Г.А.Сарданашвили

ГЕОМЕТРИЯ И КВАНТОВЫЕ ПОЛЯ

Современные методы теории поля. Т. 4

М.: УРСС, 2000. — 160 с.

В этом томе дается краткий обзор квантовых полевых моделей, в которых существенную роль играют связности. В квантовой теории поля используется алгебраическое понятие связностей на модулях и пучках.

Содержание

Предметный указатель

Введение

Особенность использования геометрических методов в квантовой теории поля состоит в том, что многие геометрические понятия, например такие, как многообразие, расслоение, связность, формулируются в алгебраических терминах модулей и пучков. Поэтому первая глава книги посвящена дифференциальному исчислению на модулях и пучках.

Область применения геометрических методов в квантовой теории поля чрезвычайно обширна. В этой книге мы ограничимся в основном рассмотрением связностей в квантовых полевых моделях. Это суперсвязности, связности в БРСТ-формализме, в топологической теории поля, в теории аномалий, в некоммутативной геометрии и т. д. Как правило, они вводятся как связности на модулях и пучках. Такое определение связности эквивалентно привычному геометрическому понятию связности в случае векторных расслоений. При этом целью книги не является сколько-нибудь полное описание тех или иных полевых моделей. Главное внимание в ней уделяется тем конструкциям в квантовой теории поля, где фигурируют связности. Именно связности позволяют иметь дело с инвариантно определенными объектами как в классической, так и квантовой теории поля. Успехи калибровочной теории ясно показали, что это фундаментальный физический принцип. Кроме того, использование связностей устанавливает новые, подчас неожиданные, связи между классической и квантовой теориями.

Алгебраические связности

В первом томе [11] связности определялись на расслоениях. В квантовой теории поля обычно имеют дело не с расслоениями в их традиционном геометрическом описании, а с модулями и пучками их сечений (см. ниже Пример 1.3.4). Поэтому связности должны быть описаны в тех же алгебраических терминах. Эта глава посвящена связностям на модулях и пучках над коммутативными алгебрами [101, 113]. Обобщение этой конструкции на модули и пучки над градуированными коммутативными алгебрами приводит к градуированным связностям и суперсвязностям (Глава 3), а на модули над некоммутативными алгебрами — к связностям в квантовой механике (Глава 2) и некоммутативной геометрии (Глава 7).

Всюду в книге под гладкими функциями и отображениями подразумеваются функции и отображения класса C^∞, а многообразия предполагаются гладкими и являются отделимыми локально компактными и паракомпактными топологическими пространствами.

§ 1. Дифференциальное исчисление на модулях

Этот параграф посвящен основным элементам дифференциального исчисления на модулях над коммутативными алгебрами [4, 78, 101, 113] (см., например, [7, 8], а также § 7.1 по алгебраической теории колец и модулей).

Всюду в книге, если речь не идет об алгебрах Ли, алгебры предполагаются ассоциативными.

Пусть $\mathcal{K}$ — коммутативное кольцо и $\mathcal{A}$ — коммутативная $\mathcal{K}$-алгебра с единицей, т. е. $\mathcal{A}$ является одновременно $\mathcal{K}$-модулем и коммутативным кольцом, называемым также *$\mathcal{K}$-кольцом*. Например, если $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ — поле вещественных чисел и $\mathcal{A}$ — кольцо вещественных гладких функций на многообразии, мы приходим к привычному дифференциальному исчислению на многообразиях (см. Замечание 1.1.7 и далее конец этого параграфа).

Пусть P и Q — левые $\mathcal{A}$-модули (правые модули рассматриваются аналогично). Они являются также центральными $\mathcal{K}$-бимодулями (см. § 7.1). Множество $\operatorname{Hom}_{\mathcal{K}}(P, Q)$ гомоморфизмов $\mathcal{K}$-модуля P в $\mathcal{K}$-модуль Q может быть наделено структурой $\mathcal{A}$–$\mathcal{A}$-бимодуля относительно левого и правого умножений

$$(a\phi)(p) = a\phi(p), \qquad (\phi \star a)(p) = \phi(ap), \qquad a \in \mathcal{A}, \qquad p \in P. \tag{1.1}$$

Однако это не центральный $\mathcal{A}$-бимодуль, поскольку в общем случае $a\phi \neq \phi \star a$. Обозначим

$$\delta_a \phi = a\phi - \phi \star a. \tag{1.2}$$

Определение 1.1.1. Элемент $\Delta \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{K}}(P, Q)$ называется линейным *дифференциальным оператором* порядка s на $\mathcal{A}$-модуле P со значениями в $\mathcal{A}$-модуле Q (или сокращенно Q-значным дифференциальным оператором на P), если

$$\delta_{a_0} \circ \ldots \circ \delta_{a_s} \Delta = 0$$

для произвольного набора из $s + 1$ элементов алгебры $\mathcal{A}$. □

В дальнейшем под дифференциальными операторами подразумеваются только линейные дифференциальные операторы.

Пример 1.1.1. Согласно Определению 1.1.1 дифференциальный оператор первого порядка Δ удовлетворяет условию

$$(\delta_a \circ \delta_b \Delta)(p) = \Delta(abp) - a\Delta(bp) - b\Delta(ap) + ab\Delta(p) = 0 \qquad (1.3)$$

для всех $p \in P$ и $a, b \in \mathcal{A}$. □

Множество $\mathrm{Diff}_s(P, Q) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(P, Q)$ дифференциальных операторов порядка s на модуле P со значениями в модуле Q наделено структурой $\mathcal{A}$–$\mathcal{A}$-бимодуля (1.1). Легко убедиться, что

$$\mathrm{Diff}_s(P, Q) \subset \mathrm{Diff}_k(P, Q), \qquad k \geqslant s.$$

Поскольку левые и правые $\mathcal{A}$-модули $\mathrm{Diff}_s(P, Q)$ имеют разные свойства, мы будем обозначать эти модули раздельно как $\mathrm{Diff}_s^{\rightarrow}(P, Q)$ и $\mathrm{Diff}_s^{\leftarrow}(P, Q)$ соответственно, сохраняя символ $\mathrm{Diff}_s(P, Q)$ для $\mathcal{A}$–$\mathcal{A}$-бимодуля.

Например, пусть $P = \mathcal{A}$ — $\mathcal{K}$-алгебра. Рассмотрим морфизм

$$\mathcal{D}_s\colon \mathrm{Diff}_s^{\leftarrow}(\mathcal{A}, Q) \longrightarrow Q,$$

$$\mathcal{D}_s(\Delta) \overset{\mathrm{def}}{=} \Delta(1), \quad 1 \in \mathcal{A}.$$

Легко убедиться, что это дифференциальный оператор порядка s на правом $\mathcal{A}$-модуле $\mathrm{Diff}_s^{\leftarrow}(\mathcal{A}, Q)$ и в то же время дифференциальный оператор нулевого порядка на $\mathcal{A}$-левом модуле $\mathrm{Diff}_s^{\rightarrow}(\mathcal{A}, Q)$.

Теорема 1.1.2. Для всякого дифференциального оператора $\Delta \in \mathrm{Diff}_s^{\leftarrow}(P, Q)$ существует единственный гомоморфизм

$$\mathbf{f}_\Delta\colon P \longrightarrow \mathrm{Diff}_s^{\leftarrow}(\mathcal{A}, Q),$$

$$[\mathbf{f}_\Delta(p)](a) \overset{\mathrm{def}}{=} \Delta(ap), \quad \forall\, a \in \mathcal{A},$$

такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\mathbf{f}_\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & \mathrm{Diff}_s^{\leftarrow}(\mathcal{A}, Q) \arrow[d, "\mathcal{D}_s"] \\ & Q \end{tikzcd}.$$

□

Соответствие $\Delta \mapsto \mathbf{f}_\Delta$ задает изоморфизм модулей

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\big(P, \mathrm{Diff}_s^{\leftarrow}(\mathcal{A}, Q)\big) = \mathrm{Diff}_s^{\leftarrow}(P, Q). \qquad (1.4)$$

Это означает, что любой Q-значный дифференциальный оператор на $\mathcal{A}$-модуле P представим в виде гомоморфизма P в правый $\mathcal{A}$-модуль Q-значных дифференциальных операторов на алгебре $\mathcal{A}$. Поэтому мы сосредоточим свое внимание именно на этих операторах.

Определение 1.1.3. Оператор первого порядка ∂ на алгебре $\mathcal{A}$ со значениями в $\mathcal{A}$-модуле Q называется Q-значным ***дифференцированием*** алгебры $\mathcal{A}$, если он удовлетворяет *правилу Лейбница*

$$\partial(aa') = a\partial(a') + a'\partial(a), \quad \forall\, a, a' \in \mathcal{A}. \qquad (1.5)$$

Это правило — частный случай условия (1.3). □

Поскольку для любого $a \in \mathcal{A}$ оператор $a\partial$ — это тоже дифференцирование, дифференцирования образуют подмодуль $\mathrm{Der}(\mathcal{A}, Q)$ левого $\mathcal{A}$-модуля $\mathrm{Diff}_1^{\rightarrow}(\mathcal{A}, Q)$.

В то же время оператор $\partial \star a$ не является в общем случае дифференцированием. Поэтому множество дифференцирований $\mathrm{Der}(\mathcal{A}, Q)$ наделено только правой структурой $\mathcal{K}$-модуля. Существует мономорфизм правых $\mathcal{K}$-модулей

$$i\colon \mathrm{Der}(\mathcal{A}, Q) \longrightarrow \mathrm{Diff}_1^{\leftarrow}(\mathcal{A}, Q). \tag{1.6}$$

Легко убедиться, что дифференциальный оператор первого порядка Δ на алгебре $\mathcal{A}$ является дифференцированием тогда и только тогда, когда $\Delta(1) = 0$. Таким образом, имеет место точная последовательность $\mathcal{K}$-модулей

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}(\mathcal{A}, Q) \xrightarrow{i} \mathrm{Diff}_1^{\leftarrow}(\mathcal{A}, Q) \longrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

Замечание 1.1.2. Пусть $i\colon P \to Q$ — $\mathcal{A}$-подмодуль $\mathcal{A}$-модуля Q. Любое P-значное дифференцирование ∂ алгебры $\mathcal{A}$ порождает ее Q-значное дифференцирование $i \circ \partial$, и тем самым задан гомоморфизм левых $\mathcal{A}$-модулей

$$\partial^1 i\colon \mathrm{Der}(\mathcal{A}, P) \longrightarrow \mathrm{Der}(\mathcal{A}, Q). \tag{1.7}$$

Трудность возникает, когда P не является $\mathcal{A}$-подмодулем модуля Q, как, например, в случае вложения (1.6). □

Применим функтор дифференцирования (1.7) к вложению (1.6). Модуль $\mathrm{Der}(\mathcal{A}, \mathrm{Diff}_1^{\leftarrow}(\mathcal{A}, Q))$ состоит из дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$ со значениями в правом $\mathcal{A}$-модуле $\mathrm{Diff}_1^{\leftarrow}(\mathcal{A}, Q)$. Если $\partial \in \mathrm{Der}(\mathcal{A}, \mathrm{Diff}_1^{\leftarrow}(\mathcal{A}, Q))$, тогда $\partial(a) \in \mathrm{Diff}_1^{\leftarrow}(\mathcal{A}, Q)$, $\forall a \in \mathcal{A}$, так что

$$\partial(aa') = \partial(a) \star a' + \partial(a') \star a, \quad \forall a, a' \in \mathcal{A}.$$

Возьмем теперь модуль $\mathrm{Der}(\mathcal{A}, \mathrm{Der}(\mathcal{A}, Q))$, где $\mathrm{Der}(\mathcal{A}, Q)$ рассматривается как левый $\mathcal{A}$-модуль. Элементы $\partial \in \mathrm{Der}(\mathcal{A}, \mathrm{Der}(\mathcal{A}, Q))$ удовлетворяют условию

$$\partial(aa') = a'\partial(a) + a\partial(a'), \quad \forall a, a' \in \mathcal{A}.$$

Тогда нетрудно проверить, что пересечение

$$\mathrm{Der}_2(\mathcal{A}, Q) = \mathrm{Der}\left(\mathcal{A}, \mathrm{Der}(\mathcal{A}, Q)\right) \cap \mathrm{Der}\left(\mathcal{A}, \mathrm{Diff}_1^{\leftarrow}(\mathcal{A}, Q)\right)$$

состоит из таких элементов модуля $\mathrm{Der}(\mathcal{A}, \mathrm{Diff}_1^{\leftarrow}(\mathcal{A}, Q))$, что выполняется условие

$$(\partial(a))(a') = (\partial(a'))(a).$$

Это левый $\mathcal{A}$-модуль. Существует естественный мономорфизм модулей

$$\mathrm{Der}_2(\mathcal{A}, Q) \longrightarrow \mathrm{Der}\left(\mathcal{A}, \mathrm{Diff}_1^{\leftarrow}(\mathcal{A}, Q)\right). \tag{1.8}$$

Определим по индукции модуль

$$\mathrm{Der}_{n+1}(\mathcal{A}, Q) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Der}\left(\mathcal{A}, \mathrm{Der}_n(\mathcal{A}, Q)\right) \cap \mathrm{Der}\left(\mathcal{A}, (\mathrm{Diff}_1^{\leftarrow}(\mathcal{A}, P))^n\right),$$

где

$$\left(\mathrm{Diff}_1^{\leftarrow}(Q)\right)^k \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Diff}_1^{\leftarrow}(\mathcal{A}, \ldots, \mathrm{Diff}_1^{\leftarrow}(\mathcal{A}, \mathrm{Diff}_1^{\leftarrow}(\mathcal{A}, Q)) \ldots).$$

Мономорфизм (1.8) обобщается на дифференцирования высшего порядка как

$$\mathrm{Der}_k(\mathcal{A}, Q) \longrightarrow \mathrm{Der}_{k-1}\left(\mathcal{A}, \mathrm{Diff}_1^{\leftarrow}(\mathcal{A}, Q)\right). \tag{1.9}$$

Перейдем теперь к модулям струй. Для данного $\mathcal{A}$-модуля P рассмотрим тензорное произведение $\mathcal{K}$-модулей $\mathcal{A} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} P$, наделенное структурой левого $\mathcal{A}$-модуля

$$b(a \otimes p) \overset{\text{def}}{=} (ba) \otimes p, \quad \forall b \in \mathcal{A}. \tag{1.10}$$

Для всякого элемента $b \in \mathcal{A}$ определим морфизм левых $\mathcal{A}$-модулей

$$\delta^b(a \otimes p) = (ba) \otimes p - a \otimes (bp). \tag{1.11}$$

Обозначим через μ^{k+1} подмодуль левого $\mathcal{A}$-модуля $\mathcal{A} \bigotimes_{\mathcal{K}} P$, порождаемый элементами вида

$$\delta^{b_0} \circ \ldots \circ \delta^{b_k}(1 \otimes p).$$

Определение 1.1.4. Модулем *струй порядка* k $\mathcal{A}$-модуля P называется фактор $\mathcal{J}^k(P)$ тензорного произведения $\mathcal{A} \bigotimes_{c} \mathcal{K}P$ по подмодулю μ^{k+1}. Это левый $\mathcal{A}$-модуль относительно операции умножения

$$b(a \otimes p \bmod \mu^{k+1}) = ba \otimes p \bmod \mu^{k+1}. \tag{1.12}$$

□

Помимо структуры левого $\mathcal{A}$-модуля, индуцированной равенством (1.10), модуль k-струй $\mathcal{J}^k(P)$ допускает также структуру левого $\mathcal{A}$-модуля, задаваемую операцией умножения

$$b \star (a \otimes p \bmod \mu^{k+1}) = a \otimes (bp) \bmod \mu^{k+1}. \tag{1.13}$$

Назовем ее структурой *$\star$-левого модуля*. Определен гомоморфизм $\star$-левых $\mathcal{A}$-модулей

$$J^k\colon P \to \mathcal{J}^k(P), \qquad J^k p = 1 \otimes p \bmod \mu^{k+1} \tag{1.14}$$

такой, что $\mathcal{J}^k(P)$ как левый $\mathcal{A}$-модуль порождается элементами $J^k p$, $p \in P$. Нетрудно убедиться, что гомоморфизм J^k (1.14) — это дифференциальный оператор порядка k (достаточно сравнить соотношение (1.3) с приведенным ниже соотношением (1.15)).

Замечание 1.1.3. Если P — это $\mathcal{A}$–$\mathcal{A}$-бимодуль, тензорное произведение $\mathcal{A} \bigotimes_{\mathcal{K}} P$ наделено структурой правого $\mathcal{A}$-модуля

$$(a \otimes p)b \overset{\text{def}}{=} a \otimes pb, \quad \forall b \in \mathcal{A},$$

которая переносится и на модуль струй:

$$\left(a \otimes p \bmod \mu^{k+1}\right) b = a \otimes (pb) \bmod \mu^{k+1}.$$

Если P — центральный бимодуль, т. е.

$$ap = pa, \quad \forall a \in \mathcal{A}, \quad p \in P,$$

структура $\star$-левого $\mathcal{A}$-модуля (1.13) на $\mathcal{J}^k(P)$ эквивалентна структуре правого $\mathcal{A}$-модуля, индуцируемой на $\mathcal{J}^k(P)$ структурой правого $\mathcal{A}$-модуля на P. □

Модули струй обладают свойствами, аналогичными свойствам многообразий струй (см. первый том [11], а также § 4.1). В частности, поскольку $\mu^r \subset \mu^s$, $r > s$, имеет место обратная система эпиморфизмов левых $\mathcal{A}$-модулей

$$\ldots \longrightarrow \mathcal{J}^s(P) \xrightarrow{\pi^s_{s-1}} \mathcal{J}^{s-1}(P) \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\pi^1_0} P,$$

а для повторного модуля струй $\mathcal{J}^s(\mathcal{J}^k(P))$ определен гомоморфизм

$$\mathcal{J}^{s+k}(P) \longrightarrow \mathcal{J}^s\left(\mathcal{J}^k(P)\right).$$

Пример 1.1.4. Модуль струй первого порядка $\mathcal{J}^1(P)$ образован элементами $a \otimes p \bmod \mu^2$, т. е. элементами $a \otimes p$ по модулю соотношений

$$\delta^a \circ \delta^b(1 \otimes p) = (\delta_a \circ \delta_b)J^1(p) = 1 \otimes (abp) - a \otimes (bp) - b \otimes (ap) + ab \otimes p = 0. \tag{1.15}$$

В частности, морфизм $\pi^1_0\colon \mathcal{J}^1(P) \to P$ имеет вид

$$\pi^1_0\colon a \otimes p \bmod \mu^2 \to ap. \tag{1.16}$$

□

Теорема 1.1.5. Для всякого дифференциального оператора $\Delta \in \mathrm{Diff}^-_s(P, Q)$ существует единственный гомоморфизм

$$\mathfrak{f}^\Delta\colon \mathcal{J}^s(P) \longrightarrow Q$$

такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "J^k"] \arrow[dr, "\Delta"'] & \mathcal{J}^s(P) \arrow[d, "\mathfrak{f}^\Delta"] \\ & Q \end{tikzcd}.$$

□

Доказательство. Доказательство основано на следующем факте [4]. Пусть $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \otimes P, Q)$ и

$$\widehat{a}\colon P \ni p \mapsto a \otimes p \in \mathcal{A} \otimes P,$$

тогда

$$\delta_b(h \circ \widehat{a})(p) = h\big(\delta^b(a \otimes p)\big).$$

□

Соответствие $\Delta \mapsto \mathfrak{f}^\Delta$ задает изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\big(\mathcal{J}^s(P), Q\big) = \mathrm{Diff}_s(P, Q), \tag{1.17}$$

который означает, что всякий (линейный) Q-значный дифференциальный оператор порядка s на $\mathcal{A}$-модуле P представим в виде гомоморфизма модуля струй $\mathcal{J}^s(P)$ в Q. Напомним, что в общем случае нелинейных дифференциальных операторов подобного рода гомоморфизм является определением дифференциального оператора (см. первый том [11], Определение 1.5.5).

Рассмотрим теперь специальный случай модулей струй $\mathcal{J}^s(\mathcal{A})$ самой алгебры $\mathcal{A}$, обозначив их $\mathcal{J}^s$ ради простоты. Модуль $\mathcal{J}^s$ может быть наделен структурой коммутативной алгебры с законом умножения

$$(aJ^s b) \cdot (a' J^s b) = aa' J^s(bb').$$

В частности, алгебра $\mathcal{J}^1$ состоит из элементов $a \otimes b$ по модулю соотношений

$$a \otimes b + b \otimes a = ab \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes ab. \tag{1.18}$$

Она имеет структуру левого $\mathcal{A}$-модуля

$$c((a \otimes b) \bmod \mu^2) = (ca) \otimes b \bmod \mu^2 \tag{1.19}$$

(1.12) и структуру $\star$-левого $\mathcal{A}$-модуля

$$c \star ((a \otimes b) \bmod \mu^2) = a \otimes (cb) \bmod \mu^2 \tag{1.20}$$

(1.13), которая совпадает со структурой, индуцируемой структурой правого $\mathcal{A}$-модуля на $\mathcal{A}$ (см. Замечание 1.1.3). Имеют место канонический мономорфизм левых $\mathcal{A}$-модулей

$$\mathfrak{i}_1\colon \mathcal{A} \to \mathcal{J}^1, \qquad \mathfrak{i}_1\colon a \mapsto a \otimes \mathbf{1} \bmod \mu^2, \tag{1.21}$$

и соответствующая проекция

$$\mathcal{J}^1 \longrightarrow \mathcal{J}^1 / \operatorname{Im} i_1 = (\operatorname{Ker} \mu^1) \operatorname{mod} \mu^2 = \Omega^1, \tag{1.22}$$
$$a \otimes b \operatorname{mod} \mu^2 \longrightarrow (a \otimes b - ab \otimes \mathbf{1}) \operatorname{mod} \mu^2.$$

Фактор-модуль Ω^1 (1.22) образован элементами

$$(a \otimes b - ab \otimes \mathbf{1}) \operatorname{mod} \mu^2, \quad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Он наделен структурой центрального $\mathcal{A}$-бимодуля

$$c((a \otimes b - ab \otimes \mathbf{1}) \operatorname{mod} \mu^2) = (ca \otimes b - cab \otimes \mathbf{1}) \operatorname{mod} \mu^2, \tag{1.23}$$
$$((\mathbf{1} \otimes ab - b \otimes a) \operatorname{mod} \mu^2)c = (\mathbf{1} \otimes abc - b \otimes ac) \operatorname{mod} \mu^2 \tag{1.24}$$

и структурой $\star$-левого $\mathcal{A}$-модуля

$$c \star ((a \otimes b - ab \otimes \mathbf{1}) \operatorname{mod} \mu^2) = (a \otimes cb - acb \otimes \mathbf{1}) \operatorname{mod} \mu^2. \tag{1.25}$$

Нетрудно убедиться, что проекция (1.22) является морфизмом как левых, так и $\star$-левых модулей. Тогда мы получаем морфизм $\star$-левых модулей

$$d^1\colon \mathcal{A} \xrightarrow{J^1} \mathcal{J}^1 \longrightarrow \Omega^1, \tag{1.26}$$
$$d^1\colon b \mapsto \mathbf{1} \otimes b \operatorname{mod} \mu^2 \mapsto (\mathbf{1} \otimes b - b \otimes \mathbf{1}) \operatorname{mod} \mu^2,$$

такой, что центральный $\mathcal{A}$-бимодуль Ω^1 порождается элементами $d^1(b)$, $b \in \mathcal{A}$, согласно равенству

$$ad^1 b = (a \otimes b - ab \otimes \mathbf{1}) \operatorname{mod} \mu^2 = (\mathbf{1} \otimes ab) - b \otimes a) \operatorname{mod} \mu^2 = (d^1 b)a. \tag{1.27}$$

Предложение 1.1.6. Морфизм d^1 (1.26) является дифференцированием алгебры $\mathcal{A}$ со значениями в модуле Ω^1, рассматриваемом как левый $\mathcal{A}$-модуль и центральный $\mathcal{A}$-бимодуль. □

Доказательство. Используя соотношение (1.18), получаем в явном виде

$$\begin{aligned} d^1(ba) &= (\mathbf{1} \otimes ba - ba \otimes \mathbf{1}) \operatorname{mod} \mu^2 = \\ &= (b \otimes a + a \otimes b - ba \otimes \mathbf{1} - ab \otimes \mathbf{1}) \operatorname{mod} \mu^2 = bd^1 a + ad^1 b. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Это Ω^1-значный дифференциальный оператор первого порядка. В то же время

$$d^1(ba) = (\mathbf{1} \otimes ba - ba \otimes \mathbf{1} + b \otimes a - b \otimes a) \operatorname{mod} \mu^2 = (d^1 b)a + bd^1 a.$$

□

При помощи дифференцирования d^1 (1.26) мы получаем расщепление левых и $\star$-левых $\mathcal{A}$-модулей

$$\mathcal{J}^1 = \mathcal{A} \oplus \Omega^1, \tag{1.29}$$
$$aJ^1(cb) = ai_1(cb) + ad^1(cb). \tag{1.30}$$

Соответственно имеет место точная последовательность

$$0 \to \Omega^1 \to \mathcal{J}^1 \to \mathcal{A} \to 0, \tag{1.31}$$

которая расщепляется мономорфизмом (1.21).

Предложение 1.1.7. Существует изоморфизм

$$\mathcal{J}^1(P) = \mathcal{J}^1 \otimes P, \tag{1.32}$$

где $\mathcal{J}^1 \otimes P$ — тензорное произведение правого (и $\star$-левого) $\mathcal{A}$-модуля $\mathcal{J}^1$ (1.20) и левого $\mathcal{A}$-модуля P, т. е.

$$\left[a \otimes b \bmod \mu^2\right] \otimes p = \left[a \otimes 1 \bmod \mu^2\right] \otimes bp.$$

□

Доказательство. Изоморфизм (1.32) реализуется сопоставлением

$$(a \otimes bp) \bmod \mu^2 \longleftrightarrow \left[a \otimes b \bmod \mu^2\right] \otimes p. \tag{1.33}$$

□

Изоморфизм (1.29) приводит к изоморфизму

$$\mathcal{J}^1(P) = (\mathcal{A} \oplus \Omega^1) \otimes P,$$
$$(a \otimes bp) \bmod \mu^2 \longleftrightarrow \left[\left(ab + ad^1(b)\right) \bmod \mu^2\right] \otimes p,$$

и к расщеплению левых и $\star$-левых $\mathcal{A}$-модулей

$$\mathcal{J}^1(P) = (\mathcal{A} \otimes P) \oplus (\Omega^1 \otimes P). \tag{1.34}$$

Применяя проекцию π_0^1 (1.16) к расщеплению (1.34), мы получаем точную последовательность левых и $\star$-левых $\mathcal{A}$-модулей

$$0 \longrightarrow \Omega^1 \otimes P \longrightarrow \mathcal{J}^1(P) \xrightarrow{\pi_0^1} P \longrightarrow 0, \tag{1.35}$$
$$0 \longrightarrow \left[(a \otimes b - ab \otimes 1) \bmod \mu^2\right] \otimes p \longrightarrow \left[(c \otimes 1 + a \otimes b - ab \otimes 1) \bmod \mu^2\right] \otimes p =$$
$$= (c \otimes p + a \otimes bp - ab \otimes p) \bmod \mu^2 \longrightarrow cp,$$

аналогичную точной последовательности (1.31). Точная последовательность (1.35) допускает каноническое расщепление посредством морфизма $\star$-левых $\mathcal{A}$-модулей

$$P \ni ap \mapsto a \otimes p + d^1(a) \otimes p.$$

Однако она необязательно должна расщепляться каким-либо морфизмом левых $\mathcal{A}$-модулей. Такое расщепление, если оно существует, интерпретируется как связность на модуле P (см. § 1.2). В частности, каноническое расщепление (1.21) точной последовательности (1.31) представляет собой каноническую связность на алгебре $\mathcal{A}$.

В случае модуля струй $\mathcal{J}^s$ алгебры $\mathcal{A}$ изоморфизм (1.17) принимает вид

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{J}^s, Q) = \mathrm{Diff}_s(\mathcal{A}, Q). \tag{1.36}$$

Тогда Теорема 1.1.5 и Предложение 1.1.6 приводят к изоморфизму

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Omega^1, Q) = \mathrm{Der}\,(\mathcal{A}, Q). \tag{1.37}$$

Это означает, что, поскольку $d^1(1) = 0$, всякое Q-значное дифференцирование алгебры $\mathcal{A}$ представимо в виде композиции $h \circ d^1$, где $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Omega^1, Q)$.

Пример 1.1.5. Если $Q = \mathcal{A}$, изоморфизм (1.37) сводится к условию дуальности

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Omega^1, \mathcal{A}) = \mathrm{Der}\,(\mathcal{A}), \tag{1.38}$$
$$u(d^1 a) = u(a), \qquad a \in \mathcal{A},$$

т. е. модуль дифференцирований $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ алгебры $\mathcal{A}$ совпадает с левым $\mathcal{A}$-дуальным Ω^{1*} к модулю Ω^1. □

Определим теперь модули Ω^k, $k = 2, 3, \ldots$, как антисимметричные тензорные произведения $\mathcal{K}$-модуля Ω^1.

Предложение 1.1.8. [4]. Существуют изоморфизмы

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Omega^k, Q) = \mathrm{Der}_{\mathcal{K}}(\mathcal{A}, Q), \tag{1.39}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{J}^1(\Omega^k), Q) = \mathrm{Der}_{\mathcal{K}}(\mathrm{Diff}_1(Q)). \tag{1.40}$$

□

Изоморфизм (1.39) является обобщением изоморфизма (1.37) на дифференцирования высшего порядка. Изоморфизм (1.40) и мономорфизм (1.9) предполагают гомоморфизм

$$h^k\colon \mathcal{J}^1(\Omega^{k-1}) \longrightarrow \Omega^k$$

и определяют операторы внешнего дифференцирования

$$d^k = h^k \circ J^1\colon \Omega^{k-1} \longrightarrow \Omega^k. \tag{1.41}$$

Легко установить, что $d^k \circ d^{k-1} = 0$, и эти операторы порождают комлекс Де Рама

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{d^1} \Omega^1 \xrightarrow{d^2} \dots \longrightarrow \Omega^k \xrightarrow{d^{k+1}} \dots . \tag{1.42}$$

Замечание 1.1.6. Пусть $\mathcal{A}$-модуль P является $\mathcal{K}$-кольцом таким, что существует мономорфизм $\mathcal{K}$-колец $\mathcal{A} \to P$. Отметим имеющееся различие между модулями струй $\mathcal{J}^k(P)$ $\mathcal{A}$-модуля P и модулями струй $\mathcal{J}^k$ $\mathcal{K}$-кольца P. Например, имеет место канонический мономорфизм (1.21) P в $\mathcal{J}^1$, но не в $\mathcal{J}^1(P)$. □

Обратимся теперь к случаю, когда $\mathcal{A}$ — кольцо $C^\infty(X)$ вещественных гладких функций на дифференцируемом многообразии X.

Замечание 1.1.7. Обычно кольцо $C^\infty(X)$ наделяется топологией компактной сходимости по всем производным (см. третий том [13], Пример 1.1.7). Это топология пространства Фреше, и $C^\infty(X)$ является топологическим кольцом, называемым *кольцом Фреше*. □

Замечание 1.1.8. Дифференцируемое многообразие может быть описано как вещественный спектр кольца гладких функций на нем. Пусть Z — дифференцируемое многообразие и $\mu_z \subset C^\infty(Z)$ — максимальный идеал гладких функций на нем, обращающихся в 0 в точке $z \in Z$. Имеем $C^\infty(Z)/\mu_z = \mathbb{R}$. *Вещественным спектром* $\mathrm{Spec}_R\, C^\infty(Z)$ кольца $C^\infty(Z)$ называется множество всех его максимальных идеалов μ таких, что

$$\mathbb{R} \hookrightarrow C^\infty(Z) \to C^\infty(Z)/\mu$$

— это изоморфизм (см, например, [25]). Если вещественный спектр $\mathrm{Spec}_R\, C^\infty(Z)$ наделен топологией Зариского (совпадающей в данном случае с топологией Гельфанда), тогда отображение

$$Z \ni z \mapsto \mu_z \in \mathrm{Spec}_R\, C^\infty(Z)$$

— гомеоморфизм. Заметим, что спектр и вещественный спектр градуированного коммутативного кольца (см. Главу 3) тоже может быть наделен топологией Зариского [30].

Следует подчеркнуть, что, если X и X' — дифференцируемые многообразия, естественный морфизм

$$C^\infty(X) \otimes C^\infty(X') \to C^\infty(X \times X'),$$
$$f(x) \otimes f'(x') \mapsto f(x)f'(x'),$$

индуцирует изоморфизм $\mathbb{R}$-алгебр Фреше

$$C^\infty(X)\, \widehat{\otimes}\, C^\infty(X') \cong C^\infty(X \times X'), \tag{1.43}$$

где слева стоит пополнение тензорного произведения модулей $C^\infty(X)\otimes C^\infty(X')$ в так называемой топологии Гротендика (см. ниже). Оно называется *топологическим тензорным произведением*. Напомним, что, если E и E' — локально выпуклые топологические векторные пространства, существует единственная локально выпуклая топология на их тензорном произведении $E\otimes E'$ такая, что для любого локально выпуклого топологического пространства F имеет место взаимно однозначное соответствие между линейными морфизмами $E\otimes E'\to F$, непрерывными в этой топологии, и непрерывными билинейными отображениями $E\times E'\to F$. Это сильнейшая топология, в которой естественное отображение $E\times E'$ в $E\otimes E'$ непрерывно [10]. Она называется *топологией Гротендика*. В частности, если E — топологическая алгебра, операция произведения в E представима как морфизм $E\widehat{\otimes} E\to E$. □

Перейдем теперь к подкатегории так называемых геометрических модулей над кольцом гладких функций $C^\infty(X)$ на многообразии X, которые допускают геометрическую интерпретацию.

Определение 1.1.9. $C^\infty(X)$-модуль P называется *геометрическим*, если

$$\bigcap_{x\in X}\mu_x P=0,$$

где μ_x — максимальный идеал гладких функций, обращающихся в 0 в точке $x\in X$. □

Коротко можно сказать, что элементы геометрического модуля над кольцом $C^\infty(X)$ определяются только своими значениями в точках многообразия X. Всякий такой $C^\infty(X)$-модуль P отождествляется со *структурным модулем* $Y(X)$ глобальных сечений некоторого гладкого векторного расслоения $Y\to X$ (необязательно конечномерного). При этом слой Y_x этого векторного расслоения над точкой $x\in X$ совпадает с фактор-модулем P/μ_xP. В частности, подкатегория *локально свободных $C^\infty(X)$-модулей* конечного ранга эквивалентна категории гладких конечномерных векторных расслоений над многообразием X, т. е. всякий такой модуль является модулем глобальных сечений некоторого конечномерного векторного расслоения над X [101, 153]. В этом случае устанавливается следующее соответствие.

- Модуль дифференцирований $\mathrm{Der}\,(C^\infty(X))$ кольца $C^\infty(X)$ отождествляется с $C^\infty(X)$-модулем $\mathcal{T}(X)$ векторных полей на дифференцируемом многообразии X.
- Модуль Ω^1 совпадает с модулем $\Omega^1(X)$ 1-форм на многообразии X.
- Оператор d^k (1.41) представляет собой обычный внешний дифференциал на алгебре внешних форм на X.
- Если $Y(X)$ — структурный модуль сечений векторного расслоения $Y\to X$, модули струй $\mathcal{J}^k(Y(X))$ отождествляются с модулями $J^kY(X)$ сечений расслоений струй $J^kY\to X$.

Если многообразие X компактно, известная теорема Серре—Свана (см. ниже Теорему 7.1.1) устанавливает эквивалентность между категорией проективных $C^\infty(X)$-модулей конечного ранга и категорией гладких векторных расслоений над X [6, 144, 151].

§ 2. Связности на модулях

Чтобы ввести связности на левых $\mathcal{A}$-модулях, рассмотрим точную последовательность (1.35). В общем случае она не расщепляется.

Определение 1.2.1. *Связностью* на левом $\mathcal{A}$-модуле P называется морфизм левых $\mathcal{A}$-модулей

$$\Gamma\colon P\to\mathcal{J}^1(P), \tag{1.44}$$

$$\Gamma(ap)=a\Gamma(p), \tag{1.45}$$

который расщепляет точную последовательность (1.35). □

Это расщепление имеет вид

$$J^1 p = \Gamma(p) + \nabla^\Gamma(p), \tag{1.46}$$

где отображение

$$\nabla^\Gamma\colon P \to \Omega^1 \otimes P, \tag{1.47}$$
$$\nabla^\Gamma(p) = \mathbf{1} \otimes p \bmod \mu^2 - \Gamma(p),$$

имеет смысл *ковариантного дифференциала* на модуле P. Следуя традиции, мы будем использовать термины «ковариантный дифференциал» и «связность» на модулях и пучках как синонимы. Из равенства (1.45) легко следует, что морфизм ∇^Γ (1.47) удовлетворяет *правилу Лейбница*

$$\nabla^\Gamma(ap) = da \otimes p + a\nabla^\Gamma(p). \tag{1.48}$$

Таким образом, мы приходим к эквивалентному определению связности на модуле.

Определение 1.2.2. *Связностью* на левом $\mathcal{A}$-модуле P называется всякий морфизм ∇ (1.47), который удовлетворяет правилу Лейбница (1.48), т. е. ∇ — это $(\Omega^1 \otimes P)$-значный дифференциальный оператор первого порядка на P. □

Принимая во внимание Определение (1.2.2) и изоморфизм (1.34), удобно представить точную последовательность (1.35) в виде

$$0 \to \Omega^1 \otimes P \to \left(\mathcal{A} \oplus \Omega^1\right) \otimes P \to P \to 0. \tag{1.49}$$

Тогда связность ∇ на левом $\mathcal{A}$-модуле P может быть определена как расщепление этой точной последовательности морфизмом левых $\mathcal{A}$-модулей.

Покажем теперь, что в случае структурных модулей векторных расслоений связность на модуле эквивалентна обычной связности на векторном расслоении.

Предложение 1.2.3. Если $Y \to X$ — векторное расслоение, существует точная последовательность

$$0 \longrightarrow T^*X \bigotimes_X Y \xrightarrow{\epsilon} J^1 Y \longrightarrow Y \longrightarrow 0 \tag{1.50}$$

векторных расслоений над X, где морфизм ϵ имеет координатный вид

$$y^i \circ \epsilon = 0, \qquad y^i_\lambda \circ \epsilon = \bar{y}^i_\lambda$$

относительно координат $\left(x^\lambda, y^i, \bar{y}^i_\lambda\right)$ на $T^*X \otimes Y$. □

Предложение 1.2.3 доказывается непосредственной проверкой законов координатных преобразований.

Благодаря каноническому расщеплению вертикального касательного расслоения VY (см. первый том [11], формулу (1.26)) точная последовательность (1.50) приводит к точной последовательности

$$0 \longrightarrow T^*X \bigotimes_Y VY \xrightarrow{\epsilon} J^1 Y \longrightarrow VY \longrightarrow 0 \tag{1.51}$$

расслоений над Y, где $y^i_\lambda \circ \epsilon = \bar{y}^i_\lambda$ относительно координат $(x^\lambda, y^i, \bar{y}^i_\lambda)$ на $T^*X \otimes VY$. Нетрудно убедиться, что любое расщепление над Y точной последовательности (1.51) порождает расщепление точной последовательности (1.50) и обратно. Поэтому всякая линейная связность Γ на векторном расслоении $Y \to X$ порождает расщепление

$$\Gamma\colon VY = Y \times Y \underset{Y}{\longrightarrow} J^1 Y,$$
$$J^1 Y = \Gamma(VY) \oplus D_\Gamma(J^1 Y), \tag{1.52}$$

точной последовательности (1.51), где D_Γ — ковариантный дифференциал относительно связности Γ (см. первый том [11], формулу (1.73)), и обратно. Так как многообразие струй J^1Y векторного расслоения $Y \to X$ является как аффинным подрасслоением тензорного расслоения $T^*X \otimes TY \to Y$, так и векторным расслоением над X, его элементами над $x \in X$ являются векторы

$$y^i e_i + dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + y^i_\lambda e_i),$$

записанные относительно послойных базисов $\{e_i\}$ векторного расслоения $Y \to X$ и голономных базисов $\{\partial_i = e_i\}$ вертикального касательного расслоения $VY \to Y$. Тогда соответствующее расщепление точной последовательности (1.50) имеет вид

$$\begin{gathered} i_Y + \Gamma\colon y^i e_i \mapsto y^i e_i \oplus \Gamma, \\ y^i e_i + dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + y^i_\lambda e_i) = y^i e_i \oplus \Gamma \oplus D_\Gamma. \end{gathered} \tag{1.53}$$

Точная последовательность векторных расслоений (1.50) задает точную последовательность структурных модулей их сечений

$$0 \to \Omega^1(X) \otimes Y(X) \to J^1Y(X) \to Y(X) \to 0. \tag{1.54}$$

Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1.2.4. Всякая точная последовательность векторных расслоений над X

$$0 \longrightarrow Y' \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{j} Y'' \longrightarrow 0 \tag{1.55}$$

допускает расщепление, т. е. существует линейный послойный морфизм

$$\Gamma\colon Y'' \underset{X}{\longrightarrow} Y$$

такой, что $j \circ \Gamma = \mathrm{Id}\, Y$ и [14, 90]

$$Y = i(Y') \oplus \Gamma(Y'').$$

Заметим, что точность последовательности (1.55) эквивалентна тому, что $Y'' = Y/Y'$ — фактор-расслоение. □

Можно сказать больше. Всякое расщепление точной последовательности (1.50) векторных расслоений предполагает расщепление точной последовательности (1.54) их структурных модулей и обратно. Для данного расщепления (1.53) точной последовательности (1.50) векторных расслоений посредством линейной связности Γ соответствующее расщепление точной последовательности (1.54) имеет вид

$$\begin{gathered} Y(X) \ni s \mapsto s \oplus \Gamma \circ s \in J^1Y(X), \\ s + J^1 s = s \oplus \Gamma \circ s \oplus \nabla^\Gamma s, \end{gathered}$$

где ∇^Γ — ковариантный дифференциал относительно связности Γ (см. первый том [11], формулу (1.74)). Это морфизм $C^\infty(X)$-модулей

$$\nabla^\Gamma\colon Y(X) \to \Omega^1(X) \otimes Y(X), \tag{1.56}$$

который удовлетворяет правилу Лейбница

$$\nabla^\Gamma(fs) = df \otimes s + f\nabla^\Gamma(s), \qquad f \in C^\infty(X), \qquad s \in Y(X),$$

и расщепляет точную последовательность

$$0 \to \Omega^1(X) \otimes Y(X) \to \left(C^\infty(X) \oplus \Omega^1(X)\right) \otimes Y(X) \to Y(X) \to 0, \tag{1.57}$$

являющуюся частным случаем точной последовательности (1.49).

Следует подчеркнуть, что, в отличие от случая векторных расслоений и их структурных модулей, произвольная точная последовательность модулей, вообще говоря, не расщепляется. Поэтому связность на модуле необязательно существует.

Морфизм (1.47) естественным образом может быть расширен до морфизма

$$\nabla\colon \Omega^1 \otimes P \to \Omega^2 \otimes P.$$

Легко убедиться, что в случае структурного модуля $P = Y(X)$ векторного расслоения $Y \to X$ морфизм

$$R = \nabla^2\colon P \to \Omega^2 \otimes P \tag{1.58}$$

задает кривизну линейной связности на Y (см. первый том [11], формулы (1.71), (1.72)). Это приводит к следующему определению кривизны алгебраической связности.

Определение 1.2.5. Морфизм R (1.58) называется *кривизной* связности ∇ на модуле P. □

В случае, когда $\mathcal{A} = C^\infty(X)$ и $\mathcal{S}$ — локально свободный $C^\infty(X)$-модуль конечного ранга, имеют место изоморфизмы

$$\Omega^1(X) = \operatorname{Hom}_{C^\infty(X)}\big(\operatorname{Der}(C^\infty(X)), C^\infty(X)\big), \tag{1.59}$$
$$\operatorname{Hom}_{C^\infty(X)}\big(\operatorname{Der}(C^\infty(X)), \mathcal{S}\big) = \Omega^1(X) \otimes \mathcal{S}.$$

Поэтому могут быть даны другие эквивалентные определения связности на $C^\infty(X)$-модулях.

Определение 1.2.6. Всякий морфизм

$$\nabla\colon \mathcal{S} \to \operatorname{Hom}_{C^\infty(X)}\big(\operatorname{Der}(C^\infty(X)), \mathcal{S}\big), \tag{1.60}$$

удовлетворяющий правилу Лейбница (1.48), называется связностью на $C^\infty(X)$-модуле $\mathcal{S}$. □

Определение 1.2.7. Связностью на $C^\infty(X)$-модуле $\mathcal{S}$ является морфизм $C^\infty(X)$-модулей

$$\operatorname{Der}(C^\infty(X)) \ni \tau \mapsto \nabla_\tau \in \operatorname{Diff}_1^-(\mathcal{S}, \mathcal{S}) \tag{1.61}$$

такой, что для любого векторного поля τ на многообразии X дифференциальный оператор первого порядка ∇_τ удовлетворяет условию

$$\nabla_\tau(fs) = (\tau \rfloor df)s + f\nabla_\tau s. \tag{1.62}$$

□

Кривизна связности (1.61) определяется как дифференциальный оператор нулевого порядка

$$R(\tau, \tau') = [\nabla_\tau, \nabla_{\tau'}] - \nabla_{[\tau,\tau']} \tag{1.63}$$

на модуле $\mathcal{S}$ для произвольной пары векторных полей $\tau, \tau' \in \operatorname{Der}(C^\infty(X))$ на многообразии X. В случае структурного модуля векторного расслоения над многообразием X это определение эквивалентно обычному определению кривизны линейной связности на этом расслоении.

Если $\mathcal{S}$ — коммутативное $C^\infty(X)$-кольцо, Определение 1.2.7 может быть видоизменено следующим образом.

Определение 1.2.8. *Связность* на $C^\infty(X)$-кольце $\mathcal{S}$ — это морфизм левых $C^\infty(X)$-модулей

$$\operatorname{Der}(C^\infty(X)) \ni \tau \mapsto \nabla_\tau \in \operatorname{Der}\mathcal{S}, \tag{1.64}$$

который является связностью на $\mathcal{S}$ как $C^\infty(X)$-модуле, т. е. удовлетворяет правилу Лейбница (1.62). □

Определение 1.2.8 предполагает дополнительно, что связность ∇_τ является дифференцированием кольца $\mathcal{S}$, чтобы сохранить его алгебраическую структуру. Две такие связности ∇_τ и ∇'_τ отличаются друг от друга дифференцированием кольца $\mathcal{S}$, ядро которого содержит подкольцо $C^\infty(X) \subset \mathcal{S}$. Кривизна связности (1.64) на кольце дается формулой (1.63).

§ 3. Связности на пучках

Хотя основные понятия теории пучков уже были приведены в первом томе [11] (см. Приложение B), мы повторим их здесь в нужном нам контексте.

Существует несколько эквивалентных определений пучка [3, 14, 147]. Начнем с его геометрического определения. *Пучком* на топологическом пространстве X называется топологическое расслоение $S \to X$, слои которого S_x, именуемые *стеблями*, являются абелевыми группами, наделенными дискретной топологией.

Предпучок считается заданным на топологическом пространстве X, если каждому открытому подмножеству $U \subset X$ сопоставлена абелева группа S_U (в частности, $S_\varnothing = 0$), а каждой паре открытых подмножеств $V \subset U$ соответствует *гомоморфизм ограничения*

$$r^U_V \colon S_U \to S_V$$

такой, что

$$r^U_U = \mathrm{Id}\, S_U, \qquad r^U_W = r^V_W r^U_V, \qquad W \subset V \subset U.$$

Всякий предпучок $\{S_U, r^U_V\}$ на топологическом пространстве X порождает пучок на X, стеблем S_x которого над точкой $x \in X$ является *прямой предел* абелевых групп S_U, $x \in U$, относительно гомоморфизмов ограничения r^U_V (см. понятие прямого предела в [7, 9], а также в § 3.1). Здесь под прямым пределом понимается конструкция, когда для каждой открытой окрестности U точки $x \in X$ всякий элемент абелевой группы $s \in S_U$ определяет элемент стебля $s_x \in S_x$, называемый *ростком* s в x. Причем два элемента $s \in S_U$ и $s' \in S_V$ задают один и тот же росток в x тогда и только тогда, когда существует открытая окрестность $W \supset U \cap V \ni x$ точки x такая, что

$$r^U_W s = r^V_W s'.$$

Пример 1.3.1. Пусть X — топологическое пространство и $C^0(U)$ — аддитивные абелевы группы непрерывных вещественных функций на открытых подмножествах $U \subset X$ вместе с естественными гомоморфизмами ограничения

$$r^U_V \colon C^0(U) \to C^0(V)$$

этих функций на $V \subset U$. Тогда $\{C^0(U), r^U_V\}$ — предпучок на X. Две непрерывные вещественные функции s и s' на X задают один и тот же росток s_x в точке $x \in X$, если они совпадают на некоторой открытой окрестности x. Пучок C^0_X, порождаемый предпучком $\{C^0(U), r^U_V\}$, называется *пучком непрерывных функций* на топологическом пространстве X. *Пучок C^∞_X гладких функций* на дифференцируемом многообразии X определяется аналогично. Упомянем также предпучок постоянных вещественных функций на открытых подмножествах топологического пространства X. Он определяет так называемый *постоянный пучок* на X, который обозначается просто $\mathbb{R}$. □

Два различных предпучка могут порождать один и тот же пучок. Обратно, всякий пучок S определяет предпучок абелевых групп $S(U)$ его локальных сечений на открытых подмножествах $U \subset X$. Он называется *каноническим предпучком* пучка S. Нетрудно показать, что пучок, порождаемый каноническим предпучком $\{S(U), r^U_V\}$ пучка S, в точности совпадает с S. Поэтому мы обычно будем отождествлять пучок и его канонический предпучок. Отметим, что, если пучок S порождается предпучком $\{S_U, r_V^U\}$, существует естественный гомоморфизм предпучков $\{S_U\} \to \{S(U)\}$, который, однако, не является ни мономорфизмом, ни эпиморфизмом.

Прямая сумма, тензорное произведение и гомоморфизмы пучков определяются естественным образом как послойные операции над абелевыми группами.

Пусть S и S' — пучки над одним и тем же топологическим пространством X и $\mathrm{Hom}\,(S|_U, S'|_U)$ — абелевы группы гомоморфизмов пучков $S|_U \to S'|_U$ для всевозможных открытых подмножеств $U \subset X$. Эти группы задают пучок $\mathrm{Hom}\,(S, S')$ на X. Следует подчеркнуть, что

$$\mathrm{Hom}\,(S, S')(U) \neq \mathrm{Hom}\,\big(S(U), S'(U)\big). \tag{1.65}$$

Как мы увидим ниже, это неравенство имеет важные последствия.

Пусть φ: $X \to X'$ — непрерывное отображение топологических пространств и S — пучок на X. *Образ* $\varphi_* S$ на X' пучка S — это пучок, задаваемый сопоставлением

$$X' \supset U \mapsto S\big(\phi^{-1}(U)\big)$$

для всякого открытого подмножества $U \subset X'$ (с учетом того, что $\varphi^{-1}(U)$ — всегда открытое подмножество X). Пусть теперь S' — пучок на X'. Чтобы определить *прообраз* $\varphi^* S'$ на X пучка S', мы сопоставим всякому открытому множеству $V \subset X$ предел абелевых групп $S'(U)$ по всем открытым подмножествам $U \subset X'$ таким, что $V \subset \varphi^{-1}(U)$, относительно вложений (напомним, что множество $\varphi(V)$, вообще говоря, не является открытым в X'). В частности, если $S' = C^\infty_{X'}$ — пучок гладких вещественных функций на многообразии X' из Примера 1.3.1, его прообраз $\varphi^* C^\infty_{X'}$ на многообразии X является пучком индуцированных функций на X.

Замечание 1.3.2. Понятие пучка обобщается на пучки коммутативных колец и алгебр, модулей над коммутативными алгебрами, а также пучки градуированных коммутативных алгебр и градуированных модулей над этими алгебрами [85]. □

Пусть $\mathcal{A}$ — пучок на топологическом пространстве X. Говорят, что пара $(X, \mathcal{A})$ является *пространством локальных колец*, если всякий стебель $\mathcal{A}_x$, $x \in X$, пучка $\mathcal{A}$ — это *локальное* коммутативное кольцо, т. е. оно содержит единственный максимальный идеал. Понятие пространства локальных колец эквивалентно геометрическому определению пучка как расслоения на локальные кольца. Однако мы будем использовать это понятие как самостоятельное, поскольку оно в явном виде включает пространство X, на котором задан пучок. В частности, в качестве морфизма пространства локальных колец $(X, \mathcal{A}) \to (X', \mathcal{A}')$ рассматривается пара (φ, Φ), состоящая из непрерывного отображения φ: $X \to X'$ и морфизма пучков Φ: $\mathcal{A}' \to \varphi_* \mathcal{A}$ на X', где, напомним, $\varphi_* \mathcal{A}$ — образ пучка $\mathcal{A}$. Морфизм (φ, Φ) называется:

- мономорфизмом, если φ — инъекция и Φ — сюръекция;
- эпиморфизмом, если φ — сюръекция, тогда как Φ — инъекция.

Пучком $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ *дифференцирований* пучка локальных колец $\mathcal{A}$ называется подпучок эндоморфизмов пучка $\mathcal{A}$ такой, что всякое сечение $u \in \mathrm{Der}\,\mathcal{A}(U)$ пучка $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ на открытом подмножестве $U \subset X$ является дифференцированием кольца $\mathcal{A}(U)$ сечений пучка $\mathcal{A}$ на U. Следует подчеркнуть, что из-за неравенства (1.65) дифференцирование кольца $\mathcal{A}(U)$, вообще говоря, не является сечением пучка $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}|_U$, поскольку может случиться, что для открытых множеств $U' \subset U \subset X$ не существует морфизма ограничения $\mathrm{Der}\,(\mathcal{A}(U)) \to \mathrm{Der}\,(\mathcal{A}(U'))$.

Пусть $(X, \mathcal{A})$ — пространство локальных колец. Пучок P на X называется *пучком* $\mathcal{A}$*-модулей*, если всякий его стебель P_x, $x \in X$, — это $\mathcal{A}_x$-модуль, или эквивалентно если $P(U)$ — это $\mathcal{A}(U)$-модуль для любого открытого подмножества $U \subset X$. Говорят, что пучок $\mathcal{A}$-модулей P является *локально свободным*, если для всякой точки $x \in X$ существует открытая окрестность U такая, что $P(U)$ является свободным $\mathcal{A}(U)$-модулем. Если все эти свободные модули имеют один и тот же ранг, пучок P называется пучком локально свободных модулей *постоянного ранга*.

Пример 1.3.3. Пучок C_X^∞ гладких функций на многообразии X из Примера 1.3.1 является пучком коммутативных колец. Стебель C_{Xx}^∞ ростков этих функций в точке $x \in X$ — это локальное кольцо, а пара (X, C_X^∞) служит примером пространства локальных колец. В частности, всякий морфизм многообразий $\varphi\colon X \to X'$ порождает индуцированный морфизм (φ, Φ) пространств локальных колец $(X, C_X^\infty) \to (X', C_{X'}^\infty)$, где

$$\Phi\bigl(C_{X'}^\infty\bigr) = (\varphi_* \circ \varphi^*)\bigl(C_{X'}^\infty\bigr) \subset \varphi_*\bigl(C_X^\infty\bigr). \tag{1.66}$$

Тем самым, мы приходим к следующему алгебраическому определению дифференцируемого многообразия [30].

Предложение 1.3.1. Пусть X — топологическое пространство, $\{U_\zeta\}$ — открытое покрытие X, и S_ζ — пучок на U_ζ для каждого элемента U_ζ этого покрытия. Предположим, что:

- если $U_\zeta \cap U_\xi \neq \varnothing$, тогда существует изоморфизм пучков
$$\rho_{\zeta\xi}\colon S_\xi|_{U_\zeta \cap U_\xi} \to S_\zeta|_{U_\zeta \cap U_\xi};$$
- эти изоморфизмы удовлетворяют условию
$$\rho_{\xi\zeta} \circ \rho_{\zeta\iota}\bigl(S_\iota|_{U_\zeta \cap U_\xi \cap U_\iota}\bigr) = \rho_{\xi\iota}\bigl(S_\iota|_{U_\zeta \cap U_\xi \cap U_\iota}\bigr)$$
для произвольной тройки U_ζ, U_ξ, U_ι, т. е. они образуют *коцикл*.

Тогда существуют пучок S на X и изоморфизмы пучков $\phi_\zeta\colon S|_{U_\zeta} \to S_\zeta$ такие, что

$$\phi_\zeta|_{U_\zeta \cap U_\xi} = \rho_{\zeta\xi} \circ \phi_\xi|_{U_\zeta \cap U_\xi}.$$

□

Предложение 1.3.2. Пусть X — паракомпактное топологическое пространство и $(X, \mathcal{A})$ — пространство локальных колец, которое локально изоморфно $(\mathbb{R}^n, C_{\mathbb{R}^n}^\infty)$. Тогда X является n-мерным дифференцируемым многообразием, и существует естественный изоморфизм пространств локальных колец $(X, \mathcal{A})$ и (X, C_X^∞). □

Возьмем произведение $X \times X'$ двух паракомпактных топологических пространств и произвольную пару их открытых подмножеств $U \subset X$ и $U' \subset X'$. Рассмотрим топологическое тензорное произведение колец $C^\infty(U) \widehat{\otimes} C^\infty(U')$ (см. Замечание 1.1.8). Такие тензорные произведения определяют пучок колец на $X \times X'$, который обозначим $C_X^\infty \widehat{\otimes} C_{X'}^\infty$. При этом изоморфизмы (1.43), взятые для всевозможных пар $U \subset X$ и $U' \subset X'$, приводят к изоморфизму пучков

$$C_X^\infty \widehat{\otimes} C_{X'}^\infty = C_{X \times X'}^\infty. \tag{1.67}$$

□

Пример 1.3.4. Пусть $Y \to X$ — векторное расслоение с типичным слоем размерности m. Ростки его сечений образуют *пучок S_Y сечений* расслоения $Y \to X$. Стебель S_{Yx} этого пучка над точкой $x \in X$ состоит из ростков сечений расслоения $Y \to X$ в окрестности точки x. Он представляет собой модуль над кольцом C_{Xx}^∞ ростков гладких функций на X в точке $x \in X$. Следовательно S_Y является пучком модулей над пучком C_X^∞ колец относительно операции поточечного умножения. Канонический предпучок пучка S_Y изоморфен предпучку локальных сечений векторного расслоения $Y \to X$. Он называется *структурным пучком* векторного расслоения $Y \to X$. Аналогично дифференцируемым многообразиям из предыдущего Примера векторное расслоение задается своим структурным пучком, локально изоморфным пучку $C_U^\infty \otimes \mathbb{R}^m$. Эти локальные пучки склеиваются согласно Предложению 1.3.1 заданием коцикла функций перехода, который является элементом множества когомологий $H^1(X, GL(m,\mathbb{R})_\infty)$ с коэффициентами в пучке $GL(m,\mathbb{R})_\infty$ гладких отображений X в $GL(m,\mathbb{R})$ (см. первый том [11], Приложение B). При этом слой Y_x векторного расслоения $Y \to X$ над точкой $x \in X$ изоморфен фактору $S_{Yx}/\mathcal{M}_x$ стебля S_{Yx} структурного пучка над x по подмодулю $\mathcal{M}_x \subset S_{Yx}$ ростков сечений $Y \to X$, обращающихся в 0 в точке x.

Аналогично можно определить пучок сечений произвольного расслоения $Y \to X$. Он представляет собой *пучок множеств*, который в общем случае не наделен какой-либо алгебраической структурой. □

Перейдем теперь к определению связности на пучках. Пусть $(X, \mathcal{A})$ — пространство локальных колец и P — пучок $\mathcal{A}$-модулей на X. Для произвольного открытого подмножества $U \subset X$ рассмотрим модуль струй $\mathcal{J}^1(P(U))$ модуля $P(U)$ сечений пучка P на U. Он состоит из элементов тензорного произведения модулей $\mathcal{A}(U) \otimes P(U)$ по модулю поточечных соотношений (1.15). Следовательно для произвольных открытых подмножеств $V \subset U \subset X$ существует морфизм ограничения $\mathcal{J}^1(P(U)) \to \mathcal{J}^1(P(V))$ и модули струй $\mathcal{J}^1(P(U))$ образуют предпучок. Этот предпучок порождает *пучок* $\mathcal{J}^1 P$ *струй* пучка P. Аналогично вводится пучок струй $\mathcal{J}^1\mathcal{A}$ пучка локальных колец $\mathcal{A}$. Поскольку для всякого открытого подмножества $U \subset X$ соотношения (1.15) и (1.18) на кольце $\mathcal{A}(U)$ и модулях $P(U)$, $\mathcal{J}^1(P(U))$, $\mathcal{J}^1(\mathcal{A}(U))$ являются поточечными, они перестановочны с морфизмами ограничения. Поэтому существует прямой предел факторов по модулю этих соотношений [9]. В частности, мы получаем: пучок $\Omega^1\mathcal{A}$ 1-форм пучка $\mathcal{A}$, изоморфизм пучков

$$\mathcal{J}^1(P) = \left(\mathcal{A} \oplus \Omega^1\mathcal{A}\right) \otimes P,$$

а также точные последовательности пучков

$$0 \to \Omega^1\mathcal{A} \otimes P \to \mathcal{J}^1(P) \to P \to 0, \tag{1.68}$$

$$0 \to \Omega^1\mathcal{A} \otimes P \to \left(\mathcal{A} \oplus \Omega^1\mathcal{A}\right) \otimes P \to P \to 0, \tag{1.69}$$

которые аналогичны соответственно фактор-модулю (1.22), изоморфизму модулей (1.34) и точным последовательностям модулей (1.35) и (1.49).

Замечание 1.3.5. Следует подчеркнуть, что из-за неравенства (1.65) соотношение дуальности (1.38) не переносится в общем случае на пучки $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ и $\Omega^1\mathcal{A}$, если последние не являются локально свободными пучками конечного ранга. Заметим также, что, если P — локально свободный пучок конечного ранга, то таковым является и его пучок струй $\mathcal{J}^1 P$ (см. Пример 1.1.4). □

Следуя Определениям 1.2.1, 1.2.2 связностей на модулях, мы приходим к следующему определению связностей на пучках.

Определение 1.3.3. Пусть $(X, \mathcal{A})$ — пространство локальных колец и P — пучок $\mathcal{A}$-модулей на топологическом пространстве X. *Связностью* на пучке P называется расщепление точной последовательности (1.68), или эквивалентно точной последовательности (1.69). □

Чтобы установить соответствие между связностями на модулях и связностями на пучках, напомним некоторые факты, касающиеся точных последовательностей пучков.

Поскольку при переходе к прямому пределу свойство точной последовательности сохраняется [9], точная последовательность предпучков индуцирует точную последовательность порождаемых этими предпучками пучков (см. первый том [11], Приложение B). Более того, если точная последовательность предпучков расщепляется, имеет место соответствующее расщепление точной последовательности пучков, порождаемых этими предпучками. Обратное утверждение, однако, не является столь однозначным.

Рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \to S' \to S \to S'' \to 0 \tag{1.70}$$

на топологическом пространстве X. Как и в случае векторных расслоений, пучок S'' из этой точной последовательности является фактор-пучком S/S'. Для всякого открытого подмножества $U \subset X$ точная последовательность (1.70) порождает следующие две точные последовательности абелевых групп:

$$0 \to S'(U) \to S(U) \to S''(U) \tag{1.71}$$

и

$$0 \to S'(U) \to S(U) \to S''_U \to 0, \tag{1.72}$$

где $S''_U = S(U)/S'(U)$ в общем случае не совпадает с группой сечений $S''(U)$ на U фактор-пучка S/S'. Пучок S на топологическом пространстве X называется *вялым*, если для произвольной пары открытых множеств $U \subset U'$ в X морфизм ограничения $S(U') \to S(U)$ является сюръекцией. Это эквивалентно условию, что любое локальное сечение $s \in S(U)$ пучка S на открытом подмножестве $U \subset X$ может быть продолжено до его глобального сечения $s \in S(X)$. Тем самым справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.3.4. Если пучок S' из точной последовательности (1.70) является вялым, тогда $S''_U = S''(U)$ и имеет место точная последовательность модулей

$$0 \to S'(U) \to S(U) \to S''(U) \to 0 \tag{1.73}$$

для любого открытого подмножества $U \subset X$, а значит, существует точная последовательность

$$0 \to \{S'(U)\} \to \{S(U)\} \to \{S''(U)\} \to 0 \tag{1.74}$$

канонических предпучков пучков из точной последовательности (1.70). □

Предположим, что точная последовательность пучков (1.70) допускает расщепление, т. е.

$$S = S' \oplus S'',$$

тогда

$$\{S(U)\} = \{S'(U)\} \oplus \{S''(U)\} \tag{1.75}$$

и канонические предпучки образуют точную последовательность (1.74), а прямая сумма (1.75) является ее расщеплением.

Таким образом, связности на пучках и модулях могут быть сопоставлены между собой следующим образом.

Предложение 1.3.5. Если существует связность на пучке P из Определения 1.3.3, тогда для всякого открытого подмножества $U \subset X$ существует связность на модуле $P(U)$ локальных сечений пучка P на U. Обратно, если для любой пары открытых подмножеств $V \subset U \subset X$ существуют связности на модулях $P(U)$ и $P(V)$ его локальных сечений, связанные морфизмом ограничения, тогда пучок P допускает связность. □

Пример 1.3.6. Пусть $Y \to X$ — векторное расслоение. Всякая линейная связность Γ на $Y \to X$ индуцирует связность на структурном модуле этого расслоения $Y(X)$ так, что для любого открытого подмножества $U \subset X$ ограничение $\Gamma|_U$ является связностью на модуле локальных сечений $Y(U)$. Тем самым мы получаем связность на структурном пучке Y_X векторного расслоения $Y \to X$. Обратно, связность на структурном пучке Y_X векторного расслоения $Y \to X$ задает связность на его структурном модуле $Y(X)$ и, следовательно, связность на самом векторном расслоении $Y \to X$. □

Непосредственным следствием Предложения 1.3.5 является тот факт, что точная последовательность пучков (1.69) расщепляется тогда и только тогда, когда существует морфизм пучков

$$\nabla\colon P \to \Omega^1 A \otimes P, \tag{1.76}$$

удовлетворяющий правилу Лейбница

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s), \qquad f \in A(U), \qquad s \in P(U),$$

для любого открытого подмножества $U \in X$. Это приводит к следующему эквивалентному определению связности на пучках (в духе Определения 1.2.2 связности на модулях).

Определение 1.3.6. Морфизм пучков (1.76) является *связностью* на пучке P. □

Как и для связностей на модулях, *кривизна* связности (1.76) на пучке P дается выражением

$$R = \nabla^2\colon P \to \Omega^2_X \otimes P. \tag{1.77}$$

Связность на пучке существует необязательно, поскольку точная последовательность (1.69) может не расщепляться. Приведем следующий критерий существования связности на пучке, сформулированный в терминах групп когомологий. Он основывается на том факте, что точная последовательность пучков (1.70) на паракомпактном топологическом пространстве X индуцирует точную последовательность групп когомологий

$$\ldots \to H^{k-1}(X; S'') \to H^k(X; S') \to H^k(X; S) \to H^k(X; S'') \to \ldots \tag{1.78}$$

с коэффициентами в пучках S', S и S'' [14].

Замечание 1.3.7. Не повторяя определения групп когомологий со значениями в пучках (см. первый том [11], Приложение B, или, например, [14]), напомним некоторые нужные нам свойства этих групп когомологий.

Пусть, как и раньше, S — пучок на топологическом пространстве X. Группа когомологий $H^0(X; S)$ по определению изоморфна абелевой группе $S(X)$ глобальных сечений пучка S. Если S — пучок $\mathcal{K}$-модулей, группы когомологий $H^k(X; S)$ — тоже $\mathcal{K}$-модули.

Пучок S на топологическом пространстве X называется *ацикличным*, если группы когомологий $H^{k>0}(X; S)$ тривиальны. Например, вялый пучок ацикличен.

Пучок S на топологическом пространстве X называется *мягким*, если любое локальное сечение этого пучка на замкнутом подмножестве пространства X является ограничением некоторого глобального сечения пучка S. Всякий мягкий пучок на паракомпактном топологическом пространстве ацикличен, а вялый пучок является мягким.

Пучок S на паракомпактном топологическом пространстве X именуется *тонким*, если для всякого *локально конечного* открытого покрытия $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ пространства X (т. е. любая точка X имеет окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом элементов этого покрытия) существует система $\{h_i\}$ эндоморфизмов $h_i\colon S \to S$ таких, что:

- для каждого i найдется замкнутое подмножество $V_i \subset U_i$ такое, что $h_i(S_x) = 0$, если $x \notin V_i$;
- $\sum\limits_{i\in I} h_i$ — тождественное отображение пучка S.

Тонкий пучок является мягким и ацикличным.

В частности, пусть S — пучок модулей над пучком C^0_X непрерывных вещественных функций на паракомпактном пространстве X и $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ — локально конечное покрытие X. Поскольку X паракомпактно, мы имеем ассоциированное с покрытием $\mathcal{U}$ *разбиение единицы* $\{\phi_i\}$, т. е.:

(i) ϕ_i — вещественные неотрицательные непрерывные функции на X;

(ii) $\operatorname{supp}\phi_i \subset U_i$;

(iii) $\sum\limits_{i\in I} \phi_i(x) = 1$ для всех $x \in X$.

Элементы ϕ_i этого разбиения единицы могут быть использованы для задания эндоморфизмов h_i: $S \to S$ из определения тонкого пучка. А именно, для всякого открытого подмножества $U \subset X$ положим $h_i(f) = \phi_i f$, $f \in S(U)$. Это эндоморфизм канонического предпучка $\{S(U)\}$ пучка S и, следовательно, эндоморфизм пучка S. Нетрудно убедиться, что эти эндоморфизмы удовлетворяют требуемым условиям из определения тонкого пучка, т. е. пучок S тонок. Если X — гладкое многообразие и $\mathcal{U}$ — открытое покрытие X, всегда существует ассоциированное с $\mathcal{U}$ разбиение единицы, выполняемое гладкими функциями. Отсюда, в частности, следует, что пучок C^∞_X гладких функций на многообразии X является тонким и ацикличным; то же относится к пучкам сечений дифференцируемых векторных расслоений над X.

Предложение 1.3.7. [30]. Пусть f: $X \to X'$ — непрерывное отображение и S — пучок на топологическом пространстве X. Если всякая точка $x' \in X'$ имеет базис открытых окрестностей $\{U\}$ таких, что пучки $S|_{f^{-1}(U)}$ ацикличны, тогда группы когомологий $H^*(X; S)$ и $H^*(X'; f_*S)$ изоморфны. □

Рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{h} S_0 \xrightarrow{h^0} S_1 \xrightarrow{h^1} \dots \qquad (1.79)$$

на паракомпактном топологическом пространстве X. Она называется *резольвентой* пучка S, если группы когомологий $H^q(X; S_p)$ тривиальны для $q \geqslant 1$ и $p \geqslant 0$. Например, это имеет место, когда пучки $S_{p\geqslant 0}$ тонкие. В этом случае точная последовательность (1.79) называется *тонкой резольвентой* пучка S. Точная последовательность пучков (1.79) порождает коцепной комплекс структурных модулей этих пучков

$$0 \longrightarrow S(X) \xrightarrow{h_*} S_0(X) \xrightarrow{h^0_*} S_1(X) \xrightarrow{h^1_*} \dots, \qquad (1.80)$$

который, вообще говоря, является точным только в члене $S(X)$. Имеет место известная *теорема Де Рама* (см., например, [14]).

Теорема 1.3.8. Если дана резольвента (1.79) пучка S на паракомпактном топологическом пространстве X, q-я группа когомологий коцепного комплекса (1.80) изоморфна группе когомологий $H^q(X; S)$ с коэффициентами в пучке S, т. е.

$$H^{q>0}(X; S) = \operatorname{Ker} h^q_* / \operatorname{Im} h^{q-1}_*, \qquad H^0(X; S) = \operatorname{Ker} h^0_*. \qquad (1.81)$$

□

Например, пусть X — связное гладкое многообразие, $S = \mathbb{R}$ — постоянный пучок вещественных функций на X и $S_p = \Omega^p_X$ — пучки внешних p-форм на X. Существует последовательность тонких пучков

$$0 \to \mathbb{R} \to \Omega^0_X \to \Omega^1_X \to \dots . \qquad (1.82)$$

Она является точной в соответствии с известной леммой Пуанкаре и, таким образом, представляет собой тонкую резольвенту постоянного пучка $\mathbb{R}$ на X. Соответствующая последовательность структурных модулей (1.80) совпадает с известным комплексом Де Рама внешних дифференциальных форм на многообразии X (см. первый том [11], формулу (3.23)). Согласно Теореме 1.3.8 имеет место изоморфизм групп когомологий $H^q(X; \mathbb{R})$ со значениями в постоянном пучке $\mathbb{R}$ на X и групп когомологий Де Рама $H^q(X)$. □

Вернемся теперь к точной последовательности (1.69). Пусть $(X, \mathcal{A})$ — пространство локальных колец и P — локально свободный пучок $\mathcal{A}$-модулей. Тогда мы имеем точную последовательность пучков

$$0 \to \operatorname{Hom}(P, \Omega^1\mathcal{A} \otimes P) \to \operatorname{Hom}\big(P, (\mathcal{A} \oplus \Omega^1\mathcal{A}) \otimes P\big) \to \operatorname{Hom}(P, P) \to 0$$

и соответствующую точную последовательность (1.78) групп когомологий

$$0 \to H^0\big(X; \operatorname{Hom}\big(P, \Omega^1\mathcal{A}\otimes P\big)\big) \to H^0\big(X; \operatorname{Hom}\big(P, (\mathcal{A}\oplus\Omega^1\mathcal{A})\otimes P\big)\big) \to$$
$$\to H^0\big(X; \operatorname{Hom}(P,P)\big) \to H^1\big(X; \operatorname{Hom}\big(P, \Omega^1\mathcal{A}\otimes P\big)\big) \to \ldots .$$

Очевидно, что тождественный морфизм $\mathrm{Id}\colon P \to P$ принадлежит группе $H^0(X;$ $\operatorname{Hom}(P,P))$. Его образ в $H^1(X; \operatorname{Hom}(P, \Omega^1\mathcal{A}\otimes P))$ называется *классом Атьи*. Если этот класс тривиален, существует элемент в $\operatorname{Hom}(P, (\mathcal{A}\oplus\Omega^1\mathcal{A})\otimes P))$, образом которого в $\operatorname{Hom}(P,P)$ является $\mathrm{Id}\,P$, т.е. имеет место расщепление точной последовательности (1.69).

В частности, пусть X — дифференцируемое многообразие и $\mathcal{A} = C^\infty_X$ — пучок гладких функций на X. Пучок $\operatorname{Der} C^\infty_X$ его дифференцирований изоморфен пучку векторных полей на многообразии X. Отсюда следует, что:

- для любой пары открытых множеств $V \subset U$ существует морфизм ограничения $\operatorname{Der}(C^\infty(U)) \to \operatorname{Der}(C^\infty(V))$;
- $\operatorname{Der} C^\infty_X$ — локально свободный пучок C^∞_X-модулей конечного ранга;
- пучок векторных полей $\operatorname{Der} C^\infty_X$ и пучок 1-форм Ω^1_X на многообразии X взаимно дуальны.

Пусть теперь P — локально свободный пучок C^∞_X-модулей. Тогда $\operatorname{Hom}(P, \Omega^1_X\otimes P)$ тоже локально свободный пучок C^∞_X-модулей. Он является тонким и ацикличным. Его группа когомологий $H^1\big(X; \operatorname{Hom}\big(P, \Omega^1_X\otimes P\big)\big)$ тривиальна, и точная последовательность

$$0 \to \Omega^1_X\otimes P \to \big(C^\infty_X\oplus\Omega^1_X\big)\otimes P \to P \to 0 \qquad (1.83)$$

допускает расщепление.

В заключение рассмотрим еще пучок S коммутативных C^∞_X-колец на многообразии X. Отталкиваясь от Определения 1.2.8, мы приходим к следующему определению связности на этом пучке.

Определение 1.3.9. Всякий морфизм

$$\operatorname{Der} C^\infty_X \ni \tau \to \nabla_\tau \in \operatorname{Der} S,$$

который является связностью на S как пучке C^∞_X-модулей, называется *связностью на пучке S колец*. □

Кривизна этой связности дается выражением

$$R(\tau,\tau') = [\nabla_\tau, \nabla_{\tau'}] - \nabla_{[\tau,\tau']}, \qquad (1.84)$$

аналогичным выражению (1.63) для кривизны связности на модулях.

Глава 2

Связности в квантовой механике

В третьем томе [13] были описаны некоторые квантовомеханические системы, в которых применялись обычные связности на расслоениях. Эта глава посвящена алгебраическим связностям в квантовой механике, которые описывают эволюцию квантовых систем.

§ 1. Эволюция квантовых систем

Во втором томе [12], § 3.2, было показано, что решения уравнений Гамильтона неавтономной классической механики являются интегральными сечениями гамильтоновой связности, т. е. эволюция в классической гамильтоновой механике описывается как параллельный перенос по времени. Такое описание эволюции можно распространить и на квантовую механику [22, 91, 113, 127].

Следует подчеркнуть, что в квантовой механике время играет роль классического параметра. Действительно, все коммутационные соотношения между операторами в квантовой механике являются одновременными, а вычисление средних значений операторов наблюдаемых не предполагает интегрирования по времени. Таким образом, в каждый момент времени мы имеем определенную квантовую систему, и для разных моментов времени эти квантовые системы различны, хотя, возможно, и изоморфны друг другу.

Напомним (см. третий том [13], а также [2, 5, 15]), что в рамках алгебраической квантовой теории квантовая система характеризуется некоторой C^*-алгеброй наблюдаемых A и положительной (следовательно непрерывной) формой ϕ на A, которая определяет представление π_ϕ алгебры A в гильбертовом пространстве E_ϕ с тотализирующим вектором ξ_ϕ такое, что

$$\phi(a) = \langle \pi_\phi(a)\xi_\phi | \xi_\phi \rangle, \quad \forall\, a \in A.$$

Говорят, что $\phi(a)$ — среднее значение оператора a в состоянии ξ_ϕ.

Таким образом, чтобы описать эволюцию квантовомеханической системы, каждой точке оси времени $t \in \mathbb{R}$ следует сопоставить некоторую C^*-алгебру A_t, трактуя ее как алгебру наблюдаемых квантовой системы в момент времени t. В результате мы имеем дело с семейством одновременных C^*-алгебр A_t, параметризуемым осью времени $\mathbb{R}$. Предположим для простоты, что все C^*-алгебры A_t изоморфны друг другу и некоторой C^*-алгебре A с единицей. Более того, пусть они образуют локально тривиальное гладкое банахово расслоение $P \to \mathbb{R}$ с типичным слоем A, функциями перехода которого являются автоморфизмы C^*-алгебры A. Гладкие сечения α расслоения C^*-алгебр $P \to \mathbb{R}$ составляют инволютивную алгебру относительно поточечных операций. Это также бимодуль $P(\mathbb{R})$ над кольцом $C^\infty(\mathbb{R})$ гладких вещественных функций на $\mathbb{R}$.

В соответствии с Определением 1.2.8, обобщаемом на некоммутативные алгебры, связность ∇ на $C^\infty(\mathbb{R})$-алгебре $P(\mathbb{R})$ ставит в соответствие стандартному векторному полю ∂_t на $\mathbb{R}$ дифференцирование этой алгебры

$$\nabla_t \in \mathrm{Der}\,(P(\mathbb{R})), \tag{2.1}$$

которое удовлетворяет правилу Лейбница

$$\nabla_t(f\alpha) = \partial_t f\alpha + f\nabla_t\alpha, \quad \alpha \in P(\mathbb{R}), \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Очевидно, что расслоение $P \to \mathbb{R}$ является тривиальным, хотя оно может не иметь какую-либо каноническую тривиализацию. Если его тривиализация $P = \mathbb{R} \times A$ задана, дифференцирование ∇_t (2.1) принимает вид

$$\nabla_t(\alpha) = [\partial_t - \delta(t)](\alpha), \tag{2.2}$$

где операторы $\delta(t)$, рассматриваемые в каждой точке $t \in \mathbb{R}$, представляют собой дифференцирования C^*-алгебры A такие, что

$$\delta_t(ab) = \delta_t(a)b + a\delta_t(b), \qquad \delta_t(a^*) = \delta_t(a)^*.$$

Как обычно, сечение $\alpha(t)$ расслоения $P \to \mathbb{R}$, т. е. элемент модуля $P(\mathbb{R})$, называется интегральным сечением связности (2.2), если

$$\nabla_t(\alpha) = [\partial_t - \delta(t)](\alpha) = 0. \tag{2.3}$$

Тогда уравнение (2.3) — это *уравнение Гейзенберга*, описывающее квантовую эволюцию. Интегральное сечение $\alpha(t)$ связности ∇ является решением этого уравнения, и можно сказать, что $\alpha(t)$ — геодезическая кривая в алгебре A.

В частности, пусть операторы дифференцирования $\delta(t) = \delta$ одни и те же для всех $t \in \mathbb{R}$. Если δ — генератор 1-параметрической группы g_r автоморфизмов C^*-алгебры A (см. третий том [13], § 3.2), тогда для любого элемента $a \in A$ кривая

$$\alpha(t) = g_t(a), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

в A является решением уравнения Гейзенберга (2.3).

Существуют определенные условия для того, чтобы дифференцирование C^*-алгебры с единицей определяло 1-параметрическую группу ее автоморфизмов [43, 130]. В частности, напомним Предложение 3.2.4 из третьего тома [13].

Предложение 2.1.1. Если дифференцирование δ является ограниченным оператором в C^*-алгебре A, тогда δ — генератор 1-параметрической группы

$$g_r = \exp\{r\delta\}, \qquad r \in \mathbb{R},$$

автоморфизмов A, и обратно. Эта группа непрерывна в равномерной операторной топологии на группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}(A)$ C^*-алгебры A. Более того, для всякого представления π алгебры A в гильбертовом пространстве E_π существует самосопряженный ограниченный оператор $\mathcal{H}$ в E_π такой, что

$$\pi(\delta(a)) = i[\mathcal{H}, \pi(a)], \tag{2.5}$$
$$\pi(g_r(a)) = e^{ir\mathcal{H}}\pi(a)e^{-ir\mathcal{H}},$$

для всех $a \in A$ и $r \in \mathbb{R}$. □

Отметим, что, если область определения $D(\delta)$ дифференцирования δ C^*-алгебры A совпадает со всей алгеброй A, оператор дифференцирования ограничен. Таким образом, по самому своему определению дифференцирования δ_t, $t \in \mathbb{R}$, в связности ∇_t (2.2) предполагаются ограниченными. Отсюда следует, что, если квантовомеханическая система является консервативной, т. е. $\delta_t = \delta$ для всех моментов времени $t \in \mathbb{R}$, уравнение Гейзенберга (2.3) имеет решение (2.4) через любую наперед заданную точку произведения $\mathbb{R} \times A$ в соответствии с Предложением 2.1.1. Из Предложения 2.1.1 также следует, что описание эволюции консервативной квантовомеханической системы в гейзенберговской и шрёдингеровской картинах (основанных соответственно на уравнениях Гейзенберга и Шрёдингера) эквивалентны.

Проблема возникает в связи с тем, что нетривиальные ограниченные дифференцирования C^*-алгебры не всегда существуют. Более того, если кривая g_r, $r \in \mathbb{R}$, в $\mathrm{Aut}(A)$

непрерывна относительно равномерной операторной топологии на $\mathrm{Aut}(A)$, тогда для любого элемента $a \in A$ кривая $g_r(a)$ в C^*-алгебре A также непрерывна, но обратное утверждение, вообще говоря, неверно. В то же время, кривая g_r, $r \in \mathbb{R}$, в $\mathrm{Aut}(A)$ непрерывна относительно сильной операторной топологии на $\mathrm{Aut}(A)$ тогда и только тогда, когда для любого элемента $a \in A$ кривая $g_r(a)$ в A непрерывна.

Поэтому при описании квантовой эволюции нас прежде всего интересуют сильно непрерывные 1-параметрические группы автоморфизмов C^*-алгебр. В третьем томе [13], § 3.2 (см. также [43, 130]), были приведены достаточные условия для того, чтобы дифференцирование C^*-алгебры A было генератором сильно непрерывной группы автоморфизмов A. Отметим только, что такое дифференцирование δ имеет плотную область определения $D(\delta)$ в A и не является ограниченным на $D(\delta)$. Если же предположить, что дифференцирование δ ограничено на своей области определения $D(\delta)$, тогда оно может быть однозначно расширено до ограниченного дифференцирования на всей алгебре A, а такие дифференцирования, как уже отмечалось, не всегда существуют. Таким образом, если эволюция квантовомеханической системы характеризуется сильно непрерывной 1-параметрической группой автоморфизмов алгебры наблюдаемых, следует допустить, что связность ∇_t (2.2) не определена на всей алгебре $P(\mathbb{R})$ сечений расслоения C^*-алгебр $P \to \mathbb{R}$. В этом случае приходится иметь дело с обобщенной связностью, задаваемой операторами параллельного переноса, генераторы которых могут не существовать [22]. Может также случиться, что представление π алгебры A в гильбертовом пространстве E_π не допускает представления сильно непрерывной 1-параметрической группы g_r автоморфизмов A унитарными операторами e^{irH} (2.5) в E_π. Поэтому шрёдингеровская картина, вообще говоря, не подходит для описания квантовой эволюции, задаваемой сильно непрерывной 1-параметрической группой автоморфизмов алгебры наблюдаемых.

Вернемся снова к неконсервативному уравнению Гейзенберга (2.3). Потребуем, чтобы во все моменты времени $t \in \mathbb{R}$ дифференцирования $\delta(t)$ были генераторами 1-параметрических групп автоморфизмов C^*-алгебры A. Тогда оператор параллельного переноса в A относительно связности ∇_t (2.2) на отрезке $[0,t]$ может быть задан T-упорядоченной операторной экспонентой

$$G_t = T \exp\left\{ \int_0^t \delta(t')\, dt' \right\} \tag{2.6}$$

и для всякого элемента $a \in A$ существует решение

$$\alpha(t) = G_t(a), \qquad t \in \mathbb{R}^+,$$

уравнения Гейзенберга (2.3), проходящее через a.

Предположим теперь, что все одновременные C^*-алгебры наблюдаемых A_t изоморфны алгебре фон Неймана $B(E)$ ограниченных операторов в некотором гильбертовом пространстве E. В этом частном случае квантовая эволюция может быть описана уравнением Шрёдингера.

Рассмотрим локально тривиальное расслоение гильбертовых пространств $\Pi \to \mathbb{R}$ с типичным слоем E и гладкими функциями перехода (см. гильбертовы многообразия в третьем томе [13], § 1.7). Гладкие сечения расслоения $\Pi \to \mathbb{R}$ образуют бимодуль $\Pi(\mathbb{R})$ над кольцом $C^\infty(\mathbb{R})$ гладких вещественных функций на $\mathbb{R}$. Согласно Определению 1.2.7, связность ∇ на модуле $\Pi(\mathbb{R})$ ставит в соответствие стандартному векторному полю ∂_t на оси времени $\mathbb{R}$ дифференциальный оператор первого порядка

$$\nabla_t \in \mathrm{Diff}_1(\Pi(\mathbb{R}), \Pi(\mathbb{R})), \tag{2.7}$$

который удовлетворяет правилу Лейбница

$$\nabla_t(f\psi) = \partial_t f \psi + f \nabla_t \psi, \quad \psi \in \Pi(\mathbb{R}), \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Выберем некоторую тривиализацию $\Pi = \mathbb{R} \times E$. Тогда оператор ∇_t (2.7) принимает вид

$$\nabla_t(\psi) = (\partial_t - i\mathcal{H}(t))\psi, \tag{2.8}$$

где $\mathcal{H}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, — ограниченные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве E.

Замечание 2.1.1. Следует отметить, что любой ограниченный самосопряженный оператор $\mathcal{H}$ в гильбертовом пространстве E задает ограниченное внутреннее дифференцирование

$$\delta(a) = i[\mathcal{H}, a], \qquad a \in B(E), \tag{2.9}$$

алгебры фон Неймана $B(E)$. Обратно, всякое ограниченное дифференцирование алгебры $B(E)$ является внутренним, т. е. принимает вид (2.9), где $\mathcal{H}$ — самосопряженный элемент из $B(E)$. Поэтому операторы $\mathcal{H}(t)$ в выражении (2.8) с необходимостью являются ограниченными и самосопряженными. □

Как обычно, сечение $\psi(t)$ расслоения гильбертовых пространств $\Pi \to \mathbb{R}$ называется интегральным сечением связности ∇_t (2.8), если оно удовлетворяет уравнению

$$\nabla_t(\psi) = (\partial_t - i\mathcal{H}(t))\psi = 0. \tag{2.10}$$

Оно имеет смысл *уравнения Шрёдингера* квантовой системы с гамильтонианом $\mathcal{H}(t)$.

В частности, пусть квантовая система является консервативной, т. е. гамильтониан $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}$ в уравнении Шрёдингера (2.10) не зависит от времени. Тогда для любой точки $y \in E$ существует решение

$$\psi(t) = e^{it\mathcal{H}}y, \qquad t \in \mathbb{R},$$

консервативного уравнения Шрёдингера. Если уравнение Шрёдингера (2.10) не консервативно, оператор параллельного переноса в гильбертовом пространстве E относительно связности ∇_t (2.8) на отрезке $[0, t]$ может быть задан T-упорядоченной операторной экспонентой

$$G_t = T \exp\left\{ i \int_0^t \mathcal{H}(t')\, dt' \right\}. \tag{2.11}$$

Тогда для любого вектора $y \in E$ мы получаем решение

$$\psi(t) = G_t y, \qquad t \in \mathbb{R}^+, \tag{2.12}$$

уравнения Шрёдингера (2.10), проходящее через y.

Подчеркнем, что оператор G_t (2.11) является элементом группы $\mathrm{U}(E)$ унитарных операторов в гильбертовом пространстве E. Это вещественная бесконечномерная группа Ли относительно равномерной операторной топологии. Ее алгебра Ли — вещественная алгебра всех антисамосопряженных ограниченных операторов $i\mathcal{H}$ в E относительно коммутатора $[i\mathcal{H}, i\mathcal{H}']$. Оператор G_t (2.11) по построению удовлетворяет уравнению

$$\partial_t G_t - i\mathcal{H}G_t = 0. \tag{2.13}$$

Это уравнение инвариантно относительно правых сдвигов $G_t \mapsto G_t g$, $\forall g \in \mathrm{U}(E)$. Поэтому

$$G_t\colon\ (0, g) \mapsto (t, G_t g)$$

можно рассматривать как оператор параллельного переноса в тривиальном главном расслоении $\mathbb{R} \times \mathrm{U}(E)$ над $\mathbb{R}$ со структурной группой $\mathrm{U}(E)$. Соответственно оператор (2.6) представляет собой оператор параллельного переноса в тривиальном групповом расслоении $\mathbb{R} \times \mathrm{Aut}\,(A)$, где группа $\mathrm{Aut}\,(A)$ действует на себя по присоединенному представлению.

Замечание 2.1.2. В следующем параграфе задание квантовой эволюции как параллельного переноса в главном расслоении будет распространено на квантовомеханические системы с несколькими классическими параметрами, зависящими от времени. Это приводит к описанию явлений типа фазы Берри. □

Отметим, что 1-параметрическая группа G_t, $t \in \mathbb{R}$, определяемая уравнением (2.13), *непрерывна в равномерной операторной топологии на группе унитарных операторов* $\mathrm{U}(E)$ в гильбертовом пространстве E. Обратимся теперь к более общему случаю, когда кривая G_t, $t \in \mathbb{R}$, непрерывна относительно сильной операторной топологии на $B(E)$. Тогда кривые $\psi(t) = G_t y$, $y \in E$, в E тоже непрерывны, но могут быть недифференцируемыми. Соответственно гамильтониан $\mathcal{H}(t)$ в уравнении Шрёдингера (2.10) уже не является ограниченным оператором. Поскольку группа $\mathrm{U}(E)$ не является топологической группой в сильной операторной топологии, произведение $\mathbb{R} \times \mathrm{U}(E)$ не является ни гладким, ни главным расслоением над $\mathbb{R}$. Поэтому обычное понятие связности неприменимо к этому расслоению. В то же время, как уже отмечалось, можно ввести обобщенные связности, описываемые кривыми и операторами параллельного переноса, но не их генераторами [22].

§ 2. Связности Берри

Имеется обширная литература (см., например, [20, 27, 38, 96, 119, 156]), посвященная геометрическому и топологическому анализу явления, называемого фазой Берри, в квантовомеханических системах с классическими параметрами, зависящими от времени. Во втором томе [12], § 3.9, классические механические системы с такими параметрами были описаны в терминах композиционных расслоений и композиционных связностей. Здесь это описание распространяется на квантовомеханические системы [113].

Рассмотрим квантовые системы, зависящие от конечного числа вещественных классических параметров, представляемых сечениями гладкого расслоения $\Sigma \to \mathbb{R}$. Для простоты зафиксируем тривиализацию этого расслоения $\Sigma = \mathbb{R} \times Z$ с координатами (t, σ^m). Хотя может случиться, что расслоение параметров $\Sigma \to \mathbb{R}$ не имеет какой-либо преимущественной тривиализации, например, если один из параметров — скорость системы отсчета.

В предыдущем параграфе мы охарактеризовали время с математической точки зрения как классический параметр в квантовой механике. Эта характеристика распространяется и на другие классические параметры. А именно, сопоставим каждой точке $\sigma \in \Sigma$ расслоения параметров Σ некоторую C^*-алгебру A_σ, интерпретируя ее как алгебру наблюдаемых квантовой системы при фиксированных значениях параметров (t, σ^m).

Замечание 2.2.1. Важно различать классические параметры и координаты, от которых может зависеть волновая функция протяженных систем (см. третий том [13], § 4.7). А именно, при вычислении средних значений оператора наблюдаемых интегрирование по пространству классических параметров не производится. □

Чтобы более четко выделить эффект фазы Берри, упростим рассматриваемую квантовую систему с параметрами. Предположим, что все C^*-алгебры A_σ, $\sigma \in \Sigma$, изоморфны одной и той же алгебре фон Неймана $B(E)$ ограниченных операторов в некотором гильбертовом пространстве E, и рассмотрим локально тривиальное расслоение гильбертовых пространств $\Pi \to \Sigma$ над многообразием параметров Σ с типичным слоем E и гладкими функциями перехода. Гладкие сечения расслоения $\Pi \to \Sigma$ образуют бимодуль $\Pi(\Sigma)$ над кольцом $C^\infty(\Sigma)$ гладких вещественных функций на Σ. В соответствии с Определением 1.2.7 связность $\widetilde\nabla$ на модуле $\Pi(\Sigma)$ сопоставляет всякому векторному полю τ на расслоении параметров Σ дифференциальный оператор первого порядка

$$\widetilde\nabla_\tau \in \mathrm{Diff}_1(\Pi(\Sigma), \Pi(\Sigma)), \tag{2.14}$$

который удовлетворяет правилу Лейбница

$$\widetilde{\nabla}_\tau(fs) = (\tau \rfloor df)s + f\widetilde{\nabla}_\tau s, \quad s \in \Pi(\Sigma), \quad f \in C^\infty(\Sigma).$$

Выберем векторное поле τ на расслоении Σ таким, что $dt \rfloor \tau = 1$. На области тривиализации расслоения гильбертовых пространств $\Pi \to \Sigma$ оператор $\widetilde{\nabla}_\tau$ (2.14) принимает вид

$$\widetilde{\nabla}_\tau(s) = \left(\partial_t - i\mathcal{H}\left(t, \sigma^k\right)\right)s + \tau^m\left(\partial_m - i\widehat{A}_m\left(t, \sigma^k\right)\right)s, \tag{2.15}$$

где $\mathcal{H}\left(t, \sigma^k\right)$, $\widehat{A}_m\left(t, \sigma^k\right)$, $\forall\, \sigma \in \Sigma$, являются ограниченными самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве E.

Рассмотрим теперь композиционное расслоение

$$\Pi \to \Sigma \to \mathbb{R}.$$

Как и в случае гладких композиционных расслоений (см. второй том [12], Предложение П.7), всякое сечение $h(t)$ расслоения параметров $\Sigma \to \mathbb{R}$ определяет подрасслоение гильбертовых пространств

$$\Pi_h = h^*\Pi \to \mathbb{R}$$

расслоения $\Pi \to \mathbb{R}$ с типичным слоем E. Соответственно, связность $\widetilde{\nabla}$ (2.15) на $C^\infty(\Sigma)$-модуле $\Pi(\Sigma)$ задает индуцированную связность

$$\nabla_h(\psi) = \left[\partial_t - i(\widehat{A}_m\left(t, h^k(t)\right)\partial_t h^m + \mathcal{H}\left(t, h^k(t)\right)\right]\psi \tag{2.16}$$

на $C^\infty(\mathbb{R})$-модуле $\Pi_h(\mathbb{R})$ сечений ψ расслоения гильбертовых пространств $\Pi_h \to \mathbb{R}$ (сравните с формулами (П.60), (3.111) во втором томе [12]).

Как и в предыдущем параграфе, назовем сечение ψ расслоения гильбертовых пространств $\Pi_h \to \mathbb{R}$ интегральным сечением связности (2.16), если

$$\nabla_h(\psi) = \left[\partial_t - i\left(\widehat{A}_m(t, h^k(t)\right)\partial_t h^m + \mathcal{H}\left(t, h^k(t)\right)\right]\psi = 0. \tag{2.17}$$

Уравнение (2.17) представляет собой уравнение Шрёдингера квантовомеханической системы, зависящей от функций параметров $h(t)$. Его решения имеют вид (2.12), где G_t является T-упорядоченной экспонентой

$$G_t = T\exp\left\{i\int\limits_0^t \left(\widehat{A}_m\partial_{t'}h^m + \mathcal{H}\right)dt'\right\}. \tag{2.18}$$

Член

$$i\widehat{A}_m(t, h^i(t))\partial_t h^m$$

в уравнении Шрёдингера (2.17) приводит к эффекту фазы Берри, тогда как $\mathcal{H}$ представляет собой обычный гамильтониан квантовой системы. Чтобы более четко выделить эффект фазы Берри, еще больше упростим рассматриваемую систему.

При заданной тривиализации расслоения $\Pi \to \mathbb{R}$ и упомянутой выше тривиализации $\Sigma = \mathbb{R} \times Z$ расслоения параметров Σ предположим, что компоненты $\widehat{A}_m$ связности $\widetilde{\nabla}$ (2.15) не зависят от времени t и что оператор $\mathcal{H}(\sigma)$ коммутирует с операторами $\widehat{A}_m(\sigma)$ во всех точках кривой $h(t) \subset \Sigma$. Тогда оператор G_t (2.18) принимает вид

$$G_t = T\exp\left\{i\int\limits_{h([0,t])} \widehat{A}_m\left(\sigma^k\right)d\sigma^m\right\}\cdot T\exp\left\{i\int\limits_0^t \mathcal{H}(t')\,dt'\right\}. \tag{2.19}$$

Первый множитель в правой части выражения (2.19) можно интерпретировать как параллельный перенос вдоль кривой $h([0,t]) \subset Z$ относительно индуцированной связности

$$\nabla = i^*\widetilde{\nabla} = d\sigma^m \otimes \left(\partial_m - i\widehat{A}_m\left(t,\sigma^k\right)\right) \tag{2.20}$$

на расслоении гильбертовых пространств $\Pi \to Z$, определяемой вложением

$$i\colon Z \hookrightarrow \{0\} \times Z \subset \Sigma.$$

Заметим, что, поскольку операторы $\widehat{A}_m$ не зависят от времени, можно использовать любое вложение $Z \to \{t\} \times Z$. Более того, связность ∇ (2.20), называемая *связностью Берри*, может быть представлена как связность на некотором главном расслоении $P \to Z$ со структурной группой $\mathrm{U}(E)$ унитарных операторов в гильбертовом пространстве E.

Пусть теперь кривая $h([0,t]) \subset Z$ замкнута, а группа голономии связности ∇ в точке $h(t) = h(0)$ нетривиальна. Тогда унитарный оператор

$$T\exp\left\{i\int\limits_{h([0,t])} \widehat{A}_m\left(\sigma^k\right)d\sigma^m\right\}, \tag{2.21}$$

вообще говоря, не сводится к тождественному преобразованию.

Например, если

$$i\widehat{A}_m\left(\sigma^k\right) = iA_m\left(\sigma^k\right)\mathbf{1} \tag{2.22}$$

— связность главного $U(1)$-расслоения над пространством параметров Z, тогда оператор (2.21) представляет собой известный *фазовый множитель Берри*

$$\exp\left\{i\int\limits_{h([0,t])} A_m\left(\sigma^k\right)d\sigma^m\right\}.$$

Если связность (2.22) является плоской, фаза Берри — это в точности эффект Ааронова—Бома на пространстве параметров Z (см. первый том, § 3.4).

Обобщая этот пример, рассмотрим случай, когда эффект фазы Берри описывается связностью на главном расслоении, структурной группой которого является обычная конечномерная группа Ли. Предположим, что E — сепарабельное гильбертово пространство, которое является гильбертовой суммой n-мерных собственных подпространств гамильтониана $\mathcal{H}(\sigma)$, т.е.

$$E = \bigoplus_{k=1}^{\infty} E_k, \qquad E_k = P_k(E),$$

где P_k — проекционные операторы такие, что

$$H(\sigma)\circ P_k = \lambda_k(\sigma)P_k$$

(в духе адиабатической гипотезы). Пусть операторы $\widehat{A}_m(\sigma) = \widehat{A}_m(z)$ не зависят от времени и сохраняют собственные подпространства E_k гамильтониана $\mathcal{H}$, т.е.

$$\widehat{A}_m(z) = \sum_k \widehat{A}^k_m(z)\circ P_k, \tag{2.23}$$

где $\widehat{A}^k_m(z)$, $z \in Z$, — самосопряженные операторы в E_k. Отсюда следует, что операторы $\widehat{A}_m(\sigma)$ коммутируют с операторами $\mathcal{H}(\sigma)$ во всех точках расслоения параметров $\Sigma \to \mathbb{R}$. Тогда, будучи ограниченным на подпространство E_k, оператор параллельного переноса (2.21) сводится к унитарному оператору в E_k. В этом случае связность Берри (2.20) на главном $\mathrm{U}(E)$-расслоении $P \to Z$ может быть представлена как композиционная связность на композиционном расслоении

$$P \to P/U(n) \to Z,$$

которая определяется некоторой связностью на главном $U(n)$-расслоении $P \to P/U(n)$ и тривиальной связностью на расслоении $P/U(n) \to Z$. Типичный слой расслоения $P/U(n) \to Z$ в точности совпадает с классифицирующим пространством $B(U(n))$ для главных расслоений со структурной группой $U(n)$ (см. первый том [11], § 3.5). Более того, можно рассмотреть параллельный перенос в главном расслоении $P \to P/U(n)$ вдоль кривой в $P/U(n)$. В этом случае вектор состояния $\psi(t)$ приобретает *геометрический фазовый множитель* в дополнении к динамическому фазовому множителю. В частности, если $\Sigma = \mathbb{R}$ (т. е. классические параметры отсутствуют и фаза Берри имеет только геометрическое происхождение), мы приходим к случаю связности Берри на главном $U(n)$-расслоении над классифицирующим пространством $B(U(n))$ [38]. Если $n = 1$, это вариант геометрической фазы Берри, описанный в работе [20].

Глава 3

Суперсвязности

Элементы супергеометрии встречаются во многих квантовополевых моделях. Поэтому мы начнем описание связностей в квантовой теории поля с градуированных связностей и суперсвязностей. Они представляют собой связности на градуированных модулях и пучках над градуированными коммутативными алгебрами. Мы неоднократно будем ссылаться на свойства модулей и пучков из Главы 1, обобщенные на случай градуированных алгебр [85].

Предполагается, что читатель знаком с основами теории суперсимметрий и супермногообразий [1, 30, 50, 58] (см. также первый том [11], § 4.3). Тем не менее § 3.1 посвящен необходимым элементам тензорного анализа на градуированных пространствах.

Ради упрощения мы опускаем категорные аспекты приводимых ниже конструкций, которые играют существенную роль в теории супермногообразий, но не столь важны для приложений.

§ 1. Алгебра градуированных пространств

В этой Главе, если специально не оговорено, под градуированной структурой понимается именно $\mathbb{Z}_2$-градуированная структура. Степень относительно $\mathbb{Z}_2$-градуировки будет обозначаться $[.]$, в отличие от $|.|$ для обозначения степени относительно $\mathbb{Z}$-градуировки дифференциальных форм.

Градуированным коммутативным кольцом $\mathcal{K}$ называется кольцо, которое имеет две аддитивные подгруппы $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$, называемые *четной* и *нечетной частями* $\mathcal{K}$ и такие, что

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1,$$

$$a_r a_s = (-1)^{rs} a_s a_r \in \mathcal{K}_{r+s}, \quad a_r \in \mathcal{K}_r, \quad a_s \in \mathcal{K}_s, \quad s, r = 0, 1.$$

Например, обычное коммутативное кольцо является частным случаем градуированного коммутативного кольца, у которого $\mathcal{K}_1 = 0$. В дальнейшем под градуированным кольцом будет пониматься именно коммутативное градуированное кольцо

Градуированным $\mathcal{K}$*-модулем* Q называется $\mathcal{K}$-бимодуль, который содержит две аддитивные подгруппы Q_0 и Q_1 такие, что

$$Q = Q_0 \oplus Q_1$$

и $\mathcal{K}_r Q_s \subset Q_{r+s}$. Если специально не оговорено, градуированный модуль считается *центральным*, т. е.

$$aq = (-1)^{[q][a]} qa, \quad q \in Q, \quad a \in \mathcal{K}.$$

Градуированный $\mathcal{K}$-модуль называется *свободным*, если он порождается *однородными элементами*, т. е. элементами, которые принадлежат только или Q_0, или Q_1. Всякий $\mathcal{K}$-градуированный модуль является очевидно $\mathcal{K}_0$-модулем. Говорят, что базис градуированного модуля Q конечного порядка принадлежит типу (n, m), если он состоит из n четных и m нечетных элементов.

В частности, *градуированным векторным пространством* $B = B_0 \oplus B_1$ называется градуированный $\mathbb{R}$-модуль. Говорят, что градуированное векторное пространство имеет размерность (n, m), если $\dim B_0 = n$ и $\dim B_1 = m$.

Градуированная коммутативная $\mathcal{K}$-алгебра A с единицей — это градуированное кольцо, которое является также градуированным модулем над градуированным кольцом $\mathcal{K}$. *Градуированное тензорное произведение* $A_1 \otimes A_2$ градуированных $\mathcal{K}$-алгебр A_1 и A_2 определяется как тензорное произведение $\mathcal{K}$-модулей A_1 и A_2, снабженное операцией умножения

$$(a_1 \otimes a_2) \cdot (a_1' \otimes a_2') = (-1)^{[a_2][a_1']}(a_1 a_1' \otimes a_2 a_2').$$

Как и в случае градуированных колец, в дальнейшем под градуированной $\mathcal{K}$-алгеброй будет подразумеваться именно градуированная коммутативная $\mathcal{K}$-алгебра с единицей. Градуированная $\mathbb{R}$-алгебра будет называться просто градуированной алгеброй. Говорят, что она имеет ранг m, если это свободная градуированная алгебра, порождаемая m нечетными элементами.

Банахова градуированная алгебра — это градуированная алгебра, которая является банаховой алгеброй такой, что выполняется условие

$$\|a_0 + a_1\| = \|a_0\| + \|a_1\|.$$

Пусть V — вещественное векторное пространство. Рассмотрим алгебру

$$\Lambda = \wedge V = \mathbb{R} \bigoplus_{k=1} \overset{k}{\bigwedge} V \tag{3.1}$$

относительно операции внешнего произведения. Она называется *внешней алгеброй* векторного пространства V. Это $\mathbb{Z}$-градуированная коммутативная алгебра, наделенная $\mathbb{Z}_2$-градуированной структурой

$$\Lambda_0 = \mathbb{R} \bigoplus_{k=1} \overset{2k}{\bigwedge} V, \quad \Lambda_1 = \bigoplus_{k=1} \overset{2k-1}{\bigwedge} V.$$

Она представляет собой пример *алгебры Грассмана*. Более того, в дальнейшем, если специально не оговорено, под алгеброй Грассмана будет подразумеваться именно конечно порожденная вещественная (или комплексная) внешняя алгебра (см. ниже Замечание 3.1.1). Если дан базис $\{c^i, i \in I\}$ векторного пространства V, элементы алгебры Грассмана принимают вид

$$a = \sum_{k=0} \sum_{(i_1 \dots i_k)} a_{i_1 \dots i_k} c^{i_1} \dots c^{i_k}, \tag{3.2}$$

где первая сумма берется по всем наборам $(i_1 \dots i_k)$ индексов с точностью до перестановок. Ради простоты мы не будем писать символ $\wedge$ внешнего произведения элементов алгебры Грассмана. Непосредственно из определения следует, что алгебра Грассмана Λ допускает разложение

$$\Lambda = \mathbb{R} \oplus \mathcal{R} = \mathbb{R} \oplus \mathcal{R}_0 \oplus \mathcal{R}_1, \tag{3.3}$$

где $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 \oplus \mathcal{R}_1$ — идеал нильпотентных элементов Λ, т.е. $a^2 = 0$, $\forall a \in \mathcal{R}$. Соответствующие проекции $\sigma\colon \Lambda \to \mathbb{R}$ и $s\colon \Lambda \to \mathcal{R}$ называются *body*- и *soul-морфизмами*.

Замечание 3.1.1. Отметим, что существует другое определение алгебры Грассмана [92], которое совпадает с приведенным выше только в случае бесконечномерного векторного пространства V [50]. Алгебра Грассмана Λ (3.1) векторного пространства V является частным случаем *внешней алгебры* $\wedge_{\mathcal{K}} Q$ градуированного $\mathcal{K}$-модуля Q. Это градуированная $\mathcal{K}$-алгебра, определяемая как тензорная алгебра $\otimes Q$ по модулю соотношений

$$q \otimes q' = (-1)^{[q][q']} q' \otimes q.$$

Если $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ и $Q_0 = 0$, $Q_1 = V$, мы получаем алгебру Грассмана (3.1). Заметим, что наиболее приемлемыми для суперанализа считаются алгебры Аренса—Михаеля типа Грассмана [46] (см. ниже Замечание 3.3.3). □

Алгебра Грассмана конечного ранга становится банаховой градуированной алгеброй, если ее элементы (3.2) наделены нормой

$$\|a\| = \sum_{k=0} \sum_{(i_1 \ldots i_k)} |a_{i_1 \ldots i_k}|.$$

Пусть B — градуированное векторное пространство и Λ — алгебра Грассмана ранга N. Градуированное векторное пространство B может быть расширено до градуированного Λ-модуля

$$\Lambda B = (\Lambda B)_0 \oplus (\Lambda B)_1 = (\Lambda_0 \otimes B_0 \oplus \Lambda_1 \otimes B_1) \oplus (\Lambda_1 \otimes B_0 \oplus \Lambda_0 \otimes B_1),$$

называемого *градуированной Λ-оболочкой* B. Нас будет интересовать градуированная оболочка

$$B^{n|m} = \left(\Lambda_0^n \oplus \Lambda_1^m\right) \oplus \left(\Lambda_1^n \oplus \Lambda_0^m\right) \tag{3.4}$$

(n, m)-мерного градуированного векторного пространства $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$. Она представляет собой свободный градуированный Λ-модуль типа (n, m) и называется *суперпространством* над алгеброй Грассмана Λ.

Супервекторным пространством размерности (n, m) именуется градуированный Λ_0-модуль

$$B^{n,m} = \left(\Lambda_0^n \oplus \Lambda_1^m\right).$$

Отметим, что градуированные Λ_0-модули $B^{n|m}$ и $B^{n+m,n+m}$ изоморфны. Если специально не оговорено (см. ниже топологию Де Витта), под топологией супервекторного пространства $B^{n,m}$ будет подразумеваться его евклидова топология как $2^{N-1}(n+m)$-мерного вещественного векторного пространства.

Пусть $B^{n|m}$ — суперпространство над алгеброй Грассмана Λ. Его эндоморфизм как градуированного Λ-модуля может быть представлен квадратной $(n+m) \times (n+m)$-матрицей

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

компоненты которой являются элементами алгебры Грассмана Λ. Она называется *суперматрицей*. Говорят, что суперматрица L является

- *четной*, если матрицы L_1 и L_4 имеют четные компоненты, а матрицы L_2 и L_3 — нечетные компоненты;
- *нечетной*, если L_1 и L_4 имеют нечетные компоненты, а L_2 и L_3 — четные.

Будучи наделенными такой градуировкой, суперматрицы (3.5) образуют градуированную Λ-алгебру. В дальнейшем под суперматрицами будут обычно подразумеваться однородные суперматрицы, т. е. отвечающие определенной градуировке.

Вводится понятие *суперследа* суперматрицы (3.5):

$$\mathrm{Str}\, L = \mathrm{Tr}\, L_1 - (-1)^{[L]}\, \mathrm{Tr}\, L_4.$$

Например, если $\mathbf{1}_{n|m}$ — единичная суперматрица, ее суперслед равен

$$\mathrm{Str}\,(\mathbf{1}_{n|m}) = n - m.$$

Операция *супертранспонирования* суперматрицы L (3.5) определяется как суперматрица

$$L^{st} = \begin{pmatrix} L_1^t & (-1)^{[L]} L_3^t \\ -(-1)^{[L]} L_2^t & L_4^t \end{pmatrix},$$

где L^t обозначает обычное транспонирование. Справедливы соотношения

$$\mathrm{Str}\left(L^{st}\right) = \mathrm{Str}\, L,$$

$$(LL')^{st} = (-1)^{[L][L']} L'^{st} L^{st}, \tag{3.6}$$

$$\mathrm{Str}\,(LL') = (-1)^{[L][L']}\, \mathrm{Str}\,(L'L) \quad \text{или} \quad \mathrm{Str}\,([L, L']) = 0. \tag{3.7}$$

Чтобы ввести понятие супердетерминанта суперматрицы, рассмотрим обратимые суперматрицы L (3.5), отвечающие четным изоморфизмам суперпространства $B^{n,m}$. Можно показать, что суперматрица L является обратимой тогда и только тогда, когда:

- матрицы L_1 и L_4 обратимы;
- матрица $\sigma(L)$ обратима, где σ — это body-морфизм.

Обратимые суперматрицы образуют группу $GL(n|m; \Lambda)$, называемую *градуированной общей линейной группой*. *Супердетерминант* суперматрицы $L \in GL(n|m; \Lambda)$ из этой группы определяется в виде

$$\mathrm{Sdet}\, L = \det\left(L_1 - L_2 L_4^{-1} L_3\right)\left(\det L_4^{-1}\right).$$

Он удовлетворяет соотношениям

$$\mathrm{Sdet}\left(LL'\right) = (\mathrm{Sdet}\, L)(\mathrm{Sdet}\, L'),$$

$$\mathrm{Sdet}\left(L^{st}\right) = \mathrm{Sdet}\, L,$$

$$\mathrm{Sdet}\left(\exp\{L\}\right) = \exp\{\mathrm{Sdet}\,(L)\}.$$

§ 2. Связности на градуированных многообразиях

Следует подчеркнуть, что градуированные многообразия, строго говоря, не являются супермногообразиями (см. ниже Аксиомы 1–4 из Замечания 3.3.3). В то же время всякое градуированное многообразие определяет H^∞-супермногообразие Де Витта и обратно (см. ниже Теорему 3.3.8). Градуированные главные расслоения и связности на них описываются аналогично главным суперрасслоениям (см. § 3.5). Этот параграф посвящен связностям, которые могут быть введены на градуированных многообразиях благодаря тому факту, что градуированные функции, в отличие от суперфункций, могут быть представлены сечениями некоторого дифференцируемого расслоения (см. общую теорию градуированных многообразий в [1, 30, 100, 143]).

Определение 3.2.1. *Градуированным многообразием* размерности (n, m) называется пара $(Z, \mathcal{A})$, состоящая из n-мерного гладкого многообразия Z и пучка $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ градуированных алгебр ранга m, который удовлетворяет следующим условиям [30].

(i) Существует точная последовательность пучков

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\sigma} C_Z^\infty \longrightarrow 0, \qquad \mathcal{R} = \mathcal{A}_1 + (\mathcal{A}_1)^2, \tag{3.8}$$

где C_Z^∞ — пучок гладких функций на Z.

(ii) $\mathcal{R}/\mathcal{R}^2$ — локально свободный C_Z^∞-модуль конечного ранга, и $\mathcal{A}$ локально изоморфен внешнему произведению $\wedge_{C_Z^\infty}\left(\mathcal{R}/\mathcal{R}^2\right)$. □

Пучок $\mathcal{A}$ называется *структурным пучком* градуированного многообразия $(Z, \mathcal{A})$, а многообразие Z — *телом* градуированного многообразия $(Z, \mathcal{A})$. Эта терминология мотивируется упомянутым выше соответствием между градуированными многообразиями и супермногообразиями Де Витта. Сечения пучка $\mathcal{A}$ называются *градуированными функциями*.

Градуированное многообразие является пространством градуированных локальных колец. Поэтому *морфизм градуированных многообразий* $(Z, \mathcal{A}) \to (Z'\mathcal{A}')$ определяется как морфизм φ: $Z \to Z'$, Φ: $\mathcal{A}' \to \varphi_*\mathcal{A}$ пространств локальных колец, где Φ — четный морфизм.

Непосредственно из определения следует, что градуированное многообразие $(Z, \mathcal{A})$ имеет следующую локальную структуру. Для всякой точки $z \in Z$ существует открытая окрестность U такая, что

$$\mathcal{A}(U) \cong C^\infty(U) \otimes \wedge\mathbb{R}^m. \tag{3.9}$$

Это означает, что ограничение $\mathcal{A}|_U$ структурного пучка $\mathcal{A}$ на U изоморфно пучку сечений $C_U^\infty \otimes \wedge\mathbb{R}^m$ тривиального внешнего расслоения

$$\wedge E_U^* = U \times \wedge\mathbb{R}^m \to U.$$

Поэтому U называется *областью тривиализации* градуированного многообразия $(Z, \mathcal{A})$.

Известная теорема Батчелора [30, 32] (см. ниже Теорему 3.2.2) устанавливает, что такая структура градуированного многообразия является не только локальной, но и глобальной. Структурный пучок $\mathcal{A}$ градуированного многообразия $(Z, \mathcal{A})$ получается склеиванием локальных пучков $C_U^\infty \otimes \wedge\mathbb{R}^m$ посредством функций перехода из Предложения 1.3.1, которые образуют коцикл пучка $\mathrm{Aut}\,(\wedge\mathbb{R}^m)_\infty$ гладких отображений многообразия Z в группу $\mathrm{Aut}\,(\wedge\mathbb{R}^m)$. *Теорема Батчелора* основывается на взаимно однозначном соответствии между множествами когомологий $H^1(Z; \mathrm{Aut}\,(\wedge\mathbb{R}^m)_\infty)$ и $H^1(Z; GL(m, \mathbb{R}^m)_\infty)$.

Теорема 3.2.2. Пусть $(Z, \mathcal{A})$ — градуированное многообразие размерности (n, m). Существует векторное расслоение $E \to Z$ с m-мерным типичным слоем V такое, что структурный пучок $\mathcal{A}$ этого градуированного многообразия изоморфен пучку

$$\mathcal{A}_E = C_Z^\infty \otimes \wedge V^* \tag{3.10}$$

сечений внешнего расслоения

$$\wedge E^* = \mathbb{R} \underset{Z}{\bigoplus} \Big(\bigoplus_{k=1}^{m} \overset{k}{\wedge} E^* \Big), \tag{3.11}$$

типичным слоем которого является алгебра Грассмана $\wedge V^*$. □

Следует подчеркнуть, что изоморфизм Батчелора из Теоремы 3.2.2 не является каноническим. Поэтому можно говорить только о взаимно однозначном соответствии между классами изоморфных градуированных многообразий нечетного ранга m и классами эквивалентных m-мерных векторных расслоений над гладким многообразием Z. Тем не менее этот изоморфизм позволяет установить некоторые важные свойства градуированных многообразий.

Следствие 3.2.3. Структурный пучок $\mathcal{A}$ градуированного многообразия $(Z, \mathcal{A})$ изоморфен пучку сечений 2^m-мерного вещественного векторного расслоения $\Upsilon \to Z$ с типичным слоем $\wedge\mathbb{R}^m$ и структурной группой $\mathrm{Aut}\,(\wedge\mathbb{R}^m)$ такого, что всякая область тривиализации U градуированного многообразия $(Z, \mathcal{A})$ является также областью тривиализации векторного расслоения $\Upsilon \to Z$ с $\mathrm{Aut}\,(\wedge\mathbb{R}^m)$-значными функциями перехода. Структурная группа $\mathrm{Aut}\,(\wedge\mathbb{R}^m)$ векторного расслоения $\Upsilon \to Z$ редуцирована к группе $GL(m, \mathbb{R})$, и $\Upsilon \to Z$ изоморфно внешнему расслоению $\wedge E^* \to Z$ согласно Теореме 3.2.2. □

Следствие 3.2.4. Структурный пучок $\mathcal{A}$ градуированного многообразия $(Z, \mathcal{A})$ является тонким и, следовательно, ацикличным. □

Следствие 3.2.5. ***Прямое произведение*** двух градуированных многообразий $(Z, \mathcal{A})$ и $(Z', \mathcal{A}')$ — это градуированное многообразие, телом которого является $Z \times Z$, а его структурный пучок $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A}'$ изоморфен тензорному произведению

$$(C_Z^\infty \widehat{\otimes} C_{Z'}^\infty) \otimes \wedge(V \oplus V')^* \tag{3.12}$$

(см. изоморфизмы (1.67) и (3.10)). □

На области тривиализации U градуированного многообразия градуированные функции принимают вид

$$f = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} f_{a_1 \ldots a_k}(z) c^{a_1} \ldots c^{a_k}, \tag{3.13}$$

где $f_{a_1 \ldots a_k}(z)$ — гладкие функции на U, $\{c^a\}$ — базис слоев расслоения E^* и опущен символ внешнего произведения элементов c. В частности, эпиморфизм пучков σ из точной последовательности (3.8) сводится в такой записи к body-морфизму. Мы будем называть $\{c^a\}$ *локальным базисом* градуированного многообразия.

Если U' — другая область тривиализации градуированного многообразия и $U \cap U' \neq \varnothing$, функции перехода между локальными базисами градуированного многообразия имеют вид

$$c'^a = \rho^a\left(z^A, c^b\right), \tag{3.14}$$

где $\rho^a\left(z^A, c^b\right)$ — градуированные функции на $U \cap U'$. Это функции перехода расслоения $\Upsilon \to Z$ из Следствия 3.2.3. Из (3.14) легко получить соответствующий закон координатных преобразований градуированных функций (3.13). В частности, если U и U' — области тривиализации одного и того же внешнего расслоения из Теоремы 3.2.2, функции перехода (3.14) сводятся к линейным преобразованиям

$$c'^a = \rho^a_b\left(z^A\right) c^b, \tag{3.15}$$

где $\rho^a_b(z)$ — гладкие функции на $U \cap U'$.

Следуя § 1.3, чтобы определить связность на градуированном многообразии, нам нужно ввести пучок дифференцирований и пучок внешних форм структурного пучка градуированного многообразия.

Пусть $(Z, \mathcal{A})$ — градуированное многообразие. Пучок $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ градуированных дифференцирований структурного пучка $\mathcal{A}$ определяется как подпучок эндоморфизмов пучка $\mathcal{A}$ таких, что всякое его сечение u на открытом подмножестве $U \subset Z$ является *градуированным дифференцированием* градуированной алгебры $\mathcal{A}(U)$, т. е.

$$u(ff') = u(f)f' + (-1)^{[u][f]} f u(f') \tag{3.16}$$

для произвольных однородных элементов $u \in (\mathrm{Der}\,\mathcal{A})(U)$ и $f, f' \in \mathcal{A}(U)$.

Лемма 3.2.6. [30]. Для любых открытых множеств $U' \subset U$ существует сюръекция

$$\mathrm{Der}\,(\mathcal{A}(U)) \to \mathrm{Der}\,(\mathcal{A}(U')).$$

□

Это означает, что

$$(\mathrm{Der}\,\mathcal{A})(U) = \mathrm{Der}\,(\mathcal{A}(U)),$$

т. е. канонический предпучок пучка градуированных дифференцирований $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ изоморфен предпучку дифференцирований градуированных модулей $\mathcal{A}(U)$. Сечения пучка градуированных дифференцирований $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ называются ***градуированными векторными полями*** на градуированном многообразии $(Z, \mathcal{A})$ (или просто на Z, если структурный пучок фиксирован). Пусть U — область тривиализации градуированного многообразия и $E_U = U \times V$ — соответствующее тривиальное векторное расслоение. Можно показать, что градуированные векторные поля u на U представляют собой сечения векторного расслоения [30, 100]

$$\wedge E_U^* \underset{U}{\otimes} \left(E_U \underset{U}{\oplus} TU\right) \to U.$$

Они имеют вид
$$u = u^A\partial_A + u^a\partial_a, \tag{3.17}$$
где u^A, u^a — локальные градуированные функции, $\{\partial_a\}$ — базис, дуальный базису $\{c^a\}$, и (z^A) — координаты на подмножестве $U \subset Z$. Дифференцирования (3.17) действуют на градуированные функции $f \in \mathcal{A}_E(U)$ (3.13) по формуле
$$u(f_{a\ldots b}c^a \ldots c^b) = u^A\partial_A(f_{a\ldots b})c^a \ldots c^b + u^k f_{a\ldots b}\partial_k \rfloor (c^a \ldots c^b). \tag{3.18}$$

Замечание 3.2.1. С помощью дифференцирований (3.18) кольцо $\mathcal{A}(U)$ можно наделить топологией Фреше так, что изоморфизм (3.9) становится метрическим. □

Пусть U' — другая область тривиализации градуированного многообразия, помимо U, с функциями перехода (3.14). Тогда формула дифференцирования (3.18) предполагает следующий закон координатных преобразований градуированных векторных полей:
$$u'^A = u^A, \qquad u'^a = u^j\partial_j\rho^a + u^A\partial_A\rho^a,$$
где ради простоты координаты $z^A = z'^A$ остаются непреобразующимися. Если U и U' — области тривиализации одного и того же векторного расслоения E из Теоремы 3.2.2 с функциями перехода (3.15), закон координатных преобразований градуированных векторных полей становится аффинным
$$u'^A = u^A, \qquad u'^a = u^j\rho^a_j + u^A\partial_A(\rho^a_j)c^j.$$
Отсюда следует, что, если дан изоморфизм Батчелора из Теоремы 3.2.2 и $E \to Z$ — соответствующее векторное расслоение, градуированные векторные поля на Z могут быть представлены как сечения векторного расслоения $\mathcal{V}_E \to Z$, которое локально изоморфно векторному расслоению
$$\mathcal{V}_E|_U \approx \wedge E^* \underset{Z}{\otimes}\left(\mathrm{pr}_2 VE \underset{Z}{\oplus} TZ\right)\Big|_U \tag{3.19}$$
с функциями перехода
$$\begin{aligned} z'^A_{i_1\ldots i_k} &= \rho^{-1}{}^{a_1}_{i_1}\ldots\rho^{-1}{}^{a_k}_{i_k} z^A_{a_1\ldots a_k},\\ v'^i_{j_1\ldots j_k} &= \rho^{-1}{}^{b_1}_{j_1}\ldots\rho^{-1}{}^{b_k}_{j_k}\left[\rho^i_j v^j_{b_1\ldots b_k} + \frac{k!}{(k-1)!} z^A_{b_1\ldots b_{k-1}}\partial_A\rho^i_{b_k}\right] \end{aligned} \tag{3.20}$$
для послойных координат $(z^A_{a_1\ldots a_k}, v^i_{b_1\ldots b_k})$, $k = 0,\ldots,m$, записанных относительно базисов $\{c^a\}$ слоев расслоения $E^* \to Z$ и дуальных голономных базисов $\{\partial_a\}$ вертикального касательного расслоения $VE \to E$ (напомним каноническое разложение $VE = E \times E$) [79, 113]. Легко проверить, что, как и должно быть, эти функции перехода образуют коцикл. Имеет место точная последовательность над Z векторных расслоений
$$0 \to \wedge E^* \underset{Z}{\otimes} \mathrm{pr}_2 VE \to \mathcal{V}_E \to \wedge E^* \underset{Z}{\otimes} TZ \to 0. \tag{3.21}$$

Замечание 3.2.2. Благодаря локальному изоморфизму (3.19) можно локально представить расслоение $\mathcal{V}_E$ как суперрасслоение Неемана—Куиллена (см. § 3.7). □

Согласно Предложению 1.3.1 и Лемме 3.2.6 пучок сечений векторного расслоения $\mathcal{V}_E \to Z$ изоморфен структурному пучку $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ градуированного многообразия. Глобальные сечения расслоения $\mathcal{V}_E \to Z$ образуют градуированный $\mathcal{A}(Z)$-модуль градуированных векторных полей на Z, который является также *супералгеброй Ли* относительно скобок
$$[u, u'] = uu' + (-1)^{|u||u'|+1}u'u. \tag{3.22}$$

В частности,

$$[\partial_A, \partial_B] = [\partial_A, \partial_a] = [\partial_a, \partial_b] = 0. \tag{3.23}$$

Замечание 3.2.3. Как было отмечено выше, дифференцирования пучка C^∞_X гладких функций на многообразии X являются сечениями касательного расслоения $TX \to X$. По аналогии можно было бы предположить, что градуированные дифференцирования пучка $\mathcal{A}$ градуированных функций на многообразии Z также могут быть представлены сечениями некоторого градуированного касательного расслоения [47]

$$(STZ, ST\mathcal{A}) \to (Z, \mathcal{A}).$$

Однако закон координатных преобразований (3.20) свидетельствует, что проекция

$$\mathcal{V}_E|_U \to \mathrm{pr}_2 VE \bigoplus_Z TZ$$

не определена глобально, т. е. $\mathcal{V}_E$ не является внешним расслоением. Это означает, что пучок дифференцирований $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ не может быть структурным пучком какого-либо градуированного многообразия (см. ниже Пример 3.3.5). □

Хотя изоморфизм Батчелора не является каноническим, существует много физических моделей, где векторное расслоение E изначально фиксировано (см. §§ 3.6, 4.3). В этом случае достаточно рассмотреть пучок $\mathcal{A}_E$ (3.10) сечений внешнего расслоения (3.11) [77], ограничив его автоморфизмы теми, которые индуцированы изоморфизмами векторного расслоения $E \to Z$. Будем называть пару $(Z, \mathcal{A}_E)$ *простым градуированным многообразием*, а E — его *характеристическим расслоением*. Отметим, однако, что в [47] первый термин применяется ко всем градуированным многообразиям конечного ранга в свете теоремы Батчелора. Простое градуированное многообразие $(Z, \mathcal{A}_E)$ полностью характеризуется структурным модулем (алгеброй) $\mathcal{A}_E(Z) = \wedge E^*(Z)$ внешнего расслоения $\wedge E^*$. Поэтому $\mathcal{A}_E(Z)$ также называется *структурной алгеброй простого градуированного многообразия*.

Скажем несколько слов о морфизмах простых градуированных многообразий. Они индуцируются морфизмами соответствующих векторных расслоений. Пусть $(Z, \mathcal{A}_E)$ и $(Z', \mathcal{A}_{E'})$ — простые градуированные многообразия и $\zeta\colon E \to E'$ — линейный послойный морфизм над морфизмом многообразий $\varphi\colon Z \to Z'$. Тогда всякое сечение s^* дуального к E расслоения $E'^* \to Z'$ определяет индуцированное сечение $\zeta^* s^*$ дуального расслоения $E^* \to Z$ по формуле

$$v_z \rfloor \zeta^* s^*(z) = \zeta(v_z) \rfloor s^*(\varphi(z)), \qquad \forall\, v_z \in E_z.$$

В результате мы получаем индуцированный пучок $\zeta^*\mathcal{A}_{E'}$ на Z, который представляет собой подпучок пучка $\mathcal{A}_E$ (отметим, что пара $(Z, \zeta^*\mathcal{A}_{E'})$ в общем случае не является градуированным многообразием). Тогда морфизм простых градуированных многообразий, порождаемый морфизмом расслоений φ, может быть определен в виде

$$S\zeta = (\varphi, \varphi_* \circ \zeta^*)\colon (Z, \mathcal{A}_E) \to (Z', \mathcal{A}_{E'}) \tag{3.24}$$

(сравните с (1.66)). Относительно локальных базисов $\{c^a\}$ и $\{c'^a\}$ простых градуированных многообразий $(Z, \mathcal{A}_E)$ и $(Z', \mathcal{A}_{E'})$, морфизм (3.24 принимает вид

$$S\zeta(c'^a) = \zeta^a_b(z) c^b.$$

Вернемся теперь к точной последовательности (3.21). Ее расщепление

$$\widetilde{\gamma}\colon \dot z^A \partial_A \mapsto \dot z^A(\partial_A + \widetilde{\gamma}^a_A \partial_a) \tag{3.25}$$

дается сечением

$$\widetilde{\gamma} = dz^A \otimes (\partial_A + \widetilde{\gamma}^a_A \partial_a) \tag{3.26}$$

векторного расслоения

$$T^*Z \underset{Z}{\bigotimes} \mathcal{V}_E \to Z$$

таким, что композиция

$$Z \xrightarrow{\widetilde{\gamma}} T^*Z \underset{Z}{\bigotimes} \mathcal{V}_E \longrightarrow T^*Z \underset{Z}{\bigotimes} \left(\wedge E^* \underset{Z}{\bigotimes} TZ\right) \xrightarrow{\sigma} T^*Z \underset{Z}{\bigotimes} TZ$$

является канонической тангенциально-значной формой $dz^A \otimes \partial_A$ на Z. Заметим, что форма $\widetilde{\gamma}$ (3.26) имеет нечетные коэффициенты. Расщепление (3.25) преобразует всякое векторное поле τ на многообразии Z в градуированное векторное поле

$$\tau = \tau^A \partial_A \mapsto \nabla_\tau = \tau^A \left(\partial_A + \widetilde{\gamma}^a_A \partial_a\right), \tag{3.27}$$

представляющее собой градуированное дифференцирование пучка $\mathcal{A}_E$ такое, что

$$\nabla_\tau(sf) = (\tau \rfloor ds)f + s\nabla_\tau(f), \quad f \in \mathcal{A}_E(U), \quad s \in C^\infty(U), \quad \forall U \subset Z.$$

Тогда в соответствии с Определением 1.3.9, обобщенным на градуированные кольца, градуированное дифференцирование ∇_τ (3.27) и расщепление (3.25) можно рассматривать как *градуированную связность* на простом градуированном многообразии $(Z, \mathcal{A}_E)$ [113]. В частности, эта градуированная связность задает соответствующее горизонтальное разложение

$$u = u^A \partial_A + u^a \partial_a = u^A \left(\partial_A + \widetilde{\gamma}^a_A \partial_a\right) + \left(u^a - u^A \widetilde{\gamma}^a_A\right) \partial_a$$

всякого градуированного векторного поля u на Z.

Замечание 3.2.4. В силу изоморфизма (3.9) любая градуированная связность $\widetilde{\gamma}$ на градуированном многообразии (необязательно простом) $(Z, \mathcal{A})$, будучи ограниченной на область тривиализации U, имеет вид (3.25). Если U и U' — две области тривиализации $(Z, \mathcal{A})$ с функциями перехода (3.14), компоненты градуированной связности $\widetilde{\gamma}^a_A$ подчиняются закону преобразований

$$\widetilde{\gamma}'^a_A = \widetilde{\gamma}^b_A \partial_b \rho^a + \partial_A \rho^a. \tag{3.28}$$

Если U и U' — области тривиализации одного и того же векторного расслоения E из Теоремы 3.2.2 с функциями перехода (3.15), закон преобразований (3.28) принимает аффинную форму

$$\widetilde{\gamma}'^a_A = \rho^a_b(z)\widetilde{\gamma}^b + \partial_A \rho^a_b(z) c^b. \tag{3.29}$$

Поэтому, переходя от аффинного (3.29) к общему закону преобразований (3.28), градуированную связность (3.26) на простом градуированном многообразии $(Z, \mathcal{A}_E)$ можно рассматривать и как градуированную связность на градуированном многообразии $(Z, \mathcal{A}) \approx (Z, \mathcal{A}_E)$. □

Согласно Теореме 1.2.4 градуированная связность (3.25) всегда существует. Например, любая линейная связность

$$\gamma = dz^A \otimes \left(\partial_A + \gamma_A{}^a{}_b v^b \partial_a\right)$$

на характеристическом векторном расслоении $E \to Z$ порождает градуированную связность

$$\gamma_S = dz^A \otimes \left(\partial_A + \gamma_A{}^a{}_b c^b \partial_a\right) \tag{3.30}$$

на градуированном многообразии $(Z, \mathcal{A}_E)$ такую, что для всякого векторного поля τ на Z и любой градуированной функции f градуированное дифференцирование $\nabla_\tau(f)$ относительно градуированной связности (3.30) совпадает с ковариантной производной f относительно линейной связности γ. Это неудивительно, поскольку градуированная связность (3.26) на самом деле представляет собой частный случай связности на внешнем расслоении $\wedge E^*$ (3.11), которая задает дифференцирование структурного модуля $\wedge E^*(Z)$ этого расслоения. Согласно Замечанию 3.2.4, γ_S является также градуированной связностью на градуированном многообразии $(Z, \mathcal{A}) \cong (Z, \mathcal{A}_E)$, но ее форма (3.30) не сохраняется при общих функциях перехода (3.28).

Градуированные связности $\widetilde{\gamma}$ (3.26) на простом градуированном многообразии $(Z, \mathcal{A}_E)$ образуют аффинное пространство над линейным пространством сечений

$$\varphi = \varphi_A^a dz^A \otimes \partial_a \tag{3.31}$$

векторного расслоения

$$T^*Z \underset{Z}{\bigotimes} \wedge E^* \underset{Z}{\bigotimes} E \to Z.$$

В частности, всякая градуированная связность может быть представлена как сумма градуированной связности, сохраняющей $\mathbb{Z}$-градуировку, например, линейной связности (3.30) и какого-либо сечения φ (3.31).

Кривизна градуированной связности ∇_τ (3.27) дается выражением (1.84):

$$R(\tau, \tau') = [\nabla_\tau, \nabla_{\tau'}] - \nabla_{[\tau,\tau']},$$
$$R(\tau, \tau') = \tau^A \tau'^B R_{AB}^a \partial_a \colon \mathcal{A}_E \to \mathcal{A}_E,$$
$$R_{AB}^a = \partial_A \widetilde{\gamma}_B^a - \partial_B \widetilde{\gamma}_A^a + \widetilde{\gamma}_A^k \partial_k(\widetilde{\gamma}_B^a) - \widetilde{\gamma}_B^k \partial_k(\widetilde{\gamma}_A^a). \tag{3.32}$$

Она также может быть записана в виде (1.77):

$$R\colon \mathcal{A}_E \to \Omega_X^2 \otimes \mathcal{A}_E,$$
$$R = \frac{1}{2} R_{AB}^a dz^A \wedge dz^B \otimes \partial_a. \tag{3.33}$$

Замечание 3.2.5. Предположим, что тело простого градуированного многообразия представляет собой расслоение $Z \to X$, наделенное послойными координатами (x^λ, z^i). Пусть

$$\gamma = \Gamma + \gamma_\lambda{}^a{}_b v^b dx^\lambda \otimes \partial_a$$

— связность на композиционном расслоении

$$E \to Z \to X,$$

которая представляет собой линейный морфизм над связностью Γ на расслоении $Z \to X$ (см. второй том [12], Предварительные сведения, Раздел 30, а также [78, 113]). Тогда имеет место мономорфизм расслоений

$$\gamma_S\colon \wedge E^* \underset{Z}{\bigotimes} TX \ni u^\lambda \partial_\lambda \mapsto u^\lambda \left(\partial_\lambda + \Gamma_\lambda^i \partial_i + \gamma_\lambda{}^a{}_b c^b \partial_a\right) \in \mathcal{V}_E$$

над Z, называемый *композиционной градуированной связностью* на $Z \to X$ [113]. Она представляет собой сечение

$$\gamma_S = \Gamma + \gamma_\lambda{}^a{}_b c^b dx^\lambda \otimes \partial_a \tag{3.34}$$

расслоения $T^*X \underset{Z}{\bigotimes} \mathcal{V}_E \to Z$ такое, что композиция

$$Z \xrightarrow{\gamma_S} T^*X \underset{Z}{\bigotimes} \mathcal{V}_E \longrightarrow T^*X \underset{Z}{\bigotimes} \left(\wedge E^* \underset{Z}{\bigotimes} TZ\right) \xrightarrow{\sigma} T^*X \underset{Z}{\bigotimes} TZ \longrightarrow T^*X \underset{Z}{\bigotimes} TX$$

является формой на Z, индуцированной канонической тангенциально-значной формой $dx^\lambda \otimes \partial_\lambda$ на X. □

Пусть снова $(Z, \mathcal{A})$ — произвольное градуированное многообразие. Дуальным к пучку дифференцирований $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ является пучок $\mathrm{Der}^*\mathcal{A}$, порождаемый морфизмами $\mathcal{A}$-модулей

$$\phi\colon \mathrm{Der}(\mathcal{A}(U)) \to \mathcal{A}(U). \tag{3.35}$$

Сечения этого пучка естественно рассматривать как *градуированные* 1-*формы* на градуированном многообразии $(Z, \mathcal{A})$ (или просто на Z).

В случае простого градуированного многообразия $(Z, \mathcal{A}_E)$ градуированные 1-формы можно представить сечениями векторного расслоения $\mathcal{V}_E^* \to Z$, которое является $\wedge E^*$-дуальным к расслоению $\mathcal{V}_E$. Это векторное расслоение локально изоморфно векторному расслоению

$$\mathcal{V}_E^*|_U \approx \wedge E^* \bigotimes_Z \left(\mathrm{pr}_2 VE^* \bigoplus_Z T^*Z\right)\Big|_U \tag{3.36}$$

с функциями перехода

$$v'_{j_1\ldots j_k j} = \rho^{-1}{}^{a_1}_{j_1} \cdots \rho^{-1}{}^{a_k}_{j_k} \rho^{-1}{}^{a}_{j} v_{a_1\ldots a_k a},$$

$$z'_{i_1\ldots i_k A} = \rho^{-1}{}^{b_1}_{i_1} \cdots \rho^{-1}{}^{b_k}_{i_k} \left[z_{b_1\ldots b_k A} + \frac{k!}{(k-1)!} v_{b_1\ldots b_{k-1} j} \partial_A \rho^j_{b_k}\right]$$

для послойных координат $(z_{a_1\ldots a_k A}, v_{b_1\ldots b_k j})$, $k = 0, \ldots, m$, записанных относительно дуальных базисов $\{dz^A\}$ кокасательного расслоения T^*Z и $\{dc^b\}$ расслоения $\mathrm{pr}_2 V^*E = E^*$. Принимая во внимание локальный изоморфизм (3.36), расслоение $\mathcal{V}_E^*$, как и расслоение $\mathcal{V}_E$, можно рассматривать локально как суперрасслоение Неемана—Куиллена (см. ниже § 3.7). Пучок сечений векторного расслоения $\mathcal{V}_E^* \to Z$ изоморфен пучку $\mathrm{Der}^*\mathcal{A}_E$. Глобальные сечения расслоения $\mathcal{V}_E^* \to Z$ образуют градуированный $\mathcal{A}_E(Z)$-модуль градуированных 1-форм

$$\phi = \phi_A dz^A + \phi_a dc^a \tag{3.37}$$

на $(Z, \mathcal{A}_E)$. Тогда морфизм (3.35) можно трактовать как внутреннее произведение (свертку)

$$u \rfloor \phi = u^A \phi_A + (-1)^{|\phi_a|} u^a \phi_a \tag{3.38}$$

градуированных векторных полей и градуированных 1-форм.

На области тривиализации U градуированного многообразия $(Z, \mathcal{A})$ сечения пучка градуированных форм $\mathrm{Der}^*\mathcal{A}|_U$ имеют вид (3.37). Если U' — другая область тривиализации с функциями перехода (3.14), градуированные 1-формы подчиняются закону координатных преобразований

$$\phi'_a = \frac{\partial c^b(z^B, c'^j)}{\partial c'^a}\phi_b, \qquad \phi'_A = \phi_A + \partial_A c^b(z^B, c'^j)\phi_b.$$

Если U и U' — области тривиализации одного и того же векторного расслоения E из Теоремы 3.2.2 с функциями перехода (3.15), закон координатных преобразований градуированных 1-форм становится аффинным

$$\phi'_a = \rho^{-1}{}^b_a \phi_b, \qquad \phi'_A = \phi_A + \rho^{-1}{}^b_a \partial_A(\rho^a_j)\phi_b c^j.$$

Имеет место точная последовательность векторных расслоений

$$0 \to \wedge E^* \bigotimes_Z T^*Z \to \mathcal{V}_E^* \to \wedge E^* \bigotimes_Z \mathrm{pr}_2 VE^* \to 0 \tag{3.39}$$

над Z. Всякая градуированная связность $\widetilde{\gamma}$ (3.26) задает расщепление этой точной последовательности и определяет соответствующее горизонтальное разложение градуированных 1-форм

$$\phi = \phi_A dz^A + \phi_a dc^a = (\phi_A + \phi_a \widetilde{\gamma}^a_A) dz^A + \phi_a(dc^a - \widetilde{\gamma}^a_A dz^A).$$

В заключение напомним основные элементы теории градуированных внешних дифференциальных форм [77, 89, 100].

Градуированные k-формы ϕ определяются как сечения градуированного внешнего произведения $\overset{k}{\bigwedge}\operatorname{Der}^*\mathcal{A}$ пучка $\operatorname{Der}^*\mathcal{A}$ так, что

$$\phi \wedge \sigma = (-1)^{|\phi||\sigma| + [\phi][\sigma]}\sigma \wedge \phi. \tag{3.40}$$

В частности,

$$dx^\lambda \wedge dc^i = -dc^i \wedge dx^\lambda, \qquad dc^i \wedge dc^j = dc^j \wedge dc^i. \tag{3.41}$$

Внутреннее произведение (3.38) обобщается на градуированные внешние формы высших степеней, следуя соотношению

$$u \rfloor (\phi \wedge \sigma) = (u \rfloor \phi) \wedge \sigma + (-1)^{|\phi| + [\phi][u]}\phi \wedge (u \rfloor \sigma). \tag{3.42}$$

Градуированный внешний дифференциал d градуированных функций определяется равенством

$$u \rfloor df = u(f),$$

записанным для произвольного градуированного векторного поля u. Он обобщается на градуированные внешние формы, исходя из формулы

$$d(\phi \wedge \sigma) = (d\phi) \wedge \sigma + (-1)^{|\phi|}\phi \wedge (d\sigma), \qquad d \circ d = 0, \tag{3.43}$$

и дается координатным выражением

$$d\phi = dz^A \wedge \partial_A(\phi) + dc^a \wedge \partial_a(\phi), \tag{3.44}$$

где левые производные ∂_A, ∂_a действуют на коэффициенты градуированных форм по закону (3.18) и коммутируют с формами dz^A, dc^a. Лемма Пуанкаре также распространяется на градуированные внешние формы [30, 100].

Производная Ли градуированной внешней формы ϕ вдоль градуированного векторного поля u дается привычным выражением

$$\mathbf{L}_u\phi = u \rfloor d\phi + d(u \rfloor \phi) \tag{3.45}$$

и удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{L}_u(\phi \wedge \phi') = \mathbf{L}_u(\phi) \wedge \phi' + (-1)^{[u][\phi]}\phi \wedge \mathbf{L}_u(\phi').$$

Замечание 3.2.6. Градуированные формы можно представить как сечения внешних произведений векторного расслоения $\mathcal{V}_E^* \to Z$. Поэтому пучки градуированных форм $\overset{k}{\bigwedge}\operatorname{Der}^*\mathcal{A}$ являются тонкими. Они образуют тонкую резольвенту

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathcal{A} \to \operatorname{Der}^*\mathcal{A} \to \overset{2}{\bigwedge}\operatorname{Der}^*\mathcal{A} \to \dots$$

постоянного пучка $\mathbb{R}$ на многообразии Z и составляют коцепной комплекс

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathcal{A}(Z) \xrightarrow{d} \operatorname{Der}^*\mathcal{A}(Z) \xrightarrow{d} \left(\overset{2}{\bigwedge}\operatorname{Der}^*\mathcal{A}\right)(Z) \xrightarrow{d} \dots \tag{3.46}$$

градуированных внешних форм на Z, называемый *градуированным комплексом Де Рама*. Тогда как следствие Теоремы 1.3.8 существует изоморфизм

$$H^q(Z) = H^q(Z;\mathbb{R}) = H^q_{GR}(Z) \tag{3.47}$$

групп когомологий Де Рама $H^*(Z)$ гладких внешних форм на многообразии Z и групп когомологий $H^q_{GR}(Z)$ комплекса (3.46), называемых *градуированными группами когомологий Де Рама* [100]. □

§ 3. Суперрасслоения и суперсвязности

Суперсвязности вводятся на супервекторных расслоениях над так называемыми G-супермногообразиями (см. ниже Определение 3.3.4). Существуют две главные причины, почему именно G-супермногообразия выбираются в качестве базы супервекторных расслоений. Во-первых, в этом случае категория супервекторных расслоений эквивалентна категории локально свободных пучков конечного ранга, подобно тому как это имеет место для гладких векторных расслоений (и в отличие, например, от случая GH^∞-супермногообразий). Поэтому основные понятия дифференциальной геометрии можно распространить и на супервекторные расслоения. Во-вторых, дифференцирования структурного пучка G-супермногообразия образуют локально свободный пучок (в отличие опять же от G^∞-супермногообразий). Это тоже важно с дифференциально-геометрической точки зрения. Более того, этот пучок сам является структурным пучком некоторого G-супермногообразия, в отличие, например, от уже упоминавшегося случая градуированных многообразий (см. Замечание 3.2.3).

Начнем с изложения понятий суперфункции, супермногообразия и супервекторного расслоения (см. их детальное описание в [30]).

Суперфункции

Подобно многообразиям, супермногообразия получаются склеиванием открытых подмножеств супервекторных пространств $B^{n,m}$ посредством суперфункций перехода. Хотя рассматриваются различные классы суперфункций, все они могут быть введены единым образом.

Пусть

$$B^{n,m} = \Lambda_0^n \oplus \Lambda_1^m$$

— супервекторное пространство, где Λ — N-мерная алгебра Грассмана и $N \geqslant m$. В соответствии с разложением (3.3) любой элемент этого супервекторного пространства $q \in B^{n,m}$ может быть однозначно представлен в виде

$$q = x + y = \left(\sigma\left(x^i\right) + s\left(x^i\right)\right)e_i^0 + y^j e_j^1, \tag{3.48}$$

где $\left\{e_i^0, e_j^1\right\}$ — базис $B^{n,m}$ и $\sigma\left(x^i\right) \in \mathbb{R}$, $s(x^i) \in \mathcal{R}_0$, $y^j \in \mathcal{R}_1$. Обозначим

$$\sigma^{n,m}\colon B^{n,m} \to \mathbb{R}^n, \qquad s^{n,m}\colon B^{n,m} \to \mathcal{R}^{n,m}$$

— соответствующие body- и soul-морфизмы.

Пусть Λ' — еще одна алгебра Грассмана ранга N' $(0 \leqslant N' \leqslant N)$, рассматриваемая как подалгебра алгебры Грассмана Λ, т. е. базис $\{c^a\}$ алгебры Λ' представляет собой часть базиса $\left\{c^a, c^b\right\}$ алгебры Λ. На открытом подмножестве $U \subset \mathbb{R}^n$ зададим Λ'-значную градуированную функцию

$$f(z) = \sum_{k=0}^{N'} \frac{1}{k!} f_{a_1 \ldots a_k}(z) c^{a_1} \ldots c^{a_k} \tag{3.49}$$

с гладкими коэффициентами $f_{a_1\ldots a_k}(z)$, $z \in \mathbb{R}^n$. Ей сопоставляется градуированная функция $f(x)$, $x \in \left(\sigma^{n,0}\right)^{-1}(U) \subset B^{n,0}$, определяемая как формальный ряд Тейлора

$$f(\sigma(x) + s(x)) = f(\sigma(x)) + \sum_{k=0}^{N'} \frac{1}{k!}\left[\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p!} \frac{\partial^q f_{a_1\ldots a_k}(\sigma(x))}{\partial r^{i_1}\ldots\partial r^{i_p}} s\left(x^{i_1}\right)\ldots s\left(x^{i_p}\right)\right] c^{a_1}\ldots c^{a_k}. \tag{3.50}$$

После этого вводится градуированная функция $F(q)$, $q \in (\sigma^{n,m})^{-1}(U) \subset B^{n,m}$, представляемая суммой

$$F(x+y) = \sum_{r=0}^{N} \frac{1}{r!} f_{j_1\ldots j_r}(x) y^{j_1} \ldots y^{j_r}, \tag{3.51}$$

где $f_{j_1\ldots j_r}(x)$ — градуированные функции (3.50). Градуированные функции (3.51) называются *суперфункциями* на супервекторном пространстве $B^{n,m}$. Они задают пучок $S_{N'}$ градуированных алгебр ранга N' на $B^{n,m}$. Пусть $S^0_{N'}$ — подпучок этого пучка, сечениями которого являются суперфункции $f(x+y) = f(x)$ (3.50), независимые от нечетных переменных y^j. Выражение (3.51) предполагает, что для любого открытого подмножества U супервекторного пространства $B^{n,m}$ существует эпиморфизм

$$\lambda\colon\ S^0_{N'}(U) \otimes \wedge\mathbb{R}^m \to S_{N'}(U), \tag{3.52}$$
$$\lambda\colon\ \sum_{r=0}^{N} \frac{1}{r!} f_{j_1\ldots j_r}(x) \otimes \left(y^{j_1} \ldots y^{j_r}\right) \to \sum_{r=0}^{N} \frac{1}{r!} f_{j_1\ldots j_r}(x) y^{j_1} \ldots y^{j_r},$$

отождествляющий $\wedge\mathbb{R}^m$ с внешней алгеброй, порождаемой элементами $(y^1, \ldots, y^m)$. Тогда имеет место эпиморфизм пучков

$$\lambda\colon\ S^0_{N'} \otimes \wedge\mathbb{R}^m \to S_{N'}, \tag{3.53}$$

где $\wedge\mathbb{R}^m$ — постоянный пучок на $B^{n,m}$.

Предложение 3.3.1. Эпиморфизм пучков (3.53) является изоморфизмом тогда и только тогда, когда

$$N - N' \geqslant m. \tag{3.54}$$

□

В этом случае представление суперфункции $F(x+y)$ в виде суммы (3.51) оказывается однозначным.

Используя представление (3.51), можно определить дифференцирование суперфункций. Пусть $f(x) \in S_{N'}(U)$ — градуированная функция на $U \subset B^{n,0}$. Так как f по определению является рядом Тейлора (3.50), ее частные производные по четным координатам x^i задаются естественным образом в виде

$$\partial_i f(x) = (\partial_i f)\big(\sigma(x) + s(x)\big) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial r^i}(\sigma(x)) + \sum_{k=0}^{N'} \frac{1}{k!} \left[\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p!} \frac{\partial^{p+1} f_{a_1\ldots a_k}(\sigma(x))}{\partial r^i \partial r^{i_1} \ldots \partial r^{i_p}} s\left(x^{i_1}\right) \ldots s\left(x^{i_p}\right)\right] c^{a_1} \ldots c^{a_k}. \tag{3.55}$$

Это выражение для четных частных производных распространяется и на суперфункции F на $B^{n,m}$, даже когда их представление в виде суммы (3.51) не является однозначным.

Трудность возникает с определением нечетных частных производных суперфункций. Нечетная производная вводится как образ $\mathbb{Z}$-градуированного дифференцирования порядка -1 внешней алгебры $\wedge\mathbb{R}^m$ относительно морфизма (3.52), т. е.

$$\frac{\partial}{\partial y^j}\big(\lambda(f \otimes y)\big) = \lambda\big(f \otimes \partial_j(y)\big), \qquad y \in \wedge\mathbb{R}^m.$$

Это определение имеет смысл только если λ — изоморфизм, т. е. когда выполняется неравенство (3.54). В противном случае существует ненулевой элемент $f \otimes y$ такой, что

$$\lambda(f \otimes y) = 0,$$

тогда как

$$\lambda\big(f \otimes \partial_j(y)\big) \neq 0.$$

Например, если $N - N' = m - 1$, таковым является элемент $f \otimes \big(y^1 \dots y^m\big)$.

Приведем основные классы суперфункций, следуя терминологии из книги [30].

- Если $N' = 0$, пучок $S_{N'}$ совпадает с пучком $\mathcal{H}^\infty$ так называемых H^∞*-суперфункций*, введенных впервые М. Батчелором [33] и Б. Де Виттом [58]. Эти суперфункции (3.51) имеют вид

$$F(x+y) = \sum_{r=0}^{N} \frac{1}{r!}\left[\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!}\frac{\partial^p f_{j_1\dots j_r}(\sigma(x))}{\partial r^{i_1}\dots\partial r^{i_p}} s\big(x^{i_1}\big)\dots s\big(x^{i_p}\big)\right] y^{j_1}\dots y^{j_r}. \tag{3.56}$$

- Если $N' = N$, мы имеем дело с G^∞*-суперфункциями*, введенными А. Роджерс [134]. В этом случае неравенство (3.54) справедливо только для $m = 0$.

- Если условие (3.54) выполняется, суперфункции называются GH^∞*-суперфункциями*. Они включают в себя в качестве частного случая и упомянутые ранее H^∞-суперфункции.

Суперфункции всех приведенных выше типов называются *гладкими суперфункциями.*

Обозначим $\mathcal{GH}_{N'}$ пучок GH^∞-суперфункций на супервекторном пространстве $B^{n,m}$ и введем пучок градуированных Λ-алгебр

$$\mathcal{G}_{N'} = \mathcal{GH}_{N'} \otimes \Lambda, \tag{3.57}$$

где алгебра Грассмана Λ рассматривается как градуированная алгебра над алгеброй Λ'. Пучок $\mathcal{G}_{N'}$ (3.57) обладает следующими важными свойствами [30].

- Существует *оценочный морфизм*

$$\begin{aligned} &\delta\colon \mathcal{G}_{N'} \to C^\Lambda_{B^{n,m}}, \\ &\delta\colon F\otimes a \mapsto Fa, \qquad F \in \mathcal{GH}_{N'}, \quad a \in \Lambda, \end{aligned} \tag{3.58}$$

  где $C^\Lambda_{B^{n,m}} \cong C^0_{B^{n,m}} \otimes \Lambda$ — пучок непрерывных Λ-значных функций на $B^{n,m}$. Этот морфизм позволяет приписать значения из алгебры Грассмана Λ росткам сечений пучка $\mathcal{G}_{N'}$. Его образ изоморфен пучку $\mathcal{G}^\infty$ G^∞-суперфункций на $B^{n,m}$.

- Для любых двух целых неотрицательных чисел N' и N'', удовлетворяющих условию (3.54), существует канонический изоморфизм пучков градуированных Λ-алгебр $\mathcal{G}_{N'}$ и $\mathcal{G}_{N''}$. Поэтому можно определить канонический пучок $\mathcal{G}_{n,m}$ градуированных Λ-алгебр на супервекторном пространстве $B^{n,m}$. Его сечения представляются в виде тензорных произведений $F\otimes a$ H^∞-суперфункций F (3.56) и элементов алгебры Грассмана $a \in \Lambda$. Они называются G*-суперфункциями*, а $\mathcal{G}_{n,m}$ — *каноническим пучком* G*-суперфункций.*

- Пучок $\operatorname{Der}\mathcal{G}_{n,m}$ градуированных дифференцирований пучка $\mathcal{G}_{n,m}$ является локально свободным пучком $\mathcal{G}_{n,m}$-модулей ранга (n,m) на супервекторном пространстве $B^{n,m}$. На всяком открытом подмножестве $U \subset B^{n,m}$ этого суперпространства $\mathcal{G}_{n,m}(U)$-модуль $\operatorname{Der}\mathcal{G}_{n,m}(U)$ градуированных дифференцирований порождается операторами дифференцирования $\partial/\partial x^i$, $\partial/\partial y^j$, которые действуют на G-суперфункции из $\mathcal{G}_{n,m}(U)$ по формулам

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(F\otimes a) = \frac{\partial F}{\partial x^i}\otimes a, \qquad \frac{\partial}{\partial y^j}(F\otimes a) = \frac{\partial F}{\partial y^j}\otimes a. \tag{3.59}$$

Супермногообразия

Перейдем теперь к определению супермногообразия.

Определение 3.3.2. Паракомпактное топологическое пространство M называется (n, m)-мерным *гладким супермногообразием* если оно допускает атлас

$$\Psi = \{U_\zeta, \phi_\zeta\}, \qquad \phi_\zeta\colon U_\zeta \to B^{n,m},$$

такой, что функции перехода $\phi_\zeta \circ \phi_\xi^{-1}$ — супергладкие морфизмы. □

Ясно, что гладкое супермногообразие размерности (n, m) является также гладким вещественным многообразием размерности $2^{N-1}(n+m)$.

Если суперфункции перехода являются H^∞-, G^∞- или GH^∞-суперфункциями, говорят соответственно о H^∞-, G^∞- или GH^∞-супермногообразиях. Согласно Предложению 1.3.2, распространенному на пространства градуированных локальных колец, приведенное выше определение эквивалентно следующему.

Определение 3.3.3. Гладкое супермногообразие — это пространство локальных колец (M, S), которое локально изоморфно $(B^{n,m}, S)$, где S — один из пучков гладких суперфункций на $B^{n,m}$ упомянутого выше типа. Пучок S называется *структурным пучком* супермногообразия, а гладкое многообразие M — *базовым пространством супермногообразия.* □

Под морфизмом гладких супермногообразий понимается их морфизм (φ, Φ) как пространств градуированных локальных колец, где Φ — четный градуированный морфизм. В частности, всякий морфизм $\varphi\colon M \to M'$ базовых пространств супермногообразий порождает морфизм гладких супермногообразий $(\varphi, \Phi = \varphi^*)$. Таким образом, выбор типа суперфункций на гладком супермногообразии определяет класс морфизмов этого супермногообразия.

Следует, однако, подчеркнуть, что гладкие супермногообразия обладают рядом серьезных недостатков.

Поскольку производные G^∞-суперфункций относительно нечетных переменных не определены, пучок дифференцирований пучка G^∞-суперфункций не является локально свободным и функции перехода G^∞-касательного расслоения не являются матрицами Якоби (см. ниже Пример 3.3.5). Тем не менее, любое G-супермногообразие (см. ниже Определение 3.3.4) имеет базовое G^∞-супермногообразие (см. ниже Замечание 3.3.2).

В случае GH^∞-супермногообразий мы сталкиваемся с тем фактом, что пространство значений GH^∞-функций может меняться от точки к точке, поскольку алгебра Грассмана Λ ранга N не является свободным модулем относительно своей подалгебры Λ' ранга N'. Это обстоятельство приводит к трудностям с определением GH^∞-супервекторных расслоений, если следовать конструкции гладких векторных расслоений из Примера 1.3.4. Поэтому супервекторные расслоения обычно рассматриваются в категории G-супермногообразий.

Введя канонический пучок $\mathcal{G}_{n,m}$ градуированных Λ-алгебр на супервекторном пространстве $B^{n,m}$, G-супермногообразие можно определить следующим образом.

Определение 3.3.4. *G-Супермногообразием* размерности (n, m) называется пространство градуированных локальных Λ-колец (M, G_M), удовлетворяющее следующим условиям:

- M — паракомпактное топологическое пространство;
- (M, G_M) локально изоморфно $(B^{n,m}, \mathcal{G}_{n,m})$;
- существует морфизм пучков градуированных Λ-алгебр $\delta\colon G_M \to C_M^\Lambda$, где $C_M^\Lambda \cong C_M^0 \otimes \Lambda$ — пучок непрерывных Λ-значных функций на M и δ локально изоморфен оценочному морфизму (3.58).

□

Пример 3.3.1. Тройка $(B^{n,m}, \mathcal{G}_{n,m}, \delta)$, где δ — оценочный морфизм (3.58), называется *стандартным супермногообразием.* □

Замечание 3.3.2. Любое GH^∞-супермногообразие (M, GH^∞_M) со структурным пучком GH^∞_M естественным образом расширяется до G-супермногообразия $(M, GH^\infty_M \otimes \Lambda)$. Всякое G-супермногообразие определяет *базовое* G^∞ *-супермногообразие* $(M, \delta(G_M))$, где $\delta(G_M) = G^\infty_M$ — пучок G^∞-суперфункций на M. □

Морфизмы G-супермногообразий — это морфизмы пространств градуированных локальных колец. В частности, всякий морфизм (φ, φ^*) GH^∞-супермногообразий

$$(M, GH^\infty_M) \to (M', GH^\infty_{M'})$$

естественным образом продолжается до морфизма (φ, Φ) G-супермногообразий:

$$(M, GH^\infty_M) \otimes \Lambda \to (M', GH^\infty_{M'} \otimes \Lambda),$$

где $\Phi(F \otimes a) = \varphi^*(F) \otimes a$.

Как и в случае гладких супермногообразий, базовое пространство M G-супермногообразия (M, G_M) наделено структурой вещественного гладкого многообразия размерности $2^{N-1}(n+m)$, а морфизмы G-супермногообразий — это морфизмы гладких базовых многообразий. Тем не менее, неизоморфные G-супермногообразия могут иметь диффеоморфные базовые гладкие многообразия (см. ниже).

Аналогично свойствам пучка $\mathrm{Der}\,\mathcal{G}_{n,m}$ градуированных дифференцирований канонического пучка G-суперфункций пучок $\mathrm{Der}\,G_M$ градуированных дифференцирований структурного пучка G-супермногообразия является локально свободным с локальным базисом $\{\partial/\partial x^i,\ \partial/\partial y^j\}$. *Суперкасательное пространство* $T_q(M, G_M)$ к G-супермногообразию (M, G_M) в точке $q \in M$ определяется как градуированный Λ-модуль градуированных Λ-значных дифференцирований стебля G_{Mq} пучка G_M в точке $q \in M$. Оно изоморфно фактору $\mathrm{Der}\,G_{Mq}/(\mathcal{M}_q \cdot \mathrm{Der}\,G_{Mq})$, где $\mathcal{M}_q \subset G_{Mq}$ — подмодуль ростков сечений f пучка G_M, обращающихся в 0 в точке q, т. е. $\delta(f)(q) = 0$. Базисными элементами суперкасательного пространства $T_q(M, G_M)$ являются операторы

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q (s_q) = \frac{\partial s}{\partial x^i}(q), \qquad \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_q (s_q) = \frac{\partial s}{\partial y^j}(q), \qquad \forall\, s \in G_{Mq}.$$

Для всякого открытого подмножества U супервекторного пространства $B^{n,m}$ пространство $\mathcal{G}_{n,m}(U)$ может быть наделено топологией, превращающей его в алгебру Фреше. При этом существуют изометрические изоморфизмы

$$\mathcal{G}_{n,m}(U) \cong \mathcal{H}^\infty(U) \otimes \Lambda \cong C^\infty\big(\sigma^{n,m}(U)\big) \otimes \Lambda \otimes \wedge\mathbb{R}^m \cong C^\infty\big(\sigma^{n,m}(U)\big) \otimes \wedge\mathbb{R}^{N+m}. \tag{3.60}$$

Замечание 3.3.3. Изложим коротко аксиоматический подход к супермногообразиям, который при различном выборе градуированных алгебр позволяет получить все известные типы супермногообразий как частный случай так называемых R^∞-супермногообразий [30, 31, 46]. Этот подход развивает теорию R-супермногообразий М. Ротштейна [135] (см. детальное обсуждение в [30, 31]). Отметим, что в общем случае R^∞-супермногообразия вводятся над уже упоминавшимися алгебрами Аренса—Михаеля типа Грассмана [46]. Мы не будем подробно останавливаться на топологических аспектах определения этих супермногообразий, хотя именно топологические свойства отличают R^∞-супермногообразия от R-супермногообразий М. Ротштейна (см. ниже).

Пусть Λ — вещественная градуированная алгебра вышеназванного типа (для простоты понимания читатель может считать, что, как и ранее, Λ — алгебра Грассмана). *Суперпространством* над Λ называется тройка $(M, \mathcal{A}, \delta)$, где M — паракомпактное топологическое пространство, $\mathcal{A}$ — пучок градуированных Λ-алгебр на M и δ: $\mathcal{A} \to C^\Lambda_M$ —

оценочный морфизм в пучок C_M^Λ непрерывных Λ-значных функций на топологическом пространстве M. Сечения пучка $\mathcal{A}$ называются *R^∞-суперфункциями*. Рассмотрим градуированный идеал $\mathcal{M}_q$ стебля $\mathcal{A}_q$, $q \in M$, образованного ростками R^∞-суперфункций f, обращающихся в 0 в точке q, т.е. таких, что $\delta(f)(q) = 0$.

R^∞-Супермногообразием размерности (n,m) называется суперпространство $(M, \mathcal{A}, \delta)$, удовлетворяющее следующим четырем аксиомам [46].

Аксиома 1. Градуированный пучок $\mathrm{Der}^*\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$-дуальный к пучку дифференцирований пучка $\mathcal{A}$, является градуированным локально свободным пучком $\mathcal{A}$-модулей ранга (n,m). Всякая точка $q \in M$ имеет открытую окрестность U вместе с сечениями $x^1, \ldots, x^n \in \mathcal{A}(U)_0$, $y^1, \ldots, y^m \in \mathcal{A}(U)_1$ такими, что $\{dx^i, dy^j\}$ — градуированный базис модуля $\mathrm{Der}^*\mathcal{A}(U)$ над $\mathcal{A}(U)$.

Аксиома 2. Если такая координатная карта задана, сопоставление

$$q \to \left(\delta(x^i), \delta(y^j)\right)$$

определяет гомеоморфизм U на открытое подмножество в $B^{n,m}$.

Аксиома 3. Для любой точки $q \in M$ идеал $\mathcal{M}_q$ конечно порожден.

Аксиома 4. Для всякого открытого подмножества $U \subset M$ топологическая алгебра $\mathcal{A}(U)$ является отделимой и полной.

Отметим, что *R-супермногообразие* над градуированной коммутативной банаховой алгеброй, удовлетворяющее Аксиоме 4, является R^∞-супермногообразием.

В частности, стандартное супермногообразие из Примера 3.3.1 является R^∞-супермногообразием. Более того, в случае конечной алгебры Грассмана Λ категория R^∞-супермногообразий и категория G-супермногообразий эквивалентны. □

Пусть (M, G_M) — G-супермногообразие. Как было отмечено, оно удовлетворяет Аксиомам 1–4. Сечения u пучка $\mathrm{Der}\, G_M$ градуированных дифференцирований структурного пучка G-супермногообразия называются *супервекторными полями* на G-супермногообразии (M, G_M), а сечения ϕ дуального пучка $\mathrm{Der}^* G_M$ — *1-суперформами* на (M, G_M). На координатной карте $(q^i) = (x^i, y^j)$ на $U \subset M$ супервекторные поля и 1-суперформы записываются в виде

$$u = u^i \partial_i, \qquad \phi = \phi_i dq^i,$$

где коэффициенты u^i и ϕ_i являются G-суперфункциями на U. Дифференциальное исчисление на супервекторных полях и суперформах характеризуется теми же формулами (3.22), (3.38)–(3.45), что и в случае градуированных векторных полей и градуированных форм.

Остановимся на когомологиях G-супермногообразий. Для данного G-супермногообразия (M, G_M) обозначим $\Omega^*_{\Lambda M} = \Omega^*_M \otimes \Lambda$ пучки гладких Λ-значных внешних форм на его базовом пространстве M. Эти пучки являются тонкими и образуют тонкую резольвенту

$$0 \to \Lambda \to C^\infty_M \otimes \Lambda \to \Omega^1_M \otimes \Lambda \to \ldots$$

постоянного пучка Λ на M. Рассмотрим соответствующий комплекс Де Рама Λ-значных внешних форм на M:

$$0 \to \Lambda \to C^\infty_\Lambda(M) \to \Omega^1_\Lambda(M) \to \ldots .$$

Согласно Теореме 1.3.8 группы когомологий $H^*_\Lambda(M)$ этого комплекса изоморфны группам когомологий $H^*(M; \Lambda)$ с коэффициентами в постоянном пучке Λ на M и, следовательно, связаны с группами когомологий Де Рама $H^*(M)$ вещественных внешних форм на гладком многообразии M соотношениями

$$H^*_\Lambda(M) = H^*(M; \Lambda) = H^*(M) \otimes \Lambda. \tag{3.61}$$

Таким образом, группы когомологий Λ-значных форм не несут какой-либо информации о структуре G-супермногообразия на M.

Рассмотрим теперь когомологии внешних суперформ. Пучки $\overset{k}{\bigwedge} \operatorname{Der}^* G_M$ внешних суперформ образуют последовательность

$$0 \to \Lambda \to G_M \to \operatorname{Der}^* G_M \to \dots . \tag{3.62}$$

Можно показать, что лемма Пуанкаре распространяется на суперформы [45], и эта последовательность точна. Однако структурный пучок G-супермногообразия в общем случае не является ацикличным. Поэтому точная последовательность (3.62) не образует резольвенту постоянного пучка Λ на M (заметим, что используемая нами терминология несколько отлична от терминологии в книге [30]). Следовательно, группы когомологий $H_S^*(M)$ комплекса Де Рама внешних суперформ не совпадают с описанными выше группами когомологий $H^*(M; \Lambda)$ и не сводятся к обычным группам когомологий Де Рама $H^*(M)$ гладкого многообразия M. В частности, группы когомологий $H_S^*(M)$ не являются топологическими инвариантами, но они инвариантны относительно G-изоморфизмов G-супермногообразий.

Предложение 3.3.5. Структурный пучок $\mathcal{G}_{n,m}$ стандартного G-супермногообразия $(B^{n,m}, \mathcal{G}_{n,m})$ ацикличен, т. е.

$$H^{k>0}(B^{n,m}; \mathcal{G}_{n,m}) = 0.$$

□

Доказательство этого утверждения основывается на изоморфизме (3.60) и некоторых когомологических конструкциях [30, 46].

Супермногообразия Де Витта

Остановимся на особом классе супермногообразий, называемых супермногообразиями Де Витта. Их определение предполагает задание на суперпространстве $B^{n,m}$ особой топологии, называемой *топологией Де Витта*, которая слабее обычно используемой евклидовой топологии. Это слабейшая топология такая, что body-морфизм

$$\sigma^{n,m}\colon B^{n,m} \to \mathbb{R}^n$$

остается непрерывным. Открытые подмножества в топологии Де Витта имеют вид $V \times \mathcal{R}^{n,m}$, где V — открытые подмножества в $\mathbb{R}^n$. Ясно, что эта топология не является отделимой.

Определение 3.3.6. Гладкое многообразие (соответственно G-супермногообразие, R^∞-супермногообразие) называется *супермногообразием Де Витта*, если оно допускает атлас такой, что локальные морфизмы $\phi_\zeta\colon U_\zeta \to B^{n,m}$ в Определении 3.3.2 (соответственно Определении 3.3.4, Аксиоме 2) являются непрерывными в топологии Де Витта, т. е. $\phi_\zeta(U_\zeta) \subset B^{n,m}$ — открытые подмножества в топологии Де Витта. □

В частности, базовое G^∞-супермногообразие для G-супермногообразия Де Витта тоже является супермногообразием Де Витта, и то же самое можно сказать про G-расширение GH^∞-супермногообразия Де Витта.

Пусть (U_ζ, ϕ_ζ) — атлас супермногообразия Де Витта из Определения 3.3.6. Нетрудно установить, что его функции перехода $\phi_\zeta \circ \phi_\xi^{-1}$ сохраняют расслоение

$$\sigma^{n,m}\colon B^{n,m} \to \mathbb{R}^n,$$

слой которого $(\sigma^{n,m})^{-1}(z)$ над $z \in \mathbb{R}^n$ наделен наислабейшей топологией, открытыми множествами в которой являются только пустое множество $\varnothing$ и сам слой $(\sigma^{n,m})^{-1}(z)$. Это приводит к следующему утверждению.

Предложение 3.3.7. Всякое многообразие Де Витта представляет собой локально тривиальное топологическое расслоение

$$\sigma_M: M \to Z_M \tag{3.63}$$

над n-мерным гладким многообразием Z_M с типичным слоем $\mathcal{R}^{n,m}$. □

База Z_M расслоения (3.63) называется *телом* супермногообразия Де Витта, а проекция σ_M — *body-морфизмом* супермногообразия Де Витта.

Как уже упоминалось, имеет место важное соответствие между H^∞-супермногообразиями Де Витта и изучавшимися в предыдущем параграфе градуированными многообразиями. Это соответствие базируется на следующих фактах.

- Структурный пучок $\mathcal{A}$ градуированного многообразия $(Z, \mathcal{A})$ по определению локально изоморфен пучку $C_U^\infty \otimes \wedge\mathbb{R}^m$ на областях тривиализации $U \subset Z$ градуированного многообразия.
- Пусть (M, H_M^∞) — это H^∞-супермногообразие Де Витта и σ — body-морфизм (3.63). Из Предложения 3.3.1 следует, что образ $\sigma_*(H_M^\infty)$ на Z_M структурного пучка H_M^∞ многообразия Де Витта локально изоморфен пучку $C_{Z_M}^\infty \otimes \wedge\mathbb{R}^m$. Выражение (3.56) описывает этот изоморфизм в явном виде.
- Более того, пространства (M, H_M^∞) и $(Z_M, \sigma(H_M^\infty))$ задают один и тот же элемент в множестве когомологий $H^1(Z_M; \mathrm{Aut}(\wedge\mathbb{R}^m)_\infty)$.

Тем самым мы приходим к следующей Теореме [30, 33].

Теорема 3.3.8. Если (M, H_m^∞) — это H^∞-супермногообразие Де Витта, тогда пара $(Z_M, \sigma_*(H_M^\infty))$ является градуированным многообразием. Обратно, для любого градуированного многообразия $(Z, \mathcal{A})$ существует H^∞-супермногообразие Де Витта, тело которого совпадает с многообразием Z, а body-морфизм $\sigma_*(H_M^\infty)$ его структурного пучка изоморфен структурному пучку $\mathcal{A}$ этого градуированного многообразия. □

Следствие 3.3.9. В силу Теоремы Батчелора 3.2.2 и Теоремы 3.3.8 существует взаимно однозначное соответствие между классами изоморфных H^∞-супермногообразий Де Витта нечетного ранга m с телом Z и классами эквивалентности m-мерных векторных расслоений над Z. □

Этот результат распространяется также на GH^∞-, G^∞- и G-супермногообразия Де Витта.

Остановимся еще коротко на G-супермногообразиях Де Витта.

Предложение 3.3.10. [30, 46]. Структурный пучок G-супермногообразия Де Витта (M, G_M) является ацикличным, и то же самое можно сказать о локально свободных пучках G_M-модулей. □

Предложение 3.3.11. [132]. Группы когомологий $H_\Lambda^*(M)$ комплекса Де Рама внешних суперформ на G-супермногообразии Де Витта (M, G_M) изоморфны группам когомологий Де Рама (3.61) Λ-значных внешних форм на его теле Z_M, т. е.

$$H_\Lambda^*(M) = H^*(Z_M) \otimes \Lambda. \tag{3.64}$$

□

Эти результаты основываются на том факте, что структурный пучок G_M G-супермногообразия на его базовом пространстве M, наделенном топологией Де Витта, является тонким, хотя и необязательно ацикличным, поскольку топология Де Витта не паракомпактна. Тем не менее, можно показать, что его образ $\sigma_*(G_M)$ на теле Z_M является тонким и ацикличным. Тогда Предложения 1.3.7 и 3.3.5 ведут к Предложению 3.3.10. В частности, пучки внешних суперформ на G-супермногообразии Де Витта ацикличны. Они образуют резольвенту постоянного пучка Λ на M, и мы получаем изоморфизмы групп когомологий

$$H^*_\Lambda(M) = H^*(M;\Lambda) = H^*(M)\otimes\Lambda.$$

Поскольку типичный слой расслоения $M \to Z_M$ является стягиваемым, тогда $H^*(M) = H^*(Z_M)$, что и приводит к изоморфизмам (3.64).

Супервекторные расслоения

Как уже отмечалось, мы будем рассматривать супервекторные расслоения в категории G-супермногообразий [30].

Начнем с определения прямого произведения двух G-супермногообразий. Пусть $(B^{n,m},\mathcal{G}_{n,m})$ и $(B^{r,s},\mathcal{G}_{r,s})$ — два стандартных супермногообразия из Примера 3.3.4. Для любых двух открытых подмножеств $U\subset B^{n,m}$ и $V\subset B^{r,s}$ рассмотрим предпучок

$$U\times V \to \mathcal{G}_{n,m}(U)\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{G}_{r,s}(V), \tag{3.65}$$

где $\widehat{\otimes}$ — топологическое тензорное произведение модулей (см. Замечание 1.1.8). Используя изоморфизм (3.60), легко установить, что структурный пучок $\mathcal{G}_{n+r,m+s}$ стандартного супермногообразия $B^{n+r,m+s}$ изоморфен пучку, порождаемому предпучком (3.65). Эта конструкция следующим образом обобщается на произвольное G-супермногообразие.

Предложение 3.3.12. Пусть (M,G_M) и $(M',G_{M'})$ — два G-супермногообразия размерностей (n,m) и (r,s) соответственно. Их *прямое произведение* $(M,G_M)\times(M',G_{M'})$ определяется как пространство локальных градуированных колец $(M\times M', G_M\,\widehat{\otimes}\,G_{M'})$, где $G_M\,\widehat{\otimes}\,G_{M'}$ — пучок, порождаемый предпучком

$$\begin{aligned}&U\times U'\to G_M(U)\,\widehat{\otimes}\,G_{M'}(U'),\\ &\delta\colon\ G_M(U)\,\widehat{\otimes}\,G_{M'}(U')\to C^\infty_{\sigma(U)}\,\widehat{\otimes}\,C^\infty_{\sigma(U')} = C^\infty_{\sigma_M(U)\times\sigma_M(U')},\end{aligned}\qquad U\subset M,\quad U'\subset M'.$$

Это прямое произведение является G-супермногообразием размерности $(n+r,m+s)$. □

Более того, заданы эпиморфизмы

$$\mathrm{pr}_1\colon\ (M,G_M)\times(M',G_{M'})\to(M,G_M),$$
$$\mathrm{pr}_2\colon\ (M,G_M)\times(M',G_{M'})\to(M',G_{M'}).$$

Соответственно, сечение, например, расслоения pr_1 на открытом подмножестве $U\subset M$ определяется как морфизм G-супермногообразий

$$s_U\colon\ (U,G_M|_U)\to(M,G_M)\times(M',G_{M'})$$

такой, что $\mathrm{pr}_1\circ s_U$ — это тождественное преобразование G-супермногообразия $(U,G_M|_U)$. Сечения s_U для всех открытых подмножеств $U\subset M$ базового пространства G-супермногообразия M порождают пучок на M, который необходимо наделить соответствующей градуированной G_M-структурой. В этой связи напомним, что в случае гладкого векторного расслоения над многообразием X пучок его сечений является пучком C^∞_X-модулей (см. Пример 1.3.4).

Для этой цели рассмотрим прямое произведение

$$(M,G_M)\times\left(B^{r|s},\mathcal{G}_{r|s}\right), \tag{3.66}$$

где $B^{r|s}$ — градуированная оболочка (3.4). Поскольку Λ_0-модули $B^{r|s}$ и $B^{r+s,r+s}$ изоморфны, суперпространство $B^{r|s}$ имеет естественную структуру $(r+s,r+s)$-мерного G-супермногообразия. Так как $B^{r|s}$ — свободный градуированный Λ-модуль ранга (r,s), пучок $S^{r|s}_M$ сечений расслоения

$$(M,G_M)\times\left(B^{r|s},\mathcal{G}_{r|s}\right)\to(M,G_M) \tag{3.67}$$

имеет структуру пучка свободных градуированных G_M-модулей ранга (r, s). Обратно, если даны G-супермногообразие (M, G_M) и пучок S свободных градуированных G_M-модулей ранга (r, s) на M, существует прямое произведение G-супермногообразий (3.66) такое, что S изоморфен пучку сечений расслоения (3.67).

Перейдем теперь непосредственно к определению супервекторного расслоения над G-супермногообразием. Подобно случаю гладких векторных расслоений (см. Пример 1.3.4), можно потребовать, чтобы категория супервекторных расслоений над G-супермногообразиями была эквивалентна категории локально свободных градуированных пучков на G-супермногообразиях. Поэтому мы ограничимся рассмотрением локально тривиальных *G-суперрасслоений* с типичным слоем $B^{r|s}$.

Определение 3.3.13. *Супервекторным расслоением* над G-супермногообразием (M, G_M) с типичным слоем $(B^{r|s}, \mathcal{G}_{r|s})$ называется пара $((Y, G_Y), \pi)$, состоящая из G-супермногообразия (Y, G_Y) и эпиморфизма G-супермногообразий

$$\pi\colon (Y, G_Y) \to (M, G_M) \tag{3.68}$$

таких, что M допускает открытое покрытие $\{U_\zeta\}$ вместе с множеством локальных изоморфизмов G-супермногообразий

$$\psi_\zeta\colon \left(\pi^{-1}(U_\zeta), G_Y|_{\pi^{-1}(U_\zeta)}\right) \to \left(U_\zeta, G_M|_{U_\zeta}\right) \times \left(B^{r|s}, \mathcal{G}_{r|s}\right).$$

□

Ясно, что сечения супервекторного расслоения (3.68) порождают пучок локально свободных градуированных G_M-модулей. Обратно, справедливо следующее утверждение [30].

Предложение 3.3.14. Для любого пучка S локально свободных градуированных G_M-модулей ранга (r, s) на G-супермногообразии (M, G_M) существует супервекторное расслоение над (M, G_M) такое, что S изоморфен пучку его сечений. □

Пучок S из Предложения 3.3.14 называется *структурным пучком* супервекторного расслоения. Слоем Y_q, $q \in M$, этого супервекторного расслоения является фактор

$$S_q/\mathcal{M}_q \cong S^{r|s}_{Mq}/(\mathcal{M}_q \cdot S^{r|s}_{Mq}) \cong B^{r|s}$$

стебля S_q по подмодулю $\mathcal{M}_q$ ростков $s \in S_q$ таких, что $\delta(f)(q) = 0$. Этот слой представляет собой градуированный Λ-модуль, изоморфный $B^{r|s}$. Он наделен структурой стандартного супермногообразия.

Замечание 3.3.4. Доказательство Предложения 3.3.14 основывается на том факте, что, если $\rho_{\zeta\xi}$ — функции перехода пучка S, их оценки

$$g_{\zeta\xi} = \delta(\rho_{\zeta\xi}) \tag{3.69}$$

задают морфизмы $U_\zeta \cap U_\xi \to GL(r|s; \Lambda)$ и образуют коцикл пучка G^∞-морфизмов M в градуированную общую линейную группу $GL(r|s; \Lambda)$. Таким образом, мы приходим к понятию *G^∞-супервекторного расслоения*. Его определение повторяет Определение 3.3.13, если заменить G-супермногообразия и их морфизмы на G^∞-супермногообразия и их морфизмы. Более того, базовое G^∞-супермногообразие супервекторного расслоения (см. Замечание 3.3.2) является G^∞-супервекторным расслоением, функции перехода которого $g_{\zeta\xi}$ связаны с функциями перехода супервекторного расслоения посредством оценочных морфизмов (3.69) и представляют собой $GL(r|s; \Lambda)$-значные функции перехода. □

Поскольку категория супервекторных расслоений над G-супермногообразием (M, G_M) эквивалентна категории локально свободных пучков градуированных G_M-модулей, можно ввести стандартные операции прямой суммы, тензорного произведения и т. д. супервекторных расслоений.

Как и векторные расслоения, супервекторные расслоения имеют глобальное нулевое сечение. Всякое сечение супервекторного расслоения π (3.68), ограниченное на область тривиализации

$$(U, G_M|_U) \times \left(B^{r|s}, \mathcal{G}_{r|s}\right), \tag{3.70}$$

имеет вид $s = s^a(q)\epsilon_a$, где $\{\epsilon_a\}$ — базис Λ-модуля $B^{r|s}$, а $s^a(q)$ — G-суперфункции на U. Если U' — другая область тривиализации этого супервекторного расслоения, функции перехода

$$s'^b(q)\epsilon'_b = s^a(q)h^b{}_a(q)\epsilon_b, \qquad q \in U \cap U', \tag{3.71}$$

задаются $(r+s)\times(r+s)$-матрицами h, компоненты которых $h^b{}_a(q)$ являются G-суперфункциями на $U \cap U'$. Эти матрицы можно интерпретировать как сечения супервекторного расслоения над $U \cap U'$ с типичным слоем — градуированной общей линейной группой $GL(r|s; \Lambda)$.

Пример 3.3.5. Пусть дано G-супермногообразие (M, G_M). Рассмотрим локально свободный градуированный пучок $\operatorname{Der} G_M$ градуированных дифференцирований его структурного пучка G_M. В соответствии с Предложением 3.3.14 существует супервекторное расслоение $T(M, G_M)$, называемое *суперкасательным расслоением*, пучок сечений которого изоморфен пучку дифференцирований $\operatorname{Der} G_M$. Причем слой суперкасательного расслоения $T(M, G_M)$ в точке $q \in M$ совпадает с введенным выше суперкасательным пространством $T_q(M, G_M)$. Если $(q^1, \dots, q^{m+n})$ и $(q'^1, \dots, q'^{m+n})$ — две координатные карты на базовом пространстве M, матрица Якоби

$$h^i_j = \frac{\partial q'^i}{\partial q^j}, \qquad i, j = 1, \dots, n+m,$$

(см. выражения (3.59)) задает морфизмы перехода суперкасательного расслоения $T(M, G_M)$.

Отметим, что базовое G^∞-супервекторное расслоение суперкасательного расслоения $T(M, G_M)$, называемое *G^∞-суперкасательным расслоением*, имеет функции перехода $\delta(h^i_j)$, которые не могут быть представлены матрицами Якобы, поскольку производные G^∞-суперфункций по нечетным переменным плохо определены и пучок $\operatorname{Der} G^\infty_M$ не является локально свободным. □

Суперсвязности

Если дано супервекторное расслоение π (3.68) со структурным пучком S его сечений, связность на этом супервекторном расслоении определяется так же, как в Определении 1.3.6. Разница только в том, что S — пучок градуированных локально свободных G_M-модулей.

Как и в случае точной последовательности (1.69) в § 1.3, можно построить точную последовательность пучков

$$0 \to \operatorname{Der}^* G_M \otimes S \to \left(G_M \oplus \operatorname{Der}^* G_M\right) \otimes S \to S \to 0 \tag{3.72}$$

как прямой предел точной последовательности (1.35) для градуированных $G_M(U)$-модулей $S(U)$, где $\operatorname{mod}\mu^2$ — это фактор по градуированным соотношениям

$$1 \otimes (abp) = (-1)^{|a||b|} b \otimes (ap) + a \otimes (bp) - ab \otimes p,$$

$$1 \otimes ab = (-1)^{|a||b|} b \otimes a + a \otimes b - ab \otimes 1$$

(сравните с (1.15) и (1.18)). Точная последовательность (3.72) в общем случае не расщепляется. Она допускает расщепление тогда и только тогда, когда существует четный морфизм пучков

$$\nabla\colon S \to \operatorname{Der}^* G_M \otimes S, \tag{3.73}$$

удовлетворяющий правилу Лейбница

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s), \quad f \in G_M(U), \quad s \in S(U), \tag{3.74}$$

для произвольного открытого подмножества $U \in M$.

Определение 3.3.15. Морфизм пучков (3.73) называется *суперсвязностью* на супервекторном расслоении π (3.68). □

Кривизна суперсвязности (3.73) дается выражением

$$R = \nabla^2 \colon S \to \bigwedge^2 \mathrm{Der}^*_M \otimes S, \tag{3.75}$$

аналогичным выражению (1.77).

Как и в случае пучков C^∞_X-модулей, точная последовательность (3.72) ведет к точной последовательности пучков

$$0 \to \mathrm{Hom}\left(S, \mathrm{Der}^* G_M \otimes S\right) \to \mathrm{Hom}\left(S, \left(G_M \oplus \mathrm{Der}^* G_M\right) \otimes S\right) \to \mathrm{Hom}\,(S, S) \to 0$$

и к соответствующей точной последовательности когомологических групп

$$0 \to H^0\left(M; \mathrm{Hom}\left(S, \mathrm{Der}^* G_M \otimes S\right)\right) \to H^0\left(M; \mathrm{Hom}\left(S, \left(G_M \oplus \mathrm{Der}^* G_M\right) \otimes S\right)\right) \to$$
$$\to H^0\left(M; \mathrm{Hom}\,(S, S)\right) \to H^1\left(M; \mathrm{Hom}\left(S, \mathrm{Der}^* G_M \otimes S\right)\right) \to \dots .$$

Точная последовательность (3.72) определяет класс Атьи

$$\mathrm{At}(\pi) \in H^1\left(M; \mathrm{Hom}\left(S, \mathrm{Der}^* G_M \otimes S\right)\right)$$

супервекторного расслоения π (3.68). Если $\mathrm{At}(\pi) = 0$, суперсвязность на этом супервекторном расслоении существует (см. § 1.3). В частности, суперсвязность существует, если множество когомологий

$$H^1\left(M; \mathrm{Hom}\left(S, \mathrm{Der}^* G_M \otimes S\right)\right)$$

тривиально. В отличие от случая гладких векторных расслоений, структурный пучок G_M G-супермногообразия, вообще говоря, не является ацикличным, пучок $\mathrm{Hom}\left(S, \mathrm{Der}^* G_M \otimes S\right)$ имеет нетривиальные когомологии и супервекторное расслоение может не иметь связности.

Пример 3.3.6. Структурный пучок стандартного супермногообразия $\left(B^{n,m}, \mathcal{G}_{n,m}\right)$ ацикличен (см. Предложение 3.3.5), и супервекторное расслоение

$$\left(B^{n,m}, \mathcal{G}_{n,m}\right) \times \left(B^{r|s}, \mathcal{G}_{r|s}\right) \to \left(B^{n,m}, \mathcal{G}_{n,m}\right) \tag{3.76}$$

допускает суперсвязность, например, тривиальную суперсвязность. □

Пример 3.3.7. Если (M, G_M) — G-супермногообразие Де Витта, его структурный пучок G_M ацикличен, и таким же является локально свободный пучок $\mathrm{Hom}\,(S, \mathrm{Der}^* G_M \otimes S)$ (см. Предложение 3.3.10). Отсюда следует, что супервекторное расслоение над G-супермногообразием Де Витта всегда может быть наделено суперсвязностью. □

Пример 3.3.6 позволяет получить локальное координатное выражение для суперсвязности на супервекторном расслоении π (3.68) с типичным слоем $B^{r|s}$ и базой, которая является G-супермногообразием, локально изоморфным стандартному супермногообразию $\left(B^{n,m}, \mathcal{G}_{n,m}\right)$. Пусть $U \subset M$ — область тривиализации (3.70) этого супервекторного расслоения такая, что всякое сечение $\pi|_U$ представимо суммой $s = s^a(q)\epsilon_a$, а пучок суперформ $\mathrm{Der}^* G_M|_U$ имеет локальный базис $\{dq^i\}$. Тогда суперсвязность ∇ (3.73), ограниченная на эту область тривиализации, задается семейством коэффициентов

$$\nabla(\epsilon_a) = dq^i \otimes \left(\nabla_i{}^b{}_a \epsilon_b\right), \tag{3.77}$$

где $\nabla_i{}^a{}_b$ — G-суперфункции на U. Принимая во внимание правило Лейбница (3.74), можно также вычислить компоненты формы кривизны (3.75) суперсвязности (3.77):

$$R(\epsilon_a) = \tfrac{1}{2} dq^i \wedge dq^j \otimes R_{ij}{}^b{}_a \epsilon_b,$$
$$R_{ij}{}^a{}_b = (-1)^{|i||j|} \partial_i \nabla_j{}^a{}_b - \partial_j \nabla_i{}^a{}_b + (-1)^{|i|(|j|+|a|+|k|)} \nabla_j{}^a{}_k \nabla_i{}^k{}_b - (-1)^{|j|(|a|+|k|)} \nabla_i{}^a{}_k \nabla_j{}^k{}_b.$$

Аналогично можно получить закон преобразований компонент суперсвязности (3.77) относительно функций перехода (3.71). В частности, любое тривиальное супервекторное расслоение имеет тривиальную суперсвязность $\nabla_i{}^b{}_a = 0$.

§ 4. Суперсвязности на главных суперрасслоениях

В отличие от супервекторных расслоений, структурный пучок G_P главного суперрасслоения $(P, G_P) \to (M, G_M)$ в общем случае не является пучком локально свободных G_M-модулей. Поэтому использовавшаяся до сих пор техника алгебраических связностей на модулях и пучках неприменима непосредственным образом к суперсвязностям на главных суперрасслоениях. Суперсвязности на главных суперрасслоениях вводятся по аналогии со связностями на гладких главных расслоениях [30] (сравните, например, точную последовательность (1.85) в первом томе [11] с приведенной ниже точной последовательностью (3.83)). Для простоты будем обозначать G-супермногообразия (M, G_M) и их морфизмы

$$\varphi\colon M \to N, \qquad \Phi\colon G_N \to \varphi_*(M)$$

как соответственно $\widehat{M}$ и $\widehat{\varphi}$. Для данной точки $q \in M$ символом $\widehat{q} = (q, \Lambda)$ будет обозначаться тривиальное G-супермногообразие размерности $(0, 0)$.

Мы начнем с понятия G-супергруппы Ли $\widehat{H}$. Связь между G-, GH^∞- и G^∞-супергруппами Ли вытекает из того, как связаны между собой соответствующие типы суперфункций.

Определение 3.4.1. G-супермногообразие $\widehat{H} = (H, \mathcal{H})$ называется *G-супергруппой Ли*, если заданы следующие морфизмы G-супермногообразий:

- умножение $\widehat{m}\colon \widehat{H} \times \widehat{H} \to \widehat{H}$;
- единица $\widehat{\varepsilon}\colon \widehat{e} \to \widehat{H}$;
- взятие обратного $\widehat{S}\colon \widehat{H} \to \widehat{H}$;

вместе с естественным отождествлением

$$\widehat{e} \times \widehat{H} = \widehat{H} \times \widehat{e} = \widehat{H}.$$

Они должны удовлетворять

- условию ассоциативности

$$\widehat{m} \circ (\mathrm{Id} \times \widehat{m}) = \widehat{m} \circ (\widehat{m} \times \mathrm{Id})\colon \widehat{H} \times \widehat{H} \times \widehat{H} \to \widehat{H} \times \widehat{H} \to \widehat{H};$$

- свойству единицы

$$(\widehat{m} \circ (\widehat{\varepsilon} \times \mathrm{Id}))(\widehat{e} \times \widehat{H}) = (\widehat{m} \circ (\mathrm{Id} \times \widehat{\varepsilon}))(\widehat{H} \times \widehat{e}) = \mathrm{Id}\, H;$$

- свойству обратного

$$(\widehat{m} \circ (\widehat{S}, \mathrm{Id}))(\widehat{H}) = (\widehat{m} \circ (\mathrm{Id}, \widehat{S}))(\widehat{H}) = \widehat{\varepsilon}(\widehat{e}).$$

□

Для точки $g \in H$ обозначим $\widehat{g}\colon \widehat{e} \to \widehat{H}$ морфизм G-супермногообразий, образом которого в H является точка g. Тогда можно ввести операции левого $\widehat{L}_g$ и правого $\widehat{R}_g$ сдвигов в G-супергруппе Ли вдоль морфизма $\widehat{g}$ как морфизмов G-супермногообразий

$$\widehat{L}_g\colon \widehat{H} = \widehat{e} \times \widehat{H} \xrightarrow{\widehat{g}\times \mathrm{Id}} \widehat{H} \times \widehat{H} \xrightarrow{\widehat{m}} \widehat{H},$$
$$\widehat{R}_g\colon \widehat{H} = \widehat{H} \times \widehat{e} \xrightarrow{\mathrm{Id}\times\widehat{g}} \widehat{H} \times \widehat{H} \xrightarrow{\widehat{m}} \widehat{H}.$$

Замечание 3.4.1. Если $\widehat{H}$ — G-супергруппа Ли ранга (m,n), ее базовое гладкое многообразие H наделено структурой вещественной группы Ли размерности $2^{N-1}(n+m)$, называемой *базовой группой Ли*. В частности, левым и правым сдвигам в G-супергруппе Ли вдоль морфизма $\widehat{g}$ отвечают обычные левый и правый сдвиги в базовой группе Ли на элемент g. □

Переформулируем теперь аксиомы группы в Определении 3.4.1 в терминах структурного пучка $\mathcal{H}$ G-супергруппы Ли $(H,\mathcal{H})$. Мы увидим, что $\mathcal{H}$ обладает свойствами пучка градуированных алгебр Хопфа.

Замечание 3.4.2. Напомним (см. [13], §4.9, а также, например, [16]), что вещественное (или комплексное) векторное пространство A называется коалгеброй, если существуют морфизмы:

- копроизведения $\Delta\colon A \to A\otimes A$;
- коединицы $\epsilon\colon A \to \mathbb{R}$;

которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} (\Delta\otimes \mathrm{Id})\Delta(a) &= (\mathrm{Id}\otimes\Delta)\Delta(a),\\ (\epsilon\otimes \mathrm{Id})\Delta(a) &= (\mathrm{Id}\otimes\epsilon)\Delta(a) = a, \end{aligned} \qquad a\in \mathcal{A}.$$

Пусть A — ассоциативная $\mathbb{R}$-алгебра с единицей e, т. е. это $\mathbb{R}$-кольцо, где умножение m записано как морфизм

$$m\colon A\otimes A \ni a\otimes b \mapsto ab\in A, \quad a,b\in A.$$

Отметим, что $A\otimes A$ — это тоже $\mathbb{R}$-кольцо относительно операций

$$\begin{aligned} (a\otimes b)\otimes(a'\otimes b') &\mapsto (aa')\otimes(bb'),\\ \lambda(a\otimes b) = (\lambda a)\otimes b &= a\otimes(\lambda b), \end{aligned} \qquad a,b\in\mathcal{A},\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Биалгебра (A,m,Δ,ϵ) определяется как коалгебра A, которая является еще и $\mathbb{R}$-кольцом так, что

$$\Delta(e) = e\otimes e, \qquad \epsilon(e) = 1.$$

Тогда алгебра Хопфа (A,m,Δ,ϵ,S) — это биалгебра, наделенная операцией *кообратного* $S\colon A\to A$ такой, что

$$m\big((S\otimes \mathrm{Id})\Delta(a)\big) = m\big((\mathrm{Id}\otimes S)\Delta(a)\big) = \epsilon(a)e.$$

□

Если $(H,\mathcal{H})$ — G-супергруппа Ли, ее структурный пучок $\mathcal{H}$ допускает следующие морфизмы:

- коумножения $\widehat{m}^*\colon \mathcal{H}\to m_*\big(\mathcal{H}\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{H}\big)$;
- коединицы $\widehat{\varepsilon}^*\colon \mathcal{H}\to e_*(\Lambda)$;
- кообратного $\widehat{S}\colon \mathcal{H}\to s_*\mathcal{H}$.

Обозначим

$$k = m \circ (\mathrm{Id} \times m) = m \circ (m \times \mathrm{Id})\colon H \times H \times H \to H.$$

Тогда аксиомы супергруппы Ли в Определении 3.4.1 эквивалентны соотношениям

$$\left(\left(\mathrm{Id} \otimes \widehat{m}^*\right) \circ \widehat{m}^*\right)(\mathcal{H}) = \left(\left(\widehat{m}^* \otimes \mathrm{Id}\right) \circ \widehat{m}^*\right)(\mathcal{H}) = k_*\left(\mathcal{H} \widehat{\otimes} \mathcal{H} \widehat{\otimes} \mathcal{H}\right),$$
$$\left(\widehat{m}^* \circ \left(\mathrm{Id} \otimes \widehat{\varepsilon}^*\right)\right)\left(\mathcal{H} \widehat{\otimes} e_*(\Lambda)\right) = \left(\widehat{m}^* \circ \left(\widehat{\varepsilon}^* \otimes \mathrm{Id}\right)\right)\left(e_*(\Lambda) \widehat{\otimes} \mathcal{H}\right) = \mathrm{Id}\,\mathcal{H},$$
$$\left(\mathrm{Id} \cdot \widehat{S}^*\right) \circ \widehat{m}^* = \left(\widehat{S}^* \cdot \mathrm{Id}\right) \circ \widehat{m}^* = \widehat{\varepsilon}^*.$$

Сравнивая эти соотношения с аксиомами алгебры Хопфа в Замечании 3.4.2, можно говорить о структурном пучке G-супергруппы Ли как о пучке градуированных топологических алгебр Хопфа.

Пример 3.4.3. Градуированная общая линейная группа $GL(n|m;\Lambda)$ наделена естественной структурой H^∞-супермногообразия размерности $(n^2+m^2, 2nm)$. Произведение суперматриц порождает H^∞-морфизм

$$m\colon GL(n|m;\Lambda) \times GL(n|m;\Lambda) \to GL(n|m;\Lambda)$$

такой, что $m(g,g') \mapsto m(gg')$. Отсюда следует, что $GL(n|m;\Lambda)$ — это H^∞-супергруппа Ли. Она очевидным образом расширяется до G-супергруппы Ли $\widehat{GL}(n|m;\Lambda)$, называемой *общей линейной супергруппой*. □

Супералгебра Ли $\mathfrak{h}$ G-супергруппы Ли $\widehat{H}$ определяется как алгебра левоинваринтных супервекторных полей на $\widehat{H}$. Напомним, что супервекторное поле u на G-супермногообразии $\widehat{H}$ — это градуированное дифференцирование его структурного пучка $\mathcal{H}$. Оно называется *левоинвариантным*, если

$$(\mathrm{Id} \otimes u) \circ \widehat{m}^* = \widehat{m}^* \circ u.$$

Если u и u' — два левоинвариантных супервекторных поля, то таковыми же являются их коммутатор $[u,u']$ и линейная комбинация $au + a'u'$, $a, a' \in \Lambda$. Следовательно левоинвариантные супервекторные поля образуют супералгебру Ли. Супералгебра Ли $\mathfrak{h}$ может быть отождествлена с суперкасательным пространством $T_e(\widehat{H})$. Более того, существует изоморфизм пучков

$$\mathcal{H} \otimes \mathfrak{h} = \mathrm{Der}\,\mathcal{H}, \tag{3.78}$$

т.е пучок супервекторных полей на G-супергруппе Ли $\widehat{H}$ является глобально свободным пучком градуированных $\mathcal{H}$-модулей ранга (n,m), порождаемым левоинвариантными супервекторными полями. Супералгебра Ли правоинвариантных супервекторных полей на G-супергруппе Ли $\widehat{H}$ вводится аналогичным образом.

Рассмотрим теперь правое действие G-супергруппы Ли $\widehat{H}$ на G-супермногообразие $\widehat{P}$. Это морфизм G-супермногообразий

$$\widehat{\rho}\colon \widehat{P} \times \widehat{H} \to \widehat{P}$$

такой, что

$$\widehat{\rho} \circ \left(\widehat{\rho} \times \mathrm{Id}\right) = \widehat{\rho} \circ \left(\mathrm{Id} \times \widehat{m}\right)\colon \widehat{P} \times \widehat{H} \times \widehat{H} \to \widehat{P},$$
$$\widehat{\rho} \circ \left(\mathrm{Id} \times \widehat{\varepsilon}\right)\left(\widehat{P} \times \widehat{e}\right) = \mathrm{Id}\,\widehat{P}.$$

Левое действие $\widehat{H}$ на $\widehat{P}$ определяется аналогично.

Пример 3.4.4. Ясно, что G-супергруппа Ли действует на себя слева и справа посредством морфизма умножения $\widehat{m}$.

Общая линейная супергруппа $\widehat{GL}(n|m;\Lambda)$ действует линейно на стандартное супермногообразие $B^{n|n}$ слева посредством суперматриц, и это действие является морфизмом G-супермногообразий. □

Пусть $\widehat{P}$ и $\widehat{P}'$ — два G-супермногообразия, на которые действует G-супергруппа Ли $\widehat{H}$. Морфизм G-супермногообразий $\widehat{\varphi}$: $\widehat{P}\to\widehat{P}'$ называется $\widehat{H}$-инвариантным, если

$$\widehat{\varphi}\circ\widehat{\rho}=\widehat{\rho}'\circ(\widehat{\varphi}\times\mathrm{Id})\colon\ \widehat{P}\times\widehat{H}\to\widehat{P}'.$$

Определение 3.4.2. Фактором действия G-супергруппы Ли на G-супермногообразие $\widehat{P}$ называется пара $(\widehat{M},\widehat{\pi})$, состоящая из G-супермногообразия $\widehat{M}$ и морфизма G-супермногообразий $\widehat{\pi}$: $\widehat{P}\to\widehat{M}$ таких, что:

(i) имеет место равенство

$$\widehat{\pi}\circ\widehat{\rho}=\widehat{\pi}\circ\widehat{\mathrm{pr}}_1\colon\ \widehat{P}\times\widehat{H}\to\widehat{M};\tag{3.79}$$

(ii) для всякого морфизма G-супермногообразий $\widehat{\varphi}$: $\widehat{P}\to\widehat{M}'$ такого, что $\widehat{\varphi}\circ\widehat{\rho}=\widehat{\varphi}\circ\widehat{\mathrm{pr}}_1$, существует единственный морфизм G-супермногообразий $\widehat{g}$: $\widehat{M}\to\widehat{M}'$ такой, что $\widehat{\varphi}=\widehat{g}\circ\widehat{\pi}$.

□

Совсем необязательно, чтобы фактор $(\widehat{M},\widehat{\pi})$ существовал. Если он все-таки существует, имеется мономорфизм его структурного пучка G_M в образ π_*G_P. Поскольку G-супергруппа Ли $\widehat{H}$ действует на G-супермногообразие $\widehat{M}$ тривиальным образом, образ упомянутого выше мономорфизма является подпучком π_*G_P, инвариантным относительно действия $\widehat{H}$. Более того, существует изоморфизм

$$G_M\cong\left(\pi_*G_P\right)^H\tag{3.80}$$

между G_M и подпучком $\widehat{H}$-инвариантных сечений пучка G_P. Этот подпучок порождается локальными сечениями пучка G_P на $\pi^{-1}(U)$, $U\subset M$, которые являются $\widehat{H}$-инвариантными как морфизмы G-супермногообразий $\widehat{U}\to\Lambda$, где предполагается тривиальное действие $\widehat{H}$ на Λ.

Обозначим морфизм в равенстве (3.79) как ϑ. Легко убедиться, что инвариантные сечения пучка $G_P(\pi^{-1}(U))$ являются в точности элементами, которые имеют один и тот же образ относительно морфизмов

$$\widehat{\rho}^*\colon\ G_P(\pi^{-1}(U))\to(\mathcal{H}\widehat{\otimes}G_P)(\vartheta^{-1}(U)),$$
$$\widehat{\mathrm{pr}}_1^*\colon\ G_P(\pi^{-1}(U))\to(\mathcal{H}\widehat{\otimes}G_P)(\vartheta^{-1}(U)).$$

Тогда изоморфизм (3.80) приводит к точной последовательности пучков градуированных Λ-модулей на базовом пространстве M:

$$0\longrightarrow G_M\xrightarrow{\widehat{\pi}^*}\pi_*G_P\xrightarrow{\widehat{\rho}^*-\widehat{\mathrm{pr}}_1^*}\vartheta_*(G_M\widehat{\otimes}\mathcal{H}).\tag{3.81}$$

Определение 3.4.3. *Главным суперрасслоением* со структурной G-супергруппой Ли $\widehat{H}$ называется локально тривиальный фактор π: $\widehat{P}\to\widehat{M}$, т. е. базовое пространство M G-супермногообразия $\widehat{M}$ допускает открытое покрытие $\{U_\zeta\}$ вместе с $\widehat{H}$-инвариантными изоморфизмами

$$\widehat{\psi}_\zeta\colon\ \widehat{P}|_{\widehat{U}_\zeta}\to\widehat{U}_\zeta\times\widehat{H},$$

где $\widehat{H}$ действует на

$$\widehat{U}_\zeta \times \widehat{H} \to \widehat{U}_\zeta \tag{3.82}$$

правыми умножениями. □

Замечание 3.4.5. В действительности нам необходимо только условие (i) в Определении 3.4.2 действия G-супергруппы Ли $\widehat{H}$ на G-супермногообразии $\widehat{P}$ и условие локальной тривиальности фактора $\widehat{P}$. □

Эквивалентно главное суперрасслоение можно рассматривать как склеенное из тривиальных главных суперрасслоений (3.82) посредством $\widehat{H}$-инвариантных функций перехода

$$\widehat{\phi}_{\zeta\xi}\colon \widehat{U}_{\zeta\xi} \times \widehat{H} \to \widehat{U}_{\zeta\xi} \times \widehat{H}, \qquad U_{\zeta\xi} = U_\zeta \cap U_\xi,$$

которые образуют коцикл.

Как и в случае гладких главных расслоений, на главном суперрасслоении вводятся супервекторные поля следующих двух типов.

Определение 3.4.4. Супервекторное поле u на главном суперрасслоении $\pi\colon \widehat{P} \to \widehat{M}$ называется *инвариантным*, если

$$\widehat{\rho}^* \circ u = (u \otimes \mathrm{Id}) \circ u\colon G_P \to \rho_*\big(G_P \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{H}\big).$$

□

Каждому открытому подмножеству $V \subset M$ можно сопоставить градуированный $G_M(V)$-модуль всех $\widehat{H}$-инвариантных супервекторных полей на $\pi^{-1}(V)$, задавая таким образом пучок $\mathrm{Der}^H(\pi_* G_P)$ градуированных G_M-модулей на базовом пространстве M.

Определение 3.4.5. *Фундаментальное* супервекторное поле $\widetilde{v}$, отвечающее элементу $v \in \mathfrak{h}$ супералгебры Ли $\mathfrak{h}$, определяется условием

$$\widetilde{v} = (\mathrm{Id} \otimes v) \circ \widehat{\rho}^*\colon G_P \to G_P \mathbin{\widehat{\otimes}} e_*(\Lambda) = G_P.$$

□

Фундаментальные супервекторные поля порождают пучок $\mathcal{V}G_P$ градуированных G_P-модулей вертикальных супервекторных полей на главном суперрасслоении $\widehat{P}$, т. е. $u \circ \pi^* = 0$. Более того, существует изоморфизм пучков градуированных G_P-модулей

$$G_P \otimes \mathfrak{h} \ni F \otimes v \mapsto F\widetilde{v} \in \mathcal{V}G_P,$$

аналогичный изоморфизму (3.78).

Рассмотрим пучок

$$(\pi_* \mathcal{V}G_P)^H = \pi_*(\mathcal{V}G_P) \cap \mathrm{Der}^H(\pi_* G_P)$$

на базовом пространстве M, сечениями которого являются вертикальные $\widehat{H}$-инвариантные супервекторные поля.

Предложение 3.4.6. [30]. Существует точная последовательность пучков градуированных G_M-модулей

$$0 \to (\pi_* \mathcal{V}G_P)^H \to \mathrm{Der}^H(\pi_* G_P) \to \mathrm{Der}\, G_M \to 0. \tag{3.83}$$

□

Точная последовательность (3.83) аналогична точной последовательности (1.85) в первом томе [11] и соответствующей точной последовательности C^∞-модулей

$$0 \to (V_G P)_X \to (T_G P)_X \to \mathrm{Der}\, C^\infty_X \to 0,$$

которые имеют место в случае главных гладких расслоений. Поэтому мы приходим к следующему определению суперсвязности на главном суперрасслоении.

Определение 3.4.7. *Суперсвязностью* на главном суперрасслоении $\pi\colon \widehat{P}\to\widehat{M}$ называется расщепление

$$\nabla\colon \operatorname{Der} G_M \to \operatorname{Der}^H(\pi_* G_P) \tag{3.84}$$

точной последовательности (3.83). □

В отличие от связностей на гладких главных расслоениях, суперсвязности на главных суперрасслоениях не всегда существуют.

Суперсвязность на главном суперрасслоении $\widehat{P}$ может быть описана в терминах $\mathfrak{h}$-значной 1-суперформы

$$\omega\colon \operatorname{Der} G_P \to G_P\otimes\mathfrak{h}\cong VG_P$$

на $\widehat{P}$, называемой *суперформой связности*. В самом деле, всякое расщепление ∇ (3.84) определяет морфизм градуированных G_P-модулей

$$\widehat{\pi}^*(\operatorname{Der} G_M)\to\widehat{\pi}^*\big(\operatorname{Der}^H(\pi_* G_P)\big)\cong \operatorname{Der} G_P,$$

который расщепляет точную последовательность

$$0\to VG_P\to \operatorname{Der} G_P\to\widehat{\pi}^*(\operatorname{Der} G_M)\to 0.$$

Поэтому существует точная последовательность

$$0\longrightarrow\widehat{\pi}^*(\operatorname{Der} G_M)VG_P\longrightarrow \operatorname{Der} G_P\stackrel{\omega}{\longrightarrow} VG_P\longrightarrow 0.$$

Заметим, что по аналогии с ассоциированными гладкими расслоениями определяются ассоциированные суперрасслоения и суперсвязности на этих суперрасслоениях. В частности, всякое супервекторное расслоение с типичным слоем размерности (r,s) является суперрасслоением, ассоциированным с главным суперрасслоением со структурной супергруппой Ли $\widehat{GL}(r|s;\Lambda)$ [30].

§ 5. Главные градуированные расслоения

Главные градуированные расслоения и связности на них описываются аналогично главным суперрасслоениям и суперсвязностям на этих суперрасслоениях. Следует, однако, заметить, что аппарат главных градуированных расслоений предшествовал теории главных суперрасслоений [18, 100]. Поэтому мы остановимся здесь только на некоторых специфических элементах теории главных градуированных расслоений (см. ее детальное изложение, например, в [143]).

Пусть $(Z,\mathcal{A})$ — градуированное многообразие размерности (n,m). Важным элементом теории градуированных многообразий, который ранее не упоминался, является *конечное сопряженное* $\mathcal{A}(Z)^\circ$ алгебры $\mathcal{A}(Z)$, состоящее из элементов a дуального модуля $\mathcal{A}(Z)^*$, которые обращаются в 0 на идеале $\mathcal{A}(Z)$ конечной коразмерности. Это градуированная коалгебра, наделенная копроизведением

$$(\Delta^\circ(a))(f\otimes f')\stackrel{\text{def}}{=}a(ff'),\qquad \forall f,f'\in\mathcal{A}(Z),$$

и коединицей

$$\epsilon^\circ(a)\stackrel{\text{def}}{=}a(1_{\mathcal{A}}).$$

В частности, $\mathcal{A}(Z)^\circ$ включает *оценочные элементы* δ_z такие, что

$$\delta_z(f)=(\sigma(f))(z).$$

Для данного оценочного элемента δ_z элементы $u \in \mathcal{A}(Z)^\circ$ называются *примитивными* относительно δ_z, если они удовлетворяют соотношению

$$\Delta^\circ(v) = u \otimes \delta_z + \delta_z \otimes u. \tag{3.85}$$

Эти элементы представляют собой дифференцирования $\mathcal{A}(Z)$ в z, т. е.

$$u(ff') = (uf)(\delta_z f') + (-1)^{[u][f]}(\delta_z f)(uf').$$

Определение 3.5.1. *Градуированной группой Ли* $(G, \mathcal{G})$ называется градуированное многообразие такое, что его тело G — это обычная группа Ли, структурная алгебра $\mathcal{G}(G)$ является градуированной алгеброй Хопфа (Δ, ϵ, S), а эпиморфизм алгебр

$$\sigma\colon \mathcal{G}(G) \to C^\infty(G)$$

— это морфизм градуированных алгебр Хопфа. □

Можно показать, что конечный сопряженный $\mathcal{G}(G)^\circ$ алгебры $\mathcal{G}(G)$ наделен структурой алгебры Хопфа с операцией умножения

$$a \star b \stackrel{\mathrm{def}}{=} (a \otimes b) \circ \Delta, \quad \forall\, a, b \in \mathcal{G}(G)^\circ. \tag{3.86}$$

Относительно этой операции умножения оценочные элементы δ_g, $g \in G$, образуют группу $\delta_g \star \delta_{g'} = \delta_{gg'}$, изоморфную группе Ли G. Поэтому они называются также *групподобными элементами*. Нетрудно установить, что множество примитивных элементов $\mathcal{G}(G)^\circ$ относительно оценочного элемента δ_e, т. е. касательное пространство $T_e(G, \mathcal{G})$ является супералгеброй Ли относительно операции умножения (3.86). Она называется *супералгеброй Ли* $\mathfrak{g}$ *градуированной группы Ли* $(G, \mathcal{G})$.

Говорят, что градуированная группа Ли $(G, \mathcal{G})$ действует на градуированное многообразие $(Z, \mathcal{A})$ справа, если существует морфизм градуированных многообразий

$$(\varphi, \Phi)\colon (Z, \mathcal{A}) \times (G, \mathcal{G}) \to (Z, \mathcal{A})$$

такой, что соответствующий морфизм градуированных алгебр

$$\Phi\colon \mathcal{A}(Z) \to \mathcal{A}(Z) \otimes \mathcal{G}(G)$$

задает структуру правого $\mathcal{G}(G)$*-комодуля* на $\mathcal{A}(Z)$, т. е.

$$(\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Phi = (\Phi \otimes \mathrm{Id}) \circ \Phi, \qquad (\mathrm{Id} \otimes \epsilon) \circ \Phi = \mathrm{Id}.$$

Правое действие (φ, Φ) вместе с произвольным элементом $a \in \mathcal{G}(G)^\circ$ определяют линейное отображение

$$\Phi_a = (\mathrm{Id} \otimes a) \circ \Phi\colon \mathcal{A}(Z) \to \mathcal{A}(Z). \tag{3.87}$$

В частности, если a — примитивный элемент относительно оценочного элемента δ_e, тогда $\Phi_a \in \operatorname{Der} \mathcal{A}(Z)$.

Рассмотрим правое действие градуированной группы Ли $(G, \mathcal{G})$ на себя. Пусть $\Phi = \Delta$ и $a = \delta_g$ — групподобные элементы. Тогда Φ_a (3.87) представляет собой однородный изоморфизм градуированных алгебр ранга 0, соответствующий правым сдвигам в группе Ли $G \to Gg$. Если $a \in \mathfrak{g}$, то Φ_a — дифференцирование структурной алгебры $\mathcal{G}(G)$. Пусть $\{u_i\}$ — базис $\mathfrak{g}$. Дифференцирования Φ_{u_i} образуют глобальный базис модуля дифференцирований $\operatorname{Der} \mathcal{G}(G)$ структурной алгебры $\mathcal{G}(G)$, т. е. $\operatorname{Der} \mathcal{G}(G)$ является свободным левым $\mathcal{G}(G)$-модулем. В частности, имеет место разложение

$$\mathcal{G}(G) = \mathcal{G}'(G) \bigoplus_R \mathcal{G}''(G),$$

$$\mathcal{G}'(G) = \{f \in \mathcal{G}(G)\colon \Phi_u(f) = 0,\ \forall\, u \in \mathfrak{g}_0\},$$

$$\mathcal{G}''(G) = \{f \in \mathcal{G}(G)\colon \Phi_u(f) = 0,\ \forall\, u \in \mathfrak{g}_1\}.$$

Поскольку $\mathcal{G}'(G) \cong C^\infty(G)$, можно показать, что всякая градуированная группа Ли $(G, \mathcal{G})$ представляет собой пучок сечений некоторого внешнего тривиального расслоения $G \times \mathfrak{g}_1^* \to G$ [18, 41, 100].

Перейдем теперь к определению главного градуированного расслоения. Правое действие (φ, Φ) градуированной группы Ли $(G, \mathcal{G})$ на градуированное многообразие $(Z, \mathcal{A})$ называется *свободным*, если для каждой точки $z \in Z$ и морфизма $\Phi_z\colon \mathcal{A}(Z) \to \mathcal{G}(G)$ дуальный морфизм $\Phi_{z*}\colon \mathcal{G}(G)^\circ \to \mathcal{A}(Z)^\circ$ является инъекцией.

Правое действие (φ, Φ) градуированной группы Ли $(G, \mathcal{G})$ на градуированное многообразие $(Z, \mathcal{A})$ называется *регулярным*, если морфизм градуированных многообразий

$$(\varphi \times \mathrm{pr}_1) \circ \Delta\colon (Z, \mathcal{A}) \times (G, \mathcal{G}) \to (Z, \mathcal{A}) \times (Z, \mathcal{A})$$

определяет замкнутое градуированное подмногообразие прямого произведения $(Z, \mathcal{A}) \times (Z, \mathcal{A})$.

Замечание 3.5.1. Отметим, что градуированное многообразие $(Z', \mathcal{A}')$ называется *градуированным подмногообразием* градуированного многообразия $(Z, \mathcal{A})$, если существует морфизм градуированных многообразий $(Z', \mathcal{A}') \to (Z, \mathcal{A})$ такой, что соответствующий морфизм $\mathcal{A}'(Z')^\circ \to \mathcal{A}(Z)^\circ$ — включение. Градуированное подмногообразие называется *замкнутым*, если $\dim (Z', \mathcal{A}') < \dim (Z, \mathcal{A})$. □

Таким образом, мы приходим к следующему варианту известной теоремы о факторе градуированного многообразия [18, 143].

Теорема 3.5.2. Правое действие (φ, Φ) градуированной группы Ли $(G, \mathcal{G})$ на градуированное многообразие $(Z, \mathcal{A})$ является регулярным тогда и только тогда, когда фактор $(Z/G, \mathcal{A}/\mathcal{G})$ представляет собой градуированное многообразие, т. е. существует эпиморфизм градуированных многообразий

$$(Z, \mathcal{A}) \to \big(Z/G, \mathcal{A}/\mathcal{G}\big),$$

согласующийся с проекцией $Z \to Z/G$. □

Ввиду этой теоремы *главное градуированное расслоение* $(P, \mathcal{A})$ может быть определено как локально тривиальная субмерсия

$$(P, \mathcal{A}) \to \big(P/G, \mathcal{A}/\mathcal{G}\big)$$

относительно правого регулярного свободного действия градуированной группы Ли $(G, \mathcal{G})$ на градуированное многообразие $(P, \mathcal{A})$. Эквивалентным образом можно сказать, что главное градуированное расслоение — это градуированное многообразие $(P, \mathcal{A})$, наделенное свободным правым действием градуированной группы Ли $(G, \mathcal{G})$ таким, что фактор $(P/G, \mathcal{A}/\mathcal{G})$ — это градуированное многообразие и сюръекция $(P, \mathcal{A}) \to (P/G, \mathcal{A}/\mathcal{G})$ является субмерсией. При этом ясно, что $P \to P/G$ — это обычное главное расслоение со структурной группой Ли G.

Градуированная связность на главном градуированном $(G, \mathcal{G})$-расслоении $(P, \mathcal{A}) \to (X, \mathcal{B})$ вводится аналогично суперсвязности на главном G-суперрасслоении. Она определяется как $(G, \mathcal{G})$-инвариантное расщепление пучка $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ и представима $\mathfrak{g}$-значной градуированной формой связности на $(P, \mathcal{A})$ [143].

Замечание 3.5.2. Более общим является подход, когда *градуированная связность* на *градуированном расслоении* $(Z, \mathcal{A}) \to (X, \mathcal{B})$ определяется как сечение Γ *градуированного расслоения струй* $J^1(Z/X) \to (Z, \mathcal{A})$ сечений этого градуированного расслоения $(Z, \mathcal{A}) \to (X, \mathcal{B})$ [18], которое также является градуированным многообразием [136]. В случае главного градуированного $(G, \mathcal{G})$-расслоения такое сечение Γ предполагается эквивариантным относительно действия градуированной группы Ли $(G, \mathcal{G})$ (сравните с Определением 1.7.5 в первом томе [11]). □

§ 6. Суперсимметричная теория поля

Математический формализм, изложенный в предыдущих параграфах, дает возможность строить суперсимметричные полевые модели. В этом параграфе мы покажем, что любая теория поля на расслоений $Y \to X$ может быть стандартным образом расширена до суперсимметричной теории поля, которая в случае аффинного расслоения $Y \to X$ инвариантна относительно супергруппы Ли ISp(2) [79, 113, 138]. В сравнении с суперсимметричной теорией поля в [44, 51], это расширение формулируется в терминах простых градуированных многообразий и является непосредственным обобщением БРС-механики в работах [81, 82, 83, 112].

Предварительным шагом для построения суперсимметричной теории поля является так называемое вертикальное расширение лагранжева и гамильтонова формализмов на расслоении $Y \to X$ [78, 113] (см. подробное изложение лагранжева и гамильтонова формализмов теории поля на расслоениях в первом томе [11], а также в [78, 113, 137]). Это расширение состоит в переходе от теории поля на расслоении $Y \to X$ с послойными координатами (x^λ, y^i) к теории поля на вертикальном касательном расслоении $VY \to X$ с послойными координатами $(x^\lambda, y^i, \dot{y}^i)$.

Начнем с вертикального расширения лагранжева формализма. Мы следуем обозначениям в первом томе [11]. Конфигурационным пространством теории поля на расслоении $VY \to X$ является многообразие струй J^1VY. Благодаря каноническому изоморфизму $J^1VY = VJ^1Y$ оно наделено послойными координатами

$$(x^\lambda, y^i, y^i_\lambda, \dot{y}^i, \dot{y}^i_\lambda).$$

Отсюда следует, что лагранжев формализм на конфигурационном пространстве J^1VY может быть построен как вертикальное расширение лагранжева формализма на многообразии струй J^1Y путем перехода к вертикальным касательным морфизмам.

Пусть

$$L = \mathcal{L}\omega\colon J^1Y \to \overset{n}{\wedge} T^*X \tag{3.88}$$

— исходный лагранжиан полевой модели на конфигурационном пространстве J^1Y. Его продолжение на *вертикальное конфигурационное пространство* J^1VY определяется как вертикальный касательный морфизм

$$\begin{aligned} L_V &= \mathrm{pr}_2 \circ VL\colon VJ^1Y \to \overset{n}{\wedge} T^*X, \qquad (3.89)\\ \mathcal{L}_V &= \partial_V \mathcal{L} = \left(\dot{y}^i \partial_i + \dot{y}^i_\lambda \partial^\lambda_i\right)\mathcal{L}, \end{aligned}$$

к морфизму L (3.88). Соответствующие уравнения Эйлера—Лагранжа имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_i \mathcal{L}_V &= \delta_i \mathcal{L} = 0, \qquad (3.90\text{а})\\ \delta_i \mathcal{L}_V &= \partial_V \delta_i \mathcal{L} = 0, \qquad (3.90\text{б})\\ \partial_V &= \dot{y}^i \partial_i + \dot{y}^i_\lambda \partial^\lambda_i + \dot{y}^i_{\mu\lambda} \partial^{\mu\lambda}_i. \end{aligned}$$

Уравнения (3.90а) — это в точности уравнения Эйлера—Лагранжа для исходного лагранжиана L.

Замечание 3.6.1. Чтобы прояснить физический смысл уравнений (3.90б), предположим, что $Y \to X$ — векторное расслоение. Пусть s — решение уравнений Эйлера—Лагранжа (3.90а) и δs — его *поле Якоби*, т. е. $s + \varepsilon\delta s$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, — тоже решение уравнений Эйлера—Лагранжа (3.90а) с точностью до членов степени > 1 по малому параметру ε. Легко убедиться, что поле Якоби удовлетворяет уравнениям Эйлера—Лагранжа (3.90б). □

Фазовым пространством в теории поля на вертикальном касательном расслоении VY является *вертикальное расслоение Лежандра*

$$\Pi_{VY} = V^*VY \underset{VY}{\wedge} \Big(\overset{n-1}{\wedge} T^*X \Big).$$

Лемма 3.6.1. Существует изоморфизм расслоений

$$\Pi_{VY} \underset{VY}{\cong} V\Pi, \qquad p_i^\lambda \leftrightarrow \dot p_i^\lambda, \qquad q_i^\lambda \leftrightarrow p_i^\lambda, \tag{3.91}$$

записанный относительно голономных координат

$$\left(x^\lambda, y^i, \dot y^i, p_i^\lambda, q_i^\lambda\right)$$

на Π_{VY} и голономных координат

$$\left(x^\lambda, y^i, p_i^\lambda, \dot y^i, \dot p_i^\lambda\right)$$

на $V\Pi$. □

Доказательство. Аналогично известному изоморфизму расслоений TT^*X и T^*TX, изоморфизм

$$VV^*Y \underset{VY}{\cong} V^*VY, \quad p_i \leftrightarrow \dot v_i, \quad \dot p_i \leftrightarrow \dot y_i,$$

устанавливается проверкой законов преобразования голономных координат $\left(x^\lambda, y^i, p_i\right)$ на V^*Y и $\left(x^\lambda, y^i, v^i\right)$ на VY. □

Отсюда следует, что, как и лагранжев формализм, ковариантный гамильтонов формализм на вертикальном расслоении Лежандра $\Pi_{VY} = V\Pi$ может быть построен как вертикальное расширение на $V\Pi$ ковариантного гамильтонова формализма на Π, когда сопряженными парами канонических переменных являются $\left(y^i, \dot p_i^\lambda\right)$ и $\left(\dot y^i, p_i^\lambda\right)$.

В частности, всякий лагранжиан (3.89) порождает вертикальное отображение Лежандра

$$\widehat{L}_V = V\widehat{L}\colon\ VJ^1Y \underset{VY}{\longrightarrow} V\Pi, \tag{3.92}$$

$$p_i^\lambda = \partial_i^\lambda \mathcal{L}_V = \pi_i^\lambda, \qquad \dot p_i^\lambda = \partial_V \pi_i^\lambda, \qquad \partial_V = \dot y^i \partial_i + \dot p_i^\lambda \partial_\lambda^i. \tag{3.93}$$

Благодаря изоморфизму (3.91) вертикальное расслоение Лежандра $V\Pi$ наделено канонической полисимплектической формой

$$\Omega_{VY} = \left[d\dot p_i^\lambda \wedge dy^i + dp_i^\lambda \wedge d\dot y^i\right] \wedge \omega \otimes \partial_\lambda. \tag{3.94}$$

Соответственно всякая гамильтонова форма

$$H = p_i^\lambda dy^i \wedge \omega_\lambda - \mathcal{H}\omega$$

на расслоении Лежандра Π (см. первый том [11], § 2.3) определяет гамильтонову форму

$$H_V = (Vh)^*\Xi_V = \left(\dot p_i^\lambda dy^i + p_i^\lambda d\dot y^i\right) \wedge \omega_\lambda - \mathcal{H}_V\omega, \tag{3.95}$$
$$\mathcal{H}_V = \partial_V \mathcal{H} = \left(\dot y^i \partial_i + \dot p_i^\lambda \partial_\lambda^i\right)\mathcal{H},$$

на вертикальном расслоении Лежандра $V\Pi$, называемую ***вертикальным расширением H***.

Предложение 3.6.2. Пусть

$$\gamma = dx^\lambda \otimes \left(\partial_\lambda + \gamma_\lambda^i + \gamma_{\lambda i}^\mu \partial_\mu^i\right), \tag{3.96}$$

$$\gamma_\lambda^i = \partial_\lambda^i \mathcal{H}, \quad \gamma^\lambda \lambda i = -\partial_i \mathcal{H}, \tag{3.97}$$

— гамильтонова связность на $\Pi \to X$ для гамильтоновой формы H. Тогда ее вертикальное продолжение

$$V\gamma = \gamma + dx^\mu \otimes \left[\partial_V \gamma^i_\mu \dot{\partial}_i + \partial_V \gamma^\lambda_{\mu i} \dot{\partial}^i_\lambda\right] \tag{3.98}$$

на $V\Pi \to X$ (см. формулу (П. 61) во втором томе [12]) является гамильтоновой связностью для вертикальной гамильтоновой формы H_V (3.95), а ее компоненты удовлетворяют исходным уравнениям Гамильтона (3.97) и уравнениям

$$\dot{\gamma}^i_\mu = \partial^i_\mu \mathcal{H}_V = \partial_V \partial^i_\mu \mathcal{H}, \qquad \dot{\gamma}^\lambda_{\lambda i} = -\partial_i \mathcal{H}_V = -\partial_V \partial_i \mathcal{H}. \tag{3.99}$$

□

Этот факт устанавливается непосредственной проверкой. Как и в случае уравнений Эйлера—Лагранжа, уравнения Гамильтона (3.99) являются уравнениями для полей Якоби решений уравнений Гамильтона (3.97).

Перейдем теперь к заявленному выше суперсимметричному расширению теории поля на расслоении $Y \to X$. Оно строится как БРС-инвариантное обобщение теории поля на вертикальном касательном расслоении $VY \to X$ [79, 113, 138].

Рассмотрим вертикальное касательное расслоение VVY к касательному расслоению $VY \to X$ и простое градуированное многообразие $(VY, \mathcal{A}_{VVY})$, телом которого служит вертикальное касательное расслоение VY, а характеристическим расслоением — векторное расслоение $VVY \to VY$. Локальным базисом этого градуированного многообразия является $(c^i, \bar{c}^i)$, где $\{c^i, \bar{c}^i\}$ — базисы слоев расслоения V^*VY, дуальные голономным базисам $\{\partial_i, \dot{\partial}_i\}$ расслоения $VVY \to VY$. Градуированные векторные поля и градуированные 1-формы вводятся на VY как сечения векторных расслоений $\mathcal{V}_{VVY}$ и $\mathcal{V}^*_{VVY}$ соответственно. Комплексифицируем эти расслоения как $\mathbb{C}\bigotimes_X \mathcal{V}_{VVY}$ и $\mathbb{C}\bigotimes_X \mathcal{V}^*_{VVY}$. *БРС-оператором* на градуированных функциях на VY называется комплексное градуированное векторное поле

$$u_Q = c^i \partial_i + i\dot{y}^i \frac{\partial}{\partial \bar{c}^i}. \tag{3.100}$$

Оно является нильпотентным, т. е. $u_Q^2 = 0$.

Конфигурационным пространством суперсимметричной теории поля служит простое градуированное многообразие $(VJ^1Y, \mathcal{A}_{VVJ^1Y})$, чьим характеристическим векторным расслоением является вертикальное касательное расслоение $VVJ^1Y \to VJ^1Y$ к расслоению $VJ^1Y \to X$. Его локальный базис $(c^i, \bar{c}^i, c^i_\lambda, \bar{c}^i_\lambda)$ — это послойный базис расслоения V^*VJ^1Y, дуальный голономному базису $\{\partial_i, \dot{\partial}_i, \partial^\lambda_i, \dot{\partial}^\lambda_y\}$ слоев расслоения $VVJ^1Y \to VJ^1Y$. Аффинное расслоение

$$\pi^1_0\colon VJ^1Y \to VY$$

и соответствующий вертикальный касательный морфизм

$$V\pi^1_0\colon VVJ^1Y \to VVY$$

порождают соответствующий морфизм (3.24) градуированных многообразий

$$\left(VJ^1Y, \mathcal{A}_{VVJ^1Y}\right) \to (VY, \mathcal{A}_{VVY}).$$

Введем оператор полной производной

$$d_\lambda = \partial_\lambda + y^i_\lambda \partial_i + \dot{y}^i_\lambda \dot{\partial}_i + c^i_\lambda \frac{\partial}{\partial c^i} + \bar{c}^i_\lambda \frac{\partial}{\partial \bar{c}^i}.$$

Тогда закон координатных преобразований базисных элементов c^i_λ и $\bar c^i_\lambda$ принимает вид

$$c'^i_\lambda = d_\lambda c'^i, \quad \bar c'^i_\lambda = d_\lambda \bar c'^i. \tag{3.101}$$

Поэтому c^i_λ и $\bar c^i_\lambda$ можно условно интерпретировать как струи базисных элементов c^i и $\bar c^i$. Подчеркнем, что это не определение струй градуированных расслоений [136]. Закон координатных преобразований (3.101) позволяет обобщить БРС-оператор u_Q (3.100) на комплексные градуированные векторные поля

$$J^1 u_Q = u_Q + c^i_\lambda \partial^\lambda_i + i\dot y^i_\lambda \frac{\partial}{\partial \bar c^i_\lambda} \tag{3.102}$$

на VJ^1Y (сравните с формулой (1.52) в первом томе [11]).

Аналогичным образом может быть введено простое градуированное многообразие с характеристическим векторным расслоением $VVJ^kY \to VJ^kY$. Его локальным базисом является

$$(c^i, \bar c^i, c^i_\Lambda, \bar c^i_\Lambda), \quad 0 < |\Lambda| \leqslant k.$$

Рассмотрим операторы

$$\begin{aligned} \partial_c &= c^i \partial_i + c^i_\lambda \partial^\lambda_i + c^i_{\lambda\mu}\partial^\lambda_i + \ldots, \\ \partial_{\bar c} &= \bar c^i \partial_i + \bar c^i_\lambda \partial^\lambda_i + \bar c^i_{\lambda\mu}\partial^\lambda_i + \ldots, \\ d_\lambda &= \partial_\lambda + y^i_\lambda \partial_i + c^i_\lambda \frac{\partial}{\partial c^i} + \bar c^i_\lambda \frac{\partial}{\partial \bar c^i} + \ldots . \end{aligned} \tag{3.103}$$

Они удовлетворяют соотношениям

$$d_\lambda \partial_c = \partial_c d_\lambda, \qquad d_\lambda \partial_{\bar c} = \partial_{\bar c}\, d_\lambda. \tag{3.104}$$

Главным принципом суперсимметричного расширения лагранжева формализма является инвариантность относительно БРС-преобразований (3.102). БРС-инвариантным обобщением лагранжиана L_V (3.89) является градуированная n-форма

$$L_S = L_V + i\partial_c \partial_{\bar c}\mathcal{L}\omega \tag{3.105}$$

на VJ^1Y такая, что $\mathbf{L}_{J u_Q} L_S = 0$. Соответствующие уравнения Эйлера—Лагранжа определяются как ядро оператора Эйлера—Лагранжа

$$\mathcal{E}_{L_S} = \left(dy^i \delta_i + d\dot y^i \dot\delta_i + dc^i \frac{\delta}{\delta c^i} + d\,\bar c^i \frac{\delta}{\delta \bar c^i}\right)\mathcal{L}_S \wedge \omega$$

и имеют вид

$$\dot\delta_i \mathcal{L}_S = \delta_i \mathcal{L} = 0, \tag{3.106а}$$

$$\delta_i \mathcal{L}_S = \delta_i \mathcal{L}_V + i\partial_{\bar c}\, \partial_c \delta_i \mathcal{L} = 0, \tag{3.106б}$$

$$\frac{\delta}{\delta c^i}\mathcal{L}_S = -i\partial_{\bar c}\, \delta_i \mathcal{L} = 0, \tag{3.106в}$$

$$\frac{\delta}{\delta \bar c^i}\mathcal{L}_S = i\partial_c \delta_i \mathcal{L} = 0, \tag{3.106г}$$

где использованы соотношения (3.104). Уравнения (3.106а) — это уравнения Эйлера—Лагранжа для первоначального лагранжиана L полевой модели, тогда как (3.106б)–(3.106г) представляют собой уравнения для поля Якоби

$$\delta y^i = \bar\varepsilon c^i + \bar c^i \varepsilon + i\,\bar\varepsilon\varepsilon \dot y^i$$

с точностью до членов степени > 2 по нечетным параметрам ε и $\bar\varepsilon$.

Фазовым пространством суперсимметричного расширения теории поля является комплексифицированное простое градуированное многообразие $(V\Pi, \mathcal{A}_{VV\Pi})$, телом которого служит вертикальное касательное расслоение $V\Pi$, а характеристическим расслоением — векторное расслоение $VV\Pi \to V\Pi$. Оно имеет локальный базис $(c^i, \bar{c}^i, c_i^\lambda, \bar{c}_i^\lambda)$, элементы которого c_i^λ и $\bar{c}_i^\lambda$ преобразуются по тем же законам, что и координаты импульсов p_i^λ и $\dot{p}_i^\lambda$. Градуированные векторные поля и градуированные 1-формы на $V\Pi$ вводятся как сечения векторных расслоений $\mathbb{C}\bigotimes\limits_X \mathcal{V}_{VV\Pi}$ и $\mathbb{C}\bigotimes\limits_X \mathcal{V}^*_{VV\Pi}$ соответственно.

Принимая во внимание закон координатных преобразований элементов c_i^λ и $\bar{c}_i^\lambda$, БРС-оператор u_Q (3.100) на VY расширяется до комплексного градуированного векторного поля

$$\widetilde{u}_Q = \partial_c + i\dot{y}^i\frac{\partial}{\partial \bar{c}^i} + i\dot{p}_i^\lambda\frac{\partial}{\partial \bar{c}_i^\lambda} \tag{3.107}$$

на $V\Pi$. БРС-инвариантным расширением полисимплектической формы Ω_{VY} (3.94) является TX-значная градуированная форма

$$\Omega_S = \left[d\dot{p}_i^\lambda \wedge dy^i + dp_i^\lambda \wedge d\dot{y}^i + i\left(d\,\bar{c}_i^\lambda \wedge dc^i - d\bar{c}^i \wedge dc_i^\lambda\right)\right] \wedge \omega \otimes \partial_\lambda,$$

где $(c^i, -i\,\bar{c}_i^\lambda)$ и $(\bar{c}^i, ic_i^\lambda)$ — сопряженные пары канонических переменных. Пусть γ — гамильтонова связность для исходной гамильтоновой формы H полевой модели на фазовом пространстве Π. Ее двойное вертикальное продолжение $VV\gamma$ на $VV\Pi \to X$ (см. формулу (П. 61) во втором томе [12]) является линейным морфизмом над связностью $V\gamma$ на $V\Pi \to X$ и, таким образом, определяет композиционную градуированную связность (3.34)

$$(VV\gamma)_S = V\gamma + dx^\mu \otimes \left[\bar{g}^i_\mu\frac{\partial}{\partial \bar{c}^i} + \bar{g}^\lambda_{\mu i}\frac{\partial}{\partial \bar{c}_i^\lambda} + g^i_\mu\frac{\partial}{\partial c^i} + g^\lambda_{\mu i}\frac{\partial}{\partial c_i^\lambda}\right]$$

на $V\Pi \to X$, компоненты которой g и $\bar{g}$ имеют вид

$$\bar{g}^i_\lambda = \partial_{\bar{c}}\partial^i_\lambda\mathcal{H}, \quad \bar{g}^\lambda_{\lambda i} = -\partial_{\bar{c}}\partial_i\mathcal{H}, \quad g^i_\lambda = \partial_c\partial^i_\lambda\mathcal{H}, \quad g^\lambda_{\lambda i} = -\partial_c\partial_i\mathcal{H},$$
$$\partial_c = c^i\partial_i + c_i^\lambda\partial^i_\lambda, \quad \partial_{\bar{c}} = \bar{c}^i\partial_i + \bar{c}_i^\lambda\partial^i_\lambda.$$

Эта композиционная градуированная связность удовлетворяет уравнению

$$(VV\gamma)_S \rfloor \Omega_S = -dH_S,$$

и поэтому может рассматриваться как *гамильтонова градуированная связность* для *гамильтоновой градуированной формы*

$$H_S = \left[\dot{p}_i^\lambda dy^i + p_i^\lambda d\dot{y}^i + i\left(\bar{c}_i^\lambda dc^i + d\bar{c}^i c_i^\lambda\right)\right]\omega_\lambda - \mathcal{H}_S\omega, \tag{3.108}$$
$$\mathcal{H}_S = (\partial_V + i\partial_{\bar{c}}\,\partial_c)\mathcal{H},$$

на $V\Pi$. Нетрудно убедиться, что эта градуированная форма БРС-инвариантна, т. е.

$$\mathbf{L}_{\widetilde{u}_Q} H_S = 0.$$

Таким образом, H_S (3.108) является искомым суперсимметричным расширением гамильтоновой формы H. Соответствующие уравнения Гамильтона для H_S имеют вид

$$y^i_\lambda = \dot{\partial}^i_\lambda\mathcal{H}_S = \partial^i_\lambda\mathcal{H}, \qquad p^\lambda_{\lambda i} = -\dot{\partial}_i\mathcal{H}_S = -\partial_i\mathcal{H}, \tag{3.109а}$$

$$\dot{y}^i_\lambda = \partial^i_\lambda\mathcal{H} = \left(\partial_V + i\partial_{\bar{c}}\,\partial_c\right)\partial^i_\lambda\mathcal{H}, \qquad \dot{p}^\lambda_{\lambda i} = -\partial_i\mathcal{H}_S = -\left(\partial_V + i\partial_{\bar{c}}\,\partial_c\right)\partial_i\mathcal{H}, \tag{3.109б}$$

$$c^i_\lambda = i\frac{\partial\mathcal{H}_S}{\partial\bar{c}_i^\lambda} = -\partial_c\partial^i_\lambda\mathcal{H}, \qquad c^\lambda_{\lambda i} = i\frac{\partial\mathcal{H}_S}{\partial\bar{c}^i} = -\partial_c\partial_i\mathcal{H}, \tag{3.109в}$$

$$\bar{c}^i_\lambda = -i\frac{\partial\mathcal{H}_S}{\partial\bar{c}_i^\lambda} = -\partial_{\bar{c}}\,\partial^i_\lambda\mathcal{H}, \qquad \bar{c}^\lambda_{\lambda i} = -i\frac{\partial\mathcal{H}_S}{\partial\bar{c}^i} = -\partial_{\bar{c}}\,\partial_i\mathcal{H}. \tag{3.109г}$$

При этом уравнения (3.109а) — это уравнения Гамильтона для исходной гамильтоновой формы H, тогда как уравнения (3.109б)–(3.109г) описывают поля Якоби

$$\delta y^i = \bar\varepsilon c^i + \bar c^i \varepsilon + i\,\bar\varepsilon\varepsilon \dot y^i, \qquad \delta p_i^\lambda = \bar\varepsilon c_i^\lambda + \bar c_i^\lambda \varepsilon + i\,\bar\varepsilon\varepsilon \dot p_i^\lambda.$$

БРС-инвариантность построенной суперсимметричной теории поля автоматически расширяется до инвариантности относительно супергруппы Ли $ISp(2)$, если расслоение $Y \to X$ имеет аффинные функции перехода (в частности, является аффинным расслоением). Почти все известные полевые модели относятся к этому типу. В этом случае вертикальное касательное расслоение VY допускает вертикальное расщепление (см. (1.27) в первом томе [11]) относительно голономных послойных координат $\dot y^i$ на VY, функции перехода которых не зависят от координат y^i. Поэтому реперы $\{\partial_i\}$ и $\{\dot\partial_i\}$ имеют одни и те же функции перехода, и соответственно одни и те же функции перехода имеют дуальный к ним кореперы $\{c^i\}$ и $\{\bar c^i\}$. Тогда градуированные векторные поля

$$\begin{aligned} &u_{\bar Q} = \bar c^i \partial_i - i\dot y^i \frac{\partial}{\partial c^i}, \\ &u_K = c^i \frac{\partial}{\partial \bar c^i}, \qquad u_{\bar K} = \bar c^i \frac{\partial}{\partial c^i}, \\ &u_C = c^i \frac{\partial}{\partial c^i} - \bar c^i \frac{\partial}{\partial \bar c^i} \end{aligned} \tag{3.110}$$

определены на теле VY. Легко проверить, что градуированные векторные поля (3.100) и (3.110) образуют супералгебру Ли супергруппы Ли ISp(2):

$$\begin{aligned} &[u_Q, u_Q] = [u_{\bar Q}, u_{\bar Q}] = [u_{\bar Q}, u_Q] = [u_K, u_Q] = [u_{\bar K}, u_{\bar Q}] = 0, \\ &[u_K, u_{\bar Q}] = u_Q, \quad [u_{\bar K}, u_Q] = u_{\bar Q}, \quad [u_K, u_{\bar K}] = u_C, \\ &[u_C, u_K] = 2u_K, \quad [u_C, u_{\bar K}] = -2u_{\bar K}. \end{aligned} \tag{3.111}$$

Подобно (3.102), рассмотрим струйные продолжения градуированных векторных полей (3.110) на VJ^1Y. Используем компактное обозначение $u = u^a\partial_a$. Тогда справедлива формула

$$J^1 u = u + d_\lambda u^a \partial_a^\lambda.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} &J^1 u_{\bar Q} = u_{\bar Q} + \bar c_\lambda^i \partial_i^\lambda - i\dot y_\lambda^i \frac{\partial}{\partial c_\lambda^i}, \\ &J^1 u_K = u_K + c_\lambda^i \frac{\partial}{\partial \bar c_\lambda^i}, \qquad J^1 u_{\bar K} = u_{\bar K} + \bar c_\lambda^i \frac{\partial}{\partial c_\lambda^i}, \\ &J^1 u_C = u_C = c_\lambda^i \frac{\partial}{\partial c_\lambda^i} - \bar c_\lambda^i \frac{\partial}{\partial \bar c_\lambda^i}. \end{aligned} \tag{3.112}$$

Нетрудно установить, что лагранжиан L_S (3.105) суперсимметричной теории поля инвариантен относительно преобразований с генераторами (3.112) и что градуированные векторные поля (3.102) и (3.112) образуют супералгебру Ли (3.111).

Аналогично градуированные векторные поля (3.110) могут быть подняты на $V\Pi$ по формуле

$$\widetilde u = u - (-1)^{|y^a|(|p_b|+|u^b|)} \partial_a u^b p_b^\lambda \frac{\partial}{\partial p_a^\lambda}.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} &\widetilde u_{\bar Q} = \partial_{\bar c} - i\dot y^i \frac{\partial}{\partial c^i} - i\dot p_i^\lambda \frac{\partial}{\partial c_i^\lambda}, \\ &\widetilde u_K = c^i \frac{\partial}{\partial \bar c^i} + c_i^\lambda \frac{\partial}{\partial \bar c_i^\lambda}, \qquad \widetilde u_{\bar K} = \bar c^i \frac{\partial}{\partial c^i} + \bar c_i^\lambda \frac{\partial}{\partial c_i^\lambda}, \\ &\widetilde u_C = c^i \frac{\partial}{\partial c^i} + c_i^\lambda \frac{\partial}{\partial c_i^\lambda} - \bar c^i \frac{\partial}{\partial \bar c^i} - \bar c_i^\lambda \frac{\partial}{\partial \bar c_i^\lambda}. \end{aligned} \tag{3.113}$$

Прямые вычисления показывают что гамильтонова градуированная форма H_S (3.108) суперсимметричной теории поля инвариантна относительно преобразований с генераторами (3.113). Как и в предыдущем случае, градуированные векторные поля (3.107) и (3.113) тоже образуют супералгебру Ли (3.111).

§ 7. Суперсвязности Неемана—Куилена

В этом параграфе мы рассмотрим особый класс суперсвязностей, введенных Ю. Нееманом в физической литературе [123, 124, 125] и Д. Куиленом в математической литературе [115, 131]. Соответствующие расслоения, однако, не принадлежат ни к классу градуированных многообразий и расслоений, ни к классу суперрасслоений. Суперсвязности Неемана—Куилена применяются для вычисления характера Чженя в K-теории (см. ниже в этом параграфе), в некоммутативной геометрии [126], БРСТ-формализме [104] и в некоторых объединенных моделях физики высоких энергий (см. ниже в этом параграфе).

Пусть X — N-мерное гладкое многообразие и $\wedge T^*X$ — внешнее расслоение над X. Пусть E_0 и E_1 — два векторных расслоения над X размерности соответственно n и m. Построим векторное расслоение

$$Q = \wedge T^*X \bigotimes_X E = \wedge T^*X \bigotimes_X \left(E_0 \bigoplus_X E_1\right), \tag{3.114}$$

называемое в дальнейшем *телом* НК-суперрасслоения (см. ниже Определение 3.7.1) или просто НК-суперрасслоением.

Типичным слоем НК-суперрасслоения Q является векторное пространство

$$V = \wedge\mathbb{R}^N \otimes (B_0 \oplus B_1), \tag{3.115}$$

где B_0 и B_1 — типичные слои соответственно векторных расслоений E_0 и E_1. Типичный слой V (3.115) может быть наделен структурой суперпространства $B^{n|m}$ над алгеброй Грассмана $\Lambda = \wedge\mathbb{R}^N$. Это градуированная оболочка градуированного векторного пространства $B = B_0 \oplus B_1$, где B_0 и B_1 рассматриваются соответственно как четное и нечетное подпространства B. НК-суперрасслоение Q наследует эту градуировку, поскольку функции переходов векторных расслоений E_0 и E_1 взаимно независимы, тогда как функции перехода кокасательного расслоения T^*X сохраняют $\mathbb{Z}$-градуировку алгебры Грассмана $\wedge\mathbb{R}^N$.

В то же время НК-суперрасслоение (3.114) не является супервекторным расслоением над X, поскольку его функции перехода — не морфизмы Λ-модулей. Очевидно, что НК-суперрасслоение Q можно рассматривать как тензорное произведение векторного расслоения E и внешнего расслоения $\wedge T^*X$, определяющего простое градуированное многообразие (X, Ω^*_X), где Ω^*_X — пучок внешних форм на X. Как уже отмечалось, векторное расслоение V_E градуированных векторных полей и векторное расслоение V^*_E градуированных 1-форм (см. § 3.2) имеют локальную структуру НК-расслоения (см. локальные изоморфизмы (3.19) и (3.36)).

Обозначим $Q(X)$ и Q_X соответственно пространство глобальных сечений НК-суперрасслоения Q и пучок его сечений. При этом ясно, что $Q(X) = Q_X(X)$. Пространство $Q(X)$ имеет естественную структуру локально свободного $C^\infty(X)$-модуля, тогда как Q_X — это локально свободный пучок C^∞_X-модулей ранга $2^N(n+m)$. В то же время, имея в виду, что (X, Ω^*_X) — пространство локальных градуированных колец, можно снабдить пространство

$$Q(X) = \Omega^*(X) \otimes E(X)$$

структурой градуированного локально свободного $\Omega^*(X)$-модуля, а

$$Q_X = C^\infty_X \otimes \wedge\mathbb{R}^N \otimes B = \Omega^*_X \otimes B$$

— структурой локально свободного пучка Ω^*_X-модулей ранга $(n+m)$. Обозначим $Q(X)$ и Q_X, наделенные упомянутыми выше структурами, соответственно как $\overline{Q}(X)$ и $\overline{Q}_X$.

Определение 3.7.1. Пара $\widehat{Q} = (Q, \overline{Q}(X))$ (или пара $(Q, \overline{Q}_X)$) называется *суперрасслоением Неемана—Куилена* или *НК-суперрасслоением.* □

Пусть $U \subset X$ — область тривиализации векторного расслоения $E \to X$ и $\{c_A\}$ и $\{c_i\}$ — послойные базисы соответственно векторных расслоений E_0 и E_1 над U. Тогда всякий элемент $q \in \overline{Q}(X)$ имеет вид

$$q = q^A c_A + q^i c_i,$$

где q^A, q^i — локальные внешние формы на U. Элемент q является однородным, если его грассманова степень удовлетворяет соотношениям

$$|q| = [q^A] = [q^i] + 1, \quad [q^A] = |q^A| \bmod 2, \quad [q^i] = |q^i| \bmod 2.$$

При выборе другой области тривиализации $U' \subset X$ расслоения E соответствующие функции перехода имеют вид

$$q'^A = \rho^A_B q^B, \qquad q'^i = \rho^i_j q^j, \tag{3.116}$$

где ρ^A_B, ρ^i_j — локальные гладкие функции на $U \cap U'$. Мы будем называть тройку $(U; q^A, q^i)$ вместе с функциями перехода (3.116) *областью тривиализации* НК-суперрасслоения $\widehat{Q}$.

Связность на НК-суперрасслоении $(Q, \overline{Q}(X))$ может быть введена в соответствии с Определением (1.2.2). Легко видно, что в случае кольца $\Omega^*(X)$ дифференцирование d^1 в Предложении 1.1.6 — это в точности внешний дифференциал d.

Определение 3.7.2. Связность на НК-суперрасслоении $(Q, \overline{Q}(X))$, называемая *НК-суперсвязностью*, определяется как морфизм

$$\nabla\colon \overline{Q}(X) \to \overline{Q}(X),$$

который удовлетворяет правилу Лейбница

$$\nabla(\phi q) = (d\phi)q + (-1)^{|f|} f\nabla(q), \quad \forall q \in \overline{Q}(X), \quad \forall \phi \in \Omega^*(X). \tag{3.117}$$

□

Следует подчеркнуть, что НК-суперсвязность определяется как связность на $\Omega^*(X)$-модуле $\overline{Q}(X)$, а не $C^\infty(X)$-модуле $Q(X)$. Поэтому она не является обычной связностью на гладком векторном расслоении $Q \to X$.

Правило Лейбница (3.117) предполагает, что НК-суперсвязность представляет собой нечетный морфизм. Например, на тривиальном расслоении $E \to X$ существует тривиальная НК-суперсвязность $\nabla = d$. Пусть Γ_0 и Γ_1 будут линейные связности соответственно на векторных расслоениях E_0 и E_1, а $\Gamma_0 \oplus \Gamma_1$ — линейная связность на расслоении $E \to X$. Тогда ковариантный дифференциал ∇^Γ относительно связности Γ является НК-суперсвязностью

$$\nabla^\Gamma(q) = (dx^\lambda \wedge \partial_\lambda - \Gamma)(q). \tag{3.118}$$

На области тривиализации U НК-суперрасслоения НК-суперсвязность (3.118) имеет вид

$$\nabla^\Gamma(q) = (dq^A - dx^\lambda \wedge \Gamma_{0\lambda}{}^A{}_B q^B)c_A + (dq^i - dx^\lambda \wedge \Gamma_{1\lambda}{}^i{}_j q^j)c_i, \tag{3.119}$$

где $\Gamma_{0\lambda}{}^A{}_B$, $\Gamma_{1\lambda}{}^i{}_j$ — локальные компоненты связностей на U с обычными законами преобразований относительно функций перехода ρ^A_B и ρ^i_j векторных расслоений E_0 и E_1 соответственно.

Как следствие правила Лейбница (3.117) НК-суперсвязности на НК-суперрасслоении образуют аффинное пространство, моделируемое над $\Omega^*(X)_0$-модулем End $\left(\overline{Q}(X)\right)_1$ нечетных эндоморфизмов $\overline{Q}(X)$, т.е.

$$\nabla' = \nabla + L, \tag{3.120}$$

где L — нечетный элемент из End $\left(\overline{Q}(X)\right)$.

Легко видно, что $\Omega^*(X)$-модуль End $(\overline{Q}(X))$ является $C^\infty(X)$-модулем сечений векторного расслоения

$$\wedge T^*X \underset{X}{\bigotimes} E \underset{X}{\bigotimes} E^* \to X.$$

На области тривиализации U НК-суперрасслоения $\widehat{Q}$ всякий элемент из End $(\overline{Q}(X))$ представим суперматрицей

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{pmatrix}, \tag{3.121}$$

компоненты которой являются локальными внешними формами на U. Закон преобразования этой суперматрицы при морфизмах перехода (3.116) имеет вид

$$L' = \widehat{\rho} L \widehat{\rho}^{-1},$$

где $\widehat{\rho}$ — это $(n+m)\times(n+m)$-матрицы

$$\widehat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho^A_B & 0 \\ 0 & \rho^i_j \end{pmatrix}, \tag{3.122}$$

компонентами которых служат функции перехода ρ^A_B и ρ^i_j.

В соответствии с выражением (3.120) всякая НК-суперсвязность на области тривиализации НК-суперрасслоения $\widehat{Q}$ может быть записана в виде

$$\nabla = d + \vartheta, \tag{3.123}$$

где ϑ — локальная нечетная суперматрица (3.121), т.е. ее компоненты ϑ_1, ϑ_4 являются нечетными внешними формами, а компоненты ϑ_2, ϑ_3 — четными внешними формами. Ясно, что разложение в сумму (3.123) не сохраняется при морфизмах перехода (3.116), и мы имеем закон преобразований

$$\vartheta' = \widehat{\rho}\vartheta\widehat{\rho}^{-1} - d\widehat{\rho}\rho^{-1},$$

где $d\widehat{\rho}$ — суперматрицы, компонентами которых являются 1-формы $d\rho^A_B$ и $d\rho^i_j$.

В соответствии с Определением 1.2.5 *кривизной* НК-суперсвязности ∇ является морфизм

$$R = \nabla^2 \colon \overline{Q}(X) \to \overline{Q}(X). \tag{3.124}$$

Естественно, что кривизна тривиальной НК-суперсвязности $\nabla = d$ равна 0. Кривизна НК-суперсвязности ∇^Γ (3.119) имеет вид

$$R(q) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}R_{\lambda\mu}{}^A{}_B dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge q^B c_A & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}R_{\lambda\mu}{}^i{}_j dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge q^j c_i, \end{pmatrix}, \tag{3.125}$$

где $R_{\lambda\mu}{}^A{}_B$, $R_{\lambda\mu}{}^i{}_j$ — компоненты кривизны линейных связностей Γ_0 и Γ_1 соответственно. Если задано локальное разложение (3.123) НК-суперсвязности ∇, ее кривизна (3.124) представима в виде суммы

$$R = d(\vartheta) + \vartheta^2 \tag{3.126}$$

и имеет закон преобразований $R' = \widehat{\rho} R \widehat{\rho}^{-1}$ при морфизмах перехода (3.116). Отсюда следует, что кривизна НК-суперсвязности является четным эндоморфизмом $\Omega^*(X)$-модуля $\overline{Q}(X)$.

Замечание 3.7.1. Понятия НК-суперрасслоения и НК-суперсвязности естественным образом распространяются на случай комплексного векторного расслоения $E \to X$ и внешней алгебры $\mathbb{C} \otimes \Omega^*(X)$ комплексных внешних форм на X. □

Теперь остановимся коротко на следующих двух приложениях НК-суперсвязностей.

Первое касается объединенных моделей в физике высоких энергий (см. [104, 123, 124, 133]). Пусть E_0 — векторное расслоение со структурной группой G, интерпретируемой в качестве группы внутренних симметрий в теории частиц (например, $SU(2)$), а $E_1 \to X$ — линейное расслоение. Тогда типичным слоем НК-суперрасслоения Q (3.114) является суперпространство $B^{n|1}$. Пусть A — ассоциированная связность на расслоении $E_0 \to X$, т. е. ее компоненты A^p_λ — калибровочные потенциалы, отвечающие группе Ли G. Рассмотрим НК-суперсвязность, являющуюся суммой

$$\nabla = \nabla^A + L$$

НК-суперсвязности $\nabla^A(q)$ (3.118) и нечетного эндоморфизма

$$L = \begin{pmatrix} 0 & i\phi^* \\ i\phi & 0 \end{pmatrix},$$

где ϕ является скалярным полем, интерпретируемым как хиггсовское поле. Физическая идея этой модели состоит в том, что калибровочные потенциалы и хиггсовское поле рассматриваются вместе как компоненты одной и той же НК-суперсвязности.

Замечание 3.7.2. Следует подчеркнуть, что авторы [104, 123, 124] следуют правилу умножения суперматриц

$$\begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & C' \\ D' & B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \wedge A' + (-1)^{|D'|} C \wedge D' & A \wedge C' + (-1)^{|B'|} C \wedge B' \\ (-1)^{|A'|} D \wedge A' + B \wedge D' & (-1)^{|C'|} D \wedge C' + B \wedge B' \end{pmatrix}.$$

Это умножение не удовлетворяет соотношениям (3.6), (3.7). □

Второе применение НК-суперсвязностей, которые мы здесь упомянем, связано с вычислением характера Чженя [105, 115, 131]. На НК-суперрасслоении Q (3.114) рассмотрим НК-суперсвязность

$$\nabla = \nabla^\Gamma + tL, \tag{3.127}$$

где ∇^Γ — НК-суперсвязность (3.119), L — нечетный элемент $\mathrm{End}\left(\overline{Q}(X)\right)$ и t — вещественный параметр. Кривизна (3.124) НК-суперсвязности (3.127) имеет вид

$$R = t^2 L^2 + t\left[\nabla^\Gamma, L\right] + \left(\nabla^\Gamma\right)^2,$$

где $\left(\nabla^\Gamma\right)^2$ — кривизна (3.125) НК-суперсвязности ∇^Γ (3.119). Запишем

$$\mathrm{ch}_t = \mathrm{Str}\left(\exp\{R\}\right) = \sum_{k=0} \mathrm{Str}\left(\left(\nabla^\Gamma + L\right)^{2k}\right). \tag{3.128}$$

Этот ряд сходится, поскольку R является сечением расслоения конечномерных алгебр над X. Нетрудно убедиться, что

$$\mathrm{ch}_{t=0} = \mathrm{ch}\,(E_0) - \mathrm{ch}\,(E_1), \tag{3.129}$$

где $\mathrm{ch}\,(E_0)$, $\mathrm{ch}\,(E_1)$ — характеры Чженя (см. формулу (3.57) в первом томе [11]) комплексных векторных расслоений E_0 и E_1 (с точностью до нормировочного множителя $i/2\pi$). Выражение (3.129) — это характер Чженя разности векторных расслоений $E_0 \ominus E_1$ в K-теории комплексных векторных расслоений на многообразии X [6, 23]

(см. соотношение (A.2) в Приложении A). Ключевым является тот факт, что когомологии Де Рама внешних форм ch_t (3.128) и $\mathrm{ch}_{t=0}$ (3.129) совпадают. Это вытекает из следующих двух утверждений.

Предложение 3.7.3. Для произвольных НК-суперсвязности ∇ и нечетного эндоморфизма $T \in \mathrm{End}\left(\overline{Q}(X)\right)$ справедливо равенство

$$d(\mathrm{Str}\,(T)) = \mathrm{Str}\,([\nabla, T]). \tag{3.130}$$

□

Доказательство. Так как равенство (3.130) локально, можно предположить, что ∇ имеет разложение (3.123) и T является суммой суперматриц вида $\phi_k T_k$, где ϕ_k — внешние формы, а T_k — постоянные суперматрицы. Принимая во внимание соотношение (3.7), получаем

$$\mathrm{Str}\,([d + \vartheta, \phi_k T_k]) = \mathrm{Str}\,(d\phi_k T_k) = d(\mathrm{Str}\,(\phi_k T_k)).$$

□

Пусть $T = R^k$, где R — кривизна НК-суперсвязности ∇. Поскольку

$$\mathrm{Str}\,([\nabla, R^k]) = 0,$$

из равенства (3.130) следует, что форма $\mathrm{Str}(R^k)$ замкнута.

Предложение 3.7.4. [131]. Для кривизны R НК-суперсвязности ∇ класс когомологий Де Рама внешней формы $\mathrm{Str}\,(R^k)$ не зависит от выбора НК-суперсвязности ∇. □

Совпадение классов когомологий Де Рама форм ch_t (3.128) и $\mathrm{ch}_{t=0}$ (3.129) позволяет анализировать характер Чженя при различном выборе суперматриц и параметра t в выражении (3.127).

Глава 4

Связности в БРСТ-формализме

Существуют различные подходы к построению БРСТ-формализма. Мы здесь коснемся только тех его элементов, где используются многообразия струй и связности. В частности, это техника так называемых локальных форм и когомологий, а также БРСТ-тензорных полей, действие на которые БРСТ-оператора выражается в терминах БРСТ-связностей. Мы начнем изложение с аппарата струй бесконечного порядка, распространяемого на нечетные духовые поля, так называемые духи для духов и антиполя.

§ 1. Связность на струях бесконечного порядка

В первом томе [11], § 1.5 были приведены канонические горизонтальные расщепления (1.55) и (1.56) над многообразием струй J^1Y касательного и кокасательного расслоений к расслоению $Y \to X$. Выбором связности $\Gamma\colon Y \to J^1Y$ на расслоении $Y \to X$ эти канонические расщепления превращаются в обычные горизонтальные расщепления над Y, которые уже не являются каноническими. Аналогично касательное и кокасательное расслоения к многообразию k-струй J^kY тоже допускают канонические горизонтальные расщепления (см. ниже выражения (4.21) и (4.22)), но эти расщепления осуществляются над многообразием $(k+1)$-струй $J^{k+1}Y$. Поэтому конструкция канонических горизонтальных расщеплений для многообразий струй конечного порядка не является замкнутой. Можно, однако, надеяться, что в случае пространства струй бесконечного порядка $J^\infty Y$ соответствующие канонические горизонтальные расщепления над $J^\infty Y$ являются истинными горизонтальными расщеплениями, отвечающими некоторой канонической связности на $J^\infty Y$. Эта связность задает каноническое разложение внешних форм на многообразиях струй и соответствующее разбиение внешнего дифференциала

$$d = d_H + d_V$$

на горизонтальную и вертикальную части. Эти разложения приводят к так называемому вариационному бикомплексу (см. ниже (4.38)) и алгебраическому подходу к вариационному исчислению (см. § 4.2). Этот бикомплекс обобщается на градуированные алгебры и играет важную роль в БРСТ-моделях, формулируемых в терминах струй (см. § 4.4).

Начнем с краткого изложения аппарата струй высшего порядка сечений расслоения $Y \to X$ [78, 98, 137, 139]. Это прямое обобщение понятия струй первого и второго порядков. Мы следуем обозначениям первого тома [11], § 1.5.

Пусть $Y \to X$ — гладкое расслоение с послойными координатами (x^λ, y^i). Обозначим Λ, $|\Lambda| = r$, набор индексов $(\lambda_r \dots \lambda_1)$ по модулю их перестановок. Назовем его мультииндексом. Соответственно пусть $\Lambda + \Sigma$ — мультииндекс

$$\Lambda + \Sigma = (\lambda_r \dots \lambda_1 \sigma_k \dots \sigma_1)$$

по модулю перестановок, а $\Lambda\Sigma$ — объединение мультииндексов

$$\Lambda\Sigma = (\lambda_r \dots \lambda_1 \sigma_k \dots \sigma_1),$$

где индексы λ_i и σ_j не переставляются между собой.

Вводится оператор *полной производной*

$$d_\lambda^{(k)} = \partial_\lambda + \sum_{|\Lambda|=0}^{k} y^i_{\Lambda+\lambda}\partial_i^\Lambda. \tag{4.1}$$

Мы обычно будем опускать индекс (k) в этом выражении, если понятно о чем идет речь. Используем компактные обозначения

$$\partial_\Lambda = \partial_{\lambda_r} \circ \ldots \circ \partial_{\lambda_1}, \qquad d_\Lambda = d_{\lambda_r} \circ \ldots \circ d_{\lambda_1}, \qquad \Lambda = (\lambda_r \ldots \lambda_1).$$

Многообразие струй порядка r сечений расслоения $Y \to X$ (или просто многообразие r-струй расслоения $Y \to X$) определяется как объединение

$$J^rY = \bigcup_{x\in X} j^r_x s \tag{4.2}$$

классов эквивалентности $j^r_x s$ сечений s расслоения $Y \to X$ таких, что различные сечения s и s' принадлежат одному и тому же классу эквивалентности $j^r_x s$ тогда и только тогда, когда

$$s^i(x) = s'^i(x), \qquad \partial_\Lambda s^i(x) = \partial_\Lambda s'^i(x), \qquad 0 < |\Lambda| \leqslant r.$$

Короче говоря, сечения расслоения $Y \to X$ отождествляются по $r+1$ первым членам их рядов Тейлора в точке $x \in X$. Ясно, что это определение не зависит от выбора координатного атласа (x^λ, y^i) расслоения $Y \to X$. При этом само множество (4.2) может быть наделено координатами

$$\left(x^\lambda, y^i_\Lambda\right), \quad 0 \leqslant |\Lambda| \leqslant r, \quad \left(x^\lambda, y^i_\Lambda\right) \circ s = \left(x^\lambda, \partial_\Lambda s^i(x)\right), \tag{4.3}$$

вместе с функциями перехода

$$y'^i_{\lambda+\Lambda} = \frac{\partial x^\mu}{\partial' x^\lambda} d_\mu y'^i_\Lambda. \tag{4.4}$$

Координаты (4.3) превращают множество r-струй J^rY в гладкое многообразие конечной размерности

$$\dim J^rY = n + m\sum_{i=0}^{r} \frac{(n+i-1)!}{i!(n-1)!}.$$

Координаты (4.3) согласуются с естественными сюръекциями

$$\pi^r_l\colon J^rY \to J^lY, \quad r > l,$$

которые образуют цепочку композиционных расслоений

$$\pi^r\colon J^rY \xrightarrow{\pi^r_{r-1}} J^{r-1}Y \xrightarrow{\pi^{r-1}_{r-2}} \ldots \xrightarrow{\pi^1_0} Y \xrightarrow{\pi} X,$$
$$\pi^k_h \circ \pi^r_k = \pi^r_h, \qquad \pi^h \circ \pi^r_h = \pi^r.$$

Вид функций перехода (4.4), когда $|\Lambda| = r$, показывает, что расслоение

$$\pi^r_{r-1}\colon J^rY \to J^{r-1}Y$$

является аффинным расслоением, моделируемым над векторным расслоением

$$\overset{r}{\vee} T^*X \underset{J^{r-1}Y}{\otimes} VY \to J^{r-1}Y. \tag{4.5}$$

Замечание 4.1.1. Чтобы ввести многообразия струй высшего порядка, можно использовать конструкцию повторного многообразия струй. Рассмотрим многообразие r-струй J^rJ^kY расслоения k-струй $J^kY \to X$. Оно наделено координатами

$$(x^\mu, y^i_{\Sigma\Lambda}), \qquad |\Lambda| \leqslant k, \qquad |\Sigma| \leqslant r.$$

Существует канонический мономорфизм расслоений

$$\sigma_{rk}\colon J^{r+k}Y \hookrightarrow J^rJ^kY,$$

задаваемый координатными соотношениями

$$y^i_{\Sigma\Lambda} \circ \sigma_{rk} = y^i_{\Sigma+\Lambda}.$$

□

В исчислении струй высшего порядка определен функтор струйного продолжения порядка r. Если даны расслоения $Y \to X$ и $Y' \to X$ над одной и той же базой X, всякий послойный морфизм

$$\Phi\colon Y \xrightarrow[f]{} Y'$$

над диффеоморфизмом f многообразия X допускает *струйное продолжение порядка r* до морфизма многообразий r-струй

$$J^r\Phi\colon J^rY \ni j^r_x s \mapsto j^r_{f(x)}(\Phi \circ s \circ f^{-1}) \in J^rY'. \tag{4.6}$$

Функтор струйного продолжения является точным. Если послойный морфизм Φ — инъекция (соответственно сюръекция), то его струйное продолжение $J^r\Phi$ тоже является инъекцией (соответственно сюръекцией). Функтор струйного продолжения также сохраняет алгебраическую структуру. В частности, если $Y \to X$ — векторное расслоение, таковым же является и расслоение r-струй $J^rY \to X$. Если $Y \to X$ — аффинное расслоение, моделируемое над векторным расслоением $\overline{Y} \to X$, тогда $J^rY \to X$ — аффинное расслоение, моделируемое над векторным расслоением $J^r\overline{Y} \to X$.

Всякое сечение s расслоения $Y \to X$ допускает *r-струйное продолжение* до сечения

$$(J^rs)(x) = j^r_x s,$$

расслоения струй $J^rY \to X$. Оно называется голономным сечением.

Всякая внешняя форма ϕ на многообразиий струй J^kY задает индуцированную форму $\pi^{k+i*}_k\phi$ на многообразии струй $J^{k+i}Y$. Обозначим для краткости

$$\Omega^*_k = \Omega^*(J^kY)$$

внешнюю алгебру внешних форм на многообразии струй J^kY. Имеет место прямая система $\mathbb{R}$-алгебр

$$\Omega^*(X) \xrightarrow{\pi^*} \Omega^*(Y) \xrightarrow{\pi^{1*}_0} \Omega^*_1 \xrightarrow{\pi^{2*}_1} \cdots \xrightarrow{\pi^{r*}_{r-1}} \Omega^*_r \longrightarrow \cdots. \tag{4.7}$$

Иногда удобно обозначить

$$\Omega^*_{-1} = \Omega^*(X), \qquad \Omega^*_0 = \Omega^*(Y).$$

Подсистемой системы (4.7) является система

$$C^\infty(X) \xrightarrow{\pi^*} C^\infty(Y) \xrightarrow{\pi^{1*}_0} \Omega^0_1 \xrightarrow{\pi^{2*}_1} \cdots \xrightarrow{\pi^{r*}_{r-1}} \Omega^0_r \longrightarrow \cdots \tag{4.8}$$

$\mathbb{R}$-колец вещественных гладких функций $\Omega^0_k = C^\infty(J^kY)$ на многообразиях струй J^kY. Поэтому можно рассматривать (4.7) и (4.8) как прямые системы $C^\infty(X)$-модулей.

Для многообразия k-струй J^kY расслоения $Y \to X$ определен канонический послойный морфизм

$$r_{(k)}\colon J^kTY \to TJ^kY$$

над морфизмом

$$J^kY \underset{X}{\times} J^kTX \to J^kY \underset{X}{\times} TX,$$

имеющий координатный вид

$$(x^\lambda, y^i_\Lambda, \dot x^\lambda, \dot y^i_\Lambda) \circ r_{(k)} = (x^\lambda, y^i_\Lambda, \dot x^\lambda, (\dot y^i)_\Lambda - \sum (\dot y^i)_{\mu+\Sigma} (\dot x^\mu)_\Xi), \qquad 0 \leqslant |\Lambda| \leqslant k,$$

где сумма взята по всем разбиениям $\Sigma + \Xi = \Lambda$, $0 < |\Xi|$, мультииндекса Λ. В частности, имеет место канонический изоморфизм

$$r_{(k)}\colon J^kVY \to VJ^kY, \qquad (\dot y^i)_\Lambda = \dot y^i_\Lambda \circ r_{(k)} \tag{4.9}$$

над J^kY. Как следствие, любое проектируемое векторное поле

$$u = u^\mu \partial_\mu + u^i \partial_i$$

на расслоении $Y \to X$ допускает *k-струйное продолжение*

$$\begin{aligned}
&J^k u = r_{(k)} \circ J^k u\colon J^kY \to TJ^kY, \\
&J^k u = u^\lambda \partial_\lambda + u^i \partial_i + u^i_\Lambda \partial^\Lambda_i, \qquad 0 < |\Lambda| \leqslant k, \\
&u^i_{\lambda+\Lambda} = d_\lambda u^i_\Lambda - y^i_{\mu+\Lambda} \partial_\lambda u^\mu, \qquad 0 < |\Lambda| < k,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

до векторного поля на многообразии k-струй J^kY (сравните с формулой (1.52) в первом томе [11] для $k = 1$). Например, k-струйное продолжение (4.10) вертикального векторного поля на расслоении $Y \to X$ является вертикальным векторным полем на расслоении струй $J^kY \to X$ благодаря изоморфизму (4.9).

Векторное поле u_r на многообразии r-струй J^rY называется *проектируемым*, если для любого $0 \leqslant k < r$ существует проектируемое векторное поле u_k на многообразии k-струй J^kY такое, что

$$u_k \circ \pi^r_k = T\pi^r_k \circ u_r.$$

Проектируемое векторное поле на многообразии струй J^rY дается координатным выражением

$$u_r = u^\lambda \partial_\lambda + u^i_\Lambda \partial^\Lambda_i, \qquad 0 \leqslant |\Lambda| \leqslant r,$$

где коэффициенты u_λ зависят только от координат x^μ на базе X, а коэффициенты u^i_Λ не зависят от координат y^i_Ξ с мультииндексами Ξ такими, что $|\Xi| > |\Lambda|$.

Обозначим $\mathcal{P}^r$ векторное пространство проектируемых векторных полей на многообразии r-струй J^rY. Нетрудно установить, что $\mathcal{P}^r$ представляет собой вещественную алгебру Ли и что морфизмы $T\pi^r_k$, $k < r$, составляют обратную систему

$$\mathcal{P}^0 \xleftarrow{T\pi^1_0} \mathcal{P}^1 \xleftarrow{T\pi^2_1} \cdots \xleftarrow{T\pi^{r-1}_{r-2}} \mathcal{P}^{r-1} \xleftarrow{T\pi^r_{r-1}} \mathcal{P}^r \longleftarrow \cdots \tag{4.11}$$

алгебр Ли.

Предложение 4.1.1. [35, 145]. Струйное продолжение векторных полей (4.10) представляет собой мономорфизм алгебры Ли $\mathcal{P}^0$ проектируемых векторных полей на расслоении $Y \to X$ в алгебру Ли $\mathcal{P}^k$ проектируемых векторных полей на многообразии струй J^kY такой, что

$$T\pi^r_k (J^r u) = J^k u \circ \pi^r_k. \tag{4.12}$$

□

Струйное продолжение $J^k u$ (4.10) называется *интегрируемым* векторным полем на J^kY. Всякое проектируемое векторное поле u_k на J^kY раскладывается в сумму

$$u_k = J^k\big(T\pi_0^k(u_k)\big) + v_k \tag{4.13}$$

интегрируемого векторного поля $J^k(T\pi_0^k(u_k))$ и проектируемого векторного поля v_r, которое является вертикальным относительно некоторого расслоения $J^rY \to Y$.

Аналогично точным последовательностям (1.28а)–(1.28б) в первом томе [11] имеют место точные последовательности

$$0 \to VJ^kY \hookrightarrow TJ^kY \to TX \underset{X}{\times} J^kY \to 0, \tag{4.14}$$

$$0 \to J^kY \underset{X}{\times} T^*X \hookrightarrow TJ^kY \to V^*J^kY \to 0 \tag{4.15}$$

векторных расслоений над J^kY. Они не обладают каноническим расщеплением. В то же время, будучи индуцированными на $J^{k+1}Y$, они расщепляются канонически следующим образом. Существуют послойные мономорфизмы над J^kY

$$\lambda_{(k)}\colon\ J^{k+1}Y \hookrightarrow T^*X \underset{J^kY}{\otimes} TJ^kY, \qquad \lambda_{(k)} = dx^\lambda \otimes d_\lambda^{(k)}, \tag{4.16}$$

$$\theta_{(k)}\colon\ J^{k+1}Y \hookrightarrow T^*J^kY \underset{J^kY}{\otimes} VJ^kY, \qquad \theta_{(k)} = \sum\big(dy_\Lambda^i - y_{\lambda+\Lambda}^i dx^\lambda\big) \otimes \partial_i^\Lambda, \tag{4.17}$$

где сумма берется по всем мультииндексам Λ, $|\Lambda| \leqslant k$ (сравните с формулами (1.53) и (1.54) в первом томе [11] для $k = 1$). Формы

$$\theta_\Lambda^i = dy_\Lambda^i - y_{\Lambda+\lambda}^i dx^\lambda \tag{4.18}$$

называются *контактными формами*. Мономорфизмы (4.16) и (4.17) порождают мономорфизмы над $J^{k+1}Y$

$$\widehat{\lambda}_{(k)}\colon\ TX \underset{X}{\times} J^{k+1}Y \hookrightarrow TJ^kY \underset{J^kY}{\times} J^{k+1}Y, \tag{4.19}$$

$$\widehat{\theta}_{(k)}\colon\ V^*J^kY \underset{J^kY}{\times} \hookrightarrow T^*J^kY \underset{J^kY}{\times} J^{k+1}Y. \tag{4.20}$$

Эти мономорфизмы расщепляют точные последовательности (4.14) и (4.15) над $J^{k+1}Y$ и определяют *канонические горизонтальные расщепления* индуцированных расслоений

$$\pi_k^{k+1*}TJ^kY = \widehat{\lambda}_{(k)}\Big(TX \underset{X}{\times} J^{k+1}Y\Big) \underset{J^{k+1}Y}{\oplus} VJ^kY, \tag{4.21}$$

$$\dot{x}^\lambda\partial_\lambda + \sum \dot{y}_\Lambda^i \partial_i^\Lambda = \dot{x}^\lambda d_\lambda^{(k)} + \sum\big(\dot{y}_\Lambda^i - \dot{x}^\lambda y_{\lambda+\Lambda}^i\big)\partial_i^\Lambda,$$

$$\pi_k^{k+1*}T^*J^kY = T^*X \underset{J^{k+1}Y}{\oplus} \widehat{\theta}_{(k)}\Big(V^*J^kY \underset{J^kY}{\times} J^{k+1}Y\Big), \tag{4.22}$$

$$\dot{x}_\lambda dx^\lambda + \sum \dot{y}_i^\Lambda dy_\Lambda^i = \Big(\dot{x}_\lambda + \sum \dot{y}_i^\Lambda y_{\lambda+\Lambda}^i\Big)dx^\lambda + \sum \dot{y}_i^\Lambda \theta_\Lambda^i,$$

где суммы берутся по всем мультииндексам $|\Lambda| \leqslant k$.

В соответствии с каноническим горизонтальным расщеплением (4.21) векторное поле

$$\widetilde{u}_k\colon\ J^{k+1}Y \xrightarrow{\pi_k^{k+1}\times\mathrm{Id}} J^kY \times J^{k+1} \xrightarrow{u_k\times\mathrm{Id}} TJ^kY \underset{J^kY}{\times} J^{k+1}$$

на многообразии $(k+1)$-струй $J^{k+1}Y$, индуцированное векторным полем u_k на многообразии k-струй J^kY, допускает каноническое горизонтальное расщепление

$$\bar{u} = u_H + u_V = \left(u^\lambda d_\lambda^{(k)} + \sum y^i_{\lambda+\Lambda}\partial_i^\Lambda\right) + \sum (u^i_\Lambda - u^\lambda y^i_{\lambda+\Lambda})\partial_i^\Lambda, \tag{4.23}$$

где суммы берутся по всем мультииндексам $|\Lambda| \leqslant k$.

Согласно каноническому горизонтальному расщеплению (4.22) всякая внешняя 1-форма ϕ на многообразии k-струй J^kY, будучи индуцированной на многообразие $(k+1)$-струй J^{k+1}, допускает каноническое горизонтальное расщепление

$$\pi_k^{k+1*}\phi = \left(\phi_\lambda + \sum y^i_{\Lambda+\lambda}\phi_i^\Lambda\right)dx^\lambda + \sum \phi_i^\Lambda\theta^i_\Lambda, \tag{4.24}$$

где суммы берутся по всем мультииндексам $|\Lambda| \leqslant k$.

Как уже отмечалось, канонические горизонтальные расщепления (4.21)–(4.24) не являются истинными горизонтальными расщеплениями на J^kY, поскольку они определены для расслоений, индуцированных с J^kY на $J^{k+1}Y$. Можно надеяться преодолеть эту трудность в случае струй бесконечного порядка.

Прямая система (4.7) вещественных алгебр внешних форм и обратная система (4.11) вещественных алгебр Ли проектируемых векторных полей на многообразиях струй определены для любого конечного порядка r. Эти последовательности имеют пределы при $r \to \infty$ соответственно в категории модулей и алгебр Ли. Интуитивно можно представить себе элементы этих пределов как объекты на проективном пределе обратной системы

$$X \xrightarrow{\pi} Y \xrightarrow{\pi_0^1} \ldots \longrightarrow J^{r-1}Y \xrightarrow{\pi^r_{r-1}} J^rY \longrightarrow \ldots \tag{4.25}$$

многообразий струй конечного порядка J^rY.

Замечание 4.1.2. Напомним, что *проективным пределом* обратной системы (4.25) называется множество $J^\infty Y$ такое, что для любого k существуют сюръекции

$$\pi^\infty\colon J^\infty Y \to X, \quad \pi^\infty_0\colon J^\infty Y \to Y, \quad \pi^\infty_k\colon J^\infty Y \to J^kY, \tag{4.26}$$

которые образуют коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & J^\infty Y & \\ {}^{\pi_k^\infty}\swarrow & & \searrow{}^{\pi_r^\infty} \\ J^kY & \xrightarrow[\pi_r^k]{} & J^rY \end{array}$$

для всех k и $r < k$ [7, 9]. □

Проективный предел $J^\infty Y$ обратной системы (4.25) существует. Он называется *пространством струй бесконечного порядка*. Этот предел состоит из элементов

$$(\ldots, q_i, \ldots, q_j, \ldots), \qquad q_i \in J^iY, \qquad q_j \in J^jY,$$

декартова произведения $\prod\limits_k J^kY$, которые удовлетворяют соотношениям $q_i = \pi^j_i(q_j)$ для всех $j > i$. Таким образом, пространства струй бесконечного порядка $J^\infty Y$ действительно представляют собой ∞-струи $j^\infty_x s$ локальных сечений расслоения $Y \to X$. Различные сечения принадлежат одной и той же струе $j^\infty_x s$ тогда и только тогда, когда их ряды Тейлора в точке $x \in X$ совпадают друг с другом во всех членах.

Замечание 4.1.3. Отметим, что существует естественная сюръекция пучка Y_X гладких сечений расслоения $Y \to X$ на пространство струй бесконечного порядка $J^\infty Y$, поскольку все сечения s с одним и тем же ростком s_x в точке $x \in X$ принадлежат одной и той же струе $j_x^\infty s$, но обратное утверждение неверно. □

Замечание 4.1.4. Пространство ∞-струй $J^\infty Y$ является также проективным пределом подсистемы обратной системы (4.25), которая начинается с пространства струй $J^r Y$ любого конечного порядка r. □

Как проективный предел пространство ∞-струй $J^\infty Y$ наделяется слабейшей топологией такой, что все сюръекции (4.26) непрерывны. База открытых подмножеств этой топологии в $J^\infty Y$ состоит из прообразов всевозможных открытых подмножеств в многообразиях струй конечного порядка $J^k Y$, $k = 0, \ldots$, относительно морфизмов (4.26). Эта топология паракомпактна и допускает разбиение единицы, реализуемое гладкими функциями. Пространство ∞-струй $J^\infty Y$ может быть наделено также некоторой структурой многообразия, но эта структура имеет целый ряд недостатков [35, 145, 146]. Тем не менее широкий класс дифференциальных объектов может быть определен на $J^\infty Y$ в терминах дифференциального исчисления на модулях, изложенного в § 1.1.

Процедура следующая. Сначала на пространстве ∞-струй $J^\infty Y$ вводятся вещественные гладкие функции. Вещественная функция

$$f\colon J^\infty Y \to \mathbb{R}$$

называется гладкой, если для любой точки $q \in J^\infty Y$ существует открытая окрестность U этой точки q и гладкая функция $f^{(k)}$ на $J^k Y$ для некоторого k такая, что

$$f|_U = f^{(k)} \circ \pi_k^\infty\big|_U.$$

Тогда такое же равенство имеет место для любого $r > k$. В частности, функция $\pi_r^{\infty *} f$, индуцированная гладкой функцией на $J^r Y$, является гладкой функцией на $J^\infty Y$. Гладкие функции на $J^\infty Y$ образуют вещественное кольцо $C^\infty(J^\infty Y)$. Векторные поля на пространстве ∞-струй $J^\infty Y$ вводятся как дифференцирования этого кольца. Они образуют локально свободный левый $C^\infty(J^\infty Y)$-модуль $\mathrm{Der}\,(C^\infty(J^\infty Y))$. В свою очередь, $C^\infty(J^\infty Y)$-модуль $\mathrm{Der}^*(C^\infty(J^\infty Y))$ внешних 1-форм на $J^\infty Y$ определяется как дуальный к модулю векторных полей.

Однако обычно класс рассматриваемых дифференциальных объектов на $J^\infty Y$ ограничивают алгебраическими пределами обратной системы (4.11) алгебр Ли проектируемых векторных полей и прямой системы (4.7) модулей внешних форм на многообразиях струй конечного порядка. Эти пределы образуют подмножества вышеупомянутых $C^\infty(J^\infty Y)$-модулей векторных полей и внешних форм на пространстве струй бесконечного порядка.

Начнем с прямой системы (4.7) вещественных модулей

$$\Omega_k^* = \Omega^*\big(J^k Y\big)$$

внешних форм на многообразиях струй конечного порядка $J^k Y$. Предел Ω_∞^* этой прямой системы по определению удовлетворяет следующим ууловиям [7, 9]:

- для любого r существует мономорфизм модулей $\Omega_r^* \to \Omega_\infty^*$;
- диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\Omega_k^* \arrow[rr, "\pi_k^{r*}"] \arrow[dr, "\pi_k^{\infty *}"'] & & \Omega_r^* \arrow[dl, "\pi_r^{\infty *}"] \\
& \Omega_\infty^* &
\end{tikzcd}.$$

коммутативны для всех r и $k < r$.

Такой *прямой предел* существует. Это $\mathbb{R}$-модуль, который является фактором прямой суммы $\bigoplus\limits_k \Omega_k^*$ при отождествлении индуцированных форм, т. е.

$$\pi_r^{\infty *}\phi = \pi_k^{\infty *}\sigma, \qquad \phi \in \Omega_r^*, \qquad \sigma \in \Omega_k^*,$$

если $\phi = \pi_k^{r*}\sigma$. Другими словами, при условии указанной идентификации прямой предел Ω_∞^* состоит из всех внешних форм на многообразиях струй конечного порядка (включая расслоение Y и его базу X). Поэтому мы будем обозначать образ внешней алгебры Ω_r^* в Ω_∞^* тем же символом Ω_r^*, а элементы $\pi_r^{\infty *}\phi$ из Ω_∞^* просто как ϕ.

Замечание 4.1.5. Очевидно, что Ω_∞^* — прямой предел подсистемы прямой системы (4.7), которая начинается с любого конечного порядка r. □

Будучи $\mathbb{R}$-модулем, прямой предел Ω_∞^* имеет также структуру так называемого фильтрованного Ω_∞^0-модуля [4]. Рассмотрим прямую систему (4.8) коммутативных $\mathbb{R}$-колец гладких функций на многообразиях струй J^rY. Ее прямой предел Ω_∞^0 состоит из функций на многообразиях струй конечного порядка при условии идентификации индуцированных функций. Поэтому Ω_∞^0 является подмножеством кольца $C^\infty(J^\infty Y)$ всех гладких функций на $J^\infty Y$. Это $\mathbb{R}$-кольцо, *фильтрованное* $\mathbb{R}$-кольцами $\Omega_k^0 \subset \Omega_{k+i}^0$ (см. ниже Определение 4.1.2). Тогда $\mathbb{R}$-модуль Ω_∞^* наделен структурой *фильтрованного* Ω_∞^0*-модуля*, задаваемой Ω_k^0-подмодулями Ω_k^* модуля Ω_∞^*.

Определение 4.1.2. Эндоморфизм Δ вещественного модуля Ω_∞^* называется *фильтрованным морфизмом*, если существует число $i \in \mathbb{N}$ такое, что ограничение Δ на Ω_k^* является гомоморфизмом Ω_k^* в Ω_{k+i}^* над мономорфизмом $\Omega_k^0 \hookrightarrow \Omega_{k+i}^0$ для всех k. □

Теорема 4.1.3. [9]. Всякая *прямая система эндоморфизмов* $\{\gamma_k\}$ модулей Ω_k^* такая, что

$$\pi_i^{j*} \circ \gamma_i = \gamma_j \circ \pi_i^{j*}$$

для всех $j > i$, имеет *прямой предел* γ_∞ в фильтрованных эндоморфизмах модуля Ω_∞^*. Если все γ_k являются мономорфизмами (соответственно эпиморфизмами), тогда γ_∞ — тоже мономорфизм (соответственно эпиморфизм). Этот результат остается справедливым также в общем случае морфизмов между двумя разными прямыми системами. □

Следствие 4.1.4. [9]. Операция взятия групп когомологий цепного и коцепного комплексов коммутирует с переходом к прямому пределу. □

Операция умножения

$$\phi \to f\phi, \qquad f \in C^\infty(X), \qquad \phi \in \Omega_r^*,$$

имеет прямой предел. Поэтому Ω_∞^* наделено структурой $C^\infty(X)$-модуля. Операции внешнего произведения $\wedge$ и внешнего дифференцирования d также имеют прямые пределы на Ω_∞^*, обозначаемые для простоты теми же символами $\wedge$ и d. Они наделяют Ω_∞^* структурой $\mathbb{Z}$-градуированной внешней алгебры:

$$\Omega_\infty^* = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \Omega_\infty^m,$$

где Ω_∞^m — прямые пределы прямых систем

$$\Omega^m(X) \xrightarrow{\pi^*} \Omega_0^m \xrightarrow{\pi_0^{1*}} \Omega_1^m \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Omega_r^m \xrightarrow{\pi_r^{r+1*}} \Omega_{r+1}^m \longrightarrow \ldots$$

$\mathbb{R}$-модулей Ω_r^m внешних m-форм на многообразиях струй J^rY конечного порядка. Элементы Ω_∞^m называются внешними m-формами на пространстве струй бесконечного порядка. При этом выполняются обычные соотношения внешней алгебры:

$$\Omega_\infty^i \wedge \Omega_\infty^j \subset \Omega_\infty^{i+j}, \qquad d\colon \Omega_\infty^i \to \Omega_\infty^{i+1}, \qquad d \circ d = 0.$$

В частности, можно построить *комплекс Де Рама* внешних форм на пространстве струй бесконечного порядка

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Omega_\infty^0 \xrightarrow{d} \Omega_\infty^1 \xrightarrow{d} \ldots . \tag{4.27}$$

Рассмотрим группу когомологий $H^m(\Omega^*_\infty)$ этого комплекса. Согласно Следствию 4.1.4 она изоморфна прямому пределу прямой системы гомоморфизмов

$$H^m(\Omega^*_r) \longrightarrow H^m(\Omega^*_{r+1}) \longrightarrow \dots$$

групп когомологий $H^m(\Omega^*_r)$ коцепных комплексов

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Omega^0_r \xrightarrow{d} \Omega^1_r \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^l_r \longrightarrow 0, \qquad l = \dim J^rY,$$

т. е. групп когомологий Де Рама

$$H^m(\Omega^*_r) = H^m(J^rY)$$

многообразий струй J^rY. При этом следует принять во внимание следующий факт.

Предложение 4.1.5. Когомологии Де Рама $H^*(J^rY)$ многообразий струй J^rY конечного порядка совпадают с когомологиями Де Рама $H^*(Y)$ расслоенного пространства Y [35]. □

Доказательство основывается на том, что расслоение струй $J^rY \to J^{r-1}Y$ является аффинным, и поэтому когомологии Де Рама J^rY совпадают с когомологиями Де Рама базы $J^{r-1}Y$ этого расслоения. Отсюда следует, что группы когомологий $H^m(\Omega^*_\infty)$, $m > 0$, коцепного комплекса (4.27) изоморфны группам когомологий Де Рама $H^m(Y)$ расслоения Y.

Хотя мы не обсуждаем структуру многообразия на пространстве струй бесконечного порядка, элементы прямого предела Ω^*_∞ могут быть следующим образом записаны в координатной форме. Пусть $(U; x^\lambda, y^i)$ — координатная карта расслоения $Y \to X$ на области $U \subset Y$. Рассмотрим соответствующие области

$$U_r = (\pi^r_0)^{-1}(U)$$

в многообразиях струй $J^rY \to Y$. Повторяя изложенную выше процедуру для модулей $\Omega^*(U_r)$ внешних форм на областях U_r, мы получим их прямой предел $\Omega^*_\infty(U)$. Для каждого r определен гомоморфизм $\mathbb{R}$-модулей

$$i_{U_r}{}^*\colon \Omega^*_r \to \Omega^*(U_r),$$

который сопоставляет всякой внешней форме на J^rY ее ограничение на U_r. Тогда существует гомоморфизм $\mathbb{R}$-модулей

$$i_U{}^*\colon \Omega^*_\infty \to \Omega^*_\infty(U)$$

такой, что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Omega^*_r & \xrightarrow{\pi^{\infty *}_r} & \Omega^*_\infty \\ {\scriptstyle i_{U_r}{}^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_U{}^*} \\ \Omega^*(U_r) & \xrightarrow{\pi^{\infty *}_{U_r}} & \Omega^*_\infty(U) \end{array}$$

коммутативны для любого r [9]. Элементы $\Omega^*_\infty(U)$ могут быть представлены в обычной координатной форме.

Для данного атласа $\{(U; x^\lambda, y^i)\}$ послойных координат на $Y \to X$ рассмотрим векторное пространство $\Omega^*_\infty(U)$ внешних форм на струях бесконечного порядка для каждой координатной карты $(U; x^\lambda, y^i)$ этого атласа. Всякий элемент ϕ пространства Ω^*_∞ однозначно определяется набором элементов $\{\phi_U\}$ из пространств $\Omega^*_\infty(U)$ вместе с соответствующими координатными законами преобразований. В дальнейшем мы будем использовать координатные выражения внешних форм на струях бесконечного порядка без упоминания координатной области U. Можно считать, что если тот или иной объект задан в координатной форме как элемент каждого пространства $\Omega^*_\infty(U)$ с соответствующими преобразованиями перехода, то он глобально определен.

В частности, горизонтальные 1-формы dx^λ и контактные 1-формы θ^i_Λ (4.18) образуют локальный базис фильтрованного Ω^0_∞-модуля Ω^1_∞ 1-форм на пространстве струй бесконечного порядка $J^\infty Y$. Более того, горизонтальные 1-формы dx^λ и контактные 1-формы θ^i_Λ имеют независимые законы координатных преобразований. Поэтому существует каноническое расщепление

$$\Omega^1_\infty = \Omega^{0,1}_\infty \oplus \Omega^{1,0}_\infty \tag{4.28}$$

модуля 1-форм Ω^1_∞ на фильтрованные Ω^0_∞-подмодули $\Omega^{0,1}_\infty$ и $\Omega^{1,0}_\infty$, раздельно порождаемые горизонтальными и контактными формами. Это расщепление можно интерпретировать как каноническое горизонтальное расщепление. Оно аналогично как горизонтальному расщеплению кокасательного расслоения к расслоению $Y \to X$ посредством связности (см. (1.68) в первом томе [11]), так и каноническому горизонтальному расщеплению (4.24) 1-форм на многообразиях струй конечного порядка. Поэтому можно считать, что расщепление (4.28) представляет собой *каноническую связность* на пространстве струй бесконечного порядка $J^\infty Y$.

Каноническое горизонтальное расщепление (4.28) порождает соответствющее расщепление модулей m-форм

$$\Omega^m_\infty = \Omega^{0,m}_\infty \oplus \Omega^{1,m-1}_\infty{}' \oplus \ldots \oplus \Omega^{m,0}_\infty, \tag{4.29}$$

где элементы $\Omega^{k,s-k}$ называются *k-контактными формами*. Обозначим h_k *k-контактную проекцию*

$$h_k\colon \Omega^m_\infty \to \Omega^{k,m-k}_\infty, \quad k \leqslant m. \tag{4.30}$$

В частности, мы имеем каноническую проекцию

$$h_0\colon \Omega^m_\infty \to \Omega^{0,m}_\infty, \quad \forall\, m > 0, \tag{4.31}$$
$$h_0\big(dx^\lambda\big) = dx^\lambda, \quad h_0\big(dy^i_{\lambda_k\ldots\lambda_1}\big) = y^i_{\mu\lambda_k\ldots\lambda_1} dx^\mu,$$

называемую *горизонтальной проекцией*.

Соответственно внешний дифференциал d на внешней алгебре Ω^*_∞ раскладывается в сумму

$$d = d_H + d_V \tag{4.32}$$

горизонтального дифференциала d_H и *вертикального дифференциала* d_V, которые определяются следующим образом:

$$d\colon \Omega^{k,s}_\infty \to \Omega^{k+1,s}_\infty \oplus \Omega^{k,s+1}_\infty,$$
$$d_H\colon \Omega^{k,s}_\infty \to \Omega^{k,s+1}_\infty, \quad d_H\big|\Omega^{k,s}_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{pr}_2 \circ d\big|\Omega^{k,s}_\infty,$$
$$d_V\colon \Omega^{k,s}_\infty \to \Omega^{k+1,s}_\infty, \quad d_V\big|\Omega^{k,s}_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{pr}_1 \circ d\big|\Omega^{k,s}_\infty,$$

для всех $s < n$ и всех k. Дифференциалы d_H и d_V удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} d_H(\phi\wedge\sigma) &= d_H(\phi)\wedge\sigma + (-1)^{|\phi|}\phi\wedge d_H(\sigma),\\ d_V(\phi\wedge\sigma) &= d_V(\phi)\wedge\sigma + (-1)^{|\phi|}\phi\wedge d_V(\sigma),\end{aligned} \qquad \phi,\sigma\in\Omega^*_\infty,$$

и являются нильпотентными:

$$d_H\circ d_H = 0, \quad d_V\circ d_V = 0, \quad d_V\circ d_H + d_H\circ d_V = 0. \tag{4.33}$$

Приведем важное равенство

$$h_0\circ d = d_H\circ h_0.$$

Горизонтальный дифференциал может быть записан в виде

$$d_H\phi = dx^\lambda \wedge d_\lambda(\phi), \tag{4.34}$$

где

$$d_\lambda = d_\lambda^\infty = \partial_\lambda + \sum_{0\leqslant|\Lambda|} y^i_{\Lambda+\lambda}\partial_i^\Lambda = \partial_\lambda + y^i_\lambda\partial_i + y^i_{\lambda\mu}\partial_i^\mu + \ldots \tag{4.35}$$

— *полная производная* на струях бесконечного порядка. Следует подчеркнуть, что, хотя сумма в выражении (4.35) берется по бесконечному семейству мультииндексов Λ, оператор (4.35) хорошо определен, поскольку для любой внешней формы $\phi \in \Omega^*_\infty$ выражение $d_\lambda(\phi)$ содержит только конечное число ненулевых членов ∂_i^Λ. Полные производные удовлетворяют соотношениям

$$d_\lambda(\phi\wedge\sigma) = d_\lambda(\phi)\wedge\sigma + \phi\wedge d_\lambda(\sigma), \quad d_\lambda(d\phi) = d(d_\lambda(\phi)), \quad [d_\lambda, d_\alpha] = 0.$$

В частности,

$$d_\lambda(f) = \partial_\lambda f + y^i_\lambda\partial_i f + y^i_{\lambda\mu}\partial_i^\mu f + \ldots, \qquad f\in C^\infty(J^\infty Y),$$
$$d_\lambda\big(dx^\mu\big) = 0, \quad d_\lambda\big(dy^i_{\lambda_l\ldots\lambda_1}\big) = dy^i_{\lambda\lambda_l\ldots\lambda_1}.$$

В отличие от частных производных ∂_λ, полные производные имеют линейный закон координатных преобразований

$$d'_\lambda = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda}d_\mu.$$

Приведем некоторые полезные соотношения для операторов d_H и d_V:

$$\begin{array}{lll} d_H f = d_\lambda f dx^\lambda, & d_V f = \partial_i^\Lambda f\theta^i_\Lambda, & f\in\Omega^0_\infty,\\ d_H(dx^\mu) = 0, & d_V(dx^i) = 0, & \\ d_H(\theta^i_\Lambda) = dx^\lambda\wedge\theta^i_{\lambda+\Lambda}, & d_V(\theta^i_\Lambda) = 0, & 0\leqslant|\Lambda|. \end{array}$$

Обратимся теперь к понятию канонической связности на пространстве струй бесконечного порядка $J^\infty Y$. Для произвольного векторного поля τ на многообразии X определим морфизм

$$\nabla_\tau\colon \Omega^0_\infty \ni f \to \tau \rfloor (d_H f) \in \Omega^0_\infty. \tag{4.36}$$

Легко убедиться, что он представляет собой дифференцирование кольца функций Ω^0_∞. Более того, если Ω^0_∞ рассматривается как $C^\infty(X)$-кольцо, дифференцирование (4.36) удовлетворяет правилу Лейбница. Таким образом, сопоставление

$$\nabla\colon \tau\mapsto \tau\rfloor d_H = \tau^\lambda d_\lambda \tag{4.37}$$

является *канонической связностью* на $C^\infty(X)$-кольце Ω^0_∞ в соответствии с Определением 1.2.8 [116]. Поскольку дифференцирование является локальной операцией и $J^\infty Y$ допускает гладкое разбиение единицы, дифференцирование (4.36) может быть расширено на кольцо $C^\infty(J^\infty Y)$ всех гладких функций на пространстве струй бесконечного порядка $J^\infty Y$. Соответственно связность ∇ (4.37) расширяется до канонической связности на $C^\infty(X)$-кольце $C^\infty(J^\infty Y)$. Будучи распространенными на $C^\infty(J^\infty Y)$, дифференцирования (4.36) по определению являются векторными полями на пространстве струй бесконечного порядка $J^\infty Y$. Такое векторное поле ∇_τ можно интерпретировать как горизонтальный лифт

$$\tau^\lambda\partial_\lambda \mapsto \tau^\lambda d_\lambda$$

на $J^\infty Y$ векторного поля τ на базе X посредством канонической связности на (топологическом) расслоении $J^\infty Y \to X$.

Векторные поля ∇_τ на $J^\infty Y$ не являются проектируемыми, хотя они проектируются на векторные поля на X. Проектируемые векторные поля на $J^\infty Y$ (их определение повторяет определение проектируемых векторных полей на многообразиях струй конечного порядка) представляют собой элементы проективного предела $\mathcal{P}^\infty$ обратной системы алгебр Ли (4.11). Такой проективный предел существует. Его определение повторяет определение проективного предела $J^\infty Y$ многообразий струй. Это алгебра Ли такая, что сюръекции

$$T\pi^\infty_k\colon \mathcal{P}^\infty \to \mathcal{P}^k$$

являются морфизмами алгебр Ли, которые образуют коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{P}^\infty \arrow[dl, "T\pi^\infty_k"'] \arrow[dr, "T\pi^\infty_r"] & \\ \mathcal{P}^k \arrow[rr, "T\pi^k_r"'] & & \mathcal{P}^r \end{tikzcd}$$

для любых k и $r < k$. Ради простоты мы будем называть все элементы $\mathcal{P}^\infty$ *векторными полями* на пространстве струй бесконечного порядка $J^\infty Y$.

В частности, пусть u — проектируемое векторное поле на расслоении $Y \to X$. Существует элемент $J^\infty u \in \mathcal{P}^\infty$ такой, что

$$T\pi^\infty_k(J^\infty u) = J^k u, \quad \forall\, k \geqslant 0.$$

Можно рассматривать $J^\infty u$ как струйное продолжение бесконечного порядка векторного поля u на Y. Оно задается рекурентной формулой (4.10), где $0 \leqslant |\Lambda|$. Тогда всякий элемент $\mathcal{P}^\infty$ раскладывается в сумму, аналогичную (4.13), где $k = \infty$. Конечно это не является горизонтальным расщеплением. Для данного векторного поля v на $J^\infty Y$, проектируемого на векторное поле τ на X, мы имеем его горизонтальное расщепление

$$v = v_H + v_V = \tau^\lambda d_\lambda + \left(v - \tau^\lambda d_\lambda\right)$$

посредством канонической связности ∇ (4.37) (сравните с (4.23)). Заметим, что компонента v_V этого расщепления не является проектируемым векторным полем на $J^\infty Y$, хотя это вертикальное векторное поле относительно расслоения $J^\infty Y \to X$.

§ 2. Вариационный бикомплекс

Горизонтальный дифференциал d_H играет важную роль в БРСТ-формализме. Наряду с БРСТ-оператором $\mathbf{s}$ вводится полный БРСТ-оператор $\mathbf{s} + d_H$ и рассматриваются БРСТ-когомологии по модулю d_H [28, 29, 42, 87] (см. § 4.4).

Этот параграф посвящен когомологиям вариационного комплекса, порождаемого горизонтальным дифференциалом d_H (см. ниже Теорему 4.2.2). Эти когомологии лежат также в основе алгебраического подхода к выриационному исчислению (см. ниже формулу (4.52)).

Замечание 4.2.1. Мы рассматриваем вариационный комплекс в исчислении струй бесконечного порядка [21, 57, 78, 146, 149]. В сравнении с вариационной последовательностью на струях конечного порядка [102, 152], существенное упрощение состоит в том, что если порядок струй не ограничен, тогда существует разложение (4.29) внешних форм на многообразиях струй по контактным и горизонтальным формам. □

Используя свойства нильпотентности (4.33) горизонтального и вертикального дифференциалов d_H и d_V, можно построить коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & & & \\
 & \mathbb{R} \arrow[d] & \mathbb{R} \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \Omega^0(X) \arrow[r, "\pi^{\infty *}"] \arrow[d, "d"'] & \Omega^{0,0}_\infty \arrow[r, "d_V"] \arrow[d, "d_H"'] & \dots \arrow[r, "d_V"] & \Omega^{k,0}_\infty \arrow[r, "d_V"] \arrow[d, "(-1)^k d_H"'] & \dots \\
 & \vdots \arrow[d, "d"'] & \vdots \arrow[d, "d_H"'] & & \vdots \arrow[d, "(-1)^k d_H"'] & & \\
0 \arrow[r] & \Omega^{n-1}(X) \arrow[r, "\pi^{\infty *}"] \arrow[d, "d"'] & \Omega^{0,n-1}_\infty \arrow[r, "d_V"] \arrow[d, "d_H"'] & \dots \arrow[r, "d_V"] & \Omega^{k,n-1}_\infty \arrow[r, "d_V"] \arrow[d, "(-1)^k d_H"'] & \dots \\
0 \arrow[r] & \Omega^n(X) \arrow[r, "\pi^{\infty *}"] \arrow[d] & \Omega^{0,n}_\infty \arrow[r, "d_V"] \arrow[d, "\tau_0"'] & \dots \arrow[r, "d_V"] & \Omega^{k,n}_\infty \arrow[r, "d_V"] \arrow[d, "\tau_k"'] & \dots \\
 & 0 \arrow[r] & E_0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & E_k \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
 & & 0 & & 0 & &
\end{tikzcd} \tag{4.38}$$

где

$$E_k = \tau_k\left(\Omega^{k,n}_\infty\right) \stackrel{\text{def}}{=} \Omega^{k,n}_\infty / d_H\left(\Omega^{k,n-1}_\infty\right). \tag{4.39}$$

Поскольку столбцы и строки этой диаграммы представляют собой комплексы, она называется *комплексом комплексов.*

Замечание 4.2.2. Операторы d_H и d_V, удовлетворяющие соотношениям нильпотентности (4.33), определяют так называемый *бикомплекс*, но они не коммутируют между собой. Операторы же $(-1)^k d_H$ и d_V в диаграмме (4.38) взаимно коммутируют, и об этой диаграмме говорят как о комплексе комплексов (см. детали терминологии в [8]). □

Лемма 4.2.1. [78, 149]. Фактор E_k, $k > 0$, (4.39) в нижней строке диаграммы (4.38) изоморфен дополнению $\tau_k\left(\Omega^{k,n}_\infty\right)$ подпространства $d_H\left(\Omega^{k,n-1}_\infty\right) \subset \Omega^{k,n}_\infty$. □

Отсюда следует, что морфизмы τ_k, $k > 0$, являются проекторами со свойствами

$$\tau_k \circ \tau_k = \tau_k, \qquad \tau_k \circ d_H = 0.$$

Этот факт приводит к короткой точной последовательности

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} e_k \hookrightarrow \Omega^{n+k}_\infty \xrightarrow{e_k} E_k \longrightarrow 0,$$

где $e_k = \tau_k \circ h_k$. Это *простая точная последовательность*, поскольку

$$\Omega^{n+k}_\infty = \operatorname{Ker} e_k \oplus E_k.$$

Нетрудно показать, что $d(\operatorname{Ker} e_k) \subset \operatorname{Ker} e_{k+1}$.

Вследствие вышесказанного можно заменить объекты $\Omega^{k,n}_\infty$, d_V и τ_k, $k > 0$, в предпоследней строке диаграммы (4.38) соответственно на Ω^{n+k}_∞, d и e_k. В результате мы приходим к коммутативной диаграмме

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\ldots & \longrightarrow & \operatorname{Ker} h_0 & \xrightarrow{d} & \operatorname{Ker} h_0 & \xrightarrow{d} & \operatorname{Ker} e_1 & \xrightarrow{d} & \operatorname{Ker} e_2 & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\ldots & \longrightarrow & \Omega^{n-1}_\infty & \xrightarrow{d} & \Omega^{n}_\infty & \xrightarrow{d} & \Omega^{n+1}_\infty & \xrightarrow{d} & \Omega^{n+2}_\infty & \longrightarrow & \ldots \\
 & & {\scriptstyle h_0}\downarrow & & {\scriptstyle h_0}\downarrow & & {\scriptstyle e_1}\downarrow & & {\scriptstyle e_1}\downarrow & & \\
\ldots & \longrightarrow & \Omega^{0,n-1}_\infty & \xrightarrow{d_H} & \Omega^{0,n}_\infty & \xrightarrow{\varepsilon_1} & E_1 & \xrightarrow{\varepsilon_2} & E_2 & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
\tag{4.40}
$$

Ее вторая строка представляет собой комплекс Де Рама, а ее первая строка — подкомплекс этого комплекса. Поэтому последняя строка диаграммы (4.40)

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Omega^0_\infty \xrightarrow{d_H} \Omega^{0,1}_\infty \xrightarrow{d_H} \ldots \xrightarrow{d_H} \Omega^{0,n}_\infty \xrightarrow{\varepsilon_1} E_1 \xrightarrow{\varepsilon_2} E_2 \longrightarrow \ldots \tag{4.41}$$

— тоже коцепной комплекс, т. е.

$$\varepsilon_1 \circ d_H = 0, \qquad \varepsilon_{k+1} \circ \varepsilon_k = 0. \tag{4.42}$$

Он называется *спектральной последовательностью*. Поскольку $E_k \subset \Omega^{k,n}_\infty$, коцепные морфизмы ε_k комплекса (4.41) имеют вид $\varepsilon_k = \tau_k \circ d$.

Построим морфизмы ε_k в явном виде [34, 78, 149]. Положим

$$\tau_k = \frac{1}{k}\tau|\Omega^{k,n}_\infty,$$

где τ — оператор, задаваемый координатным выражением

$$\tau(\phi) = (-1)^{|\Lambda|}\theta^i \wedge \left[d_\Lambda\left(\partial^\Lambda_i \rfloor \phi\right)\right], \qquad 0 \leqslant |\Lambda|,$$

и действующий на контактные плотности $\phi \in \Omega^{*,n}_\infty$. Тогда получаем

$$\varepsilon_k = \tau_k \circ d = \frac{1}{k}\delta, \tag{4.43}$$

где

$$\delta = \tau \circ d \tag{4.44}$$

— *вариационный оператор* [34, 78], являющийся нильпотентным:

$$\delta \circ \delta = 0, \qquad \delta \circ d_H = 0. \tag{4.45}$$

Поскольку столбцы диаграммы (4.40) — простые точные последовательности, можно рассматривать спектральную последовательность (4.41) как подкомплекс коцепного комплекса

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Omega^0_\infty \xrightarrow{d_H} \ldots \Omega^{0,n-1}_\infty \xrightarrow{d_H} \Omega^{0,n}_\infty \xrightarrow{\delta} \Omega^{1,n}_\infty \xrightarrow{\delta} \Omega^{2,n}_\infty \longrightarrow \ldots, \tag{4.46}$$

который называется *вариационной последовательностью*.

В частности, пусть

$$\phi = \phi^\Lambda_i \theta^i_\Lambda \wedge \omega \in \Omega^{1,n}_\infty$$

— 1-контактная плотность. Получаем

$$\tau_1(\phi) = (-1)^{|\Lambda|} d_\Lambda\left(\phi^\Lambda_i\right)\theta^i \wedge \omega. \tag{4.47}$$

Это выражение показывает, что подпространство $E_1 \subset \Omega_\infty^{1,n}$ состоит из 1-контактных плотностей $\mathcal{E} = \mathcal{E}_i\theta^i \wedge \omega$, которые принимают значения в тензорном расслоении

$$T^*Y \wedge \left(\overset{n}{\wedge} T^*X\right). \tag{4.48}$$

Пусть

$$L = \mathcal{L}\omega \in \Omega_\infty^{0,n}$$

— горизонтальная плотность. Тогда коцепные морфизмы ε_1 и ε_2 принимают вид

$$\varepsilon_1(\mathcal{L}\omega) = (-1)^{|\Lambda|} d_\Lambda\left(\partial_i^\Lambda \mathcal{L}\right)\theta^i \wedge \omega, \tag{4.49}$$

$$\varepsilon_2(\mathcal{E}_i\theta^i \wedge \omega) = \frac{1}{2}\left[\partial_j^\Lambda \mathcal{E}_i\theta_\Lambda^j \wedge \theta^i + (-1)^{|\Lambda|}\theta^j \wedge d_\Lambda\left(\partial_j^\Lambda \mathcal{E}_i\theta^i\right)\right] \wedge \omega,$$

где суммирование ведется по всем мультииндексам $0 \leqslant |\Lambda|$. Они называются соответственно *оператором Эйлера—Лагранжа* и оператором *Гельмгольца—Сонина*. Напомним, что L является фактически горизонтальной плотностью на многообразии струй J^rY некоторого конечного порядка r. Поэтому можно рассматривать L как лагранжиан порядка r. Внешняя форма

$$\mathcal{E}_L = \varepsilon_1(L) = \delta(L), \tag{4.50}$$

$$\mathcal{E}_L = (-1)^{|\Lambda|} d_\Lambda\left(\partial_i^\Lambda \mathcal{L}\right)\theta^i \wedge \omega, \qquad 0 \leqslant |\Lambda| \leqslant r,$$

именуется *формой Эйлера—Лагранжа*, ассоциированной с лагранжианом L. Эта форма представляет собой дифференциальный оператор порядка $2r$

$$\mathcal{E}_L\colon J^{2r}Y \to T^*Y \wedge \left(\overset{n}{\wedge} T^*X\right), \tag{4.51}$$

также называемый оператором Эйлера—Лагранжа для лагранжиана L. В частности, если L — лагранжиан первого порядка на многообразии струй J^1Y, оператор (4.51) — это привычный оператор Эйлера—Лагранжа второго порядка (A.15) из первого тома [11].

Более того, в силу Леммы 4.2.1 имеет место каноническое разложение

$$dL = \tau_1(dL) + (\mathrm{Id} - \tau_1)(dL) = \delta(L) + d_H(\phi), \qquad \phi \in \Omega_\infty^{1,n_1}, \tag{4.52}$$

которое представляет собой *первую вариационную формулу* для лагранжианов высших порядков. В частности, если $r = 1$, получаем первую вариационную формулу (A.14) из первого тома [11] в случае вертикального векторного поля u на расслоении $Y \to X$.

Спектральная последовательность (4.41) приводит к следующему варианту известной обратной задачи вариационного исчисления. Дифференциальные операторы, принимающие значения в тензорном расслоении (4.48), называются *операторами типа Эйлера—Лагранжа*. Это элементы подпространства $E_1 \subset \Omega_\infty^{1,n}$. Оператор типа Эйлера—Лагранжа $\mathcal{E}$ именуется *локально вариационным оператором*, если

$$\varepsilon_2(\mathcal{E}) = \frac{1}{2}\delta(\mathcal{E}) = 0.$$

Из равенств (4.42) следует, что любой d_H-точный лагранжиан (т. е. $L = d_H\phi$) является вариационно тривиальным и что всякий оператор Эйлера—Лагранжа — это локально вариационный оператор.

Препятствия для того чтобы локально вариационный оператор был бы оператором Эйлера—Лагранжа, характеризуются нетривиальной группой когомологий

$$H^{n+1} = \operatorname{Ker}\varepsilon_2 / \operatorname{Im}\varepsilon_1$$

комплекса (4.41) в элементе E_1. Поскольку столбцы диаграммы (4.40) — это точные последовательности, имеет место следующая точная последовательность групп когомологий строк этой диаграммы, обозначаемых соответственно r_1, r_2 и r_3 [8]:

$$\ldots \longrightarrow H^k(r_3) \longrightarrow H^k(r_2) \longrightarrow H^k(r_1) \longrightarrow H^{k+1}(r_3) \longrightarrow \ldots .$$

Теорема 4.2.2. [57, 149]. Если

$$Y = \mathbb{R}^{l+n} \to \mathbb{R}^n,$$

спектральная последовательность (4.41) является точной, т. е.

$$\operatorname{Ker} d_H = \operatorname{Im} d_H, \qquad \operatorname{Ker} \varepsilon_1 = \operatorname{Im} d_H, \qquad \operatorname{Im} \varepsilon_k = \operatorname{Ker} \varepsilon_{k+1}.$$

□

Эта теорема показывает что комплекс (4.41) и, следовательно, комплекс (4.46) являются локально точными.

Следствие 4.2.3. Поскольку вариационная последовательность (4.46) локально точная, горизонтальная плотность $L \in \Omega^*_\infty$ вариационно тривиальна тогда и только тогда, когда она является d_H-точной. Отсюда следует взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности локальных горизонтальных плотностей L по модулю d_H-точных форм и элементами множества $\operatorname{Im} \varepsilon_1 = \operatorname{Ker} \varepsilon_1$. □

Следствие 4.2.4. Рассмотрим коцепной комплекс

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Omega^0_\infty \xrightarrow{d_H} \Omega^{0,1}_\infty \xrightarrow{d_H} \ldots \xrightarrow{d_H} \Omega^{0,n}_\infty \xrightarrow{d_H} 0. \tag{4.53}$$

Он является локально точным во всех элементах, кроме последнего. Его группа когомологий в этом элементе равна

$$\Omega^{0,n}_\infty / d_H(\Omega^{0,n}_\infty) = E_1. \tag{4.54}$$

□

§ 3. Струи духов и антиполей

Помимо физических полей, БРСТ-теория включает духовые поля (или просто духи), духи для духов и антиполя, которые являются четными и нечетными алгебраическими объектами. Поэтому, чтобы применить формализм струй к БРСТ-теории, следует дать геометрическое описание нечетных обектов в этой теории, в том числе определить струи этих обектов. Важно отметить, что при формулировке БРСТ-теории в терминах струй антиполя вводятся в той же манере, что и поля (см. ниже Замечание 4.3.3).

Начнем с духовых полей. В лагранжевом БРСТ-формализме (см., например, в качестве обзора [80]) духи ассоциированы с параметрами калибровочных преобразований. Мы ограничимся рассмотрением случая бозонных полей и четных калибровочных преобразований с конечным набором генераторов. Тогда духи являются нечетными алгебраическими обектами. Аналогичная картина наблюдается и в гамильтоновом БРСТ-формализме, где духи соответствуют связям (см., например, [88]).

Были предложены различные геометрические модели духовых полей, чтобы получить желаемый закон БРСТ-преобразований. Например, в калибровочной модели Янга—Миллса на главном расслоении со структурной группой G духи могут быть описаны как формы на групповом многообразии калибровочной группы $\mathrm{Gau}(P)$ (см., например, [39, 93, 140]). Однако такое описание не распространяется на другие калибровочные теории (см. в [80] основные примеры калибровочных моделей).

Пример 4.3.1. **Рассмотрим упомянутую выше калибровочную теорию на главном расслоении $P \to X$ над компактным многообразием X, структурная группа которого G**

является компактной полупростой матричной группой Ли. Соответствующее пополнение Соболева превращает *калибровочную группу* Gau (P) (см. ее определение в первом томе [11] на стр. 78) в банахову группу Ли (см. § 5.1). Генераторы 1-параметрических групп калибровочных преобразований представляют собой G-инвариантные векторные поля на главном расслоении P, отождествляемые с сечениями ξ расслоения Ли алгебр

$$V_G P = VP/G. \tag{4.55}$$

Типичным слоем этого расслоения служит правая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G с базисом $\{e_r\}$, на которую структурная группа G действует по присоединенному представлению. Пополнение Соболева множества сечений расслоения $V_G P \to X$ совпадает с алгеброй Ли калибровочной группы Gau (P). Типичным слоем дуального расслоения $V_G^* P$ к $V_G P$ является коалгебра Ли $\mathfrak{g}^*$. Для данного генератора калибровочных преобразований $\xi = \xi^r(x)e_r$ соответствующий генератор ξ_C калибровочных преобразований на расслоении связностей

$$C = J^1 P/G \to X \tag{4.56}$$

с координатами (x^λ, a^p_λ) (см. том первый [11], § 1.7) имеет вид

$$\xi_C = u^r_\lambda \partial^\lambda_r, \qquad u^r_\lambda = \partial_\lambda \xi^r + c^r_{pq} a^p_\lambda \xi^q \tag{4.57}$$

(см. выражение (А.26) в первом томе [11]). Если A — сечение расслоения связностей $C \to X$ (т. е. калибровочный потенциал), генератор калибровочных преобразований ξ_C действует на A по закону

$$\xi\colon A = A^q_\lambda dx^\lambda \otimes e_q \mapsto dx^\lambda \otimes \left(\partial_\lambda \xi^r + c^r_{pq} A^p_\lambda \xi^q\right) e_r = d\xi + [A, \xi] = \nabla^A \xi. \tag{4.58}$$

Соответственно сами калибровочные параметры преобразуются по коприсоединенному представлению

$$\xi'\colon \xi^p \mapsto -c^p_{rq} \xi'^r \xi^q. \tag{4.59}$$

Тогда классическое БРСТ-преобразование можно получить, просто заменив калибровочные параметры в выражениях (4.58) и (4.59) духовыми полями. А именно, рассмотрим формальный генератор

$$C = C^r e_r \tag{4.60}$$

калибровочных преобразований и подставим его в вышеупомянутые выражения. Получим

$$\mathrm{s}A = dC + [A, C], \qquad \mathrm{s}\,C = -\frac{1}{2}[C, C], \tag{4.61}$$

$$\mathrm{s}A^p_\lambda = \partial_\lambda C^r + c^r_{pq} A^p_\lambda C^q, \qquad \mathrm{s}\,C^p = -\frac{1}{2} c^p_{rq} C^r C^q. \tag{4.62}$$

Это в точности известный классический БРСТ-оператор в калибровочной модели Янга—Миллса. Например, пусть $\{C^r\}$ — локальный послойный базис расслоения $V_G^* P$, дуальный к $\{e_r\}$. Тогда C (4.60) является каноническим сечением тензорного расслоения $V_G^* P \otimes V_G P$, которое определяет тождественный морфизм $V_G P \to V_G^* P$ (см. первый том [11], Пример 1.4.3). Оно также совпадает с духовым полем η, определяемым как форма Маурера—Картана на калибровочной группе Gau (P) такая, что $\eta(\xi) = \xi$, $\xi \in V_G P(X)$. Тогда БРСТ-оператор s (4.61) может быть введен как оператор кограницы когомологий Шевалле—Эйленберга (см. § 7.2) коцепного комплекса, элементами которого являются q-коцепи на $V_G P(X)$, принимающие значения во внешней алгебре эквивариантных $\mathfrak{g}$-значных форм на главном расслоении P [39, 140, 148]. □

Укажем на следующие две особенности духовых полей.

- Поскольку духи представляют собой нечетные поля на обычном гладком многообразии X и характеризуются духовым числом 1, с математической точки зрения они могут быть описаны как производящие элементы градуированной алгебры.
- Пример 4.3.1 показывает, что следует рассмотреть струи духовых полей.

Приводимая ниже геометрическая конструкция удовлетворяет этим условиям [113].

Пусть $E \to X$ — m-мерное векторное расслоение. Ассоциированное с ним многообразие k-струй J^kE также является векторным расслоением над X. Как и выше, положим $J^0E = E$. Рассмотрим простое градуированное многообразие $(X, \mathcal{A}_{J^kE})$, характеристическим расслоением которого служит расслоение k-струй $J^kE \to X$. Для простоты будем обозначать это градуированное многообразие $\widehat{J^kE}$. Оно имеет локальный базис $\{C^r_\Lambda\}$, $0 \leqslant |\Lambda| \leqslant k$, с функциями перехода

$$C'^r_{\lambda+\Lambda} = d_\lambda\big(\rho^r_q C^q_\Lambda\big), \tag{4.63}$$

где

$$d_\lambda = \partial_\lambda + C^r_\lambda \frac{\partial}{\partial C^r} + C^r_{\lambda\mu}\frac{\partial}{\partial C^r_\mu} + \dots$$

— *градуированные полные производные* (сравните с (3.103)). Вид функций перехода (4.63) позволяет интерпретировать базисные элементы C^r_Λ этого градуированного многообразия как *струи духовых полей*. Однако еще раз напомним, что C^r_Λ не являются струями градуированных расслоений, описанными в [136].

Пусть

$$E \xleftarrow{\pi^1_0} J^1E \longleftarrow \dots \longleftarrow J^{r-1}E \xleftarrow{\pi^r_{r-1}} J^rE \longleftarrow \dots \tag{4.64}$$

— обратная система многообразий струй и $J^\infty E$ — ее проективный предел. Естественная проекция

$$\pi^r_{r-1}\colon J^rE \to J^{r-1}E$$

порождает соответствующий мономорфизм внешних $\mathbb{R}$-алгебр

$$\pi^{r*}_{r-1}\colon \wedge J^{r-1}E^* \to \wedge J^rE^* \tag{4.65}$$

и эпиморфизм (3.24)

$$S\pi^r_{r-1}\colon \widehat{J^rE} \to \widehat{J^{r-1}E}, \qquad r > 0, \tag{4.66}$$

градуированных многообразий. Морфизмы (4.65) и (4.66) определяют соответственно прямую систему внешних алгебр

$$\wedge E^* \longrightarrow \dots \xrightarrow{\pi^{r*}_{r-1}} \wedge J^rE^* \longrightarrow \dots \tag{4.67}$$

и обратную систему градуированных многообразий

$$\widehat{E} \longleftarrow \widehat{J^1E} \longleftarrow \dots \longleftarrow \widehat{J^{r-1}E} \xleftarrow{(\pi^r_{r-1}, \pi^{r*}_{r-1})} \dots . \tag{4.68}$$

Прямая система (4.67) имеет прямой предел $\wedge J^\infty E^*$ в фильтрованных эндоморфизмах. Он состоит из элементов, индуцированных на $J^\infty E$ элементами внешних алгебр $\wedge J^kE^*$, $k = 0, 1, \dots$. Этот прямой предел определяет проективный предел $\widehat{J^\infty E}$ обратной системы градуированных многообразий (4.68). Пара $\widehat{J^\infty E} = \big(X, \wedge J^\infty E^*(X)\big)$ может рассматриваться как градуированное многообразие, а элементы его структурного модуля $\wedge J^\infty E^*(X)$ — как градуированные функции на X. Их коэффициенты — гладкие функции на X.

Чтобы ввести внешние формы на этом градуированном многообразии, возьмем прямой предел прямой системы фильтрованных $\wedge J^kE^*(X)$-алгебр $\wedge \mathrm{Der}^*\big(\wedge J^kE^*\big)(X)$ градуированных внешних форм на градуированных многообразиях $\widehat{J^kE}$ относительно естественных мономорфизмов

$$\wedge \mathrm{Der}^*\big(\wedge E^*\big)(X) \longrightarrow \dots \longrightarrow \wedge \mathrm{Der}^*\big(\wedge J^kE^*\big)(X) \longrightarrow \dots .$$

Этот прямой предел $\wedge \mathrm{Der}^*(\wedge J^\infty E^*)(X)$ состоит из градуированных внешних форм на градуированных многообразиях $\widehat{J^k E}$ по модулю указанных мономорфизмов. Это локально свободная фильтрованная $\wedge \mathrm{Der}^*(\wedge J^k E^*)(X)$-алгебра, порождаемая элементами

$$(1, dx^\lambda, \theta^r_\Lambda = dC^r_\Lambda - C^r_{\lambda+\Lambda} dx^\lambda), \qquad 0 \leqslant |\Lambda|,$$

которые удовлетворяют обычным правилам действия с градуированными внешними формами (см. § 3.2). Аналогично разложению (4.29), пространство

$$\overset{k}{\bigwedge} \mathrm{Der}^*(\wedge J^\infty E^*)(X)$$

градуированных k-форм раскладывается в прямую сумму подпространств

$$\wedge^{k-i,i} \mathrm{Der}^*(\wedge J^\infty E^*)(X)$$

$(k-i)$-контактных форм. Соответственно градуированный внешний дифференциал d на алгебре $\overset{k}{\bigwedge} \mathrm{Der}^*(\wedge J^\infty E^*)(X)$ допускает разложение $d = d_H + d_V$, где *градуированный горизонтальный дифференциал* d_H имеет координатный вид

$$d_H(\phi) = dx^\lambda \wedge d_\lambda(\phi), \qquad \phi \in \wedge \mathrm{Der}^*(\wedge J^\infty E^*)(X).$$

Градуированные дифференциалы d_H и d_V удовлетворяют условиям нильпотентности (4.33). Поскольку всякий элемент $\phi \in \wedge \mathrm{Der}^*(\wedge J^\infty E^*)(X)$ является градуированной формой на некотором градуированном многообразии $\widehat{J^k E}$ конечного ранга, выражение для $d_\lambda(\phi)$ содержит конечное число членов.

Подобно тому как это было в предыдущем параграфе, мы можем интерпретировать горизонтальный дифференциал d_H как каноническую связность на алгебре $\wedge \mathrm{Der}^*(\wedge J^\infty E^*)(X)$.

Алгебра $\wedge \mathrm{Der}^*(\wedge J^\infty E^*)(X)$ дает нам все, что необходимо для дифференциального исчисления на духовых полях. Градуированные формы $\phi \in \wedge \mathrm{Der}^*(\wedge J^\infty E^*)(X)$ характеризуются:

- $\mathbb{Z}$-градуированным *духовым числом* $\mathrm{gh}(\phi)$ таким, что

$$\mathrm{gh}(C^i_\Lambda) = 1, \quad \mathrm{gh}(dC^i_\Lambda) = 1, \quad \mathrm{gh}(dx^\lambda) = 0, \quad \mathrm{gh}(f) = 0, \quad f \in C^\infty(X);$$

- *духовой грассмановой четностью* $[\phi] = \mathrm{gh}(\phi) \bmod 2$;
- обычной степенью внешних форм $|\phi|$ и соответствующей грассмановой четностью $|\phi| \bmod 2$;
- *полным духовым числом*

$$\mathrm{gh}_T(\phi) = \mathrm{gh}(\phi) + |\phi|.$$

Обратимся теперь к когомологиям алгебры $\wedge \mathrm{Der}^*(\wedge J^\infty E^*)(X)$. В соответствии с Замечанием 3.2.6 группы градуированных когомологий Де Рама градуированных многообразий $\wedge \mathrm{Der}^*(\wedge J^k E^*)(X)$ конечного ранга совпадают с группами когомологий Де Рама многообразия X, и то же самое относится к их прямому пределу. Согласно Теореме 4.1.4 этот предел представляет собой группы градуированных когомологий Де Рама алгебры $\wedge \mathrm{Der}^*(\wedge J^\infty E^*)(X)$. На эту алгебру также может быть распространена Теорема 4.2.2 (см. работу [42] и цитируемую в ней литературу).

Теорема 4.3.1. **Если градуированная горизонтальная $(0 < k < n)$-форма ϕ является локально d_H-замкнутой, т. е. $d_H\phi = 0$, тогда она — локально d_H-точная, т. е. существует градуированная горизонтальная $(k-1)$-форма σ такая, что $\phi = d_H\sigma$. Градуированная горизонтальная n-форма ϕ является локально точной тогда и только** тогда, когда $\delta = \varepsilon_1(\phi) = 0$, где ε_1 — оператор Эйлера—Лагранжа (4.49), обобщенный на градуированную внешнюю алгебру. □

Как уже отмечалось, помимо физических полей φ^i с нулевым духовым числом и духов C^r, БРСТ-теория содержит духи для духов и антиполя (см. [80] в качестве обзора). В общем случае L-уровневая приводимая теория включает L поколений *духов для духов* C_l^r, $l = 1, \dots, L$, характеризуемых следующими духовыми числами и духовыми грассмановыми четностями:

$$\mathrm{gh}\left(C_l^r\right) = \mathrm{gh}\left(C^r\right) + l, \quad \left[C_l^r\right] = \left(\left[C^r\right] + l\right) \bmod 2.$$

Нечетные духи для духов могут быть введены в той же манере, что и духи выбором соответствующего векторного расслоения E. Обозначим поля, духи и духи для духов общим символом Φ^A, $A = 1, \dots, N$. *Антиполя* Φ_A^* имеют следующие духовые числа и духовые грассмановы четности:

$$\mathrm{gh}\left(\Phi_A^*\right) = -\,\mathrm{gh}\left(\Phi^A\right) - 1, \quad \left[\Phi_A^*\right] = \left(\left[\Phi^A\right] + 1\right) \bmod 2.$$

В формализме струй антиполя Φ_A^* могут быть введены так же, как и поля Φ^A выбором векторного расслоения $E = Y^*$, дуального к расслоению Y, сечения которого характеризуют поля Φ^A. Отметим, что калибровочные потенциалы представляют собой сечения аффинного расслоения $C \to X$ (4.56), моделируемого над векторным расслоением $T^*X \otimes V_G P$. Их нечетные антиполя моделируются над векторным расслоением $E = TX \otimes V_G^* P$.

Полная система полей и антиполей $\{\zeta^a\}$, называемая *классическим базисом* БРСТ-теории, описывается поточечным внешним произведением над X

$$\mathcal{G}^* = \Omega^*\left(J^\infty E_0\right) \bigwedge_X \left(\wedge \mathrm{Der}^*\left(\wedge J^\infty E_1^*\right)(X)\right) \tag{4.69}$$

$C^\infty(X)$-алгебры $\Omega^*(J^\infty E_0)$ четных элементов классического базиса и $C^\infty(X)$-алгебры $\wedge \mathrm{Der}^*\left(\wedge J^\infty E_1^*\right)(X)$ его нечетных элементов. Внешняя алгебра $\mathcal{G}^*$ (4.69) наделена внешним дифференциалом d, который является суммой над X внешних дифференциалов на $\Omega^*\left(J^\infty E_0\right)$ и $\wedge \mathrm{Der}^*\left(\wedge J^\infty E_1^*\right)(X)$. Соответствующий горизонтальный дифференциал d_H можно интерпретировать как каноническую связность на алгебре $\mathcal{G}^*$. Ее подмодуль $\mathcal{G}^k$ k-форм расщепляется на подпространства $\mathcal{G}^{k-i,i}$ $(k-i)$-контактных форм. Следуя принятой в физической литературе терминологии, мы будем называть элементы $\mathcal{G}^{0,*}$ *локальными формами*.

Существенно, что Теоремы 4.2.2 и 4.3.1 справедливы для локальных форм $f \in \mathcal{G}^{0,*}$. Следовательно коцепной комплекс

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{G}^0 \xrightarrow{d_H} \mathcal{G}^{0,1} \xrightarrow{d_H} \dots \xrightarrow{d_H} \mathcal{G}^{0,n} \xrightarrow{\delta} \mathcal{G}^{1,n} \xrightarrow{\delta} \dots \tag{4.70}$$

имеет группы когомологий

$$H^0(\mathcal{G}^*) = \mathbb{R}, \quad H^{0<k<n}(\mathcal{G}^*) = 0, \quad H^n(\mathcal{G}^*) \neq 0. \tag{4.71}$$

Замечание 4.3.2. Следуя принятой практике, мы будем в дальнейшем применять операторы ***правых производных***

$$\frac{\partial_r f}{\partial \zeta} = (-1)^{[\zeta]([f]+1)} \frac{\partial_l f}{\partial \zeta}, \qquad f \in \mathcal{G}^0,$$

такие, что

$$df(\zeta) = d\zeta \frac{\partial_l f}{\partial \zeta} = \frac{\partial_r f}{\partial \zeta} d\zeta.$$

Левые производные $\partial_l/\partial\zeta$ — это те производные, которые использовались до сих пор. Символами δ_l и δ_r обозначаются левые и правые вариационные производные, задаваемые коэффициентами оператора Эйлера—Лагранжа (4.49). □

Пусть $f, f' \in \mathcal{G}^0$ — градуированные функции. Благодаря локальному изоморфизму

$$\mathcal{G}^0 \ni f \mapsto f\omega \in \mathcal{G}^{0,n}$$

их *антискобки* определяются как

$$(f, f')_{\mathrm{AB}} = \frac{\delta_r f}{\delta\Phi^A}\frac{\delta_l f'}{\delta\Phi^*_A} - \frac{\delta_r f}{\delta\Phi^*_A}\frac{\delta_l f'}{\delta\Phi^A}. \tag{4.72}$$

При этом

$$\mathrm{gh}\left((f, f')_{\mathrm{AB}}\right) = \mathrm{gh}(f) + \mathrm{gh}(f') + 1, \qquad \left[(f, f')_{\mathrm{AB}}\right] = \left([f] + [f'] + 1\right) \bmod 2.$$

Замечание 4.3.3. Легко видно, что фактически антискобки (4.72) задаются на элементах групп когомологий $H^n(\mathcal{G}^*)$ (4.71) комплекса (4.70). Они соответствуют локальным функционалам

$$\int f\omega$$

с точностью до поверхностных интегралов. В то же время антискобки, определяемые на локальных функционалах, предполагают более изощренную геометрическую интерпретацию антиполей [97, 155]. □

Антискобки (4.72) обладают свойствами градуированных скобок Пуассона

$$(f, f')_{\mathrm{AB}} = -(-1)^{([f]+1)([f']+1)}(f', f)_{\mathrm{AB}},$$
$$(f, (f', f'')_{\mathrm{AB}})_{\mathrm{AB}} + (-1)^{([f]+1)([f']+[f''])}((f', f'')_{\mathrm{AB}}, f)_{\mathrm{AB}} +$$
$$+ (-1)^{([f'']+1)([f]+[f'])}((f'', f)_{\mathrm{AB}}, f')_{\mathrm{AB}} = 0,$$

где градуировкой f, f' и f'' считается их грассманова четность плюс 1. В частности, $(f, f)_{\mathrm{AB}} = 0$, если f нечетно, и

$$(f, f)_{\mathrm{AB}} = 2\frac{\delta_r f}{\delta\Phi^A}\frac{\delta_l f}{\delta\Phi^*_A},$$

если f четно. Можно написать

$$(f, f')_{\mathrm{AB}} = \frac{\delta_r f}{\delta\zeta^a}w^{ab}\frac{\delta_l f'}{\delta\zeta^b}, \tag{4.73}$$

где w^{ab} является градуированным пуассоновым бивектором. Легко видеть, что базис $\{\Phi^A, \Phi^*_A\}$ является каноническим для пуассоновой структуры (4.72). В этом базисе градуированный пуассонов бивектор w имеет вид

$$w = \begin{pmatrix} 0 & \delta^A_B \\ -\delta^A_B & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $S \in \mathcal{G}^{0,n}$ — локальная плотность с нулевым духовым числом. Уравнение

$$(S, S)_{\mathrm{AB}} = 2\frac{\delta_r S}{\delta\Phi^A}\frac{\delta_l S}{\delta\Phi^*_A} = 0 \tag{4.74}$$

называется *классическим основным уравнением*. Если интерпретировать S в качестве лагранжиана классического базиса $\{\zeta^a\}$ полей и антиполей, уравнения

$$\frac{\delta_r S}{\delta\zeta^a} = 0 \tag{4.75}$$

имеют смысл уравнений движения. Уравнения (4.75) не являются независимыми, а удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\delta_r S}{\delta\zeta^a}\mathcal{R}^a_b = 0, \qquad \mathcal{R}^a_b = w^{ac}\frac{\delta_l\delta_r S}{\delta\zeta^c\delta\zeta^b}, \tag{4.76}$$

которые показывают, что решение S основного уравнения (4.74) обладает калибровочной свободой.

Решение S основного уравнения (4.74) называется *приемлемым решением*, если ранг хессиана

$$\frac{\partial_l\partial_r S}{\partial\zeta^a\partial\zeta^b}$$

в стационарной точке $\mathcal{G}^0$, где выполняются уравнения движения (4.75), равен N. Объяснение простое. Если S — приемлемое решение, можно использовать вышеупомянутую калибровочную свободу для того, чтобы исключить все антиполя.

Мы сошлемся на работы [68, 69, 80] и приведенную в них литературу по проблеме существования и единственности приемлемого решения основного уравнения. Отметим только два его свойства.

(i) Приемлемое решение S может быть разложено в степенной ряд по антиполям так, что

$$S|_{\Phi^*=0} = L_{\rm cl}$$

является лагранжианом классических полей φ^i. Это разложение может быть представлено как разложение по *антидуховым числам*, определяемым как

$$\text{antigh}\left(\Phi^*_A\right) = -\,\text{gh}\left(\Phi^*_A\right) = \text{gh}\left(\Phi^A\right) + 1, \quad \text{antigh}\left(\Phi^A\right) = 0.$$

(ii) Пусть S — приемлемое решение для классического базиса $\left(\Phi^A, \Phi^*_A\right)$. Рассмотрим два новых поля Ψ_1 и Ψ_2 с духовыми числами

$$\text{gh}\,(\Psi_2) = \text{gh}\,(\Psi_1) + 1,$$

и пусть Ψ^*_1 и Ψ^*_2 — соответствующие антиполя. Тогда $S + \Psi^*_1\Psi_2$ является приемлемым решением для классического базиса $\left(\Phi^A, \Psi_1, \Psi_2, \Phi^*_A, \Psi^*_1, \Psi^*_2\right)$. Говорят, что (Ψ_1, Ψ_2) — *тривиальная пара*. Тривиальные пары могут быть добавлены к классическому базису при сохранении классического основного уравнения и его свойств. Они возникают при фиксации калибровки и квантовании методом функционального интегрирования.

Пусть S — приемлемое решение основного уравнения (4.74). *БРСТ-оператор* определяется как

$$\mathbf{s}f = (f, S)_{\rm AB}, \qquad f \in \mathcal{G}^0. \tag{4.77}$$

Тогда, исходя из свойств антискобок, получаем что:

- $\mathbf{s}$ — нильпотентный оператор ($\mathbf{s}^2 = 0$);
- он является антидифференцированием

$$\mathbf{s}\,(ff') = f\mathbf{s}f' + (-1)^{[f']}(\mathbf{s}f)f';$$

- $\text{gh}(\mathbf{s}f) = \text{gh}\,(f) + 1.$

Пример 4.3.4. Рассмотрим калибровочную модель Янга—Миллса на расслоении связностей C (4.56) с координатами (x^λ, a^m_λ). Она приводима. Поэтому ее классический базис включает калибровочные потенциалы и духовые поля $\Phi^A = (a^m_\lambda, C^m)$ вместе с антиполями $\Phi^*_A = (a^{\lambda *}_m, C^*_m)$. Приемлемым решением основного уравнения является

$$S = L_{\rm YM} + a^{\lambda *}_r\left(C^r_\lambda + c^r_{pq}a^p_\lambda C^q\right) + \frac{1}{2}C^*_p c^p_{rq}C^r C^q,$$

где $L_{\rm YM}$ — лагранжиан Янга—Миллса (см. выражение (2.21) в первом томе [11]). Соответствующий БРСТ-оператор на A^r_λ и C^p имеет вид

$$\begin{aligned} &\mathrm{s}\, a^r_\lambda = C^r_\lambda + c^r_{pq}a^p_\lambda C^q, &&\mathrm{s}\, C^p = -\frac{1}{2}c^p_{rq}C^r C^q, \\ &\mathrm{s}\, a^{\lambda *}_r = \delta^\lambda_r(L_{\rm YM}) + a^{\lambda *}_p c^p_{rq}C^q, &&\mathrm{s}\, C^*_r = a^{\lambda *}_{\lambda r} - c^p_{qr}a^q_\lambda a^{\lambda *}_p + c^p_{rq}C^*_p C^q, \end{aligned} \tag{4.78}$$

где $\delta^\lambda_r(L_{\rm YM})$ — вариационная производная лагранжиана Янга—Миллса $L_{\rm YM}$. □

Замечание 4.3.5. Отметим, что БРСТ-оператор иногда определяется как

$$\mathrm{s}f = (-1)^{|f|}(f, S)_{\rm AB}. \tag{4.79}$$

В отличие от s (4.77) он является дифференцированием

$$\mathrm{s}\,(ff') = (\mathrm{s}f)f' + (-1)^{|f|}f\mathrm{s}f'.$$

□

§ 4. БРСТ-связность

Чтобы сделать выражение (4.77) для БРСТ-оператора s замкнутым, необходимо определить действие этого оператора на струи элементов классического базиса. Определение s предполагает, что $\mathrm{s}\left(x^\lambda\right) = 0$. Поэтому положим

$$\mathrm{s}\,\zeta^a_\Lambda = d_\Lambda\left(\mathrm{s}\,\zeta^a\right).$$

Тогда БРСТ-оператор s может быть расширен на подалгебру локальных форм $\mathcal{G}^{0,*}$ так, что

$$\mathrm{s}\, d_H = -d_H \mathrm{s},$$

т. е.

$$\mathrm{s}\left(\frac{1}{r!}\phi_{\lambda_1\ldots\lambda_r}dx^{\lambda_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\lambda_r}\right) = \frac{1}{r!}(-1)^r(\mathrm{s}\,\phi_{\lambda_1\ldots\lambda_r})dx^{\lambda_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\lambda_r}. \tag{4.80}$$

В частности, посредством оператора s (4.80) формула (4.78) переписывается в виде

$$\mathrm{s}\, a = -d_H C - [a, C], \quad \mathrm{s}\, C = -\frac{1}{2}[C, C], \tag{4.81}$$

где $a = a^r_\lambda dx^\lambda \otimes e_r$.

Операторы s и d_H определяют бикомплекс на алгебре локальных форм, который градуирован по степеням локальных форм и духовому числу так, что

$$\phi\wedge\phi' = (-1)^{|\phi||\phi'|+[\phi][\phi']}\phi'\wedge\phi, \quad \phi,\phi'\in\mathcal{G}^{0,*}. \tag{4.82}$$

Следуя стандартной процедуре [8], из этого бикомплекса можно получить комплекс, характеризуемый коцепным оператором

$$\widetilde{\mathrm{s}} = \mathrm{s} + d_H. \tag{4.83}$$

Он градуирован по полному духовому числу. Оператор (4.83) нильпотентен ($\widetilde{\mathrm{s}}^2 = 0$) и увеличивает полное духовое число на 1, т. е.

$$\mathrm{gh}_T(\widetilde{\mathrm{s}}\,\phi) = \mathrm{gh}_T(\phi) + 1.$$

Он называется *полным БРСТ-оператором*

Рассмотрим когомологии полного БРСТ-оператора (4.83). В случае калибровочной модели Янга—Миллса это так называемые локальные когомологии [39, 111], описываемые в терминах струй [28, 42].

Пусть $\phi_n \in \mathcal{G}^{0,n}$ — локальная плотность, т. е. лагранжиан. Он называется *локально БРСТ-замкнутым*, если $\mathrm{s}\,\phi_n$ — d_H-точная форма, т. е. удовлетворяет равенству

$$\mathrm{s}\,\phi_n + d_H\phi_{n-1} = 0, \tag{4.84}$$

где $\phi_{n-1} \in \mathcal{G}^{0,n-1}$ — локальная $(n-1)$-форма. Ясно, что локальная форма ϕ_n является локально БРСТ-замкнутой, если функционал действия

$$\int \phi_n$$

БРСТ-инвариантен с точностью до поверхностных интегралов. Говорят, что локальная плотность ϕ_n *локально БРСТ-точна*, если

$$\phi_n = \mathrm{s}\sigma_n + d_H\sigma_{n-1}.$$

Множество $H(\mathrm{s}|d_H)$ классов эквивалентности локально БРСТ-замкнутых локальных плотностей по модулю локально БРСТ-точных точных локальных плотностей называется *локальными БРСТ-когомологиями* [28, 29, 42, 87].

Установим теперь связь между локальными БРСТ-когомологиями и когомологиями полного БРСТ-оператора $\widetilde{\mathrm{s}}$. Применяя оператор s к равенству (4.84), получаем

$$d_H(\mathrm{s}\phi_{n-1}) = 0.$$

Следовательно $\mathrm{s}\phi_{n-1}$ является d_H-замкнутой локальной формой, а значит d_H-точной в соответствии с Теоремой 4.3.1. Поэтому существует (возможно нулевая) локальная $(n-2)$-форма ϕ_{n-2}, удовлетворяющая уравнению

$$\mathrm{s}\,\phi_{n-1} + d_H\phi_{n-2} = 0.$$

По индукции можно сделать заключение о существовании семейства локальных форм ϕ_k, $k = k_0, \dots, n$, подчиняющихся соотношениям

$$d_H\phi_n = 0, \tag{4.85а}$$
$$\mathrm{s}\,\phi_k + d_H\phi_{k-1} = 0, \qquad n \geqslant k > k_0, \tag{4.85б}$$
$$\mathrm{s}\,\phi_{k_0} = 0 \tag{4.85в}$$

для некоторого k_0. Эти уравнения называются *уравнениями спуска* [42]. Если $k_0 = 0$, уравнение (4.85в) принимает общий вид $\mathrm{s}\,\phi_0 =\mathrm{const}$. Уравнения спуска (4.85а)–(4.85в) могут быть переписаны в компактной форме

$$\widetilde{\mathrm{s}}\widetilde{\phi} = 0, \qquad \widetilde{\phi} = \sum_{k=k_0}^{n} \phi_k. \tag{4.86}$$

Отсюда следует, что любое решение уравнения (4.84) соответствует $\widetilde{\mathrm{s}}$-замкнутой форме, и обратно. В частности, решение ϕ_n уравнения (4.84) является локально БРСТ-точным тогда и только тогда, когда

$$\widetilde{\phi} = \widetilde{\mathrm{s}}\widetilde{\sigma} + \mathrm{const},$$

т. е. всякая локально БРСТ-точная локальная форма соответствует $\widetilde{\mathbf{s}}$-точной локальной форме по модулю постоянных функций. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.4.1. Локальные БРСТ-когомологии локальных плотностей ϕ_n с данным полным духовым числом

$$\mathrm{gh}_T(\phi) = \mathrm{gh}(\phi) + n$$

изоморфны $\widetilde{\mathbf{s}}$-когомологиям локальных форм $\widetilde{\phi}$, обладающих тем же полным духовым числом $\mathrm{gh}_T(\phi)$. □

Поскольку приемлемое решение S основного уравнения раскладывается в ряд по степеням антиполей, БРСТ-оператор может быть разложен в сумму

$$\mathbf{s} = \delta + \gamma + \sum_{k \geqslant 1} s_k, \tag{4.87}$$

где δ, γ и s_k — операторы с антидуховыми числами -1, 0 и k соответственно. Так как горизонтальный дифференциал d_H имеет нулевое антидуховое число, соответствующее разложение полного БРСТ-оператора имеет вид

$$\widetilde{\mathbf{s}} = \delta + \widetilde{\gamma} + \sum_{k \geqslant 1} s_k, \qquad \widetilde{\gamma} = \gamma + d_H.$$

Оператор δ, называемый *дифференциалом Косзула—Тейта*, нильпотентен. Он отличен от нуля только на антиполях:

$$\delta\Phi^A = 0, \qquad \delta\varphi_i^* = \frac{\delta_r L_{\mathrm{cl}}}{\partial\varphi^i}, \qquad \ldots .$$

Оператор γ задает калибровочные преобразования, параметрами которых служат духовые поля:

$$\gamma\varphi^i = R_r^i C^r, \qquad R_r^i = \sum_{k \geqslant 0} R_r^{i\Lambda} d_\Lambda. \tag{4.88}$$

Смысл разложения (4.87) состоит в ацикличности дифференциала Косзула—Тейта δ на локальных функциях с положительными антидуховыми числами, т. е. равенство $\delta\widetilde{\phi}_k = 0$ $\left(\mathrm{antigh}\left(\widetilde{\phi}_k\right) = k\right)$ предполагает, что $\widetilde{\phi}_k = \delta\widetilde{\sigma}_{k+1}$ (см. подробности в [68, 69]). Отсюда можно сделать вывод, что $\widetilde{\mathbf{s}}$-неточное решение $\widetilde{\phi}$ уравнения $\widetilde{\mathbf{s}}\widetilde{\phi} = 0$ с необходимостью содержит не зависящую от антиполей компоненту $\widetilde{\phi}_0$ такую, что

$$\widetilde{\gamma}\widetilde{\phi}_0 \approx 0, \qquad \widetilde{\phi}_0 \not\approx \widetilde{\gamma}\,\widetilde{\sigma} + \mathrm{const}, \qquad \mathrm{antigh}\left(\widetilde{\phi}_0\right) = 0. \tag{4.89}$$

Здесь $\approx$ обозначает слабое равенство, т. е. $a_0 \approx 0$ $(\mathrm{antigh}\,(a_0) = 0)$ тогда и только тогда, когда существует a_1 $(\mathrm{antigh}\,(a_1) = 1)$ такое, что $a_0 = \delta a_1$. Более того, любое решение $\widetilde{\phi}_0$ уравнения (4.89) может быть пополнено до $\widetilde{\mathbf{s}}$-замкнутой неточной локальной формы $\widetilde{\phi}$ такой, что различные пополнения с одной и той же не зависящей от антиполей составляющей принадлежат одному и тому же элементу $\widetilde{\mathbf{s}}$-когомологий. Отметим, что

$$\delta\widetilde{\gamma} + \widetilde{\gamma}\delta = 0, \qquad \widetilde{\gamma}^2 = -(\delta s_1 + s_1\delta),$$

т. е. оператор $\widetilde{\gamma}$ слабо нильпотентен. Тем самым мы пришли к следующему результату.

Предложение 4.4.2. [42]. Когомологии полного БРСТ-оператора $\widetilde{\mathbf{s}}$ на локальных формах изоморфны слабым когомологиям оператора $\widetilde{\gamma}$ на не зависящих от антиполей локальных формах. □

Поэтому, говоря о когомологиях, можно ограничиться рассмотрением локальных форм, свободных от антиполей. Предположим, что существует локально обратимое преобразование координат от классического базиса (Φ^A), не зависящего от антиполей, к базису (U^l, V^l, W^i) с неотрицательным духовым числом такому, что

$$\widetilde{\gamma} U^l = V^l, \quad \widetilde{\gamma} W^i = R^i(W).$$

Пара (U^l, V^l) называется тривиальной. Не ограничивая общности, можно также предположить, что все элементы U^l, V^l, W^i имеют определенное полное духовое число. Обычно U^l представляют собой компоненты калибровочных потенциалов и их струй, тогда как $V^l = \widetilde{\gamma} U^l$ (см. ниже Примеры 4.4.1 и 4.4.2).

Предложение 4.4.3. [42]. Если

$$\widetilde{\gamma}\widetilde{\phi}_0(U, V, W) \approx 0,$$

тогда

$$\widetilde{\gamma}\widetilde{\phi}_0(U, V, W) \approx \phi(W) + \widetilde{\gamma}\widetilde{\sigma}(U, V, W),$$

т. е. тривиальные пары могут быть исключены из слабых $\widetilde{\gamma}$-когомологий. □

Обозначим T^ι, $\widetilde{C}^L$ и Q^{L_k} те элементы W^i, которые характеризуются полными духовыми числами 0, 1 и $k > 1$ соответственно. Элементы T^ι, называемые *БРСТ-тензорными полями*, представляют собой локальные 0-формы, тогда как $\widetilde{C}^L$ и $\widetilde{Q}^{L_k}$ в общем случае раскладываются в сумму локальных форм с ненулевыми степенями

$$\widetilde{C}^L = \widehat{C}^L + \mathcal{A}^L, \tag{4.90}$$

$$\widehat{C}^L \in \mathcal{G}^0, \ \mathrm{gh}\left(\widehat{C}^L\right) = 1, \quad \mathcal{A}^L \in \mathcal{G}^{0,1}, \ \mathrm{gh}\left(\mathcal{A}^L\right) = 0,$$

$$\widetilde{Q}^{L_k} = \sum_{r=0}^{k} \widehat{Q}_r^{L_k}, \tag{4.91}$$

$$\widehat{Q}_r^{L_k} \in \mathcal{G}^{0,r}, \quad \mathrm{gh}\left(\widehat{Q}_r^{L_k}\right) = k - r.$$

Поскольку оператор $\widetilde{\gamma}$ повышает полное духовое число на 1, мы можем написать

$$\widetilde{\gamma} T^\iota = \widetilde{C}^L \Delta_L T^\iota, \quad \Delta_L = R_L^\iota \frac{\partial}{\partial T^\iota}, \tag{4.92}$$

$$\widetilde{\gamma}\widetilde{C}^L = \frac{(-1)^{|\widetilde{C}^N|}}{2} \widetilde{C}^N \widetilde{C}^M f_{MN}^L(T) + \widetilde{Q}^{M_2} Z_{M_2}^L \tag{4.93}$$

для некоторых функций R, f и Z тензорных полей T.

Благодаря разложениям $\widetilde{\gamma} = \gamma + d_H$ и (4.90), равенство (4.92) распадается на равенства

$$\gamma T^\iota = \widehat{C}^L \Delta_L T^\iota, \tag{4.94}$$

$$d_\lambda T^\iota = \mathcal{A}_\lambda^L \Delta_L T^\iota, \qquad \mathcal{A}^L = dx^\lambda \mathcal{A}_\lambda^L. \tag{4.95}$$

Поскольку соотношение (4.95) выполняется тождественно, оно предполагает расщепление оператора полной производной

$$d_\lambda = v_\lambda^m V_m^\mu \left(d_\mu - \mathcal{A}_\mu^r \Delta_r\right) + \mathcal{A}_\lambda^r \Delta_r \tag{4.96}$$

и соответствующее расщепление наборов

$$\left\{\mathcal{A}_\lambda^L\right\} = \left\{v_\lambda^m; \mathcal{A}_\lambda^r\right\}, \quad \left\{\Delta_L\right\} = \left\{D_m; \Delta_r\right\},$$

где $v^m_\lambda V^\mu_m = \delta^\mu_\lambda$ и

$$D_m = V^\mu_m(d_\mu - A^r_\mu \Delta_r).$$

Тогда равенство (4.94) приводится к виду

$$\gamma T^\iota = \left[\widehat{C}^r \Delta_r + \widehat{C}^m V^\mu_m(d_\mu - A^r_\mu \Delta_r)\right] T^\iota. \tag{4.97}$$

Соответственно оператор $\widetilde{\gamma}$ (4.92) принимает форму

$$\widetilde{\gamma} T^\iota = \left(\widetilde{C}^m D_m + \widetilde{C}^r \Delta_r\right) T^\iota. \tag{4.98}$$

Из-за этой формы величины $\left\{\widetilde{C}^N\right\}$ называются обобщенными связностями, или *БРСТ-связностями* [42, 111].

Следующие два примера показывают, что такое название связано с обычным понятием связностей, используемых в физических моделях.

Пример 4.4.1. Рассмотрим снова калибровочную модель Янга—Миллса на главном расслоении со структурной группой G. Тривиальными парами в ней являются

$$\left\{U^l\right\} = \left\{a^r_{\Lambda+\lambda},\ 0 \leqslant |\Lambda|\right\}, \qquad \left\{V^l\right\} = \left\{\widetilde{\gamma} U^l\right\}.$$

БРСТ-связности имеют вид

$$\left\{\widetilde{C}^L\right\} = \left\{dx^\lambda;\ \widetilde{C}^r = C^r + dx^\lambda a^r_\lambda\right\}.$$

Получаем следующие операторы Δ (4.92), отвечающие этим БРСТ-связностям:

$$\{\Delta_L\} = \left\{D_\lambda = d_\lambda - a^r_\lambda \epsilon_r;\ \epsilon_r\right\},$$

где $\{\epsilon_r\}$ — базис алгебры Ли $\mathfrak{g}_l$ группы Ли G. Полное семейство БРСТ-тензорных полей T^ι состоит из алгебраически независимых компонент напряженности $\mathcal{F}^r_{\lambda\mu}$ и ее ковариантных производных $D_\Lambda \mathcal{F}^r_{\lambda\mu}$. □

Пример 4.4.2. В метрической теории гравитации БРСТ-преобразованиями метрики $g_{\mu\nu}$ служат общие ковариантные преобразования, параметрами которых являются духовые поля ξ^μ:

$$\mathrm{s}\, g_{\mu\nu} = \xi^\lambda d_\lambda g_{\mu\nu} + (d_\mu \xi^\lambda) g_{\lambda\nu} + (d_\nu \xi^\lambda) g_{\mu\lambda}.$$

БРСТ-преобразования самих духовых полей имеют вид

$$\mathrm{s}\xi^\mu = \xi^\nu d_\nu \xi^\mu.$$

Тривиальные пары $\{U^l, V^l\}$ состоят из струй $d_\Lambda\{\lambda{}^\nu{}_\mu\}$ символов Кристоффеля и $\widetilde{\gamma} d_\Lambda\{\lambda{}^\nu{}_\mu\}$. БРСТ-связностями являются

$$\left\{\widetilde{C}^L\right\} = \left\{\widetilde{\xi}^\lambda = \xi^\lambda + dx^\lambda;\ \widetilde{C}^\nu_\lambda = d_\lambda \xi^\nu + \{\lambda{}^\nu{}_\mu\}\widetilde{\xi}^\mu\right\}.$$

Получаем операторы Δ, отвечающие БРСТ-связностям:

$$\{\Delta_L\} = \left\{D_\lambda = d_\lambda - \{\lambda{}^\nu{}_\mu\}\Delta^\nu_\mu;\ \Delta^\nu_\mu\right\},$$

где Δ^ν_μ — генераторы группы $GL(n, \mathbb{R})$, действующие на мировые индексы по закону

$$\Delta^\nu_\mu T_\lambda = \delta^\nu_\lambda T_\mu, \qquad \Delta^\nu_\mu T^\lambda = -\delta^\lambda_\mu T^\nu.$$

Множество БРСТ-тензорных полей состоит из метрики $g_{\mu\nu}$, алгебраически независимых компонент тензора кривизны $R_{\lambda\mu}{}^\alpha{}_\beta$ и его ковариантных производных $D_\Lambda R_{\lambda\mu}{}^\alpha{}_\beta$. БРСТ-преобразования БРСТ-тензорных полей имеют вид

$$\gamma T_\mu = \xi^\nu D_\nu T_\mu + (d_\mu \xi^\nu + \{\mu{}^\nu{}_\alpha\}\xi^\alpha) T_\nu = \xi^\nu d_\nu T_\mu + (d_\mu \xi^\nu) T_\nu,$$

т. е. это общие ковариантные преобразования T_μ, параметрами которых являются духовые поля ξ^ν. □

Глава 5

Топологические теории поля

Топологическая теория поля обычно характеризуется:

- набором полей на римановом многообразии X, градуированных по грассмановой четности и духовому числу;
- нечетным нильпотентным БРСТ-оператором Q;
- физическими состояниями, определяемыми Q-когомологическими классами;
- Q-точным метрическим тензором энергии-импульса

(см. в качестве обзора работу [37] и цитируемую в ней литературу). Топологические теории поля подразделяются на теории типа Уиттена и типа Шварца. Примером первых служит теория Доналдсона, тогда как вторые включают модели, функционал действия которых не зависит от метрики на X, например, теорию Чженя—Саймонса.

Здесь мы сосредоточим внимание на том примечательном факте, что выражение для кривизны связности на пространстве калибровочных полей в точности совпадает с БРСТ-преобразованием в геометрическом секторе вышеупомянутой теории Доналдсона. Как следствие инварианты Доналдсона играют роль наблюдаемых в топологической теории поля.

§ 1. Пространство калибровочных полей

Как уже отмечалось (см. первый том [11], § 2.2), связности на главном расслоении $P \to X$ со структурной группой G, т. е. калибровочные потенциалы, представляются сечениями аффинного расслоения $C \to X$ (4.56). Они образуют аффинное пространство $\mathbf{A}$, моделируемое над векторным пространством сечений векторного расслоения

$$\overline{C} = T^*X \otimes V_G P \tag{5.1}$$

и называемое *пространством калибровочных полей*. Калибровочные потенциалы считаются физически эквивалентными, если они переводятся друг в друга вертикальными автоморфизмами главного расслоения P. Поэтому конфигурационным пространством квантовой калибровочной теории является фактор-пространство $\mathbf{A}/\mathcal{G}$, где $\mathcal{G} = \mathrm{Gau}\,(P)$ — уже упоминавшаяся выше калибровочная группа (см. первый том [11], § 2.2). Чтобы наделить конфигурационное пространство гладкой структурой, рассмотрим его пополнение Соболева.

Приведем коротко основные сведения о пространствах Соболева [17, 114, 122]. Рассмотрим на области $U \subset \mathbb{R}^n$ векторное пространство $L^p(U)$, $1 \leqslant p < \infty$, всех интегрируемых вещественных функций на U таких, что

$$\int_U |f(x)|^p\, d^n x < \infty.$$

Это банахово пространство относительно нормы

$$\|f\|_p = \left\{ \int_U |f(x)|^p\, d^n x \right\}^{1/p}$$

(см. выражение (А.5) в третьем томе [13]). Ясно, что функции отождествляются, если равны друг другу почти всюду на U. Пространства Соболева определяются на произвольной области $U \subset \mathbb{R}^n$ и являются векторными подпространствами пространств $L^p(U)$.

Мы будем использовать стандартное обозначение

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

где α — упорядоченный набор натуральных чисел $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ и

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_r.$$

Определим функционал

$$\|f\|_{k,p} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|\partial^\alpha f\|_p^p \right\}^{1/p}, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{5.2}$$

на вещественных функциях f на U, для которых правая сторона выражения (5.2) имеет смысл. Функционал (5.2) является нормой на любом векторном подпространстве таких функций.

Определение 5.1.1. *Пространство Соболева* $\mathcal{H}^{k,p}(U)$ определяется как пополнение множества

$$\{ f \in C^k(U) \colon \|f\|_{k,p} < \infty \}$$

относительно нормы (5.2). □

Под пространством Соболева понимается также другое пространство $W^{k,p}(U)$, которое, как можно показать, изоморфно $\mathcal{H}^{k,p}(U)$ (см. детальное изложение в работе [17]). Существенно, что множество гладких функций

$$\{ f \in C^\infty(U) \colon \|f\|_{k,p} < \infty \}$$

плотно в $\mathcal{H}^{k,p}(U)$. Поэтому пространством Соболева называют еще замыкание $W_0^{k,p}(U)$ множества гладких функций с компактным носителем в $\mathcal{H}^{k,p}(U)$.

Понятие пространства Соболева может быть расширено на комплексные функции и произвольное вещественное число k. Такое пространство Соболева $\mathcal{H}^{k,p}(U)$, $k \in \mathbb{R}$, состоит из тех комплексных функций и распределений Шварца f (см. третий том [13], Приложение Б), для которых норма

$$\|f\|_{k,p} = \left\{ \int \left| \widehat{f}(\xi) \left(1 + \xi^2\right)^{k/2} \right|^p d\xi \right\}^{1/p}, \tag{5.3}$$

где $\widehat{f}$ — преобразование Фурье функции f, является конечной. Если k является целым неотрицательным числом, это определение эквивалентно первоначальному Определению 5.1.1, обобщенному на комплексные функции [122]. Мы ограничимся случаем $p = 2$ и обозначим

$$\mathcal{H}^{k,2}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}^k.$$

Это гильбертово пространство. В частности, можно показать, что пространство $\mathcal{H}^{-k}$, $k > 0$, дуально $\mathcal{H}^k$ и его элементами являются обобщенные функции. Действительно, пусть $\mathcal{D}$ — пространство гладких комплексных функций с компактным носителем на $\mathbb{R}^n$. Оно наделено топологией, определяемой семейством преднорм

$$p_{\{\phi_\alpha\}}(f) = \sup_{x \in Q} \left| \sum_\alpha \phi_\alpha(x) \partial^\alpha f(x) \right|,$$

где $\{\phi_a\}$ — набор гладких функций такой, что на любом компактном подмножестве $K \subset \mathbb{R}^n$ только конечное число этих функций отлично от нуля (см. третий том [13], Приложение Б). Пространство $\mathcal{D}$ известно как пространство *пробных функций*. Его топологическим сопряженным $\mathcal{D}'$ является пространство уже упоминавшихся *распределений Шварца*. Пусть $\mathcal{S}$ — ядерное *пространство Шварца* гладких функций, быстро убывающих на бесконечности (см. третий том [13], Приложение Б). Его топологическим сопряженным $\mathcal{S}'$ является пространство *распределений умеренного роста* (или *обобщенных функций*). Имеет место цепочка вложений

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \ldots \mathcal{H}^k \subset \ldots \mathcal{H}^0 = L^0(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{H}^{-1} \subset \ldots \mathcal{H}^{-k} \subset \ldots \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'.$$

Можно определить пространство Соболева функций на произвольном многообразии X (которое, напомним, предполагается паракомпактным), выбрав его открытое покрытие и соответствующее разбиение единицы. Известна следующая *теорема вложения Соболева* [122].

Теорема 5.1.2. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, или пусть многообразие X компактно. Тогда $\mathcal{H}^{k,p}(X) \subset C^l(X)$, если $k - n/p > l$, где $C^l(X)$ — пространство l-кратно непрерывно дифференцируемых функций на X. В частности, $\mathcal{H}^k \subset C^n(X)$, если $k > n/2$. □

Понятие пространства Соболева может быть также распространено на сечения векторного расслоения $Y \to X$, имеющие компактный носитель. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением векторных расслоений $Y \to X$ над компактным ориентируемым n-мерным римановым многообразием X. Это случай большинства представляющих физический интерес евклидовых калибровочных теорий. Пусть $Y(X)$ — структурный модуль глобальных сечений s такого векторного расслоения. Рассмотрим его пополнение $Y(X)_k$, называемое *пополнением Соболева*, для неотрицательного k относительно нормы

$$\|s\|_k = \left(\sum_\iota \int_{U_\iota} d\,\mathrm{vol} \sum_{|\alpha|\leqslant k} \left|\partial^\alpha(\mathrm{pr}_2 \circ \psi_\iota \circ s)\right|_\varrho^2\right)^{1/2}, \tag{5.4}$$

где $\Psi = \{U_\iota, \psi_\iota\}$ — атлас расслоения $Y \to X$ над конечным открытым покрытием $\{U_\iota\}$ базы X и $|.|_\varrho$ — норма относительно некоторой послойной метрики ϱ в Y. Различный выбор атласа Ψ и римановой метрики на X дает одно и то же пополнение Соболева. Отметим также, что частные производные в выражении (5.4) могут быть заменены на ковариантные производные относительно некоторой связности на Y.

Пусть теперь $P \to X$ — главное расслоение, структурная группа которого G является компактной полупростой матричной группой Ли. Начнем с пополнения Соболева калибровочной группы $\mathcal{G}$ вертикальных автоморфизмов главного расслоения $P \to X$. Элементами этой группы являются матричные функции g, которые действует на пространство калибровочных полей A по известному закону

$$\mathcal{G} \ni g\colon\ A \mapsto g^{-1} A\, g + g^{-1} dg.$$

Выделяют нормальную подгруппу калибровочной группы, которая является стабилизатором

$$\mathcal{G}^0 = \{\Phi \in \mathcal{G}\colon\ \Phi(x_0) = 1\}$$

в некоторой фиксированной точке $x_0 \in X$. Она называется *отмеченной калибровочной группой*. Эта группа действует свободно на пространстве калибровочных полей A. Отметим, что $\mathcal{G}/\mathcal{G}^0 = G$.

Вводят также *эффективную калибровочную группу* $\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G}/\mathcal{Z}$, где $\mathcal{Z}$ — центр калибровочной группы $\mathcal{G}$. Центр $\mathcal{Z}$ изоморфен центру $Z(G)$ группы G.

Определение 5.1.3. Связность A на главном расслоении $P \to X$ называется *неприводимой*, если ее стабилизатор $\mathcal{G}_A$ (т.е. $\Phi(A) = A$, $\forall \Phi \in \mathcal{G}_A$) принадлежит центру калибровочной группы $\mathcal{Z}$, и это является общим случаем связностей на главном расслоении. □

Обозначим $\overline{\mathbf{A}}$ пространство неприводимых связностей (калибровочных полей). Эффективная калибровочная группа $\overline{\mathcal{G}}$ действует свободно на $\overline{\mathbf{A}}$.

Замечание 5.1.1. Приведем некоторые добавочные сведения к тому, что было изложено в первом томе о связностях на главных расслоениях. Они потребуются нам в дальнейшем.

Пусть $P \to X$ — главное расслоение со структурной группой G. Связность A на главном расслоении $P \to X$ представляется T_GP-значной формой

$$A = dx^\lambda \otimes \left(\partial_\lambda + A^q_\lambda e_q\right) \tag{5.5}$$

(см. формулу (1.86) в первом томе [11]). Напомним, что

$$T_GP = TP/G.$$

Связность A (5.5) порождает ассоциированную линейную связность на расслоении алгебр Ли $V_GP \to X$. Соответствующий ковариантный дифференциал $\nabla^A\xi$ сечения $\xi = \xi^p e_p$ этого расслоения имеет вид

$$\nabla^A\xi\colon X \to T^*X \otimes V_GP,$$
$$\nabla^A\xi = \left(\partial_\lambda\xi^r + c^r_{pq}A^p_\lambda\xi^q\right)dx^\lambda \otimes e_r. \tag{5.6}$$

Если u — векторное поле на X, ковариантная производная $\nabla^A_u\xi$ сечения ξ вдоль u дается выражением

$$\nabla^A_u\xi = u \rfloor \nabla^A\xi = [u \rfloor A, \xi].$$

В частности,

$$\nabla^A_\lambda e_q = c^r_{pq}A^p_\lambda e_r. \tag{5.7}$$

Ковариантная производная ∇^A_u согласуется со скобками Ли сечений расслоения $V_GP \to X$, т.е.

$$\nabla^A_u[\xi,\eta] = \left[\nabla^A_u\xi,\eta\right] + \left[\xi,\nabla^A_u\eta\right]$$

для любого векторного поля u на X и любых сечений

$$\xi,\eta\colon X \to V_GP.$$

Пусть $P \to X$ — главное расслоение со структурной группой G. Тогда (F-N)-скобки (см. первый том [11], § 1.4) на пространстве тангенциально-значных форм $\Omega^*(P)\otimes\mathcal{T}(P)$ на главном расслоении P согласованы с каноническим действием группы G на P, и мы получаем индуцированные (F-N)-скобки на пространстве T_GP-значных форм $\Omega^*(X)\otimes T_GP(X)$ на X, где, следуя принятым обозначениям, $T_GP(X)$ — векторное пространство глобальных сечений векторного расслоения $T_GP \to X$. Напомним, что $T_GP(X)$ естественным образом проектируется на пространство $\mathcal{T}(X)$ векторных полей на базе X.

Если $A \in \Omega^1(X)\otimes T_GP(X)$ — связность (5.5) на главном расслоении P, соответствующий (F-N)-дифференциал (см. формулу (1.39) в первом томе [11]) имеет вид

$$d_A\colon \Omega^r(X)\otimes T_GP(X) \to \Omega^{r+1}(X)\otimes V_GP(X),$$
$$d_A\phi = [A,\phi]_{\mathrm{FN}}, \quad \phi \in \Omega^r(X)\otimes T_GP(X). \tag{5.8}$$

На пространстве $V_GP(X)$ дифференциал d_A совпадает с ковариантным дифференциалом ∇^A (5.6), т.е.

$$d_A\xi = \nabla^A\xi.$$

Имеет место локальное выражение

$$\nabla^A \xi = d\xi + [A, \xi], \tag{5.9}$$

где

$$A = A^q_\lambda dx^\lambda \otimes e_q \tag{5.10}$$

— локальная форма связности. Если

$$\phi = \alpha \otimes \xi \in \Omega^r(X) \otimes V_G P(X),$$

где $\alpha \in \Omega^r(X)$ и $\xi \in V_G P(X)$, получаем формулу

$$d_A \phi = d\alpha \otimes \xi + (-1)^r \alpha \wedge \nabla^A \xi. \tag{5.11}$$

Используя (F-N)-дифференциал (5.8), напряженность F_A связности A можно задать в виде

$$F_A = \frac{1}{2} d_A A = \frac{1}{2}[A, A]_{\rm FN} = dA + \frac{1}{2}[A, A] \in \Omega^2(X) \otimes V_G P(X). \tag{5.12}$$

Пусть d_A — (F-N)-дифференциал (5.11) и $*$ — оператор Ходжа относительно римановой метрики на X, обобщенный на $\mathfrak{g}$-значные формы $\phi \in \Omega^r(X) \otimes V_G(P)$. Впоследствии мы будем использовать тот факт, что, если $A \in \overline{\mathrm{A}}$ — неприводимая связность, существует функция Грина

$$G_A = (*d_A * d_A)^{-1} \tag{5.13}$$

ковариантного лапласиана

$$\Delta_A = *d_A * d_A,$$

поскольку уравнение

$$d_A \xi = \nabla^A \xi = 0, \quad \xi \in V_G P(X)$$

не допускает нетривиального решения (см. выражение (5.6)). □

Напомним, что калибровочная группа представляет собой группу глобальных сечений группового расслоения $\widetilde{P}$ (см. первый том [11], Пример 1.7.6). Хотя $\widetilde{P} \to X$ не является векторным расслоением, пополнение Соболева калибровочной группы может быть получено следующим образом [118]. Будучи матричной группой Ли, G является подмножеством алгебры $l \times l$ комплексных матриц $M(l, \mathbb{C})$ для некоторого натурального числа l. Введем ассоциированное с P расслоение

$$P^M = \big(P \times M(l, \mathbb{C})\big)/G$$

$l \times l$ матриц, где G действует на $M(l, \mathbb{C})$ по присоединенному представлению. Это векторное расслоение, слои которого наделены нормой

$$|L|^2 = \operatorname{Tr} LL^*, \quad L \in M(l, \mathbb{C}).$$

Пусть $P^M(X)_k$ — пополнение Соболева векторного пространства сечений $P^M(X)$ расслоения P^M. Поскольку $\mathcal{G}$ принадлежит $P^M(X)$, пополнение Соболева $\mathcal{G}_k$ калибровочной группы $\mathcal{G}$ определяется как ее пополнение относительно индуцированной на $\mathcal{G}$ метрики. Если $k > n/2$, тогда $\mathcal{G}_k$ замкнуто в $P^M(X)_k$ и групповые операции в $\mathcal{G}_k$ непрерывны в соответствии с Теоремой (5.1.2). Таким образом, $\mathcal{G}_k$, а также определяемые аналогично пополнения Соболева $\mathcal{G}^0_k$ и $\overline{\mathcal{G}}_k$ групп $\mathcal{G}^0$ и $\overline{\mathcal{G}}$ являются топологическими группами. Более того, это группы Ли. Будем называть их *калибровочными группами Ли*. При этом, как уже отмечалось, алгебра Ли калибровочной группы Ли $\mathcal{G}_k$ представляет собой пополнение Соболева пространства сечений расслоения алгебр Ли $V_G P$ (4.55), тоже рассматриваемого как подрасслоение расслоения матриц P^M [118].

Пополнение Соболева $\mathbf{A}_k$ пространства калибровочных полей определяется как аффинное пространство, моделируемое над пополнением Соболева $\overline{C}(X)_k$ пространства сечений векторного расслоения $\overline{C}$ (5.1). Поэтому это гильбертово многообразие (см. третий том [13], § 1.7), касательным пространством $T_A\mathbf{A}_k$ к которому в точке $A \in \mathbf{A}_k$ является $\overline{C}(X)_k$. Пополнение Соболева $\overline{\mathbf{A}}_k$ пространства неприводимых связностей является плотным открытым множеством в $\mathbf{A}_k$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что $k > 1 + n/2$. Ключевым является тот факт, что действие калибровочной группы Ли

$$\mathcal{G}_{k+1} \times \mathbf{A}_k \to \mathbf{A}_k$$

является гладким, как и свободные действия групп

$$\mathcal{G}^0_{k+1} \times \mathbf{A}_k \to \mathbf{A}_k,$$
$$\overline{\mathcal{G}}_{k+1} \times \overline{\mathbf{A}}_k \to \overline{\mathbf{A}}_k.$$

Более того, фактор-пространство

$$\mathcal{O}_k = \overline{\mathbf{A}}_k/\overline{\mathcal{G}}_{k+1},$$

называемое *пространством орбит*, представляет собой гладкое гильбертово многообразие, а каноническая сюръекция $\overline{\mathbf{A}}_k \to \mathcal{O}_k$ — это гладкое расслоение (т. е. она локально тривиальна). Это главное расслоение со структурной группой $\overline{\mathcal{G}}_{k+1}$ [118]. Отметим, что фактор-пространство $\mathbf{A}_k/\mathcal{G}^0_{k+1}$ — это тоже гладкое гильбертово многообразие, а топологическое пространство $\mathbf{A}_k/\mathcal{G}_{k+1}$ стратифицировано на гладкие гильбертовы многообразия [99] (см. также [75, 76, 86]).

В квантовой калибровочной теории пространство орбит $\mathcal{O}$, как известно, играет роль конфигурационного пространства. Однако структура этого пространства плохо поддается описанию. В частности, важной проблемой является существование глобального сечения главного расслоения $\overline{\mathbf{A}}_k \to \mathcal{O}_k$. Если его глобальное сечение s существует, интегрирование по $\mathcal{O}$ может быть заменено интегрированием по его образу $s(\mathcal{O}) \subset \overline{\mathbf{A}}$ с соответствующим весом, например, детерминантом Фаддеева—Попова. При этом глобальное сечение s можно интерпретировать как *глобальную калибровку*. Отсутствие глобального сечения расслоения $\overline{\mathbf{A}}_k \to \mathcal{O}_k$ приводит к так называемой неопределенности Грибова, которая имеет место в целом ряде калибровочных моделей, где главное расслоение $\overline{\mathbf{A}}_k \to \mathcal{O}_k$ нетривиально (см., например, [49, 84, 121, 141]).

§ 2. Связности на калибровочных полях

В дальнейшем мы будем предполагать, что все объекты, требующие пополнения Соболева, пополнены относительно соответствующих норм, опуская индекс k.

Пространство орбит $\mathcal{O}$ является гильбертовым многообразием, моделируемым над гильбертовым пространством, изоморфным ядру $\operatorname{Ker} * d_A *$ оператора $*d_A*$, действующего на пространство сечений $\overline{C}(X)$ векторного расслоения (5.1), для любого $A \in \overline{\mathbf{A}}$. Рассмотрим главное расслоение

$$\overline{\mathbf{A}} \to \mathcal{O} \tag{5.14}$$

со структурной группой $\overline{\mathcal{G}}$. Имеет место каноническое расщепление касательных пространств

$$\begin{gathered} T_A\overline{\mathbf{A}} = V_A\overline{\mathbf{A}} \oplus \operatorname{Ker} * d_A *, \\ \sigma = d_A G_A * d_A * \sigma + (\sigma - d_A G_A * d_A * \sigma), \end{gathered} \tag{5.15}$$

где, напомним, G_A — функция Грина (5.13). Это расщепление определяет каноническую связность $\bar{A}$ на главном расслоении (5.14).

Возьмем прямое произведение $P \times \overline{\mathrm{A}}$ главного расслоения P и пространства неприводимых связностей $\overline{\mathrm{A}}$. Это гильбертово многообразие, касательным пространством к которому в точке (p, A) является прямое произведение векторных пространств $T_pP \times \overline{C}(X)$. Нетрудно заметить, что определено естественное действие эффективной калибровочной группы Ли $\overline{\mathcal{G}}$ на $P \times \overline{\mathrm{A}}$, которое не имеет неподвижных точек. Поэтому каноническая проекция

$$P \times \overline{\mathrm{A}} \to \left(P \times \overline{\mathrm{A}}\right)/\overline{\mathcal{G}} = Q \tag{5.16}$$

представляет собой главное расслоение со структурной группой $\overline{\mathcal{G}}$. Поскольку действие структурной группы G главного расслоения P на $P \times \overline{\mathrm{A}}$ коммутирует с действием эффективной калибровочной группы Ли $\overline{\mathcal{G}}$, определено действие группы G на базе Q расслоения (5.16), и мы получаем главное расслоение со структурной группой G

$$Q \to Q/G = X \times \mathcal{O}, \tag{5.17}$$

называемое *универсальным расслоением* [26, 37, 142].

Расслоения (5.14), (5.16) и (5.17) приводят к коммутативной диаграмме расслоений

$$\begin{array}{ccc} P \times \overline{\mathrm{A}} & \longrightarrow & Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times \overline{\mathrm{A}} & \longrightarrow & X \times \mathcal{O} \end{array} \tag{5.18}$$

Левый морфизм в этой диаграмме

$$P \times \overline{\mathrm{A}} \to X \times \overline{\mathrm{A}} \tag{5.19}$$

является главным расслоением со структурной группой G. Оно наделено канонической связностью $\widehat{A}$, задаваемой расщеплением

$$\dot{x}^\mu \partial_\mu + \sigma + v^q e_q = \dot{x}^\mu \left(\partial_\mu + A^q_\mu(x) e_q\right) + \sigma + \left(v^q - \dot{x}^\mu A^q_\mu(x)\right) e_q \tag{5.20}$$

точной последовательности

$$0 \to V_G\left(P \times \overline{\mathrm{A}}\right) \hookrightarrow T_G\left(P \times \overline{\mathrm{A}}\right) \to \left(P \times \overline{\mathrm{A}}\right) \underset{X \times \overline{\mathrm{A}}}{\times} T\left(X \times \overline{\mathrm{A}}\right)$$

в точке $(x, A) \in X \times \overline{\mathrm{A}}$. Другая связность $\widehat{A}$ на главном расслоении (5.19) дается расщеплением

$$\dot{x}^\mu \partial_\mu + \sigma + v^q e_q =$$
$$= \dot{x}^\mu \left(\partial_\mu + A^q_\mu(x) e_q\right) + \left(\sigma - (*d_A * \sigma)(x)\right) + \left(v^q - \dot{x}^\mu A^q_\mu(x)\right) e_q + (*d_A * \sigma)(x). \tag{5.21}$$

Комбинация связности $\bar{A}$ на главном расслоении (5.14) и связности $\widehat{A}$ на главном расслоении (5.19) задает композиционную связность $\widehat{A} \circ (\mathrm{Id}\, X, \bar{A})$ на композиционном расслоении

$$P \times \overline{\mathrm{A}} \to X \times \overline{\mathrm{A}} \to X \times \mathcal{O}. \tag{5.22}$$

В частности, обе связности $\widehat{A}$ (5.20) и (5.21) на главном расслоении (5.19) определяют одну и ту же композиционную связность на композиционном расслоении (5.22).

Запишем связность $\widehat{A}$ на главном G-расслоении (5.19) как $T_G\left(P \times \overline{\mathrm{A}}\right)$-значную форму

$$\widehat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} + \mathbf{c}, \tag{5.23}$$

где A и c — $T_G(P\times\overline{\mathbf{A}})$-значные формы соответственно на многообразиях X и $\overline{\mathbf{A}}$. Назовем их для краткости $(1,0)$-, $(0,1)$-формами. Соответственно внешний дифференциал $\widehat{d}$ на произведении $X\times\overline{\mathbf{A}}$ расщепляется как

$$\widehat{d} = d + \delta, \tag{5.24}$$
$$\delta^2 = 0, \quad d\circ\delta + \delta\circ d = 0.$$

Тогда напряженность связности $\widehat{A}$ (5.23) (см. (5.12)) имеет вид

$$\widehat{F} = \frac{1}{2}d_{\widehat{A}}\widehat{A} = \widehat{F}_{(2,0)} + \widehat{F}_{(1,1)} + \widehat{F}_{(0,2)}, \tag{5.25}$$

где

$$\widehat{F}_{(2,0)} = \frac{1}{2}d_A A = F_A,$$
$$\widehat{F}_{(1,1)} = \frac{1}{2}(\delta_c A + d_A c),$$
$$\widehat{F}_{(0,2)} = \frac{1}{2}\delta_c c.$$

Приведем локальные выражения для компонент

$$\widehat{F}_{(1,1)} = \delta A + d_A c, \tag{5.26}$$
$$\widehat{F}_{(0,2)} = \delta c + \frac{1}{2}[c, c], \tag{5.27}$$

где A и c — локальные формы связности. Поскольку $\delta^2 = 0$, из равенств (5.26) и (5.27) следует, что

$$\delta\widehat{F}_{(1,1)} = -\left[c, \widehat{F}_{(1,1)}\right] - d_A\widehat{F}_{(0,2)}, \tag{5.28}$$
$$\delta\widehat{F}_{(0,2)} = -\left[c, \widehat{F}_{(0,2)}\right]. \tag{5.29}$$

Обозначим

$$\psi = \widehat{F}_{(1,1)}, \quad \phi = \widehat{F}_{(0,2)}.$$

Тогда соотношения (5.26)–(5.29) выглядят в точности как БРСТ-преобразования

$$\delta A = \psi - d_A c, \tag{5.30}$$
$$\delta c = \phi - \frac{1}{2}[c, c], \tag{5.31}$$
$$\delta\psi = -[c, \psi] - d_A\phi, \tag{5.32}$$
$$\delta\phi = -[c, \phi] \tag{5.33}$$

полей (A, c, ψ, ϕ) в геометрическом секторе топологической теории поля Доналдсона. Эти поля характеризуются значениями духового числа 0, 1, 1 и 2 соответственно, которые совпадают со значениями их степени как $(0,k)$-форм [37].

Если компоненты напряженности $\widehat{F}_{(1,1)}$ и $\widehat{F}_{(2,2)}$ обращаются в 0, уравнения (5.30)–(5.33) сводятся к

$$\delta A = -d_A c, \quad \delta c = -\frac{1}{2}[c, c]. \tag{5.34}$$

Эти уравнения выглядят как БРСТ-преобразования (4.81) в калибровочной модели Янга—Миллса (см. § 6.3). Если $\widehat{A}$ — каноническая связность, задаваемая расщеплением (5.20), где $c = 0$, тогда уравнения (5.30)–(5.33) принимают форму

$$\delta A = \psi, \quad \delta\psi = -d_A\phi, \quad \delta\phi = 0.$$

Они совпадают с БРСТ-преобразованиями, используемые Уиттеном [154].

Уравнения (5.30)–(5.33) предполагают, что

$$\widehat{d}\,\mathrm{Tr}\left(\widehat{F}\wedge\widehat{F}\right) = (d+\delta)\,\mathrm{Tr}\left(\overset{2}{\bigwedge}(F_A+\psi+\phi)\right) = 0 \tag{5.35}$$

как следствие тождества Бианки

$$\widehat{d}_{\widehat{A}}\widehat{F} = (d+\delta)(F_A+\psi+\phi) + [A+c, F_A+\psi+\phi] = 0. \tag{5.36}$$

С геометрической точки зрения уравнение (5.35) отражает тот факт, что калибровочно инвариантные полиномы являются замкнутыми формами (см. первый том [11], § 3.5, а также ниже § 6.1). Запишем

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\overset{2}{\bigwedge}(F_A+\psi+\phi)\right) = \sum_{i=0}^{4} w_i, \tag{5.37}$$

где w_i — внешние i-формы на многообразии X с духовыми числами $4-i$, задаваемые выражениями

$$\begin{aligned}
w_0 &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\phi\wedge\phi),\\
w_1 &= \mathrm{Tr}\,(\psi\wedge\phi),\\
w_2 &= \mathrm{Tr}\left(F_A\wedge\phi+\frac{1}{2}\psi\wedge\psi\right),\\
w_3 &= \mathrm{Tr}\,(F_A\wedge\psi),\\
w_4 &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(F_A\wedge F_A).
\end{aligned}$$

Тогда уравнение (5.35) может быть разложено в систему *уравнений спуска* для членов с определенным духовым числом и определенной степенью внешней формы на X:

$$dw_4 = 0, \tag{5.38а}$$

$$\delta w_k + dw_{k-1} = 0, \quad k = 1,2,3,4, \tag{5.38б}$$

$$\delta w_0 = 0. \tag{5.38в}$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям спуска (4.85а)–(4.85в), тогда как равенство (5.35) — это аналог равенства (4.86). Поэтому можно сказать, что формы w_k, $k = 1,2,3,4$, локально БРСТ-замкнуты.

Данному k-циклу γ в многообразии X можно сопоставить внешнюю $(4-k)$-форму

$$w_k(\gamma) = \int\limits_\gamma w_k, \quad k = 1,2,3,4, \tag{5.39}$$

на многообразии неприводимых связностей $\overline{\mathrm{A}}$. Эта форма не зависит от метрики на X и калибровочно инвариантна. Благодаря равенству (5.38б) она *БРСТ-замкнута*, т.е.

$$\delta w_k(\gamma) = -\int\limits_\gamma dw_{k-1} = -\int\limits_{\partial\gamma} w_{k-1} = 0$$

и, следовательно, играет роль наблюдаемой величины в топологической теории поля. Более того, поскольку гильбертово многообразие $\overline{\mathrm{A}}$ стягиваемо, формы $w_k(\gamma)$ являются *БРСТ-точными*. Имеет место локальная формула

$$\mathrm{Tr}\overset{2}{\bigwedge}\widehat{F} = \widehat{d}\,\mathrm{Tr}\left(\widehat{A}\wedge\widehat{F}-\frac{1}{3}\overset{3}{\bigwedge}\widehat{A}\right),$$

где $\widehat{A}$ — локальная форма связности. Отсюда следует, что формы $w_k(\gamma)$ являются гомологическими в том смысле, что они зависят только от гомологического класса k-цикла γ, поскольку

$$w_k(\partial\lambda) = \int\limits_\lambda dw_k = -\delta \int\limits_\lambda w_{k+1} = 0.$$

Пусть теперь дано семейство $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ k_i-циклов в пространстве неприводимых связностей $\overline{\mathbf{A}}$, и пусть M — компактное подмногообразие $\overline{\mathbf{A}}$ размерности

$$m = \sum_{i=1}^{r}(4 - k_i).$$

Тогда получаем инвариант

$$Z\colon H_{k_1}(X; \mathbb{Z}) \times \ldots \times H_{k_r}(X; \mathbb{Z}) \to \mathbb{R},$$
$$Z(\gamma_1, \ldots, \gamma_r) = \int\limits_M w_{k_1}(\gamma_1) \wedge \ldots \wedge w_{k_r}(\gamma_r).$$

Проблема заключается в том, что не существует конечномерного компактного подмногообразия $M \subset \overline{\mathbf{A}}$, представлявшего бы физический интерес. Поэтому вернемся к пространству орбит $\mathcal{O}$.

Поскольку связности (5.15) и (5.20) являются связностями на главных расслоениях, а группы G и $\overline{\mathcal{G}}$, действующие на $P \times \overline{\mathbf{A}}$, взаимно коммутируют, касательный морфизм

$$T(P \times \overline{\mathbf{A}}) \to TQ$$

к проекции (5.16) порождает расщепление касательного расслоения TQ, которое определяет связность $\widetilde{A}$ на универсальном расслоении $Q \to X \times \mathcal{O}$ (5.17). Эта связность характеризуется следующим свойством. Пусть

$$s\colon \mathcal{O} \supset \mathcal{U} \to \overline{\mathbf{A}}$$

— локальная калибровка. Тогда ограничение $i_{\mathcal{U}}^* Q$ расслоения Q на $\mathcal{U}$ изоморфно индуцированному расслоению $(\operatorname{Id} X, s)^*(P \times \overline{\mathbf{A}})$, а связность $\widetilde{A}$ локально совпадает с индуцированной связностью $(\operatorname{Id} X, s)^* \widehat{A}$.

Естественной калибровкой является задание фонового калибровочного поля A_0 и условия

$$d_{A_0} * (A - A_0) = 0. \tag{5.40}$$

Будем называть ее *фоновой калибровкой*. Эта калибровка вместе с условием

$$d_A * \psi = 0 \tag{5.41}$$

проектирует топологическую теорию поля с многообразия неприводимых связностей $\overline{\mathbf{A}}$ на пространство орбит $\mathcal{O}$. Внешний дифференциал δ уравнения (5.40) приводит к уравнению

$$d_{A_0} * (\psi - d_A c) = 0,$$

решением которого является связность

$$c = (*d_{A_0} * d_A)^{-1} d_{A_0} \psi.$$

Внешний дифференциал δ уравнения (5.41) дает уравнение

$$[\psi, *\psi] + d_A * d_A \phi = 0,$$

которое предполагает, что

$$\phi = -G_A[\psi, *\psi].$$

Это выражение выглядит как напряженность *связности Атьи—Зингера* на универсальном расслоении (5.17) [26].

В топологической теории поля также вводится условие

$$\Delta(A) = 0, \tag{5.42}$$

где Δ — некоторый калибровочно инвариантный дифференциальный оператор на A. Это условие выделяет *фазовое подпространство* $\mathcal{M} \subset \mathcal{O}$ пространства орбит $\mathcal{O}$. Пусть X — 4-мерное компактное многообразие. Приведем некоторые стандартные варианты выбора дифференциального оператора Δ:

$$\Delta(A) = F_A^+ = \frac{1}{2}(F_A - *F_A), \tag{5.43}$$

$$\Delta(A) = F_A, \tag{5.44}$$

$$\Delta(A) = d_A * F_A. \tag{5.45}$$

Соответствующие фазовые пространства — это фазовые пространства инстантонов, плоских связностей и решений уравнений Янга—Миллса.

§ 3. Инварианты Доналдсона

В этом параграфе X — это 4-мерное компактное ориентируемое гладкое, или топологическое, многообразие а $P \to X$ — главное расслоение со структурной группой $SU(2)$.

Замечание 5.3.1. Инварианты Доналдсона являются дифференциальными, а не топологическими инвариантами многообразия X [60]. Поэтому имеет смысл напомнить известные особенности 4-мерных многообразий [61, 72].

- Всякое топологическое многообразие размерности меньше четырех допускает единственную гладкую структуру.
- Для многообразий размерности больше четырех гомотопический тип и классы Понтрягина определяют гладкую структуру (если она существует) с точностью до конечного числа этих структур.
- Существуют гладкие 4-мерные многообразия со счетным семейством неэквивалентных гладких структур.
- Существует несчетное множество неэквивалентных гладких структур на $\mathbb{R}^4$, тогда как $\mathbb{R}^{n\neq 4}$ имеет единственную гладкую структуру.
- Существуют рациональные когомологические инварианты (примером которых служат приводимые ниже инварианты Доналдсона), которые различают неэквивалентные гладкие структуры, в отличие, например, от рациональных классов Понтрягина, которые представляют собой гомотопические инварианты.

Не существует алгоритма классификации гладких структур на 4-мерном топологическом многообразии из-за фундаментальной группы $\pi_1(X)$ [70]. Поэтому основное внимание обычно уделяют односвязным многообразиям, для которых $\pi_1(X) = 0$. Фундаментальным инвариантом односвязного 4-мерного топологического многообразия является ***форма пересечения*** ω_X. Это симметричная билинейная форма на группе когомологий $H^2(X; \mathbb{Z})$, определяемая как

$$\omega_X\colon H^2(X;\mathbb{Z}) \times H^2(X;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z},$$

$$\omega_X\colon ([a],[b]) \mapsto ([a] \smile [b])[X], \tag{5.46}$$

где $[a] \smile [b]$ — это так называемое $\smile$-произведение, а $([a] \smile [b])[X]$ — это его значение на *фундаментальном цикле* в ориентируемом многообразии X, являющемся порождающим элементом группы сингулярных гомологий

$$H_4(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

Если X — гладкое многообразие, $\smile$-произведение — это обычное внешнее произведение форм, а форма пересечения (5.46) имеет вид

$$\omega_X([a],[b]) = \int\limits_X a \wedge b.$$

Форма пересечения (5.46) невырождена и унимодулярна. Она характеризуется рангом $\dim H^2(X;\mathbb{Z})$, который совпадает со вторым *числом Бетти* $b_2(X)$ многообразия X, и индексом

$$\tau(\omega_X) = b_2^+ - b_2^-,$$

который равен разности числа положительных и числа отрицательных собственных значений формы ω_X. Он называется *индексом многообразия* [14]. Форма пересечения ω_X называется *четной*, если все ее диагональные элементы $\omega_X([a],[a])$ четные. Если X — гладкое многообразие, известная *теорема об индексе* Хирцебруха [14] выражает индекс многообразия $\tau(\omega_X)$ через классы Понтрягина:

$$\tau(\omega_X) = \frac{1}{3}p_1(X)$$

(см. Приложение Б).

Форма пересечения является топологическим, а не только гомотопическим инвариантом. А именно, класс гомеоморфных топологических многообразий X однозначно определяется формой пересечения ω_X, если она четна, и существует в точности два различных класса гомеоморфных топологических многообразий с данной нечетной формой пересечения ω_X [71]. В частности, существуют формы пересечения 4-мерного топологического многообразия, которые не являются формами пересечения гладкого многообразия. Согласно известной *теореме Доналдсона* [59], если форма пересечения ω_X гладкого компактного (но необязательно односвязного) многообразия X отрицательно определена, тогда

$$\omega_X \simeq (-1) \oplus \ldots \oplus (-1).$$

□

Вернемся к инвариантам Доналдсона. Главным элементом их конструкции является морфизм

$$\mu\colon H_i(X;\mathbb{Z}) \to H^{4-i}(\mathcal{O}). \tag{5.47}$$

Он может быть описан следующим образом. Рассмотрим универсальное расслоение $\mathcal{Q} \to X \times \mathcal{O}$ (5.17). Пусть E — ассоциированное с ним комплексное векторное расслоение со структурной группой $SU(2)$ и $c_2(E) \in H^4(\mathcal{O})$ — его второй класс Чженя. Напомним *формулу Кюннета*

$$H^m(X \times X') = \sum_{k+l=m} H^k(X) \otimes H^l(X')$$

для групп когомологий Де Рама произведения многообразий. В соответствии с этой формулой класс Чженя $c_2(E)$ раскладывается на составляющие

$$c_{i,4-i} \in H^i(X) \otimes H^{4-i}(\mathcal{O}), \qquad i = 0, \ldots, 4.$$

Эти составляющие определяют морфизм (5.47) как композицию гомоморфизма групп сингулярных гомологий

$$H_k(X;\mathbb{Z}) \to H_k(X;\mathbb{R})$$

и билинейной формы двойственности де Рама

$$H^p(X)\otimes H_p(X;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

(см. первый том [11], § 3.3). Пусть $\widetilde{A}$ — связность на универсальном расслоении (5.17), $\widetilde{F}$ — ее напряженность и $c_2(\widetilde{F})$ — вторая форма Чженя (см. выражение (3.48) в первом томе [11]). Вышеупомянутые составляющие $c_{i,4-i}$ класса Чженя $c_2(E)$ — это когомологии Де Рама $(i,4-i)$-форм $\widetilde{w}_i$ на произведении $X\times\mathcal{O}$, которые образуют разложение формы Чженя $c_2(\widetilde{F})$, аналогичное разложению (5.37). Тогда морфизм (5.47) задается интегрированием

$$\widetilde{w}_i(\gamma)=\int\limits_\gamma \widetilde{w}_i,$$

где γ — i-циклы в X.

Отметим, что рациональные когомологии пространства орбит $\mathcal{O}$ имеют четные когомологические размерности и порождаются когомологическими классами размерностей 2 и 4. Поэтому мы ограничим в дальнейшем наше рассмотрение морфизмом (5.47), где $i=0,2$, и расширим его до морфизма

$$\mu\colon \overset{m}{\times} H_2(X;\mathbb{Z}) \to H^{2m}(\mathcal{O};\mathbb{Q}),$$

используя $\smile$-произведение в $H^{2m}(\mathcal{O};\mathbb{Q})$. Этот морфизм задает вложение

$$q(|\gamma_1|,\ldots,|\gamma_m|) \mapsto \mu(|\gamma_1|)\cup\ldots\cup\mu(|\gamma_m|) \tag{5.48}$$

полиномиальной алгебры на $H_2(X;\mathbb{Z})$ в рациональные когомологии $H^{\mathrm{even}}(\mathcal{O};\mathbb{Q})$ пространства орбит.

Пусть $\mathcal{M}$ — фазовое пространство неприводимых инстантонов с инстантонным числом

$$k=\int\limits_X c_2(F_A).$$

Его формальная размерность равна

$$\dim\mathcal{M}=8k-3(1+b_2^+).$$

Нетрудно видеть, что $\dim\mathcal{M}$ является четной тогда и только тогда, когда b_2^+ нечетно. Записывая $b_2^+=2p+1$, получаем

$$\dim\mathcal{M}=2m,\qquad m=4k-3(1+p).$$

Полиномы (5.48), взятые на гомологическом цикле $|\mathcal{M}|\in H_*(\mathcal{O},\mathbb{Q})$ в пространстве орбит $\mathcal{O}$, называются *полиномами Доналдсона*. Они выражаются через напряженность $\widetilde{F}$ связности $\widetilde{A}$ на пространстве орбит $\mathcal{O}$. Рассматривая связность $\widetilde{A}$ локально как индуцированную связностью на $\overline{\mathrm{A}}$ и используя соотношения (5.40) и (5.41), мы приходим к *инвариантам Доналдсона* в топологической теории поля, хотя получить их в явном виде весьма затруднительно.

Глава 6

Аномалии

Проблема аномалий заключается в нарушении законов сохранения для квантованных полей и в калибровочной неинвариантности эффективного функционала действия и меры при квантовании методом функционального интегрирования (см., например, [36] в качестве подробного обзора). Здесь мы коснемся только геометрической природы аномалий, основываясь на геометрии и топологии пространства калибровочных полей.

§ 1. Калибровочные аномалии

Этот параграф посвящен аномалиям, связанным с калибровочной неинвариантностью форм Чженя—Саймонса.

Пусть $P \to X$ — главное $GL(N, \mathbb{C})$-расслоение. Характеристические формы в первом томе [11], § 3.5, служат примером *калибровочно инвариантных полиномов* $\mathcal{P}(F)$ от напряженности F связности на главном расслоении $P \to X$ (см. формулу (1.93) в первом томе [11]), т. е.

$$\mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(g(F)), \quad g \in \mathcal{G},$$

где $\mathcal{G}$ — калибровочная группа вертикальных автоморфизмов P. Калибровочно инвариантные полиномы представляют собой комплексные внешние формы четной степени на многообразии X. Они обладают следуюшими, уже упоминавшимися в первом томе, свойствами:

- $\mathcal{P}(F)$ — замкнутая форма;
- $\mathcal{P}(F) - \mathcal{P}(F')$ — точная форма, где F и F' — напряженности двух различных связностей на главном расслоении $P \to X$.

Можно, однако, сказать и больше. Любой калибровочно инвариантный полином является суммой произведений калибровочно инвариантных полиномов $\mathcal{P}_m(F)$ определенной степени m по напряженности F. Тогда имеет место следующая *формула трансгрессии* [19, 36, 67]:

$$\mathcal{P}_m(F) - \mathcal{P}_m(F') = dQ_{2m-1}(A, A'), \tag{6.1}$$

$$Q_{2m-1}(A, A') = m \int_0^1 dt P(A - A', F_t), \tag{6.2}$$

где A и A' — две связности на главном расслоении $P \to X$ и F_t — напряженность *гомотопической связности*

$$A_t = A' + t(A - A'), \quad t \in [0, 1]. \tag{6.3}$$

В частности, пусть $A' = 0$ на области тривиализации расслоения $P \to X$, т. е., будучи записанной как $T_G P$-значная форма, она имеет вид

$$A' = \theta_X = dx^\lambda \otimes \partial_\lambda.$$

Тогда получаем *локальную формулу трансгрессии*

$$\mathcal{P}_m(F) = dQ_{2m-1}(A, F) \tag{6.4}$$

вместе с *формами Чженя—Саймонса*

$$Q_{2m-1}(A, F) = m \int_0^1 dt\, P(A, F_t), \tag{6.5}$$

где A — локальная форма связности (5.10) и

$$A_t = tA, \quad F_t = tF + \left(t^2 - t\right)A^2.$$

Для упрощения записи мы в дальнейшем будем опускать символ $\wedge$ внешнего произведения.

Пример 6.1.1. Если

$$\mathcal{P}(F) = c_2(F)$$

— вторая форма Чженя для главного $SU(N)$-расслоения (см. формулу (3.48) в первом томе [11]), находим

$$\mathrm{Tr}\,(F^2) = \frac{1}{8\pi^2}dQ_3, \qquad Q_3 = \mathrm{Tr}\left(AF - \frac{1}{3}A^3\right) = \mathrm{Tr}\left(A\,dA + \frac{2}{3}A^3\right). \tag{6.6}$$

□

Получим теперь формулу трансгрессии (6.1) в терминах гомотопических производных [19, 36, 111]. Для данной гомотопической связности A_t (6.3) и ее напряженности F_t *гомотопической производной* называется оператор

$$\begin{aligned} l_t A_t &= 0, \\ l_t F_t &= d_t A_t = dt\left(A - A'\right), \end{aligned} \tag{6.7}$$

который действует на полиномы $S(A_t, F_t)$ от связности A_t и напряженности F_t и который обладает свойством антидифференцирования

$$l_t\left(SS'\right) = l_t(S)S' + (-1)^{|S|}Sl_t\left(S'\right).$$

Прямыми вычислениями можно проверить, что

$$l_t \circ d + d \circ l_t = d_t = dt \otimes \partial_t. \tag{6.8}$$

Замечание 6.1.2. Следует подчеркнуть, что полиномы $S(A_t, F_t)$, вообще говоря, не являются глобально определенными, если только это не калибровочно инвариантные полиномы. Поэтому под аргументом A_t этих полиномов подразумевается локальная форма связности (5.10). □

Введем оператор

$$\mathbf{k} = \int_0^1 l_t. \tag{6.9}$$

Он называется *гомотопическим оператором*. Имеет место *гомотопическая формула Картана*

$$S(A, F) - S\left(A', F'\right) = (\mathbf{k} \circ d + d \circ \mathbf{k})S(A_t, F_t). \tag{6.10}$$

Будучи примененным к калибровочно инвариантным полиномам $\mathcal{P}_m(F)$, гомотопический оператор (6.9) принимает вид

$$\mathbf{k}\mathcal{P}_m(F_t) = Q_{2m-1}\left(A, A'\right),$$

где полином $P(A-A',F_t)$ в выражении (6.2) для форм $Q_{2m-1}(A,A')$ определяется как

$$mP(A-A',F_t) =$$
$$= \mathcal{P}_m(A-A',F_t,\dots,F_t) + \mathcal{P}_m(F_t,A-A',\dots,F_t) + \dots + \mathcal{P}_m(F_t,\dots,A-A'). \quad (6.11)$$

Поскольку калибровочно инвариантные полиномы — замкнутые формы, гомотопическая формула Картана (6.10) приводит к формуле трансгрессии (6.1). Полагая локально $A'=0$, мы получаем форму Чженя—Саймонса (6.5) в виде

$$Q_{2m-1}(A,F) = \mathbf{k}\mathcal{P}_m(F_t). \quad (6.12)$$

Рассмотрим калибровочные преобразования формы Чженя—Саймонса (6.12). Напомним, что в случае матричной структурной группы $G \subset GL(N,\mathbb{C})$ главного расслоения $P \to X$ калибровочные преобразования локальной формы связности A и напряженности F имеют вид

$$A^g = g^{-1}Ag + g^{-1}dg = g^{-1}(A+\sigma^g)g, \quad (6.13)$$
$$F^g = g^{-1}Fg.$$

Возьмем гомотопическую связность $A_t = tA$, $t \in [0,1]$. Тогда калибровочно преобразованная гомотопическая связность и ее напряженность

$$A_t^g = (A_t)^g,$$
$$F_t^g = (F_t)^g$$

являются гомотопиями, связывающими непрерывным образом калибровочные поля

$$A_{t=0}^g = g^{-1}dg = g^{-1}\sigma^g g,$$
$$F_{t=0}^g = 0$$

и

$$A_{t=1}^g = A^g,$$
$$F_{t=1}^g = F^g.$$

Рассмотрим формы Чженя—Саймонса $Q_{2m-1}(A_t^g,F_t^g)$ от этих гомотопий. Примененная к ним гомотопическая формула Картана (6.10) принимает вид

$$Q_{2m-1}(A^g,F^g) - Q_{2m-1}(g^{-1}dg) = (\mathbf{k}\circ d + d\circ\mathbf{k})Q_{2m-1}(A_t^g,F_t^g). \quad (6.14)$$

Калибровочно преобразованная форма Чженя—Саймонса $Q_{2m-1}(A^g,F^g)$ дается выражением

$$Q_{2m-1}(A^g,F^g) = m\int_0^1 dtP(A^g,\widehat{F}_t^g),$$

где

$$\widehat{F}_t^g = (F^g)_t = g^{-1}\widehat{F}_t g, \quad \widehat{F}_t = tF + (t^2-t)(A+\sigma^g)^2.$$

Поскольку полином $P(A^g,\widehat{F}_t^g)$ выражается через калибровочно инвариантные полиномы $\mathcal{P}_m$, согласно формуле (6.11) получаем

$$P(A^g,\widehat{F}_t^g) = P(A,\widehat{F}_t).$$

Отсюда следует, что

$$Q_{2m-1}(A^g,F^g) = Q_{2m-1}(A+\sigma^g,F) \quad (6.15)$$

и аналогично

$$Q_{2m-1}(A_t^g, F_t^g) = Q_{2m-1}(A_t + \sigma^g, F_t). \tag{6.16}$$

С другой стороны, соотношения (6.4) и (6.12) дают

$$\mathbf{k} \circ dQ_{2m-1}(A_t^g, F_t^g) = \mathbf{k}\mathcal{P}_m(F_t) = Q_{2m-1}(A, F).$$

Если обозначить

$$\alpha_{2m-2} = \mathbf{k}Q_{2m-1}(A_t^g, F_t^g) = \mathbf{k}Q_{2m-1}(A_t + \sigma^g, F_t),$$

гомотопическая формула Картана (6.14) принимает вид

$$Q_{2m-1}(A^g, F^g) = Q_{2m-1}(A, F) + Q_{2m-1}(g^{-1}dg, 0) + d\alpha_{2m-2}, \tag{6.17}$$

или с учетом равенства (6.15)

$$Q_{2m-1}(A + \sigma^g, F) = Q_{2m-1}(A, F) + Q_{2m-1}(\sigma^g, 0) + d\alpha_{2m-2}. \tag{6.18}$$

Например, пусть Q_3 — форма Чженя—Саймонса (6.6) в Примере 6.1.1. Для $m = 2$ находим

$$\alpha_2 = \mathbf{k}Q_3(A_t + \sigma^g, F_t) = \int_0^1 l_t \operatorname{Tr}\left[(A_t + \sigma^g)F_t - \frac{1}{3}(A_t + \sigma^g)^3\right] =$$

$$= \int_0^1 dt \operatorname{Tr}\left[-tA^2 - \sigma^g A\right] = -\operatorname{Tr}\left[\sigma^g A\right],$$

поскольку $\operatorname{Tr} A^2 = 0$. Тогда, сохраняя только линейные по σ^g члены, получаем

$$d\alpha_2 = \operatorname{Tr}\left[\sigma^g dA\right]. \tag{6.19}$$

Это уравнение представляет собой известную неабелеву *аномалию* в размерности 2 с точностью до нормировки [36].

Аномалия (6.19) характеризует неинвариантность формы Чженя—Саймонса (6.6) при инфинитезимальных калибровочных преобразованиях. Поэтому она может быть подсчитана также следующим образом. Представим форму Чженя—Саймонса Q_3 как V_GP-значную форму на многообразии струй первого порядка J^1C расслоения связностей C (4.56). Она имеет вид

$$Q_3 = a^G_{pr} a^p_\alpha \left(\mathcal{F}^r_{\lambda\mu} - \frac{1}{3} c^r_{lq} a^l_\lambda a^q_\mu\right) dx^\alpha \wedge dx^\lambda \wedge dx^\mu, \tag{6.20}$$

где

$$a^G_{pr} = \operatorname{Tr}(e_p e_r)$$

— инвариантная метрика на алгебре Ли $su(N)$. Пусть ξ_C — векторное поле (4.57) на расслоении связностей C. Оно представляет собой генератор 1-параметрической группы калибровочных преобразований расслоения C. Запишем производную Ли

$$\mathbf{L}_{J^1\xi_C} Q_3 = \operatorname{Tr}(d\xi \wedge d_H a), \quad \xi = \xi^p \varepsilon_p, \quad a = a^r_\mu dx^\mu \otimes \varepsilon_r.$$

Нетрудно видеть, что если $\sigma^g = d\xi$, тогда

$$d\alpha_2 = A^*(\mathbf{L}_{J^1\xi_C} Q_3)$$

для любого сечения A расслоения $C \to X$.

Замечание 6.1.3. Если $\dim X = 3$, форма Чженя—Саймонса Q_3 (6.20) играет роль лагранжиана модели Чженя—Саймонса топологической теории поля. Будучи калибровочно неинвариантным, этот лагранжиан не является глобально определенным. Поскольку

$$\mathbf{L}_{J^1\xi_G} Q_3 \neq 0,$$

ни нетеровский ток (см. формулу (А.24) в первом томе [11]), ни тензор энергии-импульса (см. там же формулу (А.36)) не сохраняются в модели Чженя—Саймонса [78]. □

§ 2. Глобальные аномалии

В сравнении с калибровочными аномалиями в предыдущем параграфе, глобальные аномалии связаны с калибровочными преобразованиями, которые не принадлежат связной компоненте единицы калибровочной группы.

Мы начнем с понятия когомологий групп (см. детальное изложение в [8]). Пусть G — мультипликативная группа, B — правый G-модуль и B^p, $p = 1, \ldots,$ — абелева группа морфизмов

$$B^p \ni b^p\colon \overset{p}{\times} G \to B. \tag{6.21}$$

Можно ввести оператор взятия кограницы

$$\begin{gathered} \delta^p\colon B^p \to B^{p+1}, \\ (\delta^p b^p)(g_1, \ldots, g_{p+1}) = \\ = b^p(g_2, \ldots, g_{p+1})g_1 + \sum_{i=1}^{p}(-1)^i b^p(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots g_{p+1}) + (-1)^{p+1} b^p(g_1, \ldots, g_p). \end{gathered} \tag{6.22}$$

Такие операторы образуют коцепной комплекс

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\delta^0} B^1 \xrightarrow{\delta^1} B^2 \longrightarrow \ldots. \tag{6.23}$$

Под B в (6.23) понимается группа постоянных морфизмов

$$B \ni b\colon G \to b$$

и

$$(\delta^0 b)(g) = bg - b.$$

Отсюда следует, что 0-коциклами в B являются G-инвариантные элементы B. Обозначим множество таких элементов как B^G. Когомологии $H^*(G; B)$ комплекса (6.23) называются *когомологиями группы* G с коэффициентами в модуле B. Например,

$$H^0(G; B) = B^G.$$

Заметим, что абелева группа B^p p-коцепей (6.21) является правым G-модулем относительно действия группы G по закону

$$g\colon b^p(g_1, \ldots, g_p) \mapsto b^p(g^{-1}g_1 g, \ldots, g^{-1}g_p g).$$

Это действие тривиально на $H^*(G; B)$.

Пусть H — нормальная подгруппа группы G. Имеет место точная последовательность групп когомологий

$$0 \longrightarrow H^1(G/H; B^H) \xrightarrow{j} H^1(G; B) \xrightarrow{i} H^1(H; B)^G \longrightarrow H^2(G/H; B^H) \xrightarrow{j} H^2(G; B). \tag{6.24}$$

Стрелки j в этой точной последовательности являются композицией естественной проекции $G \to G/H$ с коциклами группы G/H, тогда как стрелка i в (6.24) — это ограничение коциклов группы G на подгруппу H [48].

Если G/H — конечная группа порядка r, существуют гомоморфизмы

$$\varrho^*\colon H^*(H;B) \to H^*(G;B). \tag{6.25}$$

Например, гомоморфизм $\varrho^0\colon B^H \to B^G$ имеет вид

$$\varrho^0 b = \sum_{c\in G/H} b\bar{c},$$

где $\bar{c}$ — представитель класса сопряженности $c \in G/H$ такой, что $\bar{c} = e \in G$, если $c = e \in G/H$, где e обозначает единичные элементы групп. Мы также получаем

$$\left(\varrho^1 b^1\right)(g) = \sum_{c\in G/H} b^1\left(\bar{c}g\overline{cg}^{-1}\right)\bar{c}.$$

Напомним, что $\bar{c}g\overline{cg}^{-1} \in H$ для любого элемента $g \in G$. Важным свойством гомоморфизмов (6.25) является то, что как $i \circ \varrho$, так и $\varrho \circ i$ представляют собой умножения на целое число r. Отсюда следует, что $ra = 0$ для любого $a \in H^{k>0}\left(G/H; B^H\right)$, т. е. группы когомологий $H^{k>0}\left(G/H; B^H\right)$ состоят из циклических элементов.

Обратимся теперь к аномалиям в квантовой теории поля. Пусть $P \to X$ — главное $SU(N)$-расслоение над ориентируемым компактным римановым многообразием X, $\mathcal{G}$ — калибровочная группа Ли и $\mathbf{A}$ — пространство связностей на $P \to X$. Как и в предыдущей главе, мы будем полагать, что все пространства, требующие пополнения Соболева, пополнены соответствующим образом. Тогда эффективный функционал действия квантовой теории поля можно рассматривать как комплексную функцию $S(A)$ на пространстве калибровочных полей $\mathbf{A}$, где для простоты мы опускаем его зависимость от других полей. Если функционал $S(A)$ не является калибровочно инвариантным, мы получаем

$$S\left(A^g\right) = iW^1(A,g) + S(A), \quad g \in \mathcal{G}, \tag{6.26}$$

$$W^1\left(A^g, g'\right) - W^1\left(A, g'g\right) + W^1(A,g) = 0, \tag{6.27}$$

(см. обозначения (6.13)).

Замечание 6.2.1. Стандартным примером калибровочно неинвариантного эффективного действия служит

$$\operatorname{Tr}\ln\widehat{\mathcal{D}}_+ = \ln\det\widehat{\mathcal{D}}_+ = \ln\det\mathcal{D}_+,$$

где $\mathcal{D}_+$ — оператор Вейля и

$$\widehat{\mathcal{D}}_+ = i\gamma^\mu\left[\partial_\mu + \frac{1}{2}A_\mu(1+\gamma_5)\right] \tag{6.28}$$

— *киральный оператор Дирака*, пертурбативно эквивалентный $\mathcal{D}_+$. □

Легко заметить, что выражение (6.27) в точности является условием коцикла

$$\delta^1 W^1 = 0$$

для когомологий калибровочной группы $\mathcal{G}$ с коэффициентами в модуле $\mathbb{C}(\mathbf{A})$ комплексных функций на пространстве калибровочных полей $\mathbf{A}$. Калибровочная группа Ли $\mathcal{G}$ действует на эти функции по закону

$$\left(W^0 g\right)(A) = W^0\left(A^g\right).$$

Таким образом, величину $W^1(A,g)$ в (6.26) можно интерпретировать как 1-коцикл

$$W^1\colon \mathcal{G} \ni g \mapsto W^1(A,g) \in C^*(\mathbf{A})$$

в вышеуказанных когомологиях. Если этот коцикл является кограницей

$$W^1(A,g) = W^0(A^g) - W^0(A),$$

тогда к эффективному действию $S(A)$ всегда можно добавить контрчлен $-W^0(A)$ так, что перенормированное эффективное действие $S(A) - W^0(A)$ становится калибровочно инвариантным. Отсюда следует, что аномалии функционала действия в пертурбативной квантовой теории поля характеризуются элементами группы когомологий $H^1(\mathcal{G}; \mathbb{C}(\mathbf{A}))$, называемой *группой аномалий*. Если калибровочная группа Ли $\mathcal{G}$ не является связной и $\mathcal{G}_e$ — компонента связности ее единицы e, можно исследовать *глобальные аномалии*, т. е. тривиальные $\mathcal{G}_e$-коциклы, которые имеют расширения до нетривиальных $\mathcal{G}$-коциклов [48, 141]. Нетривиальные и $\mathcal{G}$-инвариантные $\mathcal{G}_e$-коциклы характеризуют *локальные аномалии*.

Как уже говорилось, действие калибровочной группы Ли $\mathcal{G}$ на пространстве калибровочных полей $\mathcal{A}$ не является свободным. Поэтому обычно берут или эффективную калибровочную группу Ли $\overline{\mathcal{G}}$, действующую на пространстве неприводимых связностей $\overline{\mathbf{A}}$, или отмеченную калибровочную группу Ли $\mathcal{G}^0$, действующую на пространстве калибровочных полей $\mathbf{A}$. Мы остановимся здесь на первом варианте.

Имеет место композиционное расслоение

$$\overline{\mathbf{A}} \to \overline{\mathbf{A}}/\overline{\mathcal{G}}_e = \overline{\mathbf{A}}_e \to \overline{\mathbf{A}}_e/\pi_0(\overline{\mathcal{G}}) = \mathcal{O}, \tag{6.29}$$

где

$$\pi_0(\overline{\mathcal{G}}) = \overline{\mathcal{G}}/\overline{\mathcal{G}}_e.$$

Применяя точную последовательность (6.24) к случаю

$$G = \overline{\mathcal{G}}, \quad H = \overline{\mathcal{G}}_e, \quad B = \mathbb{C}(\overline{\mathbf{A}})$$

и принимая во внимание, что

$$\mathbb{C}(\overline{\mathbf{A}})^{\overline{\mathcal{G}}_e} = \mathbb{C}(\overline{\mathbf{A}}_e),$$

мы получаем *точную последовательность аномалий*

$$0 \longrightarrow H^1(\pi_0(\overline{\mathcal{G}}); \mathbb{C}(\overline{\mathbf{A}}_e)) \xrightarrow{j} H^1(\overline{\mathcal{G}}; \mathbb{C}(\overline{\mathbf{A}})) \xrightarrow{i} H^1(\overline{\mathcal{G}}_e; \mathbb{C}(\overline{\mathbf{A}}))^{\overline{\mathcal{G}}} \longrightarrow H^2(\pi_0(\overline{\mathcal{G}}); \mathbb{C}(\overline{\mathbf{A}}_e)). \tag{6.30}$$

Элементы группы когомологий $H^1(\pi_0(\overline{\mathcal{G}}); \mathbb{C}(\overline{\mathbf{A}}_e))$ в этой точной последовательности характеризуют глобальные аномалии, тогда как элементы $H^1(\overline{\mathcal{G}}_e; \mathbb{C}(\overline{\mathbf{A}}))^{\overline{\mathcal{G}}}$ соответствуют локальным аномалиям. Стрелка j в точной последовательности аномалий (6.30) является мономорфизмом. Если группа когомологий $H^2(\pi_0(\overline{\mathcal{G}}); \mathbb{C}(\overline{\mathbf{A}}_e))$ тривиальна, стрелка i в (6.30) является эпиморфизмом. В этом случае группа аномалий $H^1(\overline{\mathcal{G}}; \mathbb{C}(\overline{\mathbf{A}}))$ представляет собой прямое произведение групп глобальных и локальных аномалий. Если гомотопическое множество $\pi_0(\overline{\mathcal{G}})$ конечно, только циклические элементы в группе аномалий могут быть глобальными аномалиями.

Чтобы сказать больше, заметим, что группу когомологий $H^1(\overline{\mathcal{G}}; \mathbb{C}(\overline{\mathbf{A}}))$ можно представить как группу классов $\overline{\mathcal{G}}$-изоморфных тривиальных комплексных линейных расслоений $L(\overline{\mathbf{A}})$ над $\overline{\mathbf{A}}$, называемых *линейными расслоениями детерминантов* кирального оператора Дирака (6.28). Эта геометрическая интерпретация группы когомологий $H^1(\overline{\mathcal{G}}; \mathbb{C}(\overline{\mathbf{A}}))$ в применении к расслоению $\overline{\mathbf{A}} \to \mathcal{O}$ приводит к точной последовательности групп когомологий [48]

$$0 \to H^1(\overline{\mathcal{G}}; \mathbb{C}(\overline{\mathbf{A}})) \to H^2(\mathcal{O}; \mathbb{Z}) \to H^2(\overline{\mathbf{A}}; \mathbb{Z}). \tag{6.31}$$

Вторая стрелка в этой точной последовательности является мономорфизмом группы когомологий $H^1(\bar{\mathcal{G}}; \mathbb{C}(\overline{\mathbf{A}}))$ в группу классов эквивалентности комплексных линейных расслоений над пространством орбит $\mathcal{O}$ путем отождествления элементов (A, c) и $(A^g, c + iW^1(A, g))$ для всех $g \in \bar{\mathcal{G}}$. Последняя стрелка в точной последовательности (6.31) сопоставляет каждому комплексному линейному расслоению над $\mathcal{O}$ индуцированное им расслоение над $\overline{\mathbf{A}}$. Поскольку $\overline{\mathbf{A}}$ — аффинное пространство, когомологии $\overline{\mathbf{A}}$ тривиальны и мы получаем равенство

$$H^1(\bar{\mathcal{G}}; \mathbb{C}(\overline{\mathbf{A}})) = H^2(\mathcal{O}; \mathbb{Z}).$$

Аналогично точной последовательности (6.31) можно построить точные последовательности когомологических групп, отвечающие расслоениям $\overline{\mathbf{A}} \to \overline{\mathbf{A}}_e$ и $\overline{\mathbf{A}}_e \to \mathcal{O}$ в композиционном расслоении (6.29). Они имеют вид

$$0 \longrightarrow H^1(\bar{\mathcal{G}}_e; \mathbb{C}(\overline{\mathbf{A}})) \longrightarrow H^2(\overline{\mathbf{A}}_e; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\overline{\mathbf{A}}; \mathbb{Z}), \tag{6.32}$$

$$0 \longrightarrow H^1(\pi_0(\bar{\mathcal{G}}); \mathbb{C}(\overline{\mathbf{A}}_e)) \longrightarrow H^2(\mathcal{O}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\overline{\mathbf{A}}_e; \mathbb{Z}). \tag{6.33}$$

Можно также использовать точную последовательность когомологий низких размерностей расслоения $\overline{\mathbf{A}} \to \overline{\mathbf{A}}_e$. Так как группа $\mathcal{G}_e$ по определению связна, спектральная последовательность Лере [3] дает точную последовательность групп когомологий

$$0 \longrightarrow H^1(\overline{\mathbf{A}}_e; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(\overline{\mathbf{A}}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(\mathcal{G}_e; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\overline{\mathbf{A}}_e; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\overline{\mathbf{A}}; \mathbb{Z}). \tag{6.34}$$

Поскольку $H^2(\overline{\mathbf{A}}; \mathbb{Z}) = 0$, точные последовательности (6.32) и (6.34) приводят к равенствам групп когомологий

$$H^1(\mathcal{G}_e; \mathbb{C}(\overline{\mathbf{A}})) = H^1(\mathcal{G}_e; \mathbb{Z}) = H^2(\overline{\mathbf{A}}_e; \mathbb{Z}).$$

В частности, линейное расслоение детерминантов тривиально и локальные аномалии отсутствуют, если соответствующее комплексное линейное расслоение над $\overline{\mathbf{A}}_e$ характеризуется нулевым классом Чженя. Этот класс Чженя вычисляется в соответствии с известной теоремой об индексе (см. Приложение Б). Мы сошлемся еще на работу [48], в которой дан детальный анализ случая $G = SU(2)$.

§ 3. БРСТ-аномалии

В § 6.1 мы рассматривали аномалии, вызванные калибровочной неинвариантностью формы Чженя—Саймонса. Этот параграф посвящен аномалиям, связанным с БРСТ-неинвариантностью этой формы (см., например, [36]). Мы следуем геометрической интерпретации духов Фаддеева—Попова как локальных $(0, 1)$-форм связности c, отвечающих связности $\widehat{A}$ на главном расслоении (5.19) над $X \times \overline{\mathbf{A}}$.

Пусть $P \to X$ — главное $SU(N)$-расслоение над ориентируемым компактным римановым многообразием X и $\overline{\mathbf{A}}$ — пространство неприводимых связностей на $P \to X$. Рассмотрим главное $SU(N)$-расслоение (5.19) над $X \times \overline{\mathbf{A}}$ и связность $\widehat{A} = A + c$ (5.23) на этом главном расслоении, где $A(x)$ — локальная $(1, 0)$-форма связности и c — локальная $(0, 1)$-форма связности в точке (x, A) (см. § 5.2). Предположим, что компоненты $\widehat{F}_{1,1}$ и $\widehat{F}_{0,2}$ напряженности $\widehat{F}$ (5.25) этой связности обращаются в 0, т. е.

$$\widehat{F} = (d + \delta)(A + c) + (A + c)^2 = F_A. \tag{6.35}$$

Тогда мы имеем соотношения (5.34):

$$\delta A = -d_A c, \quad \delta c = -c^2. \tag{6.36}$$

Как уже отмечалось, эти соотношения могут интерпретироваться как геометрическая модель БРСТ-преобразований калибровочной теории, когда оператор δ играет роль БРСТ-оператора $\mathbf{s}$ (4.81), ассоциированного с духовым полем c, а внешний дифференциал $\widehat{d}$ (5.24) отождествляется с полным БРСТ-оператором $\widetilde{s}$ (4.83). БРСТ-оператор δ действует на внешние формы ϕ на $X \times \bar{\mathrm{A}}$, $(0,1)$-степень которых соответствует духовому числу. Однако внешнее произведение этих форм, в отличие от внешнего произведения (4.82), подчиняется условию

$$\phi \wedge \phi' = (-1)^{(|\phi|+|\phi|)(|\phi'|+|\phi'|)} \phi' \wedge \phi,$$

и δ является дифференцированием форм ϕ аналогично БРСТ-оператору (4.79), а не антидифференцированием, как БРСТ-оператор (4.77). В БРСТ-теории равенство (6.35), будучи полученным из соотношений (6.36), называется *русской формулой* [111]. Подставляя равенство (6.35) в тождество Бианки (5.36), мы также получаем

$$\delta F_A = [F_A, c]. \tag{6.37}$$

Как и в § 6.1, пусть $\mathcal{P}_m$ обозначает калибровочно инвариантный полином степени m от напряженности $\widehat{F}$. Мы имеем соответствующую локальную формулу трансгрессии (6.4):

$$\mathcal{P}_m(\widehat{F}) = \widehat{d}Q_{2m-1}(\widehat{A}, \widehat{F}_A), \tag{6.38}$$

вместе с равенствами

$$Q_{2m-1}(\widehat{A}, \widehat{F}) = m\int_0^1 dt P(\widehat{A}, \widehat{F}_t), \tag{6.39}$$

$$\widehat{F}_t = t\widehat{F}_A + (t^2 - t)\widehat{A}^2.$$

Формула (6.38) называется *смещенной формулой трансгрессии*.

С учетом русской формулы (6.35) можно приравнять формулы трансгрессии (6.4) и смещенной трансгрессии (6.38). В результате получаем

$$\widehat{d}Q_{2m-1}(A + c, F_A) = dQ_{2m-1}(A, F_A) \tag{6.40}$$

(сравните с формулой (6.18)). Разложим форму Чженя—Саймонса $Q_{2m-1}(A + c, F_A)$ в ряд по локальной форме связности c как

$$Q_{2m-1}(A + c, F_A) = Q^0_{2m-1}(c, A, F_A) + Q^1_{2m-2}(c, A, F_A) + \ldots + Q^{2m-1}_0(c), \tag{6.41}$$

где верхние индексы обозначают $(1,0)$-степень и нижние индексы — $(0,1)$-степень. Подстановка разложения (6.41) в уравнение (6.40) дает цепочку *уравнений спуска*

$$\mathcal{P}_m(F_A) - dQ^0_{2m-1} = 0, \tag{6.42а}$$

$$\delta Q^i_{2m-1-i} + dQ^{i+1}_{2m-2-i} = 0, \quad i = 0, \ldots, 2m-2, \tag{6.42б}$$

$$\delta Q^{2m-1}_0 = 0. \tag{6.42в}$$

Элементы Q^i_{2m-1-i} в этой цепочке уравнений интерпретируются как *БРСТ-аномалии*. Мы сошлемся на книгу [36], где перечислены такие аномалии для $i = 0, \ldots, 3$. Следует при этом отметить, что аномалии высших степеней Q^i_{2m-1-i}, $i \geqslant 4$, не получили какой-либо определенной физической интерпретации.

Ясно видно, что уравнения спуска (6.42б)–(6.42в) аналогичны как уравнениям спуска (4.85б)–(4.85в), записанным для произвольной локальной формы в БРСТ-формализме полей-антиполей, так и уравнениям спуска (5.38б)–(5.38в) для формы Чженя $\mathcal{P}_2(\widehat{F}) = c_2(\widehat{F})$ произвольной связности $\widehat{A}$. В частности, нетрудно установить, что

БРСТ-аномалии Q^i_{2m-1-i} представляют собой локально БРСТ-замкнутые формы, и поэтому можно рассмотреть их БРСТ-когомологии. В то же время уравнение спуска (6.42а) отличается от уравнений спуска (4.85а) и (5.38а), поскольку в силу соотношения (6.40) $Q_{2m-1}(A+c, F_A)$ не является $\widehat{d}$-замкнутой формой. Отсюда следует, что локальные БРСТ-когомологии аномалий Q^i_{2m-1-i} в общем случае нельзя связать с когомологиями полного БРСТ-оператора $\widehat{d}$.

В заключение следует подчеркнуть, что рассмотренная выше локальная формула трансгрессии (6.38) пригодна для тривиальных гладких расслоений $P \to X$. В случае нетривиального расслоения $P \to X$ можно применить формулу трансгрессии (6.1) и положить $\delta A' = 0$ [36, 111].

Связности в некоммутативной геометрии

По некоммутативной геометрии и ее физическим приложениям имеется обширная литература (см., например, монографии [53, 106, 129]). В некоммутативной геометрии коммутативные алгебры гладких функций заменяются на ассоциативные алгебры, которые необязательно являются коммутативными. Это, как правило, комплексные инволютивные алгебры. Эта глава посвящена связностям в некоммутативной геометрии. Мы следуем алгебраическому понятию связности из Главы 1, обобщенному на модули над некоммутативными кольцами [53, 63, 64]. Следует иметь в виду, что такое обобщение делает разные определения алгебраических связностей неэквивалентными.

В то же время отметим, что в некоммутативной геометрии над квантовыми группами [66, 128, 129] связности на квантовых главных расслоениях определяются в терминах псевдотензорных форм, аналогичных формам связности на гладких расслоениях и суперсвязностям [65]. Здесь мы эти связности не рассматриваем.

§ 1. Некоммутативная алгебра

В этом параграфе собраны необходимые сведения о модулях над алгебрами, которые необязательно предполагаются коммутативными.

Пусть $\mathcal{K}$ — коммутативное кольцо (т. е. коммутативная $\mathbb{Z}$-алгебра с единицей) и $\mathcal{A}$ — $\mathcal{K}$-алгебра с единицей, называемая также $\mathcal{K}$-кольцом. Рассматривают правые и левые $\mathcal{A}$-модули и $\mathcal{A}$-бимодули (или $\mathcal{A}$–$\mathcal{A}$-бимодули в терминологии [8]). Бимодуль P над алгеброй $\mathcal{A}$ именуется *центральным*, если

$$pa = ap, \quad \forall p \in P, \quad \forall a \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}), \tag{7.1}$$

где $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ — центр алгебры $\mathcal{A}$. Напомним, что *центром* $\mathcal{A}$-бимодуля P называется его $\mathcal{K}$-подмодуль $\mathcal{Z}(P)$ такой, что

$$pa = ap, \quad \forall p \in \mathcal{Z}(P), \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Отметим, что, когда $\mathcal{A}$ — коммутативная алгебра, любой правый (или левый) модуль P над $\mathcal{A}$ можно всегда превратить в соответствующий центральный бимодуль, положив

$$pa \overset{\mathrm{def}}{=} ap, \quad \forall p \in P, \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Поэтому в дальнейшем модуль над коммутативной алгеброй автоматически рассматривается как центральный бимодуль (напомним, что в § 1.1 мы имели дело с бимодулями над коммутативным кольцом, которые не являлись центральными). Если $\mathcal{A}$ — некоммутативная алгебра, всякий правый (соответственно левый) $\mathcal{A}$-модуль P является также $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$–$\mathcal{A}$-бимодулем (соответственно $\mathcal{A}$–$\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-бимодулем), так что выполняется равенство (7.1) и P — $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-бимодуль.

Удобно ввести следующую терминологию. Правые и левые $\mathcal{A}$-модули, центральные $\mathcal{A}$-бимодули и $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-модули будем называть $\mathcal{A}$-модулями типа $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ и $(0,0)$

соответственно, где $\mathcal{A}_0 = \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$. Используя эту терминологию, напомним некоторые основные операции с модулям.

- Если P и P' — $\mathcal{A}$-модули одного и того же типа (i, j), тогда их прямая сумма $P \oplus P'$ тоже $\mathcal{A}$-модуль того же типа.
- Пусть P и P' — $\mathcal{A}$-модули типа (i, k) и (k, j) соответственно. Их тензорное произведение $P \otimes P'$ (см. [8]) определяет $\mathcal{A}$-модуль типа (i, j).
- Для данного $\mathcal{A}$-модуля P типа (i, j) обозначим

$$P^* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_i - \mathcal{A}_j}(P, \mathcal{A})$$

— *дуальный модуль*. Можно показать, что P^* является модулем типа $(i+1, j+1) \bmod 2$ [63]. В частности, P и P^{**} — $\mathcal{A}$-модули одного и того же типа. Существует естественный гомоморфизм $P \to P^{**}$. Например, если P — проективный модуль конечного ранга, таковым же является дуальный модуль P^* и $P \to P^{**}$ — изоморфизм [8].

Можно встретить несколько эквивалентных определений проективного модуля. Говорят, что правый (соответственно левый) модуль P является *проективным*, если P представляет собой прямое слагаемое правого (соответственно левого) свободного модуля, т. е. существует модуль Q такой, что $P \oplus Q$ — свободный модуль [8]. Соответственно модуль P является проективным тогда и только тогда, когда

$$P = \mathbf{p}S,$$

где S — свободный модуль и $\mathbf{p}$ — проектор, т. е. эндоморфизм S такой, что $\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}$. Мы уже упоминали проективные $\mathbb{C}^\infty(X)$-модули конечного ранга в связи с теоремой Серре—Свана (см. ниже Теорему 7.1.1). Напомним, что модуль называется модулем конечного ранга или просто *конечным*, если он является фактором конечно порожденного свободного модуля.

Как уже отмечалось, некоммутативная геометрия, как правило, имеет дело с комплексными инволютивными алгебрами (т. е. $*$-алгебрами) с единицей. Пусть $\mathcal{A}$ — такая алгебра (см. третий том [13]). Следует подчеркнуть, что в этом случае мы не можем рассматривать отдельно правые и левые $\mathcal{A}$-модули, а только модули типа $(1, 1)$ и $(0, 0)$, поскольку операция инволюции переставляет сомножители в произведениях в $\mathcal{A}$. Центральный $\mathcal{A}$-бимодуль P над $\mathcal{A}$ называется *$*$-модулем* над $*$-алгеброй $\mathcal{A}$, если он наделен антилинейной инволюцией $p \mapsto p^*$ такой, что

$$(apb)^* = b^* p^* a^*, \quad \forall\, a, b \in \mathcal{A}, \quad p \in P.$$

Говорят, что $*$-модуль является конечным проективным модулем, если он представляет собой конечный проективный правый или левый модуль.

Некоммутативная геометрия строится главным образом как обобщение дифференциального исчисления в коммутативных кольцах гладких функций.

Пусть X — локально компактное топологическое пространство и $\mathcal{A}$ — $*$-алгебра $\mathbb{C}_0^0(X)$ непрерывных комплексных функций на X, стремящихся к нулю на бесконечности в X. Наделенная нормой

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f|, \quad f \in \mathcal{A},$$

эта алгебра становится C^*-алгеброй (см. третий том [13], § 2.7). Ее спектр $\widehat{\mathcal{A}}$ гомеоморфен топологическому пространству X. Обратно, всякая коммутативная C^*-алгебра $\mathcal{A}$ имеет локально компактный спектр $\widehat{\mathcal{A}}$ и в соответствии с известной теоремой Гельфанда—Наймарка (см. Теорему 2.7.2 в третьем томе [13]) изоморфна алгебре $\mathbb{C}_0^0(\widehat{\mathcal{A}})$ непрерывных комплексных функций на $\widehat{\mathcal{A}}$, стремящихся к нулю на бесконечности в $\widehat{\mathcal{A}}$. Если $\mathcal{A}$ — коммутативная C^*-алгебра с единицей, ее спектр $\widehat{\mathcal{A}}$ компактен. Пусть теперь

X — компактное гладкое многообразие. Тогда $*$-алгебра $\mathbb{C}^\infty(X)$ гладких комплексных функций на X является плотной подалгеброй C^*-алгебры с единицей $\mathbb{C}^0(X)$ непрерывных комплексных функций на X. Это не C^*-алгебра, но она является алгеброй Фреше в естественной локально выпуклой топологии компактной сходимости по всем производным (см. третий том [13], Пример 1.1.7). В некоммутативной геометрии алгебры с локально выпуклой топологией не используются (см. [117]), а в чисто алгебраическом аспекте рассматриваются плотные подалгебры с единицей C^*-алгебр.

Алгебра $C^\infty(X)$ гладких вещественных функций на гладком многообразии X является вещественной подалгеброй алгебры $\mathbb{C}^\infty(X)$, которая состоит из всех эрмитовых элементов $\mathbb{C}^\infty(X)$. Она характеризует многообразие X в соответствии с Замечанием 1.1.8 (см. также [151]). В некоммутативной геометрии алгебра вещественных функций заменяется йордановой алгеброй эрмитовых элементов $*$-алгебры $\mathcal{A}$ с единицей.

Обратимся теперь к $*$-модулям. Пусть $E \to X$ — гладкое m-мерное комплексное векторное расслоение над компактным многообразием X. Структурный модуль $E(X)$ его глобальных сечений является $*$-модулем над кольцом $\mathbb{C}^\infty(X)$ гладких комплексных функций на X. Это проективный модуль конечного ранга. Действительно, пусть $(\phi_1, \ldots, \phi_q)$ — гладкое разбиение единицы на многообразии X такое, что расслоение E тривиально над множествами $U_\zeta \supset \operatorname{supp} \phi_\zeta$, и имеет функции перехода $\rho_{\zeta\xi}$. Тогда

$$p_{\zeta\xi} = \phi_\zeta \rho_{\zeta\xi} \phi_\xi$$

— гладкие $(m \times m)$-матрично-значные функции на X. Они удовлетворяют соотношениям

$$\sum_\kappa p_{\zeta\kappa} p_{\kappa\xi} = p_{\zeta\xi} \tag{7.2}$$

и, таким образом, группируются в $(mq \times mq)$-матрицу $\mathbf{p}$, компоненты которой являются гладкими комплексными функциями на X. При этом из соотношений (7.2) следует, что

$$\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}.$$

Тогда всякое сечение s векторного расслоения $E \to X$ представимо в виде столбца $(\phi_\zeta s^i)$ гладких комплексных функций на базе X таких, что $\mathbf{p}s = s$. Отсюда следует, что $s \in \mathbf{p}\mathbb{C}(X)^{mq}$, т. е. $E(X)$ является проективным модулем конечного ранга. Обратное утверждение составляет содержание упоминавшейся выше *теоремы Серре—Свана* [144, 151].

Теорема 7.1.1. Пусть P — конечный проективный $*$-модуль над кольцом $\mathbb{C}^\infty(X)$ гладких комплексных функций на многообразии X. Тогда существует гладкое комплексное векторное расслоение E над X такое, что модуль P изоморфен структурному модулю $E(X)$ глобальных сечений расслоения E. □

В некоммутативной геометрии, основываясь на этой теореме, о конечном проективном $*$-модуле над плотной $*$-подалгеброй C^*-алгебры с единицей говорят как о *некоммутативном векторном расслоении*.

В некоммутативной геометрии $*$-модуль P обычно наделяется эрмитовой структурой. Правой *эрмитовой формой* на P называется полулинейный морфизм

$$(.|.) \colon P \times P \to \mathcal{A}$$

такой, что [63]:

(i) $(pa|p'b) = a^*(p|p')b$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$ и $p, p' \in P$;

(ii) $(p|p') = (p'|p)^*$;

(iii) $(ap|p') = (p|a^*p')$ для всех $a \in \mathcal{A}$ и $p, p' \in P$;

(iv) $(p|p)$, $\forall p \in P$, является положительным элементом в $\mathcal{A}$ (т. е. $(p|p) = qq^*$ для некоторого элемента $q \in \mathcal{A}$);

(v) из $(p|p) = 0$ следует $p = 0$.

Это определение правой эрмитовой формы, исключая условие (iii), совпадает с определением эрмитовой формы на правом $\mathcal{A}$-модуле над $*$-алгеброй $\mathcal{A}$ [151].

§ 2. Некоммутативное дифференциальное исчисление

Некоммутативное обобщение дифференциальной геометрии основано на том, что внешняя алгебра дифференциальных форм заменяется на $\mathbb{Z}$-градуированную дифференциальную алгебру [110]. Всюду в этой главе под градуировкой подразумевается именно $\mathbb{Z}$-градуировка.

Напомним, что *градуированная алгебра* Ω^* над коммутативным кольцом $\mathcal{K}$ определяется как прямая сумма

$$\Omega^* = \bigoplus_{k=0} \Omega^k$$

$\mathcal{K}$-модулей Ω^k, наделенная ассоциативной операцией умножения такой, что $\alpha \cdot \beta \in \Omega^{|\alpha|+|\beta|}$, где $|\alpha|$ обозначает степень элемента $\alpha \in \Omega^{|\alpha|}$. В частности, Ω^0 представляет собой некоторую $\mathcal{K}$-алгебру $\mathcal{A}$ с единицей $\mathbf{1}$, а $\Omega^{k>0}$ являются $\mathcal{A}$-бимодулями. Градуированная алгебра Ω^* называется *градуированной дифференциальной алгеброй*, если она — коцепной комплекс $\mathcal{K}$-модулей

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\delta} \Omega^1 \xrightarrow{\delta} \dots$$

относительно оператора кограницы δ такого, что

$$\delta(\alpha \cdot \beta) = \delta\alpha \cdot \beta + (-1)^{|\alpha|}\alpha \cdot \delta\beta.$$

Определение 7.2.1. Градуированная дифференциальная алгебра (Ω^*, δ) называется *дифференциальным исчислением* над $\mathcal{K}$-алгеброй $\mathcal{A} = \Omega^0$. □

Если $\mathcal{A}$ — $*$-алгебра, предполагаются дополнительные условия

$$(\alpha \cdot \beta)^* = (-1)^{|\alpha||\beta|}\beta^*\alpha^*, \qquad (\delta\alpha)^* = \delta(\alpha^*).$$

Замечание 7.2.1. Комплекс Де Рама (1.42) служит примером дифференциального исчисления над коммутативным кольцом. Чтобы обобщить его на некоммутативное кольцо $\mathcal{A}$, от оператора кограницы δ следует потребовать дополнительные свойства:

- $\Omega^{k>0}$ — центральные $\mathcal{A}$-бимодули;
- элементы $\delta a_1 \dots \delta a_k$, $a_i \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$, принадлежат центру $\mathcal{Z}(\Omega^k)$ модуля Ω^k; тогда, если $\mathcal{A}$ — коммутативное кольцо, выполняется условие коммутативности (1.27).

□

Пусть $\Omega^*\mathcal{A}$ — минимальная градуированная дифференциальная подалгебра алгебры Ω^*, которая содержит $\mathcal{A}$. Как $\mathcal{A}$-алгебра она порождается элементами δa, $a \in \mathcal{A}$, и состоит из конечных линейных комбинаций моноидов вида

$$\alpha = a_0\delta a_1 \dots \delta a_k, \qquad a_i \in \mathcal{A}. \tag{7.3}$$

Произведение моноидов (7.3) определяется по правилу

$$(a_0\delta a_1) \cdot (b_0\delta b_1) = a_0\delta(a_1b_0) \cdot \delta b_1 - a_0a_1\delta b_0 \cdot \delta b_1.$$

В частности, $\Omega^1\mathcal{A}$ представляет собой $\mathcal{A}$-бимодуль, порождаемый элементами δa, $a \in \mathcal{A}$. Поскольку

$$(\delta a)b = \delta(ab) - a\delta b,$$

бимодуль $\Omega^1\mathcal{A}$ можно также рассматривать как левый (или правый) $\mathcal{A}$-модуль, порождаемый элементами δa, $a \in \mathcal{A}$. Отметим, что $\delta(\mathbf{1}) = 0$. Соответственно

$$\Omega^k\mathcal{A} = \underbrace{\Omega^1\mathcal{A} \ldots \Omega^1\mathcal{A}}_{k}$$

— это $\mathcal{A}$-бимодули и одновременно левые (или правые) $\mathcal{A}$-модули, порождаемые моноидами (7.3).

Таким образом, градуированная дифференциальная подалгебра $(\Omega^*\mathcal{A}, \delta)$ является дифференциальным исчислением над $\mathcal{A}$. Она называется *универсальным дифференциальным исчислением*, поскольку обладает следующим свойством [52, 95, 103]. Пусть (Ω'^*, δ') — другое дифференциальное исчисление над $\mathcal{K}$-алгеброй $\mathcal{A}'$ с единицей, и пусть

$$\rho\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$$

— морфизм алгебр. Существует единственное расширение этого морфизма до морфизма градуированных дифференциальных алгебр

$$\rho^k\colon \Omega^k\mathcal{A} \to \Omega'^k$$

такое, что $\rho^{k+1} \circ \delta = \delta' \circ \rho^k$.

Наш интерес к дифференциальным исчислениям над алгеброй $\mathcal{A}$ вызван тем фактом, что в коммутативной геометрии Определение 1.2.2 алгебраической связности на $\mathcal{A}$-модуле использует модуль Ω^1 (1.22). Если $\mathcal{A} = C^\infty(X)$, это модуль 1-форм на многообразии X. Поэтому, чтобы ввести связность в некоммутативной геометрии, нужно сначала построить некоммутативный аналог модуля Ω^1. При этом можно следовать определению модуля Ω^1 в § 1.1, но не брать фактор по $\operatorname{mod}\mu^2$, поскольку это предполагает условие коммутативности (1.27).

Пусть $\mathcal{A}$ — $\mathcal{K}$-алгебра с единицей. Рассмотрим тензорное произведение $\mathcal{A} \bigotimes\limits_{\mathcal{K}} \mathcal{A}$ $\mathcal{K}$-модулей и морфизм $\mathcal{K}$-модулей

$$\mu^1\colon \mathcal{A} \bigotimes_{\mathcal{K}} \mathcal{A} \ni a \otimes b \mapsto ab \in \mathcal{A}.$$

Следуя (1.22), определим $\mathcal{K}$-модуль

$$\overline{\Omega}^1[\mathcal{A}] = \operatorname{Ker}\mu^1. \tag{7.4}$$

Существует морфизм $\mathcal{K}$-модулей

$$d\colon \mathcal{A} \ni a \mapsto (\mathbf{1} \otimes a - a \otimes \mathbf{1}) \in \overline{\Omega}^1[\mathcal{A}] \tag{7.5}$$

(сравните с морфизмом (1.26)). Более того, $\overline{\Omega}^1[\mathcal{A}]$ является $\mathcal{A}$-бимодулем, порождаемым элементами da, $a \in \mathcal{A}$, с законом умножения

$$b(da)c = b \otimes ac - ba \otimes c, \qquad a, b, c \in \mathcal{A}.$$

Морфизм d (7.5) обладает свойством

$$d(ab) = (\mathbf{1} \otimes ab - ab \otimes \mathbf{1} + a \otimes b - a \otimes b) = (da)b + adb \tag{7.6}$$

(сравните с формулой (1.28)), т. е. d является $\overline{\Omega}^1[\mathcal{A}]$-значным дифференцированием алгебры $\mathcal{A}$. Благодаря указанному свойству, $\overline{\Omega}^1[\mathcal{A}]$ может рассматриваться как левый $\mathcal{A}$-модуль, порождаемый элементами da, $a \in \mathcal{A}$. В то же время, если $\mathcal{A}$ — коммутативной кольцо, $\mathcal{A}$-бимодуль $\overline{\Omega}^1[\mathcal{A}]$ не совпадает с бимодулем Ω^1 (1.22), поскольку $\overline{\Omega}^1[\mathcal{A}]$ не является центральным бимодулем (см. Замечание 7.2.1).

Чтобы преодолеть эту трудность, рассмотрим дифференцирования алгебры $\mathcal{A}$. Они удовлетворяют правилу

$$u(ab) = u(a)b + au(b), \quad \forall\, a, b \in \mathcal{A}. \tag{7.7}$$

Следует подчеркнуть, что правило (7.7) отличается от правила дифференцирования (3.16) градуированной алгебры и от правила дифференцирования

$$u(ab) = u(a)b + u(b)a$$

общих алгебр [7]. В силу (7.7) дифференцирования алгебры $\mathcal{A}$ составляют $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-бимодуль $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$, но не левый $\mathcal{A}$-модуль.

Этот $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-бимодуль является также алгеброй Ли над коммутативным кольцом $\mathcal{K}$ относительно скобок Ли

$$[u, u'] = u \circ u' - u' \circ u. \tag{7.8}$$

Центр $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$ сохраняется при дифференцированиях из $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$, т.е.

$$u(a)b = bu(a), \quad \forall\, a \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}), \quad b \in \mathcal{A}, \quad u \in \mathrm{Der}\,\mathcal{A},$$

и имеет место равенство

$$[u, au'] = u(a)u' + a[u, u'], \quad \forall\, a \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}), \quad u, u' \in \mathrm{Der}\,\mathcal{A}. \tag{7.9}$$

Если $\mathcal{A}$ — $*$-алгебра с единицей, модуль $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ дифференцирований $\mathcal{A}$ наделен инволюцией $u \mapsto u^*$, определяемой как

$$u^*(a) = \big(u(a^*)\big)^*.$$

Тогда скобки Ли (7.8) удовлетворяют условию вещественности

$$[u, u']^* = [u^*, u'^*].$$

Рассмотрим *когомологии Шевалле–Эйленберга* (см. [150]) алгебры Ли $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ относительно ее естественного представления в алгебре $\mathcal{A}$. Соответствующее пространство k-коцепей $\underline{\Omega}^k[\mathcal{A}]$, $k = 1, \ldots$, представляет собой $\mathcal{A}$-бимодуль $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-мультилинейных антисимметричных отображений $(\mathrm{Der}\,\mathcal{A})^k$ в $\mathcal{A}$. В частности, $\underline{\Omega}^1[\mathcal{A}]$ — это бимодуль

$$\underline{\Omega}^1[\mathcal{A}] = \mathrm{Der}\,\mathcal{A}^*, \tag{7.10}$$

$\mathcal{A}$-дуальный к модулю дифференцирований $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ (сравните с изоморфизмом (1.59)). Положим по определению $\underline{\Omega}^0[\mathcal{A}] = \mathcal{A}$. *Оператор кограницы Шевалле–Эйленберга*

$$d\colon \underline{\Omega}^k[\mathcal{A}] \to \underline{\Omega}^{k+1}[\mathcal{A}]$$

задается в виде

$$(d\phi)(u_0, \ldots, u_k) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i u_i\big(\phi(u_0, \ldots, \widehat{u}_i, \ldots, u_k)\big) + \tag{7.11}$$
$$+ \frac{1}{k+1}\sum_{0\leqslant r<s\leqslant k}(-1)^{r+s}\phi\big([u_r, u_s], u_0, \ldots, \widehat{u}_r, \ldots, \widehat{u}_s, \ldots, u_k\big),$$

где $\widehat{u}_i$ означает, что элемент u_i опущен. Например,

$$(da)(u) = u(a), \quad a \in \mathcal{A}, \tag{7.12}$$

$$(d\phi)(u_0, u_1) = \frac{1}{2}\big(u_0(\phi(u_1)) - u_1(\phi(u_0)) - \phi([u_0, u_1])\big), \quad \phi \in \Omega^1[\mathcal{A}]. \tag{7.13}$$

Нетрудно установить, что $d^2 = 0$. В результате мы имеем *коцепной комплекс Шевалле—Эйленберга* для $\mathcal{K}$-модулей

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{d} \underline{\Omega}^1[\mathcal{A}] \xrightarrow{d} \ldots \tag{7.14}$$

Более того, $\mathbb{Z}$-градуированное пространство

$$\underline{\Omega}^*[\mathcal{A}] = \bigoplus_{k=0} \underline{\Omega}^k[\mathcal{A}] \tag{7.15}$$

наделено структурой градуированной алгебры относительно произведения $\wedge$, являющегося композицией операции произведения в алгебре $\mathcal{A}$ с антисимметризацией по аргументам. Заметим, что, если алгебра $\mathcal{A}$ не коммутативна, свойства этого произведения не имеют ничего общего со свойствами градуированной коммутативности внешних форм, т. е. в общем случае

$$\phi \wedge \phi' \neq (-1)^{|\phi||\phi'|}\phi' \wedge \phi.$$

Если $\mathcal{A}$ — $*$-алгебра, градуированная алгебра $\underline{\Omega}^*[\mathcal{A}]$ тоже наделена инволюцией

$$\phi^*(u_1, \ldots, u_k) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\phi(u_1^*, \ldots, u_k^*)\right)^*.$$

Таким образом, построенная нами градуированная алгебра $(\underline{\Omega}^*[\mathcal{A}], d)$ является дифференциальным исчислением над $\mathcal{A}$, называемым *дифференциальным исчислением Шевалле—Эйленберга.*

Легко заметить, что, если $\mathcal{A} = \mathbb{C}^\infty(X)$ — коммутативное кольцо гладких комплексных функций на компактном многообразии X, градуированная алгебра $\underline{\Omega}^*[\mathbb{C}^\infty(X)]$ — это в точности комплексифицированная внешняя алгебра $\mathbb{C} \otimes \Omega^*(X)$ внешних форм на X. В этом случае оператор кограницы Шевалле—Эйленберга (7.11) совпадает с внешним дифференциалом, а комплекс Шевалле—Эйленберга (7.14) — это комплекс Де Рама комплексных внешних форм на многообразии X. В частности, операции

$$\begin{aligned} (u \rfloor \phi)(u_1, \ldots, u_{k-1}) &= k\phi(u, u_1, \ldots, u_{k-1}), \\ \mathbf{L}_u(\phi) &= d(u \rfloor \phi) + u \rfloor f(\phi), \end{aligned} \qquad u \in \operatorname{Der} \mathcal{A},$$

на градуированной алгебре $\underline{\Omega}^*[\mathcal{A}]$ представляют собой некоммутативные обобщения внутреннего произведения и производной Ли внешних форм. Поэтому мы имеем все основания интерпретировать элементы модуля $\Omega^1[\mathcal{A}]$ как некоммутативное обобщение дифференциальных 1-форм, хотя это обобщение не является единственным.

Пусть $\Omega^*[\mathcal{A}]$ — наименьшая дифференциальная подалгебра градуированной дифференциальной алгебры $\underline{\Omega}^*[\mathcal{A}]$, которая содержит $\mathcal{A}$. Она порождается элементами da, $a \in \mathcal{A}$, и состоит из конечных линейных комбинаций моноидов вида

$$\phi = a_0 da_1 \wedge \ldots \wedge da_k, \qquad a_i \in \mathcal{A},$$

(сравните с (7.3)). В частности, $\Omega^1[\mathcal{A}]$ является $\mathcal{A}$-бимодулем (7.4), порождаемым элементами da, $a \in \mathcal{A}$. Поскольку центр $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$ стабилен относительно дифференцирований кольца $\mathcal{A}$, получаем

$$\begin{aligned} bda = (da)b, \quad adb = (db)a, \quad & a \in \mathcal{A}, \quad b \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}), \\ da \wedge db = -db \wedge da, \quad & \forall\, a \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $\Omega^1[\mathcal{A}]$ является центральным бимодулем в отличие от бимодуля $\overline{\Omega}^1[\mathcal{A}]$ (7.4). В силу соотношения (7.12) имеет место изоморфизм

$$\operatorname{Der} \mathcal{A} = \Omega^1[\mathcal{A}]^* \tag{7.16}$$

$\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-модуля $\mathrm{Der}\,\mathcal{A}$ дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}$-дуального модуля к модулю $\Omega^1[\mathcal{A}]$ (сравните с соотношением дуальности (1.38)). Комбинация соотношений дуальности (7.10) и (7.16) приводит к изоморфизму

$$\underline{\Omega}^1[\mathcal{A}] = \Omega^1[\mathcal{A}]^{**}.$$

Дифференциальная подалгебра $(\Omega^*[\mathcal{A}], d)$ является универсальным дифференциальным исчислением над $\mathcal{A}$. Если $\mathcal{A}$ — коммутативное кольцо, тогда $\Omega^*[\mathcal{A}]$ — комплекс Де Рама (1.42).

§ 3. Универсальные связности

Пусть (Ω^*, δ) — дифференциальное исчисление над $\mathcal{K}$-алгеброй $\mathcal{A}$ с единицей и P — левый (соответственно правый) $\mathcal{A}$-модуль. По аналогии с Определением 1.2.2 рассмотрим тензорное произведение $\Omega^1 \otimes P$ (соответственно $P \otimes \Omega^1$) и определим связность на модуле P следующим образом [103, 151].

Определение 7.3.1. *Некоммутативной связностью* на левом $\mathcal{A}$-бимодуле P относительно дифференциального исчисления (Ω^*, δ) называется морфизм $\mathcal{K}$-модулей

$$\nabla\colon P \to \Omega^1 \otimes P, \tag{7.17}$$

который удовлетворяет правилу Лейбница

$$\nabla(ap) = \delta a \otimes p + a\nabla(p).$$

□

Если $\Omega^* = \Omega^*\mathcal{A}$ — универсальное дифференциальное исчисление, связность (7.17) именуется *универсальной некоммутативной связностью* [103, 151].

Кривизна некоммутативной связности (7.17) определяется как морфизм $\mathcal{A}$-модулей

$$\nabla^2\colon P \to \Omega^2[\mathcal{A}] \otimes P$$

(сравните с (1.58)) [103]. Отметим также, что морфизм (7.17) допускает естественное расширение [64, 103]

$$\nabla\colon \Omega^k \otimes P \to \Omega^{k+1} \otimes P,$$
$$\nabla(\alpha \otimes p) = \delta\alpha \otimes p + (-1)^{|\alpha|}\alpha \otimes \nabla(p), \qquad \alpha \in \Omega^*.$$

Аналогично некоммутативная связность определяется на правом $\mathcal{A}$-модуле. Однако некоммутативные связности на левых (правых) модулях не всегда существуют. В этой связи приведем следующую теорему (см. § 7.6).

Теорема 7.3.2. Универсальная связность на левом (правом) модуле P конечного ранга существует тогда и только тогда, когда P — проективный модуль [55, 103]. □

Трудность возникает, когда P — $\mathcal{A}$-бимодуль. Если $\mathcal{A}$ — коммутативное кольцо, левая и правая структуры $\mathcal{A}$-бимодуля эквивалентны и вводится или левая, или правая связность на P (см. Определение 1.2.2). Если P — это $\mathcal{A}$-бимодуль над некоммутативным кольцом, *левая* и *правая* некоммутативные связности ∇^L и ∇^R на P должны быть введены одновременно. Однако пара (∇^L, ∇^R) никаким образом не является некоммутативной связностью на бимодуле, поскольку $\nabla^L(P) \in \Omega^1 \otimes P$, тогда как $\nabla^R(P) \in P \otimes \Omega^1$. Как паллиатив, обычно предполагают, что существует изоморфизм бимодулей

$$\varrho\colon \Omega^1 \otimes P \to P \otimes \Omega^1. \tag{7.18}$$

Тогда пара (∇^L, ∇^R) левых и правых некоммутативных связностей на P называется ϱ-согласованной, если [64, 103, 120]

$$\varrho \circ \nabla^L = \nabla^R$$

(см. более слабое условие в работе [56]). Тем не менее, это не является истинной некоммутативной связностью на бимодуле (см. ниже условие (7.22)).

Замечание 7.3.1. Если $\mathcal{A}$ — коммутативное кольцо, изоморфизм ϱ (7.1) — это, естественно, перестановка

$$\varrho\colon \alpha \otimes p \mapsto p \otimes \alpha, \quad \forall \alpha \in \Omega^1, \quad p \in P.$$

□

Упомянутая выше проблема некоммутативной связности на бимодуле существенно не упрощается, если даже $P = \Omega^1$ вместе с очевидной перестановкой [63, 120]

$$\phi \otimes \phi' \mapsto \phi' \otimes \phi, \quad \phi, \phi' \in \Omega^1.$$

Пусть теперь $(\Omega^*[\mathcal{A}], d)$ — универсальное дифференциальное исчисление над некоммутативным $\mathcal{K}$-кольцом $\mathcal{A}$ и пусть

$$\nabla^L\colon P \to \Omega^1[\mathcal{A}] \otimes P, \quad \nabla^L(ap) = da \otimes p + a\nabla^L(p) \tag{7.19}$$

— левая универсальная некоммутативная связность на левом $\mathcal{A}$-модуле P (сравните с Определением 1.2.2). Благодаря условию дуальности (7.16), для всякого дифференцирования $u \in \operatorname{Der} \mathcal{A}$ существует эндоморфизм $\mathcal{K}$-модуля P

$$\nabla^L_u\colon P \ni p \to u \rfloor \nabla^L(p) \in P. \tag{7.20}$$

Если ∇^R — правая универсальная некоммутативная связность на правом $\mathcal{A}$-модуле P, аналогичный эндоморфизм

$$\nabla^R_u\colon P \ni p \to \nabla^L(p) \llcorner u \in P \tag{7.21}$$

определен для любого дифференцирования $u \in \operatorname{Der} \mathcal{A}$. Пусть (∇^L, ∇^R) — ϱ-согласованная пара левых и правых универсальных некоммутативных связностей на $\mathcal{A}$-бимодуле P. Естественно считать эту пару универсальной некоммутативной связностью на бимодуле P, если

$$u \rfloor \nabla^L(p) = \nabla^R(p) \llcorner u \tag{7.22}$$

для всех $p \in P$ и $u \in \operatorname{Der} \mathcal{A}$.

В то же время, основываясь на эндоморфизмах (7.20)–(7.21), можно предложить другое определение некоммутативной связности на бимодуле в духе Определения 1.2.7.

§ 4. Связности Дюбуа—Виолетта

Пусть $\mathcal{A}$ — $\mathcal{K}$-кольцо и P — $\mathcal{A}$-модуль типа (i, j) в соответствии с терминологией § 7.1.

Определение 7.4.1. По аналогии с Определением 1.2.7, ***связностью Дюбуа—Виолетта*** на $\mathcal{A}$-модуле P типа (i, j) называется морфизм $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-бимодулей

$$\nabla\colon \operatorname{Der} \mathcal{A} \ni u \mapsto \nabla_u \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{K}}(P, P) \tag{7.23}$$

из $\operatorname{Der} \mathcal{A}$ в $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-бимодуль эндоморфизмов $\mathcal{K}$-модуля P, который удовлетворяет правилу Лейбница [63, 120]

$$\nabla_u(a_i p a_j) = u(a_i) p a_j + a_i \nabla_u(p) a_j + a_i p u(a_j), \quad \forall p \in P, \quad \forall a_k \in \mathcal{A}_k. \tag{7.24}$$

□

Согласно соотношению дуальности (7.16) и выражениям (7.20)–(7.21) всякая левая (соответственно правая) универсальная некоммутативная связность порождает связность (7.23) на левом (соответственно правом) $\mathcal{A}$-модуле P. В дальнейшем под связностью в некоммутативной геометрии будет подразумеваться именно связность Дюбуа—Виолетта из Определения 7.4.1.

Выражение (7.24) показывает, что, если некоммутативные связности на $\mathcal{A}$-модуле P типа (i, j) существуют, они образуют аффинное пространство, моделируемое над линейным пространством морфизмов $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-бимодулей

$$\sigma\colon \operatorname{Der}\mathcal{A} \ni u \mapsto \sigma_u \in \operatorname{Hom}_{A_i - A_j}(P, P)$$

из $\operatorname{Der}\mathcal{A}$ в $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-бимодуль эндоморфизмов

$$\sigma_u(a_i p a_j) = a_i \sigma(p) a_j, \quad \forall\, p \in P, \quad \forall\, a_k \in A_k,$$

$\mathcal{A}$-модуля P.

Пример 7.4.1. Если $P = \mathcal{A}$, морфизмы

$$\nabla_u(a) = u(a), \quad \forall\, u \in \operatorname{Der}\mathcal{A}, \quad \forall\, a \in \mathcal{A}, \tag{7.25}$$

задают каноническую связность на некоммутативной алгебре $\mathcal{A}$ согласно Определению 7.4.1. Тогда из правила Лейбница (7.24) следует, что всякая некоммутативная связность на центральном $\mathcal{A}$-бимодуле P является также связностью на P, рассматриваемом как $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-бимодуль. □

Пример 7.4.2. Если P — $\mathcal{A}$-бимодуль и алгебра $\mathcal{A}$ допускает только внутренние дифференцирования

$$\operatorname{ad} b(a) = ba - ab,$$

морфизмы

$$\nabla_{\operatorname{ad} b}(p) = bp - pb, \quad \forall\, b \in \mathcal{A}, \quad \forall\, p \in P, \tag{7.26}$$

определяют каноническую связность на P. □

Кривизна R некоммутативной связности ∇ (7.23) на $\mathcal{A}$-модуле P определяется как морфизм $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-модулей

$$R\colon \operatorname{Der}\mathcal{A} \times \operatorname{Der}\mathcal{A} \ni (u, u') \to R_{u,u'} \in \operatorname{Hom}_{A_i - A_j}(P, P), \tag{7.27}$$

$$R_{u,u'}(p) = \nabla_u\big(\nabla_{u'}(p)\big) - \nabla_{u'}\big(\nabla_u(p)\big) - \nabla_{[u,u']}(p), \quad p \in P,$$

(сравните с (1.63)) [63]. Справедливы соотношения

$$R_{au,a'u'} = aa' R_{u,u'}, \quad a, a' \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}),$$

$$R_{u,u'}(a_i p b_j) = a_i R_{u,u'}(p) b_j, \quad a_i \in A_j, \quad b_j \in A_j.$$

Например, кривизна некоммутативных связностей (7.25) и (7.26) обращается в 0.

Приведем некоторые стандартные операции с некоммутативными связностями (7.23).

(i) Для двух модулей P и P' одного и того же типа (i, j) и некоммутативных связностей ∇ и ∇' на них естественным образом определена некоммутативная связность $\nabla \oplus \nabla'$ на $P \oplus P'$.

(ii) Пусть P — модуль типа (i, j) и P^* — $\mathcal{A}$-дуальный к нему модуль. Для всякой некоммутативной связности ∇ на P существует единственная дуальная некоммутативная связность ∇' на P^* такая, что

$$u(\langle p, p' \rangle) = \big\langle \nabla_u(p), p' \rangle + \langle p, \nabla'(p') \big\rangle, \quad p \in P, \quad p' \in P^*, \quad u \in \operatorname{Der}\mathcal{A}.$$

(iii) Пусть P_1 и P_2 — $\mathcal{A}$-модули типов (i,k) и (k,j) соответственно, и пусть ∇^1 и ∇^2 — некоммутативные связности на этих модулях. Для произвольного дифференцирования $u \in \operatorname{Der}\mathcal{A}$ рассмотрим эндоморфизм

$$\left(\nabla^1 \otimes \nabla^2\right)_u = \nabla^1_u \otimes \operatorname{Id} P_1 + \operatorname{Id} P_2 \otimes \nabla^2_u \tag{7.28}$$

тензорного произведения $P_1 \otimes P_2$ $\mathcal{K}$-модулей P_1 и P_2. Этот эндоморфизм сохраняет подмножество $P_1 \otimes P_2$, порождаемое элементами

$$p_1 a \otimes p_2 - p_1 \otimes a p_2,$$

где $p_1 \in P_1$, $p_2 \in P_2$ и $a \in \mathcal{A}_k$. Благодаря этому факту, эндоморфизмы (7.28) определяют некоммутативную связность на тензорном произведении $P_1 \otimes P_2$ модулей P_1 и P_2.

(iv) Как уже отмечалось, если $\mathcal{A}$ — $*$-алгебра с единицей, мы имеем дело только с модулями типа $(1,1)$ и $(0,0)$, т.е. $*$-модулями и $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-бимодулями. Пусть P — модуль одного из этих типов. Если ∇ — некоммутативная связность на P, существует *сопряженная некоммутативная связность* ∇^* на P, задаваемая соотношением

$$\nabla^*_u(p) = \left(\nabla_{u^*}(p^*)\right)^*. \tag{7.29}$$

Некоммутативная связность ∇ на P называется *вещественной*, если $\nabla = \nabla^*$.

Пусть $*$-модуль P наделен эрмитовой формой $(.|.)$. Некоммутативная связность ∇ на P называется *эрмитовой*, если

$$d(p|p') = \left(\nabla_u(p)|p'\right) + \left(p|\nabla_u(p')\right), \quad \forall u \in \operatorname{Der}\mathcal{A}, \quad p, p' \in P.$$

Аналогично определяется эрмитова универсальная некоммутативная связность на правом $\mathcal{A}$-модуле P над $*$-алгеброй $\mathcal{A}$. Такая эрмитова некоммутативная связность всегда существует, если P — проективный модуль конечного ранга [151].

Пусть теперь $P = \underline{\Omega}^1[\mathcal{A}]$. Всякая некоммутативная связность на $\mathcal{A}$-бимодуле $\underline{\Omega}^1[\mathcal{A}]$ называется *линейной* [63, 120]. Следует подчеркнуть, что этот термин не применяется для произвольной левой (правой) некоммутативной связности на $\underline{\Omega}^1[\mathcal{A}]$ [64]. Если $\underline{\Omega}^1[\mathcal{A}]$ — $*$-модуль, линейная некоммутативная связность на нем предполагается вещественной. Имея линейную некоммутативную связность ∇ на $\underline{\Omega}^1[\mathcal{A}]$, можно определить гомоморфизм $\mathcal{A}$-бимодулей

$$T\colon \underline{\Omega}^1[\mathcal{A}] \to \underline{\Omega}^2[\mathcal{A}], \quad (T\phi)(u,u') = (d\phi)(u,u') - \nabla_u(\phi)(u') + \nabla_{u'}(\phi)(u), \tag{7.30}$$

для всех $u, u' \in \operatorname{Der}\mathcal{A}$ и $\phi \in \underline{\Omega}^1[\mathcal{A}]$. Он называется *кручением* линейной некоммутативной связности ∇.

§ 5. Матричная геометрия

Этот параграф посвящен линейным некоммутативным связностям в матричной геометрии, когда $\mathcal{A} = M_n$ — алгебра комплексных $(n \times n)$-матриц [62, 107, 108].

Пусть $\{\varepsilon_r\}$, $1 \leqslant r \leqslant n^2 - 1$, — антиэрмитов базис алгебры Ли $su(n)$. Элементы ε_r порождают алгебру M_n, тогда как $u_r = \operatorname{ad}\varepsilon_r$ образуют базис правой алгебры Ли $\operatorname{Der} M_n$ дифференцирований алгебры M_n вместе с коммутационными соотношениями

$$[u_r, u_q] = c^s_{rq} u_s,$$

где c^s_{rq} — структурные константы алгебры Ли $su(n)$. Поскольку центр $\mathcal{Z}(M_n)$ алгебры M_n состоит из матриц $\lambda\mathbf{1}$, алгебра дифференцирований $\operatorname{Der} M_n$ является комплексным свободным модулем ранга $n^2 - 1$.

Рассмотрим универсальное дифференциальное исчисление $(\Omega^*[M_n], d)$ над алгеброй M_n, где d — оператор кограницы Шевалле—Эленберга (7.11). Существует удобная система базисных элементов $\{\theta^r\}$ модуля $\Omega^1[M_n]$, рассматриваемого как левый M_n-модуль. Они даются соотношениями

$$\theta^r(u_q) = \delta^r_q \mathbf{1}.$$

Следовательно $\Omega^1[M_n]$ является свободным левым M_n-модулем ранга n^2-1. Нетрудно заметить, что элементы θ^r принадлежат центру M_n-бимодуля $\Omega^1[M_n]$, т. е.

$$a\theta^r = \theta^r a, \quad \forall a \in M_n. \tag{7.31}$$

Также получаем, что

$$\theta^r \wedge \theta^q = -\theta^q \wedge \theta^r. \tag{7.32}$$

Морфизм

$$d\colon M_n \to \Omega^1[M_n]$$

дается выражением (7.12) и имеет вид

$$d\varepsilon_r(u_q) = \operatorname{ad}\varepsilon_q(\varepsilon_r) = c^s_{qr}\varepsilon_s,$$

т. е.

$$d\varepsilon_r = c^s_{qr}\varepsilon_s\theta^q. \tag{7.33}$$

В свою очередь, выражение (7.13) приводит к уравнениям Маурера—Картана

$$d\theta^r = -\frac{1}{2}c^r_{qs}\theta^q \wedge \theta^s. \tag{7.34}$$

Обозначим $\theta = \varepsilon_r\theta^r$. Тогда равенство (7.33) переписывается в виде

$$da = a\theta - \theta a, \quad \forall a \in M_n.$$

Отсюда следует, что M_n-бимодуль $\Omega^1[M_n]$ порождается одним элементом θ. Поскольку $\operatorname{Der} M_n$ является конечным свободным модулем, можно показать, что M_n-бимодуль $\Omega^1[M_n]$ изоморфен M_n-дуальному модулю $\underline{\Omega}^1[M_n]$ к $\operatorname{Der} M_n$.

Обратимся теперь к некоммутативным связностям на M_n-бимодуле $\Omega^1[M_n]$. Такая некоммутативная связность ∇ дается выражениями

$$\nabla_{u=c^r u_r} = c^r\nabla_r, \quad \nabla_r(\theta^p) = \omega^p_{rq}\theta^q, \quad \omega^p_{rq} \in M_n. \tag{7.35}$$

Принимая во внимание равенства (7.31)–(7.32), мы получаем из правила Лейбница (7.24), что

$$a\nabla_r(\theta^p) = \nabla_r(\theta^p)a, \quad \forall a \in M_n.$$

Отсюда следует, что элементы ω^p_{rq} в выражении (7.35) пропорциональны единичной матрице $\mathbf{1} \in M_n$, т. е. являются комплексными числами. Тогда соотношения

$$\nabla_r(\theta^p) = \omega^p_{rq}\theta^q, \quad \omega^p_{rq} \in \mathbb{C}, \tag{7.36}$$

задают линейную некоммутативную связность на M_n-бимодуле $\Omega^1[M_n]$.

Приведем два примера линейной некоммутативной связности.

(i) Поскольку все дифференцирования алгебры M_n являются внутренними, существует плоская некоммутативная связность (7.26), задаваемая соотношениями

$$\nabla_r(\theta^p) = 0.$$

Однако эта связность имеет ненулевое кручение. Выражения (7.30) и (7.34) приводят к

$$(T\theta^p)(u_r, u_q) = -c^p_{rq}.$$

(ii) Можно показать, что в матричной геометрии существует единственная линейная некоммутативная связность с нулевым кручением

$$\nabla_r(\theta^p) = -c^p_{rq}\theta^q.$$

§ 6. Некоммутативная геометрия Кона

Дифференциальное исчисление Кона основывается на понятии спектральной тройки [53, 103, 106, 151].

Определение 7.6.1. *Спектральная тройка* $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ состоит из $*$-алгебры $\mathcal{A} \subset B(\mathcal{H})$ ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ вместе с самосопряженным (неограниченным в общем случае) оператором $D = D^*$ в $\mathcal{H}$, обладающим следующими свойствами:

- резольвента $(D - \lambda)^{-1}$, $\lambda \notin \mathbb{R}$, является компактным оператором в $\mathcal{H}$;
- $[D, \mathcal{A}] \in B(\mathcal{H})$.

□

Пара $(\mathcal{A}, D)$ называется также *K-циклом* над $\mathcal{A}$. Во многих случаях $\mathcal{H}$ является $\mathbb{Z}_2$-градуированным гильбертовым пространством, снабженным проектором Γ таким, что

$$\Gamma D + D\Gamma = 0, \quad [a, \Gamma] = 0, \quad \forall\, a \in \mathcal{A},$$

т. е. $\mathcal{A}$ действует на $\mathcal{H}$ четными операторами, тогда как D является нечетным оператором. Спектральная тройка называется *четной*, если такая градуировка существует, и *нечетной* в противном случае.

Замечание 7.6.1. Стандартным примером спектральной тройки является случай оператора Дирака D на компактном спин- или спин^c-многообразии [54, 73, 74, 94] (см. работу [109] и цитируемую в ней литературу по геометрии спин^c-многообразий). □

Пусть дана спектральная тройка $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$. Рассмотрим универсальное дифференциальное исчисление $(\Omega^*\mathcal{A}, \delta)$ над алгеброй $\mathcal{A}$. Построим представление градуированной дифференциальной алгебры $\Omega^*\mathcal{A}$ ограниченными операторами в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, когда дифференцирование Шевалле—Эйленберга δ (7.11) алгебры $\mathcal{A}$ заменено коммутатором $[D, a]$, $a \in \mathcal{A}$:

$$\pi\colon \Omega^*\mathcal{A} \to B(\mathcal{H}),$$
$$\pi(a_0\delta a_1 \dots \delta a_k) \stackrel{\text{def}}{=} a_0[D, a_1] \dots [D, a_k]. \tag{7.37}$$

Поскольку

$$[D, a]^* = -[D, a^*],$$

мы получаем

$$\pi(\phi)^* = \pi(\phi^*), \quad \phi \in \Omega^*\mathcal{A}.$$

Однако π (7.37) не является представлением градуированной дифференциальной алгебры $\Omega^*\mathcal{A}$, так как $\pi(\phi) = 0$ не предполагает, что $\pi(\delta\phi) = 0$. Поэтому нужно построить соответствующий фактор, чтобы получить градуированную дифференциальную алгебру операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Обозначим J_0 двусторонний градуированный идеал $\Omega^*\mathcal{A}$, где

$$J_0^k = \{\phi \in \Omega^k\mathcal{A}\colon \pi(\phi) = 0\}.$$

Тогда нетрудно установить, что $J = J_0 + \delta J_0$ — градуированный дифференциальный двусторонний идеал $\Omega^*\mathcal{A}$. *Дифференциальным исчислением Кона* называется пара $(\Omega^*_D\mathcal{A}, d)$ такая, что

$$\Omega^*_D\mathcal{A} = \Omega^*\mathcal{A}/J, \quad d[\phi] = [\delta\phi],$$

где $[\phi]$ обозначает класс элемента $\phi \in \Omega^*\mathcal{A}$ в $\Omega^*_D\mathcal{A}$. Это дифференциальное исчисление над алгеброй $\Omega^0_D\mathcal{A} = \mathcal{A}$. Его k-коцепной подмодуль $\Omega^*_D\mathcal{A}$ состоит из классов операторов

$$\sum_j a_0^j[D, a_1^j] \dots [D, a_k^j], \quad a_i^j \in \mathcal{A},$$

по модулю подмодуля операторов

$$\left\{\sum_j [D, b_0^j][D, b_1^j]\dots[D, b_{k-1}^j]\colon \sum_j b_0^j[D, b_1^j]\dots[D, b_{k-1}^j] = 0\right\}.$$

Пусть теперь P — правый конечный проективный модуль над $*$-алгеброй $\mathcal{A}$. Рассмотрим правую некоммутативную связность на P относительно дифференциального исчисления Кона $(\Omega_D^*\mathcal{A}, d)$. Согласно Теореме 7.3.2 правый конечный проективный модуль допускает некоммутативную связность. Построим эту связность в явном виде.

Имея правый конечный проективный модуль P над комплексным кольцом $\mathcal{A}$, рассмотрим соответствующие мономорфизм и эпиморфизм

$$\mathbf{p}\colon \mathbb{C}^N \bigotimes_C \mathcal{A} \to P, \qquad i_P\colon P \to \mathbb{C}^N \bigotimes_C \mathcal{A},$$

где символ $\bigotimes_C$ обозначает тензорное произведение над полем $\mathbb{C}$. Существует цепочка морфизмов

$$P \xrightarrow{i_P} \mathbb{C}^N \otimes \mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes\delta} \mathbb{C}^N \otimes \Omega^1\mathcal{A} \xrightarrow{\mathbf{p}} P \otimes \Omega^1\mathcal{A}, \tag{7.38}$$

где использован канонический изоморфизм модулей

$$\mathbb{C}^N \bigotimes_C \Omega^1\mathcal{A} = \left(\mathbb{C}^N \bigotimes_C \mathcal{A}\right) \otimes \Omega^1\mathcal{A}.$$

Нетрудно заметить, что композиция морфизмов (7.38), обозначаемая для краткости $\mathbf{p}\circ\delta$, является правой универсальной некоммутативной связностью на модуле P.

Имея универсальную некоммутативную связность $\mathbf{p}\circ\delta$ на правом конечном проективном модуле P над $*$-алгеброй $\mathcal{A}$, рассмотрим морфизм

$$P \xrightarrow{\mathbf{p}\circ\delta} P \otimes \Omega^1\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes\pi} P \otimes \Omega_D^1\mathcal{A}.$$

Это правая некоммутативная связность ∇_0 на модуле P относительно дифференциального исчисления Кона. Любая другая правая некоммутативная связность ∇ на P относительно дифференциального исчисления Кона имеет вид

$$\nabla = \nabla_0 + \sigma = (\mathrm{Id} \otimes \pi)\circ\mathbf{p}\circ\delta + \sigma, \tag{7.39}$$

где σ — морфизм $\mathcal{A}$-модулей

$$\sigma\colon P \to P \otimes \Omega_D^1\mathcal{A}.$$

Компоненты σ некоммутативной связности ∇ (7.39) называются *некоммутативными калибровочными полями*.

Приложение А

К-теория

Характеристические классы, представленные в первом томе [11], § 3.5, позволяют описать классы эквивалентности вещественных или комплексных векторных расслоений данной размерности как расслоений с соответствующей структурной группой. Рассмотрим теперь множество $\mathcal{C}(X)$ классов эквивалентности всех векторных расслоений над гладким многообразием X. Это коммутативный моноид относительно суммы Уитни $\oplus$, где 0-мерное векторное расслоение играет роль нулевого элемента. Чтобы превратить его в группу, необходимо определить операцию $\ominus$.

Напомним следующую алгебраическую конструкцию. Пусть задан коммутативный моноид A. Рассмотрим фактор $K(A)$ прямого произведения $A \times A$ по отношению эквивалентности: $(a, b) \approx (a', b')$, если существует элемент $p \in A$ такой, что

$$a + b' + p = b + a' + p.$$

Он наделен структурой группы, называемой *группой Гротендика* моноида A. Существует гомоморфизм

$$k\colon A \to K(A)$$

такой, что $k(a)$, $a \in A$, совпадает с классом эквивалентности пары $(a, 0) \in A \times A$. Обратный элемент $-k(a)$ к элементу $k(a)$ в группе Гротендика — это класс эквивалентности пары $(0, a)$. Тогда любой элемент (a, b) группы $K(A)$ может быть представлен как разность $k(a) - k(b)$, $a, b \in A$. Нетрудно установить, что $k(a) = k(b)$ тогда и только тогда, когда существует элемент $p \in A$ такой, что $a + p = b + p$.

Построим теперь группу Гротендика $K(X)$ моноида $\mathcal{C}(X)$ классов эквивалентности векторных расслоений над гладким компактным многообразием X [6, 14, 23]. Обозначим элемент группы Гротендика $k(E)$, $E \in \mathcal{C}(X)$, просто $[E]$. Тогда $[E] = [E']$ тогда и только тогда, когда существует векторное расслоение $F \to X$ такое, что

$$E \oplus F \approx E' \oplus F.$$

Теорема А.1. Для любого векторного расслоения E на компактном многообразии X существует векторное расслоение $E' \to X$ такое, что сумма Уитни $E \oplus E'$ является тривиальным векторным расслоением. □

Следствие А.2. Равенство $[E] = [E']$ в группе Гротендика $K(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$E \oplus I^m \approx E' \oplus I^m$$

для некоторого тривиального векторного расслоения I^m над X. □

Отсюда следует, что векторные расслоения E и E' принадлежат одному и тому же классу в группе Гротендика $K(X)$ только если они одинаковой размерности, хотя могут и не быть изоморфны друг другу. Например,

$$[TS^2] = [I^2] = 0 \in K(S^2),$$

хотя касательное расслоение $TS^2 \to S^2$ к 2-мерной сфере S^2 нетривиально. Этот пример показывает, что морфизм

$$k\colon \mathcal{C}(X) \to K(X)$$

не является мономорфизмом. Это мономорфизм на классах эквивалентности вещественных векторных расслоений размерности $m > \dim X$ и на классах эквивалентности комплексных расслоений размерности $m > \dim X/2$.

Существует другое отношение эквивалентности $\{E\}$ на моноиде $C(X)$ классов эквивалентности векторных расслоений над многообразием X. Положим $\{E\} = \{E'\}$ тогда и только тогда, когда существуют тривиальные векторные расслоения I^k и I^p такие, что

$$E \oplus I^k \approx E' \oplus I^p.$$

Эти классы эквивалентности образуют группу $\widetilde{K}(X)$, нулевой элемент которой включает все тривиальные векторные расслоения. Имеет место изоморфизм

$$K(X) = \mathbb{Z} \oplus \widetilde{K}(X).$$

Например, если X — точка, тогда $K(X) = \mathbb{Z}$, а $\widetilde{K}(X) = 0$.

Теорема А.3. Пусть X и X' — компактные многообразия и морфизмы $f_1 \colon X \to X'$ и $f_2 \colon X \to X'$ гомотопны. Тогда f_1 и f_2 порождают одни и те же изоморфизмы $K(X) \to K(X')$ и $\widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(X')$. □

Пусть $K_C(X)$ — группа Гротендика комплексных векторных расслоений над компактным многообразием X. Упоминавшейся в § 3.7 характер Чженя этих векторных расслоений определяет отображение

$$\mathrm{ch}\colon K_C(X) \to \bigoplus_{i\geqslant 0} H^{2i}(X, \mathbb{Q}) \tag{A.1}$$

такое, что

$$\mathrm{ch}\,([E] - [E']) = \mathrm{ch}\,(E) - \mathrm{ch}\,(E'). \tag{A.2}$$

Морфизм (А.1) приводит к изоморфизму

$$\widetilde{K}_C(X) \otimes \mathbb{Q} = \bigoplus_{i>0} H^{2i}(X, \mathbb{Q})$$

для комплексных векторных расслоений и к изоморфизму

$$\widetilde{K}_R(X) \otimes \mathbb{Q} = \bigoplus_{i>0} H^{4i}(X, \mathbb{Q})$$

для вещественных векторных расслоений.

Приложение Б

Теорема об индексе

Теорема об индексе Атьи—Зингера устанавливает связь между аналитическими свойствами эллиптических дифференциальных операторов на расслоениях и топологическими свойствами самих этих расслоений (см., например, [14, 24, 40, 122]).

Пусть $(x^1, \dots x^n)$ — координаты в $\mathbb{R}^n$. Для всякого набора

$$t = (t_1, \dots, t_n)$$

целых неотрицательных чисел положим, как обычно,

$$|t| = t_1 + \dots t_n, \quad D^t = (-i)^{|t|} \frac{\partial^{|t|}}{\partial_1^{t_1} \dots \partial_n^{t_n}}.$$

Пусть A и B — конечномерные комплексные векторные пространства и U — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Обозначим $C^\infty(U, A)$ — пространство гладких A-значных функций на U. Линейное отображение

$$\mathcal{D}\colon\ C^\infty(U, A) \to C^\infty(U, B)$$

является дифференциальным оператором порядка r, если существуют матричные функции $a_t \in C^\infty(U, \mathrm{Hom}\,(A, B))$ такие, что

$$\mathcal{D} = \sum_{|t| \leqslant r} a_t D^t. \tag{Б.1}$$

Оператор

$$\bar{\mathcal{D}} = \sum_{|t| = r} a_t D^t$$

называется *главной частью* линейного дифференциального оператора D (Б.1).

Пример Б.1. Линейный дифференциальный оператор первого порядка (Б.1) имеет вид

$$\mathcal{D} = \sum_{j=1}^{n} (-i) a^j(x) \partial_j + b(x). \tag{Б.2}$$

□

Линейный дифференциальный оператор $\mathcal{D}$ (Б.1) порядка r определяет гомоморфизм

$$\sigma(\mathcal{D})(x, p)\colon\ A \to B$$

для всех

$$(x, p) = (x; p_1, \dots, p_n) \in U \times \mathbb{R}_n$$

(см. обозначения в третьем томе [13], Приложение Б) по формуле

$$\sigma(\mathcal{D})(x,p) = \sum_{|t|=r} a_t(x) p_1^{t_1} \dots p_n^{t_n}. \tag{Б.3}$$

Определение Б.1. Дифференциальный оператор $\mathcal{D}$ (Б.1) называется *эллиптическим*, если для всех $x \in U$ и всех ненулевых $p \in \mathbb{R}_n$ гомоморфизм $\sigma(\mathcal{D})(x,p)$ обратим. □

Гомоморфизм $\sigma(\mathcal{D})$ называется *символом* дифференциального оператора $\mathcal{D}$. Легко убедиться, что символ $\sigma(\mathcal{D})$ дифференциального оператора $\mathcal{D}$ является образом Фурье

$$\overline{\mathcal{D}} f(x) = \int \sigma(\mathcal{D})(x,p) f^F(p) e^{ipx} d_n p$$

его главной части.

Пример Б.2. Оператор Лапласа

$$\Delta\colon C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

является эллиптическим оператором второго порядка. □

Пусть теперь X — гладкое n-мерное многообразие (без границы), E и F — гладкие комплексные векторные расслоения над X, а $\Gamma(E)$ и $\Gamma(F)$ — векторные пространства их глобальных сечений. Пусть

$$\mathcal{D}\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F) \tag{Б.4}$$

— линейный дифференциальный оператор порядка r. В атласах Ψ_E и Ψ_F расслоений E и F над одним и тем же покрытием базы X он представляется операторами (Б.1).

Обозначим $\pi\colon D(X) \to X$ и $S(X) \to X$ гладкие расслоения на n-мерные единичные шары и $(n-1)$-мерные сферы над многообразием X, ассоциированные с касательным расслоением TX. Рассмотрим индуцированное векторное расслоение π^*E над $D(X)$. Определим символ дифференциального оператора $\mathcal{D}$ (Б.4) как послойный морфизм

$$\sigma(\mathcal{D})\colon \pi^*E \to \pi^*F,$$

представимый в виде

$$\sigma(\mathcal{D})\colon (y, V_E) \to \big(y, \sigma(\mathcal{D})\big(\pi(y), y\big) V_E\big), \tag{Б.5}$$

где $y \in D(X)$, V_E — типичный слой векторного расслоения E, а морфизм $\sigma(\mathcal{D})$ $(x = \pi(y), y)$ дается локальным выражением (Б.3). Можно убедиться, что морфизм (Б.5) глобально определен.

Если E, F, G — комплексные векторные расслоения над многообразием X и

$$\mathcal{D}_1\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F), \quad \mathcal{D}_2\colon \Gamma(F) \to \Gamma(G)$$

— линейные дифференциальные операторы порядка r_1 и r_2 соответственно, тогда композиция $\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1$ является естественно дифференциальным оператором порядка $r_1 + r_2$ с символом

$$\sigma(\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1) = \sigma(\mathcal{D}_2) \circ \sigma(\mathcal{D}_1).$$

Определение Б.2. Дифференциальный оператор $\mathcal{D}$ (Б.4) называется эллиптическим порядка r, если морфизм $\sigma(\mathcal{D})|_{S(X)}$ — изоморфизм расслоений $\pi^*E|_{S(X)}$ и $\pi^*F|_{S(X)}$. □

Отсюда, в частности, следует, что если оператор $\mathcal{D}$ эллиптический, то векторные расслоения E и F имеют одинаковую размерность.

Предположим в дальнейшем, что многообразие X компактно, а векторные расслоения $E \to X$ и $F \to X$ наделены послойными эрмитовыми метриками $(.,.)$. Соответственно определены эрмитовы метрики

$$\langle .|. \rangle = \int_X (.,.) dx$$

на комплексных векторных пространствах сечений $\Gamma(E)$ и $\Gamma(F)$. Дифференциальный оператор

$$\mathcal{D}^*\colon \Gamma(F) \to \Gamma(E)$$

называется *сопряженным* к дифференциальному оператору $\mathcal{D}$ (Б.4), если для всех сечений $s \in \Gamma(E)$, $s' \in \Gamma(F)$ выполняется равенство

$$\langle \mathcal{D}s|s'\rangle = \langle s|\mathcal{D}^*s'\rangle.$$

Послойные эрмитовы метрики на векторных расслоениях $E \to X$ и $F \to X$ определяют послойные эрмитовы метрики на индуцированных векторных расслоениях $\pi^*E \to D(X)$ и $\pi^*F \to D(X)$. Следовательно определен морфизм

$$\sigma(\mathcal{D})^*\colon \pi^*F \to \pi^*E,$$

сопряженный символу $\sigma(\mathcal{D})$.

Теорема Б.3. Если многообразие X компактно и векторные расслоения $E \to X$ и $F \to X$ наделены эрмитовыми метриками, тогда для всякого дифференциального оператора $\mathcal{D}$ (Б.4) существует единственный сопряженный оператор $\mathcal{D}^*$, и

$$\sigma(\mathcal{D})^* = \sigma(\mathcal{D}^*).$$

Более того, если дифференциальный оператор $\mathcal{D}$ эллиптический, то сопряженный ему оператор $\mathcal{D}^*$ тоже эллиптический. □

Напомним, что *коядром* $\operatorname{Coker}\phi$ гомоморфизма $\phi\colon A \to B$ называется фактор-пространство

$$\operatorname{Coker}\phi = B/\operatorname{Im}\phi.$$

Ядро эллиптического дифференциального оператора $\mathcal{D}$ конечномерно и

$$\dim\,\operatorname{Ker}\mathcal{D}^* = \dim\,\operatorname{Coker}\mathcal{D}.$$

Определение Б.4. *Индексом* $\tau(\mathcal{D})$ эллиптического оператора $\mathcal{D}$ называется

$$\tau(\mathcal{D}) = \dim\,\operatorname{Ker}\mathcal{D} - \dim\,\operatorname{Coker}\mathcal{D} = \dim\,\operatorname{Ker}\mathcal{D} - \dim\,\operatorname{Ker}\mathcal{D}^*. \qquad (Б.6)$$

□

Теорема об индексе Атьи—Зингера (см. ниже Теорему Б.7) устанавливает, что индекс дифференциального оператора $\tau(\mathcal{D})$ (Б.6) может быть выражен через топологические инварианты.

Рассмотрим теперь конечный набор $\{E_k; \mathcal{D}_k, \mathcal{D}_k^*\}$ векторных расслоений E_k над компактным многообразием X дифференциальных операторов

$$\mathcal{D}_k\colon \Gamma(E_k) \to \Gamma(E_{k+1})$$

и сопряженных дифференциальных операторов

$$\mathcal{D}_k^*\colon \Gamma(E_{k+1}) \to \Gamma(E_k).$$

Предположим, что

$$\mathcal{D}_{k+1} \circ \mathcal{D}_k = 0$$

для всех k. Нетрудно показать, что в этом случае

$$\mathcal{D}_k^* \circ \mathcal{D}_{k+1}^* = 0.$$

Тогда набор $\{\Gamma(E_k); \mathcal{D}_k, \mathcal{D}^*\}$ определяет комплекс

$$\ldots \xrightarrow{\mathcal{D}_{k-1}} \Gamma(E_k) \xrightarrow{\mathcal{D}_k} \Gamma(E_{k+1}) \xrightarrow{\mathcal{D}_{k+1}} \ldots,$$

который мы будем для краткости обозначать $(E, \mathcal{D})$.

Пусть $(E, \mathcal{D})$ — такой комплекс. Определим операторы Лапласа

$$\Delta_k = \mathcal{D}_k^* \circ \mathcal{D}_k + \mathcal{D}_{k-1} \circ \mathcal{D}_{k-1}^* \colon \Gamma(E_k) \to \Gamma(E_k).$$

Комплекс $(E, \mathcal{D})$ называется *эллиптическим*, если все операторы Лапласа Δ_k эллиптические.

Пример Б.3. Комплекс Де Рама внешних дифференциальных форм на римановом n-мерном многообразии X с операторами

$$\mathcal{D}_k = d, \quad \mathcal{D}_k^* = \delta = (-1)^{nk+1} * d*$$

и оператором Лапласа

$$\Delta = d\delta + \delta d$$

является аналитическим. □

Для эллиптического комплекса на компактном многообразии имеет место обобщение *теоремы Ходжа.*

Теорема Б.5. Если дан эллиптический комплекс $(E, \mathcal{D})$ и $f_k \in \Gamma(E_k)$ — сечение расслоения E_k, то f_k может быть однозначно разложено в сумму

$$f_k = \mathcal{D}_{k-1} f_{k-1} + \mathcal{D}_k^* f_{k+1} + h_k, \tag{Б.7}$$

где h_k — гармоническое сечение расслоения E_k, т. е.

$$\Delta_k h_k = 0.$$

□

Отсюда, в частности, следует, что сечение f_k является гармоническим тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{D}_k f_k = 0, \quad \mathcal{D}_{k-1}^* f_k = 0.$$

Построим группы когомологий $H^*(E, \mathcal{D})$ комплекса $(E, \mathcal{D})$.

Исходя из теоремы Ходжа, нетрудно показать, что k-я группа когомологий $H^k(E, \mathcal{D})$ эллиптического комплекса изоморфна $\operatorname{Ker} \Delta_k$, т. е. что всякий класс когомологий замкнутых сечений f_k содержит одно и только одно гармоническое сечение. Отсюда следует, что группы когомологий эллиптического комплекса конечномерны.

Индексом комплекса $(E, \mathcal{D})$ называется сумма

$$\tau(E, \mathcal{D}) = \sum_k (-1)^k \dim H^k(E, \mathcal{D}), \tag{Б.8}$$

если она конечна. Это имеет место в случае эллиптического комплекса, и

$$\tau(E, \mathcal{D}) = \sum_k (-1)^k \dim \operatorname{Ker} \Delta_k. \tag{Б.9}$$

Пример Б.4. Пусть $(E, \mathcal{D}) = (\Omega^*, d)$ — комплекс Де Рама. Как уже отмечалось, это эллиптический комплекс, и его когомологии совпадают с когомологиями Де Рама

$$H^k(\Omega, d) = H^k(X; \mathbb{R}) = H^k(X)$$

многообразия X. Тогда индекс этого комплекса совпадает с эйлеровой характеристикой многообразия X:

$$\tau(\Omega, d) = \sum_k (-1)^k \dim H^k(X) = \sum_k b_k = \chi(X).$$

□

Пример Б.5. Пусть $\mathcal{D}$ (Б.4) — эллиптический оператор. Его индекс совпадает с индексом 2-членного комплекса

$$0 \longrightarrow \Gamma(E) \xrightarrow{\mathcal{D}} \Gamma(F) \longrightarrow 0. \tag{Б.10}$$

Действительно, лапласианами этого комплекса являются

$$\Delta_0 = \mathcal{D}^* \circ \mathcal{D}, \quad \Delta_1 = \mathcal{D} \circ \mathcal{D}^*,$$

а его группами когомологий — группы

$$H^0 = \operatorname{Ker} \mathcal{D}, \quad H^1 = \operatorname{Coker} \mathcal{D}.$$

Комплекс (Б.10) эллиптический, и его индекс равен

$$\tau = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{D} - \dim \operatorname{Coker} \mathcal{D},$$

что совпадает с выражением (Б.6) для индекса оператора $\mathcal{D}$. □

Можно построить аналогичный 2-членный комплекс, индекс которого будет совпадать с индексом данного комплекса $(E, \mathcal{D})$. Пусть

$$\widetilde{E} = \bigoplus_k E_{2k}, \quad \widetilde{F} = \bigoplus_k E_{2k+1}, \quad \widetilde{\mathcal{D}} = \bigoplus_k \left(\mathcal{D}_{2k} + \mathcal{D}^*_{2k-1}\right), \quad \widetilde{\mathcal{D}}^* = \bigoplus_k \left(\mathcal{D}^*_{2k} + \mathcal{D}_{2k-1}\right).$$

Легко проверить, что

$$\widetilde{\mathcal{D}}\colon \Gamma(\widetilde{E}) \to \Gamma(\widetilde{F}), \quad \widetilde{\mathcal{D}}^*\colon \Gamma(\widetilde{F}) \to \Gamma(\widetilde{E})$$

и последовательность

$$0 \longrightarrow \widetilde{E} \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{D}}} \widetilde{F} \longrightarrow 0 \tag{Б.11}$$

образует комплекс. Его лапласианами являются эллиптические операторы

$$\Box_0 = \widetilde{\mathcal{D}}^* \circ \widetilde{\mathcal{D}} = \bigoplus_k \Delta_{2k},$$

$$\Box_1 = \widetilde{\mathcal{D}} \circ \widetilde{\mathcal{D}}^* = \bigoplus_k \Delta_{2k+1}.$$

Следовательно комплекс (Б.11) эллиптический и его индекс равен

$$\tau = \dim \operatorname{Ker} \Box_0 - \dim \operatorname{Ker} \Box_1 = \sum_k (-1)^k \dim \operatorname{Ker} \Delta_k = \tau(E, \mathcal{D}).$$

Более того, можно показать, что оператор $\widetilde{\mathcal{D}}$ комплекса (Б.11) эллиптический.

Перейдем теперь непосредственно к теореме об индексе для комплексов (Б.10) и (Б.11).

Возьмем два экземпляра расслоений на n-мерные единичные шары $D_1(X)$ и $D_2(X)$ с типичным слоем D^n и склеим их в каждой точке $x \in X$ по сферам S^{n-1} — границам шаров D^n. Полученное расслоение на сферы S^n называется ***компактифицированным касательным расслоением***

$$\rho\colon C(X) \to X,$$

и его ориентация выбирается как у $D_1(X)$. Пусть ρ_1 и ρ_2 — ограничения расслоения ρ соответственно на подрасслоения $D_1(X)$ и $D_2(X)$. Рассмотрим индуцированные расслоения $\rho_1^* E$ и $\rho_2^* F$. Склеим их тоже в каждой точке $x \in X$ по границе шаров D_1^n и D_2^n, используя в качестве функций перехода изоморфизм $\sigma(\mathcal{D})|_{S(X)}$ (Б.5). Полученное расслоение Σ именуется ***разностным расслоением.***

Определение Б.6. *Топологическим индексом* дифференциального оператора $\mathcal{D}$ (Б.4) называется величина

$$\gamma(\mathcal{D}) = \int\limits_{C(X)} \mathrm{ch}\,(\Sigma) \wedge \rho^*\big(\mathrm{td}\,(TX)\big),$$

где $\mathrm{ch}\,(\Sigma)$ — характеристическая форма характера Чженя разностного расслоения Σ и $\mathrm{td}\,(TX)$ — характеристическая форма класса Тодда почти комплексного многообразия TX (см. первый том [11], § 3.5). □

Приведем теперь известную *теорему Атьи—Зингера* об индексе.

Теорема Б.7. Если $\mathcal{D}$ — эллиптический оператор (Б.4), его индекс и топологический индекс равны:

$$\tau(\mathcal{D}) = \gamma(\mathcal{D}). \tag{Б.12}$$

□

Отсюда, в частности, следует, что топологический индекс эллиптического оператора — целое число. Другое следствие теоремы Атьи—Зингера состоит в том, что

$$\tau(\mathcal{D}) = \gamma(\mathcal{D}) = 0,$$

если многообразие X имеет нечетную размерность.

Если многообразие X имеет размерность $2m$ и ориентируемо (напомним, что оно предполагается компактным), равенство (Б.12) можно переписать в виде

$$\tau(\mathcal{D}) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \int\limits_X \mathrm{ch}\,(E \ominus F) \frac{\mathrm{td}\,(X)}{\mathrm{e}\,(X)}, \tag{Б.13}$$

где $\mathrm{e}\,(X)$ — характеристическая форма класса Эйлера многообразия X.

Если комплекс (Б.11) образован из комплекса $(E, \mathcal{D})$, из (Б.13) получаем следующее выражение для индекса последнего:

$$\tau(E, \mathcal{D}) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \int\limits_X \sum_k (-1)^k \mathrm{ch}\,(E_k) \frac{\mathrm{td}\,(X)}{\mathrm{e}\,(X)}.$$

Выше было показано, что индексом комплекса Де Рама на компактном ориентируемом многообразии является эйлерова характеристика этого многообразия. Приведем еще примеры применения теоремы об индексе для описания индекса многообразия (см. § 5.3) и индекса спинорного комплекса.

Пусть X — $4m$-мерное ориентируемое компактное римановой многообразие. Индекс этого многообразия $\tau(\omega_X)$ определяется аналогично тому, как это было сделано для 4-мерного многообразия в § 5.3 (см. [14]). Вычислим этот индекс как индекс некоторого эллиптического комплекса.

Определим оператор ω, действующий на внешние k-формы на X как $i^{k(k-1)+2m}*$. Нетрудно убедиться, что $\omega^2 = 1$ и

$$\omega(d + \delta) = -(d + \delta)\omega. \tag{Б.14}$$

Обозначим $\Omega^\pm$ пространства $2k$-форм с собственными значениями ± 1 относительно оператора ω. В силу соотношения (Б.14), можно определить эллиптический комплекс

$$d + \delta\colon \Omega^+ \to \Omega^-, \tag{Б.15}$$

индекс которого равен

$$\tau\big(\Omega^\pm, d + \delta\big) = \dim\ \mathrm{Ker}\,\Delta|_{\Omega^+} - \dim\ \mathrm{Ker}\,\Delta|_{\Omega^-} = \dim H^{2k}_+(X) - \dim H^{2k}_-(X),$$

где символы $H^{2k}_{\pm}(X)$ обозначают пространства гармонических $2k$-форм, имеющих собственные значения ± 1 относительно оператора ω. Применяя теперь теорему об индексе, получим выражение для индекса многообразия

$$\tau(\omega_X) = \int_X L(X)$$

через *полином Хирцебруха*

$$L(X) = \prod_j \frac{a_j}{\tanh a_j} = 1 + \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{45}\left(7p_2 - p_1^2\right) + \ldots .$$

Пример Б.6. Если $\dim X = 4$, получаем приводившийся в § 5.3 результат

$$\tau(\omega_X) = \frac{1}{3}p_1(X) = -\frac{1}{24\pi^2}\int_X \operatorname{Tr}(R \wedge R),$$

где R — форма кривизны некоторой римановой метрики на X. □

Рассмотрим теперь комплекс (Б.15), когда формы на многообразии X принимают значения в слоях некоторого комплексного векторного расслоения $V \to X$. Тогда оператор $d + \delta$ можно обобщить до оператора

$$(d+\delta)_V \colon \Omega^+_V \to \Omega^-_V,$$

и теорема об индексе в применении к комплексу $(\Omega^{\pm}_V, (d+\delta)_V)$ дает

$$\tau\left(\Omega^{\pm}_V, (d+\delta)_V\right) = \int_X L(X) \wedge \widehat{\operatorname{ch}}(V),$$

где $\widehat{\operatorname{ch}}$ обозначает характер Чженя, но взятый не от формы напряженности F связности на V, а от $2F$, т. е.

$$\widehat{\operatorname{ch}}(V) = \sum_k \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k \frac{2^k}{k!} \operatorname{Tr} F^k.$$

В частности, для $\dim X = 4$ получаем

$$\tau = \frac{1}{3}\dim V \int_X p_1 + \int_X 2\left(c_1^2(V) - 4c_2(V)\right) = -\frac{\dim V}{24\pi^2}\int_X \operatorname{Tr} R \wedge R - \frac{1}{2\pi^2}\int_X \operatorname{Tr} F^2,$$

что существенно отличается от значения индекса многообразия в Примере Б.6.

Заметим, что если построить комплекс Де Рама для V-значных форм Ω^*_V, то его индекс будет равен $\dim V \cdot \chi(X)$, т. е. оказывается малочувствительным к изменению расслоения V.

Пусть теперь $E \to X$ — расслоение на римановы дираковские спиноры. Введем евклидов оператор Дирака, задаваемый в координатном виде

$$\mathcal{D} = \gamma^a h^\mu_a \mathcal{D}_\mu = \gamma^a h^\mu_a\left(\partial_\mu - A^{ab}_\mu I_{ab}\right),$$

где γ — евклидовы матрицы Дирака, удовлетворяющие условию

$$\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = -2\delta^{ab},$$

h^a_μ — тетрадные функции некоторой римановой метрики g на X,

$$I_{ab} = \frac{1}{4}[\gamma_a, \gamma_b]$$

— генераторы группы $SO(4)$ и A_μ — связность на E. Рассмотрим оператор

$$\mathcal{D}\mathcal{D}^+ + \mathcal{D}^+\mathcal{D} = -g^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}_\nu + R^{abcd}I_{ab}I_{cd} = -g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \ldots \, . \tag{Б.16}$$

Поскольку g — риманова метрика, оператор (Б.16) эллиптический. Образуем комплекс

$$\Gamma_+(E) \xrightarrow{\mathcal{D}} \Gamma_-(E), \tag{Б.17}$$

где $\Gamma_\pm(E)$ — пространства сечений спинорного расслоения E, имеющие собственные значения ± 1 относительно оператора γ_5. Индексом спинорного комплекса (Б.17) является

$$\tau = \dim\ \mathrm{Ker}\,\mathcal{D} - \dim\ \mathrm{Ker}\,\mathcal{D}^+ = n_+ - n_-,$$

где $h_\pm$ — число линейно независимых решений уравнений Дирака

$$\mathcal{D}\psi = 0$$

со спиральностями $\pm 1/2$. Применяя теорему об индексе, получим

$$n_+ - n_- = \int_X \widehat{A},$$

где

$$\widehat{A} = \prod_{i=1}^{2m} \frac{a_i/2}{\sinh(a_i/2)} = 1 - \frac{1}{24}p_1 + \frac{1}{5760}(7p_1^2 - 4p_2) + \ldots \, .$$

В случае $\dim X = 4m = 4$ получаем

$$n_+ - n_- = -\frac{1}{24}p_1.$$

В случае, когда спиноры снабжены внутренними индексами, т. е. являются сечениями расслоения

$$E \underset{X}{\times} V \to X,$$

где $V \to X$ — векторное расслоение со структурной группой $SU(q)$, получаем

$$\tau = \int_X \widehat{A} \wedge \mathrm{ch}\,(V).$$

В частности, для $q = 2$ находим

$$n_+ - n_- = c_1(V),$$

а для $q = 4$

$$n_+ - n_- = -\frac{\dim V}{2q}p_1 + \frac{1}{2}\big(c_1(V)^2 - 2c_2(V)\big).$$

Библиография

1. Ф. Березин, *Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными.* М.: Изд. МГУ, 1983.
2. У. Брателли, Д. Робинсон, *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика.* М.: Мир, 1982.
3. Г. Бредон, *Теория пучков.* М.: Наука, 1988.
4. А. Виноградов, И. Красильщик, В. Лычагин, *Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1986.
5. Ж. Диксмье, *C^*-Алгебры и их представления.* М.: Наука, 1974.
6. М. Каруби, *K-теория.* М.: Мир, 1981.
7. С. Ленг, *Алгебра.* М.: Мир, 1968.
8. С. Маклейн, *Гомология.* М.: Мир, 1966.
9. У. Масси, *Теория гомологий и когомологий.* М.: Мир, 1981.
10. А. Робертсон, В. Робертсон, *Топологические векторные пространства.* М.: Мир, 1967.
11. Г. Сарданашвили, *Современные методы теории поля.* 1. *Геометрия и классические поля.* М.: УРСС, 1996.
12. Г. Сарданашвили, *Современные методы теории поля.* 2. *Геометрия и классическая механика.* М.: УРСС, 1998.
13. Г. Сарданашвили, *Современные методы теории поля.* 3. *Алгебраическая квантовая теории.* М.: УРСС, 1999.
14. Ф. Хирцебрух, *Топологические методы в алгебраической геометрии.* М.: Мир, 1973.
15. Ж. Эмх, *Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля.* М.: Мир, 1976.
16. E. Abe, *Hopf Algebras*, Cambridge Tracts in Mathematics, **74** (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980).
17. R. Adams, *Sobolev Spaces* (Academic Press, N. Y., 1975).
18. A. Almorox, Supergauge theories in graded manifolds, in *Differential Geometric Methods in Mathematical Physics*, Lect. Notes in Mathematics, **1251** (Springer-Verlag, Berlin, 1987), p. 114.
19. L. Alvarez-Gaumé and P. Ginsparg, The structure of gauge and gravitational anomalies, *Ann. Phys.* **161** (1985) 423.
20. J. Anandan and Y. Aharonov, Geometric quantum phase and angles, *Phys. Rev. D* **38** (1988) 1863.
21. I. Anderson, *The Variational Bicomplex* (Academic Press, Boston, 1994).
22. M. Asorey, J. Cariñena and M. Paramion, Quantum evolution as a parallel transport, *J. Math. Phys.* **23** (1982) 1451.
23. M. Atiyah, *K-Theory* (Benjamin, N. Y., 1967).
24. M. Atiyah and I. Singer, The index of elliptic operators, *Ann. Math.* **87** (1968) 485.
25. M. Atiyah and I. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra* (Addison-Wesley, London, 1969).
26. M. Atiyah and I. Singer, Dirac operators coupled to vector potentials, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **81** (1984) 2597.
27. P. Bandyopadhyay, Area preserving diffeomorphism, quantum group and Berry phase, *Int. J. Mod. Phys. A* **14** (1998) 409.
28. G. Barnish, F. Brandt and M. Henneaux, Local BRST cohomology in the antifield formalism. 1. General theorems, *Commun. Math. Phys.* **174** (1995) 57.
29. G. Barnish and M. Henneaux, Isomorphism between the Batalin—Vilkovisky antibracket and the Poisson bracket, *J. Math. Phys.* **37** (1996) 5273.

30. C. Bartocci, U. Bruzzo and D. Hernández Ruipérez, *The Geometry of Supermanifolds* (Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1991).
31. C. Bartocci, U. Bruzzo, D. Hernández Ruipérez and V. Pestov, Foundations of supermanifold theory: the axiomatic approach, *Diff. Geom. Appl.* **3** (1993) 135.
32. M. Batchelor, The structure of supermanifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **253** (1979) 329.
33. M. Batchelor, Two approaches to supermanifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **258** (1980) 257.
34. M. Bauderon, Le problème inverse du calcul des variations, *Ann. l'Inst. Henri Poincaré*, **36** (1982) 159.
35. M. Bauderon, Differential geometry and Lagrangian formalism in the calculus of variations, in *Differential Geometry, Calculus of Variations, and their Applications*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **100** (Marcel Dekker, Inc., N.Y., 1985), p. 67.
36. R. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory* (Clarendon Press, Oxford, 1996).
37. D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski and G. Thompson, Topological field theory, *Phys. Rep.* **209** (1991) 129.
38. A. Bohm and A. Mostafazadeh, The realtion between the Berry and the Anandan—Ahoronov connections for $U(\mathcal{N})$ bundles, *J. Math. Phys.* **35** (1994) 1463.
39. L. Bonora and P. Cotta-Ramusino, Some remarks on BRS transformations, anomalies and the cohomology of the Lie algebra of the group of gauge transformations, *Commun. Math. Phys.* **87** (1983) 589.
40. R. Bott and L. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology* (Springer-Verlag, Berlin, 1982).
41. C. Boyer and O. Sánchez Valenzuela, Lie supergroup action on supermanifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **323**, (1991) 151.
42. F. Brandt, Local BRST cohomology and covariance, *Commun. Math. Phys.* **190** (1997) 459.
43. O. Bratelli and D. Robinson, Unbounded derivations of C^*-algebras, *Commun. Math. Phys.* **42** (1975) 253; **46** (1976) 11.
44. U. Bruzzo and R. Cianci, Variational calculus on supermanifolds and invariance properties of superspace field theories, *J. Math. Phys.* **28** (1987) 786.
45. U. Bruzzo, Supermanifolds, supermanifold cohomology, and super vector bundles, in *Differential Geometric Methods in Theoretical Physics*, ed. K. Bleuler and M. Werner (Kluwer, Dordrecht, 1988), p. 417.
46. U. Bruzzo and V. Pestov, On the structure of DeWitt supermanifolds, *J. Geom. Phys.* **30** (1999) 147.
47. J. Cariñena and H. Figueroa, Hamiltonian versus Lagrangian formulations of supermechanics, *J. Phys. A* **30** (1997) 2705.
48. R. Catenacci and A. Lena, A note on global gauge anomalies, *J. Geom. Phys.* **30** (1999) 48.
49. A. Chodos and V. Moncrief, Geometric gauge conditions in Yang—Mills theory: Some nonexistence results, *J. Math. Phys.* **21** (1980) 364.
50. R. Cianci, *Introduction to Supermaniifolds* (Bibliopolis, Naples, 1990).
51. R. Cianci, M. Francaviglia and I. Volovich, Variational calculus and Poincaré—Cartan formalism in supermanifolds, *J. Phys. A* **28** (1995) 723.
52. A. Connes, Non-commutative differential geometry, *Publ. I.H.E.S* **62** (1986) 257.
53. A. Connes, *Noncommutative Geometry* (Academic Press, N.Y., 1994).
54. A. Connes, Gravity coupled with matter and the foundations of non-commutative geometry, *Commun. Math. Phys.* **182** (1996) 155.
55. J. Cuntz and D. Quillen, Algebra extension and nonsingularity, *J. Amer. Math. Soc.* **8** (1995) 251.
56. L. Dabrowski, P. Hajac, G. Lanfi and P. Siniscalco, Metrics and pairs of left and right connections on bimodules, *J. Math. Phys.* **37** (1996) 4635.
57. P. Dedecker and W. Tulczyjew, Spectral sequences and the inverse problem of the calculus of variations, in *Differential Geometric Methods in Mathematical Physics*, Lect. Notes in Mathematics, **836** (Springer-Verlag, Berlin, 1980), p. 498.
58. B. DeWitt, *Supermanifolds* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984).
59. S. Donaldson, The orientation of Yang—Mills moduli space and 4-manifold topology, *J. Diff. Geom.* **26** (1987) 397.
60. S. Donaldson, Polynomial invariants for smooth four-manifolds, *Topology* **29** (1990) 257.
61. S. Donaldson and P. Kronheimer, *The Geometry of Four-Manifolds* (Claredon, Oxford, 1990).

62. M. Dubois-Violette, R. Kerner and J. Madore, Noncommutative differential geometry of matrix algebras, *J. Math. Phys.* **31** (1990) 316.

63. M. Dubois-Violette and P. Michor, Connections on central bimodules in noncommutative differential geometry, *J. Geom. Phys.* **20** (1996) 218.

64. M. Dubois-Violette, J. Madore, T. Masson and J. Morad, On curvature in noncommutative geometry, *J. Math. Phys.* **37** (1996) 4089.

65. M. Durdević, Geometry of quantum principal bundles, *Commun. Math. Phys.* **175** (1996) 457.

66. M. Durdević, Quantum principal bundles and corresponding gauge theories, *J. Phys. A* **30** (1997) 2027.

67. T. Eguchi, P. Gilkey and A. Hanson, Gravitation, gauge theories and differential geometry, *Phys. Rep.* **66** (1980) 5553.

68. J. Fisch, M. Henneaux, J. Stasheff and S. Teitelboim, Existence, uniqueness and cohomology of the classical BRST charge with ghosts of ghosts, *Commun. Math. Phys.* **120** (1989) 379.

69. J. Fisch and M. Henneaux, Homological perturbation theory and the algebraic structure of the antifield-antibracket formalism for gauge theories, *Commun. Math. Phys.* **128** (1990) 627.

70. A. Fomenko, *Differential Geometry and Topology* (Plenum Press, N. Y., 1987).

71. M. Freedman, The topology of four-dimensional manifold, *J. Diff. Geom.* **17** (1982) 357.

72. M. Freedman and F. Quinn, *Topology of 4-Manifolds* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1990).

73. J. Fröhlich, O. Grandjean and A. Recknagel, Sypersymmetric quantum theory and differential geometry, *Commun. Math. Phys.* **193** (1998) 527.

74. J. Fröhlich, O. Grandjean and A. Recknagel, Supersymmetric quantum theory and noncommutative geometry, *Commun. Math. Phys.* **203** (1999) 117.

75. J. Fuchs, M. Schmidt and S. Schweigert, On the configuration space of gauge theories, *Nucl. Phys. B* **426** (1994) 107.

76. G. Gaeta and P. Morando, Michel theory of symmetry breaking and gauge theories, *Ann. Phys.* **260** (1997) 149.

77. K. Gawedski, Supersymmetries-mathematics of supergeometry, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **XXVII** (1977) 335.

78. G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily, *New Lagrangian and Hamiltonian Methods in Field Theory* (World Scientific, Singapore, 1997).

79. G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily, BRST-extended polysymplectic Hamiltonian formalism, *Nuovo Cimento B* **114** (1999) 939.

80. J. Gomis, J. Paris and S. Samuel, Antibracket, antifields and gauge theory quantization, *Phys. Rep.* **259** (1995) 1.

81. E. Gozzi, M. Reuter and W. Thacker, Hidden BRS invariance in classical mechanics, *Phys. Rev.* **D40** (1989) 3363.

82. E. Gozzi, M. Reuter and W. Thacker, Symmetries of the classical path integral on a generalized phase-space manifold, *Phys. Rev.* **D46** (1992) 757.

83. E. Gozzi and M. Reuter, A proposal for a differential calculus in quantum mechanics, *Int. J. Mod. Phys.* **9** (1994) 2191.

84. V. Gribov, Quantization of non-abelian gauge theories, *Nucl. Phys. B* **139** (1978) 1.

85. R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, **52** (Springer-Verlag, Berlin, 1977).

86. A. Heil, A. Kersch, N. Papadopoulos, B. Reifenhäuser and F. Scheck, Structure of the space of reducible connections for Yang—Mills theories, *J. Geom. Phys.* **7** (1990) 489.

87. M. Henneaux, Space-time locality of the BRST formalism, *Commun. Math. Phys.* **140** (1991) 1.

88. M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems* (Prinston Univ. Press, Prinston, 1992).

89. D. Hernández Ruipérez and J. Muñoz Masqué, Global variational calculus on graded manifolds, *J. Math. Pures Appl.* **63** (1984) 283.

90. D. Husemoller, *Fiber Bundles*, Graduate Texts in Mathematics, **20** (Springer-Verlag, Berlin, 1966).

91. B. Iliev, Quantum mechanics from a geometric-observer's viewpoint, *J. Phys. A* **31** (1997) 1297.

92. A. Jadczyk and K. Pilch, Superspaces and Supersymmetries, *Commun. Math. Phys.* **78** (1981) 391.

93. M. Kachkachi, A. Lamine and M. Sarih, Gauge theories: geometry and cohomological invariants, *Int. J. Theor. Phys.* **37** (1998) 1681.

94. W. Kalau and M. Walze, Supersymmetry and noncommutative geometry, *J. Geom. Phys.* **22** (1997) 77.

95. M. Karoubi, Connexion, courbures et classes caracteristique en K-theorie algebrique, *Can. Nath. Soc. Conf. Proc.* **2** (1982) 19.

96. E. Kiritsis, A topological investigation of the quantum adiabate phase, *Commun. Math. Phys.* **111** (1987) 417.

97. O. Khudaverdian, Geometry of superspace with even and odd brackets, *J. Math. Phys.* **32** (1991) 1934.

98. I. Kolář, P. Michor and J. Slovák, *Natural Operations in Differential Geometry* (Springer-Verlag, Berlin, 1993).

99. W. Kondracki and P. Sadowski, Geometric structure on the orbit space of gauge connections, *J. Geom. Phys.* **3** (1986) 421.

100. B. Kostant, Graded manifolds, graded Lie theory, and prequantization, in *Differential Geometric Methods in Mathematical Physics*, Lecture Notes in Mathematics, **570** (Springer-Verlag, Berlin, 1977) p. 177.

101. J. Koszul, *Lectures on Fibre Bundles and Differential Geometry* (Tata University, Bombay, 1960).

102. D. Krupka, The contact ideal, *Diff. Geom. Appl.* **5** (1995) 257.

103. G. Landi, *An Introduction to Noncommutative Spaces and their Geometries*, Springer Lecture Notes in Physics (Springer-Verlag, Berlin, 1997).

104. C.-Y. Lee, D. S. Hwang and Y. Ne'eman, BRST quantization of gauge theory in noncommutative geometry, *J. Math. Phys.* **37** (1996) 3725.

105. J. Lott, Superconnections and higher index theorem, *Geom. Funct. Anal.* **2** (1992) 421.

106. J. Madore, *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995).

107. J. Madore, T. Masson and J. Mourad, Linear connections on matrix geometries, *Class. Quant. Grav.* **12** (1995) 1429.

108. J. Madore, Linear connections on fuzzy manifolds, *Class. Quant. Grav.* **13** (1996) 2109.

109. S. Maier, Generic metrics and connections on spin- and spin^c-manifolds, *Commun. Math. Phys.* **188** (1997) 407.

110. G. Maltsiniotis, Le langage des espaces et des groupes quantiques, *Commun. Math. Phys.* **151** (1993) 275.

111. J. Mañes, R. Stora and B. Zumino, Algebraic study of chiral anomalies, *Commun. Math. Phys.* **102** (1985) 157.

112. L. Mangiarotti and G. Sardanashvily, *Gauge Mechanics* (World Scientific, Singapore, 1998).

113. L. Mangiarotti and G. Sardanashvily, *Connections in Classical and Quantum Field Theory* (Singapore, World Scientific, 2000).

114. K. Marathe and G. Martucci, *The Mathematical Foundations of Gauge Theories* (North-Holland, Amsterdam, 1992).

115. V. Mathai and D. Quillen, Superconnections, Thom classes, end equivariant differential forms, *Topology* **25** (1986) 85.

116. P. McCloud, Jet bundles in quantum field theory: the BRST-BV method, *Class. Quant. Grav.* **11** (1994) 567.

117. E. Michael, *Locally Multiplicatively Convex Topological Algebras* (Am. Math. Soc., Providence, 1974).

118. P. Mitter and C. Viallet, On the bundle of connections and the gauge orbit manifold in Yang—Mills theory, *Commun. Math. Phys.* **79** (1981) 457.

119. R. Montgomery, The connection whose holonomy is the classical adiabatic angles of Hannay and Berry and its generalization to the non-integrable case, *Commun. Math. Phys.* **120** (1988) 269.

120. J. Mourad, Linear connections in noncommutative geometry, *Class. Quant. Grav.* **12** (1995) 965.

121. M. Narasimhan and T. Ramadas, Geometry of $SU(2)$ gauge fields, *Commun. Math. Phys.* **67** (1979) 121.

122. C. Nash, *Differential Topology and Quantum Field Theory* (Academic Press, London, 1991).

123. Y. Ne'eman, Irreducible gauge theory of a consolidated Weinberg-Salam model, *Phys. Lett.* **B81** (1979) 190.
124. Y. Ne'eman and S. Sternberg, Internal supersymmetry and superconnections, in *Symplectic Geometry and Mathematical Physics*, eds. P. Donato *et al.* (Birkhäuser, Berlin, 1991), p. 326.
125. Y. Ne'eman, Noncommutative geometry, superconnections and Riemannian gravity as low-energy theory, *Gen. Rel. Grav.* **31** (1999) 725.
126. V. Nistor, Higher McKean—Singer index formula and non-commutative geometry, *Contemporary Mathematics* **145** (1993) 439.
127. P. Pereshogin and P. Pronin, Geometrical treatment of nonholonomic phase in quantum mechanics and applications, *Int. J. Theor. Phys.* **32** (1993) 219.
128. M. Pflaum, Quantum groups on fibre bundles, *Commun. Math. Phys.* **166** (1994) 279.
129. L. Pittner, *Algebraic Foundations of Non-Commutative Differential Geometry and Quantum Groups* (Springer-Verlag, Berlin, 1996).
130. R. Powers and S. Sakai, Unbounded derivations in operator algebras, *J. Funct. Anal.* **19** (1975) 81.
131. D. Quillen, Superconnections and the Chern character, *Topology* **24** (1985) 89.
132. J. Rabin, Supermanifold cohomology and the Wess—Zumino term of the covariant superstring action, *Commun. Math. Phys.* **108** (1987) 375.
133. G. Roepstorff, Superconnections and the Higgs field, *J. Math. Phys.* **40** (1999) 2698.
134. A. Rogers, A global theory of supermanifolds, *J. Math. Phys.* **21** (1980) 1352.
135. M. Rothstein, The axioms of supermanifolds and a new structure arising from them, *Trans. Amer. Math. Soc.* **297** (1986) 159.
136. D. Ruipérez and J. Masqué, Global variational calculus on graded manifolds, *J. Math. Pures et Appl.* **63** (1984) 283; **64** (1985) 87.
137. G. Sardanashvily, *Generalized Hamiltonian Formalism for Field Theory. Constraint Systems.* (World Scientific, Singapore, 1995).
138. G. Sardanashvily, SUSY-extended field theory, *Int. J. Mod. Phys. A* (2000) (will appear).
139. D. Saunders, *The Geometry of Jet Bundles* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989).
140. R. Schmid, Local cohomology in gauge theories, BRST transformations and anomalies, *Diff. Geom. Appl.* **4** (1994) 107.
141. I. Singer, Some remarks on the Gribov ambiguity, *Commun. Math. Phys.* **60** (1978) 7.
142. J. Sonnenschein, Topological quantum field theories, moduli spaces and flat gauge connections, *Phys. Rev. D* **42** (1990) 2080.
143. T. Stavracou, Theory of connections on graded principal bundles, *Rev. Math. Phys.* **10** (1998) 47.
144. R. Swan, Vector bundles and projective modules, *Trans. Am. Math. Soc.* **105** (1962) 264.
145. F. Takens, Symmetries, conservation laws and variational principles, in *Geometry and Topology*, Lect. Notes in Mathematics, **597** (Springer-Verlag, Berlin, 1977), p. 581.
146. F. Takens, A global version of the inverse problem of the calculus of variations, *J. Diff. Geom.* **14** (1979) 543.
147. B. Tennison, *Sheaf Theory* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1975).
148. J. Thierry-Mieg, Geometrical reinterpretation of Faddeev—Popov ghost particles and BRS transformations, *J. Math. Phys.* **21** (1980) 2834.
149. W. Tulczyjew, The Euler—Lagrange resolution, in *Differential Geometric Methods in Mathematical Physics*, Lect. Notes in Mathematics, **836** (Springer-Verlag, Berlin, 1980), p. 22.
150. I. Vaisman, *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds* (Birkhäuser Verlag, Basel, 1994).
151. J. Várilly amd J. Grasia-Bondia, Conne's noncommutative differential geometry and the Standard Model, *J. Geom. Phys.* **12** (1993) 223.
152. R. Vitolo, Finite order variational bicomplex, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **125** (1999) 321.
153. R. O. Jr. Wells, Differential Analysis on Complex Manifolds, Graduate Texts in Mathematics, **65** (Springer-Verlag, Berlin, 1980).
154. E. Witten, Topological quantum field theory, *Commun. Math. Phys.* **117** (1988) 353.
155. E. Witten, A note on the antibracket formalism, *Mod. Phys. Lett.* **A5** (1990) 487.
156. Y. Wu, Classical non-abelian Berry's phase, *J. Math. Phys.* **31** (1990) 294.

Предметный указатель

Содержание