



ROBERT D. RICHTMYER

PRINCIPLES OF ADVANCED MATHEMATICAL PHYSICS

Volume 2

Springer-Verlag
New York Heidelberg Berlin
1981

Р. РИХТМАЙЕР

ПРИНЦИПЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Группы и теория представлений
2 Многообразия. Риманова геометрия
Зарождение турбулентности

Перевод с английского

В. Е. Кондрашова, В. Ф. Курякина, В. Г. Подвального

под редакцией

И. Д. Софронова

ББК 22.162

Р56

УДК 517.43 + 519.4 + 513.013

Рихтмайер Р.

Р56 Принципы современной математической физики. 2: Пер. с англ.— М.: Мир, 1984.—381 с., ил.

Продолжение известной книги американского ученого с тем же названием (М.: Мир, 1982) содержит дальнейшее изложение математического аппарата современной теоретической физики (группы, представления групп, многообразия, риманова геометрия) и описание его применений в квантовой теории и теории относительности; последние главы посвящены зарождению турбулентности.

Для математиков-прикладников, физиков, аспирантов и студентов

Р $\frac{1702050000-321}{041(01)-84}$ 24-84, ч. 1

ББК 22.162

517.2 530.1

Редакция литературы по математическим наукам

© 1981 by Springer-Verlag New York Inc.

All Rights Reserved

Authorized translation from English language published
by Springer-Verlag Berlin — Heidelberg — New York

© Перевод на русский язык, «Мир», 1984

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Перевод первого тома этой книги на русский язык был выпущен издательством «Мир» в 1982 г. Во втором томе материал первого тома почти не используется, так что его можно рассматривать как независимое издание. В методологическом же отношении оба тома представляют собой единое целое: наиболее важным моментом автор считает разъяснение смысла вводимых им математических понятий и построений и их значения в физических теориях. Книга предназначена прежде всего для студентов физических факультетов, но удачное сочетание интуитивного подхода с научной строгостью делает ее полезной для гораздо более широкого круга читателей — прежде всего для специалистов по прикладной математике и для преподавателей вузов.

И. Д. Софронов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Первые одиннадцать глав этого тома (с 18-й по 28-ю) содержат материал, который излагается на последнем году трехгодичного курса по математической физике в Университете штата Колорадо. Основные вопросы — это теория групп, теория многообразий и дифференциальная геометрия. Мне хочется поблагодарить профессоров Весли Бриттина и Рассела Дубиша за всестороннее обсуждение этого материала и профессора Вольфа Бейглбека за советы и предложения, касающиеся общего плана книги и материала по представлениям групп.

Материал последних трех глав, тесно примыкающий к современным работам по дифференцируемым динамическим системам, был предметом обсуждения в спецкурсах по гидродинамической устойчивости и на семинарах по математической физике. Эти вопросы изложены менее тщательно по сравнению с остальными и включены по той причине, что рассматриваемые в них концепции могут в дальнейшем играть важную роль в физике.

Роберт Д. Рихтмайер

*Боулдер
Август 1981 г.*

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ГРУПП

Аксиомы группы; абелева группа; циклическая группа; подгруппа; порядок; изоморфизм; гомоморфизм; автоморфизм; перестановка; симметрическая группа; цикл; транспозиция; четность; знакопеременная группа; ядро гомоморфизма; нормальная подгруппа; простая группа; сопряженные элементы; смежные классы; теорема Лагранжа; факторгруппа; теорема о гомоморфизмах; трансляции; внутренние автоморфизмы; теорема Кэли; сопряженные подгруппы; простота группы A_5 ; композиционный ряд; теорема Жордана—Гельдера; образующие; определяющие соотношения; свободная группа; свободная абелева группа; проблема тождества; пространственные и точечные группы; прямое и полупрямое произведения; симморфные пространственные группы.

Предварительные сведения: элементарная алгебра.

Эта глава содержит обзор элементарной теории групп. Для использования в следующих главах самое главное — это теорема о гомоморфизмах и связанные с ней понятия.

18.1. АКСИОМЫ ГРУППЫ. ПРИМЕРЫ

Группой G называется любое множество элементов $\{a, b, c, \dots, x, y, z, \dots\}$, конечное или бесконечное, если на нем определена операция, обозначаемая через \circ и такая, что:

- 1) если a и b — два любых элемента из G , то $a \circ b$ является также элементом G ;
- 2) если a, b и c — три любых элемента из G , то $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (закон ассоциативности);
- 3) если a и b — два любых элемента из G , то в G существуют единственный элемент x и единственный элемент y , такие, что $a \circ x = b$ и $y \circ a = b$.

Если элементами являются числа, матрицы, кватернионы и т. п., то результатом операции $a \circ b$ может быть сумма или произведение a и b ; в приведенных ниже примерах мы будем точно указывать смысл этой операции. В случае отображений, преобразований, вращений, перестановок и т. п. под групповой операцией понимают обычный закон композиции: если a и b — преобразования, то $a \circ b$ представляет собой преобразование, заключающееся в том, что сначала осуществляется b , а затем a .

Замечание. В некоторых книгах аксиома 3 заменяется эквивалентной аксиомой: G содержит единственный единичный элемент e

и для каждого элемента a из G существует единственный обратный элемент a^{-1} (см. следующий параграф).

В качестве первого примера группы G рассмотрим множество всех вращений в плоскости: пусть R_φ обозначает преобразование, при котором точки x, y перемещаются в (можно сказать, отображаются на) точки x', y' , где

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi.\end{aligned}\tag{18.1.1}$$

Если осуществляются последовательно преобразования R_{φ_1} и R_{φ_2} , то результатом будет вращение на угол $\varphi_1 + \varphi_2$, т. е. преобразование $R_{\varphi_1 + \varphi_2}$. Легко проверить, что множество $\{R_\varphi: 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ всех таких вращений удовлетворяет аксиомам группы.

Чтобы описать любое вращение в трехмерном пространстве, можно сначала выбрать некоторое направление, проходящее через начало координат, а затем осуществить вращение на некоторый угол вокруг этого направления как неподвижной оси. Из теоремы Эйлера, которая будет доказана в § 19.2, следует, что результатом двух таких преобразований, выполненных последовательно, будет снова такое же преобразование, т. е. вращение вокруг *некоторой* оси на *некоторый* угол. [Это кажется очевидным (поскольку каждый знает, что это верно), пока не делаются попытки доказать это утверждение.] Вследствие этого множество всех вращений в трехмерном пространстве образует группу. Группа всех вращений в n -мерном пространстве обозначается через $SO(n)$ по причинам, которые будут объяснены ниже.

В качестве третьего примера возьмем множество всех вращений в трехмерном пространстве, при которых некоторый куб с центром в начале координат остается инвариантным (т. е. отображается на куб, совпадающий с первоначальным). Такими вращениями будут: повороты на $90, 180$ и 270° вокруг оси, проходящей через центры противоположных граней, поворот на 180° вокруг оси, проходящей через середины противоположных ребер, повороты на 120 или 240° вокруг оси, проходящей через противоположные вершины. Легко проверить, что эти преобразования (включая тождественное) образуют группу из 24 элементов. В общем случае множество всех преобразований определенного вида (например, вращений, общих линейных преобразований, движений, конформных отображений), при которых данная фигура остается инвариантной, представляет собой группу, ибо ясно, что фигура инвариантна относительно произведения таких отображений и относительно обратных к ним. Движения, при которых инвариантна кристаллическая решетка, образуют *пространственную группу кристалла*; см. § 18.13.

Множество всех перестановок n объектов образует группу; такие группы рассматриваются в § 18.4.

Некоторые множества вещественных или комплексных чисел или кватернионов являются группами относительно сложения или умножения, например множество всех целых чисел (положительных, отрицательных и нуля) относительно сложения, множество всех положительных вещественных чисел относительно умножения, целые числа $0, 1, \dots, m-1$ относительно сложения по модулю m , наконец, множество всех ненулевых (вещественных) кватернионов относительно умножения.

Когда групповой операцией является сложение, $a \circ b$ обозначают через $a+b$, элемент, обратный элементу a , — через $-a$, а единицу — через 0 . Часто кружок опускается и композиция двух элементов a и b записывается просто как произведение ab .

Конечную группу можно полностью описать при помощи ее таблицы умножения. Например, группа Клейна из четырех элементов, V_4 , определяется таблицей

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

в которой имеется в виду, что $a \circ b = c$ и т. д. Каждый элемент группы появляется один раз в любой строке и один раз в любом столбце; более того, все строки (и все столбцы) различны. Любое квадратное размещение букв, обладающее таким свойством, называется латинским квадратом (Эйлер). Любой латинский квадрат определяет абстрактную группу при условии, что определенная таким образом мультипликативная структура имеет единицу и удовлетворяет закону ассоциативности.

Теория абстрактных групп имеет дело с отношениями, показанными в таблице умножения, и совершенно игнорирует внутреннюю природу элементов a, b и т. д. В отличие от математического анализа, теории функций вещественной и комплексной переменных, дифференциальных уравнений и других аналитических дисциплин (теория групп относится к алгебре) здесь почти никогда не встречаются численные значения, исключая использование целых чисел для нумерации и счета. Теория групп играет определенную роль в квантовой механике, в теории спектров, в анализе классических динамических систем, в теории автоморфных функций, в теории алгебраических уравнений и т. д.

18.2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ. ДАЛЬНЕЙШИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Следующие законы являются следствиями из аксиом 1—3 предыдущего параграфа.

Закон сокращения: Если a, b, c —любые элементы группы G , то из $a \circ b = a \circ c$ следует $b = c$ и из $b \circ a = c \circ a$ следует $b = c$.

Существование единицы: В G содержится единственный элемент e , такой, что $a \circ e = e \circ a = a$ для любого a из G .

Существование обратного элемента: Если a —произвольный элемент G , то существует единственный элемент a^{-1} , такой, что $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$; кроме того, $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.

Расширенный закон ассоциативности: $(a \circ (b \circ (c \circ d))) \circ e = a \circ b \circ c \circ d \circ e$ и т. п. В дальнейшем необязательные скобки будут опускаться. Кроме того,

$$(a \circ b \circ \dots \circ x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1} \circ \dots \circ b^{-1} \circ a^{-1}.$$

Если a принадлежит G и m —любое целое число, то степень a^m определяется следующим образом:

$$a^0 = e, \quad a^1 = a, \quad a^2 = a \circ a, \quad \dots, \quad a^{n+1} = a^n \circ a, \quad a^{-m} = (a^{-1})^m.$$

Очевидно, что эти степени перестановочны (коммутируют) и $a^n \circ a^m = a^{n+m}$. Вообще, если $a \circ b = b \circ a$, то говорят, что элементы a и b из G коммутируют. Если любые пары элементов из G коммутируют, то G называется коммутативной или абелевой группой. Если все элементы a^n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) являются различными элементами группы, то a называется элементом бесконечного порядка; в противном случае, как легко видеть, существует порядок элемента a —наименьшее положительное целое число l , такое, что $a^l = e$; при этом $a^m = e$ тогда и только тогда, когда l является делителем m , и любая степень элемента a равна одному из элементов $\{e, a, a^2, \dots, a^{l-1}\}$.

Подгруппой группы G называется подмножество G' элементов группы G , если оно само является группой относительно операции, определенной в группе G . Вращения вокруг оси z составляют подгруппу группы вращений в трехмерном пространстве. Различные степени элемента a составляют подгруппу, называемую подгруппой, порожденной элементом a ; такая подгруппа является циклической группой конечного или бесконечного порядка. Порядок группы есть число элементов в ней (конечное или бесконечное). Если G' является подгруппой G , мы пишем $G' < G$. В любом случае $G < G$ и $\{e\} < G$. Если $G' \neq G$, то G' —собственная подгруппа; если $G' = \{e\}$, то G' —тривиальная подгруппа.

Вопросы и упражнения

1. Что является обратным элементом для R_φ в $SO(2)$? Что является единичным элементом?
2. Покажите, что $SO(2)$ — коммутативная группа, а $SO(3)$ не является таковой.
3. Покажите, что группа вращений, которая оставляет куб инвариантным, имеет порядок 24, как было указано в § 18.1.
4. Опишите группу вращений, оставляющую инвариантным прямой круговой цилиндр; сделайте то же самое для икосаэдра.
5. Выведите из аксиом группы три закона, приведенные в начале данного параграфа.
6. Определите, какие из перечисленных множеств являются группами.
 - (а) Множество всех ненулевых комплексных чисел, если групповой операцией является умножение.
 - (б) Множество всех невырожденных матриц размера $n \times n$ при умножении.
 - (в) Множество всех положительных рациональных чисел при умножении.
 - (г) Множество всех положительных иррациональных чисел при умножении.
 - (д) Множество всех положительных алгебраических чисел при умножении.
 - (е) Множество всех матриц размера $n \times n$ при сложении.
 - (ж) Множество всех матриц размера $n \times n$ и вида e^A при умножении.
 - (з) Множество целых чисел $1, 2, \dots, p-1$ при умножении по модулю p (p простое).
 - (и) Множество целых чисел $1, 2, \dots, m-1$ при умножении по модулю m (m составное).
 - (к) Множество всех векторов в E^3 при векторном сложении.
 - (л) Множество всех ненулевых векторов в E^3 при векторном умножении.
 - (м) Множество всех комплексных чисел z , таких, что $|z|=1$, при умножении.
 - (н) Множество всех унитарных матриц размера $n \times n$ при сложении.
 - (о) Множество всех унитарных матриц размера $n \times n$ при умножении.
 - (п) Множество всех преобразований Мёбиуса

$$z \rightarrow z' = (az + b)/(cz + d) \quad (ad - bc \neq 0)$$

в комплексной плоскости,

18.3. ИЗОМОРФИЗМ

Если существует взаимно однозначное отображение φ группы G на группу G' , такое, что

$$\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \circ \varphi(b) \quad (18.3.1)$$

для всех a и b из G , то φ представляет собой *изоморфизм*, а группы являются *изоморфными*; символически $G \cong G'$. [В (18.3.1) первый кружок обозначает групповую операцию в G , а второй — в G' .] Говорят, что произведения отображаются на произведения. В этом случае G и G' можно рассматривать лишь как две различные реализации одной и той же абстрактной группы.

Например, если G — множество чисел $\{1, i, -1, -i\}$ с умножением в качестве групповой операции, а G' — множество матриц $\{I, A, B, C\}$ с матричным умножением в качестве групповой операции, причем

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то отображение

$$\varphi: 1 \rightarrow I, \quad i \rightarrow A, \quad -1 \rightarrow B, \quad -i \rightarrow C$$

является изоморфизмом G на G' ; нетрудно проверить справедливость (18.3.1) для каждой из 16 возможных пар (a, b) элементов из G . Например, $(-i) = (-1)(i)$; следовательно, должно быть $\varphi(-i) = \varphi(-1)\varphi(i)$, т. е. $C = BA$, как и в действительности. Следует заметить, что отображение

$$\varphi_1: 1 \rightarrow I, \quad i \rightarrow C, \quad -1 \rightarrow B, \quad -i \rightarrow A$$

является другим изоморфизмом G на G' .

Если G — группа всех комплексных чисел z , таких, что $|z|=1$, с умножением в качестве групповой операции, то отображение

$$\varphi: e^{i\theta} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

является изоморфизмом G на двумерную группу вращений $SO(2)$.

Изоморфизм группы на себя называется *автоморфизмом*. В качестве примера возьмем отображение описанной выше группы $\{I, A, B, C\}$:

$$I \rightarrow I, \quad A \rightarrow C, \quad B \rightarrow B, \quad C \rightarrow A.$$

Автоморфизмом группы $SO(2)$ является отображение

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Любое отображение φ (не обязательно взаимно однозначное или на всю группу) группы G в группу G' , такое, что справедливо (18.3.1), называется *гомоморфизмом*. Если G есть группа $GL(n, C)$ всех невырожденных комплексных матриц размера $n \times n$ с умножением в качестве групповой операции, то отображение $A \rightarrow \det A$ является гомоморфизмом группы G на группу всех ненулевых комплексных чисел относительно умножения. Для второго примера возьмем в качестве G группу M_2 всех движений в плоскости, т. е. группу всех преобразований вида

$$T_{\theta, a, b}: \begin{cases} x \rightarrow x' = x \cos \theta - y \sin \theta + a, \\ y \rightarrow y' = x \sin \theta + y \cos \theta + b, \end{cases} \quad (18.3.2)$$

где $0 \leq \theta < 2\pi$, а a и b — произвольные вещественные числа. Тогда отображение

$$T_{\theta, a, b} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (18.3.3)$$

является гомоморфизмом G на $SO(2)$, что можно увидеть, осуществляя последовательно два преобразования вида (18.3.2). Поскольку $SO(2)$ представляет собой подгруппу группы G (при $a=b=0$), отображение (18.3.3) можно рассматривать как гомоморфизм группы G в себя.

18.4. ГРУППЫ ПЕРЕСТАНОВОК ¹⁾

Перестановкой называется взаимно однозначное отображение множества S (обычно конечного) объектов или символов на себя. Например, если S состоит из первых семи цифр, $S = \{1, 2, \dots, 7\}$, то частной перестановкой является отображение $\pi: j \rightarrow \pi(j)$, где функция $\pi(j)$ задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \pi(1) = 7, \quad \pi(2) = 3, \quad \pi(3) = 1, \quad \pi(4) = 4, \\ \pi(5) = 6, \quad \pi(6) = 5, \quad \pi(7) = 2. \end{aligned}$$

Эту перестановку можно записать короче:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad (18.4.1)$$

здесь имеется в виду, что каждый символ верхней строки отображается в символ, стоящий под ним. *Циклической* перестановкой или *циклом* называется перестановка, которая может быть полу-

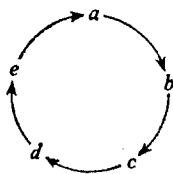


Рис. 18.1. Циклическая перестановка.

чена путем размещения символов на окружности и отображения каждого символа на следующий при перемещении по окружности (скажем, по часовой стрелке), как показано на рис. 18.1; этот цикл записывается еще короче, а именно как $(a b c d e)$, что является, разумеется, тем же самым, что и $(b c d e a)$ и т. д. Любая перестановка множества S может быть выражена через циклические

¹⁾ Иногда перестановки называют подстановками. — *Прим. перев.*

перестановки различных подмножеств множества S ; например, перестановку π , заданную при помощи (18.4.1), можно записать в виде

$$\pi = (1723) (4) (56). \quad (18.4.2)$$

Длиной цикла является число символов в нем. Циклы длины 1 [например, (4)] обычно опускаются, поскольку они представляют собой тождественное отображение, в котором ничего не переставляется. Цикл длины 2 является *транспозицией*, при которой меняются местами два символа, а остальные остаются на месте.

Любая перестановка может быть разложена в произведение последовательных транспозиций. Например, если

$$\pi_1 = (17), \quad \pi_2 = (72), \quad \pi_3 = (23), \quad \pi_4 = (56),$$

то перестановку (18.4.2) можно записать в виде

$$\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3 \circ \pi_4 = (17) (72) (23) (56), \quad (18.4.3)$$

причем здесь подразумевается, что транспозиции следует выполнять справа налево. Разложение данной перестановки в произведение транспозиций не является однозначным, но сейчас мы докажем, что для данной перестановки число транспозиций или всегда четно, или всегда нечетно.

В самом деле, пусть $f(\dots)$ — функция n вещественных или комплексных переменных, определенная следующим образом:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_k - x_j), \quad (18.4.4)$$

и пусть $\pi: j \rightarrow \pi(j)$ — перестановка целых чисел $1, 2, \dots, n$; обозначим

$$f_\pi(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_{\pi(k)} - x_{\pi(j)}). \quad (18.4.5)$$

Если $x_k - x_j$ — любой из множителей в (18.4.4), то или $x_k - x_j$, или $x_j - x_k$ появится в точности один раз в качестве одного из множителей в (18.4.5), так что или $f_\pi = f$, или $f_\pi = -f$; соответственно этим случаям π называется *четной* или *нечетной* перестановкой. Это свойство называется *четностью* перестановки π . Если две перестановки имеют одинаковую четность (т. е. они обе четны или обе нечетны), то их произведение четно; если они имеют различные четности, то их произведение нечетно. Ясно, что транспозиция (12) нечетна, ибо тогда все множители в (18.4.5) имеют тот же знак, что и в (18.4.4), кроме множителя $x_2 - x_1$. Далее, видно, что транспозиция (1l) = (2l) (12) (2l) обязательно нечетна и, наконец, что общая транспозиция (jk) = (1j) (1k) (1j) всегда нечетна. Следовательно, в любом разложении четной (нечетной) перестановки в произведение транспозиций число множителей всегда четно (всегда нечетно).

Существует столько же нечетных, сколько четных перестановок данного множества S , так как если π_1 — любая фиксированная нечетная перестановка, то отображение $\pi_1 \pi \rightarrow \pi$ четных перестановок на нечетные является взаимно однозначным.

Ясно, что множество всех перестановок n символов (включая, конечно, тождественную перестановку, в которой каждый символ отображается на себя) представляет собой группу порядка $n!$ относительно обычного закона композиции отображений (справа налево); эта группа называется *симметрической группой* n символов и обозначается через \mathcal{S}_n . Подгруппа всех $n!/2$ четных перестановок называется *знакопеременной группой* n символов и обозначается через \mathcal{A}_n .

18.5. ГОМОМОРФИЗМЫ. НОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ

Напомним, что гомоморфизмом является отображение $\varphi: G \rightarrow G'$ группы G в группу G' , такое, что $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ для всех a и b из G . (Если φ к тому же взаимно однозначное отображение на всю группу G' , то мы имеем изоморфизм.) Определим некоторые подмножества групп G и G' (мы увидим, что на самом деле эти подмножества представляют собой подгруппы):

$$\begin{aligned} G_0 &= \{x: \varphi(x) = e'\} \text{ (единица группы } G') \} = \\ &= \text{ядро отображения} = \ker(\varphi); \\ G'_1 &= \{\varphi(x): x \in G\} = \\ &= \text{образ } G \text{ при } \varphi = \varphi(G) \end{aligned}$$

(см. рис. 18.2). Наибольший интерес представляет случай, когда образ $G'_1 = \varphi(G)$ является более простой группой, чем G (в таком

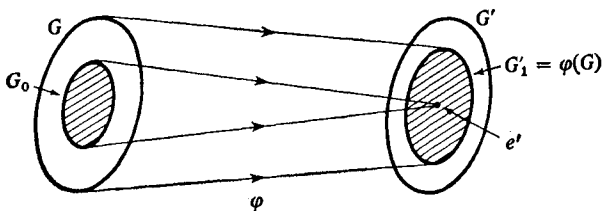


Рис. 18.2. Гомоморфизм группы G в группу G' .

случае φ не может быть взаимно однозначным), однако все же $\varphi(G)$ не сводится к тривиальной группе $\{e'\}$. Тогда можно считать, что этот образ обладает основными свойствами группы G , но без некоторых тонкостей. В этом смысле $\varphi(G)$ аппроксимирует G настолько точно, что образ произведения двух элементов из G всегда является произведением их образов.

Теорема. Подмножества G_0 и G'_1 являются подгруппами групп G и G' соответственно; кроме того, $uxy^{-1} \in G_0$ для любого x из G_0 и любого y из G .

Мы проведем детальное доказательство этой теоремы для того, чтобы продемонстрировать образец подобных доказательств. Доказательство большинства других теорем этой главы предоставляется читателю.

(1) **Доказательство** (того, что $G_0 < G$). Нужно доказать, что в G_0 выполняются аксиомы группы. Во-первых, допустим, что x и y принадлежат G_0 , т. е. $\varphi(x) = e'$ и $\varphi(y) = e'$. Нужно показать, что $xy \in G_0$. Так как $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ (в силу того, что отображение φ является гомоморфизмом), то $\varphi(xy) = e'e' = e'$ (в силу свойства единицы в любой группе). А поскольку G_0 определялось как множество *всех* элементов группы G , которые отображаются в элемент e' , то xy принадлежит G_0 . Во-вторых, закон ассоциативности выполняется в G_0 автоматически, так как он выполняется во всей группе G [если x, y и z принадлежат группе G_0 , то $(xy)z = x(yz)$, поскольку x, y, z принадлежат также группе G]. Третью аксиому рассмотрим в альтернативной форме, приведенной в замечании в § 18.1. *Существование единицы:* G_0 содержит единицу e , ибо если a — произвольный элемент G , то $\varphi(a)\varphi(e) = \varphi(ae) = \varphi(a)$; следовательно, $\varphi(e) = e'$. *Существование обратного элемента:* допустим, что a принадлежит G_0 (значит, $\varphi(a) = e'$); тогда $e' = \varphi(e) = \varphi(aa^{-1}) = \varphi(a)\varphi(a^{-1}) = e'\varphi(a^{-1}) = \varphi(a^{-1})$, т. е. a^{-1} принадлежит G_0 .

(2) **Доказательство** (того, что $G'_1 < G'$). Совершенно аналогично доказывается выполнение аксиом группы в G'_1 . Во-первых, если x' и y' принадлежат G'_1 , то $x' = \varphi(x)$ и $y' = \varphi(y)$ для некоторых x и y из G , но $x'y' = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$ и так как G'_1 было определено как множество всех таких элементов группы G' , которые равны $\varphi(z)$ для некоторого $z \in G$, то $x'y'$ принадлежит G'_1 . Во-вторых, умножение ассоциативно в G'_1 в силу того, что это свойство имеет место во всей группе G' . В-третьих, ранее было показано, что $\varphi(e) = e'$; следовательно, $e' \in G'_1$. Наконец, если $x' \in G'_1$, то $x' = \varphi(x)$ для некоторого $x \in G$. Но $x'\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(e) = e'$, откуда следует, что $\varphi(x^{-1})$ является обратным элементом $(x')^{-1}$ для элемента x' ; следовательно, $(x')^{-1} \in G'_1$.

(3) **Доказательство** (того, что uxy^{-1} принадлежит G_0 , если $x \in G_0$, а y — произвольный элемент G).

$$\varphi(uxy^{-1}) = \varphi(y)\varphi(x)\varphi(y^{-1}) = \varphi(y)e'\varphi(y^{-1}) = \varphi(y)\varphi(y^{-1}) = \varphi(y)\varphi(y)^{-1} = e';$$

следовательно, $uxy^{-1} \in G_0$.

Замечание. Все эти заключения справедливы даже в том случае, когда G' не является группой, а представляет собой лишь множество, на котором определено произведение $x'y'$. В частности, тогда следует, что подмножество G'_1 обязательно является группой, даже если G' может не быть таковой. Все рассуждения остаются в силе, за исключением второго этапа части (2) приведенного доказательства. Для доказательства закона ассоциативности в G'_1 возьмем в G'_1 элементы x', y', z' , т. е. элементы вида $\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)$. Тогда $(x'y')z' = (\varphi(x)\varphi(y))\varphi(z) = \varphi(xy)\varphi(z) =$

$= \varphi((xy)z) = \varphi(x(yz))$ (последнее равенство благодаря ассоциативности умножения в G) $= \varphi(x)\varphi(yz) = \varphi(x)(\varphi(y)\varphi(z)) = x'(y'z')$.

Любая подгруппа G_0 группы G , такая, что $uxy^{-1} \in G_0$ для любого $x \in G_0$ и для любого $y \in G$, называется *нормальной подгруппой* (или *нормальным делителем*) или *инвариантной* или *самосопряженной* подгруппой группы G ; символически $G_0 \triangleleft G$. Ясно, что гомоморфизм интересующего нас вида может существовать только в том случае, когда G содержит нетривиальную (отличную от $\{e\}$) собственную (т. е. не совпадающую со всей группой G) нормальную подгруппу G_0 . Если G не содержит такой подгруппы, то группа G называется *простой*, поскольку она не может быть гомоморфно отображена на какую-либо еще более простую нетривиальную группу. В § 18.8 будет доказано обратное утверждение: если G содержит нормальную подгруппу, то можно построить гомоморфизм, для которого G_0 является ядром, и при помощи этого построения получают все (в смысле изоморфизма) гомоморфные образы группы G .

Для любого элемента x элементы вида uxy^{-1} ($y \in G$) называются *сопряженными* с элементом x . Подгруппа является нормальной тогда и только тогда, когда она содержит все сопряженные со всеми ее элементами. В абелевой группе $uxy^{-1} = x$, и поэтому любая подгруппа является нормальной.

18.6. СМЕЖНЫЕ КЛАССЫ

Пусть G_0 — подгруппа группы G , а y — произвольный фиксированный элемент из G . Подмножества

$$S_y^{(l)} = \{y \circ x : x \in G_0\}, \quad S_y^{(r)} = \{x \circ y : x \in G_0\}$$

называются соответственно *левым* и *правым смежными классами* в группе G по подгруппе G_0 . Элемент y называется *представителем* смежного класса $S_y^{(l)}$ (или класса $S_y^{(r)}$). Любой элемент смежного класса можно рассматривать в качестве его представителя. Сама подгруппа G_0 является как левым, так и правым смежным классом; в качестве представителя этого класса можно взять единственный элемент e данной группы. Соответствие $x \rightarrow y \circ x$ для данного y и всех $x \in G_0$ есть взаимно однозначное отображение G_0 на $S_y^{(l)}$ (аналогично для правых смежных классов); следовательно, каждый смежный класс содержит то же число (конечное или бесконечное) элементов, что и подгруппа G_0 . Кроме того, легко доказывается, что любые два левых смежных класса по подгруппе G_0 (любые два правых) или совпадают, или же не имеют ни одного общего элемента, так что число элементов в G (если оно конечно) равно числу элементов G_0 , умноженному на число смежных классов (скажем, левых), включающих и саму под-

группу G_0 . Теорема Лагранжа для конечных групп гласит: порядок подгруппы является делителем порядка самой группы. Из этого следует, например, что если количество элементов в группе G представляет собой простое число, то G не имеет никаких подгрупп кроме $\{e\}$ и самой G . Смежные классы $S_y^{(l)}$ и $S_y^{(r)}$ обозначаются также через yG_0 и G_0y . Отметим, что эти смежные классы, исключая саму группу G , не являются подгруппами.

18.7. ФАКТОРГРУППЫ

Теорема 1. Подгруппа G_0 группы G является нормальной тогда и только тогда, когда каждый левый смежный класс в группе G по подгруппе G_0 совпадает с соответствующим правым; тогда смежный класс, содержащий y , можно обозначить через S_y . (Доказательство элементарно и предлагается в качестве упражнения.)

Определение. Если S_1 и S_2 — любые два подмножества (причем не обязательно подгруппы или смежные классы) элементов группы, то их *произведение* определяется как подмножество

$$S_1 S_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{z_1 \circ z_2; z_1 \in S_1, z_2 \in S_2\}; \quad (18.7.1)$$

отметим, что в общем случае $S_1 S_2 \neq S_2 S_1$.

Если S_1 и S_2 — смежные классы (левые или правые), то их произведение в общем случае не является смежным классом (обычно это множество больше, чем любой смежный класс). Исключение составляет случай, когда $G_0 \triangleleft G$.

Теорема 2. Если G_0 — нормальная подгруппа группы G ($G_0 \triangleleft G$), то $S_{y_1} S_{y_2} = S_{y_1 y_2}$ для всех y_1 и y_2 в G . Обратно, если G_0 — подгруппа причем такая, что произведение любых двух (скажем, левых) смежных классов всегда представляет собой (левый) смежный класс, то $G_0 \triangleleft G$ (в этом случае различие между левым и правым смежными классами исчезает). При этих условиях множество смежных классов $\{S_y; y \in G\}$ образует группу по отношению к операции умножения, определенной в (18.7.1). Эта группа называется факторгруппой группы G по нормальной подгруппе G_0 и обозначается через G/G_0 . Далее, отображение $\varphi_n: G \rightarrow G/G_0$, определяемое как $\varphi_n(y) = S_y$ (каждый элемент группы G отображается на смежный класс, в котором он находится), представляет собой гомоморфизм, называемый естественным гомоморфизмом группы G на G/G_0 .

Согласно этой теореме, доказательство которой также представляется читателю, всегда можно построить гомоморфный образ

и гомоморфизм, соответствующий любой нормальной подгруппе G_0 . Из теоремы следующего параграфа вытекает, что такие гомоморфизмы, в сущности, являются единственными гомоморфизмами данной группы G .

18.8. ТЕОРЕМА О ГОМОМОРФИЗМАХ

Теорема. Пусть $\psi: G \rightarrow G'$ — произвольный гомоморфизм, и пусть G_0 — его ядро, а $\psi(G)$ — образ группы G в G' при отображении ψ . Обозначим через S_y смежный класс в G по подгруппе G_0 , в котором содержится элемент y . Тогда $\psi(G)$ и факторгруппа G/G_0 изоморфны. Точнее, отображение $\Psi: G/G_0 \rightarrow \psi(G)$, задаваемое формулой

$$\Psi(S_y) = \psi(y), \quad (18.8.1)$$

во-первых, вполне определено (в смысле независимости от частного выбора представителя y смежного класса S_y), а во-вторых, является изоморфизмом. Схематически это можно изобразить так:

$$\begin{array}{ccc} \psi(G) & \leftarrow G & \rightarrow G/G_0 \\ & \begin{array}{c} \psi \quad \varphi_n \\ \text{(hom)} \quad \text{(hom)} \end{array} & \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{\Psi(\text{iso})} & \end{array}$$

Читателю настоятельно рекомендуется провести подробное доказательство теоремы; подчеркнем лишь, что, собственно, должно быть доказано. Чтобы доказать, что Ψ вполне определено, нужно показать, что из $S_{y_1} = S_{y_2}$ следует $\psi(y_1) = \psi(y_2)$. Для доказательства взаимной однозначности отображения Ψ мы должны показать, что из $\psi(y_1) = \psi(y_2)$ следует $S_{y_1} = S_{y_2}$. Далее следует показать, что Ψ обладает свойством гомоморфизма, т. е.

$$\Psi(S_{y_1} S_{y_2}) = \Psi(S_{y_1}) \Psi(S_{y_2}).$$

Наконец, совершенно очевидно, что Ψ является отображением факторгруппы на весь образ $\psi(G)$, ибо любой элемент из $\psi(G)$ есть $\psi(y)$ для некоторого y из G .

18.9. СТРУКТУРА ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП

Как было указано в § 18.6, группа, порядок которой есть простое число p , не имеет никаких нетривиальных собственных подгрупп, следовательно, она является обязательно циклической (а потому абелевой) и может быть порождена любым из своих элементов (исключая единицу), поскольку, по теореме Лагранжа, порядок любого элемента (т. е. порядок подгруппы, порожденной этим элементом) должен быть или 1, или p . (Единственным эле-

ментом порядка 1 в группе является единица e , ибо из $a^l = e$, где $l=1$, следует, что $a=e$.) Если $G = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ — циклическая группа порядка n , а m — делитель n , то элементы e, a^m, a^{2m}, \dots составляют циклическую подгруппу порядка n/m и такие подгруппы являются единственными подгруппами группы G . В бесконечной циклической группе любой элемент, отличный от единицы, порождает бесконечную циклическую подгруппу, причем такие подгруппы являются единственными нетривиальными подгруппами; все они различны, но изоморфны.

18.10. ТРАНСЛЯЦИИ¹⁾. ВНУТРЕННИЕ АВТОМОРФИЗМЫ

Взяв произвольный элемент a группы G , обозначим через T_a отображение группы G на себя, заданное соответствием $x \rightarrow ax$ ($x \in G$); это отображение называется *левой трансляцией* в группе G ; отображение вида $x \rightarrow xa$ для фиксированного a называется *правой трансляцией*.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Покажите, что множество \mathcal{T} всех левых трансляций в G представляет собой группу относительно обычного закона композиции отображений. Покажите, что группа \mathcal{T} изоморфна G .

Примечание 1. Любый гомоморфизм группы G (абстрактной или иной) на группу отображений называется *представлением* группы G . Изоморфизм $G \cong \mathcal{T}$ называется *регулярным представлением* группы G . Если представление является изоморфизмом (а не только гомоморфизмом), то оно называется *точным*. Регулярное представление является точным.

Примечание 2. Если G — конечная группа, то отображение T_a представляет собой перестановку элементов группы G ; следовательно, \mathcal{T} является некоторой подгруппой группы \mathcal{S}_n (см. конец § 18.4), где n — порядок группы G , т. е. *любая конечная группа изоморфна некоторой группе перестановок (теорема Кэли)*.

Обозначим через A_a отображение группы G на себя, задаваемое соответствием $x \rightarrow axa^{-1}$, где x — любой элемент группы G , а a — фиксированный элемент группы G .

УПРАЖНЕНИЕ

2(а). Покажите, что множество \mathcal{J} всех отображений A_a в G является группой относительно обычного закона композиции отображений. (б). Найдите \mathcal{J} , если $G = A_3$. (в). Найдите \mathcal{J} , если $G = A_4$.

Примечание 3. В любом случае \mathcal{J} представляет собой некоторую подгруппу группы $\mathcal{S}_{6/2} = \mathcal{S}_3$ для упражнения 2 (б) и некоторую подгруппу группы \mathcal{S}_{12} для упражнения 2 (в).

¹⁾ Можно было бы использовать термин «сдвиги», но в физических приложениях чаще встречается термин «трансляции». — *Прим. перев.*

Примечание 4. Выражение «найдите \mathcal{I} » означает, что нужно отождествить \mathcal{I} с группой, изоморфной некоторой известной группе.

Примечание 5. Каждое из отображений A_a есть автоморфизм, называемый *внутренним автоморфизмом группы G* , ибо, во-первых, оно взаимно однозначно и является отображением на всю группу, поскольку уравнение $axa^{-1} = y$ всегда имеет единственное решение x ($x = a^{-1}ya$); во-вторых, это отображение обладает свойством гомоморфизма, т. е. произведения отображаются в произведения, поскольку $axwa^{-1} = axa^{-1}awa^{-1}$. Группа \mathcal{I} называется *группой внутренних автоморфизмов группы G* .

Внутренние изоморфизмы группы \mathcal{S}_n обладают особым свойством. Пусть элемент π принадлежит \mathcal{S}_n ; запишем π в виде произведения независимых циклов, как в (18.4.2) [два цикла являются *независимыми*, если они не содержат общих символов; (173) и (24) независимы, а (173) и (34) нет], причем более длинные циклы записываются первыми, а также включаются циклы длины 1. Тогда длины этих циклов составляют *разбиение* числа n , т. е. последовательность целых чисел, сумма которых равна n . Особое свойство, о котором мы упомянули, заключается в том, что образ элемента π при внутреннем автоморфизме группы \mathcal{S}_n ($\pi \rightarrow \sigma\pi\sigma^{-1}$, где σ — некоторый заданный элемент \mathcal{S}_n) всегда соответствует тому же разбиению числа n , что и сам π , поскольку если (a, b, \dots, f) — любой цикл, то $\sigma(a, b, \dots, f)\sigma^{-1}$ является циклом $(\sigma(a), \sigma(b), \dots, \sigma(f))$.

Если a и x принадлежат группе G , то элемент axa^{-1} называется *сопряженным с x* . Внутренний автоморфизм $A_a: x \rightarrow axa^{-1}$ (a фиксирован) отображает каждый элемент группы x на один из сопряженных с ним элементов. Если G_0 — подгруппа группы G , то множество

$$G_0 = \{axa^{-1} \mid x \in G_0\}$$

есть тоже подгруппа, часто обозначаемая через aG_0a^{-1} и называемая *сопряженной с G_0 подгруппой*. Если $aG_0a^{-1} = G_0$ для всех a из G , то $G_0 \triangleleft G$. Поэтому нормальные подгруппы иногда называют самосопряженными подгруппами. В группе \mathcal{S}_n сопряженными элементами являются элементы, имеющие одинаковую структуру записи в виде произведений независимых циклов, например (1732)(56)(4) и (4531)(76)(2).

18.11. ПОДГРУППЫ ГРУППЫ \mathcal{S}_4

Симметрическая группа \mathcal{S}_4 помимо тривиальной подгруппы $\{e\}$ и самой G имеет 22 подгруппы. Разбивая их по классам сопряженных подгрупп, мы имеем:

- 1) $\{e, (12)\}$ и т. д. — шесть подгрупп;
- 2) $\{e, (123), (132)\}$ и т. д. — четыре подгруппы;
- 3) $\{e, (1234), (13)(24), (1432)\}$ и т. д. — три подгруппы;
- 4) $\{e, (12)(34)\}$ и т. д. — три подгруппы;
- 5) $\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} = V_4$ — одна подгруппа;
- 6) $\{e, (123), (124), (134), (234), (321), (421), (431), (432), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} = \mathcal{A}_4$ — одна подгруппа;
- 7) $\{e, (12), (13), (23), (123), (321)\}$ — четыре подгруппы.

Любая подгруппа из определенного класса (определенной строки приведенной таблицы) может быть получена из любой другой подгруппы того же класса при помощи внутреннего автоморфизма всей группы \mathcal{S}_4 . Например, при отображении $\pi \rightarrow (12)\pi(12)$ элементы группы $\{e, (134), (431)\}$ переходят в элементы группы $\{e, (234), (432)\}$. Мы видим, что единственными нормальными (или инвариантными, или самосопряженными) подгруппами являются V_4 и \mathcal{A}_4 , каждая из которых единственная в своем классе. Однако каждая из подгрупп в классе 4 является нормальной подгруппой группы V_4 (откуда следует, между прочим, что из $G_1 \triangleleft G_2 \triangleleft G_3$ отнюдь не вытекает $G_1 \triangleleft G_3$). Полным так называемым композиционным рядом (см. ниже) группы \mathcal{S}_4 является ряд

$$\{e\} \triangleleft \{e, (12)(34)\} \triangleleft V_4 \triangleleft \mathcal{A}_4 \triangleleft \mathcal{S}_4. \quad (18.11.1)$$

Для $n \geq 5$ \mathcal{A}_n является простой группой (она не имеет никаких нетривиальных собственных нормальных подгрупп), так что композиционный ряд сводится к ряду

$$\{e\} \triangleleft \mathcal{A}_n \triangleleft \mathcal{S}_n.$$

УПРАЖНЕНИЕ

1. Покажите, что \mathcal{A}_5 — простая группа (схема доказательства приводится ниже). Допустите, что $G_0 \triangleleft \mathcal{A}_5$, причем $G_0 \neq \{e\}$; затем нужно доказать, что $G_0 = \mathcal{A}_5$. Покажите, что G_0 должна содержать элемент π одного из следующих типов:

$$(a) (a b c), \quad (b) (a b)(c d), \quad (v) (a b c d e).$$

Тогда группа G_0 содержит все элементы $\sigma\pi^{-1}$, где $\sigma \in \mathcal{A}_5$; покажите, что она содержит все элементы того же типа, что и π . Покажите, что если G_0 включает все элементы одного из вышеуказанных типов, то она включает элементы (а следовательно, вообще все элементы) обоих других типов; например, если группе G_0 принадлежат элементы типа (a), то ей принадлежит и элемент $(123)(234) = (21)(34)$. Почему это доказательство не проходит для \mathcal{A}_4 ? Простота \mathcal{A}_5 является ключевым моментом в доказательстве Гауа невозможности разрешить уравнение пятой степени в радикалах.

Композиционный ряд группы G представляет собой последовательность подгрупп $\{G_i\}$, такую, что

$$\{e\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_k = G, \quad (18.11.2)$$

где $G_i \neq G_{i+1}$ и где уже невозможно никакое уплотнение, т. е. если $G_i \triangleleft H \triangleleft G_{i+1}$, то или $H = G_i$, или $H = G_{i+1}$. Конечная группа всегда имеет композиционный ряд. Если G — некоторая бесконечная группа, то может случиться (см. упражнение 3 ниже), что любой ряд вышеуказанного типа имеет уплотнение. Знаменитая *теорема Жордана—Гёльдера* гласит, что если G имеет композиционный ряд (18.11.2) и если

$$\{e\} = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_l = G$$

представляет собой любой другой композиционный ряд группы G , то (1) $l=k$, (2) хотя подгруппы H_1, \dots, H_{k-1} могут отличаться от G_1, \dots, G_{k-1} , но по меньшей мере факторгруппы

$$H_1/H_0, H_2/H_1, \dots, H_k/H_{k-1} \quad (18.11.3)$$

будут теми же (с точностью до порядка), что и

$$G_1/G_0, G_2/G_1, \dots, G_k/G_{k-1}; \quad (18.11.4)$$

иначе говоря, последовательность (18.11.3) можно упорядочить таким образом, что каждая группа в ней будет изоморфна соответствующей группе в последовательности (18.11.4).

УПРАЖНЕНИЯ

2. Как применить теорему Жордана—Гёльдера к композиционному ряду (18.11.1) для группы \mathcal{S}_4 ?

3. Покажите, что бесконечная циклическая группа не имеет композиционного ряда.

4. Обозначим через \mathcal{S}_∞ множество всех конечных перестановок положительных целых чисел $\{1, 2, \dots\}$. (При каждой перестановке из \mathcal{S}_∞ все элементы, кроме конечного их числа, переходят сами в себя.) Покажите, что \mathcal{S}_∞ имеет композиционный ряд $\{e\} \triangleleft \mathcal{A}_\infty \triangleleft \mathcal{S}_\infty$.

18.12. ОБРАЗУЮЩИЕ ЭЛЕМЕНТЫ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ. СВОБОДНЫЕ ГРУППЫ

Пусть G — некоторая группа. Говорят, что подмножество $S = \{a, b, \dots\}$ элементов группы G порождает G , если любой элемент из G может быть представлен в виде (конечного) произведения элементов, каждый из которых либо сам принадлежит S , либо является обратным некоторому элементу из S . (Эквивалентно: любой элемент g из G является произведением степеней элементов из S ; степени элемента были определены в § 18.2¹⁾.) Для полного описания группы, вообще говоря, необходимо указать не только систему образующих этой группы (множество S), но и некоторые определяющие соотношения между образующими. Например, цикли-

¹⁾ Элементы множества S в таком случае называются образующими элементами (образующими), а само это множество — системой образующих группы. — *Прим. перев.*

ческую группу порядка n можно описать одним образующим элементом a и одним определяющим соотношением $a^n = e$.

Группа, для которой не требуется никаких определяющих соотношений, называется *свободной группой*; она строится следующим образом. Пусть S — (конечное или бесконечное) множество букв, $S = \{a, b, \dots\}$, называемых *образующими*. Назовем *словом* конечную упорядоченную систему символов $x_1 x_2 \dots x_k$, где x_i является либо буквой из множества S , либо символом вида α^{-1} , причем $\alpha \in S$. Два слова *равны*, если одно из них можно получить из другого включением или вычеркиванием (сокращением) пар символов вида $\alpha\alpha^{-1}$ или $\alpha^{-1}\alpha$ ($\alpha \in S$). Очевидно, желательно сократить максимально возможное количество пар; это может привести к пустому слову, т. е. слову, не содержащему никаких букв; обозначим такое слово через e , полагая при этом, что e не является буквой из S . (Например, $abc^{-1}cb^{-1}a^{-1} = e$.) Чтобы получить *произведение* двух слов, нужно просто одно слово написать непосредственно за другим словом: если $w = x_1 x_2 \dots x_k$, $u = y_1 y_2 \dots y_l$, то

$$w \circ u = x_1 \dots x_k y_1 \dots y_l, \quad u \circ w = y_1 \dots y_l x_1 \dots x_k.$$

Нетрудно проверить, что множество всех слов, состоящих из элементов заданной системы образующих S , представляет собой группу G относительно указанного произведения. Она называется *свободной группой*, порожденной множеством S . Единицей является пустое слово e , а обратным слову $x_1 x_2 \dots x_k$ будет слово $y_k y_{k-1} \dots y_1$, где $y_i = \alpha^{-1}$, если $x_i = \alpha$, и $y_i = \alpha$, если $x_i = \alpha^{-1}$.

Определяющие соотношения между элементами группы можно устанавливать (в таком случае группа уже не будет свободной) при помощи уравнений $w_1 = e$, $w_2 = e$ и т. д., где w_1, w_2, \dots — некоторые слова. Эти соотношения определяют структуру группы.

Если среди соотношений мы имеем $aba^{-1}b^{-1} = e$ (что эквивалентно $ab = ba$) для каждой пары a, b элементов из S , то эта группа является абелевой. Если кроме этих соотношений других *нет*, то G называется *свободной абелевой группой*. Свободные группы и свободные абелевы группы будут использоваться в § 23.7 при изучении видов многосвязностей, которыми может обладать многообразие. Структура свободной группы или свободной абелевой группы определяется исключительно числом образующих.

Любая конечная группа G эквивалентна (т. е. изоморфна) некоторой группе, определенной при помощи образующих элементов и определяющих соотношений: в качестве S можно взять множество всех элементов группы G , а определяющие соотношения брать так, чтобы получить всю информацию, обеспечиваемую таблицей умножения группы; например, если из таблицы следует, что $ab = c$, то одним из определяющих соотношений будет $abc^{-1} = e$.

Если группа определяется конечным числом образующих и конечной системой соотношений, она называется *конечно определенной*;

однако эта группа может быть бесконечного порядка, и такие группы создают многие сложные и трудные задачи для современного исследования. Так называемая проблема тождества, хотя и не совсем новая, дает представление об этих трудностях. Помимо определяющих соотношений $w_1=e, \dots, w_n=e$ всегда возможны другие уравнения вида $w=e$; например, w может быть равно w_1w_2 или $w_0w_1w_0^{-1}$, где w_0 — произвольное слово. *Проблема тождества*, впервые сформулированная в 1912 г., состоит в следующем: дана конечно определенная группа, найти процедуру (т. е. алгоритм), такую, что если дано произвольное слово w , выраженное через образующие группы, то процедура за конечное число шагов должна решить, является ли равенство $w=e$ истинным или ложным. В. Магнус в 1932 г. показал, как получить такой алгоритм для любой группы с одним определяющим соотношением. В 1955 г. П. С. Новиков дал (весьма длинное) доказательство алгоритмической неразрешимости проблемы тождества в общем случае. В настоящее время известны группы, которые определяются малым числом образующих и определяющих соотношений и для которых может быть доказано, что никакой алгоритм требуемого вида не существует.

18.13. КРАТНО ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И КРИСТАЛЛЫ

Идеализированный кристалл состоит из очень большого числа идентичных элементарных структур, называемых элементарными ячейками и размещенных в виде трижды периодического массива или решетки в пространстве. Если $f(x)$ описывает плотность массы или заряда или аналогичную величину на этой структуре, то $f(x)$ является трижды периодической функцией. В общем случае функция $f(x_1, \dots, x_n) = f(x)$ n вещественных переменных называется *n -кратно периодической*, если существует n линейно независимых векторов $v(1), \dots, v(n)$, т. е. векторов, таких, что

$$\det \begin{pmatrix} v_1(1) & \dots & v_1(n) \\ \vdots & & \vdots \\ v_n(1) & \dots & v_n(n) \end{pmatrix} \neq 0 \quad (18.13.1)$$

и что $f(x)$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} f(x + v(1)) &= f(x), \\ f(x + v(2)) &= f(x), \\ &\vdots \\ f(x + v(n)) &= f(x) \end{aligned} \quad (18.13.2)$$

для всех x . Векторы $v(i)$ называются *периодами функции* $f(x)$ если вектор w —любой вектор вида

$$w = m_1 v(1) + \dots + m_n v(n), \quad (18.13.3)$$

где m_i —целые числа (положительные, отрицательные или нуль), то $f(x) = f(x+w)$ для всех x ; поэтому w является тоже периодом функции $f(x)$. Кроме того, предполагается, что любой период $f(x)$ имеет вид (18.13.3) с целыми коэффициентами; тогда говорят, что векторы $v(1), \dots, v(n)$ образуют *фундаментальную систему* периодов. Некоторые функции могут не обладать фундаментальной системой периодов даже в том случае, когда они являются периодическими в строгом смысле, например постоянные функции и функции, периодические по некоторым переменным и не зависящие от других переменных. Такие функции будут называться *вырожденными* и исключаться из рассмотрения на основании следующих физических соображений: каждый атом занимает некоторый объем, и функции, подобные потенциалу и плотности заряда, изменяются от центра атома к периферии, так что в любом данном направлении в пространстве неизбежны некоторые изменения. Кратно периодическая функция называется *невырожденной*, если она имеет фундаментальную систему периодов.

Множество точек x в \mathbb{R}^n , определяемое как

$$x = m_1 v(1) + \dots + m_n v(n), \quad (18.13.4)$$

где m_i —целые числа, называется *решеткой функции* $f(x)$.

Если задать новые векторы $v'(1), \dots, v'(n)$ в виде

$$v'(j) = m_{j1} v(1) + \dots + m_{jn} v(n), \quad (18.13.5)$$

где m_{jk} —целые числа, такие, что

$$\det \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} = \pm 1, \quad (18.13.6)$$

то $v'(1), \dots, v'(n)$ также образуют фундаментальную систему периодов, поскольку, если разрешить систему уравнений (18.13.5) относительно $v(j)$, то мы увидим, что $v(j)$ являются линейными комбинациями векторов $v'(j)$ с целыми коэффициентами. Обе эти фундаментальные системы порождают одну и ту же решетку.

18.14. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ И ТОЧЕЧНЫЕ ГРУППЫ

Пусть для любого фиксированного вектора w T_w обозначает трансляцию

$$T_w: x \rightarrow x + w \quad (\text{для всех } x) \quad (18.14.1)$$

пространства \mathbb{R}^n . Тогда кратно периодическая функция $f(x)$ инвариантна относительно всех преобразований из абелевой группы

$$\mathcal{F} = \{T_w: w \text{ — период функции } f(x)\}, \quad (18.14.2)$$

которая называется *группой трансляций* для функции $f(x)$. Функция $f(x)$ может быть, конечно, инвариантной и относительно других преобразований, таких, как некоторые повороты вокруг определенных осей, отражения в некоторых плоскостях и т. п. Группа G_s всех (однородных и неоднородных) линейных преобразований пространства \mathbb{R}^n , относительно которых $f(x)$ инвариантна, называется *пространственной группой функции $f(x)$* или для $f(x)$, представляющей кристалл, — *пространственной группой кристалла*.

Элемент группы G_s есть преобразование вида

$$x \rightarrow x' = Mx + \xi, \quad (18.14.3)$$

где M — невырожденная матрица, а ξ — вектор; это преобразование обозначается через (ξ, M) . Произведение двух преобразований в группе G_s состоит в последовательном применении этих преобразований:

$$x'' = M_1 x' + \xi_1 = M_1 (M_2 x + \xi_2) + \xi_1,$$

т. е.

$$(\xi_1, M_1) \circ (\xi_2, M_2) = (M_1 \xi_2 + \xi_1, M_1 M_2). \quad (18.14.4)$$

Преобразование (18.14.3), при котором функция $f(x)$ инвариантна, называется *операцией симметрии функции $f(x)$* .

Вообще говоря, преобразования (18.14.3) включают трансляции, вращения, растяжения и сдвиги. Однако нетрудно видеть, что если $f(x)$ — непрерывная и невырожденная функция (в частности, если она представляет реальный кристалл), то растяжения и сдвиги можно исключить. Чтобы показать общий характер этого рассуждения, рассмотрим сдвиг в плоскости: квадратная решетка из точек с целочисленными координатами на плоскости x, y инвариантна относительно группы трансляций \mathcal{F} , состоящей из трансляций вида $x \rightarrow x+k, y \rightarrow y+l$ (k, l целые), а также относительно различных преобразований, включающих сдвиги типа

$$S_n: x \rightarrow x + ny, y \rightarrow y \quad (n \text{ — целое число}). \quad (18.14.5)$$

Если взять в качестве $f(x, y)$ функцию, равную 1 в точках решетки (x, y целые) и равную 0 в остальных точках, то f будет инвариантна и относительно преобразования (18.14.5). Однако *непрерывная* невырожденная дважды периодическая функция $f(x, y)$ не может быть инвариантной относительно (18.14.5). Если бы она была инвариантной, то было бы справедливо тождество

$$f(x + ny - k, y) \equiv f(x, y)$$

для всех n и k ; для иррационального y числа $ny - k$ всюду плотно на \mathbb{R} ; таким образом, по непрерывности $f(x, y)$ должна бы не зависеть от x для всех иррациональных y , а значит, и для всех y (снова по непрерывности), и, следовательно, $f(x, y)$ должна бы быть вырожденной. Поэтому сдвиги нужно исключить. Рассуждая аналогичным образом, можно заключить, что матрица M в (18.14.3) должна быть ортогональной.

Множество всех ортогональных матриц M , таких, что (ξ, M) содержится в G_s для некоторого ξ , также представляет собой группу; она называется *точечной группой функции* $f(x)$ и обозначается через G_p . Ясно, что отображение

$$\varphi: G_s \rightarrow G_p, (\xi, M) \rightarrow M \quad (18.14.6)$$

есть гомоморфизм, ядром которого является \mathcal{F} ; следовательно, по теореме о гомоморфизмах для групп оказывается, что \mathcal{F} — нормальная подгруппа группы G_s , а G_p изоморфна факторгруппе G_s/\mathcal{F} .

УПРАЖНЕНИЕ

1. Используя (18.14.4), найдите формулу для $(\xi, M)^{-1}$. Затем непосредственно проверьте, что \mathcal{F} является нормальной подгруппой группы G_s , для чего покажите, что если (ξ, I) — любая чистая трансляция (здесь I — единичная матрица), то любой групповой элемент вида $(\eta, M)(\xi, I)(\eta, M)^{-1}$ также представляет собой чистую трансляцию.

В кристаллографии можно получить обширную информацию о кристаллической структуре путем определения G_p и \mathcal{F} (причем последнюю группу при помощи решетки, которую она порождает). Однако, вообще говоря, это дает меньше информации, чем можно было бы получить, задавая пространственную группу G_s . В частности, G_s может содержать, а может и не содержать G_p в качестве подгруппы, так как G_s может включать (ξ, M) для некоторого $\xi \neq 0$, но не включать $(0, M)$.

Замечание. \mathcal{F} как абстрактная группа изоморфна свободной абелевой группе с n образующими, и, следовательно, не дает никакой информации. Однако решетка, порожденная при помощи \mathcal{F} , в случае заданной фундаментальной системы периодов несет информацию о $f(x)$. Пространственная группа, относительно которой решетка преобразуется сама в себя, содержит пространственную группу функции $f(x)$ в качестве подгруппы.

Для $n=3$ подробное описание возможных операций симметрии, а также описание пространственных и точечных групп содержатся в книге Генри и Лонсдейла [1965]. Операциями симметрии являются: чистая трансляция, чистое вращение, отражение в плоскости, отражение совместно с поворотом вокруг оси, перпендикулярной плоскости отражения, отражение совместно с трансляцией парал-

тельно плоскости отражения и вращение совместно с трансляцией параллельно оси вращения. Для любого вращения единственно возможными углами поворота будут $\pm 2\pi/n$, где $n=1, 2, 3, 4, 6$, как это показано для случая чистых вращений в упражнениях 2 и 3 (см. ниже). Всего существуют 32 точечные группы, 14 типов решеток и 230 пространственных групп.

УПРАЖНЕНИЯ

2. (Цель этого упражнения — показать, что единственно возможными чисто вращательными симметриями двумерного кристалла являются повороты вокруг осей симметрии n -го порядка, где $n=1, 2, 3, 4$ или 6.) Рассмотрим невырожденную дважды периодическую функцию $f(x, y)$ и запишем ее в виде $f(z)$, т. е. как (неаналитическую) вещественную функцию комплексной переменной $z=x+iy$. Пусть α и β — фундаментальная пара периодов; тогда $\operatorname{Re}(\alpha/\beta) \neq 0$ и $f(z+n\alpha+m\beta) \equiv f(z)$, где n и m — целые числа. Выбирая подходящую ориентацию и масштаб по осям x и y , примем для простоты $\beta=1$. Допустим, что $f(z)$ также инвариантна относительно вращения $z \rightarrow e^{i\theta}z$. Из уравнений

$$\begin{aligned} f(z) &= f(ze^{i\theta}), \\ f(z+1) &= f(ze^{i\theta} + e^{i\theta}), \\ f(z+\alpha) &= f(ze^{i\theta} + \alpha e^{i\theta}) \end{aligned}$$

закключаем, что $e^{i\theta}$ и $\alpha e^{i\theta}$ являются периодами функции $f(z)$. Исходя из этого, покажите, что α удовлетворяет уравнению

$$r\alpha^2 + (s-p)\alpha - q = 0,$$

где p, q, r, s — целые числа, такие, что

$$ps - rq = 1,$$

откуда следует, что

$$e^{i\theta} = (l \pm \sqrt{l^2 - 4})/2, \quad l = p + s.$$

Для того чтобы θ было вещественным, l должно принадлежать $[-2, 2]$. Получите отсюда заключение, что для θ возможны лишь следующие значения: $0, \pm \pi/3, \pm \pi/2, \pm 2\pi/3, \pm \pi$.

3. Обобщите заключение упражнения 2 на трехмерный случай следующим образом: допустите, что функция $f(x, y, z) = f(x)$ трижды периодична и что $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ — фундаментальная система периодов. Предположите далее, что $f(x)$ инвариантна относительно поворота на угол θ вокруг некоторой оси в пространстве. Выбирая начало координат на этой оси, запишите вращение в виде $\mathbf{x} \rightarrow R\mathbf{x}$, где R — ортогональная матрица размера 3×3 с детерминантом, равным 1. Покажите, что векторы

$$\mathbf{u}' = R\mathbf{u} - \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}' = R\mathbf{v} - \mathbf{v}, \quad \mathbf{w}' = R\mathbf{w} - \mathbf{w}$$

являются периодами функции $f(x)$, перпендикулярны оси вращения и не коллинеарны. Отсюда следует, что $f(x)$ дважды периодична в любой плоскости, перпендикулярной оси вращения, а значит, применим метод упражнения 2.

В некоторых книгах ограничение возможных осей симметрии в кристалле осями симметрии только 1-го, 2-го, 3-го, 4-го и 6-го порядков выводят из несколько таинственного «принципа рациональных индексов», который, как говорят, должен иметь эмпири-

ческое происхождение. Мы видели, однако, что это ограничение является непосредственным следствием наличия трижды периодической структуры; поэтому «принцип рациональных индексов» не нужен.

18.15. ПРЯМОЕ И ПОЛУПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП. СИММОРФНЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ГРУППЫ

Если G_0 — нормальная подгруппа группы G , то в общем случае нельзя полагать, что G является произведением групп G_0 и G/G_0 ; в самом деле, G в общем случае даже не содержит подгруппу, изоморфную G/G_0 . Далее мы рассмотрим два исключения из этого общего правила.

Рассмотрим простейший случай. Пусть H и K — подгруппы группы G , такие, что любой элемент g из G может быть единственным образом представлен в виде hk , где h содержится в H , а k — в K ; кроме того, каждый элемент h из H коммутирует с каждым элементом k из K . В таком случае говорят, что G представляет собой *прямое произведение* групп H и K ; символически $G = H \times K$ или $G = K \times H$. Единица e является единственным элементом из $H \cap K$ (если бы в $H \cap K$ существовал какой-либо другой элемент a , то существовали бы два представления в виде hk , а именно ae и ea). Далее, H и K — нормальные подгруппы группы G , ибо если $a = hk_1$ — любой элемент из G , а k_2 — любой элемент из K , то $ak_2a^{-1} = hk_1k_2k_1^{-1}h^{-1}$, но он равен $k_1k_2k_1^{-1}$, поскольку h коммутирует с любым элементом из K ; отсюда ak_2a^{-1} принадлежит K и $K \triangleleft G$; аналогично $H \triangleleft G$. Кроме того, факторгруппа G/H изоморфна подгруппе K , а G/K изоморфна подгруппе H , так как любой элемент из G/H является смежным классом $aH = \{ah: h \in H\}$ и может быть однозначно представлен как смежный класс kH (где $a = kh$, $k \in K$, $h \in H$); ясно, что отображение $k \rightarrow kH$ есть изоморфизм групп K и G/H , ибо $k_1Hk_2H = k_1k_2H$.

Другая точка зрения состоит в допущении, что H_0 и K_0 — произвольные заданные группы, и в построении группы G , называемой их *прямым произведением*, следующим образом: элементами группы G являются пары (h, k) , где $h \in H_0$ и $k \in K_0$, а операция (закон композиции) определяется так:

$$(h_1, k_1) \circ (h_2, k_2) = (h_1h_2, k_1k_2). \quad (18.15.1)$$

Единичным элементом G является пара (e, e') , где e и e' — единицы групп H_0 и K_0 соответственно; обратный элемент $(h, k)^{-1} = (h^{-1}, k^{-1})$. Пусть теперь H и K — подмножества элементов G , а именно

$$H = \{(h, e'): h \in H_0\}, \quad K = \{(e, k): k \in K_0\}.$$

Легко проверить, что G , H и K — группы, что H и K — нормальные подгруппы группы G , что $H \cong H_0$, а $K \cong K_0$ и, наконец, что $G = H \times K$.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Проверьте сформулированные в последнем абзаце утверждения.

В силу изоморфизма $H \cong H_0$ и $K \cong K_0$ группа G также называется прямым произведением H_0 и K_0 ; обычно практически H_0 и K_0 отождествляют с подгруппами H и K и вообще опускают индекс 0.

УПРАЖНЕНИЕ

2. Допустим, что единица e является единственным общим элементом двух подгрупп H и K группы G . Покажите, что h из H коммутирует с любым k из K тогда и только тогда, когда $H \triangleleft G$ и $K \triangleleft G$.

В следующем простом случае (полупрямое произведение) все еще допускают, что любой элемент g из G может быть выражен единственным образом в виде hk , где $h \in H$ и $k \in K$, но при этом предполагается, что $H \triangleleft G$, тогда как K не обязательно нормальный делитель группы G . Тогда G называется *полупрямым произведением* H и K . Любой смежный класс подгруппы H в G (т. е. любой элемент факторгруппы G/H) имеет однозначное представление $kH = Hk$, где k принадлежит K ; более того, $Hk_1Hk_2 = Hk_1k_2$, и, значит, факторгруппа G/H изоморфна K . Если g_1 и g_2 , принадлежащие G , единственным образом представляются в виде $g_1 = h_1k_1$ и $g_2 = h_2k_2$, то произведение $g_3 = g_1g_2$ единственным образом представляется в виде h_3k_3 , где

$$h_3 = h_1k_1h_2k_1^{-1}, \quad k_3 = k_1k_2.$$

(Заметим, что элемент $k_1h_2k_1^{-1}$ принадлежит H , поскольку H — нормальная подгруппа, но этот элемент не обязательно равен h_2 , если только K не является тоже нормальной подгруппой.)

Группа G всех движений в плоскости (или в n -мерном пространстве) представляет собой пример полупрямого произведения. Движением является преобразование

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = M\mathbf{x} + \xi, \quad (18.15.2)$$

где M — вещественная ортогональная матрица размером 2×2 (или $n \times n$) с детерминантом, равным 1, а ξ — произвольный вектор. Группа G порождается группой трансляций \mathcal{T}

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \xi$$

и группой \mathcal{R} вращений вокруг начала координат

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = M\mathbf{x}.$$

[Операцией (законом композиции) в \mathcal{T} является векторное сложение $\xi_1 + \xi_2$, а в группе \mathcal{R} — матричное умножение $M_1 M_2$. Здесь \mathcal{T} обозначает группу *всех* трансляций, а не только трансляций решетки.] Комбинированное преобразование (18.15.2) обозначается через (ξ, M) , как и в предыдущем параграфе, где было показано, что операция в G задается правилом

$$(\xi_1, M_1) \circ (\xi_2, M_2) = (\xi_1 + M_1 \xi_2, M_1 M_2). \quad (18.15.3)$$

Если бы правая часть этого равенства имела вид $(\xi_1 + \xi_2, M_1 M_2)$, то группа G была бы прямым произведением групп \mathcal{T} и \mathcal{R} . Значение члена $M_1 \xi_2$ для данных двух групп состоит в следующем. Во-первых, для фиксированной матрицы M отображение

$$\xi \rightarrow M\xi \text{ для всех } \xi$$

группы \mathcal{T} на себя есть автоморфизм [поскольку оно взаимно однозначно и является отображением на всю группу (M обратима)] и отображает $\xi + \eta$ на $M\xi + M\eta$; этот автоморфизм обозначается через $\tau(M)$. Во-вторых, когда M пробегает по всем элементам \mathcal{R} , построенные автоморфизмы образуют группу \mathcal{A} , которая является подгруппой группы всех автоморфизмов группы трансляций \mathcal{T} . В-третьих, отображение

$$M \rightarrow \tau(M) \text{ для всех } M \in \mathcal{R}$$

есть гомоморфизм группы \mathcal{R} на \mathcal{A} , так как если к произвольному элементу ξ из \mathcal{T} применить автоморфизм $\tau(M)$: $\xi \rightarrow \xi' = M\xi$, а к полученному образу применить автоморфизм $\tau(N)$: $\xi' \rightarrow \xi'' = N\xi'$, то результатом будет отображение $\xi \rightarrow NM\xi$, а это значит, что $\tau(N)\tau(M) = \tau(NM)$.

Определение. Пусть H и K — две произвольные группы (в обеих группах операцию будем записывать в виде умножения), и пусть задан гомоморфизм $k \rightarrow \tau(k)$, отображающий группу K в группу автоморфизмов группы H [для заданного k $\tau(k)$ отображает h на $\tau(k)h$ для всех h из H]. Тогда множество всех пар (h, k) , где $h \in H$ и $k \in K$, с операцией над такими парами, задаваемой в виде

$$(h_1, k_1) \circ (h_2, k_2) = (h_1 \tau(k_1) h_2, k_1 k_2), \quad (18.15.4)$$

представляет собой группу, называемую *полупрямым произведением* групп H и K (или группы H по группе K), и обозначается через $H \times_{\tau} K$.

Основные свойства полупрямого произведения кратко рассмотрены в приведенных ниже упражнениях. Читателю настоятельно рекомендуется выполнить эти упражнения, поскольку в них устанавливается, что данное выше определение, несмотря на кажущуюся достаточно произвольной формулировку, содержит все необходимое, чтобы придать этому полупрямому произведению все желательные свойства.

УПРАЖНЕНИЯ

3. Покажите, что единицей группы $G = H \times_{\tau} K$ является пара (e, e') , где e и e' — единичные элементы H и K .

4. Покажите, что элемент $(\tau(k^{-1})h^{-1}, k^{-1})$ является обратным (т. е. и левым, и правым обратным) элементу (h, k) .

5. Покажите, что в группе G справедлив закон ассоциативности. *Предостережение:* $\tau(k)[h_1h_2]$ — это не то же самое, что $[\tau(k)h_1]h_2$, потому что $\tau(k)$ — отображение, а не элемент группы. Упражнения 3, 4 и 5 показывают, что G является группой, как и утверждалось в определении полупрямого произведения.

6. Теперь отождествите H и K с подгруппами $\{(h, e')\}$: все h принадлежат H и $\{(e, k)\}$: все k принадлежат K соответственно и покажите, что H — нормальная подгруппа группы G .

7. Постройте факторгруппу G/H и покажите, что она изоморфна подгруппе K .

8. Наоборот, допустим, что группа G содержит подгруппы H и K , одна из которых (H) является нормальной, причем $H \cap K = \{e\}$ и факторгруппа G/H изоморфна подгруппе K ; покажите, что в этом случае G есть полупрямое произведение, т. е. $H \times_{\tau} K$, где для любого $k \in K$ $\tau(k)$ является отображением $h \rightarrow khk^{-1}$ для всех h из H .

9. Покажите, что полупрямое произведение равно прямому произведению $H \times K$ в том и только том случае, когда $\tau(k) \equiv I$ [т. е. гомоморфизм $k \rightarrow \tau(k)$ группы K в группу автоморфизмов группы H отображает все элементы группы K в единичный элемент (тождественное отображение группы H на себя)].

10. Покажите, что подгруппа K , также как и H , является нормальной подгруппой группы G тогда и только тогда, когда $\tau(k) \equiv I$, т. е. в том и только том случае, когда произведение является прямым.

Упражнение 8 показывает, что автоморфизмы $\tau(k)$, которые фигурируют в прямом произведении двух заданных групп H и K , суть внутренние автоморфизмы группы $H \times_{\tau} K$. Этот факт не совсем понятен в случае группы движений G при использовании аддитивных обозначений для группы трансляций \mathcal{T} . Если же трансляцию $x \rightarrow x' = x + \xi$ обозначить через T_{ξ} и использовать мультипликативные обозначения, так что (ξ, M) будет просто результирующей операцией $T_{\xi}M$, то $T_{M\xi} = MT_{\xi}M^{-1}$. Таким образом, автоморфизм $\tau(M): \xi \rightarrow M\xi \in \mathcal{T}$ имеет вид

$$\tau(M): T_{\xi} \rightarrow MT_{\xi}M^{-1},$$

и, значит, является внутренним автоморфизмом группы G .

В соответствии с предыдущим параграфом группа трансляций некоторой кристаллической структуры, заданная при помощи (18.14.2), является нормальной подгруппой пространственной группы G_s и точечная группа G_p изоморфна факторгруппе G_s/\mathcal{T} [напомним, что точечная группа есть группа всех вращений и отражений $x \rightarrow Mx$, таких, что (ξ, M) принадлежит G_s для некоторого ξ]. Группа G_s может как содержать, так и не содержать, подгруппу (скажем, G'_p), изоморфную G_p ; если G_s содержит такую подгруппу, то \mathcal{T} и G'_p могут иметь единственный общий элемент — единицу группы e , поскольку все другие элементы группы \mathcal{T} имеют бесконечный порядок (если $T \in \mathcal{T}$, то $T^m \neq I$ для

всех $m \neq 0$), тогда как элементы группы G_p имеют конечный порядок. Следовательно, согласно упражнениям 5 и 6, G_s содержит такую подгруппу тогда и только тогда, когда она сама является полупрямым произведением $\mathcal{F} \times_{\tau} G_p$. В таком случае кристаллографы называют пространственную группу *симморфной*.

Кристаллограф, приступающий к анализу множества данных по отражению рентгеновских лучей для определения кристаллической структуры, часто заранее знает точечную группу (исходя из

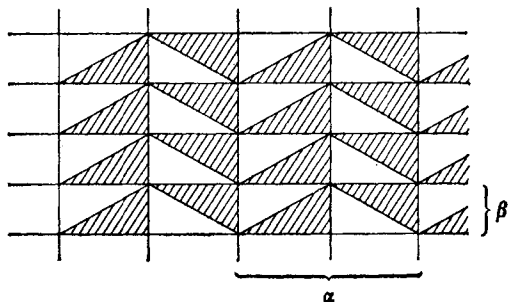


Рис. 18.3.

результатов измерения углов между гранями кристалла и плоскостями спайности, а также из других макроскопических свойств кристаллов). Однако он не может допустить, что рассматриваемая пространственная группа содержит экземпляр этой точечной группы, т. е. допускать, что пространственная группа симморфна.

Простой пример несимморфной пространственной группы в двух измерениях дает функция $f(x, y)$, равная 1 в заштрихованных треугольниках на рис. 18.3 и равная 0 в остальной части плоскости. Используя комплексные обозначения, видим, что пространственная группа порождается трансляциями $z \rightarrow z + \alpha$, $z \rightarrow z + i\beta$ и так называемыми скользящими отражениями $z \rightarrow \bar{z} + \alpha/2$. Следовательно, точечные группы содержат отражения $z \rightarrow \bar{z}$, тогда как пространственная группа не имеет этих элементов.

Полупрямое произведение $H \times_{\tau} K$ является примером так называемого *расширения группы* H при помощи группы K . Более полное обсуждение расширений групп см. в книге Куроша [1967, гл. 12] или в книге Редди [1959, § 50].

Глава 19

НЕПРЕРЫВНЫЕ ГРУППЫ

Общие линейные, специальные линейные, ортогональные и унитарные группы; группа вращений и группа Лоренца; теорема Эйлера, четыре компоненты полной группы Лоренца, прецессия Томаса; многообразия группы; внутренние координаты; двусвязность группы вращений; гомоморфизм группы $SU(2)$ на группу $SO(3)$ и гомоморфизм группы $SL(2)$ на \mathcal{L}_p ; простота группы вращений и группы Лоренца.

Предварительные сведения: гл. 18 и некоторые алгебраические факты.

Непрерывными группами (формальное определение будет дано в гл. 25) называются группы матриц (или соответствующих линейных преобразований), в которых элементы группы непрерывно зависят от некоторых параметров, подобных углам Эйлера в случае группы вращений. Здесь мы опишем свойства некоторых известных непрерывных групп.

Группа всех невырожденных (в общем случае комплексных) матриц размера $n \times n$ называется *общей линейной группой* и обозначается через $GL(n, \mathbb{C})$. Группа вещественных матриц обозначается через $GL(n, \mathbb{R})$. Подгруппы групп $GL(n, \mathbb{C})$ и $GL(n, \mathbb{R})$, состоящие из матриц с $\det = 1$, называются *специальными* (или *унимодулярными*) линейными группами и обозначаются через $SL(n, \mathbb{C})$ и $SL(n, \mathbb{R})$. Обозначения других подгрупп группы $GL(n, \mathbb{C})$ будут приведены в ходе обсуждения.

19.1. ОРТОГОНАЛЬНАЯ ГРУППА И ГРУППА ВРАЩЕНИЙ

В матрично-векторных обозначениях плоское вращение (18.1.1) представляется в виде

$$x \rightarrow x' = Rx, \quad (19.1.1)$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad R = R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (19.1.2)$$

При преобразовании (19.1.1) длина любого вектора и угол между любыми двумя векторами сохраняются, так что если $x' = Rx$ и $w' = Rw$, то $x' \cdot w' = x \cdot w$ для любых двух векторов x и w .

Найдем теперь преобразования, обладающие таким свойством, в n -мерном случае, т. е. задав

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \text{ и т. д. и } R = \begin{pmatrix} R_{11} & \dots & R_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ R_{n1} & \dots & R_{nn} \end{pmatrix},$$

будем искать такие матрицы R , что $(Rx) \cdot (Ry) = x \cdot y$ для любых векторов x и y . Пусть $\xi(j)$ обозначает вектор, j -я компонента которого равна единице, а остальные компоненты равны нулю. Тогда, в частности, матрица R должна быть такой, что

$$R\xi(j) \cdot R\xi(k) = \xi(j) \cdot \xi(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } j=k, \\ 0, & \text{если } j \neq k. \end{cases}$$

Так как вектор

$$R\xi(j) = \begin{pmatrix} R_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_{nj} \end{pmatrix}$$

представляет собой j -й столбец матрицы R , ясно, что столбцами матрицы R являются попарно ортогональные единичные векторы. Такая матрица называется *ортогональной*. Обратное, если R обладает указанным свойством, то $Rx \cdot Ry = x \cdot y$ для всех x, y . Если через R^T обозначить матрицу, полученную транспонированием матрицы R , то строки матрицы R^T будут столбцами матрицы R и, по правилу умножения матриц, имеем

$$R^T R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I, \quad (19.1.3)$$

и мы получили другую характеристику ортогональной матрицы. Поскольку $R^T = R^{-1}$ — матрица обратного преобразования, также сохраняющего скалярное произведение, отсюда следует, что R^T — тоже ортогональная матрица; следовательно, столбцы R^T (т. е. строки матрицы R) образуют другую систему n попарно ортого-

нальных единичных векторов. Так как $\det R^T = \det R$, из (19.1.3) следует, что $\det R = \pm 1$. Теперь мы определим

$O(n) = \{R: R \text{ — вещественная ортогональная матрица размера } n \times n\}$

в качестве *ортогональной группы* в n -мерном случае, в которой групповой операцией является матричное умножение. Тогда подгруппа

$$SO(n) = \{R \in O(n): \det R = 1\}$$

есть *специальная* (или *унимодулярная*) ортогональная группа в n -мерном случае. Мы можем рассматривать эти группы и как группы матриц, и как группы соответствующих преобразований $x \rightarrow Rx$ в n -мерном пространстве.

19.2. ГРУППА ВРАЩЕНИЙ $SO(3)$.

ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА

Сейчас мы покажем, что если R — ортогональная (вещественная) матрица размера 3×3 с $\det R = 1$, то преобразование $x \rightarrow Rx$ может быть получено следующим образом: сначала выбирается некоторое направление в пространстве, проходящее через начало координат, а затем осуществляется поворот системы координат на нужный угол вокруг этого направления как вокруг оси. В этом заключается *теорема Эйлера*. Пусть λ_i и v_i ($i=1, 2, 3$) — собственные значения и собственные векторы матрицы R (они могут быть комплексными даже в том случае, когда R вещественна); они удовлетворяют уравнениям

$$Rv_i = \lambda_i v_i \quad (i=1, 2, 3). \quad (19.2.1)$$

Так как R также и унитарная матрица, мы имеем $\|Rv_i\| = \|v_i\|$, где $\|v\|$ для любого (вообще говоря, комплексного) вектора v обозначает $(|v_x|^2 + |v_y|^2 + |v_z|^2)^{1/2}$; следовательно,

$$|\lambda_i| = 1 \quad (i=1, 2, 3). \quad (19.2.2)$$

Числа λ_i являются корнями кубического уравнения с вещественными коэффициентами

$$\det(\lambda I - R) = 0; \quad (19.2.3)$$

произведение этих корней равно единице:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det R = 1. \quad (19.2.4)$$

По меньшей мере один из этих корней является вещественным; если два других (скажем, λ_2 и λ_3) комплексны, то $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$ и в силу (19.2.2) $\lambda_2 \lambda_3 = 1$; следовательно, $\lambda_1 = 1$. Если все три корня являются вещественными, то они равны либо 1, 1, 1, либо 1, -1, -1. В любом случае всегда имеется один корень, скажем λ_1 , равный +1; следо-

вательно,

$$Rv_1 = v_1,$$

откуда видно, что прямая, проведенная через начало координат в направлении вектора v_1 (v_1 может быть выбран вещественным), остается инвариантной относительно преобразования $x \rightarrow Rx$; очевидно, эта прямая является осью вращения.

[Напоминание. Если M — нормальная матрица, т. е. матрица, которая коммутирует со своей эрмитовой сопряженной, т. е. если $MM^* = M^*M$ (в частности, эрмитовы матрицы и унитарные матрицы являются нормальными), то из собственных векторов матрицы M можно построить полную ортонормированную (относительно эрмитова скалярного произведения) систему векторов в n -мерном пространстве. Если все собственные значения различны, то собственные векторы автоматически ортогональны; если же λ является r -кратным собственным значением, то соответствующее собственное подпространство r -мерно и в нем можно выбрать ортонормированный базис; сделав так для каждого собственного подпространства, можно получить полную ортонормированную систему векторов.]

Пусть $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = e^{i\theta}$, $\lambda_3 = e^{-i\theta}$ и векторы v_1, v_2, v_3 образуют ортонормированную систему (они являются собственными векторами). Возьмем новые векторы

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = (1/\sqrt{2})(v_2 + v_3), \quad u_3 = (i/\sqrt{2})(v_2 - v_3); \quad (19.2.5)$$

они также образуют ортонормированную систему (причем все эти векторы можно считать вещественными, поскольку v_2 и v_3 могли быть выбраны комплексно сопряженными); отсюда

$$Ru_1 = u_1, \quad Ru_2 = \cos \theta u_2 + \sin \theta u_3, \quad Ru_3 = -\sin \theta u_2 + \cos \theta u_3. \quad (19.2.6)$$

Мы видим, что преобразование, описываемое матрицей R , является вращением в плоскостях, перпендикулярных вектору u_1 .

Если задана матрица R , то угол и ось вращения практически находятся следующим образом. Так как сумма собственных значений матрицы равна ее следу, угол θ задается уравнением

$$1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta} = R_{11} + R_{22} + R_{33},$$

или

$$\cos \theta = 1/2 (R_{11} + R_{22} + R_{33} - 1). \quad (19.2.7)$$

Далее, ось вращения совпадает с направлением вектора v (выше он обозначался через v_1), который соответствует собственному значению $\lambda = 1$; следовательно, $Rv = v$. Но в силу ортогональности матрицы R $R^T R = I$, откуда $v = R^T v$. Поэтому $(R - R^T)v = 0$, так что компоненты v_1, v_2, v_3 вектора v находятся в отношении

$$v_1 : v_2 : v_3 = (R_{23} - R_{32}) : (R_{31} - R_{13}) : (R_{12} - R_{21}). \quad (19.2.8)$$

УПРАЖНЕНИЕ

Проведите аналогичный анализ группы $SO(n)$ для произвольного n .

19.3. УНИТАРНЫЕ ГРУППЫ

Обобщение ортогональных групп на комплексный случай можно реализовать двумя способами. Первый путь основывается на том, что комплексная ортогональная матрица есть любая комплексная матрица M , которая удовлетворяет соотношению $M^T M = I$ точно так же, как и в вещественном случае. Но, видимо, полученные так группы не будут представлять большой интерес.

Второй путь: назовем *унитарной* матрицу U , такую, что $U^* U = I$ (тогда и $U U^* = I$). При унитарном преобразовании $x \rightarrow Ux$ n -мерного комплексного пространства C^n эрмитово скалярное произведение

$$x^* y = \sum_{j=1}^n \bar{x}_j y_j$$

любых двух векторов x и y остается инвариантным. Обратное, если это произведение инвариантно для любых x и y , то матрица U является унитарной. *Унитарной группой $U(n)$* называется группа всех унитарных матриц размера $n \times n$ (или унитарных преобразований в C^n).

Поскольку $\det U^*$ комплексно сопряжен с $\det U$, из равенства $U^* U = I$ следует, что $|\det U| = 1$, т. е. $\det U$ есть число на единичной окружности в комплексной плоскости. Подгруппа группы $U(n)$, состоящая из унитарных матриц с $\det U = 1$, называется *специальной* (или *унимодулярной*) унитарной группой и обозначается через $SU(n)$.

19.4. ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

Если x, y, z, t и x', y', z', t' — декартовы координаты в двух инерциальных системах отсчета, оси которых параллельны, но вторая система движется относительно первой со скоростью V в направлении $+x$ и если в момент $t=t'=0$ обе системы совпадали, то, согласно специальной теории относительности,

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (19.4.1)$$

Другие инерциальные системы могут быть получены путем относительного движения в направлениях других осей координат, вращений в пространстве, смещения начала отсчета пространства-времени, пространственных отражений, обращения времени. Если учитываются отражения и обращение времени, то мы имеем полную

группу Лоренца, в противном случае — собственную группу Лоренца. Смещение начала координат здесь не обсуждается, так что рассматриваемые преобразования однородны, т. е. уравнения не содержат постоянных членов.

Если ввести обозначения (обычные для теории относительности)

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct$$

(иногда ct обозначают через x^0) и определить φ формулой

$$\operatorname{sh} \varphi = -\frac{V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad (19.4.2)$$

то (19.4.1) можно записать в виде

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^4 p_{\nu}^{\mu} x^{\nu}, \quad (19.4.3)$$

где коэффициенты p_{ν}^{μ} образуют матрицу

$$[p_{\nu}^{\mu}] = P(\varphi) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \varphi & 0 & 0 & \operatorname{sh} \varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh} \varphi & 0 & 0 & \operatorname{ch} \varphi \end{pmatrix}. \quad (19.4.4)$$

В оставшейся части данного параграфа будет использоваться *соглашение о суммировании*, по которому предполагается, что любой член, содержащий повторяющийся индекс [например, ν в (19.4.3)], уже просуммирован по этому индексу (по $\nu = 1, 2, 3, 4$); таким образом, (19.4.3) можно записать просто как $x'^{\mu} = p_{\nu}^{\mu} x^{\nu}$. В теории относительности индексы, обозначенные греческими буквами, пробегают обычно значения от 1 до 4, а индексы, обозначенные латинскими буквами, — значения от 1 до 3.

Множество $\{P(\varphi)\}$ матриц (или преобразований) указанного выше вида, получаемое, когда φ принимает все вещественные значения, представляет собой группу, которая будет обозначена через \mathcal{L}_x , — эта группа является подгруппой группы Лоренца. Заметим, что

$$P(\varphi_1) P(\varphi_2) = P(\varphi_1 + \varphi_2); \quad (19.4.5)$$

из этого уравнения можно получить *закон композиции* (коллинеарных) *скоростей*, иначе говоря, получить формулу для скорости, с которой третья инерциальная система отсчета движется относительно первой системы, через скорость второй системы относительно первой и скорость третьей системы относительно второй; вывод формулы оставляем в качестве упражнения.

Если вторая система отсчета получается лишь путем вращения первой системы в пространстве, то преобразование задается мат-

рицей вида

$$R = \begin{pmatrix} & & 0 \\ (R') & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (19.4.6)$$

где через R' обозначена матрица размера 3×3 собственного вращения, т. е. элемент группы $SO(3)$. Множество всех таких матриц (или преобразований) является *подгруппой вращений* группы Лоренца и обозначается через \mathcal{R} .

Группа, порождаемая элементами групп \mathcal{L}_x и \mathcal{R} , т. е. группа, состоящая из всех конечных произведений $Q_1 Q_2 \dots Q_j$, где каждый множитель Q_i имеет вид либо (19.4.4), либо (19.4.6), называется *собственной* (или *ограниченной*) *группой Лоренца* и обозначается через \mathcal{L}_p . Собственная группа Лоренца является *связной* в следующем смысле.

Лемма. Если Q_0 — произвольный элемент группы \mathcal{L}_p , то существует *однопараметрическое семейство* $Q(\lambda)$ элементов группы \mathcal{L}_p , таких, что все матричные элементы непрерывно зависят от λ для $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$, причем $Q(0) = I$, $Q(\lambda_0) = Q_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Во-первых, любой элемент $P(\varphi)$ из группы \mathcal{L}_x можно перевести в единицу группы, меняя φ непрерывно от нуля до его конечного значения; во-вторых, любой элемент R из группы \mathcal{R} можно перевести в единицу, меняя непрерывно угол вращения от нуля до его конечного значения; поэтому если $Q_0 = Q_1 Q_2 \dots Q_j$, где каждый Q_i принадлежит либо \mathcal{L}_x , либо \mathcal{R} , то в качестве интервала $[0, \lambda_0]$ можно принять $[0, j]$, а $Q(\lambda)$ можно выбрать так, что $Q(0) = I$, $Q(1) = Q_1$, $Q(2) = Q_1 Q_2$ и т. д. и, наконец, $Q(j) = Q_1 Q_2 \dots Q_j$, причем для нецелых значений параметров используется интерполяция.

Проверка показывает, что *фундаментальная (квадратичная) форма* $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2$ инвариантна относительно всех преобразований групп \mathcal{L}_x и \mathcal{R} , а значит, и относительно всех преобразований группы \mathcal{L}_p . Эту форму можно записать в виде $g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$, где

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = G, \quad (19.4.7)$$

причем соглашение о суммировании применено как к μ , так и к ν . Если 4-мерный вектор x^μ в квадратичной форме $g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ заменить сначала на $x^\mu + y^\mu$, а затем на $x^\mu - y^\mu$ и из первого результата вычесть второй, то видно, что инвариантность квадратичной формы $g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ эквивалентна инвариантности симметрической билинейной формы $g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 - x^4 y^4$.

Теперь можно определить *полную (однородную) группу Лоренца* как группу всех однородных линейных преобразований x^1, \dots, x^4 , относительно которых $g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ инвариантна для всех 4-мерных векторов x^μ ; эта группа обозначается через \mathcal{L}_f . Пусть преобразование $x^\mu \rightarrow x'^\mu = q^\mu_\nu x^\nu$ — произвольный элемент группы \mathcal{L}_f . Тогда из инвариантности билинейной формы следует, что $g_{\mu\nu}q^\mu_\lambda q^\nu_\lambda = g_{\kappa\lambda}$ или, в матричных обозначениях, что

$$Q^T G Q = G; \quad (19.4.8)$$

иначе говоря, столбцы Q являются псевдоортогональными псевдоединичными векторами в том смысле, что

$$(q^1_\nu)^2 + (q^2_\nu)^2 + (q^3_\nu)^2 - (q^4_\nu)^2 = \begin{cases} +1 & \text{для } \nu = 1, 2, 3, \\ -1 & \text{для } \nu = 4, \end{cases} \quad (19.4.9)$$

$$q^1_\nu q^1_\lambda + q^2_\nu q^2_\lambda + q^3_\nu q^3_\lambda - q^4_\nu q^4_\lambda = 0 \quad \text{для } \nu \neq \lambda. \quad (19.4.10)$$

Отсюда следует, что матрица, обратная матрице Q , может быть получена из матрицы Q^T изменением знаков по следующей схеме:

$$\begin{pmatrix} + & + & + & - \\ + & + & + & - \\ + & + & + & - \\ - & - & - & + \end{pmatrix}.$$

Поскольку Q^{-1} также является лоренцевым преобразованием, строки матрицы Q также являются псевдоортогональными псевдоединичными векторами.

Из (19.4.8) следует, что детерминант матрицы Q равен ± 1 . Если в качестве $\{x^1, \dots, x^4\}$ взять $\{0, 0, 0, 1\}$, то инвариантность фундаментальной формы показывает, что

$$\sum_{j=1}^3 (x'^j)^2 - (x'^4)^2 = \sum_{i=1}^3 (q^i_4)^2 - (q^4_4)^2 = -1.$$

Следовательно, q^4_4 или ≥ 1 , или ≤ -1 .

Теорема. Собственная группа Лоренца \mathcal{L}_p , определенная выше как группа, порожденная группами \mathcal{L}_x и \mathcal{R} , состоит из всех преобразований Q , которые принадлежат \mathcal{L}_f и для которых $\det Q = +1$, а $q^4_4 \geq +1$.

Доказательство. Сначала показывается, что из связности группы \mathcal{L}_p следует, что $\det Q = +1$ и $q^4_4 \geq 1$ для любого элемента Q из \mathcal{L}_p . Пусть Q переводится в единицу I , как в доказательстве леммы; поскольку $Q(0) = I$, имеем $\det Q(0) = 1$ и $q^4_4(0) = 1$; в силу непрерывности $\det Q(\lambda)$ и $q^4_4(\lambda)$ при изменении λ не могут стать отрицательными. (То, что $\det Q = 1$, можно установить и непосредственно из разложения $Q = Q_1 Q_2 \dots Q_j$, где каждое Q_i принадлежит либо \mathcal{L}_x , либо \mathcal{R}). Обратно, допустим, что Q — любое преобразование из \mathcal{L}_f , такое, что $\det Q = 1$ и $q^4_4 \geq 1$. Покажем, что Q можно предста-

вить в виде произведения $R_1 P R_2$, где R_1 и R_2 принадлежат \mathcal{R} , а P принадлежит \mathcal{L}_x ; следовательно, $Q \in \mathcal{L}_p$. (Кстати, отсюда следует, что в разложении $Q_1 Q_2 \dots Q_j$ всегда достаточно трех множителей.) Прежде всего, пусть R_3 и R_4 — вращения, которые соответственно переводят трехмерные векторы (q_4^1, q_4^2, q_4^3) и (q_1^1, q_1^2, q_1^3) в положительное направление оси x^1 . Тогда

$$R_3 Q R_4 = \begin{pmatrix} & q_4^{\prime 1} & & \\ (X') & 0 & & \\ & 0 & & \\ q_1^{\prime 4} & 0 & 0 & q_4^{\prime 4} \end{pmatrix} = Q', \quad (19.4.11)$$

где X' — некоторая матрица размера 3×3 , $q_4^{\prime 1}$ и $q_1^{\prime 4}$ неотрицательны и $q_4^{\prime 4} = q_1^{\prime 4} \geq 1$. Поскольку $(q_4^{\prime 1})^2 - (q_4^{\prime 4})^2 = -1$, $(q_1^{\prime 4})^2 - (q_4^{\prime 4})^2 = -1$, параметр φ можно выбрать так, что

$$q_4^{\prime 1} = q_1^{\prime 4} = \text{sh } \varphi, \quad q_4^{\prime 4} = \text{ch } \varphi.$$

Таким образом, если Q' умножим на $P(-\varphi)$, то последняя строка и последний столбец этого произведения будут теми же, что и соответствующие строка и столбец матрицы $P(-\varphi)P(\varphi) = I$; отсюда

$$P(-\varphi)Q' = \begin{pmatrix} & 0 & & \\ (X'') & 0 & & \\ & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Q''.$$

Эта матрица, подобно Q и Q' , описывает преобразование, которое принадлежит \mathcal{L}_p , и, значит, оставляет инвариантной фундаментальную квадратичную форму. Поэтому X'' оставляет инвариантной квадратичную форму $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ и, следовательно, принадлежит группе $O(3)$, но $\det X'' = +1$, откуда следует, что X'' — элемент $SO(3)$, т. е. Q'' — элемент группы \mathcal{R} , скажем R_5 . Итак, мы имеем

$$P(-\varphi)R_3QR_4 = R_5,$$

что приводит к искомому виду элемента Q :

$$Q = R_1 P(\varphi) R_2,$$

где $R_1 = R_3^{-1}$ и $R_2 = R_5 R_4^{-1}$.

Замечание. Элементы вида $L = R^{-1}PR$, где R принадлежит \mathcal{R} , а P принадлежит \mathcal{L}_x , называются *чистыми преобразованиями Лоренца*. В этом случае оси новой и старой систем координат все еще параллельны (так же, как для $P(\varphi)$), но направление относительной скорости может быть произвольным. Матрица L симметрическая, но если L_1 и L_2 — два чистых преобразования Лоренца, то легко видеть, что матрица $L_1 L_2$ не является симметрической, если только относительные скорости не параллельны; следовательно, чистые преобразования Лоренца не образуют подгруппу группы \mathcal{L}_p . Более того, если $L_1 L_2$ — несимметрическая матрица, то можно найти такое чистое преобразование L_3 , что $L_1 L_2 L_3$ представляет собой чистое вращение (элемент группы \mathcal{R}), причем $L_1 L_2 L_3 \neq I$. Это обстоятельство приводит к псевдопарадоксальному результату, заключающемуся в том, что можно повернуть некоторое тело, последовательно сообщив ему три чисто линейных уско-

рения в трех различных направлениях таким образом, что в результате комбинации этих трех движений тело останавливается. Такое явление, описанное в несколько иных формулировках, было открыто на заре квантовой механики Л. Томасом в связи с релятивистскими поправками к энергетическим уровням атома. [Электрон, двигаясь по орбите вокруг ядра, подвергается (непрерывной) последовательности лоренцевых трансляций, подобных описанным преобразованиям, и возникает эффект, аналогичный тому, к которому приводит существование спина электрона.]

Группа \mathcal{L}_t , порожденная элементами группы \mathcal{L}_p и преобразованием обращения времени, которое задается матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

является подгруппой группы \mathcal{L}_f , поскольку ясно, что T сохраняет фундаментальную форму. Аналогично группа \mathcal{L}_s , порожденная элементами группы \mathcal{L}_p и пространственной инверсией, задаваемой матрицей

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

является подгруппой группы \mathcal{L}_f . Наконец, вся \mathcal{L}_f порождается элементами группы \mathcal{L}_p и преобразованиями T и S .

УПРАЖНЕНИЯ

Докажите или опровергните следующие утверждения.

1. Любое собственное преобразование Лоренца с симметрической матрицей есть чистое преобразование Лоренца.
2. Если P_1 и P_2 — два чистых преобразования Лоренца, то $P_1 P_2 P_1^{-1} P_2^{-1}$ есть чистое вращение.
3. Подгруппа вращений представляет собой нормальную подгруппу группы \mathcal{L}_p .

Очевидным обобщением групп Лоренца могут быть группы преобразований, которые сохраняют значение фундаментальной формы

$$(x^1)^2 + \dots + (x^r)^2 - (x^{r+1})^2 - \dots - (x^{r+l})^2;$$

возможность пространственных отражений появляется, когда r нечетно, а возможность обращения времени — когда l нечетно.

19.5. МНОГООБРАЗИЕ ГРУППЫ

Если любой элемент

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}$$

ортогональной группы $O(3)$ представляется точкой 9-мерного (вещественного) пространства V^9 с координатами $R_{11}, R_{12}, \dots, R_{33}$ (заданными, скажем, в том порядке, в котором они появляются в матрице), то данная группа представляется множеством точек в пространстве V^9 , которые удовлетворяют шести алгебраическим уравнениям

$$R_{1j}^2 + R_{2j}^2 + R_{3j}^2 = 1, \quad j = 1, 2, 3, \quad (19.5.1)$$

$$R_{1j}R_{1k} + R_{2j}R_{2k} + R_{3j}R_{3k} = 0, \quad (j, k) = (1, 2), (1, 3), (2, 3), \quad (19.5.2)$$

которые означают, что столбцы матрицы R суть попарно ортогональные единичные векторы в соответствии с § 19.2. Полученная трехмерная алгебраическая поверхность в пространстве V^9 называется *многообразием* группы $O(3)$. Точные размеры, форма и кривизна этой поверхности не представляют интереса, но ее общие топологические свойства тесно связаны со структурой группы.

С каждой непрерывной группой линейных преобразований аналогично ассоциируется некая алгебраическая поверхность в некотором пространстве V^m . Однако требуется определенное внимание, когда делаются выводы из числа уравнений. Для группы $SO(3)$ кроме выписанных выше шести уравнений (19.5.1) и (19.5.2) имеется седьмое алгебраическое уравнение

$$\det R = 1. \quad (19.5.3)$$

Как будет показано в дальнейшем, поверхность, определенная первыми шестью уравнениями, состоит из двух частей, или компонент (наподобие двух ветвей гиперболы) и уравнение (19.5.3) лишь исключает одну из этих частей, но не уменьшает размерность поверхности. Для общей линейной группы $GL(n, \mathbb{R})$ имеется лишь алгебраическое *неравенство* $\det M \neq 0$; для $GL(n, \mathbb{C})$ — алгебраическое неравенство $(\operatorname{Re} \det M)^2 + (\operatorname{Im} \det M)^2 \neq 0$.

УПРАЖНЕНИЕ

Найдите алгебраическое уравнение $F(x, y, z) = 0$, которое определяет поверхность тора в пространстве V^3 так же, как $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ определяет поверхность шара. Найдите группу, для которой тор служит многообразием в смысле приведенного выше определения.

19.6. ВНУТРЕННИЕ КООРДИНАТЫ В МНОГООБРАЗИИ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ

Хотя в принципе любое многообразие можно рассматривать как n -мерную поверхность, вложенную в пространство V^m большей размерности, как это делалось в приведенных выше примерах, такое вложение не всегда просто найти или описать, и поэтому более естественно описывать многообразие при помощи внутренних координат, подобных полярным углам θ и φ на поверхности сферы, или в общем случае при помощи двух или более перекрывающихся систем внутренних координат.

Каждое преобразование группы $SO(3)$ может быть получено путем выбора фиксированной оси, а затем поворота вокруг этой оси (§ 19.2). Если R — матрица вращения на угол $\theta \geq 0$ (по часовой стрелке, если смотреть вдоль положительного направления вектора \mathbf{k}) вокруг оси, задаваемой единичным вектором \mathbf{k} , то числа $\theta k_x, \theta k_y, \theta k_z$, обозначаемые соответственно через $\theta_x, \theta_y, \theta_z$, можно взять в качестве внутренних координат в группе $SO(3)$; в таком случае мы запишем $R = R(\theta)$, где θ — вектор $\mathbf{k}\theta$. Для того чтобы такая система координат была единственной, θ следует ограничить шаром $K = \{\theta: \|\theta\| \leq \pi\}$ в координатном пространстве \mathbb{R}^3 , в котором $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ — декартовы координаты, и кроме того, нужно соблюдать следующее условие: противоположные концы любого диаметра шара K соответствуют одному и тому же элементу группы $SO(3)$, а во всех других случаях каждой точке K соответствует единственный элемент группы $SO(3)$ и обратно.

Матрица $R = R(\theta)$ задается в явном виде через внутренние координаты при помощи выражения

$$R(\theta) = \exp \begin{pmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (19.6.1)$$

Чтобы это увидеть, заметим сначала, что поскольку R — невырожденная нормальная матрица, то ее логарифм Λ вполне определен (хотя и многозначен):

$$R = e^\Lambda, \quad R^{-1} = e^{-\Lambda} = R^T = e^{\Lambda^T};$$

следовательно, Λ — антисимметрическая матрица и должна иметь вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

То, что a, b, c можно взять именно такими, как в (19.6.1), следует из того, что в таком случае: (1) собственные значения ма-

трицы Λ равны 0 и $\pm i\theta$, где $\theta = \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2}$, а, значит, собственные значения матрицы $\exp \Lambda$ равны 1 и $e^{\pm i\theta}$; (2) первый собственный вектор матрицы Λ (так же, как и $\exp \Lambda$) пропорционален вектору θ ; (3) так как Λ — нормальная матрица, ее собственные векторы можно взять в качестве ортонормированной системы; (4) из этого следует, как и в § 19.2, что R представляет вращение на угол θ вокруг оси с направлением вектора θ . Остается (в виде упражнения) проверить, что в правой системе координат (19.6.1) определяет $R(\theta)$, а не $R(-\theta)$.

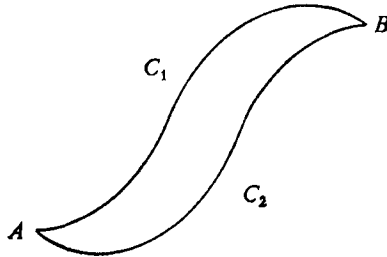


Рис. 19.1.

При помощи внутренних координат $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ можно выяснить свойства поверхности \mathcal{S} в пространстве V^3 , определенной алгебраическими уравнениями (19.5.1)—(19.5.3). Каждая точка шара K соответствует единственной точке на поверхности \mathcal{S} , исключая противоположные концы любого диаметра K , которые соответствуют одной и той же точке поверхности \mathcal{S} , и девять координат точки поверхности \mathcal{S} являются непрерывными функциями внутренних координат в шаре K согласно (19.6.1). Поэтому \mathcal{S} — связная поверхность, поскольку любая точка шара K может быть связана с любой другой точкой K некой кривой (на самом деле прямолинейным отрезком), лежащей в K . Однако \mathcal{S} не является односвязной.

Пусть на связной поверхности заданы две произвольные точки A и B и две любые кривые (пути) C_1 и C_2 , лежащие на этой поверхности и соединяющие A с B (рис. 19.1). Если C_1 , не оставляя поверхности, может быть преобразована в C_2 непрерывной деформацией, то такая поверхность называется односвязной. Плоскость и сфера односвязны, тогда как поверхность тора, поверхность цилиндра, круговое кольцо $R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2$ не являются односвязными. Среди трехмерных тел шар, куб, сферический слой $R_1^2 < x^2 + y^2 + z^2 < R_2^2$ односвязны, тогда как тор и крендель не являются односвязными.

Покажем, что многообразие \mathcal{S} группы $SO(3)$ не является односвязным. Пусть A — точка в \mathcal{S} , соответствующая центру шара K ,

а B — точка в \mathcal{S} , соответствующая двум концам некоторого диаметра шара K (рис. 19.2). Тогда два радиуса, составляющие данный диаметр, соответствуют в \mathcal{S} двум кривым, или путям, которые соединяют A с B , и очевидно, что один такой путь

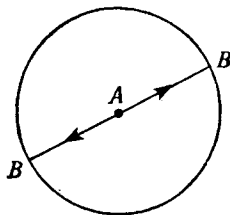


Рис. 19.2.

нельзя непрерывно деформировать в другой. Однако любой другой путь из A в B можно непрерывно деформировать в один из указанных путей.

19.7. ГОМОМОРФИЗМ ГРУППЫ $SU(2)$ НА ГРУППУ $SO(3)$

Пусть x, y, z — декартовы координаты в евклидовом пространстве E^3 . Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}, \quad (19.7.1)$$

которая является эрмитовой матрицей и имеет след, равный нулю. (След матрицы есть сумма ее собственных значений и равен сумме ее диагональных элементов.) Пусть U — любая унитарная матрица размера 2×2 с детерминантом, равным 1 [т. е. $U \in SU(2)$], а

$$A' = UAU^*. \quad (19.7.2)$$

Поскольку собственные значения матрицы A' совпадают с собственными значениями матрицы A , след матрицы A' также равен нулю; A' тоже эрмитова матрица ($A'^* = A'$), и ее можно записать в виде

$$A' = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix}, \quad (19.7.3)$$

где x', y', z' — вещественные числа. Кроме того, $\det A' = \det A$, что следует из (19.7.2), и, значит,

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \quad (19.7.4)$$

Очевидно, что связь между x, y, z и x', y', z' линейна при заданной матрице U ; следовательно, если мы определим вещественную мат-

рицу $R=R(U)$ размера 3×3 посредством

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

то R — ортогональная матрица.

Общее замечание об ортогональных унитарных и лоренцевых преобразованиях. Допустим, что однородное линейное преобразование $x \rightarrow x'$ в вещественном n -мерном пространстве таково, что оно оставляет инвариантной квадратичную форму $x \cdot x = x_1^2 + \dots + x_n^2$, т. е. $x \cdot x = x' \cdot x'$ для всех x . Тогда инвариантной является и билинейная форма $x \cdot y$ для любых x, y , так как

$$x \cdot y = \frac{1}{4} (x + y) \cdot (x + y) - \frac{1}{4} (x - y) \cdot (x - y).$$

Иначе говоря, если сохраняются все длины, то сохраняются и все углы. Аналогично, если (\cdot, \cdot) обозначает эрмитово симметрическое (т. е. полубилинейное) скалярное произведение в комплексном n -мерном пространстве, то (x, y) является инвариантным для любых x, y в том и только том случае, когда (x, x) инвариантно для всех x . Таким образом, ортогональную и унитарную группы можно характеризовать инвариантностью либо квадратичной, либо соответствующей билинейной формы.

УПРАЖНЕНИЕ

Сформулируйте аналогичный результат для группы Лоренца.

Детерминант матрицы R равен 1 по непрерывности, поскольку единственно возможными значениями $\det R$ являются ± 1 , $\det R$ непрерывно зависит от U и $SU(2)$ — связная группа. [Если U — единичная матрица размера 2×2 , то $R(U)$ есть единичная матрица размера 3×3 с детерминантом, равным 1.] Произведение $R(U_1)R(U_2)$ равно $R(U_1U_2)$, потому что $R(U_1)R(U_2)$ представляет собой результат последовательного преобразования A сначала в $U_2AU_2^*$, а затем в $U_1U_2AU_2^*U_1^*$. Следовательно, отображение

$$\Phi: U \rightarrow R(U)$$

есть гомоморфизм. Мы утверждаем без доказательства, что это — отображение на всю группу $SO(3)$ ¹⁾.

Легко видеть, что ядром этого гомоморфизма будет $\{1, -1\}$, и поэтому с каждым $R \in SO(3)$ связаны два элемента U и $-U$ группы $SU(2)$. В § 19.9 будет доказано, что группа $SO(3)$ является простой и, значит, никакие другие нетривиальные гомоморфизмы группы $SO(3)$ невозможны.

¹⁾ То есть каждый элемент из $SO(3)$ является образом хотя бы одного элемента из $SU(2)$. — *Прим. перев.*

19.8. ГОМОМОРФИЗМ ГРУППЫ $SL(2, \mathbb{C})$ НА СОБСТВЕННУЮ ГРУППУ ЛОРЕНЦА \mathcal{L}_p

Гомоморфизм, полученный в предыдущем параграфе, весьма легко расширяется. Пусть x, y, z, t — координаты в пространстве-времени (при этом система единиц выбрана так, чтобы $c=1$). Тогда матрица

$$A = \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix}$$

эрмитова и $\det A = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Если P — произвольная (комплексная) матрица размера 2×2 с детерминантом, равным 1, то матрица $A' = PAP^*$ также эрмитова и, значит, может быть записана в виде

$$A' = \begin{pmatrix} t' + z' & x' - iy' \\ x' + iy' & t' - z' \end{pmatrix}.$$

Но $\det A' = \det A$, и поэтому

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2.$$

Иначе говоря, матрица P из $SL(2, \mathbb{C})$ индуцирует некоторое преобразование Лоренца T . Ясно, что отображение $P \rightarrow T$ обладает свойством гомоморфизма, именно если $P_1 \rightarrow T_1$ и $P_2 \rightarrow T_2$, то $P_1 P_2 \rightarrow T_1 T_2$. Фактически это $(2 \rightarrow 1)$ -гомоморфизм группы $SL(2, \mathbb{C})$ на группу \mathcal{L}_p , т. е. гомоморфизм, отображающий два элемента $SL(2, \mathbb{C})$ в один элемент \mathcal{L}_p .

19.9. ПРОСТОТА ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ И ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

Теорема. *Группа вращений $SO(3)$ является простой.*

Доказательство. Допустим, что G_0 — нетривиальная нормальная подгруппа: $G_0 \triangleleft SO(3)$. Нужно доказать, что $G_0 = SO(3)$. Пусть $R_0 \in G_0$, причём $R_0 \neq I$. В § 19.2 было доказано, что для любого R из $SO(3)$ преобразование $x \rightarrow Rx$ можно описать как вращение на некоторый угол θ вокруг некоторой фиксированной оси. Обозначим через θ вектор, взятый в положительном направлении этой оси и имеющий длину $\|\theta\| = \theta$, и выразим R в виде $R = R(\theta)$, как в § 19.6. Тогда $R_0 = R(\theta_0)$ для некоторого вектора $\theta_0 \neq 0$.

Предположим теперь, что θ_1 — любой другой вектор с той же длиной, что и θ_0 ($\|\theta_1\| = \|\theta_0\|$), а R_1 — вращение, переводящее θ_1 в θ_0 . Тогда $R_1^{-1}R(\theta_0)R_1$ принадлежит подгруппе G_0 , поскольку она нормальна; но $R_1^{-1}R(\theta_0)R_1 = R(\theta_1)$, и, следовательно, подгруппа G_0 содержит любой элемент $R(\theta)$ с $\|\theta\| = \|\theta_0\|$. Далее, G_0 также содержит каждый элемент $R(\theta)R(\theta_0)$ для $\|\theta\| = \|\theta_0\|$; он является элементом $R(\theta')$ для некоторого $\theta' = \theta'(\theta, \theta_0)$. Очевидно, что $\|\theta'\|$ — непрерывная функция компонент вектора θ . [Напомним, что явное выражение $R(\theta)$ через компоненты $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ приведено в § 19.6.] Для $\theta = -\theta_0$ и $\theta = +\theta_0$ длина $\|\theta'\|$ равна 0 и $2\|\theta_0\|$ соответственно. Следовательно, для любого угла θ из интервала $[0, 2\|\theta_0\|]$ G_0 содержит хотя бы один элемент $R(\theta)$, такой, что $\|\theta\| = \theta$. Снова используя то, что G_0 — нормальная подгруппа, устанавливаем, что G_0 содержит любой $R(\theta)$, такой, что

$0 \leq \|\theta\| \leq 2\|\theta_0\|$; но если $R(\theta)$ принадлежит G_0 , то и $R(\theta)R(\theta) = R(2\theta)$ принадлежит G_0 , и $R(3\theta)$ принадлежит G_0 и т. д.; следовательно, подгруппа G_0 содержит любой элемент $R(\theta)$ для $0 \leq \|\theta\| \leq \pi$ т. е. $G_0 = SO(3)$.

Собственная группа Лоренца также является простой, но доказать это сложнее.

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП I. ВРАЩЕНИЯ И СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ

Представление; точное представление; размерность; приводимость; неприводимое представление; законы преобразования тензоров; представления групп $SO(2)$ и $SO(3)$; инфинитезимальные операторы; операторы поднятия и опускания; эффективное и транзитивное действие группы; однородное пространство; регулярное представление; тессеральные гармоники; многочлены Лежандра и присоединенные функции Лежандра; рекуррентные соотношения и дифференциальное уравнение для P_l^n ; формула Родрига для P_l^n ; ортонормированность и полнота тессеральных гармоник; теорема сложения.

Предварительные сведения: гл. 18 и 19; элементарная теория матриц; знакомство со специальными функциями математической физики.

В этой и в двух следующих главах будет показано, что имеются существенные связи между тремя столь, казалось бы, разными дисциплинами, как представления групп, классические специальные функции и квантовая механика.

Представления групп тесно связаны с различными специальными функциями математической физики. В определенном смысле первостепенная роль этих функций заключается в демонстрации отношений симметрии. Например, функции Лежандра появляются (через сферические гармоники) в задачах со сферической симметрией в таких разных областях, как электростатика, акустика, теплопроводность, перенос нейтронов, квантовая механика водородоподобного атома. Функции Бесселя (с целыми и полужелыми индексами) возникают большей частью в задачах распространения волн, но более глубокое исследование показывает, что эти функции связаны скорее с некоторыми типами симметрии, чем с механизмом волновых процессов. Действительно, волновой процесс в непостоянном (даже сферически симметричном) потенциальном поле, вообще говоря, включает другие функции, например функции Лагерра в случае водородоподобных атомов, тогда как функции Бесселя появляются в случае, когда система инвариантна относительно полной группы движений, а не только относительно подгруппы вращений; см. следующую главу. В § 20.5 будет показано, что тригонометрические функции (в виде $e^{im\varphi}$) возникают в представлениях двумерной группы вращений и, следовательно, связаны с симметрией относительно некоторой оси.

20.1. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ

Пусть G — произвольная группа, а X — некоторое n -мерное (часто комплексное) векторное пространство. Гомоморфизм $\rho: g \rightarrow \rho(g)$ группы G на группу линейных преобразований в пространстве X ¹⁾ называется *n -мерным представлением группы G (на X)*. Линейные преобразования обычно описываются матрицами, и матрицу, описывающую преобразование $\rho(g)$, также обозначают через $\rho(g)$. Поэтому мы можем также рассматривать представление группы G как гомоморфизм группы G на группу матриц; тогда единица в G , обратный элемент в G и групповая операция представляются единичной матрицей, обратной матрицей и умножением матриц. Если гомоморфизм является изоморфизмом, то представление ρ называется *точным*. Если сама группа G есть группа линейных преобразований в некотором векторном пространстве Y , то тождественное (единичное) отображение $g \rightarrow g$ группы G на себя является точным представлением. Однако по многим соображениям и в этом случае имеет смысл рассматривать также другие представления.

Замечание. Используемые здесь формулировки несколько отличаются от приведенных в § 18.10, где представление группы G было гомоморфизмом группы G на любую группу (не обязательно линейных) преобразований.

Если X содержит собственное подпространство X_1 , которое инвариантно относительно всех преобразований $\rho(g)$, $g \in G$, то представление называется *приводимым*, а сужение преобразований $\rho(g)$ на X_1 дает представление меньшей размерности, называемое *подпредставлением*. Если таких собственных подпространств X_1 не существует, то представление ρ называется *неприводимым*.

Если G — непрерывная группа (группа Ли), то и от элементов матрицы $\rho(g)$ требуется непрерывная зависимость от g . Единственными непрерывными группами, которые мы будем здесь рассматривать, являются группы матриц, подобные унитарным, ортогональным и лоренцевым группам. В таком случае данное требование заключается в том, что элементы матрицы $\rho(g)$ должны быть непрерывными функциями элементов матрицы g , и это будет сразу видно во всех приведенных далее примерах.

20.2. ЗАКОНЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЕКТОРОВ И ТЕНЗОРОВ

Теперь мы опишем некоторые представления групп, естественным образом возникающие в физике. Согласно гл. 19, преобразования в трехмерном пространстве, которые получаются путем вращений

¹⁾ X часто называют представляющим пространством или пространством представления. — Прим. перев.

декартовых осей вокруг начала координат, составляют групп $SO(3)$. Различные представления этой группы даются законами преобразования для компонент тензоров. Если декартовы координаты преобразуются посредством $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$, где

$$x'_i = \sum_{k=1}^3 g_{ik} x_k, \quad (20.2.1)$$

а (g_{ik}) — матрица вращения [элемент группы $SO(3)$], то компоненты T_{ij} тензора второго ранга преобразуются по закону

$$T'_{ij} = \sum_k \sum_l g_{ik} g_{jl} T_{kl}. \quad (20.2.2)$$

Если девять величин T_{ij} обозначить через X_1, \dots, X_9 и рассматривать их как координаты точки \mathbf{X} в пространстве \mathbb{R}^9 , то каждое преобразование $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$ индуцирует преобразование $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$, и эти последние преобразования дают представление группы $SO(3)$ на \mathbb{R}^9 . Преобразования компонент тензора третьего ранга дают представление группы $SO(3)$ на \mathbb{R}^{27} и т. д.

Более специфичные представления могут иметь место в том случае, когда компоненты тензора связаны некоторыми отношениями симметрии. Допустим, что T_{ij} — компоненты тензора скоростей деформации в некоторой точке жидкости:

$$T_{ij} = \partial v_i / \partial x_j,$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ — векторное поле скоростей. Если течение безвихревое, то

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (20.2.3)$$

Нетрудно проверить, что эти соотношения инвариантны относительно вращений, т. е. если $T_{ij} = T_{ji}$ для всех i и j , то $T'_{ij} = T'_{ji}$ (см. ниже упражнение 2). Следовательно, в этом случае только шесть компонент T_{ij} являются независимыми, скажем величины Y_i , определяемые как

$$\begin{aligned} Y_1 &= T_{12}, & Y_2 &= T_{23}, & Y_3 &= T_{31}, \\ Y_4 &= T_{11}, & Y_5 &= T_{22}, & Y_6 &= T_{33}. \end{aligned}$$

Тогда вращение $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$ индуцирует линейное преобразование $\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y}'$ и получается 6-мерное представление группы $SO(3)$.

Пусть, кроме того, жидкость несжимаема; тогда имеется дополнительное соотношение

$$T_{11} + T_{22} + T_{33} = 0, \quad (20.2.4)$$

которое также инвариантно относительно вращений (см. ниже упражнение 3). В этом случае Y_6 можно опустить (т. е. его всегда можно вычислить как $-Y_4 - Y_5$), и преобразования компонент Y_1, \dots, Y_5 дают 5-мерное представление группы $SO(3)$.

Соотношения (20.2.3) и (20.2.4) определяют подпространства пространства \mathbb{R}^9 , которые инвариантны относительно преобразований (20.2.2); инвариантность этих подпространств позволяет привести 9-мерное представление к 6-мерному и 5-мерному представлениям. [Можно получить 8-мерное представление, используя лишь (20.2.4).] В дальнейшем выяснится, что 5-мерное подпространство нельзя далее разложить на инвариантные подпространства меньшей размерности; поэтому 5-мерное представление неприводимо. Окажется, что для любого нечетного целого m существует неприводимое m -мерное представление группы $SO(3)$; в случае $m > 1$ такое представление является точным.

Исходный закон преобразования (20.2.1) для компонент вектора x обеспечивает, разумеется, трехмерное представление. (Если вращения рассматривать как элементы некой абстрактной группы, то такое представление не более тривиально, чем любые другие.) Более того, ради полноты (в том смысле, который будет уточнен позднее) мы включаем в рассмотрение и одномерное представление, даваемое законом преобразования скаляров, согласно которому они вообще не преобразуются. Любой скаляр есть вещественное число x , и каждый элемент группы (вращение) отображается на тождественное преобразование $x \rightarrow x$ в \mathbb{R} . [Отсюда не следует делать вывод, что одномерное представление группы всегда состоит только из тождественного преобразования. Одномерное представление группы $GL(n, \mathbb{R})$ или группы $GL(n, \mathbb{C})$ дается отображением элемента M группы [матрица размера $n \times n$] на преобразование $x \rightarrow (\det M)x$ в \mathbb{R} или в \mathbb{C} .]

Представления групп Лоренца (см. в § 19.4) аналогично даются законами преобразования скаляров, векторов (т. е. 4-мерных векторов) и тензоров при преобразованиях Лоренца в пространстве-времени; эти представления имеют размерности 1, 4, 16, ...

Шестимерное представление (ограниченной) группы Лоренца \mathcal{L}_p задается законом преобразования для компонент электрического и магнитного полей \mathbf{E} и \mathbf{H} в свободном пространстве. (Интерпретация этого закона при помощи тензоров будет объяснена ниже в упражнении 5.) Согласно частному преобразованию Лоренца (19.4.1), компоненты электрического и магнитного полей преобразуются по закону

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma [E_y - (v/c) H_z], & E'_z &= \gamma [E_z + (v/c) H_y], \\ H'_x &= H_x, & H'_y &= \gamma [H_y + (v/c) E_z], & H'_z &= \gamma [H_z - (v/c) E_y], \end{aligned} \quad (20.2.5)$$

где

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}.$$

(См. любой хороший курс электромагнетизма.) При вращении компоненты поля \mathbf{E} и компоненты поля \mathbf{H} преобразуются независимо по обычному закону (20.2.1) для векторов. В соответствии с § 19.4

любой элемент группы \mathcal{L}_p можно записать в виде $R_1 P R_2$, где R_1 и R_2 — вращения в пространстве, а P — преобразование вида (19.4.1), и поэтому общее преобразование для \mathbf{E} и \mathbf{H} можно получить комбинацией (20.2.1) и (20.2.5).

Одна из целей теории представлений групп заключается в том чтобы найти все возможные законы преобразования физических величин, т. е. найти все возможные представления физической группы симметрии. Как видно из приведенных выше примеров существуют две основные процедуры: *построение* некоторых представлений из более простых при помощи тензоров и *расщепление* представлений на подпредставления (приведение). Однако начиная с § 20.5 описывается еще одна процедура, которая основана на действии некоторой группы на пространствах функций.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что представление вращений (20.2.1) при помощи преобразований (20.2.2) является гомоморфизмом. Иначе говоря, покажите, что если $\rho(g)$ — преобразование, индуцированное вращением g в пространстве \mathbb{R}^3 , то $\rho(g)\rho(g') = \rho(gg')$.

2. Покажите, что симметрия или антисимметрия тензора второго ранга сохраняется при вращениях, если использовать закон преобразования (20.2.2) т. е. покажите, что из $T_{ij} = T_{ji}$ (или $T_{ij} = -T_{ji}$) для всех i, j следует $T'_{ij} = T'_{ji}$ (или $T'_{ij} = -T'_{ji}$) для всех i, j .

3. Покажите, что след тензора второго ранга сохраняется при вращениях, т. е. что

$$T'_{11} + T'_{22} + T'_{33} = T_{11} + T_{22} + T_{33}.$$

4. Рассмотрим общее линейное преобразование в \mathbb{R}^n вида (20.2.1), где (g_{ij}) — невырожденная матрица размера $n \times n$. Покажите, что это преобразование ортогонально ($g^T g = g g^T = I$) в том и только в том случае, когда след любого тензора второго ранга инвариантен относительно (20.2.2).

5. Покажите, что можно получить закон преобразования (20.2.5) для электромагнитного поля при преобразовании Лоренца (19.4.1), преобразуя антисимметрический тензор второго ранга

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_x & -H_y & -E_x \\ -H_x & 0 & H_x & -E_y \\ H_y & -H_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix}$$

по закону

$$T'^{\mu\nu} = \sum_{\sigma=1}^4 \sum_{\tau=1}^4 q_{\sigma}^{\mu} q_{\tau}^{\nu} T^{\sigma\tau},$$

если координаты преобразуются по правилу

$$x'^{\mu} = \sum_{\sigma=1}^4 q_{\sigma}^{\mu} x^{\sigma}.$$

20.3. ДРУГИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП В ФИЗИКЕ

Теория Паули спина электрона (1927 г.) и релятивистское волновое уравнение Дирака (1928 г.) привели к отличным от законов преобразования векторов и тензоров законам преобразования при вращениях и лоренцевых преобразованиях. В свою очередь это обстоятельство привело к теории новых объектов, названных спинорами, которые таким образом заняли свое место в релятивистской квантовой механике наряду со скалярами, векторами и тензорами; спиноры будут рассмотрены в гл. 22. Законы преобразования для спиноров дают так называемые двузначные представления групп $SO(3)$ и \mathcal{L}_p , которые, однако, являются истинными представлениями накрывающих групп $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$, рассмотренных нами в § 19.7 и 19.8. Кажется парадоксальным тот факт, что эти накрывающие группы вообще появляются в физических задачах, и, к сожалению, в большинстве книг по квантовой механике этот вопрос как следует не выясняется. Разрешение этого парадокса, связанное с именем Г. Вейля, будет описано в гл. 22. В этом случае имеют место так называемые лучевые представления, которые, не являясь истинными представлениями (в смысле, определенном в данной главе), тем не менее вполне пригодны для описания квантовомеханических явлений. В книге Вейля [1928] показано, что лучевые представления какой-либо группы полностью определяются истинными представлениями соответствующих накрывающих групп; следовательно, представления групп $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$ играют определенную роль.

Далее из теории следует, что, поскольку многообразия групп $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$ односвязны, эти группы представляют собой так называемые универсальные накрывающие группы для групп $SO(3)$ и \mathcal{L}_p соответственно (см. гл. 24 и 27), и отсюда как следствие вытекает тот факт, что не существует многозначных представлений групп $SO(3)$ и \mathcal{L}_p с кратностью, большей двух. Таким образом, основываясь на теории групп, можно заключить, что векторы, тензоры и спиноры обеспечивают все возможные законы преобразования величин в квантовомеханических явлениях.

В классической физике делается различие между полярными векторами (такими, как импульс и электрическое поле) и аксиальными векторами (такими, как момент импульса и магнитное поле). Полярные векторы меняют знак при инверсии $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$, тогда как аксиальные не меняют знака. Следовательно, существуют два (и только два) пути расширения законов преобразования для векторов относительно полной ортогональной группы $O(3)$.

Симметрия или антисимметрия многочастичной волновой функции при взаимной перестановке (или более общей перестановке) тождественных частиц дает простое представление соответствующей группы перестановок. Более сложные представления групп перестановок появляются в теории парастатистики.

20.4. БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

В таких физических дисциплинах, как квантовая теория полн встречаются бесконечномерные представления, например, групп Лоренца и Пуанкаре. Естественно, такое представление является гомоморфизмом группы G на группу ограниченных линейных преобразований $\rho(g)$ в банаховом или гильбертовом пространстве X . Если G — непрерывная группа матриц, то необходимо, чтобы $\rho(g)$ было сильно непрерывной функцией g , т. е. требуется, чтобы для любой точки u в X

$$\|\rho(g)u - \rho(g_0)u\| \rightarrow 0,$$

когда матричные элементы g сходятся к матричным элементам g_0 .

В то время как все неприводимые представления компактных групп, подобных $SO(3)$, конечномерны, существуют бесконечномерные представления групп Лоренца, Пуанкаре и группы движений, такие, что нет конечномерных подпространств банахова или гильбертова пространства X , которые были бы инвариантны относительно всех преобразований $\rho(g)$, $g \in G$, и, следовательно, эти представления не могут быть разложены на конечномерные подпредставления. В следующей главе мы опишем бесконечномерные представления двумерной группы движений M_2 ; эти представления довольно типичны и включают функции Бесселя. За дальнейшим материалом по данному вопросу, в частности по представлениям групп Лоренца и Пуанкаре, мы отсылаем читателя к книгам Бёрнера [1955], Гельфанда, Минлоса и Шапиро [1958], Гельфанда, Граева и Виленкина [1962], Виленкина [1965], Уорнера [1972], Барута и Рончки [1977]; сколь обширен этот материал, можно судить по объему указанных книг.

В гл. 27 мы приведем пример непрерывной группы (группы Ли), которая не имеет точного конечномерного представления и поэтому вообще не может быть реализована в виде группы матриц.

20.5. ПРОСТОЙ СЛУЧАЙ: ГРУППА $SO(2)$

Общий метод отыскания представлений можно проиллюстрировать на довольно тривиальном примере группы $SO(2)$, элементами которой являются вращения в плоскости вокруг начала координат. Любая окружность с центром в начале координат инвариантна относительно этой группы. Пусть X^∞ — бесконечномерное пространство бесконечно дифференцируемых функций $f(\varphi)$, определенных на единичной окружности. (Поскольку наши рассуждения носят качественный характер, мы не будем вводить в этом пространстве норму или топологию.) Вращению g_α на угол α [элементу группы $SO(2)$] мы ставим в соответствие линейное преобразование

$$\rho_\alpha: f(\varphi) \rightarrow f(\varphi - \alpha) \quad (20.5.1)$$

в пространстве X^∞ . Соответствие $g_\alpha \rightarrow \rho_\alpha$ есть представление группы $SO(2)$ на пространстве X^∞ . (В этом примере равно допустимо и преобразование $f(\varphi) \rightarrow f(\varphi + \alpha)$; см. замечание в следующем параграфе.)

Важный метод нахождения подпредставлений заключается в использовании так называемых инфинитезимальных операторов представления, таких, как оператор T , получаемый в данном случае путем дифференцирования оператора ρ_α по α при $\alpha=0$, а именно

$$(Tf)(\varphi) = -f'(\varphi), \quad (20.5.2)$$

так что T можно рассматривать как предел отношения $(1/\alpha)(\rho_\alpha - \rho_0)$ при $\alpha \rightarrow 0$. Очевидно, что любое подпространство пространства X^∞ , инвариантное относительно всех преобразований ρ_α , будет инвариантно и относительно T . Мы ищем инвариантные подпространства как можно меньшей размерности. Следовательно, мы ищем такую функцию $f(\varphi)$, чтобы минимальное подпространство, содержащее $f(\varphi)$ и инвариантное относительно оператора T , не содержало никаких других функций, а если бы и содержало, то столь мало таких функций, сколь это возможно. В случае одномерного подпространства Tf должна быть кратна f , скажем $Tf = \lambda f$; это приводит к задаче на собственные значения

$$-f'(\varphi) = \lambda f(\varphi). \quad (20.5.3)$$

В нашем случае, поскольку функции из X^∞ должны быть однозначными на единичной окружности, собственные значения и собственные функции суть

$$\lambda = im \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad f(\varphi) = f_m(\varphi) = e^{-im\varphi}. \quad (20.5.4)$$

Для любого α действие преобразования ρ_α , заданного в (20.5.1), также сводится к умножению каждой собственной функции f_m оператора T на константу, а именно

$$(\rho_\alpha f_m)(\varphi) = e^{im\alpha} f_m(\varphi).$$

Таким образом, для любого m одномерное (комплексное) подпространство

$$X_m = \{Ae^{-im\varphi}; A \in \mathbb{C}\} \quad (20.5.5)$$

инвариантно не только относительно T , но и относительно всех преобразований ρ_α . По теореме Фурье, любую функцию из X^∞ можно разложить по данным функциям, а, значит, X^∞ есть линейная оболочка подпространства X_m .

Теперь будет показано, что *единственными* конечномерными представлениями группы $SO(2)$ на X^∞ являются представления, которые могут быть построены из полученных выше, ибо будет установлено, что любое конечномерное инвариантное подпростран-

ство X' пространства X^∞ есть прямая сумма конечного числа подпространств вида (20.5.5). В самом деле, пусть $f(\varphi)$ — любая функция из X' , записанная в виде ряда Фурье

$$f(\varphi) = \sum_m c_m e^{im\varphi}. \quad (20.5.6)$$

Докажем, что подпространство X' содержит не только эту сумму, но и каждый ее член $c_m e^{im\varphi}$ в отдельности; отсюда будет следовать, что X' содержит подпространство X_{-m} для каждого m , такого, что $c_m \neq 0$. Действительно, так как X' инвариантно относительно всех преобразований (20.5.1), оно содержит все образы $f(\varphi - \alpha)$ данной функции $f(\varphi)$ и поэтому содержит любую функцию вида

$$\sum_{k=1}^K h_k f(\varphi - \alpha_k),$$

где h_k и α_k — константы. Взяв эту сумму в качестве суммы Римана, которая аппроксимирует некий интеграл, и затем переходя к пределу, мы видим, что X' содержит любую функцию вида

$$\int h(\alpha) f(\varphi - \alpha) d\alpha,$$

а значит, в частности, и функцию

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\alpha} f(\varphi - \alpha) d\alpha = c_m e^{im\varphi}.$$

Таким образом, X' содержит X_{-m} , если $c_m \neq 0$, что и требовалось доказать. (Поскольку предполагалось, что X' конечномерно, теперь ясно, что c_m отличны от нуля лишь для конечного числа m .)

Для неабелевых групп размерность минимальных инвариантных подпространств может быть, вообще говоря, больше единицы.

20.6. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП МАТРИЦ НА X^∞

Идеи предыдущего параграфа можно обобщить. Если G — группа матриц размера $n \times n$, то ее элементы g определяют линейные преобразования в n -мерном пространстве V^n (совпадающем с \mathbb{R}^n или с \mathbb{C}^n). Допустим, что X^∞ обозначает пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$, заданных на V^n или на любой поверхности в V^n , которая инвариантна относительно G , и поставим в соответствие каждому элементу g из G линейное преобразование

$$\rho(g): f(x) \rightarrow f'(x) = f(g^{-1}x) \quad (20.6.1)$$

пространства X^∞ на себя (здесь штрих не обозначает дифференцирование). Если за преобразованием $\rho(g) = \rho(g_1)$ следует новое

преобразование $\rho(g_2)$, а именно

$$\rho(g_2): f'(x) \rightarrow f''(x) = f'(g_2^{-1}x),$$

то результатом будет преобразование

$$\rho(g_2)\rho(g_1): f(x) \rightarrow f''(x) = f'(g_2^{-1}x) = f'(g_1^{-1}(g_2^{-1}x)) = f'((g_2g_1)^{-1}x),$$

так что

$$\rho(g_2)\rho(g_1) = \rho(g_2g_1). \quad (20.6.2)$$

Следовательно, соответствие $g \rightarrow \rho(g)$ есть представление группы G на пространстве X^∞ .

Замечание. Появление в (20.6.1) g^{-1} (а не самого элемента g) необходимо для того, чтобы в (20.6.2) получить правильный порядок множителей. Поэтому же в (20.5.1) стоит знак минус, но, поскольку для абелевой группы указанный порядок не существует, в (20.5.1) равно допустимо и $f(\varphi + \alpha)$.

Замена функции $f(x)$ на $f(g^{-1}x)$ эквивалентна осуществлению отображения $x \rightarrow gx$ в V^n и переносу значений функции f по ходу данного отображения в точности так, как подстановка $f(t) \rightarrow f(t-a)$ переносит значения f на \mathbb{R} (вправо при $a > 0$) на расстояние a .

Если G — непрерывная группа и элементы группы зависят от параметров α, β, \dots , т. е. $g = g_{\alpha, \beta, \dots}$, где $g_{0, 0, \dots}$ — единичный элемент группы G , то инфинитезимальные операторы, соответствующие оператору T предыдущего параграфа, получаются дифференцированием $\rho(g_{\alpha, \beta, \dots})$ по каждому из параметров α, β, \dots и затем приравниванием $\alpha = \beta = \dots = 0$. Для группы $SO(3)$ эти инфинитезимальные операторы будут приведены в § 20.9.

20.7. ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Если пространство V^n содержит некоторую гладкую поверхность S меньшей размерности, инвариантную относительно всех преобразований группы G , подобно единичной окружности в случае группы $SO(2)$, то вместо X^∞ можно рассматривать пространство функций, определенных на S , а не на всем V^n . В упомянутом выше примере в качестве S можно было взять любую окружность с центром в начале координат. Если G совпадает с $SO(3)$, то в качестве S можно взять любую сферу в V^3 с центром в начале координат. В каждом из этих случаев действие группы на S обладает следующими свойствами.

а) Действие группы G *эффективно* по отношению к S ; это означает, что лишь единица e группы G дает тождественное отображение на S ; иначе говоря, если $g \neq e$, то существует хотя бы одна точка x на S , такая, что $gx \neq x$.

б) Действие группы G транзитивно по отношению к S ; это означает, что если x и y — две произвольные точки на S , то существует такой элемент g из G , который переводит x в y , т. е. $y=gx$.

Если S инвариантна относительно группы G и, кроме того, имеют место свойства а) и б), то S называется *однородным пространством* для G .

Допустим, например, что G состоит из всех преобразований вещественного трехмерного пространства, имеющих следующий вид:

$$x \rightarrow x' = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x,$$

где $ad - bc \neq 0$. Любая плоскость $x_3 = \text{const}$ инвариантна относительно G , и для нее имеет место свойство б), но для плоскости $x_3 = 0$ свойство а) не имеет места, потому что любая точка плоскости $x_3 = 0$ отображается на себя при преобразованиях вида

$$x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Следовательно, только плоскости $x_3 = \text{const} \neq 0$ представляют собой однородные пространства для данной группы.

Общая процедура отыскания неприводимых представлений непрерывной группы G линейных преобразований в V^n состоит из следующих шагов: находится однородное пространство S для G в пространстве V^n ; вводится ρ как представление $f(x) \rightarrow f(g^{-1}x)$ группы G на пространстве X^∞ функций на S [обычно это $L^2(S)$]; определяется полная система инфинитезимальных операторов; при помощи этих инфинитезимальных операторов находятся минимальные инвариантные подпространства пространства X^∞ . Специальные функции, связанные со свойствами симметрии, описываемыми группой G , являются элементами инвариантных подпространств пространства X^∞ .

Данная процедура будет более подробно описана в § 20.9 для группы вращений $SO(3)$. В этом случае все инвариантные подпространства, которые будут найдены, являются конечномерными. Как будет показано в следующей главе, это справедливо для любой компактной группы. В той же главе для компактных групп будет получен ответ на вопрос о том, можно ли таким образом найти все неприводимые представления.

Теория представлений некомпактных групп, где могут появиться бесконечномерные неприводимые представления, в значительной степени выходит за рамки настоящей книги, и в следующей главе

мы удовлетворимся обсуждением лишь некоторых основных свойств трех примеров: группы движений M_3 , где возникают функции Бесселя, группы Лоренца и группы $SL(2, \mathbb{C})$, где появляются спиноры.

20.8. РЕГУЛЯРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Для групп Ли однородным пространством может служить само многообразие группы. Рассмотрим, например, группу $G = SO(3)$. Вспомним, что многообразием группы $SO(3)$ является некоторая алгебраическая трехмерная поверхность S в пространстве девяти вещественных измерений; каждая точка S представляет некоторый элемент g из G . Для фиксированного h из G левая трансляция $g \rightarrow hg$ отображает S на себя. Пусть X^∞ —пространство всех функций $f(g)$ класса C^∞ на S или гильбертово пространство $L^2(S)$. Для любого $h \in G$ отображение

$$\rho(h): f(g) \rightarrow f(h^{-1}g)$$

есть линейное преобразование в X^∞ , а соответствие $h \rightarrow \rho(h)$ является представлением группы G . Аналогично связь отображения $f(g) \rightarrow f(gh)$ с элементом h также дает представление группы G (отметим, что в отображение входит сам элемент h , а не его обратный). Представления этого типа, называемые *левым* и *правым регулярными представлениями*, обсуждаются в следующей главе.

УПРАЖНЕНИЕ

Покажите, что множество левых трансляций эффективно и транзитивно по отношению к многообразию группы.

20.9. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ $SO(3)$

Методы, описанные в общих чертах в § 20.6 и 20.7, мы применим здесь к группе вращений. Наш подход несколько отличается от традиционного в том, что мы заранее не предполагаем ничего о сферических гармонических функциях $Y_l^m(\theta, \varphi)$ и получаем эти функции и их свойства из теории групп.

Пусть $g_\omega = g_{\omega_x, \omega_y, \omega_z}$ — матрица вращения на угол $\|\omega\|$ вокруг оси, направленной по вектору ω . Иначе говоря, $g_\omega = R(\omega)$, где $R(\cdot)$ определена при помощи (19.6.1). Пусть X^∞ —пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$ в \mathbb{R}^3 . Для каждой матрицы $g = g_\omega$ оператор $\rho(g)$ на X^∞ определен [согласно (20.6.1)] равенством

$$(\rho(g)f)(x) = f(g^{-1}x). \quad (20.9.1)$$

Эти операторы $\rho(g)$ составляют представление группы $SO(3)$.

Инфинитезимальные операторы этого представления получают следующим образом. В силу дифференцируемости функций из X при $\omega \rightarrow 0$ оператор

$$(1/\omega) [\rho(g_{\omega, 0, 0}) - \rho(g_{0, 0, 0})]$$

на X^∞ имеет предел, скажем L_1 . [Напомним, что $\rho(g_{0, 0, 0})$ — тождественный оператор $f \rightarrow f$ на X^∞ .] Любое конечномерное подпространство X_1 пространства X^∞ , инвариантное относительно всех $\rho(g)$, также инвариантно и относительно L_1 (т. е. под действием оператора L_1 это подпространство преобразуется на себя). Если $g = g_{\omega, 0, 0}$ и $f(x) = f(x, y, z)$, то

$$f(g^{-1}x) = f(x, y \cos \omega + z \sin \omega, -y \sin \omega + z \cos \omega),$$

и из этого следует, что

$$L_1 \stackrel{\text{def}}{=} d\rho(g_{\omega, 0, 0})/d\omega|_{\omega=0} = z\partial/\partial y - y\partial/\partial z. \quad (20.9.2)$$

Аналогично,

$$L_2 \stackrel{\text{def}}{=} d\rho(g_{0, \omega, 0})/d\omega|_{\omega=0} = x\partial/\partial z - z\partial/\partial x, \quad (20.9.3)$$

$$L_3 \stackrel{\text{def}}{=} d\rho(g_{0, 0, \omega})/d\omega|_{\omega=0} = y\partial/\partial x - x\partial/\partial y.$$

Это (с точностью до множителя $i\hbar$) квантовомеханические операторы компонент момента импульса (см. книгу Шиффа [1955, гл. IV]). Они удовлетворяют соотношениям коммутации

$$[L_i, L_j] = L_k \quad (i j k = 1 2 3, 2 3 1, 3 1 2). \quad (20.9.4)$$

Замечание. Инфинитезимальные операторы *любого* представления группы $SO(3)$ удовлетворяют этим соотношениям, потому что сами инфинитезимальные элементы группы удовлетворяют им; а именно если

$$T_i = \partial g_{\omega_1, \omega_2, \omega_3} / \partial \omega_i |_{\omega=0} \quad (i = 1, 2, 3),$$

то в соответствии с (19.9.1)

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

следовательно, $[T_i, T_j] = T_k$, где $i j k = 1 2 3, 2 3 1, 3 1 2$. Так как в представлении $g \rightarrow \rho(g)$ произведения отображаются на произведения, соотношения (20.9.4) имеют силу для любого представления.

Допустим теперь, что S — единичная сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (однородное пространство для группы вращений) и что $X^\infty(S)$ — пространство всех функций из класса C^∞ на S .

Начиная с операторов L_i можно получить инвариантные подпространства, используя так называемые операторы поднятия и опускания, введенные Дираком [1958, гл. 6] для квантования гармонического осциллятора и момента импульса. (См. также книгу Миллера [1973].) В сферических координатах

$$\begin{aligned} L_1 &= \sin \varphi \partial / \partial \theta + \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi \partial / \partial \varphi, \\ L_2 &= -\cos \varphi \partial / \partial \theta + \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi \partial / \partial \varphi, \\ L_3 &= -\partial / \partial \varphi. \end{aligned} \quad (20.9.5)$$

Определяя операторы L^\pm как $L_1 \pm iL_2$, имеем

$$L^\pm = e^{\pm i\varphi} (\mp i\partial / \partial \theta + \operatorname{ctg} \theta \partial / \partial \varphi) \quad (20.9.6)$$

и видим, что

$$[L^+, L^-] = -2iL_3 = 2i\partial / \partial \varphi. \quad (20.9.7)$$

Допустим, что $f(\theta, \varphi)$ — некоторая функция из пространства $X^\infty(S)$, не обращающаяся тождественно в нуль. Мы хотим найти минимальное инвариантное подпространство X_l , содержащее $f(\theta, \varphi)$, и выбрать эту функцию $f(\theta, \varphi)$ так, чтобы такое подпространство было столь мало в некотором смысле, сколь это возможно. Если $f(\theta, \varphi) = \sum_m g_m(\theta) e^{im\varphi}$ и если для некоторого m^* $g_{m^*}(\theta) \neq 0$, то из рассуждений § 20.5 следует, что подпространство X_l содержит все функции, кратные единственному члену суммы, а именно $g_{m^*}(\theta) e^{im^*\varphi}$. Применение операторов L^+ и L^- к функции вида $f(\theta) e^{im\varphi}$ дает функции $f_1(\theta) e^{i(m+1)\varphi}$ и $f_2(\theta) e^{i(m-1)\varphi}$ (по этой причине L^+ и L^- называют *операторами поднятия* и *опускания*), и в силу инвариантности X_l эти функции должны принадлежать X_l ; следовательно, X_l содержит функции вида

$$\psi_m(\theta, \varphi) = g_m(\theta) e^{im\varphi} \quad (20.9.8)$$

для $m = m^* + 1, m^* + 2, \dots$ и для $m = m^* - 1, m^* - 2, \dots$

Далее окажется, что функции $g_m(\theta)$ можно выбрать так, что X_l будет конечномерным; для этого $L^+ \psi_m$ должна обратиться в нуль для некоторого m , скажем для $m = l$, а $L^- \psi_m$ должна обратиться в нуль для некоторого $m \leq l$, скажем для $m = l'$; ниже мы покажем, что $l' = -l$. Первое из указанных условий сводится к уравнению $g_l'(\theta) - l \operatorname{ctg} \theta g_l(\theta) = 0$, что следует из формулы (20.9.6) для L^+ . Решением данного дифференциального уравнения является функция $g_l(\theta) = \operatorname{const} \cdot (\sin \theta)^l$, и, поскольку функции из X^∞ не имеют никаких особенностей на единичной сфере, отсюда следует, что $l \geq 0$; поэтому

$$\psi_l(\theta, \varphi) = C (e^{i\varphi} \sin \theta)^l, \quad (20.9.9)$$

где C — константа, которая будет определена позднее. Начиная с этой функции можно получить последовательность функций $\psi_{l-1},$

ψ_{l-2}, \dots повторным использованием оператора L^- , который преобразует функцию $g(\theta)e^{im\varphi}$ в функцию вида $h(\theta)e^{i(m-1)\varphi}$. Все эти функции принадлежат X_1 . Теперь мы, во-первых, покажем, что применяя оператор поднятия, нельзя получить никаких новых функций из уже полученных, т. е. что $L^+\psi_{m-1}$ — та же функция, что и ψ_m , с точностью до нормировки, а, во-вторых, установим, что $L^-\psi_{-l} = 0$, иначе говоря, что последовательность функций обрывается при $m = -l$. Мы используем индукцию для убывающего m начиная с $m = l$. Допустим, что для некоторого m функция $L^+\psi_m$ пропорциональна функции ψ_{m+1} , т. е. что $L^-L^+\psi_m$ пропорциональна функции ψ_m , и заметим, что это последнее утверждение заведомо верно для $m = l$, поскольку $L^+\psi_l = 0$. Согласно (20.9.7),

$$(L^+L^- - L^-L^+)\psi_m = -2iL_3\psi_m = -2m\psi_m, \quad (20.9.10)$$

откуда следует, что и $L^+L^-\psi_m$ также пропорциональна ψ_m ; следовательно, $L^+\psi_{m-1}$ пропорциональна ψ_m и индукцию можно продолжать.

Теперь определим функции ψ_m в явном виде. Пусть пропорциональность, о которой говорилось выше, записана следующим образом:

$$L^+\psi_m = -i\alpha_m\psi_{m+1}, \quad L^-\psi_{m+1} = -i\beta_m\psi_m. \quad (20.9.11)$$

Так как любая функция ψ_m содержит произвольный множитель, эти уравнения определяют лишь произведение $\alpha_m\beta_m$ посредством уравнения $L^-L^+\psi_m = -\alpha_m\beta_m\psi_m$. Поэтому можно положить $\beta_m = \alpha_m$ для всех m . Тогда из (20.9.10) будет следовать, что $-\alpha_{m-1}^2 + \alpha_m^2 = -2m$ для всех $m < l$, причем это уравнение справедливо и для $m = l$, если α_l положить равным нулю. При помощи индукции для убывающего m получим

$$\alpha_m^2 = (l+m+1)(l-m) \quad (m = l, l-1, \dots, -l);$$

следовательно, можно взять

$$\alpha_m = \sqrt{(l+m+1)(l-m)} \quad (m = l, l-1, \dots), \quad (20.9.12)$$

где имеется в виду положительное значение корня. В частности, $\alpha_{-l-1} = 0$; поэтому $L^-\psi_{-l} = 0$, что и требовалось доказать.

Итак, уравнения (20.9.9), (20.9.11) и (20.9.12) определяют все функции ψ_m ($-l \leq m \leq l$) с точностью до постоянной C . Линейная оболочка этих функций образует $(2l+1)$ -мерное подпространство X^{2l+1} пространства $X^\infty(\mathcal{S})$, инвариантное относительно L_1, L_2, L_3 , а также, как будет показано в конце § 20.14, и относительно преобразований $\rho(g)$ для всех g из группы $SO(3)$; существует лишь одно такое подпространство для каждого $l = 0, 1, 2, \dots$. Преобразования $\rho(g)$, действие которых ограничивается

подпространством X^{2l+1} , обозначаются через $\rho^l(g)$; они составляют конечномерное неприводимое представление группы G , и, как будет показано в § 21.13, только такие представления являются с точностью до эквивалентности единственно возможными неприводимыми представлениями.

20.10. ТЕССЕРАЛЬНЫЕ ГАРМОНИКИ. ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

В этом параграфе будет показано, что свойства сферических гармоник получаются из теории представлений группы вращений и что тессеральные гармоники образуют базис для представления группы $SO(3)$.

Если функции $\psi_m(\theta, \varphi)$, полученные в предыдущем параграфе, взять в качестве базиса в X^{2l+1} , то преобразования $\rho(g)$, действие которых ограничено подпространством X^{2l+1} , задаются матрицами размера $(2l+1) \times (2l+1)$. Но, прежде чем вычислить эти матрицы, следует подробнее рассмотреть функции ψ_m ; в дальнейшем они будут обозначаться через $Y_l^m(\theta, \varphi)$ для того, чтобы указать зависимость от l . Эти функции называются *тессеральными (поверхностными) гармониками*. *Поверхностная гармоника* есть функция $f(\theta, \varphi)$, такая, что функция $r^p f(\theta, \varphi)$ удовлетворяет уравнению Лапласа для некоторого целого числа p , и, как будет показано, функция $r^p Y_l^m(\theta, \varphi)$ удовлетворяет уравнению Лапласа. *Тессера* (это слово произошло от греческого слова, означающего «четырёхугольный») есть криволинейный прямоугольник, такой, как прямоугольники, на которые разбивается сферическая поверхность узловыми линиями функций $\operatorname{Re} Y_l^m$ или $\operatorname{Im} Y_l^m$, причем эти линии совпадают с определенными параллелями $\theta = \text{const}$ и определенными меридианами $\varphi = \text{const}$.

Скалярное произведение в пространстве $X^\infty(S)$ функций на единичной сфере S определяется следующим образом:

$$(f_1, f_2) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \overline{f_1(\theta, \varphi)} f_2(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (20.10.1)$$

Полношение пространства $X^\infty(S)$ относительно нормы $\|f\| = (f, f)^{1/2}$ есть гильбертово пространство $L^2(S)$. Операторы $\rho(g)$, $g \in SO(3)$, унитарны в $L^2(S)$, так как, во-первых, они определены во всем $L^2(S)$ и обратимы, а, во-вторых [в силу инвариантности интеграла (20.10.1) относительно вращений],

$$(\rho(g) f_1, \rho(g) f_2) = (f_1, f_2) \quad (20.10.2)$$

для всех f_1 и f_2 . Будет показано, что функции Y_l^m ортогональны в смысле скалярного произведения (20.10.1). Если выбрать надлежащим образом константу C в (20.9.9) (она может зависеть от l), то функции Y_l^m будут также нормированными. Мы покажем,

что эти функции образуют полную ортонормированную систему функций на сфере.

Если проинтегрировать только по φ , то сразу будет видно, что $Y_{l_1}^{m_1}$ и $Y_{l_2}^{m_2}$ ортогональны при $m_1 \neq m_2$, поскольку произведение $Y_{l_1}^{m_1} Y_{l_2}^{m_2}$ содержит множитель $e^{i(m_2 - m_1)\varphi}$. Из (20.9.5) следует антисимметрия операторов L_i , т. е. $(L_i f, g) = -(f, L_i g)$, откуда в свою очередь следует, что $L-L^+$ — симметрический оператор. Кроме того, из (20.9.11) вытекает, что

$$L-L^+ Y_l^m = -(\alpha_l^m)^2 Y_l^m, \quad (20.10.3)$$

где, согласно (20.9.12),

$$(\alpha_l^m)^2 = (l+m+1)(l-m) \quad (20.10.4)$$

[здесь несколько изменены обозначения по сравнению с (20.9.12)]. Поэтому соотношение

$$(L-L^+ Y_{l_1}^m, Y_{l_2}^m) = (Y_{l_1}^m, L-L^+ Y_{l_2}^m)$$

эквивалентно тому, что

$$(\alpha_{l_1}^m)^2 (Y_{l_1}^m, Y_{l_2}^m) = (\alpha_{l_2}^m)^2 (Y_{l_1}^m, Y_{l_2}^m);$$

следовательно, поскольку $\alpha_{l_1}^m \neq \alpha_{l_2}^m$ для $l_1 \neq l_2$, функции Y_l^m ортогональны.

Теперь покажем, как нужно выбрать константу C в (20.9.9), чтобы нормировать функции Y_l^m . Оператором, сопряженным к L^+ , является оператор $-L^-$; поэтому

$$(L^+ Y_l^m, Y_l^{m+1}) = (Y_l^m, -L^- Y_l^{m+1}).$$

Поскольку $\beta_m = \alpha_m = \alpha_l^m$, из (20.9.11) следует, что

$$(-i\alpha_l^m Y_l^{m+1}, Y_l^{m+1}) = (Y_l^m, i\alpha_l^m Y_l^m),$$

откуда видно, что для данного l $\|Y_l^m\|^2$ не зависит от m . Полагая $\psi_l = Y_l^l$ и используя (20.9.9), получаем

$$\begin{aligned} \|Y_l^l\|^2 &= 2\pi |C|^2 \int_0^\pi \sin^{2l+1} \theta d\theta = \\ &= 4\pi |C|^2 \frac{2 \cdot 4 \dots (2l)}{1 \cdot 3 \dots (2l+1)} = 4\pi |C|^2 \frac{(2l)!}{(2l+1)!}. \end{aligned} \quad (20.10.5)$$

Итак, все функции Y_l^m будут нормированы, если взять константу C в виде

$$C = C_l = [(-1)^l / (2l)!] \sqrt{(2l+1)! / (4\pi)}. \quad (20.10.6)$$

Используя Y_l^l , заданную формулами (20.9.9) и (20.10.6), а также остальные Y_l^m , получаемые из Y_l^l при помощи рекуррентных соотношений (20.9.11), а именно $L^- Y_l^{m+1} = -i\alpha_l^m Y_l^m$, мы определим

новые функции $P_l^m(\omega)$, называемые *присоединенными функциями Лежандра*, для $-1 \leq \omega \leq 1$ следующим образом:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{[(2l+1)/(4\pi)](l-m)!/(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (-l \leq m \leq l). \quad (20.10.7)$$

Замечания. (1) Множители $(-1)^l$ в (20.10.6) и $(-1)^m$ в (20.10.7) не являются обязательными, но общеприняты. (2) Исторически $P_l^m(\omega)$ впервые определялись при помощи формул (20.11.6) (см. следующий параграф), а затем определялись $Y_l^m(\theta, \varphi)$ посредством формулы (20.10.7). (3) Символ $P_l^m(\omega)$ используется различными авторами для обозначения несколько отличающихся функций. Здесь принято то же, что у Толмена [1968] и у других авторов для всех m (т. е. $-l \leq m \leq l$); оно совпадает с первоначальным определением Феррерса (см. книгу Уиттекера и Ватсона [1927]) для $m \geq 0$.

20.11. ПРИСОЕДИНЕННЫЕ ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

В этом параграфе свойства функций $P_l^m(\omega)$ выводятся из теории представлений групп.

Из рекуррентных соотношений для Y_l^m , используя формулу (20.9.6) для операторов L^\pm , легко вывести рекуррентные соотношения для P_l^m :

$$\sqrt{1-\omega^2} P_l^{m'}(\omega) + \frac{m\omega}{\sqrt{1-\omega^2}} P_l^m(\omega) = P_l^{m+1}(\omega) \quad (-l \leq m \leq l), \quad (20.11.1)$$

$$\sqrt{1-\omega^2} P_l^{m'}(\omega) - \frac{m\omega}{\sqrt{1-\omega^2}} P_l^m(\omega) = -(l+m)(l-m+1) P_l^{m-1}(\omega) \quad (-l \leq m \leq l), \quad (20.11.2)$$

где штрих означает дифференцирование по ω . Если первое из этих уравнений продифференцировать еще раз, а затем при помощи второго уравнения исключить P_l^{m+1} и P_l^{m-1} , то получится дифференциальное уравнение Лежандра

$$(1-\omega^2) P_l^{m''} - 2\omega P_l^{m'} + [l^2 + l - m^2/(1-\omega^2)] P_l^m = 0 \quad (20.11.3)$$

для $P_l^m(\omega)$. Рекуррентное соотношение (20.11.1) можно записать в виде

$$(1-\omega^2)^{-(m+1)/2} P_l^{m+1}(\omega) = d[(1-\omega^2)^{-m/2} P_l^m(\omega)]/d\omega,$$

откуда путем очевидной индукции можно получить

$$(1-\omega^2)^{-m/2} P_l^m(\omega) = \left(\frac{d}{d\omega}\right)^{l+m} [(1-\omega^2)^{l/2} P_l^{-l}(\omega)]. \quad (20.11.4)$$

Далее будет показано, что

$$P_l^{-l}(\omega) = [(-1)^l/(2^l l!)] (1-\omega^2)^{l/2}, \quad (20.11.5)$$

и мы приходим к так называемой формуле Родрига

$$P_l^m(\omega) = \frac{1}{2^l l!} (1 - \omega^2)^{m/2} \left(\frac{d}{d\omega} \right)^{l+m} (\omega^2 - 1)^l \\ (m = -l, -l+1, \dots, l). \quad (20.11.6)$$

[Для этой цели можно было бы сначала взять Y_l^{-l} , а не Y_l^l и определять остальные Y_l^m при помощи оператора поднятия L^+ , а не оператора опускания L^- . Тем не менее общая связь между Y_l^m и Y_l^{-m} , которая сейчас потребуется, представляет и самостоятельный интерес.] Поскольку L^+ и L^- комплексно сопряжены, уравнения, комплексно сопряженные уравнениям (20.9.11), имеют вид

$$L^- \overline{\psi_m} = i\alpha_m \overline{\psi_{m+1}}, \quad L^+ \overline{\psi_{m+1}} = i\alpha_m \overline{\psi_m};$$

отсюда видно, что функции $(-1)^m \overline{\psi_m}$ удовлетворяют тем же уравнениям, что и функции ψ_{-m} ; следовательно,

$$Y_l^{-m} = k (-1)^m \overline{Y_l^m},$$

где k — постоянная, которая равна 1, в чем мы скоро убедимся. Поскольку постоянная C в (20.10.6) вещественна, формулы (20.9.9) и (20.10.7) показывают, что $P_l^l(\omega)$ — вещественная функция; далее из (20.11.1) следует, что и все $P_l^m(\omega)$ тоже вещественны; значит, согласно (20.10.7), Y_l^0 вещественна. Положив в приведенном выше уравнении $m=0$, мы видим, что $k=1$. Итак,

$$Y_l^{-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m \overline{Y_l^m(\theta, \varphi)}. \quad (20.11.7)$$

Так как $Y_l^l = C(e^{i\varphi} \sin \theta)^l$, причем C задана в (20.10.6), из (20.11.7) следует явное выражение для Y_l^{-l} , и благодаря (20.10.7) мы получим искомый вид (20.11.5) для P_l^{-l} . (Некоторые авторы определяют Y_l^{-m} как функцию, комплексно сопряженную к Y_l^m , определив последнюю для $m \geq 0$. Предложенная здесь процедура имеет некоторые преимущества; например, матрицы $\rho_{m'm}^l$ неприводимых представлений группы вращений, которые приводятся ниже, являются симметричными.)

Ясно, что для четного m $P_l^m(\omega)$ является многочленом. $P_l^0(\omega)$ обычно обозначается как $P_l(\omega)$ и называется *многочленом Лежандра степени l* .

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что $\int_0^1 (1 - \omega^2)^l d\omega = [2l/(2l+1)] \int_0^1 (1 - \omega^2)^{l-1} d\omega$, и используйте

этот результат, чтобы при помощи индукции показать правильность вычисления интеграла в (20.10.5).

2. Выразите операторы L^\pm через переменные ω и φ , где $\omega = \cos \theta$, и выведите рекуррентные соотношения (20.11.1), (20.11.2) из (20.9.11).

3. Для случая $m=0$ проверьте, что формула Родрига (20.11.6) дает решение дифференциального уравнения Лежандра, т. е. уравнения (20.11.3) с $m=0$. [Это решение есть $P_l(\omega)$.] Вы можете сделать то же самое для $m \neq 0$, но это несколько сложнее.

4. Так как P_l^m и P_l^{-m} удовлетворяют одному и тому же уравнению (20.11.3) (это уравнение не меняется при замене m на $-m$), причем оно имеет самое большое одно решение, регулярное при $\omega = \pm 1$, то эти функции пропорциональны. Найдите коэффициент пропорциональности. *Предостережение на будущее:* некоторые авторы полагают функцию P_l^{-m} равной P_l^m .

5. Покажите, что справедливо отличное от (20.11.6) выражение функции $P_l^m(\omega)$, а именно

$$P_l^m(\omega) = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{1}{2^m m!} (1-\omega^2)^{-m/2} \left(\frac{d}{d\omega}\right)^{l-m} (\omega^2-1)^l \quad (20.11.8)$$

для $-l \leq m \leq l$.

20.12. МАТРИЦЫ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ $SO(3)$. УГЛЫ ЭЙЛЕРА

При заданном l функции Y_l^m ($m=l, l-1, \dots, -l$) берутся в качестве базисных векторов в пространстве X^{2l+1} ($2l+1$)-мерного представления группы $SO(3)$, которое мы нашли в предыдущих параграфах. Для любой функции $f=f(\theta, \varphi)$ $\rho(g)f$ является функцией, полученной путем перенесения значений функции $f(\theta, \varphi)$ при движении по сфере согласно вращению g . Следовательно, матрица $\rho^l(g)$ преобразования $\rho(g)$, действие которого ограничено подпространством X^{2l+1} , имеет элементы $\rho_{m'm}^l$, задаваемые посредством разложения

$$(\rho(g)Y_l^m)(\theta, \varphi) = \sum_{m'=-l}^l \rho_{m'm}^l(g) Y_l^{m'}(\theta, \varphi) \quad (m=l, l-1, \dots, -l). \quad (20.12.1)$$

Удобно выражать вращение при помощи углов Эйлера α, β, γ и писать $\rho(\alpha, \beta, \gamma)$ вместо $\rho(g)$. Тогда g является результатом следующих последовательных вращений:

- 1) вращения вокруг оси z на угол γ ,
- 2) вращения вокруг оси x на угол β ,
- 3) вращения вокруг оси z на угол α .

(См. упражнения 3—5 § 21.5.) Соответственно матрица ρ^l разлагается следующим образом:

$$\rho^l(\alpha, \beta, \gamma) = \rho^l(\alpha, 0, 0) \rho^l(0, \beta, 0) \rho^l(0, 0, \gamma).$$

Первый и третий множители в этом произведении представляют собой диагональные матрицы; преобразование $\rho(\alpha, 0, 0)$ лишь заменяет в функции φ на $\varphi - \alpha$, и, значит, при этом преобразовании Y_l^m умножается на $e^{-i\alpha m}$, т. е.

$$\rho_{m'm}^l(\alpha, 0, 0) = e^{-i\alpha m'} \delta_{m'm}.$$

Таким образом, $\rho_{m'm}^l(\alpha, \beta, \gamma)$ можно представить в следующем виде:

$$\rho_{m'm}^l(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha m'} P_{m'm}^l(\cos \beta) e^{-i\gamma m}. \quad (20.12.2)$$

Функции $P_{m'm}^l(\omega)$ тесно связаны с многочленами Якоби; подробно их свойства рассматриваются в книгах Гельфанда, Минлоса и Шапиро [1958] и Виленкина [1965], к которым и отсылается читатель за деталями. (Определение функций $P_{m'm}^l$, данное ниже, совпадает с определением Гельфанда и др. и отличается комплексным сопряжением от определения Виленкина.) Функции $P_{m'm}^l$ имеют вид

$$P_{m'm}^l(\omega) = C (1 + \omega)^{-(m+m')/2} (1 - \omega)^{(m-m')/2} \times \left(\frac{d}{d\omega} \right)^{l-m'} [(1 - \omega)^{l-m} (1 + \omega)^{l+m}], \quad (20.12.3)$$

где

$$C = i^{m'-m} 2^{-l} \left(\frac{(l+m')!}{(l-m)!(l+m)!(l-m')!} \right)^{1/2}. \quad (20.12.4)$$

(Возможно, логичнее было бы вынести явно множитель $i^{m'-m}$ в определение $\rho_{m'm}^l$ (20.12.2), а не оставлять его в формуле для функции $P_{m'm}^l$, которая была бы тогда вещественной для $-1 \leq \omega \leq 1$, но так делать не принято.)

При $m=0$ (и при $m'=0$) эти функции пропорциональны присоединенным функциям Лежандра. Сравнение (20.12.3) с (20.11.8) показывает, что

$$P_{m'0}^l(\omega) = (-i)^{m'} \sqrt{(l-m')!/(l+m')!} P_{m'}^{l'}(\omega) \quad (20.12.5)$$

[в частности, $P_{00}^l(\omega) = P_l(\omega)$]; следовательно,

$$\rho_{m'0}^l(\alpha, \beta, 0) = \sqrt{4\pi/(2l+1)} Y_{m'}^{l'}(\beta, \alpha - \pi/2). \quad (20.12.6)$$

[То же самое получается и для $\rho_{m'0}^l(\alpha, \beta, \gamma)$, ибо $\rho_{m'0}^l$ не зависит от γ .]

УПРАЖНЕНИЯ

1. Проверьте (20.12.1), когда g —вращение вокруг оси z .
2. Проверьте (20.12.1), когда g —вращение на угол π вокруг оси x .
3. Покажите, что для $l=1$ функции $P_{m'm}^l$ суть элементы матрицы

$$(P_{m'm}^1) = \begin{pmatrix} (1+\omega)/2 & -i\sqrt{(1-\omega^2)/2} & (\omega-1)/2 \\ -i\sqrt{(1-\omega^2)/2} & \omega & -i\sqrt{(1-\omega^2)/2} \\ (\omega-1)/2 & -i\sqrt{(1-\omega^2)/2} & (1+\omega)/2 \end{pmatrix},$$

где строки нумеруются сверху вниз, соответствуя $m' = -1, 0, 1$, а столбцы — слева направо, соответствуя $m = -1, 0, 1$. Отметим, что эта матрица унитарна.

4. Отождествляя левую часть (20.12.1) с $Y_{m'}^l(\theta', \varphi')$, умножим это равенство на r , перейдем к декартовым координатам, полагая $z' = r \cos \theta'$, $x' \pm iy' = r \sin \theta' e^{\pm i\varphi'}$ (и аналогично для x, y, z), и возьмем $l=1$. Используя результат упражнения 3, покажите, что в случае, когда g —вращение на угол β

вокруг оси x (т. е. $\alpha = \gamma = 0$), преобразование, описываемое в (20.12.1), имеет вид

$$x' = x, \quad y' = y \cos \beta + z \sin \beta, \quad z' = -y \sin \beta + z \cos \beta.$$

5. Покажите, что $P_{m'm}^l = P_{mm'}^l$.

6. Покажите, что в (20.12.6) можно избежать появления угла $\alpha - \pi/2$ вместо α , если вторым шагом в определении углов Эйлера принять вращение на угол β вокруг оси y , а не вокруг оси x .

20.13. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ТЕССЕРАЛЬНЫХ ГАРМОНИК

В формуле (20.12.1), которая показывает, как для заданного l функции Y_l^m при вращении g преобразуются в комбинации этих же функций, положим $m=0$ и допустим, что g — вращение с углами Эйлера $\alpha, \beta, 0$, так что

$$(\rho(\alpha, \beta, 0) Y_l^0)(\theta, \varphi) = \sum_{m'=-l}^l \rho_{m'0}^l(\alpha, \beta, 0) Y_l^{m'}(\theta, \varphi). \quad (20.13.1)$$

Оператор $\rho(\alpha, \beta, 0)$ переносит значения функции при движении по сфере согласно вращению g , которое переводит полярную ось в направление, заданное углами $\beta, \alpha - \pi/2$. Следовательно, левая часть в (20.13.1) равна функции

$$Y_l^0(\theta_{12}, 0),$$

где θ_{12} — угол между направлениями $(\beta, \alpha - \pi/2)$ и (θ, φ) [напомним, что $Y_l^0(\theta, \varphi)$ не зависит от φ]. Переобозначим эти направления: пусть первое будет (θ_1, φ_1) , а второе — (θ_2, φ_2) , и используем тригонометрическое тождество

$$\cos \theta_{12} = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (20.13.2)$$

Наконец, подставляя (20.12.6) в (20.13.1), получаем

$$Y_l^0(\theta_{12}, 0) = \sqrt{4\pi/(2l+1)} \sum_{m=-l}^l \overline{Y_l^m(\theta_1, \varphi_1)} Y_l^m(\theta_2, \varphi_2), \quad (20.13.3)$$

что и представляет собой искомую теорему сложения. Ее можно записать также в виде

$$P_l(\cos \theta_{12}) = P_l(\cos \theta_1) P_l(\cos \theta_2) + 2 \sum_{m=1}^l [(l-m)!/(l+m)!] P_l^m(\cos \theta_1) P_l^m(\cos \theta_2) \cos m(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (20.13.4)$$

Мимоходом отметим, что в частном случае $l=1$ мы снова получаем тригонометрическую формулу (20.13.2), ибо $P_1(\omega) = \omega$, $P_1^1(\omega) = \sqrt{1-\omega^2}$.

20.14. ПОЛНОТА СИСТЕМЫ ТЕССЕРАЛЬНЫХ ГАРМОНИК

В этом параграфе будет показано, что тессеральные гармоники образуют полную систему для разложения функций, определенных на сфере. Так как (20.11.3) является дифференциальным уравнением типа Штурма — Лиувилля в интервале $(-1, 1)$ (с особыми концевыми точками типа предельной точки на каждом конце), требуемую полноту можно установить при помощи методов § 10.6 тома I настоящей книги. Здесь предлагается другой подход, основанный на теории потенциала.

Формула Родрига (20.11.6) показывает, что функция $P_l^m(\omega)$ содержит только четные степени ω , когда $l+m$ четно, или только нечетные степени ω , когда $l+m$ нечетно, и, кроме того, имеется множитель $\sqrt{1-\omega^2}$ для нечетного m . Из (20.10.7), переходя к декартовым координатам

$$r \cos \theta = z, \quad r \sin \theta e^{i\varphi} = x + iy, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

можно установить, что $r^l Y_l^m(\theta, \varphi)$ является однородным многочленом степени l по x, y, z , т. е. что каждый член имеет вид $\text{const} \cdot x^i y^j z^k$, где $i+j+k=l$.

Теперь покажем, что эти многочлены удовлетворяют уравнению Лапласа. Записанный в сферических координатах лапласиан можно выразить через операторы L_i , используя (20.9.5) и (20.9.6):

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \\ &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + L^- L^+ + L_3^2 - i L_3 \right]. \end{aligned} \quad (20.14.1)$$

Функция Y_l^m есть собственная функция оператора $L^+ L^-$ и оператора L_3 , соответствующая собственному значению $-(\alpha_l^m)^2$ в случае первого оператора и собственному значению $-im$ в случае второго оператора. Следовательно, с учетом (20.9.12) мы имеем

$$\begin{aligned} \nabla^2 r^l Y_l^m(\theta, \varphi) &= \frac{1}{r^2} [l(l+1) - (l+m+1)(l-m) - m^2 - m] \times \\ &\times r^l Y_l^m(\theta, \varphi) = 0. \end{aligned}$$

Общий однородный многочлен $p(x, y, z)$ степени l включает $\frac{1}{2}(l+1)(l+2)$ членов вида $x^i y^j z^k$. В самом деле, если $i=0$, то существует $l+1$ возможных значений j , если $i=1$, то существует l возможных значений j , и т. д.; во всех случаях $k=l-i-j$ и поэтому число членов равно $1+2+\dots+(l+1) = \frac{1}{2}(l+1)(l+2)$. Теперь допустим, что $p(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Так как $\nabla^2 p$ является однородным многочленом степени $l-2$, то для обращения его в нуль нужно наложить $\frac{1}{2}(l-1)l$ условий на коэффициенты многочлена p , причем нетрудно видеть, что эти условия независимы. Следовательно, гармонические много-

члены степени l образуют пространство

$$(l+1)(l+2)/2 - (l-1)l/2 = 2l+1$$

измерений. Это пространство является в точности линейной оболочкой многочленов

$$r^l Y_l^m \quad (m = l, l-1, \dots, -l),$$

ибо число их равно $2l+1$ и очевидно, что они независимы в силу ортогональности функций Y_l^m . Отсюда следует заключение, что любой гармонический многочлен можно выразить через функции $r^l Y_l^m(\theta, \varphi)$.

Если $f(\theta, \varphi)$ — произвольная непрерывная функция на единичной сфере, то, согласно разрешимости задачи Дирихле в теории потенциала, существует функция $\psi(x, y, z)$, которая удовлетворяет уравнению $\nabla^2 \psi = 0$ при $x^2 + y^2 + z^2 < 1$, является непрерывной при $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ и принимает значения $f(\theta, \varphi)$ на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (Фактически ψ выражается через f при помощи интеграла Пуассона.) Функция ψ аналитична в шаре и может быть представлена в виде степенного ряда по x, y, z . Члены этого разложения, соответствующие данной степени l , являются гармоническими многочленами степени l и поэтому могут быть выражены через функции $r^l Y_l^m(\theta, \varphi)$; таким образом,

$$\psi(x, y, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_l^m r^l Y_l^m(\theta, \varphi).$$

Можно показать, что для непрерывной граничной функции f решение задачи Дирихле ψ при $r \rightarrow 1$ сходится к f равномерно по углам, т. е. сходится в L^2 ; откуда

$$f(\theta, \varphi) = \sum_l \sum_m A_l^m Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (20.14.2)$$

в смысле сходимости в среднем. Поскольку непрерывные функции плотны в $L^2(S)$, ясно, что тессеральные гармоники образуют полную ортонормированную систему функций на сфере. Кроме того, ясно, что любое распределение $f(\theta, \varphi)$ в $L^2(S)$ можно представить в виде (20.14.2), где коэффициентами ряда являются величины

$$A_l^m = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \overline{Y_l^m(\theta, \varphi)} f(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi,$$

а ряд сходится к $f(\theta, \varphi)$ в среднем.

Теперь мы можем заполнить тот пробел, который возник при рассмотрении представлений группы $SO(3)$ в § 20.9. Вспомним, что X^∞ определялось как пространство всех функций класса C^∞ на сфере, а X^{2l+1} было подпространством, являющимся линейной

оболочкой функций

$$Y_l^m \quad (m = l, l-1, \dots, -l).$$

Было доказано, что X^{2l+1} инвариантно (т. е. преобразуется само в себя) относительно инфинитезимальных операторов L_1, L_2, L_3 представления ρ , и теперь можно доказать, что X^{2l+1} инвариантно также относительно преобразований $\rho(g), g \in SO(3)$: в самом деле, пусть $\rho(g)Y_l^m$ — функция от θ, φ , полученная путем перенесения значений $Y_l^m(\theta, \varphi)$ при движении по сфере согласно вращению g ; следовательно, функция $r^l \rho(g)Y_l^m$ является также однородным гармоническим многочленом степени l по x, y, z и поэтому может быть выражена в виде линейной комбинации многочленов $r^l Y_l^{m'}(\theta, \varphi)$, $m' = l, l-1, \dots, -l$. Отсюда следует инвариантность подпространства X^{2l+1} .

Полнота системы тессеральных гармоник показывает, что пространство $L^2(S^2)$, где S^2 — единичная сфера в \mathbb{R}^3 , есть прямая сумма (относительно L^2 -нормы) подпространств X^{2l+1} ($l = 0, 1, 2, \dots$).

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП II. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ. ДВИЖЕНИЯ. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Унитарное представление; приведение; разложение; прямая сумма; полное приведение; лемма Шура; компактные и некомпактные группы; инвариантное интегрирование; мера Хаара; правая и левая трансляции; инвариантное интегрирование в $SU(2)$; площадь n -мерной сферы; регулярные представления; инвариантное интегрирование в $SO(3)$; теоремы полноты Петера—Вейля и Виленкина; волновые функции симметричного волчка; группы движений; функции Бесселя; рекуррентные соотношения, дифференциальные уравнения и порождающие уравнения; разложение плоской волны; характеры; полнота представлений группы $SO(3)$.

Предварительные сведения: гл. 18—20.

Неприводимые представления группы $SO(2)$, рассмотренные в § 20.5, являются одномерными; неприводимые представления группы $SO(3)$, которые были рассмотрены в § 20.9, многомерны, причем их размерность равна $2l+1$, где $l=0, 1, 2, \dots$; неприводимые представления группы движений, которые рассмотрены в этой главе, бесконечномерны. Будет показано, что такое различие отражает различные свойства групп.

21.1. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ. УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Первым шагом при классификации представлений является выяснение следующего вопроса: какие два представления можно считать эквивалентными, так чтобы нужно было описывать лишь одно из них? Два представления $\rho(g)$ и $\rho'(g)$ на (конечномерном) пространстве X будут *эквивалентны*, если первое из них может быть преобразовано во второе путем подходящей замены координат в пространстве X , т. е. если существует такая матрица A , что $\rho(g) = A^{-1}\rho'(g)A$ для всех g . В более общей формулировке допустим, что ρ и ρ' — представления на разных пространствах X и X' одинаковой размерности и существует такая матрица A , что соответствие $x \rightarrow x' = Ax$ есть взаимно однозначное отображение X на X' , а $\rho(g)$ и $A^{-1}\rho'(g)A$ — одинаковые матрицы для любого элемента g ; тогда ρ и ρ' являются эквивалентными представлениями.

Как было указано в § 20.4, в бесконечномерном случае $\rho(g)$ для каждого g есть ограниченное линейное преобразование в банаховом или гильбертовом пространстве. Допустим, что ρ и ρ' — представления в пространствах X и X' одного и того же типа, ска-

жем, оба этих пространства являются сепарабельными гильбертовыми пространствами; допустим далее, что существует ограниченное линейное преобразование A из X на X' с обратным A^{-1} и что $\rho(g)$ и $A^{-1}\rho'(g)A$ — один и тот же оператор для любого g ; тогда ρ и ρ' — эквивалентные представления.

Это отношение эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно, а потому разбивает совокупность всех представлений данной группы на классы эквивалентности. Естественно попытаться выбрать из каждого класса эквивалентности представление с наиболее подходящими свойствами. В большинстве случаев можно выбрать *унитарное* представление, т. е. представление, в котором каждое преобразование $\rho(g)$ есть унитарная матрица или унитарный оператор для всех $g \in G$; благодаря теореме, сформулированной в следующем параграфе, такое представление дает известные преимущества.

Следует заметить, что вопрос об эквивалентности двух представлений ρ и ρ' не сводится лишь к вопросу об изоморфизме двух групп матриц $\{\rho(g)\}$ и $\{\rho'(g)\}$: эти матрицы должны быть одинакового размера в двух представлениях, а представления должны быть связаны так, что $\rho(g) = A^{-1}\rho'(g)A$ для всех g и для некоторой фиксированной матрицы A . Все представления ρ^l ($l=0, 1, 2, \dots$) группы $SO(3)$, найденные нами в § 20.3, неэквивалентны (они имеют различные размерности), но все полученные группы матриц $\{\rho^l(g)\}$ изоморфны при $l \neq 0$: фактически все они изоморфны группе $SO(3)$. Следующий пример показывает, что два представления могут иметь одинаковую размерность, но быть неэквивалентными. Пусть G — группа тора T_2 , состоящая из диагональных унитарных матриц размера 2×2 , т. е. матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad |\alpha| = 1, \quad |\beta| = 1.$$

Два представления на \mathbb{C} , заданные в виде

$$\rho(g): z \rightarrow \alpha z, \quad \rho'(g): z \rightarrow \beta z,$$

не являются эквивалентными; никаким преобразованием плоскости z нельзя для всех g перевести $\rho(g)$ в $\rho'(g)$. Для $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\rho(g)$ есть тождественное преобразование, тогда как $\rho'(g)$ не является таковым.

21.2. ПРИВЕДЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Следующий шаг классификации состоит в разложении данного представления на столько неприводимых компонент, на сколько это возможно. Если ρ — представление на конечномерном пространстве X и если подпространство X_1 инвариантно относительно

всех $\rho(g)$, т. е. если из того, что $x \in X_1$, следует, что $\rho(g)x \in X_1$ для всех g , то представление ρ называется *приводимым*, как и в предыдущей главе (в противном случае ρ называется *неприводимым*). Пусть найдется другое инвариантное подпространство X_2 , причем такое, что $X = X_1 \oplus X_2$ (это выражение означает, что X_1 и X_2 не имеют никаких общих векторов, кроме нулевого, и любой $x \in X$ можно записать в виде $x_1 + x_2$, где $x_1 \in X_1$, а $x_2 \in X_2$). В таком случае представление ρ называется *вполне приводимым* или *разложимым*. Тогда если e^1, \dots, e^n является базисом в X , таким, что e^1, \dots, e^m — базис в X_1 , а e^{m+1}, \dots, e^n — базис в X_2 , то относительно этого базиса все матрицы $\rho(g)$ имеют вид¹⁾

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \boxed{m \times m} & (0) \\ (0) & \boxed{\begin{matrix} (n-m) \\ \times \\ (n-m) \end{matrix}} \end{pmatrix}; \quad (21.2.1)$$

т. е. матричные элементы, которые связывают два данных подпространства, равны нулю. (Если ρ приводимо, но не разложимо, то можно выбрать базис, в котором все матричные элементы равны нулю в левом нижнем прямоугольном блоке, но при этом найдутся отличные от нуля элементы в верхнем правом блоке.) Если для любого g $\rho_1(g)$ и $\rho_2(g)$ соответственно обозначают приведенные выше матрицы размера $m \times m$ и $(n-m) \times (n-m)$, то каждое из отображений $g \rightarrow \rho_1(g)$ и $g \rightarrow \rho_2(g)$ является представлением группы G , а представление ρ есть их *прямая сумма*; символически это обозначается как $\rho = \rho_1 + \rho_2$.

Когда X — бесконечномерное банахово или гильбертово пространство, X_1 рассматривается как замкнутое линейное многообразие в X ; при этом нет никакой потери общности, ибо все операторы $\rho(g)$ ограничены, а потому замыкание инвариантного линейного многообразия инвариантно. И снова, если $X = X_1 \oplus X_2$, а X_1 и X_2 инвариантны относительно всех $\rho(g)$, мы полагаем, что

$$\rho = \rho_1 + \rho_2,$$

где ρ_1 и ρ_2 суть сужения представления ρ на X_1 и X_2 соответственно. (Одно из ρ_1, ρ_2 может быть конечномерным.)

Может оказаться, что X_1 или X_2 в свою очередь содержат инвариантные подпространства, так что ρ_1 и ρ_2 (или оба их) можно снова разложить, и т. д. В таком случае в подходящем базисе в X

¹⁾ Такие матрицы часто называют клеточными. — Прим. перев.

матрицы $\rho(g)$ содержат некоторое количество квадратных блоков, симметрично расположенных вдоль главной диагонали, причем все элементы вне этих блоков равны нулю. Каждый квадратный блок дает некоторое представление группы G , а ρ есть прямая сумма этих представлений. Если этот процесс продолжать осуществлять дальше, может оказаться, что все полученные представления, на которые разложено ρ , неприводимы. Тогда говорят, что ρ *полностью приводимо*. В этом случае можно найти структуру всех представлений группы G , определяя все минимальные инвариантные подпространства первоначально достаточно большого пространства X , как это было сделано для групп $SO(2)$ и $SO(3)$ в предыдущей главе.

Теорема. Любое конечномерное унитарное представление группы G полностью приводимо, т. е. или оно уже неприводимо, или может быть выражено в виде прямой суммы неприводимых представлений.

Доказательство. Этот результат является следствием того факта, что если ρ унитарно, а X_1 инвариантно, то, как легко видеть, подпространство X_1^\perp также инвариантно.

21.3. ЛЕММА ШУРА И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

Доказательство теоремы, приведенной в этом параграфе, зависит от знаменитой леммы, которую доказал Шур в 1905 г. и которая кажется тривиальной, хотя является весьма глубоким результатом элементарной линейной алгебры.

Лемма (Шур). Если ρ_1 и ρ_2 — неприводимые представления группы G на V^k и V^l соответственно, а A — матрица размера $l \times k$, такая, что

$$A\rho_1(g) = \rho_2(g)A \quad \text{для всех } g \in G, \quad (21.3.1)$$

то либо $k=l$ и A имеет обратную матрицу A^{-1} (и, значит, ρ_1 и ρ_2 эквивалентны), либо A — нулевая матрица. В первом случае A определяется единственным образом (с точностью до скалярного множителя) из условия (21.3.1).

Доказательство. Пусть S — нуль-пространство матрицы A , состоящее из всех векторов $x \in V^k$, таких, что $Ax=0$. Пространство S инвариантно относительно всех $\rho_1(g)$, ибо если $Ax=0$, то $A\rho_1(g)x=0$ согласно (21.3.1). Так как ρ_1 неприводимо, то S либо совпадает со всем V^k , и в этом случае $A=0$, либо S содержит лишь нулевой вектор. В этом последнем случае не существует ненулевого вектора, ортогонального ко всем строкам матрицы A ; следовательно, количество строк $l \geq k$, а отображение $x \rightarrow y = Ax$ обратимо, поскольку любая подматрица в A размера $k \times k$ невырождена и может быть использована для решения уравнения $y = Ax$ относительно x .

Пусть S' — образ пространства V^k в V^l при отображении $x \rightarrow Ax$; тогда подпространство S' является k -мерным и инвариантным относительно всех

$\rho_2(g)$, так как если $y = Ax$ для некоторого x , то $\rho_2(g)y = Ax'$ для $x' = \rho_1(g)x$. Представление ρ_2 неприводимо; поэтому $S' = V^l$, $k=l$, а A^{-1} — матрица обратного отображения.

Теперь докажем единственность матрицы A . Допустим, что B — другая ненулевая матрица с тем же свойством, а именно $B\rho_1(g) = \rho_2(g)B$ для всех g ; тогда нужно доказать, что $A = \text{const} \cdot B$. Ясно, что

$$\rho_2(g)AB^{-1} = AB^{-1}\rho_2(g) \quad \text{для всех } g.$$

Из этого равенства следует, что если v — собственный вектор матрицы AB^{-1} (любая матрица имеет хотя бы один собственный вектор), то $\rho_2(g)v$ также является собственным вектором этой матрицы, соответствующим тому же самому собственному значению, скажем λ . Иначе говоря, одномерное собственное подпространство, содержащее v , инвариантно относительно $\rho_2(g)$ для всех g . Поскольку ρ_2 неприводимо, полное собственное подпространство, соответствующее λ , должно совпадать со всем V^k ; таким образом, $AB^{-1}v = \lambda v$ для всех v , а, значит, $B^{-1} = \lambda A^{-1}$ или $A = \lambda B$, что и требовалось доказать.

Замечание. В доказательстве нигде не использовался тот факт, что G — группа. Все выводы сохраняются, если $\{\rho_1(g)\}$ и $\{\rho_2(g)\}$ — два любых неприводимых множества квадратных матриц. Множество $\{M_i\}$ матриц размера $k \times k$ является *неприводимым*, если нельзя найти нетривиального собственного подпространства пространства V^k , которое было бы инвариантным относительно всех отображений $x \rightarrow M_i x$.

При доказательстве леммы Шура был установлен следующий результат.

Следствие. Любая матрица, которая коммутирует со всеми матрицами неприводимого представления (или неприводимого множества матриц), кратна единичной матрице.

Как дальнейшее следствие леммы имеем следующую теорему.

Теорема. Любое конечномерное неприводимое представление ρ абелевой (коммутативной) группы одномерно.

Доказательство. Так как каждая матрица $\rho(h)$ коммутирует со всеми $\rho(g)$, то каждая $\rho(h)$ кратна единичной матрице; следовательно, представление ρ приводимо, если оно не одномерно.

Теперь ясно, почему в § 20.5 были обнаружены только одномерные представления группы $SO(2)$.

21.4. КОМПАКТНЫЕ И НЕКОМПАКТНЫЕ ГРУППЫ

В § 19.5 было указано, что матрицы размера $n \times n$ (вообще говоря, комплексные) можно представлять точками в пространстве V , имеющем $2n^2$ (вещественных) измерений, и что множество всех матриц, составляющих любую группу, подобную $GL(n)$, $SL(n)$, $U(n)$, $O(n)$ и т. п., есть алгебраическая поверхность \mathcal{S} в пространстве V . Для упомянутых групп (они являются *непрерывными* группами, или *группами Ли*) \mathcal{S} всегда представляет собой замк-

нутое точечное множество, но оно может не быть ограниченным. Для $O(n)$, $U(n)$, $SO(n)$, $SU(n)$ поверхность \mathcal{S} ограничена [например, из уравнения (19.5.1) следует, что для группы $O(3)$ ни одна точка на \mathcal{S} не может иметь координату R_{jk} , превышающую по абсолютной величине единицу], тогда как для $GL(n)$, $SL(n)$, M_n и для группы Лоренца \mathcal{S} не является ограниченной (расширяется в V до бесконечности). В первом случае группа называется *компактной* (\mathcal{S} есть компактное множество в V), а во втором — *некомпактной*. Теория компактных групп много проще, чем соответствующая теория некомпактных групп; это обстоятельство демонстрирует интересную взаимосвязь различных областей математики: компактность группового многообразия представляет собой геометрическое свойство, в то время как упомянутые упрощения имеют в основном алгебраический характер.

Следующие теоремы, которые мы приводим без доказательства, показывают, что в случае компактных групп достаточно рассматривать унитарные представления.

Теорема 1. Пусть ρ — конечномерное представление компактной группы G . Тогда ρ эквивалентно некоторому унитарному представлению; иначе говоря, существует такая фиксированная невырожденная матрица A , что матрица $A\rho(g)A^{-1}$ унитарна для всех элементов g из G .

Это можно переформулировать следующим образом: если определить в представляющем пространстве X скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_1$ при помощи равенства $(\xi, \eta)_1 \stackrel{\text{def}}{=} (A\xi, A\eta)$, где (\cdot, \cdot) означает первоначальное скалярное произведение, заданное как $(x, y) = x^*y$, то

$$(\rho(g)\xi, \rho(g)\eta)_1 = (\xi, \eta)_1 \text{ для всех } g \in G \text{ и всех } \xi, \eta \in X; \quad (21.4.1)$$

иначе говоря, матрицы $\rho(g)$ унитарны относительно нового скалярного произведения.

Справедлива и более общая формулировка:

Теорема 2. Пусть ρ — представление компактной группы G на гильбертовом пространстве H , т. е. для любого g $\rho(g)$ — обратимый ограниченный линейный оператор в H и $\rho(g_1g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$. Тогда в H существует новое скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_1$, такое, что

$$(\rho(g)u, \rho(g)v)_1 = (u, v)_1 \text{ для всех } g \in G \text{ и всех } u, v \in H. \quad (21.4.2)$$

Теорема 3. Все неприводимые унитарные представления компактной группы G конечномерны.

В противоположность этому группы Лоренца имеют бесконечномерные неприводимые унитарные представления.

21.5. ИНВАРИАНТНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ. МЕРА ХААРА

Допустим, что G — компактная группа матриц размера $n \times n$; многообразие \mathcal{S} группы G является компактной (замкнутой ограниченной) поверхностью (размерности $m \leq 2n^2$) в пространстве $V 2n^2$ (вещественных) измерений (см. § 19.5). Можно доказать, что существует положительная непрерывная функция $\omega(g)$, определенная на \mathcal{S} (здесь символ g используется как для обозначения элемента группы, так и для обозначения соответствующей точки на \mathcal{S}) и обладающая замечательным свойством, а именно если f — любая непрерывная функция на \mathcal{S} и h — любой фиксированный элемент группы, то

$$\int_{\mathcal{S}} f(hg) \omega(g) d\mathcal{A}(g) = \int_{\mathcal{S}} f(g) \omega(g) d\mathcal{A}(g)$$

для всех $h \in G$ и для всех непрерывных на \mathcal{S} функций f ; (21.5.1)

здесь $d\mathcal{A}(g)$ есть m -мерный элемент объема или «элемент площади» на \mathcal{S} .

Это остается верным и в том случае, когда G некомпактна, так что поверхность \mathcal{S} расширяется в V до бесконечности, т. е. и тогда существует весовая функция $\omega(g)$ на \mathcal{S} , такая, что справедливо (21.5.1), при условии, разумеется, что для функции f данные интегралы сходятся.

Отображение $g \rightarrow hg$ группы G на себя для фиксированного h называется *левой трансляцией* в G . Приведенное выше равенство показывает, что интеграл от непрерывной на \mathcal{S} функции f с весовой функцией ω инвариантен относительно всех левых трансляций в группе. Интеграл в (21.5.1) называется *левоинвариантным интегралом*. Доказательство существования весовой функции ω можно найти в книге Вигнера [1931] в разделе «Интеграл Гурвица»; см. также книгу Нахбина [1965].

Аналогичный инвариантный интеграл существует для правых трансляций. Можно доказать, что, в частности, для компактной группы G приведенный выше интеграл (с той же самой весовой функцией ω) также инвариантен относительно правых трансляций и относительно инверсий, т. е.

$$\int f(g) \omega(g) d\mathcal{A}(g) = \int f(gh) \omega(g) d\mathcal{A}(g) = \int f(g^{-1}) \omega(g) d\mathcal{A}(g). \quad (21.5.2)$$

Доказательство см., например, в книге Вейля [1932, гл. III, § 12].

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что любая матрица g в $SU(2)$ может быть записана в виде

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

где a и b — комплексные числа, подчиненные единственному условию $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Поэтому если $a = x_1 + ix_2$ и $b = x_3 + ix_4$, то многообразие S группы $SU(2)$ гомеоморфно трехмерной сфере S^3 , т. е. единичной сфере $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ в \mathbb{R}^4 .

2. Покажите, что левая трансляция $g \rightarrow hg$ в $SU(2)$, где h — фиксированный элемент группы, индуцирует вращение сферы S^3 вокруг ее центра и, следовательно, покажите, что если $d\mathcal{A}(g)$ — элемент трехмерной площади на S^3 , то в качестве весовой функции $\omega(g)$ в (21.5.2) можно взять константу и интеграл $\int f(g) d\mathcal{A}(g)$ будет инвариантным относительно левых (также и правых) трансляций в указанной группе.

3. Пусть числа a и b из упражнения 1 записаны в виде

$$a = \cos(\beta/2) \exp[i(\alpha + \gamma)/2], \quad b = i \sin(\beta/2) \exp[i(\alpha - \gamma)/2],$$

где

$$0 \leq \alpha < 2\pi, \quad 0 \leq \beta \leq \pi, \quad -2\pi \leq \gamma < 2\pi;$$

тогда g записывается как $g(\alpha, \beta, \gamma)$ и переменные α, β, γ называются *углами Эйлера* вращения g . [Благодаря гомоморфизму группы $SU(2)$ на $SO(3)$, установленному в § 19.7, эти углы станут углами Эйлера для вращения $R(g)$ в случае, когда γ ограничен интервалом $0 \leq \gamma < 2\pi$; отметим, что замена γ на $\gamma + 2\pi$ приводит к замене g на $-g$, но оставляет неизменным $R(g)$.] Покажите, что если углы Эйлера взяты в качестве внутренних координат в группе $SU(2)$, то элемент площади на S^3 имеет вид

$$d\mathcal{A}(g) = \frac{1}{8} \sin \beta \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma.$$

4. Покажите, что

$$g(\alpha, \beta, \gamma) = g(\alpha, 0, 0) g(0, \beta, 0) g(0, 0, \gamma). \quad (21.5.3)$$

5. Обозначив $R(g(\alpha, \beta, \gamma))$ через $R(\alpha, \beta, \gamma)$, покажите, что благодаря гомоморфизму группы $SU(2)$ на группу $SO(3)$ (§ 19.7) вращение $R(\alpha, 0, 0)$ совпадает с вращением $R(0, 0, \alpha)$ и является вращением на угол α вокруг оси z , тогда как $R(0, \beta, 0)$ является вращением на угол β вокруг оси x . Дайте геометрическую интерпретацию результата упражнения 4 как закона композиции произвольного вращения из последовательных вращений вокруг осей z, x и z соответственно.

6. Выведите формулу для площади A_n n -мерной сферы (единичной сферы в пространстве E^{n+1}) из очевидного равенства

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^{n+1} = \int_0^{\infty} e^{-r^2} A_n r^n dr,$$

используя для этого гамма-функцию, и проверьте непосредственно, что формула в упражнении 3 нормирована правильно. На основе $(2 \rightarrow 1)$ -гомоморфизма группы $SU(2)$ на группу $SO(3)$ установите, что (трехмерная) площадь этой поверхности, которая рассматривается как многообразие группы $SO(3)$ (см. § 19.5), равна π^2 . Покажите, что объем n -мерного шара радиуса R есть

$$V_n = [2\pi^{n/2} / (n\Gamma(n/2))] R^n.$$

Система тессеральных гармоник $\{Y^n\}$ не единственная ортогональная система функций, которая появляется из представлений группы $SO(3)$. Тессеральные гармоники ортогональны на единичной двумерной сфере, которая взята в качестве однородного пространства для представления. Однако, как было указано в

§ 20.8, многообразие группы тоже может служить однородным пространством; в таком случае возникает более широкий класс ортогональных функций, а именно функции от углов Эйлера α , β , γ , которые можно рассматривать как внутренние координаты в $SO(3)$. Приведенная ниже теорема будет иметь дело с такими общими системами функций.

Для дальнейшего нам привычнее будет обозначать выражение $\omega(g)d\mathcal{A}(g)$, которое появляется в левоинвариантном интегрировании по многообразию группы, просто через dg и записать равенство (21.5.1) в виде

$$\int_G f(hg) dg = \int_G f(g) dg. \quad (21.5.4)$$

Обозначим через $C_0(G)$ пространство непрерывных функций с компактным носителем на многообразии группы, или, как говорят, на группе G (если G сама компактна, то данное пространство включает все непрерывные функции на G). В таком случае $\int_G f(g) dg$,

$f \in C_0(G)$, является непрерывным линейным функционалом на $C_0(G)$ и является мерой (см. гл. 13). Поэтому иногда говорят о *левоинвариантной мере* на G , или о *мере Хаара*, поскольку она рассматривалась в статье Хаара [1933].

Пусть $L^2(G)$ обозначает гильбертово пространство квадратично интегрируемых распределений, определенных на многообразии группы, со скалярным произведением

$$(f_1, f_2) = \int_G \overline{f_1(g)} f_2(g) dg. \quad (21.5.5)$$

где, как и выше, dg — левоинвариантная мера (G не обязательно компактна). *Левым регулярным представлением* группы G называется соответствие каждому h из G отображения

$$\rho(h): f(g) \rightarrow f(h^{-1}g) \quad (21.5.6)$$

пространства $L^2(G)$ на себя. (Аналогично правоинвариантный интеграл приводит к *правому регулярному представлению*.) Так как скалярное произведение основывается на левоинвариантном интеграле, видно, что

$$\begin{aligned} (\rho(h)f_1, \rho(h)f_2) &= \int_G \overline{f_1(h^{-1}g)} f_2(h^{-1}g) dg = \int_G \overline{f_1(g)} f_2(g) dg = \\ &= (f_1, f_2) \text{ для всех } f_1, f_2 \text{ из } L^2 \text{ и всех } h \in G; \end{aligned}$$

иначе говоря, это представление ρ унитарно.

Можно доказать, что в случае компактной группы G все неприводимые представления получаются путем разложения (левого

или правого) регулярного представления ρ . Это значит, что если ρ_1 — любое неприводимое представление, то существует в $L^2(G)$ такое подпространство X_1 , что сужение ρ на X_1 эквивалентно ρ_1 .

Часто даже для некомпактной группы G можно найти неприводимые представления, используя операторы, представленные в (21.5.6), на некотором пространстве функций, определенных на группе, но при этом для нахождения таких функций может возникнуть необходимость выйти за пределы гильбертова пространства $L^2(G)$. Мы не будем рассматривать этот общий случай, а лишь приведем один пример: в § 21.10 функции, которые появятся в связи с неприводимыми представлениями некомпактной группы M_2 движений в плоскости, не являются квадратично интегрируемыми на G .

Вычислим теперь весовую функцию $\omega(g)$. Допустим, что $\theta_1, \dots, \theta_n$ — внутренние координаты на многообразии группы G , и мы хотим найти весовую функцию $\omega(\theta)$, такую, что $\omega(\theta)d\theta_1 \dots d\theta_n$ является элементом инвариантной меры dg .

Перепишем равенство (21.5.4) как

$$\mathcal{I} = \int_G f(hg') dg' = \int_G f(g) dg.$$

Мы рассмотрим случай, когда функция $f(g)$ равна нулю всюду, кроме элементов g , находящихся в малой окрестности \mathcal{N} единичного элемента группы, причем $f(g) = 1$ для этих элементов. Соответствующие им точки заполняют малый объем V в координатном пространстве вблизи $\theta = 0$; поэтому в правой части вышеприведенного равенства мы получим $\mathcal{I} \approx V\omega(0)$. Отличные от нуля значения в левой части обязаны своим появлением элементам группы hg' из окрестности \mathcal{N} единицы и, значит, элементам g' из окрестности элемента h^{-1} , имеющей объем V' , так что $\mathcal{I} \approx V'\omega(h^{-1})$; следовательно, чтобы определить $\omega(h^{-1})$, нам нужно знать V' . Пусть $g' = h^{-1}k$, где k меняется в \mathcal{N} . Обозначим через $\hat{\theta}(g)$ координаты любого элемента группы g . Таким образом, обозначив через θ и θ' координаты k и $g' = h^{-1}k$, имеем

$$\theta = \hat{\theta}(k), \quad \theta' = \hat{\theta}(h^{-1}k) = \theta'(\theta).$$

Когда θ изменяется в объеме V , θ' пробегает объем V' ; поэтому, используя якобиан, V' можно выразить так:

$$V' \approx \partial(\theta'_1, \dots, \theta'_n) / \partial(\theta_1, \dots, \theta_n) |_{\theta=0},$$

где индекс 0 указывает на то, что якобиан берется при $\theta = 0$. Итак, мы заключаем, что

$$\omega(\hat{\theta}(h^{-1})) = C [\partial(\theta'_1, \dots, \theta'_n) / \partial(\theta_1, \dots, \theta_n) |_{\theta=0}]^{-1}, \quad (21.5.7)$$

причем $C = \omega(0)$. В силу произвольности h также произволен и h^{-1} ; следовательно, данное выражение определяет $\omega(\theta)$ для всех θ .

В случае компактной группы G константу C можно выбрать так, чтобы $\int_G dg = 1$.

УПРАЖНЕНИЕ

7. Пусть G — группа вращений $SO(3)$, $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ — внутренние координаты, введенные в § 19.6, а θ — вектор с компонентами $\theta_x, \theta_y, \theta_z$. Пусть, в частности, θ представляет элемент группы k в вышеприведенном рассмотрении, причем $\|\theta\| \ll 1$, а θ' представляет $h^{-1}k$. С точностью до величин первого порядка малости [см. (19.6.1)]

$$k = \begin{pmatrix} 1 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 1 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\omega(h^{-1})$ не зависит от направления оси вращения, в качестве h^{-1} можно взять вращение на угол α вокруг оси x , т. е. можно положить

$$h^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Покажите, что координаты $\theta'_x, \theta'_y, \theta'_z$ элемента $h^{-1}k$ с точностью до первого порядка малости имеют вид

$$\theta'_x = \alpha + \theta_x, \quad \theta'_y = \alpha \left[\theta_y \frac{1 + \cos \alpha}{2 \sin \alpha} - \frac{\theta_z}{2} \right], \quad \theta'_z = \alpha \left[\theta_z \frac{1 + \cos \alpha}{2 \sin \alpha} + \frac{\theta_y}{2} \right],$$

откуда якобиан равен

$$\partial(\theta'_x, \theta'_y, \theta'_z) / \partial(\theta_x, \theta_y, \theta_z) \Big|_{\theta=0} = \alpha^2 / [2(1 - \cos \alpha)], \quad (21.5.8)$$

и, следовательно, нормированная весовая функция задается как

$$\omega(\theta') = (1 - \cos \alpha) / (4\pi^2 \alpha^2), \quad \alpha = \|\theta'\|. \quad (21.5.9)$$

Указание. Для заданной матрицы вращения угол вращения и направление оси даются формулами (19.2.7) и (19.2.8).

21.6. ПОЛНАЯ СИСТЕМА ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОМПАКТНОЙ ГРУППЫ

Мы пришли к одной из важнейших теорем о компактных группах.

Теорема. Пусть ρ^k ($k = 1, 2, \dots$) — полный набор неэквивалентных неприводимых унитарных представлений компактной группы G ; пусть d_k — размерность ρ^k , а $\rho_{mn}^k(g)$ — матричные элементы преобразования $\rho^k(g)$. Тогда функции

$$\sqrt{d_k} \rho_{mn}^k(g), \quad k = 1, 2, \dots, \quad 1 \leq m, n \leq d_k,$$

образуют полную ортонормированную систему на G относительно скалярного произведения, основанного на инвариантном интегрировании по G .

Замечания. (1) Напомним, что на компактных группах лево- и правоинвариантное интегрирование совпадают. (2) Предпола-

гается, что $\int_G dg = 1$. (3) Предполагается, что матричные элементы относятся к ортонормированной системе векторов, так что матрицы $(\rho_{mn}^k(g))$ унитарных преобразований $\rho^k(g)$ унитарны.

Доказательство теоремы см. в книге Виленкина [1965]. С ортонормированностью этих функций дело обстоит просто, а вот их полнота представляет собой более глубокий факт, который был доказан Петером и Вейлем [1927].

Для $G=SO(3)$ теорема гласит, что функции

$$\sqrt{2l+1} e^{im\alpha} P_{m,m}^l(\cos\beta) e^{-im\gamma}, \quad l=0, 1, 2, \dots, \quad -l \leq m' \leq l,$$

образуют полную ортонормированную систему на многообразии группы $SO(3)$ относительно скалярного произведения

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \overline{f_1(\alpha, \beta, \gamma)} f_2(\alpha, \beta, \gamma) \sin\beta \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma;$$

см. (20.12.2) и упражнение 3 в предыдущем параграфе.

Разложение функций из $L^2(G)$ в (обобщенный) ряд Фурье по функциям, описанным в приведенной теореме, называется гармоническим анализом на группе. Гармонический анализ на компактных группах включает обобщенные интегралы Фурье; см., например, книгу Гельфанда, Граева и Виленкина [1962] по поводу гармонического анализа на $SL(2, \mathbb{C})$ и книгу Уорнера [1972] по поводу гармонического анализа на полупростых группах Ли.

Аналогичная теорема справедлива при некоторых условиях для функций, полученных на других однородных пространствах с надлежащим образом выбранным скалярным произведением; см. книгу Виленкина [1965, разд. 4.5 гл. 1]. Примером служит факт, уже установленный нами и состоящий в том, что функции $Y_l^m(\theta, \varphi)$ образуют полную ортонормированную систему на единичной двумерной сфере.

21.7. ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА КАК КОНФИГУРАЦИОННЫЕ ПРОСТРАНСТВА В ФИЗИКЕ

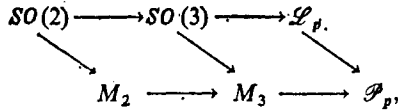
Физические соображения часто указывают на то, какой выбор однородного пространства следует сделать, чтобы получить функции для заданной группы симметрии, представляющие интерес для рассматриваемой задачи. Для квантовомеханического движения в центральном силовом поле координатами являются r, θ, φ ; поскольку имеются лишь две угловые переменные, то подходящим однородным пространством будет двумерная сфера. Этот выбор приводит к функциям $Y_l^m(\theta, \varphi)$, которые, таким образом, можно взять для представления угловой зависимости волновой функции. С другой

стороны, для описания движения твердого тела около его центра масс существуют три угловые переменные, а именно углы Эйлера α , β , γ , и в качестве конфигурационного пространства можно рассматривать многообразие группы $SO(3)$. Зоммерфельд [1929] показал, что квантовомеханическая задача о движении симметричного волчка (твердого тела с двумя равными моментами инерции), которая представляет интерес для теории молекулярных спектров, может быть решена путем использования многочленов Якоби. Конечно, в качестве волновых функций симметричного волчка можно взять и функции (20.12.2).

21.8. ГРУППА M_2 И РОДСТВЕННЫЕ ГРУППЫ

Движение в вещественном n -мерном пространстве V^n состоит из вращения $x \rightarrow Rx$ [$R \in SO(n)$], за которым следует трансляция¹⁾ $x \rightarrow x + \xi$, где ξ — постоянный вектор. (Можно получить тот же результат и в том случае, когда данное вращение *следует* за трансляцией $x \rightarrow x + \xi_1$, взяв $\xi_1 = R^{-1}\xi$.) *Замечание.* Слова «вращение» и «движение» могут ввести в заблуждение, поскольку здесь ничто не зависит от времени t . Вращение является просто фиксированным изменением ориентации, а трансляция является лишь фиксированным смещением.

Связи между некоторыми группами, представляющими интерес для физики, выглядят так:



где стрелка ведет от подгруппы к включающей ее группе, \mathcal{P}_P обозначает собственную группу Пуанкаре (состоящую из комбинаций собственных преобразований Лоренца со смещениями в пространстве и времени). Группы, включающие пространственную инверсию и обращение времени, также представляют интерес, но они сильно усложнили бы приведенную диаграмму. Группу M_2 мы подробнее рассмотрим далее в данной главе.

Элемент группы M_2 есть отображение $g = g_{\xi, \eta, \theta}$ плоскости x, y на себя, задаваемое следующим образом:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta + \xi \\ x \sin \theta + y \cos \theta + \eta \end{pmatrix}. \quad (21.8.1)$$

Замечание. В теории групп вообще и в частности при определении «представления» под «линейным преобразованием» понимают

¹⁾ Часто говорят: параллельный перенос или сдвиг на вектор ξ . — *Прим. перев.*

однородное преобразование; поэтому (21.8.1) будем называть просто «отображением». Нетрудно проверить, что трехмерное точное представление группы M_2 задается соответствием

$$g \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & \xi \\ \sin \theta & \cos \theta & \eta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (21.8.2)$$

УПРАЖНЕНИЕ

Проверьте, что в этом случае композиции $g_2 g_1$ двух отображений вида (21.8.1) ставится в соответствие произведение соответствующих матриц вида (21.8.2).

21.9. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ M_2

Чтобы найти другие представления, допустим, что X^∞ обозначает пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $f(x, y)$, определенных для всех x и y . Очевидно, плоскость является однородным пространством для M_2 . Представление группы M_2 на X^∞ получается путем преобразования каждой функции $f(x, y)$ в функцию

$$(\rho(g)f)(x, y) = f([x - \xi] \cos \theta + [y - \eta] \sin \theta, \\ - [x - \xi] \sin \theta + [y - \eta] \cos \theta) \quad (21.9.1)$$

согласно правилу (20.6.1). Три оператора L_1, L_2, L_3 («инфинитезимальные операторы») определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} (L_1 f)(x, y) &= \partial(\rho(g)f)(x, y) / \partial \xi \Big|_{\xi=\eta=\theta=0}, \\ (L_2 f)(x, y) &= \partial(\rho(g)f)(x, y) / \partial \eta \Big|_{\xi=\eta=\theta=0}, \\ (L_3 f)(x, y) &= \partial(\rho(g)f)(x, y) / \partial \theta \Big|_{\xi=\eta=\theta=0}. \end{aligned} \quad (21.9.2)$$

Из (21.9.1) следует, что

$$L_1 = -\partial/\partial x, \quad L_2 = -\partial/\partial y, \quad L_3 = y\partial/\partial x - x\partial/\partial y. \quad (21.9.3)$$

Если r и φ — полярные координаты в плоскости x, y , а L^+ и L^- определяются соответственно как $L_1 + iL_2$ и $L_1 - iL_2$, то мы обнаруживаем, что

$$\begin{aligned} L_3 &= -\partial/\partial \varphi, \quad L^\pm = e^{\pm i\varphi} (\partial/\partial r \pm (i/r) \partial/\partial \varphi), \\ L^+ L^- &= L^- L^+ = \nabla^2. \end{aligned} \quad (21.9.4)$$

21.10. НЕКОТОРЫЕ НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Представление (21.9.1) в высокой степени приводимо, и мы постараемся найти инвариантное подпространство X_1 пространства X^∞ , которое было бы столь мало в некотором смысле, сколь это возможно. Подпространство X_1 должно преобразовываться само в себя при действии каждого из операторов L_1, L_2, L_3 . При помощи ряда

Фурье относительно φ любую функцию $f \in X^\infty$ можно разложить по функциям

$$\psi_m(x, y) = i^{-m} e^{im\varphi} g_m(r), \quad (21.10.1)$$

где g_m — некоторая функция на $(0, \infty)$ из класса C^∞ . Причина, по которой взят множитель i^{-m} , скоро будет ясна. При действии оператора L_φ любая функция ψ_m преобразуется в кратную самой себе функцию; мы хотим начать с одной из таких функций ψ_m и выяснить, какой же наименьший набор дополнительных функций следует взять для получения инвариантного подпространства.

Из (21.9.4) видно, что $L^+\psi_m$ имеет вид $e^{i(m+1)\varphi} h(r)$; следовательно, $L^-L^+\psi_m$ имеет вид $e^{im\varphi} \tilde{g}(r)$. Для получения наименьшего возможного инвариантного подпространства X_1 теперь допускается, что $\tilde{g}(r)$ равна $g_m(r)$, умноженной на постоянную, скажем на $-\alpha_m^2$, и мы исследуем, может ли в действительности g_m быть выбрана так, что это допущение будет справедливым. Итак, мы хотим выбрать $g_m(r)$ так, чтобы

$$L^+\psi_m = i\alpha_m\psi_{m+1}, \quad L^-\psi_{m+1} = i\alpha_m\psi_m. \quad (21.10.2)$$

Таким образом порождается последовательность функций $\{\psi_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ в предположении, что ни одна из постоянных α_m не обращается в нуль; но ни одна из них и не может обратиться в нуль (разве только все вместе), поскольку L^+ и L^- коммутируют, из чего следует, что $\alpha_m^2 = \alpha_{m-1}^2$; поэтому все эти постоянные можно взять равными. Тогда из (21.9.4) видно, что

$$\nabla^2\psi_m = -\alpha^2\psi_m \quad (21.10.3)$$

для всех m . Отсюда вытекает, что $g_m(r)$ будет пропорциональна функции Бесселя $J_m(\alpha r)$; функции Бесселя будут рассмотрены в следующем параграфе.

Заключение. X_1 является подпространством пространства X^∞ , состоящим из решений уравнения $\nabla^2\psi + \alpha^2\psi = 0$ (которые не имеют особенностей); обозначим такое подпространство через X_α . Таким образом любое отличное от нуля значение α приводит к неприводимому представлению группы M_2 . При преобразовании $x \rightarrow \mu x$ для вещественного μ ∇^2 переходит в $\mu^{-2}\nabla^2$; поэтому без ограничения общности мы можем допустить, что $|\alpha| = 1$. Более того, α и $-\alpha$ определяют одно и то же подпространство; следовательно, в качестве значений α разумно взять $e^{i\beta}$, где $0 \leq \beta < \pi$. Для каждого такого α представление группы M_2 на X_α задается преобразованиями (21.9.1).

21.11. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Нормируем систему функций $\{\psi_m\}_{-\infty}^{\infty}$, положив $\psi_0(0, 0) = 1$. Тогда для каждого m функция Бесселя порядка m может быть определена как $J_m(z) = g_m(z/\alpha)$, так что (21.10.1) принимает вид

$$\psi_m(x, y) = i^{-m} e^{im\varphi} J_m(\alpha r).$$

Тогда (21.10.2) переходят в уравнения

$$\begin{aligned} (d/dz - m/z) J_m(z) &= -J_{m+1}(z), \\ (d/dz + (m+1)/z) J_{m+1}(z) &= J_m(z), \end{aligned} \quad (21.11.1)$$

которые являются рекуррентными соотношениями для функций Бесселя. Исключение $J_{m+1}(z)$ дает

$$(d^2/dz^2 + (1/z) d/dz + 1 - m^2/z^2) J_m(z) = 0, \quad (21.11.2)$$

а это есть дифференциальное уравнение Бесселя.

Функции Бесселя $J_m(z)$ полностью определяются этим уравнением и начальными условиями $J_0(0) = 1$ и $J_m(0) = 0$ для $m \neq 0$. Для дальнейшего предполагается знакомство с этими функциями и, в частности, с их интегральным представлением

$$J_m(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \sin t + imt} dt. \quad (21.11.3)$$

21.12. МАТРИЦЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Для некоторых целей бывает предпочтительней иметь преобразования, представленные (бесконечными) матрицами; матричные элементы можно получить следующим образом. Пусть α — вектор, компонентами (вообще говоря, комплексными) которого являются $\alpha \cos \chi$ и $\alpha \sin \chi$, где параметр α такой же, как в § 21.10, а χ — вещественный угол. Тогда приведенное волновое уравнение $\nabla^2 u + \alpha^2 u = 0$ имеет решение

$$e^{i\alpha r \cos(\varphi - \chi)} \quad (21.12.1)$$

(как и прежде, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$), а общее решение есть

$$f(r, \varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\alpha r \cos(\varphi - \chi)} \hat{f}(\chi) d\chi, \quad (21.12.2)$$

где \hat{f} — произвольная функция из некоторого класса допустимых функций, точные свойства которых здесь неважны. [Если α вещественно и если $f(r, \varphi)$ интерпретировать как волновую функцию, то $\alpha \cos \chi$ и $\alpha \sin \chi$ суть импульсные переменные, а $\hat{f}(\chi)$ тесно связана с импульсным представлением функции $f(r, \varphi)$.] Если плоскую волну $\exp\{i\alpha \cdot x\}$ подвергнуть преобразованию (21.9.1), то она переходит

в $\exp\{i\alpha \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})_\theta\}$, где индекс θ указывает на то, что векторы \mathbf{x} и $\boldsymbol{\xi}$ повернуты (против часовой стрелки) на угол θ . Если компоненты смещения записать в виде $\xi = \zeta \cos \omega$, $\eta = \zeta \sin \omega$, то из (21.9.1) будет следовать, что

$$(\rho(g)f)(r, \varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\alpha r \cos(\varphi - \chi)} \hat{f}'(\chi) d\chi,$$

где

$$\hat{f}'(\chi) = e^{-i\alpha \zeta \cos(\omega - \chi)} \hat{f}(\chi + \theta) \quad (21.12.3)$$

(штрих не связан с дифференцированием); в интеграле проведена замена переменной $\chi - \theta \rightarrow \chi$ без изменения пределов, поскольку подынтегральная функция имеет период 2π . Следовательно, элемент g группы M_2 , состоящий из вращения на θ по часовой стрелке, за которым следует трансляция на вектор $\boldsymbol{\xi}$, индуцирует преобразование (21.12.3) в пространстве функций \hat{f} , имеющих период 2π . Теперь, разлагая $\hat{f}(\chi)$ и $\hat{f}'(\chi)$ в ряды Фурье $\sum_m c_m e^{im\chi}$ и $\sum_m c'_m e^{im\chi}$ соответственно, мы найдем, что

$$c'_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\rho}_{mn} c_n,$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{mn} &= \hat{\rho}_{mn}^\alpha(g) = e^{im\theta} e^{i(m-n)(\omega - \pi/2)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\alpha \zeta \sin t + i(m-n)t} dt = \\ &= e^{im\theta} e^{i(m-n)(\omega - \pi/2)} J_{m-n}(\alpha \zeta) \end{aligned} \quad (21.12.4)$$

и где было использовано (21.11.3). Видно, что функции Бесселя появляются не только при определении инвариантных подпространств пространства X^∞ , но и в зависимости матричных элементов $\hat{\rho}_{mn}$ от параметров ξ , η , θ или ζ , ω , θ , характеризующих элементы группы M_2 .

Аналогичным образом можно получить неприводимые представления группы M_3 движений в евклидовом пространстве E^3 , принимая E^3 в качестве однородного пространства. Обозначим через X_α пространство всех функций $u(x, y, z)$, которые удовлетворяют трехмерному приведенному волновому уравнению $\nabla^2 u + \alpha^2 u = 0$ с фиксированной постоянной α во всем пространстве E^3 . Тогда представление группы M_3 на X_α , задаваемое при помощи соответствия каждому g из M_3 преобразования

$$\rho(g): u(\mathbf{x}) \rightarrow u(g^{-1}\mathbf{x}) \quad (21.12.5)$$

пространства X_α на себя, является неприводимым. Рассматривая инфинитезимальные операторы этого представления, можно найти

в X_α базис, состоящий из функций

$$Y_l^m(\theta, \varphi) r^{-1/2} J_{l+1/2}(\alpha r), \quad l=0, 1, 2, \dots, \quad m=-l, -l+1, \dots, l. \quad (21.12.6)$$

Поэтому происхождение так называемых сферических функций Бесселя

$$j_l(z) = \sqrt{\pi/(2z)} J_{l+1/2}(z) \quad (21.12.7)$$

связано с неприводимыми представлениями группы M_3 .

Представления группы M_n рассматриваются в книге Виленкина [1965].

В противоположность неприводимым представлениям компактных групп, которые являются конечномерными и зависят от дискретного параметра [например, $l=0, 1, 2, \dots$ для $SO(3)$], неприводимые представления групп движений бесконечномерны и зависят от непрерывного параметра α .

Неприводимые представления групп Лоренца бывают двух видов: конечномерные, которые зависят от дискретного параметра, и бесконечномерные, которые зависят от непрерывного параметра. Первые получаются из конечномерных представлений группы $SL(2, \mathbb{C})$ (см. следующую главу) и появляются в релятивистской квантовой механике многих частиц. И те и другие представления нужны для полной совокупности неприводимых представлений; поэтому следует ожидать, что бесконечномерные представления могут также играть определенную роль в физике.

21.13. ХАРАКТЕРЫ

Понятие *характера* $\chi(g)$ представления играет в теории представлений чрезвычайно важную роль. Для компактных групп это ключ к установлению полноты системы неприводимых представлений, а значит, к решению вопроса о том, все ли представления найдены. Если ρ — представление на конечномерном пространстве X^n , так что $\rho(g)$ являются матрицами с элементами $\rho_{jk}(g)$, то

$\chi(g) = \text{tr } \rho(g) = \sum_{j=1}^n \rho_{jj}(g)$. Следовательно, χ есть скалярнозначная функция на группе G . В случае компактной группы G характеры χ^1 и χ^2 двух неэквивалентных неприводимых представлений ортогональны относительно скалярного произведения (21.5.5):

$$\int_G \overline{\chi^1(g)} \chi^2(g) dg = 0, \quad (21.13.1)$$

а для эквивалентных представлений $\chi^1(g) \equiv \chi^2(g)$. Кроме того,

$$\int_G |\chi(g)|^2 dg = 1 \quad (21.13.2)$$

для любого неприводимого представления в том случае, когда мера Хаара нормирована так, что мера (объем) всей группы равна 1.

Характер $\chi(g)$ зависит только от класса сопряженности группового элемента g , т. е. $\chi(g) = \chi(hgh^{-1})$ для всех g и всех h . Совокупность всех характеров χ^l неприводимых представлений компактной группы образует полную систему функций для разложения функций $f(g)$, зависящих только от класса сопряженности элементов g .

В группе вращений $SO(3)$ все вращения на заданный угол ω независимо от направления оси вращения принадлежат одному и тому же классу сопряженных элементов; отсюда следует, что характеры являются функциями лишь угла ω . Классическое доказательство полноты системы неприводимых представлений $\rho^l (l = 0, 1, 2, \dots)$, о которой говорилось в конце § 20.9, состоит в демонстрации того, что соответствующие характеры $\chi^l(g)$ образуют полную систему функций для разложения функций угла ω (см. книгу Вигнера [1931]). Тогда, поскольку не существует ненулевой функции от ω , которая была бы ортогональна всем $\chi^l(g)$, не существует и неприводимого представления, неэквивалентного всем ρ^l .

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что если конечномерные представления ρ^1 и ρ^2 эквивалентны [т. е. если они одинаковой размерности и существует такая матрица $A \neq 0$, что $A\rho^1(g) = \rho^2(g)A$ для всех g], то $\chi^1(g) \equiv \chi^2(g)$.

2. Покажите, что два вращения g_1 и g_2 на заданный угол ω , но вокруг различных осей являются сопряженными, т. е. что существует такое вращение h , что $g_1 = hg_2h^{-1}$.

3. Покажите, что характеры неприводимых представлений ρ^l группы $SO(3)$ имеют вид $\chi^l = \sin(l+1/2)\alpha/\sin(\alpha/2)$ ($l=0, 1, \dots$) и что они удовлетворяют соотношению ортогональности (21.13.1), где $dg = [(1 - \cos \alpha)/(4\pi^2\alpha^2)] d^3\theta$ в соответствии с упражнением 7 из § 21.5. *Указание.* Достаточно рассмотреть вращение вокруг оси z , для которого матрицы $\rho^l(g)$ диагональны; см. (20.12.2) и предшествующее равенство.

Для того чтобы доказать полноту системы характеров χ^l для $SO(3)$, нам нужно показать, что если $\psi(\alpha)$ — любая непрерывная функция, причем $(\chi^l, \psi) = 0$ для всех l , то $\psi(\alpha) \equiv 0$. Так как $1 - \cos \alpha = 2(\sin(\alpha/2))^2$ и $d^3\theta = 4\pi\alpha^2 d\alpha$, то равносильно показать, что если

$$2 \int_0^\pi \sin(l+1/2)\alpha \sin(\alpha/2) \psi(\alpha) d\alpha = 0$$

для всех l , то $\psi(\alpha) \equiv 0$. Введя обозначения $\alpha/2 = t$ и $\sin(\alpha/2)\psi(\alpha) = \chi(t)$, получим эквивалентное утверждение, которое нужно доказать: если

$$\int_0^{\pi/2} \chi(t) \sin(2l+1)t dt = 0$$

для всех l , то $\chi(t) \equiv 0$. Но это и в самом деле так, ибо если $\chi(t)$ распространить на интервал $-\pi \leq t \leq \pi$, потребовав, чтобы она была нечетной функцией относительно $t=0$ и четной относительно $t = \pm\pi/2$, то функции $\sin(2l+1)t$ представляют систему функций, достаточную для построения ряда Фурье функции $\chi(t)$. Поскольку характеры χ^l образуют полную систему функций, представления $\rho^l (l=0, 1, 2, \dots)$ исчерпывают *все* неприводимые представления группы $SO(3)$.

Таким образом, получен ответ на вопрос, который возник в § 20.2, о вращениях декартовых осей координат в трехмерном пространстве: все возможные нерелятивистские законы преобразования физических величин обеспечиваются представлениями ρ^l группы $SO(3)$.

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Лучевое пространство и лучевые представления в квантовой механике; расширения локальных представлений; эффект двусвязности группы $SO(3)$ и односвязности группы $SU(2)$; двузначные представления; спиноры.

Предварительные сведения: гл. 18—21 и основы квантовой механики.

Цель данной главы — пролить свет на один частный вопрос при использовании теории представлений групп в квантовой механике, а именно на вопрос о появлении двузначных, или спиновых, представлений группы вращений и группы Лоренца.

22.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Мы уже видели, что в классической физике различные системы величин при вращении осей координат преобразуются так, что дают представления группы вращений. (То же самое применимо в классической физике и к другим группам симметрии, таким, как группы движений, группы симметрии кристаллов, группы Лоренца и т. п.)

С другой стороны, в квантовой механике некоторые величины при вращении осей координат преобразуются подобно компонентам спиноров и тем самым дают представления группы $SU(2)$, а не группы вращений $SO(3)$. Это было показано уже Дираком (в несколько иной терминологии) в его статье о релятивистском волновом уравнении (Дирак [1928]), а также подразумевалось в теории Паули об электронном спине, опубликованной годом ранее. В общем случае компоненты спинора при преобразовании группы Лоренца \mathcal{L}_p изменяются таким образом, что дают представления группы $SL(2, \mathbb{C})$, а не группы \mathcal{L}_p . Тогда это казалось несколько неожиданным, хотя Дирак показал, что все наблюдаемые величины преобразуются как скаляры, векторы и тензоры, т. е. согласно представлениям групп $SO(3)$ и \mathcal{L}_p . В § 19.7 и 19.8 мы видели, что гомоморфизмы групп $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$ на группы $SO(3)$ и \mathcal{L}_p соответственно являются $(2 \rightarrow 1)$ -гомоморфизмами; следовательно, представление первой группы может ставить в соответствие две различные матрицы M и $-M$ каждому элементу g второй группы, т. е. каждому из преобразований пространства-времени. Это соответствие иногда называют *двузначным представлением* второй группы. В на-

стоящей главе рассматривается, как возникают такие представления. Будет показано, что роль групп $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$ заключается в том, чтобы определить так называемые лучевые представления более подходящих с физической точки зрения групп $SO(3)$ и \mathcal{L}_p .

Каждому возможному состоянию квантовомеханической системы соответствует не один вектор ψ в гильбертовом пространстве H , а целый луч $\{\alpha\psi\}$, состоящий из всех векторов, скалярно кратных вектору ψ . Если все векторы нормированы ($\|\psi\|=1$, $\|\alpha\psi\|=1$), то α имеет единичный модуль ($|\alpha|=1$), но его аргумент, или фаза ($\arg \alpha$) произволен. Этот произвол, как будет видно, влияет на интерпретацию теории представлений.

22.2. ВРАЩЕНИЯ ОСЕЙ

Можно считать, что состояние некоторой системы в принципе определяется одновременно измеренными значениями $\{a, b, \dots\}$ полной системы коммутирующих наблюдаемых (самосопряженных операторов) $\{A, B, \dots\}$. Следовательно, совокупность чисел $\{a, b, \dots\}$ определяет луч $\{\alpha\psi\}$ в гильбертовом пространстве H . Эти наблюдаемые по существу соответствуют некоторой экспериментальной установке или прибору, которые предназначены для их измерения. Допустим, что вся эта установка переводится в новую ориентацию вращением около некоторой фиксированной точки p , а именно вращением g [элементом группы $SO(3)$]. Это обстоятельство определяет новую систему аналогичных наблюдаемых $\{A', B', \dots\}$. Теперь данное состояние изучаемой системы соответствует новой совокупности чисел $\{a', b', \dots\}$, которая порождает новый луч $\{\alpha'\psi'\}$ в пространстве H . Иначе говоря, под действием вращения g каждый луч $\{\alpha\psi\}$ отображается в другой луч $\{\alpha'\psi'\}$. Эти отображения дают *лучевое представление* группы, которое будет рассмотрено в следующем параграфе.

Предположим, что на каждом луче в H как-то выбран нормированный вектор ψ . Тогда вращение g определяет взаимно однозначное отображение между так выбранными векторами в H . Мы допускаем также как некую аксиому квантовой механики, что эти векторы ψ можно выбрать так, чтобы данное отображение было линейным и, следовательно, могло бы быть определено во всем H благодаря линейности. Поскольку все представляющие векторы ψ были нормированы, данное отображение представляет собой унитарное преобразование U или $U(g)$. Однако это преобразование для данного g не является единственным из-за произвольности фаз представляющих векторов ψ . Эта степень неоднозначности преобразования U описывается следующей леммой, доказательство которой мы оставляем в качестве упражнения.

Лемма. Пусть U_1 и U_2 — два унитарных преобразования в H , таких, что для любого ψ два преобразованных вектора $U_1\psi$ и $U_2\psi$

определяют один и тот же луч. Иначе говоря, существует комплекснозначная функция $\beta(\psi)$, такая, что $U_1\psi = \beta(\psi)U_2\psi$ для всех ψ . Тогда $\beta(\psi) = \text{const} = \beta$, причем $|\beta| = 1$, т. е. $U_1 = \beta U_2$.

Унитарные преобразования U и βU , где β — константа и $|\beta| = 1$, называются эквивалентными: $U \cong \beta U$. Мы видели, что каждое вращение g соответствует классу эквивалентности $\{\beta U: |\beta| = 1\}$ унитарных преобразований, имеющих различные фазы $\arg \beta$.

Предположим теперь, что для каждого элемента g группы $SO(3)$ каким-то образом выбрано единственное унитарное преобразование $U(g)$ из соответствующего класса эквивалентности. Если $\psi' = U(g)\psi$, а $\psi'' = U(h)\psi'$, то результирующая матрица преобразования для отображения $\psi \rightarrow \psi''$, т. е. $U(h)U(g)$, не обязательно равна $U(hg)$, но эквивалентна (\cong) этой матрице. Следовательно, для любой пары вращений h, g существует такой фазовый множитель $\gamma(h, g)$, что

$$U(h)U(g) = \gamma(h, g)U(hg), \quad (22.2.1)$$

где $|\gamma(h, g)| = 1$. Позже мы рассмотрим возможности выбора функции $\gamma(h, g)$.

22.3. ЛУЧЕВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Множество S всех лучей называется *лучевым пространством*. Это не обязательно линейное пространство, потому что если r — луч и c — число, то cr , вообще говоря, не определено, а если r_1 и r_2 — два луча, то может быть не определена сумма $r_1 + r_2$. Если опустить требование нормировки, то каждый луч будет представлять собой одномерное подпространство в \mathbf{H} . С такой точки зрения единственно разумными определениями будут следующие: считать cr тем же лучом, что и r , даже в случае $c \neq 1$, а $r_1 + r_2$ считать *двумерным* подпространством в \mathbf{H} и поэтому уже не элементом множества S . Однако каждый элемент множества S соответствует некоторому состоянию данной физической системы, и это соответствие взаимно однозначно. Наиболее естественно принять, что S — топологическое (фактически метрическое) пространство. Если r_1 и r_2 — два луча, то расстояние между ними можно определить как

$$d(r_1, r_2) = \inf \{ \|\psi_1 - \psi_2\|: \psi_1 \in r_1, \psi_2 \in r_2, \|\psi_1\| = \|\psi_2\| = 1 \}.$$

Физические свойства двух соответствующих состояний (описываемых при помощи математических ожиданий наблюдаемых) близки, когда расстояние между лучами $d(r_1, r_2)$ мало.

Каждое вращение в пространстве (каждое изменение ориентации установки) индуцирует преобразование в S , как описано выше. Оно не является линейным преобразованием, поскольку S не представляет собой линейное пространство, но оно непрерывно по отношению к метрике в S . Отображение элементов группы $SO(3)$ на

соответствующие преобразования в пространстве S есть изоморфизм: оно взаимно однозначно, и произведение двух любых элементов из $SO(3)$ отображается на композицию (произведение) соответствующих преобразований в S и т. д. Каждое такое преобразование в S соответствует классу эквивалентности унитарных преобразований в пространстве H . В общем случае гомоморфизм группы G на группу классов эквивалентности унитарных преобразований в векторном пространстве V называется *лучевым представлением* группы G на V . Как и выше, два унитарных преобразования U_1 и U_2 в V являются *эквивалентными*, если $U_1 = \beta U_2$, где β — некоторая константа.

С физической точки зрения лучевые представления группы $SO(3)$ на H являются вполне подходящими выражениями сферической симметрии. Но для вычислительных целей хотелось бы описывать преобразования в пространстве S при помощи более осязаемых объектов, подобных матрицам. Следовательно, возникает задача отбора некоторым подходящим образом *одного* унитарного преобразования $U(g)$ из каждого класса эквивалентности.

Если бы фазы преобразований $U(g)$ можно было выбрать так, чтобы множитель $\gamma(h, g)$ в (22.2.1) был равен единице для всех h и g , то отображение $g \rightarrow U(g)$ было бы обычным представлением группы $SO(3)$ на H . Но, вообще говоря, этого сделать нельзя; сейчас мы выясним, что же *можно* сделать, но прежде всего ограничим задачу конечномерным случаем.

22.4. КОНЕЧНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Предположим, что физическая система обладает сферической симметрией и что существует дискретное энергетическое состояние конечной кратности n с энергией E . В этом случае соответствующее собственное подпространство оператора энергии является инвариантным подпространством H_E пространства H . Тогда лучи в H_E преобразуются при вращениях в другие лучи из H_E ; следовательно, H_E инвариантно относительно каждого из операторов $U(g)$ и сужение оператора $U(g)$ на H_E может быть представлено для каждого g унитарной матрицей размера $n \times n$, которую мы также будем обозначать просто через $U(g)$. Начиная с этого места наше обсуждение будет ограничиваться конечномерным случаем.

22.5. ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Теперь примем вполне оправданное с физической точки зрения допущение, состоящее в том, что фазы унитарных преобразований можно выбрать во всяком случае так, что матричные элементы $U_{ij}(g)$ будут непрерывными функциями от g . Далее пусть θ_x ,

θ_y, θ_z — внутренние координаты в $SO(3)$, определенные в § 19.6, а \mathcal{N} и \mathcal{N}_0 — множества элементов группы, для которых $\|\theta\| < \pi$ и $\|\theta\| < \pi/2$ соответственно. Хотя многообразие группы в целом двусвязно, области \mathcal{N} и \mathcal{N}_0 представляют собой односвязные окрестности единичного элемента. Если g и h принадлежат \mathcal{N}_0 , то gh принадлежит \mathcal{N} . Пусть теперь g, h и gh — матрицы вращения; тогда матричные элементы gh являются непрерывными функциями матричных элементов g и h ; следовательно, когда g и h непрерывно меняются в \mathcal{N}_0 , то gh непрерывно меняется в \mathcal{N} .

Теперь будет показано, что фазы описанных выше унитарных матриц $U(g)$ можно выбрать в окрестности \mathcal{N} так, что функция $\gamma(g, h)$ в (22.2.1) равна 1 для всех g и h , принадлежащих \mathcal{N}_0 . Когда это выполнено, отображение $g \rightarrow U(g)$ называется *локальным представлением* группы $SO(3)$ (см. гл. 25). Поскольку $U(g)$ непрерывна в \mathcal{N} , то в силу односвязности \mathcal{N} многозначная функция $(\det U(g))^{1/n}$ расщепляется на n независимых непрерывных ветвей в \mathcal{N} . Очевидно, $U(e)$ кратна единичной матрице I , и можно записать $U(e) = \beta^n I$, где $|\beta| = 1$. Тогда $(\det U(e))^{1/n}$ есть корень n -й степени из единицы, умноженный на β , и функцию $\alpha(g)$ можно определить как ту ветвь $(\det U(g))^{1/n}$, которая равна β для $g = e$. Теперь мы утверждаем, что если в \mathcal{N} определить новые унитарные матрицы $V(g)$ как

$$V(g) = [1/\alpha(g)] U(g), \quad (22.5.1)$$

то

$$V(g)V(h) = V(gh) \quad \text{для всех } g, h \text{ в } \mathcal{N}_0. \quad (22.5.2)$$

Чтобы это доказать, заметим, что в любом случае

$$V(g)V(h) = \delta(g, h)V(gh),$$

где $\delta(g, h)$ — непрерывная функция [ср. с (22.2.1)]. Из (22.5.1) видно, что $\det V(g) = 1$ для всех g , откуда $\delta(g, h)^n = 1$, и, значит, $\delta(g, h)$ является корнем n -й степени из единицы для всех g и h ; но $\delta(e, e) = 1$, откуда по непрерывности $\delta(g, h) \equiv 1$, что показывает справедливость (22.5.2).

22.6. ПРОИСХОЖДЕНИЕ ДВУЗНАЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Остается следующий вопрос: в каком случае локальное представление $g \rightarrow V(g)$ может быть расширено до представления всей группы $SO(3)$? Если H — группа матриц, порожденная матрицами $V(g)$, когда $g \in \mathcal{N}$, то отображение $g \rightarrow V(g)$ есть локальный гомоморфизм группы $SO(3)$ в группу H . Согласно теореме 3 § 25.13, локальный гомоморфизм группы Ли G в группу Ли H можно расширить до гомоморфизма всей группы G в H , если G односвязна, но в других случаях такого расширения может не быть. Группа $G = SO(3)$, конечно, не является односвязной; однако из отображения $g \rightarrow V(g)$

можно построить тоже локальный гомоморфизм группы $SU(2)$ в H , и уже этот гомоморфизм *может* быть расширен, поскольку $SU(2)$ односвязна.

Обозначим через $u \rightarrow g(u)$, где $u \in SU(2)$, а $g(u) \in SO(3)$, гомоморфизм группы $SU(2)$ на группу $SO(3)$, который был описан в

§ 19.7. Тогда отображение $u \rightarrow W(u) \stackrel{\text{def}}{=} V(g(u))$ есть локальный гомоморфизм группы $SU(2)$ в группу H , определенный для таких значений u , для которых $g(u) \in \mathcal{N}$. Его расширение [которое также будет обозначаться как $u \rightarrow W(u)$] является представлением группы $SU(2)$. Далее $u \rightarrow g(u)$ есть $(2 \rightarrow 1)$ -гомоморфизм; в самом деле, $g(-u) = g(u)$; следовательно, два уравнения $g = g(u)$, $W = W(u)$ дают или (1) представление $g \rightarrow W$ группы $SO(3)$ [в этом случае $W(u) = W(-u)$], или (2) соответствие двух унитарных матриц размера $n \times n$, скажем $V_1(g)$ и $V_2(g)$ (причем $V_2(g) = -V_1(g)$), каждой матрице вращения g таким образом, что каждое из четырех произведений

$$V_i(g)V_j(h) \quad (ij = 11, 12, 21, 22)$$

равно $V_1(gh)$ или $V_2(gh)$. Это соответствие называется *двузначным представлением* группы $SO(3)$. Очевидно, каждое представление $SU(2)$ определяет двузначное представление и, значит, лучевое представление группы $SO(3)$.

Резюме. Так как квантовомеханические состояния соответствуют лучам в гильбертовом пространстве, а не векторам, вращению g физической системы соответствует не единственное преобразование векторов данного инвариантного подпространства с матрицей $U = U(g)$, а множество унитарных преобразований $\{\alpha U : \text{все } \alpha \in \mathbb{C}, \text{ такие, что } |\alpha| = 1\}$. Было показано, однако, что эти множества столь взаимосвязаны, что подходящим выбором матриц из них можно получить представление группы $SU(2)$. Это может осуществиться одним из двух путей.

1. Оказывается возможным выбрать одну матрицу $U = U(g)$ из каждого множества так, чтобы дать представление $SO(3)$, а значит, и представление $SU(2)$ при помощи гомоморфизмов

$$SU(2) \rightarrow SO(3) \rightarrow \{U(g)\};$$

$$\begin{matrix} (2 \times 2) & (3 \times 3) & (n \times n) \end{matrix}$$

2. Оказывается необходимым выбрать две матрицы U и $-U$ из каждого множества и поставить их в соответствие двум элементам u и $-u$ группы $SU(2)$, но лишь одному элементу g группы $SO(3)$ таким образом, что эти матрицы образуют обычное представление группы $SU(2)$ и двузначное, или *спиновое*, представление группы $SO(3)$. В гл. 25 будет показано, что других групп, связанных с $SO(3)$ подобно группе $SU(2)$, не существует; следовательно, не существует многозначных представлений, кроме двузначных.

Аналогично для физической системы, которая инвариантна не только относительно группы вращений $SO(3)$, но также и относительно всей собственной группы Лоренца \mathcal{L}_p , преобразование волновых функций, соответствующее данному элементу g группы \mathcal{L}_p , не является единственным. В этом случае существует множество преобразований $\{\alpha U: |\alpha|=1\}$, соответствующих каждому g , и эти множества столь взаимосвязаны, что можно выбрать из них преобразования так, чтобы дать представление группы $SL(2, \mathbb{C})$ [которая связана с \mathcal{L}_p таким же образом, как $SU(2)$ связана с $SO(3)$]; это может быть как представлением самой группы \mathcal{L}_p , включающим скаляры, векторы или тензоры общего вида, так и двузначным представлением (спиновым представлением) группы \mathcal{L}_p . В теории электрона Дирака законы преобразований четырех компонент волновой функции электрона дают двузначное представление группы \mathcal{L}_p (см. книгу Дирака [1958]).

Легко видеть, что двузначное неприводимое представление невозможно сделать однозначным, выбирая каким-либо способом одну из двух матриц U и $-U$, которые представляют каждый данный элемент g из $SO(3)$ (или \mathcal{L}_p); в самом деле, если U_0 — матрица, представляющая вращение на угол π в двузначном неприводимом представлении, то можно показать, что $U_0^2 = -I$, но U_0^2 представляет единицу группы $SO(3)$, а потому должна быть равна $+I$ в любом однозначном представлении.

22.7. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП $SU(2)$ И $SL(2, \mathbb{C})$

Обсуждение носит гипотетический характер до тех пор, пока не показано, что действительно существуют представления группы $SU(2)$, которые дают двузначные представления группы $SO(3)$. Само собой разумеется, что единичное представление $SU(2)$ таково, но существуют и многие другие. Несколько следующих параграфов посвящено неприводимым представлениям группы $SU(2)$. Все они конечномерны в силу компактности $SU(2)$, тогда как группы $SL(2, \mathbb{C})$ и \mathcal{L}_p , которые не являются компактными, имеют также и бесконечномерные неприводимые представления, по поводу которых читатель отсылается к книгам Виленкина [1965], Наймарка [1976] и Сугиуры [1975]. Оказывается, что некоторые конечномерные представления группы $SL(2, \mathbb{C})$ остаются неприводимыми, когда сужаются до $SU(2)$; они ведут к обычным и спиновым представлениям группы Лоренца и группы вращений.

Элемент группы $SL(2, \mathbb{C})$ есть унимодулярное преобразование пространства \mathbb{C}^2 на себя, задаваемое в виде

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \gamma x_1 + \delta x_2 \end{pmatrix}, \quad (22.7.1)$$

где $\alpha\delta - \gamma\beta = 1$. Матрица обратного преобразования имеет вид

$$u^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

Далее, действие группы на \mathbb{C}^2 эффективно (любое преобразование $u \neq e$ перемещает хотя бы одну точку в \mathbb{C}^2) и транзитивно (для двух заданных произвольных точек x и y всегда найдется такой элемент u группы, что $y = ux$), т. е. \mathbb{C}^2 является однородным пространством для $SL(2, \mathbb{C})$. Поэтому допустим, что X^∞ — пространство всех целых аналитических функций $f(x_1, x_2)$ двух комплексных переменных. Тогда, согласно (20.6.1), бесконечномерное представление группы $SL(2, \mathbb{C})$ получается путем установления соответствия между элементом u и преобразованием $\rho(u)$ в X^∞ при помощи равенства

$$(\rho(u)f)(x_1, x_2) = f(\delta x_1 - \beta x_2, -\gamma x_1 + \alpha x_2). \quad (22.7.2)$$

Рассмотрим теперь некоторые элементы подгруппы $SU(2)$. Пусть $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — внутренние координаты в $SO(3)$, определенные в § 19.6, $g_{\omega_1, \omega_2, \omega_3}$ — соответствующая матрица вращения [элемент $SO(3)$], $a \pm u_{\omega_1, \omega_2, \omega_3}$ — элементы $SU(2)$, которые отображаются на $g_{\omega_1, \omega_2, \omega_3}$ при помощи гомоморфизма, описанного в § 19.7. В частности, можно принять

$$\begin{aligned} u_{\omega, 0, 0} &= \begin{pmatrix} \cos \omega/2 & -i \sin \omega/2 \\ -i \sin \omega/2 & \cos \omega/2 \end{pmatrix}, \\ u_{0, \omega, 0} &= \begin{pmatrix} \cos \omega/2 & -\sin \omega/2 \\ \sin \omega/2 & \cos \omega/2 \end{pmatrix}, \\ u_{0, 0, \omega} &= \begin{pmatrix} e^{-i\omega/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega/2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (22.7.3)$$

потому что непосредственные вычисления с использованием формул § 19.7 показывают, что, согласно (19.6.1), соответствующие преобразования от x, y, z к x', y', z' задаются матрицами

$$\begin{aligned} g_{\omega, 0, 0} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{pmatrix}, \\ g_{0, \omega, 0} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ g_{0, 0, \omega} &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (22.7.4)$$

Инфинитезимальные элементы группы $SU(2)$ получаются следующим образом:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\partial}{\partial \omega} u_{\omega, 0, 0} \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \\ T_2 &= \frac{\partial}{\partial \omega} u_{0, \omega, 0} \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ T_3 &= \frac{\partial}{\partial \omega} u_{0, 0, \omega} \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (22.7.5)$$

Соответствующие дифференциальные операторы представления ρ суть

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\partial}{\partial \omega} \rho(u_{\omega, 0, 0}) \Big|_{\omega=0} = \frac{i}{2} \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \\ L_2 &= \frac{\partial}{\partial \omega} \rho(u_{0, \omega, 0}) \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{2} \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \\ L_3 &= \frac{\partial}{\partial \omega} \rho(u_{0, 0, \omega}) \Big|_{\omega=0} = \frac{i}{2} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (22.7.6)$$

Инфинитезимальные элементы и операторы удовлетворяют соотношениям коммутации

$$[T_i, T_j] = T_k, \quad [L_i, L_j] = L_k \quad (i j k = 1 2 3, 2 3 1, 3 1 2). \quad (22.7.7)$$

Отметим попутно, что матрицы в (22.7.5) можно рассматривать также как инфинитезимальные элементы большей (охватывающей) группы $SL(2, \mathbb{C})$ по следующей причине: прежде всего, легко проверить, что матрицы (22.7.3) выражаются через матрицы T_i , а именно

$$\begin{aligned} u_{\omega, 0, 0} &= \exp(\omega T_1), \\ u_{0, \omega, 0} &= \exp(\omega T_2), \quad u_{0, 0, \omega} = \exp(\omega T_3). \end{aligned}$$

Методы, изложенные в гл. 25 (экспоненциальное отображение), показывают, что в общем случае

$$u_{\omega_1, \omega_2, \omega_3} = \exp(\omega_1 T_1 + \omega_2 T_2 + \omega_3 T_3). \quad (22.7.8)$$

Из (22.7.5) видно, что правая часть последнего выражения имеет вид $\exp(iA)$, где A — общая эрмитова матрица размера 2×2 с нулевым следом. Если теперь допустить, что $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ принимают комплексные значения, то правая часть (22.7.8) имеет вид $\exp B$, где B — совершенно общая матрица размера 2×2 с нулевым следом, но тогда $\exp B$ есть общая матрица размера 2×2 с детерминантом, равным 1, т. е. общий элемент группы $SL(2, \mathbb{C})$.

22.8. НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $SU(2)$

Для каждого значения $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$ индекса l подпространство X^{2l+1} пространства X^∞ определяется как пространство всех однородных многочленов степени $2l$ от x_1 и x_2 . Из (22.7.2) следует, что каждый оператор $\rho(u)$ преобразует любой однородный многочлен в другой однородный многочлен той же степени; следовательно, каждое подпространство X^{2l+1} инвариантно относительно $\rho(u)$ не только для всех u из $SU(2)$, но и для всех u из $SL(2, \mathbb{C})$.

Далее будет показано, что представление группы $SU(2)$, заданное в (22.7.2), неприводимо на каждом подпространстве X^{2l+1} (такое представление обозначим через D^l); следовательно, представление группы $SL(2, \mathbb{C})$ на X^{2l+1} тем более неприводимо. Будет показано, что любое подпространство в X^{2l+1} (отличное от подпространства, состоящего лишь из одного нулевого вектора), которое инвариантно относительно $SU(2)$, совпадает со всем пространством X^{2l+1} . Это делается при помощи уже знакомого нам метода, использующего операторы поднятия и опускания: любое такое подпространство инвариантно относительно операторов L_1, L_2, L_3 из (22.7.6); а значит, и относительно операторов $L_1 \pm iL_2$.

Одночлены

$$f_m(x_1, x_2) = x_1^{-m} x_2^{l+m} \quad (m = -l, -l+1, \dots, l) \quad (22.8.1)$$

образуют базис в X^{2l+1} ; f_m есть собственная функция оператора L_3 , соответствующая собственному значению im . Заметим, что в качестве значений m допускаются целые числа и половины нечетных целых чисел в зависимости от того, является l целым или полуцелым. Любая функция g из X^{2l+1} может быть выражена в виде $\sum_m c_m f_m$. С помощью рассуждений, подобных проведенным в § 20.5, устанавливается, что если инвариантное подпространство в X^{2l+1} содержит такую функцию g , то оно содержит в отдельности и все одночлены f_m , при которых $c_m \neq 0$.

В самом деле, если данное подпространство включает функцию g , то оно включает и функцию $L_3 g$ (потому что это подпространство инвариантно относительно L_3), а также функцию $P(L_3)g$, где P — любой многочлен, но P можно выбрать так, чтобы исключить из суммы $\sum_m c_m f_m$ все члены, кроме одного (в качестве P

можно взять интерполяционный многочлен Лагранжа, который обращается в нуль для всех собственных значений im оператора L_3 , кроме одного). Таким образом, инвариантное подпространство содержит хотя бы одну из функций f_m . Но $L_1 + iL_2$ есть оператор опускания, т. е. он преобразует f_m в функцию, кратную f_{m-1} , за исключением f_{-l} , которая преобразуется в нуль; оператор $L_1 - iL_2$ есть оператор поднятия, т. е. он преобразует f_m в функцию,

кратную f_{m+1} , за исключением f_l , которая преобразуется в нуль. Следовательно, инвариантное подпространство совпадает со всем X^{2l+1} , что и требовалось доказать

В следующем параграфе будет показано, что D^l ($l=0, 1/2, 1, 3/2, \dots$) являются единственными неприводимыми представлениями группы $SU(2)$.

Двузначные представления группы $SO(3)$ возникают следующим образом. Если $u \in SU(2)$, то посредством гомоморфизма $SU(2)$ на $SO(3)$ (см. § 19.7) оба элемента u и $-u$ отображаются на элемент g группы $SO(3)$. Если D^l — одно из найденных выше представлений группы $SU(2)$, то отображение $g \rightarrow D^l(\pm u)$ есть однозначное представление $SO(3)$ на X^{2l+1} в случае, когда $D^l(-u) = D^l(u)$, и является двузначным представлением, когда $D^l(-u) \neq D^l(u)$. Необходимо лишь исследовать случай, когда $u = I_2$; тогда $D^l(u) = I_{2l+1}$. (Здесь под I_k понимается единичная матрица размера $k \times k$.) При отображении, определяемом матрицей $-I_2$, координаты x_1 и x_2 переходят в $-x_1$ и $-x_2$; если $2l$ чётно, одночлен f_m переходит сам в себя; отсюда $D^l(-I_2) = I_{2l+1}$ и отображение $g \rightarrow D^l(\pm u)$ является обычным представлением нечётной размерности $2l+1$, которое описано в § 20.9. Если же $2l$ нечётно, то f_m переходит в $-f_m$; отсюда $D^l(-I_2) = -I_{2l+1}$ и отображение $g \rightarrow D^l(\pm u) = \pm D^l(u)$ становится двузначным, или спиновым, представлением чётной размерности.

Аналогичным образом указанные выше неприводимые представления группы $SL(2, \mathbb{C})$ [из которых путем сужения получаются неприводимые представления $SU(2)$] приводят к конечномерным обычным и спиновым представлениям группы Лоренца \mathcal{L}_p . Однако в этом случае имеются еще и другие неприводимые конечномерные представления группы $SL(2, \mathbb{C})$, которые будут описаны в § 22.11; они также определяют обычные и спиновые представления группы \mathcal{L}_p , причем ни одно из них не является унитарным.

22.9. ХАРАКТЕРЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ $SU(2)$

Классы сопряженности группы $SU(2)$ легко определить. Прежде всего, матрицы u_1 и u_2 в $SU(2)$ имеют одинаковые собственные значения тогда и только тогда, когда существует такая унитарная матрица u [элемент $SU(2)$], что $u^* u_1 u = u_2$. Поскольку u можно умножить на любое комплексное число с модулем, равным 1, то мы можем без потери общности считать, что $\det u = 1$, и, значит, u принадлежит $SU(2)$. Отсюда следует, что u_1 и u_2 входят в один класс сопряженности группы $SU(2)$ тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые собственные значения. Поэтому каждый класс сопряженности можно представить матрицей вида

$$u = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix}$$

для некоторого $\alpha \in [0, 2\pi]$. Для такого u оператор $D^l(u)$ просто умножает базисный вектор (22.8.1) на $e^{i\alpha}$; следовательно, $D^l(u)$ — диагональная матрица, следом которой является

$$\chi^l(\alpha) = \sin[(l+1/2)\alpha]/\sin(\alpha/2), \quad (22.9.1)$$

точно так же, как и в случае целого l , согласно упражнению 3 в конце § 21.13. В том параграфе было показано, что функции (22.9.1) при $l=0, 1/2, 1, 3/2, \dots$ образуют полную систему для разложения функций, зависящих только от классов сопряженности, на многообразии группы $SU(2)$; следовательно, представления D^l исчерпывают неприводимые представления группы $SU(2)$.

22.10. ФУНКЦИИ ОТ z И \bar{z}

Введенные в этом параграфе обозначения удобны при рассмотрении представлений группы $SL(2, \mathbb{C})$ и используются во многих разделах математики. Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — две вещественные функции класса C^∞ от двух вещественных переменных x и y . Мы запишем $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, так что $f(z)$ есть комплекснозначная функция комплексной переменной z , вообще говоря неаналитическая. В случае когда $f(z)$ — аналитическая функция, ее производная может быть записана в различных видах при использовании уравнений Коши — Римана, а именно

$$f'(z) = \partial(u + iv)/\partial x = -i\partial(u + iv)/\partial y = \partial_z(u + iv),$$

где оператор ∂_z определяется следующим образом:

$$\partial_z = 1/2(\partial/\partial x - i\partial/\partial y). \quad (22.10.1)$$

Оператор $\partial_{\bar{z}}$ определяется аналогично:

$$\partial_{\bar{z}} = 1/2(\partial/\partial x + i\partial/\partial y); \quad (22.10.2)$$

следует отметить, что $\partial_{\bar{z}} f(z) \equiv 0$ для аналитической функции $f(z)$ в силу уравнений Коши — Римана. С другой стороны, если $f(z)$ — многочлен (или сходящийся степенной ряд) от \bar{z} , то $\partial_z f(z) = 0$. Кроме того, операторы (22.10.1) и (22.10.2) являются линейными дифференциальными операторами; следовательно, справедливо обычное правило дифференцирования произведения. Поэтому если f — многочлен (или сходящийся степенной ряд) как от z , так и от \bar{z} [в этом случае обычно пишут $f(z, \bar{z})$, чтобы указать, что эта функция может быть неаналитичной либо по z , либо по \bar{z}], то \bar{z} можно полагать постоянной при вычислении ∂_z и z полагать постоянной при вычислении $\partial_{\bar{z}}$. Иначе говоря, z и \bar{z} при дифференцировании можно рассматривать как независимые переменные.

22.11. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $SL(2, \mathbb{C})$

Метод однородных многочленов, использованный в § 22.8 для группы $SU(2)$, можно применить и к группе $SL(2, \mathbb{C})$, но в таком случае возникает новый аспект. При заданном представлении ρ группы G имеется много способов, при помощи которых можно получить другие представления ρ' . Например,

$$\rho'(u) = \overline{\rho(u)} \quad \forall u \in G \quad (22.11.1)$$

[это означает, что каждый матричный элемент $\rho_{mn}(u)$ заменяется комплексно сопряженным], ибо тогда $\rho'(u_1 u_2) = \rho'(u_1)\rho'(u_2)$ и т. д. Другим возможным представлением является

$$\rho'(u) = (\rho(u)^T)^{-1}; \quad (22.11.2)$$

в случае унитарности представления ρ (22.11.2) совпадает с (22.11.1). Если G представляет собой группу матриц, то появляются две новые возможности:

$$\rho'(u) = \rho(\bar{u}), \quad (22.11.3)$$

$$\rho'(u) = \rho((u^T)^{-1}). \quad (22.11.4)$$

Если G — унитарная группа, например $U(n)$ или $SU(n)$, то (22.11.3) и (22.11.4) совпадают, в противном случае эти два представления, вообще говоря, различны.

Сейчас мы покажем, что если G есть $SU(2)$, то представление ρ' , заданное в (22.11.3), эквивалентно ρ ; следовательно, в этом случае приведенные способы не дают новых представлений; именно поэтому эти способы не использовались в § 22.8. В самом деле, пусть

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

так что для общей матрицы размера 2×2

$$\gamma^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \gamma = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}. \quad (22.11.5)$$

В частности, для любого элемента u из $SU(2)$ $\bar{u} = \gamma^{-1} u \gamma$, что можно установить, записывая u в виде $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$. Тогда, поскольку γ также принадлежит $SU(2)$,

$$\rho'(u) = \rho(\gamma^{-1} u \gamma) = \rho(\gamma)^{-1} \rho(u) \rho(\gamma)$$

для всех u ; отсюда вытекает, что ρ и ρ' — эквивалентные представления.

Когда же представления (22.11.3) и (22.11.4) расширяются

от $SU(2)$ до $SU(2, \mathbb{C})$ при помощи определений

$$\rho'(m) = \rho(\bar{m}) \quad (22.11.6)$$

и

$$\rho'(m) = \rho((m^T)^{-1}) \quad (22.11.7)$$

для m из $SU(2, \mathbb{C})$, то они перестают быть не только идентичными, но даже эквивалентными. Второе из представлений ρ' эквивалентно ρ , потому что $(m^T)^{-1} = \gamma^{-1} m \gamma$ в силу (22.11.5) с учетом того, что $\det m = 1$. В то же время представление ρ' , заданное в (22.11.6), не является эквивалентным ρ , так как если бы равенства

$$\rho(\bar{m}) = V^{-1} \rho(m) V \quad (22.11.8)$$

имели место для всех m , то в случае $m \in SU(2)$ для этого матрица V должна была бы совпадать с $\rho(\gamma)$, но тогда (22.11.8) теряло бы смысл для $m \notin SU(2)$, поскольку, вообще говоря, для такого m $\gamma^{-1} m \gamma$ не равно \bar{m} .

Таким образом, ясно, что группа $SL(2, \mathbb{C})$ имеет в некотором смысле больше представлений, чем группа $SU(2)$. Для того чтобы их найти, допустим, что X^∞ — множество всех комплекснозначных функций двух комплексных переменных x_1 и x_2 , причем эти функции принадлежат классу C^∞ в вещественном смысле, но не являются целыми аналитическими в отличие от рассматривавшихся в § 22.10; мы обозначим эти функции подобно тому, как это делалось в § 22.10, через $f(x_1, x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Вместо (22.7.2) мы имеем

$$\begin{aligned} (\rho(u)f)(x_1, x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2) = \\ = f(\delta x_1 - \beta x_2, -\gamma x_1 + \alpha x_2, \bar{\delta} \bar{x}_1 - \bar{\beta} \bar{x}_2, -\bar{\gamma} \bar{x}_1 + \bar{\alpha} \bar{x}_2), \end{aligned} \quad (22.11.9)$$

где u есть матрица

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad (22.11.10)$$

т. е. произвольная матрица из $SL(2, \mathbb{C})$. Теперь дополнительно к трем матрицам (22.7.3), принадлежащим $SU(2)$, соответствующим вращениям в пространстве и определяющим инфинитезимальные операторы L_1, L_2, L_3 посредством (22.7.6), мы имеем три новые матрицы

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \text{ch } \omega/2 & \text{sh } \omega/2 \\ \text{sh } \omega/2 & \text{ch } \omega/2 \end{pmatrix} \quad (\omega = \varphi_x), \\ & \begin{pmatrix} \text{ch } \omega/2 & -i \text{sh } \omega/2 \\ i \text{sh } \omega/2 & \text{ch } \omega/2 \end{pmatrix} \quad (\omega = \varphi_y), \\ & \begin{pmatrix} e^{\omega/2} & 0 \\ 0 & e^{-\omega/2} \end{pmatrix} \quad (\omega = \varphi_z), \end{aligned} \quad (22.11.11)$$

соответствующие преобразования Лоренца и определяющие новые инфинитезимальные операторы K_1, K_2, K_3 . Следовательно, инфинитезимальные операторы группы $SL(2, \mathbb{C})$ получаются следующим образом: матрицы (22.7.3) и (22.11.11) подставляются в (22.11.3), каждый оператор $\rho(\bar{u})$ дифференцируется по ω и, наконец, ω полагается равным нулю. Если вспомнить, что при дифференцировании $x_1, x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2$ рассматриваются как независимые переменные (см. следующий параграф), то мы найдем, что

$$\begin{aligned} L_1 &= -(i/2)(x_2 \partial_{x_1} + x_1 \partial_{x_2}) + (i/2)(\bar{x}_2 \partial_{\bar{x}_1} + \bar{x}_1 \partial_{\bar{x}_2}), \\ L_2 &= (1/2)(x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2}) + (1/2)(\bar{x}_2 \partial_{\bar{x}_1} - \bar{x}_1 \partial_{\bar{x}_2}), \\ L_3 &= -(i/2)(x_1 \partial_{x_1} - x_2 \partial_{x_2}) + (i/2)(\bar{x}_1 \partial_{\bar{x}_1} - \bar{x}_2 \partial_{\bar{x}_2}), \\ K_1 &= -(1/2)(x_2 \partial_{x_1} + x_1 \partial_{x_2}) - (1/2)(\bar{x}_2 \partial_{\bar{x}_1} + \bar{x}_1 \partial_{\bar{x}_2}), \\ K_2 &= (i/2)(x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2}) - (i/2)(\bar{x}_2 \partial_{\bar{x}_1} - \bar{x}_1 \partial_{\bar{x}_2}), \\ K_3 &= -(1/2)(x_1 \partial_{x_1} - x_2 \partial_{x_2}) - (1/2)(\bar{x}_1 \partial_{\bar{x}_1} - \bar{x}_2 \partial_{\bar{x}_2}). \end{aligned} \quad (22.11.12)$$

Полная система соотношений коммутации имеет вид

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= L_k, \quad [K_i, K_j] = L_k, \quad [K_i, L_j] = -K_k, \quad [K_i, L_i] = 0 \\ & \quad (ijk = 123, 231, 312). \end{aligned} \quad (22.11.13)$$

Введем, кроме того, операторы

$$L^\pm = L_1 \pm iL_2, \quad K^\pm = K_1 \pm iK_2. \quad (22.11.14)$$

22.12. НЕПРИВОДИМЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ПРОСТРАНСТВА X^∞ ДЛЯ ГРУППЫ $SL(2, \mathbb{C})$

В качестве базисных векторов для пространства X^∞ или по крайней мере для множества всех многочленов в X^∞ введем одночлены

$$\psi = \psi_{lm'l'm'} = (1/C) x_1^{l-m} x_2^{l+m} \bar{x}_1^{l'-m'} \bar{x}_2^{l'+m'}, \quad (22.12.1)$$

где

$$C^2 = (l-m)!(l+m)!(l'-m')!(l'+m')!,$$

l и l' — любые два числа из $0, 1/2, 1, 3/2, \dots$, а

$$m = l, l-1, \dots, -l, \quad m' = l', l'-1, \dots, -l'.$$

Для данных l и l' пространство $X(l, l')$, представляющее собой линейную оболочку векторов $\psi_{lm'l'm'}$, является пространством всех однородных многочленов степени $2l$ от переменных x_1 и x_2 и степени $2l'$ от переменных \bar{x}_1 и \bar{x}_2 . Это пространство имеет (комплексную) размерность $(2l+1)(2l'+1)$. Из (22.11.9) ясно,

что каждое подпространство $X(l, l')$ отображается само на себя при любом $\rho(u)$ и, значит, является инвариантным подпространством. Из (22.11.12) мы видим, что

$$L_3\psi = i(m - m')\psi, \quad K_3\psi = (m + m')\psi;$$

иначе говоря, m — собственное значение оператора $-1/2 iL_3 + 1/2 K_3$, а m' — собственное значение оператора $1/2 iL_3 + 1/2 K_3$. Отсюда при помощи соображений, использовавшихся во всех предыдущих случаях, следует, что если некоторое инвариантное подпространство в подпространстве $X(l, l')$ содержит какую-либо функцию (многочлен), то оно содержит и любой одночлен $\psi_{lm'l'm'}$, входящий в этот многочлен с ненулевым коэффициентом. Далее мы находим, что

$$\begin{aligned} L^+ + iK^- &= -2ix_1\partial_{x_2}, & L^- + iK^+ &= -2ix_2\partial_{x_1}, \\ L^- - iK^+ &= 2i\bar{x}_1\partial_{\bar{x}_2}, & L^+ - iK^- &= 2i\bar{x}_2\partial_{\bar{x}_1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} L^+ + iK^- &\text{ опускает } m, & L^- + iK^+ &\text{ поднимает } m, \\ L^- - iK^+ &\text{ опускает } m', & L^+ - iK^- &\text{ поднимает } m' \end{aligned}$$

в том смысле, что функция $(L^+ + iK^-)\psi_{lm'l'm'}$ пропорциональна функции $\psi_{l, m-1, l', m'}$ и т. д. Это значит, что для данных l и l' все $\psi_{lm'l'm'}$ сцеплены при помощи инфинитезимальных операторов. Таким образом, мы заключаем, что если некоторое инвариантное подпространство содержит любую функцию (многочлен) в $X(l, l')$, то оно содержит и все подпространство $X(l, l')$. Иначе говоря, представление ρ , суженное до $X(l, l')$, неприводимо; такие представления обозначаются через $\rho^{(l, l')}$ и являются единственно возможными конечномерными неприводимыми представлениями группы $SL(2, \mathbb{C})$.

22.13. СПИНОРЫ

Спиноры представляют собой совокупности величин, которые связаны с группами $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$ подобно тому, как тензоры (включая векторы и скаляры) доквантовой физики связаны с физическими группами $SO(3)$ и \mathcal{L}_p . Законы преобразований спиноров дают некоторые (вообще говоря, приводимые) представления групп $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$ и, следовательно, некоторые однозначные или двузначные представления указанных физических групп. Те из спиноров, законы преобразований которых дают обычные или однозначные представления физических групп, являются на самом деле тензорами в несколько измененном виде (см. ниже упражнение 1); в этом смысле тензоры являются частным случаем спиноров.

Для того чтобы описать некий тензор, совокупность величин (скажем, $T_{11}, T_{12}, \dots, T_{44}$) связывают с каждой системой координат, и тогда соотношения между этими совокупностями для различных систем координат образуют законы преобразований. Коль скоро первоначальная система координат задана, это эквивалентно соответствию такой совокупности величин каждому элементу группы вращений или группы Лоренца; тогда совокупности, соответствующие другим системам координат, определяются законами преобразований. В случае спиноров совокупность величин для первоначальной системы координат сопоставляется с каждым элементом группы $SU(2)$ или $SL(2, \mathbb{C})$, и это приводит к соответствию каждой физической системе координат двух совокупностей, отличающихся, однако, лишь фазой (фактически только знаком). Но, поскольку фазы (в частности, знаки) несущественны с физической точки зрения, мы свободно можем говорить о соответствии совокупности (системы) величин каждой системе координат.

В таком случае *спинор ранга 1* есть соответствие каждой системе координат пары чисел ξ_1 и ξ_2 , причем такое, что при преобразовании Лоренца, которое определяется элементом группы $SL(2, \mathbb{C})$

$$m = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix},$$

числа ξ_1 и ξ_2 преобразуются согласно закону

$$\begin{aligned} \xi_1 &\rightarrow \xi'_1 = m_{11}\xi_1 + m_{12}\xi_2, \\ \xi_2 &\rightarrow \xi'_2 = m_{21}\xi_1 + m_{22}\xi_2. \end{aligned} \quad (22.13.1)$$

Спиноры более высокого ранга определяются совершенно аналогично тензорам: *спинор ранга r* есть такое соответствие каждой системе координат системы 2^r комплексных чисел $\xi_{\alpha_1 \dots \alpha_r}$ (каждый индекс принимает значения 1 и 2), при котором эти числа преобразуются согласно закону

$$\xi'_{\alpha_1 \dots \alpha_r} = \sum_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r=1}^2 m_{\alpha_1 \beta_1} \dots m_{\alpha_r \beta_r} \xi_{\beta_1 \dots \beta_r}. \quad (22.13.2)$$

Пока мы ограничиваемся лишь вращениями осей x, y, z , а не преобразованиями Лоренца, т. е. лишь группой $SU(2)$, это все, что можно сказать. Однако из предыдущих параграфов ясно, что при рассмотрении представлений группы $SL(2, \mathbb{C})$ матрица \bar{m} играет самостоятельную роль по сравнению с матрицей m . *Пунктирный спинор ранга 1* есть соответствие каждой системе координат пары комплексных чисел ξ_1, ξ_2 , при котором эти числа преобразуются согласно закону

$$\begin{aligned} \xi'_1 &= \overline{m_{11}}\xi_1 + \overline{m_{12}}\xi_2, \\ \xi'_2 &= \overline{m_{21}}\xi_1 + \overline{m_{22}}\xi_2. \end{aligned} \quad (22.13.3)$$

Наконец, смешанный спинор, имеющий r индексов без точек и s индексов с точками, есть соответствие каждой системе координат совокупности 2^{r+s} комплексных чисел, при котором эти числа преобразуются согласно закону

$$\begin{aligned} \xi'_{\alpha, \dots, \alpha_r \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_s} &= \\ &= \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_r, \delta_1, \dots, \delta_s=1}^2 m_{\alpha, \gamma_1} \dots m_{\alpha_r, \gamma_r} \overline{m_{\beta_1, \delta_1}} \dots \overline{m_{\beta_s, \delta_s}} \xi_{\gamma_1 \dots \gamma_r \dot{\delta}_1 \dots \dot{\delta}_s}. \end{aligned} \quad (22.13.4)$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть $\xi_{\alpha\dot{\beta}}$ — смешанный спинор ранга 2 и величины v_j ($j=1, \dots, 4$) определены как

$$\begin{aligned} v_1 &= \xi_{1\dot{1}} + \xi_{2\dot{2}}, & v_2 &= \xi_{1\dot{1}} - \xi_{2\dot{2}}, \\ v_3 &= \xi_{1\dot{2}} + \xi_{2\dot{1}}, & v_4 &= i(\xi_{1\dot{2}} - \xi_{2\dot{1}}). \end{aligned}$$

Покажите, что при вращениях и преобразованиях Лоренца величины v_1, \dots, v_4 преобразуются подобно компонентам вектора. Аналогично покажите, что смешанный спинор ранга $2r$, имеющий r индексов с точками и r индексов без точек, определяет тензор ранга r .

2. Спинор называется *симметричным*, если он симметричен по индексам с точками (т. е. не меняется при любой перестановке таких индексов), а также симметричен по индексам без точек. Покажите, что закон преобразования такого спинора дает представление группы $SL(2, \mathbb{C})$, которое эквивалентно представлению $\rho^{(l, l')}$, определенному в предыдущем параграфе, причем $2l$ и $2l'$ являются числом индексов с точками и числом индексов без точек соответственно.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ МНОГООБРАЗИЙ

Локально n -мерное пространство; сфера; тор; круг; лист Мёбиуса; бутылка Клейна; отождествление краев; координатные карты; согласованность карт; индуцированная топология; аксиома отделимости Хаусдорфа; многообразия; кривые; функции на многообразии; связность; односвязность; компонента; гомотопные кривые; гомотопические классы кривых; фундаментальная группа; двусвязность группы $SO(3)$; конфигурационное пространство механической системы; декартово произведение многообразий.

Предварительные сведения: гл. 18 и 19.

Теория многообразий лежит в основе теории групп Ли и геометрий Римана и Эйнштейна. В общую теорию относительности понятие многообразия было введено примерно в 1960 г. (в основном Мартином Крускалом), и это позволило по-новому оценить содержание этой теории и прояснить как локальные, так и глобальные топологические свойства пространственно-временных моделей. Статистическая механика имеет дело с потоками на многообразиях. Время от времени возникают другие приложения теории многообразий, что связано с геометрической природой физических задач. Здесь будут рассмотрены только конечномерные многообразия; теорию более общих многообразий см. в книге Ленга [1962].

23.1. ПРИМЕРЫ МНОГООБРАЗИЙ. МЕТОД ОТОЖДЕСТВЛЕНИЯ

Грубо говоря, n -мерное многообразие является пространством, которое локально топологически неотлично от n -мерного евклидова пространства E^n ; иначе говоря, каждая точка многообразия лежит в какой-то области (связном открытом множестве), которая гомеоморфна некоторой области в E^n . Формальное определение будет дано в § 23.4.

Любое евклидово пространство само, очевидно, является многообразием. Простым нетривиальным примером служит двумерная сфера, т. е. множество S^2 точек E^3 , для которых $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (x, y, z — декартовы координаты точек). Любую достаточно малую область U на S^2 можно взаимно однозначно отобразить на плоскую область при помощи любой из проекций, используемых в картографии. (В стереографической проекции в качестве U берется все S^2 , за исключением одной точки.) В силу этого S^2 является двумерным

многообразием. Тор (поверхность кольца) — также двумерное многообразие.

Любое открытое подмножество многообразия (например, открытый круг $x^2 + y^2 < 1$ на плоскости) является многообразием. Лист Мёбиуса (без края) — это многообразие. Граничные точки следует отбрасывать, потому что они не лежат на той части поверхности, которая отображается в *открытое* множество плоскости. Шар и заполненный тор (без их поверхностей) — трехмерные многообра-

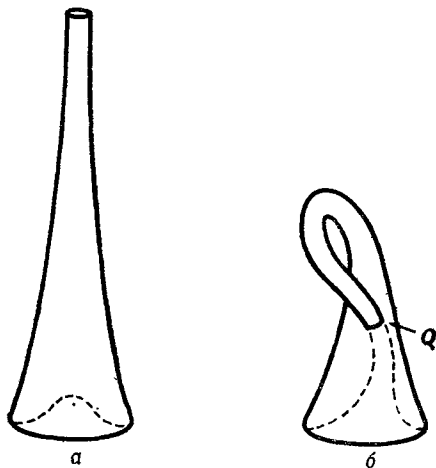


Рис. 23.1. Бутылка Клейна.



Рис. 23.2.

зия. Многообразия с краем здесь не рассматриваются; о них см. книгу Ленга [1962].

Поверхность, известная под названием *бутылки Клейна*, является двумерным многообразием. Представьте себе поверхность в виде винной бутылки с длинным горлышком и вдавленным доньшком, как на рис. 23.1, а. Затем представьте, что горлышко бутылки изогнуто вниз так, что оно проходит сквозь стенку бутылки (как в Q на рис. 23.1, б), а потом соединяется внутри бутылки с отверстием во вдавленном доньшке, образуя тем самым замкнутую одностороннюю поверхность. Эту поверхность нельзя представить вложенной в E^3 без самопересечений (как в Q), но ее можно вложить без самопересечений в E^4 . Чтобы убедиться в этом, возьмем поверхность (см. рис. 23.1, б), вложенную в E^3 ; тогда каждая ее точка имеет три координаты x_1, x_2, x_3 . Теперь нужно определить для каждой точки четвертую координату x_4 так, чтобы x_4 на поверхности изменялась гладко, а в окрестности Q принимало одно значение (скажем, 0) на стенке бутылки и другое значение (скажем, 1) — на ее

горлышке. В этом случае на поверхности уже не найдется двух разных точек с одинаковыми координатами x_1, x_2, x_3, x_4 .

Многие двумерные многообразия можно получить при помощи метода отождествления (склеивания) краев. Лист Мёбиуса получается из прямоугольника $ABCD$ (рис. 23.2) с помощью склеивания (отождествления) каждой точки стороны AB (выбирая их по порядку от A до B) с соответствующими точками стороны CD так, чтобы A отождествлялась с C , а B — с D . Две отождествленные точки рассматриваются как одна точка многообразия, и все выглядит в точности так, как если бы прямоугольник был узкой полосой бумаги, которая изогнута в виде окружности, а ее края склеены друг с другом, причем перед склеиванием один из концов был повернут на полуоборот.

Если в последнем примере аналогичным образом склеить так же и края AD и CB , то в результате получится бутылка Клейна ¹⁾. (Для этого потребовалось бы растягивать бумагу, не говоря уж о трудностях с самопересечением.)

В § 19.5 были рассмотрены многообразия групп. Многообразие группы $SO(3)$ было представлено в виде определенной трехмерной алгебраической поверхности в девятимерном пространстве. Некоторая окрестность каждой точки этой поверхности гомеоморфна некоторой области E^3 , однако в целом поверхность не гомеоморфна никакой области в E^3 ; в § 23.7 будет показано, что эта поверхность имеет такие свойства связности, какими область в E^3 обладать не может.

Многообразию группы $SO(3)$ можно рассматривать также и как результат трехмерной операции склеивания, использованной выше для получения листа Мёбиуса. Если $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ — внутренние координаты, введенные в § 19.6, то каждая точка шара $\|\theta\| \leq \pi$ представляет единственный элемент группы $SO(3)$, и обратно, за исключением того, что любые диаметрально противоположные точки на поверхности, θ и $-\theta$, $\|\theta\| = \pi$, представляют один и тот же элемент группы $SO(3)$ и поэтому должны отождествляться. Это отождествление нельзя осуществить (по аналогии с листом Мёбиуса) путем деформации сферы в трех-

¹⁾ Точнее говоря, дело обстоит так. Склеивание сторон прямоугольника дает следующие простейшие многообразия: если склеить только вертикально (или только горизонтально) противоположные точки, то получится цилиндр; если склеить диаметрально противоположные (относительно центра прямоугольника) точки двух сторон, то получится лист Мёбиуса; если склеить диаметрально противоположные точки сторон AB и CD и горизонтально противоположные точки AD и BC , то получится бутылка Клейна; если склеить диаметрально противоположные точки всех сторон, то получится проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$; если склеить вертикально противоположные и горизонтально противоположные точки, то получится тор, и, наконец, если склеить вертикальные и горизонтально противоположные точки все вместе в одну точку, то получится сфера S^2 . — *Прим. перев.*

мерном пространстве и склеивания поверхностей, однако это склеивание можно очевидным образом выполнить при помощи подходящей деформации сферы в девятимерном пространстве.

Согласно упражнению 1 из § 20.6, многообразие группы $SU(2)$ можно реализовать в виде трехмерной сферы, т. е. единичной сферы в E^4 . Это многообразие односвязно, однако также не гомеоморфно никакой области в E^3 .

23.2. КООРДИНАТНЫЕ СИСТЕМЫ ИЛИ КАРТЫ.

СОГЛАСОВАННОСТЬ. ГЛАДКОСТЬ

Пусть M_0 — некоторое пространство, т. е. множество объектов, называемых точками. (M_0 может быть группой или еще чем-либо подобным, однако пока не предполагается, что оно обладает какой-либо топологической структурой; см. замечание в § 23.4.) Введение n -мерной координатной карты в M_0 означает присвоение каждой точке P определенного подмножества U многообразия M_0 n вещественных координат $\{x^1, \dots, x^n\} = x$ таким образом, что соответствие $P \rightarrow x$ является взаимно однозначным отображением φ множества U на связное открытое подмножество N координатного пространства \mathbb{R}^n ; в этом случае пишут $x = \varphi(P)$, а тройку (U, φ, N) называют *координатной картой* на M_0 . Такое обозначение карты удобно, хотя и избыточно, поскольку U и φ определяют N (см. замечание в § 23.4). Вектор $x = \varphi(P)$ иногда называют *координатой* точки P .

Если, например, θ и φ — сферические координаты на сфере ($\theta = x^1$, $\varphi = x^2$), то указанное отображение переводит определенные точки сферы в точки открытого прямоугольника ($0 < \theta < \pi$, $-\pi < \varphi < \pi$) на (θ, φ) -плоскости \mathbb{R}^2 . Чтобы сделать это отображение взаимно однозначным, нужно отбросить северный и южный полюсы ($\theta = 0$ и $\theta = \pi$ соответственно), а также международную линию смены дат $\varphi = \pm \pi$. Чтобы описать всю сферу, можно было бы использовать метод склеивания, т. е. расширить это отображение на границу прямоугольника, а затем принять соглашение о том, что все точки $\theta = 0$, $-\pi < \varphi < \pi$ склеиваются в одну точку (северный полюс), все точки $\theta = \pi$, $-\pi < \varphi < \pi$ тоже склеиваются в одну точку (южный полюс) и для каждого θ из интервала (θ, π) точки с координатами $\varphi = +\pi$ и $\varphi = -\pi$ означают одну и ту же точку. Однако, для того чтобы иметь возможность учесть требования гладкости и гарантировать, что поверхность, полученная после склеивания, действительно похожа на сферу, а не на какие-нибудь чепчик или пилотку, необходим другой подход.

Если $\{U_1, \varphi_1, N_1\}$ и $\{U_2, \varphi_2, N_2\}$ — две перекрывающиеся карты на M_0 , то они устанавливают некоторую связь между двумя

множествами координат точек P из пересечения $U_1 \cap U_2$ и эта связь является взаимно однозначной, поскольку каждое отображение $P \rightarrow \varphi_1(P)$ и $P \rightarrow \varphi_2(P)$ является взаимно однозначным. Если мы положим $x = \varphi_1(P)$ и $y = \varphi_2(P)$, то получающаяся связь между x и y и ее обращение определяют функции (*функции перехода*), которые мы будем обозначать следующим образом:

$$x^i = \hat{x}^i(y^1, \dots, y^n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (23.2.1)$$

$$y^i = \hat{y}^i(x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (23.2.2)$$

Предполагается, что эти функции непрерывны и определенное число раз дифференцируемы; если $U_1 \cap U_2$ не пусто, то предполагается, что преобразования (23.2.1) и (23.2.2) заданы на *открытой* области в \mathbb{R}^n . Точнее, две карты называются *C^k -согласованными*, если

1) множества $\{x = \varphi_1(P) : P \in U_1 \cap U_2\}$ и $\{y = \varphi_2(P) : P \in U_1 \cap U_2\}$ являются открытыми подмножествами в \mathbb{R}^n ;

2) функции (23.2.1) и (23.2.2) принадлежат классу C^k .
Если $U_1 \cap U_2$ пусто, карты автоматически согласованы.

Замечание. Из пункта 2 определения следует, что если одно из множеств, указанных в пункте 1, открыто в \mathbb{R}^n , то и другое также оказывается открытым.

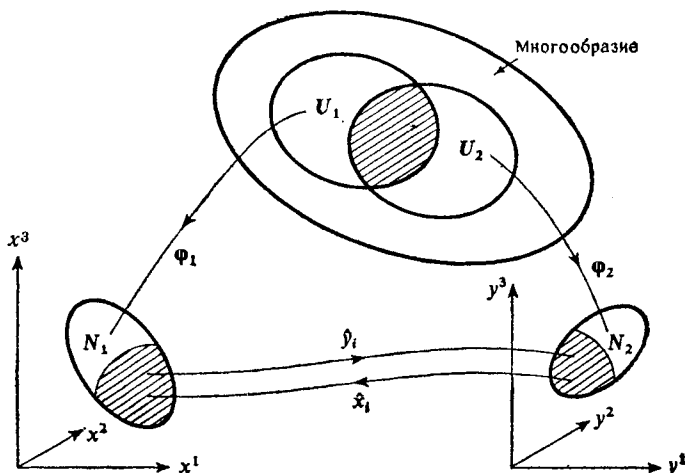


Рис. 23.3. Схематическое изображение двух карт на многообразии.

Интуитивно ясно, что любые две разумно выбранные карты любого разумно выбранного пространства всегда будут согласованными. Связи между ними показаны на рис. 23.3. Отображения,

указанные на этом рисунке, означают следующее:

$$\begin{aligned} \varphi_1: P &\rightarrow \varphi_1(P), & \varphi_2: P &\rightarrow \varphi_2(P), \\ \hat{x}^i: y^i &\rightarrow \hat{x}^i(y^1, \dots, y^n), & \hat{y}^i: x^i &\rightarrow \hat{y}^i(x^1, \dots, x^n). \end{aligned}$$

Если углы θ, φ на сфере есть координаты первой системы, то вторую систему координат можно выбрать так, чтобы координаты θ' и φ' являлись углами относительно других осей. Например, северный полюс N' в новой системе ($\theta' = 0$) можно взять

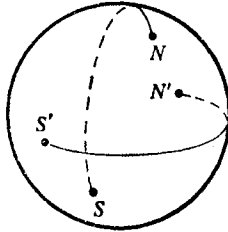


Рис. 23.4.

в точке ($\theta = \pi/2, \varphi = \pi/2$) старой системы, а угол φ' , отсчитываемый вокруг нового северного полюса, выбрать так, чтобы новая линия смены дат оказалась частью старого экватора ($\theta = \pi/2, -\pi/2 < \varphi < \pi/2$; см. рис. 23.4). Ясно, что эти две системы в совокупности полностью покрывают сферу.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите для этого примера преобразования (23.2.1) и (23.2.2), т. е. связь между θ, φ и θ', φ' .
2. Опишите системы координат на поверхности тора. Покажите, что тор может быть покрыт двумя картами, однако если требуются односвязные карты, то для покрытия тора необходимы три карты.

23.3. ИНДУЦИРОВАННАЯ ТОПОЛОГИЯ

Если $\{U, \varphi, N\}$ — координатная карта в пространстве M_0 , а U_0 — любое подмножество U , образ которого

$$\varphi(U_0) = \{x = \varphi(P): P \in U_0\}$$

является открытым множеством в координатном пространстве \mathbb{R}^n , то U_0 называется *открытым* множеством в M_0 . В частности, само множество U является открытым. В \mathbb{R}^n пересечение конечного числа открытых множеств открыто, равно как и объединение произвольного набора открытых множеств. Поэтому открытые множества в M_0 , определенные какой-либо картой, обладают теми же свойствами.

Условия 1 и 2 согласованности двух карт гарантируют, что эти карты определяют одну и ту же топологию в области их перекрытия. В частности, условие 1 обеспечивает открытость пересечения открытых множеств U_1 и U_2 . Приведем пример двух перекрывающихся карт, очевидно удовлетворяющих условию 2, но не согласованных из-за нарушения условия 1, а именно будем считать, что M_0 состоит из точек (x, y) в \mathbb{R}^2 , лежащих на осях x и y , и определим две одномерные карты в M_0 , по одной на каждой оси, следующим образом:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x, y): x=0\}, & \varphi_1((x, y)) &= y, & N_1 &= \mathbb{R}, \\ U_2 &= \{(x, y): y=0\}, & \varphi_2((x, y)) &= x, & N_2 &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

В этом случае $U_1 \cap U_2$ состоит из единственной точки $(x=0, y=0)$, которая не является открытым множеством ни в одной из карт. В общем случае две n -мерные карты могут пересекаться по поверхности меньшей размерности чем n , причем даже так, что условие 2 удовлетворяется, однако в этом случае их пересечение не будет открытым в \mathbb{R}^n множеством. Условие 1 исключает подобные ситуации, требуя, чтобы пересечение было n -мерным.

Когда пространство M_0 покрыто набором согласованных карт, его топология полностью определяется тем, что открытые множества должны быть открытыми множествами, порождаемыми отдельными картами (как указано выше), либо произвольными объединениями таких множеств. Тогда, в частности, все пространство M_0 является открытым множеством.

23.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГООБРАЗИЯ. АКСИОМА ОТДЕЛИМОСТИ ХАУСДОРФА

Замечание. Данное изложение теории многообразий отличается от обычного только в одном отношении. Обычно исходят из пространства, которое уже было наделено некоторой топологической структурой, причем фактически предполагается, что оно должно быть хаусдорфовым пространством (см., однако, книгу Ленга [1962]). Затем требуют, чтобы системы координат были непрерывными относительно этой топологии. С другой стороны, существование систем координат значительно ограничивает топологию, причем так, что пространство оказывается локально евклидовым (топологически; метрических свойств мы не касаемся). Для наших целей кажется более приемлемым полностью определять топологические свойства системами координат. Тогда оказываются необходимыми только хорошо известные топологические свойства евклидовых пространств за одним исключением: когда многообразие строится путем сборки отдельных кусков двух или нескольких карт, нужно позаботиться о том, чтобы выполнялась аксиома отделимости Хаусдорфа, — об этом мы еще будем говорить ниже.

Замечание. Исходным моментом изложения является пространство M_0 , которое является просто набором (несчетным) никак не определенных элементов, называемых *точками*. В некоторых приложениях пространство M_0 задано заранее, например, оно может быть группой. С другой стороны, в геометрии Римана или в общей теории относительности исходным материалом служит множество функций $g_{\mu\nu}(x^1, \dots, x^n)$, определенных на координатах x^1, \dots, x^n , лежащих в некоторой области N n -мерного пространства \mathbb{R}^n ; тогда предполагается, что каждая точка в N определяет точку P многообразия Римана или описываемого физического пространства. Затем эта область многообразия (или физического пространства) может расширяться при помощи преобразования координат, подобных (23.2.1), (23.2.2), до тех пор, пока на основании какого-либо критерия мы не убедимся в том, что получилось полное многообразие (см., например, критерий Крускала геодезической полноты, описанный в гл. 28). В этом методе построения многообразий заранее ничего не говорится об абстрактном пространстве M_0 или о его подмножествах U , U' и т. д., пока описание не стало полным. Каждая карта определяется описанием N , и явно ничего не говорится об U и φ , поэтому мы предпочитаем сохранять N в обозначении $\{U, \varphi, N\}$ карты.

Многообразие должно удовлетворять следующей аксиоме, которая выражает очевидное свойство евклидовых пространств.

Аксиома отделимости Хаусдорфа. Если P и Q — любые различные точки, то существуют такие окрестности U и V точек P и Q соответственно, что $U \cap V = \emptyset$.

Когда две системы координат при построении многообразия составляются вместе, возможно нарушение этой аксиомы, что и подтверждает следующий одномерный пример. Пространство M_0 состоит из трех экземпляров прямой \mathbb{R} , его точки обозначаются как $\{x, \alpha\}$, где x — вещественное число, а α — одна из букв a , b или c . На M_0 определяются следующие две карты:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{\{x, a\}: x \geq 0\} \cup \{\{x, b\}: x < 0\}, \\ \varphi_1 &= (\{x, \alpha\}) = x, \quad N_1 = \mathbb{R}; \\ U_2 &= \{\{x, c\}: x \geq 0\} \cup \{\{x, b\}: x < 0\}, \\ \varphi_2 &= (\{x, \alpha\}) = x, \quad N_2 = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Каждая карта сама по себе порождает гомеоморфизм \mathbb{R} , однако точки $P = \{0, a\}$ и $Q = \{0, c\}$ не отделены, потому что любые два открытых интервала, содержащие P и Q соответственно, включают общие точки вида $\{x, b\}$, $x < 0$. Ясно, что такое явление можно легко исключить при практическом построении многообразий.

Определение. n -мерное многообразие M есть пространство M_0 вместе с (конечным или счетным) множеством согласованных n -мерных карт, которые вместе покрывают все M_0 так, что получающаяся топология удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа. Ясно, что согласованные системы координат могут быть добавлены или отброшены, когда это желательно, если только покрытие всего M_0 сохраняется. *Внутренние свойства M* —это те свойства, которые не изменяются от таких добавлений и исключений.

Многообразие M называется C^k -многообразием, если преобразования (23.2.1), (23.2.2) любых двух систем координат принадлежат классу C^k , т. е. если функции $\hat{x}^i(\dots)$ и $\hat{y}^i(\dots)$ имеют непрерывные частные производные (чистые и смешанные) всех порядков вплоть до порядка k . В таком случае добавление новых систем координат ограничивается этим же требованием. Аналогично M называется C^∞ -многообразием, если эти преобразования принадлежат классу C^∞ , или *вещественным аналитическим многообразием*, если они задаются аналитическими функциями. Многообразия непрерывных групп (групп Ли)—вещественные аналитические многообразия. С другой стороны, в общей теории относительности целесообразно допускать C^k -многообразия с конечным k , потому что полевые уравнения Эйнштейна являются гиперболическими и, в принципе, гравитационные волны могут переносить разрывы различных производных компонент $g_{\mu\nu}$ метрического тензора.

УПРАЖНЕНИЕ

В § 19.6 были определены внутренние координаты $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ в группе вращений $SO(3)$. Для того чтобы они удовлетворяли данному выше определению, их нужно ограничить *открытым шаром* $\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2 < \pi$. Введите дополнительные системы координат так, чтобы все вместе они покрывали многообразие $SO(3)$. (Общий метод построения таких систем для групп описан в гл. 27.)

23.5. КРИВЫЕ И ФУНКЦИИ НА МНОГООБРАЗИИ

Предположим, что $f(P)$ —вещественно- или комплекснозначная функция, определенная на всех точках P многообразия M . Для любой карты $\{U, \varphi, N\}$ можно определить функцию $\hat{f}(x) = \hat{f}(x^1, \dots, x^n)$ путем задания равенств $\hat{f}(x) = f(P)$, $x = \varphi(P)$ для всех точек x открытого множества N , в которое отображением $P \rightarrow x = \varphi(P)$ переводится U ; поскольку эти соотношения взаимно однозначны, $\hat{f}(\dots)$ определена корректно. Если получающаяся так функция $\hat{f}(\dots)$ непрерывна при любом выборе карты $\{U, \varphi, N\}$ на M , то $f(P)$ называется *непрерывной функцией* на M ; если M есть C^k -многообразие, а \hat{f} —функции класса C^r ($r \leq k$),

то $f(P)$ называется *функцией класса C^r на M* . Ясно, что на M не может быть функций класса C^r с $r > k$ (кроме константы), потому что допустимые преобразования координат могут исключить существование производных порядка $r > k$. Непрерывность, или C^r -гладкость, функций может быть определена так же и на части M .

Если $P(t)$, где t — вещественная переменная, — однопараметрическое множество точек на M и если для любой карты $\{U, \varphi, N\}$ функции $\hat{x}^i(t)$, определенные равенством

$$\hat{x}^i(t) = \varphi(P(t)),$$

оказываются непрерывными для всех t , на которых они определены, то $P(t)$ называется *кривой* или *путем* на M . Если функции $\hat{x}^i(t)$ принадлежат классу C^r , то и про кривую $P(t)$ говорят, что она C^r -гладкая. Если t изменяется на интервале $[t_1, t_2]$, то функция $P(t)$ описывает путь \mathcal{C} , идущий из *начальной точки* $P(t_1)$ до *конечной точки* $P(t_2)$. Предполагается, что все кривые либо кусочно дифференцируемы, либо имеют не более чем изломы (т. е. так выглядят их образы в любой карте), если особо не указано нечто иное. Для обеспечения этого предполагается также, что все рассматриваемые многообразия являются хотя бы C^1 -гладкими.

Непрерывность и C^r -дифференцируемость функций двух или более переменных $P(t, s, \dots)$ определяется аналогично.

23.6. СВЯЗНОСТЬ. КОМПОНЕНТЫ МНОГООБРАЗИЯ

Многообразие M называется *линейно связным*, если для любых двух точек P_1 и P_2 из M найдется путь, соединяющий P_1 и P_2 .

Если M не только линейно связно, но и, кроме того, любую из двух произвольных кривых \mathcal{C}_1 и \mathcal{C}_2 , соединяющих любые две точки P_1 и P_2 , можно непрерывно деформировать на M в другую (т. е. если найдется такая непрерывная функция $P(t, s)$, что для каждого s , скажем из интервала $[0, 1]$, $P(t, s)$ описывает при изменении t путь из P_1 в P_2 и этот путь совпадает при $s=0$ с \mathcal{C}_1 , а при $s=1$ с \mathcal{C}_2), то M называется *односвязным*.

Точка P многообразия M называется *предельной точкой* множества $S \subset M$, если любая ее сколь угодно малая окрестность (открытое множество, содержащее P) включает точки из множества S . Если S содержит все свои предельные точки, то оно называется *замкнутым*. Дополнение замкнутого множества является, очевидно, открытым, и обратно.

Топологи обычно дают другое определение связности, а именно говорят, что топологическое пространство *связно*, если его нельзя представить в виде $S_1 \cup S_2$, где S_1 и S_2 — непустые непересекающиеся ($S_1 \cap S_2 = \emptyset$) открытые множества (или, что эквивалентно,

непустые непересекающиеся замкнутые множества). Любое линейно связное пространство связно (докажите это). Для многообразий верно и обратное, так что для них эти два понятия совпадают.

Компонентой многообразия M называют максимальное связное подмножество M , т. е. для данной точки P_0 из M множество

$$S = \{P: P \text{ можно соединить с } P_0 \text{ некоторым путем}\}$$

является компонентой M . В § 19.5 было показано, что многообразии группы $O(3)$ имеет две компоненты.

Как подмножество M компонента S является одновременно и открытым, и замкнутым множеством. С одной стороны, S открыто, потому что (1) любая точка P из S есть внутренняя точка M (все точки M внутренние) и (2) окрестность P , являющаяся образом некоторого шара в \mathbb{R}^n (в некоторой карте, содержащей P), состоит, очевидно, из тех точек M , которые можно соединить с P , поэтому вся эта окрестность содержится в S . С другой стороны, S замкнуто, потому что если P — предельная точка последовательности точек из S , то P можно соединить (путем) с любой точкой, лежащей в аналогичной окрестности P , и поэтому ее можно соединить с точками последовательности. Обратно, если множество S связно и одновременно и открыто, и замкнуто, то оно является максимальным связным множеством, т. е. компонентой M ; этот факт будет использован в теории групп Ли.

Предостережение. Понятие открытого в M множества не имеет никакого отношения к возможному вложению M в пространство большей размерности. Например, если единичная сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ рассматривается как двумерное многообразие M , то полярная шапка, т. е. множество точек, находящихся севернее заданной параллели, является открытым множеством в M , но не является таковым в \mathbb{R}^3 .

Замечание. Любая компонента M , очевидно, сама является многообразием.

23.7. ГЛОБАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ. ГОМОТОПНЫЕ ПУТИ. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА

В оставшейся части этой главы рассматриваются только связные многообразия. Два пути \mathcal{C}_0 и \mathcal{C}_1 на многообразии M , имеющие одну и ту же начальную P_0 и одну и ту же конечную P_1 точки, называются *гомотопными*, если один из них можно непрерывно деформировать в другой (оставаясь в M), т. е. если найдется такая непрерывная функция $P(t, s)$ ($0 \leq t, s \leq 1$), что для каждого фиксированного $s \in [0, 1]$ $P(t, s)$ проходит некоторый путь от P_0 до P_1 , когда t пробегает все значения от 0 до 1, причем

этот путь при $s=0$ совпадает с \mathcal{E}_0 , а при $s=1$ с \mathcal{E}_1 . Как уже говорилось в § 19.5, многообразие *односвязно*, если любые пути на нем, имеющие одни и те же начальные и конечные точки, гомотопны.

Ясно, что гомотопия является отношением эквивалентности (она рефлексивна, симметрична и транзитивна), поэтому для заданных начальной и конечной точек P_0 и P_1 множество всех

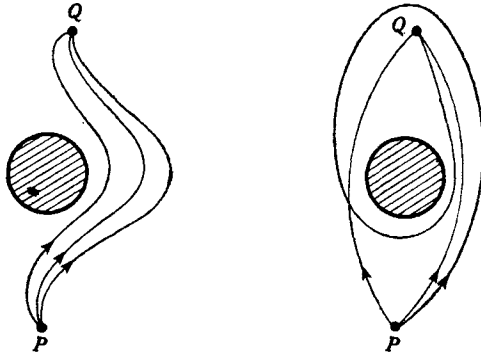


Рис. 23.5. Гомотопные и негомотопные пути.

путей, гомотопных заданной кривой, соединяющей P_0 и P_1 , образует *класс эквивалентности*, или *гомотопический класс*, в M . На многообразии

$$\{(x, y): x^2 + y^2 > 1\},$$

образованном областью (x, y) -плоскости, внешней к единичному кругу, три пути из P в Q , изображенные на рис. 23.5 слева, принадлежат одному гомотопическому классу, тогда как на том же рисунке справа указаны такие три пути, что никакие два из них не гомотопны. Вообще, если \mathcal{E} обозначает некоторый путь в M , то $[\mathcal{E}]$ обозначает класс эквивалентности всех путей, гомотопных \mathcal{E} .

Определим теперь закон композиции гомотопических классов путей. Пусть \mathcal{E}_1 — путь от P до Q , а \mathcal{E}_2 — путь от Q до R . Через $\mathcal{E}_1 \circ \mathcal{E}_2$ обозначим путь, проходящий от P до R через точку Q и идущий от P к Q по пути \mathcal{E}_1 , а от Q до R — по пути \mathcal{E}_2 . Аналитически это можно представить так. Если функции $P_1(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) и $P_2(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) описывают кривые \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 соответственно, то функция

$$P_3(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} P_1(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ P_2(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (23.7.1)$$

описывает путь $\mathcal{E}_1 \circ \mathcal{E}_2$. Закон композиции гомотопических классов

определяется теперь формулой

$$[\mathcal{C}_1] \circ [\mathcal{C}_2] = [\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_2].$$

Эта формула применима тогда, когда конечная точка путей первого класса совпадает с начальной точкой путей второго класса; в противном случае выражение $[\mathcal{C}_1] \circ [\mathcal{C}_2]$ не определено. Легко

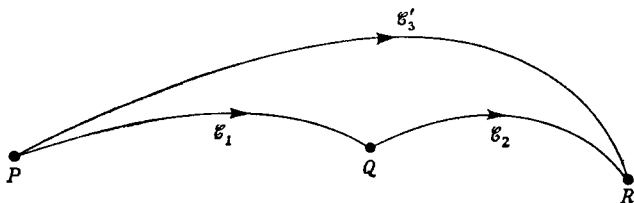


Рис. 23.6.

дать строгое доказательство того, что результат композиции не зависит от выбора путей \mathcal{C}_1 и \mathcal{C}_2 из соответствующих классов. «Произведение» $[\mathcal{C}_1] \circ [\mathcal{C}_2]$ содержит все пути, гомотопные пути $\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_2$, такие, как кривая \mathcal{C}'_3 на рис. 23.6.

Данный закон композиции ассоциативен, однако он не превращает множество всех гомотопических классов в группу, потому что эта композиция не определена для любых пар классов

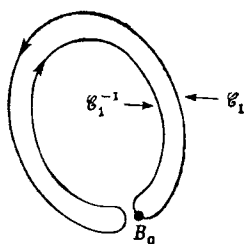


Рис. 23.7.

и ничего нельзя сказать об обратных элементах. Можно, однако, получить группу следующим образом. Пусть выбрана некоторая фиксированная основная точка (*отмеченная точка*) B_0 ; ограничимся рассмотрением только тех путей, которые начинаются и кончаются в B_0 . (В определении гомотопии не исключался случай совпадения начальной и конечной точек.) Множество гомотопических классов таких путей образует группу, называемую *фундаментальной группой* многообразия и обозначаемую $\pi_1(M)$. Если \mathcal{C}_0 — путь, который может быть стянут в отмеченную точку B_0 при помощи непрерывной деформации в M (такой путь называется *нуль-гомотопным*), то $\mathcal{C}_0 \circ \mathcal{C}_1$ можно деформировать в \mathcal{C}_1 , т. е.

$[\mathcal{C}_0] \circ [\mathcal{C}_1] = [\mathcal{C}_1]$; значит, $[\mathcal{C}_0]$ — единица группы. Для любого пути \mathcal{C}_1 обозначим через \mathcal{C}_1^{-1} тот же самый путь, но проходимый в обратном направлении, т. е. если функция $P(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) описывает \mathcal{C}_1 , то функция $P(1-t)$ описывает \mathcal{C}_1^{-1} . Ясно, что путь $\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_1^{-1}$ стягивается в отмеченную точку B_0 , т. е. он нульгомотопен (см. рис. 23.7); поэтому

$$[\mathcal{C}_1] \circ [\mathcal{C}_1^{-1}] = [\mathcal{C}_0] \quad (\text{единица}), \quad (23.7.2)$$

т. е.

$$[\mathcal{C}_1]^{-1} = [\mathcal{C}_1^{-1}]. \quad (23.7.3)$$

Для связного многообразия M фундаментальная группа $\pi_1(M)$ не зависит от выбора отмеченной точки. Пусть B_1 — любая дру-

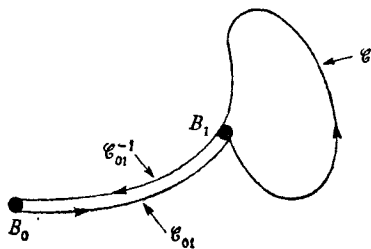


Рис. 23.8.

гая точка M , а \mathcal{C}_{01} — любой фиксированный путь от B_0 до B_1 . Если \mathcal{C} — произвольный путь, начинающийся и кончающийся в B_1 , то

$$\mathcal{C}_{01} \circ \mathcal{C} \circ \mathcal{C}_{01}^{-1}$$

— кривая, начинающаяся и кончающаяся в B_0 (см. рис. 23.8).
 Отображение

$$[\mathcal{C}] \rightarrow [\mathcal{C}_{01} \circ \mathcal{C} \circ \mathcal{C}_{01}^{-1}] \quad (23.7.4)$$

является изоморфизмом фундаментальной группы с B_1 в качестве отмеченной точки на фундаментальную группу с отмеченной точкой B_0 , так как это отображение, очевидно, является взаимно однозначным и на всю группу, а произведение $[\mathcal{C}] \circ [\mathcal{C}'] = [\mathcal{C} \circ \mathcal{C}']$ при (23.7.4) переходит на

$$\begin{aligned} [\mathcal{C}_{01} \circ \mathcal{C} \circ \mathcal{C}' \circ \mathcal{C}_{01}^{-1}] &= [\mathcal{C}_{01} \circ \mathcal{C}] \circ [\mathcal{C}' \circ \mathcal{C}_{01}^{-1}] = \\ &= [\mathcal{C}_{01} \circ \mathcal{C}] \circ ([\mathcal{C}_{01}]^{-1} \circ [\mathcal{C}_{01}]) \circ [\mathcal{C}' \circ \mathcal{C}_{01}^{-1}] = \\ &= [\mathcal{C}_{01} \circ \mathcal{C} \circ \mathcal{C}_{01}^{-1}] \circ [\mathcal{C}_{01} \circ \mathcal{C}' \circ \mathcal{C}_{01}^{-1}]. \end{aligned}$$

ПРИМЕРЫ

1. Если M — односвязное многообразие, то его фундаментальная группа $\pi_1(M)$ — тривиальная группа, состоящая только из одного единичного элемента,

2. Пусть M — поверхность цилиндра (конечного или бесконечного, хотя и изображенного конечным на рис. 23.9). Пусть θ, z — цилиндрические координаты, и пусть их значения представляют точки полосы на плоскости, как это показано на рис. 23.9. Каждая точка из M многократно повторяется на полосе; в частности, отмеченной точке B_0 на M соответствуют точки $B'_0, B'_{\pm 1}, B'_{\pm 2}$ и т. д. Кривая на полосе, такая, как \mathcal{C} , проходящая от B'_0 до любого другого образа B'_k , скажем до B'_k , есть образ замкнутой кривой на M , и обратно, любая замкнутая кривая, начинающаяся и кончающаяся в B_0 на M , имеет именно такой образ; более того, \mathcal{C} может быть непрерывно деформи-

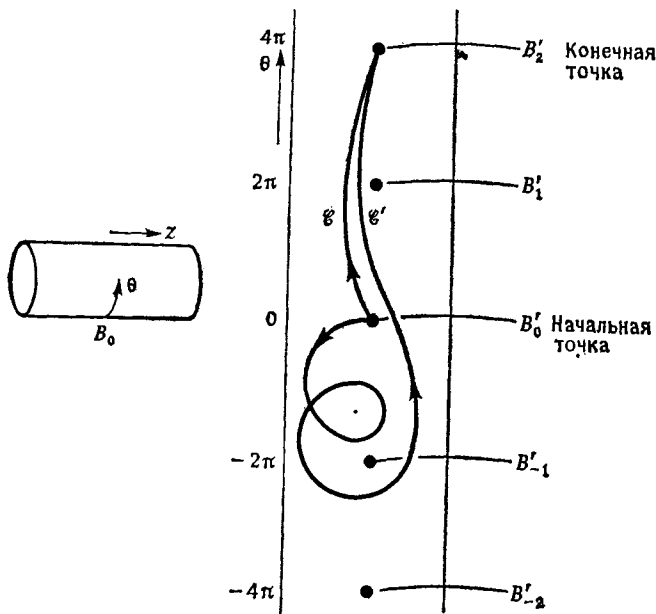


Рис. 23.9.

рована внутри полосы с сохранением начала и конца в любую другую кривую, идущую от B'_0 до B'_k , например в \mathcal{C}' . Следовательно, для каждой из возможных конечных точек B'_k имеется в точности один гомотопический класс путей, начинающихся и заканчивающихся в B_0 на M . Число k — это «чистое» число оборотов пути из данного класса вокруг цилиндра. Композиция двух таких путей, скажем с конечными точками B'_k и B'_l , есть кривая с конечной точкой B'_{k+l} ; следовательно, $\pi_1(M)$ изоморфна аддитивной группе целых чисел, т. е. бесконечной циклической группе C_∞ . Кольцо $a < x^2 + y^2 < b$, плоскость с выколотой точкой $x^2 + y^2 > 0$ и лиет Мёбиуса имеют фундаментальную группу, также изоморфную C_∞ .

3. Пусть M — поверхность тора, которая задана уравнениями

$$z = a \sin \alpha, \quad x = (A + a \cos \alpha) \cos \beta, \quad y = (A + a \cos \alpha) \sin \beta,$$

где x, y, z — декартовы координаты, a и A — константы ($A > a > 0$), а α и β — два угла, являющиеся внутренними координатами на M (см. рис. 23.10).

Если координатам α и β разрешено изменяться неограниченно, то пары чисел (α, β) и $(\alpha + 2\pi k, \beta + 2\pi l)$ представляют одну и ту же точку на M . Пусть отмеченная точка B_0 задается равенствами $x = A + a, y = z = 0$; она представляется любой точкой $(\alpha, \beta) = (2\pi k, 2\pi l)$ решетки на (α, β) -плоскости. Любой путь от $(0, 0)$ до $(2\pi k, 2\pi l)$ на этой плоскости представляет собой замкнутую кривую на M , начинающуюся и кончающуюся в B_0 ; он может быть непрерывно деформирован в любой другой путь, идущий от $(0, 0)$ до $(2\pi k, 2\pi l)$. В силу этого каждая пара целых чисел (k, l) определяет элемент фундаментальной группы $\pi_1(M)$. Ясно, что композицией элементов, определенных парами (k, l) и (k', l') , является элемент, определенный парой $(k + k', l + l')$, т. е. фундаментальная группа тора изоморфна прямому произведению $C_\infty \times C_\infty$, которое является свободной абелевой группой с двумя образующими.

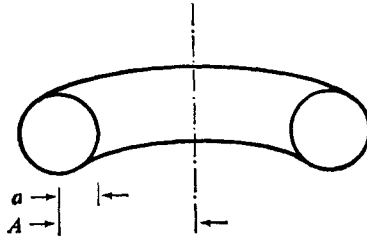


Рис. 23.10. Двумерный тор.

4. Рассмотрим многообразие M , состоящее из плоскости с двумя выколотыми точками a и b . В теории функций комплексной переменной контур интегрирования определяется записью равенства типа

$$J = \int_{(a+, a+, b-)} f(z) dz.$$

Здесь выражение $(a+, a+, b-)$ указывает на то, что контур начинается в некоторой отмеченной точке B (не совпадающей с a или b), делает два оборота вокруг точки a в положительном направлении (против часовой стрелки),

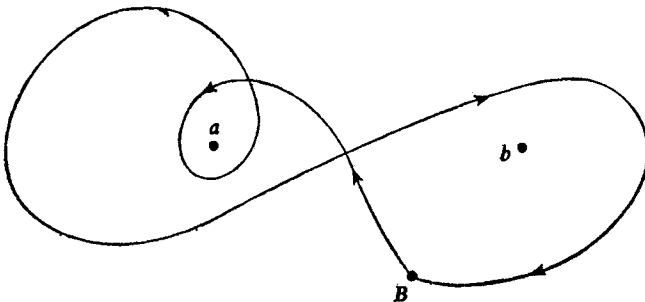


Рис. 23.11. Контур на комплексной плоскости.

делает один оборот вокруг точки b в отрицательном направлении и возвращается в B , как показано на рис. 23.11. В теории функций принимается как геометрически очевидное, что такая процедура адекватно определяет контур, если $f(z)$ аналитична всюду, кроме точек ветвления a и b , т. е. любые два контура, которые удовлетворяют данному выше описанию, можно непрерывно

деформировать один в другой без прохождения через ту или иную точку ветвления. Иначе говоря, выражение $(a+, a+, b-)$ определяет гомотопический класс кривых в M , т. е. элемент $\pi_1(M)$. Мы применим именно эту точку зрения. Простейшие нетривиальные элементы группы $\pi_1(M)$ суть $(a+)$, $(b+)$ и их обратные $(a-)$ и $(b-)$; будем обозначать их α , β , α^{-1} и β^{-1} . В общем случае элемент группы выглядит так:

$$\gamma_1^{\varepsilon_1} \gamma_2^{\varepsilon_2} \dots \gamma_k^{\varepsilon_k},$$

где каждое γ_i —либо α , либо β , а каждый показатель ε_i —либо $+1$, либо -1 . Таким образом, $\pi_1(M)$ изоморфна свободной группе с двумя образующими. В отличие от групп из первых трех примеров эта группа некоммутативна.

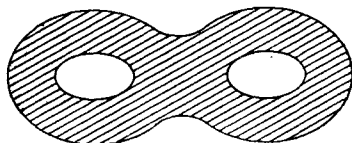


Рис. 23.12.

Та же фундаментальная группа получается для области типа восьмерки, заштрихованной на рис. 23.12. Если из плоскости удаляется n различных точек, то получается фундаментальная группа, изоморфная свободной группе с n образующими.

5. Пусть M —многообразие группы вращений $SO(3)$. В § 19.6 в M были введены внутренние координаты как три компонента вектора θ , который лежит в шаре $K = \{\theta: \|\theta\| \leq \pi\}$ координатного пространства. Если отождествить противоположные концы каждого диаметра K (т. е. рассматривать их как одну и ту же точку), то устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками M и точками K . Чтобы получить нетривиальный элемент группы $\pi_1(M)$, нужно взять в качестве отмеченной точки B центр шара K , а затем рассмотреть путь \mathcal{C} , который проходит от B вдоль радиуса к точке A на поверхности K , «перескакивает» в диаметрально противоположную точку A' , а затем возвращается вдоль радиуса в B , как показано на рис. 23.13.

Этот путь \mathcal{C} нельзя стянуть в B при помощи непрерывной деформации, потому что а) любой путь, начинающийся и кончающийся в B и совершающий такого рода скачки, имеет общую длину (в K) не меньше 2π ; б) из соображений непрерывности интуитивно ясно, что непрерывная деформация не может уничтожать эти скачки. (Точнее это будет обосновано в следующей главе.)

Рассмотрим теперь путь \mathcal{C} , который начинается в B и возвращается в B после конечного числа таких скачков, скажем из A_1 в A'_1 , из A_2 в A'_2 и т. д., где в каждом случае штрих обозначает диаметрально противоположную точку. Посредством непрерывной деформации последовательные скачки могут быть уничтожены по два за раз. Рассмотрим некоторый участок \mathcal{C} , содержащий два последовательных скачка (см. рис. 23.14, где этот участок состоит из частей PA_1 , A'_1A_2 и A'_2Q). Сдвигая путь A'_1A_2 к поверхности K и одновременно рисуя точки A_2 и A'_1 (а также A_1 и A'_2) как одну, участок A'_1A_2 пути можно уничтожить, а остаток будет похож на штриховую кривую, проходящую из P в Q без скачка.

Продолжая эту процедуру, путь \mathcal{C} можно либо стянуть в отмеченную точку B , если первоначально было четное число скачков, либо свести к пути с единственным скачком, если первоначально было нечетное число скачков. Следовательно, группа $\pi_1(SO(3))$ изоморфна циклической группе порядка 2, состоящей только из двух элементов. Если первоначально путь \mathcal{C} содержал

бесконечное число скачков, то многие из этих скачков были бы очень близки друг к другу, так что между ними значение $\|\theta\|$ оставалось бы близким к π , а непрерывная деформация приводила бы к пути с конечным числом скачков. Эти результаты проще и строже будут получены в следующей главе посредством накрытия $SO(3)$ многообразием $SU(2)$.

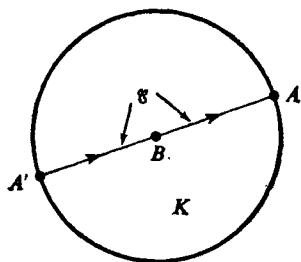


Рис. 23.13. Не нуль-гомотопный путь на многообразии группы $SO(3)$.

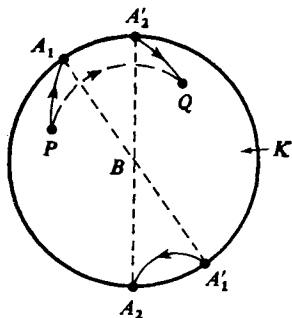


Рис. 23.14. Гомотопные пути из P в Q на многообразии группы $SO(3)$.

Следует отметить, что знание фундаментальной группы еще не позволяет полностью определить глобальную топологию многообразия. Например, сфера $x^2+y^2+z^2=1$ и круг $x^2+y^2<1$ являются односвязными двумерными многообразиями, но топологически они различны: если удалить одну точку, то сфера останется односвязным многообразием (в отличие от круга). По этой причине может возникнуть искушение ввести также высшие гомотопические группы (см. Хокинг и Янг [1961, гл. 4]) или другие топологические характеристики. Однако оказывается, что первая гомотопическая группа, т. е. фундаментальная группа, — это именно то, что нужно для многих целей, скажем в теории накрытия одного многообразия другим, которая является предметом следующей главы.

В гл. 27 будет показано, что фундаментальная группа многообразия группы Ли всегда абелева (коммутативна).

23.8. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВЯЗИ. ДЕКАРТОВЫ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Любую конфигурацию двойного маятника, схема которого приведена на рис. 23.15, можно определить значениями двух углов α и β . Для любых целых чисел k и l пара чисел $(\alpha+2\pi k, \beta+2\pi l)$ представляет ту же конфигурацию, что и (α, β) . Поэтому, согласно примеру 3 из предыдущего параграфа, между конфигурациями маятника и точками тора существует такое взаимно однозначное соответствие, что при колебании маятника соответствующая точка движется по тору непрерывно.

Если вторая ось вращения перпендикулярна основной оси вращения, как на рис. 23.16, то конец второго маятника движется по обычному тору в пространстве.

В любом случае каждая точка маятника движется по окружности вокруг соответствующей оси вращения, а в общем движении объединяются оба этих круговых движения. В соответствии с этим тор рассматривается как декартово произведение двух окружностей. В общем случае, когда M и M' —любые два мно-

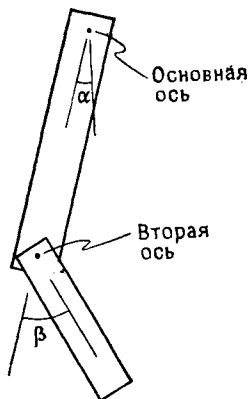


Рис. 23.15. Двойной маятник с параллельными осями.

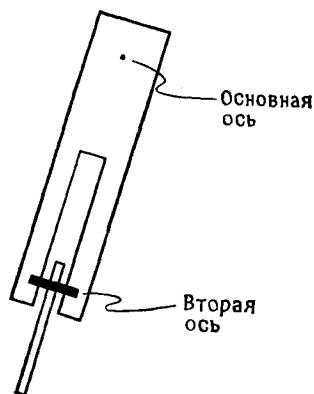


Рис. 23.16. Двойной маятник с перпендикулярными осями.

гообразия размерностей n и n' , их декартово произведение $M \times M'$ есть $(n + n')$ -мерное многообразие, определенное следующим образом. (1) Каждая точка $M \times M'$ —упорядоченная пара (P, P') , где P и P' —произвольные точки M и M' соответственно. Иначе говоря, $M \times M'$ как множество является декартовым произведением M и M' в смысле теории множеств. (2) Если $\{U, \varphi, N\}$ и $\{U', \varphi', N'\}$ —произвольные карты на M и M' соответственно, то карта $\{U'', \varphi'', N''\}$ на $M \times M'$ определяется так: U'' —множество всех точек (P, P') , где $P \in U$, $P' \in U'$, а $\varphi''((P, P'))$ есть $(n + n')$ -мерный вектор, компонентами которого являются компоненты векторов $\varphi(P)$ и $\varphi'(P')$, т. е.

$$\varphi''((P, P')) = \begin{cases} \varphi_i(P), & i = 1, \dots, n, \\ \varphi'_{i-n}(P'), & i = n + 1, \dots, n + n'. \end{cases}$$

Очевидно, что такое определение превращает $M \times M'$ в многообразие.

Если оси вращения двойного маятника заменить идеализированными шаровыми шарнирами, то пространство конфигураций оказывается декартовым произведением двух двумерных сфер и

поэтому четырехмерным многообразием. (Мы пренебрегаем вращением звеньев вокруг собственных продольных осей.)

Наконец, если маленький шарик катается внутри полой сферы, не выходя из постоянного контакта с ней, то в качестве пространства конфигураций получается декартово произведение сферы и многообразия $SO(3)$, т. е. пятимерное многообразие.

Ясно, что такого рода примеров можно построить сколько угодно.

НАКРЫВАЮЩИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Локальный гомеоморфизм; проекция; p -листное накрытие; правильная окрестность; принципы поднятия; универсальное накрывающее многообразие; построение математических моделей; многообразия, накрываемые данным многообразием.

Предварительные сведения: гл. 23 и частично гл. 18 и 19.

24.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРИМЕРЫ

(2 \rightarrow 1)-отображение ψ группы $SU(2)$ на группу $SO(3)$, описанное в § 19.7, не просто групповой гомеоморфизм; оно является таким отображением многообразия $SU(2)$ на многообразие $SO(3)$, которое называют накрытием. Это отображение—локальный гомеоморфизм в том смысле, что для любой точки P многообразия $SU(2)$ найдется такая ее окрестность, которая гомеоморфно отображается при помощи ψ в некоторую окрестность образа Q точки P в многообразии $SO(3)$. Более того, для произвольной точки Q второго многообразия всегда найдутся две такие точки P первого многообразия, что каждая из них имеет подобную же окрестность. Отображение ψ является *двулистным накрытием* многообразия $SO(3)$ многообразием $SU(2)$.

Отображение $\psi: M \rightarrow N$ многообразия M в многообразии N (эти многообразия будут называться далее «верхним» и «нижним» многообразиями соответственно) называется *накрытием* многообразия N многообразием M , если оно удовлетворяет двум требованиям, из которых первое утверждает, что накрывается *все* N , а второе объясняет, как именно оно накрывается. Эти требования таковы: (а) ψ —отображение *на* N , т. е. для любой точки Q нижнего многообразия (N) найдется хотя бы одна точка P верхнего многообразия (M), такая, что $\psi(P) = Q$; (б) любая точка Q нижнего многообразия содержится в некоторой окрестности V , прообраз $\psi^{-1}(V)$ которой (т. е. множество всех точек верхнего многообразия, отображаемых в точки V) состоит из одной или более непересекающихся окрестностей U_1, U_2, \dots или компонент (по одной из каждого «листа» в M), каждая из которых гомеоморфна V , т. е. для каждого j отображение $P \rightarrow \psi(P)$, ограниченное на U_j , является взаимно однозначным бинепрерывным отображением U_j на V . Окрестность V в нижнем многообразии,

обладающая такими свойствами, называется нами *правильной* окрестностью ¹⁾. (Отображение называется *бинепрерывным*, если и оно само, и обратное ему отображение непрерывны.) Если x^1, \dots, \dots, x^n — координаты P в окрестности U , в M , а y^1, \dots, y^n — координаты соответствующей точки $\psi(P)$ в окрестности V в N , то x^i являются непрерывными функциями от y^i (и наоборот) на всех соответствующих окрестностях. Очевидно, что размерности M и N должны совпадать.

Если такое отображение ψ существует, то M называется *накрывающим многообразием* многообразия N , а ψ — *накрытием* многообразия N многообразием M или *проекцией* M на N .

Если многообразия связны, то *кратность* накрытия (т. е. число точек M , отображаемых в одну точку в N) постоянна всюду, потому что это число (положительное целое или $+\infty$), очевидно, постоянно в любой окрестности и, следовательно, постоянно всюду на M и N . Если кратность равна p , то отображение ψ называется *p-листным* накрытием. Если M и N — многообразия класса C^k , то требуется, чтобы x^i как функции y^i также были бы C^k -гладкими, т. е. чтобы ψ было отображением класса C^k .

Замечание. Следующий одномерный пример показывает, что если просто потребовать, чтобы каждая точка P верхнего мно-

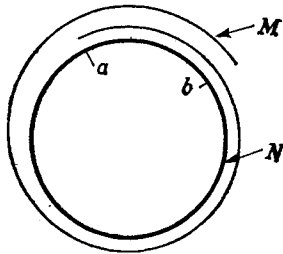


Рис. 24.1.

гообразия M имела окрестность, отображаемую гомеоморфно на окрестность в нижнем многообразии N , то это не будет эквивалентно указанному в определении требованию. Пусть N — единичная окружность на плоскости, а M — открытый интервал длины более 2π , намотанный на эту окружность. Тогда точки a и b в N , лежащие под концами M (рис. 24.1), не удовлетворяют условиям определения, хотя, поскольку M открыто, каждая его точка имеет окрестность, гомеоморфно отображаемую в N .

¹⁾ Иначе говоря, ψ называется накрытием, если существует покрытие многообразия N набором правильных (относительно ψ) окрестностей (good neighborhoods, по терминологии автора). — *Прим. перев.*

Пусть M —риманова поверхность произвольной алгебраической функции $F(z)$, все точки ветвления которой исключены, N —комплексная плоскость с исключенными соответствующими точками, а ψ —отображение, переводящее любую точку из M в точку N , лежащую непосредственно под ней (т. е. в точку, связанную с тем же значением z); тогда ψ —накрытие N многообразием M . Для произвольной точки $P \in N$ найдется некоторая окрестность V , которая односвязна и не содержит никаких точек ветвления функции $F(z)$. Если построить прямой цилиндр с основанием V , то этот цилиндр пересечет каждый лист римановой поверхности по окрестности U , которая выглядит в точности как V . Следовательно, V —правильная окрестность.

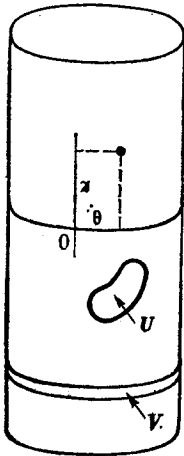


Рис. 24.2.

Заданное многообразие N может иметь много различных накрывающих многообразий M и много различных накрытий заданным M . Если N —единичная окружность $|z|=1$ на z -плоскости, то N можно накрыть либо вещественной прямой $M=\mathbb{R}$ при помощи отображения $x \rightarrow z=e^{ix}$ (можно представить себе, что M намотана бесконечное число раз на окружность N), либо окружностью $M: |\omega|=1$ на ω -плоскости

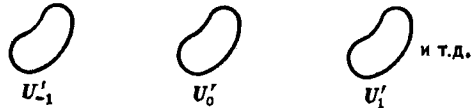


Рис. 24.3.

при помощи любого отображения вида $w \rightarrow z=\omega^n$, где n —произвольное целое число, отличное от нуля (можно представить себе, что M растянута и намотана n раз на окружность N).

Рассмотрим отображение ψ плоскости на цилиндр, задаваемое равенствами $z=x$ и $\theta=y$, где x, y —декартовы координаты на плоскости, а z, θ —цилиндрические координаты на цилиндре. Это отображение переводит много точек в одну точку, поскольку все точки $(x, y), (x, y \pm 2\pi), (x, y \pm 4\pi)$ и т. д. отображаются в одну и ту же точку цилиндра. Прообраз окрестности, которая, подобно U на рис. 24.2, не опоясывает цилиндра, состоит из бесконечной последовательности окрестностей U'_j на плоскости, полученных смещением каждой из них по горизонтали на расстояния $\pm 2\pi, \pm 4\pi$ и т. д., как на рис. 24.3. Каждая U'_j гомеоморфна U ; следовательно, U —правильная окрестность. С другой стороны, окрестность типа V на рис. 24.2, представляющая собой полосу, опоясывающую цилиндр, не может быть правильной, потому что ее прообраз является бесконечной полосой на

плоскости, отображаемой при помощи ψ на V не взаимно однозначно.

УПРАЖНЕНИЕ

Рассмотрите различные возможные накрытия тора плоскостью, цилиндром, другим тором.

Если M и N суть C^k -многообразия, то отображение ψ должно быть C^k -гладким, т. е. если ψ отображает P на $Q = \psi(P)$, V — правильная окрестность Q , U — компонента $\psi^{-1}(V)$, содержащая P , x^1, \dots, x^n — координаты P в U , y^1, \dots, y^n — координаты Q в V , то x^i являются функциями класса C^k от y^j , и наоборот. (Почти во всех представляющих интерес случаях M и N — аналитические многообразия, и эти функции являются аналитическими.)

Если накрытие ψ оказывается взаимно однозначным соответствием, так что M и N накрывают друг друга, то ψ называется (C^k -) *гомеоморфизмом*, а многообразия называются *гомеоморфными*; топологически они неразличимы. В случае $k = \infty$ гомеоморфизм иногда называют *диффеоморфизмом*.

24.2. ПРИНЦИПЫ ПОДНЯТИЯ

Если накрывающее многообразие M связно, то и N обязательно также связно. Обратное, конечно, неверно, однако здесь будут рассматриваться только связные многообразия. Если M *односвязно* (подобно прямой или плоскости в предыдущих примерах), то, согласно следующей ниже теореме, оно оказывается наибольшим из всех связных многообразий, которые накрывают данное многообразие N . Нам потребуются две леммы.

Лемма 1 (первый принцип поднятия). *Предположим, что многообразии M_1 накрывает многообразие M_0 проекцией ψ . Пусть V_0 — произвольная отмеченная точка M_0 . Из всех точек $P \in M_1$, таких, что $\psi(P) = V_0$, выберем одну и назовем ее отмеченной точкой V_1 в M_1 . (См. рис. 24.5 в следующем параграфе, где, однако, добавлено третье многообразие в связи с теоремой, которая будет доказана ниже.) Пусть \mathcal{C}_0 — путь в M_0 , описываемый непрерывной функцией $P_0(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) и начинающийся в отмеченной точке V_0 . Тогда имеется только один путь $\mathcal{C}_1: P_1(t) \in M_1$, такой, что $P_1(0) = V_1$ и $\psi(P_1(t)) = P_0(t)$. Говорят, что путь \mathcal{C}_0 *поднят* в M из M_0 .*

Доказательство. В определении накрытия отмечалось, что окрестность $U \subset M_0$ называется *правильной*, если отображение ψ оказывается гомеоморфизмом каждой компоненты $\psi^{-1}(U)$ на U . Для произвольного подынтервала $I \subset [0, 1]$ обозначим через $P_0(I)$ отрезок пути \mathcal{C}_0 :

$$P_0(I) = \{P_0(t) : t \in I\}.$$

Разбиение $[0, 1]$ на замкнутые подынтервалы $[0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{N-1}, 1]$ называется *правильным* разбиением, если каждый отрезок $P_0([t_j, t_{j+1}])$ пути \mathcal{E}_0 лежит в какой-то правильной окрестности. Правильное разбиение существует потому, что каждая точка \mathcal{E}_0 лежит в некоторой правильной окрестности; следовательно, каждое t из $[0, 1]$ лежит в некотором открытом подынтервале I , таком, что отрезок пути $P_0(I)$ находится в правильной окрестности. Эти открытые интервалы покрывают $[0, 1]$, а по теореме Гейне—Бореля среди них имеется конечное число интервалов, покрывающих $[0, 1]$. Упорядочим их в порядке возрастания t , а затем выберем какое-нибудь t_1 из пе-

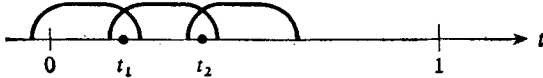


Рис. 24.4.

ресекающего первого и второго подынтервалов, t_2 из пересечения второго и третьего подынтервалов и т. д. (см. рис. 24.4). Эти точки и дают правильное разбиение.

Обозначим через U_j правильную окрестность, содержащую отрезок пути $P_0([t_j, t_{j+1}])$. Для каждого $j=0, 1, \dots, N-1$ определим (индуктивно) отрезок $\mathcal{E}_1([t_j, t_{j+1}])$ пути $\mathcal{E}_1 = \{P_1(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ в верхнем многообразии M_1 . Вначале возьмем V_0 —компоненту $\psi^{-1}(U_0)$, содержащую отмеченную точку B_1 из M_1 , и определим $P_1([0, t_1])$ как $\hat{\psi}^{-1}(P_0([0, t_1]))$, где $\hat{\psi}$ —ограничение ψ на V_0 ; $\hat{\psi}$ есть гомеоморфизм V_0 на U_0 ; следовательно, так определенное $P_1([0, t_1])$ представляет собой отрезок пути в M_1 .

Теперь предположим, что $P_1([t_j, t_{j+1}])$ уже определено; тогда $P_0(t_{j+1})$ лежит как в U_{j+1} , так и в U_j . В качестве V_{j+1} можно взять ту компоненту $\psi^{-1}(U_{j+1})$, которая содержит концевую точку $P_1(t_{j+1})$ ранее определенного отрезка \mathcal{E}_1 ; тогда отрезок $P_1([t_{j+1}, t_{j+2}])$ определяется как $\hat{\psi}^{-1}(P_0([t_{j+1}, t_{j+2}]))$, где теперь $\hat{\psi}$ —ограничение ψ на V_{j+1} . Таким образом и будет построен весь путь \mathcal{E}_1 на M_1 . Он однозначно определяется кривой \mathcal{E}_0 в нижнем многообразии и выбором отмеченной точки B_1 в верхнем многообразии; в частности, он не зависит от выбора правильного разбиения $[0, 1]$, потому что любые два разбиения имеют общее измельчение, а \mathcal{E}_1 , очевидно, не меняется при измельчении используемого разбиения (т. е. при добавлении дополнительных точек подразбиения $[0, 1]$). Каждый из путей \mathcal{E}_0 и \mathcal{E}_1 однозначно определяет другой.

Лемма 2 (второй принцип поднятия). *Если выполнены условия леммы 1 и если $P_0(t, s)$ —непрерывная функция двух переменных, определенная на квадрате $0 \leq t, s \leq 1$ и отображающая его в M_0 , а $P_0(t_0, s_0)$ для некоторых t_0 и s_0 совпадает с отмеченной точкой B_0 , то существует единственная непрерывная функция $P_1(t, s)$ в M_1 , такая, что (1) $\psi(P_1(t, s)) = P_0(t, s)$ и (2) $P_1(t_0, s_0)$ —отмеченная точка $B_1 \in M_1$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 1. Теорема Гейне—Бореля обеспечивает существование конечного набора открытых множеств на (t, s) -плоскости, покрывающих квадрат $0 \leq t, s \leq 1$ и определяющих при этом правильные окрестности. Затем эти множества упорядочиваются так, чтобы каждое последующее содержало точки пересечения хотя бы с одним из предыдущих множеств. После этого следуют те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 1.

Следствие ¹⁾. Если два пути \mathcal{C}_0 и \mathcal{C}'_0 на нижнем многообразии, идущие из B_0 в некоторую точку A_0 , гомотопны, т. е. если один из них может быть непрерывно деформирован в M_0 в другой с сохранением неподвижности концевых точек, то пути, получающиеся при их поднятии в M_1 , также имеют общую концевую точку A_1 и гомотопны в M_1 .

Набросок доказательства. Пусть функция $P_0(t, s)$ из леммы 2 такова, что для каждого s из $[0, 1]$ $P_0(t, s)$ описывает путь от B_0 до A_0 при изменении t от 0 до 1, причем для $s=0$ этот путь совпадает с \mathcal{C}_0 , а для $s=1$ — с \mathcal{C}'_0 . Из соображений непрерывности, связанных с правильной окрестностью точки A_0 , следует показать, что конечная точка поднятого пути $P_1(t, s)$ не может при изменении s перескакивать с одного листа M_1 на другой.

24.3. УНИВЕРСАЛЬНОЕ НАКРЫВАЮЩЕЕ МНОГООБРАЗИЕ

В § 24.5 будет доказано, что для любого многообразия M_0 существует односвязное многообразие, накрывающее его. Это многообразие называют *универсальным накрывающим многообразием* многообразия M_0 , поскольку, по доказанной ниже теореме, (1) универсальное накрывающее многообразие заданного M_0 единственно (с точностью до гомеоморфизма) и (2) оно накрывает любое другое многообразие, накрывающее M_0 . Доказательство существования откладывается до § 24.5, так как оно несколько труднее для понимания, нежели доказательство следующей теоремы.

Теорема. Если M_1 и M_2 — связные накрывающие многообразия для M_0 и M_2 односвязно, то M_2 накрывает M_1 . Если и M_1 односвязно, то M_1 и M_2 гомеоморфны, т. е. топологически неразличимы.

Доказательство. Пусть ψ_{10} и ψ_{20} — проекции M_1 и M_2 соответственно на M_0 . Построим проекцию ψ_{21} многообразия M_2 на M_1 так, что $\psi_{10}\psi_{21} = \psi_{20}$. Выберем некоторые отмеченные точки B_2, B_1, B_0 в этих многообразиях так, чтобы $\psi_{20}(B_2) = \psi_{10}(B_1) = B_0$ (см. рис. 24.5). Чтобы описать ψ_{21} , нужно для каждой точки $Q_2 \in M_2$ указать точку $\psi_{21}(Q_2)$ в M_1 , что будет сделано следующим образом. Пусть \mathcal{C}_2 — путь $P_2(t)$ в M_2 , идущий из B_2 в Q_2 (т. е. $P_2(0) = B_2, P_2(1) = Q_2$). Тогда проекцией \mathcal{C}_2 на M_0 служит путь $P_0(t) = \psi_{20}(P_2(t))$ из B_0 в Q_0 . (Замечание. \mathcal{C}_0 может иметь самопересечения, даже если их не имеет \mathcal{C}_2 . Например, на рис. 24.6 \mathcal{C}_2 — путь на плоскости, а \mathcal{C}_0 получается при наматывании плоскости на цилиндр.) Отображение ψ_{10}^{-1} , вообще говоря, многозначно, но в силу первого принципа поднятия существует единственный путь $\mathcal{C}_1: P = P_1(t)$ в M_1 , начинающийся в отмеченной точке B_1 и такой, что $\psi_{10}(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_0$. Теперь утверждается, что конец $Q_1 = P_1(1)$ пути \mathcal{C}_1 однозначно определяется концом Q_2 пути \mathcal{C}_2 на верхнем многообразии M_2 . Чтобы доказать это, возьмем какой-нибудь другой путь \mathcal{C}'_2 в M_2 , идущий из

¹⁾ Утверждение такого рода носит название «теорема о накрывающей гомотопии» (см., например, Рохлин, Фукс [1977], а также Борисевич и др. [1980]). — Прим. перев.

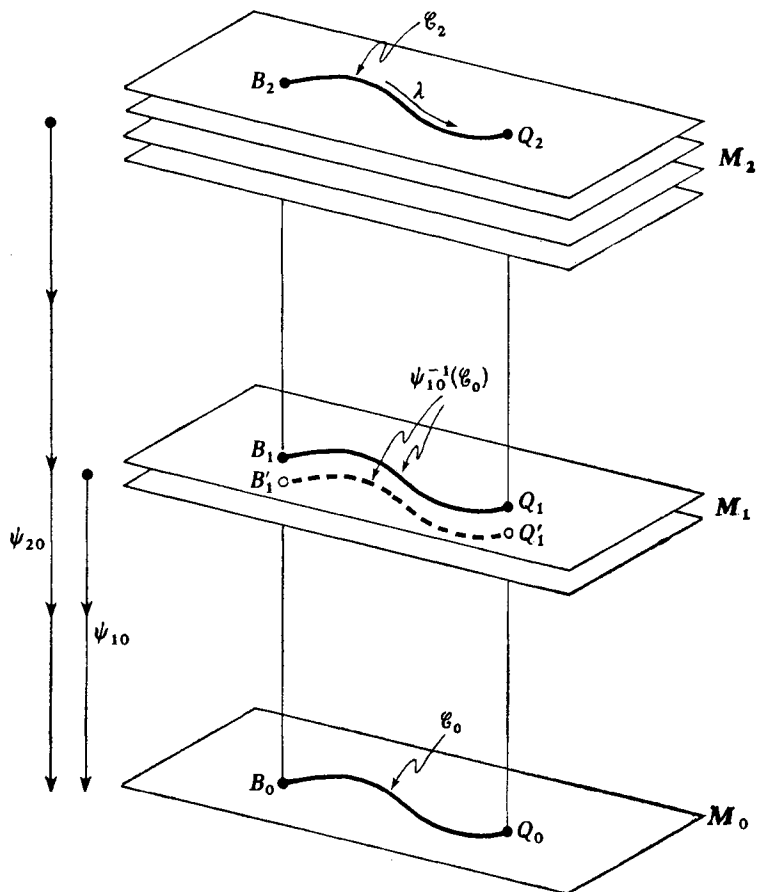


Рис. 24.5. Накрывающие многообразия (см. текст).

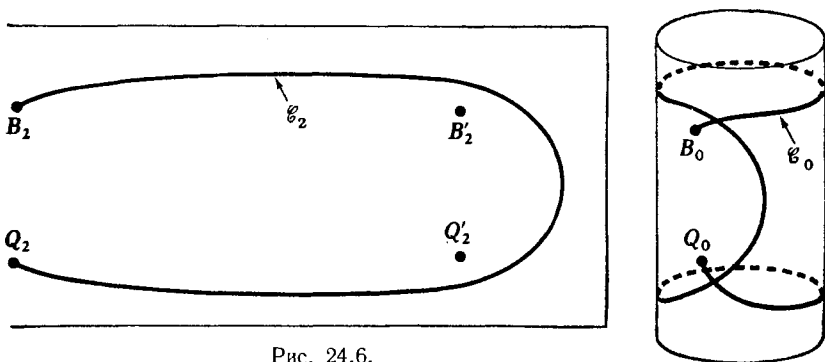


Рис. 24.6.

B_2 в Q_2 . Поскольку M_2 односвязно, \mathcal{C}_2 и \mathcal{C}'_2 гомотопны и могут быть деформированы непрерывно один в другой. Поэтому и их образы \mathcal{C}_0 и \mathcal{C}'_0 в M_0 также гомотопны, и, по следствию леммы 2, пути \mathcal{C}_1 и \mathcal{C}'_1 , получающиеся поднятием \mathcal{C}_0 и \mathcal{C}'_0 в M_1 , имеют общий конец Q_1 , который и есть по определению $\Psi_{21}(Q_2)$. Поскольку точка Q_2 была произвольной, отображение Ψ_{21} определено на всем M_2 , причем

$$\Psi_{10}(\Psi_{21}(Q_2)) = \Psi_{10}(Q_1) = Q_0 = \Psi_{20}(Q_2).$$

УПРАЖНЕНИЕ

Завершите доказательство, показав, что (а) Ψ_{21} — отображение *на*; (б) любое $Q_1 \in M_1$ имеет такую окрестность V , что каждая компонента $\Psi_{21}^{-1}(V)$ гомеоморфна V при отображении Ψ_{21} , и (в) если M_1 также односвязно, то Q_1 однозначно определяет Q_2 , так что Ψ_{21} взаимно однозначно.

Замечание. Утверждение о гомеоморфности двух многообразий ничего не говорит о том, как они могут выглядеть при вложении их в некоторое евклидово пространство большей размерности. Окружность на плоскости как *одномерное многообразие* гомеоморфна простому узлу в пространстве; простая бумажная петля не гомеоморфна листу Мёбиуса, но гомеоморфна бумажной петле, у которой перед склеиванием концов сделано два полуоборота (т. е. один полный оборот одного конца) или даже любое четное число полуоборотов, тогда как лист Мёбиуса гомеоморфен петле с нечетным числом полуоборотов (одного из склеиваемых концов бумажной полосы). Во всем этом можно убедиться при построении этих многообразий методом склеивания краев, рассмотренным в § 23.1.

На основании данной теоремы односвязное накрывающее многообразие называется *универсальным накрывающим многообразием*. В § 24.5 будет показано, что любое многообразие N имеет универсальное накрывающее многообразие. Это обстоятельство играет важную роль в теории групп Ли, а также при космологической интерпретации многообразий Эйнштейна. Поскольку построение универсального накрывающего многообразия представляет некоторую трудность, ниже приводится несколько замечаний о математических построениях вообще.

24.4. ЗАМЕЧАНИЯ О ПОСТРОЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Широкое использование построений математиками представляется иногда на первый взгляд неестественным и искусственным. Что касается физиков, для которых вещественное число — это, например, мгновенная координата $x = x(t)$ движущейся точки, то в целом для них кажется неприемлемым рассматривать это число как бесконечный класс эквивалентности последовательностей Коши рациональных чисел (особенно когда напоминает, что каждое рациональное число есть бесконечный класс эквивалентности упорядоченных пар

целых чисел и т. д.). Однако после завершения этого построения и выяснения свойств получающейся системы можно полностью забыть детали построения и рассматривать вещественное число как объект, столь же изначальный и неделимый, сколь и точка в евклидовой геометрии. Построение математических моделей начинает сейчас играть заметную роль в квантовой теории и теории относительности, причем в основном по тем же причинам, что и в математике; когда структура определена набором аксиом, остается только доказать их взаимную непротиворечивость, а наилучший способ сделать это — представить модель структуры, основанную на более простых аксиомах, которые уже были приняты ранее.

Одним из наиболее старых примеров такого рода служит отношение математиков к комплексным числам. Некоторым математикам казалось неестественным и опасным утверждение о существовании такого числа i , что $i^2 = -1$, и было немало споров относительно возможности существования таких чисел. Этот вопрос был решен (Гауссом в 1831 г. и независимо Гамильтоном в 1837 г.) путем рассмотрения упорядоченных пар (a, b) вещественных чисел со следующими определенными для них арифметическими операциями:

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d), \\ (a, b)(c, d) &= (ac - bd, bc + ad),\end{aligned}$$

вследствие чего система всех упорядоченных пар приобрела в точности те же самые свойства, что и система чисел $a + bi$, если бы число i существовало. Но тогда допускать (или не допускать) существование комплексных чисел — дело вкуса, а писать ли (a, b) или $a + bi$ — это несущественно.

Исследуя релятивистское волновое уравнение для электрона, Дирак столкнулся с необходимостью ввести четыре величины $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, произведение которых удовлетворяло бы правилу

$$\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 2\delta_{jk} \quad (j, k = 1, \dots, 4). \quad (24.4.1)$$

Вместо того чтобы просто постулировать существование этих α_j , а равенство (24.4.1) принять за аксиому, Дирак указал четыре матрицы размера 4×4 , произведение которых в точности удовлетворяет (24.4.1) (если правая часть равенства интерпретируется как единичная матрица, умноженная на $2\delta_{jk}$).

Теория алгебр Ли начинается с абстрактных определений и аксиом. После чрезвычайно длительных и сложных рассуждений, содержащих много трудных лемм и теорем, получается классификация так называемых простых комплексных алгебр Ли, по которой такие алгебры сводятся к девяти типам, или классам. После этого возникают два вопроса: (1) В какой мере исходные аксиомы непротиворечивы? (2) Может ли быть так, что последующие работы

еще более упростят теорию и исключат некоторые из этих девяти типов? На оба вопроса ответы были получены путем построения математической модели каждой (из этих девяти типов) алгебры без использования каких бы то ни было аксиом (кроме обычных арифметических). Некоторые из этих конструкций довольно сложны и искусственны, однако своему назначению они вполне соответствуют (см. Хаузнер и Шварц [1968]).

Другим примером служит вопрос о возможности существования тех или иных неевклидовых геометрий (основанных на аксиомах, отличающихся от аксиом евклидовой геометрии); эта задача была решена построением моделей без использования каких-либо новых аксиом. В этих моделях были введены определенные объекты, которые довольно произвольно были названы «точками», указано, что означает «расстояние» вдоль кривой между двумя точками, определена «прямая» как кривая минимальной длины между двумя точками и т. д. и, наконец, было доказано, что эти «объекты» удовлетворяют всем аксиомам Евклида, за исключением того, что через точку Q , не лежащую на прямой L , проходят много различных прямых L', L'', \dots и т. д., параллельных L (или — для другой модели — таких прямых нет вообще). Таким образом было доказано, что аксиому Евклида о параллельных можно изменять, не порождая этим противоречий ¹⁾ (см. гл. 26—28).

Распределения сами по себе являются конструкциями. Дирак постулировал существование некоего объекта, обозначенного через $\delta(x-x_0)$, который во многих отношениях должен был вести себя как обычная функция и, кроме того, обладать некоторыми особыми свойствами. Функционал $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$, если его интерпретировать должным образом, удовлетворяет всем этим требованиям.

Математическая модель универсального накрывающего многообразия M для данного многообразия N строится в следующем параграфе методом, заимствованным из общей теории относительности (см. замечание в § 23.4). Пространство M не предполагается известным заранее ни как топологическое пространство, ни даже как набор точек. Вместо этого имеется набор карт и указано, как их следует связать друг с другом, чтобы получить M . Согласно теореме Уитни о вложении (которая здесь доказываться не будет), n -мерное многообразие, подобное M (абстрактное или какое-либо другое), гомеоморфно n -мерной поверхности некоторого евклидова пространства E^N более высокой размерности; эта поверхность дает другую математическую модель многообразия M , если первая модель была уже построена.

¹⁾ Иначе говоря, аксиома о параллельных является независимой. — Прим. перев.

24.5. ПОСТРОЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОГО НАКРЫТИЯ

Пусть задано связное многообразие N класса C^k , и мы хотим построить односвязное многообразие M , покрывающее N . Предположим, что карты K, L, \dots на N односвязны¹⁾. Выберем в N отмеченную точку B_0 и для любой карты K обозначим через α, β, \dots гомотопические классы путей из B_0 в K (концом этих путей может быть любая точка из K , поскольку K односвязна). Далее мы берем дубликаты карты K , обозначаемые через K_α, K_β, \dots , по одному для каждого гомотопического класса (см. рис. 24.7), а затем для получения многообразия M соединим все

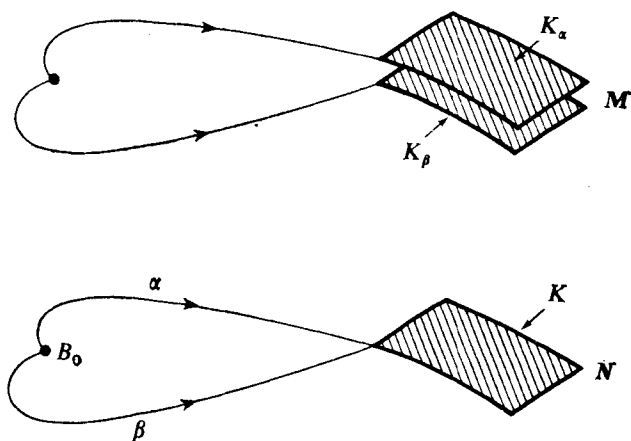


Рис. 24.7. Построение универсального покрывающего многообразия.

карты $K_\alpha, K_\beta, \dots, K_\zeta, L_\eta, \dots, \dots$, уточнив, как они должны перекрываться. Если заданы любые две из них, скажем K_α и L_η , то положим, что они не перекрываются, если не перекрываются в N карты K и L . Если K и L перекрываются, то можно предполагать, что пути из α и η имеют общий конец на перекрытии K и L . Тогда мы будем считать, что K_α и L_η не перекрываются, если пути из α не гомотопны путям из η ; в случае же гомотопии указанных путей (в этом случае мы будем писать $\alpha \sim \eta$) мы полагаем, что K_α и L_η имеют то же самое перекрытие, что и K и L . Точнее, пусть

$$K = \{U, \varphi, N\}, \quad L = \{U', \varphi', N'\}. \quad (24.5.1)$$

Тогда для каждого α карта K_α представляет собой копию K , отличающуюся от K и от других копий только указанием раз-

¹⁾ Точнее, односвязны множества U , на которых определены координатные функции φ (см. § 23.1). — *Прим. перев.*

личающего индекса α . Пусть

$$K_\alpha = \{U_\alpha, \Phi, N\}, \quad L_\eta = \{U'_\eta, \Phi', N'\}, \quad (24.5.2)$$

где U_α и U'_η — области многообразия M , которые определяются следующим образом: каждая точка x области N координатного пространства \mathbb{R}^n определяет точку $p \in U_\alpha$ с координатами

$\varphi^j(p) = x^j$, где x^j — координаты x . Многообразие M состоит из всех таких точек, определенных для всех карт $K_\alpha, K_\beta, \dots, L_\zeta, L_\eta, \dots, \dots$. Эти точки M различны с точностью до отождествления точек, которое необходимо делать, когда определяется перекрытие карт.

Перекрытие карт K и L в N описывается, согласно (24.5.1), функциями

$$x'^j = x'^j(x^1, \dots, x^n), \quad (24.5.3)$$

которые определяют взаимно однозначное отображение области N на область N' и поэтому задают две координатные системы на области $U \cap U'$ из N . Если $\alpha \sim \eta$, то мы полагаем по определению, что перекрытие K_α и K_η задается теми же самыми равенствами (24.5.3), а точку из U_α , имеющую данные координаты x^1, \dots, x^n , отождествляем с точкой из U'_η с соответствующими координатами x'^1, \dots, x'^n , определяемыми этими равенствами.

Ясно, что эта процедура порождает некоторое многообразие M того же самого класса гладкости C^k , что и N . Проекция ψM на N легко определяется проектированием каждой K_α на соответствующую карту K : каждая точка из $U_\alpha \subset M$ проектируется в точку из $U \subset N$, имеющую те же самые координаты x^1, \dots, x^n . Эта проекция ψ принадлежит классу C^k , потому что в этих координатах она совпадает с тождественным отображением.

Наконец, для доказательства односвязности M возьмем в качестве отмеченной точки $A_0 \in M$ одну из точек, лежащих над отмеченной точкой $B_0 \in N$. Точнее, пусть B_0 лежит в некоторой карте L на N . Рассмотрим гомотопические классы ζ, η, \dots замкнутых путей, начинающихся и заканчивающихся в B_0 . Среди них есть класс нуль-гомотопных путей (скажем, η), т. е. путей, стягиваемых в N непрерывно в точку B_0 . Тогда A_0 — это точка из L_η , лежащая над B_0 , т. е. имеющая те же самые координаты x^1, \dots, x^n в L_η , что и B_0 в L .

Для произвольной карты K_α на M возьмем один из путей класса α в N и поднимем его в M согласно первому принципу поднятия из § 24.2 и тем самым однозначно определим путь (обозначим его через α'), идущий из новой отмеченной точки A_0 в какую-то точку в K_α . Тогда в случае перекрытия карт K_α и L_ζ получаем, что $\alpha \sim \zeta$; следовательно, по второму принципу под-

нения пути α' и ζ' гомотопны в M или, точнее, становятся гомотопными, если их выбрать так, чтобы они имели общий конец на перекрытии K_α и L_ζ .

Пусть теперь $\mathcal{E}: P(\lambda)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, — произвольный путь в M ; покажем, что он гомотопен любому другому пути, идущему из $P(0)$ в $P(1)$, т. е. что M — односвязное многообразие. Каждая точка $P(a)$ на \mathcal{E} относится к некоторой карте, а значит, и $P(\lambda)$

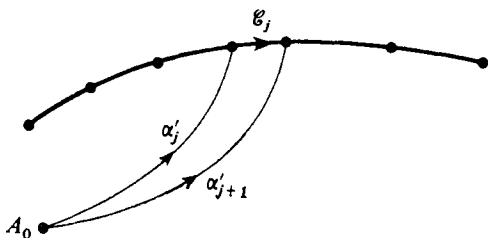


Рис. 24.8.

относится к той же карте для λ из некоторого интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. По теореме Гейне — Бореля можно выбрать конечное разбиение $[0, 1]$ вида

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k = 1,$$

такое, что $P(\lambda)$ лежит в некоторой карте, скажем L_{α_j} , для всех $j = 0, 1, \dots, k - 1$, и это верно для любого $\lambda \in [\lambda_j, \lambda_{j+1}]$. Обозначим через \mathcal{E}_j часть \mathcal{E} для $\lambda_j \leq \lambda \leq \lambda_{j+1}$; эта часть лежит в L_{α_j} . Пусть для каждого j α'_j — путь в M (такой же, как и в пре-

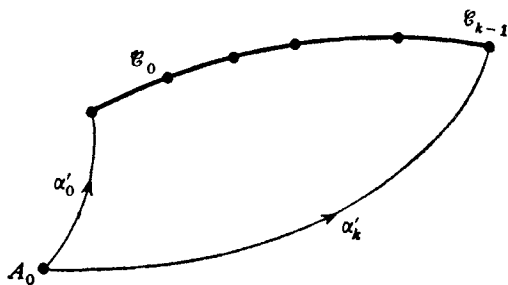


Рис. 24.9.

дыдущем абзаце), идущий из отмеченной точки A_0 в $P(\lambda_j)$. Так как обе точки $P(\lambda_j)$ и $P(\lambda_{j+1})$ лежат в L_{α_j} , путь $\alpha'_j \circ \mathcal{E}_j$ гомотопен α'_{j+1} (см. рис. 24.8). Поэтому

$$\alpha'_0 \circ \mathcal{E}_0 \circ \mathcal{E}_1 \circ \dots \circ \mathcal{E}_{k-1} \sim \alpha'_k,$$

а поскольку $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \circ \mathcal{C}_1 \circ \dots \circ \mathcal{C}_{k-1}$, то

$$\mathcal{C} \sim (\alpha_0')^{-1} \circ \alpha_k$$

(см. рис. 24.9). Правая часть здесь зависит только от начальной и конечной точек $P(0)$ и $P(1)$ пути \mathcal{C} ; следовательно, любой путь из $P(0)$ в $P(1)$ гомотопен \mathcal{C} , что и требовалось доказать.

Резюме (основная теорема). Любое (связное) n -мерное многообразие N имеет универсальное накрывающее многообразие M (также n -мерное), т. е. имеет односвязное накрывающее многообразие. M накрывает любое многообразие, накрывающее N , и все односвязные многообразия, накрывающие N , гомеоморфны M . Модель M строится при помощи описанной выше процедуры.

24.6. МНОГООБРАЗИЯ, НАКРЫВАЕМЫЕ ЗАДАНЫМ МНОГООБРАЗИЕМ

Рассмотрим теперь задачу, обратную нахождению универсального накрывающего многообразия M для заданного многообразия N : пусть задано M , и нужно построить многообразие N , которое может быть накрыто многообразием M . Процедура построения использует склеивание (отождествление) множеств точек в M . Приведем сначала несколько примеров.

Пусть M представляет собой (x, y) -плоскость, плотно намотанную на единичный цилиндр Z , ось которого лежит в направлении оси y . Мы знаем, конечно, что тогда плоскость накрывает цилиндр, однако мы сейчас покажем, как установить этот факт априори. Мы знаем, что для заданной точки (x, y) все точки $(x + 2\pi l, y)$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, плоскости совпадают с одной точкой цилиндра. Поэтому многообразие N , гомеоморфное цилиндру Z , можно построить так: определим «точки» многообразия N как множества

$$\{(x + 2\pi l, y): l = 0, \pm 1, \dots\} \stackrel{\text{def}}{=} \psi((x, y)),$$

и соответственно этому определим и карты в N . Тогда отображение $(x, y) \rightarrow \psi((x, y))$ есть проекция M на N . Говорят, что все точки $(x + 2\pi l, y)$ каждого множества отождествлены (т. е. сделаны идентичными). Отметим, что множитель 2π несуществен, потому что здесь играют роль только топологические свойства N . Отождествление (склеивание) точек $(x + n, y)$ или вообще точек $(x + an, y)$ для любого ненулевого вещественного числа a привело бы к тому же самому результату.

Аналогично, если для каждой точки $(x, y) \in M$ отождествляются все точки вида $(x + l, y + m)$, где l и m независимо пробегают значения $0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то получающееся многообразие N оказывается тором (точнее, гомеоморфно тору).

Пусть M — бесконечная полоса $-1 < x < 1$, $-\infty < y < \infty$. Пусть для данной точки $(x, y) \in M$ отождествляются точки вида

$((-1)^l x, y + l)$, $l = 0, \pm 1, \dots$; получающееся после этого многообразие N оказывается листом Мёбиуса.

Обобщая эти примеры, возьмем произвольное (связное) многообразие M . Предположим, что σ — гомеоморфизм (класса C^k , если M является C^k -многообразием) M на себя. Обозначим через σ^l l -ю суперпозицию σ , т. е.

$$\sigma^l(P) = \underbrace{\sigma(\sigma(\dots\sigma(P)\dots))}_{l \text{ раз}},$$

а через σ^{-l} — l -ю суперпозицию обратного отображения σ^{-1} . Для любой точки $P \in M$ рассмотрим множество точек

$$\psi(P) \stackrel{\text{def}}{=} \{\sigma^l(P) : l = 0, \pm 1, \dots\}. \quad (24.6.1)$$

[В первом примере σ — сдвиг $(x, y) \rightarrow (x + 2\pi, y)$ в плоскости.] Далее предположим, что σ таково, что множество точек $\psi(P)$ в M дискретно для каждого P , т. е. предположим, что найдется такая окрестность точки P , которая не содержит других точек $\sigma^l(P)$ с $l \neq 0$. Тогда, поскольку σ является гомеоморфизмом, каждая точка $\sigma^k(P)$ имеет окрестность, не содержащую точек $\sigma^l(P)$ с $l \neq k$.

В рамках этих предположений получается многообразие N , «точки» которого суть множества $\psi(P)$:

$$N = \{\psi(P) : P \in M\}.$$

Чтобы определить карты на N , возьмем карту $\{U, \varphi, N\}$ на M . Предположим, что U настолько мала, что в U не найдется такой точки P , чтобы и $\sigma(P)$ лежало в U . (В противном случае заменим эту карту на какую-нибудь подходящую подкарту.) Карта $\{\tilde{U}, \tilde{\varphi}, \tilde{N}\}$ многообразия N определяется тогда следующим образом:

$$\tilde{U} = \{\psi(P) : P \in U\}, \quad \tilde{\varphi}(\psi(P)) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(P), \quad P \in U, \quad \tilde{N} = N.$$

В качестве совершенно очевидного упражнения оставляется доказательство того, что (а) $\tilde{\varphi}$ взаимно однозначно, (б) определенные так карты попарно согласованы и покрывают все N , (в) отображение $\tilde{P} \rightarrow \psi(P)$ является отображением на N , (г) любая окрестность \tilde{U} указанного выше вида является правильной окрестностью каждой своей точки, потому что компоненты $\psi^{-1}(\tilde{U})$ суть множества $\sigma^l(U)$, $l = 0, \pm 1, \dots$. Следовательно, ψ есть накрытие N многообразием M .

Покажем теперь, что каждое накрытие многообразия N многообразием M связано с группой гомеоморфизмов M описанного выше типа.

Пусть M и N — связные n -мерные многообразия, причем M накрывает N посредством проекции ψ (предполагается, что она

не взаимно однозначна, так что накрытие не тривиально). Пусть B_1 и B_0 — отмеченные точки в M и N , причем B_1 лежит над B_0 (т. е. $\psi(B_1) = B_0$). Покажем, что для любой другой точки $B'_1 \in M$, лежащей над B_0 , существует гомеоморфизм σ многообразия M на себя, который переводит B_1 в B'_1 .

Доказательство этого оказывается довольно простым, если M односвязно, и мы рассмотрим сначала этот случай. Если \mathcal{C}_1 — путь в M из B_1 в B'_1 , а \mathcal{C}_0 — его образ в N , то \mathcal{C}_0 — замкнутый путь, начинающийся и кончающийся в B_0 ; далее мы фиксируем \mathcal{C}_1 и \mathcal{C}_0 и с их помощью построим гомеоморфизм σ M на себя, при котором B_1 переходит в B'_1 . Пусть

$$P_1: P_1(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad P_1(0) = B_1$$

— путь в M из B_1 в произвольную точку $P_1(1) = A_1$. Построим образ A_1 при отображении σ . Пусть P_0 — образ пути P_1 в N с конечной точкой $A_0 = \psi(A_1)$, а P'_1 — результат поднятия пути $\mathcal{C}_0 \circ P_0$ в M . Тогда $P'_1(1)$ — точка, лежащая, как и A_1 , над A_0 . Отображение $\sigma: M \rightarrow M$ определяется соответствием

$$\sigma: A_1 \rightarrow A_1 = P'_1(1).$$

Это определение корректно, потому что при таком же построении с любым другим путем Q_1 в M из B_1 в A_1 оказывается, что Q_1 гомотопен P_1 (так как M односвязно); следовательно, путь $\mathcal{C}_0 \circ Q_0$ гомотопен $\mathcal{C}_0 \circ P_0$, а значит, по следствию второго принципа поднятия, P'_1 гомотопен Q'_1 , и в результате получается та же самая точка A'_1 как образ A_1 при отображении σ . Более того, σ взаимно однозначно, потому что \mathcal{C}_0^{-1} существует. Ясно, что σ непрерывно, поскольку малое смещение точки A_1 можно получить при помощи малого изменения пути P_1 и, значит, малого изменения пути P'_1 , что дает малое смещение точки A'_1 . Таким образом, σ — гомеоморфизм M на себя.

Если M не односвязно, то уже нельзя утверждать, что пути P_1 и Q_1 в M из B_1 в A_1 гомотопны. Пусть A''_1 — конечная точка $Q'_1(1)$ пути Q'_1 ; покажем, что $A''_1 = A'_1$, т. е. что отображение σ определено все-таки корректно. Пути $P_1^{-1} \circ P'_1$ и $Q_1^{-1} \circ Q'_1$ в M , идущие из A_1 в A'_1 и из A_1 в A''_1 соответственно, отображаются при помощи ψ на пути

$$P_0^{-1} \circ \mathcal{C}_0 \circ P_0 \quad \text{и} \quad Q_0^{-1} \circ \mathcal{C}_0 \circ Q_0.$$

Однако в N это замкнутые пути, начинающиеся и кончающиеся в A_0 , и оба они гомотопны \mathcal{C}_0 ; из следствия второго принципа поднятия вытекает, что $P_1^{-1} \circ P'_1$ и $Q_1^{-1} \circ Q'_1$ гомотопны, и, следовательно, σ определено корректно. Остальные рассуждения оказываются теми же самыми, что и в случае односвязности M .

Если точки B'_1 берутся в порядке расположения точек M , лежащих над B_0 (включая и саму точку B_1), то получается группа

гомеоморфизмов многообразия M . Действие этой группы на M таково, что для любой точки A_1 множество образов $\{\sigma(A_1)\}$: все σ дискретно. Чтобы убедиться в этом, возьмем правильную окрестность U точки $A_0 = \psi(A_1)$. Все точки $\sigma(A_1)$ лежат над A_0 , однако, поскольку ψ взаимно однозначно на каждой компоненте U' прообраза $\psi^{-1}(U)$, в каждой такой компоненте может быть не более одной точки, лежащей над A_0 .

Задача нахождения всех многообразий, покрываемых заданным многообразием, тем самым сводится к задаче нахождения всех гомеоморфизмов σ описанного выше вида. Эта идея используется в общей теории относительности (см. гл. 28).

Глава 25

ГРУППЫ ЛИ

Группа Ли G ; линейная группа Ли; касательный вектор; алгебра Ли \mathfrak{L} группы G ; произведение Ли; тождество Якоби; абстрактная алгебра Ли; структурные постоянные; локальный изоморфизм групп $SU(2)$ и $SO(3)$; экспоненциальное отображение алгебры \mathfrak{L} в G ; логарифмические (или нормальные) координаты в G ; присоединенные представления алгебр Ли и односвязных групп Ли; формула Кэмпбелла—Бейкера—Хаусдорфа; трансляция карты; идеалы; простая алгебра Ли; локальный и глобальный гомоморфизмы групп; теория гомоморфизмов; центр группы; центр алгебры; накрывающая группа; прямая и полупрямая суммы алгебр Ли; классификация простых алгебр Ли.

Предварительные сведения: гл. 18, 19, 23, 24, § 21.1—21.4

Темой данной главы является современная теория непрерывных групп, часто неточно называемая теорией групп Ли. Большинство самих этих групп играет определенную роль в физике и математике на вполне элементарном уровне. К этим группам относятся группы вращений и движений, группы Лоренца и Пуанкаре, унитарные и симплектические группы. Новое здесь состоит в изучении групп и связанных с ними структур с более глубокой аналитической, алгебраической и топологической точек зрения. Ключом к такого рода изучению является теория алгебр Ли и взаимодействия между группами и их алгебрами. Это взаимодействие уже играло некоторую роль в квантовой механике с самого начала в том смысле, что элементы алгебр Ли появлялись в виде операторов, которые выводились из свойств симметрии физической системы. В течение последних 25 лет многое из терминологии и некоторые специальные группы, такие, как группы, выводимые из алгебры Ли G_2 , появились в физике частиц. Правда, до сих пор применение указанной теории носило в основном эвристический характер, но представляется вполне вероятным, что по мере развития физической теории детали математического аппарата будут иметь все большее значение. В большинстве случаев теория групп Ли излагается весьма глубоко и поэтому оказывается затруднительной для неспециалиста. Я пытался представить эту теорию максимально элементарным образом, по возможности согласованным с полным описанием. Например, векторное поле на многообразии группы по определению состоит из таких компонент, которые преобразуются по некоторому закону (так это делается в физике), а не как абстрактное отображение (дифференцирование) в алгебре функций из класса C^∞ .

25.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВАНИЕ ЦЕЛЕЙ

Группой Ли является группа G , элементы которой g, h, \dots можно рассматривать как точки некоторого многообразия таким образом, что теоретико-групповые свойства элементов изменяются непрерывно на этом многообразии. Другими словами, если g, h и gh представлены в картах $\{U, \varphi, N\}$, $\{U', \varphi', N'\}$ и $\{U'', \varphi'', N''\}$ (эти карты не обязательно различны), то координаты элемента gh должны быть непрерывными функциями координат элементов g и h , т. е. компоненты $\varphi''(gh)$ должны непрерывно зависеть от компонент $\varphi(g)$ и $\varphi'(h)$; координаты g^{-1} должны быть также непрерывными функциями координат g . Если G —группа матриц, подобно $SU(2)$ или $SO(3)$, и если многообразие определено, как в § 19.5, то рассматриваемая непрерывная зависимость получается автоматически, поскольку элементы матриц AB и A^{-1} (для невырожденной A) зависят непрерывно от элементов матриц A, B и A соответственно. Если G —абстрактная группа, то непрерывную зависимость, о которой здесь говорится, следует постулировать.

Формальное определение можно дать многими способами, ибо очень немногие основные свойства влекут за собой многие другие свойства. Например, часто постулируют, что группа должна быть C^∞ -многообразием, но Гильберт в 1900 г. предположил, что от группы необходимо лишь требовать быть C^0 -многообразием, и тогда она автоматически будет C^∞ -многообразием; это предположение в 1952 г. проверил Глисон и независимо от него Монтгомери и Зиппин. Они показали, что многообразие любой группы Ли на самом деле является вещественным *аналитическим* многообразием. Кроме того, необходимо лишь постулировать одну координатную карту на группе, а именно карту, локализованную в малой окрестности единичного элемента, в которой gh и g^{-1} непрерывны; остальная часть структуры многообразия тогда получается при помощи аксиом группы. Определение, данное в этой книге, постулирует только то, что требуется для вывода остающихся свойств элементарными методами.

Известные группы Ли, включая все те, которые (насколько я знаю) когда-либо встречались в приложениях, являются *линейными* группами Ли, т. е. они изоморфны группам линейных преобразований в конечномерном пространстве или, что эквивалентно, изоморфны группам матриц. Это часто относится даже к тем группам, которые появляются как группы нелинейных преобразований. Например, группа преобразований Мёбиуса в комплексной плоскости

$$z \rightarrow (\alpha z + \beta)/(\gamma z + \delta) \quad (\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0)$$

изоморфна ограниченной группе Лоренца, которая линейна. Далее, многое в теории упрощается в случае, когда рассматриваются группы матриц, а не абстрактные группы Ли; например, экспонента от матрицы, $\exp M$, элементарна и хорошо известна, тогда как

соответствующее построение для алгебры Ли абстрактной группы Ли требует техники, которая будет развита в последующих пяти параграфах. Итак, для физических применений одной теории линейных групп, по-видимому, будет достаточно. Однако абстрактная формулировка представляется необходимой для полной теории. Даже если начинают с матриц, теория приводит к группам, которые не являются, по крайней мере очевидным образом, группами матриц, а именно к факторгруппам G/H и полупрямым произведениям. Любая компактная группа Ли линейна, но доказательство этого основывается на весьма глубоких результатах теории; см. книгу Шевалле [1946]. В приложении к этой главе описываются две нелинейные группы Ли. Абстрактная теория представлена ниже, но в различных местах указано сведение к матрицам; см. упражнения 1—7 в § 25.14.

Пусть G — группа. Допустим, что в пространстве, точками которого являются элементы G , определена n -мерная координатная карта $\{U, \varphi, N\}$, такая, что U содержит единичный элемент 1 группы. (Мы используем символ 1, поскольку символ e требуется для экспоненты.) Предположим для удобства, что φ отображает 1 в начало координат пространства \mathbb{R}^n : $\varphi(1) = 0$. Подмножество U_0 множества U называется *открытым* (как в гл. 23), если $\varphi(U_0)$ — открытое подмножество множества N в \mathbb{R}^n .

Мы допускаем, что произведения и обратные элементов группы непрерывны в этой карте, когда их координаты определены. Тогда мы можем определить меньшую карту со специальными свойствами следующим образом. Пусть g и h принадлежат U . Если g и h достаточно близки к 1, т. е. если $\varphi(g)$ и $\varphi(h)$ достаточно близки к началу координат в \mathbb{R}^n , то gh , g^{-1} , h^{-1} также близки к 1. В частности, если $g = h = 1$, то gh , g^{-1} , h^{-1} равны 1, а их координаты определены и все равны нулю. Следовательно, по непрерывности существует такая окрестность U_1 единицы, что если g и h принадлежат U_1 , то координаты элементов gh , g^{-1} , h^{-1} определены и принадлежат открытому множеству N в \mathbb{R}^n . Удобно рассмотреть даже меньшую окрестность $U_0 = U_1 \cap U_1^{-1}$, где $U_1^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{g^{-1}: g \in U_1\}$, и определить $N_0 = \varphi(U_0) \subset N$. Тогда если g и h принадлежат U_0 , то gh содержится в U , в то время как g^{-1} и h^{-1} содержатся в U_0 . Векторнозначная функция $m(x_1, x_2)$ поэтому определяется для всех x_1 и x_2 из N_0 при помощи равенства

$$m(\varphi(g), \varphi(h)) = \varphi(gh) \in N;$$

аналогично $l(x)$ определяется как

$$l(\varphi(g)) = \varphi(g^{-1}) \in N_0.$$

Группа G совместно с n -мерной картой $\{U, \varphi, N\}$ называется *n -мерной группой Ли*, если функции $m(\cdot, \cdot)$ и $l(\cdot)$ определены

в открытом множестве N_0 , как описано выше, и принадлежат классу C^4 . В дальнейшем из $\{U, \varphi, N\}$ при помощи групповых операций будут получены другие карты, с тем чтобы сделать G многообразiem.

Все группы, описанные в гл. 19, являются группами Ли, когда в них надлежащим образом определены координатные карты.

(Некоторые авторы требуют, чтобы многообразие группы Ли было связным; по причинам, которые будут указаны в § 25.11, это требование не обязательно.)

Например, пусть G —группа вращений $SO(3)$ с внутренними координатами $\theta_x, \theta_y, \theta_z$, рассмотренными в § 19.6. Тогда в качестве U можно взять множество всех элементов группы, для которых $\|\theta\| < \pi$ (т. е. все элементы, для которых $\|\theta\| \neq \pi$), а в качестве U_0 —множество элементов, для которых $\|\theta\| < \pi/2$. Таким образом, N представляет собой внутренность шара K в \mathbb{R}^3 , который описан в § 19.6, а N_0 —открытый шар, радиус которого равен половине радиуса шара K . Те же координаты можно использовать и для $O(3)$; в этом случае вся вторая компонента многообразия находится вне U .

Для того чтобы вывести свойства групп Ли из данных выше определений, строится алгебра $\Lambda = \Lambda(G)$ группы Ли G : Λ есть n -мерное линейное пространство элементов λ, μ, \dots , в котором определена мультипликативная операция $[\lambda, \mu]$, так называемое произведение Ли. Структура алгебры Λ полностью определяется свойствами группы G в произвольно малой окрестности единицы 1; с другой стороны, Λ полностью определяет многие свойства группы G . Затем строится так называемое экспоненциальное отображение Λ в G ; оно обобщает отображение $M \rightarrow e^M$ для матриц. В некоторой окрестности начала координат пространства Λ это отображение является взаимно однозначным, а компоненты элемента λ служат (через обратное отображение) в качестве так называемых логарифмических координат в G . Из этой карты позднее получают при помощи трансляций в G другие координатные карты, причем они связаны с ней аналитически. Формула КБХ (см. § 25.10) в явном виде задает $\mathfrak{m}(\lambda, \mu)$ через λ и μ и показывает, что в логарифмических координатах зависимость произведения gh от g и h является аналитической. Эта формула связана лишь со структурой алгебры Ли, и отсюда следует, что в окрестности единицы 1, где определены логарифмические координаты, структура группы G целиком зависит от ее инфинитезимальных элементов.

При исследовании групп Ли в приблизительно равных пропорциях комбинируются анализ, алгебра и топология. Применение мощных методов линейной алгебры дает полную классификацию алгебр Ли, из которой в свою очередь следует классифи-

кация групп Ли. Это может показаться неожиданным, если учесть, что часто группы Ли возникают как группы нелинейных преобразований — см. книгу Эйзенхарта [1933].

25.2. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ $m(\cdot, \cdot)$ И $l(\cdot)$

Поскольку функции $m(x, y)$ и $l(x)$ принадлежат классу C^4 , они могут быть разложены в ряды Тейлора по компонентам x^i и y^i переменных x и y , включая члены третьего порядка с остаточными членами четвертого порядка. Из группового отношения $a1 = 1a = a$ для любого a следует, что

$$m(x, 0) \equiv m(0, x) \equiv x \quad (25.2.1)$$

[вспомним, что $\varphi(1) = 0$]. Поэтому в разложении $m(x, y)$ вблизи начала координат обращается в нуль постоянный член, линейная часть разложения представляет собой $x + y$, а квадратичная часть разложения содержит члены типа $x^j y^k$, но не содержит членов типа $x^j x^k$ или $y^j y^k$; таким образом,

$$m^i(x, y) = x^i + y^i + a_{jk}^i x^j y^k + b_{jkl}^i x^j x^k y^l + c_{ijkl}^i x^j y^k y^l + \dots, \quad (25.2.2)$$

где a, b, c — коэффициенты разложения и использовано соглашение о суммировании.

Аксиома ассоциативности теории групп налагает на $m(\cdot, \cdot)$ ограничение

$$m(m(x, y), z) = m(x, m(y, z)). \quad (25.2.3)$$

Если рассматривать только линейные и квадратичные члены в разложении $m(\cdot, \cdot)$, то (25.2.3) удовлетворяется автоматически; тем не менее ассоциативность накладывает некоторые ограничения на коэффициенты a_{jk}^i в квадратичной части, что можно увидеть, если включить в разложение также и члены третьего порядка. Подстановка (25.2.2) в (25.2.3) дает (после приведения подобных членов)

$$\begin{aligned} a_{jk}^i a_{lm}^i x^l y^m z^k + b_{jkl}^i (x^j y^k + x^k y^j) z^l = \\ = a_{jk}^i a_{lm}^k x^j y^l z^m + c_{ijkl}^i (y^k z^l + y^l z^k). \end{aligned} \quad (25.2.4)$$

Исключим теперь из этого выражения коэффициенты b и c . Так как j, k, l, m являются индексами суммирования, их можно переименовать в каждом члене таким образом, чтобы множители $x^k y^l z^m$ появились всюду; тогда, поскольку данное уравнение является тождеством по x, y, z , результирующий коэффициент при $x^k y^l z^m$ должен обратиться в нуль, что дает

$$a_{jm}^i a_{kl}^i - a_{kj}^i a_{lm}^i = c_{klm}^i + c_{kml}^i - b_{klm}^i - b_{lkm}^i.$$

Теперь просуммируем данное выражение по четным перестановкам тройки чисел k, l, m и из полученной суммы вычтем результат суммирования по нечетным перестановкам; правая часть при этом обратится в нуль, а в левой части получится сумма, которую можно записать в виде

$$0 = \sum (a_{jm}^i - a_{mj}^i) (a_{kl}^i - a_{lk}^i) \quad (25.2.5)$$

и в которой суммирование проводится по четным перестановкам тройки k, l, m .

Аксиомы группы не налагают больше никаких ограничений на коэффициенты a_{jk}^i , ибо уже приведенных ограничений достаточно, чтобы определить алгебру Ли, и в конце концов окажется, что любая алгебра Ли является алгеброй Ли некоторой группы Ли. (Это весьма глубокий результат, см. книгу Хаузнера и Шварца [1968, § III.7].)

Из уравнения

$$\mathfrak{m}(l(x), x) \equiv \mathfrak{m}(x, l(x)) \equiv 0,$$

которое выражает собой групповое отношение, заключающееся в том, что $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$ для всех a , можно получить с точностью до квадратичных членов разложение функции $l(x)$:

$$l^i(x) = -x^i + a_{jk}^i x^j x^k + \dots \quad (25.2.6)$$

25.3. АЛГЕБРА ЛИ ГРУППЫ ЛИ

Алгебра Ли Λ группы Ли G основывается на так называемых инфинитезимальных элементах G , т. е. на касательных векторах к гладким кривым, выходящим из единичного элемента 1. Такая кривая задается функцией $g(t)$, определенной для некоторого интервала $0 \leq t \leq \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) и такой, что $g(0) = 1$, а соответствующая кривая $x(t) = \varphi(g(t))$ в параметрическом пространстве \mathbb{R}^n имеет касательную в каждой точке (включая $t=0$, которая фактически является единственной существенной точкой). Если

$$x(t) = \varphi(g(t)) = \lambda t + \dots, \quad (25.3.1)$$

то при преобразовании координат компоненты λ^i вектора λ преобразуются как компоненты контравариантного вектора в точке $x=0$ многообразия (см. § 26.1). А именно, поскольку

$$\lambda = d\varphi(g(t))/dt|_{t=0},$$

видно, что если ввести новые координаты

$$x'^i = x'^i(x^1, \dots, x^n) \quad (i = 1, \dots, n),$$

то

$$\lambda'^i = \partial x'^i / \partial x^j |_{x=0} \lambda^j.$$

Этот вектор называется *касательным вектором в 1 к кривой $g(t)$* .

[Согласно приведенному выше определению, кривая задается параметризацией, а также множеством групповых элементов в ней; $g(t)$, $g(2t)$, $g(2^t - 1)$ — различные кривые, выходящие из 1, и они имеют различные касательные векторы, хотя все эти векторы имеют одинаковое направление.]

Множество всех касательных векторов в 1 в некоторой n -мерной группе G составляет n -мерное векторное пространство над вещественным полем \mathbb{R} , так как если $\lambda t + \dots$ и $\mu t + \dots$ являются координатами двух гладких кривых, то $(a\lambda + b\mu)t + \dots$, где a и b — вещественные числа, представляет собой координату третьей гладкой кривой. Это векторное пространство станет алгеброй, называемой алгеброй Ли $\Lambda = \Lambda(G)$ группы G , когда будет определено умножение, основанное на групповом умножении в G .

Пусть $g(t)$ и $h(t)$ — выходящие из 1 гладкие кривые в G . Если функция $k(t)$ определяется как коммутатор $g(t)$ и $h(t)$, т. е. если

$$k(t) = g(t)h(t)g(t)^{-1}h(t)^{-1},$$

и если координаты $g(t)$ и $h(t)$ суть

$$\varphi(g(t)) = \lambda(t) + \dots, \quad \varphi(h(t)) = \mu t + \dots,$$

то непосредственное вычисление показывает, что координатой функции $k(t)$ является

$$\varphi(k(t)) = \nu t^2 + \dots, \quad (25.3.2)$$

где

$$\nu^i = a_{ik}^i (\lambda^i \mu^k - \lambda^k \mu^i) = (a_{ik}^i - a_{ki}^i) \lambda^i \mu^k. \quad (25.3.3)$$

Из формулы (25.3.2) следует, что функция $\bar{k}(t) \stackrel{\text{def}}{=} k(\sqrt{t})$ есть кривая в G , выходящая из 1, и что ν — ее касательный вектор; ν называется произведением Ли векторов λ и μ и обозначается при помощи скобок Ли:

$$\nu = [\lambda, \mu]. \quad (25.3.4)$$

[Установив довольно сложные законы преобразования коэффициентов a_{jk}^i , можно получить непосредственно из (25.3.3), что ν^i преобразуются как компоненты вектора, когда изменяются координаты.]

Из (25.3.3) следует, что произведение Ли линейно по каждому множителю и антисимметрично: $[\mu, \lambda] = -[\lambda, \mu]$; из выражения (25.2.5), которое было выведено из ассоциативности в G , следует, что произведение Ли также удовлетворяет тождеству Якоби

$$[\lambda, [\mu, \nu]] + [\mu, [\nu, \lambda]] + [\nu, [\lambda, \mu]] = 0. \quad (25.3.5)$$

Примером алгебры Ли является алгебра векторов в \mathbb{R}^3 , где произведение Ли определяется как векторное произведение $[\lambda, \mu] = \lambda \times \mu$ в обозначениях Гиббса. Тожество Якоби можно прове-

речь, либо записывая (25.3.5) покомпонентно, либо используя тождество $\lambda \times (\mu \times \nu) = (\lambda \cdot \nu)\mu - (\lambda \cdot \mu)\nu$. Алгебры Ли матриц будут рассмотрены в § 25.5.

25.4. АБСТРАКТНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

Конечномерное векторное пространство над полем скаляров \mathbb{R} (или \mathbb{C}) в случае, когда в этом пространстве определено умножение $[\lambda, \mu]$, которое является линейным по каждому множителю, антисимметричным и удовлетворяет тождеству Якоби (25.3.5), называется *вещественной* (соответственно *комплексной*) алгеброй Ли. Алгебра Ли, полученная из группы, является вещественной.

Алгебра Ли в общем случае не только некоммутативна, но и неассоциативна; иначе говоря, в общем случае $[\lambda, [\mu, \nu]] \neq [[\lambda, \mu], \nu]$; она не имеет единичного элемента, потому что $[\lambda, \lambda] = 0$ для любого λ в силу антисимметрии произведения $[\lambda, \mu]$.

Можно полностью описать n -мерную алгебру Ли, выбрав в ней базис $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ (множество n линейно независимых векторов), а затем задав n^3 *структурных постоянных* C_{jk}^i (разумеется, не все они являются независимыми), определяемых как

$$[\epsilon_j, \epsilon_k] = C_{jk}^i \epsilon_i. \quad (25.4.1)$$

25.5. АЛГЕБРЫ ЛИ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП

Пусть G — группа матриц L, M, \dots размера $(m \times m)$, т. е. подгруппа группы $GL(m, \mathbb{R})$ или группы $GL(m, \mathbb{C})$. Тогда ее алгебра Ли может быть реализована в виде алгебры Ли матриц размера $m \times m$. Выходящая из 1 кривая имеет вид $A(t) = I + tL + \dots$; матрицы L , получаемые таким образом, образуют векторное пространство Λ размерности, не превышающей $2m^2$. Чтобы найти произведение Ли в Λ , положим, что $B(t) = I + tM + \dots$ — другая выходящая из 1 кривая, и определим

$$\begin{aligned} K(t) &= A(t)B(t)A(t)^{-1}B(t)^{-1} = \\ &= (I + tL + \dots)(I + tM + \dots)(I - tL + \dots)(I - tM + \dots), \end{aligned} \quad (25.5.1)$$

как это делалось в § 25.3 для функции $k(t)$ в многообразии абстрактной группы. После выполнения умножений линейные члены взаимно уничтожаются. Квадратичные члены в $K(t)$ получаются из непостоянных членов не более чем в двух множителях, в то время как в остальных множителях берется I . Все квадратичные члены, получающиеся от $A(t)A(t)^{-1}$ и от $B(t)B(t)^{-1}$, взаимно уничтожаются, так что в выражении остаются лишь те квадратичные члены, которые появились в результате умножения линейного члена от $A(t)$

или $A(t)^{-1}$ на линейный член от $B(t)$ или $B(t)^{-1}$. Поэтому

$$K(t) = I + t^2(LM - ML) + \dots \quad (25.5.2)$$

Тогда, согласно определению произведения Ли [см. (25.3.2) и (25.3.4)],

$$[L, M] = LM - ML. \quad (25.5.3)$$

Этот результат иллюстрирует общее правило, заключающееся в том, что любую ассоциативную алгебру можно сделать алгеброй Ли, если положить $[\lambda, \mu] = \lambda\mu - \mu\lambda$, где через $\lambda\mu$ и $\mu\lambda$ обозначены произведения в исходной ассоциативной алгебре.

Матрицы, подобные описанным выше L и M , в гл. 20 были названы инфинитезимальными элементами группы; они имели вид $L = dA(t)/dt|_{t=0}$ и т. д., и было показано, что для трехмерной группы $SO(3)$ в качестве инфинитезимальных элементов можно принять матрицы

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем эти матрицы удовлетворяют соотношениям

$$[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = \mathbf{e}_k \quad (ijk = 123, 231, 312).$$

В гл. 22 было показано, что для группы $SU(2)$, которая также трехмерна, в качестве инфинитезимальных элементов можно взять матрицы

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

и эти матрицы удовлетворяют тем же соотношениям, что и \mathbf{e}_i , а именно

$$[\eta_i, \eta_j] = \eta_k \quad (ijk = 123, 231, 312).$$

Согласно (25.4.1), эти соотношения полностью определяют структуру соответствующей алгебры Ли. Поэтому если через Λ_3 и Λ_2 обозначить алгебры Ли соответственно групп $SO(3)$ и $SU(2)$, то линейное отображение Λ_3 на Λ_2 , индуцируемое посредством $\mathbf{e}_i \rightarrow \eta_i$ ($i=1, 2, 3$), является изоморфизмом. Если трактовать Λ_2 и Λ_3 как абстрактные алгебры Ли, то они тождественны, тогда как соответствующие им группы не являются таковыми. Как будет видно позднее, изоморфизм алгебр индуцирует взаимно однозначное отображение групп только в окрестности единицы. В таком локальном смысле это отображение является изоморфизмом, но, будучи расширено глобально, оно становится (2 \rightarrow 1)-гомоморфизмом группы $SU(2)$ на группу $SO(3)$, который был рассмотрен в § 19.7.

Заметим, что Λ_2 и Λ_3 являются вещественными алгебрами Ли. Хотя матрицы η_1, η_2, η_3 и комплексны, Λ_2 состоит из линейных комбинаций этих матриц с вещественными коэффициентами.

25.6. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Мы ищем кривую $g(t)$ в группе G , такую, что

$$g(t+s) = g(t)g(s); \quad (25.6.1)$$

точки этой кривой образуют одномерную абелеву подгруппу; $g(0)$ есть 1 группы G . Соответствующая кривая $x(t) = \varphi(g(t))$ проходит через начало координат координатного пространства \mathbb{R}^n и удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}^i(t+s) = m^i(x(t), x(s)). \quad (25.6.2)$$

Взяв от этого уравнения d/ds и положив затем $s=0$, получим

$$\dot{x}^i(t) = q_i^j(x(t), 0)\lambda^j, \quad (25.6.3)$$

где $q_i^j(\cdot, \cdot)$ определяется как

$$q_i^j(x, y) = \partial m^i(x, y) / \partial y^j \quad (25.6.4)$$

и принадлежит классу C^3 , а λ^j ($j=1, \dots, n$) — компоненты касательного вектора λ к $x(t)$ в $t=0$. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (25.6.3) при начальном условии $x(0)=0$ имеет для данного λ единственное решение $x(t)$ в некоторой окрестности $t=0$. Из вида (25.6.3) ясно, что решение зависит от λ и t только через комбинацию $t\lambda$; поэтому мы можем записать решение как $x(t, \lambda) = X(t\lambda)$. Соответствующая кривая $g(t)$ в G обозначается через $\exp(t\lambda)$ или $e^{t\lambda}$ в силу уравнения (25.6.1), которое теперь принимает вид $e^{(t+s)\lambda} = e^{t\lambda}e^{s\lambda}$; следовательно, $X(t\lambda) = \varphi(e^{t\lambda})$. Это обобщает определение экспоненциальной функции абстрактным образом до отображения алгебры Ли Λ на группу Ли G , но, в случае когда элементами G и Λ являются матрицы, это определение согласуется с обычным. Функция $X(\cdot)$ принадлежит классу C^3 .

До сих пор уравнение (25.6.1) использовалось только для таких s , которые принадлежат малой окрестности нуля, но теперь будет показано, что это функциональное уравнение или, что то же самое, уравнение (25.6.2) справедливо для всех t и всех s .

Теорема. *Решение $x(t)$ уравнения (25.6.3) удовлетворяет уравнению (25.6.2) для всех t и s , таких, что $x(t)$, $x(s)$ и $x(t+s)$ определены.*

Замечание 1. Это утверждение не следует очевидным образом из одного только вида уравнений (25.6.2) и (25.6.3), потому что,

как будет видно, в доказательстве придется использовать ассоциативный закон группового умножения.

Замечание 2. Коль скоро функциональное уравнение $g(t+s) = g(t)g(s)$ было установлено для t, s и $t+s$ в интервале $(-T, T)$, само уравнение затем можно использовать для определения $g(t)$ при t из интервала $(-2T, 2T)$, затем при t из $(-4T, 4T)$ и т. д. Вследствие этого $g(t)$ однозначно определено для всех t и удовлетворяет функциональному уравнению для всех t и s — детали представляем читателю.

Замечание 3. Если G — группа матриц, так что элементы λ алгебры Λ являются также матрицами, то соответствующее уравнение

$$e^{\lambda(t+s)} = e^{\lambda t} e^{\lambda s} \quad (25.6.5)$$

обычно устанавливается следующим образом. Матрица

$$\mu(s) = (e^{\lambda t})^{-1} e^{\lambda(t+s)},$$

рассматриваемая как функция от s , удовлетворяет тому же самому дифференциальному уравнению и тому же начальному условию, что и функция $e^{\lambda s}$, а именно

$$d\mu(s)/ds = \mu(s)\lambda, \quad \mu(0) = I;$$

поскольку решение этой задачи с начальными данными единственно, отсюда следует, что

$$(e^{\lambda t})^{-1} e^{\lambda(t+s)} = e^{\lambda s},$$

что эквивалентно (25.6.5). Это рассуждение приведено в качестве модели помещенного ниже доказательства для абстрактного случая.

Доказательство теоремы. Будет показано, что функция

$$y(s) = m(l(x(t)), x(t+s)), \quad (25.6.6)$$

являющаяся координатой элемента группы $g(t)^{-1}g(t+s)$, удовлетворяет тому же самому дифференциальному уравнению (25.6.3) и тому же начальному условию, что и функция $x(s)$, которая является координатой элемента группы $g(s)$; поскольку решение этой задачи с начальными данными единственно, отсюда следует, что $g(s) = g(t)^{-1}g(t+s)$; поэтому $g(t+s) = g(t)g(s)$, что и требовалось доказать. То, что функция $y(s)$ удовлетворяет начальному условию $y(0) = 0$, следует из равенства $g(t)^{-1}g(t) = 1$. Дифференцирование (25.6.6) по s и подстановка выражения, подобного (25.6.3), для $x'(t+s)$ дают

$$y^i(s) = q^j(l(x(t)), x(t+s)) q^i_k(x(t+s), 0) \lambda^k. \quad (25.6.7)$$

Теперь будет показано, что полный коэффициент при λ^k в правой части этого уравнения равен $q^i_k(y(s), 0)$, так что $y(s)$ удовлетворяет тому же уравнению (25.6.3), что и $x(s)$. Для этого воспользуемся законом ассоциативности группового умножения в следующей форме:

$$\begin{aligned} m^i(y(s), z) &= m^i(m(l(x(t)), x(t+s)), z) = \\ &= m^i(l(x(t)), m(x(t+s), z)); \end{aligned} \quad (25.6.8)$$

это эквивалентно равенству $[g(t)^{-1}g(t+s)]h = g(t)^{-1}[g(t+s)h]$. Дифференцирование по z_k дает

$$q_k^i(y(s), z) = q_j^i(x(t), z), \quad m(x(t+s), z), \quad q_k^j(x(t+s), z),$$

поэтому

$$q_k^i(y(s), 0) = q_j^i(x(t), x(t+s)) q_k^j(x(t+s), 0),$$

так что $y(s)$ и $x(s)$ удовлетворяют одному и тому же уравнению, и теорема доказана.

Для $t = 1$ мы имеем

$$X(\lambda) = \varphi(e^\lambda).$$

Кроме того, при $\lambda = 0$ якобиан

$$\det(\partial X^i / \partial \lambda^j) = \det(q_j^i(\lambda, 0))$$

отличен от нуля, так как $q_j^i(0, 0) = \delta_j^i$. Поэтому функция $X(\lambda)$ имеет обратную функцию в некоторой окрестности начала координат, и компоненты вектора λ можно взять в качестве новых координат, называемых *логарифмическими* или *нормальными* координатами элемента $g = e^\lambda$ группы в некоторой окрестности единицы в G . Можно также писать $\lambda = \ln g$. Отображение (в общем случае переводящее много элементов в один) $\lambda \rightarrow e^\lambda$ алгебры Ли Λ в группу Ли G называется *экспоненциальным* отображением. Компоненты данного вектора λ зависят, разумеется, от выбора координатной системы $\{U, \varphi, N\}$, но преобразуются как компоненты вектора, так что каждый элемент алгебры Λ (вектор) отображается в единственный элемент группы.

25.7. ЛЕММА О ВНУТРЕННИХ АВТОМОРФИЗМАХ.

ОТОБРАЖЕНИЕ Ad_μ

Доказываемая ниже лемма нужна в качестве части аналитического аппарата для доказательства теоремы Кэмпбелла — Бейкера — Хаусдорфа, но представляет также и самостоятельный интерес. Как и в гл. 21, гомоморфизм группы G (абстрактной или нет) на группу невырожденных линейных преобразований векторного пространства V называется *представлением* группы G на V . Если этот гомоморфизм является взаимно однозначным (т. е. изоморфизмом), то представление называется *точным*. Если бы каждая группа Ли имела точное представление на конечномерном пространстве, то вся теория свелась бы к операциям над матрицами. Хотя это и не так, но любая односвязная группа имеет частное представление (вообще говоря, не являющееся точным) — это так называемое *присоединенное* представление, которое будет описано в конце данного параграфа.

Замечание. У читателя может возникнуть желание пропустить доказательства в этом и в следующих трех параграфах. Однако

приведенные определения и формулировки лемм и теорем необходимы для дальнейшего.

Если e^μ — фиксированный элемент группы, то отображение $g \rightarrow e^\mu g e^{-\mu}$ есть внутренний автоморфизм группы G (см. § 18.10); он индуцирует линейное отображение алгебры Λ в себя, которое мы и обсудим.

Прежде всего, если μ — фиксированный элемент алгебры Λ , то линейное преобразование Λ в себя, определяемое посредством $\lambda \rightarrow [\mu, \lambda]$, обозначается через Ad_μ . Относительно базиса в Λ это преобразование представляется некоторой матрицей размера $n \times n$. [Эту матрицу не следует смешивать с матрицами, из которых строится алгебра Λ , когда G — линейная группа, и от которых она, вообще говоря, отличается размером. Если, например, элементами Λ являются матрицы размера $m \times m$, то Ad_μ может быть представлено матрицами размера $m^2 \times m^2$.] Через Ad_μ^2 обозначается преобразование

$$\lambda \rightarrow \text{Ad}_\mu (\text{Ad}_\mu \lambda) = \text{Ad}_\mu [\mu, \lambda] = [\mu, [\mu, \lambda]];$$

аналогично $\text{Ad}_\mu \text{Ad}_\nu$, Ad_μ^2 и $\exp \{ \text{Ad}_\mu \}$ обозначают преобразования

$$\begin{aligned} \lambda &\rightarrow [\mu, [\nu, \lambda]], & \lambda &\rightarrow [\mu, [\mu, \dots [\mu, \lambda] \dots]], \\ \lambda &\rightarrow (I + \text{Ad}_\mu + (1/2!) \text{Ad}_\mu^2 + \dots) \lambda, \end{aligned}$$

где I — единичное преобразование в Λ .

Лемма. Пусть e^μ — заданный элемент группы, и пусть для каждого λ из Λ $g(t)$ — гладкая кривая, такая, что $g(0) = 1$, а касательным вектором к ней в 1 является λ ; пусть также λ' — касательный вектор в 1 к кривой $e^\mu g(t) e^{-\mu}$. Тогда отображение $\lambda \rightarrow \lambda'$ есть линейное преобразование в Λ , которое в явном виде записывается как

$$\lambda \rightarrow \lambda' = e^{\text{Ad}_\mu} \lambda. \quad (25.7.1)$$

Доказательство. Для любого фиксированного s в интервале $[0, 1]$ групповой автоморфизм $g(t) \rightarrow e^{\mu s} g(t) e^{-\mu s}$ индуцирует отображение $\lambda \rightarrow \lambda(s)$ способом, описанным в формулировке леммы; будет доказано, что $\lambda(s)$ удовлетворяет тому же самому дифференциальному уравнению, зависящему от s , что и $e^{s \text{Ad}_\mu} \lambda$. Логарифмическая координата элемента группы $g(t, s) = e^{\mu s} g(t) e^{-\mu s}$ равна

$$x(t, s) = \ln g(t, s) = t \lambda(s) + \dots \quad (25.7.2)$$

Чтобы найти производную по s при $s = s_0$, запишем

$$g(t, s_0 + s) = e^{\mu s} g(t, s_0) e^{-\mu s}, \quad (25.7.3)$$

$$x(t, s_0 + s) = m(m(s\mu, x(t, s_0)), -s\mu), \quad (25.7.4)$$

где, как и в предыдущих параграфах, $m(\cdot, \cdot)$ выражает координату (здесь логарифмическую) произведения двух элементов группы через координаты множителей. Вспомнив определение (25.6.4) для $q_j^i(x, y)$, определим аналогично

$$p_j^i(x, y) = \partial m^i(x, y) / \partial x_j. \quad (25.7.5)$$

Дифференцирование (25.7.4) по t показывает, что касательный вектор в $t=0$ к кривой $x(t, s_0+s)$ имеет вид

$$\lambda^i(s_0+s) = p_i^i(s\mu, -s\mu) q_k^i(s\mu, 0) \lambda^k(s_0). \quad (25.7.6)$$

Из разложения (25.2.2) для $t^i(x, y)$ получают разложения для p_i^i и q_k^i , включающие члены первого порядка

$$p_i^i = \delta_i^i + a_{ij}^i y^j + \dots, \\ q_k^i = \delta_k^i + a_{ik}^i x^k + \dots$$

(Все эти разложения и величины p_i^i и q_k^i выражены теперь через логарифмические координаты.) Из (25.7.6) тогда следует

$$d\lambda^i(s+s_0)/ds|_{s=0} = (a_{ik}^i - a_{ki}^i) \mu^k \lambda^k(s_0),$$

т. е.

$$d\lambda(s)/ds = [\mu, \lambda(s)] = \text{Ad}_\mu \lambda(s)$$

[см. (25.3.3) и (25.3.4)]; если использовать базис в Λ , то данное уравнение становится системой n дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, решением которой является

$$\lambda(s) = e^{s \text{Ad}_\mu} \lambda(0). \quad (25.7.7)$$

В частности, $\lambda' = \lambda(1) = e^{\text{Ad}_\mu} \lambda$, что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЕ

Покажите, что для фиксированного μ линейное отображение $\lambda \rightarrow e^{\text{Ad}_\mu} \lambda$ есть автоморфизм алгебры Λ , т. е., во-первых, это отображение взаимно однозначно, а, во-вторых,

$$e^{\text{Ad}_\mu} [\lambda, \nu] = [e^{\text{Ad}_\mu} \lambda, e^{\text{Ad}_\mu} \nu]. \quad (25.7.8)$$

[Отметим, что само Ad_μ не является даже гомоморфизмом алгебры Λ .]

Говорят, что e^{Ad_μ} есть *внутренний автоморфизм* алгебры Λ , индуцированный внутренним автоморфизмом $g \rightarrow e^{\nu} g e^{-\nu}$ группы G .

Пояснение. Если e^{μ_1} и e^{μ_2} — два любых элемента группы и если $e^{\mu_3} = e^{\mu_1} e^{\mu_2}$, то автоморфизм группы G

$$g \rightarrow e^{\mu_3} g e^{-\mu_3} = e^{\mu_1} e^{\mu_2} g e^{-\mu_2} e^{-\mu_1}$$

индуцирует автоморфизм алгебры Λ

$$e^{\text{Ad}_{\mu_3}} = e^{\text{Ad}_{\mu_1}} e^{\text{Ad}_{\mu_2}}.$$

Поэтому в такой окрестности 1, в которой определены логарифмические координаты, соответствие e^{Ad_μ} элементу группы e^μ является (локально) гомоморфизмом G в группу линейных преобразований в векторном пространстве Λ . В дальнейшем будет показано, что в случае односвязной группы G это соответствие может быть расширено до гомоморфизма всей группы G , т. е. до *присоединенного представления* группы G .

Группа линейных преобразований в Λ , порожденная преобразованиями вида e^{Ad_μ} , называется *группой внутренних автоморфизмов алгебры Ли* Λ и обозначается через $\text{Int}(\Lambda)$. Каждый элемент этой группы является конечным произведением $e^{\text{Ad}_{\mu_1}}, e^{\text{Ad}_{\mu_2}}, \dots, e^{\text{Ad}_{\mu_j}}$ и называется *внутренним автоморфизмом* Λ (его не всегда можно представить в виде e^{Ad_σ} для некоторого $\sigma \in \Lambda$). В случае односвязной группы G элемент группы $\text{Int}(\Lambda)$ есть образ элемента $g = e^{\mu_1} e^{\mu_2} \dots e^{\mu_j}$ группы G при упомянутом в пояснении гомоморфизме (в присоединенном представлении).

25.8. ЛЕММЫ О ФОРМАЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Касательный вектор в t к кривой $g(t)$ в многообразии группы обычно обозначают через $dg(t)/dt$ или $\dot{g}(t)$. Это, конечно, чисто формальное обозначение, если только G не является группой матриц, так как в общем случае «отношению разностей» $(g(t_1) - g(t_2))/(t_1 - t_2)$ нельзя придать никакого смысла. Тем не менее это обозначение можно использовать в согласии со многими правилами дифференцирования, причем оно часто значительно упрощает запись формул и сокращает выводы этих формул.

Пусть в G выбран элемент h и соответствующая кривая $g(t)$. Если $\dot{g}(t_0)$ — касательный вектор к $g(t)$ в t_0 , то $hg(t_0)$ следует определить в качестве касательного вектора к кривой $hg(t)$ в t_0 . Взаимно однозначное отображение группы G на себя, задаваемое как $g \rightarrow hg$ для фиксированного h , называется *левой трансляцией*¹⁾ в G . Это отображение индуцирует взаимно однозначное линейное отображение пространства касательных векторов в точке $g_0 = g(t_0)$ на пространство касательных векторов в точке hg_0 . Аналогично $\dot{g}(t_0)h$ определяется как касательный вектор к кривой $g(t)h$; поэтому *правая трансляция* $g \rightarrow gh$ в G индуцирует отображение пространства касательных векторов в точке g_0 на пространство касательных векторов в точке g_0h . Согласно этим определениям,

$$d(hg(t))/dt = h dg(t)/dt, \quad d(g(t)h)/dt = (dg(t)/dt)h. \quad (25.8.1)$$

Из ассоциативности G следует, что если h_1 и h_2 — элементы группы, а λ — касательный вектор к некоторой кривой, то $(h_1 h_2)\lambda = h_1(h_2\lambda)$ и $(h_1\lambda)h_2 = h_1(\lambda h_2)$; следовательно, все скобки можно опустить. В таком произведении любое число множителей представляет собой элемент группы, но лишь один множитель может быть касательным вектором, а значит, и произведение является касательным вектором. В общем случае $\lambda, h\lambda, \lambda h$ и

¹⁾ Либо левым сдвигом. — Прим. перев

т. д. являются векторами в различных точках G и не могут сравниваться, поскольку если λ_1 и λ_2 — векторы в различных точках, то уравнение $\lambda_1 = \lambda_2$ теряет смысл. Однако если вектор λ принадлежит Λ , а значит, является вектором в 1, то λ и $h\lambda h^{-1}$ — векторы в одной и той же точке G ; в частности, отображение $\lambda \rightarrow e^{\mu\lambda} e^{-\mu}$ есть внутренний автоморфизм $e^{Ad_{\mu}}$ алгебры Λ , рассмотренный в предыдущем параграфе.

Используя конкретную систему координат, можно без труда установить следующие соотношения:

$$d(g(t)h(t))/dt = g(t)dh(t)/dt + (dg(t)/dt)h(t), \quad (25.8.2)$$

$$d(g(t)^{-1})/dt = -g(t)^{-1}(dg(t)/dt)g(t)^{-1}, \quad (25.8.3)$$

$$de^{t\lambda}/dt = \lambda e^{t\lambda} = e^{t\lambda}\lambda. \quad (25.8.4)$$

Производные порядка выше первого, вообще говоря, выводят нас из пространства касательных векторов в другие (по-видимому, малоинтересные) пространства. Однако если $g(s, t)$ — гладкое двухпараметрическое семейство элементов в G , то величины, определяемые как

$$\alpha = \alpha(s, t) = g^{-1} \partial g / \partial s, \quad \beta = \beta(s, t) = g^{-1} \partial g / \partial t, \quad (25.8.5)$$

суть касательные векторы в точке $g(s, t)^{-1}g(s, t) = 1$ для всех s и t , т. е. всегда принадлежат Λ и могут быть продифференцированы.

Лемма. Для α и β , определенных в (25.8.5),

$$\partial \alpha / \partial t - \partial \beta / \partial s = [\alpha, \beta]. \quad (25.8.6)$$

[Замечание. В случае линейной группы G $\partial^2 g / \partial t \partial s$ определяется как матрица (в дополнение к g , $\partial g / \partial t$ и $\partial g / \partial s$) и справедливость этой леммы следует непосредственно из определений (25.8.5) после выполнения дифференцирования и учета (25.8.3); члены, содержащие $\partial^2 g / \partial t \partial s$, взаимно уничтожаются.]

Доказательство. Для того чтобы проверить (25.8.6) для заданных значений $s = s_0$, $t = t_0$, запишем $g(s, t)$ в виде $g(s_0, t_0) \tilde{g}(s, t)$; тогда α и β можно записать в виде

$$\alpha(s, t) = \tilde{g}^{-1} \partial \tilde{g} / \partial s, \quad \beta(s, t) = \tilde{g}^{-1} \partial \tilde{g} / \partial t.$$

Так как $\tilde{g}(s_0, t_0) = 1$, то разложения координат \tilde{g} и \tilde{g}^{-1} по степеням $s - s_0 = s_1$ и $t - t_0 = t_1$ начинаются с линейных членов [предполагается, что $\varphi(1) = 0$]:

$$x^i(s, t) \stackrel{\text{dei}}{=} \varphi^i(\tilde{g}(s, t)) = \lambda^i s_1 + \mu^i t_1 + A^i s_1^2 + B^i s_1 t_1 + C^i t_1^2 + \dots; \quad (25.8.7)$$

отсюда

$$y^i(s, t) \stackrel{\text{dei}}{=} \varphi^i(\tilde{g}(s, t)^{-1}) = -\lambda^i s_1 - \mu^i t_1 - A^i s_1^2 - B^i s_1 t_1 - C^i t_1^2 + \\ + a_{jk}^i (\lambda^j s_1 + \mu^j t_1) (\lambda^k s_1 + \mu^k t_1) + \dots \quad (25.8.8)$$

Поскольку $\alpha(s, t)$ есть касательный вектор к кривой, полученной из $\tilde{g}(s, t)^{-1} \tilde{g}(s', t)$ путем вариации s' при заданных s и t с последующим приравниванием $s' = s$, то (выполнив аналогичную операцию и для β) мы будем иметь

$$\begin{aligned}\alpha^i(s, t) &= \partial t^i (y(s, t), x(s', t)) / \partial s' |_{s'=s}, \\ \beta^i(s, t) &= \partial t^i (y(s, t), x(s, t')) / \partial t' |_{t'=t};\end{aligned}$$

подставив в эти выражения разложения (25.8.7), (25.8.8) и взяв соответствующие производные, мы получим

$$(\partial \alpha^i / \partial t - \partial \beta^i / \partial s)_{s=s_0, t=t_0} = a_{jk}^i (\alpha^j \beta^k - \alpha^k \beta^j)_{s=s_0, t=t_0},$$

а это и есть искомым результат в силу определения (25.3.3), (25.3.4) произведения Ли.

25.9. ЛЕММА О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ ЭКСПОНЕНТ

Лемма. Если $\lambda = \lambda(t)$ — гладкая кривая в Λ , а λ' или $\lambda'(t)$ означает $d\lambda/dt$ (которая также является кривой в Λ), то

$$e^{-\lambda} de^\lambda/dt = f(\text{Ad}_\lambda) \lambda', \quad (25.9.1)$$

где

$$f(z) = (1 - e^{-z})/z = 1 - (1/2!)z + (1/3!)z^2 - \dots \quad (25.9.2)$$

Пояснение 1. В левой части равенства (25.9.1) de^λ/dt представляет собой касательный вектор в точке e^λ группы G ; умножение этого вектора слева на $e^{-\lambda}$ переводит его в касательный вектор в точке 1 группы G , т. е. в элемент алгебры Λ .

Пояснение 2. Поскольку преобразование Ad_λ можно представить при помощи матрицы размера $n \times n$, а ряд для $f(z)$ абсолютно сходится для всех z , то $f(\text{Ad}_\lambda)$ вполне определяет линейное преобразование в Λ . [В частности, если λ и λ' коммутируют, т. е. если $\text{Ad}_\lambda \lambda' = [\lambda, \lambda'] = 0$, то правая часть (25.9.1) равна просто λ' .]

Пояснение 3. Если Λ — алгебра Ли матриц, то утверждение данной леммы в принципе можно установить, умножив степенной ряд для $e^{-\lambda(t)}$ на степенной ряд, полученный почленным дифференцированием ряда для $e^{\lambda(t)}$, и приняв во внимание некоммутативность матриц λ и λ' , раскрыв для этого скобки Ли, т. е. положив $[\lambda, \lambda'] = \lambda\lambda' - \lambda'\lambda$. Нетрудно проверить, что первые два или три члена результирующего разложения таковы, как указано в лемме.

Доказательство леммы. Определим величины

$$\alpha(s, t) = e^{-s\lambda(t)} \partial e^{s\lambda(t)} / \partial s = \lambda(t),$$

$$\beta(s, t) = e^{-s\lambda(t)} \partial e^{s\lambda(t)} / \partial t$$

так, что $\beta(0, t) = 0$, и воспользуемся леммой из § 25.8:

$$d\lambda(t)/dt - \partial \beta(s, t) / \partial s = [\lambda(t), \beta(s, t)].$$

Для фиксированного значения t это дает дифференциальное уравнение вида

$$\lambda' = d\beta(s)/ds = A\beta(s),$$

где A — матрица преобразования $\text{Ad}_{\lambda(t)}$; решением этого уравнения при начальном условии $\beta(0) = 0$ является

$$\beta(s) = [(1 - e^{-As})/A] \lambda'.$$

[Замечание. A — вырожденная матрица, поскольку $\text{Ad}_{\lambda} \lambda = 0$. Выражение $(1 - e^{-As})/A$ означает матрицу, полученную подстановкой A вместо z в целую функцию $(1 - e^{zs})/z$.] Поэтому

$$\beta(1, t = e^{-\lambda} de^{\lambda}/dt = f(\text{Ad}_{\lambda}) \lambda',$$

что и требовалось доказать.

25.10. ФОРМУЛА КЭМПБЕЛЛА — БЕЙКЕРА — ХАУСДОРФА (КБХ)

Если λ и μ — коммутирующие элементы алгебры Λ (т. е. если $[\lambda, \mu] = 0$) или коммутирующие матрицы, то $e^{\lambda} e^{\mu} = e^{\lambda + \mu}$. В общем случае мы ищем такой вектор σ , что $e^{\lambda} e^{\mu} = e^{\sigma}$. Формула КБХ дает явное выражение σ через λ , μ и скобки Ли, содержащие λ и μ , для λ и μ из некоторой окрестности начала координат Λ .

Теорема (КБХ). Пусть $\psi(z) = z \ln z / (z - 1) = 1 + \omega / (1 \cdot 2) - \omega^2 / (2 \cdot 3) + \omega^3 / (3 \cdot 4) - \dots$ для $|\omega| < 1$, где $z = 1 + \omega$; тогда для λ и μ в некоторой окрестности начала координат в Λ

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \ln(e^{\lambda} e^{\mu}) = \lambda + \int_0^1 \psi(e^{A d_{\lambda}} e^{t A d_{\mu}}) \mu dt. \quad (25.10.1)$$

Пояснение 1. Аргумент функции $\psi(\cdot)$ в этой формуле можно представить матрицей $M = I + W$ размера $n \times n$, которую можно сделать как угодно близкой к единичной матрице, полагая λ и μ достаточно малыми. [Ad_0 есть нулевая матрица, а $e^{A d_0}$ — единичная матрица I .]

Степенной ряд для $\psi(1 + \omega)$ сходится абсолютно при $|\omega| < 1$; следовательно, ряд для $\psi(I + W)$ сходится поэлементно, если каждый элемент ω_{ij} матрицы W удовлетворяет условию $|\omega_{ij}| < 1/n$, т. е. если λ и μ ограничены некоторой окрестностью \hat{N} начала координат в Λ .

Пояснение 2. Векторы λ , μ , σ представляют собой координаты (логарифмические) элементов группы e^{λ} , e^{μ} , e^{σ} ; значит, $\sigma = m(\lambda, \mu)$. Поэтому формула КБХ является формулой для $m(\cdot, \cdot)$ в логарифмических координатах и структура алгебры Λ полностью определяет умножение в группе в некоторой окрестности единицы.

Пояснение 3. Все подразумеваемые в (25.10.1) разложения могут быть осуществлены, и несколько первых членов разложе-

ния логарифма имеют вид

$$\ln(e^\lambda e^\mu) = \lambda + \mu + \frac{1}{2}[\lambda, \mu] + \frac{1}{12}[\lambda, [\lambda, \mu]] + \frac{1}{12}[\mu, [\mu, \lambda]] + \dots \quad (25.10.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Обозначим через $\sigma(t)$ функцию $\ln(e^\lambda e^{t\mu})$; далее будет найдено дифференциальное уравнение для $\sigma(t)$, решение которого дает формулу КБХ. Прежде всего, так как

$$d e^{\sigma(t)} / dt = e^\lambda e^{t\mu} \mu = e^{\sigma(t)} \mu,$$

по лемме предыдущего параграфа имеем

$$\mu = e^{-\sigma(t)} d e^{\sigma(t)} / dt = f(\text{Ad}_{\sigma(t)}) \sigma'(t), \quad (25.10.3)$$

где $f(z) = (1 - e^{-z})/z$. Если $\chi(z)$ определить как $z/(1 - e^{-z}) = (f(z))^{-1}$, то $\chi(M)f(M) = I$ для любой матрицы M , так что уравнение (25.10.3) можно разрешить относительно $\sigma'(t)$:

$$\sigma'(t) = \chi(\text{Ad}_{\sigma(t)}) \mu. \quad (25.10.4)$$

Согласно определениям $\chi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$, имеем $\chi(z) = \psi(e^z)$; отсюда

$$\sigma'(t) = \psi(e^{\text{Ad}_{\sigma(t)}}) \mu.$$

Это дифференциальное уравнение можно упростить, используя лемму из § 25.7, которая гласит (в обозначениях § 25.8), что отображение e^{Ad_σ} есть отображение $\mathbf{v} \rightarrow e^\sigma \mathbf{v} e^{-\sigma}$; в частности,

$$e^{\text{Ad}_{\sigma(t)}} \mathbf{v} = e^{\sigma(t)} \mathbf{v} e^{-\sigma(t)} = e^\lambda e^{t\mu} \mathbf{v} e^{-t\mu} e^{-\lambda} = e^{\text{Ad}_\lambda} e^{t \text{Ad}_\mu} \mathbf{v}.$$

Теперь неизвестная функция стоит только в левой части, и формула КБХ получается интегрированием от $t=0$ до $t=1$ с учетом условий

$$\sigma(0) = \ln e^\lambda = \lambda, \quad \sigma(1) = \ln e^\lambda e^\mu = \sigma.$$

Так как Ad_λ — преобразование $\mathbf{v} \rightarrow [\lambda, \mathbf{v}]$, то элементы матрицы Ad_λ являются линейными функциями компонент вектора λ . Поэтому матричные элементы преобразований $\exp\{\text{Ad}_\lambda\}$ и $\exp\{t \text{Ad}_\mu\}$ представляют собой аналитические функции компонент векторов λ и μ . Из аналитичности функции $\psi(z)$ при $|z-1| < 1$ следует, что для λ и μ , принадлежащих окрестности \hat{N} начала координат в Λ , о которой говорилось в пояснении 1, компоненты вектора $\sigma = \ln e^\lambda e^\mu$ суть аналитические функции компонент λ и μ ; благодаря аналитическому продолжению эти функции аналитичны при всех таких λ и μ , для которых определен логарифм.

Когда используются логарифмические координаты λ^i , $\ln e^\lambda e^\mu$ представляет собой просто функцию умножения, которая ранее обозначалась через $\mathfrak{m}(\lambda, \mu)$. От этой функции требовалась только принадлежность классу C^4 , теперь же видно, что в случае логарифмических координат она должна быть аналитической. В этих координатах функция обращения $l(\cdot)$ задается равенством $l(\lambda) = -\lambda$ и, значит, также аналитична.

УПРАЖНЕНИЕ

Выразите матричные элементы Ad_λ через компоненты λ^i вектора λ , если задан базис e_1, \dots, e_n в Λ , и соответствующие структурные постоянные C_{jk}^i .

25.11. ТРАНСЛЯЦИИ КАРТ. СОГЛАСОВАННОСТЬ. G КАК АНАЛИТИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ

В этом параграфе выбирается некоторая базисная (основная) карта с логарифмическими координатами в ней, а другие карты будут получены из нее при помощи трансляций в группе. Чтобы несколько упростить эту работу, выберем базисную карту столь малой, что имеет место ряд полезных свойств.

Во-первых, пусть U — окрестность 1 в группе G , такая, что отображение $e^\lambda \rightarrow \lambda$ в алгебру Ли взаимно однозначно, благодаря чему в U можно использовать логарифмические координаты. Во-вторых, пусть V — достаточно малая подокрестность в U (открытое подмножество множества U), также содержащая 1 и такая, что если g и h принадлежат V , то gh принадлежит U и $\ln gh$ задается формулой КБХ. Наконец, пусть W — такая подокрестность в V , что если g и h принадлежат W , то gh принадлежит V , в то время как g^{-1} и h^{-1} принадлежат W (это обеспечивает использование формулы КБХ для тройного произведения вида $g_1 g_2^{-1} g_3$ и т. п.), и пусть N — образ W в Λ , т. е. $N = \{\ln g: g \in W\}$. В дальнейшем $\{W, \ln, N\}$ будет рассматриваться в качестве базисной карты.

Вспомним, что для любого фиксированного элемента a из G взаимно однозначное отображение группы G на себя, задаваемое как $g \rightarrow ag$, называется *левой трансляцией* на a , а отображение $g \rightarrow ga$ называется *правой трансляцией*. Для любого фиксированного a из G левотранслированная карта $\{aW, {}_a\varphi, N\}$ определяется следующим образом: прежде всего подмножество aW группы G определяется как

$$aW = \{ag_i: g_i \in W\};$$

тогда для каждого $g = ag_i \in aW$ функция $a\varphi(g)$ есть $\ln g_i$. Заметим, что образом aW при отображении $g \rightarrow a\varphi(g)$ является то же самое открытое множество N в координатном пространстве Λ , которое представляет собой образ W при отображении $g \rightarrow \ln g$. Аналогично получается правотранслированная карта $\{Wa, \varphi_a, N\}$.

Теорема 1. Любые две карты, полученные при помощи трансляции базисной карты $\{W, \ln, N\}$, согласованы (в действительности аналитически согласованы).

Пояснение. Если a лежит в W , то левая (как и правая) трансляция на a есть гомеоморфизм в данной базисной карте, насколько это определено, потому что координаты элемента ag суть непрерывные

(даже аналитические) функции координат элемента g согласно формуле КБХ, а координаты g суть непрерывные функции координат ag , так как $g = a^{-1}(ag)$. Следовательно, любая транслированная карта согласована с базисной картой, и будет показано, что любые две транслированные карты также согласованы друг с другом. Таким образом, G становится многообразием, и теорема 2 (см. ниже) показывает, что эти трансляции являются гомеоморфизмами во всем G .

Доказательство теоремы 1. Сначала рассмотрим карты, полученные левой трансляцией базисной карты соответственно на a и b . Если пересечение $aW \cap bW$ пусто, то карты автоматически согласованы. В противоположном случае следует доказать, что это пересечение при помощи $a\Phi$ (а также

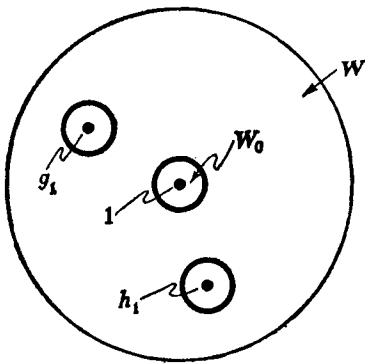


Рис. 25.1.

и $b\Phi$) отображается на открытое множество в Λ (см. § 23.2). Иначе говоря, если g — любая точка данного пересечения, так что $g = ag_1 = bh_1$, где g_1 и h_1 принадлежат W , то нужно показать, что g принадлежит некоторому подмножеству, которое является *открытым* подмножеством каждой карты в соответствии с топологией этой карты. Поэтому рассмотрим близкий к g элемент $g' = ge$, так что e близок к 1 (насколько близок, сейчас будет ясно). Тогда $g' = ag_1e = bh_1e$. Поскольку W — открытое множество, g_1 и h_1 являются внутренними точками. В силу непрерывной зависимости координат элементов $g'_1 = g_1e$ и $h'_1 = h_1e$ от координат элемента e существует такая окрестность W_0 единицы, что для $e \in W_0$ g'_1 и h'_1 принадлежат W (см. рис. 25.1). Множества $g_1W_0 = \{g_1e : e \in W_0\}$ и $h_1W_0 = \{h_1e : e \in W_0\}$ представляют собой окрестности в W соответственно элементов g_1 и h_1 , т. е. *открытые* множества, содержащие соответственно g_1 и h_1 , так как, согласно приведенному выше пояснению, левые трансляции на g_1 и h_1 являются гомеоморфизмами в W . Следовательно, поскольку $g = ag_1 = bh_1$, gW_0 является открытым множеством в топологии каждой карты и содержится в обеих картах. Таким образом, первое из условий согласованности карт удовлетворено.

Далее нужно доказать, что координаты $a\Phi(g) = \ln g_1$ и $b\Phi(g) = \ln h_1$ аналитически зависят друг от друга для всех элементов g , которые можно представить как в виде ag_1 , так и в виде bh_1 , где g_1 и h_1 принадлежат W . Из того что $b^{-1}a = h_1g_1^{-1}$, а h_1 и g_1 принадлежат W , следует, что $b^{-1}a$ находится в V (даже если сами a и b не находятся в окрестности U , где определены логарифмические координаты). Следовательно, $\ln h_1$, равный $\ln((b^{-1}a)g_1)$, зависит аналитически от $\ln g_1$ согласно формуле КБХ. Аналогично $\ln g_1$ зависит аналитически от $\ln h_1$. Наконец, аналогичными рассуждениями можно показать согласованность двух правотранслированных карт, а также согласованность карт, одна из которых является правотранслированной, а другая — левотранслированной.

Теорема 2. Если группа G покрывается транслированными картами, как описано выше, то справедлива аксиома отделимости Хаусдорфа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a и b — две произвольные точки группы; предположим, что они неотделимы в том смысле, что любая окрестность точки a и любая окрестность точки b имеют непустое пересечение. Следует доказать, что в таком случае $a=b$. Обозначим через $\|\cdot\|$ норму в алгебре Λ , например евклидову норму относительно некоторого базиса $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ в Λ . Пусть для любого $\delta > 0$ U_δ — окрестность единицы, содержащая те элементы g и W , для которых $\|\ln g\| < \delta$. Тогда aU_δ и bU_δ являются окрестностями элементов a и b ; возьмем в качестве g элемент из $aU_\delta \cap bU_\delta$, так что $g=av=b\eta$, где e и η принадлежат U_δ . Тогда $b^{-1}a=\eta e^{-1}$. Поскольку $\ln \eta e^{-1}$ определяется при помощи формулы КБХ через $\ln \eta$ и $\ln e^{-1}=-\ln e$, причем последние можно сделать сколь угодно малыми при подходящем выборе δ , то видно, что $\ln \eta e^{-1}$ равен нулю; но это значит, что и $\ln b^{-1}a$ равен нулю, откуда $b^{-1}a=1$, что и требовалось доказать.

Таким образом, группа G , для которой существует покрытие транслированными картами (а в дальнейшем мы будем это допускать), является вещественным аналитическим многообразием. Как и в гл. 23, мы предполагаем, что группа G может быть покрыта счетной совокупностью таких карт.

Лемма. *Левая или правая трансляция есть аналитическое отображение во всей группе G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левая трансляция $g \rightarrow ag$ отображает карту $\{bW, \psi\Phi, N\}$ (b произвольно) на карту $\{abW, ab\Phi, N\}$; соответствующее координатное отображение тождественно, ибо если $g=bh$, то

$$\psi\Phi(g) = ab\Phi(ag) = \ln h.$$

Аналитичность подобного отображения в правотранслированных картах следует из согласованности карт.

Теорема 3. *Произведение элементов и обратный к элементу аналитичны во всей группе G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО для произведения. Пусть a и b — произвольные элементы G . Обозначим через $a\Phi$, $\psi\Phi$, $ab\Phi$ координаты в картах, полученных из базисной карты при помощи левых трансляций на a , b и ba . Будет показано, что для g и h , близких к 1 , координата $ab\Phi$ элемента $(ag)(bh)$ зависит аналитически от координаты $a\Phi$ элемента ag и от координаты $\psi\Phi$ элемента bh . Тогда в силу аналитической согласованности всех транслированных карт такое же заключение следует для любых трех карт, в которых соответственно расположены a , b и ab . Далее,

$$ab\Phi(agbh) = ab\Phi(abb^{-1}gbh) = \ln(b^{-1}gbh);$$

поэтому нужно показать аналитическую зависимость последнего члена данного равенства от $\ln g$ и $\ln h$. Элемент $b^{-1}gb$ получается из элемента g при помощи левой трансляции на b^{-1} , которая осуществляется после (или до) правой трансляции на b , причем $b^{-1}gb=1$ для $g=1$; следовательно, для g вблизи 1 $\ln(b^{-1}gb)$ существует и аналитически зависит от $\ln g$ согласно доказанной выше лемме. По формуле КБХ $\ln(b^{-1}gbh)$ зависит аналитически от $\ln(b^{-1}gb)$ и $\ln h$, откуда следует утверждение теоремы относительно произведения.

Доказательство аналитичности обратного элемента остается читателю в качестве упражнения.

Теорема 4. *Главная компонента многообразия G , т. е. компонента, содержащая единицу, порождается любой окрестностью*

W_0 единицы. Иначе говоря, любой элемент g в этой компоненте можно представить в виде конечного произведения $g = g_1 g_2 \dots$, где каждый g_i принадлежит W_0 . (Определение компоненты многообразия см. в § 23.6.)

Доказательство. Пусть G_0 — подгруппа G , порожденная множеством $W_0 \cap W_0^{-1}$, где W_0^{-1} — множество, состоящее из элементов, обратных к элементам множества W_0 . Множество $W_{00} = W_0 \cap W_0^{-1}$ открыто и содержит 1. Ясно, что G_0 связна, поскольку каждый из множителей g_1, g_2, \dots в конечном произведении $g = g_1 g_2 \dots$ можно по очереди перевести гладким образом в 1, а затем удалить из этого произведения, так что как следствие элемент g будет связан с 1. Теперь будет показано, что множество G_0 является открытым и замкнутым одновременно. Поэтому, в согласии с § 23.6, это множество представляет собой целую компоненту многообразия G . [Поскольку $W_{00} \subset W_0$, можно также говорить, что G_0 порождено множеством W_{00} .] Если $g = g_1 g_2 \dots g_k$ — любой элемент G_0 , то открытое множество gW_{00} , содержащее g , состоит из элементов вида $g_1 g_2 \dots g_k g_{k+1}$, причем g_{k+1} также принадлежит W_{00} ; поэтому gW_{00} содержится в G_0 и множество W_0 открыто. С другой стороны, если g' — любая предельная точка G_0 , то множество $g'W_{00} = g'W_{00}^{-1} = \{g'h^{-1} : h \in W_{00}\}$ является окрестностью элемента g' и, значит, содержит элемент вида $g_1 \dots g_k$; поэтому $g_k = g'h^{-1}$ для некоторого $h \in W_{00}$; следовательно, $g' = g_1 \dots g_k h$ содержится в G_0 , т. е. G_0 — замкнутое множество, что и требовалось доказать.

Замечания. Левая трансляция есть гомеоморфизм во всем многообразии G . (Это отображение взаимно однозначно по теоретико-групповым соображениям и непрерывно, даже аналитично, по приведенной выше лемме.) Поэтому каждый левый смежный класс aG_0 подгруппы G_0 группы G есть компонента многообразия G , и наоборот. Рассматривая правые трансляции, мы приходим к выводу, что каждая компонента является также и правым смежным классом; поэтому G_0 представляет собой нормальную подгруппу.

Количество компонент счетно, поскольку мы допустили, что многообразие может быть покрыто счетной совокупностью карт. Рассматриваемая теория не устанавливает никаких ограничений на природу факторгруппы, потому что если G_0 — связная группа Ли, а K — любая абстрактная счетная группа, то прямое произведение $G_0 \times K$ можно рассматривать в качестве группы Ли G , имеющей по одной компоненте на каждый элемент из K , и тогда $G/G_0 \cong K$. По этой причине факторгруппа G/G_0 не представляет интереса, и многие авторы при определении группы Ли включают требование связности. Мы предпочитаем не исключать из рассмотрения группы, подобные $O(3)$.

25.12. ГОМОМОРФИЗМЫ АЛГЕБРЫ ЛИ

Теория гомоморфизмов алгебр Ли и групп Ли, изложенная в этом и в двух следующих параграфах, весьма сходна с теорией гомоморфизмов для групп, изложенной в § 18.5—18.8.

Грубо говоря, гомоморфизм есть отображение (в общем случае переводящее много элементов в один) некоторой математической структуры на менее сложную структуру того же вида, такое, что любое соотношение, справедливое для элементов первой структуры, также справедливо и для образов этих элементов во второй структуре. Некоторые из этих соотношений, вообще говоря, становятся тривиальными во второй структуре (например, $1 \circ 1 = 1$ или $0 + 0 = 0$), в то время как остающиеся соотношения можно рассматривать как проявление некоторых основных свойств первой структуры без учета тонких деталей. Точно так же, как для групп, такое отображение существует в том и только том случае, когда первая структура содержит некоторый особый вид подструктуры (например, нормальную подгруппу), которая может служить ядром этого отображения; теория показывает, как при заданной подструктуре воссоздать рассматриваемое отображение, сначала образовав так называемое частное или факторструктуру (например, факторгруппу), затем построив так называемый естественный гомоморфизм первой структуры на факторструктуру и, наконец, установив эквивалентность этого гомоморфизма первоначальному гомоморфизму.

Эта программа действий применима непосредственно и к алгебрам Ли. Любая идея, имеющая отношение к группам Ли, находит параллель в соответствующих алгебрах Ли, и эта взаимосвязь между группами и их алгебрами обеспечивает мощные методы исследования этих групп.

Если Λ и $\bar{\Lambda}$ — вещественные алгебры Ли, то гомоморфизмом $\Lambda \rightarrow \bar{\Lambda}$ является отображение ψ алгебры Λ в алгебру $\bar{\Lambda}$, которое сохраняет все операции алгебры Ли; иначе говоря, если λ и μ принадлежат Λ , а $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$, то $\psi(a\lambda + b\mu) = a\psi(\lambda) + b\psi(\mu)$ и $\psi([\lambda, \mu]) = [\psi(\lambda), \psi(\mu)]$. Это определение (с заменой \mathbb{R} на \mathbb{C}) имеет место и в случае комплексной алгебры Ли.

Пояснение. На самом деле нет необходимости заранее допускать, что $\bar{\Lambda}$ представляет собой алгебру Ли; обязательно лишь, чтобы $\bar{\Lambda}$ была структурой, в которой определены операции $\lambda + \mu$, $a\lambda$ и $[\lambda, \mu]$. Однако та часть структуры $\bar{\Lambda}$, на которую отображается Λ при помощи указанного гомоморфизма, т. е. образ $\psi(\Lambda)$, с необходимостью должна быть алгеброй Ли.

Если отображение ψ взаимно однозначно и является отображением на всю $\bar{\Lambda}$, то оно есть *изоморфизм* (символически $\Lambda \cong \bar{\Lambda}$); если к тому же оно является отображением Λ на себя (т. е. $\bar{\Lambda} = \Lambda$), то мы имеем *автоморфизм*.

Линейное подпространство A алгебры Λ называется *подалгеброй*, если $[\lambda, \mu] \in A$ для всех $\lambda, \mu \in A$; если, более того, $[\lambda, \mu] \in A$

для всех $\lambda \in A$ и для всех $\mu \in \Lambda$, то A есть идеал алгебры Λ . Алгебра Ли Λ размерности большей 1 называется *простой* в том случае, когда она не содержит никаких других идеалов, кроме $\{0\}$ и Λ . (Причина, по которой в этом определении исключены одномерные алгебры, выяснится в § 25.16.) Легко видеть, что ядро гомоморфизма ψ , а именно множество $\{\lambda: \psi(\lambda) = 0\}$, есть идеал в Λ . Следовательно, альтернативное определение состоит в том, что алгебра Ли размерности большей 1 *проста*, если она не может быть гомоморфно отображена на любую, менее сложную алгебру, кроме тривиальной алгебры $\{0\}$.

Идеалы играют почти ту же роль для алгебр Ли, какую играют нормальные подгруппы для групп.

Если Λ_0 — подпространство Λ , то отношение $\lambda \equiv \mu \pmod{\Lambda_0}$, определенное в том смысле, что $\lambda - \mu$ принадлежит Λ_0 , является отношением эквивалентности, разбивающим Λ на непересекающиеся классы, называемые *классами вычетов по модулю Λ_0* . Если для любого фиксированного $\lambda \in \Lambda$ обозначить через $\bar{\lambda}$ класс вычетов $\{\lambda + \mu: \mu \in \Lambda_0\}$ и определить $a\bar{\lambda} = \overline{a\lambda}$ и $\bar{\lambda} + \bar{\mu} = \overline{\lambda + \mu}$, то множество классов вычетов образует линейное векторное пространство, называемое *факторпространством* алгебры Λ по модулю Λ_0 . Мы покажем, что если Λ_0 — идеал, то факторпространство можно интерпретировать как алгебру Ли.

Теорема 1. Пусть Λ_0 — подпространство алгебры Ли Λ . Для каждого выбора λ_1 и μ_1 в Λ множество

$$\{[\lambda, \mu]: \lambda - \lambda_1 \in \Lambda_0, \mu - \mu_1 \in \Lambda_0\}$$

содержится в единственном классе вычетов (а именно в классе $[\bar{\lambda}_1, \bar{\mu}_1]$) тогда и только тогда, когда Λ_0 есть идеал в Λ . В этом случае если произведение Ли двух классов вычетов $\bar{\lambda}_1$ и $\bar{\mu}_1$ определить равенством $[\bar{\lambda}_1, \bar{\mu}_1] = \overline{[\lambda_1, \mu_1]}$, то факторпространство алгебры Λ по модулю Λ_0 является алгеброй Ли, которая обозначается через Λ/Λ_0 и называется факторалгеброй алгебры Λ по модулю Λ_0 . Отображение $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$ есть гомоморфизм, называемый естественным гомоморфизмом Λ на Λ/Λ_0 и обозначаемый через ψ_n .

Пояснение. Рассмотрение коммутативного случая, в котором любое подпространство алгебры Λ является идеалом, а любое произведение Ли $[\lambda, \mu]$ равно нулю, показывает, что множество элементов $[\lambda, \mu]$, о котором говорится в формулировке теоремы, может быть лишь частью класса вычетов $[\bar{\lambda}_1, \bar{\mu}_1]$, который совпадает с Λ_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. (1) Допустим, что Λ_0 — идеал. В общем случае

$$[\lambda, \mu] - [\lambda_1, \mu_1] = [\lambda - \lambda_1, \mu] + [\lambda_1, \mu - \mu_1];$$

следовательно, если $\lambda - \lambda_1$ и $\mu - \mu_1$ принадлежат Λ_0 , то и оба члена из правой части принадлежат Λ_0 ; поэтому $[\lambda, \mu]$ и $[\lambda_1, \mu_1]$ находятся в одном и том же классе вычетов, как и утверждалось. (2) Обратно, если для произвольных λ и μ $[\lambda, \mu + \sigma]$ всегда содержится в том же классе вычетов, что и $[\lambda, \mu]$, для любого $\sigma \in \Lambda_0$, то $[\lambda, \sigma] \in \Lambda_0$, а отсюда следует, что Λ_0 — идеал. (3) Определение произведения двух классов вычетов посредством формулы $[\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2] = [\lambda_1, \lambda_2]$ показывает, что отображение $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$ есть гомоморфизм, а тогда из пояснения, приведенного после определения гомоморфизма, следует, что факторпространство является алгеброй Ли.

Теорема 2 (о гомоморфизмах). *Если Λ_0 — ядро гомоморфизма ψ алгебры Λ на алгебру $\bar{\Lambda}$, то Λ_0 есть идеал в Λ (как уже отмечалось) и $\Lambda/\Lambda_0 \cong \bar{\Lambda}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через ψ_n естественный гомоморфизм Λ на Λ/Λ_0 . Из равенства $\psi_n(\lambda) = \psi_n(\lambda_1)$ следует принадлежность λ и λ_1 одному классу вычетов, т. е. $\lambda - \lambda_1 \in \Lambda_0$; отсюда $\psi(\lambda - \lambda_1) = 0$ по определению Λ_0 как ядра гомоморфизма ψ и, значит, $\psi(\lambda) = \psi(\lambda_1)$. Поэтому $\psi\psi_n^{-1}$ есть взаимно однозначное отображение множества Λ/Λ_0 классов вычетов на $\bar{\Lambda}$; обозначим это отображение через χ . Читателю предоставляется возможность завершить доказательство, проверив, что χ линейно и удовлетворяет уравнению $\chi([\bar{\lambda}, \bar{\mu}]) = [\chi(\bar{\lambda}), \chi(\bar{\mu})]$, где $\bar{\lambda}$ и $\bar{\mu}$ — произвольные классы вычетов в Λ по модулю Λ_0 , т. е. произвольные элементы множества Λ/Λ_0 .

25.13. ГОМОМОРФИЗМЫ ГРУППЫ ЛИ

В случае группы Ли гомоморфизм должен сохранять не только все алгебраические отношения, но также все локальные топологические и аналитические свойства, связанные со структурой многообразия.

Если G и \bar{G} — группы Ли, то отображение Ψ группы G в группу \bar{G} называется *гомоморфизмом групп Ли*, если:

1) это гомоморфизм в теоретико-групповом смысле:

$$\Psi(gh) = \Psi(g)\Psi(h), \quad \Psi(g^{-1}) = \Psi(g)^{-1};$$

2) это непрерывное отображение; иначе говоря, если φ и $\bar{\varphi}$ — любые координатные системы в G и \bar{G} соответственно, то каждая компонента вектора

$$y = \varphi(\Psi(\varphi^{-1}(x))) \quad (25.13.1)$$

является непрерывной функцией компонент вектора x для всех x , для которых данное выражение определено.

Замечание 1. В общем случае это отображение переводит много элементов в один; в действительности \bar{G} может иметь большую размерность, чем \bar{G} .

Замечание 2. Типичным отношением в G , которое сохраняется в \bar{G} и не имеет теоретико-группового характера, является сходимость последовательности элементов g_1, g_2, \dots к пределу h (что

означает сходимость в карте, содержащей h , координат элементов g_1, g_2, \dots к координатам h); тогда вследствие непрерывности функций (25.13.1) последовательность $\Psi(g_1), \Psi(g_2), \dots$ сходится к $\Psi(h)$ в \bar{G} . Аналогично образ кривой в G при гомоморфизме представляет собой кривую в \bar{G} .

Замечание 3. Свойство Ψ быть непрерывным отображением инвариантно относительно добавления или вычеркивания согласованных карт в одном или в обоих многообразиях G и \bar{G} , потому что если x' и y' суть координаты в любых двух картах, то схема

$$x' \leftrightarrow x \rightarrow y \leftrightarrow y'$$

показывает, что координата y' непрерывно зависит от x' , если только она определена при помощи композиции трех указанных отображений.

Замечание 4. Если Ψ является взаимно однозначным отображением G на \bar{G} и, кроме того, Ψ^{-1} непрерывно, то Ψ представляет собой *изоморфизм групп Ли*.

Теорема 1. Пусть Ψ — гомоморфизм группы Ли G (т. е. непрерывный гомоморфизм) на \bar{G} , и пусть Λ и $\bar{\Lambda}$ — алгебры Ли групп G и \bar{G} . Тогда отображение Ψ , будучи выражено через логарифмические координаты, является локальным гомоморфизмом алгебры Ли Λ на $\bar{\Lambda}$.

Замечание. Как очевидное следствие получается, что в силу линейности отображения Ψ в этих координатах любой гомоморфизм группы Ли локально является аналитическим отображением; оно аналитично также и глобально, потому что если $g = g_0 h$ для произвольного g_0 , то элемент $\Psi(g) = \Psi(g_0) \Psi(h) = \Psi(g_0) \Psi(g_0^{-1} g)$ аналитичен в g для h из некоторой окрестности единицы в силу аналитичности произведений и обратных элементов в каждой из рассматриваемых групп.

Доказательство теоремы 1. Для любого элемента λ , достаточно близкого к началу координат в Λ , мы можем определить элемент из $\bar{\Lambda}$ посредством координаты

$$\bar{\lambda} = \ln(\Psi(e^\lambda)).$$

Нам нужно показать, что отображение $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$ линейно и переводит $[\lambda, \mu]$ в $[\bar{\lambda}, \bar{\mu}]$. Сначала мы покажем, что оно преобразует $t\lambda$ в $t\bar{\lambda}$ для вещественного t , т. е. $t\bar{\lambda} = \bar{t\lambda}$. Для фиксированного λ множество $\Psi(e^{t\lambda})$, $t \in \mathbb{R}$, есть однопараметрическая подгруппа группы G , которая включает элемент e^λ ; следовательно, для каждого t существует вещественное число $s = f(t)$, такое, что

$$\Psi(e^{t\lambda}) = e^{s\bar{\lambda}} = e^{f(t)\bar{\lambda}},$$

где $f(t)$ — непрерывная функция в силу непрерывности Ψ , причем $f(0)=0$ и $f(1)=1$. Поскольку Ψ отображает произведения на произведения, мы имеем

$$\begin{aligned} e^{f(t+s)\lambda} &= \Psi(e^{(t+s)\lambda}) = \Psi(e^{t\lambda} e^{s\lambda}) = \\ &= \Psi(e^{t\lambda}) \Psi(e^{s\lambda}) = e^{f(t)\lambda} e^{f(s)\lambda} = e^{[f(t)+f(s)]\lambda}. \end{aligned}$$

Отсюда $f(t+s) = f(t) + f(s)$, но лишь непрерывные функции, обладающие этим свойством, линейны. Учитывая, что $f(0)=0$, $f(1)=1$, мы получаем $f(t) = t$, что и требовалось показать. Теперь к обеим частям равенства $\Psi(e^{s\lambda} e^{t\mu}) = e^{s\bar{\lambda}} e^{t\bar{\mu}}$ применим формулу КБХ, что дает

$$\overline{s\lambda + t\mu + \frac{1}{2}st[\lambda, \mu] + \dots} = s\bar{\lambda} + t\bar{\mu} + \frac{1}{2}st[\bar{\lambda}, \bar{\mu}] + \dots \quad (25.13.2)$$

для всех s и t . Пусть $s = \epsilon s'$, $t = \epsilon t'$. Учитывая, что $\epsilon \bar{\nu} = \epsilon \bar{\nu}$, можем сократить обе части (25.13.2) на множитель ϵ . Тогда при $\epsilon \rightarrow 0$ квадратичные и более высокого порядка члены обратятся в нуль; поэтому

$$\overline{s'\lambda + t'\mu} = s'\bar{\lambda} + t'\bar{\mu},$$

а это устанавливает полную линейность отображения $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$. В силу этого можно опустить линейные члены в обеих частях (25.13.2), и, рассуждая аналогично предыдущему, мы увидим, что

$$[\bar{\lambda}, \bar{\mu}] = \overline{[\lambda, \mu]},$$

т. е. что отображение $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$ есть гомоморфизм алгебры Ли, а это и требовалось доказать.

Эта теорема не имеет глобального обращения, а лишь локальное, и, чтобы сформулировать это обращение, нам понадобится новое определение. Если U — окрестность единицы группы Ли G , то аналитическое отображение Ψ окрестности U в группу Ли \bar{G} , такое, что $\Psi(gh) = \Psi(g)\Psi(h)$, когда g, h и gh принадлежат U , называется *локальным гомоморфизмом* G в \bar{G} . Если обратное отображение также является локальным гомоморфизмом, т. е. оно единственно и аналитично в некоторой окрестности единицы в \bar{G} , то Ψ есть *локальный изоморфизм*. Если, кроме того, $G = \bar{G}$, то Ψ — *локальный автоморфизм* G .

Теперь мы можем сформулировать обращение теоремы 1.

Теорема 2. Если Λ и $\bar{\Lambda}$ — алгебры Ли групп Ли G и \bar{G} , то любой гомоморфизм алгебры Ли $\psi: \Lambda \rightarrow \bar{\Lambda}$ индуцирует локальный гомоморфизм $\Psi: G \rightarrow \bar{G}$, задаваемый при помощи экспоненциального отображения, а именно $\Psi(e^\lambda) = e^{\psi(\lambda)}$ для e^λ в достаточно малой окрестности единицы в G .

Доказательство. Использование формулы КБХ дает

$$\Psi(e^\lambda e^\mu) = \Psi(e^{\lambda + \mu + (1/2)[\lambda, \mu] + \dots}) = e^{\Psi(\lambda + \mu + (1/2)[\lambda, \mu] + \dots)},$$

в силу того, что Ψ является гомоморфизмом алгебры Ли, последнее выражение равно

$$e^{\Psi(\lambda) + \Psi(\mu) + (1/2)[\Psi(\lambda), \Psi(\mu)] + \dots},$$

а так как формула КБХ справедлива также и в \bar{G} , то предыдущее выражение равно $e^{\Psi(\lambda)}e^{\Psi(\mu)}$, т. е. $\Psi(e^{\lambda}e^{\mu}) = \Psi(e^{\lambda})\Psi(e^{\mu})$, и теорема доказана.

Как следствие этой теоремы получаем, что если $\psi: \Lambda \rightarrow \bar{\Lambda}$ является изоморфизмом алгебры Ли, то Ψ есть локальный изоморфизм группы Ли; если, кроме того, $G = \bar{G}$ и $\Lambda = \bar{\Lambda}$, то Ψ — локальный автоморфизм группы G .

Следующая теорема сформулирует условия, при которых локальный гомоморфизм может быть расширен до глобального. Этот вопрос возник в § 21.1, где было показано, что в квантовой механике могут появиться локальные представления групп, подобных $SO(3)$ и \mathcal{L}_p . Следует напомнить, что группы $SO(3)$ и $SU(2)$ только локально, но не глобально изоморфны и что группы \mathcal{L}_p и $SL(2, \mathbb{C})$ тоже изоморфны лишь локально. В качестве второго примера примем за группу G двумерную группу тора, рассматриваемую как группа матриц вида

$$\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix}.$$

Соответствующая ей алгебра Ли Λ представляет собой коммутативную алгебру Ли матриц вида

$$\alpha \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Любое линейное преобразование

$$\alpha \rightarrow a\alpha + b\beta, \quad \beta \rightarrow c\alpha + d\beta,$$

где a, b, c, d вещественны и $ad - bc \neq 0$, является автоморфизмом алгебры Ли Λ . Соответствующий локальный автоморфизм G есть

$$\Psi: \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{i(a\alpha + b\beta)} & 0 \\ 0 & e^{i(c\alpha + d\beta)} \end{pmatrix};$$

это справедливо только для достаточно малых α и β , поскольку, например, элемент

$$g = \begin{pmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

обладает тем свойством, что g^2 равен единице группы G , а это свойство не сохраняется при Ψ , кроме случаев специально подобранных чисел a и b .

Теорема 3. Пусть Ψ — локальный гомоморфизм группы Ли G в группу Ли \bar{G} , определенный в некоторой окрестности U единицы в G . Тогда:

(а) если существует расширение $\hat{\Psi}$ отображения Ψ до отображения всей группы G , которое является гомоморфизмом в смысле

элементарной теории групп, то $\hat{\Psi}$ непрерывно и поэтому аналитично во всей G , т. е. является гомоморфизмом группы Ли;

(б) если G — связная группа, то существует не более одного гомоморфизма группы Ли $\hat{\Psi}$, который является расширением Ψ ;

(в) если G односвязна, то существует в точности одно такое расширение $\hat{\Psi}$.

Доказательство части (а). Для произвольного фиксированного g_0 положим $g = g_0 h$, где h принадлежит окрестности U , так что отображение $h \rightarrow \Psi(h)$ аналитично. Тогда $\hat{\Psi}(g) = \hat{\Psi}(g_0) \Psi(h)$, но произведения и обратные элементы аналитичны всюду в обеих группах (§ 25.11); поэтому h аналитичен в g и образ $\hat{\Psi}(g)$ аналитичен в g .

Доказательство части (б). Любой элемент g из G можно представить в виде $g_1 g_2 \dots g_k$, где все множители принадлежат U ; следовательно, если $\hat{\Psi}$ — любое расширение гомоморфизма Ψ , то $\hat{\Psi}(g) = \hat{\Psi}(g_1) \dots \hat{\Psi}(g_k) = \Psi(g_1) \dots \Psi(g_k)$, т. е. образ $\hat{\Psi}(g)$ полностью определяется при помощи Ψ ; значит, любые два таких расширения должны быть согласованы для каждого g .

Доказательство части (в). Как это иногда делалось и ранее, допустим, что V — подокрестность окрестности U , содержащая единицу и такая, что если g и h принадлежат V , то g^{-1} и h^{-1} также принадлежат V , а gh и hg содержатся в U . Будем строить отображение $\hat{\Psi}$. Пусть h и k — элементы группы G , соединенные гладкой кривой \mathcal{C} . Разобьем кривую \mathcal{C} на малые сегменты при помощи точек (элементов группы) g_0, g_1, \dots, g_l так, что $\bar{g}_0 = h$ и $g_l = k$, а $g_i^{-1} g_{i+1}$ всегда содержится в V . Рассмотрим элемент группы \bar{G}

$$\bar{g} = \Psi(g_0^{-1} g_1) \Psi(g_1^{-1} g_2) \dots \Psi(g_{l-1}^{-1} g_l);$$

если бы гомоморфизм Ψ был глобальным, то \bar{g} был бы равен $\Psi(h^{-1}k)$. Из определения элемента \bar{g} видно, что он не изменяется при измельчении данного разбиения кривой \mathcal{C} ; поэтому, так как два любых разбиения при измельчении стремятся к одному и тому же, \bar{g} зависит только от h, k и от кривой \mathcal{C} . Мы покажем сейчас, что \bar{g} не зависит от кривой \mathcal{C} при заданных h и k . В самом деле, пусть $\tilde{\mathcal{C}}$ — другая кривая, связывающая h с k , близкая к \mathcal{C} и подвергнутая разбиению точками $\tilde{g}_0 (= g_0 = h), \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_l (= g_l = k)$, причем такими, что \tilde{g}_i близка к g_i для каждого i . Рассмотрим элемент

$$\bar{\tilde{g}} = \Psi(g_0^{-1} \tilde{g}_1) \Psi(\tilde{g}_1^{-1} \tilde{g}_2) \dots \Psi(\tilde{g}_{l-1}^{-1} g_l).$$

Этот элемент $\bar{\tilde{g}}$ может быть получен из \bar{g} путем введения подходящих множителей и последующей свертки с другими множителями, составляющими \bar{g} ; например, вводя взаимно сокращающиеся множители

$$\Psi(g_1^{-1} \tilde{g}_1) \Psi(\tilde{g}_1^{-1} g_1) \quad \text{и} \quad \Psi(g_2^{-1} \tilde{g}_2) \Psi(\tilde{g}_2^{-1} g_2)$$

соответственно между первым и вторым множителями, а также между вторым и третьим множителями в \bar{g} , мы обнаруживаем, что

$$\Psi(\tilde{g}_1^{-1} g_1) \Psi(g_1^{-1} g_2) \Psi(g_2^{-1} \tilde{g}_2) = \Psi(\tilde{g}_1^{-1} \tilde{g}_2).$$

Таким образом видно, что $\bar{\tilde{g}} = \bar{g}$, т. е. что \bar{g} не изменяется при непрерывной деформации кривой \mathcal{C} , если удерживать фиксированными концевые точки

h и k . Наконец, в случае односвязной группы G две любые кривые, связывающие h с k , гомотопны; следовательно, \bar{g} зависит только от h и k , так что можно записать $\bar{g} = \bar{g}(h, k)$. Кроме того,

$$\bar{g}(gh, gk) = \bar{g}(h, k) \quad \text{для любого } g \in G,$$

поскольку это верно для каждого из множителей $\Psi(g_i^{-1}g_{i+1})$. Отсюда следует, что отображение $\hat{\Psi}$ группы G в \bar{G} , задаваемое посредством $\hat{\Psi}(g) = \bar{g}(1, g)$, является искомым расширением локального гомоморфизма Ψ , так как при сложении кривых в G получается, что

$$\hat{\Psi}(g_1g_2) = \bar{g}(1, g_1)\bar{g}(g_1, g_1g_2) = \bar{g}(1, g_1)\bar{g}(1, g_2).$$

25.14. ТЕОРЕМА О ГОМОМОРФИЗМАХ ДЛЯ ГРУПП ЛИ

Теорема о гомоморфизмах для групп Ли отличается от соответствующей теоремы для абстрактных групп дополнительными топологическими аспектами.

Подгруппа группы Ли G называется *замкнутой*, если ее элементы образуют замкнутое точечное множество в многообразии группы G .

Теорема 1. *Ядро гомоморфизма Ψ группы Ли G на группу \bar{G} , т. е. множество*

$$G_0 = \{g \in G: \Psi(g) = 1 \text{ (единица группы } \bar{G})\},$$

является замкнутой нормальной подгруппой G .

Согласно элементарной теории групп, ядро гомоморфизма представляет собой нормальную подгруппу, которая замкнута в силу непрерывности отображения Ψ : если $\{g_i\}$ — последовательность элементов в G_0 , сходящаяся к h , то $\Psi(g_i)$ сходятся к $\Psi(h)$, но $\Psi(g_i) = 1$ для каждого i , откуда $\Psi(h) = 1$, и, значит, h принадлежит G_0 .

Две следующие теоремы показывают, что если G_0 — замкнутая подгруппа G (которая может как быть, так и не быть нормальной), то в G можно так выбрать логарифмические координаты, что они, будучи определены в G_0 , будут логарифмическими координатами в G_0 , и тем самым G_0 станет группой Ли со всеми присущими ей свойствами, а ее алгебра Ли будет подалгеброй алгебры Ли группы G .

Если $\mathcal{C}: g(t)$ ($0 \leq t \leq \epsilon$) — любая гладкая кривая, выходящая из единицы ($g(0) = 1$) и лежащая в подгруппе G_0 , то касательный вектор к \mathcal{C} в 1 называется *касательным вектором к G_0 в 1*.

Теорема 2. *Пусть G_0 — замкнутая подгруппа G . Тогда множество Λ_0 всех касательных векторов к G_0 в 1 есть подалгебра алгебры Ли группы G . Если G_0 является нормальной подгруппой, то Λ_0 — идеал.*

Доказательство. Допустим, что $\lambda \in \Lambda_0$. Тогда существует гладкая кривая $g(t)$, лежащая в G_0 и такая, что

$$\ln(g(t)) = \lambda t + \dots,$$

где многоточие означает члены порядка t^2 и выше. Для любого положительного целого m $g(t/m)^m$ принадлежит G_0 и, согласно формуле КБХ,

$$\ln(g(t/m)^m) = \lambda t + \dots,$$

где теперь многоточие означает члены порядка t^2/m и выше. Полагая $m \rightarrow \infty$, мы видим, что в силу замкнутости множества G_0 λt является координатой некоторой точки в G_0 ; поэтому для $\lambda \in \Lambda_0$ $e^{\lambda t}$ принадлежит G_0 . Пусть $\lambda_1 \in \Lambda_0$ и $\lambda_2 \in \Lambda_0$; тогда по формуле КБХ вектор

$$\ln(e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t}) = t(\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{1}{2} t^2 [\lambda_1, \lambda_2] + \dots$$

является координатой некоторой точки в G_0 . Используя рассуждения, аналогичные проведенным выше, и рассматривая линейные члены разложения, мы устанавливаем, что $\lambda_1 + \lambda_2 \in \Lambda_0$ и (в более общем виде) $t\lambda_1 + s\lambda_2$ для вещественных t и s принадлежит Λ_0 , так что Λ_0 является подпространством. Аналогичным образом при учете квадратичных членов устанавливается, что $[\lambda_1, \lambda_2] \in \Lambda_0$ и, значит, Λ_0 — подалгебра. Наконец, в случае когда G_0 — нормальная подгруппа, лишь один из элементов λ_1, λ_2 должен принадлежать Λ_0 , и мы видим, что Λ_0 — идеал.

Теперь ясно, как надо определить координаты в G_0 . Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ — базис векторного пространства Λ , такой, что $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ ($k < n$) является базисом Λ_0 . Любой элемент λ представляется в виде $\lambda = \lambda^1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda^n \mathbf{e}_n$, и в таком случае $\lambda^1, \dots, \lambda^k$ можно принять в качестве координат в G_0 в подходящей окрестности единицы. Для того чтобы найти эту окрестность, допустим, что N — окрестность нуля в алгебре Ли Λ группы G , в которой могут быть использованы логарифмические координаты. Тогда пересечение $N \cap \Lambda_0$ представляет собой открытое множество в Λ_0 и, следовательно, содержит окрестность N_0 (связное открытое множество) нуля в Λ_0 . Множество U_0 в группе G_0 , задаваемое как

$$U_0 = \{g \in G_0: \ln g \in N_0\},$$

и отображение $\Phi_0(g) = (\lambda^1, \dots, \lambda^k)$ множества U_0 в \mathbb{R}^k определяют некоторую карту $\{U_0, \Phi_0, N_0\}$ в G_0 . Она и другие карты, полученные при помощи трансляций в G_0 , как это описано в § 25.11, называются *унаследованными (от G)*. Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 3. Если G_0 — замкнутая подгруппа G , а Λ и Λ_0 имеют описанный выше смысл, то G_0 со своими унаследованными картами представляет собой группу Ли, а Λ_0 — ее алгебру Ли.

В следующих двух теоремах устанавливается, что если G_0 — замкнутая нормальная подгруппа, то факторгруппа G/G_0 может быть снабжена такой структурой многообразия, которая делает ее группой Ли; алгебра Ли этой группы изоморфна Λ/Λ_0 ; естественный

гомоморфизм G на G/G_0 аналитичен по отношению к указанной структуре многообразия. Последняя из теорем данного параграфа представляет собой собственно теорему о гомоморфизмах.

Нетрудно видеть, что последние $n-k$ компонент $\lambda^{k+1}, \dots, \lambda^n$ вектора λ относительно базиса $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$, описанного выше, можно принять в качестве координат в G/G_0 , ибо они постоянны в каждом смежном классе (группы G_0 в G) или, точнее, в пересечении смежного класса и подходящей окрестности V единицы в G , в которой могут быть использованы логарифмические координаты. В самом деле, если $e^\lambda = e^\mu e^\nu$, где $\mu \in \Lambda_0$, так что $e^{\lambda'}$ и e^λ находятся в одном смежном классе, то, согласно формуле КБХ,

$$\lambda' = \lambda + \mu + \frac{1}{2}[\lambda, \mu] + \dots;$$

все члены правой части начиная с μ принадлежат Λ_0 , поскольку Λ_0 является идеалом, поэтому λ' и λ имеют одни и те же последние $n-k$ компонент. Ясно также, что эти последние компоненты различны (по крайней мере одна из них) для различных смежных классов. В этих координатах функции умножения и обращения, $m(\cdot, \cdot)$ и $l(\cdot)$, в G/G_0 непрерывны (фактически аналитичны). Для любого произведения $e^\lambda e^{\lambda'} = e^{\lambda''}$ в G все n компонент вектора λ'' непрерывно зависят от всех компонент векторов λ и λ' ; следовательно, в частности, это верно и для последних $n-k$ компонент, которые являются координатами соответствующих смежных классов. Естественный гомоморфизм G на G/G_0 , при котором элемент группы e^λ отображается на смежный класс, представителем которого он является, непрерывно зависит от этих координат, ибо данное отображение заключается просто в игнорировании первых k компонент вектора λ .

Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 4. *Допустим, что $G, G_0, \Lambda, \Lambda_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \lambda^1, \dots, \lambda^n$ таковы, как описано выше. Тогда $\lambda^{k+1}, \dots, \lambda^n$ можно взять в качестве координат $\bar{\varphi}(\bar{g})$ (\bar{g} обозначает смежный класс) в подмногообразии \bar{U} группы G/G_0 (состоящем из смежных классов, которые пересекаются с окрестностью V в G), таким образом определив карту, благодаря чему G/G_0 становится $(n-k)$ -мерной группой Ли, называемой факторгруппой Ли (она также обозначается через G/G_0) группы G по отношению к G_0 . Естественный гомоморфизм G на G/G_0 непрерывен и, значит, является гомоморфизмом группы Ли (следовательно, он аналитичен).*

Приведем пример, показывающий, что заключения теоремы могут не иметь места, если подгруппа G_0 не является замкнутой. Пусть G — двумерная группа тора, состоящая из матриц

$$\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \text{ вещественны}).$$

Пусть G_0 — подгруппа из матриц

$$\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{i\theta t} \end{pmatrix} \quad (t \text{ вещественно}),$$

где θ — фиксированное вещественное иррациональное число. Многообразие группы G является тором, а многообразие группы G_0 — спиралевидной кривой, всюду плотной на этом торе. Подгруппа G_0 нормальна, но не замкнута. Алгебра Ли Λ представляет собой плоскость, и при отображении $e^\lambda \rightarrow \lambda$ группы G на Λ образом G_0 является множество параллельных прямых, всюду плотное в этой плоскости. Λ_0 есть прямая из этого множества, проходящая через начало координат. Относительно базиса (ϵ_1, ϵ_2) , такого, что ϵ_1 лежит теперь на Λ_0 , вторая координата λ^2 имеет различные значения на различных прямых множества, составляющего G_0 , и поскольку любая окрестность начала координат пересекается бесконечным числом прямых указанного множества, то λ^2 не является постоянной ни в G_0 , ни в любом смежном классе.

Теперь сформулируем без доказательства две последние теоремы.

Теорема 5. Алгебра Ли группы G/G_0 изоморфна Λ/Λ_0 .

Теорема 6 (теорема о гомоморфизмах). Если G_0 — ядро гомоморфизма группы Ли G на \bar{G} , то $G/G_0 \cong \bar{G}$. Иначе говоря, если Ψ — изоморфизм (в смысле элементарной теории групп), определенный в § 18.8, то Ψ и обратное отображение Ψ^{-1} аналитичны.

Первые семь из приведенных ниже упражнений имеют отношение к отчасти неясному вопросу (упомянутому в § 25.1) касательно того, какие группы Ли имеют точные представления и, следовательно, являются линейными группами, т. е. могут рассматриваться как группы матриц (или соответствующих линейных преобразований), как это обычно справедливо для групп, встречающихся в приложениях. Каждая алгебра Ли Λ имеет хотя бы одно представление, так называемое присоединенное представление алгебры Λ на себя (упражнение 2). Посредством экспоненциального отображения оно дает локальное представление группы Ли G на ее алгебру Λ . Это представление может быть, а может и не быть расширено до представления всей группы G , и в случае существования такого расширения оно может быть, а может и не быть точным.

Упражнение 8 связано с накрывающими группами. Группа $SU(2)$ есть универсальная накрывающая группа группы $SO(3)$. Основная теорема § 24.3 о накрывающих многообразиях гласит, что не существует никаких групп, которые накрывали бы $SU(2)$, будучи неизоморфными $SU(2)$. Следовательно, как утверждалось в § 21.1, не существует многозначных представлений группы $SO(3)$ кроме двузначных.

УПРАЖНЕНИЯ

Центром C группы G называется множество таких элементов группы, которые коммутируют с любым элементом группы, т. е.

$$C = \{g \in G: gh = hg \quad \forall h \in G\}.$$

Аналогично центр Z алгебры Ли есть множество таких элементов, которые коммутируют с каждым элементом этой алгебры, т. е.

$$Z = \{\lambda \in \Lambda: [\lambda, \mu] = 0 \quad \forall \mu \in \Lambda\}.$$

1. Покажите, что центр группы Ли является замкнутой нормальной подгруппой, а центр алгебры Ли — идеалом.

2. Напомним, что для любого λ из Λ Ad_λ есть линейное преобразование $\mu \rightarrow [\lambda, \mu]$ алгебры Λ на себя. Покажите, что если произведение Ли двух таких преобразований определено обычным образом как

$$[\text{Ad}_\lambda, \text{Ad}_\mu] = \text{Ad}_\lambda \text{Ad}_\mu - \text{Ad}_\mu \text{Ad}_\lambda,$$

после чего множество $\{\text{Ad}_\lambda: \lambda \in \Lambda\}$ всех таких преобразований становится алгеброй Ли, то отображение $\lambda \rightarrow \text{Ad}_\lambda$ является гомоморфизмом алгебры Λ на эту новую алгебру. Этот гомоморфизм называется *присоединенным представлением* Λ (на себя).

3. Покажите, что если Λ — алгебра без центра, т. е. $Z = \{0\}$, то присоединенное представление является точным (т. е. приведенный выше гомоморфизм есть изоморфизм).

4. Если G односвязна, то локальный гомоморфизм $e^\lambda \rightarrow e^{\text{Ad}_\lambda}$ группы G на группу линейных преобразований в алгебре Λ , рассмотренный в § 25.7, можно расширить до гомоморфизма всей группы G , который называется *присоединенным представлением группы G на Λ* . Покажите, что необходимое условие для того, чтобы этот гомоморфизм был изоморфизмом, заключается в отсутствии центра у группы G , т. е. C должен быть равен $\{1\}$; тогда данный гомоморфизм локально является изоморфизмом.

5. Для иллюстрации упражнения 4 возьмем $SU(2)$ в качестве G и примем за базис алгебры Ли Λ группы $SU(2)$ матрицы T_1, T_2, T_3 размера 2×2 , определенные в (22.7.5). Тогда преобразования Ad_λ представляются вещественными матрицами размера 3×3 . Покажите, что матрицы e^{Ad_λ} образуют группу $SO(3)$ и что гомоморфизм $e^\lambda \rightarrow e^{\text{Ad}_\lambda}$ в этом случае представляет собой знакомый нам $(2 \rightarrow 1)$ -гомоморфизм группы $SU(2)$ на группу $SO(3)$. Что является центрами групп $SU(2)$ и $SO(3)$?

6. Если C — центр группы G , то не обязательно отсутствие центра у факторгруппы G/G_0 . Покажите это путем рассмотрения конечной группы

$$G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\},$$

где i, j, k — базисные единицы кватернионов, удовлетворяющие соотношениям

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

7. Покажите, что центр Z алгебры Ли Λ является идеалом и что факторалгебра Λ/Z является алгеброй без центра.

8. Пусть G — связная группа Ли, M' — универсальное накрывающее многообразие многообразия M группы G , и пусть ψ — проекция M' на M . Многообразию M' становится группой G' , называемой *универсальной накрывающей группой* группы G , если в этом многообразии определить умножение следующим образом. Сначала выберем одну из точек в M' , которая находится над единицей 1 группы G , и обозначим ее $1'$ [следовательно, $\psi(1') = 1$ и $1'$

будет единицей группы G']. Теперь допустим, что g' и h' — две произвольные точки в M' , а $g'(s)$ и $h'(s)$ — кривые в M' , связывающие соответственно g' и h' с $1'$ так, что $g'(0) = h'(0) = 1'$, тогда как $g'(1) = g'$ и $h'(1) = h'$.

Допустим далее, что $g(s)$ и $h(s)$ — проекции кривых $g'(s)$ и $h'(s)$ на многообразии M , т. е. $g(s) = \psi(g'(s))$ и $h(s) = \psi(h'(s))$. Тогда $k(s)$, равное произведению $g(s)h(s)$, будет некоторой кривой в M , выходящей из 1 . Пусть $k'(s)$ — кривая в M' , которая получается при поднятии $k(s)$ в многообразии M' , причем так, что $k'(0) = 1'$ (см. § 24.2); тогда произведением $g'h'$ в M' должна быть определена точка $k'(1)$.

Покажите, что это определение состоятельно (т. е. не зависит от выбора кривых; вспомним, что M' — односвязное многообразие) и что благодаря ему G' становится группой Ли. Покажите, что проекция ψ есть гомоморфизм группы Ли G' на G . Покажите, что если g'_0 лежит над 1 [т. е. если $\psi(g'_0) = 1$; иначе говоря, если g'_0 принадлежит ядру упомянутого гомоморфизма], то g'_0 коммутирует с любым $h' \in G'$. *Указание.* Возьмите определяющие кривые в M' так, что $h'(s) = 1'$ для $0 \leq s \leq 1/2$, а $g'_0(s) = g'_0$ для $1/2 \leq s \leq 1$.

25.15. ПРЯМАЯ И ПОЛУПРЯМАЯ СУММЫ АЛГЕБР ЛИ

Понятия, которые обсуждаются в этом параграфе, аналогичны прямому и полупрямому произведениям групп, определенным в § 18.15 в связи с кристаллографическими пространственными группами. Предположим, что некоторая алгебра Ли Λ может быть представлена в виде прямой суммы (в смысле векторного пространства) двух подпространств Λ_1 и Λ_2 , т. е. любой вектор $\lambda \in \Lambda$ можно однозначно разложить в сумму $\lambda_1 + \lambda_2$, где λ_1 принадлежит Λ_1 , а λ_2 принадлежит Λ_2 . Предположим, кроме того, что $[\lambda_1, \lambda_2] = 0$ для любых $\lambda_1 \in \Lambda_1$ и $\lambda_2 \in \Lambda_2$. В таком случае Λ_1 и Λ_2 являются идеалами в Λ , а Λ называют их прямой суммой.

Теперь предположим, что Λ есть прямая сумма (в смысле векторного пространства) Λ_0 и M , где Λ_0 — идеал, а M — только подалгебра. Тогда для λ_1 и λ_2 , принадлежащих Λ_0 , и для μ_1 и μ_2 , принадлежащих M ,

$$[\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2] = [\lambda_1, \lambda_2] + [\mu_1, \lambda_2] + [\lambda_1, \mu_2] + [\mu_1, \mu_2].$$

Первые три члена в правой части содержатся в Λ_0 (поскольку Λ_0 является идеалом) и могут быть переписаны в виде

$$[\lambda_1, \lambda_2] + \text{Ad}_{\mu_1}\lambda_2 - \text{Ad}_{\mu_2}\lambda_1,$$

тогда как четвертый член, $[\mu_1, \mu_2]$, содержится в M .

Такой же результат получается, если мы начинаем с алгебр Ли Λ_0 и M и строим Λ , но сначала следует отметить некоторые свойства линейных преобразований Ad_{μ} . Каждое из них преобразует идеал Λ_0 в себя, и отображение $\mu \rightarrow \text{Ad}_{\mu}$ является представлением алгебры M на Λ_0 согласно упражнению 2 предыдущего параграфа, потому что для μ и ν , принадлежащих M ,

$$\text{Ad}_{[\mu, \nu]} = \text{Ad}_{\mu} \text{Ad}_{\nu} - \text{Ad}_{\nu} \text{Ad}_{\mu}.$$

Для фиксированного μ преобразование Ad_μ есть дифференцирование, т. е.

$$\text{Ad}_\mu [\lambda_1, \lambda_2] = [\text{Ad}_\mu \lambda_1, \lambda_2] + [\lambda_1, \text{Ad}_\mu \lambda_2].$$

[В любой алгебре дифференцирование представляет собой линейное преобразование ρ , такое, что $\rho(x \circ y) = \rho(x) \circ y + x \circ \rho(y)$, где кружок означает операцию умножения в этой алгебре.]

Пусть теперь Λ_0 и M — две заданные произвольные алгебры Ли, и пусть преобразование $\mu \rightarrow \rho(\mu)$ является представлением алгебры M посредством дифференцирований в алгебре Λ_0 . Алгебра Ли, которая называется *полупрямой суммой* алгебр Λ_0 и M и обозначается через $\Lambda_0 \oplus_\rho M$, определяется следующим образом. Рассматриваемая как векторное пространство, она представляет собой прямую сумму Λ_0 и M , так что ее элементы суть упорядоченные пары $\{\lambda, \mu\}$, где $\lambda \in \Lambda_0$, а $\mu \in M$, и, кроме того, в ней определено произведение Ли следующим образом:

$$\{[\lambda_1, \mu_1], [\lambda_2, \mu_2]\} = \{[\lambda_1, \lambda_2] + \rho(\mu_1)\lambda_2 - \rho(\mu_2)\lambda_1, [\mu_1, \mu_2]\}.$$

Очевидно, что это произведение линейно по каждому множителю и антисимметрично.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Покажите, что определенное сейчас произведение удовлетворяет тождеству Якоби.

Пусть $\Lambda = \Lambda_0 \oplus_\rho M$. Если отождествить Λ_0 с множеством элементов вида $\{\lambda, 0\}$, а M с множеством элементов вида $\{0, \mu\}$, то $\rho(\mu)$ станет в точности преобразованием Ad_μ в Λ , потому что

$$\text{Ad}_{\{0, \mu\}} \{\lambda, 0\} = \{0, \mu\}, \{\lambda, 0\} = \{\rho(\mu)\lambda, 0\}.$$

УПРАЖНЕНИЕ

2. Пусть G_0 и H — замкнутые подгруппы группы Ли G , причем G_0 нормальна. Допустим, что каждый элемент g из G имеет единственное представление в виде $g_0 h$, где g_0 и h принадлежат соответственно G_0 и H . Пусть далее Λ , Λ_0 и M — алгебры Ли групп G , G_0 и H . Покажите, что $\Lambda = \Lambda_0 \oplus_\rho M$, где $\rho(\mu) = \text{Ad}_\mu$ для любого $\mu \in M$. *Указание.* Если для $\lambda \in \Lambda_0$ и $\mu \in M$ $\{\lambda, \mu\}$ означает $\text{In}(e^\lambda e^\mu)$, найдите произведение Ли двух таких пар, используя разложение формулы КБХ для

$$e^{\{\lambda_1, \mu_1\}} e^{\{\lambda_2, \mu_2\}}$$

и для каждого множителя отдельно.

Полупрямая сумма становится прямой суммой $\Lambda_0 \oplus M$, если ρ — тривиальный гомоморфизм, который отображает каждый элемент μ из M на нулевое преобразование, т. е. $\rho(\mu)\lambda = 0$ для всех λ . В этом случае Λ_0 и M являются идеалами в $\Lambda_0 \oplus M$.

Фундаментальная теорема о структуре, которая доказывается на весьма поздней стадии развития рассматриваемой теории, ут-

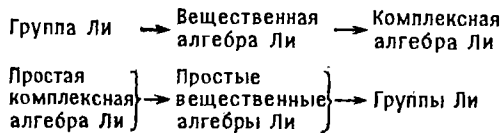
верждает, что любую алгебру Ли можно представить в виде повторной полупрямой суммы

$$(\dots((\Lambda_0 \oplus_{\rho_1} \Lambda_0) \oplus_{\rho_2} \Lambda_2) \dots \oplus_{\rho_k} \Lambda_k)$$

алгебр Ли, каждая из которых или одномерна, или проста; поэтому главной целью теории является классификация простых алгебр. Приведенная теорема справедлива как для вещественных, так и для комплексных алгебр Ли; весьма тонкое ее доказательство можно найти в книге Хаузнера и Шварца [1968].

25.16. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТЫХ КОМПЛЕКСНЫХ АЛГЕБР ЛИ

Отношения, связывающие различные объекты рассматриваемой теории, показаны на следующей схеме:



Любая группа Ли определяет единственную вещественную алгебру Ли, в свою очередь определяющую единственную комплексную алгебру Ли при помощи процесса, называемого комплексификацией, который будет описан ниже. Комплексный случай проще вещественного, так же как и в элементарной теории матриц, потому что совокупность комплексных чисел \mathbb{C} алгебраически замкнута, тогда как \mathbb{R} не является таковой. (Вспомним, что вещественная матрица в общем случае имеет комплексные собственные значения и собственные векторы.) Имеется полная классификация простых комплексных алгебр Ли, а именно существуют четыре регулярные бесконечные серии алгебр и пять так называемых исключительных алгебр. Следующий шаг заключается в том, чтобы найти все простые вещественные алгебры, комплексификация которых приводит к данной комплексной алгебре. Такой шаг выполнен в книге Хаузнера и Шварца [1968], где читатель может ознакомиться с полной классификацией простых вещественных алгебр. Этот результат получить гораздо сложнее, чем классификацию комплексных алгебр, но зато реализуется два шага в классификации групп Ли; для этого нужно, во-первых, найти все возможные повторные прямые суммы одномерных и простых алгебр, как описано в конце предыдущего параграфа, а во-вторых, найти все (скажем, связанные) группы Ли, которые дают данную вещественную алгебру Ли.

Мы дадим очень краткий набросок этой теории, используя классификацию простых комплексных алгебр. Алгебраические подробности и ряд лемм, необходимых для доказательств, читатель может найти в книге Хаузнера и Шварца [1968].

Как уже указывалось в предыдущем параграфе, нас в основном интересуют простые алгебры, но при их рассмотрении потребуются некоторые непростые алгебры, а именно полупростые, разрешимые и нильпотентные алгебры Ли. Для того чтобы их определить, заметим прежде всего, что если Λ_1 и Λ_2 — любые идеалы в некоторой вещественной или комплексной алгебре Ли Λ , то произведение $[\Lambda_1, \Lambda_2]$, определяемое как подпространство, которое является линейной оболочкой элементов вида $[\lambda_1, \lambda_2]$, где $\lambda_1 \in \Lambda_1$, а $\lambda_2 \in \Lambda_2$, т. е. подпространство

$$[\Lambda_1, \Lambda_2] = \text{линейная оболочка } \{[\lambda_1, \lambda_2]: \lambda_1 \in \Lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_2\},$$

есть идеал, содержащийся как в Λ_1 , так и в Λ_2 . Теперь мы определим две нисходящие последовательности идеалов в Λ , а именно

$$\Lambda^1 = \Lambda \supset \Lambda^2 \supset \Lambda^3 \supset \dots$$

и

$$\Lambda^{(1)} = \Lambda \supset \Lambda^{(2)} \supset \Lambda^{(3)} \supset \dots,$$

используя индукцию

$$\Lambda^{k+1} = [\Lambda, \Lambda^k], \quad \Lambda^{(k+1)} = [\Lambda^{(k)}, \Lambda^{(k)}].$$

Говорят, что алгебра Λ *разрешима*, если $\Lambda^{(k)} = 0$ для некоторого k , и *нильпотентна*, если $\Lambda^k = 0$ для некоторого k . Легко видеть, что нильпотентная алгебра разрешима; действительно, $\Lambda^{(k)} \subset \Lambda^k$ для всех k , что устанавливается путем индукции по k .

Как и в § 25.12, алгебра Ли Λ более чем одного измерения *проста* в случае, когда она не содержит собственных ненулевых идеалов. Алгебра Ли называется *полупростой*, если она не содержит собственных ненулевых разрешимых идеалов (в этом случае сама алгебра Λ не может быть разрешима, так что слово «собственных» в последнем определении можно опустить).

При дальнейшем развитии теории окажется, что алгебра Λ будет полупростой тогда и только тогда, когда $\Lambda^2 = \Lambda$ (отсюда возникает требование, что $\dim \Lambda > 1$, ибо если $\dim \Lambda = 1$, то $\Lambda^2 = 0$); далее, алгебра Λ полупроста тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде прямой суммы идеалов

$$\Lambda = \Lambda_1 \oplus \dots \oplus \Lambda_k,$$

где каждое слагаемое Λ_k является простой алгеброй.

Если Λ — вещественная алгебра Ли, то ее *комплексификация* определяется как комплексная алгебра Ли $\hat{\Lambda}$, элементами которой являются формальные суммы $\lambda + i\mu$, где λ и μ принадлежат Λ , и для которой линейные комбинации и произведения Ли определяются очевидным образом; в частности,

$$[\lambda_1 + i\mu_1, \lambda_2 + i\mu_2] = [\lambda_1, \lambda_2] + i[\mu_1, \lambda_2] + i[\lambda_1, \mu_2] - [\mu_1, \mu_2].$$

Алгебра $\hat{\Lambda}$ полупроста в том и только том случае, когда Λ полупроста. Если Λ проста, то ее комплексификация либо проста, либо представляет собой прямую сумму двух идентичных (т. е. изоморфных) простых комплексных алгебр.

Любая вещественная или комплексная алгебра Ли Λ содержит нильпотентные подалгебры (они, разумеется, не являются идеалами, если Λ полупроста); в частности, она содержит так называемую подалгебру Картана M , определяемую ниже, которая является нильпотентной. Для анализа структуры алгебры Λ исследуют структуру подалгебры M и соотношение между элементами M и остальными элементами алгебры Λ . Это соотношение описывается при помощи операторов Ad_μ , $\mu \in M$; оператор Ad_μ преобразует элемент алгебры Λ в некоторый другой элемент Λ , а именно преобразует λ в $[\mu, \lambda]$. Отображение $\mu \rightarrow \text{Ad}_\mu$ есть представление подалгебры M на векторном пространстве Λ ; поэтому теория начинается с рассмотрения общих представлений разрешимых и нильпотентных алгебр Ли.

Изучение представления ρ абстрактной алгебры Λ имеет то преимущество, что, в то время как λ из Λ представляет собой абстрактный объект, $\rho(\lambda)$ является линейным преобразованием в векторном пространстве, и, значит, могут быть применены стандартные методы линейной алгебры; например, в комплексном случае преобразование $\rho(\lambda)$ имеет по крайней мере одно собственное значение и один собственный вектор. Кроме того, произведение Ли преобразований $\rho(\lambda)$ и $\rho(\mu)$ есть просто $\rho(\lambda)\rho(\mu) - \rho(\mu)\rho(\lambda)$.

Пусть ρ — представление любой алгебры Ли Λ на векторном пространстве V . Назовем v из V *весовым вектором* представления ρ , если он является одновременно собственным вектором всех преобразований $\rho(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, т. е. если

$$\rho(\lambda)v = \alpha(\lambda)v \quad \forall \lambda \in \Lambda,$$

где $\alpha(\cdot)$ — скалярнозначная функция, очевидно линейная, определенная на Λ и называемая соответствующим *весом* представления ρ . Вектор v из V является *обобщенным весовым вектором* представления ρ , соответствующим весу $\alpha(\cdot)$, если для некоторого целого k

$$(\rho(\lambda) - \alpha(\lambda)I)^k v = 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda,$$

где I — тождественное преобразование в V . Множество всех обобщенных весовых векторов для данного $\alpha(\cdot)$ называется соответствующим *весовым пространством* и обозначается через V_α . Таким образом, вес, весовой вектор и весовое пространство соответствуют собственному значению, собственному вектору и алгебраическому собственному подпространству для случая единственного линейного преобразования. В этом последнем случае, если V — комплекс-

ное векторное пространство, то оно является прямой суммой всех алгебраических собственных подпространств $V_1 \oplus \dots \oplus V_k$, соответствующих собственным значениям z_1, \dots, z_k , — это отражение того факта, что любая матрица может быть приведена к жордановой нормальной форме. Аналогичные результаты имеют место для весов и весовых векторов, когда рассматриваемая алгебра Ли разрешима или нильпотентна.

Теорема 1. Если ρ — представление разрешимой комплексной алгебры Ли M на векторном пространстве V , то ρ имеет хотя бы один весовой вектор v и соответствующий вес $\alpha(\cdot)$.

Если далее допустить, что M нильпотентна, то мы имеем следующий результат.

Теорема 2. Если ρ — представление нильпотентной комплексной алгебры Ли M на векторном пространстве V , то весовые пространства представления ρ натягивают V ; иначе говоря, V является прямой суммой весовых пространств:

$$V = V_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus V_{\alpha_k},$$

где V_{α_j} — весовое пространство, соответствующее весу $\alpha_j(\cdot)$, $j = 1, \dots, k$.

Доказательство каждой из этих теорем осуществляется при помощи индукции по размерности n алгебры M ; идеал M^2 не совпадает с M , и если N есть подпространство M размерности $n-1$, содержащее M^2 , то N является подалгеброй (на самом деле идеалом), причем она разрешима в случае теоремы 1 и нильпотентна в случае теоремы 2; следовательно, индуктивное предположение может быть применено к N . Индукция начинается с $n=1$, но в этом случае с точностью до скалярного множителя имеется лишь одно линейное преобразование $\rho(\lambda)$ и утверждения теорем сводятся к хорошо известным соответствующим фактам линейной алгебры. Алгебраическая работа для выполнения этих доказательств вполне проста, но объем ее столь велик, что может обескуражить слабого духом.

Теперь введем два понятия, играющих важную роль при анализе общей алгебры Ли Λ : *симметричная билинейная форма* и *подалгебра Картана*. Первое понятие относится к симметричной форме (λ, μ) , определенной для всех λ и μ из Λ посредством равенства

$$(\lambda, \mu) = \text{tr}(\text{Ad}_\mu \text{Ad}_\lambda),$$

где tr означает след¹⁾. Эта форма может быть вещественно- или

¹⁾ Эта билинейная форма иногда называется формой Киллинга. — Прим. перев.

комплекснозначной в зависимости от того, является ли Λ вещественной или комплексной алгеброй Ли, но (λ, μ) не является положительно определенной, исключая специальный случай, о котором будет сказано ниже. Основная теорема, именуемая *критерием Картана*, гласит, что вещественная или комплексная алгебра Ли полупроста в том и только том случае, когда симметричная билинейная форма невырождена, а это означает, что не существует отличного от нуля элемента λ , для которого $(\lambda, \mu) = 0$ при всех μ .

Если Λ — любая комплексная алгебра Ли, а M — нильпотентная подалгебра, то мы можем применить теорему 2 к присоединенному представлению подалгебры M на Λ , заменяя символы $\rho(\mu)$ и V на Ad_μ и Λ . Веса, весовые векторы и весовые пространства этого представления в таком случае называются соответственно *корнями*, *корневыми векторами* и *корневыми пространствами* подалгебры M в Λ . Если $\alpha(\cdot)$ есть корень, то соответствующее корневое пространство обозначается через Λ_α ; оно является подпространством пространства Λ . Из нильпотентности M следует, что нулевая функция, т. е. $\alpha(\lambda) = 0$ для всех λ , представляет собой один из таких корней, а соответствующее корневое пространство, обозначаемое через Λ_0 , содержит M . Если нильпотентная подалгебра M может быть выбрана так, что Λ_0 совпадает с M , то M называется *подалгеброй Картана* алгебры Λ . Основная теорема гласит, что любая комплексная алгебра Ли имеет подалгебру Картана.

Оказывается, что в случае комплексной *полупростой* алгебры Ли Λ : (а) подалгебра Картана M коммутативна; (б) для каждого $\alpha \neq 0$ корневое пространство Λ_α одномерно; (в) если α — корень, то $-\alpha$ также корень; (г) если λ и λ' — ненулевые векторы в Λ_α и в $\Lambda_{-\alpha}$, то $[\lambda, \lambda']$ есть ненулевой вектор в M и $(\lambda, \lambda') \neq 0$. Пронумеруем ненулевые корни так: $\pm \alpha_1, \pm \alpha_2, \dots, \pm \alpha_k$, выберем векторы λ_i и λ_{-i} в Λ_{α_i} и в $\Lambda_{-\alpha_i}$ нормированными так, что $(\lambda_i, \lambda_{-i}) = 1$, и введем обозначения

$$\mu_i = [\lambda_i, \lambda_{-i}], \quad i = 1, \dots, k.$$

Можно показать, что M является линейной оболочкой векторов μ_i .

Из пунктов (а) и (б) предыдущего абзаца следует, что в случае полупростой алгебры появляются только обычные корневые векторы (т. е. нет обобщенных векторов). Для корневых векторов $(\lambda_\alpha$ ($\alpha \neq 0$)) это следует из одномерности подпространства Λ_α ; и любой вектор v в $\Lambda_0 = M$ есть корневой вектор, потому что $\text{Ad}_\mu v = 0$ для всех μ в M .

Подалгебра Картана не единственна, но можно показать, что если M' — любая другая подалгебра Картана в Λ , то M и M' имеют одинаковую размерность и существует автоморфизм алгебры Λ , который переводит M в M' ; следовательно, любая из таких

подалгебр может быть использована для исследования структуры алгебры Λ .

Обнаружено, что конфигурация векторов μ_i полностью определяет алгебру Ли. Описание этой конфигурации сильно упрощается при учете того счастливого обстоятельства, что если M_r обозначает вещественное векторное пространство, состоящее из линейных комбинаций μ_i с вещественными коэффициентами, то естественная билинейная форма (\cdot, \cdot) является вещественной и положительно определенной в M_r ; следовательно, M_r представляет собой евклидово пространство, если (\cdot, \cdot) взять в качестве скалярного произведения. Можно показать, что вещественная размерность пространства M_r совпадает с комплексной размерностью пространства M , и мы обозначим ее через m . Тогда (комплексная) размерность алгебры Λ равна $m + 2k$. Длина вектора μ в M_r есть $\|\mu\| = (\mu, \mu)^{1/2}$, а угол между двумя такими векторами определяется равенством

$$\cos \angle \mu, \nu = (\mu, \nu) / (\|\mu\| \|\nu\|).$$

Звезда в M_r , которая состоит из векторов μ_i , выходящих из начала координат, имеет довольно высокую степень симметрии и может быть описана следующим образом.

1) Для любой заданной простой алгебры Λ либо все μ_i имеют одинаковую длину, либо существуют две длины, причем часть векторов μ_i обладает одной длиной, остальная часть — другой.

2) Угол между любыми двумя векторами представляет собой целое кратное 30 или 45°.

3) Если угол равен 30 или 150°, то один вектор длинный, а другой — короткий, причем отношение длин равно $\sqrt{3}$. Если угол равен 45 или 135°, то отношение длин равно $\sqrt{2}$. Если угол равен 60 или 120°, то оба вектора имеют одинаковую длину.

4) Вся звезда симметрична относительно отражения в каждой гиперплоскости, перпендикулярной к одному из μ_i .

Любая минимальная звезда, удовлетворяющая этим условиям, определяет единственную простую комплексную алгебру Ли, и различные звезды определяют различные алгебры. Если Λ полупроста и является прямой суммой простых алгебр, т. е. $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \dots \oplus \Lambda_k$, то M_r натягивается на k взаимно ортогональных подпространств, каждое из которых содержит звезду одной из простых алгебр.

Допустим теперь, что алгебра Λ проста. Когда M_r одномерно, звезда состоит из двух противоположных векторов одинаковой длины и алгебра Λ , обозначаемая через A_1 , имеет размерность $l = 3$. Когда M_r двумерно, существуют три возможные звезды, которые изображены на рис. 25.2, где приведены также размерности l и обозначения соответствующих алгебр, а именно A_2 , B_2 , G_2 . Когда M_r трехмерно, также существуют три возможные

звезды, соответствующие алгебрам A_3 , B_3 , C_3 . Звезда алгебры A_3 состоит из шести пар противоположных векторов μ_i и μ_{-i} , причем все они имеют одинаковую длину и соединяют начало координат с серединами ребер куба, углы между векторами равны 60° , 90° , 120° и 180° . В звезде алгебры B_3 имеется шесть пар длинных векторов, расположенных, как и в A_3 , т. е. ведущих к ребрам куба, и три пары взаимно ортогональных коротких векторов, образующих углы 45° с ближайшими длинными векторами, причем отношение длин равно $\sqrt{2}$; короткие векторы соединяют начало

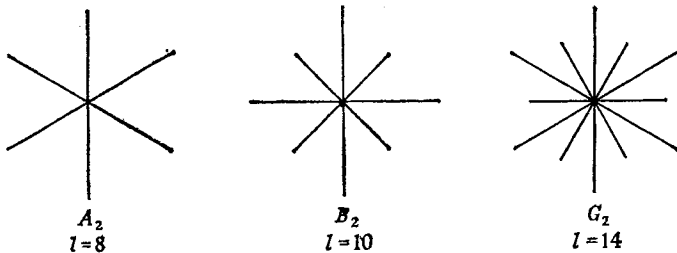


Рис. 25.2. Двумерные звезды простых комплексных алгебр Ли.

координат с центрами граней куба. Звезда алгебры C_3 представляет собой звезду алгебры B_3 , в которой длинные и короткие векторы поменялись местами, так что эта звезда соответствует ромбическому додекаэдру. Размерности, соответствующие алгебрам A_2 , B_2 , G_2 , A_3 , B_3 , C_3 , равны 8, 10, 14, 15, 21, 21.

Конечно, бессмысленно говорить о длинах и направлениях векторов λ_i , поскольку они лежат в комплексном пространстве Λ , для которого (\cdot, \cdot) не является даже эрмитовым скалярным произведением. Но вполне разумно найти произведения Ли $[\lambda, \mu]$ для достаточно многих пар λ, μ так, чтобы определить структуру алгебры Λ . Наилучшим образом это делается при помощи моделей, которые будут описаны в следующем параграфе.

Для того чтобы определить возможные звезды в случае, когда M_r имеет более трех измерений, используют метод, предложенный Е. Б. Дынкиным. *Простым множеством* векторов в звезде назовем некоторое множество Π , состоящее из t векторов μ_i (t всегда меньше $2k$), такое, что при помощи операций сложения и вычитания начиная с векторов множества Π можно получить все векторы данной звезды, причем таким путем можно получить лишь одно множество векторов, удовлетворяющее приведенным выше условиям 1—4, т. е. лишь одну звезду. Можно доказать, что всегда возможно выбрать простое множество векторов. Более того, хотя множество Π в общем случае не единственно, но если допустить, что Π' — другое простое множество, то можно установить некоторый автоморфизм

алгебры Λ , при котором M инвариантно, а Π переходит в Π' ; следовательно, неважно, какое простое множество используется. Возможными углами между любыми двумя векторами множества Π будут $90, 120, 135$ и 150° .

Диаграмма Дынкина представляет собой множество m точек (или кружков) на плоскости по одной для каждого вектора из Π . Если угол между двумя векторами из Π равен $120, 135$ или 150° , то соответствующие точки диаграммы соединяются одинарной,

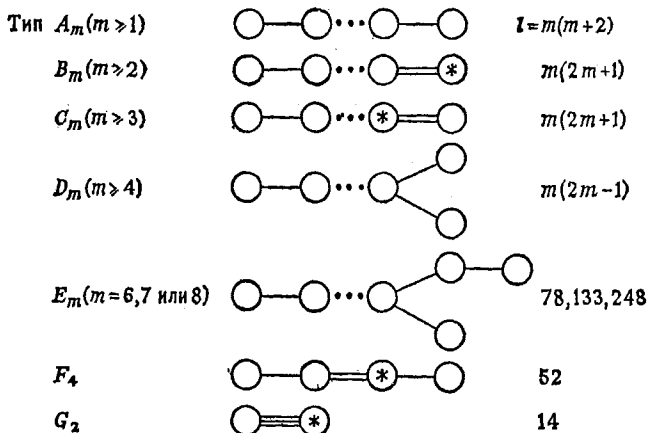


Рис. 25.3. Диаграммы Дынкина для простых комплексных алгебр Ли.

двойной или тройной линией в зависимости от перечисленных значений угла; если угол равен 90° , то соответствующие точки не соединяются. Если угол равен 135 или 150° , то точка, соответствующая короткому вектору, отмечается звездочкой. Можно доказать ряд результатов, относящихся к диаграммам простых комплексных алгебр, например: диаграмма не содержит никаких петель, она связна, она содержит самое большее одну двойную или тройную линию, она может иметь не более одного ветвления и т. п. Как следствие этих правил обнаружено, что существует в точности семь типов диаграмм Дынкина, приведенных на рис. 25.3 (где m — число точек, которое равно размерности пространства M , а l — размерность алгебры Λ).

Типы A_m, B_m, C_m и D_m представляют собой *регулярные серии*, а остальные пять алгебр называются *исключительными*.

25.17. МОДЕЛИ ПРОСТЫХ КОМПЛЕКСНЫХ АЛГЕБР ЛИ

Вышеуказанная классификация получается благодаря наложению различных условий, которым должна удовлетворять простая

комплексная алгебра Ли и которые появляются в результате весьма продолжительных алгебраических рассуждений. Для того чтобы показать, что никаких дополнительных условий нет и, следовательно, все упомянутые выше алгебры в самом деле существуют, строятся модели этих алгебр. Модели регулярных серий суть алгебры матриц, которые будут определены ниже. Мы будем по-прежнему обозначать элементы алгебр символами λ, μ, \dots , несмотря на то, что для матриц могут казаться более подходящими другие символы.

1. A_m состоит из всех комплексных матриц размера $(m+1) \times (m+1)$ с нулевым следом; см. упражнения ниже. Для B_m и D_m необходимо ввести антидиагональную матрицу J размера $p \times p$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

2. B_m состоит из всех комплексных матриц λ размера $(2m+1) \times (2m+1)$, таких, что $\lambda J + J \lambda^T = 0$ ($p = 2m+1$).

3. D_m состоит из всех комплексных матриц λ размера $2m \times 2m$, таких, что $\lambda J + J \lambda^T = 0$ ($p = 2m$).

Для C_m необходимо ввести антидиагональную матрицу размера $2m \times 2m$

$$J = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{array}{c} \nearrow \\ 1 \\ \searrow \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \nwarrow \\ -1 \\ \nearrow \end{array} & 0 \end{array} \right]$$

4. C_m состоит из всех комплексных матриц λ размера $2m \times 2m$, таких, что $\lambda J' + J' \lambda^T = 0$.

Следующие упражнения имеют отношение к серии A_m . Серии B_m, C_m, D_m вполне аналогичны. Более сложные модели исключительных алгебр приведены в книге Хаузнера и Шварца.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть Λ' — алгебра Ли комплексных матриц λ размера $(m+1) \times (m+1)$ с произведением $[\lambda, \mu] = \lambda\mu - \mu\lambda$. Вычислите естественную билинейную форму

$$(\lambda, \mu) = \text{tr}(\text{Ad}_\lambda \text{Ad}_\mu).$$

[Отметим, что Ad_λ и Ad_μ — линейные преобразования в некотором $(m+1)^2$ -мерном пространстве, а именно в Λ' .] Покажите, что

$$(\lambda, \mu) = 2((m+1) \text{tr}(\lambda\mu) - (\text{tr} \lambda)(\text{tr} \mu)).$$

Покажите, что (λ, μ) вырождена в Λ' но не вырождена в подалгебре $\Lambda = A_m$ матриц с нулевым следом, так что A_m является полупростой.

2. Обозначим через M коммутативную подалгебру алгебры Ли Λ из упражнения 1, состоящую из диагональных матриц (с нулевым следом). Рас-

смотрите присоединенное представление подалгебры M на Λ : $\mu \rightarrow \text{Ad}_\mu$, где

$$(\text{Ad}_\mu \lambda)_{rs} = (\mu_{rr} - \mu_{ss}) \lambda_{rs} \quad (r, s = 1, \dots, n).$$

Рассмотрите корни и корневые векторы этого представления. Покажите, что корневое пространство Λ_0 , состоящее из всех матриц λ , таких, что $(\mu_{rr} - \mu_{ss})^k \lambda_{rs} = 0$ для некоторого k и для всех μ из M , состоит также из диагональных матриц; следовательно, $\Lambda_0 = M$, а значит, M есть подалгебра Картана. Покажите, что другие корни $\alpha(\cdot)$ и соответствующие корневые векторы λ_α можно получить, выбрав фиксированные i и k и положив

$$\alpha(\mu) = \mu_{ii} - \mu_{kk}, \quad \lambda_\alpha = \lambda(i, k),$$

где $\lambda(i, k)$ есть матрица

$$(\lambda(i, k))_{i'k'} = [2(m+1)]^{-1/2} \delta_{ii'} \delta_{kk'},$$

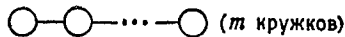
и что вектор μ_α есть диагональная матрица, элементы которой имеют вид

$$(\mu_\alpha)_{ii} = 1/[2(m+1)], \quad (\mu_\alpha)_{kk} = -1/[2(m+1)], \\ (\mu_\alpha)_{i'k'} = 0 \text{ во всех остальных случаях.}$$

Покажите, что простое множество корней есть множество

$$\alpha_i(\mu) = \mu_{i+1 i+1} - \mu_{ii}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Покажите, что угол между μ_{α_i} и $\mu_{\alpha_{i+1}}$ равен 120° , а во всех остальных случаях угол между векторами μ_{α_i} и μ_{α_j} равен 90° , так что диаграмма Дынкина алгебры Λ имеет тип A_m , т. е.



Классификацию и модели простых вещественных алгебр Ли, которые нужны для классификации групп Ли, читатель может найти в книге Хаузнера и Шварца. Напомним, что если Λ — простая вещественная алгебра Ли, то ее комплексификация $\tilde{\Lambda}$ является либо простой алгеброй, либо прямой суммой двух идентичных (т. е. изоморфных) простых комплексных алгебр. Следовательно, для классификации простых вещественных алгебр нужно изучить каждую простую комплексную алгебру, а затем найти все простые вещественные алгебры, из которых ее можно получить путем комплексификации.

Если задана простая комплексная алгебра $\tilde{\Lambda}$, то возможный способ построения алгебры Λ заключается в том, что Λ рассматривается как линейное пространство элементов алгебры $\tilde{\Lambda}$ не над полем скаляров \mathbb{C} , а над полем \mathbb{R} , но этот способ не является единственно возможным. Другие возможности обнаруживаются при рассмотрении так называемых сопряжений в $\tilde{\Lambda}$. *Сопряжение* в комплексной алгебре Ли представляет собой антилинейное отображение S [т. е. $S(a\lambda + b\mu) = \overline{a}S\lambda + \overline{b}S\mu$], которое сохраняет произведения Ли (т. е. $S[\lambda, \mu] = [S\lambda, S\mu]$), причем квадрат этого отображения совпадает с тождественным отображением [т. е. $S(S\lambda) = \lambda$]. Множество всех элементов λ из $\tilde{\Lambda}$, таких, что $S\lambda = \lambda$, с \mathbb{R} в качестве поля скаляров представляет собой простую вещественную алгебру Ли. Полный анализ сопряжений в простых комплексных алгебрах Ли, а также перечень получающихся простых вещественных алгебр приведены в книге Хаузнера и Шварца. Если в качестве примера $\tilde{\Lambda}$ рассмотреть простую комплексную алгебру A_1 , состоящую из матриц размера 2×2 с нулевым следом, то имеется три соответствующие простые вещественные алгебры, а именно сама A_1 (с \mathbb{R} в качестве поля скаляров),

алгебра

$$RA_1 = \{\text{вещественные матрицы размера } 2 \times 2 \text{ с нулевым следом}\}$$

и алгебра

$$QA_1 = \{\text{матрицы размера } 2 \times 2 \text{ вида } iH, \text{ где } H \text{ эрмитова и имеет след, равный нулю}\}.$$

Отметим, кстати, что некоторые из соответствующих групп Ли являются группами $SL(2, \mathbb{C})$, \mathcal{L}_p , $SL(2, \mathbb{R})$, $SU(2)$ и $SO(3)$.

Каждой простой комплексной алгебре A_m с $m > 1$ соответствуют $4 + [(m+1)/2]$ простых вещественных алгебр, где $[]$ означает целую часть.

Исключительной алгебре G_2 соответствуют три вещественных алгебры: G_2 (над \mathbb{R}), $HG_3^{(3)}$, $HG_3^{(1)}$.

25.18. О ПРИМЕНЕНИИ ГРУПП ЛИ И АЛГЕБР ЛИ В ФИЗИКЕ

В гл. 22 была обсуждена роль группы вращений $SO(3)$ как группы симметрии в квантовой механике. В расчетах обычно появляется соответствующая алгебра Ли, а не сама группа. Алгебру Ли группы $SO(3)$, которая, конечно, совпадает с алгеброй Ли группы $SU(2)$, являющейся универсальной накрывающей группой группы $SO(3)$, можно реализовать либо как алгебру Ли вещественных кососимметричных матриц размера 3×3 , либо как алгебру Ли косоэрмитовых матриц размера 2×2 с нулевым следом (в предыдущем параграфе эта алгебра была обозначена через QA_1). Кроме того, эту алгебру можно реализовать как алгебру Ли операторов в гильбертовом пространстве H состояний некоторой физической системы. Если H рассматривать как пространство $L^2(\mathbb{R}^3)$ волновых функций $\psi(x)$ нерелятивистской частицы с нулевым спином, то отображения

$$g_1 \psi(x) \rightarrow \psi(g^{-1}x) \quad [g \in SO(3)]$$

образуют представление группы $SO(3)$ на H , как в § 20.9. Так называемые инфинитезимальные операторы этого представления, рассматривавшиеся в § 20.9, имеют вид

$$L_j = x^l \partial / \partial x^k - x^k \partial / \partial x^l \quad (jkl = 123, 231, 312).$$

Самосопряженные операторы $i\hbar L_j$ соответствуют составляющим момента импульса частицы. Линейные комбинации операторов L_j с вещественными коэффициентами дают некоторую реализацию алгебры Ли Λ группы $SO(3)$.

В физике элементарных частиц подходящие группы симметрии часто неизвестны из-за отсутствия полной теории элементарных частиц, но иногда находятся различные алгебры Ли Λ , играющие определенную роль на эмпирической основе.

Может возникнуть путаница из-за того, что слово «группа» часто используется для обозначения алгебры Ли. В частности, бывают ссылки на «группу G_2 ». Согласно § 25.16, G_2 является алгеброй Ли, а точнее комплексной алгеброй Ли. Группа, фигурирующая

в физической теории, представляет собой, видимо, группу, алгебра Ли которой является одной из трех вещественных алгебр Ли, которые упомянуты в предыдущем параграфе и комплексификация которых дает алгебру G_2 . Как же в таком случае выделить единственную группу? Самый простой и естественный способ состоит в учете следующего обстоятельства: только одна из вещественных алгебр Λ , комплексификация которых приводит к данной алгебре $\hat{\Lambda}$, является алгеброй Ли компактной группы (или, возможно, нескольких компактных групп), а из всех групп Ли G , имеющих данную вещественную алгебру Λ , только одна является односвязной. Следовательно, в частности, существует единственная компактная односвязная группа Ли, соответствующая алгебре G_2 . Но поскольку многие из групп симметрии в физике не являются ни компактными, ни односвязными, разрешение вопроса об идентификации группы, которую следует ассоциировать с заданной алгеброй Ли в физике частиц, требует, по-видимому, дальнейшего развития теории.

Алгебра G_2 использовалась также при изучении атомов с частично заполненными f -оболочками; см. Ракá [1951]. В этом случае теория столь полна, что существует совершенно определенная соответствующая алгебре G_2 группа, которая, согласно Ракá (см. также статью Берендса, Дрейтлейна, Фронсдейла и Ли [1962]), является подгруппой группы $SO(7)$.

Приложение к главе 25.

ДВЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ ЛИ

В данном приложении мы приведем два примера групп Ли, которые не являются линейными, т. е. не имеют точных конечномерных представлений, а значит, не могут быть реализованы как группы матриц.

Для первого примера возьмем в качестве G так называемую *группу Гейвнерга*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Обозначив введенные матрицы через g_x, y, z , путем непосредственных вычислений мы получим, что

$$\begin{aligned} g_{x,0,0}^{-1} &= g_{-x,0,0} \\ g_{0,y,0}^{-1} &= g_{0,-y,0} \\ g_{x,0,0} g_{0,y,0} g_{x,0,0}^{-1} g_{0,y,0}^{-1} &= g_{0,0,xy} \end{aligned} \quad (25.A.1)$$

Отсюда следует, что если ρ — любое представление группы G , то $\rho(g_{0,0,z})$ представляет собой унимодулярную матрицу для любого z , поскольку $\det(\rho(g_{0,0,xy}))$ равен

$$\det \rho(g_{x,0,0}) \det \rho(g_{0,y,0}) \det \rho(g_{x,0,0})^{-1} \det \rho(g_{0,y,0})^{-1} = 1.$$

Допустим теперь, что G_0 —нормальная подгруппа группы G :

$$G_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : n \text{ целое} \right\}.$$

Будет показано, что любое конечномерное представление факторгруппы G/G_0 не является точным; следовательно, G/G_0 не может быть линейной группой.

Пусть $\bar{g}_{x, y, z}$, $0 \leq z < 1$, обозначает элемент группы G/G_0 (смежный класс в G), который содержит $g_{x, y, z}$. Иначе говоря, $\bar{g}_{x, y, z}$ есть бесконечное множество матриц размера 3×3 , а именно матриц

$$\bar{g}_{x, y, z} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z+n \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}.$$

Нетрудно видеть, что по аналогии с (25.А.1)

$$\bar{g}_{x, 0, 0} \bar{g}_{0, y, 0} \bar{g}_{x, 0, 0}^{-1} \bar{g}_{0, y, 0}^{-1} = \bar{g}_{0, 0, z},$$

где $z \equiv xy \pmod{1}$. Отсюда, как и выше, для любого представления ρ группы G/G_0 $\det \rho(\bar{g}) = 1$, если \bar{g} принадлежит подгруппе

$$H = \{ \bar{g}_{0, 0, z} : 0 \leq z < 1 \} \subset G/G_0.$$

Но H изоморфна группе $SO(2)$, когда $2\pi z$ играет роль угла θ ; следовательно, H является компактной и абелевой группой. Согласно общей теории представлений, рассмотренной в § 21.1—21.4, любое представление компактной группы эквивалентно унитарному представлению, а любое унитарное представление абелевой группы вполне приводимо к прямой сумме одномерных представлений. Следовательно, если ρ —любое m -мерное представление факторгруппы G/G_0 , то относительно подходящего базиса в пространстве V^m представление ρ подгруппы $H \cong SO(2)$ имеет диагональный вид:

$$\rho(\bar{g}_{0, 0, z}) = \begin{pmatrix} e^{2\pi i n_1 z} & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & e^{2\pi i n_m z} \end{pmatrix}.$$

Каждое из одномерных представлений, задаваемых диагональными элементами этой матрицы, имеет детерминант, равный 1 для всех \bar{g} из H ; поэтому все целые числа n_1, \dots, n_m равны нулю. Иначе говоря, все элементы подгруппы H представляются единичными матрицами размера $m \times m$; поэтому представление ρ факторгруппы G/G_0 не является точным.

Второй пример не столь элементарен (по крайней мере предстоящее его рассмотрение), потому что используется достаточно глубокая теорема о представлениях алгебр Ли. Будет показано, что если \tilde{G} —универсальная накрывающая группа группы $SL(2, \mathbb{R})$ (т. е. группа вещественных матриц размера 2×2 с детерминантом, равным единице), то \tilde{G} не имеет никаких точных конечномерных представлений.

Получим канонический вид любой матрицы M группы $SL(2, \mathbb{R})$. Пусть R —вращение [элемент подгруппы $SO(2)$], которое преобразует первый столбец матрицы M в вектор с компонентами $a, 0$, где $a > 0$. Тогда RM имеет вид

$$RM = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad ac = 1.$$

Возьмем $a = e^x$, $c = e^{-x}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} e^{-x} & 0 \\ 0 & e^x \end{pmatrix} RM = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для некоторого вещественного y . Отсюда, если вращение $R^{-1} = R_\theta$, мы имеем

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (25.A.2)$$

Это и есть искомым канонический вид. Отсюда следует, что многообразие группы $SL(2, \mathbb{R})$ есть прямое произведение окружности и двух прямых, $S^1 \times \mathbb{R}^2$. Так как универсальным покрытием S^1 является \mathbb{R} , многообразие группы \tilde{G} есть \mathbb{R}^3 .

Алгебра Ли Λ группы $SL(2, \mathbb{R})$ имеет в качестве базиса матрицы

$$\begin{aligned} L_1 &= \left. \frac{\partial M}{\partial \theta} \right|_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ L_2 &= \left. \frac{\partial M}{\partial x} \right|_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ L_3 &= \left. \frac{\partial M}{\partial y} \right|_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где во всех случаях индекс нуль указывает на то, что приведенные матрицы вычислены при $\theta = x = y = 0$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} [L_1, L_2] &= 2L_1 + 4L_3, \\ [L_2, L_3] &= 2L_3, \\ [L_3, L_1] &= L_2. \end{aligned} \quad (25.A.3)$$

Эти уравнения можно разрешить относительно L_1, L_2, L_3 , т. е. произведения Ли, стоящие в левых частях равенств, также образуют базис для алгебры Λ . Из определения произведения Ли через коммутаторы в группе следует, что эта группа порождается коммутаторами, т. е. элементами вида $ghg^{-1}h^{-1}$. Используя рассуждения, приведенные в первом примере, можно получить, что для всех g из $SL(2, \mathbb{R})$ $\det \rho(g) = 1$, когда ρ — любое представление.

Поскольку \tilde{G} и $SL(2, \mathbb{R})$ изоморфны в окрестности единичного элемента, они имеют совпадающие алгебры Ли и Λ также является (в смысле изоморфизма) алгеброй Ли группы \tilde{G} . Следовательно, если ρ — любое представление группы \tilde{G} , то $\det \rho(\tilde{g}) = 1$ для всех \tilde{g} из \tilde{G} . Иначе говоря, любое представление группы \tilde{G} унимодулярно.

Можно показать, что алгебра Ли Λ проста. В самом деле, если Λ имеет идеал J , содержащий ненулевой вектор $\lambda = aL_1 + bL_2 + cL_3$, то J содержит также три вектора $[L_j, \lambda]$ и девять векторов $[L_k, [L_j, \lambda]]$. Непосредственные вычисления с использованием формул (25.A.3) показывают, что L_1, L_2, L_3 можно выразить в виде некоторых линейных комбинаций этих 13 векторов (при этом совсем не обязательно переходить к произведениям Ли порядка выше первого); следовательно, J совпадает с Λ , т. е. Λ является простой алгеброй Ли.

Обозначим через g_θ, x, y элемент (25.A.2) группы $SL(2, \mathbb{R})$, где $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Тогда θ, x, y с неограниченным θ могут быть взяты в качестве координат элементов \tilde{g}_θ, x, y в группе \tilde{G} таким образом, чтобы в накрытии группы $SL(2, \mathbb{R})$ группой \tilde{G} элемент $\tilde{g}'_{\theta'}, x, y$ из \tilde{G} лежал над элементом g_θ, x, y из $SL(2, \mathbb{R})$, когда $\theta' \equiv \theta \pmod{2\pi}$.

Пусть теперь ρ — представление группы \tilde{G} на m -мерном векторном пространстве $V^m = \mathbb{C}^m$. Будет показано, что ρ не является точным. Некоторое представление алгебры Λ , которое будем также обозначать через ρ , индуцируется обычным образом:

$$\rho(L_1) = \partial \rho(\tilde{g}_{\theta, x, y}) / \partial \theta \big|_{\theta=x=y=0} \text{ и т. д.}$$

Согласно Хаузнеру и Шварцу [1968, с. 143, теорема 2], представление (вещественной или комплексной) простой алгебры Ли Λ вполне приводимо, т. е. V^m может быть представлено в виде прямой суммы $V^{k_1} \oplus V^{k_2} \oplus \dots$ инвариантных подпространств, в каждом из которых ρ неприводимо ($\sum_j k_j = m$). Группа \tilde{G} порождается элементами вида e^λ ($\lambda \in \Lambda$), и $\rho(e^\lambda) = e^{\rho(\lambda)}$; следовательно, представление ρ группы \tilde{G} также вполне приводимо. Точнее говоря, каждое из подпространств V^{k_j} пространства V^m инвариантно относительно $\rho(\tilde{g})$ для всех $\tilde{g} \in \tilde{G}$ и сужение ρ_j представления ρ к подпространству V^{k_j} неприводимо. Пусть \tilde{g}_1 — элемент $\tilde{g}_{2\pi, 0, 0}$; \tilde{g}_1 и все его степени лежат над единичным элементом группы $SL(2, \mathbb{R})$ и, значит, коммутируют со всеми $\tilde{g} \in \tilde{G}$; следовательно, по лемме Шура $\rho_j(\tilde{g}_1) = \lambda I$, где I — единичная матрица размера $k_j \times k_j$. Так как каждое представление унимодулярно, $\det \rho_j(\tilde{g}) = 1$ для всех \tilde{g} ; отсюда $\lambda^{k_j} = 1$. Это верно для любого j ; следовательно, существует степень \tilde{g}_1^l элемента \tilde{g}_1 (например, $l = \prod_j k_j$), такая, что $\rho(\tilde{g}_1^l) = \rho(\tilde{g}_1)^l = I$ [единичная матрица размера $m \times m$]. Но \tilde{g}_1^l не является единицей группы \tilde{G} ; поэтому ρ не является точным представлением.

МЕТРИКА И ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА МНОГООБРАЗИИ

Скалярные, векторные и тензорные поля; скобки Ли; ковариантные и контравариантные векторы; законы преобразования; внутреннее и внешнее произведения; свертка; закон частного; производные; метрический тензор; положительно определенная и неопределенная (индефинитная) метрика; римановы и псевдоримановы многообразия; поднятие и опускание индексов; геодезические; вариационное уравнение Эйлера; естественный (натуральный), аффинный или предпочтительный параметр; трехиндексные символы Кристоффеля; пространственноподобные, нулевые и временноподобные геодезические; задачи с начальными данными и двухточечные задачи о геодезических; интегральные уравнения Вольтерра; итерации Пикара; теорема Уайтхеда; продолжение геодезически; аффинно связные многообразия; римановы и псевдоримановы накрывающие многообразия.

Предварительные сведения: элементарная теория многообразий (гл. 23 и 24).

Многообразие по определению гл. 23 — это объект, полностью характеризующий своей локальной топологией: оно является локально n -мерным пространством, удовлетворяющим аксиоме Хаусдорфа об отделимости. В этой и в двух следующих главах многообразие будет наделено геометрической структурой путем введения новых понятий, таких, как геодезические кривые (геодезическая — это аналог прямой в евклидовой геометрии), длины, углы и т. д. Наиболее важным из них является понятие *геодезической*, которое в основных интересующих физиков геометриях получается либо из понятия метрики, либо из понятия аффинной связности; для нас исходным будет понятие метрики, поскольку она подобна расстоянию в общеизвестной евклидовой геометрии.

Грубо говоря, геометрические свойства есть нечто противоположное глобальным топологическим свойствам данного многообразия, для которого последние выражаются посредством целочисленных или дискретных величин, подобных числу компонент, фундаментальной группе, высшим гомотопическим группам, тогда как геометрия описывается непрерывными вещественными величинами — длинами, углами, натуральным параметром вдоль геодезической (см. § 26.6, 26.7 и 26.12).

Риманова геометрия исходит из метрической дифференциальной формы $ds^2 = \sum g_{jk} dx^j dx^k$ (в данной координатной системе), которая и определяет геометрические свойства. Геометрия единичной двумерной сферы служит простым и известным примером неплоской двумерной геометрии; для нее $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$

(в сферической системе координат). Геодезическая (наикратчайший путь) между двумя точками на сфере — дуга большого круга; отсюда следуют различные теоремы сферической геометрии, например сумма углов треугольника (сторонами которого служат геодезические) превышает π на величину, равную площади треугольника.

Хотя общее риманово многообразие в принципе можно было бы рассматривать как вложенное в некоторое евклидово пространство E^N достаточно большой размерности (точно так же, как двумерную сферу можно рассматривать как поверхность единичного шара в E^3), при изучении внутренних геометрических понятий, порождаемых метрикой, удобнее пользоваться внутренними (собственными) координатами.

Если метрическая форма на многообразии M положительно определена (см. § 26.4), то M называется римановым многообразием; если она не положительна (индефинитна), то M называется псевдоримановым многообразием — такие многообразия фигурируют в общей теории относительности. Как мы увидим, существуют глубокие отличия между этими двумя типами многообразий. Далее предполагается, что M является связным и C^k -гладким многообразием, где k достаточно велико, чтобы обеспечивать существование любых встречающихся в данной теории производных, — для этой и следующих двух глав достаточно взять $k=4$. В теории относительности нельзя предполагать, что M принадлежит классу C^∞ , потому что метрика определяется распределением материи, которое необязательно бесконечно дифференцируемо, а также потому, что уравнения гравитационного поля, будучи гиперболическими, допускают распространение разрывов различных производных от $g_{\mu\nu}$ в виде гравитационных волн.

26.1. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ НА МНОГООБРАЗИИ

В евклидовом пространстве с декартовыми координатами x^1, \dots, x^n векторное поле описывается n функциями $v^i(x^1, \dots, x^n)$, $i=1, \dots, n$, причем при преобразовании декартовых координат вращением осей компоненты v^1, \dots, v^n векторов преобразуются той же матрицей вращения, что и координаты x^1, \dots, x^n .

Если рассматриваются криволинейные координаты, то становится необходимым различать два типа векторов: ковариантные и контравариантные, которые имеют различное физическое или математическое происхождение (иногда вводятся также так называемые векторные плотности разнообразных порядков; это часто удобно, но не необходимо).

Прежде всего рассмотрим *скалярное поле (скаляр)* на многообразии M , т. е. функцию $f(P)$ на M , вещественнозначную, если не сказано другое. Когда $f(P)$ задана во всех точках $P \in M$,

как в § 23.5, с каждой картой $\{U, \varphi, N\}$ связана функция $\hat{f}(x^1, \dots, x^n) = \hat{f}(\mathbf{x})$, определяемая уравнениями

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = f(P), \quad \mathbf{x} = \varphi(P) \quad \forall P \in U. \quad (26.1.1)$$

Множество всех функций $\hat{f}(\dots)$, связанных с каждой картой, можно рассматривать как определение скалярного поля $f(P)$. Если $\{U', \varphi', N'\}$ — другая координатная карта, то связь между соответствующими функциями \hat{f} и \hat{f}' на перекрытии двух карт выражается просто:

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \hat{f}'(\mathbf{x}'), \quad (26.1.2)$$

где

$$\mathbf{x} = \varphi(P), \quad \mathbf{x}' = \varphi'(P). \quad (26.1.3)$$

Соотношение (26.1.2) интерпретируется следующим образом: оно становится тождеством по x^1, \dots, x^n , если x'^i (в правой части) выражаются через x^i , или тождеством по x'^i, \dots, x'^n , если x^i (в левой части) выражаются через x'^i ; \hat{f} и \hat{f}' принимают одно и то же значение в данной точке $P \in M$.

В то время как скалярное поле представляет собой множество функций $\hat{f}(\dots)$, связанных с каждой картой, векторное поле или тензорное поле являются множествами наборов функций, причем с каждой картой связан один набор. На перекрытии двух карт два соответствующих набора функций связаны законом преобразования, являющимся обобщением условия (26.1.2) для скаляров.

В качестве первого примера векторного поля рассмотрим градиент скаляра $f(P)$ (относительно скаляра предполагается, что он принадлежит классу C^1). На карте $\{U, \varphi, N\}$ градиент состоит из частных производных функции (26.1.1), а именно

$$v_i(x^1, \dots, x^n) = \partial \hat{f}(x^1, \dots, x^n) / \partial x^i, \quad (26.1.4)$$

или, короче,

$$v_i(\mathbf{x}) = \partial \hat{f}(\mathbf{x}) / \partial x^i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (26.1.5)$$

Если на перекрытии двух карт связи, устанавливаемые уравнениями (26.1.3), описываются (как и в § 23.2) функциями

$$x' = \hat{x}^i(x'^1, \dots, x'^n), \quad (26.1.6)$$

$$x'^i = \hat{x}'^i(x^1, \dots, x^n) \quad (26.1.7)$$

и если на второй карте также записан соответствующий градиент

$$v'_i(x') = \partial \hat{f}'(x') / \partial x'^i, \quad (26.1.8)$$

то связь между двумя наборами функций $\{v_i\}$ и $\{v'_i\}$ на перекрытии двух координатных систем выражается равенством

$$v'_i(x') = (\partial \hat{x}^k(x') / \partial x'^i) v_k(x). \quad (26.1.9)$$

(Здесь используется соглашение о суммировании, согласно которому правая часть равенства означает сумму по k от 1 до n ; k называют *немым индексом*.) Как и (26.1.1), равенство (26.1.9) интерпретируется как тождество, если x^i выражены через x'^i или x'^i выражены через x^i .

В дальнейшем указание на аргументы будет опускаться; тогда равенство (26.1.9) записывается короче:

$$v_i = (\partial x^k / \partial x'^i) v_k; \quad (26.1.10)$$

это равенство выражает закон преобразования для ковариантных векторов.

Обозначение x^k можно использовать как для переменной, так и для функции; в (26.1.10) оно использовано для функции, и нужно смотреть на «знаменатель» частной производной, чтобы узнать, какие переменные являются независимыми: если там есть штрих, то независимыми переменными являются x'^1, \dots, x'^n , а если там два штриха, то независимые переменные — x''^1, \dots, x''^n , и т. д. Это соглашение является стандартным.

*Ковариантное*¹⁾ *векторное поле* на M определяется как множество наборов $\{v_i\}$ n функций, причем с каждой картой на M связан один такой набор, а соотношение между двумя такими наборами на перекрытии соответствующих карт выражается законом преобразования (26.1.10).

Замечания. (1) Векторное поле не обязательно является градиентом какого-то скалярного поля, как это было в предыдущем примере. (2) Две карты могут перекрываться в точности по их общей области определения $U \subset M$; в этом случае о законе преобразования (26.1.10) говорят как о замене независимых переменных в обычном смысле.

Закон преобразования *транзитивен*: если вслед за (26.1.10) делается другое преобразование координат x'^j в координаты x''^j , то v''_j и v_j связаны должным образом, потому что на перекрытии трех карт

$$v''_j = \frac{\partial x'^k}{\partial x''^j} v'_k = \frac{\partial x'^k}{\partial x''^j} \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} v_l = \frac{\partial x^l}{\partial x''^j} v_l. \quad (26.1.11)$$

Чтобы получить теперь пример так называемого *контравариантного векторного поля*, рассмотрим течение жидкости на M . Если в момент времени t частица жидкости изображается точкой

¹⁾ Префикс «ко» означает «так же, как», «одинаковый» и т. д., а префикс «контра» (см. ниже) указывает на противоположность. Здесь термин «ковариантный» (вектор, тензор) поясняет, что данный объект изменяется при преобразовании координат так же, как градиент (т. е. при помощи транспонированной обратной матрицы Якоби преобразования $x \rightarrow x'$); контравариантные объекты преобразуются «противоположным» образом, т. е. при помощи матрицы Якоби, например так же, как скорость (см. далее). — *Прим. перев.*

$P(t)$, то в некоторой карте $\{U, \varphi, N\}$ ее координатами являются $x^k(t)$, где $x(t) = \varphi(P(t))$; величины

$$v^k(t) = dx^k(t)/dt, \quad k = 1, \dots, n,$$

называются *компонентами обобщенной скорости*. [Они являются декартовыми компонентами скорости соответствующей точки $x(t)$ в координатном пространстве \mathbb{R}^n .] Если $x'^k(t)$ и $v'^k(t)$ — соответствующие координаты и компоненты скорости относительно другой карты $\{U', \varphi', N'\}$, то

$$v'^k(t) = (\partial \hat{x}'^k / \partial x^j) v^j(t).$$

Если для описания течения всей жидкости (а не одной частицы) рассматриваются компоненты $v^i(x)$ скорости частицы жидкости, которая в момент времени t находится в точке x , то закон преобразования выглядит так:

$$v'^k(x') = (\partial \hat{x}'^k(x) / \partial x^j) v^j(x).$$

Подобно (26.1.1) и (26.1.9), это равенство является тождеством на перекрытии карт, если обе его части выражены либо в переменных x^i , либо в переменных x'^i . Мы снова будем опускать излишние подробности обозначений.

Контравариантное векторное поле на M определяется как множество наборов $\{v^j\}$ n функций; с каждой картой связан один набор, причем закон преобразования

$$v'^k = (\partial x'^k / \partial x^j) v^j \quad (26.1.12)$$

выполняется для любых двух таких наборов на перекрытии соответствующих карт. Отличие этого преобразования от (26.1.10) подчеркивается местоположением штриха в производной.

Этот закон преобразования также транзитивен.

Замечание. В римановых и псевдоримановых пространствах (включая евклидовы пространства) любой вектор может быть представлен как в ковариантной, так и в контравариантной форме; формулы для поднятия и опускания индексов при помощи метрического тензора g_{jh} будут приведены ниже (см. § 26.5). Однако в некоторых случаях, например в варианте Вейля единой теории поля, расстояния и длины векторов только относительно, метрического тензора вообще нет, а есть только так называемая аффинная связность (см. § 26.12). В таких случаях ковариантные и контравариантные векторы имеют существенно разную природу. Отметим также, что координаты x^1, \dots, x^n не являются компонентами вектора, потому что они не преобразуются по закону (26.1.12), за исключением случая однородных линейных преобразований.

Когда на многообразии добавляют или исключают согласованные карты, как это описано в гл. 23, предполагается, что и соответ-

ствующие наборы компонент векторов $\{v_j\}$ или $\{v^j\}$ также добавляются или исключаются согласно законам преобразования (26.1.10) или (26.1.12). Свойства векторных полей, инвариантные при таких добавлениях и исключениях, рассматриваются как их внутренние свойства. В этом смысле понятие ковариантного (или контравариантного) векторного поля не зависит от координат.

Упражнения

1. Пусть u^j и v^j — гладкие контравариантные векторные поля, и пусть

$$\omega^j = u^k \partial v^j / \partial x^k - v^k \partial u^j / \partial x^k. \quad (26.1.13)$$

Покажите, что величины $\{\omega^j\}_1^n$ преобразуются согласно равенству (26.1.12) и поэтому образуют векторное поле.

Введем обозначение $\mathbf{w} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ и назовем \mathbf{w} *скобкой Ли* векторов \mathbf{u} и \mathbf{v} ¹⁾. Ясно, что $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = -[\mathbf{v}, \mathbf{u}]$. Покажите, что если u^j , v^j , ω^j — произвольные гладкие векторные поля, то

$$[[\mathbf{u}, \mathbf{v}], \mathbf{w}] + [[\mathbf{v}, \mathbf{w}], \mathbf{u}] + [[\mathbf{w}, \mathbf{u}], \mathbf{v}] = 0 \quad (\text{тождество Якоби}).$$

Отсюда следует, что если, исходя из двух или более C^∞ -векторных полей на C^∞ -многообразии, получить все возможные векторные поля при помощи линейных комбинаций (с постоянными коэффициентами) и скобок Ли, то в результате возникнет алгебра Ли (возможно, бесконечномерная).

2. Пусть u^j и v^j — гладкие контравариантные векторные поля, скобка Ли которых равна нулю, т. е.

$$u^k \partial v^j / \partial x^k = v^k \partial u^j / \partial x^k.$$

Нужно показать, что если точка Q на многообразии является концом пути, начинающегося в точке P и следующего вдоль интегральной кривой векторного поля u^j , т. е. вдоль решения системы

$$dx^j / dt = u^j \quad (j = 1, \dots, n),$$

до момента времени t_1 , а затем вдоль интегральной кривой поля v^j до момента t_2 , то той же точки Q можно достичь, следуя от точки P сначала по интегральной кривой поля v^j до некоторого момента времени t_3 , а затем — по интегральной кривой поля u^j до некоторого момента времени t_4 . С этой целью возьмем поверхность $x^j(s, t)$ на многообразии, определяемую следующими задачами с начальными данными:

$$\partial x^j(s, 0) / \partial s = u^j(x(s, 0)),$$

$$x^j(0, 0) \text{ задано (точка } P),$$

и

$$\partial x^j(s, t) / \partial t = v^j(x(s, t)),$$

$$x^j(s, 0) \text{ задано (из предыдущей задачи)}$$

(см. рис. 26.1). Покажите, что тогда $x(s, t)$ удовлетворяет и уравнению

$$\partial x^j(s, t) / \partial s = u^j(x(s, t))$$

при $t=0$, для чего докажите, что величины в обеих частях этого уравнения являются решениями указанных задач с начальными данными (относительно t), а именно тех же самых «обыкновенных» дифференциальных уравнений (s фикс-

¹⁾ Или их коммутатором. — Прим. перев.

сировано)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial s} x^j(s, t) \right) = \frac{\partial v^j(x(s, t))}{\partial x^k} \left(\frac{\partial}{\partial s} x^k(s, t) \right),$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t} (u^j(x(s, t))) = \frac{\partial v^j(x(s, t))}{\partial x^k} u^k(x(s, t))$$

с теми же самыми начальными условиями, потому что

$$\partial x^j(s, 0) / \partial s = u^j(x(s, 0)).$$

Поверхность $x^j(s, t)$ состоит из точек, которых можно достичь, следуя из P по зигзагообразным путям, каждый отрезок которых является отрезком

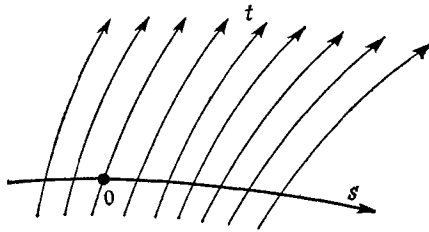


Рис. 26.1.

интегральной кривой либо для поля u^j , либо для поля v^j .

26.2. ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ

Контравариантные тензоры T^{jk} , T^{jkl} и т. д. произвольного ранга (*ранг*—это число индексов) преобразуются согласно закону

$$T'^{j'k' \dots} = (\partial x^{j'} / \partial x^r) (\partial x^{k'} / \partial x^s) \dots T^{rs \dots} \quad (26.2.1)$$

Соглашение о суммировании применяется здесь ко всем повторяющимся индексам r, s, \dots в правой части равенства; в результате получается кратная сумма. Ковариантные тензорные поля T_{jk} , T_{jkl} и т. д. преобразуются согласно закону

$$T'_{i'k' \dots} = (\partial x^r / \partial x^{i'}) (\partial x^s / \partial x^{k'}) \dots T_{rs \dots} \quad (26.2.2)$$

а смешанные тензоры—согласно правилу, указанному в следующем примере:

$$T'^{j'k' l' m} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^r} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^s} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^{t'}} \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^u} T^{rstu} \quad (26.2.3)$$

Все эти законы преобразования транзитивны. О последнем тензоре говорят, что он имеет *контравариантный ранг* 3 и *ковариантный ранг* 1.

Законы преобразования показывают, что если u^j, v^j — контравариантные векторы, а ω_j, z_j — ковариантные векторы, то величины

$$T^{jk} = u^j v^k, \quad T_{jk} = \omega_j z_k, \quad T^j_k = u^j \omega_k, \quad T^j_l = u^j v^k \omega_l$$

и т. д. определяют тензоры обозначенного типа. Вообще если

$$T^{i_1 i_2 \dots k_1 k_2 \dots l_1 l_2 \dots} \quad \text{и} \quad S^{r_1 r_2 \dots s_1 s_2 \dots t_1 t_2 \dots}$$

— любые два тензора, то произведения

$$(T^{i_1 i_2 \dots k_1 k_2 \dots l_1 l_2 \dots}) (S^{r_1 r_2 \dots s_1 s_2 \dots t_1 t_2 \dots})$$

являются компонентами тензора

$$R^{i_1 i_2 \dots k_1 k_2 \dots l_1 l_2 \dots r_1 r_2 \dots s_1 s_2 \dots t_1 t_2 \dots},$$

контравариантные и ковариантные ранги которого суть суммы соответствующих рангов тензоров T и S . Описанный процесс построения тензоров называется *внешним умножением*¹⁾ векторов и тензоров.

Если у некоторого тензора один и тот же символ встречается как в верхних, так и в нижних индексах, то вступает в силу соглашение о суммировании (относительно повторяющихся индексов) и в результате получается тензор меньшего ранга; например, если задан тензор R^j_{klm} , то можно определить тензор $R_{kl} = R^j_{klj}$, или, например, из тензора S^k_{lm} можно получить скаляры S^k_{jk} и S^k_{kj} . Такая процедура называется *сверткой*. Внешнее умножение с последующей сверткой называется *внутренним умножением*, например если v^j и ω_j — векторы, то $v^j \omega_j$ — скаляр²⁾).

Легко проверяемым обращением последнего результата служит *закон частного*³⁾, который утверждает, что если задано множество наборов величин $\{v^j\}$ и с каждой картой, содержащей некоторую точку P_0 , связан один такой набор и если для *каждого* ковариантного вектора $\{\omega_j\}$, определенного в точке P_0 , величина $v^j \omega_j$ является скаляром (инвариантом при изменении координатных систем), то наборы $\{v^j\}$ определяют контравариантный вектор (в точке P_0). Ковариантные и контравариантные векторы здесь можно поменять ролями. Вообще если, например, заданы наборы n^3 величин $\{T_{jk}^l\}$, такие, что величины

$$S_j = T_{jk}^l v^k \omega_l$$

¹⁾ Чаще это умножение называется *тензорным*, а внешним умножением (кососимметрических) тензоров называют альтернирование тензорного произведения (см., например, Мищенко и Фоменко [1980]). — *Прим. перев.*

²⁾ То есть обычное скалярное произведение векторов. — *Прим. перев.*

³⁾ Наиболее общую формулировку этой теоремы см. Векуа [1978, с. 73]. — *Прим. перев.*

преобразуются согласно закону преобразования ковариантных векторов (26.1.10) для любых векторов $\{v^k\}$ и $\{\omega_l\}$, определенных в точке P_0 , то $\{T_{jk}^l\}$ преобразуется согласно закону преобразования тензоров соответствующего типа — ковариантных ранга 2 и контравариантных ранга 1. Короче говоря, T_{jk}^l является тензором.

Замечание о терминологии, встречающейся в некоторых книгах по дифференциальной геометрии. Часто используется иное определение векторного поля, которое будет приведено ниже: если v^j — контравариантное векторное поле, то линейный оператор $L \stackrel{\text{def}}{=} v^j \partial / \partial x^j$, примененный к дифференцируемому скаляру f , дает скаляр $Lf = v^j (\partial f / \partial x^j)$. Если многообразие и функции f и v^j принадлежат классу C^∞ , то L отображает класс C^∞ функций в себя. Более того, если f и g — любые две такие функции, то

$$Lfg = fLg + gLf; \quad (26.2.4)$$

линейный оператор, обладающий этим свойством, называется, как и в гл. 25, *дифференцированием*. Обратно, если L — любое дифференцирование на алгебре C^∞ -функций, то может быть построено такое векторное поле v^j , что $L = v^j (\partial / \partial x^j)$, если оператор L имеет достаточно локальный характер. Для того чтобы L был представим в таком виде, необходимо, очевидно, чтобы в случае согласованности скаляров f и g в некоторой окрестности $U \subset M$ скаляры Lf и Lg также были бы согласованы в U . Верно даже большее: если L можно представить таким образом, P — произвольная точка, а равенство

$$\partial f / \partial x^j |_P = \partial g / \partial x^j |_P \quad (j = 1, \dots, n) \quad (26.2.5)$$

выполняется на любой карте (следовательно, на любой карте, содержащей P), то Lf и Lg должны быть согласованы в P . (Оказывается, что любой линейный оператор L , удовлетворяющий этому условию, обязательно является дифференцированием.) Чтобы построить поле v^j в любой точке P данной карты, определим функции $f^{(j)}(x)$, $j = 1, \dots, n$, равенствами

$$f^{(j)}(x) = x^j,$$

выполняющимися в окрестности точки P , а затем положим

$$v^j(x) = Lf^{(j)}(x).$$

Это определяет функции $v^j(x)$ на всей карте. Введем обозначение

$$g(x) = x^j (\partial f / \partial x^j |_P)$$

для любого C^∞ -скаляра $f(x)$ и для любой точки P на карте. Ясно, что f и g удовлетворяют равенствам (26.2.5); следовательно,

$$Lf|_P = Lg|_P = v^j \partial f / \partial x^j |_P. \quad (26.2.6)$$

Поскольку в левой части стоит скаляр, из закона частного следует, что v^j преобразуются при замене координат как компоненты контравариантного векторного поля и что L является дифференцированием. Поэтому между локальными дифференцированиями и векторными полями существует взаимно однозначное соответствие, и на основании этого некоторые авторы определяют векторное поле как *локальное дифференцирование на алгебре C^∞ -функций на многообразии*. Мы будем использовать первое определение, которое является традиционным для большинства областей физики.

26.3. МЕТРИКА В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Если X^1, \dots, X^n —декартовы координаты в евклидовом пространстве, а x^1, \dots, x^n —криволинейные координаты, через которые декартовы координаты выражаются в виде $X^i = X^i(x^1, \dots, x^n)$, $i = 1, \dots, n$, то мы получаем играющий важную роль *метрический тензор g_{jk}* :

$$g_{jk} = g_{jk}(x^1, \dots, x^n) = \frac{\partial X^1}{\partial x^j} \frac{\partial X^1}{\partial x^k} + \dots + \frac{\partial X^n}{\partial x^j} \frac{\partial X^n}{\partial x^k}. \quad (26.3.1)$$

Очевидно, что для данной координатной системы x^1, \dots, x^n мы получим те же самые функции $g_{jk}(\dots)$, если X^j заменить на другие декартовы координаты, скажем \tilde{X}^j , полученные из X^j вращением осей координат (или вообще путем любого движения). Пусть теперь x^i и $x^i + \Delta x^i$ ($i = 1, \dots, n$)—координаты двух точек P_1 и P_2 , а X^i и $X^i + \Delta X^i$ —их декартовы координаты, т. е.

$$\begin{aligned} X^i &= X^i(x^1, \dots, x^n), \\ X^i + \Delta X^i &= X^i(x^1 + \Delta x^1, \dots, x^n + \Delta x^n). \end{aligned} \quad (26.3.2)$$

Квадрат расстояния между P_1 и P_2 определяется равенством

$$(d(P_1, P_2))^2 = (\Delta X^1)^2 + \dots + (\Delta X^n)^2; \quad (26.3.3)$$

если Δx^i —малые величины, то после разложения (26.3.2) в ряды Тейлора получается

$$(d(P_1, P_2))^2 = g_{jk}(x^1, \dots, x^n) \Delta x^j \Delta x^k + O(|\Delta x|^3), \quad (26.3.4)$$

где $|\Delta x| = \max_i |\Delta x^i|$. Это равенство обычно записывают в виде

$$ds^2 = g_{jk} dx^j dx^k; \quad (26.3.5)$$

величина ds называется *линейным элементом*. Из (26.3.1) следует, что при преобразовании координат x^1, \dots, x^n в другие координаты x'^1, \dots, x'^n функции $g_{jk}(\dots)$ преобразуются как компоненты ковариантного тензора второго ранга, что согласуется с обозначением g_{jk} . Более того, этот тензор симметричен: $g_{jk} = g_{kj}$. Равенство (26.3.4) показывает, что числа g_{jk} образуют положительно определенную матрицу. Далее будет предполагаться, что

аналогичный метрический тензор существует в любом римановом пространстве, хотя и необязательно в виде (26.3.1), поскольку декартова система координат может не существовать, если пространство не является евклидовым.

26.4. РИМАНОВЫ И ПСЕВДОРИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

Риманово многообразие—это n -мерное многообразие M , на котором определен тензор второго ранга g_{jk} ; этот тензор на всем M (1) симметричен ($g_{jk} = g_{kj}$) и (2) положительно определен ($g_{jk}v^jv^k > 0$ для любого ненулевого вектора $\{v^j\}$). Все собственные значения матрицы (g_{jk}) положительны. Заметим, что если тензор g_{jk} симметричен, то и тензор

$$g'_{jk} = (\partial x^r / \partial x'^j) (\partial x^s / \partial x'^k) g_{rs} \quad (26.4.1)$$

симметричен. Заметим также, что положительная определенность при этом законе преобразования сохраняется, потому что $g_{jk}v^jv^k$ —скаляр.

Детерминант матрицы (g_{jk}) обозначается через g или $g(x^1, \dots, x^n)$; он не образует скалярного поля, поскольку его значение в данной точке многообразия зависит от системы координат.

Закон преобразования (26.4.1) в матричных обозначениях выглядит так:

$$G' = JGJ^T, \quad (26.4.2)$$

где G —матрица (g_{jk}) , а J —матрица Якоби.

Для псевдориманова многообразия не требуется, чтобы матрица (g_{jk}) была положительно определенной; необходимо лишь, чтобы она была невырожденной и симметричной. Каждое собственное значение G либо > 0 , либо < 0 ; сигнатурой s матрицы G называется число положительных собственных значений минус число отрицательных собственных значений. Согласно закону инерции Сильвестра для квадратичных форм, сигнатура матрицы $G' = JGJ^T$ совпадает с сигнатурой матрицы G ; доказательство можно найти в книге Бохера [1922]. Следовательно, сигнатура s в каждой точке не зависит от выбора системы координат. Собственные значения матрицы G являются непрерывными функциями ее элементов g_{jk} , а значит, и координат x^1, \dots, x^n и никогда не обращаются в нуль; следовательно, никакое собственное значение не может изменять своего знака при изменении $\{x^i\}$. Так как M —связное многообразие, сигнатура s матрицы G постоянна на M . В общей теории относительности M имеет размерность 4 и сигнатуру 2, так что G на всем M имеет три положительных и одно отрицательное собственные значения.

Поскольку $\det G \neq 0$, матрица G обратима; элементы обратной матрицы обозначаются через $g^{jk} = g^{jk}(x^1, \dots, x^n)$; эти функции преобразуются по формуле

$$g'^{jk} = (\partial x'^j / \partial x^r) (\partial x'^k / \partial x^s) g^{rs}. \quad (26.4.3)$$

Это равенство можно получить при помощи вычисления матрицы, обратной матрице (26.4.2), учитывая при этом, что матрицы Якоби обратных преобразований являются обратными матрицами. Отсюда следует, что g^{jk} является контравариантным тензором ранга 2.

Если \mathcal{S} есть n -мерная гиперповерхность в евклидовом пространстве E^N , где $N > n$, то \mathcal{S} можно рассматривать как риманово многообразие с той метрикой, которую \mathcal{S} наследует из E^N . Если x^1, \dots, x^n — внутренние координаты на части U гиперповерхности \mathcal{S} и X^1, \dots, X^N — декартовы координаты в E^N , причем на U

$$X^i = X^i(x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, N,$$

то, как и в § 26.2, расстояние d (в E^N) между двумя точками x^j и $x^j + \Delta x^j$ на \mathcal{S} получается по формуле

$$\begin{aligned} d^2 &= \sum_{i=1}^N [X^i(x^1, \dots, x^n) - X^i(x^1 + \Delta x^1, \dots, x^n + \Delta x^n)]^2 = \\ &= g_{jk} \Delta x^j \Delta x^k + O(|\Delta x^3|), \end{aligned}$$

где

$$g_{jk} = \sum_{i=1}^N (\partial X^i / \partial x^j) (\partial X^i / \partial x^k).$$

Говорят, что \mathcal{S} погружено в E^N и что g_{jk} — наследственный (индуцированный) метрический тензор.

ПРИМЕР

Если $x^1 = \theta$ и $x^2 = \varphi$ — сферические координаты на единичной сфере, где $0 < \theta < \pi$, $-\pi < \varphi < \pi$, а X, Y, Z — декартовы координаты в E^3 , то

$$X = \sin x^1 \cos x^2, \quad Y = \sin x^1 \sin x^2, \quad Z = \cos x^1$$

и

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = \sin^2 x^1.$$

Это обычно записывают в виде $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$; то же самое можно получить из выражения для линейного элемента $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$ в сферической системе координат в E^3 , положив $r = 1$, $dr = 0$.

Заметим (доказательство см. в книге Эйзенхарта [1926]), что n -мерное риманово многообразие можно всегда погрузить в E^N , где $N = \frac{1}{2}n(n+1)$, хотя для того, чтобы погрузить многообразие как гиперповерхность без самопересечения (т. е. *вложить*),

требуется пространство большей размерности (см. обсуждение бутылки Клейна в § 23.1)¹⁾.

Псевдориманово многообразие также можно погрузить в плоское пространство (обобщенное пространство Минковского) подходящей размерности и сигнатуры. Однако это утверждение имеет ограниченное обращение: гладкая поверхность в такого рода плоском пространстве является псевдоримановым многообразием только в том случае, когда она нигде не параллельна световому конусу.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть \mathcal{S} — риманово многообразие с одной координатной системой $x^1 = \xi$, $x^2 = \eta$ и с метрическим тензором, задаваемым матрицей

$$(g_{jk}) = \frac{1}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2} \begin{pmatrix} 1 + \eta^2 & -\xi\eta \\ -\xi\eta & 1 + \xi^2 \end{pmatrix};$$

координаты ξ и η могут изменяться на всей (ξ, η) -плоскости. Покажите, что \mathcal{S} может быть погружено в E^3 как полусфера.

2. Аналогично найдите погружение в E^3 многообразия с метрическим тензором

$$(g_{jk}) = \begin{pmatrix} 1 + \eta^2 & \xi\eta \\ \xi\eta & 1 + \xi^2 \end{pmatrix}.$$

26.5. ПОДНЯТИЕ И ОПУСКАНИЕ ИНДЕКСОВ

Если v^j — любой контравариантный вектор на римановом или псевдоримановом многообразии, то ковариантный вектор $v_j = g_{jk}v^k$, полученный как внутреннее произведение v^j на метрический тензор, рассматривается как просто другое представление v^j ; говорят, что v_j получено из v^j *опусканием индекса*, и когда один и тот же символ используется для контравариантного и ковариантного векторов, предполагают, что они связаны именно таким образом. Аналогично, если w_j — произвольный ковариантный вектор, говорят, что контравариантный вектор $w^j = g^{jk}w_k$ получен *поднятием индекса*. Если индекс сначала поднимается, а затем опускается (или наоборот), получается исходный вектор, потому что (g_{jk}) и (g^{jk}) — взаимно обратные матрицы, так что $g_{jk}g^{kl}w_l = w_j$. Точно так же можно опустить или поднять любой индекс любого тензора, например

$$S_j^k{}_i = g^{km}S_{jmi} = g_{jm}S_i{}^{km} \text{ и т. д.};$$

заметим, что горизонтальное упорядочивание индексов должно сохраняться, если тензор не является симметрическим. Ясно, что g^{jk} — это просто результат поднятия обоих индексов g_{jk} ; смешан-

¹⁾ Отображение ψ многообразия M в E^N называется *погружением* (*иммерсией*), если его матрица Якоби в любой точке невырождена; оно называется *вложением*, если является взаимно однозначным отображением многообразия M на его образ в E^N . — *Прим. перев.*

ная форма метрического тензора имеет вид

$$g_k^j = g^{jl} g_{lk} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases} = \delta_k^j;$$

в этом частном случае привычно писать индексы без горизонтального разделения (g_k^j вместо g^j_k или g_k^j), что допустимо вследствие симметрии.

26.6 ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

Оставшаяся часть главы, за исключением последнего параграфа, посвящена геодезическим. Однако это еще не совсем геометрия, потому что мы будем иметь дело в основном с аналитическими методами и связями. Геометрические свойства появятся в следующей главе с введением таких понятий, как параллельный перенос вдоль кривой.

Пусть \mathcal{C} — гладкая кривая на римановом многообразии M с началом P_1 и концом P_2 . Предположим сначала, что \mathcal{C} лежит на одной координатной карте и в этой карте описывается функциями $x^j(w)$, $a \leq w \leq b$, которые принадлежат классу C^2 . Преобразования одной карты в другую будут рассмотрены позднее. Величина

$$L = \int_a^b \sqrt{g_{kl} \dot{x}^k \dot{x}^l} dw = \int_a^b ds \quad (26.6.1)$$

называется *длиной* кривой \mathcal{C} . (Если M погружено в евклидово пространство E^N более высокой размерности, как это описано в § 26.4, то L — в точности длина \mathcal{C} , как кривой в E^N .) Подкоренное выражение в (26.6.1) положительно, потому что метрический тензор в римановом пространстве положительно определен (о псевдоримановых пространствах см. § 26.7). Это подкоренное выражение следует рассматривать как функцию от w :

$$g_{kl}(x^1(w), \dots, x^n(w)) (dx^k(w)/dw) (dx^l(w)/dw) \stackrel{\text{def}}{=} \\ \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n), \quad (26.6.2)$$

где точка обозначает d/dw , а каждый аргумент функции $\Phi(\dots)$ понимается как соответствующая функция от w .

Заметим, между прочим, что если кривая \mathcal{C} лежит на пересечении двух карт, то в любой из них длина L оказывается одним и тем же числом, поскольку выражение (26.6.2) является скаляром и для любого w значение Φ не зависит от выбора системы координат; следовательно, значение L , полученное из (26.6.1), оказывается инвариантом. Если \mathcal{C} — кусочно гладкая кривая, то под ее длиной понимается сумма длин ее гладких кусков.

Если можно найти такую гладкую кривую \mathcal{C}_0 от P_1 до P_2 , определяемую функциями y^k :

$$\mathcal{C}_0: x^k = y^k(w) \quad (a \leq w \leq b), \quad (26.6.3a)$$

что интеграл L для \mathcal{C}_0 оказывается меньше, чем для любых других кривых, соединяющих P_1 и P_2 , то очевидно, что \mathcal{C}_0 является самой короткой среди таких кривых. Чтобы сравнить \mathcal{C}_0 с соседними кривыми, рассмотрим кривые \mathcal{C} вида

$$\mathcal{C}: x^k = y^k(w) + \varepsilon z^k(w), \quad (26.6.3б)$$

где ε — малый параметр, а z^k — произвольные C^2 -функции, такие, что $z^k(a) = z^k(b) = 0$ ($k = 1, \dots, n$); тогда

$$L = L_0 + \frac{1}{2} \varepsilon \int_a^b \Phi^{-1/2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^k} z^k + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^k} \dot{z}^k \right) dw + O(\varepsilon^2), \quad (26.6.4)$$

где L_0 — длина \mathcal{C}_0 . У функции Φ и ее производных аргументы x^k и \dot{x}^k следует рассматривать как функции на \mathcal{C}_0 , т. е. как $y^k(w)$ и $\dot{y}^k(w)$. Чтобы значение L было минимумом, интеграл в (26.6.4) должен обращаться в нуль при любом выборе функций $z^k(w)$, а это условие приводит к дифференциальным уравнениям относительно функций $y^k(w)$, описывающих кривую \mathcal{C}_0 . Если этот интеграл обращается в нуль при всех z^k , т. е. если y^k удовлетворяют этим дифференциальным уравнениям, то кривая \mathcal{C}_0 называется *геодезической* (или *геодезической кривой*) на M ; кривая \mathcal{C}_0 может быть *наискратчайшим* путем от P_1 до P_2 , а может и не быть им (см. примеры ниже), однако в любом случае значение L *стационарно* на \mathcal{C}_0 .

В частности, если M — евклидово n -мерное пространство и x^1, \dots, x^n — криволинейные координаты, так что метрический тензор задается формулой (26.3.1), то кривая \mathcal{C}_0 представляет собой отрезок прямой, описанный в криволинейных координатах.

Для упрощения последующих вычислений удобно выбрать параметр w на кривой \mathcal{C}_0 таким образом, чтобы Φ оказалось константой на \mathcal{C}_0 (но не обязательно на соседних кривых \mathcal{C} ; в самом деле, w нельзя выбрать таким, чтобы Φ было одной и той же константой на \mathcal{C}_0 и на соседних кривых, потому что для этих кривых $w = a$ и $w = b$ в P_1 и P_2 соответственно; значит, если w можно было бы выбрать указанным образом, то все эти кривые имели бы одну и ту же длину). Это можно сделать введением на \mathcal{C}_0 нового параметра $\lambda = \lambda(w)$ равенством

$$\lambda(w_1) = \int_a^{w_1} \sqrt{g_{kl} \dot{y}^k \dot{y}^l} dw, \quad a \leq w_1 \leq b \quad (26.6.5)$$

(λ — длина дуги вдоль \mathcal{E}_0); используя λ в качестве переменной интегрирования вместо ω , получим вместо (26.6.5)

$$\lambda_1 = \int_0^{\lambda_1} \sqrt{g_{kl} \dot{y}^k \dot{y}^l} d\lambda;$$

поэтому после дифференцирования по λ_1 получаем

$$\sqrt{g_{kl} \dot{y}^k \dot{y}^l} = V \Phi \equiv 1 \quad \text{на } \mathcal{E}_0.$$

Множитель $\Phi^{-1/2}$ можно теперь вынести за знак интеграла (26.6.4). Иначе говоря, если в качестве параметра λ взята длина дуги \mathcal{E}_0 , то вариационные задачи

$$\delta \int_a^b \sqrt{V \Phi} d\lambda = 0 \quad \text{и} \quad \delta \int_a^b \Phi d\lambda = 0 \quad (26.6.6)$$

имеют одно и то же решение. Хотя $\Phi = 1$ на \mathcal{E}_0 , частные производные Φ в (26.6.4) не обращаются в нуль, потому что они включают дифференцирование по другим направлениям, а не только вдоль \mathcal{E}_0 .

Интегрирование по частям второго слагаемого в (26.6.4) после удаления $\Phi^{-1/2}$ (проинтегрированные члены обращаются в нуль, поскольку $\dot{z}^k = 0$ в P_1 и P_2) и приравнивание интеграла нулю дают

$$\int_a^b \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^k} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^k} \right) z^k(\lambda) d\lambda = 0.$$

В силу произвольности $z^k(\lambda)$ отсюда следует, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^k} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^k} = 0 \quad \text{на } \mathcal{E}_0 \quad (k = 1, \dots, n). \quad (26.6.7)$$

Слова «на \mathcal{E}_0 » означают, что в качестве функций $x^k(\lambda)$, входящих в Φ (см. § 26.6.2), нужно брать функции $y^k(\lambda)$, которые описывают кривую \mathcal{E}_0 . Уравнения (26.6.7) являются вариационными уравнениями Эйлера задачи

$$\delta \int_a^b \Phi d\lambda = 0. \quad (26.6.8)$$

Из определения (26.6.2) функции Φ ясно, что уравнения Эйлера выглядят, в частности, так [в (26.6.7) k заменяется на m]:

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \dot{x}^k \dot{x}^l - \frac{d}{d\lambda} (g_{ml} \dot{x}^l + g_{km} \dot{x}^k) = 0$$

(два члена в скобках, конечно, равны друг другу), или

$$\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} \right) \dot{x}^k \dot{x}^l - 2g_{ml} \ddot{x}^l = 0; \quad (26.6.9)$$

именно этим уравнениям ($m = 1, \dots, n$) должны удовлетворять функции $x^k(\omega) = y^k(\omega)$ для того, чтобы кривая \mathcal{C}_0 была геодезической.

Эти уравнения удобно записать с использованием *трехиндексных символов Кристоффеля* первого и второго рода, имеющих вид соответственно

$$[kl, m] = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} \right) \quad (26.6.10)$$

и

$$\{k^r{}_l\} = g^{rm} [kl, m] \quad (\text{просуммировано по } m). \quad (26.6.11)$$

Тогда после умножения (26.6.9) на g^{rm} и суммирования по m получаются уравнения (для геодезической)

$$\ddot{x}^r + \{k^r{}_l\} \dot{x}^k \dot{x}^l = 0 \quad (r = 1, \dots, n) \quad (26.6.12)$$

(здесь, как и везде, используется соглашение о суммировании). Символ $\{k^r{}_l\}$ является функцией от x^1, \dots, x^n , причем считается, что взяты $x^1(\lambda), \dots, x^n(\lambda)$. Любая кривая $\mathcal{C}: x^k = x^k(\lambda)$, удовлетворяющая (26.6.12), называется *геодезической*; параметр λ называется *натуральным параметром* (или *аффинным*, или *предпочтительным*, или *естественным*) на \mathcal{C} . Очевидно, что уравнения (26.6.12) не изменяются при подстановке $\lambda \rightarrow a\lambda + b$, где $a \neq 0$ и b — константы; следовательно, натуральный параметр определен с точностью до таких линейных преобразований. На римановом многообразии λ можно взять как длину дуги.

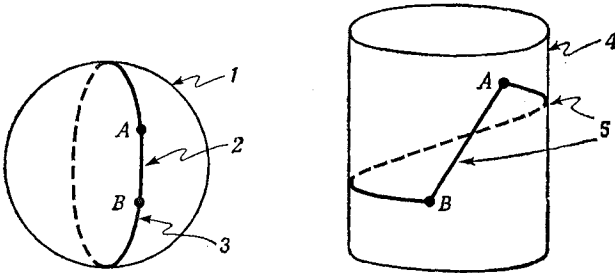


Рис. 26.2. Геодезические. 1 — сфера; 2 — геодезическая из A в B минимальной длины; 3 — геодезическая из A в B максимальной длины; 4 — цилиндр; 5 — две геодезические из A в B минимальной длины.

Достигает ли на \mathcal{C} интеграл L действительно минимума (а не максимума или даже просто стационарного значения) и является ли этот минимум единственным, невозможно выяснить без дополнительных исследований (см. примеры на рис. 26.2; заметьте

также, что на сфере имеется бесконечно много геодезических между данной точкой и диаметрально ей противоположной, причем все эти геодезические имеют одну и ту же длину). Однако ниже мы убедимся в том, что для любой заданной точки A многообразия найдется такая ее окрестность N_A , что для любой точки $B \in N_A$ имеется только одно решение \mathcal{C}_0 уравнений (26.6.12), идущее из A в B и лежащее в N_A , причем на этой кривой \mathcal{C}_0 интеграл L достигает минимума.

Замечания. Величины $[kl, m]$ не являются компонентами какого-либо тензора ранга 3, равно как и величины $\{k^r m\}$, поскольку для них не выполняются соответствующие законы преобразования; например, в евклидовом пространстве все эти величины тождественно равны нулю в декартовых координатах, но не в криволинейных координатах. Величины \dot{x}^k есть компоненты контравариантного вектора, но \ddot{x}^k таковыми не являются. Тем не менее уравнения (26.6.12) в некотором смысле инвариантны: если в некоторой системе координат им удовлетворяет данная кривая $P(\lambda)$, то эта кривая удовлетворяет им и в любой другой системе координат, потому что эти уравнения выведены из инвариантного уравнения (26.6.8). Геодезическая и натуральный параметр являются инвариантными объектами. Левые части уравнений (26.6.12), вычисленные не обязательно на геодезической, образуют в любой точке кривой \mathcal{C} контравариантный вектор (полученный при помощи так называемого абсолютного дифференцирования вектора \dot{x}^k — см. § 27.6), хотя отдельные члены в (26.6.12) сами по себе не являются компонентами какого-либо вектора. Если кривая \mathcal{C} проходит через несколько карт и в каждой из них удовлетворяет (26.6.12), то \mathcal{C} также называется *геодезической* на многообразии.

26.7. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА ПСЕВДОРИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

В этом случае Φ может быть отрицательным, поэтому величина L , определенная как $\int_{\alpha}^{\beta} \Phi^{1/2} d\omega$, не имеет смысла длины. Даже если переопределить L как $\int_{\alpha}^{\beta} |\Phi|^{1/2} d\omega$, то L еще не будет длиной в обычном смысле, так как для любых данных точек P и Q всегда можно найти такую (кусочно гладкую) кривую от P до Q , что для нее $L=0$. Тем не менее кривая $\mathcal{C}: x^k = x^k(\lambda)$, удовлетворяющая (26.6.12), по-прежнему называется *геодезической*, а λ называется *натуральным параметром*. Величина $\Phi = g_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k$ постоянна на \mathcal{C} , и возможны три случая:

если $\Phi > 0$, то \mathcal{C} называется
пространственноподобной геодезической;
 если $\Phi = 0$, то \mathcal{C} называется
нулевой геодезической; (27.7.1)
 если $\Phi < 0$, то \mathcal{C} называется
временноподобной геодезической.

Так как Φ — квадратичная по x^k функция, эта классификация не зависит от выбора натурального параметра. Параметр λ можно выбрать так, чтобы в первом случае было $\Phi = 1$, а в третьем $\Phi = -1$; в этом случае λ называется соответственно *расстоянием* и *собственным временем* вдоль кривой \mathcal{C} . Геодезические играют важную роль в общей теории относительности.

26.8. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ. ЗАДАЧА С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ. УСЛОВИЕ ЛИПШИЦА

Пусть a^1, \dots, a^n — координаты (на данной карте) произвольной точки P_0 риманова или псевдориманова многообразия M . Задача с начальными данными для нахождения геодезической, идущей из точки P_0 по направлению касательного вектора ξ^1, \dots, ξ^n в P_0 , с натуральной параметризацией состоит в следующем: нужно решить дифференциальные уравнения

$$\frac{dx^j}{d\lambda} = p^j, \quad \frac{dp^j}{d\lambda} = -\{k^j_l\} p^k p^l \quad (j = 1, \dots, n) \quad (26.8.1)$$

с начальными условиями

$$x^j(0) = a^j, \quad p^j(0) = \xi^j \quad (j = 1, \dots, n). \quad (26.8.2)$$

В следующем параграфе будет показано, что эта задача всегда имеет единственное решение для λ из некоторого интервала $[-\lambda_0, \lambda_0]$.

Удобно ввести обозначения

$$y^k = x^k - a^k \quad (k = 1, \dots, n),$$

$$y^{n+k} = p^k \quad (k = 1, \dots, n)$$

и переписать дифференциальные уравнения в виде

$$dy^k/d\lambda = f^k(y^1, \dots, y^{2n}), \quad k = 1, \dots, 2n, \quad (26.8.3)$$

где через f^k обозначены функции в правой части k -го уравнения (26.8.1) для $k = 1, \dots, 2n$, а символы Кристоффеля теперь рассматриваются как функции от y^1, \dots, y^{2n} . Функции f^k для всех y^1, \dots, y^{2n} определяются так, что соответствующая точка x^1, \dots, x^n лежит на заданной карте. Предполагается, что все $\{k^j_l\}$ и их пер-

вые производные непрерывны на этой карте; оказывается, что в этом случае функции f^k удовлетворяют условию Липшица на любой компактной области (y^1, \dots, y^{2n}) -пространства, на которой они определены. Это означает, что для любой постоянной δ , такой, что f^k определены для всех y^1, \dots, y^{2n} в кубе $W = \{y: |y^i| \leq \delta, i = 1, \dots, 2n\}$ найдется такая постоянная $L = L(\delta)$, что для любых двух точек $\{y^i\}$ и $\{\bar{y}^i\}$ из W

$$|f^k(y^1, \dots, y^{2n}) - f^k(\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^{2n})| \leq L \max_{\substack{j=1, \dots, 2n \\ k=1, \dots, 2n}} |y^j - \bar{y}^j|, \quad (26.8.4)$$

Доказательство этого свойства $\{f^k\}$ предлагается в качестве упражнения. Оно основано на использовании вида f^k , заданного в (26.8.1), и предположения, что символы Кристоффеля являются функциями класса C^1 по переменным y^1, \dots, y^n . В новых обозначениях задача с начальными данными принимает вид

$$dy^k/d\lambda = f^k(y^1, \dots, y^N), \quad y^k(0) = y_0^k \text{ задано} \\ (k = 1, \dots, N = 2n). \quad (26.8.5)$$

В следующем параграфе будет доказано, что эта задача имеет единственное решение вблизи $\lambda = 0$; следовательно, выполняется и следующая теорема.

Теорема 1. *Задача с начальными данными (26.8.1), (26.8.2) о геодезических, идущих из точки P_0 в направлении начального касательного вектора $\{\xi^k\}$, имеет единственное решение $x^k(\lambda)$ на некотором интервале $-\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ ($\lambda_0 > 0$).*

Следствие 1. *Если кривая \mathcal{C} есть геодезическая $P(\lambda)$ на M с натуральной параметризацией и удовлетворяет начальным условиям (26.8.2), то $P(\lambda)$ единственна на всем ее протяжении¹⁾.*

Доказательство. Предположим, что $P_1(\lambda)$ и $P_2(\lambda)$ — две такие кривые и что λ_1 — точка, в которой они расходятся, т. е.

$$\lambda_1 = \sup \{\lambda: P_1(\lambda') = P_2(\lambda'), 0 \leq \lambda' \leq \lambda\}.$$

Положим $P_0 = P_1(\lambda_1) = P_2(\lambda_1)$ и применим теорему 1 к задаче с начальными данными в λ_1 ; тогда оказывается, что если $P_1(\lambda)$ и $P_2(\lambda)$ определены за точкой $\lambda = \lambda_1$, то они совпадают на некотором интервале $(\lambda_1 - \lambda_0, \lambda_1 + \lambda_0)$, а следовательно, они не расходятся в λ_1 вопреки предположению.

Если начальный касательный вектор $\{\xi^k\}$ заменить на вектор того же направления, но другой длины, то в качестве множества точек в M получается та же самая геодезическая, но с другим выбором натурального параметра λ , т. е. из структуры уравнений (26.8.1) следует, что если $\{x^k(\lambda), p^k(\lambda)\}$ — какое-то решение для $\lambda \in [0, \lambda_0]$, то при $a > 0$ $\{x^k(a\lambda), ap^k(a\lambda)\}$ — решение для $\lambda \in [0, \lambda_0/a]$. В качестве начального касательного вектора вместо $\{\xi^k\}$ берется вектор $\{a\xi^k\}$. Если положить $a = \lambda_0$, то отсюда следует, что для любого заданного направления всегда существует решение, определенное для

¹⁾ То есть \mathcal{C} не может разветвляться. — Прим. перев.

всех $\lambda \in [0, 1]$, первоначально идущее в этом направлении и такое, что все компоненты его начального касательного вектора меньше некоторой положительной константы. Можно также доказать, что эта константа непрерывно зависит от направления $\{\xi^k\}$, а значит, имеет нижнюю грань или минимум. Поэтому верна следующая теорема.

Теорема 2. Пусть, как и выше, a^1, \dots, a^n — координаты (в некоторой карте) точки P_0 . Существует такая положительная константа $K = K(P_0)$, что задача с начальными данными (26.8.1), (26.8.2) о геодезической имеет решение на интервале $0 \leq \lambda \leq 1$ для всех векторов $\{\xi^k\}$, таких, что $|\xi^k| < K$ ($k = 1, \dots, n$).

Эта теорема будет использована в следующей главе для доказательства существования в окрестности точки так называемых римановых координат.

26.9. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ. ИТЕРАЦИИ ПИКАРА

Данный параграф содержит материал, не относящийся непосредственно к теории многообразий; он посвящен доказательству фундаментального свойства обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно существования решения задачи с начальными данными (26.8.5) в случае выполнения условия Липшица (26.8.4). И теорема существования, и сам метод ее доказательства широко применяется во многих областях физики и математики.

Перепишем задачу с начальными данными (26.8.5) в виде интегрального уравнения Вольтерра (в котором независимая переменная λ оказывается верхним пределом интеграла):

$$y^k(\lambda) = y^k(0) + \int_0^\lambda f^k(y(\lambda')) d\lambda', \quad k = 1, \dots, N, \quad (26.9.1)$$

где y — вектор с компонентами y^1, \dots, y^N . Далее удобно использовать норму $\|x\| = \max_{(i)} |x^i|$, которая позволяет записать условие Липшица в виде

$$|f^k(y) - f^k(\bar{y})| < L \|y - \bar{y}\|, \quad k = 1, \dots, N. \quad (26.9.2)$$

Решение интегрального уравнения (26.9.1) получается здесь итерационным методом Пикара, в котором $y^k(\lambda, q)$ обозначает q -ю итерацию, $y^k(\lambda, 0)$ есть $y^k(0)$ (не зависит от λ), а последовательные приближения задаются формулой

$$y^k(\lambda, q+1) = y^k(0) + \int_0^\lambda f^k(y(\lambda', q)) d\lambda', \quad q = 1, 2, \dots \quad (26.9.3)$$

Чтобы оценить скорость сходимости, введем обозначения (для $q = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} \Delta y^k(\lambda, q) &= y^k(\lambda, q) - y^k(\lambda, q-1), \\ \Delta f^k(\lambda, q) &= f^k(y(\lambda, q)) - f^k(y(\lambda, q-1)). \end{aligned}$$

Вычитая последовательные уравнения (26.9.3) одно из другого (для $q+1$ и q), получаем

$$\Delta y^k(\lambda, q+1) = \int_0^\lambda \Delta f^k(\lambda', q) d\lambda'. \quad (26.9.4)$$

Это уравнение выполняется не только для $q=1, 2, \dots$, но и для $q=0$, если положить $y^k(\lambda, -1) = 0$ и заметить, что $f^k(0) = 0$.

Скорость сходимости оценивается в следующей лемме.

Лемма. *Предположим, что*

$$\|y(0)\| < \delta/2 \quad (26.9.5)$$

[т. е. что $y(0)$ лежит не просто в кубе W , а в его центральной части] и что $|\lambda| \leq \ln 2/L$, где L — константа Липшица в (26.9.2). Тогда для $q=1, 2, \dots$

$$\|\Delta y(\lambda, q)\| \leq (\delta/2) (1/q!) (L|\lambda|)^q \quad (26.9.6)$$

и

$$\|y(\lambda, q)\| < \delta. \quad (26.9.7)$$

Доказательство. Случай $q=1$ следует из (26.9.4) и (26.9.5), а далее доказательство можно продолжить индукцией по q , поскольку

$$\int_0^\lambda \lambda^q d\lambda = \lambda^{q+1}/(q+1)$$

и

$$\begin{aligned} \|y(\lambda, q)\| &= \left\| \sum_{r=0}^q \Delta y(\lambda, r) \right\| \leq \\ &< (\delta/2) \sum_{r=0}^q (1/r!) (L|\lambda|)^r < (\delta/2) e^{L|\lambda|} = \delta. \end{aligned} \quad (26.9.8)$$

Оценка (26.9.8) обеспечивает допустимость использования условия Липшица любого q .

Ясно, что именно сомножитель $1/q!$ в (26.9.6) обеспечивает эффективность метода. Так как сумма в (26.9.8) мажорируется степенным рядом функции $e^{L|\lambda|}$, соответствующий ей ряд сходится абсолютно и равномерно по λ на любом конечном интервале. Поэтому эту сумму можно почленно проинтегрировать, а после этого окажется, что функция $y(\lambda) = \lim_{q \rightarrow \infty} y(\lambda, q)$ удовлетворяет интегральному уравнению (26.9.1) и, следовательно, является решением задачи с начальными данными (26.8.5).

Тем самым доказана и теорема 1 из предыдущего параграфа.

26.10. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ. ДВУХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

В евклидовой геометрии любые две точки P и Q могут быть связаны единственным отрезком прямой \overline{PQ} . То же самое локально верно и для риманова и псевдориманова многообразия M с замкнутой прямой на геодезическую. Рассмотрим задачу нахождения таких функций $x^j(\lambda)$ ($j=1, \dots, n$), что

$$\ddot{x}^j = -\{k^j\}_i \dot{x}^k \dot{x}^i \quad (0 \leq \lambda \leq 1, j=1, \dots, n), \quad (26.10.1)$$

$x^j(0)$ и $x^j(1)$ заданы ($j=1, \dots, n$).

Уайтхед в 1932 г. доказал следующую теорему.

Теорема. Любая точка $P_0 \in M$ имеет такую окрестность V , что для любых двух точек Q_0 и Q_1 из V с координатами $x^j(0)$ и $x^j(1)$ ($j=1, \dots, n$) соответственно существует единственная геодезическая, соединяющая Q_0 и Q_1 и целиком лежащая в V .

Требование принадлежности всей геодезической окрестности V часто необходимо для обеспечения ее единственности: см. рис. 26.2, где геодезическая на цилиндре идет по длинному пути вокруг цилиндра, а не по кратчайшему пути от начальной до конечной точки.

Эту теорему легко доказать в несколько более слабой форме: существуют такие окрестности V_1 и V_2 , $P_0 \in V_1 \subset V_2$, что если $Q_0, Q_1 \in V_1$, то имеется только одна геодезическая, соединяющая Q_0 и Q_1 и лежащая в V_2 ; доказательство Уайтхеда возможности совпадения V_1 и V_2 содержит некоторые топологические соображения.

Следующие два результата, получающиеся при доказательстве теоремы Уайтхеда, приводятся также без доказательства.

Следствие 1. Если кривая $x^i(\lambda)$ непрерывна при $a \leq \lambda \leq b$ и удовлетворяет уравнению геодезической при $a < \lambda < b$, то она удовлетворяет этому уравнению и при $\lambda = a$ и $\lambda = b$.

Следствие 2. Если (отражая зависимость геодезической от концевых точек) решение двухточечной задачи, получающееся в теореме Уайтхеда, записать как $x^j(\lambda, Q_0, Q_1)$, то для любого $\lambda \in [0, 1]$ функции $x^j(\lambda, Q_0, Q_1)$ непрерывно зависят от координат $x^j(0)$ и $x^j(1)$ начальной и конечной точек Q_0 и Q_1 .

Доказательство существования решения двухточечной задачи аналогично доказательству существования решения задачи с начальными данными: система уравнений (26.10.1) сводится к интегральному уравнению, которое решается методом итераций Пикара. Процедура доказательства несколько сложнее, потому что здесь получается интегральное уравнение Фредгольма (верхний предел

интегралов равен 1, а не λ), и поэтому здесь нет ни множителя $1/q^1$, ни явной зависимости от λ , как это было в (26.9.6). Подробности см. в работе Уайтхеда [1932].

26.11. ПРОДОЛЖЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Для римановых многообразий можно доказать, что если кривая $x^j(\lambda)$ удовлетворяет уравнению геодезической при $a < \lambda < b$ и лежит в компактной области многообразия, то существуют пределы $x^j(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow a$ и $\lambda \rightarrow b$ и поэтому, в частности, применимо следствие 1 теоремы Уайтхеда. Для псевдоримановых многообразий это неверно, что показывает следующий пример. Пусть M — поверхность цилиндра, $x^1 = z$ и $x^2 = \theta$ — цилиндрические координаты, а метрика на M задается матрицей

$$(g_{jk}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2z^2 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} < z < \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

При таких ограничениях на z M оказывается псевдоримановым многообразием. Читатель легко может проверить, что кривая

$$z = \lambda, \quad \theta = 1/\lambda \quad (0 < \lambda < 1/2)$$

является геодезической. При $\lambda \rightarrow 0$ геодезическая бесконечное число раз огибает цилиндр и приближается к окружности $z = 0$.

Однако если кривая $x^j = x^j(\lambda)$ ($j = 1, \dots, n$) удовлетворяет уравнению геодезической при $a < \lambda < b$ и непрерывна при $a \leq \lambda \leq b$, то применимо указанное следствие 1 и величины $x^j(b)$, $x^j(a)$ можно использовать как начальные данные для теоремы существования в § 26.8, чтобы продолжить геодезическую на некоторые значения $\lambda > b$; аналогично геодезическую можно продолжить и на некоторые значения $\lambda < a$.

Если под *геодезической* (в отличии от отрезка геодезической) понимать решение уравнения геодезической, продолженное настолько, насколько это возможно (вполне вероятно через несколько карт), то указанный выше результат можно сформулировать так: для римановых или псевдоримановых многообразий *геодезическая не может иметь на многообразии ни начала, ни конца*.

Замечание. Это не означает, что для геодезической $\lambda \rightarrow \pm \infty$, и не означает, что геодезическая не может иметь начала или конца в некотором пространстве, в которое погружено данное многообразие.

26.12. АФФИННО СВЯЗНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Поскольку законы преобразования тензоров известны, а g_{jk} является тензором, легко найти закон преобразования для трехиндексного символа Кристоффеля $\{^i_{jk}\}$ из уравнений (26.6.10), (26.6.11). Если

$\{j^i k\}'$ относится к координатам x'^1, \dots, x'^n , а $\{j^i k\}$ — к координатам x^1, \dots, x^n , то они связаны равенством

$$\{j^i k\}' = \left[\{s^r t\}' \frac{\partial x^s}{\partial x'^j} \frac{\partial x^t}{\partial x'^k} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^j \partial x'^k} \right] \frac{\partial x'^i}{\partial x^r}. \quad (26.12.1)$$

Так как в уравнение геодезической (26.6.12) входит только $\{j^i k\}$, а не непосредственно g_{jk} , можно получить геометрию более общего вида, называемую *аффинной геометрией*, если совсем не предполагать существование метрического тензора g_{jk} , а предполагать существование только набора величин, преобразующихся подобно $\{j^i k\}$ и помещаемых на место $\{j^i k\}$ в уравнении геодезической. Тогда существование (или отсутствие) тензора g_{jk} , при помощи которого эти величины могут быть найдены из уравнений (26.6.10), (26.6.11), не играет особой роли.

Аффинная связность многообразия M определяется (по аналогии с тензором) как множество наборов n^3 функций $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}(x^1, \dots, x^n)$, причем с каждой картой на M связан один такой набор, а на перекрытии двух карт два соответствующих набора функций связаны законом преобразования

$$\Gamma'^i_{jk} = \left[\Gamma^r_{st} \frac{\partial x^s}{\partial x'^j} \frac{\partial x^t}{\partial x'^k} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^j \partial x'^k} \right] \frac{\partial x'^i}{\partial x^r} \quad (26.12.2)$$

(совпадающим с (26.12.1)). Так как уже не предполагается, что Γ^i_{jk} вычисляются по значениям метрического тензора g_{jk} как $\{j^i k\}$, то необходимо проверить непосредственно, что этот закон преобразования транзитивен (см. § 26.1), для того чтобы гарантировать самосогласованность определения аффинной связности; это предоставляется сделать читателю в качестве упражнения.

В *аффинно связном многообразии* M (т. е. в многообразии, на котором определена аффинная связность) гладкая кривая \mathcal{C} : $x^i = x^i(\lambda)$ ($i = 1, \dots, n$) называется *геодезической*, а λ — *натуральным параметром* на \mathcal{C} , если \mathcal{C} удовлетворяет уравнениям

$$\ddot{x}^r + \Gamma^r_{ki} \dot{x}^k \dot{x}^i = 0 \quad (r = 1, \dots, n) \quad (25.12.3)$$

(точки означают дифференцирование по λ). Сравните эти уравнения с (26.6.12).

Как и в римановой геометрии, уравнения геодезических (26.12.3) инвариантны относительно замены систем координат в том смысле, что если кривая \mathcal{C} лежит на перекрытии двух карт, то она удовлетворяет уравнениям (26.12.3) в одной из координатных систем тогда и только тогда, когда она удовлетворяет этим уравнениям и в другой системе координат. Эти уравнения инвариантны также относительно преобразования $\lambda \rightarrow a\lambda + b$ ($a \neq 0$) натурального параметра данной геодезической.

Теоремы § 26.8, относящиеся к задаче с начальными данными о геодезической, остаются справедливыми, если коэффициенты Γ^i_{jk} аффинной связности являются C^1 -функциями, для чего, согласно (26.12.2), требуется C^3 -гладкость многообразия.

Выполняется и теорема Уайтхеда (на самом деле Уайтхед сформулировал и доказал ее первоначально именно для аффинно связных многообразий): для каждой точки P найдется такая окрестность V , что любые две точки в V можно соединить единственной геодезической, целиком лежащей в V .

Вопрос о том, можно ли найти (по заданным на многообразии коэффициентам Γ^i_{jk} аффинной связности) такой метрический тензор g_{jk} , чтобы он был согласован со связностью, т. е. чтобы $\Gamma^i_{jk} = \{^i_{jk}\}$, обсуждается вкратце в конце § 27.10.

Геометрическая структура, обусловленная геодезическими на аффинно связном многообразии, называется *геометрией путей*; некоторые ее аспекты обсуждаются в следующей главе. Из (26.12.3) ясно, что при этом следует предполагать симметричность коэффициентов связности по нижним индексам:

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}. \quad (26.12.4)$$

В более общем случае иногда вводится дополнительное геометрическое понятие — *кручение*, которое основано на антисимметрической части ${}^{1/2}(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj})$ связности; см. Фландерс [1963]. Так как кручение не действует на геодезические, его следует рассматривать как нечто внешнее по отношению к ним и накладывать на геометрию многообразия, определяемую геодезическими.

26.13. РИМАНОВЫ И ПСЕВДОРИМАНОВЫ НАКРЫВАЮЩИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Пусть M — покрывающее многообразие для N , а ψ — проекция M на N . Для любой функции $f(P)$ на N (скажем, класса C^k) о функции $\tilde{f}(Q) \stackrel{\text{def}}{=} f(\psi(Q))$, определенной на M , говорят, что она *поднята из N на M* (по аналогии с поднятием кривых и поверхностей, описанным в § 24.2).

Предположим теперь, что N — риманово многообразие. Пусть $\varphi^i(P)$ — координаты в некоторой правильной окрестности $V \subset N$, а g_{jk} — компоненты метрического тензора в этих координатах. Все φ^i и g_{jk} являются функциями на N , и их можно поднять на M как функции $\tilde{\varphi}^i$ и \tilde{g}_{jk} . Тогда каждая связная компонента U_i из $\psi^{-1}(V)$ становится картой с координатами $\tilde{\varphi}^i$ и метрическим тензором \tilde{g}_{jk} и нетрудно показать, что тем самым M превращается в риманово многообразие, которое называют *римановым покрывающим многообразием* для N . Если M — универсальное покрыва-

ющее многообразие многообразия N , то M называется его *универсальным римановым накрывающим многообразием*.

Аналогично определяются и псевдоримановы накрывающие многообразия.

Рассмотрим теперь задачу построения многообразий N , накрываемых данным римановым многообразием M . Для общего многообразия M такое N было получено в § 24.6 посредством такого гомеоморфизма σ M на себя, что если P —любая точка M , то множество точек $P, \sigma(P), \sigma(\sigma(P)), \dots, \sigma^{-1}(P), \dots$ дискретно (не имеет предельной точки в M); построение накрываемого многообразия N осуществляется отождествлением всех точек этого множества для каждой точки P , т. е. множество всех точек, получающихся из P посредством гомеоморфизма σ , рассматривается как одна точка искомого многообразия N . Для того чтобы в результате такого построения получилось *риманово* многообразие, необходимо потребовать только, чтобы отображение σ было *изометрическим* гомеоморфизмом, т. е. чтобы оно сохраняло метрику. Пусть $\{U, \varphi, N\}$ —произвольная карта на M , а U' —множество всех точек $Q = \sigma(P)$ для $P \in U$. Положим $\varphi'(Q) = \varphi(\sigma^{-1}(Q))$. Ясно, что $\{U', \varphi', N\}$ —допустимая карта на M (т. е. согласованная с ранее определенными картами) в силу определения гомеоморфизма. Тогда g'_{jk} полагаются теми же самыми функциями координат $x'^i = \varphi'^i$ второй карты, что и g_{jk} , зависящие от координат $x^i = \varphi^i$ первой карты. Но тогда все карты, полученные из $\{U, \varphi, N\}$ посредством гомеоморфизма σ и его суперпозиций, имеют совпадающие метрические тензоры, и могут быть отождествлены для получения одной карты на N .

Эти идеи используются в гл. 28 при изучении глобальных свойств многообразий Эйнштейна.

РИМАНОВЫ, ПСЕВДОРИМАНОВЫ И АФФИННО СВЯЗНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Метрика, псевдометрика, связность и топология; геодезические (римановы) координаты; геометрия в смысле Клейна; приближенная конгруэнтность; конгруэнтность звезд; ковариантная производная; абсолютная производная; параллельный перенос; ориентируемость, лоренцева ориентируемость; лапласиан; даламбертиан; тензор Римана; тензор Риччи; скалярная риманова кривизна; получение вторых производных метрического тензора по тензору Римана; условия согласованности аффинной связности с метрикой; внутренняя кривизна многообразия; плоские многообразия; условия Штеккеля, Робертсона и Эйзенхарта разделения переменных в волновом уравнении.

Предварительные сведения: гл. 23, 24, 26.

Тема этой главы — геометрия многообразия, на котором определена метрика, псевдометрика или аффинная связность. Разграничение данной и предыдущей глав условно и довольно произвольно, поскольку в конце предыдущей главы изучаются геодезические кривые, а в начале этой — геодезические координаты. Однако между ними есть и важное различие. Предыдущая глава носила в основном аналитический характер, и единственное геометрическое понятие, использованное в ней, — это расстояние между двумя точками; данная глава носит в основном геометрический характер, причем в смысле Евклида, за исключением некоторых концептуальных обобщений и аналитичности формулировок. Такие фундаментальные понятия, как параллельность, длина, кривизна, угол, являются в действительности геометрическими, и их следует именно так и рассматривать. Использование аналитических методов не затрагивает геометрической природы этих понятий точно так же, как введение Декартом координат в евклидову геометрию. С этой точки зрения один из основных результатов предыдущей главы — теорема Уайтхеда — служит той же цели, что и постулат Евклида о том, что через две различные точки можно провести одну и только одну прямую, только в теореме Уайтхеда требуется, чтобы эти две точки были не слишком далеки друг от друга.

В современной математике, все направления которой до некоторой степени сливаются, трудно понять, что является геометрией, а что анализом, однако, конечно же, те понятия, которые восходят непосредственно к Евклиду, следует признать геометрическими. Во времена Евклида геометрию понимали как науку, изучающую окружающее нас физическое пространство. Если общая теория

относительности верна, то таковыми же являются риманова, псевдориманова и аффинная геометрии; даже если эта теория будет модифицирована, ее главные идеи, разработанные за 60 лет, несомненно, будут продолжать быть основой теории физического пространства-времени.

Мы достигнем наилучшего понимания рассматриваемой темы, если на передний план выдвинем геометрические идеи (подобные параллельному переносу вектора вдоль кривой), а подробные аналитические формулы используем как незначительную детализацию их фона.

27.1. ТОПОЛОГИЯ И МЕТРИКА

Согласно гл. 23, топология многообразия определяется набором его координатных карт.

Главное различие между римановыми и псевдоримановыми (или аффинно связными) многообразиями состоит в том, что у последних связь между топологией и метрикой является не столь тесной, как у первых. В связном римановом многообразии расстоянием $d(P, Q)$ между любыми двумя точками P и Q есть инфимум длины кривой между ними, который берется относительно всех путей из P в Q . Многообразие тогда является метрическим пространством, что означает, что на нем определена функция d (расстояние), удовлетворяющая следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} d(P, Q) &\geq 0 \quad \forall P, Q; \\ d(P, Q) &= 0 \Leftrightarrow P = Q; \\ d(P, Q) &\leq d(P, R) + d(R, Q). \end{aligned}$$

Топология в этом пространстве определяется указанной метрикой, потому что множества

$$S(\varepsilon, P) = \{Q: d(P, Q) < \varepsilon\}$$

(открытые шары) являются открытыми множествами, а все другие открытые множества представляют собой объединения открытых шаров. В римановом многообразии эта топология совпадает с топологией, определенной ранее при помощи координатных карт.

В псевдоримановом многообразии, где матрица (g_{jh}) не является положительно определенной, только что определенное расстояние $d(P, Q)$ всегда равно нулю и поэтому не является метрикой. Тем не менее это многообразие обладает корректно определенной топологией, порождаемой картами, как указывалось в § 23.3, и то же самое верно для аффинно связных многообразий, для которых нет даже понятия расстояния вдоль кривой.

27.2. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ (РИМАНОВЫ) КООРДИНАТЫ

Ключом к исследованию локальных геометрических свойств риманова многообразия в окрестности точки P_0 , где метрический тензор g_{jk} задан в системе координат x^1, \dots, x^n , содержащей точку P_0 , является выбор новой системы координат x'^1, \dots, x'^n , которая становится все более похожей на декартову при приближении к P_0 . Было бы желательно, чтобы преобразованный метрический тензор g'_{jk} был равен δ_{jk} в P_0 (это всегда можно сделать), а вблизи P_0 был бы близок к δ_{jk} . Мы увидим, что можно обратиться в нуль все первые производные от g'_{jk} в P_0 , а некоторые линейные комбинации этих производных даже в целой окрестности P_0 . В этом смысле новые координаты будут настолько близки к декартовым, насколько это возможно. Оставшееся отклонение g'_{jk} от δ_{jk} будет отражать тогда неевклидов характер геометрии.

Случай псевдоримановых многообразий аналогичен, только здесь мы стремимся сделать g'_{jk} равным $\pm\delta_{jk}$ в P_0 , причем знаки $+$ и $-$ определяются в соответствии с сигнатурой тензора g_{jk} .

В аффинно связанных многообразиях мы стремимся к тому, чтобы обратиться в нуль в P_0 все коэффициенты связности Γ_{jk}^i и оставить их малыми вблизи P_0 .

В данном параграфе мы рассмотрим аффинно связанные многообразия, для которых $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$, а позднее уточним полученные результаты для других случаев. Пусть $\{U, \varphi, N\}$ — карта, содержащая точку P_0 , а x^1, \dots, x^n обозначают координаты в этой карте. Рассмотрим семейство всех геодезических, проходящих через P_0 , натуральный параметр λ для каждой из которых выбран так, что $\lambda = 0$ в P_0 . Координаты на такой геодезической задаются решениями $x^k(\lambda)$ задачи с начальными данными

$$d^2x^k/d\lambda^2 + \Gamma_{lm}^k(dx^l/d\lambda)dx^m/d\lambda = 0, \quad (27.2.1)$$

$$x^k(0) = \varphi^k(P_0), \quad (27.2.2)$$

$$dx^k/d\lambda|_{\lambda=0} = y^k, \quad (27.2.3)$$

где y^1, \dots, y^n — вещественные числа, не все равные нулю и определяющие направление, по которому геодезическая выходит из P_0 . Согласно теореме 2 § 26.8, эта задача имеет решение $x^k(\lambda; y^1, \dots, y^n)$, $k = 1, \dots, n$, для $0 \leq \lambda \leq 1$ и для всех векторов y^1, \dots, y^n в некоторой окрестности начала координат. Если разложить это решение по степеням λ , а коэффициенты первых трех членов разложения получить из этой задачи, то обнаружится, что

$$x^k(\lambda; y^1, \dots, y^n) = x^k(0) + \lambda y^k - \frac{1}{2} \Gamma_{lm}^k|_0 y^l y^m + O(\lambda^3 |y|^3),$$

где $|y|$ обозначает $\max_k |y^k|$. Индекс 0 означает, что коэффициент связности Γ_{lm}^k вычислен в точке P_0 . Выражение в правой части равенства можно было бы рассматривать и как степенной ряд по малым

величинам $\lambda y^1, \dots, \lambda y^n$; следовательно, без потери общности можно положить $\lambda = 1$, если y^k сами по себе достаточно малы. Тогда

$$x^k(1; y^1, \dots, y^n) = x^k(0) + y^k - \frac{1}{2} \Gamma^k_{lm} \big|_0 y^l y^m + O(|y|^3). \quad (27.2.4)$$

Из этого равенства следует, что матрица Якоби

$$\partial x^k(1; y^1, \dots, y^n) / \partial y^l$$

равна δ_l^k в P_0 (где не все y^k равны нулю), а отсюда следует, что уравнения

$$x^k = x^k(1; y^1, \dots, y^n) \quad (k = 1, \dots, n)$$

можно обратить в некоторой окрестности точки P_0 для получения $\{y^j\}$ как функций от $\{x^j\}$. Несколько первых членов соответствующего разложения y^k выглядят так:

$$y^k = x^k - x^k(0) + \frac{1}{2} \Gamma^k_{lm} \big|_0 (x^l - x^l(0))(x^m - x^m(0)) + \dots \quad (27.2.5)$$

Числа y^1, \dots, y^n называют *геодезическими* (или *римановыми*) координатами вблизи P_0 .

В этих формулах коэффициенты связности Γ^k_{lm} зависят от исходных координат. Соответствующие коэффициенты в геодезической системе координат будут обозначаться через $\hat{\Gamma}^k_{lm}$; их значения можно вычислить следующим образом. Геодезическая задается в геодезической системе координат уравнением $y^k = y^k(\lambda) = \lambda \xi^k$, где ξ^1, \dots, ξ^n — константы; значит, $d^2 y^k / d\lambda^2 = 0$, а сравнение с общим уравнением (27.2.1) (с заменой x^k на y^k , а Γ^k_{lm} на $\hat{\Gamma}^k_{lm}$) показывает, что на геодезической $\hat{\Gamma}^k_{lm} \xi^l \xi^m = 0$ для всех λ и всех ξ^1, \dots, ξ^n . В силу этого в точке P_0

$$\hat{\Gamma}^k_{lm} = 0 \quad \text{для всех } k, l, m \quad (27.2.6)$$

и вообще

$$\hat{\Gamma}^k_{lm}(y^1, \dots, y^n) y^l y^m = 0 \quad \text{для всех } k \quad (27.2.7)$$

во всей окрестности точки P_0 , в которой определены геодезические координаты.

Замечание. За исключением плоских пространств, геодезические координаты в окрестности P_0 , вообще говоря, не являются геодезическими координатами в окрестности соседней точки Q_0 . Иначе говоря, прямая $y^k = \lambda \xi^k + a^k$ в пространстве \mathbb{R}^n координат y^1, \dots, y^n в общем случае не является геодезической, если хотя бы одна из констант a^1, \dots, a^n отлична от нуля, т. е. если прямая не проходит через начало координат \mathbb{R}^n .

Новые координаты в окрестности P_0 пока не единственны; эту неединственность описывает следующая теорема.

Теорема. В окрестности заданной точки P_0 произвольное преобразование координат x^i сводится к однородному линейному преобразованию соответствующих геодезических координат y^i .

Доказательство. Пусть x'^1, \dots, x'^n — координаты в любой другой карте, содержащей P_0 , а y'^1, \dots, y'^n — соответствующие геодезические координаты в окрестности P_0 . Любая геодезическая $P(\lambda)$, проходящая через P_0 , для которой $P(0) = P_0$, выражается в геодезических системах координат в виде

$$P(\lambda): y^j = \lambda \xi^j \quad \text{и} \quad y'^j = \lambda \xi'^j,$$

где ξ^j и ξ'^j — константы. С точностью до наименьшего порядка малых величин ($\lambda \approx 0$) x^j согласованы с y^j , а x'^j с y'^j . Поэтому

$$\xi'^j = \partial x'^j / \partial x^k |_{P_0} \xi^k;$$

следовательно, для любой данной точки $P(\lambda)$ на геодезической, проходящей через P_0 ,

$$y'^j = \partial x'^j / \partial x^k |_{P_0} y^k, \quad (27.2.8)$$

а это и есть указанное в теореме линейное преобразование.

УПРАЖНЕНИЕ

Покажите, что следующий член ряда (27.2.4) можно записать в виде

$$- (1/3!) \Gamma_{lmr}^k |_{P_0} y^l y^m y^r, \quad (27.2.9)$$

где

$$\Gamma_{lmr}^k = \frac{1}{3} \sum (\partial \Gamma_{mr}^k / \partial x^l - 2\Gamma_{sl}^k \Gamma_{mr}^s), \quad (27.2.10)$$

причем суммирование осуществляется по циклическим перестановкам индексов l, m и r . Члены высшего порядка с коэффициентами $\Gamma_{lm\dots v}^k$ обсуждаются у Эйзенхарта [1926].

В случае римановых и псевдоримановых многообразий, когда коэффициенты связности получаются при помощи метрического тензора как $\Gamma_{lm}^k = \left\{ \begin{matrix} k \\ l \ m \end{matrix} \right\}$, где $\left\{ \begin{matrix} k \\ l \ m \end{matrix} \right\}$ заданы формулами (26.6.10), (26.6.11), из (27.2.6) следует, что первые частные производные метрического тензора равны нулю в начале геодезических координат, потому что

$$\partial g_{km} / \partial x^l = [kl, m] + [ml, k].$$

27.3. НОРМАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ В РИМАНОВЫХ И ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

При наличии метрического тензора можно еще больше упростить работу с геодезическими координатами, если подобрать такое линей-

27.4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ. ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Геометрия имеет дело с точками и линиями, а также с объектами, построенными из них; в частности, она имеет дело с пространствами точек, в которых выделены определенные множества точек, называемые прямыми или геодезическими. В рассматриваемых здесь геометриях предполагается также, что такое пространство является n -мерным континуумом в том смысле, что он обладает топологическими свойствами n -мерного многообразия.

Основным геометрическим понятием является *конгруэнтность* (сравнимость)¹⁾. Обычно имеется некоторая группа преобразований пространства, называемая *группой конгруэнтности*; преобразования, входящие в эту группу, сохраняют геометрические соотношения. В качестве примеров можно указать группу движений в евклидовом пространстве и группу Пуанкаре (неоднородную группу Лоренца) в пространстве Минковского. О двух фигурах (множествах точек) говорят как о *конгруэнтных*, если одну фигуру можно преобразовать в другую при помощи некоторого преобразования этой группы. (В «Эрлангенской программе» Феликса Клейна (1872 г.) господствует противоположная точка зрения: когда на пространстве задается группа преобразований, она служит для определения геометрии, состоящей из тех отношений, которые сохраняются при этих преобразованиях.)

По аналогии в геометриях Евклида и Минковского можно предполагать, что в пространстве с метрическим тензором g_{jk} группа конгруэнтности должна состоять из тех преобразований, при которых тензор g_{jk} сохраняет свои значения. Однако в большинстве случаев таких преобразований вообще нет (за исключением тождественного преобразования), если только пространство не является плоским или не имеет постоянную кривизну. Следовательно, в большинстве случаев нет и обычного понятия конгруэнтности.

Для очень малых фигур можно определить приближенное понятие конгруэнтности. Рассмотрим сначала риманово многообразие. Пусть y^1, \dots, y^n — нормальные координаты в окрестности точки P_0 , а w^1, \dots, w^n — нормальные координаты в окрестности другой точки Q_0 . Пусть ψ — отображение окрестности P_0 в окрестность Q_0 , задаваемое приравниванием соответствующих нормальных координат (т. е. точка P с координатами y^1, \dots, y^n отображается в точку Q с координатами w^1, \dots, w^n , если $y^i = w^i$, $i = 1, \dots, n$). Говорят, что малая фигура вблизи P_0 приближенно конгруэнтна малой фигуре вблизи Q_0 , если первая фигура отображается преобразованием ψ во вторую.

Так как система нормальных координат единственна с точностью до ортогональных преобразований, в результате получается прибли-

¹⁾ Отношение эквивалентности геометрических фигур. — *Прим. перев.*

женно евклидова геометрия. Геодезические, проходящие через P_0 , переходят при ψ в геодезические, проходящие через Q_0 ; легко убедиться в том, что угол между двумя такими геодезическими (см. формулу ниже) при этом отображении сохраняется. (Геодезические, не проходящие через P_0 , обычно не переходят в геодезические, если пространство не является плоским.)

Если в точке P_0 пересекаются три или несколько гладких кривых, то звезда, образованная в P_0 их касательными векторами, отображается в аналогичную звезду в Q_0 с сохранением всех углов. Если P_0AB — маленький треугольник с вершиной P_0 , т. е. если P_0A , P_0B и AB — короткие геодезические, то его образ при отображении ψ есть фигура Q_0CD , где Q_0C и Q_0D — геодезические с теми же длинами, что и P_0A и P_0B , а CD — почти геодезическая, если треугольник мал, и имеет длину, почти равную длине AB . Если P_0 и Q_0 — одна и та же точка, а y^k и w^k — две системы нормальных координат около этой точки, то конгруэнтности определяются вращениями и отражениями, оставляющими точку P_0 на месте.

Углы определяются по формуле для углов в криволинейных координатах евклидова пространства. Если в точке с координатами $x^i(\lambda_0) = \bar{x}^i(\mu_0)$ пересекаются две гладкие кривые $x^i = x^i(\lambda)$ и $x^i = \bar{x}^i(\mu)$, то соответствующие их направления в этой точке задаются касательными векторами $\xi^i = \dot{x}^i(\lambda_0)$, $\bar{\xi}^i = \dot{\bar{x}}^i(\mu_0)$, а угол θ между этими направлениями определяется формулой

$$\cos \theta = g_{jk} \xi^j \bar{\xi}^k / (\|\xi\| \|\bar{\xi}\|), \quad (27.4.1)$$

где

$$\|\xi\| = |g_{jk} \xi^j \xi^k|^{1/2}, \quad \|\bar{\xi}\| = |g_{jk} \bar{\xi}^j \bar{\xi}^k|^{1/2}. \quad (27.4.2)$$

Знаки абсолютной величины в (27.4.2) здесь не являются необходимыми и включены в запись формул лишь для последующего их использования в случае псевдоримановых многообразий.

Аналогичные рассуждения применимы и к псевдоримановым многообразиям. Как и выше, пусть y^1, \dots, y^n и w^1, \dots, w^n — нормальные координаты в окрестностях точек P_0 и Q_0 соответственно, т. е. геодезические координаты, в которых метрический тензор имеет стандартную форму (27.3.1). Эти координаты единственны только с точностью до преобразований Лоренца; следовательно, получается приближенная геометрия Минковского, а не геометрия Евклида. При отображении ψ , задаваемом как и ранее, условием $w^i = y^i$, геодезические, проходящие через P_0 , отображаются в геодезические, проходящие через Q_0 , причем с сохранением их типа (пространственноподобные, нулевые или временноподобные) и с сохранением угла между двумя геодезическими, задаваемого формулой (27.4.1). Теперь, однако, $\cos \theta$ может быть или больше 1, или меньше -1 , значит, θ может быть мнимым.

Если же ξ (или $\bar{\xi}$) — нулевой вектор, то $\cos \theta$ принимает бесконечное или неопределенное значение в зависимости от того, отлична от нуля величина $g_{jk} \xi^j \bar{\xi}^k$ или нет.

Следует заметить, что, даже если ξ и $\bar{\xi}$ — оба пространственно-подобные или оба временноподобные векторы, значение $\cos \theta$, получаемое по (27.4.1), может оказаться вне интервала $[-1, 1]$.

УПРАЖНЕНИЕ

Покажите, что необходимое и достаточное условие для того, чтобы $|\cos \theta| < 1$, состоит в том, чтобы все линейные комбинации ξ и $\bar{\xi}$ были пространственноподобными (или все временноподобными). Если $\cos \theta = \pm 1$, то найдется нулевой вектор вида $a\xi + b\bar{\xi}$ с ненулевыми a и b . (В римановом многообразии этот нулевой вектор — вектор с нулевыми компонентами, поэтому $\bar{\xi}$ представляет собой произведение ξ на скаляр.)

Для фигур в аффинно связном многообразии углы и длины не определены; тем не менее существуют некоторые геометрические соотношения, инвариантные относительно преобразования ψ , заданного выше условием $y^i = \omega^i$. Здесь y^i и ω^i — произвольные геодезические координаты, никакого понятия нормальных координат нет и геодезические координаты определяются с точностью до невырожденных линейных или аффинных преобразований. Например, если ξ , $\bar{\xi}$ и $\bar{\bar{\xi}}$ — векторы, касательные в точке P_0 к трем кривым, и если $\bar{\bar{\xi}}$ лежит в той же плоскости, что и векторы ξ и $\bar{\xi}$, т. е. если эти три вектора линейно зависимы, то это же верно и после преобразования. В действительности при отображении ψ сохраняется любое соотношение вида $\bar{\bar{\xi}} = a\xi + b\bar{\xi}$ при заданных a и b . И вообще любое множество таких векторов линейно зависимо тогда и только тогда, когда линейно зависимо множество их образов при отображении ψ .

Геометрическое понятие *параллельного смещения* или *параллельного переноса* вдоль кривой, которое будет описано в § 27.7, было введено Леви-Чивитой в 1917 г. Идея такова: в плоских геометриях — евклидовой, Минковского или аффинной, — где группа конгруэнтности (в декартовых координатах) состоит из преобразований вида

$$x \rightarrow Mx + a,$$

где M — ортогональная, лоренцева или произвольная невырожденная матрица, особую роль играет подгруппа чистых сдвигов (трансляций)

$$x \rightarrow x + a.$$

(Заметим, что в случае пространства Минковского сюда не включается никакое относительное движение, кроме смещения.) А именно, если одна фигура может быть отображена в другую при помощи

чистого сдвига, то об этих фигурах говорят не только как о конгруэнтных, но и как об имеющих одну и ту же *ориентацию* в пространстве или как о переводимых одна в другую параллельным смещением. В искривленном пространстве этому понятию параллельного смещения соответствует понятие параллельного переноса малой фигуры вдоль кривой с получением, однако, обычно разных результатов в зависимости от выбора кривой, связывающей начальную и конечную точки.

Наш подход к этим вопросам обусловлен аналогией с принципом эквивалентности общей теории относительности, согласно которому некоторые ее законы можно сформулировать просто утверждением, что соответствующие законы специальной теории относительности выполняются в инерциальной системе отсчета (системе «свободного падения»). Системы геодезических координат в окрестности точки играют роль инерциальных систем. Например, параллельный перенос вектора вдоль кривой будет определен так, что в момент прохождения вектора через точку P кривой его компоненты, соответствующие y^i (где y^1, \dots, y^n — геодезические координаты в окрестности P), почти не изменяются, т. е. имеют нулевые производные по параметру кривой.

27.5. КОВАРИАНТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

В этом и двух следующих параграфах обсуждаются три тесно связанных понятия (ковариантное дифференцирование, абсолютное дифференцирование и параллельный перенос), любое из которых можно принять за основное, а остальные вывести из него. Мы рассматриваем здесь аффинно связанное многообразие общего вида.

Частные производные компонент тензора преобразуются подобно компонентам тензора ранга, на единицу большего, но только в случае *линейных* преобразований, а в случае более общих преобразований изменяются по другому закону. Например, на евклидовой плоскости векторное поле с постоянными декартовыми компонентами имеет переменные компоненты в полярной системе координат; поэтому то, что частные производные по r и θ компонент этого вектора не обращаются в нуль, является особенностью системы координат r, θ . Чтобы исключить явления такого рода, мы определим некоторый тензор более высокого ранга, задавая его компоненты в любой точке P в геодезической системе координат в окрестности этой точки как соответствующие частные производные; тогда для вычисления компонент этого тензора в других системах координат нужно использовать законы преобразования тензоров.

Пусть $P: x^i = a^i$ — произвольная точка, и пусть y^1, \dots, y^n — соответствующие геодезические координаты. Как и в § 27.2,

$$x^i = a^i + y^i - \frac{1}{2} \Gamma^i_{jk} y^j y^k + \dots, \quad (27.5.1)$$

$$y^i = x^i - a^i + \frac{1}{2} \Gamma^i_{jk} (x^j - a^j) (x^k - a^k) + \dots \quad (27.5.2)$$

В этих равенствах коэффициенты связности относятся к системе координат x^l и их следует вычислять в точке P . Пусть $v_i(x^1, \dots, x^n)$ — произвольное ковариантное векторное поле; обозначим его компоненты в геодезической системе координат через $\dot{v}_i(y^1, \dots, y^n)$. Ковариантный тензор второго ранга $v_{i,j}$ — ковариантная производная вектора v_i — определяется (в точке P) заданием его компонент в системе координат y^j :

$$\dot{v}_{i,j}|_P = \partial \dot{v}_i / \partial y^j |_P \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (27.5.3)$$

Найдем вид этого равенства в системе x^l . В точке P мы имеем $\dot{v}_i = v_i$ и $\dot{v}_{i,j} = v_{i,j}$, потому что в точке P $\partial x^i / \partial y^j = \delta_{ij}$. Однако $\dot{v}_{i,j}$, находящиеся в правой части равенства (27.5.3), нужно знать не только в точке P , но и вблизи нее (для выполнения дифференцирования). Вблизи P

$$\dot{v}_i = v_k \partial x^k / \partial y^i;$$

поэтому

$$v_{i,j}|_P = \dot{v}_{i,j}|_P = \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \left(v_k \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \right) \right)_P = \left(\frac{\partial v_k}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \right)_P + v_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^j \partial y^i} \Big|_P.$$

В точке P $\partial x^l / \partial y^j = \delta_{lj}$ и т. д., а вторая производная равна $-\Gamma_{ij}^k$ (по 27.5.1). Поэтому

$$v_{i,j} = \partial v_i / \partial x^j - \Gamma_{ij}^k v_k \quad (27.5.4)$$

(просуммировано по k); это и есть правило ковариантного дифференцирования в произвольной координатной системе; $v_{i,j}(x^1, \dots, x^n)$ образуют дважды ковариантное тензорное поле.

Это правило показывает, что если тензор $v_{i,j}$ определяется в точке P формулой (27.5.3) в частной геодезической системе координат в окрестности P , то он правильно определяется тем же равенством и в любой другой геодезической системе в окрестности P . Действительно, если x^l — геодезические координаты, то $\Gamma_{ij}^k = 0$ в P и (27.5.4) согласуется с (27.5.3).

Непосредственным применением ковариантного дифференцирования получаем, что если v_i — градиент скаляра f в евклидовом пространстве, то лапласиан от f в произвольной криволинейной системе координат имеет вид

$$g^{ij} v_{i,j} = g^{ij} (\partial^2 f / \partial x^i \partial x^j - \Gamma_{ij}^k \partial f / \partial x^k);$$

поскольку эта величина является скаляром (т. е. инвариантом) и, очевидно, равна лапласиану от f в декартовой системе координат.

УПРАЖНЕНИЕ

1. (а) Покажите, что если $v^i = v^i(x^1, \dots, x^n)$ — контравариантное векторное поле, то формула

$$v^i{}_{;j} = \partial v^i / \partial x^j + \Gamma^i_{jk} v^k \quad (27.5.5)$$

определяет смешанный тензор второго ранга. (б) Покажите, что если T_{ij} — ковариантное тензорное поле второго ранга, то формула

$$T_{ij}{}_{;k} = \partial T_{ij} / \partial x^k - \Gamma^l_{ik} T_{lj} - \Gamma^l_{jk} T_{il} \quad (27.5.6)$$

определяет ковариантное тензорное поле третьего ранга.

Ковариантная производная тензора общего вида имеет один дополнительный член (в дополнение к частной производной), как в (27.5.4), для каждого ковариантного индекса и один дополнительный член, как в (27.5.5), для каждого контравариантного индекса. Ковариантная производная скалярного поля f есть просто его градиент: $f_{;k} = df/dx_k$.

Операция ковариантного дифференцирования обеспечивает основу для инвариантной формулировки теорий поля и вообще для тех физических теорий, в которых встречаются уравнения с частными производными.

УПРАЖНЕНИЕ

2. Покажите, что эта операция удовлетворяет правилу дифференцирования произведения. Для начала убедитесь в том, что если T_{ij} в (27.5.6) равно $v_i \omega_j$, то

$$(v_i \omega_j)_{;k} = v_{i;k} \omega_j + v_i \omega_{j;k}. \quad (27.5.7)$$

После этого докажите, что если T^{\dots} и S^{\dots} — произвольные тензоры, то

$$(T^{\dots} S^{\dots})_{;k} = T^{\dots}{}_{;k} S^{\dots} + T^{\dots} S^{\dots}{}_{;k}, \quad (27.5.8)$$

где указанное произведение может быть как внешним, так и произвольным внутренним произведением, т. е. свернутым произвольное число раз.

Замечание. В старой литературе ковариантное дифференцирование обозначали часто запятой вместо точки с запятой. Теперь запятой чаще обозначают обычную частную производную, так что $v_{i;j} = v_{i,j} - \Gamma^l_{ij} v_l$.

УПРАЖНЕНИЕ

3. Покажите, что в римановом или псевдоримановом многообразии метрический тензор ведет себя по отношению к ковариантному дифференцированию как константа, т. е.

$$g_{ij}{}_{;k} = 0, \quad g^{ij}{}_{;k} = 0, \quad \delta^i_{j;k} = 0. \quad (27.5.9)$$

(Напомним, что в этих многообразиях $\Gamma^i_{jk} = \{^i_{jk}\}$.)

Как следствие этого упражнения получаем, что ковариантное дифференцирование коммутирует с поднятием и опусканием индексов: если $v_i = g_{ij} v^j$, то $v_{i;k} = g_{ij} v^j{}_{;k}$.

Следует заметить, что результат последовательных ковариантных дифференцирований обычно не симметричен по соответствующим индексам: $v_j; k; l \neq v_j; l; k$; исключением служит случай плоского пространства, где в декартовых координатах оба этих выражения сводятся к $\partial^2 v_j / \partial x^k \partial x^l$. Эта асимметрия—следствие внутренней кривизны пространства и появляется ниже (в § 27.9) в определении тензора кривизны Римана.

27.6. АБСОЛЮТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ВДОЛЬ КРИВОЙ

Пусть $\mathcal{C}: P = P(\lambda)$ —гладкая кривая, произвольным образом параметризованная и заданная в римановом, или псевдоримановом, или аффинно связном многообразии, и пусть дано векторное или тензорное поле, определенное по меньшей мере на \mathcal{C} . Мы хотим определить другой вектор (или тензор) на \mathcal{C} так, чтобы в каждой точке \mathcal{C} он описывал скорость изменения первого вектора (или тензора) относительно λ , причем в некотором абсолютном (инвариантном) смысле.

Предположим, что \mathcal{C} лежит в координатной карте $\{U, \varphi, N\}$ и описывается уравнением $x^i = x^i(\lambda) = \varphi^i(P(\lambda))$; предположим также, что $v_i(\lambda)$ —компоненты ковариантного вектора, определенного на \mathcal{C} в той же системе координат. Определим другой ковариантный вектор $w_i(\lambda)$, который представляет скорость изменения $v_i(\lambda)$. Очевидно, мы не можем написать просто $w_i(\lambda) = dv_i(\lambda)/d\lambda$, потому что эти величины преобразуются не по тензорному закону. Поэтому мы применяем здесь принцип эквивалентности. Пусть $P_0 = P(\lambda_0)$ —точка на \mathcal{C} , а y^1, \dots, y^n —геодезические координаты в окрестности P_0 , совпадающие с x^i с точностью до первого порядка. Пусть $\dot{v}_i(\lambda)$ —компоненты v_i в геодезической системе координат; $\dot{v}_i(\lambda) = v_i(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$, но это равенство обычно не выполняется при $\lambda \neq \lambda_0$. Положим

$$w_i(\lambda_0) = d\dot{v}_i(\lambda)/d\lambda |_{\lambda=\lambda_0},$$

а затем преобразуем это равенство в исходную систему координат; при $\lambda = \lambda_0$ мы получим, что

$$w_i(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \left(v_k(\lambda) \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \right) = \frac{dv_k(\lambda)}{d\lambda} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} + v_k(\lambda) \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^i \partial y^j} \frac{dy^j(\lambda)}{d\lambda}.$$

При $\lambda = \lambda_0$ x^i и y^i совпадают с точностью до первого порядка, а вторые производные, согласно (27.5.1), равны $-\Gamma_{ij}^k$. Иначе говоря,

$$w_i(\lambda) = dv_i(\lambda)/d\lambda - v_k(\lambda) \Gamma_{ij}^k dx^j(\lambda)/d\lambda.$$

Поскольку здесь уже нет геодезических координат, это равенство справедливо в любой точке \mathcal{C} и в любой системе координат. Обычно w_i обозначают через $dv_i/d\lambda$ и называют *абсолютной про-*

изводной от v_i вдоль \mathcal{C} , т. е. вдоль кривой \mathcal{C} :

$$\delta v_i / \delta \lambda = dv_i / d\lambda - \Gamma_{ik}^j v_k dx^j / d\lambda. \quad (27.6.1)$$

Если векторное поле v_i задано не только на \mathcal{C} , но и в некоторой области, содержащей \mathcal{C} , то

$$\delta v_i / \delta \lambda = v_{i;j} dx^j / d\lambda. \quad (27.6.2)$$

Абсолютные производные вдоль \mathcal{C} от других тензоров определяются аналогично, как это делалось и для ковариантных производных. Например, если на \mathcal{C} задан контравариантный вектор v^i , то

$$\delta v^i / \delta \lambda = dv^i / d\lambda + \Gamma_{jk}^i v^j dx^k / d\lambda. \quad (27.6.3)$$

Для абсолютного дифференцирования, как и для ковариантного, справедлива формула дифференцирования произведения, метрический тензор ведет себя как константа и абсолютная производная скаляра f является обычной производной $df/d\lambda$ (т. е. другим скаляром).

В частности, если v^i — касательный к \mathcal{C} вектор, задаваемый равенством

$$v^i(\lambda) = dx^i / d\lambda,$$

то сравнение (27.6.3) с уравнением геодезической (26.12.3) показывает, что $\delta v^i / \delta \lambda = 0$ на \mathcal{C} тогда и только тогда, когда \mathcal{C} является геодезической, а λ — натуральный параметр. В этом смысле геодезическую можно трактовать как кривую, касательный вектор к которой является константой на всем ее протяжении.

27.7. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

В § 27.4 уже упоминалась задача о параллельном переносе. Нам нужно для вектора, заданного в точке P_0 кривой \mathcal{C} , определить вектор в любой другой точке кривой так, чтобы его можно было считать полученным из данного вектора путем параллельного смещения вдоль кривой. Согласно принципу эквивалентности, если взять любую другую точку P_1 кривой и любую систему геодезических координат в окрестности P_1 , то компоненты вектора относительно этой системы координат должны оставаться неизменными при переходе через точку P_1 . Иначе говоря, абсолютная производная вектора вдоль кривой \mathcal{C} должна быть равна нулю. Поэтому если ξ_1, \dots, ξ_n — компоненты данного вектора в P_0 , то преобразованный вектор в любой точке $P(\lambda)$ кривой получается как решение $v_i(\lambda)$ задачи с начальными данными

$$\delta v_i(\lambda) / \delta \lambda = 0 \text{ на } \mathcal{C}, \quad v_i(\lambda_0) = \xi_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (27.7.1)$$

Заметим, что если вектор $v_i(\lambda)$ преобразуется при переходе к другой системе координат x'^1, \dots, x'^n , то он снова оказывается реше-

нием соответствующей задачи с начальными данными

$$\delta v_i / \delta \lambda = 0 \text{ на } \mathcal{C}, \quad v'_i(\lambda_0) = \xi'_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где ξ'_i получаются из ξ_i в соответствии с законом преобразования для вектора в P_0 . Вот почему $\delta v_i / \delta \lambda$ оказывается вектором, и если все его компоненты обращаются в нуль в одной системе координат, то они обращаются в нуль и в любой другой.

Аналогично определяется параллельный перенос вдоль кривой контравариантного вектора или вообще любого тензора.

Рассмотрим, в частности, риманово или псевдориманово многообразие. Поскольку $\delta g_{jk} / \delta \lambda = 0$, то для любых гладких векторно-значных функций $v^i(\lambda)$ и $w^i(\lambda)$ на \mathcal{C}

$$d(g_{jk} v^j w^k) / d\lambda = g_{jk} ((\delta v^j / \delta \lambda) w^k + v^j \delta w^k / \delta \lambda).$$

Поэтому, если $v^j(\lambda)$ и $w^k(\lambda)$ — результат параллельного переноса двух данных векторов вдоль кривой \mathcal{C} , отсюда следует, что величина $g_{jk} v^j w^k$ постоянна на \mathcal{C} , т. е. при параллельном переносе в римановом или псевдоримановом многообразии длины векторов и углы между ними сохраняются.

27.8. ОРИЕНТИРУЕМОСТЬ

Если \mathcal{C}_1 и \mathcal{C}_2 — кривые, идущие от точки P к точке Q , то результат параллельного переноса вдоль \mathcal{C}_1 в общем случае отличается от результата параллельного переноса вдоль \mathcal{C}_2 . Иначе говоря, параллельный перенос вдоль замкнутой кривой от P до возвращения в P в общем случае переводит каждый вектор в P в другой вектор в P . Это преобразование векторов в точке P в римановом многообразии оказывается ортогональным, потому что оно сохраняет все длины и углы. Если для всех замкнутых кривых детерминант матрицы преобразования равен $+1$, то многообразие называется *ориентируемым*. Это будет, в частности, в случае односвязности многообразия, потому что для любой замкнутой кривой, непрерывно стягиваемой в точку, указанное ортогональное преобразование непрерывно изменится и переходит в тождественное преобразование, детерминант матрицы которого равен $+1$.

УПРАЖНЕНИЕ

Лист Мёбиуса, сделанный из ровного листа бумаги без растягивания, можно рассматривать как двумерное риманово многообразие, которое может быть покрыто двумя или более координатными картами, на каждой из которых всюду $g_{jk} = \delta_{jk}$. Покажите, что это многообразие не ориентируемо.

Замечание. Ориентируемость — это топологическое, а не метрическое понятие, и его можно ввести для многообразий общего вида, для которых метрический тензор не определен. Данное выше определение было принято по той причине, что его можно обобщить

на случай многообразий Эйнштейна, как это будет сейчас показано, причем в таком направлении, которое сильно отличается от топологической ориентируемости.

Если M — псевдориманово многообразие размерности $n=4$ и сигнатуры $s=2$ (как в теории относительности), то преобразование в точке P , получаемое в результате параллельного переноса векторов вокруг замкнутой кривой, начинающейся и кончающейся в P , является преобразованием Лоренца. В § 19.4 было показано, что полная группа Лоренца имеет 4 компоненты; следовательно, имеются четыре варианта рассматриваемого преобразования. Это преобразование (может быть либо собственным преобразованием Лоренца, либо включать или обращение времени, или инверсию пространства («обратный ход по пространству»), или обе последние возможности. Если для всех замкнутых путей получается собственное преобразование Лоренца, то M называют *ориентируемым по Лоренцу*. В этом случае всюду на M можно установить положительное направление времени (и отличать прошлое от будущего) и ввести правила ориентации ¹⁾ (и отличать левые и правые системы координат или винты и спирали). Односвязное многообразие ориентируемо по Лоренцу; следовательно, любое многообразие Эйнштейна M имеет некоторое накрывающее ориентируемое по Лоренцу многообразие M' (например, его универсальное накрывающее многообразие). Поскольку M и M' локально неразличимы, в общей теории относительности нет необходимости рассматривать пространственно-временные модели, не ориентируемые по Лоренцу. (Этим наблюдением поделился с автором Липман Берс во время беседы за чашкой чая в Институте Куранта.)

Аффинно связанное многообразие ориентируемо, если аффинное преобразование геодезических координат около некоторой точки, полученное путем параллельного переноса векторов вдоль замкнутой кривой, определяется матрицей с положительным детерминантом для всех таких кривых и всех точек многообразия.

27.9. ТЕНЗОР РИМАНА В ОБЩЕМ ВИДЕ. ЛАПЛАСИАНЫ И ДАЛАМБЕРТИАН

Пусть M — аффинно связанное многообразие. Как было указано в § 27.5, результат двукратного ковариантного дифференцирования векторного поля в общем случае не симметричен по соответствующим индексам. Непосредственные вычисления с использованием формул из указанного параграфа показывают, что

$$v_{j; k; l} - v_{j; l; k} = R^i_{jkl} v_i, \quad (27.9.1)$$

¹⁾ Вроде правила левой руки, правила правой руки, правила буравчика и т. п. В оригинале использовано жаргонное слово *chirality*, не имеющее аналога в русском языке. — *Прим. перев.*

где R^i_{jkl} обозначает величину

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma^i_{jl} - \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{mk} \Gamma^m_{jl} - \Gamma^i_{ml} \Gamma^m_{jk}. \quad (27.9.2)$$

Так как v_i произвольно, то правило частного, примененное к (27.9.1), показывает, что n^4 величин R^i_{jkl} являются компонентами тензора четвертого ранга, называемого *тензором Римана* или *тензором кривизны Римана*.

В евклидовом пространстве тензор Римана тождественно равен нулю в любой системе координат, поскольку очевидно, что он равен нулю в декартовой системе координат, а если все компоненты тензора равны нулю в одной системе координат, то они равны нулю и в любой другой. В § 27.12 будет показано, что обращение в нуль тензора Римана также и *достаточно* для того, чтобы риманово многообразие оказалось евклидовым, псевдориманово многообразие — пространством Минковского, а аффинно связанное многообразие — плоским. В каждом случае это утверждение непосредственно связано с метрикой, однако, если многообразие односвязно, его можно расширить до полного евклидова пространства, пространства Минковского или плоского пространства.

В частном случае риманова или псевдориманова многообразия, где существует метрика, а индексы можно поднимать и опускать, тензор Римана допускает другое представление; см. следующий параграф.

Если R^i_{jkl} свернуть по первому и четвертому индексам, получится *тензор Риччи*

$$R_{jk} = R^i_{jki}, \quad (27.9.3)$$

играющий важную роль в теории относительности.

Остальная часть этого параграфа посвящена лапласиану и даламбертиану (операторам Лапласа и Даламбера). Оператор Лапласа задается в евклидовом пространстве (в декартовых координатах) в виде

$$\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \dots + \partial_n^2,$$

где $\partial_k = \partial/\partial x^k$; оператор Даламбера задается в пространстве Минковского специальной теории относительности в виде

$$\square^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 - \partial_4^2.$$

Оба оператора можно записать в виде $g^{jk} \partial_j \partial_k$, где (g^{jk}) — диагональный метрический тензор. В физических теориях эти операторы применяются к скалярным и векторным полям. Когда они применяются к скалярному полю f , их обобщение на случай римановых или псевдоримановых многообразий есть просто $g^{jk} f_{;j;k}$, но для обобщения их применения к векторному полю v_i необходимо ввести тензор, обозначаемый через $v_{i;jk}$ и называемый *вторым*

симметрическим расширением v_i (см. Томас [1961]), компоненты которого задаются в начале P системы геодезических координат y^1, \dots, y^n как

$$v_{j;kl}|_P = \partial^2 \dot{v}_j / \partial y^k \partial y^l |_P, \quad (27.9.4)$$

где $\dot{v}_j(y^1, \dots, y^n)$ — компоненты векторного поля v_j , выраженные через геодезические координаты. Согласно приведенному ниже упражнению 4, в общем случае этот тензор не совпадает с результатом симметризации второй ковариантной производной $v_{j;kl}$ по индексам k и l . В соответствии с принципом эквивалентности мы определяем операторы Лапласа и Даламбера в применении к векторному полю v_j как

$$g^{kl} v_{j;kl}, \quad (27.9.5)$$

а не через вторую ковариантную производную (см., однако, упражнение 3 в следующем параграфе).

Симметричные расширения более высоких порядков определяются аналогично, например,

$$v_{j;klm}|_P = \partial^3 \dot{v}_j / \partial x^k \partial x^l \partial x^m |_P.$$

УПРАЖНЕНИЕ

1. Покажите, что если Φ — скалярное поле, то

$$\Phi_{;k;l} = \Phi_{;l;k} = \Phi_{;kl},$$

тогда как для ковариантного векторного поля v_j в общем случае

$$v_{j;k;l} \neq v_{j;l;k}.$$

2. Покажите, что в произвольной системе координат второе симметрическое расширение имеет вид

$$v_{j;kl} = \partial^2 v_j / \partial x^k \partial x^l - \Gamma_{kl}^m \partial v_j / \partial x^m - \Gamma_{ij}^m \partial v_m / \partial x_k - \Gamma_{jk}^m \partial v_m / \partial x^l - v_m \Gamma_{jkl}^m, \quad (27.9.6)$$

где Γ_{jkl}^m — коэффициенты, заданные в (27.2.10).

3. Покажите, что в начале геодезических координат

$$\partial \overset{\circ}{\Gamma}_{kl}^m / \partial y^j + \partial \overset{\circ}{\Gamma}_{li}^m / \partial y^k + \partial \overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^m / \partial y^l = 0, \quad (27.9.7)$$

где кружки над Γ указывают на то, что коэффициенты связности выражены через геодезические координаты y^1, \dots, y^n .

4. Покажите, что для гладкого векторного поля v_j

$$v_{j;kl} - \frac{1}{2} (v_{j;k;l} + v_{j;l;k}) = \frac{1}{6} (R^n{}_{lkj} + R^n{}_{kij}) v_m. \quad (27.9.8)$$

5. Покажите, что в начале геодезических координат

$$\partial \overset{\circ}{\Gamma}_{kl}^m / \partial y^j = \frac{1}{3} (\overset{\circ}{R}^m{}_{ijk} + \overset{\circ}{R}^m{}_{kji}). \quad (27.9.9)$$

Последняя формула показывает, что тензор Римана содержит всю внутреннюю информацию о пространстве в непосредственной окрестности любой точки P , задаваемую коэффициентами связности и их первыми производными в P . А именно при должном выборе

системы координат (геодезических координат) Γ_{kl}^m можно обратить в нуль в точке P ; следовательно, они не несут никакой внутренней (не зависящей от выбора координат) информации, а все их первые производные определяются по формуле (27.9.9) тензором Римана. Подобным же образом в следующем параграфе мы покажем, что при наличии метрического тензора g_{jk} тензор Римана дает и всю внутреннюю информацию, выражаемую компонентами метрического тензора g_{jk} и их первыми и вторыми частными производными в точке P .

27.10. ТЕНЗОР РИМАНА В РИМАНОВОМ ИЛИ ПСЕВДОРИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

Предположим теперь, что на многообразии определен метрический тензор g_{kl} . Тогда коэффициенты связности Γ_{jl}^i , входящие в определение (27.9.2) тензора Римана, совпадают с символами Кристоффеля второго рода $\{j^i\}_l$, определенными формулами (26.6.10) и (26.6.11). В этом случае непосредственные вычисления показывают, что тензор Римана R_{ijkl} (с опущенным первым индексом) можно выразить через g_{kl} и его производные:

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} \right) + g^{pq} ([jk, p][il, q] - [ik, p][jl, q]), \quad (27.10.1)$$

где квадратные скобки обозначают символы Кристоффеля первого рода (см. (26.6.10)).

Число независимых компонент этого тензора меньше n^4 , потому что из формулы (27.10.1) вытекают следующие свойства симметрии:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}, \quad (27.10.2)$$

$$R_{jikl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0. \quad (27.10.3)$$

На основании этих соотношений мы сейчас покажем, что число независимых компонент тензора Римана равно

$$n^2(n^2 - 1)/12, \quad (27.10.4)$$

что для размерностей $n=2, 3, 4$ составляет соответственно 1, 6, 20. Действительно, из трех соотношений (27.10.2) следует, что ненулевые компоненты можно записать (с заменой знака, если нужно) в виде R_{ijkl} с $i < j$ и $k < l$, причем если (ij) и (kl) рассматривать как двузначные n -ичные целые числа, то $(ij) \leq (kl)$. Число допустимых значений (ij) или (kl) равно тогда $n(n-1)/2 = m$, а число допустимых пар $(ij), (kl)$ есть

$$m(m+1)/2 = n(n-1)(n^2 - n + 2)/8. \quad (27.10.5)$$

Далее, если не все i, j, k и l различны, то (27.10.3) сводится к некоторой комбинации предыдущих тождеств (27.10.2), а если они различны, то можно без потери общности предположить, что $i < j < k < l$, так как для любой перестановки i', j', k', l' величин i, j, k, l тождество (27.10.3) для i, j, k, l можно получить из этого же тождества для i', j', k', l' , используя тождества (27.10.2). Поэтому число независимых тождеств типа (27.10.3) равно $n(n-1)(n-2) \times (n-3)/4!$, а вычитание его из (27.10.5) как раз и дает (27.10.4). Можно доказать, что R_{ijkl} не удовлетворяет никаким другим алгебраическим тождествам, не зависящим от (27.10.2) и (27.10.3).

Как было указано в предыдущем параграфе, свернутый один раз тензор Римана $R^i{}_{jkl}$ дает тензор Риччи

$$R_{jk} = R^l{}_{jkl}. \quad (27.10.6)$$

В римановом или псевдоримановом многообразии этот тензор симметричен: $R_{jk} = R_{kj}$. Двойная свертка тензора Риччи с метрическим тензором дает скалярную кривизну Римана

$$R = g^{jk}R_{jk}. \quad (27.10.7)$$

Ковариантная производная тензора Римана удовлетворяет тождеству Бианки

$$R_{iikl; m} + R_{ijlm; k} + R_{ijmk; l} = 0, \quad (27.10.8)$$

что легко проверить на основании (27.10.1), если воспользоваться геодезическими координатами в окрестности любой точки, поскольку в них ковариантные производные становятся обычными производными в этой точке.

Внутреннее произведение последнего равенства и $g^{ik}g^{jl}$ имеет вид

$$-R_{; m} + R^k{}_{m; k} + R^l{}_{m; l} = 0.$$

Здесь второе и третье слагаемые равны между собой, а первое в точности совпадает с $-\partial R/\partial x_m$. Отсюда следует, что симметрический тензор

$$L_{jk} = R_{jk} - Rg_{jk}, \quad (27.10.9)$$

фигурирующий в уравнении поля Эйнштейна, имеет нулевую дивергенцию:

$$L^j{}_{k; j} = 0, \quad L^k{}_{; k} = 0. \quad (27.10.10)$$

Рассмотрим теперь кратко условия, при которых аффинно связанное многообразие можно превратить в риманово многообразие путем введения метрики, согласованной со связностью, т. е. условия, при которых для заданных коэффициентов связности $\Gamma^r_{kl}(x^1, \dots, x^n)$ ($\Gamma^r_{kl} = \Gamma^r_{lk}$) найдутся такие функции $g_{kl}(x^1, \dots, x^n)$

(для которых $g_{kl} = g_{lk}$), что $\Gamma_{kl}^r = \{k^r l\}$, т. е. такие, что

$$\Gamma_{kl}^r = \frac{1}{2} g^{rm} \left(-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} \right), \quad (27.10.11)$$

где, как всегда, (g^{rm}) —матрица, обратная к матрице (g_{rm}) . Это равенство можно разрешить относительно $\partial g_{ks}/\partial x^l$ и получить

$$\partial g_{ks}/\partial x_l = g_{rs} \Gamma_{kl}^r + g_{rk} \Gamma_{sl}^r \quad (27.10.12)$$

По определению ковариантной производной это равенство в точности совпадает с равенством $g_{ks;l} = 0$, которое, как известно, и должно выполняться в римановом или псевдоримановом многообразии. Поэтому необходимое и достаточное условие существования метрики, согласующейся со связностью, состоит в том, чтобы система уравнений (27.10.12) имела какое-нибудь решение $g_{kl}(x^1, \dots, x^n)$.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Покажите, что из условия согласованности метрики и связности, выражаемого уравнением (27.10.12), следует, что если его решение g_{kl} существует, то оно удовлетворяет равенству

$$R^r_{kjl} g_{rs} + R^r_{sjl} g_{rk} = 0, \quad (27.10.13)$$

которое в точности совпадает с первым из соотношений (27.10.2). При помощи ковариантного дифференцирования получите из этого равенства остальные соотношения.

2. Рассмотрим многообразие, в котором аффинная связность задана формулой

$$\Gamma_{j2}^i(x^1, \dots, x^n) = \Gamma_{2j}^i(x^1, \dots, x^n) = \delta_{j2}^i x^1; \\ \Gamma_{jk}^i = 0 \text{ во всех остальных случаях.}$$

Покажите, что для этого многообразия в начале координат нет симметрического решения уравнения (27.10.13); покажите также, что тензор Риччи не симметричен: $R_{12} \neq R_{21}$.

3. Покажите, что если в римановом или псевдоримановом многообразии тензор Риччи R_{ij} равен нулю (как в случае пустого пространства-времени общей теории относительности), то два естественных определения операторов Лапласа и Даламбера, когда они применяются к векторному полю, совпадают:

$$g^{kl} \nabla_j \nabla_k = g^{kl} \Delta_j \nabla_k; \quad k, l.$$

Иначе говоря, как было указано в предыдущем параграфе, мы получаем для выражения в левой части этого равенства правильное представление в начале геодезических координат.

4. Покажите, что в римановом или псевдоримановом многообразии в начале геодезических координат

$$\partial^2 \hat{g}_{jk} / \partial y^l \partial y^m = -\frac{1}{3} (\hat{R}_{jklm} + \hat{R}_{kljm}) = \\ = -\frac{1}{3} (\hat{R}_{jklm} + \hat{R}_{jmkl}). \quad (27.10.14)$$

Отсюда следует, что тензор Римана содержит всю информацию о геометрии в малой окрестности любой точки, задаваемую метрическим тензором и его первыми и вторыми частными производными в этой точке, потому что найдется такая система координат (геодезических), что в этой точке выполняются стандартные равенства $g_{jk} = \delta_{jk}$ и $\partial g_{jk} / \partial x^l = 0$; следовательно, в этой системе координат эти величины никакой информации не содержат, тогда как вторые производные получаются из приведенного выше уравнения.

27.11. ТЕНЗОР РИМАНА И ВНУТРЕННЯЯ КРИВИЗНА МНОГООБРАЗИЯ

Предположим, что n -мерное многообразие M погружается в евклидово пространство E^N (т. е. рассматривается как n -мерная поверхность в нем) с наследуемой из E^N метрикой. Тогда геометрия M включает как внутренние, так и внешние аспекты; под первыми понимаются такие свойства, которые определяются метрическим тензором на M и не зависят от конкретного способа погружения M в E^N . (Например, плоский лист из нерастяжимого мате-

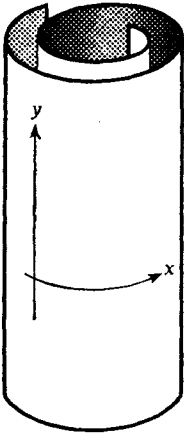


Рис. 27.1.

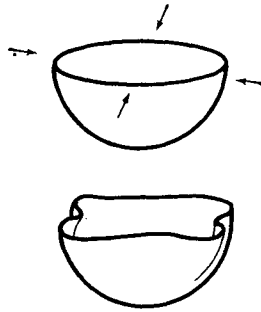


Рис. 27.2.

риала можно свернуть так, как показано на рис. 27.1, и тогда его наследуемая метрика будет совпадать с метрикой евклидовой плоскости.) Геодезическая в M является обычно некоторой кривой в E^N , и ее кривизна оказывается внешним свойством: центр кривизны лежит вне M .

С другой стороны, кривизну того вида, которой обладает поверхность сферы, можно определить метрикой. Кривизну поверхности Земли можно в принципе определить при помощи измерений, проведенных исключительно на этой поверхности: строится большой треугольник, сторонами которого являются геодезические (наискратчайшие пути между вершинами), и измеряются площадь A треугольника и сумма Σ его углов. После этого радиус Земли вычисляется по формуле

$$A/r^2 = \Sigma - \pi. \quad (27.11.1)$$

Очевидно, что $\Sigma - \pi$ есть угловое отклонение вектора от его первоначального направления после параллельного переноса по контуру треугольника. Можно представить себе вектор как стрелу,

лежащую на палубе корабля, плывущего вокруг треугольника. Когда корабль изменяет направление своего движения в одной из вершин, совершая поворот направо на некоторый угол, стрела в это время поворачивается на тот же угол налево по отношению к направлению движения корабля до поворота.

Заметим, что поверхность, обладающую кривизной такого рода, можно погрузить в E^3 различными способами. Полусферу можно изогнуть без растяжения, деформируя экватор так, как показано на рис. 27.2. Согласно дифференциальной геометрии поверхностей в E^3 , произведение двух главных радиусов кривизны в данной точке инвариантно по отношению к такому рода деформации без растяжения.

Теперь мы выведем формулу, обобщающую (27.11.1) на случай общего n -мерного аффинно связного многообразия M , не обязательно погруженного в плоское пространство более высокой размерности. Пусть x^1, \dots, x^n — координаты на некоторой карте в M . Рассмотрим какую-нибудь очень маленькую замкнутую кривую \mathcal{C} в M , полученную при обходе точкой x^i параллелограмма в координатном пространстве \mathbb{R}^n с вершинами $x_i(0)$, $x^i(0) + a^i$, $x^i(0) + a^i + b^i$, $x^i(0) + b^i$, $x^i(0)$, где a^i и b^i — достаточно малые величины. Простые вычисления показывают, что если какой-то вектор v^i перемещается параллельным переносом вокруг \mathcal{C} , начиная с $v^i = \xi^i$ в первой вершине, то суммарное отклонение Δv^i равно (с точностью до наименьшего порядка малых величин)

$$\Delta v^i = \frac{1}{2} \xi^j R^i{}_{jkl} (a^l b^k - a^k b^l). \quad (27.11.2)$$

Это и есть нужное обобщение формулы (27.11.1). Исходя из формулы (27.11.2) тензор Римана можно выразить через отклонения (девиации) Δv^i , полученные для различных векторов ξ^i при параллельном переносе вокруг произвольных малых петель.

Еще раз подчеркнем, что эта формула справедлива только для малых петель \mathcal{C} , тогда как (27.11.1) имеет место для произвольно больших треугольников. Причина этого в том, что сфера имеет постоянную кривизну. Если бы та же процедура использовалась для эллипсоида общего вида, то пришлось бы ограничиться очень малыми треугольниками.

27.12. ПЛОСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И ОБРАЩЕНИЕ ТЕНЗОРА РИМАНА В НУЛЬ

Если имеются два римановых многообразия одной и той же размерности, то возникает вопрос: не являются ли они одним и тем же пространством, описанным в разных системах координат? С этим вопросом связаны глобальные топологические проблемы, а также следующая, более локальная задача. Пусть заданы две римановы метрики, каждая из которых определяется набором n^2 гладких

функций

$$g_{jk}(x^1, \dots, x^n) \quad (j, k = 1, \dots, n)$$

и

$$g'_{jk}(x'^1, \dots, x'^n) \quad (j, k = 1, \dots, n),$$

заданных в \mathbb{R}^n на областях N и N' соответственно. Найдется ли такое преобразование

$$x'^j = x'^j(x^1, \dots, x^n) \quad (j = 1, \dots, n)$$

области N в область N' или части N в часть N' , что g_{jk} преобразуется в g'_{jk} по тензорному закону для ковариантных тензоров второго ранга? Если это так, то можно считать, что эти две системы координат определяют две карты одного многообразия. В общем случае это трудный вопрос, на который, однако, можно дать полный ответ, если функции одного из наборов, скажем $g'_{jk}(\dots)$, постоянны; в этом случае пространство оказывается евклидовым, а тензор Римана обращается в нуль.

Покажем, что, для того чтобы пространство было плоским, необходимо и достаточно равенство нулю тензора Римана. Предположим сначала, что $R^i{}_{jkl}$ равен нулю на всем аффинно связном многообразии, и покажем, что в любой односвязной области можно выбрать такие координаты y^1, \dots, y^n , что соответствующие коэффициенты связности $\Gamma^i{}_{jk}$ тождественно равны нулю. При наличии метрического тензора можно подобрать такие координаты y^i , что g_{jk} всюду принимают стандартные значения $\pm \delta_{jk}^1$.

Пусть x^1, \dots, x^n — координаты некоторой односвязной карты; рассмотрим следующую задачу с начальными данными для ковариантного векторного поля $v_i(x^1, \dots, x^n)$:

$$v_{i;j} = 0, \quad \text{т. е. } \partial v_i / \partial x^j - \Gamma^k{}_{ij} v_k = 0, \quad (27.12.1)$$

$$v_i(0, \dots, 0) \text{ задано.} \quad (27.12.2)$$

Как известно, эта задача имеет решение при любых начальных данных (27.12.2), если выполняется условие совместности

$$\partial(\Gamma^k{}_{ij} v_k) / \partial x^l - \partial(\Gamma^k{}_{il} v_k) / \partial x^j = 0. \quad (27.12.3)$$

Вычислив производные в этом уравнении по правилу дифференцирования произведения и еще раз использовав дифференциальное уравнение (27.12.1), мы приходим к уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma^k{}_{ij} - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^k{}_{il} \right) v_k + \Gamma^k{}_{ij} \Gamma^m{}_{lk} v_m - \Gamma^k{}_{il} \Gamma^m{}_{jk} v_m = 0.$$

¹⁾ В точке P_0 , в которой строится геодезическая система координат, всегда $\Gamma^i{}_{jk} = 0$ [см. (27.2.6)], а при наличии метрического тензора всегда можно добиться того, чтобы $g_{jk} = \pm 1$; речь идет о том, чтобы эти равенства выполнялись в окрестности P_0 , — именно такое многообразие называется *плоским*. — Прим. перев.

После переименования немых индексов его можно записать в виде

$$R^k_{jli}v_k = 0,$$

где R^k_{jli} задается формулой (27.9.2). Поскольку тензор Римана равен нулю, условие совместности выполняется. Пусть $v_i(x^1, \dots, x^n; p)$ ($p=1, \dots, n$) суть n решений задачи с начальными данными, которые получаются при задании n линейно независимых начальных векторов $v_i(0, \dots, 0; p)$, $p=1, \dots, n$; для каждого из этих решений $v_{i;j}=0$. Для каждого $p=1, \dots, n$ рассмотрим теперь другую задачу с начальными данными

$$\begin{aligned} \delta y(x^1, \dots, x^n)/\delta x^i &= v_i(x^1, \dots, x^n; p), \\ y(0, \dots, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Условие совместности для этой задачи имеет вид

$$\delta v_i/\delta x^j - \delta v_j/\delta x^i = 0,$$

т. е. $v_{i;j} - v_{j;i} = 0$ (другие слагаемые ковариантных производных взаимно уничтожаются); следовательно, оно выполняется, потому что ковариантные производные равны нулю. Обозначим решения этой новой задачи с начальными данными через $y^p(x^1, \dots, x^n)$ и возьмем новые координаты, положив $y^p = y^p(x^1, \dots, x^n)$, $p=1, \dots, n$, что допустимо, поскольку в начале координат якобиан этого преобразования отличен от нуля [потому что он равен детерминанту матрицы, столбцы которой являются векторами $v_i(0, \dots, 0; p)$, выбранные линейно независимыми]. Согласно теореме о неявной функции, в некоторой окрестности N_0 в \mathbb{R}^n x^i можно выразить через y^p , так что y^1, \dots, y^n становятся новыми независимыми переменными в N_0 .

Относительно новых координат векторные поля v_j имеют компоненты

$$\begin{aligned} \dot{v}_j(y^1, \dots, y^n; p) &= v_i(x^1, \dots, x^n; p) \delta x^i/\delta y^j = \\ &= (\delta y^p/\delta x^i) \delta x^i/\delta y^j = \delta^p_j. \end{aligned}$$

Так как эти векторные поля были построены таким образом, чтобы их ковариантные производные обращались в нуль, то

$$0 = \dot{v}_{j;k} = 0 - \dot{\Gamma}^i_{jk} \dot{v}_i = - \dot{\Gamma}^i_{jk} \delta^p_i = - \dot{\Gamma}^p_{jk}.$$

Поэтому все коэффициенты связности в новых координатах равны нулю, что и утверждалось.

Предположим теперь, что многообразие является римановым или псевдоримановым и, следовательно, имеет метрический тензор. Начальные векторы $v_i(0, \dots, 0)$ в (27.12.2) можно взять ортонормированными, так что при $x=0$

$$g^{jk}(x^1, \dots, x^n) v_j(x^1, \dots, x^n; p) v_k(x^1, \dots, x^n; q) = \pm \delta_{pq};$$

но все g^{jk} и v_j имеют нулевые ковариантные производные, следовательно, это равенство выполняется при всех x . Метрический тензор (в контравариантной форме) в системе координат y^i имеет следующие компоненты:

$$\dot{g}^{pq} = g^{jk} (\partial y^p / \partial x^j) \partial y^q / \partial x^k = g^{jk} v_j (\dots; p) v_k (\dots; q);$$

следовательно, всюду $\dot{g}^{pq} = \pm \delta_{pq}$, а значит, и $\dot{g}_{pq} = \pm \delta_{pq}$ всюду, что и требовалось доказать, потому что матрица (\dot{g}_{pq}) является обратной к (\dot{g}^{pq}) .

Карта, определяемая новыми координатами y^1, \dots, y^n в $N_0 \subset \mathbb{R}^n$, в общем случае является только частью исходного многообразия M , однако ее можно расширить до полного плоского многообразия M' , расширив N_0 до всего \mathbb{R}^n и потребовав, чтобы Γ_{jk}^i и g_{kl} оставались на всем \mathbb{R}^n константами. Тогда M' — точно такое же многообразие, что и M , если M было полным и односвязным.

Примером неодносвязного плоского многообразия M служит двумерный тор с углами θ и φ в качестве координат и с матрицей (g_{jk}) , всюду равной единичной матрице размера 2×2 . (Это, конечно, не наследуемая при обычном вложении тора в E^3 метрика.) В таких случаях многообразие M' является универсальным накрывающим многообразием многообразия M .

27.13. АНАЛИЗ ЭЙЗЕНХАРТА СИСТЕМ ШТЕККЕЛЯ

Основное физическое применение риманова (точнее, псевдориманова) геометрия находит в общей теории относительности. В качестве примера приложений римановой геометрии вне общей теории относительности можно указать статью Эйзенхарта [1934] о координатных системах, приводящих к разделению переменных в волновом уравнении; при этом используются результаты предыдущего параграфа.

Если функция $\Psi = \Psi(x^1, \dots, x^n, t)$ удовлетворяет волновому уравнению

$$(\nabla^2 - (1/c^2) \partial^2 / \partial t^2) \Psi + V\Psi = 0, \quad (27.13.1)$$

где ∇^2 есть n -мерный лапласиан, а $V = V(x^1, \dots, x^n)$ — заданная скалярная функция, то, поскольку V не зависит от t , первым шагом процесса разделения переменных всегда может быть поиск решения вида

$$\Psi = \psi(x^1, \dots, x^n) e^{i\omega t}; \quad (27.13.2)$$

очевидно, что $\psi(x^1, \dots, x^n)$ удовлетворяет приведенному волновому уравнению

$$\nabla^2 \psi + (\lambda + V) \psi = 0, \quad (27.13.3)$$

где $\lambda = \omega^2/c^2$. Такое же уравнение получается и из уравнения Шредингера. В случае общих криволинейных координат x^1, \dots, x^n лапласиан можно записать в виде $g^{ij}\psi_{;i;j}$, если, конечно, известен метрический тензор; тогда приведенное волновое уравнение принимает вид

$$g^{ij} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} - \left\{ \begin{matrix} k \\ i \ i \end{matrix} \right\} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \right] + (\lambda + V) \psi = 0. \quad (27.13.4)$$

Можно ли решить это уравнение методом разделения переменных или нет — это зависит от вида функций $g_{ij}(\dots)$ и $V(\dots)$.

В методе разделения переменных (см., например, Морс и Фешбах [1953]) обычно начинают с рассмотрения частных решений в виде произведения

$$\psi(x^1, \dots, x^n) = X_1(x^1) X_2(x^2) \dots X_n(x^n).$$

После подстановки этого произведения в (27.13.4) оказывается, что при определенном выборе координатной системы (а следовательно, и g_{ij}) и функции V получается система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по одному для каждой из функций X_i , зависящая от n неопределенных так называемых констант разделения, первой из которых является постоянная λ из приведенного выше уравнения. Таким образом получается достаточно большое семейство частных решений (зависящих от констант разделения и от констант интегрирования, появляющихся при решении обыкновенных дифференциальных уравнений), которое должно служить в качестве полного семейства функций для разложения по ним произвольной функции от x^1, \dots, x^n .

Исследования различных авторов показали, что для разделимости переменных, т. е. для успеха только что описанной процедуры, необходимы три ограничения на метрику. Во-первых, координаты должны быть ортогональными, т. е. матрица (g_{ij}) должна быть диагональной. Два других ограничения на g_{ij} носят название условий Штеккеля и Робертсона. Робертсоном [1927] было показано, что эти три условия являются также и достаточными для разделимости, если функция V имеет должный вид. Однако эту теорию нельзя еще было признать удовлетворительной, потому что тензор $g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$, подчиняющийся упомянутым выше условиям, мог и не быть метрическим тензором в евклидовом или любом другом интересующем нас пространстве. Поэтому Эйзенхарт [1934] дополнительно к этим трем условиям потребовал еще, чтобы тензор Римана R_{ijkl} был тождественно равен нулю. Любой тензор g_{jh} , удовлетворяющий всем этим условиям, является тогда метрическим тензором в евклидовом пространстве для некоторой криволинейной системы координат. Для $n=3$ Эйзенхарт дал полную классификацию всех систем координат в E^3 , допускающих разделение переменных, и для каждой из таких систем привел явные формулы для процедуры разделения переменных.

Этими разделяющими системами координат в E^3 являются системы общих эллипсоидальных координат, а также те системы частного вида, которые получаются из них в результате разного рода предельных переходов, таких, как приравнивание двух полуосей, удаление одного из фокусов на бесконечность и т. д., включая системы координат вытянутого и сплюснутого сфероида, параболические, параболоидальные, эллиптического цилиндра, параболического цилиндра, кругового цилиндра, сферические и декартовы. Детальное описание этих систем координат см. в книге Морса и Фешбаха [1953]¹⁾.

¹⁾ См. также книгу Миллера [1977]. — *Прим. перев.*

РАСШИРЕНИЕ МНОГООБРАЗИЙ ЭЙНШТЕЙНА

Уравнения поля специальной и общей теорий относительности; тензор энергии-импульса; космологическая постоянная; многообразия Эйнштейна; карты Шварцшильда и Финкельштейна; теорема Биркгофа; смысл сферической симметрии; многообразие Крускала; максимальные и геодезически полные многообразия; другие расширения карт Шварцшильда; обращение времени; многообразие Керра; задача Коши для уравнений поля Эйнштейна.

Предварительные сведения: гл. 23, 24, 26 и 27; знакомство с общей теорией относительности.

Среди многих математических задач, относящихся к общей теории относительности, задача расширения выбрана потому, что она связана с глобальными геометрическими и топологическими свойствами многообразий Эйнштейна, а эти свойства, по моему мнению, составляют основной математический аспект теории. Хотя никаких других формул и результатов, кроме тех, что получены в предыдущих главах данной книги, здесь не используется, эта глава, вероятно, будет доступной только тем читателям, которые хотя бы немного знакомы с теорией относительности. В частности, первые два параграфа следует рассматривать не как источник изучения основ теории относительности, а лишь просто как их обсуждение.

28.1. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Напомним, что электромагнитная теория Дж. К. Максвелла не только усовершенствовалась и завершила классическую теоретическую физику, но и привела к трем главным кризисам в этой науке. (1) В отличие от всех предшествующих физических теорий она оказалась инвариантной относительно преобразований Галилея или Ньютона, что, казалось, подразумевало существование абсолютной системы отсчета во вселенной. (2) Когда к этой теории применили принципы статистической физики, то это привело к так называемой ультрафиолетовой катастрофе. (3) Будучи примененной к исследованию электронов, рассматриваемых как точечные заряды, она привела к получению бесконечного самодействия и бесконечной собственной энергии электрона. Первый кризис был разрешен специальной теорией относительности, второй — квантовой гипотезой (оба — примерно в 1900—1905 гг.), а третий кризис (пока еще не полностью) — программой перенормировки квантовой электродинамики начала 50-х годов.

Для преодоления первой трудности теории Лоренц и Фитцджеральд предположили, что когда объект движется относительно абсолютной системы отсчета, он сжимается в определенной степени в направлении движения, а все процессы, происходящие с ним, замедляются в том же отношении вследствие каких-то электромагнитных эффектов внешних членов уравнений Максвелла, возникающих из-за движения его системы отсчета. Эта гипотеза не противоречила никаким известным фактам, потому что тогда было очень мало известно о строении материи, хотя и было ясно, что электромагнетизм как-то связан с этим строением. Следствием этой гипотезы оказалась инвариантность всех чисто электромагнитных явлений относительно так называемых преобразований Лоренца, которые учитывали сжатие и замедление (действительно, уравнения Максвелла инвариантны относительно этих преобразований); следовательно, при помощи электромагнитных явлений невозможно обнаружить движение относительно абсолютной системы отсчета.

После этого Эйнштейн предположил дополнительно, что относительно преобразований Лоренца инвариантны *все* физические законы¹⁾ (для этого законы следует, разумеется, видоизменять для скоростей, сравнимых со скоростью света c). Все инерциальные системы отсчета становятся тем самым равноправными; следовательно, законы физики становятся проще в том смысле, что уже нет необходимости рассматривать, как могли бы воздействовать электромагнитные явления (обусловленные движением относительно абсолютной системы отсчета) на механику, термодинамику, строение атома и т. п., и т. д. Если эти законы известны в одной инерциальной системе отсчета, то, согласно принципу инвариантности относительно преобразований Лоренца, они определены и в любой другой. В следующем параграфе описаны аналогичные упрощения физических законов, вытекающие из общей теории относительности.

28.2. УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Классическое уравнение гравитационного поля имеет вид

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho, \quad (28.2.1)$$

где $\varphi = \varphi(x)$ — гравитационный потенциал, $\rho = \rho(x)$ — плотность вещества, а G — универсальная гравитационная постоянная. Это уравнение можно привести к инвариантной относительно пре-

¹⁾ Справедливости ради отметим, что принцип относительности как всеобщий закон впервые сформулировал А. Пуанкаре (да и термин «преобразование Лоренца» введен им); в частности, именно он сделал первую попытку создания релятивистской теории гравитации (см., например, Принцип относительности. Сборник статей, — М.: Атомиздат, 1973). — *Прим. перев.*

образований Лоренца форме следующим образом. В специальной теории относительности плотность ρ представляет собой (4×4) -компонентный симметрический тензор второго ранга — тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$, умноженный на $1/c^2$. (Как и в § 19.4, x^1 , x^2 , x^3 являются пространственными координатами, а $x^4 = ct$.) Следовательно, φ является (4×4) -компонентным тензором $\varphi_{\mu\nu}$, а уравнение (28.2.1) заменяется на уравнение

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi_{\mu\nu} = \frac{4\pi G}{c^2} T_{\mu\nu},$$

или

$$h^{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \varphi_{\mu\nu} = \frac{4\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}, \quad (28.2.2)$$

где

$$(h^{\rho\sigma}) = (h_{\rho\sigma}) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & (0) & & \\ & & 1 & \\ & (0) & & 1 \\ & & & & -1 \end{bmatrix} \quad (28.2.3)$$

— метрический тензор плоского пространства Минковского.

[Как и в § 19.4, греческие индексы пробегают значения от 1 до 4, а латинские — от 1 до 3. Физики часто допускают изменение греческих индексов от 0 до 3, а у тензоров $h^{\rho\sigma}$ и $h_{\rho\sigma}$ первый диагональный элемент берут равным 1, а остальные равными -1 , так что $ds^2 = (dx^{(0)})^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$. Обозначения данной главы ближе к тем, которые используются в математической литературе.]

Закон движения точечной массы в гравитационном поле, который в классическом случае гласит, что ускорение равно $-\nabla\varphi$, принимает следующий лоренц-инвариантный вид:

$$\ddot{x}^\mu + h^{\mu\nu} (\partial\varphi_{\rho\sigma}/\partial x^\nu) \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma = 0,$$

где точка обозначает производную по собственному времени τ вдоль траектории, а $x^\mu(\tau)$ — координаты частицы. Это уравнение выглядит как уравнение геодезической, хотя второй член, конечно же, связан с гравитационным полем и не имеет ничего общего с геометрией.

Теорию такого рода можно назвать *специальной релятивистской теорией гравитации*. Ее никогда всерьез не рассматривали, потому что Эйнштейн открыл общую теорию относительности еще до того, как стали возможны наблюдения с целью проверки релятивистских эффектов. Согласно этой специальной теории, там, где нет гравитационного поля и поэтому $\varphi_{\mu\nu} \equiv 0$, свободные тела движутся по прямым, т. е. по геодезическим четырехмерного пространства Минковского, в то время как при $\varphi_{\mu\nu} \neq 0$ их траектории отличаются от прямых и наблюдается относительное ускорение.

В общей теории Эйнштейна предполагается, что при отсутствии негравитационных сил траектории должны быть всегда геодезическими, а относительные ускорения обусловлены кривизной пространства-времени. Это предположение упростило физику в том смысле, что отпадала необходимость рассматривать возможные изменения за счет гравитационного поля законов электромагнетизма, квантовой теории и т. п., так как эти законы предполагалось брать в не зависящем от поля виде в локальной инерционной системе отсчета (системе «свободного падения»), в которой гравитационное поле «исчезает». Изучение уравнений геодезических показывает, что когда пространство-время является почти плоским (почти минковским), можно найти некоторую систему координат, в которой тензор $g_{\mu\nu}$ почти не отличается от $h_{\mu\nu}$ и разница между ними такова, что движение остается таким же, что и для в точности плоского пространства-времени, в котором гравитационный потенциал имеет вид $\Phi_{\mu\nu} = (c^2/2)(g_{\mu\nu} - h_{\mu\nu})$. В этой системе уравнение поля сводится к уравнению

$$g^{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (28.2.4)$$

Поэтому Эйнштейн ввел уравнение вида

$$W_{\mu\nu} = (8\pi G/c^4) T_{\mu\nu}, \quad (28.2.5)$$

где $W_{\mu\nu}$ — тензор, включающий компоненты метрического тензора и их первые и вторые производные по x^μ , и потребовал, чтобы $W_{\mu\nu}$ обладал следующими свойствами. (1) Он должен быть симметрическим и бездивергентным, т. е.

$$W_{\mu\nu} = W_{\nu\mu}, \quad g^{\nu\sigma} W_{\mu\nu;\sigma} = 0;$$

это необходимо, поскольку тензор $T_{\mu\nu}$ энергии-импульса материи обладает теми же свойствами. (2) Когда поля слабы (т. е. пространство-время почти плоское), этот тензор должен сводиться к левой части уравнения (28.2.4) в соответствующих координатах. Эйнштейн обнаружил, что единственным выражением для $W_{\mu\nu}$, удовлетворяющим всем этим свойствам, служит левая часть следующего уравнения, называемого *уравнением поля Эйнштейна*:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = (8\pi G/c^4) T_{\mu\nu}; \quad (28.2.6)$$

здесь $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи, определенный в § 27.9, а Λ — константа. Второй член в левой части (28.2.6) включен для того, чтобы сделать все выражение бездивергентным, согласно равенствам (27.10.9), (27.10.10).

В приложениях к малым системам, таким как Солнечная система или отдельная галактика, удобно предположить, что пространство-время является асимптотически плоским на больших

расстояниях; для этого необходимо, чтобы так называемая космологическая постоянная Λ равнялась нулю. Эйнштейн предполагал, однако, что Λ всего лишь очень малая константа, а не нуль. Он считал, что это необходимо для получения замкнутых (т. е. конечных) моделей вселенной, которые исключают различные виды парадокса Олберса, возникающие при рассмотрении бесконечной и асимптотически равномерно населенной вселенной. Однако в 1922 г. А. А. Фридман показал, что замкнутые модели можно получить и при $\Lambda=0$. С тех пор Λ обычно берут равной нулю.

Далее в этой главе $\Lambda=0$; мы ограничимся также рассмотрением пустых областей пространства-времени, где $T_{\mu\nu}=0$. Так как $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}=4$, то в этом случае свертка (28.2.6) показывает, что скалярная кривизна $R=0$; следовательно, гравитационное уравнение сводится к уравнению $R_{\mu\nu}=0$. Поэтому *многообразие Эйнштейна* определяется как четырехмерное многообразие сигнатуры 2, в котором тензор Риччи $R_{\mu\nu}$ всюду равен нулю. Возможно, конечно, и более общие определения, и их иногда обнаруживают; см., например, А. З. Петров [1969].

Задача, рассматриваемая в данной главе, состоит в том, чтобы найти такое расширение данного многообразия Эйнштейна (обычно задаваемого одной картой), при котором получилось бы большее многообразие Эйнштейна; точнее говоря, требуется найти максимальное в некотором смысле расширение данного многообразия.

Расширения такого рода играли важную роль в развитии теории относительности. Знаменитое решение Шварцшильда для поля вокруг сферической массы, которое будет обсуждаться в следующем параграфе, явилось указанием на существование сингулярности пространства-времени на определенном расстоянии от центра (так называемом радиусе Шварцшильда). Природа этой «сингулярности» была предметом многочисленных дискуссий в период создания теории относительности. Теперь известно, что эта сингулярность является сингулярностью всего лишь используемой координатной системы и что многообразие может быть расширено с привлечением дополнительных координатных карт до многообразия без сингулярностей, исключая центральную точку. Ясно, что «решение» уравнений Эйнштейна необходимо понимать как некоторое многообразие, а не просто как одну формулу для линейного элемента.

28.3. КАРТЫ ШВАРЦШИЛЬДА

В 1916 г. К. Шварцшильд нашел стационарное сферически симметрическое решение уравнения Эйнштейна $R_{\mu\nu}=0$ для пустого пространства, на больших расстояниях асимптотически совпадающее с плоской метрикой Минковского. Это решение — некоторое многообразие, состоящее из одной карты, которая будет сейчас

описана; она, вероятно, представляет пространство-время вокруг центральной сферической массы.

Утверждение о стационарности решения означает, что можно подобрать такие координаты этой карты, что тензор $g_{\mu\nu}$ окажется не зависящим от одной из координат, скажем от x^4 , которую можно интерпретировать как время. Ясно, что при этом g_{44} должно быть отрицательным, тогда как квадратичная форма $g_{jk} dx^j dx^k$, получающаяся при подстановке $dx^4 = 0$, должна быть положительно определенной.

Утверждение о сферической симметрии означает, что существует некоторая непрерывная группа G преобразований данного многообразия, не затрагивающих x^4 , которая изоморфна группе вращений $SO(3)$ и относительно которой метрика инвариантна. Предполагается, что на больших расстояниях преобразования из G принимают вид обычных вращений в пространстве x^1, x^2, x^3 ; с другой стороны, больше мы ничего не можем о них сказать, поскольку у нас нет теории нелинейных представлений групп. Например, мы не можем утверждать, что существует точка многообразия (центр вращений), инвариантная относительно всех преобразований из G ; в действительности такой точки в данном многообразии нет.

Предполагается, что многообразии M_3 , получаемое при фиксировании некоторого значения x^4 , асимптотически (на больших расстояниях) является евклидовым в том смысле, что M_3 содержит некоторую карту, координатная область N_3 которой состоит из всех таких точек \mathbb{R}^3 , что

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 > a^2, \quad (28.3.1)$$

где a — константа, а метрический тензор g_{jk} асимптотически совпадает с δ_{jk} на больших расстояниях в N_3 . Предполагается, что хотя бы на больших расстояниях найдется семейство концентрических сфер, инвариантных относительно всех преобразований из группы G . Рассмотрим геодезическую, начинающуюся в точке P на одной из таких сфер S_0 , идущую по направлению нормали к S_0 внутрь этой сферы и продолженную внутрь сферы настолько, насколько это возможно в данной карте. Она инвариантна относительно тех вращений, которые оставляют точку P на S_0 неподвижной, поскольку инвариантна метрика; следовательно, геодезические отображаются в геодезические, но рассматриваемая геодезическая однозначно определяется ее начальным направлением в P . Если подобные геодезические, выходящие из всех точек P сферы S_0 , продолжены внутрь на фиксированное расстояние, то их конечные точки образуют инвариантную поверхность, или сферу S_1 , и, следовательно, эти геодезические можно использовать для построения отображения S_0 на S_1 ; в частности, сферические координаты θ, φ на S_0 определяют координаты θ, φ на S_1 , преобразующиеся при преобразованиях из группы G точно так же, как

они преобразуются на S_0 . Пусть, наконец, r — переменная, значения которой возрастают непрерывно при движении наружу и при помощи которой одна инвариантная сфера отличается от другой. Примем r , θ , φ в качестве координат на карте; тогда метрика сферически симметрична относительно этих координат уже в обычном смысле.

Теперь в M мы имеем четырехмерную карту с координатной областью $N \subset \mathbb{R}^4$, для которой

$$\begin{aligned} a < r < \infty, & \quad 0 < \theta < \pi, \\ -\pi < \varphi < \pi, & \quad -\infty < x^4 < \infty, \end{aligned} \quad (28.3.2)$$

где a — пока еще неизвестная постоянная.

Как обычно, эта карта не покрывает сразу и северный, и южный полюсы $\theta=0$, π , а также «международную линию смены дат» $\varphi = \pm\pi$ на любой поверхности $r = \text{const}$, $x^4 = \text{const}$, однако это может быть сделано другой точно такой же картой, ориентированной так, что обе они уже полностью покрывали бы все такие поверхности. В дальнейшем подобная процедура будет предполагаться автоматически выполненной каждый раз, когда используются полярные углы θ и φ ; в этом случае употребление слова «карта» в действительности означает использование многообразия, содержащего две такие карты.

Покажем теперь, что когда метрика рассматривается только на поверхности $r = \text{const}$, $x^4 = \text{const}$, она принимает вид

$$ds^2 = A (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (28.3.3)$$

где A — положительная постоянная, которая может зависеть от r . Чтобы показать это, будем считать r , x^4 и φ постоянными и рассмотрим метрическую форму при $\theta=0$, $\varphi=0$. Тогда $ds^2 = Ad\theta^2$, где $A = g_{22}(r, 0, 0, x^4)$; чтобы найти ds^2 для других значений θ и φ , нужно только применить вращение, которое преобразует θ , φ в 0 , 0 . Поскольку метрика инвариантна, ds^2 должна преобразовываться в $Ad\theta^2$, однако известно, что линейный элемент (28.3.3) инвариантен относительно вращений в системе координат θ , φ ; следовательно, формула (28.3.3) справедлива на всей поверхности.

Вследствие симметрии, т. е. инвариантности метрики относительно преобразований из группы \hat{G} , легко показать, что $g_{\mu\nu}$ может зависеть только от r и что в сумме $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ не может быть членов, связывающих θ или φ с r или x^4 . Следовательно, эта метрика имеет вид

$$ds^2 = g_{11} dr^2 + A(r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + 2g_{14} dr dx^4 + g_{14} (dx^4)^2. \quad (28.3.4)$$

На больших расстояниях $g_{11} \approx 1$, $g_{44} \approx -1$, $g_{14} \approx 0$; отсюда следует, в частности, что по непрерывности $g_{44} \neq 0$ при r больше некоторого «радиуса» r_0 (очень малого, как окажется далее). Наконец, для

$r > r_0$ член с g_{14} можно удалить введением новой переменной

$$x'^4 = x^4 + \int (g_{14}/g_{44}) dr$$

(θ , φ , z остаются без изменения). Отсюда

$$dx^4 = dx'^4 - (g_{14}/g_{44}) dr;$$

подстановка этого выражения в (28.3.4) уничтожает член с $dr dx'^4$ за счет добавления двух новых членов с dr^2 , которые, однако, можно включить в первый член $g_{11} dr^2$ (изменив g_{11}). После этого в ds^2 останутся только диагональные элементы; так как первые три члена положительны, а четвертый отрицателен, ds^2 можно записать в виде

$$ds^2 = e^\alpha dr^2 + e^\gamma (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - e^\beta (dx^4)^2, \quad (28.3.5)$$

где α , β , γ — функции от r , а у x^4 опущен штрих.

Сделаем теперь последнее преобразование, заменив r на $r' = e^{\gamma/2}$; тогда e^β заменится на $e^{\beta'}$, а $e^\alpha (dr)^2$ — на $e^{\alpha'} (dr')^2$, где α' и β' — функции от r' . Снова опустив штрихи, в результате получим

$$ds^2 = e^\alpha dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - e^\beta (dx^4)^2. \quad (28.3.6)$$

Эта форма была исходной для Шварцшильда.

Функции $\alpha(r)$ и $\beta(r)$ получаются теперь следующим образом. Вычисляют трехиндексные символы Кристоффеля $[\mu\nu, \sigma]$ и $\{u^\sigma, v\}$, затем компоненты тензора Римана $R_{\mu\nu\rho\sigma}$, а из них — сверткой — компоненты тензора Риччи $R_{\mu\nu}$. Все эти величины выражаются через α , β и их первые производные, так что, полагая $R_{\mu\nu} = 0$, мы получаем дифференциальные уравнения для определения $\alpha(r)$ и $\beta(r)$. Подробности этих довольно-таки длинных вычислений читатель может найти в любой книге по общей теории относительности (например, Толмен Р. [1934] или Вебер [1961]).

Оказалось, что

$$e^\beta = e^{-\alpha} = 1 - r_0/r, \quad (28.3.7)$$

где r_0 — произвольная постоянная, которую называют *радиусом Шварцшильда* и считают положительной. (Соответствующая карта с $r_0 < 0$ сейчас не рассматривается.)

В § 28.2 было указано, что когда пространство-время является почти плоским, метрику можно интерпретировать в терминах эквивалентного (классического) гравитационного поля. Для $r \gg r_0$ полученная выше метрика эквивалентна полю Кулона с потенциалом

$$\varphi \approx -GM/r,$$

где M — некоторая другая константа. Связь между константами M и r_0 выражается формулой

$$r_0 = 2GM/c^2. \quad (28.3.8)$$

Применение метрики Шварцшильда к задачам Солнечной системы и к астрономическим наблюдениям с целью проверки теории относительности составляет важную главу теории относительности. Если в (28.3.8) M берется равным массе Солнца ($2 \cdot 10^{33}$ г), то $r_0 \approx 3$ км. Для $r \gg r_0$ пространство-время почти совершенно плоское. Для точек внутри Солнца, т. е. для $r < R_\odot \approx 6.5 \cdot 10^5$ км, нужно использовать другую метрику — *внутреннюю метрику Шварцшильда*, в которой учитывается, что тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ отличен от нуля. Так как $r_0 \ll R_\odot$, пространство-время оказывается почти плоским (пространством Минковского) во всех точках вне Солнца, т. е. для $r > R_\odot$ (а также, как оказывается, для всех точек внутри него), а гравитационное поле почти совпадает с кулоновским полем. И действительно, как несомненно понимает читатель, контрольные наблюдения проявлений общей теории относительности требуют измерений чрезвычайно малых эффектов.

В данной главе рассматривается главным образом одна математическая задача общей теории относительности, а именно задача нахождения максимальных расширений вакуумных решений (подобных внешнему решению Шварцшильда или решению Керра для поля вокруг вращающейся массы) на другие пустые области пространства-времени. Астрономическая интерпретация этих решений в терминах «черных дыр в пространстве» или космологических моделей здесь не обсуждается.

С этого момента будут использоваться такие единицы длины и времени, что $r_0 = c = 1$; вместо x^4 будем писать t . Тогда шварцшильдовский линейный элемент имеет вид

$$ds^2 = (1 - 1/r)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - (1 - 1/r) dt^2. \quad (28.3.9)$$

Можно построить три координатные карты, использующие эту метрику. Пока что каждую из этих карт мы будем рассматривать как отдельное многообразие Эйнштейна. Для определения карты необходимо задать только область N в координатном пространстве \mathbb{R}^4 , в которой изменяются r , θ , φ и t . Очевидно, что поскольку сингулярности $g_{\mu\nu}$ необходимо исключить, то имеются только три возможности:

$$\begin{aligned} N_I: & \quad 1 < r < \infty, \\ & \quad 0 < \theta < \pi, \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad -\infty < t < \infty; \\ N_{II}: & \quad 0 < r < 1 \\ & \quad (\theta, \varphi, t \text{ — те же, что в } N_I); \\ N_{III}: & \quad -\infty < r < 0 \\ & \quad (\theta, \varphi, t \text{ — те же, что в } N_I). \end{aligned}$$

Получающиеся карты мы будем называть *картами* (Шварцшильда) I, II и III соответственно.

Если заменить r на $-r$, то обнаруживается, что карта III — это просто решение вокруг отрицательной точечной массы. Она является многообразием Эйнштейна, согласно принятому здесь определению, причем даже геодезически полным в смысле § 28.6. Конечно, само по себе это решение неинтересно, поскольку отрицательных масс, по-видимому, не существует. Однако в § 28.8 мы убедимся в том, что на части многообразия Керра, которое представляет поле вокруг вращающейся массы, может быть задана метрика, весьма похожая на метрику карты III.

Отметим между прочим следующие моменты, касающиеся зависимости от времени. В 1923 г. Г. Д. Биркгоф показал, что метрика карты I получается даже при отбрасывании предположения о стационарности. Иначе говоря, метрика карты I является единственной сферически симметрической метрикой, асимптотически плоской на бесконечных расстояниях. Этот результат получается примерно следующим образом. Если функции α и β (см. выше) зависят не только от r , но и от t , то возникает более сложное общее решение. Однако это решение можно всегда преобразовать в стационарное решение (28.3.9) путем только преобразования координат. Отсюда следует, например, что гравитационное поле вокруг радиально пульсирующей звезды стационарно. Если говорить на языке теории электромагнетизма, монополярного излучения гравитационных волн нет, как нет и их дипольного излучения, потому что нет отрицательных масс; однако квадрупольное гравитационное излучение возможно, и, как полагают, оно служит единственной причиной потери энергии пульсарами. Наконец, отметим, что метрика карты II не стационарна в смысле определения, данного в начале этого параграфа (временноподобной переменной здесь служит r , а не t).

Определение сферической симметрии, принятое выше, нуждается в пояснении. Если P — произвольная точка многообразия M_3 (x^4 фиксировано), а $S(P)$ — множество всех точек, в которые P переходит путем преобразований из группы G , то $S(P)$ является поверхностью $r = \text{const}$ двумерной и сферической (двумерной сферой) в самом обычном смысле. В общем сферически симметричном многообразии этого может и не быть. Пусть M — многообразие группы $SO(3)$, а G — группа левых трансляций $\varphi(h): g \rightarrow hg$ ($\forall g$) в M . Тогда отображение $h \rightarrow \varphi(h)$ оказывается изоморфизмом $SO(3)$ на G . Однако если P — произвольная точка из M , то множество $S(P)$ всех точек, в которые P переносится преобразованиями из G , не двумерно: оно совпадает со всем M и, следовательно, трехмерно. Карта I Шварцшильда является асимптотически плоской на бесконечных расстояниях, а это накладывает, очевидно, дополнительное ограничение на действие группы G на

это многообразие, поэтому все инвариантные множества двумерны. Многообразие группы $SO(3)$ компактно, и поэтому к нему не применимы никакие подобные ограничения.

28.4. РАСШИРЕНИЯ ФИНКЕЛЬШТЕЙНА КАРТ ШВАРЦШИЛЬДА

На карте I Шварцшильда Д. Финкельштейн [1958] ввел новые координаты

$$t' = t + \ln(r-1), \quad r, \theta, \varphi \text{ без изменений}, \quad (28.4.1)$$

в которых метрическая форма (28.3.9) принимает вид

$$ds^2 = (1 + 1/r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - (1 - 1/r) dt'^2 + (2/r) dt' dr. \quad (28.4.2)$$

При $r > 1$ и при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ t' также изменяется от $-\infty$ до $+\infty$; следовательно, область изменения r, θ, φ, t' та же, что и у r, θ, φ, t . Получающаяся карта покрывает ту же область пространства-времени, что карта I Шварцшильда, но только с другими координатами. При этом, однако, в (28.4.2) отсутствует сингулярность при $r=1$; следовательно, допустив уменьшение r до $0 < r \leq 1$, эту карту можно расширить до карты I Финкельштейна, которая определяется формулой (28.4.2) на области

$$N_{F, I}: \quad \begin{aligned} 0 < r < \infty, \\ 0 < \theta < \pi, \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad -\infty < t' < \infty. \end{aligned}$$

Эта карта покрывает большую область пространства-времени, чем шварцшильдовская карта I, как схематически показано на рис. 28.1.

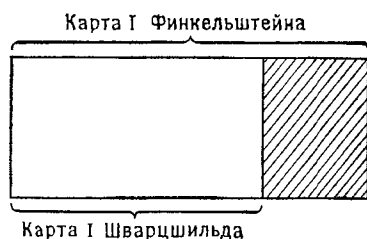


Рис. 28.1.

При помощи другого преобразования

$$t'' = t' - \ln(1-r), \quad (28.4.3)$$

примененного к заштрихованной части карты Финкельштейна (где $0 < r < 1$), получается карта II Шварцшильда (в переменных r, θ, φ, t''); следовательно, карта Финкельштейна содержит по одной копии каждой из карт I и II Шварцшильда. Однако это не

просто процедура исключения барьера $r=1$ в метрике (28.3.9); чтобы убедиться в этом, рассмотрим пространства с координатами t, r и t', r (координаты θ и φ фиксируются), представленные на рис 28.2. Когда прямая \mathcal{C}' в карте Финкельштейна идет вниз к $r=1$, соответствующая кривая \mathcal{C} в карте Шварцшильда

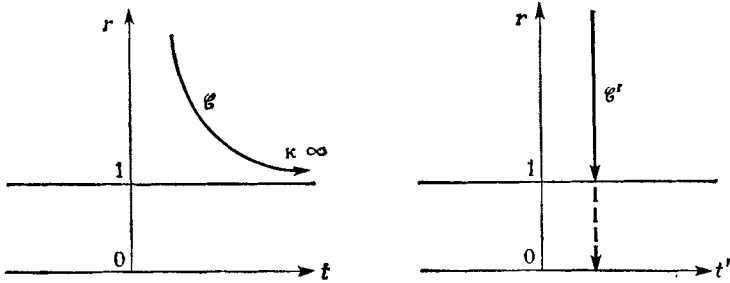


Рис. 28.2. Слева — карта I Шварцшильда, справа — карта I Финкельштейна.

(\mathcal{C} и \mathcal{C}' представляют одну и ту же кривую в пространстве-времени) уходит к $t = +\infty$ и, следовательно, не может быть продолжена далее, тогда как исходную кривую \mathcal{C}' можно продолжить до $r=0$.

Более того, вместо (28.4.1) можно использовать другое преобразование

$$t''' = t - \ln(r-1),$$

которое в применении к метрике Шварцшильда дает (28.4.2), только вместо члена $+(2/r) dt' dr$ получается $-(2/r) dt''' dr$.

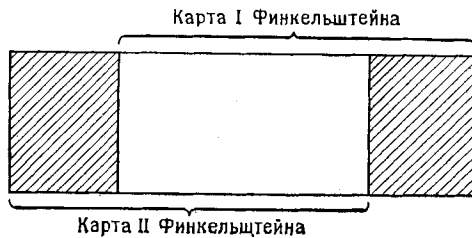


Рис. 28.3.

Такая карта (где $0 < r < \infty$) называется *картой II Финкельштейна*. В этом случае кривая, соответствующая кривой \mathcal{C} на рис. 28.2, уходит к $t = -\infty$, а не к $t = +\infty$, следовательно, это расширение карты I Шварцшильда дает еще одну область пространства-времени, как символически изображено на рис. 28.3. Можно получить бесконечное число дальнейших расширений путем

последовательного поочередного использования преобразований вида $t \rightarrow t \pm \ln(r-1)$ и $t \rightarrow t \pm \ln(1-r)$ на интервалах $(1, \infty)$ и $(0, 1)$ переменной r . Всюду на многообразиях, описанных таким образом, уравнение поля Эйнштейна сводится к уравнению вида $R_{\mu\nu} = 0$, а их сигнатура равна 2.

28.5. РАСШИРЕНИЕ КРУСКАЛА

На карте I Шварцшильда с метрикой (28.3.9) М. Крускал [1960] ввел следующие новые координаты u, θ, φ, v :

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{r-1} e^{r/2} \operatorname{ch}(t/2), \\ \theta, \varphi &\text{ без изменений,} \\ v &= \sqrt{r-1} e^{r/2} \operatorname{sh}(t/2), \end{aligned} \quad (28.5.1)$$

в которых метрическая квадратичная форма принимает вид

$$ds^2 = f(u, v)^2 (du^2 - dv^2) + r(u, v)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (28.5.2)$$

где f и r — некоторые функции, причем r определяется как положительное решение уравнения

$$[r(u, v) - 1] e^{(u, v)} = u^2 - v^2, \quad (28.5.3)$$

а f задается формулой

$$f(u, v)^2 = [4/r(u, v)] e^{-r(u, v)}. \quad (28.5.4)$$

Карта I Шварцшильда соответствует следующим интервалам изменения переменных: $u > 0$, $-u < v < u$ (θ и φ меняются в обычных пределах), т. е. соответствует заштрихованному на рис. 28.4 квадранту, обозначенному цифрой I. При этом, однако, метрическая форма (28.5.2) оказывается решением уравнения $R_{\mu\nu} = 0$, не сингулярна и имеет сигнатуру 2 всюду в более широкой области

$$\begin{aligned} N_K: \quad & -\infty < u < \infty, \quad \theta, \varphi \text{ — как обычно,} \\ & -\sqrt{1+u^2} < v < \sqrt{1+u^2}, \end{aligned} \quad (28.5.5)$$

которая соответствует всей области между сплошными кривыми на рис. 28.4, состоящей из областей, обозначенных I, I', II и II'. Каждая из областей I и I' — это копии карты I Шварцшильда, а области II и II' — копии карты II Шварцшильда. Любые две смежные области (из этих четырех) составляют одну из карт Финкельштейна, а начало координат ($u=v=0$) — это некоторая точка пространства-времени, которую ни одна из этих карт не покрывает.

Крускал показал, что многообразие K , порождаемое метрикой (28.5.2) и областью изменения (28.5.5) переменных u, v и называемое *многообразием Крускала*, является максимальным расширением карт Шварцшильда в смысле определения, которое будет приведено ниже.

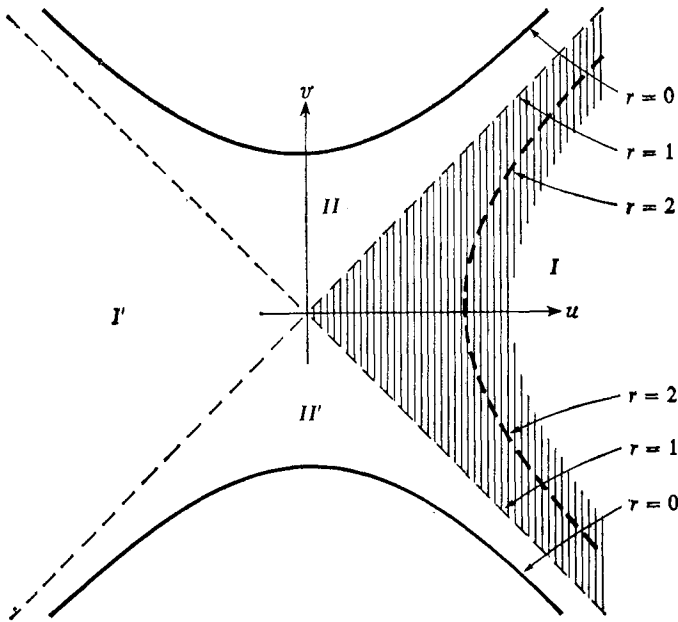


Рис. 28.4. Диаграмма многообразия Крускала.

28.6. МАКСИМАЛЬНЫЕ РАСШИРЕНИЯ. ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ПОЛНОТА

Отличительной чертой многообразия Крускала K является следующее его свойство: геодезическая \mathcal{G} , идущая из любой точки $x^\mu(0)$ в начальном направлении, задаваемом любым касательным вектором $\dot{x}^\mu(0)$, либо может продолжаться в многообразии до сколь угодно больших значений натурального параметра λ , либо при некотором конечном значении λ столкнется с неустранимой особенностью¹⁾. Любое многообразие с таким свойством будет называться *геодезически полным* (некоторые авторы используют этот термин несколько в ином смысле; см. Эллис [1972]).

¹⁾ У автора genuine singularity. — Прим. перев.

Под *неустранимой особенностью (сингулярностью)* понимается некоторая точка или множество точек, где обращается в бесконечность некоторый инвариант кривизны (т. е. некоторый скаляр, построенный по функциям $g_{\mu\nu}$ и их производным различного порядка). От особенности такого сорта нельзя избавиться путем замены координат, потому что указанный скаляр, будучи инвариантом, стремится к бесконечности в любой системе координат при приближении к этой точке или к этому множеству точек.

Доказательство геодезической полноты многообразия Крускала элементарно, но громоздко. Сначала показывается, что кривые $r(u, v) = 0$ на плоскости u, v состоят из неустранимых особых точек. Нетрудно отыскать и скаляры кривизны, стремящиеся к бесконечности при $r(u, v) \rightarrow 0$. Скалярная риманова кривизна R таковым быть не может, поскольку $R \equiv 0$ на K , однако скаляр $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$, где $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор Римана, равен $6[r(u, v)]^{-4}$ и поэтому стремится к бесконечности при $r(u, v) \rightarrow 0$.

Значение функции $r(u, v)$ на многообразии Крускала равно значению координаты r на многообразиях Шварцшильда. Если r — полярная координата, то в равенстве $r = 0$ видят представление одной-единственной точки. Однако на многообразии Крускала уравнение $r(u, v) = 0$ определяет целую кривую — гиперболу, изображенную на рис. 28.4. В любом случае, однако, эта «точка» или эта «кривая» не принадлежат ни многообразию K , ни какой бы то ни было области описываемого пространства-времени. Вероятно, вопрос о том, является ли особенность «точкой» или «кривой», не имеет физического смысла.

Далее Крускал показал, что для геодезической \mathcal{C} в K с произвольным $x^\mu(0)$ и произвольным $\dot{x}^\mu(0)$ $r(u, v) \rightarrow 0$ на \mathcal{C} либо при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ для некоторого конечного λ_0 , либо при $\lambda \rightarrow \infty$ вдоль \mathcal{C} . Следовательно, K — геодезически полное многообразие. На карте I (или II) Шварцшильда имеются геодезические, для которых $r \rightarrow 1$, а $t \rightarrow \pm \infty$ при конечных значениях натурального параметра λ . Поскольку λ — физически осмысленный инвариант, тогда как координаты r, θ, φ, t совершенно произвольны, представляется очевидным, что должна быть возможность продолжения этих геодезических на некоторые другие карты, и именно это достигается при расширении Крускала.

28.7. ДРУГИЕ РАСШИРЕНИЯ МНОГООБРАЗИЙ ШВАРЦШИЛЬДА

Рассмотрим вместо преобразования (28.5.1), введенного Крускалом, следующее преобразование r, θ, φ и t в ξ, θ, φ и η :

$$\begin{aligned} \xi &= (r-1)e^r, \\ \theta, \varphi &\text{— без изменений,} \\ \eta &= (r-1)e^r \operatorname{sh}(t). \end{aligned} \tag{28.7.1}$$

Тогда метрика Шварцшильда (28.3.9) примет вид

$$ds^2 = \frac{e^{-r(\xi)}}{r(\xi)(\xi^2 + \eta^2)} [\xi(d\xi^2 - d\eta^2) + 2\eta d\xi d\eta] + r(\xi)^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2], \quad (28.7.2)$$

где функция $r(\xi)$ для любого $\xi > -1$ задается как положительное решение уравнения

$$\xi r' = [r(\xi) - 1] e^{r(\xi)}. \quad (28.7.3)$$

Обозначим через K' многообразие с метрикой (28.7.2), определяемое картой со следующими интервалами изменения переменных:

$$N': \quad \left. \begin{array}{l} -1 < \xi < \infty, \\ -\infty < \eta < \infty, \end{array} \right\} \text{ (за исключением } \xi = \eta = 0);$$

θ, φ — как обычно.

Это многообразие содержит по одной копии многообразий I и II Шварцшильда, причем им соответствуют области $0 < \xi < \infty$ и $-1 < \xi < 0$. Далее мы убедимся в том, что многообразие K' максимально, т. е. его нельзя расширить до большего многообразия; поэтому, возможно, оно покажется предпочтительнее многообразия Крускала из-за большей простоты формул. Однако здесь сингулярность в точке $\xi = \eta = 0$ обусловлена сингулярностью системы координат и поэтому является устранимой; оказывается, что все инварианты кривизны имеют конечные пределы при приближении к точке $\xi = \eta = 0$.

Многообразие K' обладает свойством обращения времени. Иначе говоря, если $\text{tg } \alpha$ обозначает наклон $d\xi/d\eta$ нулевой геодезической в плоскости ξ, η (геодезической, на которой $ds^2 = 0$ при постоянных θ и φ), а $\text{tg } \beta$ есть просто ξ/η , то из (28.7.2) видно, что

$$\text{tg } \beta (1 - \text{tg}^2 \alpha) = 2 \text{tg } \alpha,$$

что эквивалентно равенству $\text{tg } \beta = \text{tg } 2\alpha$. Следовательно, если некоторая точка на плоскости ξ, η совершает один оборот по часовой стрелке вокруг начала координат $\xi = \eta = 0$, то β увеличивается на 2π , а α — только на π , т. е. направления нулевых геодезических изменяются на противоположные.

Ясно, что сингулярности типа сингулярности в точке $\xi = \eta = 0$ на многообразии K' физически неприемлемы; вообще максимальное расширение заданного многообразия Эйнштейна не имеет физического смысла, если оно не является геодезически полным.

Природа сингулярности в точке $\xi = \eta = 0$ исследуется далее в упражнениях.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть M — двумерное многообразие, состоящее из одной карты, метрика на которой задана формулой

$$ds^2 = [\xi (d\xi^2 - d\eta^2) + 2\eta d\xi d\eta] / (\xi^2 + \eta^2) \quad (28.7.4)$$

на области координатного пространства

$$N = N_M: \left. \begin{array}{l} -\infty < \xi < \infty, \\ -\infty < \eta < \infty \end{array} \right\} \text{(за исключением } \xi = \eta = 0).$$

Покажите, что M — плоское многообразие (т. е. что $R_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv 0$) с нулевой сигнатурой и, следовательно, локально минковское. Покажите также, что в M есть обращение времени.

2. Найдите геодезические на многообразии M из предыдущего упражнения. Покажите, что когда геодезическая \mathcal{C} идет к ∞ на плоскости ξ, η , натуральный параметр λ на \mathcal{C} стремится к $\pm \infty$, в то время как при приближении точки геодезической к началу координат λ стремится к конечному значению. Геодезические, для которых имеет место последний случай, — это лучи $\xi = r \cos \alpha$, $\eta = r \sin \alpha$, α — постоянная, а $r > 0$.

Указание. Эти упражнения становятся тривиальными, если перейти к новым переменным x, t , таким, что

$$\xi = x^2 - t^2, \quad \eta = 2xt. \quad (28.7.5)$$

Эти координаты можно описать также преобразованием $\xi + i\eta = (x + it)^2$, откуда ясно, что $ds^2 = dx^2 - dt^2$. Преобразование $\xi, \eta \rightarrow x, t$ двузначно, однако его можно сделать однозначным в любой односвязной части области N_M .

3. Преобразование (28.7.5) $x, t \rightarrow \xi, \eta$ превращает проколотую (x, t) -плоскость в двулистное накрывающее многообразие многообразия M . Рассмотрите другие накрывающие M многообразия и покажите, что двулистными являются только те из них, которые имеют геодезически полное расширение (получаемое возвращением выколотой точки в начале координат (x, t) -плоскости).

4. Используя аналогичное преобразование u, v в ξ, η , задаваемое формулой $\xi + i\eta = (u + iv)^2$, покажите, что многообразие Крускала K , из которого удалена точка $u = v = 0$, образует двулистное накрывающее многообразие многообразия K' , определенного в начале данного параграфа. Покажите, что наиболее общее накрывающее K' многообразие содержит n копий карты I Шварцшильда и n копий карты II Шварцшильда, где n — положительное целое число или ∞ . Покажите, что это двулистное накрытие является единственным, которое имеет геодезически полное расширение (получаемое возвращением назад точки $u = v = 0$). Поскольку проекция K на K' сохраняет метрику, очевидно, что все инварианты кривизны в K' имеют конечные пределы при приближении к особой точке $\xi = \eta = 0$.

28.8. МНОГООБРАЗИЯ КЕРРА

Осесимметричное решение уравнения поля $R_{\mu\nu} = 0$ в пустом пространстве было получено Керром [1963]; это решение можно интерпретировать, по крайней мере, во внешней области, как решение для поля вокруг вращающейся звезды. Эта метрика асимптотически минковская на больших расстояниях r , как и в решении Шварцшильда. На больших, но все-таки конечных расстояниях метрика содержит член, представляющий ньютоновский потенциал

— GM/r , как и в решении Шварцшильда (M — масса звезды), а также член α/r^2 с угловым множителем (α — момент импульса звезды). [Замечание. Это чисто релятивистский эффект, он возникает вследствие наличия плотности импульса ρv материи в определенных компонентах тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ правой части уравнения (28.2.6). Классическое уравнение Пуассона таких эффектов не порождает; согласно классической теории, вращение воздействует на гравитационное поле косвенно за счет сплюснутости вращающейся звезды, однако это воздействие изменяется как $1/r^3$.] Сейчас мы рассмотрим это решение, не выясняя его происхождение и не обосновывая его.

Для описания многообразия Керра используются координаты t, x, y, z . (Предупреждаем читателя, что здесь, как и в других аналогичных случаях, эти координаты произвольны и, скажем, x, y и z не следует интерпретировать как декартовы координаты, а t — как время.) Выберем такие единицы измерения, чтобы $2M, G$ и c были равны 1 (в этом случае единицей длины служит радиус Шварцшильда $2MG/c^2$): тогда метрическая форма имеет вид

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{\rho^3}{\rho^2 + a^2 z^2} (k_{\mu} dx^{\mu})^2 - dt^2, \quad (28.8.1)$$

где

$$k_{\mu} dx^{\mu} = \frac{z}{\rho} dz + \frac{\rho}{\rho^2 + a^2} (x dx + y dy) + \frac{a}{\rho^2 + a^2} (x dy - y dx) - dt \quad (28.8.2)$$

и $\rho = \rho(x, y, z)$ — функция, неявно определенная уравнением

$$(x^2 + y^2)/(\rho^2 + a^2) + z^2/\rho^2 = 1. \quad (28.8.3)$$

Ось вращения совпадает с осью z ; a — постоянная, равная удвоенному отношению момента импульса к массе (в принятых единицах измерения). Для быстро вращающихся звезд $a \gg 1$, а для медленно вращающихся звезд a может быть величиной порядка 1 или даже меньше.

Этому решению могут соответствовать различные карты. Окружность $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ является особой: на ней $R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} \rightarrow \infty$. Она соответствует сингулярности при $r = 0$ в решении Крускала, и действительно эта окружность стягивается к началу координат при $a \rightarrow 0$.

Уравнение (28.8.3) имеет два корня $\rho(x, y, z)$ противоположного знака в каждой точке x, y, z , за исключением круга $x^2 + y^2 < a^2, z = 0$, где $\rho = 0$. При прохождении точки x, y, z через этот круг необходимо перейти от одного решения к другому так, чтобы сохранить непрерывность производных от $g_{\mu\nu}$. Это достигается введением следующих карт M_1, \dots, M_4 . На каждой из них ds^2 выражается формулой (28.8.1), но в каждом случае знак $\rho(x, y, z)$ определяется особо.

$$\text{Для } M_1 \quad N = \{ \text{все } x, y, z, t \} - \{ x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0 \}, \\ \rho(x, y, z) > 0. \quad (28.8.4)$$

Выражение для N означает, что N совпадает со всем пространством \mathbb{R}^4 , из которого исключен замкнутый центральный круг. По аналогии с теорией функций этот круг называется *разрезом*¹⁾.

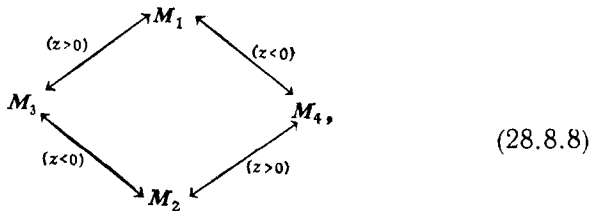
Для M_2 N то же, что для M_1 , $\rho(x, y, z) < 0$. (28.8.5)

Две следующие карты связывают M_1 и M_2 через вырезанный круг. Координатная область N для них могла бы быть любой односвязной областью, содержащей открытый круг (конечно, обязательно не содержащей граничную окружность). Ее можно было бы взять в виде тонкой пластинки, но простоты ради мы возьмем в качестве N все пространство \mathbb{R}^4 , в котором сделан разрез по внешней части указанного открытого круга в плоскости x, y .

Для M_3 $N = \{ \text{все } x, y, z, t \} - \{ x^2 + y^2 \geq a^2, z = 0 \}$,
 $\text{sign } \rho(x, y, z) = \text{sign } z$. (28.8.6)

Для M_4 N то же, что и для M_3 ,
 $\text{sign } \rho(x, y, z) = -\text{sign } z$. (28.8.7)

Карта M_3 согласуется с M_1 при $z > 0$ и с M_2 при $z < 0$, в то время как M_4 согласуется с M_1 при $z < 0$ и с M_2 при $z > 0$. Двусвязное многообразие M_0 можно теперь построить при помощи отображений



где каждое отображение на диаграмме совпадает с тождественным отображением

$$t \rightarrow t, \quad x \rightarrow x, \quad y \rightarrow y, \quad z \rightarrow z$$

в соответствующем полупространстве ($z > 0$ или $z < 0$). В этом многообразии любая точка может быть возвращена в исходное положение после двукратного «навинчивания» на окружность $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$.

Данное многообразие M содержит две асимптотически плоские области, распространяющиеся на бесконечность: для обеих $|\rho| \gg \gg \max \{1, a\}$; для одной $\rho > 0$, а для другой $\rho < 0$. Первая из них представляет (на больших расстояниях) гравитационное поле некоторой положительной массы (равной $\frac{1}{2}$ в принятой системе

¹⁾ В оригинале branch cut.—Прим. перев.

единиц), а вторая — поле отрицательной массы (равной $-\frac{1}{2}$). Обе эти области соединяются центральным кругом.

Рассмотрение геодезических показывает, что многообразии M_0 геодезически полно при $|a| > \frac{1}{2}$, но не полно при $|a| < \frac{1}{2}$. Расширение этого многообразия до большего и геодезически полного многообразия при $|a| < \frac{1}{2}$ осуществлено Бойером и Линдквистом [1967]. Получающееся многообразие довольно сложное, и мы предлагаем читателю ознакомиться с его описанием по указанной работе, а здесь ограничимся аналогией между описанным выше многообразием M_0 и картами Финкельштейна.

Для исследования метрики на больших расстояниях (при больших ρ) удобно ввести сферические координаты r, θ, φ , записывая $z = r \cos \theta$ и т. д. и, как обычно, напоминая, что необязательно интерпретировать r как радиальную координату. Для больших положительных ρ (28.8.3) показывает, что $\rho \approx r$. Далее, из выражения (28.8.2) следует, что $k_\mu dx^\mu \approx dr - dt$, а из (28.8.1) в приближении $\rho \approx r$ следует, что

$$ds^2 = (1 + 1/r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - (1 - 1/r) dt^2 - (2/r) dr dt,$$

а это и есть метрика (28.4.2) карты I Финкельштейна. Иначе говоря, в пределе $a = 0$ форма (28.8.1) дает в точности карту I Финкельштейна; следовательно, для малых a следует ожидать, что эту карту нужно будет дополнить другой ее копией и двумя копиями некоторой карты, которая при $a = 0$ сводится к карте II Финкельштейна, причем объединение этих карт выполняется так же, как объединение карт Финкельштейна в случае многообразия Крускала. Указанные карты получаются путем изменения знака dt в формуле (28.8.2) для величины $k_\mu dx^\mu$.

В силу этого имеются два варианта многообразия M_0 , полученных по схеме (28.8.8) в соответствии со знаком dt в (28.8.2); обозначим их через M_0^- и M_0^+ ; оба они содержатся в геодезически полном многообразии, которое построили Бойер и Линдквист.

28.9. ЗАДАЧА КОШИ

Задача Коши для уравнений Эйнштейна в пустом пространстве имеет одно общее с задачей Коши для уравнений Максвелла свойство. Напомним, что два уравнения Максвелла, а именно

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (28.9.1)$$

можно рассматривать как чисто начальное условие; если эти условия выполняются при $t=0$, то из остальных уравнений

$$\partial \mathbf{E} / \partial t = -c \nabla \times \mathbf{H}, \quad \partial \mathbf{H} / \partial t = c \nabla \times \mathbf{E} \quad (28.9.2)$$

(этих уравнений будет шесть, если расписать их покомпонентно) следует, что дивергентные условия (28.9.1) автоматически выполняются и для всех $t \geq 0$. Следовательно, полная система восьми уравнений оказывается избыточной, так что в качестве эволюционных уравнений нужно рассматривать только шесть уравнений (28.9.2) с шестью неизвестными.

Уравнения поля Эйнштейна

$$R_{\beta\gamma} = 0 \quad (28.9.3)$$

обладают похожими свойствами, только с несколько другим результатом. Во-первых, поскольку тензоры $g_{\beta\gamma}$ и $R_{\beta\gamma}$ симметричны, мы можем брать в качестве искомым функций только $g_{\beta\gamma}$ с $\beta \leq \gamma$, а поэтому и уравнения (28.9.3) нужны только с $\beta \leq \gamma$. Это составляет десять уравнений с десятью неизвестными. Мы убедимся в том, что четыре из этих уравнений представляют собой просто начальные условия и если они выполняются при $t = x^4 = 0$, то автоматически выполняются и при $t > 0$. В силу этого имеется только шесть независимых уравнений, описывающих эволюцию десяти искомым функций; решение оказывается недоопределенным и содержит четыре произвольные функции. Это в точности то, что и должно быть. Действительно, задача с начальными данными, собственно говоря, предназначена для определения геометрии пространства-времени для $x^4 > 0$ или хотя бы для $x^4 \in (0, T)$; однако геометрия не определяет функции $g_{\mu\nu}$ однозначно, допускающая возможность замены координат. Любое решение задачи с начальными данными может быть изменено путем произвольного преобразования координат в области $x^4 > 0$, оставляющего без изменения начальные данные на начальной поверхности $x^4 = 0$.

Так как дифференциальные уравнения (28.9.3) имеют второй порядок, начальными данными служат значения функций

$$g_{\mu\nu}, \quad \partial g_{\mu\nu} / \partial x^4 \quad (\text{для всех } x^1, x^2, x^3 \text{ при } x^4 = 0). \quad (28.9.4)$$

Из уравнения $x^4 = 0$ начальной гиперповерхности \mathcal{S} не следует, что \mathcal{S} плоская, потому что метрический тензор g_{jk} на \mathcal{S} произволен (напоминаем, что латинские индексы принимают значения 1, 2, 3), однако предполагается, что начальные данные таковы, что матрица (g_{jk}) размера 3×3 положительно определена на \mathcal{S} ; кроме того, матрица $(g_{\mu\nu})$ должна быть на \mathcal{S} невырожденной и иметь сигнатуру 2. Отсюда следует, что \mathcal{S} пространственноподобна, причем, используя формулу для обращения матрицы, можно убедиться, что на \mathcal{S} $g^{44} < 0$. Ради упрощения рассуждений будем предполагать, что функции (28.9.4) являются аналитическими, так что для решения задачи Коши можно использовать метод степенных рядов. В этом случае все частные производные от $g_{\mu\nu}$ (включающие не более одного дифференцирования по x^4) определяются на \mathcal{S} функциями (28.9.4).

Компоненты $R_{\beta\gamma}$ тензора Риччи получаются из выражения (27.10.1) для $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ сверткой по индексам α и δ , т. е. умножением уравнения на $g^{\alpha\delta}$, а затем суммированием по α и δ от 1 до 4. В результате получается

$$R_{jk} = {}^1/2 g^{44} \partial^2 g_{jk} / (\partial x^4)^2 + \dots, \quad (28.9.5)$$

$$R_{j4} = -{}^1/2 g^{4k} \partial^2 g_{jk} / (\partial x^4)^2 + \dots, \quad (28.9.6)$$

$$R_{44} = {}^1/2 g^{jk} \partial^2 g_{jk} / (\partial x^4)^2 + \dots. \quad (28.9.7)$$

Здесь выписаны только те члены, которые содержат вторые производные по x^4 , многоточием же обозначены члены, содержащие производные по x^4 не выше первого порядка. [В (28.9.6) и (28.9.7) используется соглашение о суммировании, однако латинские индексы принимают значения 1, 2, 3.] Так как $g^{44} \neq 0$, дифференциальные уравнения $R_{jk} = 0$ и начальные данные определяют вторые производные от g_{jk} на \mathcal{S} . При подстановке этих вторых производных в оставшиеся четыре уравнения $R_{\beta 4} = 0$ получаются четыре начальных условия, причем вторые производные от $g_{\beta 4}$ по x^4 остаются неопределенными.

Эволюционные уравнения допускают разделение переменных при помощи вспомогательного условия, предложенного Лихнеровичем (см. Адлер, Базин и Шиффер [1965], где имеется превосходное обсуждение задачи Коши). Тензор Эйнштейна в смешанной форме имеет вид

$$G^{\alpha}_{\beta} = R^{\alpha}_{\beta} - {}^1/2 R \delta^{\alpha}_{\beta}, \quad (28.9.8)$$

где $R^{\alpha}_{\beta} = g^{\alpha\gamma} R_{\gamma\beta}$ — смешанная форма тензора Риччи, а $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ — скалярная кривизна. Оказывается, что система дифференциальных уравнений

$$R_{jk} = 0 \quad (j, k = 1, 2, 3, j \leq k), \quad (28.9.9)$$

$$G^{\alpha}_{\beta} = 0 \quad (\beta = 1, \dots, 4) \quad (28.9.10)$$

эквивалентна исходной системе (28.9.3).

Замечание. Для любого решения $g_{\mu\nu}$ этих уравнений R равно нулю, так что G^{α}_{β} и R^{α}_{β} принимают одно и то же значение (нуль), однако как выражения, содержащие зависимые переменные $g_{\mu\nu}$ и их производные, они отличаются друг от друга; следовательно, система (28.9.9), (28.9.10) отличается от системы (28.9.3), но эквивалентна ей. Чтобы доказать это утверждение, достаточно заметить, что, согласно (28.9.8), если положить R_{jk} равными нулю, то

$$G^4_k = g^{4\gamma} R_{\gamma k} = g^{44} R_{4k}, \quad G^4_4 = {}^1/2 g^{44} R_{44}; \quad (28.9.11)$$

следовательно, поскольку $g^{44} \neq 0$, из системы (28.9.10) следует обращение в нуль всех $R_{\beta\gamma}$, а отсюда в свою очередь вытекает обращение в нуль всех G^{α}_{β} .

Если в (28.9.8) подставить выражения (28.9.5)—(28.9.7) для компонент тензора Риччи, то окажется, что в дифференциальных уравнениях $G^4_{\beta} = 0$ нет никаких вторых производных по x^4 . Следовательно, эти уравнения играют роль дополнительных условий; в частности, им должны удовлетворять начальные данные.

Важным свойством тензора Эйнштейна (которое уже обсуждалось в § 28.2) является его бездивергентность в силу уравнения (27.10.10); иначе говоря,

$$G^{\alpha}_{\beta;\alpha} = 0. \quad (28.9.12)$$

Используя это уравнение покажем, что если функции $g_{\mu\nu}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям (28.9.9) при всех x^4 из некоторого интервала $[0, T]$, а при $x^4 = 0$ удовлетворяют дополнительному условию (28.9.10), то они удовлетворяют этому дополнительному условию и при всех $x^4 \in [0, T]$. Формула для ковариантного дифференцирования в § 27.5 показывает, что (28.9.12) можно переписать в виде

$$\partial G^{\alpha}_{\beta} / \partial x^{\alpha} + A^{\alpha\gamma}_{\beta\delta} G^{\delta}_{\gamma} = 0, \quad (28.9.13)$$

где коэффициенты $A^{\alpha\gamma}_{\beta\delta}$ зависят только от $g_{\mu\nu}$ и их первых производных.

Поскольку функции $g_{\mu\nu}$ таковы, что все $R_{jk} = 0$, уравнения (28.9.8) и (28.9.11) показывают, что каждую компоненту G^j_{β} (как функцию от $g_{\mu\nu}$ и их первых производных) можно выразить через G^4_{γ} ($\gamma = 1, \dots, 4$). Уравнение (28.9.13) переходит тогда в уравнение

$$\partial G^4_{\beta} / \partial x^4 = B^{\gamma}_{\beta j} \partial G^4_{\gamma} / \partial x^j + C^{\gamma}_{\beta} C^4_{\gamma},$$

в котором коэффициенты $B^{\gamma}_{\beta j}$ и C^{γ}_{β} зависят только от функций $g_{\mu\nu}$ и их первых производных. Это система линейных дифференциальных уравнений относительно G^4_{β} (если $g_{\mu\nu}$ заданы), в которой производные по времени выражены в явном виде через производные по пространственным координатам. По теореме Коши — Ковалевской ее решение единственно; следовательно, если все четыре G^4_{β} равны нулю на \mathcal{S} ($x^4 = 0$), то они равны нулю и при всех $x^4 > 0$, что и требовалось доказать.

Наконец, уравнения (28.9.9) можно рассматривать как дифференциальные уравнения относительно функций g_{jk} ($j, k = 1, 2, 3, j \leq k$). Однако эти уравнения содержат также и функции $g_{\alpha 4}$ [в членах, скрывающихся за многоточием в (28.9.5)]. Эти четыре функции можно произвольно (но гладко) доопределить на все пространство-время, проследив только за тем, чтобы они соответствовали значениям $g_{\alpha 4}$ и $\partial g_{\alpha 4} / \partial x^4$, заданным на поверхности \mathcal{S} ($x^4 = 0$). Но поскольку $g^{44} \neq 0$, (28.9.5) показывает, что уравнения (28.9.9) определяют вторые производные по времени от

всех g_{jk} . И снова, согласно теореме Коши—Ковалевской, эти уравнения имеют при заданных начальных данных единственное решение на некотором интервале $0 \leq x^4 \leq T$.

28.10 ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Общая задача расширения многообразий Эйнштейна далеко не решена. Почти ничего не известно о существовании или единственности геодезически полных расширений. Простые многообразия в § 28.7 не имеют таких расширений, а следующее многообразие имеет много расширений. Рассмотрим единственную карту, в которой $g_{\mu\nu}$ определяются матрицей

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & 1 & \\ (0) & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (28.10.1)$$

на ограниченной области N координатного пространства. В одном из геодезически полных расширений N' совпадает с \mathbb{R}^4 , а $g_{\mu\nu}$ всюду задаются как (28.10.1). Это—стационарное плоское пустое пространство. В другом расширении N' снова совпадает с \mathbb{R}^4 , но при этом имеются некоторые гравитационные волны, которые еще не достигли области пространства-времени, представленной областью N . Почти ничего не известно и о задаче Коши, за исключением существования и единственности решения на *некотором* интервале времени $0 \leq x^4 \leq T$. Даже если имеется единственное решение для всех x^1, \dots, x^4 , оно все еще образует одну карту, которая может оказаться неполным многообразием.

БИФУРКАЦИИ В ЗАДАЧАХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Эволюционное уравнение; уравнения Навье—Стокса; течения Пуазейля и Куэтта; вихри Тейлора; волнистые вихри; потоки и полупотоки в гильбертовом пространстве; собственные колебания; полнота системы собственных колебаний; инвариантные многообразия; устойчивые и неустойчивые многообразия; неподвижные точки, замкнутые траектории и инвариантные торы; бифуркации; закритические и докритические бифуркации; субгармонические бифуркации; отображения Пуанкаре.

Предварительные сведения: гл. 1—8 и основы гидродинамики.

Работы Лоренца [1963] и Рюэля и Такенса [1971] положили начало применению в теории гидродинамической устойчивости концепций и принципов одного из современных и быстро развивающихся разделов математики — теории топологических динамических систем. Сразу стало ясно, что эти концепции (например, концепция типичных свойств систем) применимы, по существу, во всех физических теориях. Новые концепции и принципы позволяют по-новому взглянуть на давно известные явления, такие, например, как бифуркации. Идея странных аттракторов и их связь с непрерывными энергетическими спектрами дают новое представление о хаотическом поведении в целом.

В этой и в двух следующих главах показывается применение таких новых идей для изучения начальной стадии образования турбулентности.

29.1. КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Будем рассматривать слабо неустойчивое течение несжимаемой вязкой жидкости. Это течение является более гладким и простым, чем хаотическое течение, характерное для полностью развитой турбулентности, и в то же время обладает свойствами неустойчивости и непредсказуемости, которые можно изучать аналитически. Пусть создающая течение установка работает так, что число Рейнольдса медленно возрастает. Нас будет интересовать та стадия течения, на которой турбулентность только зарождается.

Течение — это, иначе говоря, баланс между устойчивым потоком энергии от некоторого внешнего источника и ее диссипацией за счет вязкого трения. В классических задачах типа задачи Пуа-

зейля энергия передается внешним градиентом давления, который, например, вызывает движение жидкости в длинной круглой трубе или в щели между параллельными плоскими стенками; в задачах Куэтта энергия поступает за счет бокового движения стенок, таких, как скользящая плоская стенка или вращающийся цилиндр; в задачах Бенара она поступает от внешнего источника тепла, который вызывает тепловую конвекцию. Другими примерами такого рода являются течение за круговым цилиндром (задача Кармана) и течение в пограничном слое над плоской пластиной, параллельной основному потоку (задача Блазиуса).

Конкретную задачу обычно можно охарактеризовать некоторой длиной l_0 и некоторой скоростью v_0 , где l_0 может быть диаметром или каким-либо другим характерным размером, а v_0 — средней скоростью течения или скоростью движения одной из стенок. Безразмерная величина

$$R = l_0 v_0 / \nu, \quad (29.1.1)$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости (равный коэффициенту вязкости, деленному на плотность жидкости), называется *числом Рейнольдса* рассматриваемой задачи. Обычно предполагается, что R изменяется за счет изменения v_0 при неизменных ν и размерах. Однако гидродинамические уравнения инвариантны относительно изменений масштабов длины и скорости (сохраняющих все *отношения* соответствующих длин и скоростей) и относительно замены одной жидкости другой, если при этом не изменится значение R .

Задача Тейлора о течении между вращающимися концентрическими цилиндрами (иногда называемая круговой задачей Куэтта) и задача Бенара о конвекции в горизонтальном слое жидкости, подогреваемом снизу, представляют собой наиболее изученные в настоящее время примеры возникновения турбулентности.

29.2. ПРИМЕРЫ БИФУРКАЦИЙ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Сначала рассмотрим частный случай задачи Тейлора о течении между концентрическими вращающимися цилиндрами, когда внешний цилиндр покоится. При медленном вращении внутреннего цилиндра течение будет ламинарным: у скорости жидкости отлична от нуля только компонента по θ (r , θ и z — цилиндрические координаты), которая зависит только от r . По достижении определенной критической скорости вращения это так называемое течение Куэтта становится неустойчивым и на него накладывается возмущение, состоящее из равномерно распределенных по пространству кольцевых вихрей, как показано на рис. 29.1. Если A обозначает некоторую меру интенсивности вихрей, скажем максимум компоненты скорости возмущения по r или по z , то A зависит от угловой

скорости Ω внутреннего цилиндра так, как это схематически изображено на рис. 29.2, а. Два возможных знака A при заданном значении Ω соответствуют двум возможным направлениям вращения вихря, которые одинаково вероятны и определяются начальными условиями (соседние вихри вращаются в противоположных направлениях). Если Ω лишь немного превосходит критическую скорость Ω_1 , то величина $|A|$ приблизительно пропорциональна $\sqrt{\Omega - \Omega_1}$.

Появление нового течения при $\Omega = \Omega_1$ называется *бифуркацией*. В только что описанном случае это бифуркация к другому стационарному течению: в фиксированной точке пространства скорость жидкости не зависит от времени, а кольцевые вихри являются устойчивыми и сохраняются до тех пор, пока внутренний цилиндр не перестанет вращаться.

Когда будет превышено второе критическое значение угловой скорости Ω_2 , кольцевые вихри станут неустойчивыми и произойдет вторая бифуркация к волнистым вихрям, схематически изображенным на рис. 29.3. Эти волнистые вихри вращаются вокруг общей оси цилиндров примерно со средней угловой скоростью жидкости в течении Куэтта. Следовательно, в

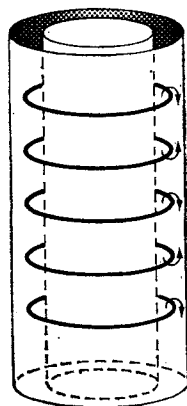


Рис. 29.1. Вихри Тейлора.

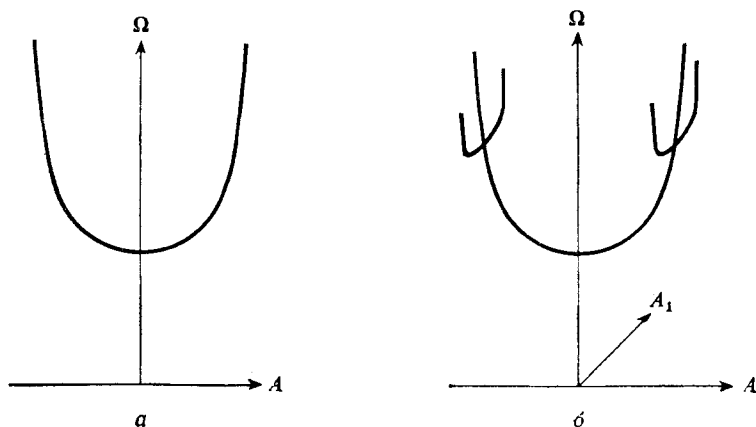


Рис. 29.2. Бифуркации в задаче Тейлора.

фиксированной точке пространства скорость жидкости будет теперь периодической функцией времени. Если A_1 обозначает амплитуду волн, то A_1 зависит от Ω так, как это показано на рис. 29.2, б.

Возможно, более известным примером является бифуркация в течении за круговым цилиндром. При небольшой скорости набегающей жидкости на цилиндр течение за ним будет ламинарным, но после превышения ею некоторого критического значения оно станет неустойчивым и перейдет в так называемую вихревую дорожку Кармана, в которой вихри образуются попеременно на двух сторонах цилиндра (их оси параллельны цилиндру), а затем движутся вниз по потоку со скоростью, примерно вдвое меньшей скорости окружающей жидкости. В этом случае после первой бифуркации течение будет периодическим.

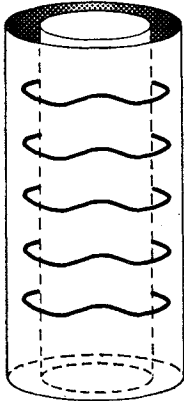


Рис. 29.3. Волнистые вихри в задаче Тейлора.

29.3. УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ — СТОКСА

Уравнения Навье—Стокса, записанные через переменные поля скоростей жидкости $u(x, t)$ и поля ее давлений $p(x, t)$ имеют вид

$$\frac{du}{dt} + (u \cdot \nabla) u + \nabla p - \nu \nabla^2 u = 0, \quad (29.3.1)$$

$$\nabla \cdot u = 0. \quad (29.3.2)$$

Они должны выполняться в некоторой области \mathcal{R} физического пространства вместе с граничным условием

$$u \text{ задано на } \partial\mathcal{R} \quad (29.3.3)$$

и надлежащим начальным условием. Здесь плотность принята равной единице за счет выбора системы единиц измерения.

Пусть $\dot{u}(x)$, $\dot{p}(x)$ — некоторое стационарное решение этих уравнений, соответствующее, например, течению Куэтта в задаче Тейлора. Для изучения влияния возмущений (конечных или инфинитезимальных) на это решение удобно представить полные поля в виде

$$\dot{u}(x) + u(x, t), \quad \dot{p}(x) + p(x, t),$$

где u и p обозначают теперь отклонения от выбранного стационарного решения. Эти отклонения удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{du}{dt} + (\dot{u} \cdot \nabla) u + (u \cdot \nabla) \dot{u} + (u \cdot \nabla) u + \nabla p - \nu \nabla^2 u = 0, \quad (29.3.4)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (29.3.5)$$

$$u = 0 \text{ на } \partial\mathcal{R}, \quad (29.3.6)$$

которая не является результатом линеаризации исходной задачи (она нелинейна). Теперь известная функция $\dot{u}(x)$ входит в коэффициенты членов, линейных по u .

29.4. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Каждой задаче о гидродинамической устойчивости соответствует некоторая эволюционная задача в банаховом (практически в гильбертовом) пространстве H , определяемая эволюционным уравнением

$$du/dt = Lu + B(u, u), \quad u = u(t) \in H, \quad t \geq 0, \quad (29.4.1)$$

и начальным условием

$$u(0) = u_0 \text{ (заданная функция)}. \quad (29.4.2)$$

Для каждого t элемент $u(t)$ является точкой пространства H и описывает мгновенное состояние системы, т. е. поле скоростей $u(x)$ и поле давлений $p(x)$ в физическом пространстве; L — линейный оператор. Уравнение Навье — Стокса, взятое в форме (29.4.1), содержит нелинейные квадратичные члены, совокупность которых обозначена через $B(u, u)$, где $B(\cdot, \cdot)$ — билинейная функция с надлежащей областью определения в пространстве $H \times H$. Иногда вместо $B(u, u)$ мы будем писать $Q(u)$.

В ряде случаев удобно рассматривать более общее уравнение

$$M du/dt = Lu + B(u, u), \quad (29.4.3)$$

где M — другой линейный оператор. Если M допускает обращение, то это уравнение может быть сведено к (29.4.1). Но нередко эволюционный процесс охватывает не все пространство H , а лишь некоторое его подпространство H_0 . Тогда M допускает обращение на этом подпространстве, а не на всем пространстве H , и к тому же оператор M^{-1} может оказаться достаточно сложным с вычислительной точки зрения. Поэтому уравнение (29.4.3) часто оказывается полезным.

В следующей главе рассматривается гильбертово пространство специального вида, удобное для решения задачи Тейлора.

29.5. ЗАДАЧА С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ. ПОЛУПОТОК В H

Основными членами в уравнении Навье — Стокса (29.3.1) являются первый и последний члены в левой части — они делают его сходным с уравнением диффузии. Задача, определяемая соответствующим уравнением диффузии с подходящими граничными условиями, имеет единственное решение для начальных элементов u из некоторого плотного в H множества, и это решение непрерывно зависит от начального u . Благодаря этой непрерывной зависимости можно определить обобщенные решения для любых начальных элементов u , и они также будут непрерывно зависеть от начального u (см. книгу Рихтмайера и Мортонa [1967]). В общем случае решение не может быть продолжено назад, в сторону от-

рицательных t , хотя иногда это возможно; в частности, это возможно для решений, являющихся собственными колебаниями.

Полное нелинейное уравнение Навье — Стокса обладает аналогичными общими качественными свойствами (см. работы Ладыженской [1970, 1975] и книгу Марседена и Мак-Кракена [1976, гл. 9]), однако доказательства в этом случае усложняются, а теория выглядит менее полной.

Будем предполагать, что каждое из уравнений (29.4.1), (29.4.3) имеет в H единственное решение $u(t)$ при $t \geq 0$ для произвольного $u(0) \in H$. Для заданного начального u обозначим это решение через $\varphi(u, t)$, т. е. положим

$$u(t) = \varphi(u(0), t). \quad (29.5.1)$$

При фиксированном u функция $\varphi(u, t)$ ($t \geq 0$) называется *движением* в H ; при фиксированном $t \geq 0$ соответствие $u \rightarrow \varphi(u, t)$ является отображением в H , и мы будем считать его непрерывным; при $t=0$ оно совпадает с тождественным отображением, поскольку $\varphi(u, 0) = u$. Функция $\varphi(\cdot, \cdot)$ называется *полупотоком* в H .

Хотя движения в общем случае не могут быть непрерывно продолжены назад по времени, такое продолжение, если оно существует, определяется однозначно. Иначе говоря, два различных движения за конечное время никогда не могут слиться и стать далее неразличимыми.

29.6. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Возьмем в качестве линеаризации (29.4.1) уравнение

$$du/dt = Lu \quad (29.6.1)$$

и будем искать решения этого уравнения в виде

$$u(t) = \psi e^{\lambda t}. \quad (29.6.2)$$

Это означает, что нужно найти собственные функции ψ и собственные значения λ оператора L , т. е. решить уравнение

$$L\psi = \lambda\psi \quad (29.6.3)$$

при условии, конечно, что $\psi \neq 0$. [Если исходить из (29.4.3), то нужно решать уравнение $L\psi = \lambda M\psi$.]

В гидродинамических задачах оператор L не является самосопряженным, и поэтому мы не можем применить обычную спектральную теорию. Тем не менее в большинстве случаев L имеет чисто точечный спектр, состоящий из счетного числа собственных значений, так что

$$L\psi_j = \lambda_j\psi_j \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (29.6.4)$$

Обсуждение вопроса о полноте системы $\{\psi_j\}$ собственных функций для определенных гидродинамических задач можно найти в статье Ди Примы и Хабетлера [1969], которые использовали для этого теорему Наймарка об операторах в гильбертовом пространстве. Более общий подход излагается у Сэттинджера [1970], применившего теорему Карлемана. Полнота понимается в том смысле, что конечные линейные комбинации функций ψ_j плотны в H . При этом имеется в виду, что рассматриваются не только собственные, но и *обобщенные собственные функции* (если они существуют), т. е. такие векторы ψ , для которых

$$(L - \lambda I)^{k+1}\psi = 0, \quad (L - \lambda I)^k\psi \neq 0. \quad (29.6.5)$$

(При $k=0$ ψ — обычная собственная функция.)

В гидродинамике всегда предполагается, что для задач на собственные значения существуют лишь обычные собственные функции. По аналогии с конечномерным случаем кажется вероятным, что существование обобщенных собственных функций не является типичным свойством течений жидкости (см. приложение к гл. 31). Матрицу A размера $n \times n$ можно рассматривать как точку пространства V , имеющего размерность n^2 . Для существования у матрицы A обобщенного собственного вектора необходимо, чтобы ее характеристическое уравнение

$$p(\lambda; A) \stackrel{\text{def}}{=} \det(A - \lambda I) = 0 \quad (29.6.6)$$

имело кратный корень, т. е. такой корень, который одновременно удовлетворял бы уравнению

$$dp(\lambda; A)/d\lambda = 0. \quad (29.6.7)$$

Исключив λ из (29.6.6) и (29.6.7), можно получить алгебраическое уравнение, которому должна удовлетворять матрица A ; следовательно, только матрицы A , принадлежащие некоторой поверхности в пространстве V , т. е. некоторому множеству меры нуль, могут иметь обобщенные собственные векторы.

Мы будем предполагать, что оператор L имеет только обычные собственные функции.

Между прочим, для задач, решаемых численно в гильбертовом пространстве, нетрудно проверить возможность существования обобщенных собственных функций. Если решено уравнение $L\psi = \lambda\psi$, а затем для какого-либо из найденных λ получены решения сопряженного уравнения $L^*\chi = \bar{\lambda}\chi$ и при этом оказалось, что $(\chi, \psi) \neq 0$, то не существует обобщенных собственных векторов, соответствующих этому собственному значению λ^1 .

¹) Анализируя численное значение скалярного произведения, не следует забывать о приближенном характере вычислений.—Прим. перев.

Для задач гидродинамики собственные значения лежат главным образом на вещественной отрицательной полуоси или вблизи нее, а точнее, в области, ограниченной параболой

$$\operatorname{Re} \lambda \leq c_0 - c_1 (\operatorname{Im} \lambda)^2 \quad (c_1 > 0);$$

c_0 обычно возрастает с возрастанием числа Рейнольдса R , но при любом R только конечное число собственных значений лежит в правой полуплоскости. Поскольку уравнения Навье — Стокса вещественны, собственные значения либо вещественны, либо образуют комплексно сопряженные пары.

29.7. ПРИВЕДЕНИЕ К КОНЕЧНОМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Для изучения начальной стадии турбулентности нет необходимости знать все траектории системы (29.4.1) в гильбертовом пространстве H . Достаточно рассмотреть одно специальное семейство траекторий, которые, согласно приводимым ниже физическим соображениям, принадлежат так называемому неустойчивому многообразию, возникающему в H из нуля в момент бифуркации. Движения в этом многообразии образуют конечномерную динамическую систему. Эта идея была использована Дэви, Ди Примой и Стюартом [1968], а также Рюзлем и Такенсом [1971].

Устойчивые и неустойчивые многообразия играют важную роль в теории дифференцируемых динамических систем: см. работы Смейла [1967], Абрахама и Роббина [1967], а также Келли [1967]. Большая часть теории берет начало в небесной механике и не может быть непосредственно применена к нашей задаче, потому что 1) динамические системы в небесной механике конечномерны с самого начала, а в гидродинамике нет и 2) в первом случае они являются гамильтоновыми, тогда как во втором строго диссипативными и их решения не продолжаются, вообще говоря, в область отрицательных времен, так что первые определяют поток в гильбертовом пространстве, а вторые — только полупоток (однако см. книгу Селла [1971], где большая часть теории сформулирована так, чтобы включались полупотоки). Наш подход в основном интуитивный, но он опирается на физические соображения.

Предположим, что значение числа Рейнольдса длительное время поддерживается постоянным и несколько превышающим первое критическое значение; предположим далее, что для этого значения в правой комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$ находится некоторое конечное число собственных значений λ_k линеаризованной задачи ($k = 1, \dots, K$), а остальные собственные значения лежат в левой полуплоскости. Пусть в очень ранний период (при больших отрицательных t), который мы назовем *ранним линейным режимом*, было наложено произвольное, но очень малое возмущение, представляющее собой линейную комбинацию всех собст-

венных колебаний $\psi_k e^{\lambda_k t}$ (k изменяется от 1 до ∞); с течением времени (когда t еще отрицательно) в *позднем линейном режиме* вклад всех собственных колебаний, за исключением первых K из них, становится несущественным и возмущение можно будет записать в виде линейной комбинации

$$\sum_{k=1}^K a_k \psi_k e^{\lambda_k t}, \quad (29.7.1)$$

где a_k — постоянные коэффициенты; будем считать, что это возмущение все еще достаточно мало, а входящие в него собственные функции возрастают экспоненциально и независимо одна от другой. Еще позднее наступает *нелинейный режим* развития возмущения (включающий «настоящий» момент времени $t=0$), когда возмущение, продолжая расти, из-за нелинейности теряет свою простую

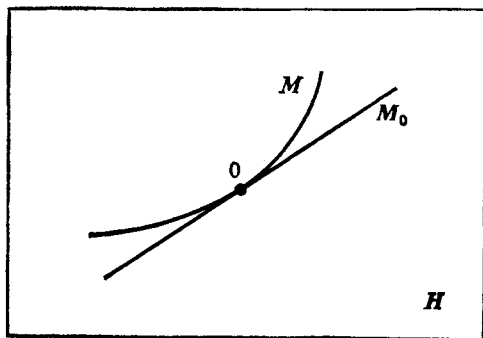


Рис. 29.4.

форму (29.7.1) (хотя еще и остается зависящим от параметров a_1, \dots, a_K) и может, например, переходить по спирали в замкнутую траекторию или иметь другое сложное нелинейное поведение.

Если зафиксировать момент времени (например, положить $t=0$) и варьировать значения параметров a_1, \dots, a_K , то получившиеся точки будут лежать на K -мерной поверхности или многообразии M в гильбертовом пространстве и это многообразие будет в нуле касаться линейного многообразия M_0 , натянутого на собственные векторы ψ_1, \dots, ψ_K (см. рис. 29.4). Многообразие M инвариантно относительно полупотока в H , определенного при помощи (29.4.1), в том смысле, что любая траектория, начинающаяся на M , не выходит из M , поскольку, согласно (29.7.1), сдвиг начала отсчета времени на t_0 , очевидно, эквивалентен изменению значений параметров по правилу $a_k \rightarrow a_k e^{\lambda_k t_0}$.

Лежащие в M траектории можно интерпретировать как движения некоторой динамической системы с K степенями свободы. Свойства этой системы мы и хотим изучить.

M называется *неустойчивым многообразием* в H , исходящим или зарождающимся из нуля. Неустойчивое многообразие, исходящее из любой другой фиксированной точки в H , можно определить аналогичным образом после предварительной линеаризации эволюционного уравнения в окрестности этой точки.

По поводу неустойчивых многообразий, исходящих из замкнутых или квазипериодических траекторий, мы рекомендуем читателю книгу Абрахама и Роббина [1967] (точнее, написанное Келли приложение С к ней).

Многообразие M является *локально притягивающим* в следующем смысле: существует такая окрестность нуля, что любая траектория, принадлежащая этой окрестности при всех $t > 0$, стремится к M при $t \rightarrow \infty$. Мы не будем уточнять это утверждение, за исключением одного случая: если M возникает в результате критической бифуркации при $R = R_c$ (именно такие примеры рассматриваются в оставшихся параграфах этой главы), то при $R > R_c$ многообразие M будет содержать новую неподвижную точку (в дополнение к нулю) или новую замкнутую траекторию — инвариантный тор, которая находится вблизи нуля и является устойчивой (в действительности притягивающей) относительно возмущений, принадлежащих M ; тогда если разность $R - R_c$ достаточно мала, то этот новый инвариантный объект будет притягивающим для произвольных малых возмущений (не обязательно принадлежащих M). Например, Дэви [1962] показал, что вихри Тейлора устойчивы в соответствующем двумерном неустойчивом многообразии, и мы заключаем отсюда, что при достаточно малой величине разности $R - R_c$ они будут устойчивы относительно произвольных малых возмущений, как это и наблюдается в экспериментах.

В линейном приближении локальная устойчивость M отражает экспоненциальное затухание со временем всех собственных колебаний кроме тех из них, которые вызвали появление M [см. (29.7.1)].

Координаты в M можно выбирать различными способами. Более удобными по сравнению с параметрами a_1, \dots, a_K являются координаты x_1, \dots, x_K , получающиеся при помощи проектирования на линейное многообразие M_0 , касательное к M в нуле пространства H . Для любого $u \in H$ такая проекция получается в результате действия на него оператора P , а именно

$$Pu = \sum_{k=1}^K (x_k, u) \psi_k, \quad (29.7.2)$$

где $\{x_k\}$ — система собственных функций сопряженной задачи, образующая базис, биортогональный к $\{\psi_k\}$. Следовательно, координаты любого u из неустойчивого многообразия M вычисля-

ются по формулам

$$x_k = (x_k, u), \quad k=1, \dots, K. \quad (29.7.3)$$

Для траекторий на M уравнение движения (29.4.1) примет вид

$$\dot{x}_k = F_k(x_1, \dots, x_K), \quad k=1, \dots, K. \quad (29.7.4)$$

Для точек вблизи нуля будем иметь

$$F_k(x_1, \dots, x_K) = \lambda_k x_k + \text{члены высшего порядка.} \quad (29.7.5)$$

Алгоритм вычисления функций F_k описывается в следующей главе. Он основан на том соображении, что если $u(x_1, \dots, x_K)$ — точка многообразия M (она входит и в H), имеющая координаты x_1, \dots, x_K , а $\{x_k(t)\}$ ($k=1, \dots, K$) — любое решение системы (29.7.4), то функция

$$u(t) = u(x_1(t), \dots, x_K(t)) \quad (29.7.6)$$

должна удовлетворять в H эволюционному уравнению (29.4.1). Этого требования вполне достаточно для определения как зависимости $x_K(\cdot)$ от t , так и зависимости $u(\cdot)$ от $\{x_k\}$. В алгоритме предполагается аналитичность по всем аргументам, и поэтому $u(x_1, \dots, x_K)$ можно представлять в виде степенных рядов по x_k с коэффициентами из пространства H , а $F_k(x_1, \dots, x_K)$ — в виде обычных степенных рядов. Это предположение следует рассматривать как предварительное, хотя оно и подкрепляется тем известным фактом, что решение уравнений Навье — Стокса принадлежит по крайней мере C^∞ (см. книгу Марсдена и Мак-Кракена [1976]).

Для n -мерных обратимых систем, рассматриваемых в небесной механике, можно определить также *устойчивое многообразие*, зарождающееся из нуля (и аналогично из любой другой неподвижной точки); оно касается в нуле линейного многообразия, натянутого на оставшиеся собственные векторы $\varphi_{K+1}, \dots, \varphi_n$. Его можно охарактеризовать как состоящее из таких движений $u(t)$, для которых $u(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В действительности устойчивое многообразие обычно вводится первым, а затем неустойчивое многообразие определяется как такое устойчивое, которое получилось бы при замене t на $-t$. Хотя в гидродинамике большинство движений не допускает обращения по времени, часть из них, образующая неустойчивое многообразие M , допускает это, так что M может быть описано как состоящее из таких обратимых движений, для которых $u(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$.

В § 29.10 нам потребуется другая трактовка неустойчивого многообразия, которая связана скорее с отображениями, чем с потоками. Вместо семейства отображений $u \rightarrow \varphi(u, t)$ в гильбертовом пространстве, зависящих от непрерывного параметра t , рассмотрим семейство отображений $x \rightarrow \Phi_m(x)$ в n -мерном много-

образии M , зависящих от дискретного параметра m и определяемых с помощью итераций Φ :

$$\Phi_m(x) = \Phi(\Phi(\dots\Phi(x)\dots)) \quad (m \text{ итераций}).$$

Предположим, что $x=0$ — неподвижная точка Φ . После линеаризации в малой окрестности нуля получим

$$\Phi(x) = Mx + \text{члены высшего порядка},$$

где M — матрица размера $n \times n$. Если собственные значения $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ($k < n$) матрицы M лежат вне единичной окружности $|\alpha| = 1$ и им соответствуют независимые собственные векторы v_1, \dots, v_k , а все другие собственные значения лежат внутри единичной окружности, то существует k -мерное инвариантное многообразие N , лежащее в M и касающееся в нуле линейного многообразия N_0 , натянутого на векторы v_1, \dots, v_k (см. книгу Абрахама и Роббина [1967] или статью Смейла [1967]).

Замечание о вещественных и комплексных гильбертовых пространствах. В соответствующем гидродинамической системе гильбертовом пространстве H для функций p, u, v, w (давления и компонент поля скоростей) приходится допускать комплексные значения, тогда как для физических течений они вещественны, и поэтому физические решения должны лежать в вещественном подпространстве H_0 пространства H . Так как уравнения Навье—Стокса вещественны, собственные значения линеаризованной задачи либо вещественны, либо образуют комплексно сопряженные пары. Можно считать, что собственная функция ψ_k вещественна, если вещественно λ_k , и что ψ_k и $\psi_{k'}$, являются комплексно сопряженными, если таковыми являются λ_k и $\lambda_{k'}$. Тогда в представлении $u = \sum c_k \psi_k$ элемента из H нужно считать c_k вещественными для вещественных λ_k и комплексно сопряженными для комплексно сопряженных λ_k — при этом u будет принадлежать H_0 . При таком подходе многообразие M будет вещественной K -мерной поверхностью, касающейся в нуле вещественного линейного подпространства $M_0 \subset H_0$, а координаты x_k в M , задаваемые при помощи (29.7.3), также либо будут вещественными для вещественных λ_k , либо $x_k = \bar{x}_{k'}$, если $\lambda_k = \bar{\lambda}_{k'}$.

29.8. БИФУРКАЦИЯ К НОВОМУ СТАЦИОНАРНОМУ СОСТОЯНИЮ

В более простой из двух классических теорем Хопфа о бифуркациях предполагается, что одно простое вещественное собственное значение $\lambda_1(R)$ переходит в правую полуплоскость (т. е. проходит через нуль) в тот момент, когда число Рейнольдса, увеличиваясь, проходит через критическое значение R_c . Итак,

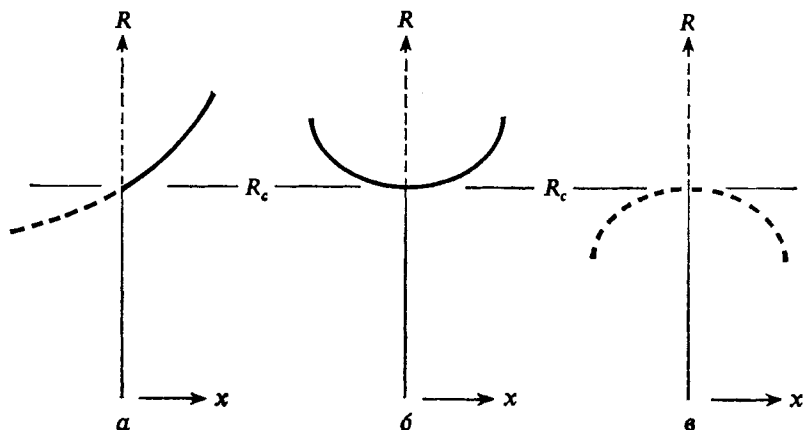


Рис. 29.5.

пусть

$$\lambda_1(R_c) = 0, \quad \lambda_1'(R_c) = \beta > 0. \quad (29.8.1)$$

В этом случае неустойчивое многообразие одномерно, а описывающая движение система (29.7.4) сведется к одному уравнению

$$\dot{x} = F(x; R), \quad (29.8.2)$$

в котором у x опущен нижний индекс 1 и учтена зависимость от R . При помощи (29.7.5) и (29.8.1) это уравнение можно переписать в виде

$$\dot{x} = \beta(R - R_c)x + \text{члены высшего порядка}. \quad (29.8.3)$$

Стационарные траектории $\dot{x} = 0$ представляются точками кривой $F(x; R) = 0$ в плоскости x, R . Это геометрическое место точек состоит из отрезка оси R и кривой, проходящей через точку $x = 0, R = R_c$; три возможных случая представлены на рис. 29.5, а, б и в.

Если следующий по порядку малости член в (29.8.3) равен ax^2 , то имеет место несимметричная бифуркация; если он равен ax^3 , то бифуркация симметрична — она будет критической при $a < 0$ и докритической при $a > 0$.

Устойчивость определяется знаком \dot{x} в точках вблизи кривых. Например, на рис. 29.6 показано стрелками движение точек в

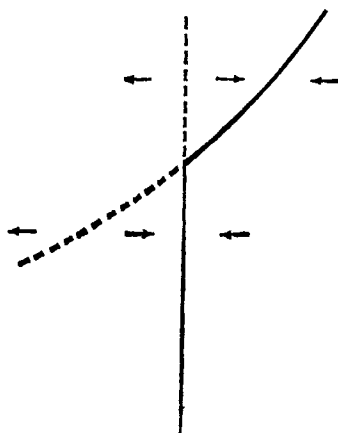


Рис. 29.6.

плоскости x , R в случае несимметричной бифуркации. Во всех случаях восходящие ветви устойчивы, а нисходящие нет, тогда как решение $x=0$ всегда неустойчиво при $R > R_c$.

В докритической бифуркации, которую иллюстрирует рис. 29.5, в, нет устойчивого равновесия в окрестности решения $x=0$ при $R > R_c$. Если в этом случае R , очень медленно возрастая, проходит через R_c , то типичная траектория переводит систему из точки $x \approx 0$ в далекие точки конфигурационного пространства за относительно короткий промежуток времени, как только R превышает R_c . Это явление называется *взрывным переходом* и противоположно переходу в виде адиабатической последовательности устойчивых состояний, которые характеризуют траекторию в других случаях.

29.9. БИФУРКАЦИЯ К ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИИ

Во второй классической теореме Хопфа о бифуркациях предполагается, что одна пара комплексно сопряженных собственных значений переходит в правую полуплоскость в тот момент, когда R , увеличиваясь, проходит через R_c , а все остальные собственные значения находятся в левой полуплоскости. Пусть переходят значения

$$\lambda_1, \lambda_2 = \sigma \pm i\omega = \sigma(R) \pm i\omega(R), \quad (29.9.1)$$

где

$$\sigma(R_c) = 0, \quad \sigma'(R_c) > 0, \quad \omega(R_c) \neq 0. \quad (29.9.2)$$

Теперь многообразие M двумерно. Вместо комплексно сопряженных координат x_1 и x_2 мы введем в M вещественные координаты x и y , так что $x_1 = x + iy$, $x_2 = x - iy$.

В первом приближении движение в M , согласно (29.7.4) и (29.7.5), описывается уравнением

$$d(x + iy)/dt = \lambda_1(x + iy) = (\sigma + i\omega)(x + iy).$$

Вблизи нуля траектории приближенно будут выглядеть как спирали:

$$(x + iy) \approx \text{const} \cdot e^{\sigma t} (\cos \omega t + i \sin \omega t).$$

В полярных координатах мы имеем

$$\dot{r} = \sigma r + O(r^2), \quad \dot{\theta} = \omega + O(r). \quad (29.9.3)$$

Отсюда следует, что в некоторой окрестности нуля на любой траектории θ всегда возрастает, а r всегда положителен; r может как возрастать, так и убывать; вблизи нуля r возрастает при $\sigma > 0$ и убывает при $\sigma < 0$. Теперь попробуем понять, что будет чуть дальше от нуля.

Определим для нашей задачи отображение Пуанкаре как отображение $x \rightarrow \Phi(x)$ оси x в M , полагая, что если траектория имеет координаты $x, 0$ при некотором t , то она будет иметь координаты $\Phi(x), 0$, когда θ увеличится на 2π . Заметим, что x и $\Phi(x)$ могут быть либо одновременно положительными, либо одновременно отрицательными. Пусть

$$\Phi(x) = x(1 + g(x)). \quad (29.9.4)$$

Структура траектории зависит от свойств функции $g(x)$. Из формул, описывающих спираль вблизи нуля, вытекает, что

$$1 + g(0) = e^{2\pi\sigma/\omega}; \quad (29.9.5)$$

в частности, $g(0) = 0$ при $R = R_c$, поскольку тогда $\sigma = 0$. Следовательно, разложив $g(x)$ в ряд Тейлора по x и по разности $R - R_c$, мы будем иметь

$$g(x) = g(x; R) = ax + b(R - R_c) + cx^2 + \dots \quad (29.9.6)$$

Коэффициент a должен быть равен нулю, так как в противном случае функция $g(x, R_c)$ имела бы противоположные знаки при $x > 0$ и $x < 0$ вблизи точки $x = 0$, а отсюда следовало бы, что траектория должна быть самопересекающейся, т. е. ее второй виток с одной стороны был бы дальше от нуля, чем первый, а с другой ближе. Коэффициент b положителен, так как, согласно предположению (29.9.2) относительно σ , траектории вблизи нуля раскручиваются по спирали при $R > R_c$ и скручиваются при $R < R_c$.

Рассмотрим на плоскости x, R множество точек, удовлетворяющих уравнению $g(x, R) = 0$. Если x_0, R_0 — одна из таких точек, то при $R = R_0$ будем иметь $\Phi(x_0) = x_0$, т. е. существует замкнутая траектория, пересекающая ось x при $x = x_0$. Это множество содержит точку $x = 0, R = R_c$; вблизи этой точки оно представляет собой кривую, которая пересекает ось R горизонтально; эта кривая направлена вверх, как на рис. 29.5, б, если $c < 0$, и направлена вниз, как на рис. 29.5, в, если $c > 0$. Бифуркация называется *закритической* в первом из этих двух случаев и *докритической* во втором. Как и в предыдущем параграфе, следует ожидать взрывного перехода, если $c > 0$.

29.10. БИФУРКАЦИЯ ОТ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИИ К ИНВАРИАНТНОМУ ТОРУ

Следующая бифуркация после той, которая привела к замкнутой траектории, т. е. к периодическому движению, может привести к двумерному инвариантному тору, как это показывает пример Хопфа [1948]. Теоремы об этой бифуркации приводятся у различных авторов, включая Наймарка [1959], Саккера [1964], Рюэля и Такенса [1971] и Ланфорда [1973]. Такие теоремы основываются главным

образом на теории Флоке, но мы выберем более наглядный подход, опирающийся на понятие отображения Пуанкаре.

Пусть R_1 — критическое значение числа Рейнольдса R , характеризующее первое появление периодических траекторий в закрытой бифуркации, обсуждавшейся в предыдущем параграфе. Предположим, что при некотором $R > R_1$ размерность неустойчивого многообразия M равна K . Многообразие M содержит двумерное многообразие, описанное в предыдущем параграфе, и мы предположим, что координаты в M выбраны так, что первые две из них — это координаты x, y из предыдущего параграфа; остальные координаты обозначим через x_3, \dots, x_K .

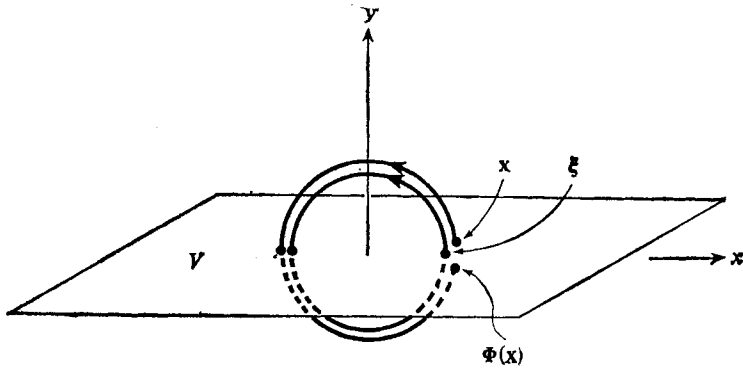


Рис. 29.7.

Тогда, если R лишь немного превосходит R_1 , то замкнутые траектории обходят нуль в подпространстве x, y и каждая из них один раз пересекает положительную и отрицательную полуоси оси x . Пусть V есть $(K-1)$ -мерная гиперповерхность в M , заданная уравнением $y=0$; тогда V дважды пересекается замкнутой траекторией, как схематически показано на рис. 29.7, и мы обозначим одно из этих пересечений как $x = \xi = \xi(R)$, где x есть $(K-1)$ -мерный вектор с компонентами x, x_3, \dots, x_K . Для x , близких к ξ , определим $\Phi(x)$ как вторую по счету точку пересечения V с той траекторией, которая начинается в x (см. рисунок). Тогда

$$\Phi: x \rightarrow \Phi(x)$$

— отображение Пуанкаре, определенное в некоторой окрестности точки ξ в V . Отметим, что $\Phi(\xi) = \xi$. Для x , близких к ξ , после линеаризации будем иметь

$$\Phi(x) - \xi = M(x - \xi) + \text{члены высших порядков}, \quad (29.10.1)$$

где M — матрица размера $(K-1) \times (K-1)$.

Теперь предположим, что M имеет одну пару собственных значений $\alpha (= \alpha(R))$ и $\bar{\alpha}$ с соответствующими им собственными векторами v , \bar{v} , такую, что

$$|\alpha(R_2)| = 1 \text{ для некоторого } R_2 > R_1, \quad (29.10.2)$$

$$d|\alpha(R)|/dR|_{R=R_2} > 0, \quad (29.10.3)$$

тогда как все прочие собственные значения M лежат внутри единичной окружности. Когда R возрастает, замкнутая траектория теряет устойчивость при $R > R_2$; следовательно, при $R = R_2$ имеет место новая бифуркация.

Согласно § 29.7, при $R > R_2$ отображение Φ в V имеет двумерное инвариантное неустойчивое многообразие или поверхность S в V , касающаяся в точке ξ линейного многообразия S_0 , натянутого на векторы v и \bar{v} . Чтобы сделать наши рассуждения более наглядными, будем считать поверхность V двумерной; тогда $S = V$ и S инвариантна относительно Φ ; следовательно, можно считать Φ отображением в S . Пусть u и v — такие вещественные координаты в S , что проекция элемента $x = \xi$ из S на S_0 равна $(u + iv)v + (u - iv)\bar{v}$, и пусть $z = u + iv$. Тогда отображение Пуанкаре примет вид $z \rightarrow z' = \alpha z + \text{члены высших порядков}$, или, точнее,

$$\Phi: z \rightarrow z' = \alpha z \left[1 + \sum_{j+k=1}^{\infty} q_{jk} z^j \bar{z}^k \right], \quad (29.10.4)$$

где q_{jk} — некоторые коэффициенты (в общем случае комплексные), а суммирование происходит по всем целым неотрицательным j и k , для которых $j + k \geq 1$.

При определенных дополнительных предположениях будет показано, что при $R > R_2$ существует почти круговая инвариантная замкнутая кривая \mathcal{E} в S , обходящая точку ξ . Пусть теперь \mathcal{E} переносится течением в M ; тогда она покинет V и начнет описывать инвариантную трубу в M , которая затем замкнется, образовав тор, когда \mathcal{E} снова окажется на поверхности V вблизи точки ξ .

Чтобы облегчить анализ отображения Пуанкаре, удобно ввести в S вместо u и v новые координаты ξ и η . Выберем эти координаты так, чтобы привести отображение Пуанкаре к настолько простой, насколько это возможно, форме (нормальной форме), т. е. чтобы исключить в (29.10.4) некоторые нелинейные члены. При $|\alpha| \neq 1$ можно исключить столько нелинейных членов, сколько представляется нужным (см. книгу Зигеля [1956, § 21]), но, чтобы при прохождении R через значение R_2 , когда $|\alpha(R)| = 1$, искомое преобразование не имело особенности, нужно в (29.10.4) оставить член $\alpha q_{11} z^2 \bar{z}$; таким образом, можно исключить все остальные члены по-

рядка не выше 4. (В принципе можно было бы исключить все члены порядка не выше 6, оставив лишь член $\alpha q_{22} z^2 \bar{z}^2$, и т. д., но исключение членов порядка не выше 4 — это в точности то, что необходимо нам для проведения анализа.) Перейдем к представлению $\zeta = \xi + i\eta$ с помощью равенств

$$z = \zeta + \sum_{l+m=2}^4 \varphi_{lm} \zeta^l \bar{\zeta}^m, \quad (29.10.5)$$

$$z' = \zeta' + \sum_{l+m=2}^4 \varphi_{lm} \zeta'^l \bar{\zeta}'^m \quad (29.10.6)$$

и выберем в них коэффициенты φ_{lm} таким образом, чтобы после подстановки этих соотношений в (29.10.4) отображение Пуанкаре приняло *нормальную форму*

$$\zeta \rightarrow \zeta' = \alpha \zeta (1 + \beta |\zeta|^2) + O(\zeta^5), \quad (29.10.7)$$

где $O(\zeta^5)$ содержит члены степени 5 и выше по ζ и $\bar{\zeta}$, а β — новая постоянная. Чтобы выразить коэффициенты φ_{lm} через заданные коэффициенты q_{jk} , подставим в правую часть (29.10.4) в качестве z правую часть (29.10.5), затем подставим в правую часть (29.10.6) в качестве ζ' правую часть (29.10.7) и подставим этот результат в качестве z' в левую часть (29.10.4). После этого (29.10.4) станет тождеством по ζ и $\bar{\zeta}$ и в нем полный коэффициент при $\zeta^p \bar{\zeta}^q$ можно приравнять нулю. Получившиеся таким образом уравнения, если их расположить в правильном порядке, могут быть разрешены относительно коэффициентов φ_{lm} при условии, что

$$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4 \text{ и } \alpha^5 \text{ не равны } 1, \quad (29.10.8)$$

как это объясняется в приложении к данной главе. (Уравнение, получающееся при $p=2$ и $q=1$, не может быть разрешено относительно φ_{21} , если $|\alpha|=1$, но оно всегда разрешимо относительно β , и мы просто положим $\varphi_{21}=0$.)

Для успешного применения этого метода мы должны предположить, согласно (29.10.8), что, когда при возрастании R точка $\alpha(R)$ пересекает единичную окружность $|\alpha|=1$ в комплексной плоскости, она не совпадает ни с одним из корней из единицы степени меньше 6. Тот случай, когда она совпадает с одним из этих корней, кратко обсуждается в следующем параграфе.

Введем вместо R новый безразмерный параметр $\mu = |\alpha(R)| - 1$ и используем полярные координаты r и θ , в которых $\zeta = r e^{i\theta}$; тогда отображение Пуанкаре примет вид

$$\Phi: \begin{cases} r' = (1 + \mu) r + c_1 r^3 + f(r, \theta) r^5, & (29.10.9) \\ \theta' = \theta + c_2 + c_3 r^2 + g(r, \theta) r^4, & (29.10.10) \end{cases}$$

где f и g — гладкие функции, а c_1, c_2, c_3, f, g гладко зависят от μ в некоторой окрестности значения $\mu=0$.

Константа c_1 играет роль постоянной Ландау: если $c_1 < 0$ (именно это мы и предположим), бифуркация будет закритической.

Если в (29.10.9) не учитывать член высшего порядка малости, содержащий $f(r, \theta)$, то кривая \mathcal{C}_0 , для которой $r = r_0$, где

$$r_0 = \sqrt{\mu/(-c_1)},$$

была бы при $\mu > 0$ инвариантной относительно отображения Пуанкаре. Она концентрична с замкнутой траекторией, изображенной на рис. 29.7; следовательно, при своем движении по течению в M она образовала бы тор. Чтобы учесть влияние отброшенного члена, определим последовательность кривых

$$\mathcal{C}_n: \{r = r_n(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

по индукции, начиная с \mathcal{C}_0 и полагая далее $\mathcal{C}_{n+1} = \Phi(\mathcal{C}_n)$. Можно показать, что для достаточно малых μ (т. е. для достаточно малой разности $R - R_2$) эти кривые сходятся при $n \rightarrow \infty$ к предельной кривой \mathcal{C}_∞ , которая и будет инвариантной относительно Φ .

Доказательства сходимости и ограничений на μ слишком длинны и поэтому опущены, за исключением немногих утверждений и формул, приведенных в приложении к этой главе. Показывается, например, что при малом μ кольцо

$$\frac{2}{3}r_0 < r < \frac{4}{3}r_0 \quad (29.10.11)$$

отображается Φ в меньшее кольцо

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{27}\mu\right)r_0 < r' < \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{27}\mu\right)r_0. \quad (29.10.12)$$

Это подтверждает тот факт, что Φ — сжимающее отображение. Показано также, что если

$$\Delta_n = \max_{(\theta)} |r_{n+1}(\theta) - r_n(\theta)|$$

— максимальное радиальное перемещение кривой \mathcal{C}_n под действием Φ , то

$$\Delta_{n+1} \leq K\Delta_n, \quad (29.10.13)$$

где константа $K < 1$, если μ достаточно мало. Наконец, показывается, что при достаточно малом μ

$$|dr_n(\theta)/d\theta| < \mu \text{ для всех } n \text{ и всех } \theta, \quad (29.10.14)$$

так что предельная кривая \mathcal{C}_∞ будет по меньшей мере непрерывной по Липшицу.

Наконец, рассмотрим трубку в K -мерном пространстве M , состоящую из траекторий, которые начинаются в точках кривой \mathcal{C}_∞ . Эта трубка соединяется сама с собой, образуя замкнутую поверхность, когда траектории возвращаются на поверхность S , где они

снова проходят через кривую \mathcal{C}_∞ . Такая поверхность гомеоморфна тору, а не бутылке Клейна, поскольку при замыкании трубки ориентация кривой \mathcal{C}_∞ сохраняется [последнее следует из определения отображения Пуанкаре (29.10.9), (29.10.10), откуда видно, что θ' является возрастающей функцией θ].

Мы не утверждаем здесь, что любая отдельная траектория плотно покрывает получившийся тор и, следовательно, является квазипериодической функцией времени. В самом деле, в гл. 31 будет объяснено, что в силу теоремы Пейксото это представляется в общем случае маловероятным.

29.11. СУБГАРМОНИЧЕСКАЯ БИФУРКАЦИЯ

В предыдущем параграфе уже отмечалось, что если $\alpha(R)$ при возрастании R пересекает единичную окружность $|\alpha|=1$ в точке, являющейся корнем из единицы степени менее 6, то изложенным методом нельзя обосновать существование инвариантного тора. В этом случае бифуркация может привести к одной или нескольким дополнительным периодическим траекториям.

Мы рассмотрим только простейшую ситуацию, когда высшие члены в отображении (29.10.4) в основном уже отсутствуют и, следовательно, нет необходимости их исключать. Положим $\alpha = \exp\{2\pi ip/q\}$ ($q \leq 5$) и возьмем отображение вида

$$z' = \alpha z(1 + \beta |z|^2) \quad (\beta \text{ вещественно и отрицательно})$$

или, в полярных координатах,

$$\begin{aligned} r' &= (1 + \mu)r + c_1 r^3 \quad (c_1 < 0), \\ \theta' &= \theta + 2\pi p/q. \end{aligned} \quad (29.11.1)$$

В этом случае на расстоянии $r_0 = \sqrt{\mu/(-c_1)}$ (на поверхности S) от старой траектории образуются новые траектории, которые будут замкнутыми, потому что после q -кратного применения отображения Пуанкаре каждая точка окружности $r=r_0$ переходит сама в себя. При малых положительных μ старая траектория неустойчива, если $c_1 < 0$, а новые траектории устойчивы. Когда μ , возрастая, проходит через 0, период рассматриваемой траектории скачкообразно увеличивается в q раз.

В этом случае результатом бифуркации *может быть* еще и инвариантный тор, хотя наш метод его нахождения теперь уже непригоден. В рассмотренном выше примере такой тор существует, так как окружность $r(\theta) = r_0$ является инвариантной.

И наоборот, даже когда удастся обосновать существование инвариантного тора, на кривой \mathcal{C}_∞ могут найтись такие точки, которые будут инвариантны относительно некоторой степени отображения Пуанкаре и тем самым будут порождать замкнутые траектории на этом торе.

Приложение к главе 29.

НЕКОТОРЫЕ ДЕТАЛИ ПОСТРОЕНИЯ ИНВАРИАНТНОГО ТОРА

Сначала рассмотрим вопрос об определении входящих в (29.10.5) и (29.10.6) коэффициентов φ_{lm} по заданным коэффициентам q_{jk} из (29.10.4) — это необходимо для приведения отображения Пуанкаре к нормальной форме (29.10.7). Как отмечалось в тексте, для этого нужно подставить (29.10.5) — (29.10.7) в (29.10.4) и, получив таким образом тождество относительно степеней ξ и $\bar{\xi}$, приравнять затем полные коэффициенты при $\xi^p \bar{\xi}^q$ в правой и левой его частях. При $(p, q) = (0, 0), (1, 0)$ и $(0, 1)$ получившиеся уравнения удовлетворяются автоматически. Следующие 12 уравнений располагаются в такой последовательности:

$$\begin{aligned} (p, q) = & (2, 0), (1, 1), (0, 2), \\ & (3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3), \\ & (4, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 4), \end{aligned}$$

и в этой же последовательности из них находятся коэффициенты φ_{pq} ; тогда φ_{pq} будет неизвестным только в том уравнении, в котором он впервые появляется, а это уравнение имеет вид

$$\alpha p \bar{\alpha}^q \varphi_{pq} + \dots = \alpha \varphi_{pq} + \dots$$

Отсюда можно найти φ_{pq} , за исключением того случая, когда

$$\alpha p \bar{\alpha}^q = \alpha.$$

Так как $p+q > 1$, последнее верно лишь тогда, когда $|\alpha| = 1$ и при этом

$$\alpha^{p-q-1} = 1.$$

Если $p-q-1 \neq 0$, то последнее равенство выполняется только тогда, когда α является корнем степени $|p-q-1|$ из единицы, откуда и следуют ограничения (29.10.8). Случай $p-q-1=0$ имеет место только при $(p, q) = (2, 1)$; это уравнение не может быть разрешено относительно φ_{21} , если $|\alpha| = 1$, но зато из него можно определить β ; следовательно, мы просто положим $\varphi_{21} = 0$.

Приведем также, опуская доказательство, некоторые ограничения на μ , выполнение которых гарантирует существование инвариантной предельной кривой \mathcal{C}_∞ , обсуждавшейся в основном тексте. Во-первых, кольцо (29.10.11) отображается в кольцо (29.10.12), если

$$\max |f| \mu < {}^{45/1024} c_1^2 \quad \text{и} \quad \mu < {}^3/13,$$

где $\max |f|$ означает максимум величины $|f(r, \theta, \mu)|$ в некоторой области $r \leq r_1, |\mu| \leq \mu_1$, в которой отображение Пуанкаре имеет нормальную форму (29.10.9), (29.10.10). Во-вторых, оценка (29.10.14) для $dr_n/d\theta$ справедлива, если дополнительно

$$\max |f_r| c_4^5 \mu^{3/2} + 5 \max |f| c_4^4 \mu + \max |f_\theta| c_4^5 \sqrt{\mu} < 1/6$$

и

$$2 |c_3| c_4 \sqrt{\mu} + \max |g_r| c_4^4 \mu^2 + 4 \max |g| c_4^3 \mu^{3/2} + \max |g_\theta| c_4^4 \mu < 1/6,$$

где

$$c_4 = 4/(3 \sqrt{-c_1}).$$

Наконец, оценка (29.10.13) выполняется при $K = 1 - \mu/6$, если дополнительно

$$\begin{aligned} 2 |c_3| c_4 \sqrt{\mu} + \max |g_r| c_4^4 \mu^2 + 4 \max |g| c_4^3 \mu^{3/2} + 5 \max |f| c_4^4 \mu + \\ + \max |f_r| c_4^5 \mu^{3/2} < 1/6. \end{aligned}$$

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ В ЗАДАЧЕ ТЕЙЛОРА

Представление конечномерных многообразий в гильбертовом пространстве степенными рядами; координаты на многообразии; определение коэффициентов разложения; динамические системы на многообразиях; разделение переменных; вихри Тейлора, волнистые вихри; винтовые вихри.

Предварительные сведения: гл. 29.

Эта глава посвящена методу нахождения неустойчивого многообразия, которое возникает из основного течения в гидродинамических задачах, рассматривавшихся Дэви [1962], Дэви, Ди Примой и Стюартом [1968] и Иглзом [1971] в связи с исследованием задачи Тейлора. Хотя результаты, которые были получены до сих пор этим методом, являются довольно ограниченными, он остается пока что единственным известным приемом для решения таких задач (см. также работу Хассарда [1980], посвященную аналогичному методу для конечномерных пространств). Вероятно, методы такого рода будут необходимы для детального понимания процесса возникновения турбулентности.

30.1. ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ПО ЗАДАЧЕ ТЕЙЛОРА, ПОЛУЧЕННЫХ К 1968 Г.

Пусть r_1 и r_2 — радиусы внутреннего и внешнего цилиндров (предполагаемых бесконечно длинными), ограничивающих течение, а Ω_1 и Ω_2 — угловые скорости цилиндров. Для невозмущенного течения угловая скорость на радиусе r ($r_1 \leq r \leq r_2$) равна

$$\Omega(r) = A + B/r^2, \quad (30.1.1)$$

где A и B определяются из условия прилипания на стенках, а именно $\Omega_1 = A + B/r_1^2$ и $\Omega_2 = A + B/r_2^2$. Эту задачу можно охарактеризовать различными безразмерными параметрами, например параметром r_1/r_2 (который фиксирован для данной физической установки), и двумя числами Рейнольдса

$$R_1 = \Omega_1 r_1^2 / \nu, \quad R_2 = \Omega_2 r_2^2 / \nu. \quad (30.1.2)$$

Устойчивость основного ламинарного течения Куэтта, заданного в виде (30.1.1), по отношению к малым осесимметричным возмущениям изучалась Тейлором [1923] как теоретически, так и экспери-

ментально. Он установил устойчивость для значений величин R_1 и R_2 , соответствующих точкам, лежащим ниже сплошной кривой на рис. 30.1, для случая $r_1/r_2=0.880$. Еще ранее при помощи простых соображений Рейлей показал, что течение будет устойчивым при $0 < R_1 < R_2$, т. е. для случая, когда точка (R_1, R_2) находится справа от штриховой прямой на рисунке.

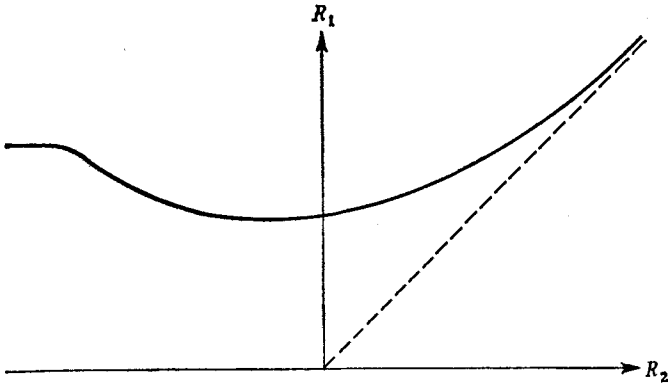


Рис. 30.1. Схематическая диаграмма тейлоровской устойчивости.

Вычисления Тейлора показывают, что, как только R_1 , возрастая, превысит при фиксированном R_2 свое критическое значение (т. е. значение на кривой), основное течение становится неустойчивым относительно собственного колебания, поле скоростей которого в цилиндрических координатах r, θ, z имеет вид

$$\mathbf{u} = \text{Re} [f(r) e^{i\alpha z}]. \quad (30.1.3)$$

Структура этого возмущения представляет собой ряд кольцевых вихрей, равномерно расположенных вдоль оси z , как схематически показано на рис. 29.1 в предыдущей главе. Тейлор установил, что экспериментально наблюдаемые вихри (которые можно сделать видимыми при помощи взвешенных частиц) в жидкости качественно согласуются с вычислениями; в частности, их осевое разделение согласуется со значением α из (30.1.3), для которого возмущение впервые становится неустойчивым (т. е. возмущение устойчиво при меньших значениях R_1).

При R_1 , ненамного превосходящем свое критическое значение, вихри (называемые теперь вихрями Тейлора) будут устойчивыми; вместе с основным течением, на которое они накладываются, они образуют новое стационарное течение (в каждой точке пространства вектор скорости жидкости не зависит от времени), которое будет существовать до тех пор, пока цилиндры не перестанут вращаться.

Тейлор наблюдал экспериментально, что при достижении параметром R_1 следующего критического значения вихри становятся волнистыми и вращаются вокруг оси со скоростью, примерно равной средней угловой скорости $(\Omega_1 + \Omega_2)/2$.

Анализ Тейлора, будучи линейным, годится лишь для исследования течения только до достижения параметром R_1 первого критического значения и непосредственно после этого; он не позволяет судить об устойчивости или неустойчивости вихрей Тейлора, а лишь фиксирует факт их возникновения. Очевидно, для интервала значений R_1 , при которых экспериментально наблюдаются вихри Тейлора, экспоненциальный рост собственного колебания (30.1.3) благодаря влиянию нелинейностей происходит лишь до некоторой конечной амплитуды.

Последующие более тонкие теоретические и экспериментальные исследования в общем подтвердили результаты Тейлора. Однако Тейлор рассматривал только осесимметричные возмущения, а Крюгер, Гросс и Ди Прима [1966] показали, что в случае противоположно вращающихся цилиндров при достаточно больших по модулю значениях отношения Ω_2/Ω_1 (выходящих за ту область, которая экспериментально изучалась Тейлором) собственное колебание, которое первым становится неустойчивым, не является осесимметричным, а зависит от угла по закону $e^{im\theta}$, где m , возрастая, принимает значения 1, 2, 3, ... по мере роста по модулю отношения Ω_2/Ω_1 . Следовательно, левая часть кривой на рис. 30.1 должна быть опущена вниз, но весьма незначительно, так как устойчивость собственного колебания в случае сравнительно близко расположенных цилиндров ($r_1/r_2=0,880$), изучавшемся Тейлором, очень слабо зависит от m .

Эти предварительные выводы были экспериментально подтверждены Снайдером [1970], который показал также, что если возникают неосесимметричные собственные колебания, то они являются винтовыми. (В рамках линейной теории нельзя отличить винтовые вихри от волнистых кольцевых вихрей: все четыре собственных колебания, содержащие $e^{\pm iaz}e^{\pm im\theta}$, одинаково возможны и при своем объединении дают вещественную зависимость либо вида $\frac{\sin}{\cos} \alpha z \frac{\sin}{\cos} m\theta$, либо вида $\frac{\sin}{\cos} (\alpha z \pm m\theta)$, и только нелинейная теория позволяет сказать, какая из этих возможностей реализуется.

За последние десятилетия при помощи нелинейной теории, разрабатывавшейся Дэви [1962], Дэви, Ди Примой и Стюартом [1968] и Иглзом [1971], удалось понять структуру и устойчивость вихрей Тейлора с конечной амплитудой, вторую бифуркацию к волнистым вихрям и структуру и устойчивость волнистых вихрей, как это будет описано ниже.

Для задач, подобных этой, когда имеется последовательность бифуркаций, теория представляет собой идеальное чередование

линейного и нелинейного анализа. После каждой бифуркации структура и амплитуда нового течения находятся с помощью нелинейного анализа. Затем его устойчивость исследуется путем линеаризации уравнений в окрестности этого нового течения и изучения роста инфинитезимальных возмущений, чтобы найти следующую бифуркацию, и т. д.

30.2. ПОСТРОЕНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В этом параграфе мы опишем в общих чертах метод построения неустойчивого многообразия, разработанный упомянутыми выше авторами на основе более ранней работы Стюарта и Ватсона.

Возьмем эволюционное уравнение в виде (29.4.3); тогда собственные значения и собственные функции линеаризованной задачи будут удовлетворять уравнениям

$$\lambda_j M \psi_j = L \psi_j \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (30.2.1)$$

Как и в § 29.6, будем считать, что система функций ψ_j полна в H , а сопряженные функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\overline{\lambda}_j M^* \chi_j = L^* \chi_j \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (30.2.2)$$

образуют по отношению к ψ_j биортогональную систему в том смысле, что

$$(\chi_j, M \psi_k) = \delta_{jk}. \quad (30.2.3)$$

Пусть неустойчивое многообразие M является K -мерным, и пусть координаты точки $u \in M$, как и в § 29.7, получаются путем проектирования на M_0 , а именно

$$x_k = (\chi_k, Mu) \quad (k = 1, \dots, K). \quad (30.2.4)$$

Поэтому для $u \in M$

$$u = \sum_{k=1}^K x_k \psi_k + u', \quad (30.2.5)$$

где вектор u' ортогонален χ_1, \dots, χ_K , т. е.

$$(\chi_k, Mu') = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, K). \quad (30.2.6)$$

Нам нужно найти функцию $u(x_1, \dots, x_K)$, или, для краткости, $u(x)$, со значениями в H , которая дает точку из M с координатами x_1, \dots, x_K хотя бы в некоторой окрестности нуля. Предположим, что эта функция является аналитической и, следовательно, может быть представлена в виде степенного ряда:

$$u(x) = \sum_{(q \in \mathcal{E})} x^q u_q, \quad (30.2.7)$$

где \mathbf{x} и \mathbf{q} суть K -мерные векторы и суммирование проводится по множеству

$$\mathcal{L} = \{\mathbf{q}: \text{каждое } q_i \text{ — неотрицательное целое и хотя бы одно } q_i > 0\}, \quad (30.2.8)$$

$\mathbf{x}^{\mathbf{q}}$ — сокращенное обозначение произведения $x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_K^{q_K}$, а каждый коэффициент $u_{\mathbf{q}}$ является элементом из \mathbf{H} .

Согласно (30.2.5) и (30.2.6), коэффициенты $u_{\mathbf{q}}$ линейных членов в (30.2.7) — это первые K собственных функций ψ_1, \dots, ψ_K , тогда как остальные $u_{\mathbf{q}}$ ортогональны χ_1, \dots, χ_K в смысле (30.2.6). Эти последние $u_{\mathbf{q}}$ не являются собственными функциями, а удовлетворяют некоторым неоднородным уравнениям, которые будут приведены ниже; поэтому (30.2.7) *не будет* разложением по собственным функциям.

Предположим, что функции из (29.7.4), описывающие динамическую систему в \mathbf{M} , также аналитичны и могут быть разложены в степенные ряды по x_1, \dots, x_K , так что

$$\dot{x}_j = \sum_{(\mathbf{p} \in \mathcal{L})} a_{j\mathbf{p}} x^{\mathbf{p}} \quad (j = 1, \dots, K), \quad (30.2.9)$$

где $a_{j\mathbf{p}}$ — скалярные коэффициенты.

Из (30.2.7) и (30.2.9), используя правило дифференцирования сложной функции, найдем $\dot{u} = du/dt$, а затем подставим u и \dot{u} в эволюционное уравнение (29.4.3) и будем рассматривать этот результат как тождество по x_1, \dots, x_K . Этого достаточно для определения коэффициентов $u_{\mathbf{q}}$ и $a_{j\mathbf{p}}$.

Чтобы найти u из (30.2.7), нужно продифференцировать $\mathbf{x}^{\mathbf{q}}$ по x_j для каждого j , а затем использовать (30.2.9). Пусть \mathbf{e}_j есть K -мерный вектор, у которого j -я компонента равна 1, а все остальные компоненты равны 0. Тогда

$$\partial \mathbf{x}^{\mathbf{q}} / \partial x_j = q_j \mathbf{x}^{\mathbf{q} - \mathbf{e}_j}; \quad (30.2.10)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \sum_{(\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{L})} \sum_{j=1}^K q_j a_{j\mathbf{p}} x^{\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{e}_j} u_{\mathbf{q}} = \\ &= \sum_{(\mathbf{s} \in \mathcal{L})} x^{\mathbf{s}} \sum_{j=1}^K \sum_{(\mathbf{q})} q_j a_{j\mathbf{s} + \mathbf{e}_j - \mathbf{q}} u_{\mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (30.2.11)$$

где через \sum' обозначена сумма по всем таким $\mathbf{q} \in \mathcal{L}$, для которых $\mathbf{s} + \mathbf{e}_j - \mathbf{q}$ также принадлежит \mathcal{L} (при заданном \mathbf{s} она содержит лишь конечное число слагаемых).

Для векторов из множества \mathcal{L} удобно ввести норму, положив

$|\mathbf{q}| = \sum_{j=1}^K q_j$; тогда $|\mathbf{q}|$ будет целым положительным числом. Если $|\mathbf{q}| = 1$, то \mathbf{q} совпадает с одним из векторов \mathbf{e}_j .

Теперь подставим u в виде (30.2.7) и \dot{u} в виде (30.2.11) в эволюционное уравнение (29.4.3) и приравняем полные коэффициенты при x^s в обеих частях для каждого $\mathbf{s} \in \mathcal{L}$. Тогда, во-первых, если \mathbf{s} — один из векторов \mathbf{e}_l , то квадратичные члены не дают никакого вклада и поэтому

$$\sum_{j=1}^K a_{j\mathbf{e}_l} M u_{\mathbf{e}_j} - L u_{\mathbf{e}_l} = 0 \quad (l=1, \dots, K). \quad (30.2.12)$$

Но мы уже знаем, что $u_{\mathbf{e}_j} = \psi_j$; отсюда и из (30.2.1) следует, что

$$a_{j\mathbf{e}_l} = \begin{cases} \lambda_l & \text{при } j=l, \\ 0 & \text{при } j \neq l. \end{cases} \quad (30.2.13)$$

Тогда с точностью до первого порядка при малых x_1, \dots, x_K (30.2.9) дает $x_j = \text{const} \cdot \exp(\lambda_j t)$, чего и следовало ожидать.

Во-вторых, если \mathbf{s} не совпадает ни с одним из \mathbf{e}_l , т. е. если $|\mathbf{s}| > 1$, мы получаем при помощи (30.2.13)

$$\left(\sum_{j=1}^K s_j \lambda_j M - L \right) u_{\mathbf{s}} = - \sum_{j=1}^K \sum_{(\mathbf{q})} q_j a_{j\mathbf{s}+\mathbf{e}_j-\mathbf{q}} M u_{\mathbf{q}} + \sum_{(\mathbf{q})} B(u_{\mathbf{q}}, u_{\mathbf{s}-\mathbf{q}}), \quad (30.2.14)$$

где через \sum'' обозначена сумма по всем таким $\mathbf{q} \in \mathcal{L}$, для которых $\mathbf{s} + \mathbf{e}_j - \mathbf{q}$ также принадлежит \mathcal{L} и $\mathbf{q} \neq \mathbf{s}$, а через \sum''' сумма по всем таким $\mathbf{q} \in \mathcal{L}$, для которых $\mathbf{s} - \mathbf{q}$ также принадлежит \mathcal{L} ; обе эти суммы содержат конечное число слагаемых.

Теперь покажем, что эти уравнения, будучи определенным образом упорядоченными по $\mathbf{s} \in \mathcal{L}$, позволяют индуктивно определить неизвестные функции $u_{\mathbf{s}}$ и неизвестные коэффициенты $a_{j\mathbf{s}}$. Предположим, что уравнения (30.2.14) расположены в таком порядке, что все уравнения с данным значением $|\mathbf{s}|$ и для каждого из уравнений все входящие в него функции и коэффициенты, входившие и в предыдущие уравнения, уже определены. (Порядок следования уравнений с одним и тем же значением $|\mathbf{s}|$ не имеет значения.) Мы утверждаем, что тогда впервые появившиеся в правой части (30.2.14) $u_{\mathbf{q}}$ уже известны. Действительно, там для большинства членов $|\mathbf{q}| < |\mathbf{s}|$, кроме тех, для которых $\mathbf{q} = \mathbf{s} + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_l$ при $l \neq j$ (назовем такое \mathbf{q} не равным \mathbf{s}); однако член с таким значением \mathbf{q} содержит коэффициент $a_{j\mathbf{e}_l}$, равный нулю в силу (30.2.13); следовательно, все $u_{\mathbf{q}}$, впервые появляющиеся в правой части уравнения, можно считать известными. Поэтому

неизвестными в каждом уравнении будут функция u_s и коэффициенты a_{ls} ($l = 1, \dots, K$).

Чтобы определить коэффициент a_{ls} при некотором $l = 1, \dots, K$, умножим скалярно обе части (30.2.14) на вектор χ_l . Тогда в левой части получится нуль, а в правой части все члены из первой суммы будут равны нулю, кроме тех, для которых $q = e_l$ и $j = l$; следовательно,

$$a_{ls} = - \left(\chi_l, \sum_{(q)}''' B(u_q, u_{s-q}) \right).$$

После того как эти коэффициенты найдены для $l = 1, \dots, K$, уравнение (30.2.14) можно разрешить относительно u_s . Таким путем определяется инвариантное K -мерное многообразие M в той окрестности нуля пространства H , в которой сходятся ряды (30.2.7) и (30.2.9).

Именно этот метод применяется в работах Дэви [1962], Дэви, Ди Прими и Стюарта [1968] и Иглза [1971]. Хотя эти авторы не описывают метод таким образом, его основная отличительная черта — это построение неустойчивого многообразия, происходящего из нуля пространства H ; тогда уравнения (30.2.9) представляют конечномерную динамическую систему на этом многообразии и могут изучаться любым из стандартных методов как аналитически относительно неподвижных точек и циклов, так и численно, когда траектории получаются в результате решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Важным моментом в их методе является предположение об ортогональности всех u_q (кроме тех, для которых $|q|=1$) системе сопряженных функций χ_1, \dots, χ_K . У нас это предположение отражено в виде равенств (30.2.5) и (30.2.6) просто как удобный способ задания координат x_1, \dots, x_K на неустойчивом многообразии, однако оно имеет более глубокий смысл и представляет собой тот главный фактор, который делает применение метода успешным.

Каждая функция u_s определяется через известные величины с помощью неоднородного уравнения (30.2.14), которое на практике оказывается дифференциальным уравнением с граничными условиями. Для некоторых из этих уравнений, когда число Рейнольдса близко к одному из критических значений, оператор в левой части становится почти вырожденным и на самом деле вырождается, когда число Рейнольдса совпадает с этим значением.

Согласно теореме об альтернативе Фредгольма из линейной алгебры, которая применяется также и к линейным уравнениям в гильбертовом пространстве, вырожденное неоднородное линейное уравнение имеет решение только тогда, когда его правая часть ортогональна всем решениям соответствующего транспонированного однородного уравнения, которыми в данном случае будут функции χ_1, \dots, χ_K : если это так, то решение не однозначно, но может

быть сделано таковым, если потребовать, чтобы оно также было ортогонально функциям χ_1, \dots, χ_K .

Без этого или какого-либо другого сходного с ним предположения функции u_q могут оказаться неприемлемо большими для представляющих интерес значений чисел Рейнольдса, что, по-видимому, будет препятствовать сходимости ряда (30.2.7).

30.3. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Уравнения Навье—Стокса имеют вид (см. (29.3.4) и (29.3.5))

$$\partial \mathbf{u} / \partial t + (\dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u} = 0, \quad (30.3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (30.3.2)$$

где $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ соответствует основному ламинарному течению (для задачи Тейлора это течение Куэтта). Введем цилиндрические координаты r, θ, z и соответствующие компоненты вектора скорости u, v, w . Тогда

$$\mathbf{u} = uk_r + vk_\theta + wk_z, \quad (30.3.3)$$

где k_r, k_θ, k_z —единичные векторы по направлениям возрастания r, θ и z соответственно. В цилиндрических координатах операторы ∇^2 и $\mathbf{u} \cdot \nabla$ имеют вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (30.3.4)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + w \frac{\partial}{\partial z}.$$

Когда эти операторы применяются к векторному полю вида (30.3.3), нужно учитывать зависимость единичных векторов k_r и k_θ от θ :

$$\partial k_r / \partial \theta = k_\theta, \quad \partial k_\theta / \partial \theta = -k_r.$$

Для задачи Тейлора основное ламинарное течение в силу (30.1.1) определяется из уравнений $\dot{u} = 0, \dot{w} = 0$ и

$$\dot{v} = \dot{v}(r) = Ar + B/r. \quad (30.3.5)$$

Приведенные выше уравнения, будучи объединенными, образуют систему уравнений в частных производных относительно величин u, v, w и p , рассматриваемых как функции переменных r, θ, z и t . Для практического применения изложенного в предыдущем параграфе метода удобно представить эти уравнения в форме, указанной Иглзом [1971],— путем введения шестимерных векторов \mathbf{U}, \mathbf{V} и т. д., где компоненты вектора \mathbf{U} это функции $p, \partial v / \partial r, \partial w / \partial r, u, v, w$. Тогда наша система запишется в виде

$$\partial \mathbf{U} / \partial t - \mathbf{A} \mathbf{U} - \mathbf{M} \partial \mathbf{U} / \partial t - \mathbf{K}(\mathbf{U}) \mathbf{U} = 0, \quad (30.3.6)$$

где A , M и $K(\mathbf{U})$ — операторнозначные матрицы размера 6×6 , содержащие $\partial/\partial\theta$ и $\partial/\partial z$, но не содержащие $\partial/\partial r$. [Для достижения последнего используется уравнение неразрывности $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, при помощи которого производная $\partial u/\partial r$ исключается так, чтобы она осталась только в первом члене левой части (30.3.6).] Эти матрицы выписаны в приложении к настоящей главе; они по существу те же самые, что и в статье Иглза, и лишь слегка отличаются обозначениями. Все элементы матриц M и $K(\mathbf{U})$ равны нулю, кроме тех, которые расположены в правой верхней четверти матрицы. Чтобы объяснить обозначение $K(\mathbf{U})$, рассмотрим выражение $K(\mathbf{U})\mathbf{V}$; в нем элементы матрицы линейно зависят от компонент вектора \mathbf{U} и действуют линейно на компоненты вектора \mathbf{V} .

30.4. ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО

Для задачи Тейлора теория и эксперимент одинаково показывают, что если вихри Тейлора (а также волнистые или винтовые вихри) уже образовались, то полное течение будет периодическим в направлении оси z с периодом, примерно равным удвоенному расстоянию между цилиндрами, по крайней мере в том случае, когда цилиндры очень длинные, и в таком приближении, когда краевыми эффектами пренебрегают. Здесь же мы просто предположим, что такая периодичность имеет место, и будем также считать известным волновое число α , так что период будет равен $2\pi/\alpha$. Будем рассматривать нашу задачу в области

$$\mathcal{R}: r_1 \leq r \leq r_2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 2\pi/\alpha \quad (30.4.1)$$

и возьмем в качестве \mathbf{H} гильбертово пространство $L^2(\mathcal{R})^6$ со скалярным произведением

$$(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \iiint_{\mathcal{R}} \bar{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{V} \, dr \, d\theta \, dz. \quad (30.4.2)$$

При таком выборе скалярного произведения задача на собственные значения, сопряженная задаче

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{U} / \partial r - A \mathbf{U} - \lambda M \mathbf{U} &= 0, \\ U_4 = U_5 = U_6 &= 0 \quad \text{при } r = r_1 \text{ и } r = r_2, \end{aligned} \quad (30.4.3)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{U} / \partial r - A^* \mathbf{U} - \bar{\lambda} M^* \mathbf{U} &= 0, \\ U_1 = U_2 = U_3 &= 0 \quad \text{при } r = r_1 \text{ и } r = r_2, \end{aligned} \quad (30.4.4)$$

где A^* и M^* получаются транспонированием матриц A и M с заменой $\partial/\partial\theta$ и $\partial/\partial z$ на $-\partial/\partial\theta$ и $-\partial/\partial z$.

Как и в предыдущем параграфе, предположим, что:

1) для данного λ задача (30.4.3) имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение задача (30.4.4);

2) каждая из задач имеет полную систему собственных функций, так что не нужно рассматривать обобщенные собственные функции более высокого порядка, например решения уравнения $(\partial/\partial r - A - \lambda M)^2 U = 0$ и т. д.

Такие предположения подтверждаются, насколько это возможно, численными расчетами, в которых рассчитывалось около 40 первых собственных функций. Собственные функции $U^{(j)}$ для прямой задачи и $U^{+(j)}$ для сопряженной задачи могут быть выбраны так, чтобы они были биортогональными в том смысле, что

$$(U^{+(j)}, MU^{(l)}) = \delta_{jl}. \quad (30.4.5)$$

Выбор скалярного произведения в форме (30.4.2) связан с некоторым произволом. Например, может показаться более естественным взять там rdr вместо dr . Тогда несколько изменится уравнение в сопряженной задаче (30.4.4) и будут другими сопряженные функции $U^{+(j)}$, но соотношения биортогональности (30.4.5) останутся верными. Однако только эти соотношения и имеют значение: они используются для построения проекций точек неустойчивого многообразия M на соответствующее линейное многообразие M_0 , касательное к M в нуле. Скалярное произведение нельзя выбрать так, чтобы операторы были самосопряженными.

30.5. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Для линеаризованной задачи и, в частности, для задач (30.4.3) и (30.4.4) на собственные значения переменные могут быть разделены, так что собственные функции имеют вид $U = V(r) e^{ip\alpha z + im\theta}$, где p и m — целые числа, и поэтому k -ю собственную функцию можно записать как

$$V_k(r) e^{ip_k z + im_k \theta}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (30.5.1)$$

Одним из преимуществ описанного в § 30.2 метода Дэви, Ди Примы и Стюарта является то, что, хотя для нелинейной задачи переменные не разделяются, они разделяются для каждого члена, входящего в представление (30.2.7) неустойчивого многообразия через переменные x_1, \dots, x_k . Появляющийся там коэффициент u_q является элементом гильбертова пространства и поэтому представляет собой векторную функцию переменных r, θ, z в области \mathcal{R} , причем эта функция как раз имеет вид (30.5.1).

Точнее говоря, эти коэффициенты, которые теперь лучше обозначить через U_q (q является точкой множества \mathcal{L} , определенного в (30.2.8)), и скалярные коэффициенты a_{jq} , входящие в (30.2.9), обладают свойствами, указанными в следующей лемме.

Лемма. Для всех допустимых j и q коэффициенты a_{jq} могут быть отличны от нуля только тогда, когда $p(q) = p(e_j)$ и $m(q) = m(e_j)$; кроме того, для U_q справедливо представление

$$U_q = V_q(r) e^{ip(q)az + im(q)\theta},$$

где

$$p(q) = \sum_{k=1}^K q_k p_k, \quad m(q) = \sum_{k=1}^K q_k m_k$$

и e_j — такой вектор из \mathcal{L} , у которого j -я компонента равна 1, а остальные — нулю.

Доказательство леммы легко получается индукцией по норме $|q| = q_1 + \dots + q_K$, введенной в § 30.2, и поэтому здесь не приводится.

Преимущество разделения переменных проявляется в том, что линейные уравнения (30.2.14), которые нужно решать для нахождения u_q , оказываются *обыкновенными* дифференциальными уравнениями относительно функций от r на отрезке $[r_1, r_2]$. Для них получаются двухточечные граничные задачи шестого порядка с тремя граничными условиями на каждом конце отрезка. На каждую исходную задачу приходится довольно много таких граничных задач (например, их будет 800, если размерность K неустойчивого многообразия равна 14 и в рядах (30.2.7) и (30.2.9) берутся члены до пятого порядка включительно), но современные методы решения этих задач по быстродействию и точности превосходят методы, применяемые для решения уравнений в частных производных.

30.6. ПОСЛЕДНИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПО ЗАДАЧЕ ТЕЙЛОРА

В этом параграфе мы подытожим основные результаты, вытекающие из численных расчетов Дэви, Ди Примы и Стюарта [1968], Иглза [1971] и тех немногих дополнительных расчетов, которые были недавно проведены мною на ЭВМ Cray-1 в Национальном центре исследований атмосферы (Боулдер, штат Колорадо), функционирующем в рамках Национального научного фонда.

Пусть внешний цилиндр покоится ($\Omega_2 = 0$). Тогда интенсивность вращения обычно характеризуют числом Тейлора

$$T = 2\Omega_1^2 r_1^2 (r_2 - r_1)^3 / [\nu (r_1 + r_2)],$$

пропорциональным квадрату числа Рейнольдса R_1 (R_2 равно нулю).

С возрастанием T при фиксированном отношении r_1/r_2 первое собственное значение линеаризованной задачи, переходящее в правую полуплоскость, является вещественным и соответствует значению $m_k = 0$ в представлении (30.5.1) для собственных функций. Далее туда перейдет пара комплексно сопряженных собственных

значений, соответствующих $m_k=2$, и т. д. Каждое собственное значение имеет кратность 2 (вырождение соответствует возможности сдвига течения как целого в направлении z); следовательно, размерность K неустойчивого многообразия последовательно принимает значения 2, 6, 10, 14, Вычисления проводились до значения $K=14$. (При еще больших значениях T снова встретятся значения $m_k=0, 1, \dots$, но соответствующие им собственные функции будут более сложным образом зависеть от радиуса; для этого режима вычисления не проводились.)

Все собственные колебания (устойчивые или неустойчивые), которые рассматривались до сих пор, соответствовали периодическим траекториям динамической системы на неустойчивом многообразии (см. (30.2.9)). Это не относится к основному ламинарному течению (течению Куэтта) и к вихрям Тейлора, которые являются неподвижными точками этой системы. Кроме уже рассмотренных нами, существуют следующие собственные колебания.

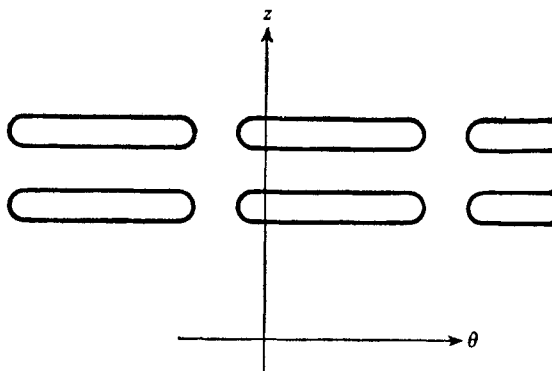


Рис. 30.2.

Винтовые вихри. Они аналогичны вихрям Тейлора, за исключением того, что после совершения оборота вдоль одного из них при изменении θ от 0 до 2π мы попадем не в его начало, а в начало либо второго, либо четвертого, либо шестого и т. д. вихря, лежащего над (или под) ним. Определим соответствующее целое $m=1, 2, 3, \dots$. (После завершения оборота нельзя попасть на первый, третий и т. д. вихри, потому что они вращаются в противоположном направлении.) Все течение вращается вокруг оси с угловой скоростью, не слишком отличающейся от средней угловой скорости жидкости, равной $\Omega_1/2$.

Неосесимметричное простое собственное колебание (всегда неустойчивое). Интенсивность вихря изменяется синусоидально вокруг оси. Взаимное расположение средних частей вихрей схематически показано на рис. 30.2. Эта картина вращается вокруг оси.

Вихри с осевой волнистостью. Они аналогичны вихрям Тейлора, но их средние части смещаются попеременно в положительном и отрицательном направлениях оси z при изменении θ от 0 до 2π . Обозначим через m ($=1, 2, \dots$) число таких смещений в каждом направлении.

Вихри с радиальной волнистостью. Эти вихри аналогичны вихрям с осевой волнистостью, за исключением того, что средние части вихрей теперь смещаются попеременно к оси и от нее в радиальном направлении. Они всегда неустойчивы. Оба типа волнистых вихрей вращаются вокруг оси с угловой скоростью, близкой к $\Omega_1/2$.

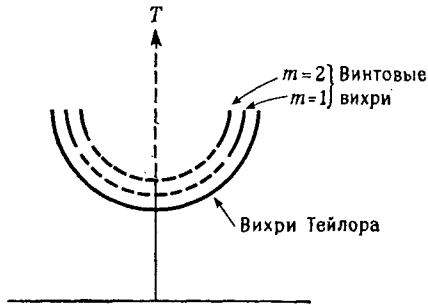


Рис. 30.3. Недоступные устойчивые винтовые вихри.

Во всех случаях можно установить, что после превышения числом Тейлора T первого критического значения T_1 ламинарное течение становится неустойчивым и на него накладываются вихри Тейлора, интенсивность которых примерно пропорциональна $\sqrt{T-T_1}$; они устойчивы вплоть до второго критического значения T_2 , когда на них накладывается волнистость с амплитудой, примерно пропорциональной $\sqrt{T-T_2}$.

Винтовые вихри накладываются на основное ламинарное течение после T_1 , т. е. после того, как основное течение уже стало неустойчивым (см. рис. 30.3). Винтовые вихри неустойчивы в момент своего появления, но затем становятся устойчивыми при чуть больших значениях T , как указано на рисунке сплошными отрезками кривых. Таким образом, это — устойчивые собственные колебания, которые недоступны в том смысле, что к ним нельзя перейти от основного течения посредством непрерывной последовательности устойчивых колебаний.

Экспериментальная работа Голлуба и Суинни [1975] указывает на то, что при числе Тейлора порядка $200T_1$ должны появиться странные аттракторы, потому что эти авторы наблюдали непрерывный энергетический спектр. Вычисления нельзя продолжить до столь больших значений T , так как размерность неустойчивого многообразия становится неприемлемо большой. Конечно, можно

продолжить вычисления для многообразия меньшей размерности, определив его при помощи собственных значений, дальше всего ушедших вправо в комплексной плоскости. Такое многообразие является инвариантным, но не будет притягивающим. Вычисления подобного рода указывают на то, что волнистые вихри при этом *могут* оставаться устойчивыми до очень высоких значений T , задерживая тем самым появление странного аттрактора, а возможно, даже бифуркации более высокого порядка.

Приложение к главе 30.

МАТРИЦЫ, ВОХОДЯЩИЕ В ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ В ФОРМЕ ИГЛЗА

Матрицы, входящие в уравнение (30.3.6), имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{v}{r} \partial_\theta & -v \partial_z & B & \frac{2V}{r} - \frac{v}{r^2} \partial_\theta & 0 \\ \frac{1}{vr} \partial_\theta & -\frac{1}{r} & 0 & \frac{1}{v} \left(V' + \frac{V}{r} \right) - \frac{2}{r'} \partial_\theta & -\frac{1}{v} B + \frac{1}{r^2} & 0 \\ \frac{1}{v} \partial_z & 0 & -\frac{1}{r} & 0 & 0 & -\frac{1}{v} B \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r} & -\frac{1}{r} \dot{\partial}_\theta & -\partial_z \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $B = v [(1/r^2) \partial_\theta^2 + \partial_z^2] - (V/r) \partial_\theta$;

$$M = \begin{pmatrix} & -1 & 0 & 0 \\ (0) & 0 & 1/v & 0 \\ & 0 & 0 & 1/v \\ (0) & (0) & & \end{pmatrix},$$

$$K(U) = \begin{pmatrix} & \frac{u}{r} - \frac{v}{r} \partial_\theta - w \partial_z & \frac{v}{r} + \frac{u}{r} \partial_\theta & u \partial_z \\ (0) & \frac{1}{v} \left(\frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) & \frac{1}{v} \left(\frac{v}{r} \partial_\theta + w \partial_z \right) & 0 \\ & \frac{1}{v} \frac{\partial w}{\partial r} & 0 & \frac{1}{v} \left(\frac{v}{r} \partial_\theta + w \partial_z \right) \\ (0) & & (0) & \end{pmatrix}$$

РАННЯЯ СТАДИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Периодические, квазипериодические, почти периодические и аperiodические движения; ω -предельное множество; аттракторы; энергетический спектр; устойчивость по Ляпунову; странные аттракторы; аттрактор Лоренца; сильно типичные, типичные, нетипичные и сильно нетипичные свойства систем.

Предварительные сведения: гл. 29.

В прикладной гидродинамике турбулентным называют течение со столь высокой степенью хаотичности, что для изучения достаточно широкого набора его характеристик можно использовать статистические методы. Турбулентность в этом смысле возникает при существенно более высоких числах Рейнольдса, чем те, которые мы будем рассматривать. Например, для вполне развитой турбулентности в воздухе с полностью сформировавшимся так называемым инерциальным интервалом необходимы более суровые условия, чем те, которых можно достичь в большинстве аэродинамических труб, и такая турбулентность наблюдается главным образом в открытой атмосфере.

Между ламинарным течением и турбулентностью существует нечетко определенная область состояний, называемая переходным режимом или установлением турбулентности. Мы познакомимся с этим режимом только при совсем низких числах Рейнольдса. Слово «ранняя» в названии главы относится к такому реальному течению, для которого число Рейнольдса растет со временем очень медленно. Рассматриваемые нами течения являются простыми и гладкими, но, несмотря на это, они отражают определенные характерные свойства непредсказуемости и хаотичности на совсем ранних стадиях.

31.1. МОДЕЛЬ ЛАНДАУ — ХОПФА

Схематически эта модель перехода описана в книге Ландау и Лифшица [1954]. Предполагается, что хотя бы для некоторых задач существует последовательность закритических бифуркаций, схематически образующих дерево, изображенное на рис. 31.1. После первой бифуркации движение в общем случае является периодическим, после второй оно в общем случае будет квазипериодическим с двумя периодами и т. д. *Квазипериодическая функция с m перио-*

дами имеет вид

$$f(t) = g(\omega_1 t, \omega_2 t, \dots, \omega_m t), \quad (31.1.1)$$

где функция $g(\cdot, \cdot, \dots, \cdot)$ периодична по каждому из своих аргументов с периодом 2π , а частоты ω_i несоизмеримы, что означает необращение в нуль линейной комбинации $c_1\omega_1 + \dots + c_m\omega_m$ с рациональными коэффициентами c_1, \dots, c_m , если хотя бы один из них отличен от нуля. Если $\omega_1, \dots, \omega_m$ соизмеримы, то число

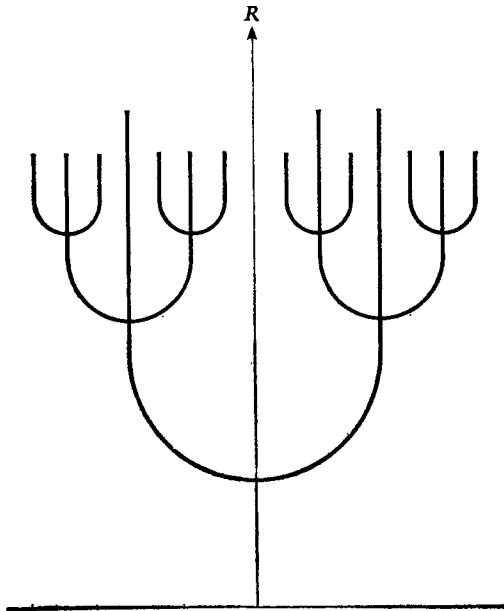


Рис. 31.1. Дерево бифуркаций.

независимых частот меньше m . Предположим, например, что $m=2$ и $\omega_2/\omega_1 = p/q$, где p и q — целые числа. Тогда для

$$t_0 = 2\pi (q/\omega_1 + p/\omega_2) \quad (31.1.2)$$

будем иметь $\omega_1 t_0 = 4\pi q$ и $\omega_2 t_0 = 4\pi p$, так что $f(t)$ — это периодическая (а не только квазипериодическая) функция с периодом, равным величине (31.1.2).

В последнем параграфе предыдущей главы было показано, что если первая бифуркация приводит к замкнутой траектории, то вторая может привести к притягивающему инвариантному тору в фазовом пространстве H . Если, кроме того, движение таково, что его траектория плотно покрывает тор, то результирующие функции времени (такие, как одна из координат в фазовом пространстве)

будут квазипериодическими с двумя периодами. Точнее говоря, на торе можно определить две внутренние угловые координаты θ и φ так, что $\theta = \omega_1 t + \text{const}$, $\varphi = \omega_2 t + \text{const}$, и траектория плотно покроем тор тогда и только тогда, когда ω_1 и ω_2 несоизмеримы. После следующей бифуркации может возникнуть движение на трехмерном торе и т. д.

Реальный выбор ветви дерева, изображенного на рис. 31.1, зависит от структуры инфинитезимального возмущения, вызывающего отклонение от основного или ламинарного течения в тот момент, когда число Рейнольдса достигло первого критического значения. В более общем случае фазы, связанные с различными частотами, случайным образом зависят от такого возмущения, так что (31.1.1) лучше переписать в виде

$$f(t) = g(\omega_1 t + \beta_1, \dots, \omega_m t + \beta_m). \quad (31.1.3)$$

Идея, отражаемая моделью Ландау — Хопфа, состоит в том, что при наличии многих независимых частот движение в момент своего зарождения столь иррегулярно, что с точки зрения приложений оно должно рассматриваться как хаотическое.

В ряде случаев эта модель может оказаться неподходящей.

1. Одна из бифуркаций в изображенной на рис. 31.1 последовательности может быть докритической; тогда непосредственно после превышения числом Рейнольдса соответствующего критического значения для системы не найдется близкого к устойчивому движению, а будет иметь место так называемый взрывной переход к движению, связывающему более или менее отдаленные части фазового пространства.

2. Для некоторых задач, таких, как течение в круглой трубе, основное течение устойчиво по отношению к инфинитезимальным возмущениям при всех числах Рейнольдса, но неустойчиво по отношению к конечному возмущению довольно небольшой амплитуды, и с ростом числа Рейнольдса характеризующая наступление неустойчивости амплитуда уменьшается, приближаясь к нулю, так что практически не удается получить устойчивое течение из-за наличия малых, но конечных возмущений.

3. Хотя при второй бифуркации обычно появляется инвариантный тор, траектория не обязательно будет плотно покрывать его; она может вернуться в свою первоначальную точку после конечного числа оборотов вокруг оси тора; тогда траектория будет замкнутой, а движение периодическим, как уже отмечалось в § 29.11. В действительности на основании теоремы Пейксо́то (см. приложение к этой главе) теперь создается впечатление, что замкнутые траектории на торе менее вероятны, чем плотно покрывающие его. Это может указывать на справедливость модели Фейгенбаума (см. § 31.19).

4. Ситуация, обсуждавшаяся Рюэлем и Такенсом [1971], заключается в том, что после нескольких бифуркаций в фазовом прост-

ранстве появляется инвариантное множество точек, которое представляет собой не тор, а так называемый странный аттрактор; тогда, как это объясняется ниже, движение будет не квазипериодическим, а аperiodическим.

31.2. ПРИМЕР ХОПФА

В 1948 г. Хопф привел пример простой динамической системы, у которой имеется бесконечная последовательность бифуркаций, причем каждая из них приводит к притягивающему тору размерности на единицу большей, чем у предыдущего. Пусть $u(x, t)$ и $z(x, t)$ — комплекснозначные в общем случае функции вещественных переменных x и t , периодические по x с периодом 2π . Эти функции должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t &= -z \circ u - u \circ 1 + \mu \partial^2 u / \partial x^2, \\ \partial z / \partial t &= z \circ u + z \circ F + \mu \partial^2 z / \partial x^2; \end{aligned} \quad (31.2.1)$$

здесь кружком обозначена свертка: в общем случае

$$f \circ g = (f \circ g)(x) = [1/(2\pi)] \int_0^{2\pi} f(x-y) \overline{g(y)} dy;$$

$u \circ 1$ — это в точности среднее значение функции u , μ — положительная постоянная, а $F = F(x)$ — заданная комплекснозначная четная периодическая функция.

Эту систему можно рассматривать как простой аналог уравнений Навье — Стокса на компактном многообразии (на окружности) с представлением нелинейностей в виде сверток, а не в виде адвективных членов. Функция $F(x)$ обозначает силу, а μ (вязкость) — это тот параметр, который можно варьировать.

Решения этой системы можно найти с помощью разложения всех функций в ряды Фурье по x (например, $u(x, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_n(t) e^{inx}$; обозначения для остальных функций аналогичны). Так как преобразование Фурье свертки двух функций равно произведению их преобразований Фурье, члены, соответствующие различным n , нельзя группировать. В этом отношении система (31.2.1) отличается от уравнений Навье — Стокса, но зато ее решения можно получить в явном виде.

Нужно наложить лишь ограничения на описывающую силу функцию $F(x)$, чтобы эта система не оказалась слишком специальной, т. е. нетипичной. А именно если

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} (a_n + ib_n) e^{inx}, \quad (31.2.2)$$

то предполагается, что бесконечно многие из a_n будут больше нуля, что отношение любых b_n не является рациональным числом (т. е. любое конечное их множество линейно независимо над полем рациональных чисел) и что среди величин a_n/n^2 нет равных.

Критические значения параметра μ — это числа a_n/n^2 , которые можно упорядочить в виде последовательности $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \dots \rightarrow 0$. Общее решение представляет движущуюся в бесконечномерном пространстве Ω точку с координатами $u_n(t)$, $z_n(t)$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Хопф доказал, что при $\mu > \mu_1$ неподвижная точка в нуле пространства Ω притягивает все остальные решения, так что $u_n \rightarrow 0$ и $z_n \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$; при прохождении уменьшающегося μ через μ_1 это решение станет неустойчивым и произойдет бифуркация к притягивающей периодической траектории, которая развивается из нуля; когда μ , уменьшаясь, будет проходить через μ_2 , эта траектория также станет неустойчивой и произойдет бифуркация к притягивающему тору (размерности 2), который развивается из этой траектории, и т. д. После k -й бифуркации получится k -мерный притягивающий тор и каждая лежащая на нем траектория плотно покроеет его.

31.3. МОДЕЛЬ РЮЭЛЯ — ТАКЕНСА

В модели ранней стадии турбулентности, предложенной Рюэлем и Такенсом [1971], предполагается, как и в модели Ландау — Хопфа, что первые четыре бифуркации являются закритическими и что они приводят к инвариантным торам T^k , $k=1, 2, 3, 4$, каждый из которых будет притягивающим с момента своего появления и до следующей бифуркации. Вопросы о существовании этих торов мы коснемся при обсуждении модели Фейгенбаума в § 31.19. Рюэль и Такенс показали, что для T^4 весьма возможно движение по странному аттрактору специального вида, принадлежащему T^4 . Этот аттрактор локально представляет собой декартово произведение двумерного канторова множества и двумерной поверхности.

Теорему Рюэля — Такенса можно перефразировать следующим образом. Рассмотрим банахово пространство \mathbf{V} , каждая точка которого представляет векторное поле на торе T^4 , с нормой, включающей модули компонент векторного поля и их производных порядка не выше 3. Две точки из \mathbf{V} , мало отличающиеся по норме, можно рассматривать как две физические системы, получающиеся одна из другой путем малого возмущения векторного поля. Тогда для любого заданного постоянного поля на T^4 (поля, для которого угловые переменные на торе изменяются линейно со временем) и любого заданного $\epsilon_1 > 0$ существует возмущение этого поля, по норме меньшее, чем ϵ_1 , которое порождает странный аттрактор описанного этими авторами вида. Далее, существует другое число $\epsilon_2 > 0$ (возможно, много меньшее, чем ϵ_1), такое, что странный аттрактор сохра-

няется при наложении любого дополнительного возмущения, не превосходящего по норме ε_2 . Следовательно, векторные поля, порождающие странный аттрактор, нельзя считать редкими исключениями.

В их выборе странного аттрактора есть некоторый произвол; возможны его многочисленные вариации с сохранением сформулированного выше свойства.

В механизме возникновения странного аттрактора, обнаруженного ранее Э. Лоренцом (см. § 31.9—31.17), имеются некоторые отличия. По-видимому, никому еще не удалось построить на конкретном многообразии конкретное векторное поле, которое приводило бы к странному аттрактору в точном соответствии с моделью Рюэля — Такенса. В их статье содержится важное утверждение о том, что движения по странным аттракторам в некотором смысле вероятны или по крайней мере не являются чем-то исключительным, а возможно, даже типичны при некоторых обстоятельствах. В их теореме не утверждается, что существование странного аттрактора — это типичное свойство векторных полей на T^4 (см. приложение к этой главе). Соответствующее множество банахова пространства \mathbf{B} является открытым, но не обязательно замкнутым: оно лишь произвольно близко примыкает к каждой точке пространства \mathbf{B} , которая представляет постоянное векторное поле на T^4 . Теорема Рюэля — Такенса просто утверждает, что если о существовании инвариантного тора T^4 уже известно, то на нем движение по странному аттрактору более вероятно, чем квазипериодическое движение.

31.4. ω -ПРЕДЕЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО ДВИЖЕНИЯ

По аналогии с § 29.7 рассмотрим на конечномерном многообразии M динамическую систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (31.4.1)$$

где $\mathbf{F}(\cdot)$ — гладкое векторное поле на M . Решение $\mathbf{x}(t)$ этого уравнения называется *движением* на M , а множество принадлежащих M точек

$$\gamma = \{\mathbf{x}(t) : \text{все } t\} \quad (31.4.2)$$

называется *траекторией* (или *орбитой*) этого движения. Предположим, что задача с начальными данными для уравнения (31.4.1) корректно поставлена, и для любого \mathbf{x}_0 из M и всех $t \geq 0$ обозначим через $\varphi(\mathbf{x}_0, t)$ решение, которое начинается в точке \mathbf{x}_0 ; таким образом, если $\mathbf{x}(t)$ — какое-либо решение, то

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(\mathbf{x}(0), t). \quad (31.4.3)$$

При фиксированном \mathbf{x} функция $\varphi(\mathbf{x}, t)$ — это движение, тогда как при фиксированном $t \geq 0$ — это взаимно однозначное отобра-

ражение $x \rightarrow \varphi(x, t)$ многообразия M на себя. Функция $\varphi(x, t)$ называется *полупотоком*; она обладает полугрупповым свойством, а именно для неотрицательных t и s

$$\varphi(\varphi(x, t), s) = \varphi(x, t + s). \quad (31.4.4)$$

При $t = 0$ φ совпадает с тождественным отображением: $\varphi(x, 0) \equiv x$. Будем предполагать, что функция $\varphi(x, t)$ непрерывна по x и t .

Точка ξ из M называется ω -предельной точкой движения $x(t)$, если для произвольно больших времен $x(t)$ сколь угодно близко подходит к ξ , т. е. если существует такая последовательность $\{t_n\}_1^\infty$, что

$$\left. \begin{array}{l} t_n \rightarrow \infty \\ |x(t_n) - \xi| \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (31.4.5)$$

Множество всех ω -предельных точек движения называется его ω -предельным множеством и обозначается через Ω_x , где x — начальная точка движения; это множество точек замкнуто. Для любой другой точки y той же самой траектории $\Omega_y = \Omega_x$.

Приведем несколько простейших примеров. Если при $t \rightarrow \infty$ движение стремится к неподвижной точке, то эта точка и будет ω -предельным множеством данного движения. Если движение на плоскости по спирали стремится изнутри к некоторой замкнутой кривой, то эта кривая будет ω -предельным множеством такого движения. Если траектория движения на торе плотно покрывает его, то для каждой точки этой траектории ω -предельным множеством будет полная поверхность тора.

Символ ω относится к будущему времени. Если движение существует при всех t , то, устремляя t к $-\infty$, аналогично определяют α -предельные точки и α -предельные множества.

Если при $t \geq 0$ движение $x(t)$ остается в ограниченной области многообразия M , то его ω -предельное множество Ω непусто и с ростом времени $x(t)$ стремится к Ω , т. е.

$$(\text{расстояние от } x(t) \text{ до } \Omega) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty \quad (31.4.6)$$

(см. книгу Немыцкого и Степанова [1947, гл. 5, § 3]). Однако Ω не всегда будет устойчивым или притягивающим: другие близкие движения могут пройти мимо него и никогда не возвратиться.

Имеется важная связь ω -предельных множеств с вопросом обратимости движения. Решение уравнения (31.4.1) не может быть в общем случае продолжено на все отрицательные t . Например, этого нельзя сделать для решений уравнения $\dot{x} = -x^3$ на \mathbb{R} [за исключением решения $x(t) \equiv 0$] и, вообще говоря, для решений уравнений Навье—Стокса из-за параболического характера последних. Однако для некоторых специальных движений это можно сделать.

Из непрерывности и полугруппового свойства Φ следует, что если в качестве начальной точки $x(0)$ выбрана одна из ω -предельных точек движения $x(t)$, то каждая последующая точка $x(t_0)$ также будет ω -предельной для $x(t)$. Точнее говоря, если движение начинается в своей ω -предельной точке, оно там и остается. Можно доказать, что такие движения могут также быть продолжены бесконечно далеко назад по времени и, следовательно, принадлежат $\Omega_{x(0)}$ при всех t (см. книгу Селла [1971, теорему II. 8]).

Этот последний результат может показаться парадоксальным с точки зрения физических наблюдений или численного моделирования, для которых возможна лишь некоторая конечная точность. Согласно соотношению (31.4.6), для практических целей можно считать, что любое ограниченное движение $x(t)$ по прошествии конечного промежутка времени попадает в свое собственное ω -предельное множество. Отсюда не следует, конечно, что при помощи конечно-разностных методов можно двигаться по такой траектории бесконечно долго в обратном направлении, не удаляясь при этом от $\Omega_{x(0)}$; это означает только, что, если движение каким-то образом построено в прямом направлении для достаточно большого интервала времени и уже не наблюдается его заметного изменения, этот результат можно рассматривать как достаточно точное приближение к такому движению, которое в идеальном смысле принадлежит $\Omega_{x(0)}$ при всех t .

31.5. АТТРАКТОРЫ

Грубо говоря, аттрактор—это такое множество из M , что любое достаточно близкое к нему движение стремится к нему с возрастанием времени. Точнее говоря, мы будем называть связное замкнутое ограниченное множество S из M *аттрактором*, если выполняются следующие условия.

1. S содержится в таком открытом множестве \mathcal{R}_0 , что для любого x из \mathcal{R}_0 движение $\Phi(x, t)$ принадлежит \mathcal{R}_0 при всех $t > 0$.

2. Если \mathcal{R} —любое открытое множество, содержащее S (см. рис. 31.2), то для любого x из \mathcal{R} найдется такое значение времени τ , что $\Phi(x, t)$ будет принадлежать \mathcal{R} при всех $t > \tau$.

3. Для данной области \mathcal{R}_0 множество S является наименьшим из имеющих указанные свойства множеств. Минимальность понимается в том смысле, что если $\mathcal{R}(t)$ —результат преобразования области \mathcal{R}_0 под действием Φ , то при $t \rightarrow \infty$ $\mathcal{R}(t)$ стягивается к S , но не более того, т. е.

$$S = \bigcap_{t \geq 0} \mathcal{R}(t).$$

Для данного аттрактора S наибольшее открытое множество \mathcal{R}_0 , обладающее перечисленными свойствами, называется *областью*

притяжения S . Будем считать S связным, так как если он состоит из двух несвязанных «кусков» S_1 и S_2 , то каждый из них может быть включен в подходящие области \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 и рассматриваться как отдельный аттрактор.

Смейл [1967] сделал дополнительное предположение о том, что должна существовать траектория, плотно покрывающая S . Примером, в котором это условие не выполнено (тогда как другие выполнены), является задача Тейлора о течениях между вращающимися цилиндрами. После первой бифуркации получается замкнутая кривая (в действительности окружность) в фазовом (гильбертовом) пространстве, состоящая из неподвижных точек, и любое близкое

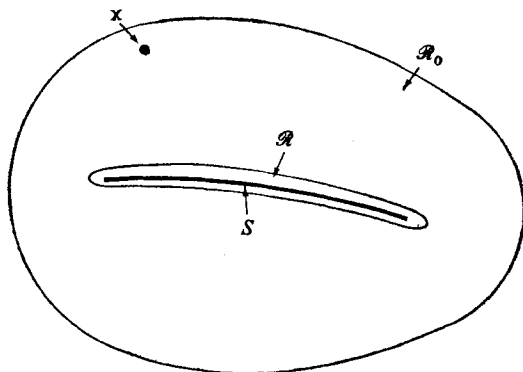


Рис. 31.2.

движение асимптотически стремится к состоянию покоя в одной из этих неподвижных точек. Однако этот пример нетипичен в том смысле, что произвольно малое возмущение (скажем, перемещение всей установки с малой скоростью вдоль оси или в направлении z) может привести эти точки в движение вдоль окружности, так что окружность превратится в траекторию.

ω -предельное множество движения будет аттрактором, если оно притягивает также все другие близкие движения. В более общем случае аттрактор S — это объединение нескольких ω -предельных множеств, а именно ω -предельных множеств всех движений, которые начинаются в \mathcal{R} . В частности, S может содержать неподвижные точки и замкнутые траектории, которые, конечно, являются своими собственными ω -предельными множествами.

Притягивающие неподвижные точки, притягивающие замкнутые траектории и притягивающие инвариантные торы различных размерностей представляют собой примеры аттракторов. Другие аттракторы часто имеют более сложную геометрическую структуру, содержащую, например, канторовы множества. Странным называется такой аттрактор, на котором движения неустойчивы в смысле Ляпу-

нова и, следовательно, характеризуются непрерывным энергетическим спектром, как это объясняется в остальной части данной главы.

31.6. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР ДЛЯ ДВИЖЕНИЙ В \mathbb{R}^n

Основы теории энергетического спектра обсуждались в § 4.6 тома 1. Там это делалось для непрерывной функции $f(t)$, которая осциллирует более или менее иррегулярно при всех t от $-\infty$ до $+\infty$. Такая функция не может быть представлена ни с помощью классического ряда Фурье, поскольку она не является периодической, ни с помощью классического интеграла Фурье, так как она не принадлежит L^2 . Но она является распределением медленного роста и, следовательно, имеет преобразование Фурье в смысле теории распределений. Энергетический спектр — это функция $S(\omega)$, которая описывает распределение энергии, связанной с $f(t)$, через частоты компонент Фурье без учета их фаз. А именно $S(\omega) —$ неубывающая вещественная функция и $S(\omega_2) — S(\omega_1) —$ это энергия, заключенная в компонентах Фурье с частотами из интервала (ω_1, ω_2) .

Мы кратко сформулируем здесь результаты применительно к (вместо $f(t)$) векторнозначной функции $x(t)$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$.

Для $x(t)$ автоковариационная функция определяется как

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} [1/(2T)] \int_{-T}^T \overline{x(t+\tau)} \cdot x(t) dt, \quad (31.6.1)$$

а энергетический спектр как

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) [(e^{i\omega\tau} - 1)/(2\pi i\tau)] d\tau. \quad (31.6.2)$$

Пояснения

1. Мы молчаливо предполагаем, что все компоненты вектора $x(t)$ эквивалентны в смысле их вклада в энергию движения. Обобщение получается путем замены скалярного произведения в (31.6.1) на

$$x(t+\tau) \cdot Bx(t), \quad (31.6.3)$$

где B — положительно определенная матрица, вводимая из физических соображений таким образом, чтобы выражение (31.6.3) представляло энергию.

2. Если спектр «непрерывен», т. е. функция $S(\omega)$ абсолютно непрерывна, что имеет место тогда, когда $R(\tau)$ достаточно быстро стремится к нулю при $\tau \rightarrow +\infty$, то спектральная плотность

получается как обычное преобразование Фурье:

$$S'(\omega) = [1/(2\pi)] \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (31.6.4)$$

В численных расчетах $R(\cdot)$ задается только для некоторых дискретных значений τ , а $S(\cdot)$ или $S'(\cdot)$ получаются только для некоторых дискретных значений ω . В этом случае $S'(\cdot)$ обычно получается из $R(\cdot)$ при помощи алгоритма быстрого преобразования Фурье, и, если спектр содержит линии, они выглядят не как вклады вида δ -функции в $S'(\cdot)$, а как отдельные значения $S'(\cdot)$, которые много больше окружающих значений.

3. Если $x(t)$ получается из эксперимента или путем численного моделирования, то в (31.6.1) нельзя совершить предельный переход и вместо этого следует положить

$$R(\tau) \approx [1/(b-a)] \int_a^b \overline{x(t+\tau)} \cdot x(t) dt, \quad (31.6.5)$$

где (a, b) — некоторый большой интервал. Как было указано в конце § 31.4, хотя функция $x(t)$ и рассматривается как некоторое приближение к движению на его собственном ω -предельном множестве и тем самым как определенная для всех t , на практике она известна только при $t \geq 0$; поэтому в представлении (31.6.5) мы имеем $0 < a < b$. К тому же это представление будет хорошим приближением, если все быстрые переходы произошли гораздо раньше момента времени $t = a$.

По поводу дальнейших подробностей и примеров см. § 4.6 тома 1.

31.7. ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И АПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ

Квазипериодические движения, предсказываемые согласно модели Ландау — Хопфа, являются частным случаем почти периодических движений и, следовательно, имеют чисто линейчатый спектр.

Если периодическая функция g из (31.1.1) с m периодами разложена в m -кратный ряд Фурье, т. е.

$$g(z_1, \dots, z_m) = \sum_{-\infty}^{\infty} c(k_1, \dots, k_m) e^{i(k_1 z_1 + \dots + k_m z_m)}, \quad (31.7.1)$$

то после надлежащей перенумерации слагаемых квазипериодическая функция $f(t)$, заданная в виде (31.1.1), может быть представлена как

$$f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e^{i\tilde{\omega}_j t}, \quad (31.7.2)$$

где каждое $\tilde{\omega}_j$ является линейной комбинацией $\omega_1, \dots, \omega_m$ с целочисленными коэффициентами.

Если бы нашлось такое значение $\tau > 0$, для которого все величины $\omega_k \tau$ ($k=1, \dots, m$) одновременно будут целыми кратными числа 2π , то функция $f(t+\tau)$ тождественно равнялась бы $f(t)$ и $f(\cdot)$ была бы периодической. Так как ω_k несоизмеримы, такого τ не существует. Однако можно показать, что τ можно выбрать так, чтобы разность $f(t+\tau) - f(t)$ стала произвольно малой. Более того, для данного $\varepsilon > 0$ найдется такое $T = T(\varepsilon) > 0$, что в каждом интервале по t длины T будет содержаться по крайней мере одно такое τ , для которого

$$|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon \quad \text{при всех } t.$$

Любая непрерывная функция, обладающая этим последним свойством, называется *почти периодической* по Бору и может быть разложена в ряд вида (31.7.2), который при этом сходится по определенной L^2 -норме (см. книгу Рисса и Секефальви-Надя [1953, гл. 4]). Квазипериодическая функция, как мы ее определили, является почти периодической функцией, для которой только конечное число частот будут линейно независимыми над полем рациональных чисел.

Векторнозначная почти периодическая функция $x(t)$ определяется аналогично.

Как было показано в § 4.6 тома 1, почти периодическая функция имеет чисто линейчатый энергетический спектр. Следовательно, при переходе к турбулентности согласно модели Ландау — Хопфа энергетический спектр остается чисто линейчатым после лобого конечного числа бифуркаций, хотя число линий в данном частотном интервале может заметно увеличиваться с ростом числа Рейнольдса.

Как мы увидим, модель Рюэля — Такенса предсказывает появление непрерывного спектра после сравнительно небольшого числа бифуркаций.

Почти периодический характер движения в модели Ландау — Хопфа кажется неправдоподобным с интуитивной точки зрения. Если движение в каком-то смысле случайно, оно не должно «запоминать» свое прошлое поведение настолько точно, чтобы воспроизводить это поведение с любой желаемой степенью точности в сколь угодно далекие времена в будущем, как это имеет место для почти периодического движения. Это можно выразить также в терминах автоковариационной функции $R(\tau)$, поскольку $R(\tau)/R(0)$ — автокорреляция, т. е. корреляция функций $f(t)$ и $f(t+\tau)$. Теорема о почти периодических функциях гласит, что свертка двух таких функций в смысле (31.6.1) также будет почти периодической (см. книгу Рисса и Секефальви-Надя). Следовательно, $R(\tau)$ будет почти периодической, если такова $f(t)$, и коэффициент корреляции $f(t)$ и $f(t+\tau)$ будет произвольно близко приближаться к 1.0 повторно для определенных произвольно больших значений τ .

Напротив, для типичного движения по странному аттрактору $R(\tau)$ быстро убывает к нулю при $\tau \rightarrow \pm \infty$; тогда энергетический спектр оказывается чисто непрерывным и получается с помощью (31.6.4). Случай такого аттрактора Лоренца рассматривается в § 31.11.

31.8. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ

Движение $x(t)$ [решение уравнения (31.4.1)] *устойчиво в смысле Ляпунова*, если любое другое движение $\tilde{x}(t)$ [другое решение уравнения (31.4.1)], которое достаточно близко к нему в начальный момент, остается близким и в дальнейшем, точнее, если для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, что

$$\text{если } |\tilde{x}(0) - x(0)| < \delta, \text{ то } |\tilde{x}(t) - x(t)| < \epsilon \\ \text{при всех } t > 0.$$

Если движение неустойчиво в этом смысле, то найдется такое (не обязательно очень малое) положительное ϵ , что при любой малости δ будет существовать возмущение, по модулю меньшее δ вначале и большее ϵ в некоторый более поздний момент времени. Одна из причин появления излагаемой ниже работы Лоренца состояла в том, чтобы показать, что некоторый простой прототип атмосферного движения является неустойчивым по Ляпунову, а это имеет очевидное отношение к задаче о прогнозе погоды.

31.9. СИСТЕМА ЛОРЕНЦА. БИФУРКАЦИИ

Первый странный аттрактор в задаче, имеющей отношение к гидродинамике, был обнаружен Э. Лоренцом в 1963 г. Лоренц разложил уравнения Бенара, описывающие тепловую конвекцию в подогреваемом снизу горизонтальном слое жидкости, в тройные ряды Фурье относительно пространственных переменных, а затем оставил в получившейся системе обыкновенных дифференциальных уравнений, характеризующих зависимость коэффициентов Фурье от времени, только три уравнения. Если коэффициенты Фурье в этих уравнениях обозначить через $X(t)$, $Y(t)$ и $Z(t)$, то уравнения запишутся в виде

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y, \\ \dot{Y} &= rX - Y - XZ, \\ \dot{Z} &= -bZ + XY, \end{aligned} \quad (31.9.1)$$

или короче в виде

$$\dot{X} = F(X). \quad (31.9.2)$$

Постоянные σ , r и b безразмерны; для физической системы, рассматривавшейся Лоренцом, они имели значения

$$\sigma = 10, \quad b = 8/3, \quad 0 < r < \infty; \quad (31.9.3)$$

параметр r пропорционален числу Релея и является мерой интенсивности подогрева.

Лоренц хотел получить общее представление о характере неустойчивости, заложенной в основе атмосферных явлений, и не стремился к тому, чтобы указанная выше система была реальной моделью атмосферы или тепловой конвекции. Позднее Карри [1978] изучал более реальное приближение для уравнений конвекции Бенара, оставив в системе четырнадцать уравнений вместо трех. У него получилась более сложная последовательность бифуркаций при увеличении числа Релея r , но и тогда странный аттрактор еще имел место для определенных значений r .

Лоренц показал, что существует такая зависящая от σ , r и b постоянная R , что решение $\mathbf{X}(t)$ системы (31.9.1) в конце концов навсегда попадает в шар

$$X^2 + Y^2 + Z^2 < R^2. \quad (31.9.4)$$

Далее, из (31.9.1) следует, что дивергенция векторного поля $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ имеет постоянное значение:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -(\sigma + b + 1) = -13^{2/3}, \quad (31.9.5)$$

так что объем области, переносимой вдоль по потоку (31.9.1) в \mathbb{R}^3 , уменьшается со временем как $\exp(-13.67 t)$. Поэтому в шаре (31.9.4) имеется хотя бы один аттрактор и каждый такой аттрактор занимает в \mathbb{R}^3 нулевой объем.

Система (31.9.1) имеет следующие неподвижные точки, или стационарные решения.

1. При любом t начало координат $X=Y=Z=0$ будет неподвижной точкой. При $0 < r < 1$ она устойчива (и фактически является притягивающей). При $r > 1$ она неустойчива: линеаризованная задача имеет одно положительное и два отрицательных собственных значения. Имеются одномерное неустойчивое многообразие с горизонтально направленным касательным вектором в нуле (он параллелен плоскости $Z=0$) и двумерное устойчивое многообразие с расположенной вертикально касательной плоскостью.

2. При любом $r > 1$ имеются две дополнительные неподвижные точки

$$\begin{aligned} P_1: X=Y &= -\sqrt{b(r-1)}, \quad Z=r-1, \\ P_2: X=Y &= \sqrt{b(r-1)}, \quad Z=r-1. \end{aligned} \quad (31.9.6)$$

Следовательно, при $r=1$ происходит первая бифуркация описанного в § 29.9 типа.

Чтобы ответить на вопрос об устойчивости новых неподвижных точек, положим $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1$, где \mathbf{X}_0 — одна из точек (31.9.6),

и проведем линеаризацию относительно X_1 , после чего получим

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{Y}_1 \\ \dot{Z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - Z_0 & -1 & -X_0 \\ Y_0 & X_0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}. \quad (31.9.7)$$

Если подставить сюда X_0 , Y_0 и Z_0 из (31.9.6), то матрица этой системы примет вид

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix};$$

она имеет одно вещественное отрицательное и два комплексно сопряженных собственных значения. Комплексные собственные значения будут находиться в левой полуплоскости (и тем самым новые неподвижные точки будут устойчивыми), если $r < r_0$, где

$$r_0 = \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1) = 24.74. \quad (31.9.8)$$

Следовательно, при $r = r_0$ имеет место вторая бифуркация, а ее тип совпадает с описанным в § 29.10, так что она приводит к периодическим решениям. Однако, как показывают вычисления Марсдена и Мак-Кракена [1976], эта бифуркация является докритической. Следовательно, периодические решения имеются только при $r < r_0$ и неустойчивы, а при $r > r_0$ следует ожидать взрывного перехода к чему-то иному. Как мы увидим ниже, оказывается, что переход на самом деле не будет «взрывным» благодаря наличию другого аттрактора (в действительности странного аттрактора) в близкой окрестности в \mathbb{R}^3 (см. § 31.17).

При $r > r_0$ с каждой из точек P_1 и P_2 связаны одномерное устойчивое и двумерное неустойчивое многообразия. На последнем решения раскручиваются по спирали из неподвижной точки. Близкие решения также раскручиваются по спирали и в то же самое время быстро движутся к неустойчивому многообразию благодаря тому, что с устойчивым многообразием связано большее по модулю отрицательное собственное значение.

31.10. АТТРАКТОР ЛОРЕНЦА. ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ

Чтобы исследовать поведение системы после второй бифуркации при $r = r_0 = 24.74$, Лоренц численно нашел решения системы (31.9.1) при $r = 28$. Он установил, что после прохождения участков относительно быстрого изменения траектории оказываются лежащими, насколько это позволяют утверждать расчеты, на ветвящейся поверхности L_0 , схематически изображенной на рис. 31.3а, где указаны также и направления движения. Грубо говоря, эта поверхность

имеет сердцевидную форму и расположена очень близко к вертикальной плоскости $X=Y$, содержащей неподвижные точки P_1 и P_2 , определенные в (31.9.6). Она симметрична по отношению к отражению относительно оси Z и имеет два отверстия — по одному вокруг каждой из неподвижных точек P_1 и P_2 . Ниже линии ветвления BB , которая соединяет эти два отверстия и проходит несколько ниже горизонтали P_1P_2 , поверхность представляет собой сплошной лист. Над ним расположены два листа: один чуть левее и сзади, другой чуть правее и спереди. Они соединяются по средней части линии ветвления BB , изображенной жирной прямой.

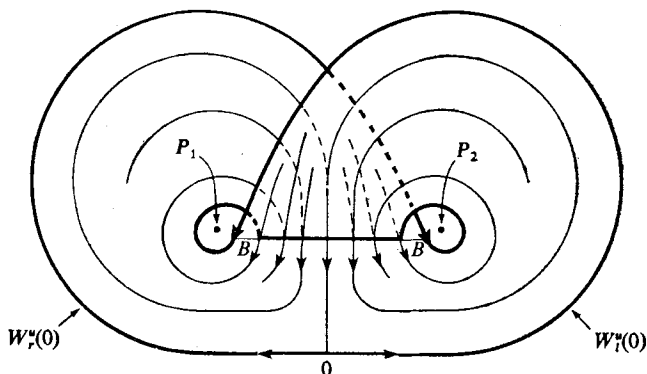


Рис. 31.3а. Ветвящаяся поверхность.

Поверхность L_0 ограничена частью относящегося к нулю неустойчивого многообразия, которая состоит из двух траекторий W_1^+ и W_2^+ , выходящих из нуля в противоположных направлениях. Эти траектории в дальнейшем уходят внутрь поверхности L_0 , но перед этим они обойдут указанные отверстия и затем пересекут линию ветвления BB в концах ее средней части. Неподвижные точки P_1 и P_2 находятся в отверстиях, и если бы поверхность L_0 закрыла отверстия, то траектории раскручивались бы по спирали на их месте; на рисунке тем не менее видно, что вошедшая в L_0 траектория уже никогда не выйдет на отверстия.

Каждая траектория пересекает линию ветвления BB сверху вниз; после пересечения BB в центральной точке она асимптотически стремится к состоянию покоя в нуле; в противном случае она обходит одно из отверстий и снова пересекает BB и т. д. Мы определим отображение Пуанкаре $s \rightarrow \psi_0(s)$ отрезка BB следующим образом. Пусть s — параметр вдоль BB (например, длина дуги), причем для центральной точки $s=0$. Если траектория пересекает BB при $s=s_1 \neq 0$, то в следующий раз она пересечет BB при $s=\psi_0(s_1)$; значение $\psi_0(0)$ не определено. Рис. 31.3б схематически поясняет это определение. Путем численного построения траекторий можно прове-

речь, что такое отображение обладает свойством, названным Вильямсом [1977] «несохранением близости»¹⁾ и состоящим в следующем: если I — любой интервал $s_0 < s < s_0 + \varepsilon$ (он может быть сколь угодно малым), то n -кратное отображение I при некотором n будет совпадать с BB . Иначе говоря, независимо от того, насколько близко две траектории на L_0 одна к другой вначале, с течением времени они в конце концов станут вполне разделенными. В этом можно убедиться, например показав, что при подходящем выборе параметра s для всех s справедлива оценка $\psi'_0(s) \geq \text{const} > 1$.

Траектория, которая пересекает линию ветвления BB слева от ее центра, обходит точку P_1 по часовой стрелке, перед тем как

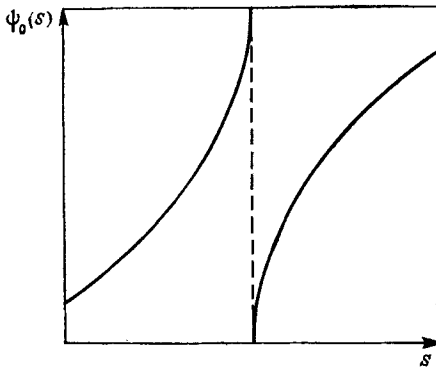


Рис. 31.36. Отображение Пуанкаре.

вернуться к BB , а если пересечение было справа от центра, траектория обойдет против часовой стрелки точку P_2 . Число обходов траекторией одной из точек P_1 или P_2 , перед тем как перейти к другой, зависит от того, как быстро она раскручивается по спирали относительно этой точки, а также от критического пути или от того, как далеко от центра она впервые пересекла BB после прихода с другой стороны. Сущность открытия Лоренца состоит в том, что последовательные числа оборотов относительно этих точек изменяются псевдослучайным образом, так что движение является аperiodическим.

Как отметил сам Лоренц, картина, основанная на ветвящейся поверхности L_0 , не может быть точной, потому что две траектории, пересекающие линию ветвления BB в одной и той же точке, должны были бы после этого полностью совпасть, что противоречит однозначной обратимости траекторий. Следовательно, два листа поверхности не могут сливаться в один лист, а должны оставаться разведенными на очень небольшое расстояние. После того как траектории сделают еще по одному обороту, два листа превратятся в четыре и т. д. Отсюда следует, что аттрактор должен состоять из бесконечного множества листов, возможно как-то связанных вместе в единую структуру в R^3 , которая называется *аттрактором Лоренца* и обозначается через L . Однако, по крайней мере для значений параметров, исследованных Лоренцом ($\sigma=10$, $b=8/3$, $r=28$), приведенная выше детализация структуры в действительности является вполне

¹⁾ В оригинале locally eventually onto. — Прим. перев.

исчерпывающей: разделение листов оказывается настолько незначительным, что с точностью примерно до четырех десятичных знаков ветвящаяся поверхность L_0 вместе с движениями на ней, как они были схематически изображены, полностью описывает аттрактор.

31.11. АТТРАКТОР ЛОРЕНЦА. АПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ

Лоренц заметил, что случайность движения можно оценивать, рассматривая последовательные максимумы Z_n , $n = 1, 2, \dots$, координаты $Z(t)$ полученной численно траектории. [Из третьего уравнения системы (31.9.1) видно, что эти максимумы имеют место

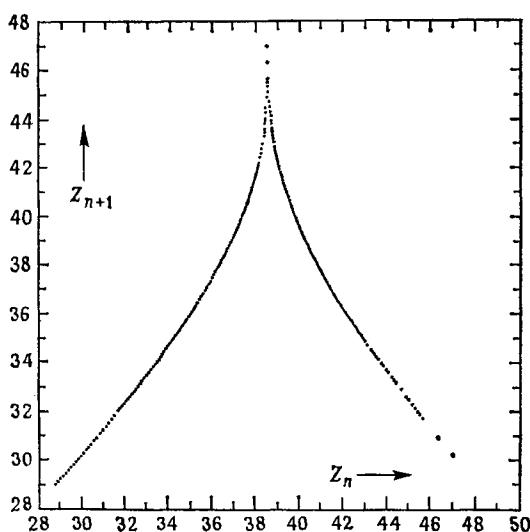


Рис. 31.4. График Лоренца.

при пересечениях траектории с гиперboloидом, заданным уравнением $Z = (1/b)XY$.] Лоренц установил, что точки (Z_n, Z_{n+1}) образуют представленную на рис. 31.4 кривую $Z_{n+1} = f(Z_n)$, которая является гладкой всюду, за исключением центральной точки возврата.

Как отметил Лоренц, Z_{n+1} не может быть в точности однозначной функцией от Z_n , так как ее значение, вообще говоря, зависит также от значений $X(t)$ и $Y(t)$, взятых в тот момент, когда $Z(t) = Z_n$. Следовательно, график Лоренца должен быть слегка размытым и иметь некоторую поперечную структуру, хотя возможно, и в очень узких пределах. Эта структура отражает тонкую структуру аттрактора L , и ее можно начать раз-

личать, если отклонения точек графика от гладкой кривой увеличить примерно в тысячу раз (см. работу Рихтмайера [1981]).

Если пренебречь тонкой структурой графика Лоренца, то последовательность $\{Z_n\}_0^\infty$ максимумов координаты $Z(t)$ можно рассматривать как полученную из некоторого начального значения Z_0 путем последовательного применения отображения $f: Z \rightarrow f(Z)$, так что $Z_{n+1} = f(Z_n)$.

Чтобы изучить итерации отображения статистически, рассмотрим задачу перехода от Z к новой переменной W при помощи уравнений

$$Z = \zeta(W), \quad W = \zeta^{-1}(Z) \quad (31.11.1)$$

и постараемся по возможности упростить вид нового отображения $g: W \rightarrow g(W)$. В частности, мы хотим выбрать переход (31.11.1) так, чтобы функция $g(W)$ была «треугольной», т. е.

$$g(W) = \begin{cases} 2W, & \text{если } 0 \leq W \leq 1/2, \\ 2-2W, & \text{если } 1/2 \leq W \leq 1. \end{cases} \quad (31.11.2)$$

Лоренц рассматривал отображение g , основанное на этой функции, как некоторую модель для отображения f , получающегося в его вычислениях, чтобы качественно предсказать статистические свойства движения. Покажем, как

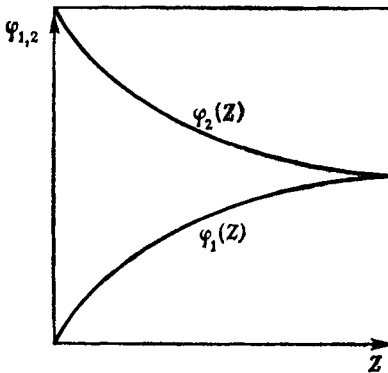


Рис. 31.5.

при определенных предположениях относительно функции $f(Z)$ можно построить преобразование (31.11.1) численно. Во-первых, предположим, что координата Z преобразована линейно таким образом, что наименьшее и наибольшее значения Z_n стали равными 0 и 1. Тогда функция $f(Z)$ будет отображать интервал $[0, 1]$ на себя. Предположим, что $f(0) = f(1) = 0$. [На самом деле $f(0) \approx 0.0035$, но мы будем пренебрегать этой разностью, поскольку она одного порядка с тонкой структурой графика

Лоренца.] Будем также предполагать, что $f(Z)$ дифференцируема всюду, за исключением точки возврата, и что при всех Z $|f'(Z)|$ больше некоторой постоянной $\alpha > 1$. Тогда можно показать (см. работу Руссмана и Зендера [1980] или Рихтмайера [1981]), что существует единственная непрерывная возрастающая функция $\zeta(W)$, которая переводит отображение $Z \rightarrow f(Z)$ в отображение $W \rightarrow g(W)$.

Чтобы получить значения $\zeta(W)$, введем функции $\varphi_1(Z)$ и $\varphi_2(Z)$, обратные для восходящей и нисходящей частей $f(Z)$, как показано на рис. 31.5. Тогда из (31.11.2) видно, что функция $\zeta(W)$ должна удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned}\zeta(W) &= \varphi_1(\zeta(2W)), & \text{если } 0 \leq W \leq 1/2, \\ \zeta(W) &= \varphi_2(\zeta(2-2W)), & \text{если } 1/2 \leq W \leq 1.\end{aligned}$$

Из этих уравнений $\zeta(W)$ последовательно вычисляется для двоичных значений W , взятых в таком порядке: $W = 0, 1, 1/2, 1/4, 3/4, 1/8, \dots$, начиная с $\zeta(0) = 0$ и $\zeta(1) = 1$, а затем это делается для других значений на основании условия непрерывности. Полученный результат представлен на рис. 31.6а, а на рис. 31.6б представлен результат применения преобразования $\zeta(W)$ к графику Лоренца.

Функция $\zeta(W)$ является непрерывной по Гёльдеру, причем показатель Гёльдера равен $\log_2 \alpha$, где α — наимышая оценка снизу для $|f'(Z)|$, но она не будет абсолютно непрерывной; следовательно, то, что верно для отображения $g: W \rightarrow g(W)$ при почти всех W , не обязательно верно для отображения $f: Z \rightarrow f(Z)$ при почти всех Z .

Следствием непрерывности функции $\zeta(W)$ (для этого не требуется абсолютной непрерывности) будет то, что отображение f не сохраняет близости (так назвал это свойство Вильямс — см. § 31.10): если I — любой интервал $a < Z < a + \varepsilon$, то после некоторого конечного числа итераций n множество $f^n(I)$ полностью покроеет $[0, 1]$. Ясно, что f будет обладать этим свойством тогда и только тогда, когда g также обладает им, но для g оно почти очевидно. В самом деле, длина любого интервала I на оси W удваивается под действием g , если $g(I)$ не содержит точку $W = 1/2$, а в этом последнем случае длина по крайней мере не уменьшается. Следовательно, после каждой пары итераций длина по меньшей мере удваивается, пока для некоторого I оба множества $g(I)$ и $g(g(I))$ не будут содержать точку $W = 1/2$, а в этом последнем случае $g(g(I))$ полностью покроеет интервал $[1/2, 1]$, так что $g(g(g(I)))$ покроеет $[0, 1]$.

Отсюда следует, что итерации отображения f неустойчивы в смысле Ляпунова, так как независимо от того, насколько две точки были близки друг к другу вначале, они будут в конце концов отстоять одна от другой на конечное расстояние (например, по меньшей мере на $1/2$). Следовательно, если мы можем пренебречь тонкой структурой графика Лоренца, то движение на аттракторе Лоренца также станет неустойчивым по Ляпунову и тем самым будет иметь чисто непрерывный энергетический спектр.

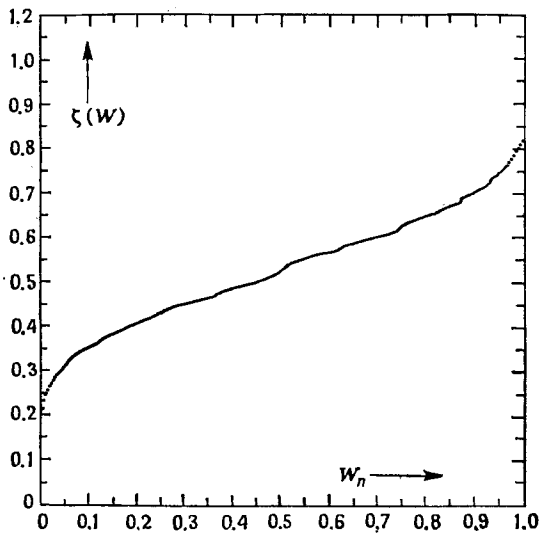
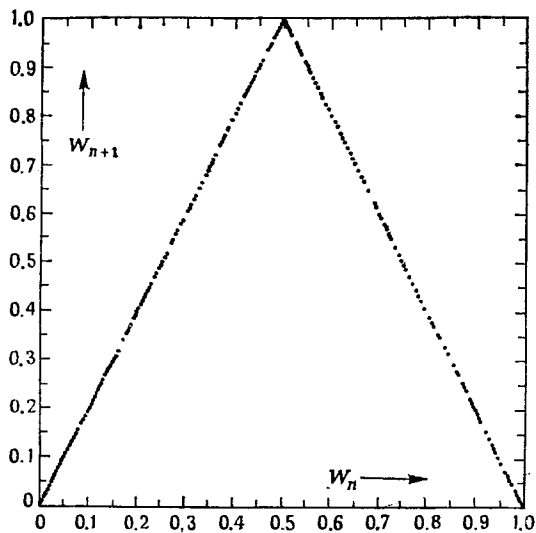


Рис. 31.6а.

Рис. 31.6б, График Лоренца для переменной W .

31.12. СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ f и g

Статистические свойства этих отображений несколько различны; первым рассмотрим отображение g . Чтобы воспользоваться специфическими свойствами функции $g(W)$, определенной в (31.11.2), представим W в двоичном виде как $W=0.a_0a_1a_2\dots$, где каждое a_i равно 0 или 1. Тогда для $g(W)$ будем иметь просто

$$g(0.a_0a_1a_2\dots) = \begin{cases} 0.a_1\bar{a}_2\dots, & \text{если } a_0=0, \\ 0.\bar{a}_1a_2\dots, & \text{если } a_0=1, \end{cases}$$

где черта сверху обозначает дополнение, т. е. замену 0 на 1 и 1 на 0. Теперь предположим, что начальный элемент W_0 последовательности $\{W_n\}_{n=0}^\infty$, получающейся путем итерирования g , выбран случайным образом исходя из равномерного распределения на интервале $[0, 1]$. Тогда каждая двоичная цифра элемента W_0 может с одинаковой вероятностью быть равной 0 или 1 независимо от значений других цифр и, более того, W_n будет меньше $1/2$ или не меньше $1/2$ в зависимости от значения n -й цифры элемента W_0 . Отсюда следует, что каждый элемент W_n может с одинаковой вероятностью быть меньше $1/2$ или не меньше $1/2$, и поэтому не существует корреляции между близкими членами последовательности.

Чтобы установить соответствующие свойства отображения f , путем итерирования f была численно сгенерирована последовательность $\{Z_n\}$ длиной в 200 000 элементов (см. работу Рихтмайера [1981]). Для анализа результата на ее элементах была определена функция

$$s_n = \begin{cases} -1, & \text{если } Z_n < 1/2, \\ +1, & \text{если } Z_n \geq 1/2. \end{cases}$$

Среднее значение s_n оказалось равным -0.1416 (около 64 стандартных отклонений), а значимые положительные корреляции были обнаружены между s_n и s_{n+1} , s_{n+2} и s_{n+3} . Корреляции между s_n и s_{n+k} при $k \geq 4$ уже не были значимыми по отношению к размеру взятой выборки.

Разница между свойствами отображений f и g отражает отсутствие абсолютной непрерывности у функции $\zeta(W)$, которая связывает Z и W . Ясно, что $W < 1/2$ тогда и только тогда, когда $Z = \zeta(W) < 1/2$ (потому что изображенный на рис. 31.4 график Лоренца симметричен с высокой степенью точности), но поведение функции $g(W)$ при почти всех W не является таким же, как поведение функции $f(Z)$ при почти всех Z . На интервале $[0, 1]$ найдется некоторое множество меры нуль, которое под действием ζ преобразуется в множество положительной меры (в действительности равной 1), и аналогичные множества имеются для ζ^{-1} . Тем не менее оба ото-

бражения имеют аналогичное поведение; следовательно, качественные статистические свойства системы Лоренца могут быть получены при помощи изучения f , как это и сделал Лоренц.

31.13. АТТРАКТОР ЛОРЕНЦА. ДЕТАЛИ СТРУКТУРЫ. I

Согласно § 31.10, аттрактор Лоренца L содержит бесконечно много листов (фактически несчетное множество), лежащих вблизи идеализированной ветвящейся поверхности L_0 и как-то связанных вместе, в результате чего образуется некоторая многолистная структура в \mathbb{R}^3 . Структура аттрактора L была исследована Вильямсом [1977], и мы приведем его основные результаты, изложив их на некотором интуитивном геометрическом уровне без учета определенных топологических трудностей, таких, которые возникают из-за наличия бесконечно многих вершин у клеточного комплекса F в ограниченной области полосы S (см. ниже).

Конечно, аттрактор полностью определяется дифференциальными уравнениями (31.9.1). Однако до сих пор неизвестен метод для его точного определения, исходящий из этих уравнений, и даже метод для определения его общих топологических свойств. Более того, эти уравнения являются несколько специфическими и искусственными; следовательно, представляются более интересными общие разновидности аттрактора, которые определяются уравнениями, в общем аналогичными уравнениям (31.9.1). Целью работы Вильямса было найти все аттракторы, которые связаны с ветвящимся многообразием L_0 описанного выше вида точно так же, как и аттрактор L . Он назвал их *аттракторами Лоренца* в общем.

Вильямс использовал абстрактную топологическую конструкцию, называемую обратным пределом. Топологические свойства получившегося аттрактора и поток на нем полностью определяются заданным на L_0 полупотоком, а на самом деле так называемыми последовательностями обходов ¹⁾ для траекторий W^u и W^s . Вильямс показал, что существует несчетное множество таких различных аттракторов (различных в топологическом смысле).

Обнаруженные Вильямсом аттракторы могут быть вложены в \mathbb{R}^3 , но вопрос о том, какой из них будет определяться системой дифференциальных уравнений типа (31.9.1), остается открытым.

Чтобы исследовать структуру аттрактора, следуя Вильямсу, рассмотрим кусок поверхности и затем продолжим его, двигаясь по лежащим на нем траекториям как вперед, так и назад по времени. Если траектория обходит точку P_1 , то она движется к листу многообразия L , расположенному позади того, который был перед этим (с точки зрения наблюдателя, смотрящего на рис. 31.3а), а если она обходит P_2 , то движется к листу, расположенному спере-

¹⁾ В оригинале kneading sequences. — Прим. перев.

ди. Если она сначала обходит одну, а затем другую точку, то уже нельзя сказать определенно, впереди или сзади от начальной точки она будет после этого; она даже может вернуться в свою начальную точку, и тогда мы получили бы периодическую траекторию. Один из результатов Вильямса состоит в том, что периодические траектории плотны на L .

Роль неустойчивого многообразия $W^u(0)$ заключается в следующем. Как было указано в § 31.10, оно состоит из двух траекторий, которые выходят из нуля горизонтально в двух противоположных направлениях, образуя границу поверхности L_0 и затем уходя внутрь нее. Формально возможен тот случай, когда одна из них или обе они могут в конце концов пройти точно через центр линии BB и затем асимптотически устремиться к состоянию покоя в нуле. Мы отбросим эту возможность как маловероятную и предположим, что они будут бесконечно долго вращаться на L_0 . Следуя Вильямсу, обозначим через $W_1^u(0)$ траекторию, которая выходит из нуля вправо и, следовательно, впервые пересекает линию BB в ее левом конце, а через $W_2^u(0)$ — траекторию, которая выходит из нуля влево и, следовательно, впервые пересекает линию BB в ее правом конце. Определим так называемую *последовательность обходов* для этих траекторий как $z_1 z_2 z_3 \dots$, где z_k равно 1 или 2 в соответствии с тем, вокруг какой из точек, P_1 или P_2 , происходит k -й виток траектории. Ниже будет предполагаться, что эти последовательности начинаются как 2111... и 1222... соответственно для $W_1^u(0)$ и $W_2^u(0)$, и будет показано, что они полностью определяют топологию аттрактора L .

Чтобы осуществить намеченное, нам придется сделать следующие предположения [считая их, таким образом, следствиями дифференциальных уравнений (31.9.1) — численные расчеты вполне подтверждают большинство из них].

1. Ветвящаяся поверхность L_0 и полупоток на ней являются такими, как описано в § 31.10. [Мы говорим «полупоток», а не «поток» потому, что из-за ветвления траектория $x(t)$ на L_0 в противоположность траектории на L не может быть однозначно определена при $t < 0$, исходя из $x(0)$.]

2. Отображение Пуанкаре ψ_0 линии BB не сохраняет близости.

3. Существует непрерывное отображение (проекция) p многообразия L на L_0 , которое переводит траектории на L в траектории на L_0 : если $x(t)$ — движение на L , то $p(x(t))$ — движение на L_0 .

4. Каждое движение на L_0 получается как результат действия p на единственное движение на L . (Представляется затруднительным получить убедительное подтверждение этого предположения численным путем.) Более того, движение на L непрерывно зависит от движения на L_0 : если траектории $x_0(t)$ и $x'_0(t)$ близки друг к другу на L_0 в течение длительного интервала времени ($-T, T$), то они

будут проекциями траекторий $x(t)$ и $x'(t)$, близких друг к другу в пространстве (т. е. на L) в течение длительного интервала времени.

5. Последовательности обходов для $W_t^u(0)$ и $W_t^s(0)$ начинаются как 2111... и 1222... соответственно. Это означает, что траектория $W_t^u(0)$ после своего первоначального обхода точки P_2 затем обойдет P_1 по крайней мере три раза (для системы Лоренца она делает это 25 раз) перед тем, как она снова начнет обход точки P_2 ; аналогичное утверждение справедливо и для $W_t^s(0)$.

Чтобы двигаться по траекториям собственно в трехмерном пространстве, заменим линию ветвления BB полосой S , поперечной к L_0 и пересекающей L_0 по BB . Оказывается удобным оття-

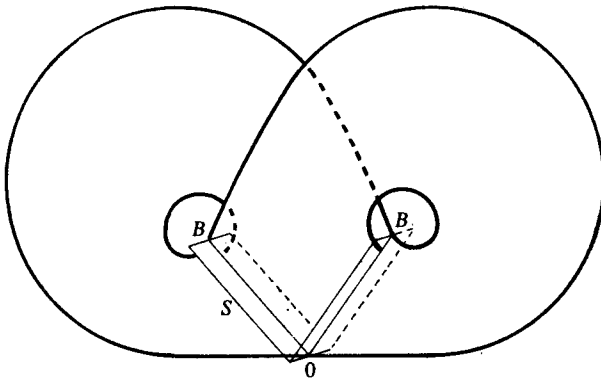


Рис. 31.7. Полоса S .

нуть как S , так и BB вниз настолько, чтобы они прошли через нуль, как показано на рис. 31.7. Мы приведем детальное описание пересечения $S \cap L \stackrel{\text{def}}{=} F$ полосы S и аттрактора L . Множество F будет описано в форме так называемого клеточного комплекса, состоящего из точек, называемых вершинами, и кривых, которые называются «звеньями»¹⁾ и каждая из которых связывает некоторую пару вершин. Мы установим, что вершины — это нуль и точки пересечения многообразия $W^u(0)$ с полосой S , а звенья — это пересечения составляющих аттрактор L листов с полосой S . Множество F состоит из нуля и двух частей, лежащих по разные стороны от линии, пересекающей полосу S в нуле. Эта линия принадлежит относящемуся к нулю устойчивому многообразию и служит для того, чтобы отделить траектории, которые будут в очередной раз обходить P_1 , от траекторий, которые будут в очередной раз обходить P_2 .

¹⁾ В оригинале 1-cells.— Прим. перев.

Мы увидим, что $W^u(0)$ на всей своей протяженности является границей бесконечно многих листов аттрактора L , которые скреплены вместе этой границей, образующей, по выражению Вильямса, «корешок канторовой книги» (см. рис. 31.9 в § 31.16). Линия, трансверсальная к L_0 точно внутри границы, пересекается с этими листами в канторовом множестве точек, как это будет объяснено ниже.

Обозначим через l_1, l_2, \dots последовательные пересечения траектории $W_t^u(0)$ с полосой S (они могут лежать по любую сторону от нуля), а через r_1, r_2, \dots — пересечения $W_t^u(0)$ с S ; все они

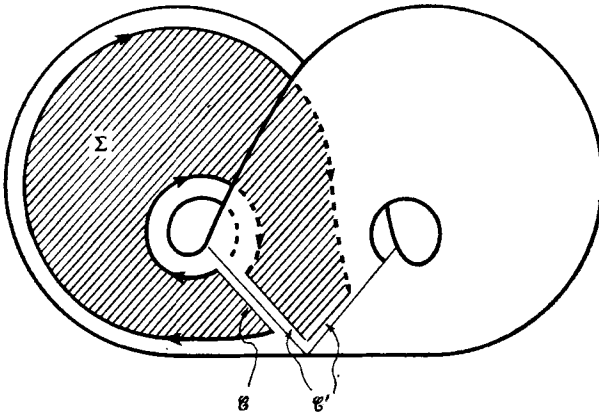


Рис. 31.8. Поверхностный элемент на аттракторе Лоренца.

являются точками S . При проектировании на L_0 точка l_1 займет на линии ветвления BB крайнее левое положение, а r_1 — крайнее правое положение; проекции остальных точек будут находиться между ними.

Каждый лист аттрактора L пересекает полосу S по кривой \mathcal{E} , являющейся некоторым звеном множества F , и если \mathcal{E} будет переноситься потоком вкруговую до тех пор, пока она снова не окажется на S в виде другой кривой \mathcal{E}' , то она опишет поверхностный элемент Σ в \mathbb{R}^3 , как показано на рис. 31.8, и мы будем представлять себе L составленным из таких поверхностных элементов; \mathcal{E} и \mathcal{E}' являются соответственно *начальной* и *конечной* кривыми элемента Σ . Сделаем предварительное предположение о том, что на S найдется кривая, соединяющая точки l_1 и r_1 и состоящая из точек аттрактора L . (Это предположение обосновывается ниже, а именно в § 31.17.) Такая кривая проходит через нуль и поэтому состоит из двух звеньев множества F . Мы должны рассмотреть их отдельно, и пусть \mathcal{E} будет тем звеном, которое соединяет нуль с r_1 . Как \mathcal{E} переносится потоком вкруговую, описывая поверх-

ность Σ , так и ее левый конец, вначале расположенный в нуле, переносится из нуля вправо вдоль $W_t^u(0)$, так что он, как и все точки кривой \mathcal{C} , обходит точку P_2 один раз против часовой стрелки; после этого он оказывается на S в точке I_1 ; следовательно, конечная кривая \mathcal{C}' поверхностного элемента Σ соединяет I_1 с r_2 в S , располагаясь чуть впереди \mathcal{C} (т. е. ближе к наблюдателю).

Прежде чем переносить по потоку точки кривой \mathcal{C}' , следует заметить, что, так как I_1 и r_2 лежат по разные стороны от нуля (согласно пятому из приведенных выше предположений), мы должны разделить \mathcal{C}' на два звена, скажем \mathcal{C}'_1 и \mathcal{C}'_2 , соединяющих I_1 с нулем и нуль с r_2 соответственно. Тогда \mathcal{C}'_1 будет обходить по часовой стрелке точку P_1 , а \mathcal{C}'_2 —против часовой стрелки точку P_2 , создавая таким образом два новых поверхностных элемента на L , скажем Σ'_1 и Σ'_2 . Этот процесс можно продолжать сколько угодно долго.

В общем случае для двух данных точек I_i и r_j , получающихся соответственно при пересечении $W_t^u(0)$ и $W_t^s(0)$ с S и лежащих по одну сторону от нуля, может существовать (а может и не существовать) звено из F , связывающее I_i с r_j (т. е. кривая на S , соединяющая I_i с r_j и состоящая из точек аттрактора L ; причем если существует одна такая кривая, то их будет бесконечно много). Если такая кривая переносится вдоль по потоку, как это было описано выше, она описывает некоторый поверхностный элемент Σ аттрактора L .

Нуль обозначается также через I_0 и r_0 . Будем обозначать его через r_0 , если он далее переносится вдоль $W_t^u(0)$ к r_1 , и через I_0 , если он далее переносится вдоль $W_t^s(0)$ к I_1 . Тогда общий поверхностный элемент Σ аттрактора L получается путем переноса звена, связывающего I_i с r_j в S (теперь допускается $i=0$ или $j=0$), вокруг P_1 или вокруг P_2 до кривой, соединяющей I_{i+1} с r_{j+1} . (Если при этом I_{i+1} и r_{j+1} лежат по разные стороны от нуля, то необходимо разделить новую кривую на два звена, как это делалось выше.)

31.14. СИМВОЛЫ ВИЛЬЯМСА $[i, j]$

Если для данных i и j точки I_i и r_j связаны звеном из F (а следовательно, бесконечно многими звеньями, как мы увидим далее), то мы будем говорить, что определен или существует символ $[i, j]$. Следуя Вильямсу, сформулируем теперь правила, позволяющие ответить на вопрос о существовании таких символов. Наше предварительное предположение состоит в том, что $[0, 1]$ и $[1, 0]$ являются символами (а отсюда и из предположения о том, что r_2 лежит правее нуля, следует, что $[0, 2]$ тоже символ). Эти правила таковы:

- 1) $[0, 1]$ и $[1, 0]$ —символы;
- 2) пусть $[i, j]$ —символ; тогда
 - (а) если l_{i+1} и r_{j+1} лежат соответственно слева и справа от нуля, то $[i+1, 0]$ и $[0, j+1]$ —символы;
 - (б) в противном случае $[i+1, j+1]$ —символ.

В случае 2 (а) мы говорим, что символ $[i, j]$ *предшествует* символам $[i+1, 0]$ и $[0, j+1]$ или символы $[i+1, 0]$ и $[0, j+1]$ *следуют за* $[i, j]$, а в случае 2 (б)—что он предшествует символу $[i+1, j+1]$ (может быть, лучше было бы говорить «непосредственно предшествует»).

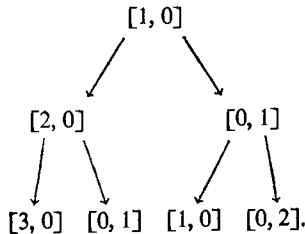
(Замечание. В противоположность Вильямсу мы предполагаем, как уже говорилось выше, что l_i и r_j никогда в точности не попадают в нуль при $i > 0$ или $j > 0$.)

Правила выбраны так, что $[i, j]$ предшествует $[i', j']$ тогда и только тогда, когда существует поверхностный элемент Σ , начальная кривая которого связывает l_i с r_j , а его конечная кривая связывает $l_{i'}$ с $r_{j'}$. [Это описывает лишь часть конечной кривой в случае 2 (а).]

Следующие утверждения непосредственно вытекают из этих правил (некоторые из них доказываются по индукции).

- 1) Если $[i, j]$ —символ, то $i \neq j$.
- 2) У каждого символа есть один или два последующих в зависимости от того, какой случай имеет место: случай 2 (а) или случай 2 (б).
- 3) Символу $[i, j]$ при положительных i и j предшествует только один символ, а именно $[i-1, j-1]$.
- 4) Если $[i, j]$ —символ, то либо $l_i < r_j \leq 0$, либо $0 \leq l_i < r_j$, где знак $<$ обозначает порядок следования после проектирования полосы S на линию ветвления BB поверхности L_0 .

5) Так как, согласно предположению 5 предыдущего параграфа, траектория $W^u(0)$ после прохождения точки l_1 по меньшей мере еще дважды обойдет неподвижную точку P_1 , прежде чем перейти через центр на правую половину полосы S , мы видим, что первые несколько символов, начиная с $[1, 0]$, будут такими:



В частности, символу $[0, 1]$ предшествуют по крайней мере два различных символа—символы $[1, 0]$ и $[2, 0]$.

б) Каждый символ в конечном счете предшествует любому другому символу в том смысле, что если $\sigma = [i, j]$ и $\tau = [i', j']$ заданы, то найдется такая конечная последовательность $\sigma_0 = \sigma, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n = \tau$, в которой σ_k всегда предшествует символу σ_{k+1} . Это ясно, если $\sigma_0 = [1, 0]$ (или $[0, 1]$), так как, согласно правилам, все другие символы следуют за $[1, 0]$ или $[0, 1]$ (т. е. получают из них), и мы только что видели, что $[1, 0]$ и $[0, 1]$ следуют один из другого. С другой стороны, если $\tau = [1, 0]$ (или $[0, 1]$), а символ σ произволен, то нужную последовательность можно найти, используя свойство несохранения близости, которым обладает отображение Пуанкаре $\psi_0(s)$ линии ветвления BB . Грубо говоря, это свойство означает, что можно выбрать такую последовательность, чтобы ширина интервала (I_i, r_j) постоянно увеличивалась. Вильямс доказал, что, начав с произвольного σ , можно достичь символа $[1, 0]$ (а тем самым и символа $[0, 1]$) за конечное число шагов, если производная $\psi'_0(s) > \sqrt{2}$ для всех s . В случае, изучавшемся Лоренцем, минимум $\psi'_0(s)$ был больше, чем примерно 1.05; однако при помощи метода, обсуждавшегося в § 31.11, на BB вместо длины дуги s можно ввести новый параметр, чтобы превратить график функции $\psi_0(s)$ в два прямолинейных отрезка, и тогда $\psi'_0(s)$ на самом деле будет больше $\sqrt{2}$ (фактически больше, чем примерно 1.9).

7) Для каждого $i > 0$ (и каждого $j > 0$) найдется по крайней мере одно j (одно i), такое, что $[i, j]$ будет символом.

31.15. ПРЕДЫСТОРИИ

Согласно § 31.4, одно из характерных свойств аттрактора L состоит в том, что точка x принадлежит L тогда и только тогда, когда траектория $x(t)$, для которой $x(0) = x$, лежит на L как при всех $t < 0$, так и при всех $t \geq 0$. При $t \rightarrow -\infty$ траектория $x(t)$ проходит по однозначно определяемой последовательности поверхностных элементов $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \dots$ вида, описанного в § 31.13. Если траектории на Σ проходятся назад по времени, они переходят на Σ' и т. д. Следовательно, начальная кривая элемента Σ является по меньшей мере частью конечной кривой элемента Σ' . Если начальная кривая для Σ связывает I_i с r_j , а такая же кривая для Σ' связывает $I_{i'}$ с $r_{j'}$, то $[i', j']$ предшествует $[i, j]$. В общем случае у $[i, j]$ может быть много предшествующих символов, но как только выбрано конкретное звено, соединяющее I_i с r_j , тем самым однозначно выделяется и предшествующий элемент, потому что начальная кривая поверхностного элемента Σ' однозначно определяется его конечной кривой.

Отсюда следует, что если $[i, j]$ —символ, то каждое звено, связывающее I_i с r_j , характеризуется такой единственной беско-

нечной последовательностью символов $\dots, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0 = [i, j]$, в которой σ_{-k-1} предшествует символу σ_{-k} при каждом k .

Можно показать, что если продолжить эту последовательность до бесконечности и в другом направлении, т. е. взять

$$\dots \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \quad (31.15.1)$$

то мы выделим не только конкретное звено, связывающее I_i с r_j , но и отдельную точку этого звена, так что каждая последовательность (31.15.1), в которой σ_k всегда предшествует σ_{k+1} , соответствует единственной траектории на L . Это следует из свойства несохранения близости для отображения Пуанкаре на BB . Если продолжить две траектории вперед по времени, то независимо от того, насколько они были близки друг к другу при $t=0$, они будут в конце концов разделены так, что в некоторый момент времени $t > 0$ окажутся на разных поверхностных элементах Σ .

31.16. АТТРАКТОР ЛОРЕНЦА. ДЕТАЛИ СТРУКТУРЫ. II

Покажем сначала, что если $[i, j]$ — символ, то найдется несчетное число звеньев из F , связывающих I_i с r_j . Согласно предыдущему параграфу, каждое такое звено соответствует единственной последовательности символов

$$\dots, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0 = [i, j], \quad (31.16.1)$$

в которой σ_{-k-1} всегда предшествует σ_{-k} . Верно и обратное (см. следующий параграф): любая такая последовательность определяет некоторое звено, и мы увидим, что для данного σ_0 такую последовательность можно выбрать несчетным числом способов. После того как выбран какой-либо символ σ_{-k} , возможно выбрать (согласно утверждению 6 из § 31.14) такие $\sigma_{-k-1}, \sigma_{-k-2}, \dots$, чтобы дойти до $[0, 1]$ за конечное число шагов; положим $\sigma_{-k-l} = [0, 1]$. Тогда, согласно утверждению 5 из того же параграфа, σ_{-k-l-1} можно выбрать по меньшей мере двумя способами. Следовательно, при построении последовательности можно бесконечно много раз выбирать один из двух вариантов. Представив такой выбор на n -м шаге двоичной цифрой a_n , мы видим, что для данного σ_0 существует по меньшей мере столько последовательностей (31.16.1), сколько имеется на единичном интервале вещественных чисел $0.a_0a_1a_2\dots$, т. е. множество таких последовательностей по меньшей мере несчетно.

Отсюда следует, что линия, трансверсальная к ветвящейся поверхности L_0 , пересекает несчетное число листов аттрактора L . Пусть M — точечное множество пересечений этой линии с L . Так как L — замкнутое множество в \mathbb{R}^3 , M — замкнутое множество

на этой линии. Как было указано в § 31.9, L имеет нулевую меру Лебега в \mathbb{R}^3 ; следовательно, M имеет нулевую меру на линии, так как в противном случае декартово произведение M и куска поверхности одного из листов аттрактора L имело бы положительную меру в трехмерном пространстве. Следовательно, M — несчетное замкнутое множество меры нуль. Наконец, в M нет изолированных точек, так как приведенные Вильямсом соображения топологического характера показывают, что если звено определяется последовательностью (31.16.1), то найдутся другие, произвольно близкие к нему звенья, соответствующие последовательностям, которые согласуются с (31.16.1) достаточно далеко в обратном направлении. Следовательно, M является канторовым множеством.

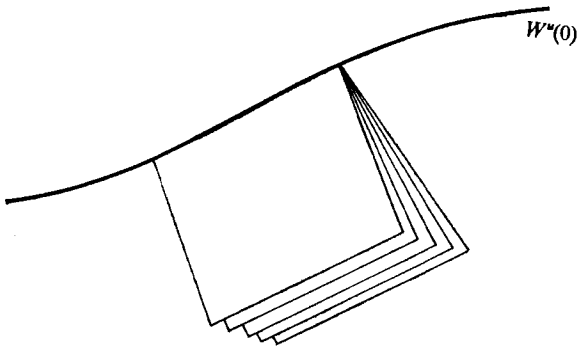


Рис. 31.9. «Канторова книга».

Согласно утверждению 7 из § 31.14, каждая из точек l_i и g_i является концом несчетного числа звеньев из F . Переноса эти звенья вдоль по потоку, мы видим, что неустойчивое многообразие $W^u(0)$ на всей своей протяженности представляет собой корешок канторовой книги в соответствии с терминологией Вильямса (см. рис. 31.9).

Последовательность (31.15.1), если она периодична, соответствует периодической траектории на L . Взяв любую последовательность (31.15.1), можно без труда найти такую периодическую последовательность, которая согласуется с выбранной, скажем при $-K < k < K$, где K — большое число. Следовательно, взяв любую траекторию, можно найти периодическую траекторию, произвольно близкую к ней, так что периодические траектории плотны на L . (Конечно, в физической реализации или в численной модели понятие строго периодической траектории является чистой идеализацией из-за конечной точности и неустойчивости по Ляпунову.)

31.17. СУЩЕСТВОВАНИЕ ЗВЕНЬЕВ В F

В § 31.13 мы считали необходимым предположить предварительно, что в F имеется хотя бы одно звено, связывающее, например, нуль с \mathbf{r}_1 . (Отсюда уже вытекало существование других звеньев, если переносить первое в круговую по потоку до очередного его пересечения с полосой S и т. д.) Таким образом, мы предположили, что аттрактор L содержит некоторую кривую, лежащую на S и связывающую нуль с \mathbf{r}_1 . Проекция множества F на поверхность L_0 —это линия ветвления BB , которая является пространственной кривой. Это хорошо подтверждается численными расчетами. Для выяснения деталей структуры самого множества F нам придется обратиться к предположениям 1—5, которые были сделаны в § 31.13 относительно аттрактора L . Здесь мы объясним, как из этих предположений можно сделать заключение о существовании звена, связывающего нуль с \mathbf{r}_1 (или l_1 с нулем—рассуждения в этом случае будут аналогичными).

Мы рассмотрим также следующую задачу. Было показано, что если $\sigma_0 = [i, j]$ —символ, то любое звено, связывающее l_i с \mathbf{r}_j , определяет единственную последовательность $\dots, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0$, в которой σ_{-k-1} всегда предшествует символу σ_{-k} . Задача состоит в том, чтобы показать, что верно и обратное: любая такая последовательность определяет некоторое звено, связывающее l_i с \mathbf{r}_j .

Свое решение первой задачи Вильямс начинает с того, что берет произвольную точку \mathbf{x}_{00} на линии ветвления BB между проекциями нуля и точки \mathbf{r}_1 , строит на ветвящейся поверхности L_0 такую траекторию $\mathbf{x}_0(t)$, для которой $\mathbf{x}_0(0) = \mathbf{x}_{00}$, определяя для этого ее предысторию, а затем вводит на L траекторию $\mathbf{x}(t)$, проекция которой на L_0 , согласно предположению 4 из § 31.13, совпадала бы с $\mathbf{x}_0(t)$. Это построение таково, что траектория $\mathbf{x}(t)$ непрерывно зависит от положения точки \mathbf{x}_{00} на BB ; следовательно, точка траектории $\mathbf{x}(0)$ непрерывно зависит от \mathbf{x}_{00} ; описывая при изменении \mathbf{x}_{00} кривую в F , которая достигает своими двумя концами нуля и \mathbf{r}_1 .

Имеется много способов выбора предыстории $\mathbf{x}_0(t)$, приводящих к желаемому результату, так как существует бесконечно много звеньев, связывающих нуль с \mathbf{r}_1 в F . Способ, используемый Вильямсом, состоит в том, чтобы сделать предысторию чередующейся между двумя половинами BB , а именно если при некотором t_1 точка $\mathbf{x}_0(t_1)$ предыстории принадлежит BB (но не совпадает с проекциями нуля, l_1 или \mathbf{r}_1), то траектория продолжается назад (вверх) на задний лист поверхности L_0 для $\mathbf{x}_0(t_1)$, лежащей справа от нуля, и на передний лист для $\mathbf{x}_0(t_1)$, лежащей слева от нуля. Нетрудно проверить (обратившись к рис. 31.3а), что это всегда возможно и никогда не приводит предысторию в нуль или в проекции точек \mathbf{r}_1 и l_1 . Чтобы убедиться в непрерывной зави-

симости от x_{00} , заметим, что если x_{00} и x'_{00} близки друг к другу на линии ветвления BB , то получающиеся на L_0 траектории $x_0(t)$ и $x'_0(t)$ будут близки друг к другу в течение длительного интервала времени, но тогда это верно и для траекторий $x(t)$ и $x'(t)$ на L в силу предположения 4 из § 31.13.

Чтобы показать, что получившаяся в F кривая имеет нужные концевые точки, заметим сначала, что если точка x_{00} очень близка к проекции точки r_1 на BB , то предыстория будет очень близка к внешнему ребру того листа поверхности L_0 , который лежит позади; следовательно, в прошлом траектория $x(t)$ должна была длительное время находиться вблизи точки зстоя в нуле и поэтому длительное время была близка к траектории $W^u_r(0)$, которая идет из нуля к r_1 . Наконец, если x_{00} находится очень близко от центра линии ветвления BB , траектория уже очень близка к точке зстоя и поэтому в течение длительного времени в прошлом была близка к стационарной траектории $x(t) \equiv 0$.

Аналогичная проверка того, что любая последовательность

$$\dots, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0 = [i, j], \quad (31.17.1)$$

где σ_{-k-1} предшествует символу σ_{-k} , определяет некоторое звено из F , является более сложной, и мы отсылаем читателя к статье Вильямса, где точечное множество F аппроксимируется с помощью так называемых ретракций¹⁾. Смысл этого приема состоит в том, что, если x_{00} — точка линии BB между проекциями на BB точек l_i и r_j , положим, что последовательность (31.17.1) предписывает, какой лист поверхности L_0 будет следующим для предыстории $x_0(t)$ каждый раз при встрече с линией ветвления, когда мы двигаемся по траектории $x_0(t)$ назад (вверх) через BB . По чисто техническим соображениям целесообразно использовать последовательность (31.17.1) таким образом лишь на конечном числе шагов, скажем на n шагах, и считать, что перед этим предыстория чередовалась между двумя половинами BB , как было описано выше. Тогда получившаяся траектория $x(t)$ будет не совсем такой, какая нам нужна, но близкой к ней и будет сближаться с ней при $n \rightarrow \infty$.

Утверждение о том, что каждая последовательность (31.17.1) определяет единственное звено из F , уже было использовано в предыдущем параграфе для установления несчетности числа листов аттрактора L .

31.18. БИФУРКАЦИЯ К СТРАННОМУ АТТРАКТОРУ

В § 31.9 мы отмечали, что бифуркация в системе Лоренца при $r=r_0=24.74$ является докритической, и упомянули о возможности

¹⁾ Или стягиваний (топ.) — Прим. перев.

взрывного перехода в тот момент, когда неподвижные точки P_1 и P_2 утрачивают устойчивость. Однако при медленном возрастании r после прохождения r_0 движение на аттракторе L происходит без какого-либо взрывного перехода, за исключением разве того случая, когда внезапное возникновение движения на L может рассматриваться как взрыв.

Описанный аттрактор соответствует $r=28$. Если r , уменьшаясь, становится меньше r_0 , то оба отверстия на ветвящейся поверхности L_0 уменьшаются, стягиваясь к неподвижным точкам P_1 и P_2 . При еще меньших значениях r (меньших 13.96) L продолжает существовать как инвариантное множество для движения (хотя уже не будет аттрактором), но оно достигает неподвижных точек P_1 и P_2 только при $r=r_0$. При r , лишь немного превышающих r_0 , траектория, исходящая из P_1 и P_2 , сразу же становится траекторией на L . В этом смысле бифуркация при r_0 происходит как внезапный переход от стационарной траектории в точке P_1 или P_2 к движению на аттракторе L .

31.19. МОДЕЛЬ ФЕЙГЕНБАУМА

Во время как аттрактор Лоренца появился в связи с докритической бифуркацией Хопфа, в моделях Ландау — Хопфа и Рюэля — Такенса предполагается существование последовательности закритических бифуркаций, приводящих к инвариантным торам все более высокой размерности (произвольно высокой в первой модели и по меньшей мере четвертой во второй). Однако, согласно теореме Пейкото, существование такой последовательности представляется маловероятным. Как было указано в конце § 29.10, нельзя утверждать, что при возникновении инвариантного двумерного тора в бифуркации от периодической траектории на нем найдутся такие траектории, каждая из которых плотно покрывает этот тор. Вместо этого типичным будет возникновение конечного числа периодических траекторий и неподвижных точек. Другие траектории асимптотически стремятся к этим периодическим траекториям и неподвижным точкам. Возникновение инвариантного трехмерного тора в следующей бифуркации, по-видимому, зависит от существования траектории, плотной на двумерном торе. Следовательно, бифуркация к инвариантному трехмерному тору представляется маловероятной.

Если периодическая траектория на двумерном торе обойдет его до замыкания n раз, то бифуркация называется *субгармонической* и характеризуется внезапным n -кратным увеличением периода в момент бифуркации (см. § 29.11). Недавно Фейгенбаум разработал модель, основанную на последовательности субгармонических бифуркаций с удвоением периода (см. работу Фейгенбаума [1980] и цитируемые в ней источники). Оказывается, что такие удвоения встречаются во многих примерах итерированных отображений и

простых динамических систем. Более того, с ростом числа n удвоенный поведению системы начинает подчиняться определенным асимптотическим законам, в формулировку которых входят универсальные постоянные и функции, не зависящие от изучаемой системы. К тому же эти асимптотические законы начинают выполняться совершенно точно при сравнительно небольших значениях n . В частности, значения μ_n безразмерного параметра μ , при которых происходят бифуркации (удвоения), сходятся к значению μ_∞ как геометрическая прогрессия, причем для больших n

$$(\mu_{n+1} - \mu_n) / (\mu_n - \mu_{n-1}) \approx 0.21416938.$$

При $n \rightarrow \infty$, по крайней мере в изученных случаях, энергетический спектр движения аппроксимирует непрерывный спектр с определенными универсальными свойствами. При $\mu = \mu_\infty$ движение, по-видимому, становится аperiodическим и происходит на странном аттракторе.

Теперь уже известно (см. работу Лоренца [1981]), что примером такого поведения служит система Лоренца при значительно больших значениях безразмерного параметра r , чем те значения, которые вначале рассматривал Лоренц. А именно, странный аттрактор, который возникает при $r = 24.74$, сохраняется вплоть до значения $r = r^*$ (≈ 250). При r , значительно превосходящих r^* , существует периодическая траектория, и при *уменьшении* r в сторону r^* существует последовательность удвоений при значениях $r = r_n$. Последовательность $\{r_n\}$ сходится сверху к значению r^* , причем

$$(r_{n+1} - r_n) / (r_n - r_{n-1}) \approx 0.214.$$

Приложение к главе 31 (разделы А — З).

ТИПИЧНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ

В настоящем приложении объясняются и используются понятия типичных и нетипичных свойств систем. Можно подумать, что в ряде разделов физики эти понятия в некотором смысле заменяют вероятность. Мы придем к выводу, что это не так, но что они могут оказаться важным путеводителем в дальнейшем развитии наших представлений о роли вероятности в физике.

31.А. ПРОСТРАНСТВА СИСТЕМ

По той причине, что физическая система не может быть задана точно, и по ряду других причин часто желательно рассматривать не конкретную систему, а большое семейство систем. Если каждая система характеризуется значениями n параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, то тем самым ей ставится в соответствие некоторая точка пространства \mathbb{R}^n . И обратно, каждая точка в \mathbb{R}^n или в некоторой области $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ может соответствовать единственной системе семейства.

В более общем случае системы семейства могут быть представлены точками в банаховом или гильбертовом пространстве, или в некотором более общем метрическом пространстве, или же в некотором еще более общем топологическом пространстве, которое мы будем называть *пространством систем*.

Например, каждая система семейства может быть динамической системой на плоскости:

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y),$$

где X и Y — компоненты заданного гладкого векторного поля $X(x, y)$. Тогда каждое такое векторное поле определяет систему и может быть представлено точкой в банаховом пространстве B с выбранной надлежащим образом нормой $\|X(\cdot)\|$. Ясно, что B бесконечномерно, так как никаким конечным набором параметров невозможно полностью задать векторное поле.

Вообще говоря, мы будем предполагать, что пространство систем является по меньшей мере метрическим. Тогда если расстояние $d(X_1, X_2)$ между двумя системами мало, то можно считать, что одна из них получается из другой при помощи малого возмущения. Мы даже будем обычно предполагать, что пространство систем является нормированным, так что $d(X_1, X_2) = \|X_1 - X_2\|$.

31.В. ОТСУТСТВИЕ МЕРЫ ЛЕБЕГА В БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Если система описывается конечным набором параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, распределенных в \mathbb{R}^n согласно некоторому непрерывному вероятностному закону, и если некоторое свойство системы имеет место во всем \mathbb{R}^n , за исключением множества лебеговой меры нуль, то мы говорим, что оно выполняется для почти всех систем или что вероятность того, что оно не проявится, равна нулю.

Если $n \rightarrow \infty$, так что при этом \mathbb{R}^n заменяется бесконечномерным гильбертовым пространством, то, как было показано в § 13.11 тома 1, нельзя определить меру Лебега для предельного пространства; следовательно, вероятностные утверждения приведенного выше типа теряют силу. (Нелебеговы вероятностные меры обсуждаются в разд. 31.3 в конце этого приложения.)

31.В. ТИПИЧНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ

В любом пространстве систем независимо от того, определена в нем лебегова мера или нет, но в предположении, что оно является по крайней мере топологическим, можно определить, что означают типичные и нетипичные свойства систем. Это часто делается с таким расчетом, чтобы нетипичными свойствами можно было пренебречь в некоторых отношениях.

Подмножество пространства называется *бэровским множеством*, если оно является пересечением счетного числа плотных открытых подмножеств. Дополнение бэровского множества называется *тощим множеством*; оно представляет собой объединение счетного числа нигде не плотных подмножеств.

Свойство системы называется *типичным*, если оно выполняется на бэровском множестве пространства систем. Свойство называется *нетипичным*, если оно выполняется на тощем множестве. Заметим, что «нетипичность» не означает простое отрицание «типичности», так как множество может оказаться ни бэровским, ни тощим, например полупространство $x_1 > 0$ в \mathbb{R}^n .

Теорема Бэра о категориях утверждает, что бэровское множество плотно в полном метрическом пространстве, но и тощее множество также может быть плотным; следовательно, различие не основывается на плотности. Более того, в случае конечномерного пространства бэровское множество может иметь лебегову меру нуль; следовательно, различие не основывается также и на мере (см. ниже разд. 31.Ж).

Если свойство a типично, то отрицание a — нетипичное свойство; если свойства a и b типичны, то типично и свойство « a и b ». Два противоположных свойства не могут одновременно быть типичными.

31.Г. СИЛЬНАЯ ТИПИЧНОСТЬ. ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Мы не будем приводить физической интерпретации типичности, за исключением следующего специального случая. Свойство называется *сильно типичным*, если оно имеет место на плотном открытом множестве пространства систем, т. е. не только на счетном пересечении таких множеств. (Заметим, между прочим, что пересечение конечного числа плотных открытых множеств снова будет плотным открытым множеством.) Если свойство сильно типично, если X — любая система и если ε_1 — любое положительное число, то при помощи возмущения системы X , по норме не превосходящего ε_1 , можно получить систему Y ($\|Y - X\| \leq \varepsilon_1$), которая обладает этим свойством. Более того, тогда найдется такое другое положительное число ε_2 ($< \varepsilon_1$), что система сохранит это свойство при любом произвольном дополнительном возмущении, не превосходящем по норме ε_2 . Ничего нельзя сказать о том, насколько трудным может оказаться поиск первого возмущения. (Могут также существовать возмущения системы X , по норме не превосходящие ε_1 , которые *не приводят* к системе с нужным свойством.) Однако все достаточно тщательно подобранные системы обладают этим свойством; следовательно, такое свойство не может быть отнесено к числу тех, которые не могут проявиться на практике.

Если свойство сильно нетипично, т. е. если оно имеет место на нигде не плотном множестве пространства систем, то для любого $\varepsilon_1 \geq 0$ найдется возмущение, по норме не превосходящее ε_1 , при наложении которого это свойство исчезает. Более того, тогда найдется такое $\varepsilon_2 \geq 0$, что никакое дополнительное возмущение, по норме не превосходящее ε_2 , не может восстановить это свойство.

31.Д. ТЕОРЕМА ПЕЙКСОТО

Теорема Пейксото [1962] гласит, что для динамических систем на компактном двумерном многообразии сильно типичное свойство заключается в том, что каждое движение асимптотически стремится к одной из конечного числа неподвижных точек и периодических траекторий. Следовательно, в частности, квазипериодические движения нетипичны.

Сформулируем эту теорему для двумерного тора, т. е. для случая, когда $M = T^2$. Пусть θ и φ — угловые переменные на T^2 , так что динамическая система примет вид

$$\dot{\theta} = F(\theta, \varphi), \quad \dot{\varphi} = G(\theta, \varphi),$$

где функции F и G периодичны по θ и φ с периодом 2π . Пусть B — банахово пространство всех пар периодических функций F и G класса C^1 с нормой

$$\max_{\theta, \varphi} \{ |F|, |G|, |\partial_{\theta} F|, |\partial_{\theta} G|, |\partial_{\varphi} F|, |\partial_{\varphi} G| \},$$

так что топология в B соответствует равномерной сходимости в C^1 . Каждая точка пространства B представляет динамическую систему. Тогда в B найдется плотное открытое множество, представляющее динамические системы, для каждой из которых выполняются следующие условия.

- 1) Существует лишь конечное число неподвижных точек и замкнутых траекторий на T^2 .
- 2) Каждое движение асимптотически стремится к одной из этих неподвижных точек или замкнутых траекторий. (Здесь преднамеренно исключены стационарные движения в неподвижных точках и периодические движения по замкнутым траекториям.)

В действительности теорема утверждает несколько больше того, что здесь сказано: см. Пейксото [1962] и разд. 31.Е ниже.

Это утверждение является резким контрастом по отношению к теореме Колмогорова — Арнольда — Мозера (см. книгу Мозера [1973, теорема 2.8]), со-

гласно которой для гамильтоновых систем при определенных предположениях квазипериодические движения устойчивы относительно почти всех малых возмущений. Здесь нет противоречия, так как гамильтоновы системы как целое являются весьма частным случаем (например, стационарные гамильтоновы системы консервативны) и в некотором смысле нетипичны среди динамических систем, так что для них малые возмущения, о которых идет речь, отнюдь не произвольны, а таковы, что система остается гамильтоновой.

31.Е. ДРУГИЕ ПРИМЕРЫ ТИПИЧНЫХ И НЕТИПИЧНЫХ СВОЙСТВ

Рассмотрим пространство непрерывных функций $C(0, 1)$, определенных при $0 \leq x \leq 1$, с обычной нормой $\|f\| = \sup |f(x)|$. Для таких функций дифференцируемость — нетипичное свойство и нетипичны даже дифференцируемость в отдельной точке и непрерывность по Липшицу в отдельной точке (см. книгу Боаса [1960] и упражнение 1 ниже).

Следующие два примера являются частью более полного варианта теоремы Пейксото, чем приведенный выше. Как утверждалось, для векторного поля на компактном двумерном многообразии типично существование конечного числа неподвижных точек и периодических траекторий. В системе координат с началом отсчета в неподвижной точке векторное поле запишется как

$$F(x) = Ax + \dots,$$

где A — матрица размера 2×2 . В теореме утверждается, что для каждой такой неподвижной точки типично быть *гиперболической*, т. е. что для матрицы A типично отсутствие чисто мнимых собственных значений; следовательно, есть три возможности: если оба собственных значения имеют отрицательные вещественные части, то неподвижная точка будет *притягивающей*; если оба они имеют положительные вещественные части, то она будет *отталкивающей*; если одно из них имеет положительную вещественную часть, а другое — отрицательную, то неподвижная точка будет *седловой*.

Другое утверждение теоремы Пейксото состоит в том, что существование траектории, идущей от одной седловой точки к другой, нетипично: если такая траектория существует для некоторого векторного поля, то малейшее возмущение может сделать ее проходящей мимо второй седловой точки.

В § 29.6 было сделано предположение, которое не доказано и даже полностью не сформулировано. Там говорилось, что в существующих теоремах о полноте систем собственных функций для гидродинамических задач предполагается, что обобщенные собственные функции (если они и существуют) исключены [см. уравнение (29.6.5)]. Это обосновывается тем, что в некотором подходящем пространстве гидродинамических систем существование обобщенных собственных функций нетипично. Говорят, что собственное значение λ имеет *индекс 1*, если не существует соответствующих ему обобщенных собственных функций. Представляется вероятным, что для любого собственного значения λ_k иметь индекс 1 сильно типично, тогда как для всех них иметь индекс 1 только типично, так как счетный набор плотных открытых множеств не обязательно будет открытым множеством, но в любом случае будет бэровским множеством.

УПРАЖНЕНИЕ

1. Для каждого целого положительного n определим подмножество E_n из $C(0, 1)$ следующим образом: функция f принадлежит E_n , если найдется такое x_0 из $[0, 1 - 1/n]$, что

$$|[f(x_0 + h) - f(x_0)]/h| \leq n \quad \text{при } 0 < h < 1/n. \quad (31.Е.1)$$

Покажите сначала, что E_n — замкнутое подмножество пространства $C(0, 1)$, проверив, что если $f_k(x)$ равномерно сходятся к $f(x)$ при $k \rightarrow \infty$ и каждая

функция f_k удовлетворяет условию (31.Е.1), то ему удовлетворяет и f . Покажите далее, что дополнение подмножества E_n плотно: покажите на самом деле, что любую функцию f из $C(0, 1)$ можно сделать дифференцируемой при помощи малого возмущения (используйте для этого введенные в томе I операторы сглаживания); затем получившуюся функцию можно сделать нарушающей условие (31.Е.1), добавив к ней в случае необходимости дополнительное малое возмущение, имеющее достаточно большую производную в точке $x=x_0$. Следовательно, каждое E_n —нигде не плотное множество, и поэтому $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ —тощее множество, а отсюда следует, что для функции из $C(0, 1)$ нетипично быть непрерывной по Липшицу справа от любой точки.

31.Ж. ОТСУТВИЕ СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ ТИПИЧНОСТЬЮ И СУЩЕСТВОВАНИЕМ МЕРЫ ЛЕБЕГА

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть X —единичный интервал на вещественной оси, рассматриваемый как метрическое пространство с расстоянием $(x, y)=|x-y|$, и пусть n —целое положительное число. Каждому рациональному числу p/q , где $0 < p < q$, поставим в соответствие интервал

$$p/q - 1/(nq2^q) < x < p/q + 1/(nq2^q)$$

и обозначим через S_n объединение всех таких интервалов. Покажите, что множество S_n открыто и плотно в X и имеет меру Лебега, не превосходящую $4/n$. Убедитесь далее, что бэровское множество в X может иметь лебегову меру нуль, а тощее множество—меру 1.

2. Пусть S —пересечение множеств S_n . Согласно упражнению 1, S —бэровское множество. Покажите, что оно несчетно рассмотрев числа x из $[0, 1]$, имеющие двоичное представление вида

$$x = 0.a_10a_200\dots0a_300\dots0a_l00\dots,$$

где каждое a_l равно 0 или 1. Покажите, что если число нулей v_l между a_l и a_{l+1} достаточно быстро возрастает с ростом l , то x будет принадлежать всем множествам S_n . Покажите, что множество всех таких x несчетно.

31.З. ВЕРОЯТНОСТЬ И ФИЗИКА

Предположим, что топологическое пространство X представляет собой пространство физических систем. Когда физик говорит, что проявление определенного свойства такой системы весьма маловероятно, он скорее всего имеет в виду следующее: если из X каким-либо образом выбрано большое число N систем, то очень немногие из них обладают рассматриваемым свойством и с ростом N относительная доля обладающих этим свойством систем стремится к нулю. Такое утверждение, если оно верно, неизбежно носит вероятностный характер. В этом описании недостает только объяснения того, как эти N систем выбираются из X . Так как X в общем случае бесконечномерно и, следовательно, в нем нельзя определить лебегову меру, не существует возможности выбирать N систем случайным образом на основании равномерного распределения в X , потому что такого распределения не существует.

Метод выбора должен определяться с учетом физических соображений и не может исходить лишь из концепции типичности.

Конечно, есть много способов определения вероятностных мер в бесконечномерных пространствах (примерами служат гауссовы меры в гильбертовом пространстве, описанные в § 13.11 тома I). Такая мера может быть исполь-

зована для выбора N систем из X . Представляющиеся здесь возможности, по-видимому, весьма разнообразны, и может оказаться необходимым использовать ряд физических соображений. Например, должно представляться разумным требованием о том, чтобы вероятностная мера была положительной на открытых множествах в X , так как в противном случае сам выбор пространства X выглядел бы ошибочным и некоторые его части следовало бы исключить. Затем предположим, что в X существуют преобразования, приводящие к таким модификациям систем, при которых основные их свойства изменяются и в то же время свойства, представляющиеся маловероятными, остаются таковыми; тогда после такого преобразования в X множества меры нуль должны переходить в множества меры нуль. С точки зрения физической интерпретации, приведенной в разд. 31.Г, необходимо лишь, чтобы сильно нетипичное свойство имело место только на множестве меры нуль.

Все это пока что не более чем общие рассуждения, однако они могут указывать на то, что в физике типичность вряд ли заменит вероятность, но она, возможно, будет указывать правильный путь для надлежащего выбора вероятностных мер.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что дифференцируемость нетипична также и для гильбертова пространства $H=L^2(0, 1)$. Схема доказательства состоит из следующих шагов. Сначала определите в H линейное многообразие

$$D = \{\psi \in L^2: \psi' \in L^2\}, \quad (31.3.1)$$

где производная понимается в смысле теории распределений (см. гл. 5 тома 1). Для любого ψ из H имеет место представление

$$\psi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \xi_k e^{2\pi i k x}. \quad (31.3.2)$$

Тогда многообразие D можно охарактеризовать как

$$D = \{\psi \in L^2: \sum |k \xi_k|^2 < \infty\}. \quad (31.3.3)$$

Для каждого $M=1, 2, \dots$ определите также меньшее многообразие

$$D_M = \{\psi \in L^2: \psi' \in L^2, \|\psi'\| \leq M\} = \{\psi \in L^2: 4\pi^2 \sum |k \xi_k|^2 \leq M^2\}. \quad (31.3.4)$$

Если бы удалось показать, что каждое D_M нигде не плотно, т. е. что дополнение CD_M плотно и открыто, то отсюда следовало бы, что $D = \bigcup_{M=1}^{\infty} D_M$ —

тощее множество в H . Покажите сначала, что CD_M плотно, убедившись, что любое $\psi \in L^2$, не нарушающее условие $\|\psi'\| \leq M$, может быть сделано нарушающим его (путем добавления к ψ произвольно малой функции с большой производной). Затем покажите, что CD_M открыто. Для этого рассмотрите любое ψ из CD_M , т. е. такое ψ , для которого либо $\|\psi'\| = \infty$, либо $\|\psi'\| = M + \delta$ при некотором $\delta > 0$. Нужно показать, что найдется окрестность этого ψ , которая содержится в CD_M . Выберите K так, чтобы

$$\left(\sum_{k=-K}^K 4\pi^2 |k \xi_k|^2 \right)^{1/2} > M + \delta/2,$$

и покажите, что если χ — любая такая функция из L^2 , для которой $\|\chi\| < \delta/(4K)$, то $\|\psi' + \chi'\| > M + \delta/4$, так что CD_M открыто.

2. Используя аналогичные проведенным выше рассуждения, но полагая везде $\xi_{-k} = \bar{\xi}_k$, покажите, что то же самое верно и для вещественного гильбертова пространства $L^2(0, 1)$.

Чтобы ввести вещественные координаты и вещественные базисные функции, положим

$$\xi_0 = x_0, \quad \xi_k = (x_k + ix_{-k})/\sqrt{2}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (31.3.5)$$

$$\varphi_0(x) \equiv 1, \quad \varphi_k(x) = \sqrt{2} \cos 2\pi kx, \quad (31.3.6)$$

$$\varphi_{-k}(x) = \sqrt{2} \sin 2\pi kx.$$

Тогда, подставляя в (31.3.2) $\bar{\xi}_k$ вместо ξ_{-k} , найдем, что

$$\psi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_k \varphi_k(x), \quad (31.3.7)$$

$$\psi'(x) = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} kx_{-k} \varphi_k(x). \quad (31.3.8)$$

Гауссовы меры в вещественном гильбертовом пространстве H были описаны в § 13.11 тома 1. Там отмечались следующие основные моменты. Если M — любое конечномерное подпространство из H и S — любое борелево множество из M , то множество

$$Z = S + M^\perp,$$

т. е. множество всех точек $x + y$, у которых $x \in S$ и $y \in M^\perp$, называется *цилиндрическим множеством*. Чтобы определить так называемую гауссову меру в H , обозначим через B положительный ядерный оператор и положим $A = B^{-1}$. Затем взяв любое цилиндрическое множество $Z = S + M^\perp$, $\dim M = m$, обозначим через $\{\varphi_j\}_1^m$ некоторый ортонормированный базис в M и определим матрицу $A(M)$ размера $m \times m$, положив $A(M)_{jk} = (\varphi_j, A\varphi_k)$, $1 \leq j, k \leq m$. Тогда вероятность $P(Z)$ полагается равной

$$P(Z) = [(\det A(M))^{1/2}/(2\pi)^{m/2}] \int_S \exp \left\{ -(1/2) \sum_{j,k} x_j A(M)_{jk} x_k \right\} dV. \quad (31.3.9)$$

Как было указано в § 13.11, эту функцию множества $P(\cdot)$ можно единственным образом расширить до вероятностной меры, определенной на σ -алгебре \mathbf{A} , образованной цилиндрическими множествами.

Теперь применим эти соображения к вещественному гильбертову пространству $H = L^2(0, 1)$, используя координаты x_k и базисные функции φ_k , заданные в виде (31.3.5) и (31.3.6). Определим оператор A простой формулой

$$A\psi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k x_k \varphi_k,$$

где функция $\psi(x)$ задана в виде (31.3.7), а a_k положительны и $\sum (1/a_k) < \infty$, так что оператор $B = A^{-1}$ компактен. Рассмотрим цилиндрические множества

$$Z_{M, \kappa} = \left\{ \psi \in L^2: 4\pi^2 \sum_{-K}^K |kx_k|^2 \leq M^2 \right\},$$

такие, что

$$Z_{M, 1} \supset Z_{M, 2} \supset \dots \supset Z_{M, K} \supset \dots \supset D_M, \quad (31.3.10)$$

где множество D_M определено в (31.3.4). Тогда (31.3.9) принимает вид

$$P(Z_{M, \kappa}) = \prod_{-K}^K \sqrt{a_k/(2\pi)} \int \dots \int \exp \left\{ -(1/2) \sum_{-K}^K a_k x_k^2 \right\} dx_{-K} \dots dx_K, \quad (31.3.11)$$

где S — эллипсоидальная область:

$$S: \sum_{-K}^K k^2 x_k^2 \leq M^2 / (4\pi^2). \quad (31.3.12)$$

УПРАЖНЕНИЯ

3. Полагая, что в (31.3.11) все переменные интегрирования, кроме последнего, изменяются от $-\infty$ до ∞ , тогда как изменение последнего, x_K , ограничено условием $|x_K| \leq M / (2\pi K)$, покажите, что

$$\mathbf{P}(Z_{M,K}) < M (a_K)^{1/2} / [(2\pi^3)^{1/2} K].$$

4. Теперь положим $a_k = |k|^r$, где $r > 1$ (чтобы сделать ряд $\sum (1/a_k)$ сходящимся). Покажите, что если $1 < r < 2$, то $\mathbf{P}(Z_{M,K}) \rightarrow 0$ при $K \rightarrow \infty$, так что, согласно (31.3.10), $\mathbf{P}(D_M) = 0$, и поэтому благодаря счетной аддитивности

$$\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{M=1}^{\infty} D_M\right) = 0.$$

Это упражнение показывает, что тощее множество D дифференцируемых функций в $L^2(0, 1)$ имеет гауссову меру нуль, если $1 < r < 2$. При $r > 2$ $\mathbf{P}(D) = 1$. Грубо говоря, с возрастанием r гауссова мера все больше и больше концентрируется в окрестности нуля в H . В силу (31.3.3) дифференцируемые функции лежат вблизи нуля, так что при большой концентрации вероятностной меры в окрестности нуля дифференцируемые функции приобретают положительную вероятность, но при $r < 2$ они имеют нулевую вероятность.

Поэтому в данном случае вероятностная мера может быть выбрана так, чтобы нетипичное свойство (дифференцируемость) не было вероятным,

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ ¹⁾

- Абрахам, Роббин (Abraham R., Robbin J.) [1967]. Transversal mappings and flows.—New York: W. A. Benjamin.
- Адлер, Базин, Шиффер (Adler R., Bazin M., Schiffer M.) [1965]. Introduction to general relativity.— New York: McGraw-Hill.
- Барут А., Рончка Р. (Barut A. O., Raçzka R.) [1977]. The theory of group representations and applications.— Warsaw: PWN Polish Scientific Publishers. [Имеется перевод: Теория представлений групп и ее приложения.— М.: Мир, 1980.]
- Берендс, Дрейтлейн, Фронсдейл, Ли (Behrends R. E., Dreitlein J., Fronsdal C., Lee W.) [1962]. Simple groups and strong interaction symmetries.— Rev. Mod. Phys., v. 34, p. 1—40.
- Бёрнер (Boerner H.) [1955]. Darstellungen von Gruppen.— Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
- Боас (Boas R. P.) [1960]. A primer of real functions.— Rahway: Wiley.
- Бойер, Линдквист (Boyer R. H., Lindquist R. W.) [1967]. J. Math. Phys., v. 8, p. 265.
- * Борисевич Ю. Г., Близняков Н. М., Израилевич Я. А., Фоменко Т. Н. [1980]. Введение в топологию.— М.: Высшая школа.
- Бохер М. (Bôcher M.) Introduction to higher algebra [1922].— New York: The MacMillan Co. [Имеется перевод немецкого изд. 1910 г.: Введение в высшую алгебру.— М.— Л.: Гостехиздат, 1933.]
- Вебер Дж. (Weber J.) [1961]. General relativity and gravitational waves.— New York: Wiley [Имеется перевод: Общая теория относительности и гравитационные волны.— М.: ИЛ, 1962.]
- Вейль (Weyl H.) [1928]. Gruppentheorie und Quantenmechanik.— Leipzig: S. Hirzel.
- [1932]. The theory of groups and quantum mechanics.— New York: E. P. Dutton and Co.
- * Векуа И. Н. [1978]. Основы тензорного анализа и теории ковариантов.— М.: Наука.
- Вигнер Е. (Wigner E.) [1931]. Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren.— Braunschweig: Fr. Vieweg u. Sohn AG. [Имеется перевод дополн. и исправл. американского издания 1959 г.: Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров.— М.: ИЛ, 1961.]
- Виленкин Н. Я. [1965]. Специальные функции и теория представлений групп.— М.: Наука.
- Вильямс Р. (Williams R. F.) [1977]. The structure of Lorenz attractors.— In: Turbulence Seminar (Univ. of Calif., Berkley) 1976—1977, p. 94—112. [Имеется перевод: Структура аттракторов Лоренца.— В кн.: Странные аттракторы.— М.: Мир, 1981, с. 58—72.]

¹⁾ Звездочкой отмечены работы, добавленные при переводе В ссылках в тексте номера страниц приводятся по изданию, год выхода которого указан после фамилии автора.— *Прим. перев.*

- Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. [1962]. Обобщенные функции. Вып. 5. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений.— М.: Физматгиз.
- Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. [1958]. Представления группы вращений и группы Лоренца.— М.: Физматгиз.
- Генри, Лонсдейл (Henry, Lonsdale) [1965]. International tables for X-ray crystallography.
- Глисон (Gleason A.) [1952]. Groups without small subgroups.— *Ann. of Math.*, v. 56, p. 193—212.
- Голлуб, Суинни (Gollub J. P., Swinney H. L.) [1975]. Onset of turbulence in a rotating fluid.— *Phys. Rev. Letters*, v. 35, p. 927—930.
- Ди Прима, Хабетлер (DiPrima R. C., Habetler G. J.) [1969]. A completeness theorem for non-selfadjoint eigenvalue problems in hydrodynamic stability.— *Arch. Rat. Mech. and Anal.*, 8—227.
- Дирак П. (Dirac P. A. M.) [1928]. The quantum theory of the electron.— *Proc. Roy. Soc., Ser. A*, v. 117, p. 610—624.
- [1958]. The principles of quantum mechanics.— Oxford: Clarendon Press. [Имеется перевод: Принципы квантовой механики.— М.: Наука, 1979.]
- Дэви (Davey A.) [1962]. The growth of Taylor vortices in flow between rotating cylinders.— *J. Fluid Mech.*, v. 14, p. 336—368.
- Дэви, Ди Прима, Стюарт (Davey A., DiPrima R. C., Stuart J. T.) [1968]. On the instability of Taylor vortices.— *J. Fluid Mech.*, v. 31, p. 17—52.
- Зигель К. (Siegel C. L.) [1956]. Vorlesungen über Himmelsmechanik.— Berlin, Heidelberg, New York: Springer. [Имеется перевод: Лекции по небесной механике.— М.: ИЛ, 1959.]
- Зигель, Мозер (Siegel C. L., Moser J.) [1971]. Lectures on celestial mechanics.— Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
- Зоммерфельд (Sommerfeld A.) [1929]. Das Molekül als symmetrische Kreisel.— In: *Atombau und Spectrallinien, wellenmechanischer Ergänzungsband.*— Braunschweig: Friedr. Vieweg u. Sohn AG.
- Иглз (Eagles P. M.) [1971]. On stability of Taylor vortices by fifth-order amplitude expansion.— *J. Fluid Mech.*, v. 49, p. 529—550.
- Кэрри (Curry J. H.) [1978]. A generalized Lorenz system.— *Comm. Math. Phys.*, v. 60, p. 193—204.
- Келли (Kelley Al.) [1967]. The stable, center-stable, center, center-unstable, and unstable manifolds.— В кн.: Абрахам, Роббин [1967], Appendix C.
- Керр Р. (Kerr R. P.) [1963]. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics.— *Phys. Rev. Letters*, v. 11, p. 237—238. [Имеется перевод: Гравитационное поле вращающейся массы как пример алгебраически специальной метрики.— В кн.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации.— М.: Мир, 1979, с. 208—211.]
- Крускал (Kruskal M. D.) [1960]. Maximal extension of Schwarzschild metric.— *Phys. Rev.*, v. 119, p. 1743—1745.
- Крюгер, Гросс, Ди Прима (Krueger E. R., Gross A., DiPrima R. C.) [1966]. On the relative importance of Taylor-vortex and non-axisymmetric modes in flow between rotating cylinders.— *J. Fluid Mech.*, v. 24, p. 521—538.
- Курош А. Г. [1967]. Теория групп.— 3-е изд.— М.: Наука.
- Ладженская О. А. [1961]. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.— М.: Физматгиз; 2-е изд.— М.: Наука, 1970.
- [1975]. Mathematical analysis of Navier — Stokes equations for incompressible liquids.— *Annual Rev. of Fluid Mech.*, v. 7, p. 249—272.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. [1954]. Механика сплошных сред. 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Гостехиздат.

- Ланфорд (Lanford O. E.) [1973]. Bifurcation of periodic solutions into invariant tori: the work of Ruelle and Takens.— In: Nonlinear problems in the physical sciences and biology. Lecture Notes, vol. 332.— New York: Springer.
- Ланг С. (Lang S.) [1962]. Introduction to differentiable manifolds.— New York: Wiley. [Имеется перевод: Введение в теорию дифференцируемых многообразий.— М.: Мир, 1967.]
- Лоренц Э. (Lorenz E. N.) [1963]. Deterministic nonperiodic flow.— J. Atmos. Sci., v. 20, p. 130—141. [Имеется перевод: Детерминированное периодическое течение.— В кн.: Странные аттракторы.— М.: Мир, 1981, с. 88—116.] — [1981]. Noisy periodicity and reverse bifurcation.— В печати.
- Магнус (Magnus W.) [1932]. Das Identitätsproblem für Gruppen mit einer definierenden Relation.— Math. Ann., Bd 106, S. 295—307.
- Марсден Дж., Мак-Кракен М. (Marsden J. E., McCracken M.) [1976]. The Hopf bifurcation and its applications.— Berlin, Heidelberg, New York: Springer. [Имеется перевод: Бифуркация рождения цикла и ее приложения.— М.: Мир, 1980.]
- Миллер (Miller W.) [1973]. Symmetry groups and their applications.— New York: Academic Press.
- * — [1977]. Symmetry and separation of variables.— Reading: Addison-Wesley. [Имеется перевод: Симметрия и разделение переменных.— М.: Мир, 1981.]
- * Мищенко А. С., Фоменко А. Т. [1980]. Курс дифференциальной геометрии и топологии.— М.: Изд-во МГУ.
- Мозер (Moser J.) [1973]. Stable and random motions in dynamical systems.— Princeton: Princeton Univ. Press.
- Монтгомери, Зиппин (Montgomery D., Zippin L.) [1955]. Topological transformation groups.— New York: Interscience Publishers.
- Морс Ф. М., Фешбах Г. (Morse P. M., Feshbach H.) [1953]. Methods of theoretical physics I, II.— New York: McGraw-Hill. [Имеется перевод: Методы теоретической физики. Т. 1. Т. 2.— М.: ИЛ, 1958, 1960.]
- Наймарк М. А. [1959]. О некоторых случаях периодических движений, зависящих от параметров.— ДАН СССР, т. 129, с. 736—739. — [1976]. Теория представлений групп.— М.: Наука.
- Нахбин (Nachbin L.) [1965]. The Haar integral.— Princeton: Van Nostrand.
- Немыцкий В. В., Степанов В. В. [1947]. Качественная теория дифференциальных уравнений.— М.: Гостехиздат.
- Новиков П. С. [1955]. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слоев в теории групп.— Труды Матем. ин-та АН СССР, т. 44, с. 1—444.
- Паули (Pauli W.) [1927]. Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons.— Z. f. Physik, Bd 43, S. 601—623.
- Пейксото (Peixoto M.) [1962]. Structural stability on two-dimensional manifolds.— Topology, v. 1, p. 101—120.
- Петер Ф., Вейль Г. (Peter F., Weyl H.) [1927]. Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe.— Math. Ann., Bd 97, S. 737—755.
- Петров А. З. [1966]. Новые методы в общей теории относительности.— М.: Наука.
- Ракá (Racah G.) [1951]. Group theory and nuclear spectroscopy. Lecture Notes.— Princeton.
- Реден (Redei L.) [1959]. Algebra.— Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft.
- Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. (Riesz F., Sz. Nady B.) [1953]. Leçons d'analyse fonctionnelle.— Budapest: Akadémiai Kiadó. [Имеется перевод: Лекции по функциональному анализу.— М.: ИЛ, 1954.]
- Рихтмайер (Richtmeyer R. D.) [1981]. A study of the Lorenz attractor.— В печати.
- Рихтмайер Р., Мортон К. (Richtmeyer R. D., Morton K. W.) [1967]. Difference methods for initial-value problems.— New York: Wiley. [Имеется перевод: Разностные методы решения краевых задач.— М.: Мир, 1972.]
- Робертсон (Robertson H. P.) [1927]. Bemerkung über separierbare Systeme in der Wellenmechanik.— Math. Annalen, Bd 98, S. 749.

- * Рохлин В. А., Фукс Д. Б. [1977]. Начальный курс топологии. Геометрические главы.— М.: Наука.
- Руссман, Зендер (Russmann H., Zehnder E.) [1980]. On a normal form of symmetric maps of $[0, 1]$.— *Comm. Math. Phys.*, v. 72, p. 49—53.
- Рюэль Д., Такенс Ф. (Ruelle D., Takens F.) [1971]. On the nature of turbulence.— *Comm. Math. Phys.*, v. 20, p. 167—192. [Имеется перевод: О природе турбулентности.— В кн.: Странные аттракторы.— М.: Мир, 1981, с. 117—151.]
- Саккер (Sacker R.) [1964]. A bifurcation theorem.— Thesis, New York Univ. (не опубликовано).
- <п>Селл (Sell G. R.) [1971]. Topological dynamics and ordinary differential equations.— London: Van Nostrand-Reinhold.
- Смейл С. (Smale S.) [1967]. Differentiable dynamical systems.— *Bull. AMS*, v. 73, p. 747—817. [Имеется перевод: Дифференцируемые динамические системы.— УМН, 1970, т. XXV, № 1, с. 113—185.]
- Снайдер (Snyder H. A.) [1970]. Waveforms in rotating Couette flow.— *Intl J Non-linear Mech.*, v. 5, p. 659—685.
- Сугиура (Sugiura M.) [1975]. Unitary representations and harmonic analysis.— New York: Halsted Press.
- Сэттинджер (Sattinger D. H.) [1970]. The mathematical problem of hydrodynamic stability.— *J. Math. and Mech.*, v. 19, p. 797—817.
- Тейлор (Taylor G. I.) [1923]. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders.— *Phil. Trans. Roy. Soc., Ser. A*, v. 223, p. 289—343.
- Толмен Дж. (Tolman J.) [1968]. Special functions: grouptheoretic approach.— New York: Benjamin.
- Толмен Р. (Tolman R. C.) [1934]. Relativity, thermodynamics and cosmology.— Oxford: Clarendon Press. [Имеется перевод: Относительность, термодинамика и космология.— М.: Наука, 1974.]
- Томас (Thomas T. Y.) [1961]. Concepts from the tensor analysis and differential geometry.— New York: Academic Press.
- Уайтхед (Whitehead J. H. C.) [1932]. Convex regions in the geometry of paths.— *Quart. J. of Math.*, v. 3, p. 33—42.
- Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. (Whittaker R. T., Watson G. H.) [1927]. A course of modern analysis.— Cambridge Univ. Press. [Имеется перевод: Курс современного анализа.— 2-е изд. — Т. I. Т. II.— М.: Физматгиз, 1962, 1968.]
- Уорнер (Warner G.) [1972]. Harmonic analysis on semi-simple Lie groups I, II.— Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
- Фейгенбаум (Feigenbaum M.) [1980]. Universal behavior in nonlinear systems.— *Los Alamos Science*, v. 1, p. 4—27.
- Финкельштейн (Finkelstein D.) [1958]. Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle.— *Phys. Rev.*, v. 110, p. 965—967.
- Фландерс (Flanders H.) [1963]. Differential forms.— New York: Academic Press.
- Хаар (Haar A.) [1933]. Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen.— *Ann. Math.*, v. 34, p. 147—169.
- Хассард (Hassard Brian D.) [1980]. Computation of invariant manifolds.— В печати.
- Хаузнер, Шварц (Hausner M., Schwartz J. T.) [1968]. Lie groups and Lie algebras: a brief description.— New York: Gordon and Breach.
- Хоккинг, Янг (Hocking J. G., Young G. S.) [1961]. Topology.— Reading: Addison-Wesley.
- Хопф (Hopf E.) [1948]. A mathematical example displaying the features of turbulence.— *Comm. Pure Appl. Math.*, v. 1, p. 303—322.
- Шевалле К. (Chevalley C.) [1946]. Theory of Lie groups. Vol. 1.— Princeton: Princeton Univ. Press. [Имеется перевод: Теория групп Ли. Т. 1.— М.: ИЛ, 1948.]

- Шевалле К. (Chevalley C.) [1951, 1955]. *Théorie des groupes de Lie*. Т. 2. Т. 3.— Paris. [Имеется перевод: Теория групп Ли. Т. 2. Т. 3.— М.: ИЛ, 1958.]
- Шифф Л. (Schiff L.) [1955]. *Quantum mechanics*.— New York: McGraw-Hill. [Имеется перевод: Квантовая механика.— М.: ИЛ, 1959.]
- Шур (Schur I.) [1905]. *Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere*.— *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss.*, Bd 1905, S. 406—432.
- Эйзенхарт Л. (Eisenhart L. P.) [1926]. *Riemannian geometry*.— Princeton: Princeton Univ. Press. [Имеется перевод: Риманова геометрия.— М.: ИЛ, 1948].
- [1933]. *Continuous groups of transformations*.— Princeton: Princeton Univ. Press. [Имеется перевод: Непрерывные группы преобразований.— М.: ИЛ, 1947.]
- [1934]. *Separable systems of Staeckel*.— *Ann. Math.*, v. 35, p. 284.
- Эллис (Ellis H. G.) [1972]. *Ether flow through a drainhole: a particle model in general relativity*.— *J. Math. Phys.*, v. 14, p. 104—118.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абрахам (Abraham R.) 290, 292, 294, 360
Адлер (Adler R.) 280, 360
- Базин (Bazin M.) 280, 360
Барут (Barut A. O.) 58, 360
Бейгльбек (Beiglböck W.) 6
Берендс (Behrends R. E.) 200, 360
Бёрнер (Boerner H.) 58, 360
Берс (Bers L.) 246
Биркгоф (Birkhoff G. D.) 268
Близняков Н. М. 140, 360
Боас (Boas R. P.) 355, 360
Бойер (Boyer R. H.) 278, 360
Бор (Bohr N.) 329
Борисевич Ю. Г. 140, 360
Бохер (Böcher M.) 214, 360
Бриттин (Brittin W.) 6
- Ватсон (Watson G. N.) 69, 363
Вебер (Weber J.) 266, 360
Вейль (Weyl H.) 57, 83, 88, 360, 362
Векуа И. Н. 211, 360
Вигнер (Wigner E.) 83, 95, 360
Виленкин Н. Я. 58, 72, 88, 94, 103, 360, 361
Вильямс (Williams R. F.) 289, 340, 341, 344—346, 348, 350, 360
- Гамильтон (Hamilton W. R.) 143
Гаусс (Gauss K. F.) 143
Гельфанд И. М. 58, 72, 88, 361
Генри (Henry) 28, 361
Гильберт (Hilbert D.) 153
Глисон (Gleason A.) 153, 361
Голлуб (Gollub J. P.) 316, 361
Граев М. И. 58, 88, 361
Гросс (Gross A.) 306, 361
- Декарт (Descartes R.) 231
Ди Прима (DiPrima R. C.) 289, 290, 304, 306, 310, 313, 314, 361
Дирак (Dirac P. A. M.) 57, 65, 97, 103, 143, 144, 361
- Дрейтлейн (Dreitlein J.) 200, 360
Дубиш (Dubisch R.) 6
Дынкин Е. Б. 195
Дэви (Davey A.) 290, 292, 304, 306, 310, 313, 314, 361
- Евклид 231
- Зендер (Zehnder E.) 336, 363
Зигель (Siegel C. L.) 299, 361
Зиппин (Zippin L.) 153, 362
Зоммерфельд (Sommerfeld A.) 89, 361
- Иглз (Eagles P. M.) 304, 306, 310, 311, 314, 361
Израилевич Я. А. 140, 360
- Карри (Curry J. H.) 331, 361
Келли (Kelley Al) 290, 292, 361
Керр (Kerr R. P.) 275, 361
Клейн (Klein F.) 237
Крускал (Kruskal M. D.) 115, 272, 273, 361
Крюгер (Krueger E. R.) 306, 361
Курош А. Г. 34, 361
- Ладыженская О. А. 288, 361
Ландау Л. Д. 318, 361
Ланфорд (Lanford O. E.) 297, 362
Леви-Чивита (Levi-Civita T.) 239
Ленг (Lang S.) 115, 116, 121, 362
Ли (Lee W.) 200, 360
Линдквист (Lindquist R. W.) 278, 360
Лифшиц Е. М. 318, 361
Лихнерович (Lichnerowicz A.) 280
Лонсдейл (Lonsdale E.) 28, 361
Лоренц Г. (Lorentz H. A.) 260
Лоренц Э. (Lorenz E. N.) 283, 330—332, 334—336, 340, 346, 352, 362

- Магнус** (Magnus W.) 25, 362
Мак-Кракен (McCracken M.) 288, 293, 332, 362
Марсден (Marsden J. E.) 288, 293, 332, 362
Миллер (Miller W.) 65, 258, 362
Минлос P. A. 58, 72, 361
Мищенко А. С. 211, 362
Мозер (Moser J.) 354, 361, 362
Монтгомери (Montgomery D.) 153, 362
Морс (Morse P. M.) 257, 258, 362
Мортон (Morton K. W.) 287, 362
- Наймарк** М. А. 103, 297, 362
Нахбин (Nachbin L.) 83, 362
Немыцкий В. В. 324, 362
Новиков П. С. 25, 362
- Паули** (Pauli W.) 57, 97, 362
Пейксото (Peixoto M.) 354, 362
Петер (Peter F.) 88, 362
Петров А. З. 263, 362
Пуанкаре (Poincaré H.) 260
- Ракá** (Racah G.) 200, 362
Редей (Redei L.) 34, 362
Релей (Rayleigh, J. W. Strutt) 305
Рисс (Riesz F.) 329, 362
Рихтмайер (Richtmeyer R. D.) 287, 336, 339, 362
Робертсон (Robertson H. P.) 257, 362
Роббин (Robbin J.) 290, 292, 294, 360
Ровчка (Raçzka R.) 58, 360
Рохлин В. А. 140, 363
Руссман (Russman H.) 336, 363
Рюэль (Ruelle D.) 283, 290, 297, 320, 322, 363
- Саккер** (Sacker R.) 297, 368
Секефальви-Надь (Sz. Nagy B.) 329, 362
Селл (Sell G. R.) 290, 325, 363
Смейл (Smale S.) 290, 294, 326, 363
Снейдер (Snyder H. A.) 306, 363
Степанов В. В. 324, 362
Стьюарт (Stuart J. T.) 290, 304, 306, 310, 313, 314, 361
Сугуира (Suguira M.) 103, 363
Суйнни (Swinney H. L.) 316, 361
Сэттинджер (Sattinger D. H.) 289, 363
- Такенс** (Takens F.) 283, 290, 297, 320, 322, 363
Тейлор (Taylor G. I.) 304—306, 363
Толмен Дж. (Talman J.) 69, 363
Толмен П. (Tolman R. C.) 266, 363
Томас Л. (Thomas L. H.) 44
Томас Т. (Thomas T. Y.) 248, 366
- Уайтхед** (Whitehead J. H. C.) 226, 227, 229, 363
Уиттекер (Whittaker E. T.) 69, 363
Уорнер (Warner G.) 58, 88, 363
- Фейгенбаум** (Feigenbaum M.) 351, 363
Феррерс (Ferrers) 69
Фешбах (Feshbach H.) 257, 258, 363
Финкельштейн (Finkelstein D.) 269, 363
Фитцджеральд (Fitzgerald G.) 260
Фландерс (Flanders H.) 229, 363
Фоменко А. Т. 211, 362
Фоменко Т. Н. 140, 360
Фридман А. А. 263
Фронсдейл (Fronsdal C.) 200, 360
Фукс Д. Б. 140, 363
- Хаар** (Haar A.) 85, 363
Хабертлер (Habetler G. J.) 289, 361
Хассард (Hassard Brian D.) 304, 363
Хаузнер (Hausner M.) 144, 157, 189, 197, 198, 203, 363
Хокинг (Hocking J. G.) 132, 363
Хопф (Hopf E.) 297, 321, 322, 363
- Шапиро** З. Я. 58, 72, 361
Шварц (Schwartz J. T.) 144, 157, 189, 197, 198, 203, 363
Шварцшильд (Schwarzschild K.) 263, 266
Шевалле (Chevalley C.) 154, 363, 364
Шифф (Schiff L.) 64, 365
Шиффер (Schiffer M.) 280, 360
Шур (Schur I.) 80, 364
- Эйзенхарт** (Eisenhart L. P.) 156, 215, 235, 256, 257, 364
Эйнштейн (Einstein A.) 260—262
Эллис (Ellis H. G.) 272, 364
- Янг** (Young G. S.) 132, 363

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- абелева группа 10, 24
абсолютная производная 243, 244
абсолютное дифференцирование 221, 243, 244
абстрактная алгебра *Ли* 159
автоковариационная функция 327
автокорреляция 329
автоморфизм 12
— алгебры *Ли* 175
— внутренний 20, 21, 165
— группы *Ли* локальный 179
аксиома отделимости *Хаусдорфа* 122, 172
аксиомы группы 7
алгебра без центра 186
алгебра *Ли см. Ли* алгебра
ассоциативности закон 7
— — расширенный 10
аттрактор 325
— *Лоренца* 330, 332—338, 340—344, 347, 348
— странный 316, 317, 321—323, 326, 327, 330—332
аффинная связность 228
аффинно связанное многообразие 227—229
аффинный параметр 220
- Бенара** задача 284
бесконечномерное представление группы 58
Бесселя дифференциальное уравнение 92
— функции 91, 92
— — сферические 94
Бианки тождество 250
бипрерывное отображение 136
бифуркация 285, 294—297, 330
— докритическая 295—297, 332
— закритическая 295, 297, 301
— несимметричная 295, 296
— симметричная 295
— субгармоническая 302, 351
Блазиуса задача 284
бутылка *Клейна* 116
Бэра теорема о категориях 353
бэровское множество 353
- вариационные уравнения *Эйлера* 219
векторное поле ковариантное 207
— — контравариантное 207, 208
верхнее многообразие 135
вершина клеточного комплекса 342
вес 191
весовое пространство 191
весовой вектор 191
— — обобщенный 191
ветвящаяся поверхность 332, 333
вещественная алгебра *Ли* 159
вещественное аналитическое многообразие 123
взрывной переход 296, 297, 320, 332, 351
Вильямса символы $[i, j]$ 344—346
вихри винтовые 306, 312, 315, 316
— — недоступные устойчивые 316
— волнистые 284, 285, 305, 306, 312, 316
— кольцевые 284, 285, 305, 306
— с осевой волнистостью 316
— — радиальной волнистостью 316
— *Тейлора* 285, 286, 306, 312, 315, 316
вложение многообразия 215, 216
внешнее умножение векторов и тензоров 211
внутреннее умножение векторов и тензоров 211
внутренние координаты 46, 47
— свойства многообразия 123
внутренний автоморфизм 20, 21, 165
внутренняя кривизна многообразия 252
время собственное 222
второе симметрическое расширение векторного поля 247, 248
- гармоники тессеральные 67, 73
гармонический анализ на группе 88
Гейзенберга группа 200
геодезическая (линия) 204, 227, 228
— — временноподобная 222
— — на псевдоримановом многообразии 221, 222
— — — римановом многообразии 217, 218, 220

- геодезическая (линия) нулевая 222
 — — пространственноподобная 222
 геодезическая полнота 272
 геодезически полное многообразие 272
 геодезических продолжение 227
 геометрия путей 229
 гильбертово пространство для задачи *Тейлора* 312
 главная компонента многообразия 173
 гомеоморфизм 138
 — изометрический 230
 гомеоморфные многообразия 138
 гомоморфизм 12, 15
 — алгебры *Ли* 174, 175
 — — — естественный 176
 — группы *Ли* 177
 — — — локальный 179
 — — *SL* (2, \mathbb{C}) на собственную группу *Лоренца* 50
 — — *SU* (2) на группу *SO* (3) 48
 — естественный 18
 гомотопический класс путей 126
 гомотопные пути 125, 126
 график *Лоренца* 335—338
 групп произведение полупрямое 31, 32
 — — прямое 30
 группа 7
 — абелева 10, 24
 — без центра 186
 — внутренних автоморфизмов 21
 — вращений 8
 — знакопеременная 15
 — *Клейна* из четырех элементов 9
 — коммутативная 10
 — конгруэнтности 237
 — конечно определенная 24
 — *Ли см. Ли* группа
 — линейная общая 35
 — — специальная 35
 — — унимодулярная 35
 — *Лоренца* 39, 40
 — — ограниченная 41
 — — полная 39, 40
 — — — однородная 42
 — — собственная 40, 41
 — многообразия фундаментальная 127
 — накрывающая 1^{∞}
 — непрерывная 32
 — ортогональная 37
 — — специальная 37
 — — унимодулярная 37
 — простая 17
 — пространственная кристалла 8, 27
 — — несимморфная 34
 — — симморфная 30, 34
 — — функции 27
 — *Пуанкаре* собственная 89
 — свободная 24
 — — абелева 24
 — симметрическая 15
 — точечная 28
 — трансляций 27
 — универсальная накрывающая 57, 186
 — унитарная 39
 — — специальная 39
 — — унимодулярная 39
 группа *GL* (n , \mathbb{C}) 35
 — *GL* (n , \mathbb{R}) 35
 — \mathcal{L} 42
 — \mathcal{L}' 40, 41
 — \mathcal{L}_x 40
 — O (n) 37
 — *SL* (n , \mathbb{C}) 35
 — *SL* (n , \mathbb{R}) 35
 — *SO* (n) 8, 37
 — *SU* (n) 39
 — *U* (n) 39
 групповая операция 7
 группы аксиомы 7
 — порядок 10
 — расширение 34
 даламбертиан 247
 движение в *H* 288
 — на многообразии 323
 движения орбита 323
 — траектория 323
 двузначное представление группы 97, 102
 действия группы транзитивность 62
 — — эффективность 61
 декартово произведение многообразий 133
 делитель нормальный 17
 дерево бифуркаций 318, 319
 диффеоморфизм 138
 дифференцирование абсолютное 221, 243, 244
 — в алгебре 188
 — ковариантное 240, 241
 — на многообразии 212
 — — — локальное 213
 докритическая бифуркация 295—297, 332
Дынкина диаграмма 196
 единица группы 7, 10
 естественный гомоморфизм 18
 — параметр 220

Жордана — Гёльдера теорема 23

задача *Бенара* 284

— *Блазиуса* 284

— *Кармана* 284

— *Куттта* 284

— о геодезических двухточечная край-
вая 226

— — — с начальными данными 222

— *Пуассейля* 283, 284

— *Тейлора* 284—287, 304—307, 311

закон ассоциативности 7

— — — расширенный 10

— инерции *Сильвестра* 214

— композиции (коллинеарных) ско-
ростей 40

— сокращения 10

— частного 211

закритическая бифуркация 295, 297,
301

звезда в вещественной подалгебре *Кар-
тана* 194

ячейки (1-cells) клеточного комплекса
342

знакопеременная группа 15

идеал 176

изометрический гомеоморфизм 230

изоморфизм 11

— алгебры *Ли* 175

— группы *Ли* 178

— — — локальный 179

изоморфные группы 11

иммерсия 216

инвариантная подгруппа 17

инвариантное интегрирование 83

— многообразие 307, 311

инвариантный тор 297, 302, 303, 320

индексов опускание 216

— поднятие 216

индексы немые 207

индуцированная топология 120, 121

инфинитезимальные операторы 59

исключительные алгебры *Ли* 196

«канторова книга» 343, 348

Кармана вихревая щелочка 286

— задача 284

Карри приближение для уравнений
Бенара 331

карт координатных трансляция 171

карта координатная 118

— — базисная 171

— — унаследованная 183

Картана подалгебра 191—193

карты координатные *Керра* 276, 277

— — *Финкельштейна* 269, 270

— — *Шварцшильда* 263—268

— — S^k -согласованные 119

касательный вектор к кривой 157

— — — подгруппе 182

квазипериодическая функция с m пе-
риодами 318, 319

Керра многообразие 275

Киллинга форма 192

класс вычетов 176

классификация простых комплексных
алгебр *Ли* 189

Клейна группа из четырех элементов 9

— бутылка 116

клеточная матрица 79

клеточный комплекс 342

ковариантная производная 241

ковариантное векторное поле 207

— дифференцирование 240, 241

ковариантный тензор 210

коммутативная группа 10

коммутации соотношения 64

компактная группа *Ли* 82, 154

комплексификация вещественной ал-
гебры *Ли* 189, 190

комплексная алгебра *Ли* 159

композиции (коллинеарных) скоростей
закон 40

композиционный ряд 22, 23

компонента многообразия 125

— — — главная

компоненты обобщенной скорости 208

Колмогорова — *Арнольда* — *Мозера* те-
орема 354, 355

кольцевые вихри 284, 285, 305, 306

конгруэнтности группа 237

конгруэнтность 237

конгруэнтные фигуры 237

конечно определенная группа 24

константы разделения переменных 257

контравариантное векторное поле 207,
208

контравариантный тензор 210

координат системы разделяющие 257,
258

координата точки на многообразии 118

координаты внутренние 46, 47

— геодезические 234

— логарифмические 155, 161, 163

— нормальные 236

— — геодезические 236

— — римановы 236

— римановы 234

корневые векторы 193

- корневые пространства 193
 корни 193
 космологическая постоянная 262, 263
Коши задача 278
 кратность накрытия 136
 кривая на многообразии 124
Кристоффеля символ трехиндексный
 второго рода 220
 — — — первого рода 220
 критерий *Картана* 193
Крускала многообразие 272
 — расширение многообразия *Шварц-
 шильда* 271
 кручение 229
Куэтта задача 284
 — течение 284—286, 304, 311, 315
Кэли теорема 20
Кэмпбелла — *Бейкера* — *Хаусдорфа*
 (КБХ) теорема 169
 — — — формула 169
- Лагранжа* теорема для конечных групп
 18
Ландау — *Хопфа* модель ранней ста-
 дии турбулентности 317—321, 329,
 351
 лапласиан 247
 — в сферических координатах 74
 латинский квадрат 9
 левая трансляция 20, 63, 83, 166, 171
 левоинвариантная мера 85
 левоинвариантный интеграл
 левый сдвиг 166. *См. также* Левая
 трансляция
 левый смежный класс 17
Лежандра дифференциальное уравне-
 ние 69
 — многочлен 70
 — функции 67
 — — присоединенные 69
 лемма *Шура* 80
Ли алгебра абстрактная 159
 — — вещественная 159
 — — группы *Ли* 155, 157, 158
 — — — линейной 159
 — — комплексная 159
 — — нильпотентная 190
 — — полупростая 190, 193
 — — простая 176, 190
 — — разрешимая 190
 — группа 81, 153
 — — компактная 82, 154
 — — линейная 153
 — — некомпактная 82
 — — непрерывная 81
 — n -мерная 154
 — — произведение 158
 — скобки 158, 209
 линейная группа общая 35
 — — специальная 25
 — — унимодулярная 35
 линейный режим в задачах гидродина-
 мической устойчивости поздний 291
 — — — — — ранний 290
 логарифмические координаты 155, 161,
 163
 локальное дифференцирование 213
 — представление группы 101
 локальный автоморфизм группы *Ли*
 179
 — гомоморфизм группы *Ли* 177
 — изоморфизм группы *Ли* 179
Лоренца (Lorentz H. A.) группа 39, 40
 — — — ограниченная 41
 — — — полная 39, 40
 — — — — однородная 42
 — — — собственная 40, 41
 — — — \mathcal{L}_x 40
 — — — преобразование 245
 — — — чистое 43
Лоренца (Lorenz E. N.) аттрактор 330,
 332—338, 340—344, 347, 348
 — — график 335—338
 — — система 330
 лучевое представление группы 57, 98,
 100
 — пространство 99
- максимальное расширение многообра-
 зия *Эйнштейна* 272, 273
 матрица клеточная 79
 — нормальная 38
 — ортогональная 36
 — представления 92
 — унитарная 39
 матрицы сигнатура 214
Мёбиуса лист 116, 117, 149
 — преобразование 11
 мера левоинвариантная 85
 — *Хаара* 83, 85
 метод отождествления (склеивания)
 краев многообразия 117
 — *Пикара* итерационный 224
 — разделения переменных 257
 метрики наследование 215
 метрический тензор 213, 214
 — — наследственный (индуцирован-
 ный) 215
 многообразии 115, 116, 123
 — аффинно связное 227—229
 — верхнее 135
 — вещественное аналитическое 123

- геодезически полное 272
- группы 45
- — вращений 46
- инвариантное 307—311
- Керра 275
- Крускала 272
- линейно связное 124
- локально притягивающее 292
- накрывающее 136
- — универсальное 140, 142, 148
- неустойчивое 292
- нижнее 135
- односвязное 124, 126
- ориентируемое 245
- — по Лоренцу 246
- псевдориманово 214
- — накрывающее 230
- плоское 253, 254
- риманово 214
- — накрывающее 230
- — — универсальное 230
- устойчивое 293
- Эйштейна 263
- многообразия вложение 215, 216
- внутренние свойства 123
- внутренняя кривизна 252
- компонента 125
- — главная 173
- накрытие *см.* Накрытие многообразия
- погружение 215, 216
- проекция на другое многообразие 136
- топология 232
- многообразия гомотопические 138
- множество Бэровское 353
- движения α -предельное 324
- — ω -предельное 323—325
- матриц неприводимое 81
- тощее 353
- цилиндрическое 358
- модель ранней стадии турбулентности Ландау — Хопфа 317, 321, 329, 351
- — — Рюэля — Такенса 322—323, 329, 351
- — — Фейгенбаума 320, 351, 352
- Навье** — Стокса уравнения 286
- — — в цилиндрических координатах 311
- накрывающая группа 185
- накрывающее многообразие 136
- — универсальное 140, 142, 148
- накрытие многообразия 135, 136
- — двулистное 135
- — p -листное 136
- накрытие кратность 136
- наследование метрики 215
- натуральный параметр 220, 221, 228
- независимые циклы 21
- некомпактная группа Ли 82
- нелинейный режим в задачах гидродинамической устойчивости 291
- немые индексы 207
- неосесимметричное простое собственное колебание 315
- непрерывная группа 32
- — Ли 81
- неприводимое множество матриц 81
- представление группы 53, 79
- несимметричная бифуркация 295, 296
- несимметричная пространственная группа 30, 34
- несохранение близости (locally eventually onto) 334
- нетипичные (nongeneric) свойства системы 353, 355
- неустойчивое многообразие 292
- неустраиваемая особенность (genuine singularity) 272, 273
- нечетная перестановка 14
- нильпотентная алгебра Ли 190
- нижнее многообразие 135
- нормальная матрица 38
- подгруппа 17
- нормальные координаты 236
- — геодезические 236
- — римановы 236
- нормальный делитель 17
- нулевая геодезическая 222
- область притяжения 325, 326
- обобщенные собственные функции 289
- обобщенный весовой вектор 191
- образующие элементы группы 23, 24
- обратный элемент группы 8, 10
- ограниченная группа Лоренца 41
- однородное пространство 62, 88
- односвязная поверхность 47
- односвязное многообразие 124, 126
- операторы инфинитезимальные 59
- поднятия и опускания 65
- операция групповая 7
- симметричные функции 27
- определяющие соотношения между элементами группы 24
- опускание индексов 216
- орбита движения 323
- ориентация фигуры 240
- ориентируемое многообразие 245
- по Лоренцу многообразие 246
- ориентируемость 245, 246

- ортогональная группа 37
 — — специальная 37
 — — унимодулярная 37
 — матрица 36
 особенность неустраиваемая см. Неустраиваемая особенность
 отображение биективное 136
 — экспоненциальное 161, 163
 — Ad_{μ} 163, 164
 отождествления (склеивания) краев
 многообразия метод 117
 отображения скользящие 34

 параллельный перенос 239, 244, 245
 параметр аффинный 220
 — естественный 220
 — натуральный 220, 221, 228
 — предпочтительный 220
Пейкото теорема 320, 351, 354, 355
 перестановка 13
 — нечетная 14
 — циклическая 13
 — четная 14
 переход взрывной 296, 297, 320, 332, 351
 периодическая n -кратно функция 25
 — — — вырожденная 26
 — — — невырожденная 26
 периодической n -кратно функции периоды 26
 — — — решетка 26
 — — — фундаментальная система периодов 26
Пикара итерационный метод 224
 плоское многообразие 253, 254
 поверхностные гармоники 67
 поверхность ветвящаяся 332, 333
 — односвязная 47
 подалгебра 175
 — *Картана* 193
 подгруппа 10
 — вращений группы *Лоренца* 41
 — замкнутая группы *Ли* 182
 — инвариантная 17
 — нормальная 17
 — порожденная элементом 10
 — самосопряженная 17, 21
 — собственная 10
 — сопряженная 21
 — тривиальная 10
 — циклическая 10
 поднятие индексов 216
 поднятия и опускания операторы 65
 подпредставление группы 53
 полная система представлений 87
 — группа *Лоренца* 39, 40
 полнота геодезическая 272
 — системы тессеральных гармоник 73
 полупоток 287, 288, 324
 полупростая алгебра *Ли* 190, 193
 полупрямая сумма алгебр *Ли* 187, 188
 порядок группы 10
 — элемента группы 10
 последовательность обходов (kneading sequences) 340—342
 постоянная космологическая 262, 263
 почти периодическая функция 329
 правая трансляция 20
 правильная окрестность (good neighborhood) 136, 138
 правильное разбиение отрезка 139
 правый смежный класс 17
 предпочтительный параметр 220
 представитель смежного класса 17
 представление группы 20, 53, 163
 — — бесконечномерное 58
 — — вращений $SO(3)$ 63
 — — двузначное 57, 97, 102
 — — локальное 101
 — — лучевое 57, 98, 100
 — — матриц 60
 — — неприводимое 53, 79
 — — приводимое 53, 79
 — — — вполне (fully) 79
 — — — полностью (completely) 80
 — — присоединенное 163, 165, 185, 186
 — — разложимое 79
 — — регулярное 20
 — — — левое 63, 85
 — — — правое 63, 85
 — — спинное 102
 — — точное (faithful) 20, 53, 163, 185, 186
 — — унитарное 78
 представлений группы прямая сумма 79
 представления группы матрица 92
 — — построение 56
 — — расщепление (приведение) 56
 — — характер 94
 представления группы эквивалентные 77
 представляющие пространство 53
 преобразование *Лоренца* 245
 — — чистое 43
 — — *Мёбиуса* 11
 приведенное волновое уравнение 92, 256
 принцип рациональных индексов 29, 30
 — эквивалентности общей теории относительности 240
 принципы поднятия многообразия 138, 139

- притяжения область 325, 326
 проблема тождества (word problem) 25
 продолжение геодезических 227
 проекция одного многообразия на другое 136
 произведение группы полупрямое 31, 32
 — — прямое 30
 — *Ли* 158
 — многообразий декартово 133
 — подмножеств элементов группы 18
 производная абсолютная 241
 — ковариантная 243, 244
 простая алгебра *Ли* 176, 190
 — группа 17
 простое множество векторов в звезде 195
 простота группы вращений и группы *Лоренца* 50
 — — *А*₅ 22
 пространства систем 352
 пространственная группа кристалла 8, 27
 — — функции 27
 пространственноподобная геодезическая 222
 пространство весовое 191
 — лучевое 99
 — однородное 88
 прямая сумма алгебр *Ли* 187
 псевдориманово многообразие 214
 — — накрывающее 230
Пуанкаре задача 283, 284
Пуанкаре группа собственная 89
 — отображение 297
 — отображения нормальная форма 300
 пунктирный спинор 112
 пути гомотопные 125, 126
 путь на многообразии 124
 — — — нуль-гомотопный 127
- разбиение отрезка правильное 139
 разделение переменных в задаче *Тейлора* 313
 разделения переменных константы 257
 — — метод 257
 разделимости переменных условия 257
 разделяющие системы координат 257, 258
 разложимое представление группы 79
 разрешимая алгебра *Ли* 190
 ранг тензора 210
 расширение группы 34
 — *Крускала* многообразия *Шварцшильда* 271
 — максимальное многообразия *Эйнштейна* 272, 273
- регулярное представление группы 20
 — — — левое 63, 85
 — — — правое 63, 85
 регулярные серии алгебр *Ли* 196
Рейнольдса число 284
 ретракции 350
 решетка *n*-кратно периодической функции 26
Римана кривизна скалярная 250
 — кривизны тензор 247
 — тензор 247, 249
 риманово многообразие 214
 — — накрывающее 229
 — — — универсальное 230
 римановы координаты 234
 — — нормальные 236
Риччи тензор 247
Родрига формула 70, 71, 74
Рюэля — *Такенса* модель ранней стадии турбулентности 322, 323, 329, 351
 ряд композиционный 22, 23
- самоспряженная подгруппа 17, 21
 свертка 211
 свойства систем нетипичные (nongeneric) 353, 355
 — — типичные (generic) 352, 353, 355
 свойство системы сильно нетипичное (strongly nongeneric) 354
 — — типичное (strongly generic) 354
 связность аффинная 228
 — собственная группы *Лоренца* 41
 сдвиг 20. См. также Трансляция
 сигнатура матрицы 214
Сильвестра закон инерции 214
 символы *Вильямса* [*i*, *j*] 344—346
 симметричная билинейная форма 192
 — бифуркация 295
 симметричный волчок 89
 симморфная пространственная группа 30, 34
 система *Лоренца* 330
 скалярная кривизна *Римана* 250
 скалярное поле на многообразии 205, 206
 скобки *Ли* 158, 209
 скользящие отражения 34
 смежный класс 17
 — — левый 17
 — — правый 17
 смешанный тензор 210
 собственная группа *Лоренца* 40, 41
 — подгруппа 10
 собственное время 222

- собственное значение с индексом 1 355
 — колебание простое неосесимметричное 315
 собственные колебания в задачах гидродинамической устойчивости 288—290
 — функции обобщенные 289
 соглашение о суммировании 40, 207
 сокращения закон 10
 соотношения коммутации 64
 — определяющие между элементами группы 24
 сопряжение в комплексной алгебре *Ли* 198
 сопряженная подгруппа 21
 специальная группа линейная 35
 — — ортогональная 37
 — — унитарная 39
 — релятивистская теория гравитации 265
 спиновое представление группы 102
 спинор 112
 — ранга 1 112
 — — — пунктирный 112
 — — r 112
 — симметричный 113
 — смешанный 113
 странный аттрактор 316, 317, 321—323, 326, 327, 330—332
 структура циклических групп 19
 структурные постоянные 159
 стягивания 350
 субгармоническая бифуркация 302, 351
 сферические функции *Бесселя* 94
- таблица умножения группы 9
Тейлора вихри 285, 286, 306, 312, 315, 316
 — задача 284—287, 304—307, 311
 тензор ковариантный 210
 — контравариантный 210
 — кривизны *Римана* 247
 — метрический 213, 214
 — — наследственный (индуцированный) 215
 — *Римана* 247, 249
 — *Риччи* 247
 тензора ранг 210
 тензорное умножение векторов и тензоров 211
 тензорные поля на многообразии 210—213
 теорема *Бэра* о категориях 353
 — *Жордана — Гельдера* 23
 — *Колмогорова — Арнольда — Мозера* 354, 355
 — *Кэли* 20
 — *Кэмпбелла — Бейкера — Хаусдорфа* (КБХ) 169
 — *Лагранжа* для конечных групп 18
 — о гомоморфизмах 19
 — — — алгебр *Ли* 177
 — — — групп *Ли* 182, 185
 — — — накрывающей гомотопии 140
 — *Пейкото* 320, 351, 354, 355
 — сложения для тессеральных гармоник 73
 — *Уайтхеда* 226, 229
 — *Уитни* о вложении 144
 — *Эйлера* 8, 37
 теоремы *Хопфа* о бифуркациях 294, 296
 тессеральные гармоники 67, 73
 течение *Куэтта* 284—286, 304, 311, 315
 — турбулентное 318
 типичные (generic) свойства систем 352, 353, 355
 тождества проблема (word problem) 25
 тождество *Бианки* 250
 топология индуцированная 120, 121
 — многообразия 232
 тор инвариантный 297, 302, 303, 320
 точечная группа функции 28
 точка движения α -предельная 324
 — — ω -предельная 324
 точное (faithful) представление группы 20, 53, 163, 185, 186
 тощее множество 353
 траектория 323
 транзитивность действия группы 62
 трансляций группа 27
 трансляция 20
 — карт 171
 — левая 20, 63, 83, 166, 171
 транспозиция 14
 трехиндексный символ *Кристоффеля* второго рода 220
 — — — первого рода 220
 тривиальная подгруппа 10
- Уайтхеда* теорема 226, 229
 углы *Эйлера* 84
Уитни теорема о вложении умножение векторов и тензоров внешнее 211
 — — — — внутреннее 211
 — — — — тензорное 211
 универсальная накрывающая группа 57, 186
 универсальное накрывающее многообразие 140, 142, 148

- — — риманово 230
унимодулярная группа линейная 35
 — — ортогональная 37
 — — унитарная 39
 унитарная группа 39
 — матрица 39
 унитарное представление группы 78
 унитарные преобразования эквивалентные 99, 100
 уравнение *Бесселя* 92
 — волновое приведенное 92, 256
 — *Лежандра* 69
 — поля *Эйнштейна* 262
 уравнения *Навье* — *Стокса* 286
 — — — в цилиндрических координатах 311
 условия разделимости переменных 257
 устойчивое в смысле *Ляпунова* движение 330
 — многообразии 293
- Факторалгебра** 176
 факторгруппа 18, 184
 факторпространство 176
Фейгенбаума модель ранней стадии турбулентности 320, 351, 352
Финкельштейна карты координатные 269, 270
 форма билинейная симметричная 192
 — *Киллинга* 192
 формула *Кэмпбелла* — *Бейкера* — *Хаусдорфа* (КБХ) 169
 — *Родрига* 70, 71, 74
фундаментальная группа многообразия 127
 — квадратичная форма 41
 — система периодов n -кратно периодической функции 26
функция *Бесселя* 91, 92
 — — сферические 94
 — *Лежандра* 67
 — — присоединенные 69
 — от z и \bar{z} 108
функция автоковариационная 327
 — квазипериодическая с t периодами 318, 319
 — почти периодическая 329
 — n -кратно периодическая 25
 — — — вырожденная 26
 — — — невырожденная 26
- Хаара** метод 83, 85
 характер представления группы 94
- Хаусдорфа* аксиома отделимости 122, 172
Хопфа пример бифуркаций к притягивающему тору 297, 321, 322
 — теоремы о бифуркациях 294, 296
- центр алгебры 186
 — группы 186
 цикл 13
 цикла длина 13
 циклическая перестановка 13
 — подгруппа 10
 циклы независимые 21
 цилиндрическое множество 358
- частного закон 211
 четная перестановка 13
 четность перестановки 14
 число *Рейнольдса* 284
 — *Тейлора* 314
 чистое преобразование *Лоренца* 43
- Шварцшильда** внутренняя метрика 267
 — координатные карты 263
 — линейный элемент 267
 — многообразии 263
 — радиус 263, 266
Шура лемма 80
- Эйлера** теорема 8, 37
 — углы 84
 — уравнения вариационные 219
Эйнштейна многообразие 263
 — уравнение поля 262
 эквивалентные представления группы 77
 — унитарные преобразования 99, 100
 экспоненциальное отображение 161, 163
 элемент (группы) бесконечного порядка 10
 — — обратный 8, 10
 — — сопряженный 17, 21
 элемента группы порядок 10
 элементы группы коммутирующие 10
 — — образующие 23, 24
 энергетический спектр для движений в \mathbb{R}^n 327
 эффективность действия группы 61

- ядро гомоморфизма алгебры Ли 176
— — группы Ли 182
— отображения 15
Якоби многочлены 72
— тождество 158, 209
- C^k -многообразие 123
 C^∞ -многообразие 123
 C^k -согласованные координатные карты 119
- n -кратно периодическая функция см.
Периодическая n -кратно функция
 p -листное накрытие многообразия 135, 136
 α -предельная точка движения 324
 α -предельное множество движения 324
 ω -предельная точка движения 324
 ω -предельное множество движения 323—325

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора перевода	5
Предисловие	6
Глава 18. Элементарная теория групп	7
18.1. Аксиомы группы. Примеры	7
18.2. Элементарные следствия из аксиом. Дальнейшие определения	10
18.3. Изоморфизм	11
18.4. Группы перестановок	13
18.5. Гомоморфизмы. Нормальные подгруппы	15
18.6. Смежные классы	17
18.7. Факторгруппы	18
18.8. Теорема о гомоморфизмах	19
18.9. Структура циклических групп	19
18.10. Трансляция. Внутренние автоморфизмы	20
18.11. Подгруппы группы \mathcal{S}_4	21
18.12. Образующие элементы и определяющие соотношения. Свободные группы	23
18.13. Кратно периодические функции и кристаллы	25
18.14. Пространственные и точечные группы	26
18.15. Прямое и полупрямое произведения групп. Симметричные пространственные группы	30
Глава 19. Непрерывные группы	35
19.1. Ортогональная группа и группа вращений	35
19.2. Группа вращений $SO(3)$. Теорема Эйлера	37
19.3. Унитарные группы	39
19.4. Группы Лоренца	39
19.5. Многообразие группы	45
19.6. Внутренние координаты в многообразии группы вращений	46
19.7. Гомоморфизм группы $SU(2)$ на группу $SO(3)$	48
19.8. Гомоморфизм группы $SL(2, \mathbb{C})$ на собственную группу Лоренца \mathcal{L}_p	50
19.9. Простота группы вращений и группы Лоренца	50
Глава 20. Представления групп I. Вращения и сферические гармоники	52
20.1. Конечномерные представления группы	53
20.2. Законы преобразования векторов и тензоров	53
20.3. Другие представления групп в физике	57
20.4. Бесконечномерные представления	58
20.5. Простой случай: группа $SO(2)$	58
20.6. Представления групп матриц на X^∞	60
20.7. Однородные пространства	61
20.8. Регулярные представления	63

20.9. Представления группы вращений $SO(3)$	63
20.10. Тессеральные гармоники. Функции Лежандра	67
20.11. Присоединенные функции Лежандра	69
20.12. Матрицы неприводимых представлений группы $SO(3)$. Углы Эйлера	71
20.13. Теорема сложения для тессеральных гармоник	73
20.14. Полнота системы тессеральных гармоник	74
Глава 21. Представления групп II. Общие сведения. Движения. Функции Бесселя	77
21.1. Эквивалентность. Унитарные представления	77
21.2. Приведение представлений	78
21.3. Лемма Шура и ее следствия	80
21.4. Компактные и некомпактные группы	81
21.5. Инвариантное интегрирование. Мера Хаара	83
21.6. Полная система представлений компактной группы	87
21.7. Однородные пространства как конфигурационные пространства в физике	88
21.8. Группа M_2 и родственные группы	89
21.9. Представления группы M_2	90
21.10. Некоторые неприводимые представления	90
21.11. Функции Бесселя	92
21.12. Матрицы представлений	92
21.13. Характеристики	94
Глава 22. Представления групп и квантовая механика	97
22.1. Представления в квантовой механике	97
22.2. Вращения осей	98
22.3. Лучевые представления	99
22.4. Конечномерный случай	100
22.5. Локальные представления	100
22.6. Происхождение двузначных представлений	101
22.7. Представления групп $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$	103
22.8. Неприводимые представления группы $SU(2)$	106
22.9. Характеристики представлений группы $SU(2)$	107
22.10. Функции от z и \bar{z}	108
22.11. Конечномерные представления группы $SL(2, \mathbb{C})$	109
22.12. Неприводимые инвариантные подпространства пространства X^∞ для группы $SL(2, \mathbb{C})$	111
22.13. Спиралы	112
Глава 23. Элементарная теория многообразий	115
23.1. Примеры многообразий. Метод отождествления	115
23.2. Координатные системы или карты. Согласованность. Гладкость	118
23.3. Индуцированная топология	120
23.4. Определение многообразия. Аксиома отделимости Хаусдорфа	121
23.5. Кривые и функции на многообразии	123
23.6. Связность. Компоненты многообразия	124
23.7. Глобальная топология. Гомотопные пути. Фундаментальная группа	125
23.8. Механические связи. Декартовы произведения	132

Глава 24. Накрывающие многообразия	135
24.1. Определение и примеры	135
24.2. Принципы поднятия	138
24.3. Универсальное накрывающее многообразие	140
24.4. Замечания о построении математических моделей	142
24.5. Построение универсального накрытия	145
24.6. Многообразия, накрываемые заданным многообразием	148
Глава 25. Группы Ли	152
25.1. Определение и формулирование целей	153
25.2. Разложение функций $m(\cdot, \cdot)$ и $K(\cdot)$	156
25.3. Алгебра Ли группы Ли	157
25.4. Абстрактные алгебры Ли	159
25.5. Алгебры Ли линейных групп	159
25.6. Экспоненциальное отображение. Логарифмические координаты	161
25.7. Лемма о внутренних автоморфизмах. Отображение Ad_{μ}	163
25.8. Леммы о формальных производных	166
25.9. Лемма о дифференцировании экспонент	168
25.10. Формула Кэмпбелла — Бейкера — Хаусдорфа (КБХ)	169
25.11. Трансляции карт. Согласованность. \mathcal{G} как аналитическое многообразие	171
25.12. Гомоморфизмы алгебры Ли	174
25.13. Гомоморфизмы группы Ли	177
25.14. Теорема о гомоморфизмах для групп Ли	182
25.15. Прямая и полупрямая суммы алгебр Ли	187
25.16. Классификация простых комплексных алгебр Ли	189
25.17. Модели простых комплексных алгебр Ли	196
25.18. О применении групп Ли и алгебр Ли в физике	199
Приложение к главе 25. Две нелинейные группы Ли	200
Глава 26. Метрика и геодезические на многообразии	204
26.1. Скалярные и векторные поля на многообразии	205
26.2. Тензорные поля	210
26.3. Метрика в евклидовом пространстве	213
26.4. Римановы и псевдоримановы многообразия	214
26.5. Поднятие и опускание индексов	216
26.6. Геодезические на римановом многообразии	217
26.7. Геодезические на псевдоримановом многообразии	221
26.8. Геодезические. Задача с начальными данными. Условие Липшица	222
26.9. Интегральное уравнение. Итерации Пикара	224
26.10. Геодезические. Двухточечная краевая задача	226
26.11. Продолжение геодезических	227
26.12. Аффинно связанные многообразия	227
26.13. Римановы и псевдоримановы накрывающие многообразия	229
Глава 27. Римановы, псевдоримановы и аффинно связанные многообразия	231
27.1. Топология и метрика	232
27.2. Геодезические (римановы) координаты	233
27.3. Нормальные координаты в римановых и псевдоримановых многообразиях	235
27.4. Геометрические понятия. Принцип эквивалентности	237
27.5. Ковариантное дифференцирование	240

27.6.	Абсолютное дифференцирование вдоль кривой	243
27.7.	Параллельный перенос	244
27.8.	Ориентируемость	245
27.9.	Тензор Римана в общем виде. Лапласиан и даламбертиан	246
27.10.	Тензор Римана в римановом или псевдоримановом многообразии	249
27.11.	Тензор Римана и внутренняя кривизна многообразия	252
27.12.	Плоские многообразия и обращение тензора Римана в нуль	253
27.13.	Анализ Эйзенхарта систем Штеккеля	256
Глава 28.	Расширение многообразий Эйнштейна	259
28.1.	Специальная теория относительности	259
28.2.	Уравнения Эйнштейна гравитационного поля	260
28.3.	Карты Шварцшильда	263
28.4.	Расширения Финкельштейна карт Шварцшильда	269
28.5.	Расширение Крускала	271
28.6.	Максимальные расширения. Геодезическая полнота	272
28.7.	Другие расширения многообразий Шварцшильда	273
28.8.	Многообразия Керра	275
28.9.	Задача Коши	278
28.10.	Заключительные замечания	282
Глава 29.	Бифуркации в задачах гидродинамической устойчивости	283
29.1.	Классические задачи теории гидродинамической устойчивости	283
29.2.	Примеры бифуркаций в гидродинамике	284
29.3.	Уравнения Навье — Стокса	286
29.4.	Формулировка задачи в гильбертовом пространстве	287
29.5.	Задача с начальными данными. Полупоток в H	287
29.6.	Собственные колебания	288
29.7.	Приведение к конечномерной динамической системе	290
29.8.	Бифуркация к новому стационарному состоянию	294
29.9.	Бифуркация к периодической траектории	296
29.10.	Бифуркация от периодической траектории к инвариантному тору	297
29.11.	Субгармоническая бифуркация	302
	Приложение к главе 29. Некоторые детали построения инвариантного тора	303
Глава 30.	Инвариантные многообразия в задаче Тейлора	304
30.1.	Обзор результатов по задаче Тейлора, полученных к 1968 г.	304
30.2.	Построение инвариантных многообразий	307
30.3.	Цилиндрические координаты	311
30.4.	Гильбертово пространство	312
30.5.	Разделение переменных в цилиндрических координатах	313
30.6.	Последние результаты по задаче Тейлора	314
	Приложение к главе 30. Матрицы, входящие в основное уравнение в форме Иглза	317
Глава 31.	Ранняя стадия турбулентности	318
31.1.	Модель Ландау — Хопфа	318
31.2.	Пример Хопфа	321
31.3.	Модель Рюзля — Такенса	322
31.4.	ω -предельное множество движения	323

31.5. Аттракторы	325
31.6. Энергетический спектр для движений в \mathbb{R}^n	327
31.7. Почти периодические и аperiodические движения	328
31.8. Устойчивость по Ляпунову	330
31.9. Система Лоренца. Бифуркации	330
31.10. Аттрактор Лоренца. Общее описание	332
31.11. Аттрактор Лоренца. Аperiodические движения	335
31.12. Статистические свойства отображений f и g	339
31.13. Аттрактор Лоренца. Детали структуры. I	340
31.14. Символы Вильямса $[i, j]$	344
31.15. Предыстории	346
31.16. Аттрактор Лоренца. Детали структуры. II	347
31.17. Существование звеньев в F	349
31.18. Бифуркация к странному аттрактору	350
31.19. Модель Фейгенбаума	351
Приложение к главе 31 (разделы А — З). Типичные свойства систем	352
31.А. Пространства систем	352
31.Б. Отсутствие меры Лебега в бесконечномерном гильбертовом пространстве	353
31.В. Типичные свойства систем	353
31.Г. Сильная типичность. Физическая интерпретация	354
31.Д. Теорема Пейксото	354
31.Е. Другие примеры типичных и нетипичных свойств	354
31.Ж. Отсутствие соответствия между типичностью и существованием меры Лебега	355
31.З. Вероятность и физика	356
Список литературы	360
Именной указатель	365
Предметный указатель	375