\qquad \frac{\delta^2 x^i}{\delta\sigma\delta\tau} = \frac{\delta^2 x^l}{\delta\tau\delta\sigma},$$

получим в силу (3.15)

$$(3.19)\qquad \frac{\delta^2}{\delta\sigma^2}\frac{\partial x^l}{\partial\tau} - \frac{\delta}{\delta\tau}\frac{\delta^2 x^l}{\delta\sigma^2} + R^l_{.jkl}\frac{\partial x^j}{\partial\sigma}\frac{\partial x^k}{\partial\tau}\frac{\partial x^l}{\partial\sigma} = 0.$$

Введем в рассмотрение вектор

$$(3.20)\qquad \xi^l = \frac{\partial x^l}{\partial\tau} d\tau,$$

т. е. *вектор бесконечно малого смещения*, соединяющий точку (σ, τ) одной траектории с соответствующей точкой $(\sigma, \tau + d\tau)$ близкой траектории. Равенства (3.19) могут быть теперь записаны так:

$$(3.21)\qquad \frac{\delta^2 \xi^l}{\delta\sigma^2} + R^l_{.jkl}\frac{\partial x^j}{\partial\sigma}\xi^k\frac{\partial x^l}{\partial\sigma} = d\tau\frac{\delta}{\delta\tau}\frac{\delta^2 x^l}{\delta\sigma^2}.$$

При исследовании устойчивости динамической системы особый интерес представляют два способа задания соответствия между точками траектории[1]):

1. „Изохронное соответствие".
2. „Соответствие по нормали".

Используя изохронное соответствие, мы полагаем $\sigma = t$. Тогда на основании (3.12) получим:

$$\frac{\partial x^j}{\partial \sigma} = v^j = v\lambda^j, \qquad \frac{\delta^2 x^j}{\delta \sigma^2} = \frac{\delta^2 x^j}{\delta t^2} = X^j, \tag{3.22}$$

и (3.21) может быть записано так:

$$\frac{\delta^2 \xi^i}{\delta t^2} + v^2 R^i_{.jkl} \lambda^j \xi^k \lambda^l = X^i_{.j} \xi^j, \tag{3.23}$$

где $X^i_{.j}$ ковариантная производная вектора X^i.

Интересно проследить за изменением длины

$$\xi = (\xi_i \xi^i)^{\frac{1}{2}} \tag{3.24}$$

вектора смещения. Введем в рассмотрение единичный вектор μ^i направления вектора ξ^i; тогда

$$\xi^i = \xi \mu^i, \qquad \mu_i \mu^i = 1; \tag{3.25}$$

из (3.23) получим:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \xi \left(v^2 R_{ijkl} \mu^i \lambda^j \mu^k \lambda^l - \frac{\delta \mu_i}{\delta t} \frac{\delta \mu^i}{\delta t} - X_{ij} \mu^i \mu^j \right) = 0\,. \tag{3.26}$$

Изучение „соответствия по нормали" несколько более сложно. Для решения этой задачи можно воспользоваться уже полученными результатами для „изохронного соответствия". Для этого положим

$$\xi^i = \eta^i + \rho v^i, \qquad \eta_i v^i = 0, \tag{3.27}$$

где ξ^i — смещение при изохронном соответствии, η^i — смещение по нормали, ρ — некоторая, еще не определенная, бесконечно малая величина. Подставляя это выражение в (3.23) и принимая во внимание (3.12), мы получим:

$$\frac{\delta^2 \eta^i}{\delta t^2} + \frac{d^2 \rho}{dt^2} v^i + 2\, \frac{d\rho}{dt} X^i + v^2 R^i_{.jkl}\, \lambda^j \eta^k \lambda^l = X^i_{.j}\, \eta^j\,. \tag{3.28}$$

Из равенств (3.28) и второго из равенств (3.27) мы получаем систему $N+1$ уравнений относительно η^i, ρ. В том случае, когда система консервативна и ее потенциальная энергия есть V,

[1]) В моей ранней работе (Synge [1], стр. 71, 72) я называл эти соответствия „кинематическим" и „кинематико-статическим". Wundheiler [1] для первого из них вводит наименование „изохронического".

мы можем исключить ρ и получаем

$$(3.29)\quad \frac{\delta^2\eta^i}{\delta t^2} + R^i_{\cdot jkl} v^j \eta^k v^l + V^i_{\cdot j}\eta^j + 2V^i(2V_j\eta^j - \varepsilon)/v^2 - \\ - v^i \frac{d}{dt}[(2V_j\eta^j - \varepsilon)/v^2] = 0,$$

где через ε обозначено бесконечно малое приращение полной энергии при переходе из состояния невозмущенного движения к возмущенному.

Легко написать уравнение для определения длины вектора η^i:

$$(3.30)\quad \frac{d^2\eta}{dt^2} + \eta\left[v^2 R_{ijkl} n^i \lambda^j n^k \lambda^l - \frac{\delta n_i}{\delta t}\frac{\delta n^i}{\delta t} + V_{ij} n^i n^j + 4(V_i n^i)^2/v^2\right] = \\ = 2\varepsilon V_i n^i/v^2,$$

где n^i — единичный вектор, имеющий направление вектора η^i.

d) Брахистохроны. Рассмотрим динамическую систему, переходящую из конфигурации A в конфигурацию B. Пусть она находится под влиянием данного консервативного поля сил и пусть задана ее полная энергия. Требуется определить идеальные связи, при которых система перейдет из положения A в положение B в экстремальное время. Соответствующую траекторию называют *брахистохроной*. Эту классическую проблему динамики точки Мак-Коннель (McConnell) [1] перенес на динамику системы; применив тензорные методы, он пришел к обобщению результатов Эйлера.

e) Годографы. В динамике точки *годографом* называют геометрическое место концов векторов, параллельных и равных по длине векторам скорости точки, проведенных из фиксированного начала. Так как в римановом пространстве нет понятия абсолютного параллелизма, то становится трудным дать общее определение годографа. Мне все же удалось разрешить эту задачу, выбирая начало отсчета на траектории и используя параллельное перенесение вдоль нее. Я исследовал условия, при которых годограф является окружностью, и получил результаты, являющиеся обобщением хорошо известного закона Гамильтона о круговом годографе для движения точки под действием ньютоновского закона притяжения [1]).

f) Апсиды. В теории центральных орбит *апсидой* называют точку, в которой длина радиус-вектора имеет стационарное значение. Следуя Адамару, я обобщил эту идею и разработал теорию апсид для многообразия конфигураций [2]).

---

1) Synge [3].
2) Synge [4].

4. МНОГООБРАЗИЕ КОНФИГУРАЦИЙ С КИНЕМАТИЧЕСКИМ ЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ ДЛЯ С. Н. СИСТЕМ:

$$ds^2 = 2T dt^2 = a_{ij} dx^i dx^j.$$

а) Уравнения движения[1]. Мы имеем M неинтегрируемых уравнений связи

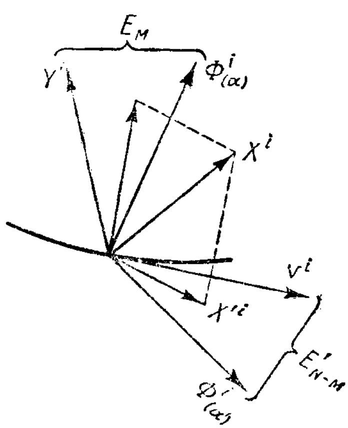
$$\varphi_{(\alpha)i} dx^i = 0. \tag{4.1}$$

Все перемещения, удовлетворяющие в некоторой точке этим связям, образуют векторное пространство E'_{N-M}, ортогональное к векторному пространству E_M, определенному векторами $\varphi^i_{(\alpha)}$. Пусть в каждой точке E_M выбрана система единичных взаимно-ортогональных векторов $\Phi^i_{(\alpha)}$:

$$\Phi^i_{(\alpha)} \Phi_{(\beta)i} = \delta_{\alpha\beta}, \tag{4.2}$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера. Уравнения связей записываются в виде

$$\Phi_{(\alpha)i} dx^i = 0. \tag{4.3}$$



Чертеж 2.

Используя выражения для скорости v^i и для ускорения f^i, полученные в § 3, выведем, как следствие из (1.8), что уравнения движения имеют вид:

$$f^i = X^i + Y^i, \qquad \Phi_{(\alpha)i} v^i = 0, \tag{4.4}$$

где

$$Y^i = \theta_{(\alpha)} \Phi^i_{(\alpha)}. \tag{4.5}$$

При этом $\theta_{(\alpha)}$ еще не определены. Реакция Y^i лежит, следовательно, в E_M. Диференцируя второе из соотношений (4.4), получим:

$$\Phi_{(\alpha)i} f^i + \Phi_{(\alpha)ij} v^i v^j = 0, \tag{4.6}$$

---

[1]) Synge [1]; Horak [4]; Schouten [2]; Wundheiler [2]. Для связи обозначений Wundheiler'а с теми, которыми мы пользуемся, отметим, что его B^i_j, C^i_j суть $B^i_j = \Phi^i_{(\alpha')} \Phi_{(\alpha')j}$, $C^i_j = \Phi^i_{(\alpha)} \Phi_{(\alpha)j}$.

где $\Phi_{(\alpha)ij}$ есть ковариантная производная от $\Phi_{(\alpha)i}$. Таким образом, вследствие первого из соотношений (4.4)

$$\Phi_{(\alpha)i} Y^i = -\Phi_{(\alpha)i} X^i - \Phi_{(\alpha)ij} v^i v^j. \tag{4.7}$$

В соединении с (4.2) и (4.5) это дает:

$$\Theta_{(\alpha)} = -\Phi_{(\alpha)i} X^i - \Phi_{(\alpha)ij} v^i v^j. \tag{4.8}$$

Уравнения движения (4.4) могут быть теперь записаны так:

$$f^i = X^i - \Phi^i_{(\alpha)}(\Phi_{(\alpha)j} X^j + \Phi_{(\alpha)jk} v^j v^k). \tag{4.9}$$

Эти уравнения имеют первые интегралы

$$\Phi_{(\alpha)i} v^i = C_{(\alpha)} = \text{const}. \tag{4.10}$$

В действительном движении $C_{(\alpha)} = 0$. Если ввести обозначения:

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} = \left\{ {i \atop jk} \right\} + \frac{1}{2} \Phi^i_{(\alpha)}(\Phi_{(\alpha)jk} + \Phi_{(\alpha)kj}),$$
$$X'^i = X^i - \Phi^i_{(\alpha)} \Phi_{(\alpha)j} X^j, \tag{4.11}$$

где X'^i обозначают компоненту приложенной силы в пространстве E_{N-M}, то в этих обозначениях уравнения движения примут вид:

$$\frac{\delta' v^i}{\delta' t} \equiv \frac{dv^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} v^j v^k = X'^i. \tag{4.12}$$

Эта форма уравнений движения системы связывает нашу теорию с геометрией траекторий (Paths) [1]).

Давая греческим индексам значения $M+1, \ldots, N$, мы можем ввести в E'_{N-M} систему единичных взаимно ортогональных векторов $\Phi^i_{(\alpha')}$. Найдем компоненты скорости и силы X'^i в направлении этих векторов:

$$v^i = v_{(\alpha')} \Phi^i_{(\alpha')}, \qquad X'^i = X_{(\alpha')} \Phi^i_{(\alpha')}. \tag{4.13}$$

Тогда в силу (4.12) легко получим следующие уравнения:

$$\frac{dv_{(\alpha')}}{dt} + \Lambda_{(\alpha'\beta'\gamma')} v_{(\beta')} v_{(\gamma')} = X_{(\alpha')}, \tag{4.14}$$

где величины

$$\Lambda_{(\alpha'\beta'\gamma')} = \Lambda_{(\alpha'\gamma'\beta')} = -\frac{1}{2} (\Phi_{(\alpha')ij} + \Phi_{(\alpha')ji}) \Phi^i_{(\beta')} \Phi^j_{(\gamma')} \tag{4.15}$$

---

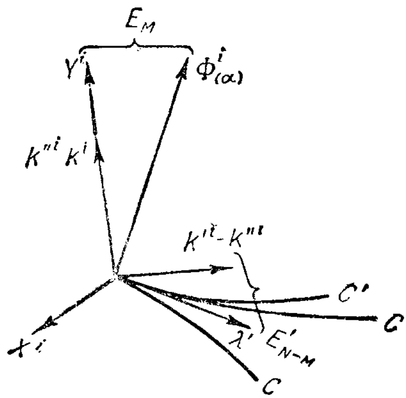
[1]) Определить симметрические коэффициенты связанности Γ^i_{jk} так, как это сделано у нас, представляется наиболее подходящим, хотя и не обязательным.

легко выражаются с помощью риччиевских коэффициентов ротации. Уравнения (4.14) содержат ровно столько компонент скорости, сколько имеется степеней свободы у нашей системы, то есть $N-M$, хотя, конечно, сюда должно входить, вообще говоря, полное число координат. Уравнение (4.14) инвариантно по отношению к преобразованию координат и представляет собой векторное уравнение относительно ортогональных преобразований векторов $\Phi^i_{(\alpha')}$ в E'_{N-M}.

Отметим, что условия голономности имеют следующий вид[1]:

$$(4.16)\qquad (\Phi_{(\alpha)ij}-\Phi_{(\alpha)ji})\Phi^i_{(\beta')}\Phi^j_{(\gamma')}=0.$$

b) Принцип наименьшей кривизны[2]. Зададим систему сил X^i и сравним три траектории, имеющие общую точку P и общую касательную в этой точке. Связи будем считать, вообще говоря, неголономными, а общее направление движения в точке P удовлетворяющим этим связям. Эти траектории выберем следующим образом:



Чертеж 3.

C — естественная свободная траектория,

C' — произвольная траектория, удовлетворяющая связям,

C'' — естественная траектория, удовлетворяющая связям.

Вектор первой кривизны некоторой кривой имеет следующее выражение:

$$(4.17)\qquad k^i=k\nu^i=\frac{\delta\lambda^i}{\delta s}.$$

Величины, относящиеся к C' и C'', будем отмечать соответственно одним или двумя штрихами. Пусть

$$(4.18)\qquad k'^2=(k'_i-k_i)(k'^i-k^i),\qquad k''^2=(k''_i-k_i)(k''^i-k^i).$$

---

[1]) Vranceanu [12].

[2]) Synge [1]; нижеизложенный метод является более прямым. Horak [8] опубликовал недавно теорему о наименьшей кривизне без указания на мой метод, но мне его рассуждения представляются неясными. Относительно классического принципа наименьшей кривизны или наименьшего принуждения, в котором геометрический смысл не столь ясно усматривается, см. Whittaker [1] стр. 285 русского перевода.

Будем называть величины k' и k'' кривизной линий C' и C'' относительно линии C. Из (4.18) следует, что

(4.19) $$k'^2 - k''^2 = (k'_i - k''_i)(k'^i - k''^i) + 2(k'_i - k''_i)(k''^i - k^i).$$

На основании (3.11), (4.4), (3.7) мы получим соответственно для C', C'' в точке P

(4.20) $$\begin{cases} k^i v^2 = X^i - \dot{v}\lambda^i = X^i - X^j\lambda_j\lambda^i, \\ k''^i v^2 = X^i + Y^i - \dot{v}''\lambda^i = X^i + Y^i - X^j\lambda_j\lambda^i, \end{cases}$$

где Y^i — реакция связей на C'', удовлетворяющая условию $Y^i\lambda_i = 0$. Произведя вычитание, получим:

(4.21) $$(k''^i - k^i)v^2 = Y^i.$$

Вдоль C' и C'' имеют место уравнения связей:

(4.22) $$\varphi_{(\alpha)i}\lambda'^i = 0, \quad \varphi_{(\alpha)i}\lambda''^i = 0.$$

Диференцируя по дуге и вычитая, мы получаем для точки P:

(4.23) $$\varphi_{(\alpha)i}(k'^i - k''^i) = 0.$$

Таким образом, $(k'^i - k''^i)$ перпендикулярен к E_M, так как в силу (4.21) $(k''^i - k^i)$ лежит в E_M, поэтому последний член в равенстве (4.19) исчезает, и мы имеем окончательно:

(4.24) $$k'^2 - k''^2 = (k'_i - k''_i)(k'^i - k''^i) \geqslant 0,$$

ибо фундаментальная форма положительно определенная. Отсюда $k' \geqslant k''$, и мы приходим к следующему результату: *из всех траекторий, естественных и неестественных, удовлетворяющих связям и имеющим заданную скорость в точке P, естественная траектория, удовлетворяющая связям, имеет наименьшую кривизну относительно естественной свободной траектории, имеющей заданную скорость в точке P.*

с) Устойчивость [1]). Рассмотрим однопараметрическое семейство траекторий, удовлетворяющих связям. Введем вдоль каждой из них параметр σ. Параметр, определяющий траекторию в семействе, обозначим τ. Определим абсолютную производную по отношению к перенесению Γ^i_{jk}, введенному в (4.11) с помощью формулы

(4.25) $$\frac{\delta' A^i}{\delta'\sigma} = \frac{\partial A^i}{\partial\sigma} + \Gamma^i_{jk} A^j \frac{\partial x^k}{\partial\sigma}.$$

---

[1]) Wundheiler [2]. Его метод несколько отличается от нижеизложенного: он использует несимметричное перенесение.

Так же как в 3.15, получаем:

$$(4.26)\qquad \begin{cases} \dfrac{\delta'^2 A^i}{\delta'\sigma\delta'\tau} - \dfrac{\delta'^2 A^i}{\delta'\tau\delta'\sigma} = F^i_{.jkl} A^j \dfrac{\partial x^k}{\partial\sigma}\dfrac{\partial x^l}{\partial\tau}, \\ F^i_{jkl} = \dfrac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^i_{jl} - \dfrac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^i_{jk} + \Gamma^m_{jl}\Gamma^i_{mk} - \Gamma^m_{jk}\Gamma^i_{ml}, \end{cases}$$

где $F^i_{.jkl}$ тензор кривизны, соответствующий перенесению Γ^i_{jk}. Рассуждая, как в § 3, мы убедимся, что бесконечно малый вектор смещения удовлетворяет равенству

$$(4.27)\qquad \frac{\delta'^2\xi^i}{\delta'\sigma^2} + F^i_{.jkl}\frac{\partial x^j}{\partial\sigma}\xi^k\frac{\partial x^l}{\partial\sigma} = d\tau\frac{\delta'}{\delta'\tau}\frac{\delta'^2 x^i}{\delta'\sigma^2}.$$

Для изохронного соответствия мы получим согласно (4.12),

$$(4.28)\qquad \frac{\delta'^2\xi^i}{\delta' t^2} + F^i_{.jkl}v^j\xi^k v^l = X'^i_{;j}\,\xi^j,$$

где $X'^i_{;j}$ — ковариантная производная компоненты X'^i в E'_{N-M}, вычисленная относительно перенесения Γ^i_{jk}, а не $\left\{ {i \atop jk} \right\}$.

Так как условия связи выполнены для всех рассматриваемых траекторий, то

$$(4.29)\qquad \Phi_{(\alpha)i}\frac{\partial x^i}{\partial\sigma} = 0,\qquad \Phi_{(\alpha)i}\frac{\delta^2 x^i}{\delta'\tau\delta'\sigma} + \Phi'_{(\alpha)ij}\frac{\partial x^i}{\partial\sigma}\frac{\partial x^j}{\partial\tau} = 0,$$

где $\Phi'_{(\alpha)ij}$ — ковариантная производная относительно Γ^i_{jk}; вследствие симметричности перенесения мы получим:

$$(4.30)\qquad \frac{\delta'^2 x^i}{\delta'\tau\delta'\sigma} = \frac{\delta'^2 x^i}{\delta'\sigma\delta'\tau},$$

и, следовательно, для изохронного соответствия:

$$(4.31)\qquad \Phi_{(\alpha)i}\frac{\delta'\xi^i}{\delta' t} + \Phi'_{(\alpha)ij}v^i\xi^j = 0,$$

что можно рассматривать как частный первый интеграл уравнения (4.28). Легко непосредственно усмотреть, что

$$(4.32)\qquad \Phi'_{(\alpha)ij} = \frac{1}{2}(\Phi_{(\alpha)ij} - \Phi_{(\alpha)ji}).$$

Из-за недостатка места я вынужден отказаться от рассмотрения поведения модуля вектора смещения, а также от рассмотрения соответствия по нормали.

5. МНОГООБРАЗИЕ КОНФИГУРАЦИЙ С ЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ ДЕЙСТВИЯ ДЛЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ С. Г. СИСТЕМ:

$$ds^2 = (E - V)\, a_{ij}\, dx^i dx^j.$$

а) Уравнения движения. Форма, которую дал Якоби для принципа наименьшего действия, выражает собой тот факт, что траектория консервативной склерономной голономной системы является геодезической линией в многообразии конфигураций с линейным элементом действия. Уравнения движения будут иметь, следовательно, вид:

$$\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2} = 0. \tag{5.1}$$

Если исключить то обстоятельство, что линейный элемент действия не всегда будет положительно определенным во всем многообразии конфигураций (хотя это несомненно имеет место в той области, которая соответствует движению системы), все же исследование движения консервативной системы с линейным элементом действия содержит в себе глубокое сходство с изучением движения соответствующей системы с кинематическим линейным элементом, не находящимся под воздействием сил, так как траектория, соответствующая движению без воздействия сил, представляет собой геодезическую линию кинематического линейного элемента. В силу этих соображений мы лишь бегло коснемся случая линейного элемента действия.

b) Устойчивость[1]. При использовании линейного элемента действия изучение устойчивости движения совпадает с изучением отклонения геодезического смещения в римановом пространстве. Как было уже замечено, это исследование может быть рассмотрено как частный случай проведенного в § 3 рассуждения; основное уравнение для соответствия по нормали имеет вид:

$$\frac{\delta^2 \xi^i}{\delta s^2} + R^i_{.jkl} \lambda^j \xi^k \lambda^l = 0, \tag{5.2}$$

где ξ^i — бесконечно малый вектор смещения, λ^i — единичный касательный вектор невозмущенной траектории, а $R^i_{.jkl}$ — тензор кривизны, вычисленный, разумеется, для линейного элемента эле-

[1]) Levi—Civita [1], [2]; Synge [1], [5], [7]; Bortolotti [1]; Wundheiler [1].

мента действия. Для длины ξ вектора смещения будем иметь уравнение

$$(5.3) \qquad \frac{d^2\xi}{ds^2}+\xi\left(K-\frac{\delta\mu_i}{\delta s}\frac{\delta\mu^i}{\delta s}\right)=0,$$

где K — риманова кривизна для элементарной площадки, определенной векторами ξ^i и λ^i, а μ^i — единичный вектор направления ξ^i. Что именно следует понимать под словом „устойчивость", представляет собой вопрос определения, связанный с физическими соображениями. Представляется желательным, тем не менее, чтобы мы могли утверждать, что имеет место неустойчивость в случае, если K отрицательно для площадок всех возможных ориентаций. В то же время положительность K для всех ориентаций оставляет еще сомнительным вопрос о наличии устойчивости. Вопрос об устойчивости становится определенным в случае установившегося движения [1]), соответственным образом определенного, так как в этом случае мы имеем дело с уравнениями с постоянными коэффициентами.

6. МНОГООБРАЗИЕ КОНФИГУРАЦИЙ С ЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ ДЕЙСТВИЯ ДЛЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ С. Н. СИСТЕМ: $ds^2=(E-V)a_{ij}\,dx^i dx^j$.

а) Уравнения движения [2]). В силу неголономности связей траектории не будут в этом случае геодезическими многообразия конфигураций. Общие соображения вариационного исчисления приводят нас к исследованию двух типов кривых: 1) кривых, удовлетворяющих связям и имеющих экстремальную длину для вариаций, которые удовлетворяют связям; 2) кривых, удовлетворяющих связям и имеющих экстремальную длину по сравнению с близлежащими кривыми, также удовлетворяющими связям. Эти два типа кривых были хорошо знакомы Герцу (Hertz) [1] и были недавно изучены Франклином и Муром (Franklin and Moore) [1]. На основании принципа наименьшего действия в форме Якоби, приложенного к системам со связями, можно утверждать, что динамические траектории являются кривыми именно первого, а не второго типа.

Мы видели, что первая нормаль к траектории лежит в векторном пространстве E_M, порожденном векторами связи, и, следовательно, по соображениям, подобным тем, которые были

---

1) Synge [1], [7].

2) Synge [1], [2]; Vranceanu [1], [3]; Wundheller [2].

изложены в § 4, a, уравнения движения могут быть записаны в таком виде:

$$\frac{\delta'\lambda^i}{\delta' s} \equiv \frac{d\lambda^i}{ds} + \Gamma^i_{jk}\lambda^j\lambda^k = 0, \tag{6.1}$$

где

$$\Gamma^i_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\} + \frac{1}{2}\Phi^i_{(\alpha)}(\Phi_{(\alpha)jk} + \Phi_{(\alpha)kj}). \tag{6.2}$$

λ^i означает здесь единичный касательный вектор, а $\Phi^i_{(\alpha)}$ — единичные ортогональные векторы связи.

b) Принцип наименьшей кривизны[1]. Здесь имеет место теорема о наименьшей кривизне, такая же, как в 4, b, с тем лишь изменением, что свободная траектория C становится теперь просто геодезической, так что относительные кривизны k', k'' заменяются здесь абсолютными. Едва ли нужно напоминать, что при употреблении линейного элемента действия рассматриваются только движения с заданной полной энергией E.

c) Устойчивость[2]. С помощью метода, использованного в § 4, c, мы находим для соответствия по нормали, что

$$\frac{\delta'^2\xi^i}{\delta' s^2} + F^i_{.jkl}\lambda^j\xi^k\lambda^l = 0, \tag{6.3}$$

где ξ^i — бесконечно малый вектор смещения, λ^i единичный вектор касательной к невозмущенной траектории, $F^i_{.jkl}$ — тензор кривизны для Γ^i_{jk}, определенных формулами (6.2).

7. РЕОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ

Аналогия между многообразием конфигураций и времени, с одной стороны, и пространственно-временным многообразием теории относительности — с другой, побуждает нас перейти к общей системе координат $\bar{x}^0$, $\bar{x}^i$, определяемой формулами:

$$\begin{aligned} \bar{x}^0 &= f^0(x^1, x^2, \ldots, x^N, t), \\ \bar{x}^i &= f^i(x^1, x^2, \ldots, x^N, t). \end{aligned} \tag{7.1}$$

При таком преобразовании время перестает быть привилегированной координатой в многообразии. Это сделано в работах Горака (Horak) [7], [8], которые содержат также переход к

1) Synge [1].

2) Vranceanu [5], [8], [12]; Synge [2]; Wundheiler [2]. Первая из работ Вранчеану содержит ошибку, исправленную в следующих его статьях.

квази-координатам. Имея, однако, в виду то обстоятельство, что в классической динамике, с которой мы сейчас имеем дело, временная координата действительно имеет привилегированное значение, представляется целесообразным воздержаться от вышеуказанного преобразования. Мы предпочтем метод Вундхейлера (Wundheiler) [3], оставляющий время на особом положении.

Мы скажем несколько слов о методе Вундхейлера и предложим некоторую его модификацию, дающую значительные упрощения без нарушения общности — в том объеме, по крайней мере, какой требуется для рассматриваемых нами систем. Метод Вундхейлера изложен также у Вранчеану (Vranceanu) [16].

Мы рассмотрим реономную систему с кинетической энергией:

$$T = \frac{1}{2} a_{ij}(x, t)\, \dot{x}^i \dot{x}^j + a_i(x, t)\, \dot{x}^i + \frac{1}{2} A(x, t). \tag{7.2}$$

Обозначим многообразие конфигураций и времени через V_{N+1}. T определяет инвариантный линейный элемент в V_{N+1},

$$ds^2 = 2T dt^2 = a_{ij}(x, t)\, dx^i dx^j + 2a_i(x, t)\, dx^i dt + A(x, t)\, dt^2. \tag{7.3}$$

Уравнение $t = \mathrm{const}$ определяет однопараметрическое семейство привилегированных поверхностей $V_N(t)$ в V_{N+1}. Таким образом, движение системы может быть рассматриваемо либо как некоторая кривая в V_{N+1}, либо как движение точки в деформируемом пространстве $V_N(t)$ с линейным элементом

$$d\sigma^2 = a_{ij}(x, t)\, dx^i dx^j. \tag{7.4}$$

Теорию таких деформируемых пространств Вундхейлер называет „реономной геометрией". Динамическая проблема приводится, таким образом, к обобщению задачи о движении точки по поверхности, форма которой меняется со временем. Вундхейлер считает, что невозможно идентифицировать точки на поверхности после преобразования, и исследует поэтому инвариантность уравнений относительно общего преобразования вида:

$$\overline{x}^i = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^N, t). \tag{7.5}$$

Так как это преобразование содержит параметр t, то возникает необходимость в модификации обычного тензорного аппарата; назовем, следуя Вундхейлеру, некоторый объект „сильным" тензором, если он подчиняется обычным формальным законам тензорного преобразования, например:

(7.6) $$\overline{X}^i = X^j \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j}.$$

Так как

(7.7) $$d\overline{x}^i = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j} dx^j + \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial t} dt,$$

то dx^i не является сильным тензором, но

(7.8) $$v_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} = a_{ij} \dot{x}^j + a_i$$

является сильным тензором.

Вундхейлеру удается придать уравнениям движения, также и в случае неголономной системы, форму равенств, связывающих сильные тензоры. Он, однако, ошибается, полагая, что нет возможности идентифицировать точки поверхности после деформации. Линейный элемент (7.3) определяет абсолютную ортогональность в V_{N+1}, и, следовательно, ортогональные траектории в $V_N(t)$ имеют абсолютный смысл. Выберем их в качестве параметрических линий t. Тогда в T исчезнут члены, содержащие a_i, и мы получим, не теряя общности, что

(7.9) $$\begin{cases} T = \frac{1}{2} a_{ij}(x, t)\, \dot{x}^i \dot{x}^j + \frac{1}{2} A(x, t), \\ ds^2 = a_{ij}(x, t)\, dx^i dx^j + A(x, t)\, dt^2. \end{cases}$$

Координаты x^i могут быть произвольно выбраны в $V_N(0)$: таким образом, мы получаем инвариантность лишь относительно преобразований

(7.10) $$\overline{x}^i = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^N),$$

не содержащих никакого параметра. A является инвариантом, и мы должны рассматривать теперь деформируемую поверхность $V_N(t)$, на которой

(7.11) $$d\sigma^2 = a_{ij}(x, t)\, dx^i dx^j.$$

В дальнейшем исчезает необходимость говорить о сильных тензорах. Тем не менее, вследствие зависимости фундаментального тензора a_{ij} от времени необходимо некоторое изменение тензорного аппарата. Заметим, что если S есть тензорное поле, то $\partial S/\partial t$ также является тензорным полем. Обычное определение ковариантной производной сохраняется, например:

(7.12) $$D_j S^i = \frac{\partial S^i}{\partial x^j} + \left\{ {i \atop jk} \right\} S^k, \quad D_k a_{ij} = 0.$$

Сохраняется также формула для абсолютной производной вдоль кривой $x^i = x^i(u)$, например:

$$\frac{\delta S^i}{\delta u} = \frac{dS^i}{du} + \left\{ {i \atop jk} \right\} S^j \frac{dx^k}{du}. \tag{7.13}$$

Однако для абсолютной производной тензорного поля мы получаем, например,

$$\frac{\delta S^i}{\delta u} = (D_j S^i) \frac{dx^j}{du} + \frac{\partial S^i}{\partial t} \frac{dt}{du}. \tag{7.14}$$

Недостаток места не позволяет входить здесь в детали. Я укажу только, что для голономной системы уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i} = X_i \tag{7.15}$$

сводятся сразу к тензорной форме:

$$\frac{\delta v^i}{\delta t} = X^i - b^i_{.j} v^j + \frac{1}{2} A^i, \tag{7.16}$$

где

$$X^i = a^{ij} X_j, \quad b^i_{.j} = a^{ik} \frac{\delta a_{jk}}{\delta t}, \quad A^i = a^{ij} \frac{\delta A}{\delta x^j}, \quad v^i = \frac{dx^i}{dt}. \tag{7.17}$$

8. ДРУГИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ДЛЯ СКЛЕРОНОМНЫХ И РЕОНОМНЫХ СИСТЕМ

а) Линейный элемент Эйзенхарта. Пусть имеется реономная система с N степенями свободы, обладающая потенциальной энергией V, которая может зависеть от t. Кинетическая энергия определится формулой:

$$T = \frac{1}{2} a_{ij}(x, t) \dot{x}^i \dot{x}^j + a_i(x, t) \dot{x}^i + \frac{1}{2} A(x, t). \tag{8.1}$$

Эйзенхарт (Eisenhart) [2] предлагает рассматривать пространство V_{N+2} $N+2$ измерений с координатами x^i, t, u и с линейным элементом

$$ds^2 = a_{ij} dx^i dx^j + 2a_i dx^i dt + (A - 2V) dt^2 + 2dt\, du. \tag{8.2}$$

Он показал, что если геодезические линии пространства V_{N+2} проектируются вдоль параметрических линий u на поверхности $u = \text{const}$, то полученные при этом кривые будут совпадать с динамическими траекториями в многообразии конфигураций и времени.

Для склерономной голономной системы Эйзенхарт рассматривает пространство V_{N+1} с координатами x^i, u (а не пространство конфигураций и времени) с линейным элементом

$$ds^2 = a_{ij}dx^i dx^j + 2du^2/(V+b), \tag{8.3}$$

где b — постоянная; в этом случае предполагается, конечно, что V не зависит от t. Если спроектировать геодезические линии пространства V_{N+1} вдоль параметрических линий u на многообразие конфигураций, то полученные таким образом кривые совпадают с динамическими траекториями, причем время связано с длиной дуги в V_{N+1} следующим соотношением:

$$t = s\left[2(E+b)\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{8.4}$$

здесь E обозначает полную энергию движения. Линейный элемент Эйзенхарта (8.3) был позже вновь открыт Люисом (Lewis) [1].

b) Линейный элемент Мак-Коннеля. Для консервативной с. г. системы Мак-Коннель (McConnell) [1] предлагает брахистохронный линейный элемент

$$ds^2 = 2T dt^2/(E-V) = a_{ij}dx^i dx^j/(E-V). \tag{8.5}$$

Брахистохроны с полной энергией E являются геодезическими линиями многообразия конфигураций с таким линейным элементом. Мак-Коннель предложил также воспользоваться линейным элементом

$$\varepsilon ds^2 = 2(T+V-E)\,dt^2 = a_{ij}\,dx^i\,dx^j - 2(E-V)\,dt^2, \quad \varepsilon = \pm 1, \tag{8.6}$$

в многообразии конфигураций и времени.

Каждая траектория с полной энергией E будет в этом случае изотропной (нулевой) линией; в частности, брахистохроны — изотропными геодезическими линиями.

c) Линейный элемент Горака. Горак (Horak) [6] предложил для многообразия конфигураций и времени V_{N+1} использовать линейный элемент, напоминающий отчасти линейный элемент Мак-Коннеля, а именно:

$$ds^2 = 2(T+V)\,dt^2 = a_{ij}\,dx^i\,dx^j + 2V dt^2. \tag{8.7}$$

Этот линейный элемент обладает тем интересным свойством, что траектория удовлетворяет условию

$$Ek_\alpha = X_\alpha, \quad (\alpha = 0, 1, \ldots N), \tag{8.8}$$

где E — постоянная полная энергия, k_α — ковариантный вектор кривизны в V_{N+1} для $x^0 = t$, X_l — компонента обобщенной силы, и

(8.9) $$X_0 = -X_l \frac{dx^l}{dt}.$$

По аналогии с теорией относительности Горак (Horak) [8] предложил также линейный элемент

(8.10) $$ds^2 = c^{-2}\left[a_{lj}\,dx^l\,dx^j + c^2(1-2\tau)\,dt^2\right],$$

где c — постоянная, а

(8.11) $$\tau = T/c^2$$

выражено как функция от t; тогда для каждого движения $ds = dt$. Впрочем, ценность этого последнего линейного элемента несколько сомнительна, так как мы можем выразить T как функцию от t лишь после того, как движение становится известным.

9. КВАЗИ-КООРДИНАТЫ [1])

Рассмотрим уравнения

(9.1) $$dy^a = \varphi_i^a(x)\,dx^i$$

с отличным от нуля детерминантом $|\varphi_i^a|$. Эти уравнения тогда и только тогда определяют величины y^a как функции от x^i (с точностью до постоянных слагаемых), когда правые части уравнений представляют собой полные диференциалы. В общем случае dy^a определены как функции от x^i и dx^i, и если мы хотим найти функции y^a от x^i, удовлетворяющие нашим уравнениям, то мы можем достичь этого, только выбрав некоторую конгруенцию кривых и интегрируя (9.1) вдоль этой конгруенции. Тогда каждое из соотношений (9.1) будет удовлетворяться только для перемещений вдоль линий конгруенции.

Для защиты от соблазна усмотреть в записи уравнения больше, чем там заключено, в теории пфаффовых форм принято, во избежание ошибок, записывать уравнение (9.1) в виде:

(9.2) $$\omega_d^a = \varphi_i^a dx^i.$$

Это выражение уже не дает повода думать, что мы имеем дело с диференциалами функций y^a. Однако в теории квази-координат в динамике стоит, подвергая себя этой опасности, употреблять все же обозначения (9.1). Иначе мы были бы лишены

---

[1]) Horak [2], [3], [7], [8]; Schouten [1], [2]; Schouten und Struik [1] Bd I.

очень ясного формального выражения для уравнений движения. В (9.1) x^i являются координатами динамической системы, а dy^a мы будем называть *диференциалами квази-координат*[1]), или *диференциалами неголономных координат, или же параметрами.* Мы никогда не будем опускать слово „диференциалы" или какое-либо эквивалентное ему выражение, так как квази-координаты или неголономные координаты не существуют в том общем случае, когда $\varphi_i^a dx^i$ не являются полными диференциалами. К сожалению, эти благие намерения должны быть иногда принесены в жертву краткости, как это сделано, например, в заголовке этой главы. У Больцмана (Bolzmann) [1] в 1902 г. и в недавней статье Горака (Horak) [7] содержатся утверждения, обнаруживающие неполное понимание этих обстоятельств, хотя, впрочем, эти утверждения не ведут к каким-либо незаконным аналитическим заключениям.

В заключение могу только сказать, что тот, кто хочет избежать опасности этих скользких рассуждений, может отказаться от использования квази-координат и рассматривать локальные системы референции. При этом, однако, теряется некоторая формальная простота.

Мы будем попрежнему считать, что латинские индексы пробегают значения $1, 2, \ldots N$, но теперь мы разделим их на две группы:

$$a, b, c, \ldots; \quad i, j, k, \ldots;$$

первая группа будет служить индексами квази-координат, а вторая группа — индексами истинных координат x^i. Мы выиграем в формальной простоте, если для диференциалов квази-координат[2]) будем теперь писать dx^a вместо dy^a; тогда уравнения (9.1) запишутся так:

$$dx^a = \varphi_i^a \, dx^i, \tag{9.3}$$

φ_i^a являются, разумеется, функциями от x^i (а не от x^a, которые

---

[1]) Whittaker [1], стр. 55 русск. пер.

[2]) Эти обозначения могут привести к неясности: является ли, например, dx^1 значением dx^i для $i = 1$ или dx^a для $a = 1$? Подобные неясности не возникают в общей теории; чтобы полностью их избежать, примем за правило всякий раз, когда численное значение индекса есть одно из значений $a, b, c, \ldots$, отмечать этот индекс штрихом, например:

$$dx^1 \text{ есть } dx^i \text{ для } i = 1, \quad dx^{1'} \text{ есть } dx^a \text{ для } a = 1.$$

Это „правило штрихов" приложимо не только к dx^a, но и ко всякому выражению с индексами $a, b, c, \ldots$. Можно было бы штриховать все буквы, a, b, c,..., но в этом нет необходимости.

не существуют). Из этих уравнений получаем:

$$dx^i = \varphi^i_a dx^a, \tag{9.4}$$

где

$$\varphi^a_i \varphi^i_b = \delta^a_b, \qquad \varphi^a_i \varphi^j_a = \delta^j_i. \tag{9.5}$$

Уравнения (9.3) и (9.4) наталкивают на мысль распространить на неинтегрируемый случай определения, обоснованные для интегрируемого случая. Так, мы полагаем:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^a} = \varphi^i_a, \quad \frac{\partial x^a}{\partial x^i} = \varphi^a_i, \tag{9.6}$$

и, вообще

$$\frac{\partial}{\partial x^a} = \varphi^i_a \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{9.7}$$

из чего следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \varphi^a_i \frac{\partial}{\partial x^a}. \tag{9.8}$$

Если мы сделаем преобразование истинных координат, при котором x^i перейдут в $\bar{x}^i$ (преобразования первого рода), то (9.3) принимают следующий вид:

$$dx^a = \bar{\varphi}^a_i \, d\bar{x}^i, \quad \bar{\varphi}^a_i = \varphi^a_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}. \tag{9.9}$$

Таким образом, при таких преобразованиях φ^i_a преобразуются как координаты ковариантного вектора (с индексом i).

С другой стороны, если мы выполним „преобразование квази-координат“, полагая

$$\begin{cases} dx^a = A^a_b \, d\tilde{x}^b, & d\tilde{x}^a = \tilde{A}^a_b \, dx^b, \\ A^a_b \tilde{A}^b_c = \delta^a_c, & A^b_a \tilde{A}^c_b = \delta^c_a, \end{cases} \tag{9.10}$$

(преобразования второго рода), мы получим, согласно (9.3), что

$$d\tilde{x}^a = \tilde{\varphi}^a_i dx^i, \quad \tilde{\varphi}^a_i = \tilde{A}^a_b \varphi^b_i \tag{9.11}$$

Если ввести естественно возникающие в связи с (9.10) обозначения

$$\frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^b} = A^a_b, \quad \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b} = \tilde{A}^a_b, \tag{9.12}$$

то мы получим

(9.13) $$\tilde{\varphi}_i^a = \varphi_i^b \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b},$$

и мы можем сказать, что при таких преобразованиях φ_i^a преобразуются как координаты контравариантного вектора (с индексом a). Из этого следует, что по отношению к преобразованиям обоего рода φ_a^i также имеет тензорный характер, определяемый положением индексов.

В последующем изложении мы рассмотрим тензорный характер не только по отношению к преобразованиям, связанным с индексами $i, j, k, \ldots$, но и по отношению к преобразованиям, связанным с индексами $a, b, c \ldots$

Величины с индексами $i, j, k \ldots$, а также φ_i^a мы считаем определенными. Другие величины с индексами $a, b, c \ldots$ мы определим через предшествующие. Так, например, (9.3) можно рассматривать как соотношения, определяющие dx^a, а (9.5) — как соотношения, определяющие φ_a^i. Мы установим общее правило для определения тензоров с индексами $a, b, c, \ldots$ через тензоры с индексами $i, j, k, \ldots$ Это правило достаточно очевидно для некоторых частных случаев. Так, например, если S^i, T_i, U_j^i являются тензорами относительно преобразований первого рода, то мы определяем

(9.14) $$S^a = \varphi_i^a S^i, \quad T_a = \varphi_a^i T_i, \quad U_b^a = \varphi_i^a \varphi_b^j U_j^i.$$

Ясно, что S^a, T_a, U_b^a будут инвариантами по отношению к преобразованиям первого рода и будут иметь тензорный характер по отношению к преобразованиям второго рода. В частности, с помощью фундаментального тензора a_{ij} мы определяем величины

(9.15) $$a_{ab} = a_{ij} \varphi_a^i \varphi_b^j,$$

— „компоненты фундаментального тензора для квази-координат“. Таким образом,

(9.16) $$ds^2 = a_{ij}\, dx^i\, dx^j = a_{ab}\, dx^a\, dx^b\,.$$

Точно так же мы определим:

(9.17) $$a^{ab} = a^{ij} \varphi_i^a \varphi_j^b$$

и проверим, что

(9.18) $$a^{ab} a_{ac} = \delta_c^b.$$

Операцию опускания и поднимания индексов мы определяем для истинных координат так, как это делают обычно, и проверяем затем ее применимость для квази-координат. Так, например, по определению

$$S_i = a_{ij} S^j, \quad S_a = \varphi^i_a S_i, \quad S^a = \varphi^a_i S^i, \tag{9.19}$$

и, следовательно,

$$S_a = a_{ij} \varphi^i_a S^j = a_{ij} \varphi^i_a \varphi^j_b S^b = a_{ab} S^b. \tag{9.20}$$

Следуя правилу (9.14), мы определяем

$$\begin{aligned} \frac{\delta v^a}{\delta t} &= \varphi^a_i \frac{\delta v^i}{\delta t} = \\ &= \varphi^a_i \frac{dv^i}{dt} + \varphi^a_i \left\{ {i \atop jk} \right\} v^j v^k = \\ &= \frac{dv^a}{dt} + \Gamma^a_{bc} v^b v^c, \end{aligned} \tag{9.21}$$

где

$$\Gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{cb} = \left\{ {i \atop jk} \right\} \varphi^a_i \varphi^j_b \varphi^k_c - \frac{1}{2} \varphi^j_b \varphi^k_c \left(\partial_j \varphi^a_k + \partial_k \varphi^a_j \right), \tag{9.22}$$

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Уравнения движения (3.12) для с. г. динамической системы под действием сил X^i могут быть, следовательно, записаны с помощью квази-координат в следующей форме:

$$\frac{\delta v^a}{\delta t} = X^a, \quad \frac{dx^a}{dt} \equiv \varphi^a_i \frac{dx^i}{dt} = v^a. \tag{9.23}$$

Мы имеем здесь $2N$ уравнений первого порядка относительно v^a и x^i. Первая из этих систем не состоит, как это может казаться, из N уравнений второго порядка с неизвестными x^a, так как x^i будут в общем случае входить в Γ^a_{bc} и X^a. В некоторых случаях, однако, как, например, для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки без воздействия сил, квази-координаты могут быть выбраны так, что Γ^a_{bc} и X^a становятся постоянными. Тогда мы можем рассматривать первую систему в (9.23) как систему N уравнений первого порядка относительно v^a или как систему N уравнений второго порядка относительно x^a, в предположении, что

$$x^a = \int dx^a = \int \varphi^a_i dx^i. \tag{9.24}$$

В этой формуле интегралы берутся вдоль траектории.

Определяя

$$(9.25)\quad \begin{cases} [bc,\, d] = \frac{1}{2}(\partial_b a_{cd} + \partial_c a_{bd} - \partial_d a_{bc}), \qquad \partial_b = \frac{\partial}{\partial x^b}. \\ \left\{ {a \atop bc} \right\} = a^{ad}[bc,\, d], \end{cases}$$

мы можем также следующим образом выразить Γ^a_{bc}:

$$(9.26)\quad \Gamma^a_{bc} = \left\{ {a \atop bc} \right\} + \frac{1}{2} a^{ad} \varphi^k_d (a_{be} \varphi^j_c + a_{ce} \varphi^j_b)\ (\partial_j \varphi^e_k - \partial_k \varphi^b_j).$$

Если рассматривается неголономная система, то для истинных координат уравнения движения имеют вид (4.4); эти уравнения, как и в предыдущем случае, можно преобразовать к такой форме:

$$(9.27)\quad \frac{\delta v^a}{\delta t} = X^a + Y^a.$$

Пусть имеется M связей; пусть индексы, соответствующие квази-координатам, разбиты на две группы:

$$(9.28)\quad \alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1', 2', \ldots M';\ \mu, \nu, \rho \ldots = (M+1)', \ldots N'.$$

В каждой точке связи определяют векторное пространство движения E'_{N-M}; пусть E_M векторное пространство, ортогональное к E'_{N-M}. Существуют такие величины φ^i_μ, что для произвольного dx^μ смещение

$$(9.29)\quad dx^i = \varphi^i_\mu\, dx^\mu$$

лежит в E'_{N-M}, и существуют величины Φ^i_α такие, что для произвольного dx^α смещение

$$(9.30)\quad dx^i = \varphi^i_\alpha\, dx^\alpha$$

лежит в E_M. Всякое смещение dx^i в V_N может быть представлено, как сумма смещений в E_M и E'_{N-M}, так что мы можем написать

$$(9.31)\quad dx^i = \varphi^i_\alpha\, dx^\alpha + \varphi^i_\mu\, dx^\mu = \varphi^i_a\, dx^a.$$

Решение этого уравнения дается формулой

$$(9.32)\quad dx^a = \varphi^a_i\, dx^i,$$

в предположении, что выполняются соотношения (9.5). Мы рассматриваем dx^a как диференциалы квази-координат.

Для всякого движения, удовлетворяющего связям, получим

$$(9.33)\quad v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt} = 0,$$

и в силу того, что, как мы установили раньше, реакции Y^i лежат в E_M, получаем

$$Y^\mu = 0. \tag{9.34}$$

Таким образом, если мы выделим из (9.27) уравнения, соответствующие значениям a, равным $(M+1)'$, ... N', то мы получим, что

$$\frac{\delta v^\mu}{\delta t} = X^\mu, \tag{9.35}$$

где

$$\frac{\delta v^\mu}{\delta t} = \frac{dv^\mu}{dt} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} v^\nu v^\rho \tag{9.36}$$

представляют собой уравнения движения неголономной системы, записанные в квази-координатах. Число входящих в них компонент скорости равно числу степеней свободы $(N - M)$, но, разумеется, $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ могут содержать полную систему всех N координат.

Я не сомневаюсь, что вывод вышеуказанных соотношений покажется некоторым читателям лишь простым жонглированием символами. Этот критицизм полезен, и я испытываю к нему известную симпатию. В то же время, однако, поиски наиболее компактных и плодотворных обозначений имели притягательный интерес для многих математиков. История математики показывает, что время, затраченное на такую работу, не пропадает напрасно.

10. УДАР

Общая теория удара может быть разработана с помощью уравнений Лагранжа, и, следовательно, в ней могут быть использованы тензорные методы. Общее исследование вопроса в этом направлении было выполнено Гораком (Horak) [5].

БИБЛИОГРАФИЯ

Beltrami, E.
[1] Sulla teorica generale dei parametri differenziali. Mem. Acc. Sci. Istituto Bologna. (2) 8 (1869), 549—590.

Berwald, L. und Frank, P.
[1] Über eine kovariante Gestalt der Differentialgleichungen der Bahnkurven allgemeiner mechanischer Systeme. Math. Zeitschr. 21 (1924), 154—159.

Boltzmann, L.
[1] Über die Form der Lagrange'schen Gleichungen für nichtholonome generalisierte Coordinaten. Sitz. math.-nat. Cl. K. Akad. Wiss. Wien 111 (2a) (1902), 1603—1614.

Bortolotti, E.
[1] Scostamento geodetico e sue generalizzazioni. Giornale di Mat. 66 (1928), 1—39 (Библиография).
[2] Trasporti rigidi e geometria della varietà anolonome. Boll. Un. Mat. Italiana 10 (1931), 5—12.

Darboux, G.
[1] Leçons sur la théorie générale des surfaces, 2 partie, Paris (1889), 480—511.

Eisenhart, L. P.
[1] Contact transformations. Annals of Mathematics 30 (1929), 211—249.
[2] Dynamical trajectories and geodesics. Annals of Mathematics 30 (1929), 591—606.

Frank, P.
[1] Die geometrische Deutung von Painlevé's Theorie der reelen Bahnkurven allgemeiner mechanischer Systeme. Proc. Intern. Cong. for Applied Mechanics, Delft (1924), 206—211.

Franklin, P. and Moore, C. L. E.
[1] Geodesics of Pfaffians. Journal of Math. and Phys. 10 (1931), 157—190.

Hamel, G.
[1] Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 50 (1904), 1—57.

Hertz, H.
[1] Die prinzipe der Mechanik, Leipzig (1894). Есть английский перевод Hertz, H. The principles of mechanics, London (1899).

Horak, Z.
[1] Le principe de la conservation de l'énergie et les équations de la physique. Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Charles, Prague 25 (1924). (По-чешски, с французским резюме.)
[2] Sur une généralisation de la notion de variété. Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, Brno 86 (1927). (По-чешски, с французским резюме.)
[3] Die Formeln für allgemeine lineare Übertragung bei Benutzung von nichtholonomen Parametern. Nieuw Archief v. Wisk. 15 (1927), 193—201.
[4] Sur les systèmes non holonomes. Bull. international Akad. Sci. de Bohême 29 (1928), 1—18.
[5] Théorie générale du choc dans les systèmes matériels. Journal de l'École Polytechnique (2) 28 (1931), 15—64.
[6] Sur la ligne d'univers des systèmes conservatifs. Verh. Internat. Mat. Kong., Zürich (1932), 2, 325—326.
[7] Sur la dynamique absolue des systèmes rhéonomes. Prac. mat.-fiz., Warszawa 41 (1933), 25—37.
[8] Méchanique absolue et sa représentation dans l'espace-temps des configurations. Prac. mat.-fiz., Warszawa 42 (1934), 59—107. (Библиография.)

Kells, L. M.
[1] Complete characterization of dynamical trajectories in n-space. Amer. Journal of Math. 46 (1924), 258—272.

Kron, G.
[1] Non-Riemannian dynamics of rotating electrical machinery. Journal of Math. and Phys. 13 (1934), 103—194.
[2] Quasi-holonomic dynamical systems. Physics 7 (1936), 143—152.
[3] The application of tensors to the analysis of rotating electrical machinery. General Electric Review (1938).
[4] Tensor analysis of networks, New York (1939).

Levi-Civita, T.
[1] Sur l'écart géodésique. Math. Ann. 97 (1926), 291—320.
[2] Sullo scostamento geodetico. Boll. Un. Mat. Italiana 5 (1926), 60—64.

Lewis, T.
[1] On the reduction of dynamics to geometry. Phil. Mag. 11 (1931), 753—760.

Lipka, J.
[1] Natural families of curves in a general curved space of *n* dimensions. Trans. Amer. Math. Soc. 13 (1912), 77—95.
[2] Some geometric investigations on the general problem of dynamics. Proc. Amer. Acad. of Arts and Sciences 55 (1920), 285—322.
[3] Note on velocity systems in curved space of *n* dimensions. Bull. Amer. Math. Soc. 27 (1920), 71—77.
[4] On the geometry of motion in curved *n*-space. Journal of Math. and Phys. 1 (1921), 21—41.

Lipshitz, R.
[1] Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist. Journal f. Math. 74 (1872), 116—149.

McConnell, A. J.
[1] The brachistochronic motion of a dynamical system. Proc. Roy. Irish. Acad. 39 A (1930), 31—48.

Painlevé, P.
[1] Sur les mouvements et les trajectories réels des systèmes. Bull. Soc. Math. France 22 (1894), 136—184.

Ricci, G. et Levi-Civita, T.
[1] Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. Math. Ann. 54 (1900), 125—201.

Riemann, B.
[1] Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Habilitationsschrift (1854). Ges. Werke (1876), 254—269. Есть русский перевод: Б. Риман, „О гипотезах, лежащих в основании геометрии", сборник „Об основаниях геометрии" (к столетнему юбилею Н. И. Лобачевского), Казань (1893). Комментированный перевод этой работы готовится также к печати Гостехиздатом (в полном собрании математических трудов Римана).

Schouten, J. A.
[1] On non holonomic connections. K. Akad. v. Wet. te Amsterdam, Proceedings 31 (1928), 291—299.
[2] Uber nicht-holonome Ubertragungen in einer L_n. Math. Zeitschr. 30 (1929) 149—172.

Schouten, J. A. und Struik, D. J.
[1] Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, Groningen — Batavia, Bd. I (1935), Bd. II (1938). Есть русский перевод I тома: Схоутен и Стройк, „Введение в новые методы диференциальной геометрии", т. I, М.—Л., ГТТИ (1939). (Русский перевод II тома готовится к печати Гос. изд. иностр. литературы.)

Schouten, J. A. und van Kampen, E. R.
[1] Zur Einbettungs und Krummungstheorie nichtholonomer Gebilde. Math. Ann. 103 (1930), 752—783.
[2] Beiträge zur Theorie der Deformation. Prac. mat.-fiz., Warszawa 41 (1933), 1—19.

Synge, J. L.
[1] On the geometry of dynamics. Phil. Trans. Roy. Soc. London A 226 (1926), 31—106.
[2] Geodesics in non-holonomic geometry. Math. Ann. 99 (1928), 738—751.
[3] Hodographs of general dynamical systems. Trans. Roy. Soc. Canada, Sect. 3 25 (1931), 121—136.
[4] The apsides of general dynamical systems. Trans. Amer. Math. Soc. 34 (1932), 481—522.
[5] On the deviation of geodesics and null-geodesics... Annals of Mathematics 35 (1934), 705—713.
[6] Mechanical models of spaces with positive-definite line-lement. Annals of Mathematics 36 (1935), 650—656.
[7] On the neighbourhood of a geodesic in Riemannian space. Duke Mathematical Journal 1 (1935), 527—537.

Vanderslice, J. L.
[1] Non-holonomic geometries. Amer. Journal of Math. 56 (1934), 153—193.

Veblen, O.
[1] Invariants of quadratic differential forms. Combridge (1927). Русский перевод этой книги готовится к печати.

Vranceanu, G.
[1] Sur les espaces non holonomes. Comptes rendus, Acad. Sci. Paris 183 (1926), 852—854.
[2] Sur le calcul différentiel absolu pour les variétés non holonomes. Comptes rendus, Acad. Sci. Paris 183 (1926), 1083—1085.
[3] Sopra le equazioni del moto di un sistema anolonomo. Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis. mat. e nat. (6) 4 (1926), 508—511.
[4] Sur l'écart géodésique dans les espaces non holonomes. Annales scientifiques de l'Université des Jassy 15 (1927), 7—24.
[5] Sopra la stabilità geodetica. Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis. mat. e nat. (6) 5 (1927), 107—110.
[6] Stabilità geodetica. Applicazione ai sistemi conservati della meccanica. Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis. mat. e nat. (6) 5 (1927), 275—278.
[7] Note sur l'écart géodésique dans les espaces non holonomes. Annales scientifiques de l'Université de Jassy 15 (1928), 307—310.
[8] Sullo scostamento geodetico nelle varietà anolonome. Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis. mat. e nat. (6) 7 (1928), 134—137.
[9] Sur quelques tenseurs dans les variétés non holonomes. Comptes rendus, Acad. Sci. Paris 186 (1928), 995—997.
[10] Parallélisme et courbure dans une variété non holonome. Atti Cong. Internaz. dei Mat. Bologna (1928), 6, 61—67.
[11] Seconda forma quadratica fondamentale di una varietà anolonoma ed applicazioni. Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis. mat. e nat. (6) 8 (1928), 669—673.
[12] Studio geometrico dei sistemi anolonomi. Annali de mat. (4) 6 (1928-29), 9—43.
[13] Les trois points de vue dans l'étude des espaces non holonomes. Comptes rendus, Acad. Sci. Paris 188 (1929), 973—975.
[14] Sopra i sistemi anolonomi a legami dependenti dal tempo. Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis. mat. e nat. (6) 13 (1931), 38—44.
[15] Sur quelques points de la théorie des espaces non holonomes. Buletinul Facultaţi de Stiinţe din Cernauţi 5 (1932), 177—205.
[16] Sopra l'interpretazione geometrica dei sistemi meccanica. Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei. Cl. Sci. fis. mat. e nat. (6) 17 (1933), 135—140.
[17] Etude des espaces non holonomes. Journal de Math. 13 (1934), 113—174.
[18] Les espaces non-holonomes et leurs applications mécanique Mém. Sci. math. 76 (1936). (Библиография.)
Вагнер, В. В.
[1] Sur la géométrie différentielle des multiplicités anolonomes. Труды семинара по векторному и тензорному анализу при Московском государственном университете. Вып. 2-3 (1935), 269—318.
[2] Геометрия пространства конфигураций твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки. Учен. записки сарат. гос. университета. им. Чернышевского, серия физ.-мат., т. I, вып. 2 (1938), 34—57.
[3] On the geometrical intropretions of the curvatur vector of a non-holonomic V_3^2 in three dimensional evclidian space. Мат. сборник, т. 4 (1939), 339—356.
[4] Геометрия (n— 1)-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве. Труды семинара по вект. и тенз. анализу при Моск. гос. университете, вып. V (1941), 173—225.

[5] Теория конгруэнций кругов неголономного V_3^2 в R_3. Труды семинара по вект. и тенз. анализу при Моск. гос. университете, вып. V (1941), 271—283.
[6] Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем. Труды семинара по вект. и тенз. анализу при Моск. гос. университете, вып. V (1941), 301—327.

Whittake, E. T.
[1] Analytical Dynamics Cambridge (1927). Есть русский перевод Уиттекер „Аналитическая динамика", М. — Л., ОНТИ, 1937 г.

Wright, J. E.
[1] Invariants of quadratic differential forms, Cambridge (1908).

Wundheiler, A.
[1] Une simple démonstration de la formule de l'écart géodésique. Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis. mat. e nat. (6) 12 (1930), 644—646.
[2] Uber die Variationsgleichungen für affine geodätische Linien und nichtholonome, nichtkonservative dynamische Systeme. Prac. mat. fiz. Warszawa 38 (1931), 129—147.
[3] Rheonome Geometrie. Absolute Mechanik. Prac. mat.-fiz., Warszawa 40 (1932), 97—142.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА 5

ВВЕДЕНИЕ 7

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ 10

2. ДИНАМИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ 13

3. МНОГООБРАЗИЕ КОНФИГУРАЦИЙ С КИНЕМАТИЧЕСКИМ ЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ ДЛЯ С. Г. (СКЛЕРОНОМНЫХ ГОЛОНОМНЫХ) СИСТЕМ: $ds^2 = 2Tdt^2 = a_{ij}dx^i dx^j$ 14

4. МНОГООБРАЗИЕ КОНФИГУРАЦИЙ С КИНЕМАТИЧЕСКИМ ЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ ДЛЯ С. Н. (СКЛЕРОНОМНЫХ НЕГОЛОНОМНЫХ) СИСТЕМ: $ds^2 = 2Tdt^2 = a_{ij}dx^i dx^j$ 19

5. МНОГООБРАЗИЕ КОНФИГУРАЦИЙ С ЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ ДЕЙСТВИЯ ДЛЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ С. Г. (СКЛЕРОНОМНЫХ ГОЛОНОМНЫХ) СИСТЕМ: $ds^2 = (E-V)\, a_{ij}dx^i dx^j$. 24

6. МНОГООБРАЗИЕ КОНФИГУРАЦИЙ С ЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ ДЕЙСТВИЯ ДЛЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ С. Н. (СКЛЕРОНОМНЫХ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ $ds^2 = (E-Y)a_{ij}dx^i dx^j$ 25

7. РЕОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ 26

8. ДРУГИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ДЛЯ СКЛЕРОНОМНЫХ И РЕОНОМНЫХ СИСТЕМ 29

9. КВАЗИ-КООРДИНАТЫ 31

10. УДАР 37

БИБЛИОГРАФИЯ 38