Programme

A. Pouchkine

Издание осуществлено в рамках программы "Пушкин" при поддержке Министерства иностранных дел Франции и посольства Франции в России.

Ouvrage réalisé dans le cadre du programme d'aide à la publication Pouchkine avec le soutien du Ministère des Affaires Etrangères français et de l'Ambassade de France en Russie.

DAVID RUELLE

HASARD ET CHAOS

EDITIONS
ODILE JACOB

Давид Рюэль

СЛУЧАЙНОСТЬ И ХАОС

Перевод с французского Н. А. Зубченко

Под редакцией д.ф.-м.н. А. В. Борисова

R&C Dynamics РХД
Москва • Ижевск

2001

УДК 519.2

Рюэль Д.
Случайность и хаос. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 192 стр.

В книге в популярной форме представлены основные идеи нелинейной динамики, детерминирования хаоса, получившие особое развитие в последние десятилетия. Книга содержит множество интересных исторических подробностей, а также обзор некоторых новых научных направлений.

Для широкого круга читателей — студентов, аспирантов, специалистов.

ISBN 5-93972-095-1

http://rcd.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Suam habet fortuna rationem.

«У случайности есть своя причина», — утверждает Петроний, но мы можем спросить: «Какая причина?» и «Что такое случайность?», «Как возникает случайность?», «Насколько непредсказуемо будущее?» Физика и математика отвечают только на некоторые из этих вопросов. Эти ответы ограниченны и иногда лишь предположительно истинны, но их сто́ит знать, и именно они составляют основную тему этой книги.

Законы физики имеют детерминистический характер. Так как же тогда случайность может присутствовать в описании вселенной? По-разному, и мы об этом узнаем. Кроме того, мы увидим, что на предсказуемость будущего накладываются суровые ограничения. Различные аспекты случайности в моем представлении будут, главным образом, следовать за принятыми (или приемлемыми) научными идеями: как старыми, так и новыми. В частности, я поподробнее рассмотрю современные идеи, касающиеся хаоса. Стиль книги можно совершенно определенно назвать нетехническим, а те несколько уравнений, которые в ней обнаружатся, можно проигнорировать без особого ущерба для смысла. Школьного курсу физики и математики, в принципе, будет вполне достаточно для понимания основного текста, предложенного вашему вниманию. Однако я в меньшей степени сдерживал себя в сносках, приведенных в конце книги: они варьируются от нетехнических замечаний до высокотехнических ссылок, предназначенных для моих коллег-профессионалов.

Два слова о моих коллегах-ученых: некоторые из них будут огорчены моим далеко невосторженным описанием ученых и мира исследований. На этот счет я не приношу никаких извинений: если наука — это изучение истины, то разве не должен человек быть столь же правдив и в отношении того, как она делается?

Бур-сюр-Иветт
Лето 1990 года

БЛАГОДАРНОСТИ

Во время написания этой книги мне весьма помогли дискуссии со множеством коллег, среди которых я особенно обязан Шелли Гольдстейну, даже несмотря на то, что он, вероятно, будет огорчен окончательным вариантом написанного мной текста. Николя Рюэль внес полезные предложения по стилистическому совершенствованию книги. Артур Уайтмен и Лаура Кенг Уард изо всех сил защищали английский язык. Йошисуке Уеда и Оскар Лэнфорд разрешили воспроизвести красивые картинки, созданные на компьютере. Наконец, Хельга Дернуа выказала силу духа и самообладание при создании печатного варианта с довольно беспорядочной рукописи. Поблагодарим их всех.

Глава 1

СЛУЧАЙНОСТЬ

Однажды, и это произойдет совсем скоро, суперкомпьютеры начнут соперничать с математиками и могут раз и навсегда лишить их работы. По крайней мере, именно это я сказал своему очень известному коллеге, бельгийскому математику Пьеру Делиню. Вознамерившись раздразнить его, я заметил, что некоторые машины уже сейчас очень хорошо играют в шахматы и упомянул о доказательстве теоремы о четырех красках[1], которое можно получить только с помощью компьютера. Конечно, современные машины полезны, главным образом, для решения довольно монотонных и в каком-то смысле глупых задач. Однако не существует причины, по которой их нельзя сделать более гибкими и универсальными, копирующими мыслительные процессы человеческого мозга с гораздо большей скоростью и точностью. Таким образом, в ближайшие пятьдесят, сто (или двести) лет компьютеры будут не только помогать математикам в их работе, но и, как мы сможем увидеть, возьмут инициативу на себя, начнут вводить новые и эффективные определения, создавать гипотезы, а затем получать доказательства теорем, лежащие далеко за пределами умственных способностей человека. Как-никак, наш мозг формировался в процессе естественной эволюции не для того, чтобы заниматься математикой, а скорее для того, чтобы помогать нам охотиться, добывать пищу, воевать и поддерживать отношения в обществе.

Пьер Делинь, конечно же, не выказал большого энтузиазма в отношении моего видения будущего математики. После некоторого колебания он сказал мне, что его лично интересуют результаты, которые он сможет самостоятельно постичь во всей их полноте. Это исключает, сказал он, с одной стороны, теоремы, полученные с помощью компьютера, а с другой стороны, некоторые чрезвычайно длинные математические доказательства, являющиеся следствием совместной работы множества авторов, которые один математик проверить не в состоянии. Он ссылался на доказательство знаменитой теоремы о классификации простых конечных групп[2]. Это доказательство состоит из множества частей и занимает более пяти тысяч страниц.

На основании того, что я только что сказал, можно было бы без особых усилий нарисовать зловещую картину современного состояния науки и ее будущего. И в самом деле, с каждым днем математику становится все труднее и труднее самостоятельно справиться с каким-либо вопросом, например, доказать какую-то теорему; с этой же проблемой, причем даже в большей степени, сталкиваются и его коллеги из других областей науки. Вне зависимости от рода их занятий, кем бы они ни были: физиками или врачами, — чтобы работать эффективно, ученые используют инструменты, которых не понимают. Наука универсальна, но люди, ей служащие, имеют достаточно узкую специализацию, так что их взгляды часто оказываются ограниченными. Никто не может сомневаться, что с момента зарождения науки интеллектуальное и общественное положение научного исследования претерпело множество изменений. Тех, кого мы теперь называем учеными, когда-то называли философами; и эти философы пытались обрести глобальное понимание нашего мира, комплексный взгляд на природу вещей. Великий Исаак Ньютон абсолютно нормальным для того времени образом простирал свое внимание на математику, физику, алхимию, теологию и изучение истории в отношении пророчеств[3]. Отказались ли мы от философских поисков, давших жизнь науке?

Конечно же нет. Этот философский поиск просто задействует новые методики, но по-прежнему остается центром всего. Это я и попытаюсь показать в этой небольшой книге. А потому здесь не будет упомянуто ни о техническом героизме науки, ни о ракетах, ни о распаде атомов. Ни слова об успехах медицины и ядерной опасности. Не будет и метафизики. Я бы предпочел надеть философские очки честного человека семнадцатого или восемнадцатого века и пройтись по научным результатам века двадцатого. Прогулкой этой будет управлять *случайность* — в буквальном смысле этого слова, — поскольку изучение случайности станет для меня путеводной нитью.

Случайность, неопределенность, слепая Судьба*: разве все эти понятия не имеют некого негативного оттенка? Разве не принад-

---

*Судя по всему, в данном контексте под Судьбой автор подразумевает некую высшую силу, управляющую жизнью людей и влияющую на ее течение. Эта сила осмысляется в двух ипостасях: сила, несущая добро, — фортуна и сила, несущая зло, — фатум. — *Прим. пер.*

лежат они скорее области гадалок, нежели ученых? Но, в действительности, научное исследование случайности возможно, и оно началось с анализа рулетки Блезом Паскалем, Пьером Ферма, Христианом Гюйгенсом и Якобом Бернулли. Этот анализ породил *исчисление вероятностей*, которое очень долго считали второстепенным разделом математики. Центральное место в исчислении вероятностей занимает тот факт, что при подбрасывании монетки очень большое число раз вероятность выпадения орла (или решки) приближается к 50 процентам. Таким образом, тогда как результат однократного подбрасывания монетки является совершенно неопределенным, длинный ряд подбрасываний создает почти определенный результат. Этот переход от неопределенности к почти определенности, когда мы наблюдаем *длинный ряд* событий или *большие системы*, является основной мыслью в изучении случайности.

Примерно в 1900 году некоторые физики и химики все еще отрицали, что материя состоит из атомов и молекул. Другие же давным-давно приняли тот факт, что в литре воздуха существует невообразимо огромное количество молекул, которые с огромной скоростью перемещаются во всех направлениях и ударяются друг от друга до ужаса беспорядочным образом. Этот беспорядок, названный молекулярным хаосом, по сути своей, является значительной хаотичностью (или случайностью), заключенной в маленький объем. Сколько хаотичности? Сколько случайности? У такого вопроса есть смысл, и ответ на него дает *статистическая механика* — область физики, созданная примерно в 1900 году австрийцем Людвигом Больцманом и американцем Дж. Уиллардом Гиббсом. Количество случайности, присутствующее в литре воздуха или килограмме свинца при определенной температуре, измеряется *энтропией* этого литра воздуха или килограмма свинца, и сейчас у нас есть методы точного определения энтропии веществ. Таким образом, мы видим, что случайность можно приручить и что она становится необходимым условием понимания материи.

Вы могли бы подумать, что то, что происходит *хаотично* или *случайно*, не имеет смысла в силу своего происхождения. Однако, немного подумав, понимаешь, что это совсем не так: группы крови в данной популяции распределяются случайно, но при этом нельзя сказать, что нет никакой разницы между A+ и O− в том случае, если требуется переливание крови. *Теория информации*, созданная американским математиком Клодом Шенноном в конце 1940-х годов, позволяет нам измерить информацию сообщений, что, в принципе, тоже имеет смысл. Как мы увидим, средняя информация, содержащаяся в сообщении, определяется как количество случайности (или хаотичности), присутствующей в наборе возможных сообщений. Чтобы понять, что это естественное определение, обратите внимание, что при выборе сообщения человек уничтожает хаотичность, присутствующую во множестве возможных сообщений. Таким образом, теория информации, как и статистическая механика, имеет дело с измерением количества хаотичности. А потому две эти теории очень тесно связаны между собой.

Говоря о сообщениях, имеющих смысл, мне хотелось бы упомянуть те сообщения, которые переносят жизненно важную информацию: генетические сообщения. В настоящее время точно установлено, что наследственные характеристики животных и растений передаются в хромосомах посредством ДНК. Эта ДНК (дезоксирибонуклеиновая кислота) также присутствует в бактериях и вирусах (в некоторых вирусах ее заменяет рибонуклеиновая кислота). Опыты показали, что ДНК состоит из длинной цепочки элементов, принадлежащих к четырем типам, которые можно представить буквами A, T, G, C. Значит, наследственность состоит из длинных сообщений, написанных с помощью четырехбуквенного алфавита. При делении клеток эти сообщения копируются с несколькими случайными ошибками; эти ошибки называются *мутациями*. Таким образом, новые клетки, или новые особи, несколько отличаются от своих предков и в большей или меньшей степени обладают способностью к выживанию и размножению. Затем естественный отбор сохраняет жизнь нескольким особям и избавляется от менее сильных или менее удачливых. Таким образом, фундаментальные вопросы, связанные с жизнью, можно описать на языке создания и передачи генетических сообщений в присутствии случайности. Хотя это и не дает ответ на великие вопросы происхождения жизни и эволюции видов, но, выражая эти вопросы через создание и передачу информации, мы найдем хотя бы предположительную точку опоры и получим некоторые, достаточно определенные, выводы.

Но прежде чем исследовать созидательную роль случайности в жизненных процессах, мне хотелось бы пригласить тебя, мой читатель, в довольно длинное путешествие по другим проблемам. Мы обсудим статистическую механику и теорию информации; мы поговорим о турбулентности, хаосе и роли случайности в квантовой механике и теории игр. Мы отойдем от основной нити и коснемся исторического детерминизма, черных дыр, алгоритмической сложности и многого другого.

Все это длинное путешествие мы будем следовать по границе между двумя обширными территориями интеллекта: с одной стороны, суровой математики, а с другой стороны, физики, в том наиболее обширном смысле, который включает все естественные науки. Кроме того, небезынтересно будет и проследить за деятельностью человеческого разума, или мозга, в его героических и зачастую жалких попытках постичь природу вещей. Выходя за пределы проблемы случайности, мы попытаемся понять хоть какие-то аспекты трехпараметрической связи странности математики, странности физического мира и странности нашего собственного человеческого разума. Для начала мне бы хотелось обсудить некоторые правила математических и физических игр.

Глава 2

МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА

Математический талант зачастую развивается в очень раннем возрасте. Это расхожее наблюдение, к которому русский математик Андрей Николаевич Колмогоров добавил любопытное предположение. Он заявил, что нормальное психологическое развитие человека останавливается в тот самый момент, когда проявляется его талант к математике. Следуя этому утверждению, Колмогоров счел, что психологически ему всего двенадцать лет. Своему соотечественнику Ивану Матвеевичу Виноградову, который в течение длительного времени был очень могущественным и нагонявшим немало страху членом Советской Академии Наук*, он дал всего восемь лет. Восемь лет академика Виноградова соответствовали, по Колмогорову, возрасту, когда маленькие мальчики отрывают у бабочек крылышки и привязывают к хвостам кошек пустые консервные банки.

Вероятно, не составит труда найти примеры, противоречащие теории Колмогорова[1], но при этом она оказывается истинной замечательно часто. На ум сразу приходит крайний случай, выраженный в моем коллеге: его психологический возраст, судя по всему, шесть лет, что создает практические проблемы, когда ему приходится путешествовать одному. Этот коллега достаточно хорошо работает как математик, но я не думаю, что он смог бы выжить в гораздо более агрессивной среде физиков.

Так что же делает математику такой особенной, настолько отличной от других областей науки? Отправную точку математической теории составляют несколько *основных утверждений* в отношении определенного количества *математических объектов* (вместо математических объектов можно было бы говорить о словах или предложениях, потому что, в некотором смысле, это они и есть). Начиная с основных посылок, человек, с помощью чистой

---

*Имеется в виду Академия Наук СССР. — *Прим. ред.*

логики, пытается вывести новые утверждения, называемые *теоремами*. Слова, которые используются в математике, могут быть знакомыми, например, «точка» или «пространство», но при занятиях математикой важно не слишком доверять повседневной интуиции и использовать только основные утверждения, данные в самом начале. Если бы вы решили сказать «стул» и «стол» вместо «точка» и «пространство», это было бы абсолютно приемлемо и в некоторых случаях даже полезно; математики не питают неприязни к подобному переводу. Тогда, если пожелаете, работа математика — это что-то вроде грамматического упражнения с чрезвычайно строгими правилами. Исходя из выбранных основных утверждений, математик строит цепочку последующих утверждений, пока не появится утверждение, которое будет выглядеть особенно изящно. Тогда математик пригласит своих коллег, чтобы показать им вновь созданное утверждение; они выразят свой восторг и скажут: «Это прекрасная теорема». Цепочка промежуточных утверждений составляет доказательство теоремы, а теорема, которую можно сформулировать просто и кратко, часто требует необычайно длинного доказательства. Именно *длина доказательств* делает математику интересной, а потому она имеет фундаментальное философское значение. С вопросом длины доказательств связана проблема алгоритмической сложности, а также теорема Геделя, которые мы обсудим в следующих главах[2].

И поскольку математические доказательства так длинны, их трудно получать. Математику приходится создавать, не допустив ни одной ошибки, длинные цепочки утверждений, видя, что он делает и куда идет. *Видеть* значит уметь догадаться, что истинно, а что ложно, что полезно, а что бесполезно. Видеть значит чувствовать, какие определения нужно ввести и какие утверждения являются ключевыми, то есть позволяющими направить теорию в ее естественное русло.

Кроме того, нельзя считать, что математическая игра произвольна и добровольна. Различные математические теории во многих отношениях связаны друг с другом: объекты одной теории могут обрести толкование в другой, что приведет к новым и более эффективным точкам зрения. Математике свойственно глубокое единство. Она являет собой не просто набор отдельных теорий, как-то: теория множеств, топология и алгебра, — каждая из которых имеет свои собственные основные допущения; математика — это единое целое. Математика — это огромное царство; и царство это принадлежит тем, кто видит. *Видящие* — те, кто обладает математической интуицией, благодаря своим способностям, получают ощущение огромного превосходства над своими слепыми современниками. Они относятся к нематематикам так же, как пилоты реактивного самолета относятся к служащим ангара, которые никогда не поднимаются в небо, или как в старые времена британцы относились к людям, живущим на Континенте*.

Математика — это своего рода йога для интеллекта: требовательная, суровая, аскетичная. И математик, истинный математик, делает огромные вложения в свое искусство. Чуждые концепции и странные отношения занимают все его мысли: вербально или невербально, сознательно или бессознательно. (Замечено, что бессознательное часто играет определенную роль в математическом открытии; прекрасный тому пример описал Анри Пуанкаре[3]). Проникновение в разум ореола математической мысли и странность этой мысли ставит математика в стороне от остального человечества, так что вполне можно понять, что (согласно предположению Колмогорова) его психологическое развитие временами кажется приостановленным.

А как насчет физиков? Математики и физики зачастую ведут себя как враждующие братья и стремятся преувеличить разницу, существующую между ними. Но математика — это язык физики, как уже заметил Галилей[4], а физик-теоретик — это всегда в некоторой степени математик. И в самом деле, Архимед, Ньютон и многие другие внесли блестящий вклад как в физику, так и в математику. Так произошло потому, что в действительности физика тесно связана с математикой, но при этом глубоко от нее отличается. Сейчас я попытаюсь это объяснить.

Цель физики — извлечь смысл из мира, нас окружающего. Обыкновенно, если вы — физик, то вы не станете пытаться понять все враз. Вы скорее будете разглядывать разные *кусочки реальности* по очереди. Вы будете *идеализировать* данный кусочек реальности и попытаетесь описать его с помощью математической теории. Таким образом, для начала вы выбираете конкретный класс явлений и *операторно* находите физические концепции для этого класса. Когда вы таким образом определяете физическую основу, то перед вами встает выбор математической теории и необходимость установления соответствия между объектами этой математической теории и физическими концепциями[5]. Именно это соответствие и образует *физическую теорию*. В принципе, физическая теория, безусловно, только выигрывает, когда соответствие между

*The Continent — Европейский материк, Континент (в противоположность Британским островам). — *Прим. пер.*

физическими и математическими величинами, которое она порождает, является более точным, а диапазон явлений, которые она описывает, более обширным. Но на практике также важна решаемость математики, поэтому если у физиков есть альтернатива, то они обычно используют теорию, более простую и удобную, а не более запутанную и, в действительности, менее точную.

Приятно осознавать, что операторное определение физической концепции не является формальным. По мере дальнейшего продвижения вперед в своем понимании мы можем продолжать анализировать операторные определения, но они все равно остаются менее точными, чем математическая теория, с которой они связаны. Например, при описании химических опытов вы пожелаете точно определить реагенты, которые являются *достаточно чистыми*, а в некоторых случаях вы можете уточнить это требование и наложить жесткие ограничения на количества загрязняющих веществ, обладающих пагубным каталитическим эффектом. Но если бы вы настаивали на том, чтобы заранее знать точное количество каждого мыслимого загрязняющего вещества, то вы никогда бы не провели никаких экспериментов. При изучении физики вы очень скоро должны посмотреть в лицо этого мнимого парадокса: контроль, которым вы обладаете над физическим объектом, который можно подержать в руке, меньше того контроля, которым вы обладаете над математическим объектом, не существующим в мире материи. Некоторых людей этот факт раздражает до такой степени, что они становятся не физиками, а математиками.

Один скромный пример физической теории являет собой то, что я назвал бы *теорией игры в кости*. Кусочек реальности, который пытаешься понять, — это то, что ты наблюдаешь при игре в кости. Операторно определенная концепция в теории игры в кости связана с *независимостью*: утверждается, что последовательные броски независимы друг от друга, если между бросками кости тщательно перемешать. А вот пример предсказания теории: для большого количества независимых бросков двух костей результатом будет 3 (т. е. 1 на одной кости и 2 — на другой) приблизительно в одном случае из восемнадцати.

Подведем итог. Приклеивая математическую теорию на кусочек физической реальности, мы получаем физическую теорию. Существует множество таких теорий, которые охватывают огромное разнообразие явлений. Также и для данного явления обычно существует несколько разных теорий. В лучших случаях человек переходит от одной теории к другой посредством *аппроксимации* (это, как правило, неконтролируемая аппроксимация). В других случаях соответствие между различными физическими теориями приводит к серьезным концептуальным проблемам, потому что они основаны на несогласованных и, на первый взгляд, непримиримых физических концепциях. Как бы то ни было, умение перепрыгивать от одной теории к другой — важная часть занятий физикой. Профессионалы скажут, что они смотрят на *квантовые поправки* или *нерелятивистский предел*, или не скажут вообще ничего, потому что принятая точка зрения «понятна из контекста». При таких обстоятельствах физическое рассуждение зачастую может звучать несколько бессвязно, если не совсем запутанно. Как же физики находят путь в такой чаще?

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно помнить, что физика обладает фундаментальным единством, потому что она описывает уникальную физическую вселенную, в которой мы живем. Математика своим единством обязана логической связи между различными математическими теориями. Физические же теории, напротив, не нуждаются в логической согласованности; они обладают единством, в силу того что описывают одну и ту же физическую реальность. Обычно физики не испытывают экзистенциальных сомнений относительно той реальности, которую пытаются описать. Очень часто им бывают нужны несколько логически несовместимых теорий, чтобы выполнить описание определенного класса явлений. Они, конечно же, будут сетовать на эту несогласованность, но не зайдут настолько далеко, чтобы отбросить ту или иную несогласующуюся теорию. Они будут держаться за них, по крайней мере, до тех пор, пока не найдут лучшую теорию, которая объясняет все наблюдаемые факты единым образом.

Последнее предостережение. Не вступайте в общие абстрактные дискуссии относительно того, является ли физика детерминистической, или вероятностной, локальной или нет, и т. п. Ответ зависит от того, какая физическая теория рассматривается и как детерминизм, или случайность, или локальность, вводится в эту теорию. Осмысленная физическая дискуссия непременно требует операторной основы. Эта основа обеспечивается либо существующей теорией, либо вам придется предоставить ее самостоятельно с помощью достаточно явного описания эксперимента, который можно, по крайней мере в принципе, осуществить.

Глава 3

ВЕРОЯТНОСТИ

Научное толкование случайности начинается, когда мы вводим *вероятности*. Физическая концепция вероятности кажется ясным базовым понятием, основанным на интуиции, но это не значит, что ее легко систематизировать и формализовать. Как и всегда при переходе от интуиции к науке нам приходится двигаться очень осторожно и внимательно. Давайте взглянем на эту проблему поближе.

«Существует девять шансов из десяти, что сегодня пойдет дождь, а потому я возьму с собой зонтик». Аргумент такого рода, содержащий вероятность, мы используем постоянно, когда принимаем решения. Вероятность дождя оценивается как 9/10, или 90 процентов, или 0,9. Вообще говоря, вероятности считаются от нуля до ста процентов или, если это выразить более математическим образом, от 0 до 1. Вероятность, равная 0 (нулю процентов), соответствует невозможности, а вероятность, равная 1 (ста процентам), — определенности. Если вероятность события не равна ни 0, ни 1, то это событие неопределенно, но наша определенность в отношении него не является полной. Например, событие, вероятность которого равна 0,000001 (один шанс на миллион), — событие достаточно невероятное.

Успех любого нашего предприятия зависит от обстоятельств, одни из которых определенны, а другие — нет. Поэтому важно правильно оценивать вероятность неопределенных обстоятельств, а чтобы сделать это, нужна *физическая теория вероятностей*. Я настаиваю, что эта теория должна быть *физической*, потому что недостаточно просто иметь возможность подсчитать вероятность, нужно также уметь сравнить полученные результаты с физической реальностью *на уровне операторов*. Если мы не уделяем достаточного внимания проблеме связи с физической реальностью, мы очень легко можем попасть в ловушку парадоксов. Поэтому мы должны быть осторожны с утверждениями вроде «вероятность того, что сегодня днем пойдет дождь, равна 0,9». Операторный смысл этого утверждения, в лучшем случае, не ясен, а потому его статус на данном этапе вызывает некоторые сомнения.

Рассмотрим утверждение: «Когда я подброшу монетку в воздух, вероятность того, что она упадет орлом, равна 0,5». Это утверждение, в сущности, звучит разумно, по крайней мере до того, как я подбросил монетку, но это же утверждение становится очевидно ложным, после того, как монетка упала, потому что тогда устраняется всяческая неопределенность. В какой момент времени монетка решает, упасть ей орлом или решкой? Допустим, что вы принимаете принцип классического детерминизма и тем самым принимаете, что состояние вселенной в какой-то момент времени определяет ее состояние в любой последующий момент времени. Тогда сторона, на которую упадет монетка, определена в момент создания вселенной! Означает ли это, что мы должны забыть о вероятностях или что мы можем использовать их только тогда, когда заменяем классическую теорию квантовой? *Нет*! Так нельзя заниматься физикой. Разумным подходом в данном случае будет ввести вероятности в ничем неограниченную систему взглядов, не говоря ни о классической, ни о квантовой механике. Четко определив свои концепции как математически, так и операторно, мы окажемся в лучшем положении для рассмотрения связи вероятностей с детерминизмом, квантовой механикой и т. п.

Таким образом, в отношении введения вероятностей мне хотелось бы защитить следующую философскую позицию. Для различных классов явлений (которые я ранее назвал «кусочками реальности») существуют идеализации, содержащие вероятности. Эти идеализации интересны, потому что они полезны: они помогают узнать, что при подбрасывании монетки может выпасть как орел, так и решка, с равной вероятностью. Они помогают узнать, что при двадцатикратном подбрасывании монетки вероятность того, что каждый раз выпадет орел, менее 1 шанса на миллион. Оценка вероятности заменяет неопределенный «шанс» чем-то более существенным. Поэтому наша следующая задача состоит в том, чтобы придать этому *чему-то* логическую и операторно согласованную структуру.

Если вы не знакомы с теорией вероятностей (или со строгой наукой вообще), то можете счесть оставшуюся часть этой главы несколько недоступной. Но, несмотря на это, не пропускайте ее! Я просто хочу изобразить пример физической теории: операторно определенные физические концепции, математическая теория и связь физических и математических концепций. Физическая теория вероятностей: именно ее я хочу описать. Согласно любым нормам это очень простая физическая теория.

Теория вероятностей — это искусство игры с утверждениями типа

$$\mathrm{prob}(«\mathrm{A}») = 0,9,$$

что означает, что вероятность события «A» равна 90 процентам. С точки зрения математики, событие «A» — не более чем символ, с которым следует обращаться согласно определенным правилам. В рамках физической идеализации событие «A» — это действительно событие, такое как «сегодня днем пойдет дождь», и его следует определять с помощью операторов. (Например, я могу решить, что сегодня днем отправлюсь на прогулку, и, если пойдет дождь, я это замечу. Как обычно и бывает в физике, операторное определение несколько неточно: может случиться так, что еще утром меня собьет грузовик, что положит конец моим метеорологическим наблюдениям.)

Событие «не A», с математической точки зрения, — представляет собой всего-навсего новый комплект символов. Во всех физических идеализациях, которые мы пожелаем рассмотреть, событие «не A» соответствует факту, что событие «A» не происходит. В вышеприведенном примере «не A» означает, что «сегодня днем дождь не пойдет».

Теперь введем, помимо «A», новое событие «B». С точки зрения математики, это позволяет нам ввести новые комплекты символов, а именно: «A или B» и «A и B». Эти новые комплекты символов опять-таки являются событиями. В физической идеализации «B» могло бы, например, означать «сегодня днем не будет дождя, но пойдет снег» или «бутерброд, который я роняю, упадет маслом вниз». Событие «A или B» физически соответствует тому, что происходит событие «A», или происходит событие «B», или происходят оба события «A» и «B». Событие «A и B» соответствует тому, что происходят оба события «A» и «B».

Теперь мы может завершить математическое представление вероятностей, перечислив три основных утверждения, или правила:

(1) prob(«не A») = 1 − prob(«A»);

(2) если «A» и «B» — *взаимоисключающие события*, то prob(«A или B») = prob(«A») + prob(«B»);

(3) если «A» и «B» — *независимые события*, то prob(«A и B») = prob(«A»)×prob(«B»).

Через минуту мы вернемся к рассмотрению этих правил, но для начала заметим, что они содержат новые и неопределенные концепции *взаимоисключающих* событий и *независимых* событий. В курсе по теории вероятностей на данном этапе были бы введены некоторые правила, связанные с тем, как вести себя с операторами *не*, *и* и *или*, а также математические концепции взаимоисключающих и независимых событий. Также можно было бы добавить пару основных утверждений относительно бесконечного набора событий. Все это, безусловно, важные моменты, но они не существенны для достижения нашей цели, вследствие чего мы их пропустим.

Мы только что отказались от рассмотрения математических основ исчисления вероятностей[1] во всей их совокупности, и это нельзя назвать неправильным. Но теперь перед нами стоит не менее важная задача определения физической основы вероятностей, или даже различных физических основ, потому что вероятности имеют место в совершенно различных ситуациях, и операторные определения необходимо давать для каждого конкретного случая. Здесь же мы удовлетворимся общими указаниями.

В физических идеализациях два события считаются *взаимоисключающими*, если они не могут произойти одновременно. Допустим, что события «A» и «B» — это «сегодня днем пойдет дождь» и «сегодня днем не будет дождя, но пойдет снег», соответственно. Тогда «A» и «B» — события взаимоисключающие, и правило (2) гласит, что их вероятности складываются: 90-процентная вероятность дождя и 5-процентная вероятность снега без дождя дают 95-процентную вероятность дождя или снега. Подобное рассуждение интуитивно кажется удовлетворительным.

Говорят, что два события являются *независимыми*, если они «никак не связаны» друг с другом, т. е. если факт реализации одного из событий, в среднем, не оказывает никакого влияния на реализацию другого. Допустим, что события «A» и «B» — это «сегодня днем пойдет дождь» и «бутерброд, который я роняю, упадет маслом вниз», соответственно. Я считаю, что два этих события никак не связаны друг с другом, что они не имеют друг к другу никакого отношения, что они независимы. Применяя правило (3), находим, что вероятности этих событий следует умножать: вероятность дождя, равная 0,9, умноженная на вероятность размазывания масла по полу, равная 0,5, дает вероятность реализации обоих событий, равную 0,45. Интуитивно это тоже кажется удовлетворительным: существует 90-процентная вероятность дождя и 50-процентная вероятность падения бутерброда маслом вниз, что дает 45-процентную вероятность того, что на улице будет дождь, а масло окажется на полу[2].

Таким образом, мы проверили правила (2) и (3) и убедились в том, что интуитивно они кажутся разумными. Что касается правила (1), то оно просто утверждает, что если вероятность дождя равна 90 процентам, то вероятность его отсутствия равна 10 процентам, с чем трудно спорить.

Совершенно ясно, что среди понятий, которые мы только что обсуждали, самым тонким является концепция независимости. Опыт и здравый смысл говорят о том, что некоторые события происходят независимо друг от друга, однако время от времени случаются сюрпризы. А потому следует проверить, что вероятности предположительно независимых событий ведут себя так, как утверждается в правиле (3). Кроме того, не менее уважительно нужно относиться и к операторным определениям. Так, при игре в кости кости нужно хорошенько трясти между бросками. Только в таком случае броски можно будет считать независимыми.

Отлично. Теперь мы знаем, как обращаться с вероятностями, но нам до сих пор неизвестно, чему они соответствуют в операторном смысле! Приведем пример операторного определения вероятности «A»: осуществите большое число независимых экспериментов при условиях таких, чтобы «A» могло произойти, а затем понаблюдайте, в какой доле случаев «A» действительно происходит; эта доля и является вероятностью «A». (Для математика «большое число» экспериментов означает число, стремящееся к бесконечности.) Например, если вы подбросите монетку большое число раз, то примерно в половине случаев выпадет орел, что соответствует вероятности 0,5.

Теперь, когда у нас есть прекрасное операторное определение, мы можем спросить, что подразумевается под вероятностью события «сегодня днем пойдет дождь». В самом деле, кажется сложным повторить «сегодняшний день» независимо большое число раз. Поэтому некоторые пуристы скажут, что рассматриваемая вероятность не имеет смысла. Однако ей можно придать смысл, например, осуществив большое количество численных имитаций на компьютере (совместимом с нашим настоящим знанием метеорологической ситуации) и определив долю случаев, когда имитация покажет дождь. Если вероятность дождя получится таким образом равной 90 процентам, то даже пуристы, выходя из дома, возьмут с собой зонты.

Глава 4

ЛОТЕРЕИ И ГОРОСКОПЫ

В прошлой главе я ввел вероятности с основными математическими правилами, операторными определениями и т. п., и вы можете задаться вопросом, действительно ли нужны все эти предосторожности. Как-никак, все, что я сказал, можно выразить несколькими словами: вероятности взаимоисключающих событий складываются (чтобы определить вероятность события *или*), вероятности независимых событий перемножаются (чтобы определить вероятность события *и*), и доля тех случаев, когда событие происходит (при большом числе независимых попыток) составляет вероятность этого события. Если немного подумать, то все это становится достаточно ясным, так что данная тема не должна стать предметом каких бы то ни было разногласий. Однако когда видишь, каким успехом пользуются лотереи и гороскопы (помимо всего прочего), то понимаешь, насколько поведение большинства людей отличается, в отношении вероятностей, от того, что должно было бы подсказывать здравое научное мышление.

Лотереи — это свободно принятая форма налогообложения менее привилегированных слоев общества. Лотерейный билет, который вы покупаете, быть может, за совсем небольшую цену, — это маленькая надежда разбогатеть. Но вероятность сорвать джек-пот очень мала: это один из типов низкой вероятности (вроде того, что, когда вы идете по улице, на вас упадет кирпич), которым при обычных условиях вы бы пренебрегли. На самом деле, выигрыши, большие или маленькие, в среднем, не компенсируют цену билета, а исчисление вероятностей показывает, что вы практически определенно потеряете деньги, если играете регулярно. Давайте рассмотрим пример несколько упрощенной лотереи, в которой вероятность выигрыша составляет 10 процентов и вы выигрываете в пять раз больше стоимости билета. Если рассматривать большое число лотерей, то доля выигрышей близка к 1/10, и, поскольку вы выигрываете в 5 раз больше стоимости билета, отсюда следует, что ваша общая прибыль составляет примерно половину потраченных вами денег. Таким образом, суммарная прибыль отрицательна: вы теряете примерно половину потраченных денег. В заключение добавлю, что, чем больше билетов вы покупаете, тем больше денег вы теряете; это имеет место и в более сложных лотереях, поскольку все они придуманы для того, чтобы высасывать деньги из игроков ради выгоды организатора[1].

Сейчас мне хотелось бы поговорить о гороскопах, для чего мне понадобится еще одно утверждение из исчисления вероятностей, которое, фактически, представляет собой измененную формулировку правила (3), приведенного в предыдущей главе. Вот это утверждение:

(4) если «A» и «B» независимы, то prob(«B», зная, что «A» реализуется) = prob(«B»).

Другими словами, знание того, что событие «A» реализуется, совершенно ничего не говорит нам о событии «B», и вероятность последнего события остается равной prob(«B»). Это истинно, если допустить, что «A» и «B» независимы. (Если события «A» и «B» независимыми не являются, то говорят, что между ними существуют *корреляции* или что они коррелированы.) Правило (4) обосновано, для интересующегося читателя, в примечании[2].

Теперь мы можем обратиться к проблеме гороскопов, которые гораздо тоньше и интереснее лотерей, потому что в этом случае мы не в состоянии сразу увидеть роль вероятностей. Обыкновенно, гороскоп сообщает вам, что если вы — Лев, то на этой неделе планеты располагаются благоприятным для вас образом, так что вы будете удачливы в любви и играх, но если вы — Рыбы, то вы должны, чего бы вам это ни стоило, избегать полетов самолетом, сидеть дома и заботиться о своем здоровье. Астрономы и физики сказали бы, что утверждения «X — Лев» и «X будет удачлив в играх на этой неделе» — события независимые. То же самое касается и утверждений «X — Рыбы» и «X попадет в катастрофу, если на этой неделе будет путешествовать самолетом». В действительности, сложно придумать лучшие примеры событий, которые никак не связаны друг с другом и потому независимы с позиций теории вероятностей. Следовательно, мы можем применить вышеприведенное правило (4) и сделать вывод, что вероятность того, что X выиграет в лотерею, одинакова, вне зависимости от того, является X Львом или нет. Аналогичным образом, опасности путешествия самолетом для Рыб ничем не отличаются от опасностей для человека любого другого знака зодиака. В заключение добавлю: гороскопы совершенно бесполезны.

Тогда этот вопрос, вероятно, безапелляционно осуждают? Еще нет, так как сторонники астрологии отрицают, что два факта: «X — Лев» и «X будет удачлив в играх на этой неделе» — события независимые. И они могут представить целый список блестящих астрономов, которые в то же время были и астрологами: Гиппарх, Птоломей и Кеплер, например. Таким образом, лучшим способом положить конец любым спорам является эксперимент: можно ли найти существенную статистическую связь между гороскопами и реальностью? Ответ отрицателен и полностью дискредитирует астрологию. Однако можно сказать, что недоверие к астрологии среди ученых имеет другую причину: наука изменила наше понимание вселенной таким образом, что взаимные связи, которые считались потенциально возможными в античные времена, стали несовместимы с нашим настоящим знанием структуры вселенной и природы физических законов. Астрология и гороскопы могли бы найти свое место в античной науке, но не находят его в современной.

Однако ситуация это очень непростая, а потому она заслуживает серьезного обсуждения. Из-за сил, существующих между физическими телами (всемирная гравитация), мы знаем, что Венера, Марс, Юпитер и Сатурн некоторым образом воздействуют на нашу старую планету Земля. Достаточно ясно, что эти воздействия малы, и можно было бы предположить, что их влияние на ход человеческих дел равно нулю. *Но это не так!* На самом деле некоторые физические явления, например, метеорологические, выказывают огромную чувствительность к возмущениям, так что самая крошечная причина через некоторое время может возыметь важные последствия. Таким образом, можно понять, что присутствие Венеры или любой другой планеты вносит свои поправки в эволюцию погоды и имеет следствия, которыми мы не можем пренебречь. Действительно, и позднее мы это увидим, факты состоят в том, что будет или нет дождь сегодня днем, зависит, кроме всего прочего, от гравитационного влияния Венеры, которое имело место несколько недель назад! И если мы внимательнее рассмотрим все это, то обнаружим, что те же самые аргументы, которые утверждают, что Венера влияет на погоду, мешают нам точно узнать, каково это влияние. Другими словами, дождь, который идет сегодня днем, и нахождение Венеры в том или ином месте остаются независимыми событиями в том, что касается нашего использования теории вероятностей. Все это, безусловно, не противоречит здравому смыслу, но является гораздо более тонким, чем по наивности своей можно было бы предположить (смотри обсуждение в примечании)[3].

Продолжим наше обсуждение. Существуют ли ситуации, в которых звезды и планеты оказывают весьма особенное влияние на наши дела, приводя к имеющим смысл взаимосвязям с точки зрения теории вероятностей? Давайте представим несколько выжившего из ума астронома, который, на основе своих наблюдений Венеры, совершает садистские преступления; разве это не обеспечило бы интересную связь с некоторыми гороскопами? Такое предположение не абсолютно абсурдно: древние майя, которые очень тщательно наблюдали за циклом Венеры, помимо этого, выказывали огромный энтузиазм в отношении принесения человеческих жертв (они разрезали грудь жертвы кремневым ножом, вырывали сердце и сжигали его дотла). Это означает, что вмешательство человеческого разума обеспечивает механизм, посредством которого между «событиями», которые не имеют между собой никакой априорной связи, можно установить некоторые взаимоотношения. Так как же тогда мы узнаем, когда события действительно независимы?

Дело в том, что современные ученые извлекают выгоду из довольного подробного знания того, как устроена вселенная, и хорошего понимания принципа ее функционирования. Вследствие этого, мы обладаем достаточно точными идеями того, какие связи могут существовать, а какие не могут. Нам известно, например, что на скорость химической реакции ощутимым образом могут повлиять следы примесей, но не фаза Луны. Если у нас появляется сомнение, мы устраиваем проверку. Некоторые неожиданные взаимные связи могут быть привнесены разумными силами, но их способности тоже не являются неограниченными.

«Если вы — Лев, то на этой неделе вы будете удачливы в любви и в играх». Что мы можем сказать о связи положения планет и частной жизни X, который читает гороскопы? Как мы видели, такие связи нельзя назвать невозможными в той степени, в какой они связаны с разумной силой (жрецом майя или сумасшедшим астрономом). Для всего остального их можно исключить. Наши предки населяли вселенную огромным количеством «разумных сил» — богов, дьяволов, эльфов, — которых уничтожила наука. Боги мертвы, а человеческое вмешательство не в состоянии повысить «везение X в играх». (Мы устанавливаем правила так, что явный обман не допускается.) Тогда, судя по всему, быть Львом и быть удачливым в играх на этой неделе — события независимые, и статистическое изучение действительно подтвердило бы данный вывод. А как насчет везения X в любви? Здесь человеческое вмешательство не просто возможно, оно практически определенно, благодаря вмешательству нашего друга X, который любит читать гороскопы, если он или она несколько доверчивы. На самом деле, такова человеческая природа: вера, что на этой неделе нам «повезет в любви», повышает нашу уверенность в себе, а потому и нашу удачу.

Неизбежный вывод состоит в том, что мы зачастую принимаем иррациональные решения, основанные на случайных совпадениях, которые мы принимаем за «знамения», или предсказания. Иррациональное поведение далеко не всегда вредно: не ходить под лестницей — иррациональный предрассудок, но в то же время и разумная предосторожность. Более того, как мы увидим, теория игр утверждает, что из принятия некоторых неразумных решений можно извлечь выгоду. И наконец, считать, что мы обладаем способностью совершать только рациональные поступки, — не более чем иллюзия.

Тем не менее, наличие правильных идей относительно вероятностей может помочь нам избежать достаточно серьезных ошибок. Больно видеть людей, которые теряют свои деньги в лотереях и подобных им играх, не имея возможности позволить себе это. Что же касается гороскопов, я признаю, что время от времени с удовольствием их читаю. В предсказаниях путешествий в дальние страны, романтических встреч, или баснословных наследств есть что-то почти поэтическое..., кроме того, эти предсказания достаточно безобидны, покуда вы в них не слишком верите. Однако справедливо возмущение человека, когда некоторые предприятия принимают решение о найме работника на основе гороскопов. «Астральная» дискриминация такого рода — не просто глупость, это самое натуральное мошенничество.

Глава 5

КЛАССИЧЕСКИЙ ДЕТЕРМИНИЗМ

Поток *времени* — это неотъемлемый аспект нашего восприятия мира. А теперь мы знаем, что другим неотъемлемым аспектом этого восприятия является *случайность*. Каким образом совмещаются эти два аспекта? Перед тем, как подбросить монетку, я оцениваю вероятности выпадения орла или решки как равные 50 процентам. Затем я подбрасываю монетку и получаю, скажем, орла. В какой момент времени монетка решает упасть орлом? Мы уже задавались этим вопросом, и ответ на него нельзя назвать простым: здесь мы сталкиваемся с одним из тех «кусочков реальности», которые описываются несколькими различными физическими теориями, и связать эти теории довольно сложно. Ранее мы говорили о теории, описывающей случайность, — физической теории вероятностей. Для описания времени все еще более усложняется, потому что в нашем распоряжении оказываются, как минимум, две различных теории: *классическая* механика и *квантовая* механика.

Давайте ненадолго забудем о подбрасывании монеток и поговорим о механике. Механика — классическая или квантовая — стремится рассказать нам, каким образом вселенная эволюционирует с течением времени. А потому механика должна описывать движение планет вокруг солнца и движение электронов вокруг ядра атома. Но классическая теория, давая отличные результаты для больших объектов, становится неадекватной на уровне атомов, где ее должна заменять квантовая теория. Таким образом, квантовая механика является более точной, чем классическая, но ее использование более сложно и имеет свои нюансы. Фактически же, ни классическая, ни квантовая теория не применимы для объектов, движущихся со скоростью, близкой к скорости света; в таких случаях нам приходится пользоваться относительностью Эйнштейна (специальной или общей относительностью, если мы также хотим описать и гравитацию).

Но, можете сказать вы, зачем останавливаться на классической или квантовой механике? Разве не захотим мы воспользоваться *истинной* механикой, принимающей во внимание все квантовые и релятивистские эффекты? Как-никак, нас интересует вселенная в том виде, в каком она действительно существует, а не та или иная классическая или квантовая идеализация. Давайте же посмотрим на этот важный вопрос более внимательно. Прежде всего, мы должны взглянуть в лицо факту, что *истинной механики* в нашем распоряжении нет. В момент написания этой книги мы не обладаем единой теорией, которая согласовалась бы со всем, что нам известно о физическом мире (относительностью, квантами, свойствами элементарных частиц и гравитацией). Каждый физик надеется увидеть такую единую теорию в действии, и, быть может, однажды так и произойдет, но сейчас — это не более чем надежда. Даже если одна из тех теорий, которые уже были предложены, впоследствии окажется правильной, в настоящее время она не является *действующей* в том смысле, что она не дает нам возможности вычислить массы элементарных частиц, их взаимодействия и т. п. Максимум, на что мы способны сейчас, — использовать несколько приблизительную механику. В этой главе мы будем пользоваться классической механикой. Позднее мы увидим, что квантовая механика основана на физических концепциях, которые не поддаются интуитивному пониманию. Таким образом, связь между квантовой механикой и случайностью проанализировать будет еще сложнее. Судя по всему, все указывает на то, что физические концепции истинной механики будет сложно уловить интуитивно. Таким образом, чтобы исследовать связь случайности со временем, разумно будет воспользоваться классической механикой — с ее хорошо знакомыми физическими концепциями.

Как я только что сказал, цель механики состоит в том, чтобы рассказать нам, как вселенная эволюционирует с течением времени. Среди всего прочего, механика должна описывать вращение планет вокруг Солнца, или траекторию космического корабля, который приводят в движение ракеты, или поток вязкой жидкости. Короче говоря, механика должна описывать *временну́ю эволюцию* физических систем. Ньютон был первым человеком, который понял, как это сделать. Говоря более современным языком, чем язык Ньютона, скажем, что *состояние* физической системы в определенное время задается положением и скоростью точек, в которых сконцентрирована материя системы. Следовательно, мы должны задать положения и скорости планет, или космического корабля, который нас интересует, или всех точек, составляющих вязкую жидкость в процессе ее течения. (В последнем случае количество таких точек бесконечно, а потому необходимо рассматривать бесконечное количество положений и скоростей.)

Согласно механике Ньютона, когда мы знаем состояние физической системы (положения и скорости) в данное время — назовем его начальным, — мы знаем ее состояние в любое время. Каким же образом мы получаем это знание? Здесь необходимо новое понятие: концепция *сил*, действующих на систему. Для данной системы силы в каждый момент времени определяются состоянием системы в этот самый момент. Например, сила притяжения между двумя небесными телами обратно пропорциональна квадрату расстояния между этими телами. Далее Ньютон сообщает, каким образом изменение состояния системы с течением времени связано с силами, действующими на эту систему. (Эта связь выражается уравнением Ньютона[1].) Зная начальное состояние системы, мы можем определить, как это состояние изменяется с течением времени и тем самым найти, как утверждается, состояние системы в любой другой момент времени.

Я только что в нескольких словах представил тот великий памятник универсальной мысли, которым является механика Ньютона, теперь также называемая классической механикой. Серьезное изучение классической механики потребовало бы введения математических инструментов, которые невозможно представить в данной книге. Но даже не погружаясь в подробное математическое рассмотрение теории Ньютона, в ее отношении можно сделать несколько интересных замечаний. Прежде всего отметим, что идеи Ньютона шокировали многих его современников. Рене Декарт, в частности, не мог принять понятие «сил, действующих на расстоянии» между небесными телами. Он считал эту мысль абсурдной и иррациональной. Физика, согласно Ньютону, заключалась в приклеивании математической теории на кусочек реальности и соответствующем воспроизведении наблюдаемых фактов. Но Декарту подобный подход казался слишком небрежным. Он предпочел бы *механистическое* объяснение, в котором присутствовали бы контактные силы вроде тех, которые прикладывает одно зубчатое колесо к другому, но только не силы, действующие на расстоянии. Развитие физики показало, что прав был Ньютон, а не Декарт. А что бы подумал последний о квантовой механике, в которой положение и скорость частицы невозможно определить одновременно?

Возвращаясь к механике Ньютона, мы видим, что она дает полностью детерминистическую картину мира: если мы знаем состояние вселенной в какое-то (произвольно выбранное) начальное время, мы должны суметь определить ее состояние в любой другой момент времени. Лаплас (или Пьер Симон, маркиз де Лаплас, если хотите) сформулировал изящное и превосходное определение детерминизма. Вот оно[2].

> Интеллект, который, в данное мгновение, знал бы все силы, действующие в Природе, и положение всех вещей, из которых состоит мир, — будь он настолько огромным, чтобы подвергнуть все эти данные анализу, — одной формулой охватил бы движения как самых больших тел вселенной, так и самых крошечных атомов: для него не было бы ничего неопределенного, а будущее, равно как и прошлое предстояло бы перед его глазами. Человеческий разум, в совершенстве, которое он сумел придать астрономии, выражает слабое сходство с этим интеллектом.

Эта цитата Лапласа имеет почти теологический оттенок и уж конечно порождает много вопросов. Согласуется ли детерминизм со свободной волей человека? Согласуется ли он со случайностью? Давайте прежде всего обсудим случайность, а затем взглянем и на запутанную проблему свободной воли.

На первый взгляд, детерминизм Лапласа не оставляет места случайности. Если я подбрасываю монетку вверх, в воздух, законы классической механики абсолютно определенно говорят, как она упадет: орлом или решкой. Поскольку случайность и вероятности на практике играют важную роль в нашем понимании природы, мы можем подвергнуться искушению и отказаться от детерминизма. Но на самом деле мне хотелось бы доказать, что дилемма «случайность против детерминизма» — это почти абсолютно ложная проблема. Здесь я попытаюсь вкратце рассказать, как ее можно избежать, оставляя более подробное ее изучение на последующие главы.

Первым делом следует заметить, что между случайностью и детерминизмом не существует логической несовместимости. В самом деле, состояние системы в начальное время может быть не точно установленным, а хаотичным. Если говорить более техническим языком, то начальное состояние нашей системы может иметь определенное *распределение вероятностей*. Если это именно тот случай, то состояние нашей системы также будет хаотичным и в любое другое время, а ее хаотичность будет описана новым распределением вероятностей, причем последнее можно будет вывести детерминистически, используя законы механики. На практике состояние системы в начальное время никогда не известно с абсолютной точностью: мы обязаны допускать небольшую долю хаотичности в этом начальном состоянии. Мы увидим, что небольшая доля хаотичности в начале может породить значительную хаотичность (или значительную неопределенность) в более позднее время. Таким образом, мы видим, что на практике детерминизм не исключает случайность. Мы можем утверждать только то, что мы способны представить классическую механику, — если мы того пожелаем, — даже не упоминая о случайности или хаотичности. Впоследствии мы увидим, что это не является таковым в случае с квантовой механикой. Таким образом, две идеализации физической реальности могут оказаться довольно разными в концептуальном плане, даже если дают практически идентичные предсказания для большого класса явлений.

Отношения между случайностью и детерминизмом составляли предмет многочисленных обсуждений, а недавно вызвали горячий спор между Рене Томом и Ильей Пригожиным[3]. Философские идеи этих джентльменов действительно представляют резкий контраст. Однако интересно заметить, что когда дело доходит до специфики наблюдаемых явлений, то у серьезных ученых разногласий обычно не возникает. (Если бы это было наоборот, то все, вероятно, было бы еще интереснее.) Обратим внимание на утверждение Тома, что, поскольку дело науки состоит в формулировании законов, научное изучение временной эволюции вселенной непременно создаст детерминистическую формулировку. Однако совсем необязательно, что это будет детерминизм Лапласа. С тем же успехом мы могли бы получить детерминистические законы, управляющие некоторыми распределениями вероятностей: случайности и хаотичности так просто не избежишь! Но при этом замечание Тома важно в отношении дилеммы «случайность против детерминизма» и родственной ей проблемы свободной воли. В действительности, Том хочет лишь сказать нам, что эту проблему невозможно решить, делая тот или иной выбор из области механики, так как механика по сути своей является детерминистической.

Проблему *свободной воли* нельзя назвать легкой, но нельзя и оставить без обсуждения. С вашего позволения мне хотелось бы представить точку зрения, которой в отношении этого предмета придерживался Эрвин Шредингер, один из создателей квантовой механики[4]. Роль, которую играет случайность в квантовой механике, позволила надеяться, замечает Шредингер, что эта механика согласуется с нашими идеями о свободной воле лучше, чем это удается сделать детерминизму Лапласа. Но такая надежда, продолжает он, не более чем иллюзия. Сначала Шредингер отмечает, что реальной проблемы, возникающей из-за свободной воли других людей, не существует: мы можем принять абсолютно детерминистическое объяснение всех *их* решений. Трудности же вызывает мнимое противоречие, существующее между детерминизмом и *нашей* свободной волей, которая интроспективно характеризуется тем, что существует *несколько возможностей*, и мы задействуем свою *ответственность*, выбирая одну из них. Введение случайности в законы физики никоим образом не помогает нам разрешить это противоречие. В самом деле, разве мы можем сказать, что задействуем свою ответственность, делая какой-либо выбор наобум? Наша свобода выбора зачастую лишь иллюзорна. Допустим, говорит Шредингер, что вы пришли на официальный ужин с важными и скучными людьми. (Совершенно очевидно, что он подобным образом «развлекался» больше, чем это может выпасть на долю обычного человека.) Вы можете подумать, продолжает он, о том, чтобы залезть на стол и начать танцевать, разбивая тарелки и стаканы, но вы этого не сделаете, а потому не можете утверждать, что проявляете свою свободную волю. В других случаях вы действительно делаете выбор: ответственный и, возможно, мучительный; подобный выбор точно не обладает качествами решения, принятого наобум. В заключение добавлю, что случайность не помогает нам понять свободную волю, а Шредингер не видит противоречия между свободной волей и детерминизмом механики, будь она классической или квантовой.

Со свободной волей связана старая теологическая проблема *предопределения*: «Заранее ли Бог решил, какие души спасутся, а какие отправятся в ад?» Это монументальная проблема всех христианских религий: в данном случае свободной воле противостоит не детерминизм, а всеведение и всемогущество Бога. Отказ от предопределения, видимо, ограничивает способности Всемогущего, но его принятие, очевидно, делает тщетными моральные потуги. Доктрину предопределения защищали Святой Августин* (354–430), Святой Фома Аквинский† (1225–1274), протестантский

*Августин Блаженный (Augustinus Sanctus) Аврелий — христианский теолог и церковный деятель, главный представитель западной патристики. Развил учение о благодати и предопределении. — *Прим. пер.*

†Фома Аквинский — философ и теолог, систематизатор схоластики на базе христианского аристотелизма (учение об акте и потенции, форме и материи, субстанции и акциденции и т. д.). Его учение лежит в основе томизма и неотомизма. — *Прим. пер.*

реформатор Жан Кальвин* (1509–1564), а в семнадцатом веке янсенисты†. Официальная католическая церковь всегда держалась осторожно и не желала поддерживать бескомпромиссные теории предопределения. Теперь же обсуждения предопределения, которые ранее занимали центральное место в научной мысли, безвозвратно уходят в прошлое. Время хоронит в песках забвения много тысяч страниц богословских споров на средневековой латыни. Старые проблемы не нашли решения, мало-помалу в них становится все меньше смысла, они забываются, они исчезают...

Мои собственные взгляды на проблему свободной воли будут связаны с проблемой вычислимости и рассмотрены в последующих главах. Чтобы сконцентрировать внимание на данном вопросе, мне нравится думать о парадоксе кого-то (*предсказателя*), кто использует детерминизм физических законов, чтобы предсказать будущее, а затем использует свободную волю, чтобы создать противоречие своим предсказаниям. Этот парадокс особенно остро стоит в научной фантастике, где существуют предсказатели, способные давать невероятно точные прогнозы. (Вспомните «Дюну» Франка Герберта и «Фундамент» Айзека Азимова.) Как же нам быть с этим парадоксом? Мы могли бы отказаться либо от детерминизма, либо от свободной воли, но есть еще и третий вариант: мы можем оспорить способность любого предсказателя выполнить свою работу настолько хорошо, чтобы мог возникнуть парадокс. Заметим, что если предсказатель захочет создать парадокс, нарушив предсказания относительно некоторой системы, то предсказатель должен быть частью рассматриваемой системы. Это означает, что система, вероятно, достаточно сложна. Но точное предсказание будущего такой системы, судя по всему, требует огромных вычислительных ресурсов, и данная задача запросто может выйти за пределы способностей нашего предсказателя. Это несколько неопределенное доказательство неопределенно сформулированной задачи, но я полагаю, что оно определяет причину (или одну из причин) того, почему мы не можем управлять своим будущим. Эта ситуация аналогична теореме Геделя о неполноте. Там рассмотрение парадокса тоже приводит к доказательству

---

*Кальвин, Жан —- деятель Реформации, основатель кальвинизма (направление протестантизма, которое характеризуется доктриной об абсолютном предопределении, проповедью «мирского аскетизма», республиканским устройством церкви). — *Прим. пер.*

†Янсенизм — религиозно-философское течение в католицизме, начало которому положил голландский богослов XVII века Янсений. Воспринял некоторые черты кальвинизма (в догмате о предопределении). Янсенисты резко выступали против иезуитов. — *Прим. пер.*

того, что истинность или ложность некоторых утверждений установить невозможно, потому что задача принятия решения будет невероятно длинной. Короче говоря, наша свободная воля имеет смысл только благодаря сложности вселенной или, точнее, нашей собственной сложности.

Глава 6

ИГРЫ

Обычные кости имеют шесть эквивалентных граней, пронумерованных от 1 до 6. Чтобы получить случайные цифры, было бы удобно, чтобы у костей было по 10 эквивалентных граней, пронумерованных от 0 до 9. В действительности правильного многогранника с десятью гранями не существует, но существует правильный многогранник с двадцатью гранями (икосаэдр), и мы можем изобразить на противоположных гранях одну и ту же цифру. Один бросок такой двадцатигранной кости даст цифру от 0 до 9, причем вероятность появления каждой цифры одинакова и равна 1/10. Более того, мы можем добиться того, что последующие броски будут независимыми, и получить таким образом последовательность независимых цифр. Вероятностная теория этой игры в кости позволяет нам вычислить различные вероятности, как уже обсуждалось ранее. Например, вероятность того, что три следующие друг за другом цифры в сумме составят 2, равна 6/1000.

Во всем этом нет ничего особенного. А потому, вы, быть может, удивитесь, когда узнаете, что существуют отпечатанные списки «случайных чисел», т. е. случайные цифры, подобные вышеописанным, например, 7213773850327333562180647... Подобный список может показаться замечательно бесполезным имуществом. В этой главе я хочу провести небольшой экскурс в *теорию игр* и доказать в точности противоположное.

Вот знакомая вам игра. У меня есть мраморный шарик, который я кладу (за спиной) в правую или левую руку, затем показываю вам кулаки, а вы должны догадаться, в какой руке шарик. Мы проделываем это несколько раз, отмечая результаты. В конце концов, мы считаем, сколько раз вы выиграли или проиграли и улаживаем этот вопрос с помощью денег, пива или чего-то еще. Я принимаю, что мы оба попытаемся выиграть и что мы оба очень умны. Если я всегда буду класть шарик в одну и ту же руку или просто в каждую по очереди, вы скоро это заметите и выиграете. Фактически, какую бы механическую стратегию я ни изобрел, вы, в конечном счете, все равно ее распознаете. Означает ли это, что вы обязательно должны выиграть? Нет! Если я буду оставлять шарик наугад с вероятностью 1/2 в каждой руке и если мои следующие друг за другом решения будут независимы, вы будете угадывать правильно приблизительно в половине случаев, и в среднем вы ни выиграете, ни проиграете.

То, что ваши догадки окажутся правильными в половине случаев (т. е. с вероятностью 1/2), совершенно очевидно. Это можно убедительно доказать, заметив, что мой выбор руки и ваше предположение — *независимые события*. Заметьте, что для меня будет не слишком хорошо «достаточно случайно» класть шарик в левую или правую руку. Любое предпочтение какой-то одной руки, равно как и любая взаимосвязь между последовательными выборами, будет использована против меня, и, в конце концов, вы выиграете.

Конечно же, я мог бы оказаться умнее и вынудить вас делать неправильный выбор, чтобы вы проиграли, но вы с легкостью могли бы отразить подобную тактику, выдвигая свои догадки наобум.

Теперь, как я могу делать независимые последовательные выборы правой или левой руки с вероятностью, равной 1/2? Что ж, если у меня есть список случайных чисел, то я могу решить, что четное число соответствует правой руке, а нечетное — левой; этого будет достаточно, чтобы данный прием сработал. Однако нельзя забывать один существенный момент: мой выбор руки и ваше предположение должны быть событиями независимыми. А потому вы не должны видеть мой список случайных чисел, а я не должен подсказывать вам, в какой руке спрятан шарик. В частности, я не должен передавать никаких телепатических сообщений, которыми вы могли бы воспользоваться для своих предположений. Что касается последнего момента, проводились эксперименты (с точно такой же игрой, которую мы обсуждаем), и они совершенно определенно подтверждают, что телепатии не существует.

Таким образом, мой собственный список случайных цифр — это все-таки полезное имущество. Судя по всему, проблема приобретения списка случайных цифр требует дальнейшего обсуждения, но мы более подробно остановимся на ней позднее. А сейчас, давайте вновь вернемся к играм.

Полезность хаотического поведения в играх является важным замечанием как с философской, так и с практической точки зрения (по существу, мы обязаны им французу Эмилю Борелю и американцу венгерского происхождения Джону фон Нейману). Конечно, если вы с кем-то сотрудничаете, то обычно хорошо, если вы действуете предсказуемо. Но если вам приходится конкурировать с кем-либо, то лучшей стратегией зачастую является хаотическое, непредсказуемое поведение.

Представим себе «игру», в которой у меня есть выбор различных ходов, вы также выбираете свой ход, не зная, что сделал я, причем результат игры (например, сколько заплачу я вам или вы — мне) определяется двумя ходами. Например, мой ход — это выбор руки, в которую я положу шарик, а ваш ход — это предположение, в какой руке находится шарик. Если вы угадываете, я даю вам 1 доллар, а если вы не угадываете, то вы что-нибудь мне даете (один доллар или что-то еще).

Другая игра могла бы заключаться в том, что я нахожусь на поле боя и прячусь в убежище, а вы летаете на небольшом аэроплане, сбрасывая бомбы и пытаясь попасть в меня. Совершенно естественной мыслью для меня является выбор лучшего убежища, в котором можно спрятаться. Но, естественно, ваша мысль — найти лучшее убежище и разбомбить его. . . так разве не будет лучше, если я спрячусь во втором по надежности убежище? Если мы очень умны, мы оба будем задействовать вероятностные стратегии. Я подсчитаю, для вероятностей укрытия в различных имеющихся убежищах, значения, которые дают мне самый высокий суммарный шанс выжить, затем я подброшу монетку (или воспользуюсь таблицей случайных чисел), чтобы решить, где спрятаться. Вы точно также взовете к случайности, чтобы узнать, куда сбрасывать свои бомбы, чтобы получить максимальный суммарный шанс попадания в меня. Быть может, это напоминает бред сумасшедшего, но именно это мы сделаем, если оба окажемся очень умными и будем действовать «рационально». Конечно же, вы сможете принимать лучшие решения, если я не буду хранить свои ходы в секрете, вы же должны всевозможными средствами помешать мне узнать, куда вы собираетесь сбрасывать бомбы.

В повседневной жизни вы обнаружите, что ваш начальник, ваша возлюбленная или ваше правительство нередко стараются вами манипулировать. Они предлагают вам «игру» в виде выбора, в котором один из предлагаемых вариантов кажется явно более выгодным. Выбрав этот вариант, вы сталкиваетесь с новой игрой и очень скоро обнаруживаете, что ваши разумные выборы привели вас к тому, чего вы не хотели ни при каких обстоятельствах: капкан захлопнулся. Чтобы этого избежать, не забывайте, что немного ошибочное поведение может оказаться лучшей стратегией. Все, что вы потеряете, сделав несколько не самых оптимальных выборов, вы скомпенсируете, сохранив бо́льшую степень своей свободы.

Конечно, суть не в том, чтобы просто действовать ошибочно, а в том, чтобы делать это с конкретной вероятностной стратегией, содержащей точно определенные вероятности, которые мы сейчас подсчитаем. Некоторая игра определяется таблицей *выплат*, приведенной ниже.

		Ваш выбор			
		1	2	3	4
	1	0	1	3	1
Мой выбор	2	−1	10	4	2
	3	7	−2	3	7

У меня есть несколько выборов (скажем, 3), у вас тоже есть несколько выборов (скажем, 4), и мы делаем свой выбор независимо. (Это выборы типа укрытия в определенном убежище или хода определенной картой в карточной игре.) Когда мы оба сделали свой выбор, то вышеприведенная таблица определяет конкретную выплату. Например, я выбрал 2, а вы — 4, что дает выплату в 2 доллара, которые вы должны заплатить мне. Если я выберу 3, а вы выберете 2, то выплата составит минус два доллара, т. е. я должен заплатить два доллара вам.

Допустим, что я делаю свои три выбора с определенными вероятностями и вы делаете свои четыре выбора с определенными вероятностями. Все эти вероятности определяют конкретную среднюю выплату (или ожидаемую выплату), которую вы попытаетесь сделать минимальной, а я — максимальной. В 1928 году Джон фон Нейман доказал, что мой максимум вашего минимума равен вашему минимуму моего максимума (это знаменитая *теорема о минимаксе*)[1]. Это значит, что, поскольку мы оба — очень умные игроки, мы в точности соглашаемся насчет того, как не согласиться.

Я не стану вдаваться в подробности математической задачи вычисления вероятностей ваших и моих выборов, а также средней выплаты. Эта проблема общего типа, называемого *линейным программированием*, и она не слишком сложна, когда перед вами и мной открыто не много выборов. Когда же таблица выплат увеличивается, задача усложняется. Впоследствии мы точно обсудим, насколько сложным является линейное программирование.

Теория игр, как мы видели, является хорошей математической теорией, показывающей, что секретный источник случайных цифр — полезная вещь. Но, быть может, мы живем в детерминистической вселенной, где ничто не происходит случайно. Если мы лишены Всемогущего Бога, пославшего нам по частной линии связи случайные цифры, что мы можем сделать? Мы можем бросить кость или монетку и утверждать, что при конкретных, операторно определенных условиях это производит случайный выбор. Но на каком-то этапе, нам придется выяснить, каким образом возникает подобная хаотичность. Это довольно сложная задача, и на ее решение у нас уйдет несколько следующих глав.

Глава 7

ЧУВСТВИТЕЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Вы помните историю о мудром человеке, который изобрел шахматы? В качестве награды за свое изобретение он попросил царя положить одно рисовое зернышко на первый квадратик шахматной доски, два зернышка — на второй квадратик, четыре — на третий и т. д., удваивая количество рисовых зернышек на каждом последующем квадратике. Сначала царь думал, что это очень скромная награда, пока не обнаружил, что риса нужно так много, что такого его количества нет ни у него, ни у какого-либо другого царя. Это легко проверить: если удвоить какую-либо величину десять раз, то это равносильно ее умножению на 1024, если вы удвоите эту же величину двадцать раз, вы умножите ее более чем на миллион и т. д.

Про величину, которая удваивается по прошествии определенного времени, а потом еще раз удваивается через тот же промежуток времени, и это происходит снова и снова, говорят, что она растет *экспоненциально*. Как мы только что увидели, очень скоро она станет огромной. Экспоненциальный рост также называется *ростом с постоянным коэффициентом*: если вы положите деньги в банк с постоянной процентной ставкой, равной 5%, то их количество удвоится примерно через 14 лет при условии, что вы можете пренебречь налогами и инфляцией. Такой тип роста является естественным, и он широко распространен в реальном мире..., но никогда не длится слишком долго.

Мы воспользуемся идеей экспоненциального роста, чтобы понять, что происходит, когда вы пытаетесь удержать карандаш в равновесии, ставя его на острие. Если вы не будете мошенничать, то у вас ничего не выйдет. Так происходит потому, что карандаш никогда не находится точно в равновесии, и любое отклонение приведет к тому, что карандаш упадет на одну или другую сторону. Если падение карандаша изучать по законам классической механики (чего мы делать не будем), то обнаруживается, что он падает *экспоненциально быстро* (приблизительно и, по крайней мере, в начале падения). Таким образом, отклонение карандаша от равновесия будет умножено на 2 через какой-то промежуток времени, затем опять на 2 через следующий промежуток времени и т. д., так что очень скоро карандаш окажется лежащим на столе.

Наше рассмотрение карандаша дает пример *чувствительной зависимости от начальных условий*. Это означает, что небольшое изменение в состоянии системы при начале отсчета времени (исходном положении или скорости карандаша) создает последующую перемену, которая экспоненциально растет во времени. В таком случае маленькая причина (несильное подталкивание карандаша вправо или влево) имеет большое следствие. Могло бы показаться, что для того, чтобы произошла эта ситуация (маленькая причина, создающая большое следствие), необходимо исключительное состояние при начале отсчета времени, вроде неустойчивого равновесия карандаша на его острие. Противоположное тоже истинно: *многие физические системы выказывают чувствительную зависимость от начальных условий для произвольных начальных условий*. Это несколько противоречит интуиции, так что математики и физики потратили немало времени на то, чтобы хорошо понять, как же все происходит.

Представлю другой пример: пример игры в бильярд с круглыми или выпуклыми препятствиями. Как это всегда делают физики, мы несколько идеализируем систему: мы пренебрегаем «вращениями», трением и допускаем, что столкновения являются *упругими*. Нас интересует движение центра бильярдного шара, которое является прямолинейным и равномерным, пока не происходит столкновений. Когда бильярдный шар сталкивается с препятствием, мы рассматриваем это как отражение центра шара бóльшим препятствием (бóльшим в точности на радиус шара – см. рис. 7.1). Траектория движения центра бильярдного шара отражается препятствием точно так же, как луч света отражается зеркалом (именно это и подразумевается под упругим столкновением). Имея эту зеркальную аналогию, сейчас самое время обсудить изменения в начальных условиях в задаче с бильярдом.

Допустим, что на одном и том же бильярдном столе мы имеем *реальный* и *воображаемый* шары. Мы ударяем по ним одновременно, так что они приобретают одну и ту же скорость, но немного

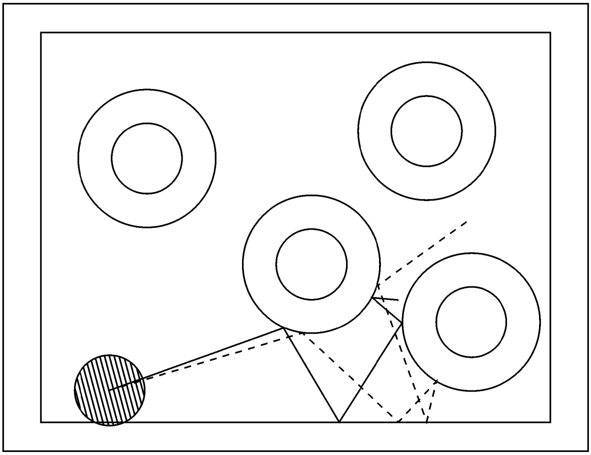

Рис. 7.1. Бильярдный стол с выпуклыми препятствиями. Шар выкатывается из нижнего левого угла, и последующая траектория движения его центра отмечена сплошной линией. Воображаемый шар катится в несколько ином направлении (пунктирная линия). После нескольких столкновений две траектории уже никак не связаны друг с другом.

разные направления движения. Таким образом, траектории движения реального и воображаемого шаров образуют определенный угол — который мы высокопарно назовем *альфа*, — а расстояние между двумя шарами увеличивается пропорционально времени. Обратите внимание, что этот рост, пропорциональный времени, не является несдержанным *экспоненциальным* ростом расстояний, который мы обсуждали ранее. Если через одну секунду времени центры реального и воображаемого шаров находятся на расстоянии в один микрон (одна тысячная миллиметра) друг от друга, через двадцать секунд они окажутся на расстоянии всего в двадцать микрон (что по-прежнему очень мало).

Недолгое размышление показывает, что отражение от прямой стенки бильярдного стола не изменит ситуацию: отраженные траектории образуют тот же самый угол альфа, как и ранее, а расстояние между реальным и воображаемым шарами остается пропорциональным времени. Не забывайте, что отражение шара от стенки бильярдного стола подчиняется тем же законам, что и отражение света от зеркала: пока зеркало остается прямым, мы не ожидаем увидеть ничего интересного.

Но мы сказали, что на бильярдном столе имеются круглые препятствия, которые соответствуют выпуклым зеркалам. Если вы когда-нибудь видели себя в выпуклом зеркале, вам известно, что его действие отличается от действия плоского зеркала. Это действие описывается в курсе оптики и в сущности выглядит следующим образом: если вы посылаете пучок световых лучей под углом альфа на выпуклое зеркало, пучок отраженных световых лучей имеет другой угол — назовем его *альфа штрих*, — который больше угла альфа. Чтобы все упростить, мы допустим, что новый угол альфа штрих в два раза больше угла альфа. (Такое упрощение несколько чрезмерно, как мы увидим это впоследствии.)

Вернемся же к нашему бильярдному столу с круглыми препятствиями и к двум нашим бильярдным шарам, один из которых является реальным, а другой — воображаемым. Изначально траектории движения двух шаров составляют угол альфа, который не изменяется при отражении от прямых стенок бильярдного стола. Однако после удара шаров о круглое препятствие их траектории расходятся и образуют угол альфа штрих, который в два раза больше первоначального угла альфа. Другой удар о круглое препятствие даст траектории, расходящиеся под углом, равным 4 альфа. После десяти ударов угол умножается на 1024 и т. д. Если в секунду происходит один удар, то угол между траекториями движения реального и воображаемого шаров растет экспоненциально со временем. В действительности, с помощью математики несложно показать, что расстояние между двумя шарами также растет экспоненциально со временем, пока остается маленьким[1]: *мы имеем чувствительную зависимость от начальных условий.*

Теперь допустим, что все сложилось так, что расстояние между центрами реального и воображаемого шаров удваивается каждую секунду. Тогда, через десять секунд, первоначальное расстояние в один микрон увеличилось до 1024 микрон — около 1 миллиметра. Через двадцать (или тридцать) секунд расстояние выросло бы более чем на один метр (или один километр)! Но это чепуха: у бильярдного стола таких размеров быть не может. Причина такой чепухи может состоять в нашем чрезмерном упрощении, когда мы допустили, что после отражения круглым препятствием угол между траекториями двух наших бильярдных шаров умножился на два, но остался маленьким. Тогда как это допущение можно счесть приблизительно правильным, пока две траектории находятся близко друг к другу, оно становится неадекватным впоследствии: «реальная» траектория ударит по препятствию, а «воображаемая» — его пропустит (или наоборот).

Позвольте же мне теперь подвести итог полученных нами данных о движении шара по бильярдному столу с круглыми препятствиями. Если мы наблюдаем одновременно движение «реального» шара и движение «воображаемого» шара с несколько различными начальными условиями, то мы видим, что эти движения *обычно* разделяются экспоненциально в течение некоторого времени, потом один шар ударяется о препятствие, которое другой пропускает, и с этого момента два движения теряют любую связь друг с другом. Если честно, то я должен упомянуть, что существуют исключительные начальные условия для «воображаемого» шара, такие, что движения двух шаров не разделяются экспоненциально; например, воображаемый шар мог бы следовать за реальным по траектории последнего, но отставая на один миллиметр. Однако подобные случаи являются скорее исключением, и обычно две траектории расходятся, как и утверждалось выше.

Прежде чем закрыть эту тему, мне хотелось бы подчеркнуть, что выше я представил лишь *эвристическое* рассмотрение бильярда. Это означает, что я выразил все правдоподобным образом, но не привел доказательства. Важно же иметь возможность в тех же самых рамках осуществить идеально строгий математический анализ бильярда с выпуклыми препятствиями. Этот анализ (проведенный русским математиком Яковом Григорьевичем Синаем[2], за которым последовало еще несколько других математиков) определенно сложен. В общем, математическое рассмотрение систем с чувствительной зависимостью от начальных условий не просто, чем, возможно, объясняется тот факт, что физики заинтересовались такими системами сравнительно недавно.

Глава 8

АДАМАР, ДЮГЕМ И ПУАНКАРЕ

Я надеюсь, что в предыдущей главе убедил вас в том, что в бильярде с выпуклыми препятствиями происходит нечто странное. Допустим, что я немного изменил начальные условия, заменив «истинное» положение шара и направление удара несколько отличным «воображаемым» положением и направлением. Тогда «истинная» и «воображаемая» траектории движения, которые сначала располагаются очень близко друг к другу, впоследствии расходятся все быстрее и быстрее, пока не утратят какую бы то ни было связь друг с другом. Именно это мы и назвали чувствительной зависимостью от начальных условий. С концептуальных позиций это очень важное открытие. Движение нашего бильярдного шара точно определено начальными условиями, но при этом в предсказании траектории существует фундаментальное ограничение. Мы имеем детерминизм, но параллельно с ним и долгосрочную непредсказуемость. Так происходит потому, что мы знаем начальные условия с определенной неточностью: мы не можем отличить «истинные» начальные условия от множества «воображаемых» начальных условий, которые очень близки к истинным. А потому мы не знаем, какое из возможных предсказаний правильно. Но если движение бильярдного шара непредсказуемо, что мы можем сказать насчет движения планет? эволюции погоды? судьбы империй? Все это очень интересные вопросы, и, как мы увидим впоследствии, на них можно дать разные ответы. Движение планет можно предсказывать на века, а эволюцию погоды прогнозировать максимум на одну-две недели, если мы хотим, чтобы наши прогнозы были полезными. Рассуждать о судьбе империй и истории человечества на самом деле достаточно амбициозное занятие, но даже здесь можно сделать некоторые выводы и указать на непредсказуемость. Можно понять энтузиазм, который охватил ученых, когда они осознали, что подобные проблемы находятся в пределах их понимания.

И все же нам следует быть осторожными. Если вы обладаете критическим умом ученого, вы захотите прояснить несколько моментов, связанных с бильярдом, прежде чем позволите мне начать высказывать свои умозаключения на предмет предсказуемости будущего человечества.

Например, при изучении движения бильярдного шара мы пренебрегли трением. Имеем ли мы на это право? Это вечный вопрос физики: допустима ли определенная идеализация? В данном случае присутствие трения говорит о том, что шар, в конечном итоге, остановится. Но если он остановится задолго после того, как движение стало непредсказуемым, то идеализация, связанная с отсутствием трения, полезна.

Теперь мы должны рассмотреть более серьезный вопрос: насколько общей является чувствительная зависимость от начальных условий? Мы рассмотрели конкретную систему, бильярд с выпуклыми препятствиями, и пришли к выводу, что небольшая неопределенность в начальных условиях приводит к долгосрочной непредсказуемости. Является ли большинство систем подобными этой, или данная ситуация все же исключительна? Под «системой» я подразумеваю либо механическую систему, в которой отсутствует трение, либо систему, в которой трение присутствует, но имеется еще и источник энергии, возмещающий энергию, рассеянную трением, или, в общем случае, систему с электрическими или химическими составляющими и т. д. При этом важно наличие хорошо определенной *детерминистической* временной эволюции. В таком случае математики скажут, что мы имеем *динамическую систему*. Планеты, которые вращаются вокруг звезды, образуют динамическую систему (в сущности, лишенную трения механическую систему). Вязкая жидкость, которую перемешивает гребной винт, также является динамической системой (в данном случае «диссипативной», потому что в ней присутствует трение). Если мы сумеем найти подходящую идеализацию истории человечества как детерминистической временной эволюции, то и она будет динамической системой.

Но вернемся к нашему вопросу. Является ли чувствительная зависимость от начальных условий исключением или правилом среди динамических систем? Имеем ли мы обычно долгосрочную предсказуемость или нет? На самом деле существуют разные возможности. В некоторых случаях чувствительная зависимость от начальных условий отсутствует (подумайте о маятнике, в котором присутствует трение и который вследствие последнего остановится, что несложно предсказать). В других случаях существует чувствительная зависимость от начальных условий для всех начальных условий (это случай нашего бильярда с выпуклыми препятствиями, и вам придется поверить мне на слово, что это не абсолютно исключительная ситуация). Наконец, многие динамические системы таковы, что для некоторых начальных условий долгосрочная предсказуемость имеет место, а для других — нет.

Существование всех этих возможностей, с одной стороны, может показаться неутешительным. Но, с другой стороны, допустим, что мы можем сказать, какие системы обладают чувствительной зависимостью от начальных условий и в течение какого времени можно доверять предсказаниям в отношении их будущего. Тогда мы действительно узнали бы что-то полезное относительно природы вещей.

Быть может, на данном этапе неплохо будет посмотреть на чувствительную зависимость от начальных условий с исторической точки зрения. Безусловно, уже тысячи лет назад люди осознавали, что маленькие причины могут иметь большие следствия и что будущее предсказать сложно. Что является относительно новым, так это демонстрация того, что для некоторых систем небольшие изменения начальных условий обычно приводят к предсказаниям, настолько отличным, через некоторое время, что само предсказание в действительности становится бесполезным. Это показал в конце девятнадцатого века французский математик Жак Адамар[1] (которому тогда было около тридцати лет; он прожил до глубокой старости и умер в 1963 году).

Система, которую рассматривал Адамар, представляла собой странный вид бильярда, в котором вместо плоского стола использовалась закрученная *поверхность отрицательной кривизны*. Изучалось движение точки по этой поверхности в отсутствие трения. Таким образом, бильярд Адамара представляет собой то, что на техническом языке называется *геодезическим потоком* на поверхности отрицательной кривизны. Этот геодезический поток не слишком сложен с точки зрения математики[2], и Адамар смог доказать чувствительную зависимость от начальных условий в виде теоремы. (Это доказательство гораздо проще, чем соответствующее доказательство для бильярда с выпуклыми препятствиями, которое гораздо позже, в 1970-х годах, дал Синай.)

Французский физик Пьер Дюгем* — один из тех, кто понял философское значение результата Адамара. (Идеи Дюгема во многих областях науки опережали время, в которое он жил, хо-

*Встречается также транскрипция *Дюем* (Duhem). — *Прим. ред.*

тя его политические взгляды были явно реакционными.) В книгу для непосвященного читателя, опубликованную в 1906 году, Дюгем включил раздел под названием «Пример математического вывода, абсолютно непригодного для использования»[3]. Рассматриваемым математическим выводом, как он поясняет, является вычисление траектории движения шара по бильярдному столу Адамара. Он является «абсолютно непригодным», потому что маленькая неопределенность, непременно присутствующая в начальных условиях, приведет к большой неопределенности для предсказанной траектории, если мы подождем достаточно долго, что делает предсказание бесполезным.

Другой французский ученый, который писал философские книги по науке в то же время, — знаменитый математик Анри Пуанкаре. В своей книге «Наука и метод», опубликованной в 1908 году[4], он рассматривает вопрос непредсказуемости весьма нетехническим образом. Он не цитирует Адамара в том, что касается математической стороны этого вопроса (но не забывайте, что Пуанкаре создал теорию динамических систем и знал этот предмет лучше кого бы то ни было еще). Важное замечание, сделанное Пуанкаре, состоит в том, что долгосрочная непредсказуемость примиряет *случайность* и *детерминизм*. Вот это замечание, выраженное одним предложением: *Очень маленькая причина, которая от нас ускользает, определяет значительное следствие, которое мы не можем проигнорировать, и тогда мы говорим, что это следствие вызвано случайностью.*

Пуанкаре хорошо знал, насколько полезны вероятности для описания физического мира. Он знал, что случайность присутствует в повседневной жизни. Поскольку он также верил в классический детерминизм (в его время квантовой неопределенности не было), он захотел понять, каким образом сюда закралась случайность. Очевидно, что он немало размышлял над этой проблемой и нашел несколько ответов. Другими словами, Пуанкаре увидел несколько способов, как классическое детерминистическое описание мира может естественным образом привести к вероятностной идеализации. Одним из этих способов была чувствительная зависимость от начальных условий[5].

Пуанкаре рассматривает два примера чувствительной зависимости от начальных условий. Первый — это пример газа, состоящего из множества молекул, движущихся с большой скоростью во всех направлениях и подвергающихся множеству столкновений. Пуанкаре утверждает, что эти столкновения создают чувствительную зависимость от начальных условий. (Эта ситуация аналогична той, когда бильярдный шар ударяется о выпуклые препятствия.) Непредсказуемость столкновений в газе объясняет вероятностное описание.

Вторым примером Пуанкаре является метеорология, и он утверждает, что хорошо известная ненадежность прогнозов погоды вызвана чувствительностью к начальным условиям вкупе с несколько неточным знанием, которое мы обязательно имеем в отношении начальных условий. В результате этого, эволюция погоды кажется вызванной случайностью.

В наше время специалисту самым поразительным моментом анализа Пуанкаре кажется его современность. И динамика газа твердых сфер, и циркуляция атмосферы были основными объектами изучения последних лет, использующими точку зрения, принятую Пуанкаре.

В равной степени поразительным представляется длинный разрыв во времени между Пуанкаре и современным изучением чувствительной зависимости от начальных условий, которым занимаются физики. Когда вновь обнаружились родственные идеи, образующие то, что теперь называется теорией *хаоса*, физическая проницательность Адамара, Дюгема и Пуанкаре не сыграла в этом процессе никакой роли. Математика Пуанкаре (или то, чем она стала) сыграла некоторую роль, но его идеи по поводу прогнозов погоды должны были быть открыты заново несколько иным способом.

Я полагаю, что существуют две причины этого загадочного исторического пробела. Первой является приход квантовой механики. Новая механика изменила научные перспективы физиков и забрала всю их энергию на много лет. Почему они должны были стараться, например, объяснить случайность чувствительной зависимостью от начальных условий в классической механике, когда квантовая механика ввела новый — более существенный источник случайности и хаотичности?

Кроме того, я вижу еще одну причину, почему идеи Дюгема и Пуанкаре канули в забвение вместо того, чтобы рассматриваться современной теорией хаоса. Эти идеи возникли слишком рано: инструментов для их использования еще не было. Пуанкаре, например, не были доступны математика теории мер или эргодическая теорема, вследствие чего он не мог выразить точным языком свои блестящие идеи в отношении случайности, которую он интуитивно понимал. Когда современный ученый читает философские труды Пуанкаре, в глубинах его разума существует целая система концепций, посредством которой он интерпретирует представленные идеи, однако сам Пуанкаре этих концепций не имел! Другой факт состоит в том, что сейчас, когда математика отказывается нам служить, мы можем прибегнуть к компьютерному моделированию. Этот инструмент, который сыграл такую важную роль в современной теории хаоса, конечно же, не существовал в начале двадцатого века.

Глава 9

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ: МОДЫ

В дождливый день 1957 года небольшая погребальная процессия несла на бельгийское кладбище останки профессора Теофила Де Донде. Катафалк сопровождал отряд конных жандармов. Покойный имел право на эту честь, и этого пожелала вдова. Несколько опечаленных коллег-ученых шли за катафалком.

Теофил Де Донде был духовным отцом математический физики в Брюссельском университете Фри, а потому одним из моих духовных дедов. В свое время он проделал превосходную исследовательскую работу по термодинамике и общей относительности (Эйнштейн называл его «le petit Docteur Gravitique»[1].) Но в то время, когда я знал его, он был сухим маленьким старичком, давно переставшим заниматься наукой. Его навсегда покинула интеллектуальная сила, но не покинули желание и очарование, которые лежат у самых корней научной работы. Когда ему удавалось загнать в угол кого-нибудь из своих университетских коллег, он начинал рассказывать несчастному о своих исследованиях по «ds^2 музыки» или по «математической теории формы печени». Музыка и формы в действительности периодически привлекают внимание ученых[2]. Есть еще подобные им темы: время и его необратимость, случайность и хаотичность, жизнь. Существует одно явление — движение жидкостей, — которое, судя по всему, отражает и объединяет все эти темы. Подумайте о воздухе, который проходит через трубы органа, о воде, образующей вихри и водовороты, которые непрерывно изменяются и движутся, словно по своей свободной воле. Подумайте об извержениях вулканов, родниках и водопадах. Способов почитания красоты немало. Там, где художник рисует картину, поэт пишет стихотворение или композитор сочиняет музыкальное произведение, ученый создает научную теорию. Французский математик Жан Лере проводил время, по его словам, наблюдая за вихрями и воронками, образующимися в реке Сене, в том месте, где она протекает мимо свай моста Понт-Неф в Париже. Это созерцание стало одним из источников вдохновения, которое привело его к великой работе 1934 г. по гидродинамике[3]. Многие великие ученые были очарованы движением жидкостей, а в особенности, тем типом сложного, нерегулярного и, очевидно, ошибочного движения, которое мы называем турбулентностью. Что такое турбулентность? Очевидного ответа на этот вопрос не существует, и до этого самого дня о нем все еще спорят, даже несмотря на то, что люди, видя турбулентный поток, соглашаются с тем, что он действительно турбулентный.

Турбулентность легко увидеть, но сложно понять. Анри Пуанкаре размышлял о предмете гидродинамики и даже преподавал курс по вихрям[4], но не рискнул создать теорию турбулентности*. Немецкий физик Вернер Гейзенберг, основатель квантовой механики, предложил теорию турбулентности, которая так и не получила всеобщего принятия. В свое время говорили, что «турбулентность — это кладбище теорий». Безусловно, как в физику, так и в математику движения жидкости значительный вклад внесли такие люди, как Осборн Рейнольдс, Джеффри Тейлор, Теодор фон Карман, Жан Лере, А. Н. Колмогоров, Роберт Крайчнан и другие, но данный предмет, судя по всему, не раскрыл все свои тайны.

В этой главе, равно как и в последующих, мне бы хотелось рассказать об одном эпизоде научных изысканий, направленных на понимание турбулентности и более поздней теории хаоса. Я сам принимал в нем участие, так что могу предоставить больше деталей, чем в случае с событиями, в которых участвовали полумифические гиганты науки начала века. Я попытаюсь дать вам представление об атмосфере исследования, но не стану приводить сбалансированный исторический отчет. Что касается последнего, то читатель может найти его в оригинальных работах, многие из которых для удобства были собраны в два специально изданных тома[5].

Открытие новых идей запрограммировать невозможно. Вот почему революции и другие общественные катаклизмы зачастую оказывают положительное влияние на науку. На некоторое время прерывая рутинную работу бюрократического аппарата и выводя из строя организаторов научного исследования, они дают людям возможность думать. Как бы то ни было, «события», которые произошли во французском обществе в мае 1968 года†, обрадовали

*Недавно в издательстве РХД вышел русский перевод лекций Пуанкаре по теории вихрей: А. Пуанкаре «Теория вихрей», РХД, 2001. — *Прим. ред.*

†В 1968 по всему миру прокатилась волна массовых выступлений студентов. Они

меня, потому что они нарушили работу почты и связи и, помимо этого, создали своего рода интеллектуальное возбуждение. В то время я пытался самостоятельно изучить гидродинамику по книге Ландау и Лифшица «Механика жидкости». Я медленно пробивал свой путь в гуще сложных вычислений, от которых авторы, судя по всему, получали истинное удовольствие, и внезапно наткнулся на нечто интересное: раздел по возникновению турбулентности, без сложных вычислений.

Чтобы понять теорию Льва Давидовича Ландау о возникновении турбулентности, следует помнить, что вязкая жидкость, такая как вода, в конечном итоге, остановится, если только не произойдет что-то, что будет способствовать ее движению. В зависимости от величины мощности, которая используется, чтобы поддерживать жидкость в движении, можно наблюдать различные явления. В качестве конкретного примера представьте воду, бегущую из крана. Сила, приложенная к жидкости (которая, в конечном счете, зависит от тяготения), регулируется большим или меньшим открыванием крана. Чуть-чуть приоткрывая кран, вы можете добиться *постоянной* струи воды между краном и раковиной: столбик воды кажется неподвижным (хотя вода из крана, конечно же, течет). Осторожно открывая кран чуть больше, вам (иногда) удастся добиться регулярных пульсаций столбика жидкости; такое движение называют уже не постоянным, а *периодическим*. Если кран открывается еще больше, пульсации становятся нерегулярными. И наконец, когда кран открыт полностью, вы видите очень нерегулярный поток — вы получили *турбулентность*. Подобная последовательность событий типична для жидкости, приводимой в движение прогрессивной увеличивающейся внешней силой. Ландау интерпретирует это, утверждая, что по мере увеличения прикладываемой силы возбуждается все большее количество *мод* жидкостной системы.

На данном этапе нам следует погрузиться в физику и попытаться понять, что такое мода. Многие предметы, нас окружающие, начинают совершать колебания или вибрировать, когда мы по ним ударяем: маятник, металлический стержень, струну музыкального инструмента очень легко привести в периодическое движение. Такое периодическое движение является *модой*. Существуют моды вибрации столбика воздуха в трубе органа, моды ко-

---

яростно протестовали против всего на свете — войны во Вьетнаме, власти денег, неправильного обучения в университетах, требовали свободы секса, а кое-где и наркотиков. Особенно бурный характер этот протест принял во Франции. — *Прим. пер.*

лебания подвешенного моста и т. д. Данный физический объект зачастую имеет много различных мод, которые мы, возможно, захотим определить и проконтролировать. Подумайте, к примеру, о конструкции церковного колокола: если различные моды вибрации колокола соответствуют диссонирующим частотам, то звук не будет приятным. Важный пример мод дает вибрация атомов вокруг своего среднего положения в куске твердой материи; соответствующие моды называются *фононами*. Но вернемся к Ландау. Он предложил, что, когда под действием внешнего источника питания жидкость приходит в движение, возбуждается определенное количество мод жидкости. Если не возбуждается ни одной моды, мы имеем постоянное состояние жидкости. Если возбуждается одна мода, мы имеем периодические колебания. Если возбуждается несколько мод, поток становится нерегулярным, а при возбуждении множества мод — турбулентным. Ландау поддержал свое предложение с помощью математических доказательств, которые я не в сосотоянии здесь воспроизвести. (Независимо от Ландау, немецкий математик Эберхард Хопф опубликовал подобную теорию, несколько более сложную в математическом плане[6].) Говоря о физических экспериментах, можно провести временной анализ изменений частоты колебания турбулентной жидкости, т. е. поискать, какие частоты присутствуют. При этом обнаруживается, что имеет место множество частот — фактически целый континуум частот, — что, следовательно, должно соответствовать очень большому количеству мод жидкости.

Теория Ландау – Хопфа, в представленном мной виде, на первый взгляд, дает удовлетворительное описание *возникновения турбулентности*: то, как жидкость становится турбулентной при увеличении силы, приложенной к ней извне. И все же, читая объяснение Ландау, я мгновенно испытал неудовлетворение, по математическим причинам, которые я поясню очень скоро.

Здесь нужно сказать еще несколько слов о модах. Во многих случаях можно заставить физическую систему совершать колебания в нескольких разных модах одновременно, причем различные колебания не будут оказывать друг на друга никакого влияния. Можно предположить, что это не очень точное утверждение. Чтобы нарисовать более определенную картину, подумайте о модах как об осцилляторах, каким-то образом содержащихся в нашей физической системе и совершающих независимые колебания. Эта мысленная картинка была весьма популярна среди физиков.

Пользуясь терминологией Томаса Кана[7], мы можем сказать, что интерпретация больших областей физики через моды, понимаемые как независимые осцилляторы, является парадигмой. Вследствие своей простоты и общности, парадигма мод оказалась весьма полезной. Она работает всякий раз, когда можно определить моды, независимые или почти независимые. Например, моды колебания атомов в твердом теле, так называемые фононы, не являются абсолютно независимыми: там присутствуют взаимодействия типа фонон-фонон, но они относительно малы, и физики могут с ними справиться (в некоторой степени).

Описание турбулентности Ландау через моды не понравилось мне потому, что я слушал семинары Рене Тома и изучал фундаментальный труд Стива Смейла[8] под названием «Дифференцируемые динамические системы». Француз Рене Том и американец Стив Смейл — выдающиеся математики. Первый является моим коллегой в Институте высшего научного образования (Institut de Hautes Etudes Scientifiques) недалеко от Парижа, а последний частенько туда приезжает. От них я узнал о современном развитии идей Пуанкаре по динамическим системам, из чего ясно понял, что применимость парадигмы мод далека от универсальной. Например, временная эволюция, которую можно описать через моды, не может обладать чувствительной зависимостью от начальных условий. Я докажу это утверждение в следующей главе, где покажу, что временная эволюция, описанная через моды, достаточно скучна по сравнению с временной эволюцией, рассмотренной Смейлом. Чем больше я думал об этой проблеме, тем меньше я верил картине Ландау: если бы в вязкой жидкости были моды, то они взаимодействовали бы скорее сильно, чем слабо и создавали бы нечто совершенно отличное от картинки мод. Нечто более богатое и гораздо более интересное.

А что делает ученый, когда считает, что он открыл что-то новое? Он пишет работу, статью на зашифрованном научном жаргоне, которую потом посылает редактору научного журнала, чтобы тот решил вопрос о ее публикации. Редактор использует одного или двух своих коллег в качестве «рецензентов» статьи, и если ее принимают, то ее, в конце концов, печатают в данном научном журнале. Не ищите таких журналов в своем газетном киоске — их там не продают. Их рассылают по почте ученым, они заполняют шкафы в кабинетах профессоров университета, а в крупных научных библиотеках простираются целые мили полок с этими журналами.

Написание статьи под заголовком «О природе турбулентности» было рискованным начинанием, которое я предпринял вместе с Флорисом Такенсом, голландским математиком, который вложил в него свой математический опыт и не побоялся высунуться, написав работу по физике. В своей работе мы объяснили, почему, на наш взгляд, картина турбулентности, представленная Ландау, неверна, и предложили нечто другое, что содержало *странные аттракторы*. Эти странные аттракторы впервые появились в работе Стива Смейла, но само название было новым, и теперь уже никто не помнит, кто его придумал: Флорис Такенс, я или кто-то еще. Мы отправили свою рукопись в подходящий научный журнал, и вскоре она вернулась: ее не приняли. Редактору наши идеи не понравились, и он предложил нам обратиться к его собственным работам, чтобы мы узнали, что же такое турбулентность на самом деле.

Теперь я оставлю свою статью «О природе турбулентности» и перейду к более интересной вещи: странным аттракторам.

Глава 10

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ: СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ

Математика — это не просто собрание формул и теорем; кроме них она содержит идеи. Одной из самых всеобъемлющих математических идей является идея *геометризации*, что, в сущности, означает визуальное представление всех вещей как точек пространства.

Существует множество практических приложений «геометризации» на основе графиков и диаграмм. Допустим, что вас интересуют коэффициенты резкости погоды; вам будет удобно нанести точки на диаграмму, где отражены температура и воздушная скорость, вроде той, что изображена на рисунке 10.1(а).

Одно из преимуществ подобного представления состоит в том, что вы не привязаны к одной системе единиц. Если вы — летчик, то вам будет полезно представление вроде того, что приведено на рис. 10.1(б): оно дает не только скорость ветра, но и его направление. Вполне можно было бы получить направление и скорость ветра также, как и температуру воздуха на одной трехмерной диаграмме: такую диаграмму легко представить мысленно, но на листе бумаги можно нарисовать лишь ее двухмерную проекцию. Если вы хотите представить еще и атмосферное давление и относительную влажность, то вам понадобится пятимерное пространство, и вам может показаться, что геометрическая картина теперь невозможна или бесполезна. Разве не говорили, что люди, которые могут «видеть в четырех измерениях», заключены в сумасшедшем доме? Что ж, истина состоит в том, что многие математики и другие ученые регулярно визуализируют вещи в четырех-, пяти-,... или бесконечномерном пространстве. Одна сторона этого метода состоит в том, чтобы визуализировать двух- или трехмерные

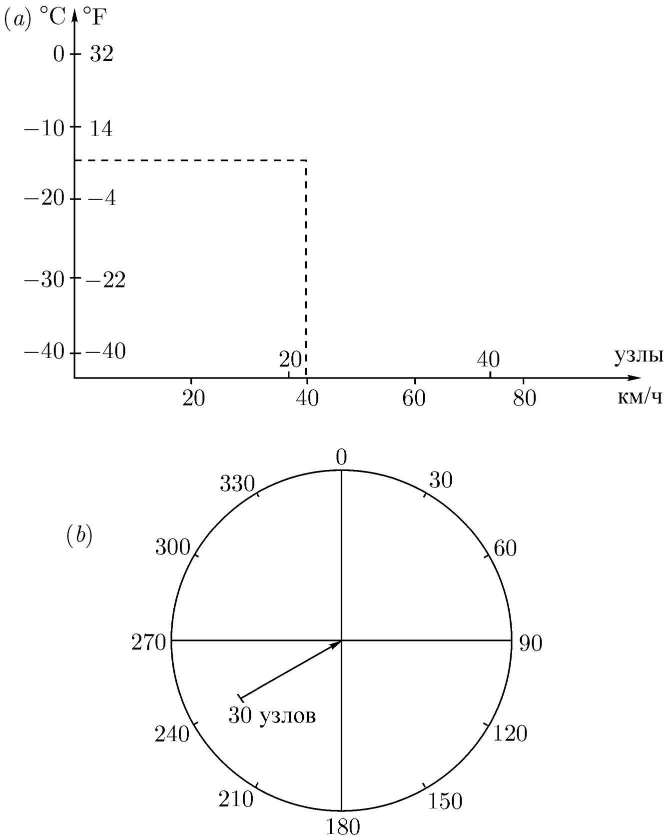

Рис. 10.1. Диаграммы, представляющие (а) воздушную скорость и температуру или (б) скорость ветра и направление.

проекции; другая — в том, чтобы держать в голове несколько теорем, которые говорят вам, как все должно обстоять. Например, рис. 10.2(а) находится в 10 измерениях и изображает прямую линию, пересекающую в двух точках 9-мерную сферу (эта 9-мерная сфера или «гиперсфера» состоит из точек, которые находятся на некотором фиксированном расстоянии от точки O); пунктирная часть линии — эта та ее часть, которая находится внутри сферы.

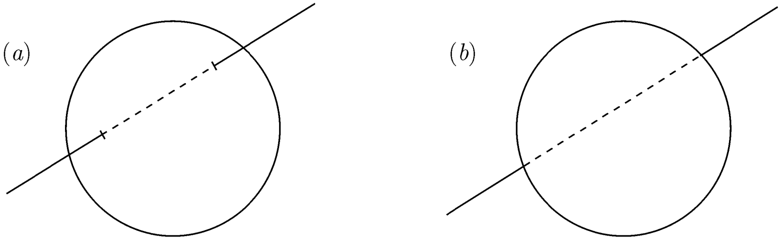

Рис. 10.2. (а) Линия, пересекающая сферу в 10 измерениях; (б) то же самое в двух измерениях.

Фактически, рис. 10.2(а) представляет пересечение прямой линии с гиперсферой в любом числе измерений, большем или равном трем (например, в бесконечномерном пространстве). Ситуация в двух измерениях показана на рис. 10.2(б).

Теперь мы вернемся к колебаниям или «модам», о которых мы говорили в прошлой главе, и попытаемся их геометризировать. Положение маятника, вибрирующего стержня или другого предмета, который совершает колебания, изображено на рисунке 10.3(а). Это положение колеблется слева (Л) направо (П), потом обратно справа налево и т. д. Эта картинка не слишком информативна, но мы забыли одну вещь: состояние нашей колеблющейся системы не полностью определяется ее положением; мы также должны знать ее скорость. На рис. 10.3(б) мы видим орбиту, представляющую наш осциллятор в плоскости положение-скорость. Эта орбита является петлей (или кругом, если хотите), а точка, которая представляет состояние нашего осциллятора, вращается по петле с определенной периодичностью.

Теперь вернемся к жидкостной системе вроде воды, текущей из крана, которую мы рассматривали ранее. При дальнейшем рассмотрении мы будем концентрироваться на долгосрочном поведении системы, игнорируя *переходные состояния*, которые имеют место, например, в момент открывания крана. Для представления нашей системы нам понадобится бесконечномерное пространство, так как мы должны точно определить скорость во всех точках пространства, которое занимает жидкость, а таких точек бесконечно много. Но это не должно нас беспокоить. Рисунок 10.4(а) показывает постоянное состояние жидкости: точка P, представляющая систему, не движется. Рисунок 10.4(б) показывает периодические

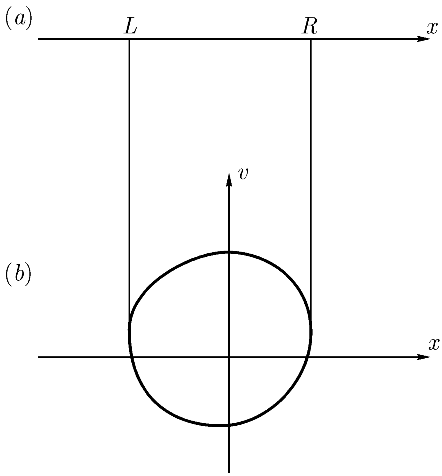

Рис. 10.3. Колеблющаяся точка: (а) положение x; (б) положение x и скорость v.

колебания жидкости: орбита точки P теперь является петлей, вокруг которой P периодически циркулирует.

Нам было бы удобно «выпрямить» картинку 10.4(б), чтобы петля превратилась в круг, а движение по нему совершалось с постоянной скоростью. (Это делается с помощью того, что математики называют нелинейным изменением координат; это все равно, что посмотреть на ту же самую картинку через искажающее стекло.) Наше периодическое колебание или «мод» теперь описывается рисунком 10.5(а).

Итак, у нас есть все идеи, необходимые для визуализации суперпозиции нескольких мод: как показано на рисунке 10.5(б), точка P, представляющая систему, появляется в нескольких различных проекциях, чтобы двигаться по кругам с различными угловыми скоростями, соответствующими разным периодам. (Проекции должны быть выбраны должным образом, что включает нелинейные изменения координат.) Если читателю интересно, он может проверить, что эта временная эволюция *не* обладает чувствительной зависимостью от начальных условий[1].

А теперь взгляните на рисунок 10.6! Это перспектива временной эволюции в трех измерениях. Движение происходит на

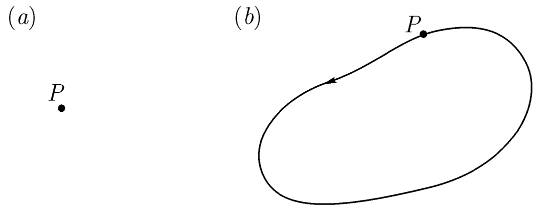

Рис. 10.4. (а) Неподвижная точка P, представляющая постоянное состояние; (б) периодическая петля, представляющая периодическое колебание жидкости. Все рисунки выполнены в бесконечном числе измерений и спроецированы на двухмерный лист бумаги.

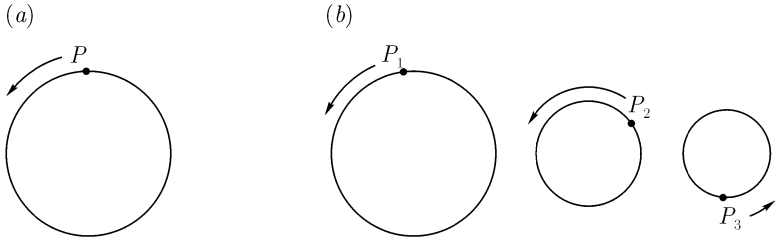

Рис. 10.5. (а) Периодическое колебание (мод), описанное точкой P, движущейся с постоянной скоростью по кругу; (б) суперпозиция нескольких мод, описанная в нескольких разных проекциях.

сложном множестве, которое называется странным аттрактором, а точнее — *аттрактором Лоренца*[2].

Эдвард Лоренц — метеоролог, который работал в Массачусетском технологическом институте. Будучи метеорологом, он интересовался явлением атмосферной конвекции, которое состоит в следующем: Солнце нагревает Землю, вследствие чего низкие слои атмосферного воздуха становятся теплее и легче, чем более высокие его слои. Это вызывает движение легкого и теплого воздуха вверх, а более плотного и холодного воздуха — вниз. Эти движения и образуют конвекцию. Воздух, как и рассмотренная ранее вода, является жидкостью, поэтому его следует описывать точкой в бесконечномерном пространстве. С помощью грубого приближения Эд Лоренц заменил правильную временную эволюцию в бесконечномерном пространстве временной эволюцией в трехмерном пространстве, которую он мог изучать с помощью

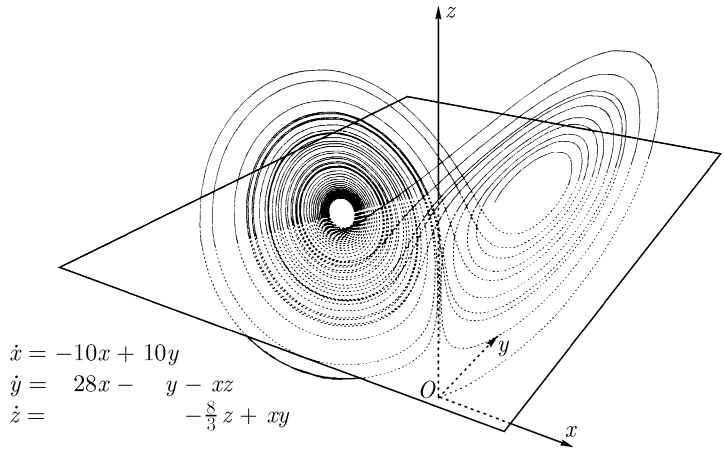

Рис. 10.6. Аттрактор Лоренца. Компьютерное изображение, запрограммированное Оскаром Лэнфордом (см. стр. 114 в *Lecture Notes in Math.* no. 615 [Berlin: Springer, 1977]; воспроизведено с разрешения автора).

компьютера. Компьютер выдал объект, который изображен на рисунке 10.6 и в настоящее время известен как *аттрактор Лоренца*. Мы должны вообразить точку P, представляющую состояние нашей конвекционной атмосферы, как движущуюся во времени по линии, нарисованной компьютером. В описанной ситуации точка P начинает свое движение около начала координат O, затем обходит правое «ухо» аттрактора, затем несколько раз обходит его левое ухо, затем дважды — правое, и т. д. Если бы начальное положение P вблизи O хоть чуть-чуть изменилось (настолько, что разницу нельзя было бы увидеть невооруженным глазом), то детали рисунка 10.6 изменились бы полностью. Общий аспект остался бы неизменным, но количество последовательных обходов правого и левого ушей стало бы совершенно другим. Так происходит потому, — как понял Лоренц, — что временная эволюция рисунка 10.6 обладает чувствительной зависимостью от начальных условий. Таким образом, количество последовательных обходов правого и левого ушей является непостоянным, очевидно, хаотичным и труднопредсказуемым.

Временная эволюция Лоренца не является реалистичным описанием атмосферной конвекции, но ее изучение, тем не менее, дало очень сильный аргумент в пользу непредсказуемости движений атмосферы. Будучи метеорологом, Лоренц тем самым мог представить веское оправдание неспособности людей его профессии создавать надежные долгосрочные прогнозы погоды. Как мы уже видели, Пуанкаре сделал точно такое же замечание гораздо раньше (Лоренц этого не знал). Однако ценность подхода Лоренца состоит в том, что он является конкретным и применим к реальному изучению движения атмосферы. Прежде чем оставить Лоренца, замечу, что тогда как его работа была известна метеорологам, физики узнали о ней довольно поздно.

С вашего позволения я теперь вернусь к статье «О природе турбулентности», которую я написал совместно с Флоренсом Такенсом и которую мы оставили в прошлой главе. В конце концов, эта статья была опубликована в научном журнале[3]. (На самом деле редактором этого журнала был я, и я сам принял статью для публикации. В общем, такая процедура не рекомендуется, но я чувствовал, что в данном случае мой поступок оправдан.) Статья «О природе турбулентности» содержит некоторые идеи, схожие с теми, что ранее развивали Пуанкаре и Лоренц (мы этого не знали). Но нас не интересовали движения атмосферы и их важность для прогнозов погоды. Вместо этого у нас было что сказать об общей проблеме гидродинамической турбулентности. Мы претендовали на то, что турбулентный поток описывается *не* суперпозицией множества мод (как предлагали Ландау и Хопф), а *странными аттракторами*.

Что такое аттрактор? Это множество, на котором точка P, представляющая интересующую нас систему, движется в большом времени (т. е. после того как вымерли так называемые *переходные состояния*). Чтобы это определение имело смысл, важно, чтобы внешние силы, действующие на систему, не зависели от времени (иначе мы могли бы заставить точку P двигаться так, как нам этого хочется). Также важно рассматривать диссипативные системы (вязкие жидкости рассеивают энергию в процессе внутреннего трения). Диссипация является причиной исчезновения переходных состояний. Диссипация также является причиной того, почему в бесконечномерном пространстве, представляющем систему, нас интересует лишь маленькое множество (аттрактор).

Неподвижная точка и периодическая петля, изображенные на рисунке 10.4, являются аттракторами, и в них нет ничего странного. *Квазипериодический* аттрактор, представляющий конечное число мод, также не является странным (математически, это тор)[4]. Но аттрактор Лоренца является странным, как и множество аттракторов, введенных Смейлом (их гораздо сложнее изобразить). Странность исходит из следующих признаков, которые не являются математически эквивалентными, но на практике обычно существуют вместе.

Во-первых, странные аттракторы выглядят странно: они не являются гладкими кривыми или поверхностями, но имеют «нецелую размерность» — или, как это называет Бенуа Мандельброт, — они являются *фрактальными* объектами[5]. Далее, и это еще более важно, движение на странном аттракторе выказывает чувствительную зависимость от начальных условий. И наконец, при том, что странные аттракторы имеют лишь конечную размерность, временной анализ частот выявляет континуум частот.

Последний момент требует более подробного объяснения. Аттрактор, представляющий поток вязкой жидкости, является частью бесконечномерного пространства, но сам имеет конечный размер, благодаря чему может быть четко представлен проекцией в конечномерном пространстве. Согласно парадигме мод конечномерное пространство может описать только конечное число мод. (Математически: конечномерное пространство может содержать только конечномерный тор.) Тем не менее, частотный анализ выявляет континуум частот, который можно интерпретировать как континуум мод. Возможно ли это? Связано ли это каким-то образом с турбулентностью?

Глава 11

ХАОС: НОВАЯ ПАРАДИГМА

Ученые пишут научные статьи, но, кроме этого, они также рекламируют свои идеи и результаты, выступая с научными лекциями, которые часто называют «семинарами». Дюжина коллег, когда больше (когда меньше), собираются вместе и в течение часа сидят, слушая оратора и глядя на уравнения и диаграммы. Некоторые что-то записывают или делают вид, что записывают, а в действительности работают над своими проблемами. Некоторые кажутся спящими, но внезапно просыпаются, задавая острый вопрос. Многие семинары невразумительны до безнадежности, потому что примерно через полчаса после начала выступления оратор понимает, что в самом начале забыл сказать что-то очень существенное, или потому что она совершенно запуталась в своих вычислениях, или потому что он выражает свои идеи на балканском или азиатском английском, который, кроме него самого, не понимает никто. Но при всем этом семинары образуют самое сердце научной деятельности. Некоторые из них просто блестящи и абсолютно ясны, другие — вылизаны до блеска, но скучны, а третьи, которые неспециалистам показались бы настоящим бедствием, на самом деле представляют существенный интерес.

После того как мы с Такенсом закончили писать свою статью по турбулентности, я выступал с рядом лекций по этой и более поздней моей работе в американских университетах и исследовательских институтах. (Во время академического 1970–1971 года я посетил Институт перспективных исследований в Принстоне.) Прием можно назвать смешанным, но в целом достаточно холодным. Я помню, как после семинара, с которым он пригласил меня выступить, физик Ч. Янг пошутил о моих «противоречивых идеях по турбулентности» — точное описание ситуации, которая сложилась в то время.

В чем же заключалась причина тревоги физиков? Дело, видимо, в том, что, когда жидкость постепенно возбуждается под действием возрастающих сил, приложенных извне, принятая теория предсказывает постепенное увеличение числа независимых частот, присутствующих в жидкости. Предсказание же странного аттрактора выглядит совершенно иначе: должен возникать континуум частот. На самом деле, разницу можно проверить, проведя частотный анализ какого-нибудь сигнала, созданного умеренно возбужденно жидкостью. Численное изучение провел Пол Мартин в Гарварде. Кроме того, Джерри Голлаб и Гарри Свинней в Сити Колледж, Нью-Йорк, поставили эксперимент[1]. В обоих случаях полученные результаты говорили скорее в пользу картины возникновения турбулентности, описанной Рюэлем – Такенсом, нежели Ландау – Хопфом.

Это стало переломным моментом. В то время, конечно же, это признали не все, но после эксперимента Голлаба и Свиннея прежде противоречивые идеи мало-помалу стали интересными, а потом и хорошо известными. Сначала несколько, а потом много физиков и математиков начали работать над странными аттракторами и чувствительной зависимостью от начальных условий. Была признана важность идей Эдварда Лоренца. Возникла новая парадигма, которая получила имя — *хаос*, — данное ей Джимом Йорке, прикладным математиком, работающим в университете Мэриленда[2]. То, что мы сейчас называем хаосом, является временной эволюцией с чувствительной зависимостью от начальных условий. Таким образом, движение странного аттрактора является хаотическим. Кроме того, можно говорить о *детерминистическом шуме*, когда наблюдаемые нерегулярные колебания кажутся шумными, но механизм, их создающий, является детерминистическим.

На фоне теории хаоса, благодаря своей особой красоте и значимости, особенным образом выделяется один результат — каскад удвоений периода, открытый Фейгенбаумом. Не вдаваясь в технические подробности, я попытаюсь дать представление об открытии Митчелла Фейгенбаума. При изменении сил, действующих на физическую динамическую систему, часто можно наблюдать удвоение периода, как это показано на рисунке 11.1. Периодическая орбита заменяется другой, близкой ей, но такой, что для возвращения в исходную точку необходимо обойти эту орбиту дважды. Таким образом, время, необходимое для возвращения в исходную точку, — называемое периодом — примерно удваивается. Удвоение периода наблюдается при определенных экспериментах с конвекцией: жидкость, нагретая снизу, подвергается некоторому периодическому движению; изменение же места нагревания создает другой тип периодического движения, период которого удваивается. Удвоение периода также наблюдалось в периодически текущем кране: при большем его открытии (при определенных условиях) период удваивается. Существует еще много подобных примеров.

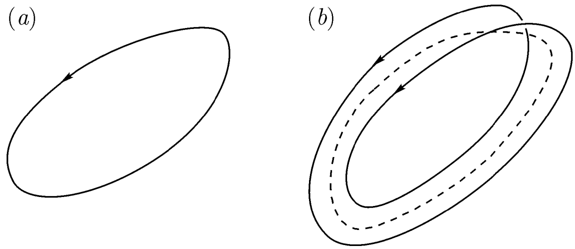

Рис. 11.1. Удвоение периода: (а) проекция периодической орбиты; (б) эта орбита заменяется другой, которая примерно в два раза длиннее.

Интересно, что удвоение периода может происходить снова и снова, давая период, больший в 4, 8, 16, 32, 64,... раза. Этот каскад, удваивающий период, запечатлен на рисунке 11.2. На горизонтальной оси отложены силы, приложенные к системе, а точки, в которых происходят последовательные удвоения периода, — это $A_1, A_2, A_3, \ldots$; они скапливаются в точке, обозначенной A_∞. Посмотрим теперь на интервалы $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5$, и т. д. Они имеют свойство, что их последовательные отношения остаются почти постоянными:

$$\frac{A_1A_2}{A_2A_3} \approx \frac{A_2A_3}{A_3A_4} \approx \frac{A_3A_4}{A_4A_5} \approx \ldots$$

Точнее, имеет место следующая замечательная формула:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_nA_{n+1}}{A_{n+1}A_{n+2}} = 4,66920\ldots$$

После того как Митчелл Фейгенбаум, который в то время был молодым физиком и работал в Лос-Аламосе, открыл эту формулу в численном виде (он денно и нощно играл со своим компьютером), он попытался ее доказать. Для этого он последовал идеям физика Кеннета Вилсона (который тогда работал в Корнелле) по *ренормализационной группе*. Он заметил, что последовательные удвоения периода являются, в сущности, одним и тем же явлением, если должным образом изменить их масштаб (т. е.

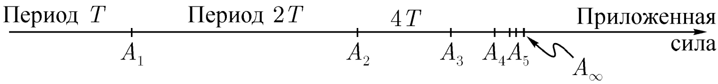

Рис. 11.2. Каскад удвоений периода. При изменении сил, приложенных к системе, удвоения периода происходят при значениях, обозначенных $A_1, A_2, A_3, \ldots$, скапливающихся в A_∞. Обратите внимание, что для наглядности отношение 4,66920... на этом рисунке заменено меньшей величиной.

при адекватном изменении единиц, используемых для различных параметров задачи). Разработка необходимых изменений масштаба — дело нелегкое, поэтому Фейгенбауму не удалось дать полного математического описания этого вопроса. Впоследствии по идеям Фейгенбаума его предоставил Оскар Лэнфорд (который тогда работал в Беркли). Интересно, что свое доказательство Лэнфорд создал с помощью компьютера. Это означает, что доказательство содержит некоторые чрезвычайно длинные численные проверки, которые было бы непрактично проводить вручную; эти проверки выполняет — достаточно строго — компьютер.

Один интересный аспект каскада удвоений периода состоит в том, что когда вы заметите его в ходе эксперимента, то не спутаете ни с чем другим. Кроме того, известно, что за каскадом (справа от A_∞ на рисунке 11.2) существует хаос. Следовательно, наблюдение каскада Фейгенбаума в гидродинамике является особенно убедительным доказательством того, что моды должны уступить хаосу.

Я позабыл сказать одну вещь. Когда Митчелл Фейгенбаум представил свою работу по каскаду удвоений периода для публикации в научном журнале, ему отказали. Но потом он нашел более просвещенного редактора, который принял ее в другой журнал[3].

Вернемся же к странным аттракторам в турбулентности и заметим, что при рассмотрении данного вопроса мы не пользовались никакими специфическими аспектами гидродинамики, за исключением того, что вязкая жидкость является диссипативной системой. Таким образом, мы можем ожидать присутствия странных аттракторов и хаоса (или детерминистического шума) во всех видах диссипативных динамических систем. И, действительно, сейчас существует бессчетное множество экспериментов, которые это доказывают.

Позвольте мне сделать небольшое отступление в прошлое и показать, как я сам столкнулся с хаосом. Я знал, что некоторые химические реакции протекают во времени колебательным образом и что подобные колебания в химических системах биологического происхождения описывали в своей работе Кендалл Пай и Бриттон Чанс[4]. Поэтому в начале 1971 года я отправился в Филадельфию, где встретился с профессором Чансом и группой его соратников и объяснил им, почему они могут ожидать увидеть непериодические «турбулентные» колебания, равно как и периодические. К сожалению, «математический эксперт» группы выразил негативное мнение, и Чанс не воспринял мою идею. Когда впоследствии я обсудил тот же вопрос с Пайем, тот выразил большее сочувствие, но объяснил, что если бы он следил за реакцией и обнаружил не периодическую, а «турбулентную» запись, то объявил бы эксперимент неудавшимся, разорвал бы пленку и выбросил бы ее в корзину для бумаг. Эта прошлая история показывает, как «хаос» воздействовал на науку. Сейчас, когда получается турбулентная или хаотическая запись, ее признают именно в качестве таковой и тщательно изучают.

Я обобщил свои идеи по химическим реакциям в небольшой статье, которую представил для публикации в научный журнал. Мне отказали, но впоследствии эту статью напечатал другой журнал[5]. Позднее ученые наблюдали хаотические химические реакции, которые фактически привели к первому явному воссозданию экспериментального странного аттрактора группой химиков из Бордо[6].

Через несколько лет после всего, что я только что описал, хаос вошел в моду, и по этой теме начали организовывать международные конференции. Затем хаос удостоили титула *нелинейной науки* и для его изучения начали создавать различные институты. Появились новые научные журналы, которые целиком и полностью посвящались нелинейной науке. Успешная история хаоса приняла масштабы мыльного пузыря, так что все ученые, работающие в этой области, должны были прыгать от радости. Некоторые действительно прыгают, другие — нет. Я попытаюсь объяснить почему.

В наше время мода играет важную роль в социологии — а также в финансировании — физики и других наук (математика от этой тенденции относительно избавлена). Узкоспециализированная тема (как-то: хаос, теория струн, высокотемпературные сверхпроводники) на несколько лет входит в моду, а потом о ней забывают. Но пока эта область в моде, ее просто наводняют толпы людей, которых привлекают не сами идеи, а достигнутые успехи, что изменяет интеллектуальную атмосферу в худшую сторону.

Я приведу лишь маленький личный пример такой перемены. После публикации моей вышеописанной статьи по химическим колебаниям один коллега сказал мне: «Вы написали успешную статью — я попытался найти ее в университетской библиотеке и обнаружил, что кто-то лезвием вырезал ее из журнала». Я не слишком об этом задумывался, пока не получил письмо из библиотеки другого университета, в котором говорилось о другой моей статье[7], которая была изуродована, т. к. у нее отсутствовала первая страница. (Следовательно, в данном случае дело было не в добывании дешевой копии статьи, а в том, чтобы ее не смогли прочитать другие.)

Все же подобный вандализм — явление исключительное. Однако он характеризует новую ситуацию, в которой главная проблема состоит не в том, чтобы убедить других ученых, что ваши противоречивые идеи представляют физическую реальность, а выбиться вперед любыми доступными средствами.

В данном случае математическая теория дифференцируемых динамических систем выиграла от притока «хаотических» идей и, в целом, не пострадала от современной тенденции (техническая сложность математики препятствует мошенничеству). Однако физика хаоса, несмотря на частые триумфальные объявления о «новых» прорывах, в настоящее время практически не дает интересных открытий. Будем надеяться, что, когда пройдет это сумасшествие, трезвая оценка сложностей данной темы приведет к новой волне высококачественных результатов.

Глава 12

ХАОС: ПОСЛЕДСТВИЯ

В последней главе я упомянул о низком качестве последних разработок в области хаоса, которые, к сожалению, дискредитировали данный предмет в глазах некоторых ученых, включая математиков, которые сделали решительный вклад на ранней стадии исследований в этой области. Однако если отбросить ничем не подтвержденные притязания и проигнорировать массу непригодных вычислений, то обнаружится, что хаос дал нам некоторые замечательно интересные результаты и открытия. Сейчас я рассмотрю несколько примеров приложений хаоса и попытаюсь объяснить вам, для чего могут пригодиться эти новые идеи.

Прежде всего следует помнить, что математики знали о чувствительной зависимости от начальных условий со времен работ Адамара в конце девятнадцатого века (и это знание не было позабыто). Компьютерные изображения новых — неожиданных — странных аттракторов все же привели специалистов в недоумение и дали тему для долгих размышлений. Мне, конечно, хотелось бы более подробно обсудить эту захватывающую тему, но вопросы, ее касающиеся, действительно слишком специальны, чтобы их можно было рассмотреть в данной книге. Точно также я не стану включать рассмотрение нескольких интересных специальных тем физики и химии.

Вернемся же к проблеме турбулентности в движениях жидкости. Ученые, занимающиеся гидродинамикой, предпочли бы иметь теорию *полностью развитой* турбулентности: они мечтают об очень большом ящике, наполненном турбулентной жидкостью. Кроме того, они мечтают о том, чтобы, глядя на кубический метр жидкости и на ее кубический сантиметр, видеть одно и то же! Точнее, при изменении масштаба длины вы должны видеть одно и то же вплоть до изменения масштаба времени. И опять (как и при изучении каскада Фейгенбаума) мы сталкиваемся с идеей *скейлинга*, которая пронизывает всю современную физику. Удовлетворяет ли реальная турбулентность неизменности масштаба? Мы этого не знаем. Существует хорошая приблизительная теория турбулентности — теория Колмогорова, — связанная с неизменным масштабом. Однако эта теория не может быть абсолютно правильной, потому что она допускает однородность турбулентности. На самом же деле турбулентная жидкость всегда выказывает места более интенсивной турбулентности на относительно неподвижном остальном фоне (это остается истинным в любых масштабах!). Поэтому специалисты по гидродинамике беспрестанно ищут правильную теорию, которая описала бы подобную неравномерность.

Странные аттракторы и хаос прояснили проблему возникновения турбулентности, но не проблему полностью развитой турбулентности. Странные аттракторы дали лишь понимание того, что любая теория турбулентности должна включать чувствительную зависимость от начальных условий. Например, в теории Колмогорова нужно искать не *период мод*, а *характеристическое время*, описывающее, каким образом две различные истории системы отделяются друг от друга, когда начальные условия остаются почти одинаковыми.

Следуя ранним идеям Эдварда Лоренца, метеорология извлекла ощутимую выгоду из понятия чувствительной зависимости от начальных условий. И действительно, согласно Лоренцу, взмах крыльев бабочки через некоторое время приведет к полному изменению состояния атмосферы (это назвали эффектом бабочки).

Теперь когда у нас есть фотографии, сделанные со спутников, относительно легко (зная направление ветра) предсказать погоду на день или на два вперед. Чтобы выйти за эти рамки, метеорологи создали модели *общей циркуляции атмосферы*. Идея состоит в том, чтобы накрыть землю координатной сеткой, определить некоторое количество метеорологических параметров в каждой точке сетки (атмосферное давление, температуру и т. д.), а затем смоделировать эволюцию этих данных на компьютере. Исходные данные (т. е. значения метеорологических параметров в какое-то начальное время) собираются в процессе наблюдений за спутником, за воздухом и за землей. Затем компьютер использует эти данные, известные положения горных хребтов и множество другой информации для получения значений метеорологических параметров в более позднее время, после чего эти предсказания сравнивают с реальностью. Вывод состоит в том, что примерно через неделю подобный прогноз вследствие ошибок становится неприемлемым.

Возможно ли, чтобы это происходило из-за чувствительной зависимости от исходных данных? Что ж, если мы попробуем сделать то же самое, используя несколько отличные исходные значения, мы обнаружим, что две смоделированные на компьютере временные эволюции расходятся примерно с той же скоростью, какая имела бы место в случае с временной эволюцией, реализованной природой. Если честно, отклонение, которое имеет место в природе по сравнению с моделью, происходит чуть быстрее, чем в случае с двумя моделями. Таким образом, кое-что еще требует совершенствования (компьютерная программа, плотность используемой координатной сетки и точность начальных измерений). Однако мы уже знаем, что не сможем дать точный прогноз погоды более чем на одну или две недели вперед. В ходе своих исследований метеорологи обнаружили некоторые ситуации (названные *закупориванием*), в которых будущую погоду можно предсказать точнее, чем обычно. Управление таким образом полученной предсказуемостью не является средним арифметическим как в теории, так и на практике.

Вероятно, сейчас вы начинаете переживать из-за того, что какой-то дьяволенок мог воспользоваться чувствительной зависимостью от начальных условий и, посредством некой незаметной манипуляции, расстроил тщательно спланированный ход вашей жизни. Сейчас я оценю, сколько времени потребовалось бы на это. Расчеты, которые я представлю, безусловно, приблизительны, но мои беседы с коллегами показывают, что, судя по всему, если я и ошибаюсь, то не намного.

Гравитация, которая притягивает вас к Земле, а Землю к Солнцу, также существует и между молекулами воздуха, которым мы дышим, и любой другой частицей в мире. Наш дьяволенок, следуя предложению британского физика Майкла Берри, приостановит на мгновение действие притяжения, которое на наши молекулы воздуха оказывает отдельный электрон, расположенный где-то на границе известной вселенной. Вы, конечно же, ничего не заметите. Но крошечное отклонение молекул воздуха является изменением начальных условий. Давайте идеализируем молекулы воздуха, представив их в виде упругих шаров, и, сосредоточившись на одном из них, спросим, после скольких столкновений он пропустит следующую молекулу, с которой столкнулся бы, если бы находился под действием гравитационного влияния удаленного электрона. Майкл Берри (следуя более раннему вычислению французского математика Эмиля Бореля) подсчитал, что это произойдет примерно после 50 столкновений[1]! Таким образом, через крошечную долю секунды столкновения молекул воздуха станут совершенно другими, но вы этой разницы не увидите. Пока.

Допустим, что воздух, который мы рассматриваем, находится в турбулентном движении (все, что для этого нужно, — слабый ветерок); тогда чувствительная зависимость от начальных условий, присутствующая в турбулентности, будет влиять на микроскопические флуктуации, подобные тем, что создает дьяволенок (так называемые термические флуктуации), и усиливать их. Суммарный результат будет заключаться в том, что примерно через минуту, приостановка гравитационного влияния электрона, находящегося на границе нашей вселенной, создаст макроскопический эффект: тонкая структура турбулентности (в миллиметровом масштабе) уже не остается неизменной. Однако вы все еще ничего не замечаете. Пока.

Однако изменение в мелкомасштабной структуре турбулентности создаст, в свое время, изменение в крупномасштабной структуре. Для этого существуют особые механизмы, и время, которое им для этого потребуется, можно оценить с помощью теории Колмогорова. (Как я сказал, эта теория не может считаться абсолютно правильной, но она в состоянии дать, по крайней мере, разумный порядок величины.) Допустим, что мы находимся в турбулентной части атмосферы (шторм был бы идеальным местом). Тогда мы можем ожидать, что через несколько часов или через день незаметная манипуляция дьяволенка привела бы к изменению атмосферной турбулентности в километровом масштабе. Теперь это уже можно увидеть: облака имеют другую форму, а порывы ветра следуют определенному образцу. Но вы можете сказать, что это фактически не меняет тщательно спланированный ход вашей жизни. Пока.

С позиций общей циркуляции атмосферы, дьяволенок добился лишь достаточно незначительного изменения начальных условий. Но нам известно, что через пару недель это изменение примет глобальный масштаб[2].

Допустим, что вы назначили на выходные пикник со своей возлюбленной (или с начальником, это не имеет никакой разницы). Не успели вы расстелить на траве скатерть, как начался ужасный ливень с градом, который устроил дьяволенок посредством аккуратной манипуляции начальными условиями. Теперь вы согласны, что тщательно спланированный ход вашей жизни можно изменить? На самом деле, дьяволенок хотел устроить катастрофу того самолета, в котором вы летели бы, но я ее (да-да, это девочка) от этого отговорил, ради ваши попутчиков.

Вернемся же к приложениям хаоса в естественных науках. Вам известно, что вокруг Земли существует магнитное поле, которое влияет на стрелку компаса. Время от времени это магнитное поле изменяет свою полярность; таким образом, бывают периоды, когда магнитный Северный полюс оказывается около географического Южного полюса, и наоборот. Изменения полярности магнитного поля Земли происходят неравномерно с интервалами порядка миллиона лет. (Мы знаем об этих изменениях, потому что они «записаны» в намагничивании некоторых вулканических пород, возраст которых можно определить.) Геофизики считают, что движение материи при конвекции внутри Земли поддерживает электрические токи и тем самым создает наблюдаемое магнитное поле посредством *механизма динамы*, похожего на механизм электрогенераторов. Однако предлагается, что это странное динамо имеет хаотическую временную эволюцию, создающую неравномерные изменения магнитной полярности на обратную, что подтверждается документально. К сожалению, у нас нет хорошей теории, которая сделала бы эту хаотическую интерпретацию достаточно убедительной.

Довольно красивое и убедительное приложение хаоса дал астроном Джек Висдом. Оно касается *пустот* в поясе астероидов между Марсом и Юпитером. Этот пояс состоит из множества маленьких небесных тел, которые вращаются вокруг Солнца. Но на определенных расстояниях от Солнца астероидов нет, то есть существуют пустоты, которые в течение длительного времени приводили в недоумение студентов, занимающихся небесной механикой. Большинство теорий, предсказывавших пустоту там, где она находилась, на основе своего рода *резонанса*, также предсказывали и другие пустоты там, где их не было видно. Судя по всему, объяснение, основанное на тщательных компьютерных исследованиях, выглядит следующим образом. Астероиды в областях, где присутствует резонанс, имеют хаотически изменяющуюся форму орбиты. Если это приводит астероид в область, где планета Марс движется по орбите вокруг Солнца, то происходит столкновение, после которого астероид перестает быть видимым. Таким образом, некоторые области, в которых присутствует резонанс, истощаются, и вместо них образуются пустоты, с другими же этого не происходит; такой вывод можно сделать только на основе детальных компьютерных вычислений[3].

Теперь мы на некоторое время обратимся к биологии. Биология — это область, в которой мы наблюдаем все виды колебаний: химические колебания, как в экспериментах Пайя и Чанса, упомянутых ранее; суточные биоритмы (чередование повседневной деятельности и периодов отдыха), биение сердца, волны в электроэнцефалограммах и т. д. Современный интерес к динамическим системам дал толчок многочисленным исследованиям, но точность, достижимая при биологических исследованиях, гораздо ниже той точности, которая достигается в физике или химии, а потому толкование результатов также является менее определенным. Если имеет место хаос, может ли он оказаться полезным, или это лишь патологический симптом? В случае биения сердца выдвигались оба эти предложения. Ясно, что изучение биологических систем как систем динамических — хорошая идея, и в этом направлении уже получено несколько замечательных результатов. Однако при этом много и сомнительной работы, так что, судя по всему, нам просто нужно подождать появления качественных результатов по биологическому хаосу.

Мне хотелось бы завершить эту главу некоторыми соображениями общего характера, которые объяснят сложность изучения хаоса в биологии, экологии, экономике и социальных науках. Количественные изучения хаоса в системе требуют количественного понимания динамики этой системы. Это понимание часто основано на хорошем знании основных уравнений эволюции, которые можно точно проинтегрировать с помощью компьютера. Такова ситуация в астрономии Солнца, гидродинамике и даже метеорологии. В некоторых других случаях, вроде колеблющихся химических реакций, мы не знаем основных уравнений движения, но мы можем проследить за системой как функцией времени и получить длинные временные ряды с очень высокой точностью. Из этих временных рядов мы можем воссоздать динамику, если сделать это достаточно просто (и это действительно несложно для колеблющихся химических реакций, но не для метеорологии). В биологии, а также в гуманитарных науках мы не знаем основных уравнений движения (модели, которые качественно согласуются с данными, недостаточно хороши). Вследствие этого сложно получить длинный временной ряд с хорошей точностью, да и динамика обыкновенно является не простой. Более того, во многих случаях (экология, экономика, социальные науки) основные уравнения эволюции, чем бы они ни были, медленно изменяются со временем (система «обучается»). Для таких систем влияние хаоса остается в настоящее время на уровне скорее научной философии, нежели количественной науки[4]. Но прогресс возможен и здесь: не забывайте, что размышления Пуанкаре о предсказуемости в метеорологии тоже когда-то были лишь научной философией, а теперь эта область превратилась в количественную науку.

Глава 13

ЭКОНОМИКА

Хаос, как мы уже видели, — достаточно глубокая характеристика природных явлений. Поэтому мы должны желать увидеть его роль, по крайней мере, качественную, в экономике, социологии и истории человечества. В самом деле, эти дисциплины содержат проблемы, гораздо более важные для нас, нежели пустоты в поясе астероидов и даже прогнозы погоды. Однако анализ этих проблем непременно будет несколько неясным и обязательно качественным. В целях подготовки к такому анализу мы сейчас повторим несколько принципиальных вопросов.

Прежде всего, возвращаясь к манипуляциям дьяволенка из прошлой главы, вы могли бы заметить, что приостановить гравитационное действие между частицами, даже на долю секунды и даже если они находятся очень далеко друг от друга, не слишком возможно. Кроме того, вы могли бы утверждать, что мир, в котором живем мы, вероятно, — единственный возможный мир, и что-то в нем менять кощунственно и невероятно — да и попросту не имеет смысла. Все эти размышления исчезнут, если вы вспомните, что мы рассматриваем лишь *идеализацию* нашего мира. В этом идеализированном описании абсурдно малая перемена через пару недель приводит к важным следствиям. Даже если вы придерживаетесь мнения, что это не говорит о «реальном мире» ничего интересного, оно, безусловно, говорит что-то об интеллектуальном контроле, которым мы обладаем над его развитием.

В каких системах возникает хаос? Допустим, что вы состряпали идеализированную временную эволюцию для системы по вашему выбору. Откуда вы узнаете, обладает ли она чувствительной зависимостью от начальных условий? Если ваше идеализированное описание достаточно явно, чтобы его можно было обработать на компьютере, вы непременно должны сделать это, чтобы посмотреть, является ли оно хаотическим, не говоря уже о том, что существуют лишь весьма расплывчатые критерии, определяющие присутствие хаоса. Чтобы описать эти критерии, мы на мгновение возвращаемся к картине *мод*, описанных ранее. Если мы имеем несколько мод, совершающих независимые колебания, движение является, как мы это видели, не хаотическим. Теперь допустим, что мы ввели связь, или взаимодействие, между разными модами. Это означает, что эволюция каждого мода, или осциллятора, в некоторый момент времени определяется не только состоянием этого осциллятора в данный момент, но и состояниями других осцилляторов. Так когда же мы получаем хаос? Чтобы имела место чувствительная зависимость от начальных условий, *необходимы, по крайней мере, три осциллятора*. Кроме того, *чем больше присутствует осцилляторов и чем больше между ними существует связей, тем выше вероятность того, что вы увидите хаос*.

В общем, для того рода динамических систем, который мы рассматриваем (системы, непрерывные во времени), хаотическая временная эволюция может происходить исключительно в пространстве, как минимум, трехмерном. Это теорема. Более того, введение взаимодействий между независимыми системами повышает вероятность возникновения хаоса, особенно при сильной связи (хотя она не должна быть очень сильной). Ясно, что это весьма расплывчатое утверждение, но на практике оно оказывается весьма полезным.

Приведу еще один момент, над которым читателю сто́ит хорошенько подумать. Несмотря на то, что система может выказывать чувствительную зависимость от начальных условий, это не означает, что в отношении нее ничего нельзя предсказать. На самом деле отсыкание того, что можно предсказать на фоне хаоса, — глубокая и важная проблема. (Это значит, что она, к сожалению, не решена.) При работе с этой глубокой и важной проблемой, а также для лучшего подхода, мы воспользуемся здравым смыслом. В частности, обратите внимание, что живые организмы обладают замечательной способностью приспосабливаться к изменениям в окружающей среде посредством механизмов регуляции. Таким образом, о них можно сделать лучшие предсказания, чем это можно было бы предположить, зная о присутствии хаоса в их среде. Я, например, могу предсказать, что температура вашего тела около $37°C$, ненамного ниже и ненамного выше, иначе вы не читали бы эту книгу.

Последнее замечание общего характера: стандартная теория хаоса рассматривает временные эволюции, которые снова и снова возвращаются назад, близко к тому месту, где они находились ранее. Системы, допускающие этот «вечный возврат», в общем случае, являются умеренно сложными. Историческая эволюция очень сложных систем, напротив, обыкновенно бывает направлена в одну сторону: история не повторяется. В этих очень сложных системах с однонаправленной эволюцией обычно ясно видно присутствие чувствительной зависимости от начальных условий. Тогда возникает вопрос, ограничена ли эта зависимость механизмами регуляции или она приводит к важным долгосрочным следствиям.

Давайте же наберемся смелости, обратимся к экономике и спросим, можем ли мы выделить интересные временные эволюции: умеренно сложные и, быть может, хаотические. Будет весьма поучительно исследовать сценарий экономического развития согласно идеям, предлагаемым динамическими системами, а затем критически обсудить полученные нами результаты. Наш сценарий ставит своей целью представить экономику сообщества на различных стадиях технологического развития в параллели с диссипативной физической системой, подвергнутой воздействию внешних сил разного уровня. Например, такой диссипативной системой мог бы стать слой вязкой жидкости, нагретой снизу, а уровнем внешней силы стала бы степень нагревания. Мы, конечно же, ожидаем только качественного сходства экономической и физической систем.

На низких уровнях технологического развития экономика должна иметь устойчивое состояние, соответствующее устойчивому состоянию слоя жидкости, слабо подогреваемого снизу. (Устойчивое состояние независимо от времени, т. е. с точки зрения динамики, это довольно скучное состояние.) На более высоких уровнях технологического развития (или нагрева) мы ожидаем, что могут произойти периодические колебания. В действительности, наблюдались экономические циклы, также называемые промышленными циклами, которые являются приблизительно периодическими. На еще более высоких технологических уровнях мы могли бы увидеть суперпозицию двух или более разных периодичностей, а аналитики-экономисты действительно их наблюдали. И наконец, на достаточно высоком уровне технологического развития мы можем получить турбулентную экономику, с нерегулярными изменениями и чувствительной зависимостью от начальных условий. Может быть, кто-то скажет, что именно такую экономику мы имеем сейчас.

Довольно убедительно, не так ли? В качественном аспекте, да. Но если мы попробуем провести количественный анализ, мы тут же увидим, что циклы, да и другие экономические флуктуации происходят на общем фоне *роста*: имеет место однонаправленная историческая эволюция, которую мы не можем игнорировать. Промышленные циклы также имеют исторические черты: каждый из них отличается от другого; они являют собой не просто монотонные повторения одного и того же динамического явления. При попытке дать динамическую интерпретацию экономических явлений на ум приходят идеи Джона М. Кейнса* и его последователей. Однако сейчас большинство экономистов согласились бы с тем, что эти интересные идеи не имеют большой предсказательной ценности. Другими словами, экономику (особенно, макроэкономику) невозможно убедительно проанализировать как умеренно сложную динамическую систему, даже несмотря на то, что ей присущи некоторые черты таких систем.

И все же я думаю, что наш сценарий нельзя назвать совершенно неправильным и что он содержит в себе нечто большее, нежели просто метафорическую ценность. Дело в том, что мы использовали не тонкие свойства динамических систем, а довольно грубые основные факты. Один из них состоит в том, что вероятность возникновения сложной временной эволюции в сложной системе (т. е. системе, состоящей из нескольких сильно взаимодействующих подсистем) выше, чем в простой. Это, помимо всего прочего, должно применяться и к экономическим системам, где технологическое развитие — это способ выражения сложности. Другой основной факт состоит в том, что простейший тип временной эволюции является устойчивым состоянием: зависимость от времени отсутствует; система остается неизменной. Если допустить «вечный возврат», то следующий простейший тип временной эволюции состоит из периодических колебаний. Затем идет суперпозиция двух или более колебаний (или мод), а потом — хаос. Исключив фон общего роста, можно надеяться, что эти замечания применимы к экономическим системам. Наш сценарий, даже если он имеет маленькое количественное значение, может, таким образом, быть качественно разумным. Сейчас мы рассмотрим одно из его следствий.

Стандартный образец экономической мудрости состоит в том, что устранение экономических барьеров и установление свободного рынка идет всем только на пользу. Допустим, что страна A и страна B производят зубные щетки и зубную пасту для местного использования. Допустим также, что климат страны A поз-

---

*Кейнс Джон Мейнард (1883–1946) — английский экономист и политический деятель, основатель кейнсианства — одного из ведущих направлений современной экономической мысли. — *Прим. пер.*

воляет зубным щеткам произрастать и быть собранными в большем количестве, чем в стране B, но в стране B имеются богатые прииски отличной зубной пасты. Тогда при установлении свободного рынка страна A станет производить дешевые зубные щетки, а страна B — дешевую зубную пасту, которые они будут продавать друг другу, что будет выгодно обеим сторонам. Если рассматривать более общий случай, экономисты показывают (при определенных допущениях), что свободная рыночная экономика обеспечит производителей различных товаров равновесием, которое каким-то образом оптимизирует их благосостояние. Однако, как мы уже видели, сложная система, полученная при соединении различных местных экономик, вполне может выказать сложную, хаотическую временную эволюцию, а не прийти в удобное для всех состояние равновесия. (С технической точки зрения, экономисты допускают, что это состояние равновесия будет зависеть от времени, но его будущее при этом они считают предсказуемым.) Возвращаясь к странам A и B, мы видим, что соединение их экономик вместе, а также с экономиками C, D и т. д. может породить бурные экономические колебания, которые повредят индустрии зубных щеток и зубной пасты. И именно на это ляжет ответственность за бесчисленные случаи кариеса. Значит, помимо всего прочего, хаос вносит свой вклад и в головную боль экономистов.

Позвольте мне сформулировать свою мысль несколько более жестко. Учебники по экономике главным образом занимаются равновесными ситуациями между экономическими агентами, обладающими идеальным предвидением. Эти учебники могут создать у вас впечатление, что роль законодателей и правительственных чиновников состоит исключительно в том, чтобы найти и реализовать равновесие, которое будет особенно благоприятно для сообщества. Однако примеры хаоса в физике учат нас тому, что определенные динамические ситуации создают не равновесие, а скорее хаотическую, непредсказуемую временную эволюцию. Законодательные и правительственные чиновники, таким образом, сталкиваются с возможностью того, что их решения, целью которых является создание лучшего равновесия, на самом деле приведут к бурным и непредсказуемым флуктуациям, следствия которых могут оказать катастрофическими. Сложность современной экономики способствует именно такому хаотическому поведению, а наше теоретическое понимание в этой области остается весьма ограниченным.

Практически несомненно то, что экономика и финансы обеспечивают примеры хаоса и непредсказуемого поведения (в техническом смысле). Однако сказать что-то еще сложно, потому что в данном случае у нас нет того типа тщательно контролируемых систем, с которым любят экспериментировать физики. Нельзя пренебрегать внешними событиями, которые экономисты называют *нарушениями экономического равновесия*. Некоторые люди прилагали значительные усилия, чтобы проанализировать финансовые данные (которые известны с гораздо более высокой точностью, нежели экономические) в надежде выделить умеренно сложную динамическую систему. На мой взгляд, эти попытки были бесплодными. Таким образом, мы остались с мучительной ситуацией, когда мы видим временные эволюции, подобные, в некотором смысле, временным эволюциям хаотических физических систем, но отличные от них настолько, что мы в настоящее время не в состоянии их проанализировать[1].

Глава 14

ИСТОРИЧЕСКИЕ ЭВОЛЮЦИИ

Идеи хаоса наиболее естественным образом применяются в отношении временных эволюций с «вечным возвратом». Это временные эволюции систем, которые снова и снова возвращаются практически к тем же ситуациям. Другими словами, если система в определенное время находится в определенном состоянии, она произвольно вернется почти в то же самое состояние в более позднее время.

Вечный возврат можно наблюдать в умеренно сложных системах, но не в очень сложных. Чтобы это доказать, можно провести следующий эксперимент. Возьмите блоху и посадите ее на какой-то конкретный квадратик шахматной доски, огороженной чем-то высоким, чтобы блоха с нее не сбежала. Ваша блоха будет активно прыгать и через некоторое время снова попадет на тот же квадратик, с которого начала. Это был случай умеренно сложной системы. Теперь возьмите сто блох, прикрепите на каждую табличку с именем или с номером. Поставьте одну блоху на каждый квадратик шахматной доски и наблюдайте. Сколько пройдет времени, прежде чем все блохи одновременно вернутся на квадратики, с которых они начали? Интуиция и вычисления указывают на то, что на это уйдет столько времени, что вы никогда не увидите, как это произойдет. Не увидите вы и всех блох, одновременно вернувшихся в положения, которые они одновременно занимали в любое более раннее время: за любой разумный промежуток времени, в течение которого вы будете наблюдать за блохами, вы не увидите одну и ту же конфигурацию блох дважды.

Если в вашем распоряжении нет ста блох, вы можете смоделировать этот эксперимент на компьютере, делая разумные допущения относительно того, как прыгают блохи. Потом вы могли бы написать статью по своим результатам с названием типа «Новая теория необратимости». Если вы собираетесь подать ее для публикации в физическом журнале, не стесняйтесь. Дерзко начинайте с такого предложения: «Мы открыли новый механизм необратимости и т. д.» или что-то в этом роде и подавайте ее для публикации в «Физикал Ревью». Редакция ее, конечно же, отвергнет и пришлет вам копии отчетов трех рецензентов, где будет написано, что это мусор, и объяснено почему. Но не отступайте; перепишите свою статью, учитывая все замечания рецензентов, и снова отправьте статью в журнал, сопроводив ее в меру возмущенным письмом к редакторам, где вы указываете противоречия в отчетах рецензентов. После того как ваша статья будет отправлена туда-обратно несколько раз, сведя с ума нескольких рецензентов, ее опубликуют в «Физикал Ревью», и если раньше вы физиком не были, то теперь непременно станете.

Но вернемся к вечному возврату. Почему возникло слово «необратимость»? Что ж, если вам нравится идея вечного возврата, то обычная жизнь полна разочарований: машины разбиваются, но не расправляются, люди стареют, а не молодеют, и, в общем, современный мир совсем не похож на тот, каким он был раньше. Короче говоря, вещи ведут себя как необратимые. Частично это объясняется тем, что, если система достаточно сложна, время, которое у нее уходит на то, чтобы вернуться приблизительно в то же состояние, в котором она уже была, огромно (подумайте о сотне блох на шахматной доске). Таким образом, если вы наблюдаете за системой в течение умеренного времени, о вечном возврате не может быть и речи, поэтому выберите лучше другую идеализацию.

Например, допустим, что вы возвращаетесь к своей сотне блох и первоначально помещаете их всех на один квадратик шахматной доски. Они начнут прыгать и вскоре займут всю доску. Таким образом, вы можете выдвинуть теорию о том, что блохи стремятся равномерно занимать пространство, предоставленное в их распоряжение. Это хорошая теория, несмотря на вечный возврат и тот факт, что блохи на самом деле не заинтересованы в том, чтобы равномерно распределиться по шахматной доске. Все, чего они хотят, — просто прыгать.

Если мы теперь посмотрим на сложный мир, который нас окружает, на эволюцию жизни, на историю человечества, то нам не стоит ожидать вечного возврата. Вечный возврат будет применим к частным аспектам мира, к малым подсистемам, но не к глобальной картине. Глобальная картина следует однонаправленному историческому развитию, для которого на данный момент полезной математической идеализации у нас нет. (Хотя у нас есть несколько интересных идей, которые мы обсудим позже.) А теперь вернемся к главной теме этой книги — случайности. Мы попытаемся оценить, насколько историческое развитие мира можно изменить с помощью абсурдно малых перемен, вроде тех, которые творил дьяволенок в предыдущей главе. Здесь есть несколько моментов, которые сто́ит внимательно изучить, и мы рассмотрим их по порядку.

Как мы уже видели, наш дьяволенок без проблем изменял погоду и мог раздуть пыльцу или семена в том или другом направлении. Таким образом, судьба отдельных растений очень сильно определяется случайностью. А как насчет животных? Что ж (я надеюсь, что вам это известно), появление животных включает просто фантастические количества маленьких сперматозоидов, но только один из них после своего рода гонок, в конечном счете, соединяется с женской гаметой. Детали этой проблемы я оставляю на ваше собственное размышление, но думаю, что вы придете к печальному выводу, что только из-за манипуляций дьяволенка на свет появились вы, а не какой-то ваш маленький братик или сестричка с несколько другим набором генов.

Но даже если индивидуумы различны, глобальная картина во многом может оставаться одинаковой. Мы можем точно предсказать, что определенная почва в определенном климате взрастит дубовый лес, хотя мы и не можем предсказать расположение деревьев. Короче говоря, существует множество механизмов биологической регуляции, эволюционной конвергенции и исторической необходимости, и они пытаются стереть эксцентричности, придуманные нашим дьяволенком. Насколько успешны эти механизмы? Ведут ли они к историческому детерминизму, т. е. к детерминизму на уровне истории больших групп индивидуумов?

Вероятно, будет лучше говорить о частном историческом детерминизме, потому что следствия некоторых «случайных событий», которые может организовать наш дьяволенок, не стираются последующей эволюцией, а скорее закрепляются, как кажется, навечно. Приведем пример. Все известные живые организмы связаны друг с другом и разделяют, в сущности, один и тот же генетический код. Если говорить конкретно, то генетическая информация записана как последовательность символов (или «баз»), которые являются элементами четырехбуквенного алфавита, и каждая группа трех последовательных баз является кодом (в принципе) для данного «кирпичика» протеина (т. е. аминокислоты). Кодирование от базовых триплетов до двадцати различных аминокислот происходит произвольно. Если бы жизнь развивалась независимо на другой планете, то никто не стал бы ожидать, что она использует тот же самый генетический код. В процессе эволюции, из-за мутаций и естественного отбора, структура живых организмов претерпела существенные изменения, но генетический код является настолько основным, что остался, в сущности, тем же на всех уровнях: от бактерий до человека. Видимо, еще тогда, когда жизнь делала свои первые неуверенные шаги, произошла эволюция генетического кода. Когда на определенном этапе развилась эффективная система, она уничтожила всех своих соперников и осталась одна.

Это был пример того, как произвольная характеристика может быть навечно выбрана исторической эволюцией. Есть и другие примеры. Технологическая эволюция, в частности, выказывает множество случаев, когда выбор делался достаточно случайно, а потом имел, в сущности, необратимые долгосрочные следствия. Брайан Артур[1] рассмотрел несколько таких ситуаций. Он замечает, например, что первые машины приводились в движение либо двигателями внутреннего сгорания, либо паровыми двигателями, причем и те, и другие работали сравнительно успешно. Из-за случайной нехватки подачи воды для машин с паровыми двигателями они начали отставать, так что именно двигатель внутреннего сгорания был технологически усовершенствован и вытеснил паровой двигатель. Такую теорию доказать немного сложно, но основная мысль Брайана Артура несомненно правильна: если одна из двух конкурирующих технологий вырвется вперед, то она извлечет выгоду в виде большего количества исследований и развития, и, вероятно, скоро вытеснит другую. (Это напоминает чувствительную зависимость от начальных условий, хотя с точки зрения математики это нечто другое.) В общем, ясно, что довольно произвольные решения, вроде тех, чтобы ехать по правой стороне дороги, а не по левой, не так легко обратить.

Таким образом, исторический детерминизм должен быть подкорректирован (по крайней мере) замечанием, что некоторые исторически непредсказуемые события или выборы имеют важные долгосрочные следствия. Я думаю, что на самом деле можно сказать даже больше. Я считаю, что *история систематически создает непредсказуемые события с важными долгосрочными следствиями*. Действительно, вспомните, что зачастую важные решения принимают отдельные политики. Во многих случаях эти политические фигуры действуют достаточно предсказуемо под давлением данного момента. Но если они умны и действуют рационально, теория игр (как мы видели в главе 6) часто будет вынуждать их вкладывать в свои решения элемент случайности. Безусловно, не всякое странное поведение является рациональным, но рациональное поведение зачастую бывает странным в некотором особом отношении. Таким образом, решения, формирующие историю, когда их принимают рационально, содержат случайный, непредсказуемый элемент.

Я не хочу сказать, что президент Соединенных Штатов мог бы объяснить Конгрессу, что принял важное решение, бросив монетку. Быть может, он сделал именно это, и, вполне возможно, что этот поступок рационален, но он должен найти что-то еще, что он мог бы сказать, каким-то образом объяснив, что другой разумной альтернативы у него не было. В старые времена политические и военные лидеры были менее сдержанны и вводили в свои решения элемент непредсказуемости, спрашивая совета у оракулов. Совершенно ясно, что слепо верить оракулам глупо и подобное поведение может иметь катастрофические последствия. Но разумное использование непредсказуемости оракула разумным лидером могло быть хорошим способом создания оптимальных вероятностных стратегий.

Глава 15

КВАНТЫ: КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ ОСНОВА

Мы только что потратили несколько глав на рассмотрение чувствительной зависимости от начальных условий и хаоса. Для нашего изучения мы воспользовались определенной идеализацией физической реальности, называемой классической механикой, которой мы, главным образом, обязаны Ньютону. Пару раз я упоминал о том, что существует лучшая идеализация, а именно: квантовая механика, которую создали Макс Планк, Альберт Эйнштейн, Нильс Бор, Луи де Бройль, Макс Борн, Вернер Гейзенберг, Эрвин Шредингер и другие. Для определенных аспектов реальности (имеющих дело, главным образом, с малыми системами, типа атомов) классическая механика проявляет неадекватность, а потому ее следует заменять квантовой механикой. Но для повседневной жизни механика Ньютона достаточно хороша, а потому нам не нужно пересматривать свое изучение хаоса на этом уровне.

Великий философский интерес квантово-механического описания мира состоит в том, что существенную роль в этом описании играет случайность. Я попытаюсь показать, как это происходит.

Квантовая механика, как и другие физические теории, имеет математическую часть и операторную часть, которая показывает, каким образом определенный кусочек физической реальности описывается с помощью математики. Как математический, так и операторный аспекты квантовой механики просты и не содержат никаких логических парадоксов. Более того, теория и эксперимент согласуются настолько хорошо, насколько это вообще можно ожидать. Тем не менее, новая механика породила множество противоречий, касающихся ее вероятностного аспекта, связи ее операторных концепций с концепциями классической механики, а также тем, что называют расплыванием волновых пакетов. Эти противоречия в некоторой степени существуют и по сей день, а технический характер математики, с ними связанной, только усложняет их изучение.

Если вы не слушали курс по квантовой механике, а впрочем, даже если вы его слушали, я рекомендую вам прочитать небольшую книгу Фейнмана, которая называется «Квантовая электродинамика»[1]. Она рассказывает максимально много о концептуальной структуре данного предмета, не пользуясь технической математикой. Я же буду скромнее и преподнесу вам лишь костяк этой теории. Этот костяк вряд ли можно назвать забавным: сконцентрируйтесь и постарайтесь выказать силу духа при чтении следующих двух страниц.

Вспомните, что в классической механике мы рассматривали в качестве основных понятий положения и скорости, а законы Ньютона показывали, какое развитие они получают со временем. Кроме того, мы обсуждали вероятностные теории, в которых основными объектами являются вероятности, и могли установить законы развития этих вероятностей со временем. Квантовая механика располагает основными объектами, которые называются *амплитудами* (или *вероятностными амплитудами* — очень скоро мы увидим, почему именно так). Эти амплитуды представляют собой комплексные числа, вместо более привычных нам вещественных[2]. Математическая часть квантовой теории показывает, как амплитуды изменяются во времени, а уравнение их изменения называется уравнением Шредингера. Это достаточно простой, но все же технический раздел математики, которому здесь можно посвятить лишь примечание[3]. Обратите внимание, что изменение амплитуд является детерминистическим. Математическая часть квантовой теории также содержит объекты, называемые *наблюдаемыми*. С технической точки зрения, это *линейные операторы*, и их абстрактный характер произвел весьма сильное впечатление на первого физика, который ими воспользовался. Наконец, имея наблюдаемую — назовем ее A — и множество амплитуд, можно вычислить некоторое число, которое называется *средним значением* A и которое мы будем обозначать как $\langle A \rangle$[4].

Чтобы подвести итог, скажем, что квантовая механика дает нам возможность вычислять временную эволюцию амплитуд, а затем использовать эти амплитуды для получения среднего значения $\langle A \rangle$ наблюдаемой A.

Как же мы связываем эти математические концепции с физической реальностью? Давайте рассмотрим конкретный пример и предположим, что вы физик-экспериментатор, который занимается физикой частиц: вам нравится ускорять частицы до приобретения ими огромной энергии, направлять их на цель и смотреть, что при этом получается. Вы окружили свою цель несколькими детекторами: I, II, III и т. д., — которые будут срабатывать всякий раз, когда о них в подходящее время ударится частица подходящего типа. («Подходящего типа» означает подходящего заряда, с подходящей энергией и т. п. «В подходящее время» значит, что, например, детектор II активируется только после срабатывания детектора I и только на определенный промежуток времени.) Вы решаете назвать *событием* A ситуацию, в которой срабатывают I и II, но не срабатывает III. (Событие A — это характерный признак конкретного типа столкновения, которое вы ожидаете увидеть, проводя свой эксперимент.)

Теперь вы идете и консультируетесь со Священными Писаниями квантовой механики, которые скажут вам, какая наблюдаемая соответствует событию A. (Таким образом, события рассматриваются как особый вид наблюдаемой.) Священные Писания также скажут вам, как вычислить амплитуды, относящиеся к вашему эксперименту. Тогда вы сможете оценить $\langle A \rangle$. Фундаментальная догма квантовой веры состоит в том, что $\langle A \rangle$ является вероятностью того, что вы увидите событие A. А именно, при многократном повторении своего опыта доля случаев, когда все детекторы сработают так, как требуется, равна $\langle A \rangle$. В этом и состоит связь математики квантовой теории с операторно определенной физической реальностью.

Позвольте мне, между делом, заметить, что некоторые главы Священных Писаний квантовой механики еще не написаны или написаны лишь предполагаемые их варианты. Другими словами, мы еще точно не знаем все детали взаимодействий между частицами, и именно поэтому эксперименты все еще продолжают проводиться.

Чуть позже мы попытаемся выработать своего рода физическую интуицию в отношении квантовой механики, однако вышеприведенное схематическое описание будет вполне адекватно для рассмотрения основ. Позволю себе еще раз обозначить основные моменты. Происходит физический процесс (скажем, столкновение частиц), который мы изучаем, делая определенное количество измерений (скажем, используя детекторы). Совокупность измерений представляет событие, а квантовая теория позволяет нам вычислить его вероятность. (В измерении нет ничего необычного: если вы хотите понять, что происходит в детекторе, то можете окружить его другими детекторами, провести измерения и применить квантовую механику к этому событию.) Таким образом, мы получаем описание мира, которое глубоко отличается от описания, данного классической механикой, но при этом является абсолютно непротиворечивым.

Если вы хотите сказать, что квантовая механика является детерминистической, то это действительно так: уравнение Шредингера однозначно предсказывает временную эволюцию амплитуд вероятности. Если вы хотите сказать, что квантовая механика является вероятностной, то вы можете сделать и это: предсказать можно только вероятности. (Иногда вероятности бывают равными 0 или 1, тогда вы имеете определенность, но обыкновенно этого не происходит.)

Несмотря на вероятностную природу квантовой механики, теорией вероятностей, в обычном смысле этого термина, рассмотренного в главе 3, она не является. А именно, когда в обыкновенной теории вероятностей определяются событие «А» и событие «В», то также определяется событие «А и В» (причем интуиция подсказывает, что «А и В» происходит, если происходит «А» и происходит «В»). В квантовой механике «А и В» обычно определить невозможно: в Священных Писаниях квантовой механики нет записи для события «А и В». Это, конечно же, очень раздражает: почему мы не можем просто сказать, что «А и В» происходит, если происходит «А» и происходит «В». На этот вопрос можно ответить двояко: с математических и с физическо-операторных позиций. С точки зрения физики, происходит следующее: (в общем случае) вы не сможете подобрать детекторы, которые измерили бы «А» и «В» одновременно (т. е. в одно и то же время проверили бы, происходит ли «А» и происходит ли «В»). Вы можете попытаться измерить сначала «А», затем «В» или сначала «В», затем «А», но вы получите разные ответы! Чтобы это выразить, часто говорят, что первое измерение возмущает второе. Такая интуитивная интерпретация на самом деле не является ошибочной, но она несколько обманчива: она утверждает, что событие «А и В» фактически имеет смысл, но мы слишком неуклюжи, чтобы его измерить. Однако математика квантовой теории при этом однозначна: «А и В» обычно не имеет смысла. Это связано с тем фактом, что наблюдаемые А и В «не коммутируют»; еще несколько деталей приведено в примечании[5].

Все это рассуждение о событиях выглядит несколько абстрактным. Что мы можем сказать о частице, которая движется по прямой линии? Согласно классической механике все, что мы пожелали бы о ней знать, — это ее положение x и скорость v. А как обстоят дела в квантовой механике? Допустим, что ваша частица описывается определенными вероятностными амплитудами. Глядя на события «x здесь», «x там», можно определить вероятности нахождения частицы в различных местах. (При этом различные события, касающиеся x, являются коммутирующими наблюдаемыми, и их можно наблюдать одновременно.) Суммируем полученное, сказав, что частица находится вблизи x_0, но что в ее положении присутствует неопределенность (или возможная ошибка) Δ_x. Точно также можно суммировать вероятностное описание скорости частицы, сказав, что она близка к v_0 с неопределенностью Δ_v. Если бы частица описывалась вероятностными амплитудами, такими, что и Δ_x, и Δ_v равнялись бы нулю, то ее положение и скорость были бы определены идеально точно. Но это невозможно, потому что «x» и «v» не являются коммутирующими наблюдаемыми, и Вернер Гейзенберг в 1926 году доказал, что

$$m\Delta_x \cdot \Delta_v \geqslant h/4\pi,$$

где m — масса частицы, $\pi = 3,14159\ldots$, а h — очень маленькая величина, которая называется *постоянной Планка*. Вышеприведенное неравенство — это знаменитое соотношение неопределенностей Гейзенберга. Оно отчетливо демонстрирует вероятностный характер квантовой механики.

Но, как мы уже сказали, квантовая механика не является обыкновенной теорией вероятностей. Физик Джон Белл показал, что вероятности, связанные с простой физической системой, удовлетворяют некоторым неравенствам, которые фактически несовместимы с обыкновенным вероятностным описанием[6]. Результат Белла показывает, насколько квантовая механика далека от обычной интуиции.

Безусловно, некоторые ученые (в частности, физик Дэвид Бом) делали отважные попытки приблизить квантовую механику к классической. Подобные попытки необходимы и заслуживают уважения. Но получены были лишь несколько неестественные структуры, которые остаются неубедительными для большинства физиков. Одна попытка приблизить квантовую механику к обычной интуиции проникла в Священные Писания... и породила множество проблем. Это священная Догма Расплывания Волновых Пакетов. Она связана с последовательным измерением двух наблюдаемых A и B и предлагает определить, какими будут амплитуды вероятности после измерения A и до измерения B.

Но эта догма приводит к сложностям, а потому от нее лучше отказаться. (С точки зрения физики, в расчет принимается исключительно ваша способность оценить вероятности, связанные с «А и затем В»).

Еще недавно, отдавая должное Отцам-Основателям, написавшим Священные Писания, физики стремились держаться подальше от расплывания волновых пакетов. Ричард Фейнман, например, в своей книге «Квантовая электродинамика» упоминает этот вопрос лишь в краткой сноске просто для того, чтобы сказать, что он ничего о нем не хочет слышать[7].

Глава 16

КВАНТЫ: СЧЕТ СОСТОЯНИЙ

Концептуальный скелет квантовой механики, рассмотренный нами в прошлой главе, обладал не особенно большим количеством физической плоти. Вот что, в сущности, мы обнаружили: квантовая механика дает правила для вычисления вероятностей событий. Таким образом, это вероятностная теория, но не стандартная вероятностная теория, потому что если даны события «A» и «B», то событие «A и B» зачастую не имеет смысла.

Плотью квантовой механики, конечно же, являются ее правила, в их применении к специальным проблемам и в физическом понимании, которое таким образом достигается. Я полагаю, что здесь не сто́ит пускаться в техническое обсуждение квантовой механики, но развить определенную долю физической интуиции несложно и полезно. Просто не забывайте, что когда физики развивают интуитивный аргумент, они подкрепляют его сложными вычислениями. Нетехнические же описания науки, поскольку они избегают этих сложных вычислений, всегда окружены неким ореолом таинственности; на техническом уровне все гораздо более просто, но при этом и менее загадочно.

Сейчас я представлю вашему вниманию небольшое вычисление, используя исключительно математику и физику за курс средней школы. В действительности, это вычисление не является абсолютно необходимым для последующего рассуждения, но даже несмотря на это, его сто́ит выполнить.

Как и в прошлой главе, рассмотрим частицу массы m, которая движется по прямой линии, но сейчас мы поместим эту частицу в ящик. Точнее, мы ограничиваем положение x частицы, чтобы она находилось в пределах интервала длины L. Также мы ограничиваем скорость v частицы, которая будет находиться в интервале от $-v_{\max}$ до $v_{\max}$ (то есть максимальная скорость частицы равна $v_{\max}$, и она может двигаться как направо, так и налево). Рисуя график положения x и произведения mv (масса, умноженная на скорость), мы видим, что допустимой для движения частицы областью является большой прямоугольник, изображенный на рисунке 16.1. Однако мы можем выбрать состояние частицы так, чтобы оно было сосредоточено в более маленькой области — маленьком заштрихованном прямоугольнике со сторонами l_x и ml_v. Для этого состояния положение x известно с неопределенностью, примерно равной $\frac{1}{2}l_x$, а скорость с неопределенностью, примерно равной $\frac{1}{2}l_v$. Согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга мы должны выбрать l_x и l_v такими, чтобы $ml_x \cdot l_v \geqslant h/\pi$. Фактически более тщательное изучение показывает, что лучшее, что можно сделать, — это принять

$$ml_v \cdot l_x = h,$$

т. е. заштрихованный прямоугольник имеет площадь, равную h. Пространство переменных x и mv называется *фазовым пространством*. В фазовом пространстве мы нарисовали еще один маленький прямоугольник, не пересекающийся с первым, а потому соответствующий совершенно отличному состоянию нашей частицы. А сколько совершенно различных состояний там присутствует? Их количество равно частному площади большого прямоугольника и площади маленького прямоугольника, т. е.

$$\text{количество различных состояний} = \frac{2mv_{\max} \cdot L}{h}.$$

Этот результат подтвердило бы и серьезное техническое исследование[1]. Обратите внимание, что, несмотря на то, что количество различных состояний точно определено, эти состояния можно выбрать различными способами (площадь маленьких прямоугольников постоянна и равна h, но их форму можно выбирать по-разному).

Посмотрим теперь на энергию нашей частицы; я имею в виду энергию, связанную с ее скоростью; эта энергия называется кинетической. Если у вас есть водительские права, выданные страной или штатом с высокими интеллектуальными нормами, то, быть может, вы выучили формулу кинетической энергии, чтобы сдать экзамен на получение прав. Вот эта формула:

$$\text{энергия} = \frac{1}{2}mv^2.$$

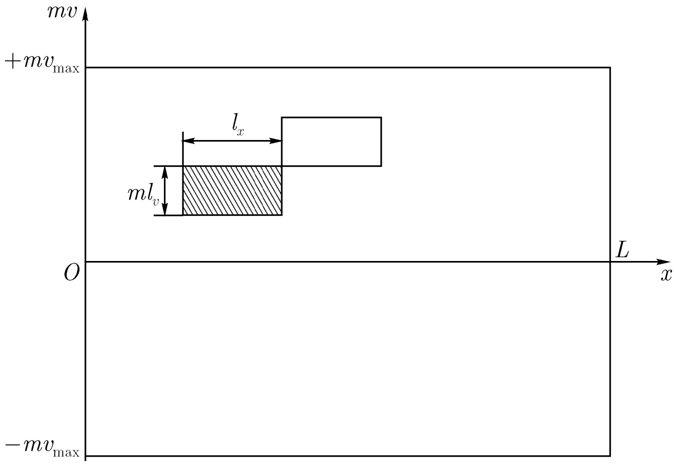

Рис. 16.1. Фазовое пространство частицы. Большой прямоугольник представляет собой область, доступную частице. Маленький треугольник измеряет неопределенность, наложенную квантовой неопределенностью.

(Кинетическая энергия равна половине массы, умноженной на квадрат скорости: если вы врежетесь в стену на машине массой m, движущейся со скоростью v, то именно столько энергии будет в наличии, чтобы разрушить стену, вашу машину и отправить вас в больницу.) Следовательно, говоря, что скорость нашей частицы находится в интервале между $-v_{\max}$ и $v_{\max}$, мы имеем в виду, что ее максимальная (кинетическая) энергия равна $E = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$.

В заключение, если мы ограничиваем частицу, поместив ее в ящик и обеспечив энергией, меньшей определенного значения, то она имеет только конечное число различных состояний. В отношении выбора этих состояний существует некоторая произвольность, но техническое изучение показывает, что их можно выбрать так, чтобы они имели *точно определенные энергии*. Это можно выразить, сказав, что *энергия квантуется*: она принимает только дискретные значения. Квантование энергии является характеристической особенностью квантовой механики, которая в достаточной степени противоречит интуиции классической механики.

Вместо частицы, которая движется по линии, мы можем рассматривать реальную частицу, которая движется в трехмерном пространстве, и поместить ее в настоящий ящик некоторого объема V. Тогда можно вычислить количество состояний частицы, которые имеют энергию, не превышающую некоторое значение E. (Это включает использование трех соотношений неопределенностей Гейзенберга для трех направлений пространства.) Я без всякой на то причины приведу формулу, которую в этом случае можно вывести:

$$\text{количество состояний} = \frac{1}{h^3} \cdot \frac{4}{3}\pi \left(\frac{2E}{m}\right)^{3/2} \cdot V.$$

Опытный ученый мгновенно признает в ней доступный для частицы объем фазового пространства, измеренный в единицах h^3. В данном случае фазовое пространство имеет шесть измерений: оно дает положение x частицы, а также вектор mv (масса, умноженная на скорость).

Мнение, что можно сказать о физической вселенной что-то глубокое, манипулируя несколькими символами, вроде h или π, наводит на мысль о черной магии. В результате, формула, вроде вышеприведенной, порождает у одних людей резкую антипатию, а у других — неумеренный энтузиазм. Физики, безусловно, входят в число энтузиастов, с преданным делу профессионализмом принимая на себя роль современных магов. Однако ради целей этой книги мне придется отказаться от профессионализма и продолжать исследование, главным образом, без формул.

Но я вижу, что вы хотите вернуться к счету состояний. Теперь вам хочется поместить в ящик не одну частицу, а множество. Вы задумали использовать в качестве своих частиц молекулы кислорода, азота, гелия или какого-нибудь другого газа и понаблюдать за одним литром рассматриваемого газа. При нормальной температуре и давлении это примерно $2,7 \times 10^{22}$ молекул, т. е. 27000000000000000000000 (двадцать три цифры). Ваш микрокалькулятор может показать это число в виде 2,7E22. (Авторы, популяризирующие науку, любят говорить: двадцать семь тысяч миллионов миллионов миллионов, но больше подобным корявым языком не выражается никто.) Как бы то ни было, вы хотите знать, сколько различных состояний существует для системы, состоящей из 2,7E22 молекул гелия в литровой емкости. Вам опять-таки придется сказать мне, чему равна полная энергия вашего литра гелия. В этом случае разумно будет выбрать полную энергию, соответствующую движению частиц гелия при комнатной температуре. Другими словами, вы хотите сосчитать количество квантовых состояний, в которых можно найти литр гелия при комнатной температуре. (Вместо того, чтобы говорить «при комнатной температуре», мы должны были бы сказать «с полной энергией, не превышающей ту, которой обладает литр гелия при комнатной температуре». Но это никоим образом не влияет на ответ.)

Вот ответ[2]:

$$\text{количество состояний} = 1\text{E}50000000000000000000000.$$

Безусловно, цифру 5, за которой следует 22 нуля, лучше записать как 5E22. Но в вышенаписанном уже присутствует «E»; не ошибка ли это? Совсем нет. Количество состояний имеет число разрядов, равное 5E22, а потому его можно записать как 1E5E22. Если бы вам пришлось написать это число на листе бумаги целиком, вам понадобился бы очень большой лист бумаги и вы не дожили бы до конца выполнения своей задачи.

Числа вроде 1E5E22, настолько далекие от обычной интуиции, опять-таки вызывают у одних людей сильную антипатию, а у других — неумеренный энтузиазм. Разумное отношение заключается в следующем определении:

$$\begin{aligned}\text{энтропия} &= \text{количество разрядов числа состояний}\\ &\quad (= 5\text{E}22 \text{ в этом случае}).\end{aligned}$$

Более математическое определение состояло бы в том, что энтропия является логарифмом числа состояний, а некоторые люди пожелали бы присутствия коэффициента пропорциональности:

$$\text{энтропия} = k \log(\text{число состояний}).$$

Но, в общем, это несущественные подробности; используйте то определение, которое вам нравится больше.

В моем представлении, к данному моменту концепция энтропии кажется просто способом управления иначе неуправляемым числом. На самом же деле энтропия гораздо более полезна: это физическая и математическая концепция, имеющая центральное значение.

Ключевая идея состоит в следующем: *энтропия измеряет количество хаотичности, присутствующей в системе*. В частности, энтропия двух литров гелия — это дважды энтропия одного литра, энтропия десяти литров — это десять раз по этому количеству (при нормальной температуре и давлении). Другими словами, энтропия системы пропорциональна ее размеру.

Глава 17

ЭНТРОПИЯ

Существует несколько способов заниматься сложным научным размышлением. Некоторые люди просто сидят за столом, уставившись на лист бумаги; другие — ходят из угла в угол. Лично мне нравится лежать на спине с закрытыми глазами. Ученый, который на самом деле трудится изо всех сил, может весьма напоминать человека, который прилег вздремнуть. Сложные научные размышления — это не только опыт, приносящий максимум плодов, но и тяжелая работа. Человеку приходится беспрестанно следовать за идеями, позволяя им овладеть собой. Если кажется, что возникает интересная возможность, то на нее нужно навести фокус, проверить, иногда оставить, но в большинстве случаев отвергнуть. Должны развиваться дерзкие идеи общего плана, но затем должны проверяться детали, в процессе чего часто вскрываются катастрофические ошибки. Тогда конструкцию приходится перестраивать или отбрасывать большие ее части. И этот процесс продолжается день за днем, неделя за неделей, месяц за месяцем. Конечно же, далеко не каждый, кто выдает себя за ученого, трудится столь напряженно. Многие прекратили работать давным-давно, а некоторые даже и не начинали. Но для тех, кто является действующим игроком, а не просто попусту теряет время и только прикидывается, что работает, эта игра сложна, болезненна, она требует напряжения и выматывает человека. И если плод этого труда, результат этого напряжения, получается с надменностью и пренебрежением, то может произойти трагедия. Представьте себе человека, который открыл смысл фундаментального аспекта Природы. Из года в год он занимался своим исследованием, несмотря на все нападки и непонимание своих современников. Потом он состарился, заболел, и у него началась депрессия. Именно это произошло с австрийским физиком Людвигом Больцманом. 5 сентября 1906 года он покончил жизнь самоубийством; ему было шестьдесят два года.

Больцман и американец Дж. Уиллард Гиббс создали новую науку, которую назвали статистической механикой. Сделанный ими вклад не менее важен для физики двадцатого века, нежели открытие относительности или квантовой механики, но он имеет иную природу. Тогда как относительность и квантовая механика разрушили существующие теории и заменили их чем-то другим, статистическая механика совершила тихий переворот. Она была основана на существующих физических моделях, но установила новые связи и привнесла новые концепции. Концептуальная структура, разработанная Больцманом и Гиббсом, доказала свою экстраординарную мощь и теперь применяется к разного рода ситуациям, которые выходят далеко за пределы физических проблем, для решения которых она была изначально предназначена.

Отправной точкой для Больцмана стала атомическая гипотеза: понятие, что материя состоит из огромного количества маленьких движущихся шариков. В конце девятнадцатого века, когда Больцман переживал пик своей деятельности, атомная структура материи все еще не была доказана, да и принята она была далеко не всеми. Частично нападки, которым подвергался Больцман, были мотивированы его верой в атомы. Причем он не просто верил в их существование, но продолжал извлекать поразительные следствия из принятой атомной структуры материи.

Во времена Больцмана была известна только классическая механика, но, тем не менее, некоторые его идеи удобно представить на языке квантовой механики. Все-таки классическая и квантовая механика тесно связаны между собой. И та, и другая пытаются описать одну и ту же физическую реальность, и, например, *число состояний* в квантовой механике соответствует *объему фазового пространства* в механике классической. Поэтому основное внимание я буду уделять идеям, не особенно беспокоясь об анахронизмах деталей.

Промышленная революция девятнадцатого века вызвала значительный интерес к паровому двигателю и преобразованию тепла в механическую работу. Было известно, что можно легко преобразовать механическую энергию в тепло (например, потерев друг о друга два камня), но не наоборот. Тепло — это форма энергии, но использовать его можно только в соответствии с достаточно строгими правилами: некоторые процессы происходят легко, другие же — совсем не так. Например, достаточно легко смешать литр холодной воды с литром горячей, чтобы получить два литра теплой воды. Но попробуйте разделить эти два литра и получить литр горячей воды и литр холодной! У вас ничего не получится; смешивание холодной и горячей воды — процесс необратимый.

Первый шаг к пониманию необратимости был сделан при определении *энтропии* (забудьте на минуту, что мы уже использовали это слово в прошлой главе). Литр холодной воды обладает определенной энтропией, а литр горячей воды — другой энтропией. Эти энтропии можно вычислить из экспериментальных данных, но мы не станем докучать вам тем, как это сделать. Энтропия двух литров холодной воды равна дважды энтропии одного литра холодной воды, то же самое касается и горячей.

Если вы помещаете рядом литр холодной воды и литр горячей, то сумма их энтропий имеет определенное значение. Но если вы их смешаете, то энтропия двух литров полученной теплой воды будет иметь бóльшее значение. Смешивая холодную и горячую воду, вы увеличили энтропию вселенной — и это необратимо. Существует правило, известное как *второй закон термодинамики*[1]: в каждом физическом процессе энтропия остается постоянной или увеличивается, и если она увеличивается, то процесс необратим.

Все это, конечно же, достаточно таинственно и не слишком удовлетворительно. В чем же смысл энтропии? Почему она всегда увеличивается и никогда не уменьшается? Именно эти проблемы и пытался решить Больцман.

Если вы верите в «атомическую гипотезу», то согласитесь, что молекулы, составляющие литр холодной воды, могут находиться во всевозможных конфигурациях. На самом деле, молекулы двигаются и конфигурация постоянно меняется. Говоря на языке квантовой механики, мы имеем систему, состоящую из множества частиц, которые могут находится в очень большом числе различных состояний. Но тогда как эти состояния выглядели бы по-разному, если бы вы могли рассмотреть микроскопические детали, для невооруженного глаза они все будут одинаковыми; на самом деле все они будут выглядеть как литр холодной воды.

Таким образом, говоря о литре холодной воды, мы в действительности говорим о чем-то весьма неоднозначном. Больцман же открыл, что энтропия и есть мера данной неоднозначности. С технической точки зрения, правильное определение выглядит следующим образом: энтропия литра холодной воды равна числу разрядов в количестве «микроскопических» состояний, соответствующих этому литру холодной воды. Конечно, это определение распространяется на горячую воду и на множество других систем. Именно так мы определили энтропию литра гелия в прошлой главе.

Однако определение прошлой главы не обладало физической мотивацией. Достижение Больцмана должно было связать естественную математическую концепцию с ранее непонятной физической величиной. С технических позиций, ученый сказал бы вместо «числа разрядов» «логарифм», умножил бы его на постоянную k (на самом деле k называется постоянной Больцмана) и, быть может, добавил бы еще одну постоянную к полученному результату, но здесь нет смысла обсуждать подобные детали.

Давайте теперь поместим рядом литр холодной воды и литр горячей воды, не смешивая их. Каждое состояние литра холодной воды и каждое состояние литра горячей воды дают некоторое состояние составной системы. Следовательно, количество состояний составной системы является произведением количества состояний двух составляющих ее литров, а энтропия — суммой их энтропий. В этом нет ничего удивительного; мы только что именно таким образом получили все определения.

Но что происходит при смешении холодной и горячей воды? Некоторым образом мы получаем теплую воду, однако детали того, как же это происходит, все еще остаются для ученых загадкой. Точно установлено одно: количество состояний двух литров теплой воды больше, чем количество состояний одного литра холодной воды и одного литра горячей воды. И не забывайте, что все состояния теплой воды неотличимы для невооруженного глаза: не существует способа различить те состояния, которые получаются при смешении холодной и горячей воды. Следовательно, энтропия увеличивается в результате смешивания.

Но почему должна существовать необратимость? Окружающий нас мир ведет себя весьма необратимым образом, но как мы докажем, что он должен вести себя именно так. В науке, когда вы не знаете, каким образом можно что-либо доказать, зачастую неплохой мыслью является попытка это опровергнуть и посмотреть, что же тогда произойдет. Поэтому, с вашего позволения, я попробую организовать обратимость.

Основные законы классической механики не содержат необратимости. Допустим, что вы наблюдаете за движениями и столкновениями системы частиц в течение одной секунды, и допустим, что после этого вы смогли бы внезапно изменить направления скоростей всех частиц на противоположные. Тогда они начали бы двигаться в обратном направлении и снова столкнулись бы в обратном порядке, и по истечении следующей секунды вы вернулись бы к исходному положению (со скоростями, имеющими противоположное направление, но если вам хочется, то вы можете снова поменять направление этих скоростей на противоположное). При таком аргументе, если энтропия увеличивается, значит она может и уменьшаться, и необратимость невозможна. Был ли Больцман не прав? Или мы что-то упустили?

Чего мы добились, так это заставили время «бежать назад», одновременно изменяя направление скорости всех частиц в большой системе на противоположное. Безусловно, вы можете возразить, что сделать это на практике невозможно. Но для некоторых систем (спиновых систем) возможно нечто подобное. И, конечно, нелепо основывать главный закон физики, вроде того, что энтропия всегда увеличивается, на практической невозможности, которая, быть может, однажды будет устранена.

Однако в только что описанном эксперименте с изменением направления скоростей существует более тонкая невозможность, и она связана с чувствительной зависимостью от начальных условий. Когда мы применяем законы классической механики для изучения движений и столкновений системы атомов или молекул, мы представляем, что эта система не взаимодействует с остальной вселенной. Но это довольно нереалистично. Даже гравитационное действие электрона, находящегося на границе известной вселенной, важно, и им нельзя пренебречь. Если по истечении секунды мы изменим направление скоростей на противоположное, мы не увидим, что время бежит назад. Через малую долю секунды электрон на границе вселенной уже изменит ход вещей, и энтропия, вместо того, чтобы уменьшаться, будет продолжать увеличиваться.

Роль чувствительной зависимости от начальных условий при понимании необратимости во времена Больцмана фактически не была оценена должным образом. И опять я позволил себе небольшой анахронизм. Глядя в прошлое, мы видим, что идеи Больцмана идеально сочетаются с тем, что мы узнали позднее. Но во времена Больцмана все было далеко не так ясно. Безусловно, он осознавал свою правоту. Другим же казалось, что работа Больцмана полностью основана на сомнительной «атомической гипотезе». Они видели, что он использует сомнительную математику для выведения необратимой временной эволюции из законов классической механики, которые явно являются обратимыми. Они так и остались при своем мнении.

Глава 18

НЕОБРАТИМОСТЬ

Я уже отметил, что физика имеет своей целью дать точные математические описания кусочков физической реальности и что не нужно слишком беспокоиться о «конечной истине», какой бы она ни была. Быть может, это выглядит не особенно честолюбиво, и вы можете счесть изучение физики, при подобных обстоятельствах, весьма скучным занятием. Однако на самом деле истинно как раз противоположное, потому что сама физическая реальность далека от скуки. Поэтому обсуждение физики в абстракциях, без ссылок на мир, который она пытается объяснить, уводит с правильного пути и является достаточно бесполезным.

Сейчас я имею в виду идеи Больцмана. Он начал с *термодинамики* — теории, связанной с энтропией и необратимостью. Термодинамика находилась и до сих пор находится в точном соответствии с экспериментами. Великой инициативой жизни Больцмана стало стремление дать интерпретацию термодинамики в рамках «атомической гипотезы» через статическую механику. Если атомы никогда не обнаружили бы и если бы статистическая механика так и не приобрела большей предсказательной ценности, чем это было во времена Больцмана, то «истинность» его идей вряд ли имела бы большое значение для физиков. Но видение Больцмана стало реальностью, ведь сейчас доказано, что материя состоит из атомов, а формулу Больцмана для энтропии можно проверить экспериментально, да и статистическая механика приобрела огромное предсказательное значение (главным образом, благодаря усилиям Гиббса и последующих поколений физиков).

Но при всем этом идеи Больцмана об атомах были далеки от конечной истины. Ведь атомы — это не просто маленькие движущиеся шарики; они обладают достаточно сложной структурой, и для их описания необходима квантовая механика. Предубеждения Больцмана сослужили ему (и нам) хорошую службу, но они являются лишь одним шагом в понимании Природы. А будет ли последний шаг? Существует ли конечная истина в физике? Будем надеяться, что ответ на этот вопрос положителен и что конечная физическая теория материи будет открыта (и доказана) еще при нашей жизни. Но необходимо понимать, что важность идей Больцмана не зависит от окончательного открытия конечной физической теории.

В жизни Больцмана присутствует элемент романтики. Он покончил жизнь самоубийством, потому что был, в некотором смысле, неудачником. Тем не менее, теперь он считается одним из величайших ученых своего времени, гораздо более значительным, нежели те, кто выступал в роли его оппонентов. Совершенно очевидно, что он был прав слишком рано. Но каким образом человек умудряется узнать правду раньше других? Я полагаю, что частично благодаря предубеждению. Человеку необходимы какие-то предвзятые идеи относительно физики, которые отличались бы от общепринятой догмы, и человек должен следовать этим идеям с некоторым упрямством. Быть может, ошибочность этих идей уже была доказана ранее, но если вы все понимаете правильно и если вам повезет, то эти идеи дадут вам ключ к новому пониманию Природы. Совершенно ясно, что предубеждение Больцмана имело явно механистический характер. Ранее подобное механистическое предубеждение уже двигало Декартом, но он ни к чему не пришел, тогда как Ньютон, имевший другое предубеждение, основал современную физику. Но во времена Больцмана механистическое предубеждение было необходимо для понимания термодинамики, и оно сработало. Приведу еще несколько примеров предубеждений: что математика является языком природы (Галилей); что наш мир лучший из всех возможных миров (Лейбниц); что законы Природы должны удовлетворять эстетическим требованиям (Эйнштейн). В любое время некоторые научные предубеждения модны, другие —нет, но, несмотря на это, они могут сделать вас знаменитым после вашей смерти. . .

Сейчас я прерву свои размышления на тему посмертной славы и вернусь к незавершенной нами теме необратимости. Давайте еще раз посмотрим на временную эволюцию сложной системы частиц, вроде атомов гелия в литровой емкости, или молекул в одном литре воды. Для описания наших частиц мы воспользуемся классической механикой и примем, что они образуют изолированную систему: взаимодействие с внешним миром отсутствует, так что энергия не принимается и не отдается. Идея Больцмана состояла в том, что с течением времени система побывает во всех энергетически возможных конфигурациях. Другими словами, будут реализованы все конфигурации положений и скоростей частиц, имеющие нужную полную энергию, и вы сможете наблюдать их, если подождете достаточно долго. Точнее, система будет приближаться (снова и снова) к любой энергетически возможной конфигурации; это пример того, что ранее мы назвали *вечным возвратом*. Точная математическая формулировка идеи Больцмана, известная как *эргодическая гипотеза*, не слишком проста и была получена только после его смерти. Но ее физический аспект достаточно ясен, и его сто́ит понять.

Не следует забывать, что, когда квантовый физик говорит о *количестве состояний*, физик классический должен говорить об *объеме фазового пространства*; теперь это важное понятие. В примере с литром гелия точка в фазовом пространстве определяет все положения и скорости атомов гелия. Мы ограничим свой интерес частью фазового пространства, состоящей из конфигураций с данной полной энергией (так как наша система не получает и не отдает энергию). Мы будем рассматривать временную эволюцию нашей сложной системы как описываемую движением точки в фазовом пространстве. Сейчас мы находимся на том этапе, когда можно выразить содержание эргодической гипотезы: *двигаясь через фазовое пространство, точка, представляющая нашу систему, проводит в каждой области долю времени, пропорциональную объему этой области*[1].

Принимая эргодическую гипотезу, мы можем понять, почему при наличии в бутылке двух литров теплой воды мы никогда не увидим, чтобы жидкость одновременно разделилась на слой холодной воды и на слой горячей. В самом деле, как мы это видели и ранее, энтропия двух литров теплой воды больше энтропии литра холодной и литра горячей воды. Допустим, что разность энтропий равна 1 проценту. Это значит, что, если мы сначала сосчитаем состояния литра холодной и литра горячей воды, а потом состояния двух литров теплой воды, мы получим два огромных числа, длина (количество разрядов) которых будет отличаться на один процент. Следовательно, количества состояний, или объемов в фазовом пространстве, различаются с огромным коэффициентом. А именно: объем в фазовом пространстве для двух литров теплой воды гораздо больше, чем объем для одного литра холодной и одного литра горячей воды. Теперь давайте понаблюдаем за точкой, представляющей нашу систему в процессе ее движения через фазовое пространство. Согласно эргодической гипотезе бо́льшую часть времени она проведет в области, соответствующей двум литрам теплой воды. Очень маленькое время она проведет в той части фазового пространства, которая соответствует слою холодной воды и слою горячей воды; а на практике вы никогда не сможете увидеть разделение теплой воды на холодную и горячую.

С вашего позволения мне хотелось бы еще раз повторить свое объяснение. Вы аккуратно налили слой горячей воды на слой холодной. Благодаря этому вы добились того, что ваша система находится в маленькой специальной области ее фазового пространства. Через некоторое время тепло диффундирует, и вы получите однородную теплую воду, соответствующую гораздо большей области фазового пространства. Если вы подождете достаточно долго, вечный возврат вернет вашу систему к слою холодной и слою горячей воды. Но сколько будет длиться это «достаточно долго»? Метод оценки этого времени связан со счетом состояний, о котором мы говорили в главе 16, и ответ получился ужасно огромным. Достаточно долго — это, попросту говоря, слишком долго. Из-за краткости жизни мы никогда не сможем вновь наблюдать слой горячей воды на слое холодной, и в этом смысле смешение двух слоев необратимо. (Что касается роли чувствительной зависимости от начальных условий, см. примечание[2].)

Объяснение необратимости, которое мы получили, следуя Больцману, является как простым, так и достаточно тонким. Это вероятностное объяснение. В основных законах физики не существует необратимости, но нечто особое присутствует в исходном состоянии системы, которую мы рассматриваем: это исходное состояние *очень невероятно*. Под этим мы подразумеваем, что оно соответствует относительно маленькому объему в фазовом пространстве (или маленькой энтропии). Тогда временная эволюция приводит к области с относительно большим объемом (или большой энтропией), которая соответствует очень вероятному состоянию системы. В принципе, по истечении очень длительного времени система вернется к невероятному исходному состоянию, но мы не увидим, как это происходит... Будучи физиком, вы захотите создать идеализацию, в которой количество частиц в вашей системе стремится к бесконечности, как и время вечного возврата. В этом пределе вы получите истинную необратимость.

Я описал ту интерпретацию необратимости, которая сейчас является общепринятой в среде физиков. Однако есть и несколько противников такой интерпретации, например, Илья Пригожин[3], но их несогласие имеет под собой скорее философское предубеждение, нежели физическое свидетельство. Однако в философском предубеждении нет ничего неправильного; оно бесценно для открытий в физике. Но в должное время все должно утрясаться при тщательном сравнении математических теорий и физических экспериментов.

Одна из составляющих нашего обсуждения, обратимость основных законов физики, кажется хорошим допущением[4]. А что же насчет эргодической гипотезы? Она потребовала бы математического доказательства, а такое доказательство все еще отсутствует, даже для простых моделей. Однако физики не слишком переживают из-за этого. Все понимают, что многие важные математические и физические аспекты нашего понимания необратимости должны быть более точными. Вероятно, следует ослабить эргодическую гипотезу. Для некоторых систем, типа *спиновых стекол*, может потребоваться другой взгляд на вещи. Однако мы полагаем, что по сути дела понимаем то, что происходит.

Однажды эта уверенность может пошатнуться, но в настоящее время она получает поддержку благодаря нашему хорошему пониманию *равновесной статистической механики*. Эту область физики не волнует сложная задача смешения холодной и горячей воды; она занимается исключительно сравнением холодной воды с горячей, а также со льдом и водяным паром. Предсказания равновесной статистической механики очень точно согласуются с экспериментом. Ясно, что это та область физики, в которой мы знаем, что делаем. Равновесная статистическая механика — это довольно технический предмет, который весьма богат разнообразными концепциями. Ее мощные идеи перешли к математике, а также другим разделам физики, где играют ведущую роль. Я вижу равновесную статистическую механику как науку в самом ее расцвете, а потому попытаюсь бегло представить вам данный предмет в следующей главе.

Глава 19

РАВНОВЕСНАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Вы приходите в художественный музей и идете по залу, посвященному французским художникам начала двадцатого века. Вот роскошный Ренуар, а вот Модильяни, которого ни с кем не спутаешь, далее цветы Ван Гога и фрукты Сезанна. Двигаясь дальше, вы мельком замечаете Пикассо, или, быть может, это Брак. Вы не видели этих картин раньше, но обыкновенно вы не сомневаетесь в том, чья это картина. Ван Гог в последние годы своей жизни написал поразительное количество ошеломляюще прекрасных работ, которые несложно отличить, например, от картин Гогена. Как же вы их различаете? Краска наложена по-разному; различны предметы, изображенные на картинах, но есть и что-то еще, и это что-то весьма сложно выразить прямо, но, тем не менее, оно сразу бросается в глаза, это что-то связано с текстурой форм и равновесием цветов.

Точно также, включая радио, вы сразу же понимаете, слышите ли вы классическую музыку или музыку «Битлз». И если вы хоть чуточку интересуетесь классической музыкой, вы сможете отличить Баха от музыки шестнадцатого века, Бетховена от Баха и Бартока от Бетховена. Быть может, вы не слышали этих произведений ранее, но в компоновке звуков присутствует нечто уникальное, что позволяет узнать автора почти мгновенно. Можно попытаться уловить это «нечто уникальное» с помощью статистических исследований[1]. В частности, можно изучить интервалы между следующими друг за другом нотами. Довольно распространенными являются маленькие музыкальные интервалы, но наиболее характерны они для старой музыки. Музыка последнего времени задействует разнообразные интервалы более произвольно. Таким образом, оценивая частоту интервалов между следующими друг за другом нотами в музыкальном произведении, мы можем определить, написал ли эту музыку Букстехуде, Моцарт или Шенберг. Конечно же, мы придем к такому же выводу, даже более точно и более быстро, если просто послушаем несколько тактов. Но при этом мы фактически используем тот же метод: человеческая слуховая и мозговая системы являют собой поразительный прибор, способный извлекать ту статистическую информацию, которая позволяет нам сказать: «Это музыка Монтеверди, Брамса или Дебюсси».

Я полагаю, что, узнавая художника или композитора, мы основываем свое мнение на статистических данных. Однако вы можете счесть это абсурдным: как мы можем быть уверены в точности своего определения, если основываем его на вероятностях? Я отвечу, что мы можем быть почти уверены. Точно также, как мы зачастую почти уверены в поле человека, которого встречаем на улице: мужчины обычно выше ростом, у них более короткие и темные волосы, большие ступни и т. д. Любая отдельная характеристика достаточно ненадежна, но за долю секунды вы оцениваете совокупность этих характеристик, что зачастую не оставляет ни малейшего сомнения.

Однако по-прежнему остается вопрос: «Почему какой-то данный художник постоянно создает работы с одним и тем же набором вероятностных свойств, характеризующих именно этого художника?» Или возьмите другой пример: «Почему ваш почерк так уникален, почему другим так сложно его скопировать, а вам — изменить?» Мы не знаем ответов на эти вопросы, потому что мы не знаем всех подробностей функционирования мозга. Но мы понимаем что-то очень похожее, базовый факт, который в нектором смысле является краеугольным камнем равновесной статистической механики.

И вот этот базовый факт. *Если на сложную систему наложить простое глобальное условие, то конфигурации, удовлетворяющие этому условию, обычно обладают совокупностью вероятностных свойств, уникально характеризующих эти конфигурации.* Прочитайте вышеприведенное предложение еще раз: оно намеренно написано неопределенным и метафизическим языком, чтобы его можно было применить к живописи или музыке. Тогда авторство какого-то определенного художника является «простым глобальным условием», а «совокупность вероятностных свойств» позволяет нам определить художника. Однако теперь мы хотим перейти к ситуации, связанной с равновесной статистической механикой. В данном случае сложная система обыкновенно будет состоять из большого количества частиц в ящике (наш стандартный пример —

литр гелия). А простое глобальное условие будет состоять в том, что полная энергия системы имеет некоторое максимальное значение E. Мы ограничиваем *макроскопическое* состояние системы, что, по утверждению, определит ее *микроскопическую* вероятностную структуру.

Позвольте мне опять уступить побуждению написать уравнение. Я приведу выражение для энергии системы частиц через скорости v_i частиц и их положения x_i:

$$\text{энергия} = \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 + \sum_{i<j} V(x_j - x_i).$$

Как мы видели ранее, $\frac{1}{2} m v_i^2$ — это кинетическая энергия i-ой частицы. Слагаемое $V(x_j - x_i)$ — это потенциальная энергия, созданная при взаимодействии i-ой и j-ой частиц. Мы предполагаем, что потенциальная энергия зависит только от расстояния между двумя частицами и быстро стремится к нулю при увеличении расстояния. Тогда наше простое глобальное условие — это

$$\text{энергия} \leqslant E.$$

Мы утверждаем, что если конфигурация положений x_i и скоростей v_i удовлетворяет этому условию, то она обычно будет выглядеть очень особенно и будет отличаться от конфигураций, соответствующих другим выборам потенциальной энергии V или E. Звучит не слишком правдоподобно, не так ли? Что ж, чтобы понять все это, действительно потребовалось время, и честь за это следует воздать Гиббсу и его последователям. Детали данного анализа достаточно сложны и специальны, чтобы их можно было рассмотреть здесь. Однако в нем присутствует простая и красивая центральная идея, которую я сейчас объясню.

Но я вижу, что у вас возникло возражение, на которое я должен немедленно обратить свое внимание. Если у нас есть конфигурация, удовлетворяющая условию

$$\text{энергия} \leqslant E,$$

она также будет удовлетворять и условию

$$\text{энергия} \leqslant E',$$

когда E' больше, чем E. Следовательно, конфигурации, связанные с E, невозможно отличить от тех, что связаны с E', что противоречит тому, что я только что сказал; в этом случае мое утверждение не имеет смысла.

Однако мое утверждение спасает наречие «обычно». Существует много, много больше конфигураций, имеющих энергию $\leqslant E'$, нежели конфигураций с энергией $\leqslant E$. Следовательно, конфигурация с энергией $\leqslant E'$ обычно не будет иметь энергию $\leqslant E$, поэтому ее невозможно спутать с конфигурациями, имеющими более низкую энергию. Говоря более техническим языком, энтропия, связанная с E', больше энтропии, связанной с E, и соответствующий объем в фазовом пространстве (или число состояний) тоже намного больше.

В некотором смысле я только что выразил простую и красивую центральную идею, обещанную мной ранее. Позвольте мне сделать это еще раз на простом и явном примере. Я принимаю потенциальную энергию V равной нулю, так что теперь мое глобальное условие, связанное с энергией, принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{N} v_i^2 \leqslant \frac{2E}{m}.$$

Чтобы максимально все упростить, я приму, что мои N частиц находятся в одномерном ящике, так что v_i — это скорее числа, чем векторы, и я запишу $2E/m = R^2$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{N} v_i^2 \leqslant R^2$$

говорит о том, что вектор в N измерениях с составляющими v_i имеет длину $\leqslant R$. (Я воспользовался теоремой Пифагора.) Другими словами, конфигурации допустимых скоростей являются точками внутри сферы радиуса R в N измерениях. Какова доля конфигураций внутри сферы радиуса $\frac{1}{2}R$? Она равна отношению объемов двух сфер: $\frac{1}{2}$, если $N = 1$; $\frac{1}{4}$, если $N = 2$; $\frac{1}{8}$, если $N = 3, \ldots$, $\frac{1}{1024}$, если $N = 10, \ldots$, менее одной миллионной, если $N = 20$, и т. д. Если у нас много частиц, (т. е. если N — большое число), то практически все конфигурации будут находиться вне сферы радиуса $\frac{1}{2}R$. Точно также они будут находиться вне сферы радиуса $\frac{9}{10}R$, или $\frac{99}{100}R$.

Из этого аргумента следует такой вывод: Возьмите сферу радиуса R в N измерениях (N — большое число); тогда большинство точек внутри сферы фактически окажутся очень близко к поверхности. (Конечно же, есть исключения: центр сферы удален от поверхности.) Таким образом, мы имеем пример, в котором простое глобальное условие (что точка находится внутри сферы) налагает — обычно — гораздо более строгое условие (что точка очень близка к поверхности сферы). Это достаточно общая ситуация, которая зависит от того, что мы хотим говорить скорее *обычно*, нежели *всегда*. Кроме того, мы приняли, что N — большое число: мы рассматриваем геометрию во множестве измерений (или сложную систему, содержащую много частиц).

Большая часть работы ученых состоит в том, чтобы следовать общей идее (вроде метафизической идеи о сложных системах, высказанной выше) и смотреть, насколько ее можно оправдать, а также, когда она начинает иссякать или становится бесполезной. На практике это означает большой объем сложной работы. Я не могу дать вам даже малейшее представление о том, насколько сложна эта работа[2], но я хочу, чтобы вы помнили, что она существует и что именно на ней основано данное нетехническое рассуждение. Проводить любое исследование на чисто метафизическом или литературном уровне — это все равно, что вести машину с завязанными глазами: это может привести только к катастрофе. Успокоив этим предостережением свою совесть, теперь я могу сказать еще немного о равновесной статистической механике. Это будет несколько специальная информация, и вы можете сделать выбор, читать ли до конца этой главы медленно и внимательно или, наоборот, побыстрее перейти к следующей главе.

Как мы уже видели, энтропия S увеличивается (скажем, на ΔS), когда увеличивается энергия E (скажем на ΔE). Отношение $\Delta E/\Delta S$ (т. е. производная энергии по энтропии) является важной величиной. Назовем ее T.

Теперь допустим, что мы имеем систему, состоящую из двух частей, I и II (двух кусков материи, которые находятся в равновесии друг с другом). Мы накладываем условие:

$$\text{энергия} \leqslant E.$$

Как мы уже видели, это означает, что энергия обычно почти равна E. Но из этого условия можно вывести и другие следствия: энергия подсистемы I также почти неизменно равна некоторому значению E_I, а энергия подсистемы II — некоторому значению E_{II}. Каким образом система выбирает энергии E_I и E_{II}? Она просто пытается сделать максимально большой сумму энтропий системы I (при энергии E_I) и системы II (при энергии E_{II}) при условии, что $E_I + E_{II} \approx E$. Если вы немного подумаете об этом, то увидите, что в этом есть смысл: система просто занимает максимально большой объем в фазовом пространстве при условии неизменности ее энергии. Однако условие о том, что сумма энтропий должна быть максимальной также можно выразить, сказав, что T системы I равно T системы II[3]:

$$T_I = T_{II}.$$

Вот так естественно и возникает концепция температуры: T можно отождествить с абсолютной температурой, используя традиционный постоянный коэффициент:

$$\text{абсолютная температура} = \frac{1}{k}\frac{\Delta E}{\Delta S};$$

коэффициент k — это постоянная Больцмана, с которой мы уже встречались. Две подсистемы находятся в равновесии, если имеют одинаковую температуру.

Обратите внимание, что концепция температуры была введена только сейчас, даже несмотря на то, что мы свободно говорили о холодной и горячей воде, чтобы обозначить меньшую или бóльшую полную энергию. Вместо того, чтобы начать с экспериментальных свидетельств, мы начали с общих соображений, связанных с геометрией в большом числе измерений и естественно закончили величиной, которая должна быть температурой. Первые ученые, которые занимались статистической механикой, пытались увидеть, как выглядел бы мир, состоящий из множества атом и молекул, — начиная с самого начала. Можете ли вы представить их удивление, волнение, ощущение своего могущества, когда они обнаружили, что этот мир подобен тому, который нас окружает?

Глава 20

КИПЯЩАЯ ВОДА И ВРАТА АДА

Если вы не знаете английского языка, то все книги, на нем написанные, будут казаться вам одинаковыми. Аналогично, не имея соответствующей профессиональной подготовки, вам будет сложно заметить разницу между различными областями теоретической физики: во всех случаях вы будете видеть лишь невразумительные тексты, наполненные помпезными греческими словами, пронизанные формулами и техническими символами. Но при этом различные области физики имеют весьма отличные особенности. Возьмите, к примеру, специальную относительность. Это прекрасный предмет, но для нас он более не остается загадкой; мы чувствуем, что знаем о нем все, что мы когда-либо хотели знать. Статистическая механика, напротив, все еще хранит свои удивительные тайны: все указывает на то, что мы понимаем лишь малую толику того, что следует понять. В чем же состоят эти удивительные тайны? В данной главе я опишу парочку из них.

Одним непонятным явлением природы является кипение воды, да и замерзание ее таит не меньше загадок. Если мы возьмем литр воды и понизим температуру, вполне разумно ожидать, что вязкость воды начнет увеличиваться. Мы можем предположить, что при достаточно низкой температуре вода станет настолько вязкой, настолько жесткой, чтобы казаться достаточно твердой. Подобное предположение о затвердеваниии воды ошибочно[1]. По мере охлаждения воды мы видим, что при определенной температуре она превращается в лед очень резко. Аналогичным образом, если мы нагреем воду, то она закипит при определенной температуре, то есть она подвергнется скачкообразному переходу от жидкости к водяному пару. Замерзание и закипание воды являют собой знакомые примеры *фазовых переходов*. Фактически, эти явления настолько нам знакомы, что мы можем не заметить тот факт, что они действительно очень странные и требуют объяснения. Вероятно, можно сказать, что физик — это человек, который *не* считает очевидным, что воды должна замерзать или закипать при понижении или повышении температуры. А что говорит нам о фазовых переходах статистическая механика?

Согласно нашей общей философии наложение глобального условия (в данном случае фиксирования температуры) в результате приводит к тому, что все понятия, связанные с системой, получают однозначное определение (*обычно*). Имея снимок конфигурации атомов в гелии при температуре 20° C, вы сумели бы отличить его от снимка, сделанного при другой температуре, или снимка другого вещества точно так же, как вы с первого взгляда отличаете Ван Гога от Гогена. «Совокупность вероятностных характеристик» изменяется с температурой, и это изменение обычно происходит постепенно. Точно также может постепенно изменяться и стиль художника, по мере того как он становится старше. И затем происходит неожиданное. При определенной температуре вместо постепенного изменения вы получаете внезапный скачок — от газа гелия к жидкому гелию или от воды к водяному пару или льду.

Можно ли на молекулярном снимке с легкостью отличить лед от жидкой воды? Да. Лед имеет кристаллическую форму (представьте снежинку), и направления осей кристалла на снимке выглядят как статистические построения молекул в определенных направлениях. В жидкой воде, напротив, предпочтительные направления отсутствуют.

Таким образом, здесь возникает задача для физиков-теоретиков: доказать, что при повышении или понижении температуры воды происходит фазовый переход к водяному пару или ко льду. Но это слишком трудная задача! Мы еще весьма далеки от того, чтобы получить такое доказательство. На самом деле не существует ни одного вида атомов или молекул, для которого мы можем математически доказать способность к кристаллизации при низкой температуре. Такие задачи слишком сложны для нас.

Будучи физиком, вы не сочтете необычной встречу с задачей, которая слишком сложна для того, чтобы вы могли ее решить... Конечно же, из такого положения существует выход, но он требует, чтобы ваше отношение к реальности изменилось в том или ином аспекте. Либо вы считаете математическую задачу аналогичной той, что вы не в состоянии решить, но более легкой, и забываете о тесной связи с физической реальностью. Либо вы придерживаетесь физической реальности, но находите ее другую идеализацию (зачастую за счет того, что забываете о математической строгости или логической согласованности). Оба подхода использовались для того, чтобы попытаться понять фазовые переходы, и оба оказались весьма плодотворными. С одной стороны, можно изучать системы «на решетке», где атомы вместо свободного движения можно представить только в некоторых дискретных позициях. Для таких систем существуют хорошие математические доказательства наличия определенных фазовых переходов[2]. Или в идеализацию реальности можно впрыснуть новые идеи, вроде идей Вилсона, связанных со *скейлингом*, и собрать богатый урожай новых результатов[3]. Однако данную ситуацию все равно особенно удовлетворительной не назовешь. Нам бы хотелось иметь общее концептуальное понимание, почему происходят фазовые переходы, а такого понимания у нас пока нет.

Чтобы продемонстрировать силу идей статистической механики, я перепрыгну от кипящей или замерзающей воды к совершенно отличному понятию: черным дырам.

Если вы выстрелите в воздух, то через некоторое время пуля упадет на землю, потому что ее скорость недостаточна, чтобы преодолеть гравитацию, т. е. притяжение пули Землей. Однако очень быстрая пуля, скорость которой больше так называемой *космической скорости*, покинула бы Землю навечно, если пренебречь столь незначительными деталями как замедление под действием трения воздуха. Космическая скорость некоторых небесных тел меньше скорости Земли, а других — больше. Допустим, что вы находитесь на небольшом массивном небесном теле, космическая скорость которого больше скорости света. Тогда все, что вы попробуете отправить вверх, включая свет, будет падать обратно. Вы не сможете послать во внешний мир ни одно сообщение; вы — в ловушке. Небесный объект такого рода называется *черной дырой*, и на нем следует повесить такое же предостережение, какое, согласно Данте, начертано на вратах Ада: *Lasciate ogni speranza, voi ch' entrate*. Оставь надежду всяк, сюда входящий. . .

На самом деле мое описание черной дыры было немного наивным: при упоминании «скорости, большей, чем скорость света» в разуме физика начинают мигать красные лампочки и включаются сирены. При одновременном рассмотрении гравитации и скорости света нам в качестве физической теории нужно использовать *общую относительность*. Согласно теории общей относительности Эйнштейна черные дыры действительно существуют и могут вращаться. Они формируются, когда в небольшую область пространства попадает большое количество материи; они притягивают и поглощают все, что оказывается поблизости. У астрофизиков нет твердого доказательства того, что они видели эти черные дыры, но они полагают, что оно у них есть. В частности, очень мощные источники излучения, присутствующие в центре галактик, а также сверхзвезды («квазары») считаются связанными с очень массивными черными дырами. Излучает не сама черная дыра, которая в принципе ничего излучать не может, а области, ее окружающие. Эти области, если верить астрофизикам, — места, в высшей степени неприятные, настолько же нездоровые, как врата Ада. В действительности, если за Ад будет отвечать физик, то вполне вероятно, что Ад будет выглядеть как массивная черная дыра. Допустим, что 1E9 (один миллиард) солнечных единиц распался и образовал вращающуюся черную дыру. Это будет *увеличивающийся диск* материи, который по спирали будет спускаться вниз, к дыре. Эта материя, горячая и ионизированная, образует проводящую плазму и обыкновенно будет переносить некоторое магнитное поле. Можно попытаться понять динамику падающей материи, магнитные и электрические поля, электрические токи и т. д. Результаты зловещи. По оценкам, вокруг дыры возникает падение напряжения порядка 1E20 вольт (двадцать нулей!). Под влиянием подобной разности потенциалов электроны ускоряются и сталкиваются с фотонами (частицами света), которые ударяются о другие фотоны и создают ад электронно-позитронных пар. По крайней мере, такова одна из точек зрения на происходящее. В отношении деталей общего мнения не существует, но в глобальном масштабе это область, примерно равная размеру нашей Солнечной Системы и излучающая огромное количество энергии. Вы помните, что энергия и масса эквивалентны и связаны знаменитым отношением Эйнштейна $E = mc^2$. Вырабатываемая энергия в этом случае была бы порядка десяти солнечных единиц в год — ужасно огромная величина, как бы вы на нее ни посмотрели.

Однако на физиков-теоретиков не так легко произвести впечатление, и они продолжают задавать вопросы такого типа. Допустим, что черная дыра вместо того, чтобы находиться в центре увеличивающегося диска падающей материи, находится в одиночестве в полном вакууме. Что бы мы увидели в такой чистой черной дыре? Создавала бы она какое-нибудь излучение? Согласно классическим идеям общей относительности чистая черная дыра оказывала бы гравитационные эффекты: она притягивала бы отдаленную материю, а вращающаяся черная дыра также заставляла бы материю вращаться. Черная дыра могла бы иметь электрический заряд, которым мы пренебрежем, ради простоты. Помимо всего этого, чистые черные дыры очень похожи. Две черные дыры с одинаковой массой и одинаковым вращением (т. е. одинаковым угловым моментом) невозможно отличить друг от друга. Нет никакой разницы, создана ли эта черная дыра из водорода или из золота. Дыра позабыла о своем происхождении (помимо массы и углового момента), а физик откажется говорить о дыре, созданной из водорода или золота. Более того, согласно общей относительности, дыра не создает излучения.

Среди людей, заглядывавших в проблему черных дыр, был британский астрофизик Стефен Хокинг, и его не удовлетворил ответ, касающийся отсутствия излучения. Вердикт общей относительности ясен, но он не учитывает квантовую механику. (На самом деле, у нас нет полностью непротиворечивой теории, объединяющей квантовую и общую относительность.) Почему квантовая механика может оказаться важной для этой проблемы? Причина состоит в том, что, согласно квантовой теории, «вакуум» не может быть абсолютно пустым. Если посмотреть на очень маленькую область вакуума, положение известно достаточно точно, и следовательно соотношение неопределенностей Гейзенберга утверждает, что скорость (а точнее, импульс) должна быть достаточно неопределенной. Это значит, что должны существовать *флуктуации вакуума* в форме частиц, движущихся с огромной скоростью[4]. Я знаю, что этот аргумент звучит как надувательство, но это наилучший способ выражения того, что математический формализм выразил бы более логическим образом. Обычно флуктуации вакуума становятся незначительными, если вы рассматриваете большую область пространства. Но что происходит, если вакуум подвергается интенсивной гравитации вблизи черной дыры? Согласно расчетам Хокинга некоторые частицы, составляющие флуктуации вакуума, упадут в черную дыру, а другие улетучатся в виде излучения. Фактически черная дыра испускает электромагнитное излучение (свет) точно так же, как это делает любой кусок горячей материи, поэтому мы можем говорить о температуре черной дыры.

Сначала результат Хокинга физики приняли с долей скептицизма, но впоследствии, при повторении вычислений и получении нового понимания данного вопроса из различных источников[5], он был принят. Вероятно, следует сразу сказать, что массивные черные дыры имеют очень низкую температуру и что их излучение Хокинга достаточно сложно обнаружить. Однако это излучение представляет огромный теоретический интерес, с которым я вас сейчас кратко ознакомлю.

Вернемся к тому факту, что энтропия не может уменьшаться (так называемый второй закон термодинамики). Могло бы показаться, что этому факту можно создать противоречие, если сваливать в черную дыру вещи, обладающие большой энтропией. (Произойдет небольшое увеличение массы, но во всех остальных отношениях черная дыра забудет, что вы в нее сбросили.) Тем не менее, второй закон термодинамики можно спасти, придав черной дыре энтропию (зависящую от ее массы и углового момента). Черную дыру можно создать множеством различных способов (из водорода, золота и т. д.), и количество разрядов числа возможных прошлых историй дыры является естественным определением ее энтропии. Если хотите, можете написать:

$$\text{энтропия} = k \log(\text{количество возможных историй дыры}).$$

Это порождает согласованную термодинамическую картину черной дыры, которая, в частности, имеет точно определенную температуру. Но тогда она должна испускать электромагнитные волны (свет) как и любое тело при такой температуре. Что ж, она это делает, как доказал Хокинг. Тогда, совершенно неожиданно, черные дыры укладываются в рамки термодинамики и статистической механики. Это одно из тех чудес, которые иногда происходят в науке, на которые никто не надеется и которые говорят нам, что законы природы гораздо более гармоничны, нежели мы ожидали.

Глава 21

ИНФОРМАЦИЯ

Смоченное вашей собственной кровью перо скрипит по пергаменту. Вы только что подписали договор с Дьяволом. Вы пообещали ему свою душу после смерти, если он даст вам богатство и все, что ему сопутствует, при вашей жизни. Каким образом он выполнит свою часть обещания? Быть может, он сообщит вам координаты спрятанного сокровища, но это несколько старомодно. Ему гораздо проще заранее сообщить вам результаты скачек и сделать вас в меру состоятельным. Если вас действительно обуяла алчность, то он может дать вам прогнозы рынка ценных бумаг. Знание — вот что Дьявол имеет предложить вам. Во всех случаях в качестве платы за свою душу вы получаете знание, информацию: координаты сокровища, клички выигравших лошадей или списки цен акций. Именно информация сделает вас богатыми, любимыми и уважаемыми людьми.

А вот другой пример силы информации. Допустим, что некий инопланетный вид хочет стереть человечество с лица Земли, не повредив окружающей среде. Один из способов, которым инопланетяне могут воспользоваться, — применить подходящий вирус. Им понадобится вирус, приводящий к летальному исходу, вроде вируса СПИДа, но, кроме того, он должен легко передаваться и быстро действовать, что-то вроде новой разновидности обычного вируса насморка. Им будет нужно то, что не оставит нам времени изобрести стратегии, создать вакцины и т. п.

В данное время вируса, который способен уничтожить человечество на Земле, по-видимому, не существует. Однако с помощью соответствующей технологии его можно было бы создать. Инопланетному виду опять-таки нужна информация. В случае со СПИДом необходимая информация, в сущности, содержится в конкретной последовательности баз, кодирующих генетическую информацию вируса. Этой последовательностью является сообщение, написанное с помощью четырехбуквенного алфавита $(A, T, G, C)^1$ и содержащее 9749 букв или около того. Это достаточно короткое сообщение. Вероятно, существует аналогичная кодировка сообщения для легко передаваемого летального вируса быстрого действия, который способен стереть с лица Земли всех нас. Это сообщение составило бы смертный приговор для всего человечества и при этом заняло бы лишь несколько страниц книги, которую вы держите в руках.

Лично я не стал бы особенно переживать о недружелюбных инопланетянах. Безумные главы государств и фанатичные правительства кажутся мне гораздо более явной угрозой. Они без проблем могут найти ученых с помутившимся от идеалистических идей рассудком или добросовестных, но лишенных воображения специалистов, которые могут реализовать самую безумную схему. Быть может, именно так и завершится история человечества.

В этом отношении я могу предложить вам всего одну утешительную мысль. Если недружелюбным инопланетянам или сумасшедшим ученым в поисках копии такого вируса придется полагаться только на удачу, то мы действительно находимся в безопасности. Количество сообщений, содержащих около десяти тысяч букв и написанных с помощью четырехбуквенного алфавита, слишком велико, чтобы его можно было проанализировать: таких сообщений гораздо больше, чем песчинок на всех пляжах Галактики, а фактически, гораздо больше, чем атомов во всей известной вселенной. Короче говоря, никто не может надеяться, что правильно угадает сообщение, состоящее из десяти тысяч букв.

Длина сообщения указывает на содержащееся в нем *количество информации* и сообщает насколько сложно угадать сообщение. Попытаемся получить более точное определение количества информации, содержащейся в сообщении. Длина сообщения, безусловно, важна, но алфавит также играет свою роль: четыре буквы (A, T, G, C) можно заменить двумя символами 0,1 за счет передачи одной буквы парой символов: $A = 00$, $T = 01$, $G = 10$, $C = 11$. Переведенное сообщение имеет в два раза больше символов, чем оригинальное, но содержит то же самое количество информации. Или можно было бы закодировать пары последовательных букв (A, T, G, C) с помощью шестнадцати букв алфавита $a, b, c, \ldots, p$, сделав сообщение вполовину короче, однако оно по-прежнему содержало бы то же самое количество информации.

Если ваше сообщение записано на английском языке, вы можете сжать его, пропуская гласные, и сообщение, как правило, остается понятным. Это означает, что письменный английский язык избыточен: мы пишем гораздо больше того, что необходимо для понимания написанного. Однако, чтобы определить количество информации, содержащейся в сообщении, нужно знать, записано ли оно на английском, французском или каком-то другом языке. В более общем случае необходимо знать, каковы разрешенные сообщения определенной длины. Если у вас есть список разрешенных сообщений, вы можете их пронумеровать и точно определить каждое, давая его номер. Такое кодирование возможных сообщений с помощью числа не обладает избыточностью, и, следовательно, длина кодирующих чисел является хорошей мерой количества информации, содержащейся в сообщениях. Таким образом, разумно записать следующее определение:

$$\text{количество информации} = \text{количество разрядов числа разрешенных сообщений}.$$

Это определение относится скорее к классу разрешенных сообщений, нежели к одному сообщению (возможна и другая точка зрения, которую мы обсудим в следующей главе). Некоторая корректировка определения необходима, когда разные сообщения имеют разную вероятность, однако в данном случае это не должно нас заботить[2].

Ссылаясь на то, что мы уже говорили об энтропии, мы также могли бы записать

$$\text{количество информации} = K \log(\text{количество разрешенных посланий}).$$

Количество информации обыкновенно выражается в *двоичных разрядах* или *битах*. Это означает, что вы переводите сообщение в алфавит, содержащий две «буквы»: 0 и 1, а затем измеряете его длину (или берете $K = 1/\log 2$ в вышеприведенной формуле).

В статье, опубликованной в 1948 году[3], американский ученый Клод Шеннон в одиночку создал *теорию информации*. Данная теория касается очень важной практической проблемы: эффективной передачей информации. Допустим, что у вас есть источник, создающий непрерывный поток информации (политик, выступающий с речью, или теща, болтающая по телефону, — информация не обязательно должна иметь смысл). Вы можете рассматривать поток информации как последовательность сообщений некоторой данной длины, записанных на русском языке и производимых с определенной скоростью. Ваша работа, как специалиста, состоит в том, чтобы передать эти сообщения по определенной линии связи. Эта линия может быть старомодным телеграфным кабелем или лазерным лучом, направленным на какую-то отдаленную космическую станцию. Эта линия обладает определенной *пропускной способностью* — максимальным количеством двоичных разрядов (или битов), которые она может передавать в секунду. Если ваш источник информации в секунду производит количество битов, превышающее пропускную способность вашей линии, вы не сможете передать сообщение (по крайней мере, с той скоростью, с какой оно создается). По-другому вы можете это сделать, но у вас может возникнуть проблема с тем, чтобы избавиться от некоторой избыточности исходного сообщения, закодировав его должным образом. (Это называется *сжатием данных*; сообщение можно сжать, если оно является избыточным, но информация не сжимается.)

Другой проблемой, которая вполне может возникнуть, являются помехи на линии. Эту проблему можно решить, целесообразно увеличивая избыточность сообщения. Вот что вы делаете. При кодировании сообщения вы вводите лишние биты информации, которые позволят вам проверить, когда помехи изменили символ, и еще некоторые биты, которые позволят вам сделать поправки. Другим словами, вы используете код исправления ошибок. Если пропускная способность вашей линии достаточно высока, а помехи достаточно низки, вы сможете с ними справиться, используя коды исправления ошибок. Точнее, вы сможете добиться того, чтобы вероятность неточной передачи стала произвольно низкой. Это, конечно же, требует доказательств, и сама теория кодов исправления ошибок достаточно сложна, но ее основные идеи просты.

Определение информации было создано после определения энтропии, измеряющей количество хаотичности, присутствующей в системе. Почему информация должна измеряться хаотичностью? Просто потому, что, выбирая одно сообщение в классе всех возможных, вы рассеиваете хаотичность, присутствующую в этом классе.

Теория информации была замечательно успешной дисциплиной, как в своем математическом развитии, так и в практических применениях. Но как и в случае с физическими теориями, необходимо понимать, что теория информации работает с идеализациями реальности и упускает некоторые важные моменты. Считается, что источник информации производит хаотическую последовательность разрешенных сообщений (или бесконечно длинное сообщение с определенными статистическими свойствами). Не требуется, чтобы сообщения были полезными или логически непротиворечивыми; они могут вообще не иметь смысла. Сказать, что некоторое сообщение имеет большое количество информации, — это все равно что сказать, что оно извлечено из большого класса разрешенных сообщений или что оно очень случайно. Некоторая доля этой случайности может соответствовать полезной информации, а другая может оказаться обычным мусором.

Рассмотрим пример: музыкальные мелодии. Отставим в сторону всевозможные детали и рассмотрим мелодии как сообщения, в которых алфавитом является музыкальная гамма. Мы можем попытаться определить количество информации (или хаотичность) мелодии, изучая частоту различных нот, а также статистику интервалов между последовательными нотами (это стандартная процедура в теории информации)[4]. Как уже упоминалось ранее, более старая музыка задействует в основном маленькие интервалы, а потому их мало. В более поздние времена чаще встречается растущее разнообразие интервалов. Из этого можно сделать вывод, что (в западной классической музыке)происходило постепенное увеличение количества информации, или хаотичности, музыкальных мелодий[5]. Это интересный вывод, но при этом к нему следует отнестись с долей скептицизма. Ведь, в действительности, музыкальная мелодия — это нечто большее, чем статистика последовательных интервалов. Музыкальное произведение имеет начало и конец, а также приличную структуру в основной своей части. Эта структура не просто соответствует связям последовательных нот (статистике интервалов), но и долгосрочным отношениям (отношениям, распространяющимся на все произведение), которые невозможно уловить с помощью обыкновенных информационно-теоретических описаний.

Кроме того, информация, содержащаяся в мелодии, может быть интересной и оригинальной или бессмысленной и скучной. Если вы наложите нотный стан на карту неба и отметите ноты на местах расположения звезд, то вы получите «небесную музыку», обладающую большим объемом информации, но это не означает, что сама музыка будет хорошей.

Количество информации, содержащейся в произведении искусства, является важным понятием (его можно определить как для стихотворений и мелодий, так и для картин). Это не значит, что высокое качество эквивалентно большому или малому количеству информации. Вероятно, невозможно говорить об искусстве, если оно не содержит хотя бы минимум информации, однако некоторые художники пробовали использовать очень низкие ее объемы. И напротив, количество информации, которое содержится во многих произведениях искусства (картинах или романах), просто огромно[6].

Быть может, в данный момент вы уже несколько раздражены, поскольку я говорю о количестве информации, содержащейся в сообщениях, и умалчиваю о проблеме смысла этих сообщений. Вообще вам нередко может казаться, что ученые систематически обращаются к более формальным и поверхностным вопросам и оставляют в стороне существенные. На подобную критику можно ответить тем, что наука придает особое значение скорее хорошим ответам (и, если это возможно, простым ответам), нежели глубоким вопросам. Совершенно очевидно, что проблема смысла является очень глубокой и сложной. Помимо всего прочего, она связана с тем, как работает наш мозг, а об этом мы знаем не особенно много. Таким образом, нам не следует удивляться, почему современная наука способна работать только с достаточно поверхностными аспектами проблемы смысла. Одним из этих поверхностных аспектов и является количество информации в том смысле, в каком мы рассматривали его в данной главе, и замечательно уже то, насколько далеко это нас заводит. Мы можем измерять количества информации так же, как мы измеряем количества энтропии или электрического тока. И это не просто можно применить на практике, это дает нам понимание природы произведений искусства. Конечно, нам хотелось бы задавать более претенциозные вопросы, но во многих случаях ясно, что эти вопросы слишком сложны, чтобы мы могли на них ответить. Подумайте о музыкальных мелодиях; это сообщения, которые, как нам кажется, мы понимаем, но при этом мы, в общем-то, не можем сказать, что они означают. Существование музыки — это постоянный позор для интеллекта, но он лишь один из множества других ему подобных. Ученые знают, как сложно понять простые явления вроде кипения или замерзания воды, поэтому они не особенно удивляются, когда обнаруживают, что очень многие вопросы, связанные с человеческим разумом (или функционированием мозга) в настоящее время находятся за пределами нашего понимания.

Глава 22

СЛОЖНОСТЬ, АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ

Наука развивается за счет создания новых концепций: новых идеализаций в физике, новых определений в математике. Некоторые из вновь введенных концепций через какое-то время оказываются неестественными или непродуктивными. Другие же показывают себя более полезными и фундаментальными, чем можно было предположить. *Информация* стала одной из наиболее успешных концепций современной науки. Помимо всего прочего, информация позволяет нам подойти к проблеме *сложности*.

Нас окружают сложные объекты, но что же такое сложность? Сложны живые организмы, сложна математика, сложна конструкция космического корабля. Что общего во всех этих вещах? Вероятно, то, что все они содержат много информации, которую не так легко получить. Пока мы все еще не можем создавать живые организмы с самого начала; мы мучаемся с доказательством некоторых математических теорем, да и конструкция космических кораблей требует от нас немало усилий.

Некоторая сущность является сложной, если она заключает в себе какую-то информацию, которую сложно получить. Мы не сказали, что значит «сложно получить», а потому наше определение сложности не имеет точного значения. Фактически же наш естественный язык, которым мы пользуемся в повседневной жизни (в данном случае, русский), позволяет нам давать замечательно неопределенные определения, вроде приведенного выше. И это действительно скорее благо, нежели досадная неприятность. Однако если мы хотим заниматься наукой, то мы должны быть более точными, более формальными. Вследствие этого мы получим не одно, а несколько определений сложности, в зависимости от предпосылок, из которых будем исходить. Например, серьезное исследование сложности жизни, в качестве предпосылки, должно включать физическую вселенную, в которой эта самая жизнь развивается. Однако существуют и такие концепции сложности, которые можно развить с помощью чисто математических предпосылок. Сейчас я рассмотрю именно такую концепцию, концепцию *алгоритмической сложности*.

Вкратце, алгоритм — это систематический способ выполнения определенного задания. Например, всем нам знаком алгоритм умножения двух целых чисел. Алгоритм всегда берет входное сообщение, типа «3×4» (записанное с помощью символов $0, 1, 2, \ldots, 9, \times$) и выдает выходное сообщение, типа «12». Безусловно, в наши дни умножение гораздо легче выполнять с помощью компьютера, и тогда алгоритм можно определить как задачу, выполняемую компьютером (в который заложена подходящая программа). То, что мы подразумеваем под компьютером, фактически является несколько идеализированной машиной, в распоряжении которой находится бесконечный объем памяти. (Мы не желаем ограничивать определение алгоритмов только потому, что серийные компьютеры не могут ввести в свою память число, содержащее 1E100 разрядов.)

Британский математик Алан Тьюринг изобрел и точно описал компьютер, который хорошо подходит для теоретического изучения алгоритмов, хотя этот же самый компьютер оказался бы замечательно неадекватным для их реализации на практике. *Машина Тьюринга* имеет конечное число *внутренних состояний*: несколько так называемых активных состояний и одно состояние остановки.

Машина выполняет свою работу на бесконечной бумажной ленте, поделенной на непрерывный ряд квадратов (эта лента служит памятью). На каждом квадрате ленты записан символ конечного алфавита, причем один из символов является *пробелом*. Машина Тьюринга действует в последующие моменты времени совершенно предсказуемым образом. Если она находится в состоянии остановки, она вообще ничего не делает. Во всех остальных случаях дурацкая машина считывает квадрат, на котором она находится, и потом, в зависимости от своего внутреннего состояния и от того, что она только что считала, делает следующие вещи:

(а) она стирает то, что было написано, и записывает в квадрат что-то еще (или то же самое);
(б) она переходит на один квадрат влево или вправо;
(в) она переходит к новому внутреннему состоянию.

Затем машина начинает другой цикл, в зависимости от того, что она считывает в новом квадрате и каким является ее новое внутреннее состояние.

Исходное состояние ленты содержит конечное сообщение, которое является входным (оставшаяся часть ленты пуста, т. е. состоит из квадратиков, помеченных символом «пробел»). Машина начинает с одного конца сообщения, причем она устроена так, что останавливается, уже написав свое собственное сообщение, которое и является ее ответом. Ответом может быть «Да», или «Нет», или цифра, или какое-то более длинное сообщение. Можно настроить машину Тьюринга так, чтобы она складывала или умножала целые числа. Однако в действительности машина Тьюринга может делать гораздо больше, нежели выполнять умножение: любая задача, которую способен выполнить компьютер, также может быть выполнена и соответствующей машиной Тьюринга. И кроме того, для различных заданий совсем необязательно иметь бесконечное количество машин, потому что *существует универсальная машина Тьюринга*. Чтобы реализовать на этой машине конкретный алгоритм, на его ленте необходимо записать входное сообщение, содержащее описание алгоритма и конкретные данные, которые необходимо обработать[1].

Подведем итог. Алгоритм представляет собой нечто, что можно реализовать на компьютере, причем мы можем воспользоваться даже очень примитивным типом компьютера, который называется машиной Тьюринга. При наличии конкретной задачи ее можно выполнить с помощью эффективных или неэффективных алгоритмов, в зависимости от того, сколько циклов машины Тьюринга потребуется для получения ответа. Тогда *алгоритмическая сложность* задачи зависит от наличия эффективных алгоритмов ее решения. Принятое определение эффективного алгоритма сравнивает длину L входного сообщения (т. е. количество информации, которое в нем содержится) и время T (количество циклов универсальной машины Тьюринга), которое необходимо для получения ответа. Если

$$T \leqslant C(L+1)^n,$$

где C и n — некоторые постоянные, мы имеем *полиномиальный временной алгоритм*. (Он называется так, потому что $C(L+1)^n$ является полиномом по L.)

Полиномиальный временной алгоритм считается эффективным, а задача, которая ему соответствует, называется *легкоразрешимой*. Если $n = 1$, то время, необходимое для выполнения алгоритма, по большей части, пропорционально длине входного сообщения (плюс один); если $n = 2$, время пропорционально квадрату длины входного сообщения (плюс один); и т. д. Можно доказать, что определение легкости обработки не зависит от конкретной универсальной машины Тьюринга, которая используется. В качестве примера рассмотрим задачу, в которой входное сообщение является целым числом и мы желаем знать, делится ли это целое число на 2, на 3 или на 7. Вы не удивитесь, что подобные задачи относятся к разряду легко обрабатываемых (и вы, наверное, еще в школе изучили эффективные алгоритмы их решения).

По существу, современные компьютеры являются универсальными машинами Тьюринга (они не отвечают требованиям классической машины Тьюринга только в том, что не обладают бесконечной памятью). А потому специалистам по вычислительной технике хотелось бы знать, какие задачи являются легко разрешимыми. Однако нахождение эффективного алгоритма может оказаться достаточно сложным. Так, например, произошло в случае с *линейным программированием*, полиномиальный временной алгоритм для которого нашли совсем недавно[2]. В линейном программировании, с технической точки зрения, вопрос состоит в том, чтобы найти максимум линейной функции на выпуклом многограннике. Теорема о минимаксе в теории игр приводит именно к такому вопросу; да и, кроме этого, существует множество проблем распределения ресурсов, которые также приводят к вопросам линейного программирования. Следовательно, в данном случае, доказательство легкости решения может иметь важные практические следствия.

Однако эффективные алгоритмы существуют не всегда. Допустим, что единственный известный нам способ решения задачи заключается в последовательном поиске среди всех сообщений длины L в двоичном алфавите. На это уйдет время

$$T \geqslant 2^L.$$

В данном случае расчетное минимальное время, которое необходимо для решения задачи, умножается на 2 всякий раз, когда длина L увеличивается на 1. Мы наблюдали примеры подобного *экспоненциального роста* в первых главах этой книги и убедились, что он быстро дает очень большие числа. Таким образом, экспоненциальный временной алгоритм особенно практичным не назовешь. В общем случае задача, для которой не существует полиномиального временного алгоритма, считается *трудноразрешимой*.

Так каковы же примеры трудноразрешимых задач? И почему они таковыми являются? Я предлагаю вам задать эти вопросы специалисту-теоретику, который занимается вопросами вычислительной техники, если таковой найдется среди ваших друзей. Отведите на ответ несколько часов и попытайтесь на это время получить в свое распоряжение школьную доску. Дело не в том, что все это слишком сложно, чтобы это можно было объяснить, а в том, что это, скажем,... несколько специальная информация. Но, кроме того, все это совершенно потрясающе. Ваш друг определит NP-*полные* задачи[3], NP-*трудные* задачи и объяснит вам, что такие задачи считаются трудноразрешимыми. Было бы просто фантастически замечательно, если кто-то сумел бы доказать, что NP-полные (или трудные) задачи являются трудноразрешимыми. И еще более потрясающим было бы то, если бы кто-то сумел доказать, что они являются легкоразрешимыми...

Вы озадачены? Но все, что я в состоянии попытаться здесь сделать, — просто дать краткие указания на эти темы, а также примеры задач, которые считаются трудноразрешимыми.

Популярным примером является задача о странствующем торговце. Вам даются расстояния между определенным количеством городов и разрешен определенный полный пробег в милях. (Расстояния и полный пробег являются целыми числами и рассчитываются в милях или какой-то другой единице.) Вопрос состоит в том, имеется ли объездной путь, соединяющий все города, максимальная длина которого не превышает полный разрешенный пробег. Это вопрос, на который можно ответить либо «Да», либо «Нет». Если предлагается определенный путь, то достаточно легко проверить, удовлетворяет ли он условию полного разрешенного пробега. Однако проверить по очереди все возможные пути, когда городов много, было бы весьма трудно. Это пример NP-полной задачи.

В общем, NP-полные задачи требуют ответов «Да» или «Нет» и обладают общей чертой: существование ответа «Да» можно проверить за полиномиальное время. (Между ответами «Да» и «Нет» существует асимметрия, потому что нельзя сказать, что ответ «Нет» можно проверить за полиномиальное время.) Пусть «Задача X» будет вашей любимой задачей, на которую можно ответить «Да» или «Нет». Допустим, что Задача X становится легкоразрешимой, если вы имеете свободный доступ к решениям задачи о странствующем торговце, и что задача о странствующем торговце становится легкоразрешимой, если вы имеете свободный доступ к решениям Задачи X; тогда говорят, что Задача X является NP-полной. Несмотря на исчерпывающий поиск, не было найдено ни одного полиномиального временного алгоритма для решения NP-полных задач, и все считают, что такового не существует. Однако этого никто не доказал.

Теперь удобно ввести NP-трудные задачи, которые трудны так же, как и NP-полные, но не требуют ответов «Да» или «Нет». Вот пример: *задача спиновых стекол*. Входное сообщение является

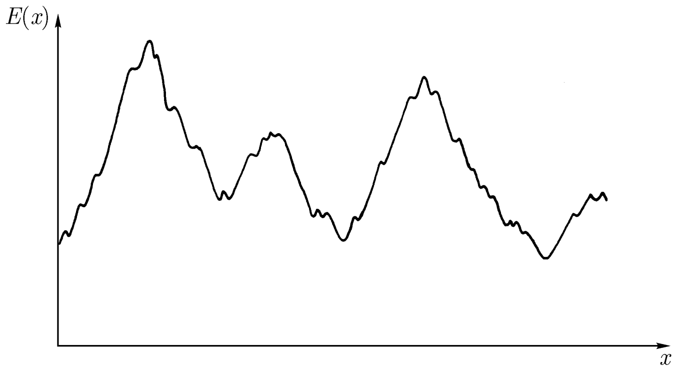

Рис. 22.1. Каково максимальное значение $E(x)$?

массивом чисел $a(i,j)$, равных $+1$ или -1, где i и j идут от 1 до некоторой величины n (например, от 1 до 100, в случае чего массив будет состоять из 10 000 цифр ± 1). Нужно найти максимальное значение выражения

$$E = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a(i,j)x(i)x(j),$$

где $x(1), \ldots, x(n)$ — допустимые величины $+1$ или -1. Таким образом, вам необходимо сложить возведенные в степень n слагаемые, каждое из которых равно $+1$ или -1, и сделать результат максимальным. Вероятно, вы не верите, что это трудноразрешимая задача, и, быть может, она действительно таковой не является, но никто так и не нашел эффективного алгоритма ее решения. (Обратите внимание, что входное сообщение содержит биты, возведенные в степень n, и последовательный поиск требует рассмотрения 2^n случаев.) Задача спиновых стекол является прототипом семейства задач, которые возникают в физике *неупорядоченных систем*[4]. (Неупорядоченным является «взаимодействие» $a(i,j)$ между местами i и j.) Задача нахождения максимального E похожа на задачу нахождения высочайшего пика горной цепи (см. рис. 22.1). В случае, изображенном на рисунке, это легко, потому что x изменяется линейно (т. е. x является одномерным). В задаче спиновых стекол геометрия пиков и долин является n-мерной... и трудно решаемой (даже несмотря на то, что для каждого из n измерений возможны всего два значения: $+1$ и -1).

Создадим идеализацию — или, лучше сказать, метафору — задачи жизни. Согласно этой метафоре задача жизни состоит в том, чтобы найти генетическое сообщение $x(1), \ldots, x(n)$, которое дает очень большое значение сложному выражению типа вышеприведенного E. Согласно тому, что мы только что сказали, это может быть очень сложной задачей. Однако существуют некоторые признаки, указывающие на то, что вышеприведенная метафора жизни, возможно, далеко не так ошибочна[5].

Идея алгоритмической сложности также может послужить в качестве метафоры сложности доказательства математических теорем или проектирования космического корабля. Однако мы увидим, что доказательство теорем приводит нас к еще более глубоким слоям сложности, нежели NP-полные задачи: более глубоким, более непонятным и более отвратительным.

Глава 23

СЛОЖНОСТЬ И ТЕОРЕМА ГЕДЕЛЯ

В 1931 году логик Курт Гедель, австриец по национальности, опубликовал то, что, вероятно, являет собой единственный наиболее глубокий концептуальный результат, полученный человечеством в двадцатом веке. Я помню, что встречал Геделя в Принстонском Институте перспективных исследований в шестидесятых-начале семидесятых. Это был невысокий человек, изнуренный, с желтоватым лицом; кроме того, он носил в ушах ватные пробки. Вот типичная история, которую я о нем слышал[1]. Приехавшему коллеге позволили использовать рабочий кабинет Геделя, когда последний был в отъезде. Вышесказанный коллега перед отъездом оставил на письменном столе записку с благодарностью, которая гласила, что ему очень жаль, что он не смог повидать самого Геделя, и выражала надежду, что у него еще будет шанс познакомиться с ним поближе в другой раз. Через некоторое время он получил по почте конверт от Геделя. В конверте лежала его собственная записка, в которой его предложение — *Я надеюсь, что у меня еще будет шанс познакомиться с вами поближе в другой раз* — было подчеркнуто Геделем, который карандашом приписал вопрос: *Что конкретно вы имеете в виду?*

Курт Гедель умер в 1978 году от голодовки, которую устроил сам. Судя по всему, ему казалось, что его хотят отравить или что-то в этом роде, и он отказывался есть.

Если вспомнить о суицидах, совершенных Людвигом Больцманом и Аланом Тьюрингом (который был гомосексуалистом в то время и в том месте, когда и где это не принималось), можно сделать вывод, что ученые склонны совершать самоубийства. Но такой вывод абсолютно ошибочен. Большинство ученых, в действительности, достаточно нормальные люди, нормальные зачастую настолько, что бывают скучными и не умеют фантазировать. И я думаю, что никто не станет мне возражать, если я скажу, что даже в своей работе многие ученые скучны и лишены воображения. Даже их некрологи часто бывают скучными и однотипными: они скорбят по слишком ранней смерти, указывают на их активную роль в синагоге или церковной общине, чествуют их «заразительный энтузиазм» и тому подобная чушь. (Заразительный энтузиазм — это весьма бедственное состояние; такой диагноз обычно ставят только *после смерти*.)

Но вернемся к Курту Геделю. Какие бы проблемы его не одолевали, он, по крайней мере, не страдал (и не заставлял других страдать) от заразительного энтузиазма.

Чтобы понять открытие Геделя, вероятно, неплохо было бы поразмышлять над психологическим настроем, который характеризуется порядком, бережливостью и упрямством, столь широко распространенными среди ученых (особенно математиков) и столь для них полезными. Зигмунд Фрейд связал подобный настрой с предрасположением к неврозу навязчивых состояний и с так называемой анально-садистской стадией развития либидо[2]. Как бы то ни было, подобный психологический склад естественным образом приводит к тому, что математик пытается представить математику и математический вывод в максимально чистом и упорядоченном виде. Соответственно великая мечта всех математиков — основать математику на четко определенных правилах вывода и конечном числе абсолютно явных фундаментальных утверждений, называемых аксиомами. Эта мечта зародилась у Евклида, древнегреческого математика (около 300 г. до н. э.), дожила до Давида Гильберта, великого немецкого математика (1862–1943) и привела к прогрессивной формализации всей математики. Арифметика целых чисел была формализована достаточно рано, и пиком великой мечты математиков была надежда на то, чтобы для каждого имеющего смысл утверждения о целых числах систематическим образом можно было бы решить, является оно истинным или ложным. Именно эту надежду и уничтожил Гедель.

Гедель показал, что если установить правила вывода и любое конечное число аксиом, то существуют имеющие смысл утверждения, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть. Точнее, допустим, что аксиомы, принятые для целых чисел, являются *непротиворечивыми*, т. е. допустим, что, применяя правила вывода, вы никогда не сможете доказать ни то, что утверждение является истинным, ни то, что оно является ложным. Кроме того, существуют истинные свойства целых чисел[3], которые невозможно вывести из аксиом. И если принять любое такое свойство в качестве новой аксиомы, то останутся другие недоказуемые свойства.

Теорема Геделя о неполноте сыграла центральную роль в нашем понимании основ математики. Сначала она стала серьезным потрясением. Потом привела к прогрессивной перемене в системе убеждений математиков. При этом упростилось сложное доказательство теоремы. Это упрощение произошло благодаря введению новых концепций, которое частично осуществил Гедель, а частично — другие (уместно привести в качестве примера машину Тьюринга). В общем, открытие теоремы о неполноте привело к прогрессивному изменению описания математики. В результате этого теорема о неполноте сейчас кажется совершенно естественной и даже несколько тривиальной. Ранее существовала великая надежда на то, что некоторый конечный набор истинных утверждений (называемых аксиомами) образует базис, из которого можно будет выводить все истинные утверждения о целых числах. Теперь нам известно, что *набор всех свойств целых чисел* (т. е. набор всех истинных утверждений о них) *не имеет конечного базиса*. Кроме того, мы обладаем интуитивным пониманием того, почему не может существовать такого конечного базиса, которое опять-таки основано на *информации*, как я сейчас обозначу.

Мы уже видели, как можно определить количество информации, содержащееся в сообщении, если дано семейство сообщений, к которому оно принадлежит. В частности, если приняты все сообщения, состоящие из символов 0 и 1, то последовательность миллиона 0 несет количество информации, равное одному миллиону битов. Другая идея, предложенная Соломоновым, Колмогоровым и Чайтином[4], состоит в том, чтобы рассматривать длину (в битах) самой короткой компьютерной программы, которая на выводе создаст интересующее нас сообщение. В настоящем случае программа напоминала бы что-то вроде «напечатать один миллион 0», и ее длина была бы гораздо короче одного миллиона. Величину, определенную таким образом, назвали *алгоритмической информацией*, или *сложностью Колмогорова – Чайтина*. Это сложность в том смысле, что она измеряет, насколько трудно создать сообщение (насколько трудно в смысле длины программы, в битах, а не в смысле времени вычисления). В зависимости от выбранного компьютера возможны несколько немного отличных определений, но при этом можно, например, воспользоваться универсальной машиной Тьюринга.

Если сообщение «ля-ля-ля. . . » содержит миллион битов, то его К.-Ч. (Колмогоров – Чайтин)-сложность не может намного превышать миллион, потому что вы можете напечатать его, используя программу «напечатать «ля-ля-ля. . . »». Кроме того, если сообщение содержит миллион битов, его К.-Ч.-сложность обычно ненамного меньше одного миллиона. (Это имеет смысл: большинство сообщений невозможно сжать, к примеру, до 10 процентов их первоначальной длины; это свойство присуще лишь очень малой доле сообщений.) Это довольно простые замечания.

Но позвольте мне вернуться к более сложной задаче: дано некоторое сообщение, требуется определить его К.-Ч.-сложность. Вы зевали, не так ли? Вас не волнует К.-Ч.-сложность? Вам скучно? Что ж, я воспользуюсь снижением вашей бдительности в своих целях, дам вам плохой совет… и через несколько минут вы увязнете в логическом парадоксе и будете умолять сжалиться над вами.

Каким образом мы определяем К.-Ч.-сложность сообщения «ля-ля-ля…» длиной в миллион битов? Мы составляем список всех программ, длина которых ненамного превышает один миллион битов, вставляем их одну за другой в свой компьютер и смотрим, что получится. Длина самой короткой программы с выводом «ля-ля-ля…» является К.-Ч.-сложностью этого сообщения. Ничего нет проще. На практике это может занять слишком много времени, чтобы считать это простым, но вы же не видите никакой причины, по которой этого, в принципе, невозможно сделать. Или видите?

Ну что ж! Пока мы сидим за своим дружелюбным компьютером, мы можем попросить его распечатать сообщение, которое идет первым по алфавиту среди тех, что имеют К.-Ч.-сложность, равную, по крайней мере, одному миллиону. Я оставляю вам задачу определения алфавитного порядка сообщений в данном контексте. Я оставляю вам и задачу написания «суперпрограммы», которая печатает первое сообщение (в алфавитном порядке) со сложностью, равной, по крайней мере, миллиону. Эта суперпрограмма должна быть достаточно короткой (она проверяет конечное число программ и распечатывает один вывод). Если вы хоть сколько-то смыслите в программировании, ваша суперпрограмма должна содержать менее миллиона битов… и вот вы попались, увязли в парадоксе по самое горло, и просите сжалиться над вами: с помощью программы, содержащей менее миллиона битов, вы определили сообщение с К.-Ч.-сложностью, равной, по крайней мере, одному миллиону, что противоречит определению К.-Ч.-сложности.

Что вы сделали не так? Логики скажут вам, что ваша ошибка состояла в том, что вы сидели за компьютером после того, как ввели программу, и воображали, что она выдаст вам результат в должное время. Машина Тьюринга может через некоторое время остановиться и выдать результат или она может никогда не остановиться, *и заранее вы этого не знаете*. Нельзя ожидать от машины Тьюринга слишком многого. В частности, вам не следует ожидать, что вы будете знать, остановится ли она вообще при данном входном сообщении; не существует алгоритма, который определял бы это. На самом деле не существует и алгоритма определения К.-Ч.-сложности сообщений — это один из аспектов теоремы Геделя, который открыл Чайтин.

Чайтин показал следующее: утверждения типа «Сообщение «ля-ля-ля. . . » имеет К.-Ч.-сложность, равную, по крайней мере, N» либо ложны, либо недоказуемы, когда N является достаточно большим. Достаточно большим — это насколько большим? Это зависит от аксиом вашей теории. Ваши аксиомы содержат определенное количество информации (в зависимости от их полной длины), и вы не сможете доказать, что «ля-ля-ля. . . » содержит больше информации, чем используемые вами аксиомы. Разумно, не так ли? Причем это даже не слишком сложно доказать[5].

Много еще можно говорить о теореме Геделя, но, поскольку я не желаю тонуть сам (и топить вас) в технических деталях, я добавлю еще только парочку замечаний.

Быть может, вы огорчились, потому что я сказал, что теорема Геделя связана со свойствами целых чисел, а вместо них рассмотрел сложность сообщений. На самом деле логические утверждения (например, касающиеся сложности сообщений) можно перевести в свойства целых чисел. Это игра, которую начал Гедель и которая достигла кульминации в том, что известно как решение «десятой задачи Гильберта»[6]. А потому неважно, что мы не говорили о свойствах целых чисел в явном виде.

Сущностью теоремы Геделя в том виде, в каком мы ее рассмотрели, является тот факт, что, вводя определенную программу, мы не знаем, остановится машина Тьюринга или нет. Для программ определенной длины машина будет либо работать до истечения некоторого максимального времени и потом остановится, либо будет работать вечно и не остановится никогда. Если бы мы знали максимальное время остановки нашей машина Тьюринга для программы каждой длины, то мы могли бы определить, для каких программ машина остановится, а для каких нет. (Просто позвольте машине проработать до максимального времени остановки для данной длины программы; если она не остановится к тому времени, то она не остановится никогда). Но суть проблемы состоит в том, что максимальное время остановки нам не известно. И мы не можем его знать, потому что оно растет быстрее любой вычислимой функции длины программы — быстрее полиномиальной функции, быстрее экспоненциальной функции, быстрее экспоненциала экспоненциальной функции...

В предыдущей главе мы решили, что задача является трудноразрешимой, если вы не смогли ее решить за полиномиальное время (полиномиальное, то есть относящееся к длине программы). Мы видим, насколько еще более трудноразрешимыми являются некоторые математические задачи. Нас интересовала сложность вещей, и теорема Геделя говорит нам, что уже арифметика целых чисел настолько сложна, насколько мы это можем себе представить.

Итак, последний вопрос. Как все это связано с темой данной книги? Что общего у теоремы Геделя со случайностью? Мы знаем, что можно вечно создавать новые свойства целых чисел, независимые от тех, что уже известны, но являются ли эти свойства в некотором смысле случайными? И ответ на это вопрос действительно утвердителен, так как можно создать последовательность свойств целых чисел, которые произвольно являются истинными или ложными (это явно сделал Чайтин)[7]. Другим словами, на основании свойств целых чисел можно определить последовательность двоичных разрядов, которые являются 0 или 1 независимо и с вероятностью, равной 1/2. Это означает лишь то, что никакой объем вычислительной мощности не даст вам (в среднем) абсолютно точного предсказания следующего разряда (т. е. фактически эта последовательность достаточно невычислима).

В странном мире мы живем, не правда ли? По крайней мере, именно такой вид мира дают нам логики в настоящий момент. И мы к нему привыкаем. Вид может опять измениться и стать еще более диким... и через некоторое время мы опять к нему привыкнем[8].

Глава 24

ИСТИННЫЙ СМЫСЛ РАЗДЕЛЕНИЯ ПОЛОВ

Мы приближаемся к концу этой книги, и, быть может, вам жаль, что у вас не было шанса проявить больше инициативы. И действительно, если не считать покачивания головой и невнятного бормотания, ваше отношение было несколько пассивным. Давайте это изменим. Сейчас я предлагаю вам заняться благородным и удовлетворительным делом: созданием жизни.

Мы допустим, что Вы уже создали Звезды, Галактики и все Такое. Написать несколько Уравнений на Листе Бумаги — это все, что Вам пришлось сделать, чтобы создать Вселенную, и теперь Вы отправите Свое Сообщение во Вселенную, вложив в Него Жизнь.

Если вы не возражаете, я больше не стану использовать заглавные буквы и взгляну на вас и ваше сообщение жизни холодным взглядом ученого. Основной факт, о котором нельзя забывать, состоит в том, что ваше сообщение жизни должно одержать победу над огромной хаотичностью. Действительно, классический хаос, квантовая неопределенность и даже теорема Геделя тайно замышляют внести случайность в созданную вами вселенную. Как это повлияет на ваше сообщение?

Ранее мы рассматривали модель спиновых стекол как метафору жизни. Идея состоит в том, что существует некоторая функция

$$E(\text{сообщения})$$

такая, что ваше сообщение должно пытаться создать максимально (или, по крайней мере, разумно) много. Мы можем допустить, что ваше сообщение должно воспроизводить себя и что функция E связана с вероятностью воспроизведения сообщения, тождественного (или аналогичного) исходному[1]. Функция E отражает все, что ваше сообщение знает о вселенной, и, в частности, оно отражает хаотичность вселенной.

Задача спиновых стекол (добиться максимального E) является NP-трудной, как мы это видели в главе, связанной с алгоритмической сложностью. Вы не станете пытаться найти точный ответ, как не станете и пытаться решить ее самостоятельно. Вы позволите своему сообщению самому позаботиться о себе, что весьма разумно, надеясь, что путем проб и ошибок оно достигнет высокого значения E. В действительности, ваше сообщение является генетическим, наделенным способностью к размножению. Тогда проба и ошибка означают хаотическую мутацию и затем отбор; и вот мы вернулись к относительно традиционному взгляду на жизнь. Конечно, мутация и отбор также являются своего рода попыткой решить задачу спиновых стекол, но тогда мы говорим о *методе Монте-Карло* (он так называется, потому что в нем, как и в казино, случайность играет свою роль). Как бы он ни назывался, мы видим, что метод проб и ошибок, вероятно, приведет вас шаг за шагом к бóльшим значениям E, но не обязательно к абсолютному максимуму. Глядя на рисунок 22.1, вы видите, что если вы шаг за шагом будете взбираться не на ту гору, то вы достигнете вершины этой горы, но не вершины высочайшей горы. Таким образом, метод мутаций и отбора — хороший способ развития жизни, но, в общем случае, он не дает оптимальных результатов.

На самом деле, чем длиннее ваше генетическое сообщение, тем более неудовлетворительным будет подход исключительно через метод Монте-Карло. Действительно, информация, содержащаяся в вашем генетическом сообщении, потеряется достаточно быстро из-за мутаций в последующих поколениях, если только вы не удержите мутации на достаточно низком уровне[2]. Но это значит, что медленный процесс мутаций и отбора приведет вас к вершине только маленькой горы на рисунке 22.1, и маловероятно, что вы когда-либо вообще достигнете высоких вершин.

Как вы видите, на создании жизни проблемы не заканчиваются. Что вы можете сделать сейчас? Неплохой мыслью было бы взглянуть на функцию

$$E(\text{сообщения}),$$

которая содержит всю сложность вселенной, как она видится с перспективы вашего сообщения жизни, и попытаться определить, насколько она случайна. Нет ли в этой функции некоторой закономерности, которой можно было бы воспользоваться? Является ли вселенная абсолютно бессмысленной или она все же имеет некоторую структуру? К счастью, во вселенной существует своего рода закономерность, которая выражается даже на уровне вашего сообщения. Дело в том, что вы можете разрезать свое сообщение на части, или предложения, которые будут обладать своим собственным смыслом:

$$\text{сообщение} = (\text{предложение A, предложение B, предложение C},\dots).$$

Предложения A, B, C и т. д. можно также назвать генами, и их смысл состоит в кодировании, скажем, различных ферментов. Однако я не хочу переходить на уровень генетического механизма. По-моему, гораздо важнее понять, каким образом возможность разрезания сообщений на имеющие смысл части, в некотором абстрактном смысле, соответствует структуре вселенной. Допустим, что (при мутации) вы получаете новые сообщения типа

$$(\text{предложение A}^{\star}\text{, предложение B, предложение C})$$

или

$$(\text{предложение A, предложение B}^{\star}\text{, предложение C})$$

и т. д. Допустим, что эти мутации не слишком пагубны, так что все сообщения $(ABC\dots), (A*BC\dots), (AB*C\dots)$ дают достаточно высокое значение функции E. Это не значит, что рекомбинированное сообщение $(A*B*C\dots)$ обеспечивает высокое значение функции E. Совмещение двух разумных мутаций могло бы привести к катастрофическим последствиям, но зачастую не приводит. Другими словами, часто $(A*B*C\dots)$ является разумным генетическим сообщением, если существуют $(A*BC\dots)$ и $(AB*C\dots)$, что на уровне функции E выражает то, что вселенная не совсем уж бессмысленна. Фактически, вышеприведенный аргумент остается истинным, если $(A, B, C\dots)$ являются частями генов или отдельными буквами (= основаниям), а не генами.

Мы пришли к важному концептуальному выводу. Позвольте мне его повторить. Тот факт, что во вселенной присутствует порядок, выражается на уровне вашего сообщения жизни. Оно утверждает, что есть смысл рекомбинировать сообщения $(A*BC\dots)$ и $(AB*C\dots)$, содержащие мутации, в сообщение $(A*B*C\dots)$. Процесс осуществления такой рекомбинации называется сексуальностью[3]. И вы, Творец, видя, что рекомбинация хороша для вашего сообщения, изобретаете разделение полов и наделяете свои создания полом. Тогда истинный смысл разделения полов состоит именно в том, что во вселенной существует некоторая закономерность, вследствие которой генетическая рекомбинация оказывается полезной.

Вместо последовательного изменения буквы за буквой в генетическом сообщении в процессе мутации теперь существует возможность заменить целое слово или предложение другим словом или предложением. Это, конечно, гораздо более разумный подход. (Обратите внимание, что можно делать и другие вещи, например, удалять некоторые части генетического сообщения или сохранять несколько их копий.)

Значит, благодаря разделению полов, эволюция жизни может происходить гораздо быстрее. Конечно, мутации все равно имеют место, но теперь в работу включается более разумный инновационный процесс — перегруппировка генетических сообщений, после которой за дело принимается отбор, чтобы сохранить наиболее подходящих и удачливых[4].

Таким образом, разделение полов сделало жизнь гораздо более интересной, и сейчас очень легко отвлечься и начать приводить лирическое описание генов, которые с энтузиазмом трудятся вместе, чтобы жизнь поднималась ко все более высоким значениям функции E(сообщения).

Однако современные исследования дают гораздо более трезвую картину, которая точно описана в названии захватывающей книги «Эгоистичный ген» (*The Selfish Gene*[5]) британского биолога Ричарда Доукинса. Вспомните, что гены определяются как элементарные, имеющие смысл частички генетических сообщений. В отсутствие мутаций они воспроизводят идентичные копии самих себя, и таким образом, являются потенциально бессмертными. Растения или животные — это лишь смертные средства их переноса. Существует причина полагать, что многие гены — это лишь попутчики, едущие на этих смертных транспортных средствах, и они не делают ничего полезного (а на самом деле могут даже оказаться вредными). Совместное проживание множества эгоистичных генов — дело совсем не простое. Оно достаточно неблагоприятно, и нам хотелось бы внести в сборище генов некоторую дисциплину.

Что мы должны сделать? Мы опять обращаемся к вам, великий ученый, создатель жизни, изобретатель разделения полов, чтобы вы дали нам идею, как сделать работу вашего генетического сообщения более эффективной?

. . . ?

Что вы хотите сказать? Что вас неправильно поняли? Что вы больше не хотите брать на себя ответственность за создание жизни? Или за ее развитие? Вы уверены?

Это ужасно разочаровывает. Вы бросили свои создания, и теперь нам придется писать новый сценарий. Опять начинать все с начала...

Итак, звезды, галактики и все прочее уже начали свое существование. На самом деле мы не знаем, как это произошло. Но нет и какой бы то ни было серьезной причины, по которой их быть не должно. Вселенная содержит в себе не только немалую долю случайности, но и некоторую долю закономерности. И во вселенную пришла жизнь. Достаточно легко, как это кажется[6], но мы не знаем, как это в точности произошло. Маленькие генетические сообщения, которые являются сущностью жизни, лицом к лицу столкнулись с вызовом хаотичности вселенной и приспособились к ней с помощью проб и ошибок. Затем маленькие генетические сообщения открыли искусство рекомбинации, которое называется сексуальностью. И это открытие пошло им на пользу, потому что оно дало им шанс задействовать некоторую часть структуры вселенной.

Генетические сообщения жизни — это сборища эгоистичных генов. Но естественный отбор следит за тем, чтобы эти гены функционировали не слишком расточительно и хоть сколько-нибудь эффективно. А жизнь создала великое множество форм и устройств, чтобы использовать мир и извлекать выгоду из закономерностей структуры вселенной

Благодаря закономерностям, которые присутствуют в структуре вселенной, а также благодаря тому, что жизнь способна извлечь из них выгоду, медленно возникла новая характеристика жизни, которую мы называем *интеллектом*.

Глава 25

ИНТЕЛЛЕКТ

Дэвид Марр был специалистом по обработке визуальной информации и искусственному интеллекту и работал в Массачусетском технологическом институте. Его книга «Ви́дение»[1] являет собой один из наиболее важных вкладов в научную литературу последних лет. Дэвид Марр начал писать книгу, когда узнал, что у него лейкемия и что жить ему осталось не так уж долго. Вследствие этого, «Видение» не зацикливается на помпезной ритуальной чепухе, которая так распространена в научной литературе, а сразу переходит к основным вопросам.

Информация, попадающая в наши глаза, обрабатывается на различных стадиях, от сетчатки до зрительной коры (область, которая располагается в задней части мозга). Вся система визуальной обработки превосходно работает для того, чтобы анализировать, что происходит вокруг нас. Возникают некоторые естественные вопросы: «Как сделана наша зрительная система? Как в точности она действует? Как она появилась?» Однако, наряду с такими вопросами, Дэвид Марр задает и другие. Допустим, что мы захотели изобрести зрительную систему, с самого начала, какие бы мы имели варианты? Это, если хотите, уже инженерная задача. Насколько хорошим является биологическое решение этой задачи? Мы знаем лишь частички ответов на все эти различные вопросы. Складывая их вместе, мы получаем великую картину, которая выглядит очень убедительно, даже несмотря на то, что некоторые ее детали сомнительны.

Для наших целей важный результат состоит в следующем: наша зрительная система устроена так, чтобы иметь возможность справиться с определенной физической реальностью. Вот что абсолютно ясно из анализа Дэвида Марра. Наша зрительная система — это не просто универсальное приспособление для анализа образцов интенсивности света и цвета. Это прибор, который позволяет видеть объекты в трехмерном пространстве, объекты, ограниченные двумерными поверхностями, которые, в свою очередь, ограничены краями. Зрительная система должна видеть края, воссоздавать поверхности и интерпретировать их как объекты, определенным образом освещенные и особенным образом расположенные по отношению к наблюдателю.

Открывая глаза, мы получаем огромное количество информации из внешнего мира. Но поскольку внешний мир в значительной степени структурирован, сообщения, которые получают наши глаза, в высшей степени избыточны. Зрительная система, делая допущения на класс разрешенных сообщений, осуществляет сжатие данных. Это сжатие данных начинается на уровне сетчатки, и, еще до достижения зрительной коры, визуальные сообщения уже проходят самую высокую обработку и сжатие. Мы же видим лишь образы, интерпретированные зрительной системой, сформировавшейся в процессе естественной эволюции для того, чтобы справляться с внешней физической реальностью определенного типа.

Но вернемся к инженерной задаче создания эффективной зрительной системы. Это задача относится к области *искусственного интеллекта*. Почему *интеллекта*? То, что мы называем интеллектом, является деятельностью разума и происходит в мозге. Интеллект управляет нашими действиями на основе того, что мы воспринимаем из окружающей вселенной, а потому интерпретация визуальных сообщений является его частью.

Если мы желаем понять интеллект, то естественной мыслью является изучение мозга: исследование его анатомии, использование электродов для анализа его электрической деятельности, рассматривание его клеток под микроскопом и т. д. Все это, конечно, было проделано и дало важную информацию (особенно по зрительной системе). Однако прямые исследования мозга имеют свои ограничения. Было бы сложно воспроизвести естественный язык, скажем, русский, просто глядя на мозг. И тем не менее, язык, по-видимому, играет важную роль в организации человеческого интеллекта. Как показывает вопрос языка, понимание интеллекта вряд ли окажется легкой задачей, и ограничиваться какой-то отдельной методологией, например, психологией или нейропсихологией, не слишком мудрое решение.

Для исследования зрительной системы в высшей степени естественным и уместным является инженерный подход. Замечательно, что именно таким подходом Зигмунд Фрейд пользовался для анализа полового инстинкта. То, что называет полом Фрейд, не полностью идентично тому, что в прошлой главе назвали полом мы, хотя эти концепции, безусловно, связаны между собой[2]. Основатель психоанализа из Вены описал несколько *составляющих инстинктов* (часто связанных с конкретными эрогенными зонами: оральный, анальный...) и на их основе объяснил половой инстинкт. По отдельности составляющие инстинкты проявляются у маленьких детей. Следуя естественному ходу событий, они постепенно организуются, превращаясь в функциональное половое поведение. Так называемые извращения имеют место тогда, когда составляющим инстинктам не удается объединиться в единое целое, как это должно происходит в случае нормы (нормой здесь названо то, что предпочитает естественный отбор; а естественный отбор, очевидно, предпочтет поведение, которое приводит к произведению потомства).

Половой инстинкт и зрительную систему можно понять на основе их функционирования. «Ошибки» системы, т. е. половые извращения в первом случае и зрительные иллюзии во втором управляют нашей интерпретацией. Более того, что касается зрительной системы, то у нас есть более детальное понимание того, как обрабатывается информация на ее пути от сетчатки к мозгу. Изучение полового инстинкта и инстинктов, его составляющих, не извлекает никакой пользы из столь детальных анатомических и функциональных исследований, а в отношении других проблем, возникающих в психоанализе, дела обстоят еще хуже. На самом деле, слава — и трагедия — психоанализа лежит в его методологической обособленности, которая привела к тому, что многие ученые относятся к этой области весьма пренебрежительно. Сам Фрейд был ученым и основал психоанализ как научную область, но его последователи не смогли удержать его в научном русле. Можно только надеяться, что методологический прогресс приведет к изменению этой тенденции на противоположную. Как-никак, психоанализ затрагивает проблемы «программного обеспечения мозга», которые в некоторой точке должны обрести плодотворный контакт с «аппаратными» исследованиями нейронаук.

Вернемся же к интеллекту. Сложив половой инстинкт, зрительную систему и еще несколько подобных приспособлений, вероятно, можно получить сносный мозг крысы или обезьяны. Но разве человеческий интеллект не является чем-то совершенно отличным, чем-то настолько более высоким, что бессмысленно его с чем-либо сравнивать? Быть может, и нет. Одна причина того, чтобы считать, что разница не так уж велика, исходит от точки зрения эволюции: на видоизменение человеческого мозга ушло относительно немного времени (несколько миллионов лет, и, вероятно, гораздо меньше времени потребовалось на развитие сложных естественных языков). Таким образом, дополнительное развитие, необходимое для получения человеческого мозга из мозга крысы или обезьяны, вероятно, являет собой лишь «глазурь на торте» в том, что касается нового аппарата приспособлений. Другими словами, исключительно человеческие качества использования инструментов и изучения сложных языков вполне могли быть легкими достижениями, даже несмотря на то, что им сопутствовал значительный рост размера мозга.

Безусловно, наши интеллектуальные способности намного превосходят интеллектуальные способности крыс и обезьян: мы можем спорить о теологической проблеме предопределенности, мы способны читать и наслаждаться поэзией, а также доказать, что последовательность простых чисел бесконечна. Однако мозг, которым мы пользуемся, в основе своей, если рассматривать его как аппарат приспособлений, не отличается от мозга крысы или обезьяны. Грустно, что у нашего превосходного мозга возникают трудности с простыми арифметическими действиями, что он не в состоянии точно следить за временем и не может с легкостью запомнить несколько тысяч цифр. (Вот почему мы пользуемся калькуляторами, часами, календарями и справочниками). В типично «высшей» деятельности — во время занятий наукой — мы, видимо, используем, главным образом, нашу речевую систему и нашу зрительную систему. Использование в этом случае зрительной системы очень ценно, и именно поэтому так важна геометризация математики.

Попробуем подвести итог. Наш мозг и интеллект имеют основу, состоящую из аппарата приспособлений, точно приспособленного к выживанию в окружающей среде определенного типа. Совсем недавно к этим основным навыкам мозга эволюция добавила некоторые функции более высокого порядка, действующие очень гибко. Наличие этих более высоких функций оказалось безусловно полезным, вследствие чего их развитию поспособствовала естественная эволюция. В качестве побочного продукта эти более высокие функции также позволили людям развивать научное знание. Но это произошло, как мне кажется, случайно. В человеческом мозге отсутствует несколько основных функций, которые желательны для занятий наукой, например, способность быстро и надежно выполнять вычисления или способность хранить в памяти большие количества данных. Однако несмотря на эти недостатки, человеческая наука получила свое развитие, и мы, таким образом, можем понять о природе вещей гораздо больше, чем ранее мы имели право на то надеяться.

Очевидно, что мы живем в мире, наполненном трехмерными объектами, ограниченными двухмерными поверхностями[3]. А потому не сто́ит удивляться, что наш мозг в состоянии справиться с такими объектами: это умение полезно для выживания, и его поддерживает естественный отбор. Но естественный отбор не объясняет, каким образом мы пришли к пониманию химии звезд или тонких свойств простых чисел. Естественный отбор объясняет только то, что люди приобрели более высокие интеллектуальные функции; он не способен объяснить, почему у физической вселенной или у абстрактного мира математики столько много аспектов, которые можно понять.

Мы уже говорили о том, что физическая вселенная должна испытывать большую долю хаотичности. Мы доказали, что многие математические утверждения должны быть недоказуемыми. Но в то же время, и это замечательно, мы многое понимаем и о физической вселенной, и о математике.

То, что мы называем пониманием, весьма сильно связано с особой природой человеческого интеллекта. Например, мы очень много используем естественные языки в математике, потому что наш мозг не в состоянии справиться с полностью формализованными математическим языками, которые, в принципе, подошли бы гораздо лучше. (Математическая литература выглядит достаточно формальной и непонятной, но это совсем не то, что математики называют формализованным математическим языком; если хотите, можете назвать ее полуформальной.) Мы представляем свое математическое знание в виде коротких теорем, потому что мы не смогли бы переварить более длинные формулировки. Несомненно то, что разумные существа нечеловеческого происхождения занимались бы математикой совершенно не так, как это делаем мы, и мимолетное знакомство с этим мы получаем благодаря увеличивающемуся использованию компьютеров в качестве вспомогательных средств математических исследований. (Современные компьютеры не могут справиться с естественными языками, но не питают неприязни к использованию очень длинных кодов.) Короче говоря, мы занимаемся математикой по-человечески, даже слишком. Однако математики не сомневаются, что за нашим ничтожным существованием присутствует математическая реальность. Мы не создаем математическую истину, мы ее открываем. Мы задаем себе тот вопрос, который кажется нам естественным, и начинаем над ним работать, и не так уж редко мы находим решение (или его находит кто-то другой). И мы знаем, что ответ и не мог быть иным. Причем странно то, что, из-за теоремы Геделя, у нас не было гарантии, что на наш вопрос можно найти ответ. Мы не понимаем, почему мир математической истины нам доступен. И тем не менее, замечательно, что это так...

Ничуть не менее изумительна и постижимость физической вселенной через математические структуры. Венгро-американский физик Эуген Вигнер описал это изумление в статье с весьма экспрессивным заголовком: «Непостижимая эффективность математики в естественных науках»[4]. Мы узнали, насколько обширна вселенная и как незначительны в ней мы. И при этом, что удивительно, мы можем исследовать глубины этой вселенной и понять ее.

Глава 26

ЭПИЛОГ: НАУКА

Давайте вернемся на несколько тысяч лет назад. Наступает ночь, закончена дневная работа и зажигаются масляные лампы. Мы беседуем о том, что произошло в нашей местности и как нам следует спланировать сельские дела, глядя на небесные созвездия. Мы обсуждаем рассказы путешественников и странные языки, на которых они говорят. Возникает спор о свойствах богов, о вопросе права или лечебных свойствах какого-то растения. В нас существует интеллектуальное любопытство, стремление понять тайны огромного мира и природы вещей. И мы обращаем свое любопытство ко всевозможным проблемам: как толковать сны и узнать будущее, как понять небесные знамения или как создать прямой угол с помощью веревки (сделать треугольник со сторонами 3, 4 и 5).

А сейчас, несколько тысяч лет спустя, оглядываясь назад, мы видим, что некоторые темы старых дискуссий были позабыты: свойства древних богов уже не особенно нас интересуют. Другие же вопросы не слишком изменились: «Какова истинная природа искусства? Что такое сознание?» Но изучение третьих проблем привело к грандиозным достижениями науки и технологии, которые полностью изменили наши человеческие условия. Из попытки создать прямые углы с помощью веревки возникла математика. Попытка понять движение звездных тел привела к созданию механики и физики. А впоследствии появились биология и современная медицина, которые заменили изучение медицинских растений.

Наука преуспела не так, как другие области человеческого любопытства, но не потому что любопытство здесь было другим, а потому что объекты и концепции, которые выдвигались, были иными. Гораздо более выгодно было спорить о свойствах треугольников, нежели о толковании снов. Гораздо более полезно было изучать движение маятника, нежели природу сознания. Иногда наука проясняет старые философские проблемы; иногда они ниспровергают науку. Но вопросы, которые возникают вследствие самоанализа, зачастую остаются без ответа, а когда ответы наконец появляются, они скорее бывают убедительными для интеллекта, нежели удовлетворительными для психологии[1].

Случайность и *хаотичность* кажутся не особенно обещающими темами для точного исследования, и многие ранние ученые фактически их избегали. И тем не менее, сейчас они играют центральную роль в нашем понимании природы вещей. Цель данной книги и состояла в том, чтобы дать представление об этой роли. Мы видели, как мы идеализируем окружающий нас мир в физических теориях и как *хаос* ограничивает контроль нашего интеллекта над эволюцией мира. Мы видели, насколько правильная оценка случайности и *предсказуемости* важна для повседневной жизни и для истории. Мы ввели *энтропию*, которая измеряет количество хаотичности в молекулярном хаосе литра воды. Мы мельком взглянули на проблемы *сложности* и увидели, что полезную информацию порой бывает очень трудно получить. И мы обнаружили случайность даже в свойствах натуральных чисел 1, 2, 3...

А теперь давайте в последний раз посмотрим на людей, которые занимаются наукой.

Из бесед с некоторыми коллегами я сделал вывод, что физики моего поколения делятся на два обширных класса. Некоторые развили свои научные вкусы, занимаясь в детстве забавной химией. Других же в большей степени привлекали электричество и механика, а потому они проводили время за разборкой радиоприемников, будильников и тому подобного. Я был твердым химиком и время от времени неплохо провожу время, сравнивая свои воспоминания о всевозможных сумасшедших вещах, которые мы вытворяли в старые времена, с воспоминаниями того или иного коллеги. Мы изготавливали нитроглицерин или гремучую ртуть или кипятили концентрированную серную кислоту в пирексовой пробирке. (На самом деле я не хочу пропагандировать ни одно из этих занятий, и особенно последнее.) Когда я спросил американского физика Джона Уилера, принадлежит он к химической или к электромеханической категории физиков, он сказал: «К обеим». И его жена, которая сидела рядом, взяла его за руку и сказала: «Покажи свой мизинец, Джонни». И Джонни пришлось показать мизинец, часть которого отсутствовала в результате проведения в детстве какого-то «забавного опыта». Однако физик Мюррей Гелл-Манн сказал мне, что не занимался забавной наукой, а вместо этого читал много научно-фантастической литературы.

В наше время, из-за проблем наркомании и терроризма, забавная химия не особенно поощряется, да и разбирать радиоприемники и будильники становится тоже все менее интересно (внутри осталось слишком мало того, что можно увидеть). А потому люди получают свой толчок, играя на компьютерах, что должно создать иной тип физика. Однако во всех случаях карьера физика начинается со своеобразного очарования — очарования, быть может, магического типа в случае с забавной химией и более логического типа в случае с электромеханическими приборами и компьютерами. Я не принимаю во внимание не относящийся к делу случай, когда люди, зарабатывающие на жизнь «проведением исследований», если у них есть выбор, предпочтут посмотреть бейсбол по телевизору.

Математиками, как и физиками, движет сильное очарование. Исследование в математике трудно и болезненно для интеллекта, даже если оно удачно, и вы не стали бы заниматься им, не испытывая очень сильного к тому побуждения.

Каково же происхождение этого побуждения, очарования, которое движет физиками, математиками и, судя по всему, всеми остальными учеными? Психоанализ утверждает, что это сексуальное любопытство. Вы начинаете с вопроса, откуда берутся дети, одно ведет к другому, и вы обнаруживаете, что изготавливаете нитроглицерин или решаете дифференциальные уравнения. Такое объяснение несколько раздражает, а потому, вероятно, в сущности оно правильно. Сексуальное любопытство лежит у истоков науки, но оно сменяется чем-то иным, а именно, тем, что мир можно понять. Чисто психологический подход к науке упустил бы важность постижимости математики и «непостижимой эффективности математики в естественных науках». На самом деле, некоторые ученые, которые занимаются гуманитарными науками, видимо, тоже упускают из вида данный факт. Но математики и физики знают, что имеют дело с реальностью, имеющей свои собственные законы, реальностью, стоящей намного выше наших ничтожных психологических проблем, реальностью, странной, очаровательной и, в некотором смысле, прекрасной.

На данном этапе мне хотелось бы привести трогательное описание того, какое это великое дело — находить ответы на загадки природы. Но я знаю, что вы мне этого не позволите... Вы желаете поговорить о Эдипе*, который так самодовольно ответил на загад-

---

В греческой мифологии сын царя Фив Лая. Эдип по приказанию отца, которому была предсказана гибель от руки сына, был брошен младенцем в горах. Спасенный пастухом, он, сам того не подозревая, убил отца и женился на своей матери, став ку Сфинкса и таким образом дал начало цепочке событий, столь катастрофических, столь ужасных, что они дали работу авторам драм и психоаналитикам на следующие три тысячи лет. Ученые тоже начинают с того, что дают ответ на загадки, затем отрывают себе пальцы, а затем могут взорвать и всю планету. Не следует ли науке вести себя более ответственно?

Ответ на последний вопрос ясен: наука абсолютно аморальна и совершенно безответственна. Отдельные ученые действуют согласно своему собственному чувству моральной ответственности (или ее отсутствия), но они действуют как люди, а не как представители Науки. Приведем пример. То, что мы привыкли называть *Природой*, перешло в низшую категорию, превратившись в *нашу окружающую среду*, и продолжает деградировать, чтобы стать нашей свалкой. Виновата ли в этом наука? Наука действительно может поспособствовать разрушению Природы, но она может помочь и в защите окружающей среды или в наложении штрафа за ее загрязнение: все эти решения принимают люди. Наука отвечает на вопросы, по крайней мере, иногда, но она не принимает решений. Решения же принимают люди, или, по крайней мере, иногда принимают.

Сложно оценить, какие варианты действительно открыты для человечества. Неотвратим ли конец? Или его можно отодвинуть на неопределенный срок? Мозг, которым пользуемся мы, — это тот же мозг, которым пользовались наши предки, жившие в Каменном Веке, и этот мозг выказал поразительную гибкость. Вместо того, чтобы ходить пешком и охотиться с помощью копья, современные люди ездят на автомобилях и продают страховку. И если только совсем скоро не произойдет какого-нибудь катаклизма, то нас ожидают дальнейшие перемены, дальнейший прогресс. Для серьезной технической работы, по крайней мере, наш устаревающий мозг, перешедший к нам из Каменного Века, постепенно будет заменяться более быстрыми, более мощными и более надежными машинами. Наука усовершенствует наши антикварные механизмы генетического копирования, которые сумеют избегать любых страшных заболеваний. И мы не можем сказать: «*Нет*».

царем Фив. Узнав, что сбылось предсказание оракула, полученное им в юности, Эдип ослепил себя. Миф об Эдипе разрабатывался в мировой литературе. — *Прим. пер.*

*В греческой мифологии крылатая полуженщина, полульвица, обитавшая на скале близ Фив; задавала прохожим неразрешимую загадку и затем, не получив ответа, пожирала их. Загадку сфинкса («кто утром ходит на 4 ногах, в полдень на двух, вечером на трех») разгадал Эдип (его ответ: «человек — в детстве, зрелости и старости»); после чего сфинкс бросилась со скалы. — *Прим. пер.*

По социологическим причинам мы не имеем права сказать, что мы отказываемся от всех этих прекрасных усовершенствований. Но сумеет ли человечество выжить в окружении тех перемен, которые мы неизбежно вносим в свою физическую и культурную среду? Этого мы не знаем.

Сейчас, как и ранее, будущее человечества остается загадочным, и мы не знаем, направляемся ли мы к более благородному будущему или к неизбежному саморазрушению.

ПРИМЕЧАНИЯ

Глава 1. Случайность

1. *Теорема о четырех красках.* Допустим, что у нас есть географическая карта на сфере или на плоскости. На карте показаны разные страны, причем для простоты допустим, что морей нет. Также примем, что каждая страна *цельная* (то есть не состоит из составных частей). Мы желаем раскрасить каждую страну в какой-нибудь цвет, так чтобы две граничащие страны были раскрашены в разные цвета. (Мы принимаем один и тот же цвет для двух стран, которые имеют только конечное число общих граничащих точек.) Сколько красок нам нужно? Ответ: во всех случаях достаточно четырех красок. Это и есть теорема о четырех красках.

Решение проблемы четырех красок нашли Кеннет Эппел и Вольфганг Хакен. Технические труды: K. Appel and W. Haken, «Every planar map is four colorable, Part I: Discharging» /Каждую плоскую карту можно раскрасить в четыре краски: осуществление/ *Illinois J. Math.* 21 (1977): 429–90; K. Appel, W. Haken and J. Koch, «Every planar map is four colorable, Part II: Reducibility» /Каждую плоскую карту можно раскрасить в четыре краски: приводимость/ *Illinois J. Math.* 21 (1977): 491–567.

Более популярное описание представлено в K. Appel and W. Haken, «The solution of the four-color-map problem» /Решение задачи о четырех красках/ *Scientific American*, October 1977, pp. 108–21; K. Appel and W. Haken, «The four color proof suffices» /Доказательство теоремы о четырех красках удовлетворительно/ *The Mathematical Intelligencer* 8 (1986): 10–20.

2. Для краткого введения в проблему классификации простых конечных групп см. J. H. Conway, «Monsters and Moonshine» /Чудовища и лунный свет/ *The Mathematical Intelligencer* 2 (1980): 165–71. Следует упомянуть, что классификация простых конечных групп включает как очень объемную работу на компьютерах, так и огромные объемы времени математиков.

3. Общепринятой биографией Ньютона считается труд R. Westfall *Never at Rest* /Ни минуты покоя/ (Cambridge: Cambridge

University Press, 1980). Взаимодействие разнообразных интеллектуальных интересов Ньютона приводит в восхищение. Эти интересы варьируются от великих достижений в области математики и физики до сомнительных (согласно современным нормам) размышлений на тему алхимии, истории и религии. Интеллектуальный продукт Ньютона так и хочется пропустить через сито цензуры, чтобы отделить самое ценное и забыть обо всем остальном. Но, если мы хотим понять процесс интеллектуального творения, который имел место в разуме Ньютона, мы не имеем права забывать и об этих сомнительных размышлениях. В его стремлении постичь смысл Вселенной изучение пророчеств или алхимии сыграло не менее важную роль, чем работа по притяжению или дифференциальному исчислению. Совершенно очевидно, что многие аспекты деятельности разума Ньютона еще только предстоит понять. Однако из книги Вестфолла следует один грустный вывод: великий Ньютон, судя по всему, был начисто лишен чувства юмора даже в самой ничтожно малой его форме.

Глава 2. Математика и физика

1. На самом деле математики являют собой довольно разнородную группу. Некоторые математики подходят к задачам напрямую, и их успех обусловлен огромными техническими способностями. Другие крутят одну задачу и так, и сяк, пока не найдут какую-то тонкую уловку, дающую легкое решение. (Заметьте, что такая тонкая уловка существует не всегда.) Таким образом, не все математики одинаковы, а некоторые даже и не похожи на математиков. Однако часто математиков, да и вообще профессиональных ученых, окружает некая общая атмосфера одной семьи. Причем это ощущается даже на физическом уровне. Я не раз находил дорогу на какое-нибудь научное заседание, следуя по улице за человеком, который своим внешним видом напоминал мне коллегу. Такое наблюдение делали и другие люди.

2. Смотри главы 22 и 23. Вкратце, теорема Геделя о неполноте звучит следующим образом. В рамках общепринятых основных утверждений, связанных с числами 1, 2, 3..., Гедель показывает, что некоторые утверждения нельзя ни доказать, ни опровергнуть: это *неразрешимые* утверждения. При увеличении количества основных утверждений все равно останется несколько неразрешимых.

3. Смотри H. Poincaré «L'invention mathématique» /Математическое открытие/, глава 3 в книге *Science et Méthode* (Paris:

Ernest Flammarion, 1908). См. также J. Hadamard, *The Psychology of Invention in the Mathematical Field* /Психология изобретения в области математики/ (Princeton University Press, 1945; переиздано, расширенное издание New York: Dover, 1949). [Обе книги переведены на русский язык и имеются в различных изданиях.]

Пуанкаре рассказывает об одной задаче, о которой он перестал думать сознательно и решение которой он увидел позже: внезапно и абсолютно ясно. Очевидно, что работа над этой задачей продолжалась бессознательно. Эта работа задействовала скорее даже не глубокое бессознательное, а то, что Фрейд называет *предсознательным*. Однако, повесив на это явление ярлык «предсознательное», мы все равно не объясним, что же все-таки происходит. Роль бессознательного, или предсознательного, в научном открытии знакома, я думаю, многим ученым, но ее реальное понимание отсутствует.

4. Я привожу цитату из *Saggiatore* (1623 г.) Галилео Галилея: «Философия записана в этой огромнейшей книге, которая всегда открыта перед нами (я говорю о вселенной), но понять написанное невозможно, пока не изучишь язык и не распознаешь буквы, которыми она написана. А написана она на математическом языке, и буквами ее являются треугольники, круги и другие геометрические фигуры. . . ».

5. Математика физической теории вполне может выйти за пределы операторно определенных величин и ввести объекты, которые, даже в принципе, невозможно наблюдать непосредственно. Введение ненаблюдаемых объектов — это, безусловно, дело очень деликатное, так что можно поддаться соблазну и отказаться делать это, исходя из философских причин. Но подобное *априорное* отношение оказывается, по крайней мере в некоторых случаях, не лучшей идеей. Например, в конце 1950-х гг. физик Джеффри Чу предложил, чтобы специалисты по физике частиц сконцентрировали свое внимание на изучении математического объекта, называемого *S-матрицей* (которая тесно связана с экспериментальными величинами), и забыли о ненаблюдаемых *квантовых полях*. В некотором смысле идея Чу была очень разумной. Однако случилось так, что изучение полей оказалось чрезвычайно эффективным (как до, так и после предложения Чу), и мы не хотели бы остаться без них.

Глава 3. Вероятности

1. Математические основы исчисления вероятностей ввел в математику Колмогоров (тот самый человек, чью теорию пси-

хологии математиков мы рассматривали в начале главы 2 и с чьей теорией турбулентности мы встретимся позднее). Стандартные источники: A. N. Kolmogorov, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Erg. Math. (Berlin: Springer, 1933); имеется русский перевод: «Основные понятия теории вероятностей» (М-Л., 1936, ОНТИ, НКТП).

2. Мы настаиваем на физическом определении независимости событий. Однако утверждение, что два события независимы в том случае, если они «никак не связаны друг с другом», вряд ли можно назвать операторным определением. Лучше было бы сказать, что операторные определения для конкретных случаев дает метафизический принцип, и достоверность этих определений можно проверить из последствий. Но почему бы не воспользоваться математическим определением независимости [т. е., по существу, утверждением (3)] и не проверить это определение с помощью статистических испытаний? Это хороший способ представления понятий, в принципе, и именно этот способ используется в учебниках, но *не* на практике.

Фактически, статистические испытания — это громоздкий и зачастую неубедительный аппарат. Поэтому ученые сначала *предполагают*, что два события независимы, потому что они никак не связаны друг с другом. Потом они размышляют о возможных причинах того, почему эта независимость может быть испорчена, и только в последнюю очередь используют статистические испытания.

Глава 4. Лотереи и гороскопы

1. В действительности, время от времени покупать лотерейный билет (или делать небольшие ставки в азартных играх) может оказаться разумным, если вы делаете это ради забавы. Учебники по экономике рассматривают логику подобного поведения, а также родственную проблему страхования (почему имеет смысл покупать страховой полис, даже если вам известно, что страховая компания нечестным образом наживается на вас). Мы же лишь показали, что покупка большого количества лотерейных билетов в надежде разбогатеть — далеко не лучшая мысль.

2. В большом числе попыток N пусть $N(A)$ будет числом тех попыток, когда реализуется событие «A», а $N(A \quad \text{и} \quad B)$ — числом тех попыток, когда реализуются и «A», и «B». Вероятность «B» при знании того, что «A» реализовано, должна равняться приблизительно

$$\frac{N(A \quad \text{и} \quad B)}{N(A)},$$

что равносильно

$$\frac{N(A \quad \text{и} \quad B)}{N} \Big/ \frac{N(A)}{N},$$

и потому приблизительно равно

$$\text{prob(«A» и «B»)/prob(«A»)}.$$

Следовательно, справедливо дать *определение*:

$$\text{prob(«B», зная, что «A» реализуется)} = \frac{\text{prob(«A» и «B»)}}{\text{prob(«A»)}}.$$

(Это так называемая *условная вероятность*.) Если «A» и «B» независимы, правило (3) предполагает, что правая часть уравнения выглядит как

$$\frac{\text{prob(«A»)} \times \text{prob(«B»)}}{\text{prob(«A»)}} = \text{prob(«B»)},$$

что доказывает правило (4).

3. Позвольте мне привести здесь краткое техническое рассмотрение вопроса о том, каким образом погода может зависеть от того, как Венера располагалась несколько недель назад и в то же время быть статистически независимой от этого факта. Пусть x будет некоторым начальным состоянием рассматриваемой системы, т. е. вселенной, или — лучше — идеализации вселенной, описывающей, кроме всего прочего, положение Венеры и погоду там, где находитесь вы. Если начальное состояние x относится к ситуации, которая имело место несколько недель назад, то ситуация, которая сложилась сегодня днем, будет состоянием $f^t x$; здесь f^t называется *оператором временно́й эволюции* и представляет преобразование пространства состояний нашей системы (соответствующее временной эволюции от момента времени несколько недель назад до сегодняшнего дня). Существует множество A возможных начальных условий нашей системы, которые мы не можем различить: это выражает тот факт, что мы не знаем начальные условия с абсолютной точностью. (Ради доказательства мы можем допустить, что абсолютно точно нам неизвестно только начальное положение Венеры.) Разные возможности погоды сегодня днем описываются всеми точками множества $f^t A$. И, из-за чувствительной зависимости от начальных условий, которая будет рассмотрена в следующих главах, множество $f^t A$ уже не будет маленьким,

а фактически охватит все виды различных возможностей для погоды. Теперь, пусть B будет множеством состояний, описывающих дождь сегодня днем. Часть $f^t A$ будет входить в B, часть окажется вне его, а влияние, которое оказывала Венера несколько недель назад, тем самым помешает нам сказать, будет или нет дождь сегодня днем. Состояния вселенной, в которых сегодня днем идет дождь (там, где находитесь вы) и которые совместимы с тем, что нам известно о ситуации, имевшей место несколько недель назад, являются точками пересечения $(f^t A) \bigcap B$. Можем ли мы хоть что-то сказать об этом пересечении?

Чтобы иметь возможность продолжить наше рассмотрение, воспользуемся тем, что для множества временных эволюций существует естественная *мера вероятности* m, которая не изменяется при временной эволюции и описывает вероятность различных событий. Например, $m(f^t A) = m(A)$ — это вероятность события «A», связанного с нашим начальным состоянием. Более того, $m((f^t A) \bigcap B)$ — это вероятность события «A» несколько недель назад и «B» сегодня днем. Во многих случаях получается, что, для большого t,

$$m((f^t A) \bigcap B) \approx m(A) \times m(B).$$

Это свойство, которое называется *смешиванием*, означает, что множество $f^t A$ настолько изогнуто, что его доля в B пропорциональна размеру B [измеренному $m(B)$].

Если мы интерпретируем вышеприведенное свойство смешивания через вероятности, то увидим, что оно дает точно такой же результат, как и допущение, что дождь, который будет сегодня днем, и положение Венеры несколько недель назад (статистически) независимы. [Тот факт, что $m(A) = 0$ — это второстепенная техническая сложность, которую можно устранить, приняв подходящий предел.]

Вышеприведенная мотивировка статистической независимости, конечно же, неудовлетворительна для математика, который потребовал бы *доказательства*. Но мы очень далеки от того, чтобы таковое обеспечить: задача слишком сложна. Если же вы — физик, то вас не оттолкнет отсутствие математического доказательства, но вы будет спрашивать о другом. Прежде всего, вы запросите данные чувствительной зависимости от начальных условий в нашей задаче; вы захотите знать, сколько недель составляют «несколько недель» (к этому мы вернемся в следующих главах). Затем вы пожелаете точно определить, что подразумевается под положением Венеры (если вы невнимательны, положение Венеры будет связано со временем года и потому с соответствующей ему погодой). Кроме того, вы заглянете в проблему смешивания. И поскольку она слишком сложна, чтобы решить ее непосредственно, вы попытаетесь найти, что могло быть ошибочным относительно допущений статистической независимости дождя от положения Венеры. Одной из ошибок могла оказаться разумная сила, корректирующая погоду согласно наблюдениям Венеры. Но при современной технологии это маловероятно. Наконец, если данный вопрос достаточно интересен, вы начнете проводить ряд наблюдений и статистических испытаний независимости погоды от положения Венеры.

Наше рассмотрение оставляет открытым, по крайней мере, один вопрос: что мы подразумеваем под *разумной силой*? На данном этапе мы можем сказать лишь то, что разумная сила вводит взаимосвязь там, где вы бы ее не ожидали. Если немного подумать, то это неплохая характеристика разума.

Глава 5. Классический детерминизм

1. *Уравнение Ньютона.* Рассмотрим N точек с массами $m_1, \ldots,$ m_N (положительные числа) и положениями $x_1, \ldots, x_N$ (векторы в трехмерном пространстве); тогда уравнение Ньютона выглядит следующим образом:

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} x_i = F_i \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, N,$$

где F_i — сила, действующая на i-тую частицу (вектор в трехмерном пространстве). Мы говорим об уравнении Ньютона в единственном числе, но, на самом деле, существует $3N$ уравнений, потому что каждое положение имеет 3 составляющих. *Гравитационная сила* представлена уравнением

$$F_i = \gamma \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|^3},$$

где γ — гравитационная постоянная. Это сила, которая используется, например, для изучения движения планет вокруг солнца. Если в какой-то начальный момент времени известны положения x_i и скорости dx_i/dt, то из уравнения Ньютона их, в принципе, можно вывести и для другого момента времени. Я сказал *в принципе*, потому что существование и единичность решений уравнения

Ньютона, связанного с гравитационными силами, не гарантированы для всех начальных условий. Также, когда N равно 3 или более, решения невозможно получить в явной аналитической форме, и их изучение становится очень тонким вопросом.

2. P. S. Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités* (Paris: Courcier, 1814) [П. С. Лаплас «Опыт философии теории вероятностей»: новое издание планируется в РХД].

3. R. Thom, «Halte au hasard, silence au bruit (, mort aux parasites)»; Edgar Morin «Au-delà du déterminisme: Le dialogue de l'ordre et du désordre»; Ilya Prigogine, «Loi, histoire... et désertion». Эти статьи были опубликованы во французском журнале *Le Débat* в 1980 году (номера 3 и 6), и Том в напечатанном варианте пропустил сочетание «mort aux parasites». Теперь эти, а также другие статьи изданы в коллективном сборнике трудов *La querelle du déterminisme: Philosophie de la science d'aujourd'hui* (Paris: Gallimard, 1990).

4. E. Shródinger, «Indeterminism and free will» /Индетерминизм и свобода воли/ *Nature*, July 4, 1936, pp. 13-14. Эта работа перепечатана в книге E. Shródinger, *Gesammelte Abhandlungen* (Vienna: Viewig, 1984), vol. 4, pp. 364–65.

Глава 6. Игры

1. *Теорема о минимаксе*. Мы рассматриваем *конечную игру с нулевой суммой, в которой участвуют два человека*. Таким образом, есть два игрока A и B. Игрок A может делать свой выбор из M опций (они относятся к категории $1, \ldots, M$), а игрок B имеет N опций (они относятся к категории $1, \ldots, N$). Тот факт, что игра *конечная*, означает, что числа M и N конечные. Выбор i игрока A и выбор j игрока B создают выплату K_{ij} для игрока A и $-K_{ij}$ для игрока B. То, что игра *с нулевой суммой*, означает, что сумму $|K_{ij}|$, выигранную одним игроком, теряет второй. Допустим теперь, что игрок A делает свой выбор с вероятностями $p_1, \ldots, p_M$, а игрок B — с вероятностями $q_1, \ldots, q_N$. Тогда средняя выплата игроку A составит

$$\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} K_{ij} p_i q_j,$$

и минус та же сумма для игрока B. Игрок A попытается сделать свой средний выигрыш возможно максимальным, что будет наихудшим возможным выбором q для игрока B. Это дает

$$\min_{(q_1,\ldots,q_N)}\max_{(p_1,\ldots,p_M)}\sum_i\sum_j K_{ij}p_iq_j. \qquad (1)$$

Соответствующая сумма для игрока B составляет

$$\min_{(p_1,\ldots,p_M)}\max_{(q_1,\ldots,q_N)}\sum_{i=1}\sum_{j=1}(-K_{ij})p_iq_j = \\ = \max_{(p_1,\ldots,p_M)}\min_{(q_1,\ldots,q_N)}\sum_i\sum_j K_{ij}p_iq_j. \qquad (2)$$

Теорема о минимаксе утверждает, что (2) равно минус (1), т. е.

$$\min\max\sum_i\sum_j K_{ij}p_iq_j = \max\min\sum_i\sum_j K_{ij}p_iq_j, \qquad (3)$$

где min и max условны на $p_1,\ldots,p_M$ $q_1,\ldots,q_N \geqslant 0$ и $\sum p_1 = \sum q_j = 1$.

Заметим, что если бы игроки A и B не использовали вероятностные стратегии, а вместо них придерживались бы *чистых* стратегий, то теорема о минимаксе не имела бы места, потому что в общем случае

$$\min_j\max_i K_{ij} \neq \max_i\min_j K_{ij}.$$

В данной ситуации происходит следующее: один из игроков понимает выгоду использования вероятностной стратегии.

Эту теорему о минимаксе создал Джон фон Нейман (Д. фон Нейман и О. Моргенштерн «Теория игр и экономического поведения» (*Theory of Games and Economics Behavior* [Princeton: Princeton University Press, 1944])).

Каким образом мы получаем значение K минимакса (3) и p_i, q_j, которые дают оптимальные стратегии для игроков A и B? Эти величины определяются *линейными* условиями:

$$p_i \geqslant 0, \quad \sum_j K_{ij}q_j \leqslant K \text{ для } i = 1,\ldots,M$$

$$q_j \geqslant 0, \quad \sum_i K_{ij}q_j \geqslant K \text{ для } j = 1,\ldots,N$$

$$\sum_i p_i = \sum_j q_j = 1.$$

Нахождение решения подобной системы равенств и неравенств — задача *линейного программирования*.

Для конкретного случая таблицы выплат, приведенной в тексте, находим $p_1 = 0$, $p_2 = 0,45$, $p_3 = 0,55$, $q_1 = 0,6$, $q_2 = 0,4$, $q_3 = q_4 = 0$, $K = 3,4$.

Глава 7. Чувствительная зависимость от начальных условий

1. Рост (= производной по времени) расстояния между реальным и воображаемым шарами пропорционален углу между траекториями их движения. Следовательно, расстояние между двумя шарами оценивается интегралом экспоненциальной функции, что (вплоть до аддитивной постоянной) также является экспоненциальной функцией:

$$\int_0^t Ae^{\alpha s}ds = \frac{A}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1).$$

Конечно, допущение одного удара в секунду является аппроксимацией и даже в этом случае увеличение угла можно назвать экспоненциальным только в грубом приближении. Но единственной серьезной сложностью в случае с нашим аргументом является то, что он имеет место только для *маленького* расстояния между шарами.

2. Я. Г. Синай «Динамические системы с упругими отражениями», *Успехи математических наук* 25, н. 2 (1970): 137–92. Это оригинальная публикация (довольно техническая); за ней последовало несколько других работ разных авторов.

Глава 8. Адамар, Дюгем и Пуанкаре

1. J. Hadamard, «Les surfaces á courbures opposés et leurs lignes géodésiques», *J. Math. pures et appl.* 4 (1898): 27–73, перепечатано в *Oeuvres de Jacques Hadamard* (Paris: CNRS, 1968), vol. 2, pp. 729–75. Обратите внимание, что оригинальная работа Адамара уже содержит явное замечание о том, что если в начальных условиях присутствует хоть какая-то ошибка, то долгосрочное поведение системы предсказать невозможно.

2. Проще всего изучать компактные поверхности *постоянной* отрицательной кривизны. (Их единственный недостаток, в отличие

от поверхности Адамара, состоит в том, что их невозможно реализовать в трехмерном евклидовом пространстве.) Вы, вероятно, помните постулат Евклида, что через точку, не лежащую на прямой линии, проходит одна и только одна прямая, параллельная данной. И, кроме того, вам известно, что можно построить *неевклидовы* геометрии, в которых данный постулат не подтверждается. В частности, в плоскости Лобачевского существует множество прямых, параллельных данной и проходящих через точку, которая на ней не лежит. Следовательно, в плоскости Лобачевского, две точки, которые движутся прямо по параллельным линиям, обычно удаляются друг от друга! Бильярд с постоянной отрицательной кривизной получается при отрезании куска плоскости Лобачевского и склеивании ее краев с целью образования гладкой замкнутой поверхности (такая возможность, безусловно, требует доказательства). Тогда не так уж сложно поверить, что на подобном бильярдном столе прямолинейное движение выказывает чувствительную зависимость от начальных условий.

3. На французском языке этот раздел называется «Exemple de déduction mathématique à tout jamais inutilisable». Он есть в книге П. Дюгема *La théorie physique: Son objet at sa structure* (Paris: Chevalier et Riviére, 1906). Эту ссылку подсказал мне Рене Том.

4. H. Poincaré, *Science et Méthode* (см. прим. 3 к главе 2). Об этом же идет речь в главе 4, «Le hasard» (Случайность).

5. Маленькие причины могут иметь большие следствия, даже в отсутствие чувствительной зависимости от начальных условий. Большое следствие может иметь место после очень длительного ожидания, как замечает Пуанкаре.

Другим интересным случаем являются системы с несколькими состояниями равновесия. Может оказаться очень сложным определить, какие начальные условия, в конечном счете, приведут к тому или иному состоянию равновесия. Это происходит, когда границы *бассейнов притяжения* различных состояний равновесия очень изогнуты, как это часто бывает. Простым примером является *магнитный маятник* — небольшой магнит, подвешенный на жестком стержне над несколькими другими магнитами. Если такой маятник толкнуть, то он начинает совершать сложные колебания, причем трудно догадаться, в каком положении равновесия он остановится (обычно существует несколько таких положений). Изображения изогнутых границ можно увидеть, например, в работе S. McDonald, C. Grebogi, E. Ott, and J. Yorke, «Fractal basin boundaries» /Фрактальные границы бассейнов/ Physica 17D (1985): 125–53.

Пуанкаре также замечает, что то, что мы называем случайностью может возникнуть от недостатка у нас достаточного контроля над своими мускулами, и приводит пример игры в рулетку. Точно также можно говорить и о подбрасывании монетки; некоторые натренированные люди способны подбрасывать монетку с полностью предсказуемым результатом.

Глава 9. Турбулентность: моды

1. «Маленький «гравитационный» Доктор»: эту историю рассказал мне Джордж Уленбек, а другие факты о Т. Де Донде — Марсель Демер.

2. Множество данных об очаровании, лежащем у корней научной работы, можно собрать, беседуя с учеными. Интерпретация этих данных была бы делом весьма деликатным, но могла бы дать новое понимание психологии научного открытия. Ученые, выжившие из ума, были бы особенно интересны для такого изучения в силу большей прозрачности их мотиваций. (К сожалению, многие люди теряют интерес к науке в очень раннем возрасте, и во всем остальном остаются абсолютно нормальными людьми. Однако мне знаком, по крайней мере, один совершенно фантастический экземпляр великого физика, суждение которого о повседневных вопросах было явно неадекватным, но как только он заговаривал о науке, то снова становился великим и говорил абсолютно вразумительно.)

3. J. Leray, «Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace», *Acta Math.* 63 (1934): 193–248.

4. H. Poincaré, *Théorie des tourbillons* (Paris: Carré et Naud, 1892). Имеется русский перевод данной книги: А. Пуанкаре «Теория вихрей» (РХД, 2000 г.)

5. P. Cvitanović, *Universality in Chaos* /Универсальность в хаосе/, (Bristol: Adam Hilger, 1984); Hao Bai-Lin, *Chaos* /Хаос/ (Singapore, World Scientific, 1984). Для популярного представления см. J. Gleik, *Chaos* (New York: Viking, 1987). Это легко читаемое журналистское повествование, однако ему не всегда можно доверять в том, что касается вопросов исторической точности или научного приоритета. Превосходной вводной книгой является I. Steward, *Does God Play Dice? The New Mathematics of Chaos* /Играет ли Бог в кости? Новая математика хаоса/ (London: Penguin, 1990).

6. Оригинальные публикации: Л. Д. Ландау «О проблеме турбулентности», *Докл. Акад. Наук СССР* 44, н. 8 (1944): 339–42; E. Hopf

«A mathematical example displaying the features of turbulence» /Математический пример, проявляющий черты турбулентности/, *Commun. Pure Appl. Math.* 1 (1948): 303–22. Идеи Ландау можно прочитать в книге «Гидродинамика» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифщица из их известного курса по теоретической физике.

7. T. S. Kuhn, *The Structure of Scientific Revolutions* /Структура научных революций/, 2-ое изд. (Chicago: University of Chicago Press, 1970). Я не могу утверждать, что безоговорочно верю в идеи Кана; в частности, мне кажется, что они очень слабо относятся к математике. Однако физические концепции *мод* и *хаоса*, видимо, достаточно хорошо подходят к описанию Каном *парадигм*.

8. S. Smale, «Differentiable dynamical systems», *Bull. Amer. Math. Soc.* 73 (1967): 747–817. См. также русский перевод С. Смейл «Дифференцируемые динамические системы», УМН, 1970, т.25, №1, стр. 113–185.

Глава 10. Турбулентность: странные аттракторы

1. Используя обозначения примечания 3 главы 4, начальное условие x по истечении времени t дает точку $f^t x$. Если x заменяется $x + \Delta x$, то $f^t x$ заменяется $f^t x + \Delta f^t x$, и, если $\Delta f^t x = \frac{\partial f^t x}{\partial x} \cdot \Delta x$ растет экспоненциально с t, мы говорим, что имеем чувствительную зависимость от начальных условий. Точнее мы имеем чувствительную зависимость от начальных условий, если матрица частных производных $\partial f^t x / \partial x$ имеет норму, растущую экспоненциально с t. Теперь рассмотрим движение, описанное k углами с начальными значениями $\theta_1, \ldots, \theta_k$, а по истечении времени t превращающимися в $\theta_1 + \omega_1 t, \ldots, \theta_k + \omega_k t \pmod{2\pi}$. Записывая

$$f^t(\theta_1, \ldots, \theta_k) = (\theta_1 + \omega_1 t, \ldots, \theta_k + \omega_k t), \qquad (1)$$

мы находим

$$\Delta f^t(\theta_1, \ldots, \theta_k) = (\Delta\theta_1, \ldots, \Delta\theta_k).$$

Правая часть уравнения не зависит от t, а потому мы не имеем чувствительной зависимости от начальных условий. Временные эволюции, которые можно привести в форму (1), изменяя переменные, называются *квазипериодическими* и опять-таки не выказывают чувствительной зависимости от начальных условий. Заметьте, что изменение переменных, о котором идет речь, является параметризацией по k-углам, соответствующим суперпозиции

k-мод. Множество, которое можно параметризовать по k-углам является *k-тором* или k-мерным тором (т. е. произведением k кругов).

2. E. N. Lorenz, «Deterministic nonperiodic flow» /Детерминистический непериодический поток/ *J. Atmos. Sci* 20 (1963): 130–141.

3. D. Ruelle and F. Takens, «On the nature of turbulence» /О природе турбулентности/ *Commun. Math. Phys.* 20 (1971): 167–192; 23 (1971): 343–44.

4. См. примечание 1, глава 10, выше.

5. B. Mandelbrot, *Les objets fractals* (Paris: Flammarion, 1975); английский вариант: *The Fractal Geometry of Nature* (San Francisco: Freeman, 1977). /Русский перевод книги «Фрактальная геометрия природы» готовится к изданию в РХД/. Мандельброт привлек внимание ученых к повсеместному присутствию фрактальных форм среди природных объектов. Это был очень важный и успешный вклад. Однако до сих пор отсутствует общее понимание того, как возникают фрактальные формы.

Глава 11. Хаос: новая парадигма

1. J. B. Mc Laughlin and P. C. Martin, «Transition to turbulence of a statically stressed fluid» /Переход к турбулентности статически сжатой жидкости/ *Phys. Rev. Let.* 33 (1974): 1189–92; J. P. Gollab and H. L. Swinney, «Onset of turbulence in a rotating fluid» /Возникновение турбулентности во вращающейся жидкости/ *Phys. Rev. Let.* 35 (1975): 927–30.

2. T. Li and J. A. Yorke, «Period three implies chaos» /Период три означает хаос/ *Amer. Math. Monthly* 82 (1975): 985–92. В этой написанной простым языком статье показано, что для большого класса отображений линейного отрезка на самого себя, существование периодической точки периода 3 говорит о существовании периодических точек любого другого периода. Именно эта сложная ситуация и называется в статье *хаосом*. Название оказалось замечательно успешным, но прижилось оно к совершенно другой ситуации! (Временная эволюция со множеством периодических орбит зачастую не выказывает чувствительной зависимости от начальных условий. На самом деле многие периодические орбиты не обязательно должны находиться на аттракторе, поэтому их присутствие не относится к долгосрочной временной эволюции системы.) Через некоторое время было обнаружено, что результат Ли и Йорке является специальным случаем более ранней теоремы Шарковского. Рассмотрим *унимодальное отображение* f:

$[-1,1] \to [-1,1]$, т. е. непрерывное отображение такое, что $f(-1) = f(1) = -1$, а f возрастает на промежутке $[-1,0]$ и убывает на промежутке $[0,1]$. Теперь рассмотрим следующий необычный порядок положительных целых чисел:

$$\begin{aligned}&3 \succ 5 \succ 7 \succ \ldots \succ 2\cdot 3 \succ 2\cdot 5 \succ 2\cdot 7 \succ \ldots\\&2^n\cdot 3 \succ 2^n\cdot 5 \succ 2^n\cdot 7 \succ \ldots\\&2^n \succ \ldots 4 \succ 2 \succ 1\end{aligned}$$

(сначала нечетные числа, потом четные числа, умноженные на 2, 4, 8,…, и, наконец, степени 2 в понижающемся порядке). Замечательная теорема Шарковского состоит в том, что если $p \succ q$, а f имеет периодическую точку порядка p (т. е. $f^p x = x$ и $f^m x \neq x$ для $m < p$), тогда f имеет периодическую точку периода q. В частности, для $p = 3$, мы получаем результат Ли и Йорке. Первоисточником является работа А. Н. Шарковского «Сосуществование циклов непрерывного отображения линии на саму себя», *Укр. Мат. Ж.* 16 (1964): 61–71; в украинских математических журналах попадаются удивительно хорошие работы!

3. M. J. Feigenbaum, «Quantitative universality for a class of nonlinear transformations» /Качественная универсальность для класса нелинейных преобразований/ *J. Statist. Phys.* 19 (1978): 25–52; также «The universal metric properties of nonlinear transformations» /Универсальные метрические свойства нелинейных преобразований/ *J. Statist. Phys.* 21 (1979): 669–706. Идея строго компьютеризованного доказательства представлена в работе O. E. Lanford «A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures» /Компьютерное доказательство гипотез Фейгенбаума/ *Bull. Amer. Math. Soc.* 6 (1982): 427–34. Важный переход от одного к нескольким измерениям приведен в работе P. Collet, J.-P. Eckmann, and H. Koch, «Period doubling bifurcations for families of maps on $\mathbb{R}^n$» /Бифуркации удвоений периода для семейств отображений на $\mathbb{R}^n$/ *J. Statist. Phys.* 25 (1981): 1–14. Это позволяет работать с системами, непрерывными во времени, как это необходимо в приложениях к физике. Кстати, слово *универсальность* в заголовке Фейгенбаума относится к технической характеристике подхода, связанного с ренормализационной группой. Это не значит, что хаос всегда достигается посредством каскада удвоений периода Фейгенбаума (что в действительности происходит не особенно часто). Существует множество различных *путей к хаосу*; некоторые, особенно важные, рассматриваются в работе J.-P. Eckmann, «Roads to turbulence in dissipative dynamical systems» /Пути к турбулентности в диссипа-

тивных динамических системах/ *Rev. Mod. Phys.* 53 (1981): 643–54. Каскады удвоений периода наблюдались при многих экспериментах, в особенности Альбертом Либхабером при изучении конвекции; см. A. Libchaber, C. Laroche, and S. Fauve, «Period doubling cascade in mercury, a quantitative measurement» /Каскад удвоений периода в ртути: количественное измерение/ *J. de Physique—Lettres* 43L (1982): 211–16.

4. K. Pye and D. Chance, «Sustained sinusoidal oscillations of reduced pyridine nucleotide in a cell-free extract of Saccharomyces carlsbergensis», *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S.* 55 (1966): 888–94.

5. D. Ruelle, «Some comments on chemical oscillations» /Некоторые комментарии по поводу химических колебаний/ *Trans. N. Y. Acad. Sci. Ser. II* 35 (1973): 66–71.

Здесь будет уместно сказать несколько слов об отвергнутых статьях. Необходимым условием успешной профессиональной карьеры для многих людей является публикация их научных статей в журналах. Другими словами, назначение на должность и продвижение по службе происходит на основе некоторого количества опубликованных статей. Эта ситуация вынуждает многих индивидуумов, которые не обладают ни интересом, ни способностями к научному исследованию, писать статьи и посылать их в журналы. Рецензенты, которые сами являются учеными-исследователями, таким образом оказываются попросту заваленными посредственными работами, о которых они вынуждены писать отчеты. Поскольку у них много другой интересной работы, то эти отчеты зачастую пишутся поспешно после поверхностного прочтения работы. Принимаются, как правило, те работы, которые выглядят разумно, отвергаются, очевидно, плохие работы; однако и хорошие работы, которые несколько оригинальны и выходят за рамки нормы, тоже обыкновенно не проходят. Эта проблема хорошо известна, и никто, в общем-то, не знает, как ее решить. К счастью, научных журналов множество, и действительно хорошую работу все равно где-нибудь опубликуют.

6. J. C. Roux, A. Rossi, S. Bachelart, and C. Vidal, «Representation of a strange attractor from an experimental study of chemical turbulence» /Представление странного аттрактора на основе экспериментального изучения химической турбулентности/ *Phys. Letters* 77 A (1980): 391–93.

7. D. Ruelle, «Large volume limit of the distribution of characteristic exponents in turbulence» /Крупномасштабное ограничение распределения характеристических экспонент при турбулентности/ *Commun. Math. Phys.* 87 (1982): 287–302.

Мошенничество при научных исследованиях — проблема довольно деликатная. Традиционно считалось, что это вещь исключительная и что ученые-исследователи придерживаются очень высоких этических норм (за несколькими исключениями). В настоящее время этот традиционный взгляд оспаривается, и обман открыто обсуждается как важный фактор качества науки. Я попытаюсь кратко представить две главные области, в которых имеет место мошенничество: *приоритеты* и *подделка данных*.

Вопрос приоритетов стоит так: «Кто первым сделал это?» Прекрасным примером оспаривания приоритетов является спор Ньютона и Лейбница по поводу изобретения дифференциального исчисления. Будучи честным ученым, вы признаете источники всех идей, которыми пользуетесь (при условии, что вы их помните). Однако если вы беспринципны, то попытаетесь представить некоторые результаты, полученные другими, как свои собственные. Например, если вы обнаружите в статье, рецензентом которой являетесь, хорошую идею, то вы попытаетесь воспрепятствовать публикации этой статьи и поспешите опубликовать эту идею под своим собственным именем (или предложите одному из своих студентов опубликовать ее).

Но гораздо хуже подделка данных. К сожалению, обнаружилось, что такой обман произошел на высоком уровне при биомедицинских исследованиях в США (например, изобретение историй болезни несуществующих пациентов). Одна из причин подобного обмана состоит в том, что многие люди пишут статьи только ради своей карьеры и очень мало интересуются научной истиной. Кроме того, чтобы обеспечить финансирование, необходимо непрерывно получать какие-нибудь результаты.

Лично я работал в нескольких областях, где имел возможность свободно обсуждать свои идеи с коллегами по работе; работал я и в других местах, где подобное поведение нельзя назвать мудрым из-за риска, что твои идеи могут украсть. Первое гораздо более приятно *и обеспечивает более быстрый научный прогресс*.

Математика относительно свободна от мошенничества, потому что это огромная область, в которой над любой данной проблемой работает достаточно небольшое количество человек. Подделки данных не происходит, а украсть идею сложно, потому что сами идеи представляют собой целые комплексы. Однако и здесь время от времени возникают споры о приоритетах (вспомните Ньютона и Лейбница), крутятся какие-то подозрительные личности, и нет никакой гарантии, что современная, достаточно удовлетворительная, ситуация будет длиться вечно.

Глава 12. Хаос: последствия

1. M. Berry, «Regular and irregular motion» /Регулярное и нерегулярное движение/ в книге *Topics in Nonlinear Dynamics: A Tribute to Sir Edward Bullard*, ed. S. Jorna (New York: American Institute of Physics, 1978), pp. 16–120. Вычисление М. Берри (стр. 95–96) основано на более ранних идеях Э. Бореля и Б. В. Чирикова. Какой гравитационный эффект удаленное тело оказывает на столкновение двух упругих шаров? Если два шара изначально располагаются на разном расстоянии от тела, то они отклонятся по-разному, так что геометрия удара будет несколько иной в зависимости от присутствия или отсутствия тела. Следуя данному шару, мы видим, что при последующих столкновениях разница будет возрастать экспоненциально. (Причем это не будет двукратное увеличение, с которым мы столкнулись при нашем упрощенном рассмотрении в главе 7; увеличение произойдет примерно в l/r раз, где l — это расстояние, пройденное частицей, а r — ее радиус.) После n столкновений угол между исходной и измененной траекториями становится порядка 1 и две траектории теряют какую бы то ни было связь друг с другом.

Если удаленным телом является электрон, который располагается на расстоянии 10^{10} световых лет, а упругие шары — молекулы кислорода (при нормальных температуре и давлении), то $n = 56$. Если удаленным телом является человек, который находится на расстоянии 1 м от бильярдного стола, а упругие шары — бильярдные шары, то $n = 9$. Все это, естественно, согласно классической механике. Квантовые эффекты сами по себе делают невозможным направить намеренно, хотя бы однажды, одну молекулу кислорода на другую ($n = 0$). Для бильярдных шаров квантовые эффекты допускают $n = 15$. (Таким образом, в нашем случае было бы гораздо более разумно применить не классическую, а квантовую механику, но для последствий это действительно не имеет никакого значения.)

2. Вычисление, выполненное Майклом Берри, о котором мы говорили в предыдущем примечании, показывает, что крошечное начальное отклонение за короткое время значительно изменяет структуру столкновений молекул воздуха. Соответственно, микроскопическая структура воздуха и происходящие в ней флуктуации становятся совсем другими. Эти так называемые *термические флуктуации* влияют на плотность, скорость и т. д. . . маленьких объемных элементов воздуха (в которых количество молекул не слишком велико). Мы в состоянии оценить время, необходимое

для усиления термических флуктуаций в турбулентной жидкости вследствие чувствительной зависимости от начальных условий до макроскопического масштаба (скажем, в 1 см). Расчет задействует теорию турбулентности Колмогорова. Эта теория (в силу размеров) дает, в сущности, уникальное значение скорости роста возмущений (характеристическое время роста пропорционально *времени оборачиваемости* вихрей выбранного макроскопического размера). Переход от микроскопических флуктуаций к макроскопическим переменам в турбулентности занимает около минуты (см. D. Ruelle, «Microscopic fluctuations and turbulence» /Микроскопические флуктуации и турбулентность/ *Phys. Letters* 72A [1979]: 81–82). Переход от малых масштабов к большим масштабам турбулентности занимает время, пропорциональное времени оборачиваемости самых крупных из рассматриваемых вихрей (опять-таки помогла теория Колмогорова и размерные аргументы). По нашим оценкам, на достижение километрового масштаба уходит несколько часов или один день. Теперь мы переходим к уровню циркуляции атмосферы над всей планетой, где время, необходимое для усиления небольшой перемены до глобально отличной ситуации, метеорологи оценивают как равное одной-двум неделям. (Для изучения метеорологических вопросов см. M. Ghil, R. Benzi, and G. Parisi, eds., *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics* /Турбулентность и предсказуемость в геофизической динамике жидкости и динамике климата/ [Bologna: Soc. Ital. Fis. (and Amsterdam: North Holland), 1985].)

Вышеприведенные оценки достаточно нечувствительны к деталям (потому что расчетные времена — это либо логарифмы, либо они основываются на размерных аргументах, а также потому, что самое большое время следует от самого крупного масштаба). Следовательно, тогда как можно оспаривать, например, использование теории турбулентности Колмогорова, другая теория все же вряд ли даст иные результаты.

3. См. J. Wisdom, «Chaotic behavior in the solar system» /Хаотическое поведение в Солнечной системе/ *Proc. Royal Soc. London* 413 A (1987): 109–29. Каждый астероид вращается вокруг Солнца по эллипсу, но форма этого эллипса медленно изменяется под действием притяжения тяжелой планеты Юпитера. Эти изменения формы важны для определенных *резонансных* расстояний до Солнца или, точнее, для определенных значений большой полуоси эллипса. (Большая полуось связана с периодом вращения третьим законом Кеплера, и, когда период вращения астероида находится в резонансе с периодом вращения Юпитера, эта планета оказывает

сильное возмущающее воздействие. Говорят, что резонанс происходит, когда два периода связаны отношением p/q, где p и q — малые целые числа.) Компьютерные исследования показывают, что в случае резонанса со временем возникает хаотическое изменение формы орбиты астероида (т. е. отношения малой и большой оси эллипса). Когда эти изменения становятся такими, что астероиды могут пересечь орбиту планеты Марс, то астероиды исчезают при столкновении, а в поясе образуется пустота. Таким образом, расчеты подтверждают наблюдаемый факт, что некоторые резонансы соответствуют пустотам, а другие — нет.

4. Ранние попытки использования количественных методов в биологии и гуманитарных науках были чрезмерно оптимистичными. В частности, считалось, что размерность многих естественно возникающих аттракторов можно получить с помощью метода, называемого *алгоритмом Грассбергера – Прокаччиа* (P. Grassberger and I. Procaccia, «Measuring the strangeness of strange attractors» /Измерение странности странных аттракторов/ *Physica D* 9 [1983]: 189–208). Метод отлично работает на хороших долговременных рядах, но дает ошибочные результаты для коротких рядов (D. Ruelle, «Deterministic chaos: the science and the fiction» /Детерминистический хаос: наука и фантастика/ *Proc. Royal Soc. London* 427 A [1990]: 241–48). Еще одну идею, которая выглядит весьма многообещающей, см. в G. Sugihara and R. M. May, «Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series» /Нелинейное предсказание как способ отличить хаос от ошибки измерения во временных рядах/ *Nature* 344 (1990): 734–41.

Глава 13. Экономика

1. Собрание статей по экономике и хаосу см. в P. W. Anderson, K. J. Arrow, and D. Pines, eds., *The Economy as an Evolving Complex System* /Экономика как развивающаяся сложная система/ (Redwood City, Calif.: Addison-Wesley, 1988). На встрече, где зародилась эта книга, присутствовали как экономисты, так и физики, и самое интересное, что экономисты, как правило, были гораздо сдержаннее в своих притязаниях, нежели физики. См. также примечание 4 к главе 12.

Глава 14. Исторические эволюции

1. W. B. Arthur, «Self-reinforcing mechanisms in economics» /Самоупрочняющие механизмы в экономике/ pp. 9–31 в книге *The*

Economy as an Evolving Complex System (книга, на которую уже делалась ссылка в примечании 1 главы 13).

Глава 15. Кванты: концептуальная основа

1. R. P. Feynman, *QED* /Квантовая электродинамика/ (Princeton: Princeton University Press, 1985). Представление квантовой динамики Фейнмана несколько отличается от более традиционного представления, которое мы рассмотрим, однако, в принципе, они эквивалентны.

2. Вспомним, что *комплексное* число — это математический объект вида $z = x + iy$, где x и y — *вещественные* числа (как 1,5, или π, или -3), а квадрат i $i^2 = i \times i$ равен -1. Вычисления с комплексными числами проводятся практически также, как и с вещественными. Число, *комплексно-сопряженное* числу $z - \bar{z} = x - iy$; легко проверить, что $z\bar{z} = x^2 + y^2$, а $|z|$ = положительному квадратному корню $z\bar{z}$. Комплексные числа сложнее поддаются интуитивному пониманию, нежели вещественные, но обладают некоторыми техническими преимуществами. Например, из комплексных чисел всегда можно извлечь (комплексный) квадратный корень.

3. Это примечание и два последующие дают очень беглый обзор квантовой механики.

Уравнение Шредингера.

Напомним, что уравнение Ньютона выглядит следующим образом (примечание 1 к главе 5):

$$m_j \frac{d^2}{dt^2} x_j = F_j \quad \text{для} \quad j = 1, \ldots, N,$$

Мы допустим, что существует функция V от $x_1, \ldots, x_N$ (называемая *потенциалом*) такая, что

$$F_j = -\operatorname{grad}_{(j)} V,$$

где $\operatorname{grad}_{(j)}$ — это вектор производных по компонентам положения x_j j-ой частицы. (В случае гравитационных взаимодействий мы имеем

$$V(x_1, \ldots, x_N) = -\gamma \sum_{j<k} \frac{m_j m_k}{|x_k - x_j|}.)$$

В квантовой механике существует амплитуда $\psi(x_1, \ldots, x_N; t)$ для нахождения наших N частиц в положениях $x_1, \ldots, x_N$ (в момент времени t), причем амплитуды ψ образуют то, что называется *волновой функцией*. Временная эволюция ψ получается при решении уравнения Шредингера:

$$\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\sum_j \Delta_{(j)}\psi + V\psi,$$

где i — квадратный корень из -1, h — некоторая постоянная (постоянная Планка), а $\Delta_{(j)}$ — *лапласиан* по x_j, т. е. $\Delta_{(j)}\psi$ — сумма вторых частных производных ψ по составляющим x_j.

Допускается, что $3N$-мерный интеграл

$$\int |\psi(x_1, \ldots, x_N; t)|^2 dx_1 \ldots dx_N = 1$$

для некоторого значения t, и тогда это свойство истинно для всех t.

4. Линейный оператор A, действующий на функцию ϕ от $x_1, \ldots, x_N$, создает новую функцию $A\phi$ этих переменных так, что $A(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) = c_1 A\phi_1 + c_2 A\phi_2$, где c_1 и c_2 — постоянные, а ϕ_1, ϕ_2 — две функции. Теперь запишем

$$(\phi_1, \phi_2) = \int \bar{\phi_1}(x_1, \ldots, x_N)\phi_2(x_1, \ldots, x_N) dx_1 \ldots dx_N,$$

где $\bar{\phi_1}$ — число, комплексно-сопряженное ϕ_1. (Мы всегда используем функции ϕ такие, что (ϕ, ϕ) является конечным.) Если линейный оператор A удовлетворяет

$$(\phi_1, A\phi_2) = (A\phi_1, \phi_2),$$

то говорят, что A является *самосопряженным*, и именно такие операторы подходят для соответствия физическим наблюдаемым.

Например, наблюдаемая A, соответствующая первой составляющей x_{j1} положения j-ой частицы, удовлетворяет

$$(A\phi)(x_1, \ldots, x_N) = x_{j1}\phi(x_1, \ldots, x_N)$$

(произведению x_{j1} и ϕ). Наблюдаемая v_j, соответствующая скорости j-ой частицы, такая, что

$$(v_j\phi)(x_1, \ldots, x_N) = \frac{1}{m_j} \cdot \frac{h}{2\pi i} \operatorname{grad}_{(j)} \phi(x_1, \ldots, x_N).$$

Наконец, среднее значение A в момент времени t определяется как

$$\langle A\rangle = (\psi, A\psi) = \int \bar{\psi}(x_1,\ldots,x_N;t)(A\psi)(x_1,\ldots,x_N;t)dx_1\ldots dx_N,$$

где ψ — это волновая функция нашей системы. (Это определение среднего значения *векторного состояния*, определенного волновой функцией ψ. Существуют более общие средние значения, определенные *матрицами плотности* и в большей степени соответствующие распределениям вероятности в классической теории вероятностей.)

5. Если самосопряженный оператор A удовлетворяет $A^2 = A$, то он называется *проекцией*, и такие операторы соответствуют *простым событиям*. Если даны два линейных оператора A и B, то их произведение AB является линейным оператором таким, что $(AB)\phi = A(B\phi)$, для всех функций ϕ. В частности, если $AB = BA$, мы говорим, что A и B являются *коммутирующими* операторами. Произведение AB двух коммутирующих проекций является опять-таки проекцией и подходит для представления события «A и B», если A и B представляют события «A» и «B». Если $AB \neq BA$, то естественного определения проекции, соответствующей проблематичному событию «A и B», не существует.

Сложное событие, в котором срабатывают или не срабатывают несколько детекторов, соответствует самосопряженному оператору, который может и не быть проекцией (но он положителен, т. е. является квадратом самосопряженного оператора). Здесь опять можно определить «A и B», когда A и B коммутируют.

6. Если честно, то идеи Белла не совсем согласуются с теми, что в общих чертах описаны в данной главе; см. J. S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics* /О чем можно и о чем нельзя говорить в квантовой механике/ (Cambridge: Cambridge University Press, 1987). (Это собрание перепечатанных работ Белла, которое очень хорошо приняли физики.)

7. См. сноску 8 на стр. 76 «Квантовой электродинамики» (ссылка на эту книгу приведена в примечании 1 к главе 15). Расплывание волновых пакетов — это одна из попыток вложить в математический формализм квантовой механики больше, чем это строго необходимо для объяснения экспериментальных фактов. В подобных попытках нет ничего особенного, *при условии, что они не противоречат экспериментальным фактам.* Другие типы расширения математического формализма квантовой теории предлагались

Дэвидом Бомом (см. книгу Белла в примечании 6 к главе 15), а также в работе R. B. Griffiths, «Consistent histories and the interpretation of quantum mechanics» /Согласующиеся истории и интерпретация квантовой механики/ *J. Statist. Phys.* 36 (1984): 219–72.

Глава 16. Кванты: счет состояний

1. Серьезное техническое рассмотрение добавило бы к нашему анализу долю критики: невозможно иметь положение, строго ограниченное интервалом $[0, L]$, и скорость, находящуюся в интервале $[-v_{\max}, v_{\max}]$, если L и $v_{\max}$ — конечные величины (невозможно технически, потому что преобразование Фурье волновой функции ψ с компактным носителем не может иметь компактный носитель, если $\psi \neq 0$). Однако можно добиться того, чтобы вероятности нахождения частицы за пределами $[0, L]$ или ее скорости вне $[-v_{\max}, v_{\max}]$ были очень маленькими. Физики знают, что исследования, касающиеся маленьких прямоугольников, как в нашем случае, не совсем правильны. Но они удобны и часто дают правильный ответ. Но при этом нельзя забывать о том, что квантовая механика — это не просто статистическая теория, основанная на соотношении неопределенностей Гейзенберга, хотя такой взгляд на вещи зачастую дает правильные ответы на простые вопросы.

2. Для N частиц, содержащихся в объеме V с полной максимальной кинетической энергией E, мы используем формулу:

$$\text{количество состояний} = \frac{1}{N!} S_{3N} \left(\frac{1}{h^3} V (2mE)^{3/2} \right)^N$$

Это объем в фазовом пространстве, в единицах h^{3N}, поделенный на перестановочное число $N!$, с целью учета неотличимости частиц [$h = 6{,}6\mathrm{E}(-34)$джоулей $\times$ сек — постоянная Планка, S_{3N} — объем $3N$-мерной сферы радиуса l, а m — масса частицы; здесь $m = 7E(-27)$ кг, $V = E(-3)$м^3, $N = 2{,}7E22$]. Мы принимаем $E = 3NkT/2$ [$k = 1{,}4\mathrm{E}(-23)$ джоулей/(градус Кельвина) — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, в данном случае 300 градусов Кельвина]. Следовательно,

$$\text{количество состояний} \approx \frac{1}{h^{3N}} (\frac{V}{N})^N (2\pi mkT)^{3N/2} e^{5N/2} \approx$$

$$\approx 1\mathrm{E}5000000000000000000000.$$

Мы пренебрегли техническими проблемами квантовой статистики и спина, так как для настоящего рассмотрения они не существенны.

Глава 17. Энтропия

1. *Первый закон термодинамики* утверждает, что энергия сохраняется во всех процессах. (Это действительно так при условии, что учитываются все формы энергии, включая тепло.)

Глава 18. Необратимость

1. *Эргодичность.*

Рассмотрим N атомов гелия в литровой емкости как образующее классическую механическую систему (атомы гелия сталкиваются со стенками емкости, и, кроме того, им разрешено взаимодействовать друг с другом). Пусть для каждого атома x_i будет его положением, а mv_i — произведением его массы на скорость (= импульсу). Совокупность X x_i, mv_i является точкой в фазовом пространстве M нашей системы. По истечении времени t X заменяется новой точкой f^tX, причем f^tX имеет ту же самую полную энергию, что и X. Назовем множество M_E X-ов, имеющих одинаковую энергию E, *энергетической оболочкой*. Объем в фазовом пространстве (произведение по i dx_i и mdv_i) естественным образом устанавливает объем на энергетической оболочке. Если A является подмножеством M_E, а обA — его объемом, то

$$\text{об}(f^tA) = \text{об}A,$$

т. е. временная эволюция сохраняет объем. Необходима определенная тщательность, чтобы сформулировать все это более точно (например, A должно быть измеримым), но пока все достаточно просто. А вот кое-что новенькое. Мы говорим, что временная эволюция на энергетической оболочке M_E является *эргодической*, если инвариантное подмножество J M_E (т. е. $f^tJ = J$ для всех t) не может быть таким, что $0 < \text{об}J < \text{об}M_E$ (т. е. J должно иметь нулевой или полный объем).

Допустим, что временная эволюция f^t является эргодической. Тогда почти для каждого исходного состояния X и для каждого подмножества A M_E доля времени, проведенная f^tX в A, равна обA/обM_E. [Точнее, если $l(X, A, T)$ — продолжительность времени, проведенного f^tX в A с $0 < t < T$, то $\lim \dfrac{l(X,A,T)}{T} = \text{об}A/\text{об}M_E$, когда $T \to \infty$; это вид *эргодической теоремы*.] Тогда для эргодических временных эволюций средние по времени просто связаны с объемами в энергетической оболочке, вследствие чего и важна эргодичность. К сожалению, очень сложно доказать, что механическая система является эргодической. Это доказательство было получено для бильярда Синая, рассмотренного в главе 7, и еще для очень немногих интересных систем. Наша же система атомов гелия остается случаем «эргодической гипотезы».

2. Для эргодической временной эволюции время возврата очень велико, что объясняет необратимость. Но мы можем иметь необратимость и без эргодичности при единственном условии, что время возврата является большим. Таким образом, возможно некоторое ослабление требования эргодичности, которое может понадобиться для некоторых физических теорий. В главе 17 я упомянул, что чувствительная зависимость от начальных условий полезна для понимания необратимости. Как это работает? На самом деле чувствительная зависимость от начальных условий не обязательна для эргодичности, но может быть полезна и является, например, первым шагом в доказательстве эргодичности для бильярда Синая.

Для временной эволюции, которая не является эргодической, некоторое количество внешнего шума переведет систему из одной «эргодической составляющей» в другую при условии, что энергетическая оболочка является связным множеством. Это действие малых возмущений (типа гравитационного действия электрона, находящегося на границе известной вселенной) эффективно, когда присутствует чувствительная зависимость от начальных условий, и в результате его даже неэргодическая система будет выглядеть как эргодическая.

После всего вышесказанного следует признать, что некоторые механические системы отказываются вести себя эргодически. Фактически, КАМ-теория (созданная А. Н. Колмогоровым, В. И. Арнольдом и Ю. Мозером) дает важные примеры нарушения эргодичности. (Для общего изучения КАМ-теории см. J. Moser, *Stable and Unstable Motions in Dynamical Systems* /Устойчивые и неустойчивые движения в динамических системах/ Annals of Mathematics Studies no. 77 [Princeton: Princeton University Press, 1973].) Кроме того, численная обработка некоторых систем высказывает неэргодическое поведение.

3. I. Prigogine, *From Being to Becoming* (San Francisco: Freeman, 1980). Имеется русский перевод: И. Пригожин «От существующего к возникающему», Мир. Между прочим, важный вопрос состоит

в том, как и почему произошло так, что наша вселенная началась со столь малой энтропии. Обсуждение этого вопроса привело бы нас к теории Большого Взрыва, который привел к зарождению вселенной, и мы ушли бы слишком далеко от основной темы.

4. Инвариантность законов физики при обращении времени рассматривается только для *слабых взаимодействий* элементарных частиц. Для таких взаимодействий операция обращения времени T не является точной симметрией; точной симметрией в этом случае считается другая операция обращения времени $-TCP$. В действительности, большинство физиков полагает, что эти факты мало относятся к необратимости, наблюдаемой на макроскопическом уровне.

Глава 19. Равновесная статистическая механика

1. W. Fucks and J. Lauter, *Exaktwissenschaftliche Musikanalyse*, Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen no. 1519 (Köln-Opladen: Westdeutscher Verlag, 1965). Этой сноской я обязан Карине Шемла.

2. Одним из аспектов этой сложной работы является то, что сейчас известно как теория *больших отклонений*. См. D. Ruelle, «Correlation functionals» /Функциональные соотношения/ *J. Math. Phys.* 6 (1965): 201–20; O. Lanford, «Entropy and equilibrium states in classical statistical mechanics» /Энтропия и равновесные состояния в классической статистической механике/ in *Statistical Mechanics and Mathematical Problems*, Lecture Notes in Physics no. 20 (Berlin: Springer, 1973), pp. 1–113; R. S. Ellis, *Entropy, Large Derivations and Statistical Mechanics* /Энтропия, большие отклонения и статистическая механика/ Grundlehren der Math. Wiss. no. 271 (New York: Springer, 1985).

3. Максимум $S_I(E_I) + S_{II}(E_{II})$ при условии $E_I + E_{II} = E$ — это максимум $S_I(E_I) + S_{II}(E - E_I)$ по E_I. Он имеет место, когда производная этой величины по E_I равна нулю. Это дает $S'_I(E_I) - S'_{II}(E - E_I) = 0$, т. е. $T_I = T_{II}$.

Глава 20. Кипящая вода и врата Ада

1. Если вместо воды взять расплавленное стекло и дать ему остыть, оно будет становиться все более и более вязким и, в конечном итоге, превратится в достаточно жесткое и твердое холодное стекло. Но физики скажут вам, что стекло не является твердым телом правильной формы: его микроскопическая структура не уравновешена и будет изменяться, если вы подождете достаточно долго. Однако за время вашей жизни она не подвергнется

сколь бы то ни было значительным изменениям. Это значит, что стекло находится за пределами того кусочка физической реальности, который хорошо описывается равновесной статистической механикой.

2. См., в частности, D. Ruelle, *Statistical Mechanics: Rigorous Results* (New York: Benjamin, 1969). Имеется русский перевод книги: Д. Рюэль «Статистическая механика», Мир, 1971. Ya. G. Sinai, *Theory of Phase Transitions: Rigorous Results* (Oxford: Pergamon, 1982). Книга переведена на русский язык: Я. Г. Синай «Теория фазовых переходов: строгие результаты», эта книга также скоро появится в РХД.

3. См., например, D. J. Amit, *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena* /Теория поля, ренормализационная группа и критические явления/ 2d ed. (Singapore: World Scientific, 1984), а также ссылки, приведенные в этой работе.

4. Типичным процессом во флуктуациях вакуума является одновременное образование электрона и позитрона, после которого очень быстро происходит их взаимное уничтожение и исчезновение. (Электрон не может возникнуть из вакуума один, или исчезнуть один по причине необходимости сохранения заряда.) Процессы, подобные этому, изучает *квантовая электродинамика* (КЭД), и книга Фейнмана дает неоценимое введение в эту потрясающую область физики (см. примечание 1 к главе 15).

5. Интересной книгой по черным дырам является K. S. Thorne, R. H. Price, and D. A. Macdonald, *Black Holes: The Membrane Paradigm* (New Haven: Yale University Press, 1986) /Имеется русский перевод: «Черные дыры: мембранный подход», М.: 1988/. Это техническая книга, полная сложных формул, но показ сложных формул полезен для физиков, которые хотят получить представление о том, каковы отвратительные технические детали теории, даже если они и не хотят сами стать специалистами в этой области. Конечно же, более доступным является популярный отчет самого Хокинга: S. W. Hawking, *A Brief History of Time* /Краткая история времени/ (London: Bantam, 1988).

Глава 21. Информация

1. Поскольку вирус СПИДа является вирусом РНК, этими четырьмя буквами изначально являются не (A, T, G, C), а копия, сделанная в этот алфавит обратной транскриптазой.

2. Для семейства сообщений с вероятностями $p_1, p_2, \ldots$ среднее количество информации, содержащейся в одном сообщении,

равно

$$\text{среднее количество информации} = -\sum_i p_i \log p_i.$$

Если существует N сообщений с вероятностью $1/N$ каждое, тогда средняя информация равна $\log N$. Во многих случаях *теорема Бреймана – МакМиллана* сводит изучение сообщений с разными вероятностями к изучению равновероятных сообщений. Хорошее техническое обсуждение теории информации, включающее теорему Бреймана – МакМиллана, см. в P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information* /Эргодическая теория и информация/ (New York: John Wiley, 1965).

3. C. Shannon, «A mathematical theory of communication» /Математическая теория связи/ *Bell System Tech. J.* 27 (1948): 379–423, 623–56.

4. Для изучения количества информации мелодии необходима статистика, соответствующая группам 2, 3, 4,... последовательных нот. Но интервалы между двумя последовательными нотами обеспечивают удобную переоценку информации.

5. См. ссылку в примечании 1 к главе 19. Безусловно, нужно сравнивать музыкальные произведения одинаковой длины или делить информацию на длину произведения.

6. Если говорить конкретно, то необходимо обозначить семейство разрешенных сообщений, например, прямоугольных картин с постоянным цветом. (Этот класс содержит мало информации, так как можно выбрать только размеры прямоугольника и конкретный цвет, так что количество разнообразных выборов будет не слишком велико.) Может оказаться сложным явно определить разрешенное семейство сообщений в данной форме искусства (типа «абстрактной живописи»), но обыкновенно мы интуитивно чувствуем, насколько свободно или несвободно мы можем, например, писать сонеты или романы.

Глава 22. Сложность, алгоритмическая

1. См. M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability* /Компьютеры и трудность обработки/ (New York: Freeman, 1979). Эта книга является стандартной работой по алгоритмической сложности и содержит, в частности, исследование машин Тьюринга.

2. Эффективный алгоритм для линейного программирования изобрел Л. Г. Хачьян, а к практике его приспособил Н. Кармаркар. См. примечание 1 к главе 6, где задачи конечной игры с нулевой суммой, в которой участвуют два человека, формулируются как задачи линейного программирования.

3. NP означает *недетерминистический полиномиал* (Nondeterministic Polynomial). Он называется так потому (как рассматривается ниже), что положительный ответ можно проверить за полиномиальное время, если была выдвинута (недетерминистически) правильная догадка. Все NP-полные задачи являются в равной степени сложными: если вы сумеете решить одну из них, вы сумеете решить все; значит, квалификация является *полной*.

4. О спиновых стеклах и неупорядоченных системах см. M. Mézard, G. Parisi, and M. A. Virasoro, *Spin Glass Theory and Beyond* /Теория спиновых стекол и не только/ (Singapore: World Scientific, 1987). Задача спиновых стекол, как ее определили мы, не рассматривается в книге Гарея и Джонсона (примечание 1, глава 22), но она близка к задаче SMC («Simple Max Cut») («Простой максимальный разрез»), которая считается NP-полной.

5. Древовидная структура природной эволюции аналогична древовидной структуре *долин* в решении Паризи модели спиновых стекол (по этому вопросу см. *Spin Glass Theory and Beyond*, описанную в предыдущем примечании). Судя по всему, эта аналогия поддерживается и на количественном уровне (см. H. Epstein and D. Ruelle, «Test of a probabilistic model of evolutionary success» /Проверка вероятностной модели эволюционного успеха/ *Physics Reports* 184 [1989]: 289–92).

Глава 23. Сложность и теорема Геделя

1. Эту историю я услышал от Р. В. Кадисона.

2. Следующая книга (на французском языке) очень полезна для того, чтобы разобраться в работе Фрейда: J. Laplanche and J.-B. Pontalis, *Vocabulaire de la psychanalyse* /Словарь психоанализа/ (Paris: PUF, 1967).

3. Что это значит, когда из аксиом невозможно доказать или опровергнуть истинность некоторого утверждения? Чтобы это увидеть, необходимо понять природу игры, которая называется *метаматематикой* и в которую играют математические логики. У математиков есть различные теории $A, B, \ldots$, каждая из которых основана на системе аксиом, которая считается непротиворечивой. Например, A может быть аксиоматическим представлением

арифметики целых чисел, а B — теории множеств. (Гедель показал, что невозможно доказать непротиворечивость тех систем аксиом, которые используют математики. А потому здесь нужна своего рода вера. Однако большинство математиков в достаточной степени убеждены, что используемые ими аксиомы арифметики или теории множеств никогда не породят противоречий.) Аксиомы, теоремы и правила вывода теории A теперь можно рассматривать как математические объекты, к которым можно применить теорию B. Таким образом, мы смотрим на теорию A, так сказать, *извне*, и можем доказать относительно ее то, что невозможно доказать *изнутри*. Это метаматематическая игра, и она весьма коварна. Но если вы верите в непротиворечивость A (и B), то следствия вроде теоремы Геделя о неполноте неизбежны.

4. R. J. Solomonoff, «A formal theory of inductive inference» /Формальная теория индуктивного вывода/ *Inform. and control* 7 (1964): 1–22, 224–54; А. Н. Колмогоров «Три подхода к определению концепции «качества информации»», *Пробл. передачи информ.* 1 (1965): 3–11; G. I. Chaitin, «On the length of programs for computing binary sequences» /О длине программ вычисления бинарных последовательностей/ *J. ACM* 13 (1966): 547–69. См. также G. I. Chaitin, *Algorithmic Information Theory* /Теория алгоритмической информации/ (Cambridge: Cambridge University Press, 1987); G. I. Chaitin, *Information, Randomness, and Incompleteness* /Информация, хаотичность и неполнота/ (Singapore: World Scientific, 1987).

5. См. теорему 2 в Приложении к работе G. I. Chaitin, «Information-theoretic computational complexity» /Информационно-теоретическая вычислительная сложность/ *IEEE Trans. Inform. Theory* IT-20 (1974): 10–15. Эта статья перепечатана (стр. 23–32) в книге *Information, Randomness, and Incompleteness* (см. предыдущее примечание).

6. См. M. Davies, Y. Matijasevič, and J. Robinson, «Hilbert's tenth problem. Diophantine equations: Positive aspects of a negative solution» /Десятая проблема Гильберта. Диофантовы уравнения: положительные аспекты отрицательного решения/ в *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems*, Proc. Symp. Pure Math. 27 (Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1976), pp. 323–78.

7. См. книгу *Algorithmic Information Theory*, ссылка на которую приводится в примечании 4 к главе 23. На самом деле последовательность Чайтина становится случайной лишь через конечное число членов.

8. Одно из предложений Пьера Картье состоит в том, что аксиомы теории множеств на самом деле противоречат друг дру-

гу, но доказательство этого противоречия было бы таким длинным, что его невозможно было бы осуществить в нашей физической вселенной! Если говорить более консервативно, то мы можем ожидать, что дальнейшее развитие математической логики будет совместимо с тем, что принято сейчас, но прольет новый свет на основы математики.

Глава 24. Истинный смысл разделения полов

1. Мы можем допустить, что потомок сообщения пропорционален $\exp[E(\text{сообщения})]$, и разрешить мутации от сообщения к близко схожим сообщениям. Основной недостаток этой модели, или метафоры, жизни состоит в том, что она не включает динамические аспекты связей сообщения с сообщениями того же вида и с сообщениями разных видов (т. е. во внимание не принимается динамика популяции).

2. Для упрощения математики мы сейчас говорим о точечных мутациях (хотя другие типы мутаций имеют огромное значение для эволюции). Точечные мутации соответствуют случайному блужданию в случайной среде, созданной функцией E. Допущение о том, что потомок сообщения пропорционален $\exp[E(\text{сообщения})]$, означает, что предпочтение отдается большим значениям E. Известно, что случайные блуждания в случайной среде происходят очень медленно, потому что для того, чтобы перебраться с одной горы на другую, сначала нужно спуститься с вершины первой, а это весьма невероятный процесс (см. Я. Г. Синай «Предельное поведение одномерных случайных блужданий в случайных средах», *Теор. вероят. и ее примен.* 27 [1982]: 247–58; E. Marinari, G. Parisi, D. Ruelle, and P. Windey, «On the interpretation $1/f$ noise» /О интерпретации $1/f$ шума/ *Commun. Math. Phys.* 89 [1983]: 1–12; R. Durret, «Multidimensional random walks in random environments with subclassical limiting behavior» /Многомерные случайные блуждания в случайных средах с подклассическим предельным поведением/ *Commun. Math. Phys.* 104 [1986]: 87–102. Таким образом, случайное блуждание стремится остаться на вершинах маленьких гор. Этого можно избежать, увеличивая скорость мутаций, но такое увеличение жестко ограничено необходимостью сохранения важных генетических сообщений. На самом деле, по мере перехода от простых организмов с короткими генетическими сообщениями к сложным организмам с длинными генетическими сообщениями, обнаруживаются все более и более точные механизмы репликации, которые сводят мутации ко все более низким

уровням. Закономерность этого можно понять с информационно-теоретической точки зрения. (См. M. Eigen and P. Schuster, *The Hypercycle: A Principle of Natural Self-Organization* /Гиперцикл: принцип самоорганизации природы/ [Berlin: Springer, 1979]). В общем, мы видим, почему эволюция, помимо обычных точечных мутаций, прибегает ко множеству других хитростей (увеличение или уменьшение генетического материала, разделение полов и симбиоз имеют огромное значение для эволюции).

3. Разделение полов не универсально среди живых организмов, но распространено очень широко. Некоторые бактерии имеют генетические рекомбинации, а потому и пол. Однако это не означает, что всегда присутствуют два разных рода (это менее необходимая инновация, но при этом она важна для нас).

4. Обычно считается, что разделение полов способствует эволюции, однако есть и такие, кто с этим не согласен. См. L. Margulis and D. Sagan, *Origins of Sex* /Происхождение пола/ (New Haven: Yale University Press, 1986).

5. R. Dawkins, *The Selfish Gene* /Эгоистичный ген/ (Oxford: Oxford University Press, 1976).

6. Земля сформировалась $4,5E9$ лет назад, а камни, которым $3,5E9$ лет, имеют следы жизни. Судя по геологическим стандартам, жизнь зародилась, как только это позволили условия окружающей среды. По ходу дела заметим, что функция E(сообщения) в то время весьма отличалась от той, какой она стала теперь.

Глава 25. Интеллект

1. D. Marr, *Vision* /Ви́дение/ (New York: Freeman, 1982).

2. Фрейда особенно интересуют процессы, происходящие *в разуме*.

3. Конечно же, видеть наш мир как трехмерный и содержащий объекты, ограниченные поверхностями, — это идеализация. Ученые используют также и многие другие идеализации, но именно эта получила поддержку эволюции и крепко-накрепко зацепилась в нашем мозге. Эта идеализация сослужила нам хорошую службу как для выживания, так и для развития геометрии и других наук.

4. E. Wigner, «The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences», *Commun. Pure Appl. Math.* 13 (1960): 1–14. Имеется русский перевод этой статьи: Э. Вигнер «Непостижимая эффективность математики в естественных науках».

Глава 26. Эпилог: наука

1. Здесь сто́ит упомянуть любопытное и интересное эссе: R. Penrose, *The Emperor's New Mind* (New York: Oxford University Press, 1989). (Перевод книги «Новый разум императора» на русский язык готовится в издательстве РХД.) Это блестящее изложение современных научных идей. В то же время, это изысканное обращение, в котором автор предлагает изменить законы физики, чтобы приспособить их к сознанию, и интроспективная точка зрения на то, что наш разум действует не как компьютер. Ясно, что законы физики нужно изменить, чтобы приспособить их к квантовой гравитации, но я очень сомневаюсь, что это произойдет согласно идеям Пенроуза. Работая с сознанием и интроспективными определенностями, нельзя забывать, как умен и силен наш разум, когда дело касается самообмана. Это один из тех уроков психоанализа, которые невозможно легко забыть.

Давид Рюэль

Случайность и хаос

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Корректор М. А. Ложкина

Подписано в печать 19.12.01. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 11,16. Уч. изд. л. 11,27.
Гарнитура Балтика. Бумага офсетная №1.
Тираж 2500 экз. Заказ №

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.
http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ГИПП «Вятка».
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.