

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ГОРНОГО ДЕЛА им. Н.А. ЧИНАКАЛА
НОУ (ВУЗ) СИБИРСКИЙ НЕЗАВИСИМЫЙ ИНСТИТУТ

А.Ф. РЕВУЖЕНКО _____

ПРИЛИВНЫЕ ВОЛНЫ
И НАПРАВЛЕННЫЙ
ПЕРЕНОС МАСС ЗЕМЛИ

Ответственный редактор
академик РАН *Б.Д. Аннин*



НОВОСИБИРСК
«НАУКА»
2013

УДК 525.6
ББК 26.0
Р 32

Ревуженко А.Ф. Приливные волны и направленный перенос масс Земли / А.Ф. Ревуженко. — Новосибирск: Наука, 2013. — 204 с.

ISBN 978–5–02–019126–6.

Монография посвящена моделированию процесса деформирования Земли под действием приливных сил. Предложен кинематический метод экспериментального исследования приливов в лабораторных условиях. Показано, что при определенных параметрах возможен восточный дрейф ядра. Обнаружен эффект направленного переноса масс приливыми волнами. Дано теоретическое описание эффекта в рамках различных реологических моделей тела.

Показано, что с увеличением высоты приливной волны механизм деформирования тела может измениться качественно.

Указаны приложения полученных результатов в смежных областях механики: для проведения визкозиметрических измерений, обогащения полезных ископаемых, обработки пластических материалов и порошков, моделирования ряда процессов, приводящих к образованию упорядоченных структур.

Книга рассчитана на научных работников и студентов, специализирующихся в области наук о Земле и механики сплошных сред, а также аспирантов.

Ил. 97. Библиогр. 277 назв.

Рецензенты

доктор технических наук *А.Г. Кирдяшкин*

доктор технических наук *В.Е. Миренков*

доктор технических наук *В.М. Серяков*

Утверждено к печати Ученым советом
Института горного дела им. Н.А. Чинакала СО РАН

© Ревуженко А.Ф., 2013
© Институт горного дела им. Н.А. Чинакала
СО РАН, 2013
© НОУ (ВУЗ) Сибирский независимый институт, 2013
© Редакционно-издательское оформление.
Сибирская издательская фирма «Наука»,
2013

ISBN 978–5–02–019126–6

Предисловие

Приливные силы действуют на все небесные тела и оказывают влияние на их эволюцию. Приливы приводят к перестройке орбит небесных тел, изменению скоростей их вращения, перемещениям воздушных и водных масс, а также к циклическому деформированию всего тела в целом. При определенных условиях приливные силы могут вызвать разрушение небесного тела.

Круг явлений, связанных с приливами, чрезвычайно широк. Их изучению посвящена обширная литература. Однако в этой области есть практически не разработанное направление — экспериментальное моделирование приливного деформирования в лабораторных условиях. Необходимость развития этого направления диктуется всем опытом механики и спецификой поставленной ниже задачи. Мы здесь не будем рассматривать эволюцию орбит небесных тел, приливные явления в атмосфере или океанах. Ограничимся изучением только твердых приливов и соответствующих перемещений внутренних масс Земли. В такой формулировке поставленную задачу можно отнести к области механики деформируемого твердого тела или к динамике вязкой жидкости, если для тела принять вязкую реологию.

В механике, как известно, экспериментальное моделирование используется довольно широко и играет такую же важную роль, как и теоретические исследования, а также исследования, связанные с инструментальными наблюдениями в натуральных условиях (для тех задач, в которых изучаются природные или техногенные явления, например в горном деле). В исследованиях же по приливам сложилось так, что развиваются только теоретические методы и методы, связанные с инструментальными наблюдениями в естественных условиях (на Земле, Луне и других, доступных для наблюдения небесных телах). Третье направление — экспериментальное моделирование — здесь практически не развивается.

В настоящей книге сделана попытка частично восполнить этот пробел. Основная трудность моделирования приливов связана с тем,

что в лабораторных условиях невозможно избавиться от силы тяжести и задать распределение массовых сил, линейно зависящее от координат (именно к таким сводятся приливные силы). 18 апреля 1983 г. автор предложил метод кинематического моделирования приливов, который позволил обойти эту трудность. Экспериментально на моделях был обнаружен эффект направленного переноса масс. Он проявляется в том, что за полный оборот приливной волны внутренние точки тела описывают почти замкнутые траектории, но к первоначальному положению не возвращаются. С увеличением числа циклов эффект накапливается и приводит к сколь угодно большим деформациям тела. Эти результаты изложены в гл. 1. Теоретическое исследование эффекта в рамках различных реологических моделей тела дано в гл. 2.

Для Земли приливные деформации весьма малы. Однако есть данные, показывающие, что в прошлом они были гораздо большими. Кроме того, есть определенные основания считать, что современная Луна образовалась вследствие приливного разрушения существовавшего ранее более крупного спутника Земли (ссылки на источники содержатся во Введении). В связи с этим в гл. 2–4 рассмотрены экспериментальные и теоретические модели деформирования тела в условиях возрастания высоты приливной волны. Показано, что в этом случае механизм приливного деформирования может измениться качественно. В конце концов тело приобретает форму, близкую к тору или гантели, и с дальнейшим увеличением приливных сил тело разделяется на части. В последней гл. 5 рассмотрены приложения полученных результатов в смежных областях механики для проведения визкозиметрических измерений, постановки экспериментов с целью изучения определяющих уравнений различных сложных сред, обработки пластических материалов, уплотнения и смешения порошков, исследования локализации сдвигов (в том числе и турбулентных пластических течений, когда различные семейства пересекающихся линий скольжения функционируют попеременно). Рассмотренные способы нагружения позволили проследить развитие ряда новых процессов самоорганизации в сложных средах (возникновение и функционирование регулярных структур).

Настоящая книга написана на основе работ [1–51] и предназначена для исследователей в области наук о Земле, механики и прикладной математики, инженеров, а также аспирантов и студентов. Автор выражает благодарность А.П. Бобрякову и В.П. Косых, совместно с которыми проводились лабораторные эксперименты. А.П. Бобрякову принадлежит конструктивная разработка экспериментальных стендов. В их изготовлении и проведении эксперимен-

тов принимали участие Ю.А. Борисов, Н.А. Громов, Э.В. Захаревич, М.А. Кривошеин.

Автор признателен В.Б. Бохонову, О.П. Бушмановой, В.И. Крамаренко и С.В. Лаврикову, совместно с которыми проводились численные расчеты.

Автор благодарен академику РАН В.М. Фомину, профессору Д. Колимбасу за ценные обсуждения, академику РАН Б.Д. Аннину за редактирование монографии. Автор считает своим приятным долгом отметить роль академика РАН Евгения Ивановича Шемякина, который принимал участие в данной работе и поддерживал ее на всех этапах выполнения.

В 1996–1998 гг. работа выполнялась при финансовой поддержке фондов ИНТАС — РФФИ (проект № 95-0742).

Введение

О существовании приливных волн в океанах известно всем. Труднее представить себе, что такие же волны, только меньшей амплитуды, бегут и по твердой поверхности Земли. Мы все время поднимаемся или опускаемся на этих волнах и не замечаем этого только потому, что волны являются невысокими и чрезвычайно пологими. Приливные волны вызываются приливными силами. Природу приливных сил объяснил Ньютон, показав, что их наличие является прямым следствием закона всемирного тяготения [52]. Дальнейшее исследование этого вопроса связано с именами Лапласа и Эйлера [53]. Большой вклад в исследование приливных волн внесли Дарвин, Джефферсон, Рош и их последователи [54]. Из современных исследований необходимо отметить работы Ю.Н. Авсюка, в которых дано каноническое определение приливной силы и анализируется ряд тонких эффектов, связанных с вычислением этих сил [55–58]. Различные аспекты приливного взаимодействия Земли, Солнца и Луны изучались в трудах П. Голдрайха, Г. Макдональда, Е.Л. Рускола и др. [59–61].

Приливные силы носят универсальный характер и действуют на все протяженные тела, которые находятся в гравитационном поле, создаваемом другими небесными телами. Кроме того, приливные силы действуют постоянно и поэтому они в той или иной степени оказывают влияние на все процессы эволюции небесных тел. В одних случаях это влияние может быть пренебрежимо малым, в других — определяющим или по крайней мере весьма существенным. Все зависит от конкретной ситуации. Изучению различных аспектов роли приливов посвящена обширная литература. В настоящей книге не ставится задача представить ее полный обзор. Остановимся только на некоторых основных работах, в которых содержится подробная библиография.

Вначале естественно обратиться ко времени, когда Солнечная система только зарождалась. Этот процесс всегда вызывал большой

интерес. Существовало множество различных теорий. В свое время пользовались популярностью теории, объясняющие происхождение планет результатом катастрофы. К ним можно отнести и теорию происхождения Луны путем отделения от Земли. В этих теориях приливным силам отводилась определяющая роль.

В настоящее время наиболее признанной является теория формирования солнечной системы из протопланетного облака. Данная теория восходит к Канту и Лапласу (небулярная гипотеза). Современный вид она приобрела благодаря трудам О.Ю. Шмидта [62] и его последователей (В.С. Сафронова [63] и др.). По одной из версий данной теории, Земля и Луна формировались одновременно в протопланетном облаке, т. е. Луна (в противоположность теориям ее захвата) была образована сразу в области формирования самой Земли, составив с Землей двойную планету. Такого мнения придерживались Рускол [61], Харрис, Каула [64]. (Обзор моделей с захватом и (или) одновременной аккреции представлен в работе Смита [65].) Бóльшему числу имеющихся в настоящее время данных удовлетворяют теории, согласно которым Луна была образована в два этапа (Опик [66], Вуд, Митлер [67], Сорохтин [68], Сорохтин, Ушаков [69–71]). Когда речь идет о первом этапе эволюции системы, то используется более точное ее название — прото-Земля и прото-Луна. В соответствии с данными теориями прото-Луна была захвачена прото-Землей. На этом этапе приливные силы были настолько большими, что под их действием прото-Луна была разрушена (на пределе Роша). В результате система изменилась качественно и перешла ко второму этапу своей эволюции. Теперь уже можно говорить собственно о Земле и Луне. Таким образом, в данном переходе приливные силы играли определяющую роль, которая остается большой и на втором этапе эволюции системы. Расчеты дают значения амплитуд приливных волн порядка 1–3 км. Амплитуда волны постепенно уменьшалась, пока не достигла современных значений порядка десятков сантиметров. Приливные деформации играли большую роль во всех процессах эволюции Земли [72]. Они оказывали влияние на форму нашей планеты, изменение скорости ее вращения, формирование магнитного поля, процессы накопления и высвобождения энергии, т. е. тектонические процессы, землетрясения и т. д. На современном этапе роль приливов, конечно, уменьшилась, но по-прежнему остается заметной [73, 74].

Рассмотрим указанные вопросы подробнее. Начнем с вопроса о форме Земли или в более широком смысле — вопроса о форме небесного тела, которую оно принимает под действием известных сил. Данная проблема представляет теоретический интерес, а для Земли

она имеет и большое практическое значение. Достаточно сказать, что проблема описания формы Земли является предметом изучения специальной научной дисциплины — геодезии.

История исследования вопроса о форме Земли и ее размерах уходит в глубь веков. Ее краткий обзор дан в книге Н.П. Грушинского [75]. Теоретические исследования формы Земли связаны с именами Гюйгенса, Ньютона, Маклорена, Эйлера, Клеро, Даламбера, Лагранжа, Лапласа, Лежандра, Гаусса, Пуассона, Эри, Якоби, Дирихле, Стокса, Кельвина, Пуанкаре, Пицетти и др. [52, 76, 77]. Теоретическое исследование предполагает использование законов механики в рамках той или иной модели Земли. Остановимся на модели Ньютона — одной из первых в этой области [52]. (Именно эта модель будет использована ниже для оценки влияния приливных сил на форму небесного тела.) В [52] рассматривались два столба жидкости, которые простираются от поверхности Земли до ее центра. Один столб расположен вдоль оси Земли к ее полюсу. На него центробежные силы не действуют. Второй столб направлен к экватору, и действие на него центробежной силы является максимальным. Из условия равенства давления в указанных столбах в центре Земли, где они соединяются, было показано, что «диаметр Земли по экватору относится к ее диаметру, проходящему через полюсы как 230 к 229» [52].

В математическом плане проблема описания формы небесного тела приводит к постановке целого ряда новых и весьма сложных задач. Исторически так сложилось, что самые значимые классические работы в этой области были выполнены в предположении о том, что к небесному телу можно применить законы гидростатики и гидродинамики. Проще говоря, предполагалось, что небесное тело можно представить как изолированный объем вращающейся и самогравитирующей жидкости. Особый интерес представляет вопрос об устойчивости формы небесного тела. Здесь сложилось целое научное направление, связанное с именами Клеро, Дирихле, Дедекинда, Римана, Дарвина, Пуанкаре, Ляпунова, Роша, Аппеля, Пицетти, Лихтенштейна, Чандрасекхара и др. [76–79]. Какова здесь роль приливных сил? Задача о равновесии и устойчивости однородного тела, находящегося в гравитационном поле другого тела, создающего приливные силы, рассматривалась Рошем, Джинсом и др. (задача Роша) [78]. В большинстве же работ этого направления приливные силы не рассматриваются. Иными словами, учитываются только силы собственной гравитации, центробежные и кориолисовы, а для вязких жидкостей и силы вязкого трения. В такой постановке приливные эффекты можно учесть как возмущения основной формы небесного тела. В некоторых случаях приливное искажение формы удобно учи-

тывать сразу в конфигурации его основной (т. е. невозмущенной) фигуры (например, когда возмущение неподвижно относительно тела или когда возмущение по телу движется, но внешняя форма тела остается неизменной). Именно такой вариант с использованием модели Ньютона [52] рассматривается ниже.

Ясно, что во всех случаях скорость движения приливных волн определяется скоростью вращения тела вокруг своей оси. Энергия вращения служит источником для многих диссипативных процессов, происходящих в теле планеты. Один из возможных механизмов таких процессов рассмотрен ниже. Здесь отметим только некоторые работы, посвященные различным проблемам, связанным с вращением Земли. Это прежде всего исследования Ержанова, Киселева, Куликова, Манка и др., касающиеся построения общей теории вращения Земли, теории движения полюсов, анализа процесса замедления вращения Земли вследствие приливного трения и др. [80–86].

Хорошо известно, какое большое значение имеет магнитное поле Земли. В науке о земном магнетизме можно выделить два фундаментальных направления. Первое посвящено изучению магнитного поля как такового. Речь идет о получении, систематизации и описании данных о магнитном поле как в далеком прошлом (палеомагнетизм по Монину [87]), так и о действующем магнитном поле и динамике его изменения (по Калинину, Долгинову и др. [88–90]). основополагающими в этой области являются труды Гаусса [91]. Второе направление связано с построением и проверкой теорий возникновения и эволюции магнитного поля. В настоящее время общепринятой является теория магнитного геодинамо. История ее возникновения и развития изложена в [92, 93] и связана с трудами Лармору, Эльзассера, Булларда, Геллмана [94–99], Бэкуса и Чандрасекхара [100], Герценбергера [101] и др. В дальнейшем значительные работы в этой области были выполнены С.И. Брагинским [102–105], С.И. Брагинским и П.Н. Робертсом [106, 107] и др. Согласно теории магнитного геодинамо, происхождение и эволюция магнитного поля Земли связаны с течением масс в ее жидком ядре. Возникает вопрос о силах, приводящих в движение геодинамо. Считается, что основным источником этих сил являются конвективные течения в жидком ядре Земли, которые приводят к появлению сил Кориолиса вследствие вращения Земли. Источником энергии течений являются химические и физические процессы, которые происходят в жидком ядре, а также на его границах с внутренним ядром и мантией.

Еще один источник энергии связан с вращением Земли в гравитационном поле Луны и Солнца. Гравитационное взаимодействие приводит к прецессии земной оси и приливам. Влияние прецессии

оси Земли на работу геодинамо исследовалось в работах Малкуса [108, 109], Ш.Ш. Долгинова [110] и др. (модель прецессионного динамо планет). Приливным силам, по мнению Жаркова [111], здесь отводится гораздо более скромная роль. Но она ненулевая, и это является вполне достаточным основанием для того, чтобы эти силы из анализа не исключать. Есть еще обстоятельство, которое также имеет значение. В настоящее время получены данные, согласно которым внутреннее жесткое ядро Земли испытывает дифференциальное вращение относительно жидкого ядра (Овчинников, Адушкин, Ан [112]). В рамках определенных моделей дифференциальное вращение ядра может быть получено только за счет приливных сил (точнее, за счет приливного искажения внешней границы жидкого ядра). Этот вопрос рассмотрен ниже.

Перейдем теперь к основной проблеме, которой посвящена настоящая книга. Приливные волны наблюдаются на поверхности небесного тела. Однако хорошо известно, что это не поверхностное явление, а напротив — следствие деформирования всего небесного тела в целом. Приливные силы имеют природу массовых сил. Они приложены ко всем частицам небесного тела, расположенным как на его поверхности, так и на любой глубине. Исключением является бесконечно малый объем в центре тела, где приливные силы равны нулю, поэтому исследование поведения небесного тела под действием приливных сил можно отнести к области механики, изучающей процессы деформирования и течения твердых тел, вязких жидкостей и сложных реологических сред. Ниже будем рассматривать процесс приливного деформирования именно с этой точки зрения. Вначале обратимся к теории пластичности [113].

Способы нагружения пластических тел принято делить на два основных типа: простые нагружения, когда оси тензора напряжений относительно тела неподвижны, и сложные нагружения, когда оси тензора напряжений относительно тела поворачиваются. Здесь речь идет об элементарном, т. е. бесконечно малом, объеме тела. Главным, однако, являются не размеры этого объема, а тот факт, что в пределах данного объема напряжения можно считать постоянными, а поля скоростей и перемещений — линейными по координатам. В [4–6, 22, 30, 31] дана общая классификация нагружений такого типа. Оказалось, что один из типов сложного нагружения [20] (нагружения с непрерывным вращением осей тензора напряжений) имеет общие черты с приливным нагружением небесного тела, которое вращается относительно направления к возмущающей массе. Экспериментальное исследование нагружения данного типа сводилось к созданию условий, при которых тело в одном направлении растягивается, а в ортогональ-

ном — сжимается. Причем тело относительно данных направлений непрерывно поворачивается. Для неупругих тел такого рода нагружение приводит к направленному переносу масс: за один полный оборот материальные точки тела в первоначальное положение не возвращаются. С увеличением числа циклов эффект накапливается. Анализ указанного процесса и составляет предмет настоящей книги. В данном обзоре ограничимся только работами, наиболее близкими к теме книги.

Таким образом, речь идет о решении следующего вопроса: могут ли периодические приливные деформации трансформироваться в необратимые перемещения масс Земли как на ее поверхности, так и в ее глубинах, включая жидкое ядро. Предположение о возможном движении материков как следствия приливного взаимодействия Земли с Луной и Солнцем обсуждалось Шварцем, Виттштейном, Штаубом, Вегенером и др. [114, 115]. Например, В.Ф. Бончковский в своей монографии [116] 1953 года ставит вопрос о том, «являются ли приливы твердой земной поверхности только выражением ее упругих свойств, или же они вызывают некоторые остаточные деформации вследствие пластичности вещества. В последнем случае приливное трение, накапливая деформации, может привести к значительно большим эффектам». Далее высказывается предположение о том, что силы, которые связаны с приливными деформациями, могут способствовать возникновению землетрясений. Ниже в настоящем обзоре указываются более поздние работы, в которых данное предположение нашло полное подтверждение. Кроме того, в [116] отмечается, что если жидкое ядро Земли «обладает значительной вязкостью, то деформации, накапливающиеся от приливов, могут создать дополнительные напряжения, которые, возможно, весьма заметны на границе между упругой оболочкой и ядром Земли, на глубине 2900 км». В целом, мнение автора [116] сводится к тому, что «приливные явления, вызывая периодические и непериодические накопления деформаций, могут оказаться действительной силой для возникновения различных процессов внутри Земли». Результаты настоящей работы по экспериментальному и теоретическому моделированию приливного деформирования полностью подтверждают предположения, выдвинутые в работах [113–116]. (Этот перечень, конечно, не является полным.)

Детальный анализ сил, которые возникают в земной коре под действием приливов, был дан Надаи в его фундаментальной монографии [113], основные выводы которой сводятся к следующему: «...гравитационные объемные силы γ_0 , порожденные Луной, стремятся крайне медленно смещать материал в обоих полушариях к эк-

ваториальной области, где он постепенно нагромождается и накапливается в широкой полосе...». Кроме того, внешняя твердая оболочка может испытывать скольжение «по ядру Земли подобно гигантской тормозной колодке...». «Таким образом, присутствие приливного твердого трения порождает три эффекта: 1) оно тормозит движение как земного ядра, так и внешней оболочки пород; 2) оно вызывает медленное движение оболочки относительно ядра на запад; 3) оно увеличивает расстояние... от Земли до Луны» [113]. Надаи исходил из теории «горячей» Земли, которая первоначально находилась в расплавленном состоянии. С течением времени расплав охлаждался, и происходило затвердевание поверхности. Таким образом, согласно данной теории, формировалась твердая оболочка Земли. В настоящее время указанная теория большинством исследователей не разделяется (хотя по-прежнему у нее есть немало сторонников: В.В. Кузнецов [117, 118], Ромашев и др. [119]). Однако основные выводы [113] от гипотезы о начальном состоянии Земли не зависят. Для нас наибольший интерес представляет вывод 2. Здесь фактически речь идет о возможном дифференциальном вращении коры Земли. К аналогичному выводу на основе различных исходных посылок приходили авторы целого ряда работ. Во всех исследованиях этого направления речь идет о возможном механизме преобразования энергии вращения Земли в энергию тектонических процессов.

В последние годы интерес к ротационному фактору значительно вырос. В работе В.Е. Хаина, А.И. Полетаева [120] предлагается рассматривать ротационные процессы в рамках специально выделенной ветви современной геологической науки — ротационной тектоники. Ряд авторов считает роль ротационного фактора в эволюции Земли настолько важной, что ставит вопрос о формулировке новой геолого-физической парадигмы — ротационной геодинамике [121]. В работе Н.И. Павленковой [122] показано, что движение палеомагнитных полюсов можно объяснить относительными перемещениями сфер Земли вокруг ядра.

Далее, в живой природе существует механизм смещения пластичной среды вдоль канала в случае, когда по его стенкам бежит волна перистальтической деформации. В работе З.Ф. Данеша [123] данный тип движения рассмотрен применительно к каналу, стенки которого представляют собой нижнюю кромку коры и верхнюю кромку мантии, а текучая среда — это астеносфера. Деформации стенки — это приливные деформации Земли. Оценка, приведенная в книге Л.А. Маслова [124], показывает, что данный механизм вносит чрезвычайно малый вклад в западный дрейф коры. Далее необходимо остановиться на близких по идеологии работах Б.Н. Середи-

на, в которых исследовались механизмы волновой передачи [125]. Такие механизмы включают в себя гибкое звено (например, гибкую сферу), слой смазки или набор подшипников и жесткое звено (например, жесткую сферу). Подобные механизмы называют также волновой передачей. В ней циклические волновые движения в гибком звене передаются жесткому телу. Автор [125] обратил внимание на аналогию схемы деформации гибкого звена волновой передачи с двухволновым генератором волн эллиптической формы и схемой «приливные деформации Земли». Отсюда следует вывод о возможности дифференциального вращения гибкой геосферы относительно жесткой подстилающей сферической оболочки. Для литосферы это может проявляться в ее дрейфе в западном направлении.

Фактически к тому же самому механизму преобразования несколько иным путем пришел А.И. Добролюбов. В работах [126–129] он описывает волновые движения жидкостей и деформируемых тел, включая гибкие нити и оболочки. Показано, что подобные движения могут сопровождаться переносом масс. В частном случае, когда речь идет о деформируемых телах, перенос масс может приводить к смещению тела как такового. Движение тел под действием такого рода волн автором названо дискретно-волновым. Подобные движения достаточно часто встречаются в природе и используются в технике. В [128, 129] представления о бегущих волнах в гибких телах использованы для анализа возможного переноса масс приливными волнами. Если земную кору рассматривать как гибкую оболочку, которая лежит на подстилающих слоях, то можно показать, что при определенных условиях гибкая оболочка будет смещаться относительно своей опоры. Причем с увеличением числа циклов данные перемещения будут накапливаться. Аналогичные процессы возможны и в теле Земли, если предположить существование там набора оболочек, которые контактируют между собой с возможностью относительного проскальзывания. В [130] описан прибор, на котором упомянутый эффект может быть продемонстрирован. В серии работ этот эффект подробно обсуждается и делается вывод о том, что он способен быть «движущим механизмом геомагнитного динамо», а также играть определяющую роль в генерации горизонтальных движений земной коры (Гарецкий, Добролюбов, Левков, Середин [131–135]).

В настоящей книге показано, что направленный перенос масс имеет место, даже если в строение небесного тела не вводить ни жесткого ядра, ни каких-либо оболочек с возможностью их относительного скольжения. В общем случае достаточно только двух факторов: тело должно вращаться относительно направления действия

приливной силы, т. е. по поверхности тела должна бежать приливно-волновая волна; в реакции тела на приливное воздействие обязательно должна быть неупругая составляющая. Это минимальные условия, которые уже обеспечивают направленный перенос масс. Механизм данного процесса имеет фундаментальный (в смысле — всеобщий) характер и связан только с законами механики и реологией небесного тела. В связи с этим уместно вспомнить о классической работе Стокса 1847 г., в которой [136] исследованы волны конечной амплитуды на поверхности бесконечно глубокой жидкости. «Изучая вопрос о форме траекторий частиц жидкости при распространении прогрессивной волны конечной амплитуды, Стокс пришел к неожиданному и замечательному результату, что при распространении такой волны частицы жидкости имеют, помимо колебательного движения, еще постоянное движение в направлении распространения волны. К такому заключению Стокс пришел, интегрируя уравнения движения частиц жидкости при наличии потенциалов скоростей...» (цит. по: [136]). Перенос масс волнами Стокса осуществляется только в приповерхностном слое жидкости. Эффект, изучаемый в настоящей книге, имеет место во всем объеме тела и наблюдается даже для полностью однородных тел. Если же в тело ввести жесткое ядро и оболочки, то эффект только усилится. В пределе, когда жесткое ядро приходит (или почти приходит) в соприкосновение с внешней оболочкой, вся система начинает функционировать как механизм волновой передачи, описанный в работах В.Н. Середина, А.И. Добролюбова.

Вернемся теперь к эффекту направленного переноса масс в его общей трактовке. Как отмечалось, для реализации эффекта достаточно двух условий: движения приливной волны по небесному телу и неупругой составляющей в реакции тела. Первое условие для Земли выполнено. Изучению второго условия посвящена обширная литература, и общий вывод работ этого направления является положительным: да, в реакции современной Земли на приливные воздействия есть неупругая составляющая. Эта составляющая была и в прошлой истории Земли. Приведем здесь ссылки только на некоторые работы в этой области. В них содержится дальнейшая библиография. Прежде всего отметим работы Макдональда, Голдрайха и Соттера [137, 138]. Отклонение реакции от идеально упругой принято оценивать с помощью эффективной диссипативной функции Q^{-1} . (Обратная величина, т. е. Q — это добротность колебательной системы.) Отклонение от упругости можно оценивать также величиной угла запаздывания ϵ . Величина ϵ представляет собой угол между прямыми, исходящими из центра Земли и направленными к вершине приливного горба и к возмущающему телу, которое этот прилив

вызывает. Для идеально упругого тела данный угол равен нулю, для неупругого тела — он отличен от нуля. Известно, что $Q^{-1} = \operatorname{tg} 2\varepsilon \approx 2\varepsilon$ (для малых углов). Астрономические и прямые наблюдения дают для угла запаздывания прилива величину, равную $\varepsilon \approx 2,16^\circ$ [137, 138]. В данной оценке суммируются все статьи диссипации энергии вследствие прилива, т. е. сюда входит как диссипация энергии в океанах и на шельфе, так и диссипация в земной коре, атмосфере, мантии и ядре. Исследованию приливов в гидросфере (океанах, шельфе, реках и водоемах) посвящена обширная литература (например, Б.А. Каган, Г. Ламб, Г.И. Марчук и др. [139–143]). Однако приливы в твердой оболочке Земли и ее внутренних областях также представляют большой интерес. Какова степень отклонения от идеально упругой реакции твердой Земли и ее недр на приливные воздействия? Нет сомнений в том, что реакция упругой не является, но относительно степени отклонения имеются только некоторые оценки. Есть данные, что большая часть энергии (до 90 %) диссипируется в гидросфере в то время как в твердой Земле диссипируется только порядка 10 % энергии [139]. Энергия всех тектонических процессов имеет тот же самый порядок [124]. В настоящей работе посыл о неупругой реакции примем в качестве исходной.

Особый интерес представляют для нас прямые данные о реакции горных пород на малые деформации, сравнимые с приливными. Тело Земли является неоднородным. Неоднородным будет и распределение приливных деформаций в теле Земли. Ясно, что средняя деформация, равная отношению высоты приливного горба к радиусу Земли (10^{-7}), может служить только масштабом для реальных приливных деформаций, которые испытывают горные породы на поверхности Земли и в ее недрах. Деформации (а через них и напряжения) определяются как отношение относительного смещения точек тела к расстоянию между ними. Горный массив имеет блочное строение, поэтому в зонах между блоками приливные деформации могут быть гораздо выше средних (за счет того, что размеры блоков значительно превышают размеры зон контакта между блоками). Кроме того, неоднородность земной коры и ее блочное строение приводят к соответствующей неоднородности ее отклика на «однородное» приливно-силовое воздействие.

Блоки земной коры имеют разные масштабы и образуют определенную иерархию. Этот факт имеет принципиальное значение и поэтому обсудим его подробнее. Если посмотреть на данный вопрос шире, то можно сказать, что иерархичность является наиболее универсальным свойством реального мира. Иерархию мы наблюдаем во

Вселенной, природе, сообществах животных, человеческом обществе, строении живых существ и т. д. Иерархичность необходима для самого существования сложных систем. Везде царит принцип иерархии и подчинения.

Работы последних десятилетий показывают, что эта общая закономерность простирается не только на горные породы, но также и на упруго-пластические тела, сыпучие и другие среды. Такое понимание (если говорить о современных публикациях, не касаясь истории вопроса) было достигнуто в результате работы научных школ академиков В.Е. Панина, М.А. Садовского, Е.И. Шемякина (Панин, Гриняев, Лихачев [144–146], Садовский, Болховитинов, Кочарян, Писаренко, Родионов, Сизов, Спивак, Цветков [147–156], Шемякин, Стажевский, Бобряков, Бушманова, Косых, Крамаренко, Лавриков, Ревуженко [3–5], [157–166]).

В указанных работах не раз отмечалось, что для описания блочно-иерархической среды необходима разработка новых математических моделей, более адекватных, чем те, которые основаны на классической концепции сплошной среды. Попытки построения таких моделей, предпринятые в работах [167–171], привели к неожиданному результату. Оказалось, что для адекватного описания блочно-иерархической среды необходимо наделять сами независимые переменные иерархией масштабных уровней. Это достаточно радикальный шаг, который означает, что иерархией масштабных уровней должны наделяться уже само пространство и время. Изменение структуры независимых переменных означает отказ от аксиомы Архимеда и приводит к необходимости соответствующих изменений в самом математическом аппарате*.

Вернемся теперь к реакции блочно-иерархической среды на приливные силы. Как отмечалось, наличие блоков приводит к неоднородностям в распределении локальных деформаций и наклонов земной поверхности. В статье А.А. Спивака, С.Б. Кишкиной [172] на основе натуральных измерений описан новый тип движения в земной коре — прецессионное движение структурных блоков. Показано, что причиной движения блоков является приливное взаимодействие Земли, Луны и Солнца. Особо следует подчеркнуть следующий факт [172]: суточные движения на границах блоков могут достигать 1–5 мм/сут, что на три порядка превышает скорость вековых движений.

Как отмечалось, данные о деформациях и наклонах могут быть получены из непосредственных натуральных измерений, поэтому здесь

* А.Ф. Ревуженко. Математический анализ функций неархимедовой переменной. — Новосибирск: Наука, 2012. — 327 с.

становятся возможными постановка и решение обратных задач — по измерениям отклика земной коры получать данные о ее локальном строении. В статье П.С. Матвеева [173] и обзоре И.А. Дычко, Н.И. Панченко [174] даны ссылки на экспериментальный материал о «значительном возмущении приливов в непосредственной близости от тектонических нарушений». Отмечается также, что ослабление земной коры разломами приводит к аномальному увеличению приливной деформации земной поверхности вблизи разломов. При этом возмущения с удалением от разлома затухают довольно быстро.

Исследование приливных наклонов в обвалоопасных зонах могут также использоваться при прогнозировании обвалоопасных ситуаций (Кутный [175]).

В общем случае, если геосистема находится в состоянии, близком к критическому, то факт неоднородного распределения ее приливных деформаций может иметь решающее значение для перехода системы в критическое состояние.

Если же говорить о возможности накопления эффектов, и в частности о направленном переносе масс, то здесь, как уже отмечалось, главным будет вопрос о неупругой составляющей в реакции горных пород. В настоящее время накоплен большой объем прямых экспериментальных данных о том, что горные породы могут проявлять пластические свойства даже при весьма малых деформациях. В ряде работ приведены данные о микропластичности образцов горной породы при их нагружении в диапазоне деформаций порядка 10^{-6} , 10^{-5} – 10^{-3} , т. е. речь идет о деформациях, приближающихся по порядку величин к приливному деформациям (Дьяков, Кокшаров, Кочегаров, Машинский, Чаплыгин [176–178], Машинский [179–188]).

Таким образом, есть основания считать, что приливная реакция даже внешней оболочки Земли может иметь неупругую составляющую. Данное обстоятельство имеет большое прикладное значение, прежде всего для горного дела, а также в связи с добычей нефти и газа. В первом случае речь идет о глубинах до 3 км, во втором — до 10 км. Нет необходимости говорить о чрезвычайной важности вопросов, связанных с горными ударами и землетрясениями (в том числе, и землетрясениями техногенного происхождения). В настоящее время накоплен обширный материал о том, что «спусковым крючком» данных явлений могут служить твердые земные приливы (триггерный эффект). Сошлемся на недавний семинар [189, 190], который был посвящен различным триггерным эффектам в геосистемах. Триггерный эффект исследовался в ряде работ. Отметим работу Varga [191], в которой даны результаты расчетов лунно-солнечных напряжений в рамках различных моделей мантии. Показано,

что данные напряжения увеличиваются в направлении от полюсов к экватору, и кроме того, триггерный эффект приливных напряжений существенно зависит от ориентации разломов. В статьях Б.Г. Тарасова, А.Н. Шабарова, Д.В. Яковлева [192–196] приведен обширный материал, показывающий, что с приливами связаны не только сейсмические события различных масштабов, включая горные удары и землетрясения, но также импульсные проявления конвергенции стенок подготовительных выработок. На связь тектонических процессов, которые происходят на Земле и Луне, указано в работе Н.А. Козырева [197]. На большом статистическом материале показано, что одной из причин такой связи являются приливные воздействия Луны на Землю и Земли на Луну. Здесь уместно отметить, что с точки зрения механики деформирующего твердого тела данные процессы отличаются друг от друга принципиально. В первом случае тело (Земля) относительно направления приливной силы поворачивается, поэтому все его элементы испытывают сложное нагружение с непрерывным поворотом осей тензора напряжений. Во втором случае это не так: Луна обращена к Земле одной стороной и тип нагружения является простым (циклическим с неподвижными осями тензора напряжений). Параметр нагружения связан только с расстоянием между Землей и Луной. Данное расстояние меняется на 10 %, и это обстоятельство приводит к циклическому нагружению тела Луны, что вносит свой вклад в тектонические процессы, которые происходят на ней [198].

В работе Ю.Н. Авсюка [199] установлена убедительная корреляция приливного воздействия на Луну с проявлением лунной сейсмичности. «Отмечена ритмика активности очаговых зон поверхностных лунотрясений Восточного и Западного полушарий. Показано, что активность очаговых зон то одного, то другого полушария управляется приливной силой, создающей чередующиеся во времени то области локальных растяжений, то области локальных сжатий» [199]. Лунотрясения можно рассматривать как упрощенную модель землетрясений. Именно модель, в которой целый ряд усложняющих картину факторов исключен вследствие отсутствия у Луны атмосферы и гидросферы, совпадение экватора с плоскостью эклиптики и др. [199].

Вернемся теперь к процессам деформирования Земли. Они сопровождаются сейсмическими шумами, которые генерируются постоянно и являются следствием процессов разрушения горных пород на достаточно малых масштабных уровнях. Приливные деформации приводят к вариации параметров шумов.

В работах М.А. Садовского, А.В. Николаева [147, 200], Л.Н. Рыкунова, О.Б. Хаврошкина, В.В. Цыплакова [201, 202], А.А. Спивака, С.Б. Кишкиной [203], С.В. Гольдина и др. [204] приведены данные о связи параметров микросейсмического фона с приливными деформациями Земли. Воздействие твердых приливов на сейсмичность исследовалось в работах Г.А. Соболева, Ю.С. Тюпкина [205, 206]. В.А. Салтыковым и др. [207, 208] выдвинута и обоснована гипотеза о связи параметров вариации с положением очага готовящегося землетрясения. В работе В.А. Салтыкова, Ю.А. Кугаенко [209] проведен анализ сейсмических шумов перед сильными региональными землетрясениями 1992–2006 гг. Отмечается большая роль дилатансии горных пород в приповерхностных зонах.

Наряду с натурными наблюдениями большой интерес представляют исследования процессов деформирования и разрушения образцов горных пород в лабораторных условиях. По этому вопросу имеется обширная литература. Отметим только некоторые исследования, наиболее близкие к основной проблеме, которая рассматривается в настоящей книге. Прежде всего это работы, относящиеся к кинетической теории разрушения твердых тел, включая горные породы [210]. Согласно кинетической термофлуктуационной теории процесс разрушения происходит постепенно с накоплением повреждений. Определяющим является то обстоятельство, что разрушение начинается с некоторого порога, который гораздо ниже предела прочности материала. Периодические приливные напряжения, наложенные на фоновые тектонические, вносят свой вклад в процесс накопления повреждений, а значит и в процесс формирования очагов землетрясений и горных ударов. Вопросы, связанные с прогнозированием состояния разрушения, рассматривались В.С. Куксенко [211]. Особый интерес представляет исследование триггерных эффектов в лабораторных условиях. В ряде работ показано, что слабые вибрационные воздействия на образцы горных пород могут играть роль триггера при их разрушении (Садовский, Мирзоев, Негматуллаев, Саломов [212]).

Садовский, Шамина, Стопинский [147, 213], Мирзоев, Виноградов, Рузибаев [214], Трапезников, Манжиков, Богомолов [215], Соболев, Пономарев [216], Куксенко, Манжиков, Тилегенов, Шатемиров, Эмильбеков [217] и др.). К этим же работам примыкают исследования А.П. Бобрякова, В.П. Косых, А.В. Лубягина и автора, связанные с изучением длительных слабых воздействий на сыпучую среду [218–220]. Опыты и натурные наблюдения показывают, что большинство процессов деформирования развиваются вначале устойчиво. Затем в силу разных причин в системе «созревает» крити-

ческое состояние и происходит катастрофический переход в новое устойчивое состояние.

Здесь возникает много проблем. Одна из первых — это выяснение того, что именно служит причиной перехода системы в критическое состояние, какие скрытые условия и параметры управляют таким переходом? Иногда причина перехода, по крайней мере в первом приближении, лежит на поверхности. Например, когда нагружение осуществляется в пространстве одного измерения. В простейшем варианте — тонкий упругий стержень или образец горной породы сжимаются силой, которая монотонно увеличивается. В первом случае переход через критическое состояние (катастрофа) приводит к потере устойчивости, во втором — к разрушению образца. Можно сказать, что здесь причина катастрофы — сжимающая сила. Следующее приближение требует исследования начальных несовершенств стержня, исходных трещин в образце и т. д. Таким образом, в указанном примере катастрофа происходит вследствие однократного приложения достаточно большой сжимающей силы. Часто можно наблюдать противоположную ситуацию, когда «подталкивание» системы к катастрофе вызывается совершенно незначительными, на первый взгляд, причинами. Если такие причины влияют на фоне каких-то других факторов, которые сами по себе кризиса не провоцируют, но действуют систематически в течение длительного времени, то система также может подойти к катастрофе.

Здесь основным становится свойство системы в той или иной форме «запоминать» свою историю. Действительно, пусть тело является, например, идеально упругим. Такое тело «помнит» только свою начальную конфигурацию, поэтому любые длительные слабые воздействия не приведут к накоплению необходимых изменений, а значит и не смогут повлиять на «подталкивание» упругой системы к катастрофе. Для неупругих тел ситуация иная. Здесь каждый цикл нагружения приводит к необратимому рассеянию энергии. Однако и в этом случае может осуществиться выход на стационарное состояние так, что эволюция системы прекратится.

Таким образом, для поиска новых нетривиальных ситуаций необходимо было обратиться к неупругим средам и нестационарным процессам их деформирования. В [218–220] в качестве природной среды выбран сыпучий материал, так как он удовлетворяет всем исходным требованиям.

Во-первых, для сыпучих материалов ярко выражены допредельное и предельное состояния. Кроме того, даже если внешняя деформация носит допредельный характер, на микроуровне всегда находятся предельные контакты между частицами. Скольжение по ним

и приводит к необратимым изменениям. И главное — сыпучий материал является простейшим представителем геоматериалов и отражает многие их свойства. В [218–220] показано, что длительные слабые воздействия могут приводить к формированию зон неустойчивости и в конечном счете к катастрофическим последствиям при фиксированных внешних нагрузках (потеря устойчивости тяжелой колонны, неустойчивость прямого среза и т. д.).

Таким образом, слабые вибрационные воздействия можно рассматривать как имитацию приливных воздействий на породы, которые находятся в заданном поле статических нагрузок. Тогда полученные экспериментальные результаты в определенной степени раскрывают механизм триггерных эффектов, которые возможны в натуральных условиях.

Кроме указанного выше триггерного эффекта, приливные воздействия также вносят свой вклад в формирование напряженно-деформированного состояния земной коры. В работе В.В. Адушкина, А.А. Спивака [221] отмечается: «В отличие от морского прилива, энергия твердоприливной деформации не рассеивается в литосфере. Это вызывает накопление напряжений в среде и влияет таким образом на направленность геологических процессов вследствие постоянного присутствия приливного возмущения в течение значительного периода эволюции Земли».

В той или иной степени приливы оказывают периодическое влияние на все параметры оболочек Земли, а также геофизические процессы, которые в них происходят (Адушкин, Спивак, Харламов [222]). Так, твердые приливы воздействуют на геоэлектрический потенциал и интенсивность генерации электрических импульсов (Кугаенко [223], Спивак, Харламов [224]). Имеется много данных о влиянии приливов на гидрогеологический режим подземных вод (Спивак, Кишкина, Локтев и др. [225–227], Горбунова, Кабыченко, Кочарян и др. [227]). В работе С.С. Сардарова, В.Д. Осокина [228] приводятся обширные данные о влиянии приливов на дебит термальных источников. Здесь же содержится вся предыдущая библиография.

Необходимо отметить, что приливы оказывают также влияние на режим процессов дегазации, которые происходят в земной коре (А.А. Спивак и др. [229]). Одна из чрезвычайно важных проблем горного дела связана с внезапными выбросами угля и газа в шахтах. В связи с этим большой интерес представляют данные по корреляции между интенсивностью газовыделения в скважинах и приливными движениями земной коры. Указанные корреляции объясняются тем, что «в период наиболее интенсивных приливных движений

трещины тектонической зоны раскрываются, способствуя выходу накопившихся газов» [230].

Подводя итог, можно сказать, что с земными приливами связан весьма широкий круг задач, которые имеют большое теоретическое и прикладное значение. Среди них особенно выделяется задача исследования возможных механизмов накапливания приливных деформаций в теле Земли. Далее, большинство работ по приливам — это теоретические работы и работы, связанные с наблюдениями и измерениями, которые проводятся в натурных условиях. Необходимо отметить, что задачи о приливном деформировании — это в общем задачи механики твердого тела и реологии. Для их исследования могут быть использованы все методы механики, включая и методы моделирования в лабораторных условиях. Однако, насколько известно из литературы, публикации, касающиеся лабораторного моделирования приливов, практически отсутствуют. В настоящей работе сделана попытка частично восполнить этот пробел, т. е. задачу о приливном деформировании поставить как прикладную задачу механики, а именно — найти метод экспериментального исследования приливов на моделях в лабораторных условиях и затем на этой основе рассматривать различные постановки теоретических задач. В последних можно учесть факторы, которые не поддаются экспериментальному моделированию.

Как отмечалось в предисловии, основные результаты, на которых основана данная книга, изложены в работах [1–51]. Представления в упомянутых работах развиваются в различных направлениях. Прежде всего это труды академика Е.И. Шемякина о магнитном геодинamo Земли, природе солнечной активности и процессах деформирования вращающихся планет [231–235]. В работах академика Ю.А. Косыгина и профессора Л.А. Маслова [124, 236–238] построено обобщение решения [19], подробно рассматривается роль различных факторов в тектонических процессах Земли. Показано, что приливный фактор является достаточно значимым. Основные результаты [1–51], кроме [8, 11], относятся к плоской деформации. Следующий шаг естественно связан с постановкой и решением существенно трехмерных задач. Он сделан в работах Ю.М. Григорьева, А.Н. Мохначевского, О.Е. Скрыбиной [239–245]. В них используются методы кватернионного исчисления и результаты работ [246 и др.], выполненных под руководством академика Б.Д. Аннина.

1 Кинематический метод экспериментального исследования приливных волн

§ 1. Приливные силы

1. Закон всемирного тяготения. Что такое приливные силы? Каково их происхождение? Чтобы ответить на эти вопросы обратимся к закону всемирного тяготения. Общеизвестно, что все тела притягиваются к Земле. Природа сил тяготения во многом еще не ясна. Исследование этого вопроса выходит за рамки механики. Для нас важен только сам факт — все тела притягиваются друг к другу. Известна также история о знаменитом яблоке, которое послужило толчком для открытия Ньютоном закона всемирного тяготения. Но не все понимают смысл этого яблока. То, что яблоки падают на Землю, замечали, конечно, и до Ньютона. Но Ньютон первый понял, что точно так же, как яблоко, на Землю падает и Луна. Вот эта связь была уже не только неочевидной, но скрытой, причем весьма глубоко. Понимание связи этих двух внешне совершенно различных фактов и явилось предметом одного из важнейших открытий.

Согласно закону всемирного тяготения, две массы m и M притягиваются друг к другу с силой, равной

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2}, \quad (1)$$

где γ — универсальная постоянная (постоянная всемирного тяготения); r — расстояние между центрами двух масс m и M . Пусть тело M представляет собой однородный шар, радиус которого равен R . Вначале предположим, что m — это материальная точка, расположенная вне шара M , причем масса $m \ll M$. Предположим также, что вначале эта точка покоится и затем начинает свободное падение на массу M . Согласно второму закону Ньютона, ускорение, с которым будет двигаться эта точка, равно $a = F/m$. Отсюда и из равенства (1) видно, что ускорение падения составит

$$a = \gamma \frac{M}{r^2}.$$

Величина γ очень мала, а M — велика, поэтому вместо произведения $\gamma \cdot M$ удобнее ввести другую величину — ускорение свободного падения на поверхности тела M . Обозначим его через g . Тогда

$$g = \gamma \frac{M}{R^2}, \quad \gamma M = gR^2,$$

и можно записать:

$$a = g \left(\frac{R}{r} \right)^2. \quad (2)$$

Таким образом, по мере приближения точки m к массе M ускорение ее свободного падения будет возрастать. У поверхности Земли высота, с которой падает тело, намного меньше радиуса Земли, поэтому таким эффектом можно пренебречь. Именно в этом смысле считается, что ускорение свободного падения (около поверхности Земли) является величиной постоянной.

2. Приливные силы: случай свободного падения тела. Пусть для определенности тело M — это Земля. Из равенства (2) видно, что чем ближе точка m находится к центру Земли, тем с большим ускорением она падает. Отсюда сразу можно вывести одно следствие. Для этого вместо точки m рассмотрим тело, протяженное в пространстве. Например, пусть тело m представляет собой тонкий цилиндрический стержень (рис. 1.1). Расположим стержень вертикально и разрежем его на тонкие диски. Затем дадим возможность телу с разрезами свободно падать вниз. Все диски будут падать с различными ускорениями. Причем, согласно формуле (2), диски, которые расположены ниже, будут падать с большими ускорениями, чем верхние, поэтому первоначальный стержень превратится в совокупность отдельных дисков, расстояние между которыми будет все время возрастать.

Рассмотрим теперь тот же опыт, но уже для цельного стержня без разрезов. Стержень по-прежнему будем рассматривать как совокупность дисков, которые теперь уже скреплены между собой. Ясно, что такой стержень будет двигаться с каким-то одним ускорением, общим для всех дисков. Интуитивно ясно, что это должно быть ускорение, соответствующее некоторому среднему диску. Но диск, который расположен ниже, стремится лететь с большим ускорением, чем средний диск, поэтому он увлекает стержень вниз. А диск, расположенный выше, «хочет» лететь с меньшим ускорением, чем средний, поэтому стержень увлекает этот диск вниз. Это приводит к тому, что в стержне появляется растягивающая сила, которая называется приливной.

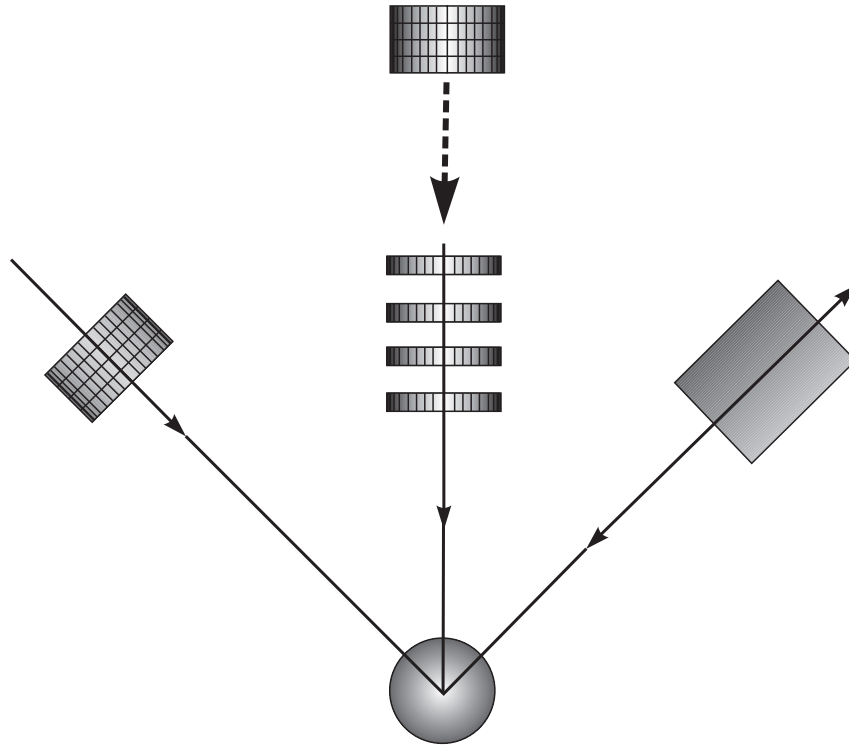


Рис. 1.1.

Вычислим ее величину. Введем систему координат, как показано на рис. 1.2. Пусть h — расстояние нижнего конца стержня от центра 0 ; l — длина стержня; S — площадь поперечного сечения; $\sigma_x(x)$ — среднее нормальное напряжение в сечении x ; ρ — плотность. Выпишем уравнение движения элемента стержня от x до $x + dx$. На этот элемент действуют массовая сила, равная $\rho g S R^2 dx / x^2$, и поверхностные силы $S \cdot [\sigma_x(x + dx) - \sigma_x(x)]$. Эти силы заставляют двигаться элемент с некоторым ускорением a . Причем величина a одинакова для всех элементов стержня, поэтому уравнение движения примет следующий вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \rho g \frac{R^2}{x^2} = -\rho a. \quad (3)$$

Концы стержня от напряжения свободны.

$$\sigma_x(h) = 0, \quad \sigma_x(h + l) = 0.$$

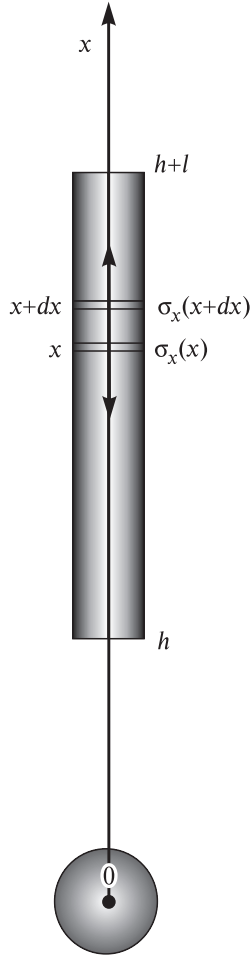


Рис. 1.2.

Указанных двух условий достаточно для того, чтобы определить одну постоянную интегрирования и ускорение a , которое заранее не известно. Результат будет следующим:

$$a = g \frac{R^2}{h(h+l)}, \quad \sigma_x = \frac{\rho g R^2}{h} (x-h) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{h+l} \right).$$

Легко видеть, что наибольшее растягивающее напряжение достигается в точке $x = x^* = \sqrt{h(h+l)}$. Таким образом, это не есть в точности середина стержня, а среднегеометрическое от координат его концов.

В дальнейшем нас будут интересовать только деформации самого тела, возникающие под действием приливных сил, поэтому перенесем начало координат из центра M в точку $x = x^*$, т. е. положим $y = x - x^*$. Тогда уравнение (3) можно записать в виде

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} = \rho g \frac{R^2}{(x^*)^2} \left[\left(1 + \frac{y}{x^*} \right)^{-2} - 1 \right]. \quad (4)$$

Во всех реальных ситуациях размеры тела много меньше расстояния от тела до массы, вызывающей прилив, значит, можно принять, что $l \ll h$, и значит, $y/x^* \ll 1$.

Приведем для удобства в качестве справки известные формулы, которые будут использоваться в дальнейшем. Если величина $\varepsilon \ll 1$, то с точностью до ε^2 можно принять, что

$$\sqrt{1+\varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{2}; \quad \sqrt[3]{1+\varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{3}; \quad \frac{1}{1+\varepsilon} = 1 - \varepsilon;$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}; \quad \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} = 1 - 2\varepsilon.$$

На основе последней формулы правую часть (4) можно представить в следующем виде: $\left(1 + \frac{y}{x^*} \right)^{-2} - 1 = -2 \frac{y}{x^*}$.

Отсюда

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} + \Gamma_1 \cdot y = 0, \quad \Gamma_1 = 2\rho g_0 \frac{R^2}{(x^*)^3}. \quad (5)$$

Легко также заметить, что при $l/h \ll 1$

$$x^* = h \sqrt{1 + \frac{l}{h}} = h + \frac{l}{2}. \quad (6)$$

Таким образом, в данном случае среднегеометрическое от координат концов стержня практически совпадает со среднеарифметическим. Поэтому наибольшее растяжение достигается в середине стержня.

Итак, уравнение движения (3) превратилось в обычное статическое уравнение (5). Это уравнение показывает, что приливные силы сводятся к обычным массовым силам, интенсивность которых пропорциональна расстоянию до центра тела. Эти силы направлены от центра, т. е. они стремятся разорвать (растянуть) стержень. Сумма их равна нулю. Следовательно, приливные силы представляют собой самоуравновешенную систему. Они деформируют тело, но не сообщают ему никакого ускорения как целому.

В подавляющем большинстве интересующих нас случаев взаимодействующие массы, конечно, не падают свободно, а вращаются вокруг общего центра масс. Нетрудно понять, что и при этом протяженное тело при своем обращении по орбите будет испытывать действие приливных сил.

3. Трехмерное тело. Статика. Теперь все готово для того, чтобы рассмотреть ситуацию, когда приливному возмущению подвергается реальное трехмерное тело. Здесь обнаруживается качественно новый эффект. Оказывается, приливные силы не только растягивают тело в направлении возмущающей массы, но и сжимают его в ортогональном направлении. Неожиданным является то обстоятельство, что это сжатие того же порядка, что и растяжение (оно всего в 2 раза меньше). Наиболее просто это можно показать, если воспользоваться следующим приемом [142]. Заменяем действие одной возмущающей массы M двумя массами $M/2$, расположенными на том же расстоянии, что и M , но симметрично относительно заданного тела (рис. 1.3). Можно предположить, что все три тела неподвижно закреплены в пространстве. Это позволяет ограничиться чисто статическим анализом (все силы инерции здесь отсутствуют).

Введем систему координат $Oxyz$, как показано на рис. 1.3. Выделим элементарный объем Δv с координатами x, y, z . Вычислим коор-

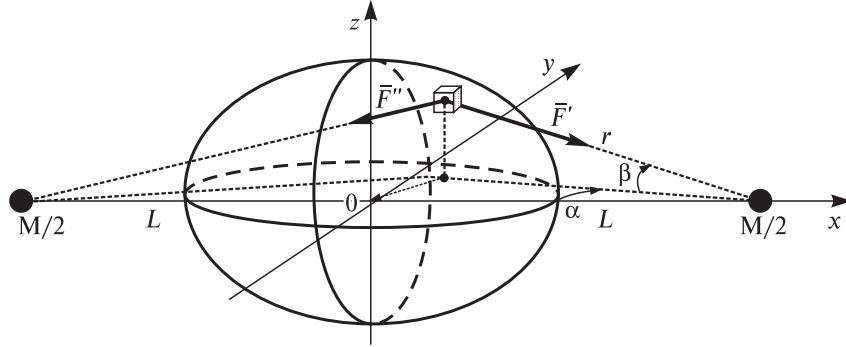


Рис. 1.3.

динаты силы, с которой этот объем притягивается к массе, расположенной в точке $x = +L$. Пусть $x, y, z \ll L$. Тогда можно принять, что

$$r^2 = L^2 \left(1 + 2 \frac{x}{L} \right), \quad r = L \left(1 - \frac{x}{L} \right), \quad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{L^2} \left(1 + 2 \frac{x}{L} \right),$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{L}.$$

Отсюда сила притяжения равна

$$|\bar{F}'| = \gamma \frac{M \cdot \Delta m}{2r^2} = \gamma \frac{M \cdot \Delta m}{2L^2} \left(1 + \frac{x}{L} \right),$$

компоненты этой силы равны

$$F'_x = |\bar{F}'| \cos \beta \cos \alpha = \gamma \frac{M \Delta m}{2L^2} \left(1 + 2 \frac{x}{L} \right),$$

$$F'_y = -|\bar{F}'| \cos \beta \sin \alpha = -\gamma \frac{M \Delta m}{2L^3} y, \quad (7)$$

$$F'_z = -|\bar{F}'| \sin \beta = -\gamma \frac{M \Delta m}{2L^3} z.$$

Теперь рассмотрим притяжение массы, расположенной слева. Для вычисления можно воспользоваться уже полученными формулами, заменив в них x на $(-x)$. В результате получим

$$F''_x = -\gamma \frac{M \Delta m}{2L^2} \left(1 - 2 \frac{x}{L} \right), \quad F''_y = -\gamma \frac{M \Delta m}{2L^3} y, \quad F''_z = -\gamma \frac{M \Delta m}{2L^3} z. \quad (8)$$

Складывая (7) и (8) получим результирующую силу, действующую на элемент m :

$$\begin{aligned}\bar{F} &= \bar{F}' + \bar{F}'' \\ F_x &= 2\gamma \frac{M\Delta m}{L^3} x, \quad F_y = -\gamma \frac{M\Delta m}{L^3} y, \quad F_z = -\gamma \frac{M\Delta m}{L^3} z.\end{aligned}\quad (9)$$

Эта сила и называется приливной. Видно, что приливная сила вызывает растяжение тела в направлении возмущающей массы и сжатие его в ортогональном направлении. Неожиданным, на первый взгляд, кажется то обстоятельство, что интенсивность сжатия всего лишь в 2 раза меньше интенсивности растяжения. Таким образом, приливная сила представляет собой обычную массовую силу, компоненты которой пропорциональны соответствующим координатам.

Массовые силы, действующие на тело, которое находится в покое, неизбежно приведут к возникновению внутренних напряжений. Распределение напряжений должно быть таким, чтобы они полностью компенсировали приливные массовые силы. Введем для компонент напряжений обычные обозначения $\sigma_{xx}, \sigma_{yy} \dots$. Известно, что сумма сил, действующих на элементарный объем тела $\Delta x \Delta y \Delta z$ со стороны окружающих объемов, равна $\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$.

Эта сила должна равняться компоненте силы F_x с противоположным знаком. Отсюда и двух аналогичных соотношений вдоль осей $0y$ и $0z$ следует система уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + 2\Gamma x &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} - \Gamma y &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \Gamma z &= 0.\end{aligned}\quad (10)$$

Здесь

$$\Gamma = \gamma \rho \frac{M}{L^3}, \quad (11)$$

где $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta x \Delta y \Delta z}$ — плотность материала.

Система (10) представляет собой классические уравнения равновесия. Это не что иное, как первый закон Ньютона, записанный для каждого из элементарных объемов покоящегося тела.

4. Трехмерное тело. Случай свободного падения тела. Покажем теперь, что рассмотренная выше схема описывает реальные приливные возмущения. Рассмотрим задачу в несколько более общей постановке, чем выше, а именно, будем считать, что тело является трехмерным и, кроме того, снимем ограничение на то, что возмущающая масса является неподвижной. Предположим, что оба тела падают с ускорением к некоторому общему центру масс.

Пусть M_1, M_2 — массы двух взаимодействующих тел. В начальный момент времени их скорости нулевые и они находятся друг от друга на расстоянии L . Обозначим через a_1, a_2 ускорения, с которыми массы M_1, M_2 движутся к их общему центру масс C . Тогда (рис. 1.4) имеем

$$M_1 a_1 = M_2 a_2 = \gamma \frac{M_1 M_2}{L^2}.$$

Пусть \bar{F} — гравитационная сила, действующая на элемент Δm с координатами x, y, z ; $\bar{\Sigma}$ — сила, действующая на Δm со стороны соседних элементов. В сумме эти силы должны сообщить элементу ускорение \bar{a}_1 , направленное параллельно оси Ox . Таким образом,

$$\bar{F} + \bar{\Sigma} = \Delta m \bar{a}_1.$$

Отсюда получаем

$$\Sigma_x = -2\gamma \frac{M_2 \Delta m}{L^3} x, \quad \Sigma_y = -\gamma \frac{M_2 \Delta m}{L^3} y, \quad \Sigma_z = \gamma \frac{M_2 \Delta m}{L^3} z.$$

Таким образом, для приливных сил мы получаем в точности те же самые выражения, что и в формулах (10). Видно, что приливная сила в случае свободного падения тела на возмущающую массу M

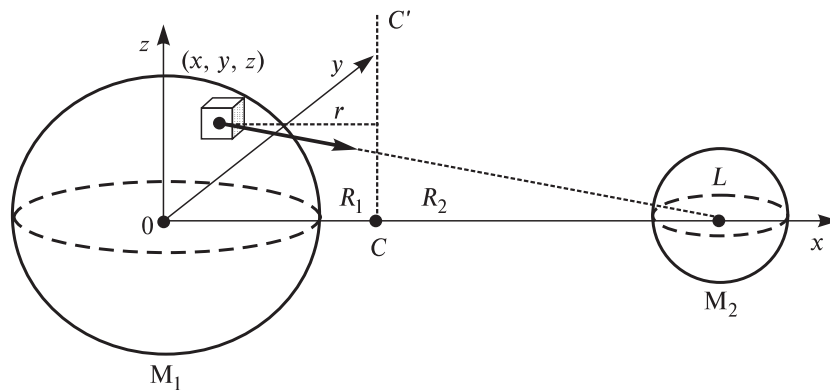


Рис. 1.4.

равна приливной силе, которая возникает в статическом случае, когда на тело действуют две симметрично расположенные массы $M/2$ [243].

Аналогично рассматривается случай, когда два тела вращаются вокруг общего центра масс.

Природу приливных сил первым объяснил Ньютон. С того времени в механике выделились целые научные направления, посвященные исследованию приливных сил. В данной монографии невозможно представить даже краткий обзор этих работ. Отметим только труды [54–58, 243], в которых содержится подробная библиография. Для дальнейших построений будет достаточно приближения (10).

§ 2. Приливные волны

Итак, на каждое протяженное тело, которое находится в гравитационном поле внешней (возмущающей) массы, действует особая система самоуравновешенных (приливных) сил. Эти силы являются растягивающими в направлении к возмущающей массе и сжимающими в ортогональных направлениях. Причем силы сжатия в ортогональных направлениях имеют тот же порядок, что и растягивающие. В дальнейшем, говоря о приливных силах, для краткости будем обычно упоминать только первую составляющую — составляющую растяжения в направлении возмущающей массы. Теперь естественно поставить вопрос, какова будет реакция тела на эти силы, к каким последствиям приводит наличие приливных сил?

По своему характеру данный вопрос принадлежит уже к области механики сплошных сред. Так, в механике твердого тела по заданным силам или смещениям требуется найти деформации тела и внутренние напряжения, в гидромеханике — определить течения, которые реализуются при заданных внешних условиях, для более сложных сред — найти деформации, напряжения, их скорости и, возможно, некоторые функционалы от них (для сред с памятью).

Таким образом, реакция тела на приливные силы будет зависеть прежде всего от свойств тела, его реологии, внутреннего строения, а также от характера распределения неоднородностей в теле. Если тело является абсолютно жестким, то какие бы самоуравновешенные силы на него не действовали, реакции не будет никакой. Тело всегда будет в точности сохранять свою исходную форму. В любой реальной ситуации тело будет, конечно, деформироваться.

Следует отметить, что данная задача все-таки не является обычной задачей механики сплошных сред. В механике предполагается, что начальные и краевые условия заданы, а также, что известны и

уравнения, описывающие поведение тела. В задаче о приливах ситуация другая. О начальных данных здесь вообще трудно что-либо сказать, о реологии среды, условиях на контактах между внутренними оболочками тела можно судить только предположительно. В целом здесь действует чрезвычайно много факторов, которые в той или иной степени влияют на деформацию небесного тела.

В этом отношении исходная задача ближе к прикладным задачам, возникающим непосредственно на практике. Как известно, любая прикладная задача никогда не возникает как математическая. Вначале она формулируется вербально. При этом, как правило, задача выглядит достаточно расплывчато и включает в себя ряд неопределенных моментов. На этом этапе в поле зрения оказывается много факторов, которые могут повлиять на результат. Затем происходит оценка роли различных факторов. Иногда оценка является более или менее строгой, чаще всего она носит интуитивный характер. Во всех случаях здесь всегда есть достаточно большой произвол. Этот этап исследования является основным. Он приводит к построению определенной модели процесса. Дальше задачу можно ставить уже либо как экспериментальную, либо как теоретическую, либо как и ту и другую одновременно. В последнем случае эксперимент уточняет принятую модель и влияет на математическую постановку задачи. В свою очередь и результаты математического исследования могут уточнить требования к эксперименту и т. д.

Примем для приливов ту же схему исследования, которая обычно используется для решения прикладных задач. Вначале перечислим как можно больше факторов, которые так или иначе могут влиять на процесс приливного деформирования. Затем уже выберем из них основные и перейдем к экспериментальному и теоретическому изучению.

1. Во-первых, приливные силы вносят свой вклад в движение воздушных масс атмосферы Земли.

2. Далее, всем хорошо известно, что существуют океанские приливы и отливы. Они могут быть весьма значительными. В некоторых акваториях высота прилива достигает 18 м. В открытом океане колебание высоты воды составляет порядка 2 м. Причиной океанских приливов также могут быть рассмотренные выше приливные силы. Такие же силы действуют и на внутренние моря и озера. Однако здесь результат их действия уже менее заметен.

3. Наряду с океанскими приливами существуют такие же приливы в твердой оболочке Земли. Как отмечалось, приливные силы стремятся растянуть тело в направлении к возмущающей массе и сжать его в ортогональных направлениях. Если тело является идеаль-

но упругим, то оно, естественно, растянется в направлении к возмущающей массе и сожмется в ортогональных направлениях. Вместе с тем тело будет продолжать собственное вращение вокруг оси. Поэтому к возмущающей массе будут поворачиваться все время новые материальные элементы тела. Это означает, что по поверхности тела будет бежать волна (приливная волна) (рис. 2.1, а).

Принципиально ситуация не меняется, если тело упругим не является. Какой бы ни была реология тела, растягивающая сила вызовет растяжение в направлении своего действия. Осложнение будет связано только с вращением тела. Поскольку вращение приводит к изменению направления действия силы относительно материальных элементов, то направление наибольшей деформации растяжения может уже не совпадать с направлением действия возникающей силы. Однако основной результат здесь не изменится — по телу будет бежать приливная волна (рис. 2.1, б).

4. Необходимо подчеркнуть, что приливная волна — это не поверхностные явления. Это следствие деформирования всей Земли в целом. (Как волна этот процесс воспринимается только для наблюдателя на поверхности Земли.) Поэтому в число факторов, влияющих на процессы приливного деформирования, необходимо также

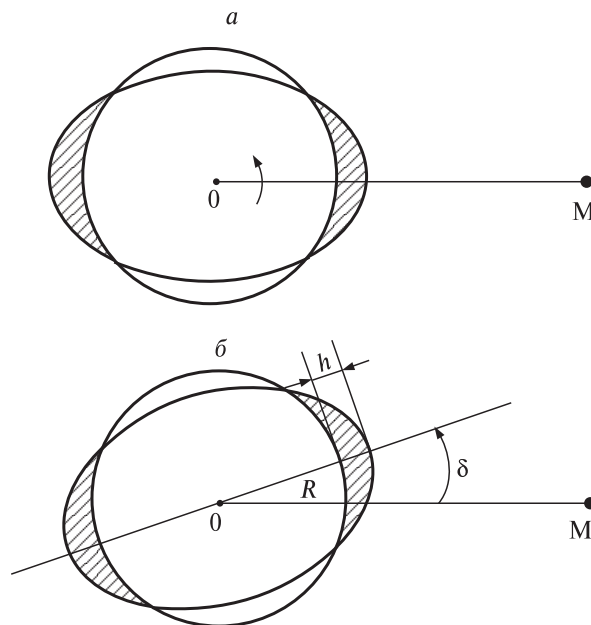


Рис. 2.1.

включить и приливные эффекты в мантии, жидком ядре и, в принципе, возможно, и в твердом ядре.

5. Картина приливов в целом усложняется тем обстоятельством, что на Землю действуют не одно, а два возмущающих тела: Луна и Солнце. Расстояния от них до Земли существенно различаются между собой, однако так же существенно различаются и их массы. В результате приливные воздействия на Землю Луны и Солнца будут иметь одинаковый порядок. Некоторый вклад дают также звезды и другие планеты Солнечной системы.

6. Плоскость орбиты, по которой Земля обращается вокруг Солнца (плоскость эклиптики), не совпадает с экваториальной плоскостью Земли и неортогональна ей. Иными словами, если говорить о взаимной ориентации двух прямых — нормали к плоскости эклиптики и оси вращения Земли, то можно сказать, что здесь имеет место общий случай: эти прямые не параллельны и не ортогональны. Плоскость орбиты Луны практически совпадает с плоскостью эклиптики и это упрощает задачу в целом.

7. Известно, что положение оси вращения Земли меняется в пространстве и, кроме того, меняется также относительно самой Земли (движение полюсов). Это также вносит свой вклад в динамику внешних сил и все процессы деформирования планеты.

Безусловно, здесь перечислены не все факторы, которые оказывают влияние на приливное деформирование Земли. В этот список можно включить также конвективное всплывание и погружение масс, космические факторы, связанные с вращением Солнечной системы относительно центра Галактики и т. д. Поэтому для полноты списка добавим еще один пункт.

8. Прочие факторы. Все указанные факторы связаны между собой. Причем эти связи, как правило, носят нелинейный характер, т. е. общий результат от действия двух факторов не является простым наложением результатов от каждого из них в отдельности. Кроме того, каждый из факторов оказывает определенное влияние на все остальные. Например, отметим связь только двух факторов: приливов в океане и приливов в твердой оболочке Земли. Как это ни покажется неожиданным, высота приливной волны в твердой оболочке Земли имеет тот же порядок, что высота прилива в открытом океане. Но это означает, что колебание дна должно учитываться при анализе динамики океанического прилива. Кроме того, имеет значение и тот факт, что приливное повышение уровня океана приводит к дополнительному давлению на дно, а значит и к его прогибу. Аналогичная и гораздо более выраженная ситуация имеет место и для континентального шельфа.

Кроме того, эффект земных и океанических приливов сказывается на гравитационном потенциале Земли, а любые перемещения масс влияют на момент инерции Земли в целом и, кроме того, на потенциал центробежных сил. Изменение потенциалов в свою очередь оказывает определенное влияние на все остальные факторы и т. д. Таким образом, наши обычные представления о Земле, как о чем-то очень стабильном при более внимательном рассмотрении, оказываются весьма далекими от действительности. Земля «раскачивается», «скрипит» и меняется во времени, т. е. эволюционирует. При этом приливы для Земли играют особую роль и накладывают свой отпечаток на все процессы ее эволюции.

Итак, мы видим, что процессы приливного деформирования Земли являются чрезвычайно сложными. Здесь действует множество факторов, большинство из которых можно оценить весьма приближенно. Как отмечалось, в этом отношении задача о приливах близка к обычным прикладным задачам, которые возникают на практике.

Каким должен быть следующий шаг? Ясно, что для такой сложной ситуации ставить вопрос об исследованиях приливов с учетом всех известных факторов — дело практически безнадежное. Для того чтобы реально продвинуться в решении, задачу необходимо резко сузить, т. е. сформулировать более доступную цель и, исходя уже из нее, вести дальнейшие построения. Мы сузим задачу следующим образом, а именно: исключим атмосферные и океанические приливы и будем интересоваться только твердыми приливами и соответствующим процессом деформирования внутренних масс Земли. Основное видимое проявление этого процесса состоит в движении на поверхности Земли приливных волн. Поставленную задачу можно сформулировать таким образом: исследовать в целом процесс деформирования Земли, который связан с движением по ее поверхности приливных волн. Однако и эта постановка является слишком общей, поэтому примем еще целый ряд дополнительных упрощений.

Исключим движение полюсов планеты, а также нутацию и прецессию ее оси. Будем учитывать не два, а только одно возмущающее тело, например, для определенности Луну, если речь идет о Земле. Для общности будем иметь в виду произвольную систему двух тел (т. е. не обязательно пару «Земля — Луна»). Поэтому конкретными значениями параметров связывать себя не будем. Одно из тел будем рассматривать как объект моделирования (т. е. деформируемое тело), а второе тело будем рассматривать только как возмущающую массу, которая создает прилив в первом теле.

Можно выделить несколько случаев характерного расположения орбиты тела и ориентации оси его вращения относительно возму-

щающей массы. Именно этим обстоятельством определяется характер нагружения деформируемого тела. Как и прежде, приливные силы удобнее рассматривать как чисто статические, вызванные притяжением двух симметрично расположенных масс, каждая из которых равна половине возмущающей массы M .

Введем координаты $0xyz$ так, чтобы ось $0x$ была направлена к возмущающему телу, ось $0y$ по касательной к орбите, ось $0z$ — ортогональна к $0x$, $0y$. Считаем, что орбита является окружностью и возмущающее тело находится в центре круга. Рассмотрим три крайних случая, когда ось вращения тела совпадает с одной из координатных осей $0x$, $0y$ и $0z$. Пусть тело вращается вокруг оси $0x$ (рис. 2.2). Возьмем произвольный материальный элемент тела. В течение суток элемент поворачивается вокруг оси $0x$. Легко видеть, что поле приливных сил будет симметричным относительно этой оси, значит, тело вытянется вдоль оси вращения, сожмется в ортогональных направлениях и фактически никакого

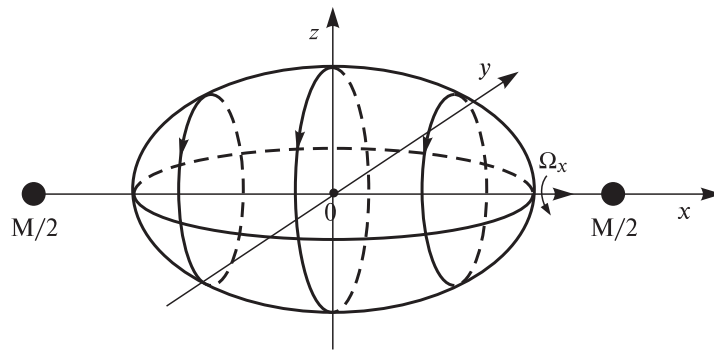


Рис. 2.2.

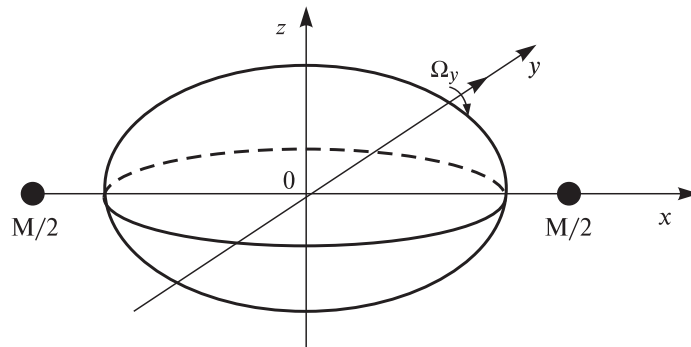


Рис. 2.3.

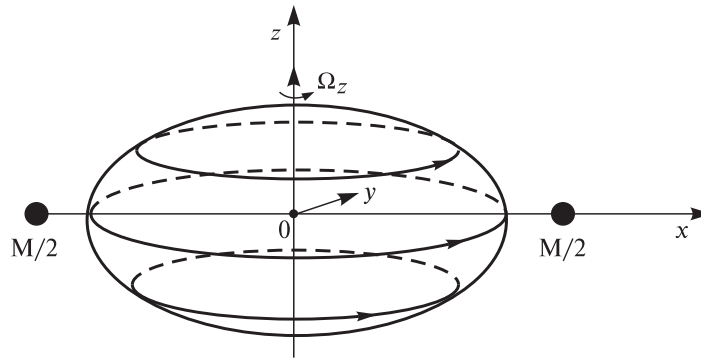


Рис. 2.4.

движения приливных волн на его поверхности не будет. А по этой причине и приливные деформации будут отсутствовать.

Пусть теперь тело вращается вокруг оси Oy (рис. 2.3). В этом случае тело растянуто вдоль направления Ox и сжато в ортогональных направлениях. Суточное вращение приводит к тому, что в область растяжения попадают все новые элементы тела. Затем они переходят в область сжатия и т. д. Таким образом, тело будет непрерывно деформироваться. На поверхности результат проявляется в виде приливной волны, непрерывно бегущей по поверхности тела.

Такой же будет ситуация в случае вращения тела вокруг оси Oz (рис. 2.4). Исключением является только один вариант, когда движущееся по орбите тело обращено к возмущающей массе одной и той же стороной (сутки равны году). В схеме с двумя массами, показанной на рис. 1.7, этому случаю отвечает значение $\Omega_z = 0$. При $\Omega_z \neq 0$, как отмечалось, по телу будет смещаться приливная волна.

В общем случае вращение будет осуществляться при отличии от нуля трех компонентов — $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$. Далее для анализа остановимся на самом простом (из нетривиальных) варианте, когда $\Omega_x = \Omega_y = 0$ и $\Omega_z \neq 0$.

§ 3. Критерии моделирования

Теория моделирования развита достаточно полно, и в настоящей работе нет необходимости излагать ее основные результаты. Отметим только, что в качестве составных частей в теорию моделирования можно включить анализ размерностей, теорию подобия, вопросы, связанные с исследованием различных аналогий, а также ряд других близких по духу приемов и методов [247].

В принципе, есть полная ясность, в каких случаях можно говорить о моделировании одних процессов с помощью других, в том числе и процессов, которые разыгрываются в натуральных условиях и на больших масштабах, с помощью тех или иных процессов, которые создаются в искусственных условиях и в меньших масштабах (проще говоря, в лабораторных опытах; именно эта ситуация представляет наибольший интерес). В идеальной ситуации моделирование (точнее, полная аналогия) будет обеспечено, если в безразмерных переменных два процесса описываются одинаковыми уравнениями и одними и теми же начальными и краевыми условиями. Кроме того, должна иметь место единственность решения. При этом переменные, фигурирующие в уравнениях, для каждого из данных процессов могут иметь различный физический смысл.

В тех случаях, когда исходный процесс и его модель имеют одну и ту же физическую природу, на первый план выступают анализ размерностей и соответствующие критерии подобия. Для вывода критериев есть четкий алгоритм. Реализация этого алгоритма никаких трудностей не вызывает. Таким образом, если есть исчерпывающие данные о реологии среды, ее строении и условиях нагружения или, иными словами, мы располагаем замкнутой системой уравнений и набором краевых и начальных условий, описывающих реальный процесс, то вопросы об условиях моделирования решаются однозначно.

Основные проблемы начинаются в тех случаях, когда часть исходных данных либо вообще отсутствует, либо носит неполный или предположительный характер. Однако трудности могут возникнуть и при наличии вполне достоверных данных и соответствующих им критериев подобия. Требования критериев могут оказаться настолько сложными, что выполнение их становится невозможным по техническим или по иным причинам.

Задача моделирования приливов, которая рассматривается в этой книге, демонстрирует полный набор всех указанных трудностей. Во-первых, в ней нет ясности со списком зависимых переменных, относительно которых должна быть сформулирована замкнутая математическая модель. Во-вторых, отсутствуют полные данные об уравнениях состояния и определяющих уравнениях. При этом есть вполне достоверные сведения о характере всех действующих сил, а также о форме планеты и ее движении в целом. Отсюда можно получить часть критериев подобия, но непосредственно реализовать их практически невозможно. Рассмотрим все данные вопросы по порядку.

Вначале о списке неизвестных. Ясно, что в этом списке должны фигурировать плотность среды, компоненты тензоров напряжений, деформаций, вектора смещений и, возможно, их скоростей. Желательно было бы включить температуру, внутреннюю энергию и другие физические переменные. Однако для этих переменных получаются весьма сложные критерии, которым трудно удовлетворить даже в рамках приближенного подхода, который рассматривается ниже. Поэтому последнюю группу переменных исключим. Это означает, что вопросы моделирования конвективных течений в небесном теле, фазовых переходов, электромагнитных и температурных полей, а также механохимических эффектов здесь не ставятся и не рассматриваются. Ниже ограничимся только чисто механическим описанием процесса приливного деформирования.

Структура уравнений, описывающих механическое поведение среды, хорошо известна. Ее можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + F_1 &= \rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right), \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + F_2 &= \rho \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + F_3 &= \rho \left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right); \\ \sigma_{ij} &= \Phi_{ij} [e_{km}, \varepsilon_{km}, x_1, x_2, x_3]; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{km} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right), \quad e_{km} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \right), \quad (3)$$

$$v_k = \frac{\partial u_k}{\partial t}, \quad i, j, k, m, = 1, 2, 3,$$

где x_i, t — декартовы координаты и время; $\sigma_{ij}, \varepsilon_{km}, u_k, e_{km}, v_k$ — компоненты напряжений, деформаций, перемещений и их скоростей; ρ — плотность; F_i — компоненты объемной силы. Определяющие уравнения записаны символически через функционалы Φ_{ij} . Для неоднородной, в частности для слоистой среды, функционалы будут явно зависеть от координат. В случае необходимости выражения (3) для компонент деформации можно заменить на соответствующие нелинейные соотношения. Точно так же в список неизвестных можно включить плотность среды и добавить для ее определения соответствующее уравнение состояния.

Задача будет корректной, если к уравнениям (1)–(3) добавить начальные и краевые условия. Как отмечалось, вопрос о начальных условиях для небесного тела весьма проблематичен. По-видимому, нет смысла рассматривать всю историю формирования небесного тела только ради решения проблемы начальных условий. Взамен последних можно поставить некоторые условия, которые обеспечивали бы стационарность процесса деформирования либо его определенную периодичность во времени. Для корректности задачи подобные условия вполне могут заменить начальные. Если же такой подход становится недостаточным, например, в случаях, когда необходимо рассматривать эволюцию тела (в частности, вековое замедление планеты вследствие приливного трения), то в качестве начального можно взять любое мгновенное состояние тела, о котором есть достаточные данные относительно распределения скоростей, перемещений и других необходимых переменных.

Перейдем теперь к краевым условиям. В общем случае краевые условия должны ставиться на поверхности тела после деформации. Например, в случае свободной поверхности должны выполняться условия

$$\bar{\sigma}_n(x_1, x_2, x_3, t) = \bar{0}, \quad (x_1, x_2, x_3) \in S_u(t), \quad (4)$$

где $\bar{\sigma}_n$ — напряжение на поверхности S_u . Индекс u указывает на то, что конфигурация поверхности берется после того, как реализовались смещения $\bar{i}(t)$, т. е. S_u — это актуальная конфигурация небесного тела.

Итак, задача свелась к моделированию процесса деформирования, который описывается системой уравнений (1)–(3). Для частных видов определяющих уравнений можно попытаться отыскать физические процессы, которые будут описываться теми же самыми уравнениями (т. е. можно поставить задачу поиска аналогий). Это направление исследований в настоящей работе не рассматривается. Ниже ограничимся моделированием, основанным только на физических процессах, происходящих и в естественных условиях. В этом случае проблема моделирования фактически сводится только к изменениям характерных масштабов тела, изменениям условий нагружения и параметров деформируемой среды.

Обозначим через $\Omega > 0$ скорость вращения небесного тела относительно возмущающей массы, через R — средний радиус тела. Примем величины Ω^{-1} и R за масштабы времени и длины. Тогда масштаб напряжений будет равен $\rho\Omega^2 R^2$, а объемных сил — $\rho R\Omega^2$.

В безразмерных переменных, которые отметим чертой наверху, имеем систему (1)–(3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{12}}{\partial \bar{x}_2} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{13}}{\partial \bar{x}_3} + \frac{F_1}{\rho R \Omega^2} &= \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{t}} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_1} + \bar{v}_2 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_2} + \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \bar{x}_3}; \dots \\ \bar{\sigma}_{ij} &= \frac{1}{\rho \Omega^2 R^2} \Phi_{ij} [\Omega \bar{e}_{km}, \bar{e}_{km}, R \bar{x}_1, \dots] \\ \varepsilon_{km} &= \bar{e}_{km}; \quad e_{km} = \Omega \bar{e}_{km}; \quad v_k = R \Omega \bar{v}_k, \quad \bar{v}_k = \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \bar{t}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Будем отмечать индексом М переменные, относящиеся к модели. Для переменных, которые относятся к действительному процессу деформирования, обозначения оставим прежними. Из теории известно, что в идеальном случае безразмерные уравнения, краевые и начальные условия (либо условия, их заменяющие) для модели и реального процесса должны полностью совпадать между собой. Посмотрим, что это будет означать для идеального процесса, моделирующего приливные деформации.

Обратимся к системе (5). Выражение для массовой силы дает первый критерий подобия: объемные силы в модели должны относиться к объемным силам в натуре как

$$k_1 = \frac{F_{iM}}{F_i} = \frac{\rho_M R_M \Omega_M^2}{\rho R \Omega^2}. \quad (6)$$

Для любых разумных размеров модели отношение радиусов R_M/R будет ничтожным. Однако сам по себе этот факт препятствием для реализации критерия (6) не является. Действительно, для небесного тела характер массовых сил таков, что их величины зависят от расстояния до центра тела. Пусть $F_i = f_i \cdot x_i$, f_1 — интенсивность массовых сил. Тогда из (6) следует, что

$$k_1 = \frac{f_{iM}}{f_i} = \frac{\rho_M \Omega_M^2}{\rho \Omega^2}.$$

Таким образом, фактор малости отношения R_M/R компенсировался за счет специфики массовых сил. Однако осталась проблема, связанная с малостью самой интенсивности массовых сил. (Кроме сил самогравитации. Однако эти силы уравновешиваются начальными напряжениями и деформаций не вызывают.) Последнее приводит к тому, что будут малы и вызываемые деформации. Этот

вопрос уже относится к геометрическим и кинематическим критериям подобия и будет рассмотрен ниже.

Принципиальные трудности в реализации критерия (6) связаны также с характером массовых сил. В естественных условиях массовые силы имеют три составляющие: центробежную, приливную и самогравитации. Моделирование центробежных сил принципиальных трудностей не вызывает. Однако попытки моделирования в лабораторных условиях приливных сил и сил самогравитации приводят к трудностям, которые следует признать непреодолимыми. Таким образом, от моделирования массовых сил мы полностью отказываемся. Следовательно, мы отказываемся и от моделирования действительного распределения напряжений в небесном теле. Однако это не означает, что вся задача моделирования в целом становится безнадежной. В опытах можно воспроизвести кинематику деформирования, которая создается массовыми силами. Естественно, это можно сделать только на границе тела. Следовательно, речь идет о том, чтобы воспроизвести на границе движения приливных волн.

Основной вопрос, который здесь возникает, сводится к следующему: насколько такая кинематическая постановка соответствует реальной ситуации. Оказывается, что в довольно общих случаях ответ на этот вопрос будет положительным: при выполнении определенных условий кинематическая постановка проблему моделирования приливных деформаций решает. Причем здесь можно дать вполне строгие доказательства.

Обратимся к методам механики деформируемого твердого тела. Пусть у нас есть тело V , ограниченное поверхностью S . Предположим, что тело деформируется под воздействием каких-то внешних условий. Вначале будем считать, что среди этих условий массовые силы отсутствуют, т. е. процесс деформирования тела сводится к тому, что на части поверхности тела задаются перемещения, на другой части — напряжения либо некоторые комбинации перемещений и напряжений. Предположим теперь, что мы задали некоторые граничные условия и решили краевую задачу. Что это означает? Это означает, что теперь мы располагаем информацией о напряжениях и смещениях во всем теле, включая его внутренние точки и границу.

Рассмотрим теперь вторую задачу. Отбросим все силовые граничные условия, которые фигурировали в первой задаче, и зададим на всей замкнутой границе тела именно то распределение смещений, которое получилось из решения первой задачи. При довольно общих предположениях можно показать, что здесь получится то же

самое решение, что и в первой задаче. (Исключение составляют неустойчивые процессы, когда нет единственности решения. Ниже такие случаи не приводятся.) Например, для линейно-упругого тела рассмотренное утверждение следует из основного энергетического тождества. Пусть σ'_{ij} , u'_{ij} , ε'_{ij} и σ''_{ij} , u''_{ij} , ε''_{ij} — два статических решения упругой задачи. Разность решений обозначена теми же буквами, но без штрихов, тогда

$$\int_S (\bar{\sigma}_n \cdot \bar{u}) ds = \int_V \sigma_{ij} e_{ij} dV,$$

где справа стоит положительно определенная квадратная форма. Для силовой задачи интеграл слева равен нулю в силу того, что $\bar{\sigma}_n = \bar{0}$ на границе либо на отдельных участках границы $\bar{\sigma}_n \cdot \bar{u} = 0$. Но если мы под σ'_{ij}, \dots понимаем решение силовой задачи, а под σ''_{ij}, \dots — решение кинематической задачи, то интеграл слева будет равен нулю вследствие того, что $\bar{u} = \bar{0}$ на всей поверхности S , т. е. в данном случае совпадение двух решений следует из теоремы единственности. Правда, при этом предполагалось, что массовые силы отсутствуют. Отметим, что это результат точный. Его можно также строго доказать для более широкого класса моделей.

Предположим теперь, что массовые силы есть. Этот случай гораздо сложнее. Во-первых, если материал тела является сжимаемым, то никаких достаточно общих результатов получить, по-видимому, нельзя. Но если тело несжимаемое, то возможны ситуации, когда чисто кинематическое нагружение без массовых сил дает в точности ту же самую картину деформирования, что и нагружение с массовыми силами. Действительно, перейдем в уравнениях (1)–(3) к пределу $\text{div } \bar{v} \rightarrow 0$ (здесь \bar{v} — вектор скорости). Тогда в выражениях для нормальных напряжений выделится новая аддитивная переменная p — гидростатическое давление

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера; σ'_{ij} — компонента девиатора напряжений. Для определения новой переменной появится и новое уравнение

$$\text{div } \bar{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0. \quad (7)$$

В рассматриваемой задаче объемные силы имеют потенциал:

$$\bar{F} = -\text{grad } \Pi. \quad (8)$$

Поэтому систему (1) можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma'_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma'_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma'_{13}}{\partial x_3} &= \frac{\partial(p + \Pi)}{\partial x_1} + \rho \frac{dv_1}{dt}, \\ \frac{\partial \sigma'_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma'_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma'_{23}}{\partial x_3} &= \frac{\partial(p + \Pi)}{\partial x_2} + \rho \frac{dv_2}{dt}, \\ \frac{\partial \sigma'_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma'_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma'_{33}}{\partial x_3} &= \frac{\partial(p + \Pi)}{\partial x_3} + \rho \frac{dv_3}{dt},\end{aligned}\quad (9)$$

где, как обычно, d/dt означает полную производную. Благодаря равенству (8) из системы оказывается возможным исключить одновременно и массовые силы, и гидростатическое давление p . Это можно сделать перекрестным дифференцированием уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial \sigma'_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma'_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma'_{23}}{\partial x_3} \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial \sigma'_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma'_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma'_{13}}{\partial x_3} \right] &= \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial \sigma'_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma'_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma'_{33}}{\partial x_3} \right] - \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial \sigma'_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma'_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma'_{23}}{\partial x_3} \right] &= \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial \sigma'_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma'_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma'_{33}}{\partial x_3} \right] - \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial \sigma'_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma'_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma'_{13}}{\partial x_3} \right] &= \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right).\end{aligned}\quad (10)$$

Из трех уравнений (10) независимыми будут только два. Выделим из (2) девиаторную часть напряжений и подставим в (10) выражения σ'_{ij} через скорости и, возможно, операторы от скоростей и перемещений. В результате получаем замкнутую систему уравнений, в которую вошли только кинематические переменные и не вошли никакие данные о массовых силах. При этом не предполагалось, что массовые силы отсутствуют. Подразумевалось только, что они имеют потенциал. Нетрудно заметить, что система представляет собой не что иное, как вариант известных уравнений Гельмгольца, которые широко используются в гидродинамике. Коль скоро в уравнениях фигурируют только кинематические переменные, то естественно рассмотреть для нее и чисто кинематические краевые условия.

Пусть по-прежнему $S_u(t)$ — это актуальная конфигурация поверхности тела в момент времени t , w_i — граничные значения компонент скоростей. Тогда

$$v_i(x_1, x_2, x_3, t) = w_i \quad \text{при} \quad (x_1, x_2, x_3) \in S_u(t). \quad (11)$$

Везде имеется в виду, что краевые условия дополнены необходимыми начальными или некоторыми эквивалентными им условиями.

Вопрос о корректности задачи (11) для систем уравнений (10) и (7) является весьма непростым и зависит от структуры уравнений. Ясно, что в общем случае на функции w_i должны быть наложены определенные дополнительные условия. Например, условие несжимаемости среды диктует необходимость выполнения следующего ограничения:

$$\iint_S (\bar{w} \cdot \bar{n}) dS = 0, \quad (12)$$

где \bar{w} , \bar{n} — векторы скорости и нормами к границе. Как уже отмечалось, здесь проблема корректности кинематической постановки ставится таким образом. Предположим, что мы решаем задачу для исходной системы уравнений (1)–(3), в которой объемные силы фигурируют явно. При этом на границе тела задаются определенные напряжения. (Основной случай, который имеет значение — это свободная от напряжений поверхность.) Из решения указанной задачи определяем граничные скорости w_i и именно эти скорости задаем в краевых условиях (11), которые ставим для системы, где массовые силы уже не фигурируют.

Таким образом, в данном случае кинематическое условие на границе является следствием решения исходной силовой задачи. Теперь возникает вопрос, в какой степени полученное кинематическое условие (11) может заменить исходное силовое условие (4). При наличии весьма необременительных предположений такая замена будет вполне корректной. Первое предположение связано с единственностью решения силовой задачи. Предположим, что единственность решения есть. Если краевое условие (4) выделяет единственное решение, то замена его на кинематическое условие (11) также приведет к единственному решению, причем поле скоростей в обоих решениях будет одинаковым.

Конечно, это утверждение нуждается в обсуждении и целом ряде уточнений. Во-первых, если среда обладает памятью и в уравнениях (2) Φ_{ij} — это действительно функционалы, а не функции, то речь должна идти не просто о смещениях или напряжениях на границе, а об условиях, которые описывают всю историю нагружения тела. Во-вторых, для определенных типов систем уравнений (например, для систем гиперболического типа) краевые условия не могут ставиться на всей замкнутой поверхности, которая ограничивает деформируемое тело. Однако, если смещения (11) получены уже из решения некоторой корректно поставленной задачи, то они, хотя и будут выглядеть переопределенными, но тем не менее автоматически будут удовлетворять всем необходимым требованиям самосогласования (типа (12) и другим аналогичным условиям).

Рассмотрим теперь подробнее вопрос о единственности кинематического решения. Формально он сводится к следующему. Предположим, что краевые условия силового типа обеспечивают единственность решения. Заменяем теперь силовые условия на условия кинематического типа (11). Будет ли решение новой задачи также единственным? Для известных классических моделей (линейная упругость, вязкая жидкость, пластическое тело) ответ на этот вопрос будет положительным, с точностью до аддитивного гидростатического давления, которое в данном случае значения не имеет. Есть все основания ожидать, что ответ будет положительным и для более широкого класса математических моделей. Весь опыт теоретического и экспериментального изучения деформирования различных материалов свидетельствует в пользу такого предположения. В частности, в экспериментальной механике различие в указанных типах краевых условий выражается в понятии «жесткость нагружения». Нагружения силового типа, когда на границе задаются силы, называются «мягкими», а нагружения, когда на границе задаются смещения — «жесткими». Можно ввести определения и промежуточных типов нагружений. Опыт показывает, что повышение степени жесткости нагружения всегда увеличивает степень устойчивости процесса деформирования. Это также свидетельствует в пользу положительного решения поставленного выше вопроса.

В общем случае теоретическое доказательство (т. е. без конкретизации модели среды), по-видимому, невозможно. (Тем более, что заранее ясно — кинематические и силовые условия не эквивалентны между собой: из единственности решения при заданных смещениях не следует единственность его при заданных напряжениях, даже если последние и определены из решения кинематической задачи.) Однако для конкретных моделей и задач можно получить исчерпывающие результаты.

В качестве иллюстрации рассмотрим с этой точки зрения классическую задачу Эйлера об упругом сжатии стержня (рис. 3.1). Пусть AB , CD — торцы стержня, на которые приложена равномерно распределенная сжимающая нагрузка p^* , AD , BC — боковая поверхность, свободная от напряжений. (Для удобства рассматривается плоская деформация.)

Задача сводится к решению упругих уравнений при следующих краевых условиях:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = p/2h, \quad \sigma_{12} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 x_2 \in AB, CD; \\ \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 x_2 \in BC, AD. \end{aligned} \quad (13)$$

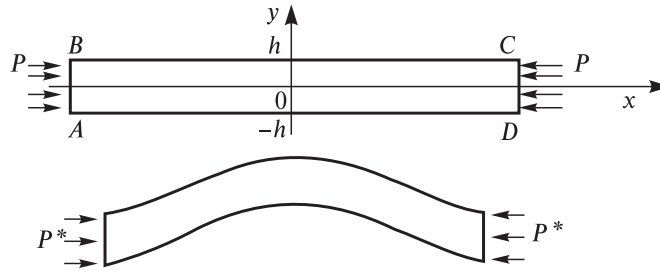


Рис. 3.1.

Решение этой задачи имеет следующий вид:

$$\sigma_{22} = \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{11} = p/2h; \tag{14}$$

$$u_1 = \frac{1}{E} \frac{p}{2h} x_1, \quad u_2 = -\frac{\nu}{E} \frac{p}{2h} x_2, \tag{15}$$

где E, ν — упругие постоянные материала; (x_1, x_2) — любая внутренняя или граничная точка области $ABCD$.

Итак, равенства (14), (15) представляют собой решение исходной задачи в напряжениях (мягкое нагружение). Если теперь компонент смещений (14) задать на границе тела (жесткое нагружение), получим то же самое распределение напряжений (14). Однако указанные задачи будут эквивалентными только при значениях нагрузки, меньших некоторой критической p^* . При больших нагрузках, как известно, решение задачи (13) становится неустойчивым. Более того, если исходить из краевых условий (15), то устойчивость будет сохраняться и при нагрузках p , больших критической (рис. 3.2), т. е. переход к кинематическим условиям заведомо повышает устойчивость деформирования. В данном случае устойчивость гарантирует единственность, а значит, и совпадение решений силовой и кинематической задач.

Теперь можно сделать следующий общий вывод: если среда является несжимаемой и поле массовых сил имеет потенциал, то распределение скоростей, которое реализуется в теле вследствие приложения массовых сил и заданных напряжений на его границе,



Рис. 3.2.

будет совпадать с полем скоростей, получающимся в результате решения чисто кинематической задачи, где массовые силы явно не фигурируют, а на границе задано специальное распределение скоростей (именно такое, которое получается на поверхности тела под действием массовых сил). Таким образом можно добиться моделирования кинематики деформирования, не прибегая к моделированию действительного распределения массовых сил. Этот факт положим в основу рассмотренного ниже метода исследования приливных волн. Такое моделирование оказалось возможным за счет того, что поле действительных массовых сил компенсируется благодаря специальному распределению гидростатического давления, поэтому при таком подходе распределение гидростатического давления не моделируется. Для остальных напряжений (касательных напряжений и разностей нормальных напряжений) подобие соблюдаться будет.

Далее. Обычно при решении сложных задач результаты такого рода распространяются за область своей первоначальной формулировки. В настоящей работе поступим таким же образом. Будем применять метод кинематического моделирования для любых сред без ограничения на их сжимаемость. Ниже будет показано, что условия нагружения в целом будут такими, что общее изменение объема тела все равно будет отсутствовать. Сделанный шаг означает только, что игнорируется сжимаемость, связанная с конвективным переносом материальных элементов в неоднородном поле напряжений. В рассмотренных задачах перенос элементов по глубине будет иметь порядок высоты приливной волны, поэтому поправка на сжимаемость среды будет ничтожной.

Итак, мы пришли к необходимости исследования кинематических задач (10), (7) и (11). Из указанных уравнений легко получить следующий кинематический критерий подобия: граничные скорости на модели должны относиться к граничным скоростям в натуре как

$$k_2 = \frac{M}{w_i} = \frac{R_M \Omega_M}{R \Omega}. \quad (16)$$

Сюда так же, как и в критерий (6), вошло отношение $R_M / R \ll 1$. При заданном уровне деформаций тела скорости его граничных точек возрастают пропорционально размерам тела. Поэтому сам по себе факт чрезвычайной малости отношения R_M / R не служит препятствием для моделирования. Серьезной проблемой является другое обстоятельство — малость самих приливных деформаций. В большинстве реальных ситуаций высота приливной волны h много

меньше характерных размеров тела R . Поэтому масштаб приливных деформаций, равный h/R , много меньше единицы:

$$\lambda = \frac{h}{R} \ll 1.$$

Критерии геометрического подобия требуют, чтобы форма модели была геометрически подобна форме небесного тела. Это сразу влечет за собой равенство безразмерного параметра λ в натуре и модели. Значит, безразмерные деформации, которые реализуются в модели, должны совпадать с безразмерными деформациями самого небесного тела. Но поскольку последние весьма малы, то это сразу приводит ко многим техническим трудностям. Во-первых, для проведения измерений на таких масштабах потребуется аппаратура с очень высокой степенью точности. Однако даже если допустить, что эта проблема решена, то следующая проблема является еще более трудной. Она связана с наличием возмущений, которые всегда есть в любом эксперименте. Допустим, что найдены пути преодоления и этой трудности. Последнее будет означать, что все геометрические критерии подобия выдержаны точно. Однако при этом выяснится, что значительные усилия, потраченные на точное выполнение указанных критериев, привели только к ухудшению экспериментальных возможностей в целом.

Действительно, чего мы ожидаем от лабораторного моделирования приливных деформаций? Прежде всего выяснения роли необратимых эффектов, связанных с приливами. Необратимость означает эволюцию модели (и моделируемого небесного тела) во времени. Поэтому в модели и натуре появляется еще одна характерная переменная — число циклов приливного деформирования, которое является безразмерной величиной. Следовательно, оно должно быть одинаковым в модели и натуре. В свою очередь это означает, что в модели потребуется реализация значительного числа циклов нагружения, которое может превысить технические возможности стендов. Правда, есть одно исключение — случай, когда необратимый процесс выходит на стационарный режим. При этом достаточно только убедиться в стационарности режима деформирования и измерить скорости изменения всех переменных. Однако и тогда проблема малости всех деформаций перемещений и их скоростей остается нерешенной.

Таким образом, в рассматриваемой задаче точное выполнение геометрических критериев подобия не только невозможно (или весьма трудоемко), но по указанным выше причинам и нецелесообразно. В связи с этим возникает необходимость в некотором расши-

рении самого понятия «моделирование». Идея расширения очень проста и коротко может быть описана следующим образом. Пусть в натуральных условиях некоторая характеристика процесса, например, одна из компонент скорости, описывается функцией

$$v(x_1, x_2, x_3, R, \Omega, \dots, \lambda),$$

где λ — безразмерный параметр, причем $\lambda \ll 1$. Масштаб скорости известен. Поэтому от компоненты v можно перейти к вполне определенной безразмерной функции от безразмерных аргументов. Обозначим безразмерную функцию через $\varphi(\lambda)$. Остальные безразмерные аргументы не выписаны, так как сейчас они рассматриваться не будут. «Ортодоксальная» теория моделирования требует, чтобы все безразмерные параметры в модели и натуре были одинаковыми. Предположим, что этого можно добиться для всех параметров, кроме λ . Обозначим достижимые значения этого параметра в модели через λ_M . Пусть

$$\lambda_M = \lambda \cdot N, \quad N \gg 1,$$

т. е. в модели параметр увеличен по сравнению с небесным телом в N раз. Следовательно, в лабораторных экспериментах можно изучить функцию $\varphi(N \cdot \lambda)$. Теперь ее необходимо соотнести с функцией $\varphi(\lambda)$ и затем уже перейти к размерным переменным моделируемого небесного тела. Ясно, что здесь все будет зависеть от поведения функции $\varphi(\lambda)$ в окрестностях нуля. Если функция в окрестности нуля является гладкой и раскладывается в ряд, то имеем

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots, \\ \varphi(N\lambda) &= a_0 + Na_1\lambda + N^2a_2\lambda^2 + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Нетрудно все отсчеты выбрать так, чтобы при $\lambda = 0$ значение $\varphi = 0$. (Это означает, что если приливной волны нет, то и никаких эффектов также нет.) Далее, основному случаю отвечают условия $\lambda \ll 1$, $N\lambda \ll 1$. (Иными словами, хотя деформации в модели гораздо большие, чем те, которые реализуются в натуре, тем не менее они остаются достаточно малыми.) В этом случае вместо (17) можно записать

$$\varphi(\lambda) = a_1\lambda + \dots; \quad \varphi(N\lambda) = Na_1\lambda + \dots \quad (18)$$

Равенства показывают, что если $a_1 \neq 0$, то проблема малого параметра решается обычной линейной интерполяцией.

Таким образом, если безразмерная амплитуда реальных приливных волн ниже (практически — на несколько порядков), чем в экспериментальной модели, то для перехода от экспериментов к натуре

можно использовать линейную интерполяцию. При этом должны выполняться условия, обеспечивающие структуру типа (18). Не располагая уравнениями деформирования, обосновать правомерность линейной интерполяции невозможно. Отметим только, что для уравнений линейного типа (линейно-упругая среда, линейно-вязкая жидкость) и большого класса нелинейных уравнений возможность представлений (18) сомнений не вызывает (рис. 3.3). Правда, нельзя исключать случаи, когда некоторые эффекты имеют не первый порядок малости, а например, второй. Тогда в разложении (18) $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$ и коэффициент перехода меняется с N^{-1} на N^{-2} .

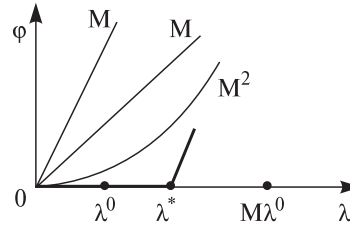


Рис. 3.3.

Более сложной будет ситуация, когда свойства среды обладают определенным порогом, который обозначим через λ^* . Классический пример связан с наличием порога пластичности: пластические свойства среды начинают проявляться только при деформациях, больших λ^* . В таких случаях мы имеем три масштаба деформаций: первый — деформации небесного тела, которые имеют порядок λ ; второй — деформации модели $N\lambda$ и третий — пороговая деформация λ^* . Между ними возможны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \lambda < N\lambda < \lambda^*, \\ \lambda^* < \lambda < N\lambda, \\ \lambda < \lambda^* < N\lambda. \end{aligned} \tag{19}$$

В первых двух случаях можно говорить о подобии процессов в модели и натуре. В третьем случае — нет, так как в натуральных условиях деформации слишком малы для преодоления порога λ^* , а в модели — слишком велики и порог оказывается преодоленным.

Все подобные вопросы должны решаться в каждом конкретном случае отдельно. Отметим еще раз, что экспериментальное моделирование имеет смысл и в тех случаях, когда критерии подобия выдерживаются весьма приближенно или даже не выполняются. В этих случаях полученные результаты могут быть полезными для разработки математической модели процесса. А в математической модели, как уже отмечалось, нет никаких проблем ни с массовыми силами, ни с любыми сколь угодно малыми параметрами.

Далее рассмотрим еще одно упрощение проблемы. Обратимся к рис. 2.4. Здесь возмущающая масса находится в плоскости эквато-

ра, поэтому Северное и Южное полушария планеты находятся в одинаковых условиях. Из симметрии можно заключить, что перенос масс через экваториальную плоскость будет полностью отсутствовать. (Но, конечно, не всегда. Может оказаться, что симметричное состояние станет неустойчивым. Например, при наличии у планеты жидкого ядра. Однако ясно, что при изучении простейшего — базового — варианта модели эти эффекты вначале можно исключить.)

Таким образом, вследствие симметрии все материальные частицы тела, находящиеся в его экваториальной плоскости, в процессе приливного деформирования будут смещаться, оставаясь все время в той же плоскости. Поэтому вначале рассмотрим процесс деформирования только этого сечения, причем в условиях плоской деформации.

Это означает, что мы пренебрегаем еще рядом факторов. Каких именно? Возьмем в реальном трехмерном теле сечения, параллельные и близкие к экваториальной плоскости. Эти сечения будут иметь размеры меньшие, чем экваториальное сечение и поэтому между ними появляются градиенты смещений и соответствующие касательные напряжения. Переход к плоской деформации означает, что все параллельные сечения мы заменяем на сечения, совпадающие с экваториальным. Следовательно, упомянутые касательные напряжения полностью игнорируются. Можно ожидать, что в действительности указанные напряжения весьма малы и такая замена значительного влияния на картину деформирования не оказывает.

Итак, мы приходим к следующей задаче: необходимо исследовать процесс деформирования плоского тела в условиях, когда на его границе заданы перемещения, соответствующие движению приливных волн. На пути к ее реализации возникают очередные вопросы: какую конфигурацию границы необходимо взять в качестве исходной; какие именно краевые условия задавать на этой границе; каким образом можно реализовать требуемое нагружение.

Все эти вопросы тесно связаны с общей теорией аффинных деформаций сплошной среды. Данная связь представляется интересной как в плане дальнейших теоретических построений, так и для экспериментальной реализации процесса, поскольку для теоретических решений аффинные преобразования дают нетривиальное нулевое приближение (если задачу решать методом малого параметра), а для экспериментальной методики — подсказывают оптимальную конфигурацию внешней границы и вид краевых условий на ней. Кроме того, связь с аффинными преобразованиями позволяет рас-

ширить область приложения полученных результатов на проведение визкозиметрических измерений, создать экспериментальную методику проверки определяющих уравнений сложных сред и др. (см. гл. 5). Поэтому рассмотрим вначале некоторые результаты теории аффинных деформаций.

§ 4. О связи приливных деформаций с аффинными преобразованиями сплошной среды

Если приливные деформации создаются одним небесным телом, то их можно охарактеризовать следующим образом: тело растягивается вдоль одного фиксированного направления (именно так выбрана система координат) и одновременно сжимается вдоль ортогональных направлений. В общем случае тело относительно указанных направлений непрерывно поворачивается, т. е. испытывает сложное нагружение с непрерывным поворотом осей тензоров деформаций и напряжений. Данный процесс обладает одной замечательной особенностью. Если отвлечься от ряда деталей, связанных с неоднородностью тела, движением полюсов и неравномерностью скорости вращения, то можно принять, что процесс деформирования небесного тела носит стационарный характер. При этом внешняя форма тела остается неизменной. Иными словами, если смотреть на тело из космоса без разрешения на материальные точки его поверхности (т. е. фиксируя только форму его поверхности), то можно констатировать постоянство внешней формы. Поскольку внешняя форма тела отличается от сферической, вращение тела в данных условиях приводит к его циклическим деформациям. В первом приближении можно принять, что распределение деформаций в однородном теле также является однородным. Справедливость данного предположения будет видна из дальнейших построений. Следующие приближения, конечно, предполагают учет неоднородности деформаций как для однородного тела, так и для тела с неоднородным строением (в частности, с жестким внутренним ядром).

В данном параграфе рассмотрим только первое приближение. Итак, пусть тело испытывает однородную деформацию растяжения вдоль фиксированного направления и сжатие вдоль ортогональных направлений.

Напомним, что деформацию называют однородной, если ее характеристики (компоненты тензора деформаций) не зависят от пространственных координат, т. е. являются одинаковыми для всех элементарных объемов тела. Однородной деформации отвечает линейное поле перемещений.

В математике вводится более широкое понятие, чем деформация области, а именно — отображение одной области на другую. Результат деформирования можно рассматривать как частный вид отображения некоторой области из ее исходного состояния в область, соответствующую ее конечному состоянию. В этом смысле понятие однородной деформации равносильно понятию аффинного отображения одной области на другую. Применительно к жидкостям или сложным реологическим средам чаще говорят не о деформировании, а о течениях той или иной среды. Поэтому понятия «однородная деформация» (или «течение»), «аффинное преобразование, аффинная деформация» — это разные названия одних и тех же процессов (точнее, процессов с одной и той же кинематикой).

Различные частные виды аффинных деформаций встречаются во многих областях механики. Они появляются при изучении целого ряда разнообразных проблем. История их исследования насчитывает много десятков лет и связана с именами Дирихле, Дедекинда, Римана, Пуанкаре, Ламба, Жуковского и др. [79, 142, 248–250].

Результаты общей теории аффинных преобразований хорошо известны и приводятся во многих учебниках по геометрии [251, 252]. Так, в общей теории доказывается, что при любых аффинных преобразованиях прямые переходят в прямые, круги — в эллипсы, а сферы — в эллипсоиды. Кроме того, аффинные преобразования сохраняют свойства параллельности прямых и плоскостей. Общие свойства аффинных преобразований исследованы, по-видимому, самым исчерпывающим образом.

Однако если такие преобразования рассматривать с точки зрения механики, то обнаруживается ряд новых результатов, имеющих конкретный практический смысл. Здесь становятся важными не только сами по себе те или иные течения, но и их интерпретация, а также формулировка цели исследования и постановка самой задачи. В работах [3–5, 21] рассматривалась следующая постановка задачи: разработать экспериментальную методику исследования определяющих уравнений сложных сред. Известно, что идеальными для такой цели являются эксперименты, реализующие аффинную деформацию. Поэтому задача свелась к тому, чтобы дать полную классификацию типов аффинных деформаций именно с точки зрения возможностей для их реализации, а затем выбрать из них такие, которые можно было бы практически реализовать. (Этот вопрос рассмотрен в гл. 5.)

Некоторые типы таких деформаций можно связать с приливными волнами. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

4.1. Приливное деформирование как суперпозиция однородных растяжений и сжатий

Обратимся вначале к рис. 2.1 (см. с. 33). Как отмечалось, под действием приливных сил тело вытягивается в направлении к возмущающей массе и сжимается в ортогональных направлениях. При этом тело непрерывно поворачивается относительно данных направлений. Именно эти черты реального процесса будем считать основными и именно их сохраним при экспериментальном моделировании. Нас будут интересовать стационарные процессы, т. е. процессы, которые могут продолжаться неограниченно долго во времени, поэтому среду будем предполагать несжимаемой. Точнее, сама по себе среда может быть любой — как сжимаемой, так и несжимаемой, но условия нагружения должны быть такими, чтобы изменения объема отсутствовали, т. е. дивергенция скорости должна равняться нулю. Несжимаемость в условиях плоской деформации означает, что растяжение в одном направлении должно равняться такому же сжатию в ортогональном направлении. Поэтому в качестве первого шага предположим, что тело испытывает аффинное растяжение в одном направлении и соответствующее сжатие в ортогональном направлении. Теперь о повороте. Взаимоотношения поворотов и деформаций в механике сплошной среды носят нетривиальный, а в ряде случаев и довольно запутанный характер. Рассмотрим этот вопрос подробнее, опираясь на предельно ясные исходные посылки.

Предположим, что мы располагаем некоторым устройством нагружения, положение которого в пространстве характеризуется двумя ортогональными осями $0x_1$, $0x_2$ (рис. 4.1). Возможности этого устройства следующие. При фиксированном положении осей $0x_1$, $0x_2$ устройство захватывает заданное тело по всей его границе и затем после включения дает ему однородное растяжение с постоянной скоростью деформации k вдоль $0x_1$ и сжатие с такой же скоростью вдоль направления $0x_2$. Причем такой режим нагружения может выдерживаться сколь угодно долго. (Это означает, что динамические эффекты отсутствуют и процесс однородного деформирования сохраняет свою устойчивость.)

Включим устройство в момент времени $t = t^0$ и в момент $t = t^0 + \Delta t$ выключим. За это время точка тела

$$x_1(t^0) = a_1, \quad x_2(t^0) = a_2 \quad (1)$$

получит следующие смещения:

$$\Delta u_1 = k \cdot a_1 \cdot \Delta t, \quad \Delta u_2 = -k \cdot a_2 \cdot \Delta t. \quad (2)$$

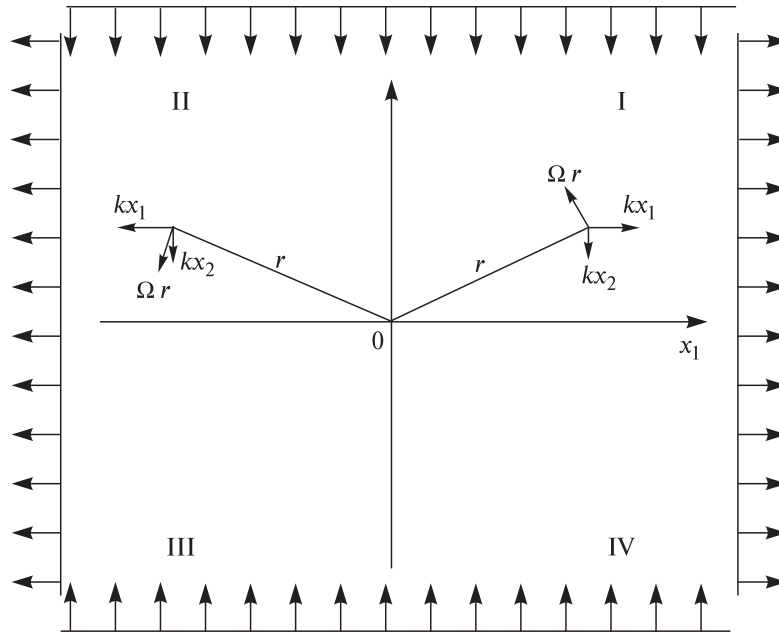


Рис. 4.1.

Зафиксируем полученную конфигурацию тела и положения всех его внутренних точек. Затем освободим тело от захватов, повернем устройство на угол $\Delta\beta = \Omega \cdot \Delta t$, и опять подвергнем тело растяжению вдоль нового направления $0x_1$ и соответствующему сжатию вдоль ортогонального направления $0x_2$. Второй шаг нагружения также будем осуществлять в течение времени Δt : от момента $t_0 + \Delta t$ до момента $t_0 + 2\Delta t$. В результате на прежние смещения (4.1) наложатся новые смещения второго шага и т. д.

Таким образом, мы получаем последовательность двухосных растяжений и сжатий, которые накладываются друг на друга с определенным дискретным поворотом, т. е. в целом получается картина деформирования, имитирующая приливные деформации.

Как реализовать подобный процесс? Здесь многое зависит от выбора исходной формы тела. Для произвольной формы реализация процесса довольно проблематична. Действительно, как осуществить двухосное растяжение и сжатие? Это легко сделать (по крайней мере, в принципе) только для стержня или прямоугольной пластины. Если же тело имеет более сложную конфигурацию, то требование линейной зависимости компонент смещений от координат граничных точек приведет к сложной кинематике устройства нагружения. Вто-

рая проблема состоит в фиксировании деформаций, полученных на очередном шаге нагружения. Для материалов с чисто неупругой реологией полученные деформации являются полностью остаточными и задача состоит только в сохранении полученной формы тела. Если же у материала есть упругая составляющая, то потребуются два устройства нагружения. Одно устройство предназначено для силового фиксирования достигнутых деформаций, а второе — для реализации следующего шага нагружения. Есть, однако, исключительный случай, когда все эти проблемы значительно упрощаются.

Очевидно, что двухосное аффинное растяжение вдоль фиксированных направлений всегда приведет к определенному изменению формы тела. Оказывается, что можно найти такую исходную форму, что ее новая внешняя конфигурация после одного шага нагружения будет отличаться от прежней только жестким поворотом. Здесь никакого парадокса нет. Схематически возможность подобной ситуации показана на рис. 4.2.

Перейдем к обоснованию. Вначале найдем траектории материальных частиц, которые реализуются в описанной выше схеме нагружения.

Введем новую систему координат $0x'_1x'_2$, которую будем считать неподвижной и связанной с деформируемым телом. Система $0x_1x_2$ по-прежнему относится к устройству нагружения. Пусть β — угол между осями $0x_1, x'_1$ (рис. 4.3). Обозначим через $u_1, u_2; u'_1, u'_2$ компоненты вектора перемещений в координатах $0x_1x_2$ и $0x'_1x'_2$. По формулам векторного проектирования

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\beta x'_1 + \sin\beta x'_2, \\ x_2 &= -\sin\beta x'_1 + \cos\beta x'_2; \end{aligned} \quad (3)$$

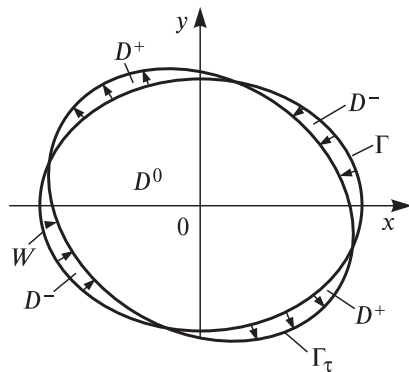


Рис. 4.2.

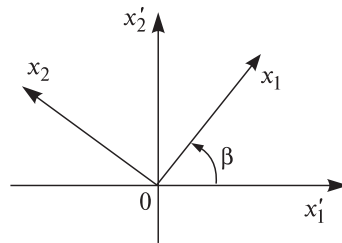


Рис. 4.3.

$$\begin{aligned} u'_1 &= \cos\beta u_1 - \sin\beta u_2, \\ u'_2 &= \sin\beta u_1 + \cos\beta u_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Проследим теперь за перемещениями материальной точки (1). Пусть в начальный момент t^0 угол $\beta = \beta^0$. Тогда равенства (1), (3) позволяют определить начальные координаты точки в системе $0x\{x'_2$:

$$\begin{aligned} a'_1 &= \cos\beta^0 a_1 - \sin\beta^0 a_2, \\ a'_2 &= \sin\beta^0 a_1 + \cos\beta^0 a_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставим (2), (5) в (4). В результате придем к формуле

$$\begin{aligned} \Delta u'_1 &= (\cos 2\beta^0 a'_1 + \sin 2\beta^0 a'_2)k\Delta t, \\ \Delta u'_2 &= (\sin 2\beta^0 a'_1 - \cos 2\beta^0 a'_2)k\Delta t. \end{aligned} \quad (6)$$

Эта формула повторяет (2), но уже в неподвижной системе координат $0x\{x'_2$. В этой системе положение материальной точки в произвольный момент времени уже можно найти последовательным суммированием смещений по временным шагам. Так, в результате первого шага нагружения точка из положения (1), (5) переместится в следующее положение

$$\begin{aligned} x'_1 &= a'_1 + \Delta u'_1, \\ x'_2 &= a'_2 + \Delta u'_2. \end{aligned} \quad (7)$$

На втором шаге нагружения угол β фиксирован и равен $\beta^0 + \Omega\Delta t$, поэтому в правой части (6) координаты (a'_1, a'_2) надо заменить на координаты (7) и угол β^0 — на угол $\beta^0 + \Omega\Delta t$. Таким образом, определяются смещения точки на втором шаге и т. д.

Итак, мы здесь имеем дискретный ряд аффинных растяжений и сжатий, которые последовательно накладываются друг на друга и приводят к некоторому процессу деформирования. Общую картину легко понять, если перейти к дифференциальным уравнениям. Действительно, описанная выше процедура суммирования соответствует интегрированию следующих дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{dx'_2}{dt} = k(\cos 2\Omega t x'_1 - \sin 2\Omega t x'_2), \\ v'_2 &= \frac{dx'_1}{dt} = k(\sin 2\Omega t x'_1 + \cos 2\Omega t x'_2). \end{aligned} \quad (8)$$

Течение (8) обладает рядом интересных свойств. Во-первых, для него, как и следовало ожидать, отсутствует изменение объема и вращение

$$\varepsilon = \frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} \equiv 0, \quad \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} - \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} \right) \equiv 0, \quad (9)$$

а максимальная скорость сдвига постоянна

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} - \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} \right)^2} = 2k.$$

При этом результатом нагружения является только поворот главных осей тензора скоростей деформаций

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{\partial v'_1}{\partial x'_2} + \frac{\partial v'_2}{\partial x'_1}}{\frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} - \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2}} = -\operatorname{tg} \Omega t. \quad (10)$$

Теперь можно отвлечься от механического смысла системы (8) и перейти к ее решению. Сделаем формально следующую замену неизвестных функций $x'_1(t)$, $x'_2(t)$ на новые функции $x_1(t)$, $x_2(t)$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \Omega t x'_1 - \sin \Omega t x'_2, \\ x_2 &= \sin \Omega t x'_1 + \cos \Omega t x'_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Смысл этой замены очевиден. Это переход к координатам, связанным с направлением растяжения тела. Теперь можно считать, что эти координаты вращаются относительно исходных непрерывно и с постоянной угловой скоростью.

Дифференцируя равенства (11), получим

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \cos \Omega t \frac{dx'_1}{dt} - \sin \Omega t \frac{dx'_1}{dt} - \Omega x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \sin \Omega t \frac{dx'_1}{dt} + \cos \Omega t \frac{dx'_2}{dt} + \Omega x_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставим (8) в (12) и снова воспользуемся (11). В результате придем к следующей системе уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = kx_1 - \Omega x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \Omega x_1 - kx_2. \quad (13)$$

Итак, мы пришли к полю скоростей (13). Оно представляет собой наложение двух полей. Первое поле — это двухосное растяжение со скоростью k

$$\frac{dx_1}{dt} = kx_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = -kx_2. \quad (14)$$

Второе поле соответствует вращению тела как жесткому целому с постоянной угловой скоростью $(-\Omega)$ (по часовой стрелке при $\Omega > 0$):

$$\frac{dx_1}{dt} = -\Omega x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \Omega x_1. \quad (15)$$

Один из принципов механики сплошной среды утверждает, что если на деформируемое тело наложить жесткое вращение, то на распределениях напряжений, деформаций и их скоростей это никак сказываться не должно, т. е. это не должно влиять ни на одну из объективных характеристик процесса. Вопрос о реализации этого принципа при тех или иных конкретных построениях иногда бывает не тривиальным. В этом мы убедились на примере рассмотренной выше задачи (одной из простейших этого типа).

Действительно, поле скоростей (14) описывает аффинное растяжение и сжатие среды вдоль направлений $0x_1, 0x_2$. Мы аддитивно добавляем к этому полю компоненты скорости (15), соответствующие жесткому вращению тела. В результате мы получаем качественно новое течение. Ниже будет показано, что оно совершенно отличается от жесткого поворота тела, испытывающего двухосное растяжения.

Механический смысл полученного результата ясен. Именно равенства (13) описывают тот процесс, который мы конструировали с самого начала, т. е. сложное нагружение тела в условиях, когда направления растяжения-сжатия все время меняют свою ориентацию относительно самого тела.

Для сравнения теперь посмотрим, как выглядели бы уравнения, если бы мы действительно на двухосное растяжение наложили жесткое вращение тела. Это легко сделать. Возьмем уравнения (14) и осуществим в них замену переменных (3). Для этого продифференцируем (3), рассматривая угол β как функцию времени $\beta = -\Omega t$. Затем воспользуемся условиями (14). В результате придем к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx'_1}{dt} &= k(\cos 2\Omega t \cdot x'_1 - \sin 2\Omega t x'_2) - \Omega \cdot x'_2, \\ \frac{dx'_2}{dt} &= -k(\sin 2\Omega t \cdot x'_1 + \cos 2\Omega t x'_2) + \Omega \cdot x'_1. \end{aligned} \quad (16)$$

Система (16) отличается от (8) только наличием последних слагаемых. Эти слагаемые как раз и описывают жесткий поворот тела.

Таким образом, можно сделать следующий общий вывод. Если к полю скоростей в координатах, связанных с направлением растяжения тела, добавить компоненты скорости, соответствующие жесткому вращению тела, то это приведет к уравнениям, описывающим сложное нагружение тела. (Причем этот процесс существенно отличается от жесткого поворота тела, подверженного двухосному растяжению.) Ситуация будет аналогичной и в более общем случае, когда растяжение аффинным уже не является. Это будет показано ниже.

Перейдем теперь к исследованию системы (13). Построение ее общих решений никаких трудностей не представляет. Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ некоторая материальная точка A имела координаты

$$x_1(0) = a_1, \quad x_2(0) = a_2. \quad (17)$$

Характер траектории ее движения существенно зависит от соотношения скоростей растяжения и поворота. При $k < \Omega$ траектория определяется следующим общим решением:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \left(\frac{k}{\lambda} a_1 - \frac{\Omega}{\lambda} a_2 \right) \sin \lambda t + a_1 \cos \lambda t, \\ x_2(t) &= \left(\frac{\Omega}{\lambda} a_1 - \frac{k}{\lambda} a_2 \right) \sin \lambda t + a_2 \cos \lambda t, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\lambda = \sqrt{\Omega^2 - k^2}$. Здесь траектории замкнуты и остаются все время в ограниченной области пространства.

Так, для точки, которая имела в начальный момент координаты $(a_1, 0)$, имеем

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{k}{\lambda} \sin \lambda t + \cos \lambda t, \quad \frac{x_2}{a_1} = \frac{\Omega}{\lambda} \sin \lambda t. \quad (19)$$

Для дальнейшего анализа удобнее перейти к координатам $0x$, повернутым относительно $0x_1x_2$ на угол $\pi/4$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{-x_1 + x_2}{\sqrt{2}}. \quad (20)$$

Механический смысл этого перехода связан со следующим обстоятельством. В координатах $0x_1x_2$ компоненты тензора скоростей деформаций для течения (13) имеют вид:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = k, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = -k, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) = 0,$$

т. е. $0x_1, 0x_2$ — главные оси тензора скоростей деформаций. Следовательно, направления $0x, 0y$ будут совпадать с направлением максимальной скорости сдвига:

$$\varepsilon_{xx} = 0, \quad \varepsilon_{yy} = 0, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{k}{2}.$$

В этих осях уравнения траекторий частицы упрощаются и приобретают следующий вид:

$$\frac{x^2}{a_1^2(\Omega + k)} + \frac{y^2}{a_1^2(\Omega - k)} = \frac{\Omega^2}{\lambda^2}. \quad (21)$$

Таким образом, траектории представляют собой эллипсы с осями равными (рис. 4.4, *a, б* при $k/\Omega = 0,2; 0,7$):

$$a = \frac{a_1}{\sqrt{1 - k/\Omega}}, \quad b = \frac{a_1}{\sqrt{1 + k/\Omega}}. \quad (22)$$

Закон обращения точек вокруг центра обладает одной замечательной особенностью. Если из центра к точке провести радиус-вектор, то за одинаковое время он будет ометать одинаковые площади. Значит, секториальная скорость точки будет постоянной. Действительно, продифференцируем (19) по времени

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{dx_1}{dt} = a_1(k\cos\lambda t - \lambda\sin\lambda t), \\ v_2 &= \frac{dx_2}{dt} = a_1\Omega\cos\lambda t \end{aligned} \quad (23)$$

и вычислим векторное произведение:

$$|\bar{v} \times \bar{r}| = a_1^2 \Omega. \quad (24)$$

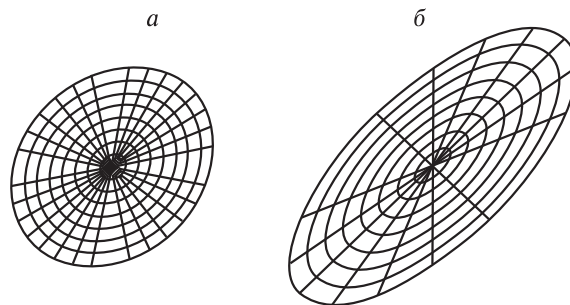


Рис. 4.4.

Здесь использованы обычные обозначения:

$$\bar{v} = \{v_1, v_2\}, \quad \bar{r} = \{x_1, x_2\}.$$

Таким образом, для фиксированной материальной точки величина (24) от времени не зависит. На рис. 4.4 показаны положения материальных точек через одинаковые промежутки времени. Центральные лучи строились таким образом: в начальный момент времени бралась совокупность материальных точек, лежащих на прямой, затем отмечалось положение всех этих же точек через одинаковые промежутки времени. Мы здесь сразу обнаруживаем два обстоятельства. Первое — эти точки все время остаются на прямолинейном луче. (Это естественно, так как деформация является аффинной и поэтому любая исходная прямая может преобразоваться только в прямую. Очевидно, что если одна точка на этой прямой неподвижна, то преобразование может приводить только к вращению этой прямой и к ее сжатию или растяжению.) Из рисунка видно, что угловая скорость вращения меняется, а секториальная скорость — постоянна (площади всех секторов между двумя соседними лучами одинаковы).

Если скорость растяжения k постепенно увеличивать, то траектории будут все больше вытягиваться вдоль направления наибольшего сдвига. При $k = \Omega$ эллипсы вырождаются в прямые, параллельные оси Ox :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= k \cdot (a_1 - a_2)t + a_1, \\ x_2(t) &= k \cdot (a_1 - a_2)t + a_2. \end{aligned} \quad (25)$$

Если же $k > \Omega$, то траектории становятся гиперболическими.

Действительно, положим $\mu = \sqrt{k^2 - \Omega^2}$. Тогда

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{k}{\mu} \right) a_1 - \frac{\Omega}{\mu} a_2 \right] e^{\mu t} + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{k}{\mu} \right) a_1 + \frac{\Omega}{\mu} a_2 \right] e^{-\mu t}, \\ x_2(t) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\Omega}{\mu} a_1 + \left(1 - \frac{k}{\mu} \right) a_2 \right] e^{\mu t} + \frac{1}{2} \left[-\frac{\Omega}{\mu} a_1 + \left(1 + \frac{k}{\mu} \right) a_2 \right] e^{-\mu t}. \end{aligned} \quad (26)$$

Легко показать, что этому решению отвечают гиперболы с двумя асимптотами

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\Omega}{k + \sqrt{k^2 - \Omega^2}}, \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{\Omega}{k - \sqrt{k^2 - \Omega^2}}. \quad (27)$$

К первой асимптоте траектории стремятся при $t \rightarrow +f$, ко второй — при $t \rightarrow -f$. Произведение угловых коэффициентов равно 1, поэтому асимптоты симметричны относительно биссектрисы $x_1 = x_2$.

Появление в данной задаче непериодических решений с траекториями, уходящими на бесконечность, на первый взгляд, кажется парадоксальным. Однако этот результат имеет ясный механический смысл. Для его объяснения перейдем к полярным координатам $x_1 = r \cos \alpha$, $x_2 = r \sin \alpha$ и преобразуем систему (13) к следующему виду:

$$\frac{d \ln r}{dt} = k \cos 2\alpha, \quad \frac{d\alpha}{dt} = \Omega - k \sin 2\alpha. \quad (28)$$

Последнее уравнение показывает, что угловая скорость движения материальной точки вокруг центра зависит не только от скорости вращения Ω , но и от скорости растяжения k . Это становится очевидным, если обратиться к рис. 4.1 (см. с. 56). Мы видим, что компоненты вектора скорости, связанные с растяжением, дают определенную составляющую также на нормаль к радиусу, т. е. вносят свой вклад в угловую скорость. Этот вклад достигает наибольшей величины при $\alpha = \pi/4$. Если значение k приближается к величине Ω или превосходит ее, то появляются направления, где указанные скорости полностью компенсируют друг друга. Преодолеть этот радиус любая материальная точка уже не может — вследствие непрерывного растяжения с течением времени точка уходит на бесконечность по закону (25) или (26). При этом секториальная скорость точек также сохраняется постоянной (как и для эллиптических траекторий).

Рассматриваемый класс аффинных деформаций обладает еще одной очень интересной особенностью. Для того чтобы ее понять, обратимся снова к уравнениям (13). В соответствии с этими уравнениями все точки среды движутся согласованно и по определенному закону. В чем причина такой согласованности? Причины как таковые (т. е. поле напряжений) здесь не рассматриваются. Для этого необходимы данные о реологии среды. Но в общем случае можно сказать, что главная причина состоит в том, что мы рассматриваем не набор отдельных частиц, а именно сплошную среду, подверженную аффинной деформации. В свою очередь в качестве последней выступают определенные условия на границе. (Граничные скорости должны линейно зависеть от декартовых координат границы.) Эту ситуацию проще всего пояснить на таком примере. Пусть у нас есть однородный цилиндрический стержень. Растянем его, задав на концах одинаковые по величине и противоположно направленные смещения. Тогда при достаточно общих предположениях (устойчивость процесса и отсутствие динамики) можно утверждать, что независимо от реологии материала, распределение смещений по длине стержня

будет линейным: середина стержня останется неподвижной, а смещения остальных точек будут пропорциональны расстоянию до середины. Причина таких смещений заключается только в специфике краевых условий и том факте, что соседние элементарные объемы тела взаимодействуют между собой. Для стержня описанная ситуация представляется очевидной. (Строго говоря, достаточно только одного факта: при симметричном растяжении однородного стержня середина его остается неподвижной независимо от вида материала, из которого этот стержень изготовлен.)

В задаче (13) мы имеем точно такую же ситуацию. (Здесь это уже не так очевидно, как для стержня.) Если мы на границе задаем скорости, удовлетворяющие равенствам (13), то распределение скоростей вида (13) реализуется и внутри области независимо от реологии среды.

Теперь можно рассмотреть следующую интерпретацию равенств (13). Предположим, что все связи между элементарными объемами среды распались и их роль на себя взяли некоторые массовые силы. Возникает вопрос, какими должны быть силы, чтобы они могли обеспечить такое же движение отдельных частиц, которое реализуется при их согласованном поведении в сплошной среде.

Структура уравнений (13) позволяет легко ответить на этот вопрос. Продифференцируем каждое из уравнений (13). В результате получим систему:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -(\Omega^2 - k^2)x_1, \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = -(\Omega^2 - k^2)x_2. \quad (29)$$

Для частиц с единичной массой силу можно отождествить с ускорением. Таким образом, мы видим, что при $\Omega \neq k$ поле сил является центральным с потенциалом, пропорциональным r^2 , т. е. каждая частица движется под действием центробежной силы и силы притяжения или отталкивания, пропорциональной расстоянию до центра. Если $\Omega > k$, то центр выступает как точка притяжения, поэтому траектории замкнуты и точки находятся в ограниченной области. Если же $k > \Omega$, то силы переходят в отталкивающие и точки удаляются на бесконечность. При $\Omega = k$ точки движутся по инерции со скоростями, определяемыми равенствами (13). На языке сил факт постоянства секториальной скорости движения частиц по траекториям является хорошо известным следствием центральности поля сил.

Теперь перейдем к вопросу о форме, которую необходимо выбрать для модели тела, подверженного приливному растяжению.

Если скорость растяжения велика, то имеют место решения (25) или (26). В соответствии с ними размеры тела с любой начальной формой с течением времени будут неограниченно расти. В этих случаях начальная форма тела большого значения не имеет. Указанные решения, по-видимому, можно использовать для исследования распада спутников или планет в поле приливного растяжения. Экспериментально же в лаборатории эту ситуацию воспроизвести, наверное, невозможно, поэтому для разработки экспериментальной методики режимы течения (25), (26) интереса не представляют.

Основным является случай (13). Рассмотрим его подробнее. Как отмечалось, в этом случае все частицы среды движутся по эллиптическим траекториям. Это обстоятельство подсказывает и форму тела, которую удобнее всего выбрать для моделирования. Форма должна быть эллиптической, причем такой, которая совпадает с одной из траекторий (21). Закон движения (23) диктует и вид необходимых краевых условий: краевые условия должны быть такими, чтобы вектор скорости был направлен по касательной к границе, а величина его определялась законом Кеплера:

$$\bar{v} \times \bar{r} = \text{const}, \quad (\bar{v} \cdot \bar{n}) = 0. \quad (30)$$

Итак, если на границе эллиптической области задается кеплеровское распределение скоростей, то при выполнении некоторых дополнительных условий (требование единственности решения и отсутствия динамических эффектов) внутри области мы получаем однородную, аффинную деформацию эллиптического типа (13). Таким способом мы воспроизводим ситуацию, которая была описана выше: имеем тело, подверженное растяжению и сжатию вдоль ортогональных направлений с некоторой постоянной скоростью. Причем указанные направления относительно тела непрерывно поворачиваются. Следовательно, в первом приближении мы получаем ситуацию, характерную для приливных деформаций.

Далее, условие постоянства секториальной скорости приводит к тому, что линейная скорость различных точек границы должна быть различной (наибольшей на малой оси эллипса и наименьшей на большей оси). В результате участки границы должны периодически растягиваться и сжиматься. В действительности этого не происходит (по крайней мере для небесных тел с внешней твердой поверхностью). Более точным будет предположение, согласно которому линейные участки границы считаются нерастяжимыми, поэтому краевые условия (30) необходимо заменить на следующие:

$$|\bar{v}| = v^0 = \text{const}, \quad (\bar{v} \cdot \bar{n}) = 0. \quad (31)$$

В случае небольших эксцентриситетов условия (30) и (31) близки между собой.

Таким образом, можно сделать следующий общий вывод. Для моделирования приливных деформаций необходимо осуществление деформирования области, имеющей форму эллипса, путем задания на границе области условий, удовлетворяющих равенствам (31) (рис. 4.5). При малых эксцентриситетах условия (31) близки к (30), а значит и решение задачи (31) будет близко к решению (13).

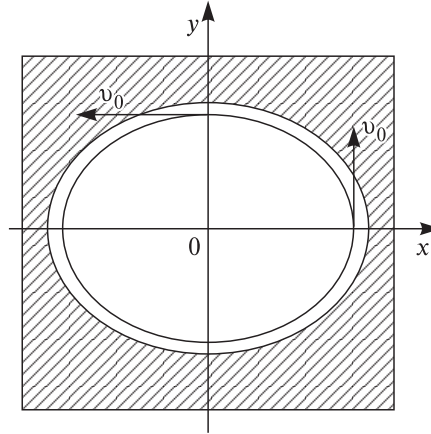


Рис. 4.5.

4.2. Приливное деформирование как суперпозиция однородных сдвигов

Анализ приливного деформирования представляет интерес и еще с одной точки зрения. А именно: вместо элементарного акта растяжения тела вдоль фиксированного направления и одновременного сжатия в ортогональных направлениях можно взять элементарный сдвиг тела. Можно представить себе, что сдвиг реализуется между двумя параллельными пластинами, т. е. реализуется течение Куэтта. При этом тело относительно плоскостей сдвига непрерывно поворачивается. В зависимости от ориентации вектора поворота могут реализоваться различные режимы приливных деформаций. Нормаль к пластине и направление ее движения выделяют в пространстве три взаимно ортогональных направления. Раскладывая вектор вращения тела по данным направлениям, получим три основных случая деформирования тела. Один из них, как и следовало ожидать, совпадет с тем, который рассмотрен выше, два других дадут новый тип деформаций.

Рассмотрим последовательно указанные случаи. Выберем систему координат, как показано на рис. 4.6. В случае простого сдвига число степеней свободы равно единице и поле скоростей имеет вид

$$v_1 = \gamma x_2, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0, \quad (32)$$

где v_1, v_2, v_3 — компоненты вектора скорости в декартовых координатах; (x_1, x_2, x_3) , $\gamma \geq 0$ — заданная постоянная. Будем искать новые классы сложных нагружений путем наложения последовательностей

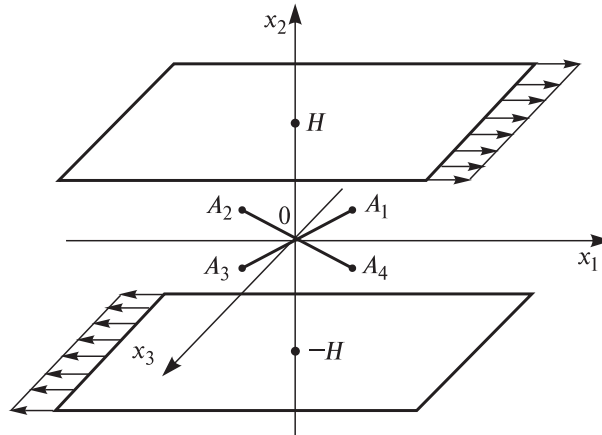


Рис. 4.6.

течений вида (32). Для этого предположим, что поле скоростей (32) реализуется в промежутке времени t от 0 до Δt . За это время каждая материальная точка (x_1, x_2, x_3) получит следующее перемещение:

$$v_1 \Delta t = \gamma x_2 \Delta t, \quad v_2 \Delta t = 0, \quad v_3 \Delta t = 0. \quad (33)$$

Предположим, что устройство нагружения представляет собой две параллельные пластины $x_2 = \pm H$. Причем если пластины смещаются вдоль своих плоскостей на векторы $\{\pm \gamma H \Delta t, 0, 0\}$, то материальные точки, заключенные между ними, получают смещения (33). Таким образом, возможная неустойчивость процесса, инерционные и краевые эффекты исключаются.

Итак, пусть материальные точки некоторого тела сместились на вектор (33). Зафиксируем новые положения всех точек и удалим устройство нагружения $x_2 = \pm H$. Затем введем новое устройство нагружения $x'_2 = \pm H$, где система координат $0x'_1x'_2x'_3$ повернута относительно прежней системы на некоторый угол, пропорциональный величине Δt . Новое устройство «включим» на время Δt . На прежние смещения (33) наложатся смещения того же типа, но в координатах $0x'_1x'_2x'_3$ и т. д. Таким образом, задавая различные программы поворота осей, можно получать различные типы сложных нагружений. Выкладки будут проще, если указанную суперпозицию рассмотреть с другой точки зрения, а именно: после первого шага (33) удалим устройство нагружения $x_2 = \pm H$ и затем за следующий промежуток времени от $t = \Delta t$ до $t = 2\Delta t$ повернем тело как жесткое целое на угол $\omega \Delta t$. После этого снова введем устройство

нагружения $x_2 = \pm H$ и зададим материальным точкам смещения (33) уже из их нового положения и т. д. Результат наложения можно проследить, исследуя траектории фиксированных материальных частиц.

1. Вращение вокруг оси Ox_3 . Так, если взять материальную частицу, имевшую в начальный момент времени $t = 0$ координаты (x_1^0, x_2^0, x_3^0) , то в моменты $t = \Delta t, 2\Delta t \dots$ ее координаты будут равны

$$\begin{aligned} x_1(\Delta t) &= x_1^0 + \gamma x_2^0 \Delta t, \quad x_2(\Delta t) = x_2^0, \quad x_3(\Delta t) = x_3^0; \\ x_1(2\Delta t) &= x_1(\Delta t) - \omega x_2(\Delta t) \Delta t; \\ x_2(2\Delta t) &= x_2(\Delta t) + \omega x_1(\Delta t) \Delta t, \quad x_3(2\Delta t) = x_3(\Delta t) \dots \end{aligned} \quad (34)$$

Рассмотрим теперь процесс, в котором шаг по времени неограниченно уменьшается $\Delta t \rightarrow 0$, а ω представляет собой неотрицательную постоянную величину. Исходя из (34), легко показать, что траектории материальных частиц будут описываться следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1 = (\gamma - \omega)x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = v_2 = \omega x_1, \quad \frac{dx_3}{dt} = v_3 = 0. \quad (35)$$

Последнее уравнение показывает, что движение является плоским, поэтому достаточно ограничиться исследованием движения только в плоскости $x_3 = 0$.

Деформации сдвига сводятся к деформациям растяжения и сжатия в ортогональных направлениях, поэтому равенства (13) и (35) — это один и тот же процесс только с разных точек зрения. При $\gamma < \omega$ материальные точки (35) движутся по эллиптическим траекториям, причем закон движения является кеплеровским. В предельных случаях $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \gamma$ эллипс бесконечно вытягивается и течение переходит в течение Куэтта.

Полученные результаты позволяют по-новому взглянуть на само классическое течение Куэтта (32). Его исходное определение кажется весьма естественным и предельно простым: берется бесконечный слой $|x_2| \leq |H|$ и на его границе задается вектор скорости, направленный по касательной к границе. При этом скорость остается постоянной. Однако с более общей точки зрения главными здесь являются не эти обстоятельства, а тот факт, что секториальная скорость постоянна. Иными словами, краевое условие $|\bar{v}| = \text{const}$, заданное на параллельных прямых, принадлежит к кеплеровскому типу

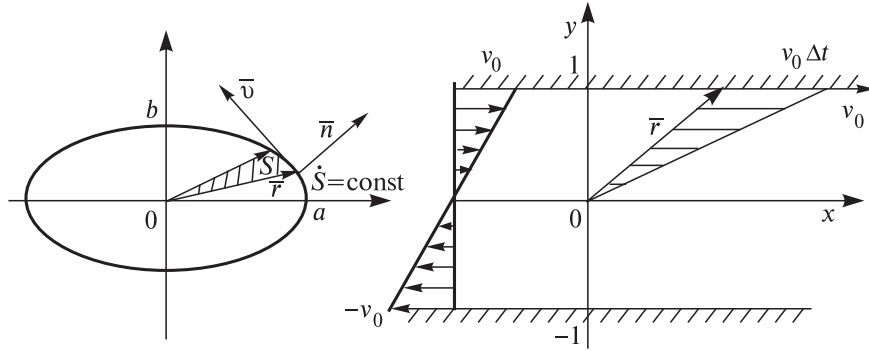


Рис. 4.7.

$|\mathbf{v} \times \mathbf{r}| = \text{const}$, и именно это обеспечивает однородность деформации внутри области течения (рис. 4.7).

Процессу деформирования (35) соответствует вращение тела вокруг оси $0x_3$. Если теперь изменить вектор вращения тела, то придем к новым течениям, которые уже не сводятся к (35).

2. Вращение вокруг оси $0x_2$. Возьмем материальное волокно, расположенное в квадранте 1, т. е. в области растяжения (см. рис. 4.6). При его повороте вокруг оси $0x_2$ волокно переходит в квадрант 2 и, следовательно, сжимается. Затем опять переходит в квадрант 1, растягивается и т. д. Квадранты 3 и 4 являются для него недоступными, но чередование деформаций растяжения и сжатия здесь по-прежнему имеет место. Можно ожидать, что и в этом случае будет получено финитное течение, выпишем систему уравнений для рассматриваемой суперпозиции:

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \gamma x_2 + \theta x_3, \quad v_2 = \frac{dx_2}{dt} = 0, \quad v_3 = \frac{dx_3}{dt} = -\theta x_3, \quad (36)$$

где θ — скорость поворота вокруг оси $0x_2$. Решение системы (36) имеет вид

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \left(x_3^0 + \frac{\gamma}{\theta} x_2^0 \right) \sin \theta t + x_1^0 \cos \theta t, \\ x_2(t) &= x_2^0, \\ x_3(t) &= \left(x_3^0 + \frac{\gamma}{\theta} x_2^0 \right) \cos \theta t - x_1^0 \sin \theta t - \frac{\gamma}{\theta} x_2^0. \end{aligned} \quad (37)$$

Сделаем его анализ. Во-первых, видно, что точки, которые в начальный момент находились в фиксированной плоскости $x_2 = \text{const}$, в процессе движения эту плоскость не покидают. Во-вторых, в любой момент времени выполняется следующее равенство:

$$x_1^2(t) + \left[x_3(t) + \frac{\gamma}{\theta} x_2^0 \right]^2 = (x_1^0)^2 + \left(x_3^0 + \frac{\gamma}{\theta} x_2^0 \right)^2. \quad (38)$$

Следовательно, все точки движутся по круговым траекториям. Причем угловая скорость точки от радиуса не зависит. Это означает, что сечение тела плоскостью $x_2 = \text{const}$ вращается как жесткое целое вокруг неподвижного центра. Центры расположены на прямой

$$x_1 = 0, \quad x_3 = -\frac{\gamma}{\theta} x_2, \quad (39)$$

поэтому область деформирования естественно ограничить наклонной цилиндрической поверхностью и двумя доньями. Образующей цилиндрической поверхности является окружность

$$x_1^2 + x_3^2 = 1, \quad x_2 = 0,$$

а направляющая — параллельна прямой (39). В процессе деформирования поверхность тела переходит в себя следующим образом: донья вращаются в одну сторону с постоянной угловой скоростью и дают соответствующее смещение боковой поверхности (рис. 4.8). Неформально характер деформирования можно понять следующим образом. Возьмем два жестких параллельных диска, центры которых разнесены по высоте. Предположим, что оба диска вращаются в одну сторону. Пусть на первом диске находится наблюдатель, который следит за относительными смещениями точек второго диска. Вращение медленное, так что центробежными силами можно пренебречь. Если диски вращаются с различными угловыми скоростями, то наблюдатель сможет определить центры обоих дисков и свое положение относительно этих центров. Однако если диски вращаются с одинаковой угловой скоростью и в одном и том же направлении, то относительная скорость для всех положений наблюдателя ста-

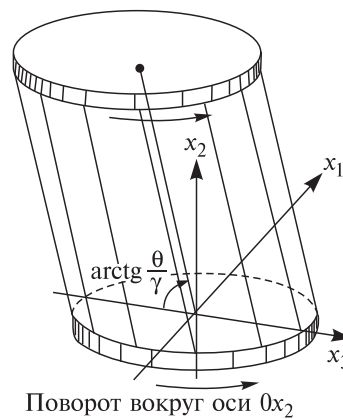


Рис. 4.8.

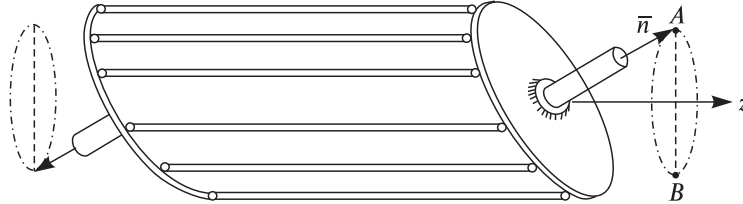


Рис. 4.9.

новится одинаковой. Именно это обстоятельство и обеспечивает однородность деформаций в течении (37). В другой системе координат процесс деформирования имеет вид, показанный на рис. 4.9.

3. Вращение вокруг оси $0x_1$. Очевидно, что волокно $0A_1$ можно перевести в положение $0A_4$, вращая его не только в плоскости $0x_1x_2$, но и по конической поверхности вокруг оси $0x_1$. В этом случае квадранты 2 и 3 станут для него недоступными, но основной результат — чередование деформаций растяжения и сжатия — будет достигнут, поэтому можно ожидать, что и здесь суперпозиция течений Куэтта также приведет к финитному течению.

Теперь формальные построения. Выделим некоторую область между пластинами $x_2 = \pm H$. В промежутке времени от 0 до Δt реализуем течение Куэтта (32). В результате каждая материальная частица получит смещения (33). Зафиксируем новые положения частиц, удалим устройство нагружения и за время от Δt до $2\Delta t$ повернем тело вокруг оси $0x_1$ на угол $\Omega\Delta t$. После этого снова введем устройство нагружения $x_2 = \pm H$ и дадим смещения (33) за время от $2\Delta t$ до $3\Delta t$ и т. д.

Просуммируем смещения произвольной материальной частицы с исходными координатами (x_1^0, x_2^0, x_3^0) и перейдем к пределу $\Delta t \rightarrow 0$. В итоге получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \gamma x_2, \quad v_2 = \frac{dx_2}{dt} = -\Omega x_3, \quad v_3 = \frac{dx_3}{dt} = \Omega x_2. \quad (40)$$

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\gamma x_2^0}{\Omega} \sin \Omega t + \frac{\gamma x_3^0}{\Omega} \cos \Omega t + \left(x_1^0 + \frac{\gamma x_3^0}{\Omega} \right), \\ x_2 &= -x_3^0 \sin \Omega t + x_2^0 \cos \Omega t, \\ x_3 &= x_2^0 \sin \Omega t + x_3^0 \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (41)$$

Полученное течение является финитным. Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} x_2^2(t) + x_3^2(t) &= \\ &= (x_2^0)^2 + (x_3^0)^2 = \text{const}, \\ x_3(t) &= \frac{\Omega}{\gamma} [x_1(t) - x_1^0] + x_3^0. \end{aligned} \quad (42)$$

Первое условие означает, что материальная частица все время остается на круговой цилиндрической поверхности с осью Ox_1 . Второе условие показывает, что траектория целиком лежит в плоскости, ортогональной координатной плоскости $x_2 = 0$ и составляющей с основанием цилиндра угол, равный $\arctg \gamma / \Omega$. Таким образом, траектория совпадает с сечением цилиндра плоскостью и, следовательно, представляет собой эллипс (рис. 4.10). Полуоси эллипса (см. рис. 4.10), отнесенные к радиусу цилиндра $R = \sqrt{(x_2^0)^2 + (x_3^0)^2}$, равны 1 и $\sqrt{\Omega^2 + \gamma^2} / \Omega$. Центр эллипса лежит на оси цилиндра. Если из центра к материальной частице провести радиус-вектор, то нетрудно показать, что закон движения частицы по эллиптической орбите будет кеплеровским: за равное время радиус-вектор ометает одинаковые площади с постоянной секторной скоростью.

Таким образом, полученное сдвиговое течение реализуется в прямом круговом цилиндре, является однородным и пространственным. При этом кеплеровский закон обращения приводит к тому, что проекции точек на основание цилиндра движутся по окружностям с постоянной угловой скоростью. Это обстоятельство можно использовать для конструктивной реализации кеплеровского закона движения. Естественно, что имеет место и предельный переход к исходному плоскопараллельному течению Куэтта (при $\Omega = 0$).

4.3. Приливные деформации как результат вращения тела в условиях неизменности его внешней формы

Вернемся к рис. 2.1 (см. с. 33). Мы видим, что небесное тело в направлении приливной силы вытягивается и одновременно вращается. Если ситуация является стационарной, то вращение тела про-

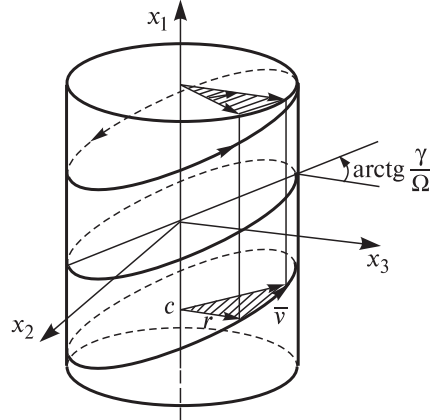


Рис. 4.10.

исходит в условиях, когда его внешняя форма остается неизменной. Именно этот факт можно взять за основу для построения первого приближения решения задачи о приливном деформировании. Данный факт можно также использовать при разработке методики экспериментального моделирования.

Допустим, что в первом приближении тело принимает форму эллипсоида. Коль скоро речь идет об использовании аффинной деформации, то происхождение эллипсоида можно представить себе таким образом. В некоторый начальный момент тело полностью изолировано и имеет форму шара. Затем шар подвергается аффинной деформации. (Эту деформацию можно назвать изначальной.) В результате шар преобразуется в эллипсоид. Эллипсоид — это реальное существующее тело, а шар — это мысленный прообраз тела.

Параметры изначальной деформации позволяют определить однозначное соответствие между точками шара и эллипсоида. Теперь начнем вращать шар вокруг его центра по произвольной программе. Ясно, что поверхность шара при любых поворотах (в том числе и нестационарных) всегда будет переходить сама в себя. Иными словами, внешняя форма шара всегда остается неизменной. Этим же свойством будет обладать и образ шара — эллипсоид. Эллипсоид будет вращаться и при этом деформироваться так, что в результате его поверхность будет переходить сама в себя. Располагая данными об изначальной деформации и параметрах вращения шара, нетрудно описать кинематику деформирования эллипсоида.

Несколько слов об изначальной аффинной деформации. Конечно, теоретически возможен случай, когда некоторое тело формируется как изолированный шар, который затем захватывается возмущающей массой и начинается вращаться вокруг этой массы, испытывая приливные деформации. Но это маловероятная картина. В типичной ситуации тело сразу формируется в гравитационном поле возмущающей массы. В таком случае изначальной деформации не было и представление о ней — это только прием, позволяющий построить кинематически возможное (аффинное) деформирование эллипсоида.

В качестве изначальной деформации возьмем деформацию растяжения-сжатия вдоль ортогональных осей. Введем систему координат $0y_1y_2y_3$. Зададим в ней шар, ограниченный поверхностью S^* . Отобразим S^* в системе координат $0x_1x_2x_3$ с помощью аффинного преобразования

$$x_1 = k_1y_1, \quad x_2 = k_2y_2, \quad x_3 = k_3y_3. \quad (43)$$

Заставим теперь вращаться прообраз S^* вокруг оси симметрии. В каждый момент времени будем осуществлять преобразование (43). Поскольку поверхность S^* переходит в себя, то и поверхность S^0 будет сохранять это свойство. Ясно, что тогда внутренние точки области S^0 будут испытывать аффинную деформацию. Определим ее параметры. Пусть скорость вращения $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ постоянная. Тогда в системе координат Oy_i имеем

$$\dot{y}_1 = -\omega_3 y_2 + \omega_2 y_3, \quad \dot{y}_2 = \omega_3 y_1 - \omega_1 y_3, \quad \dot{y}_3 = -\omega_2 y_1 + \omega_1 y_2. \quad (44)$$

Продифференцировав (43) по времени, используя (44) и заменяя y_i через $x_i k_i$, получим

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{k_1 \omega_3}{k_2} x_2 + \frac{k_1 \omega_2}{k_3} x_3, & \dot{x}_2 &= \frac{k_2 \omega_3}{k_1} x_1 - \frac{k_2 \omega_1}{k_3} x_3, \\ \dot{x}_1 &= -\frac{k_3 \omega_2}{k_1} x_1 + \frac{k_3 \omega_1}{k_2}. \end{aligned} \quad (45)$$

Легко показать, что в классе (45) содержится построенное выше решение (35). Действительно, предположим, что $k_1 = 1$, $k_3 = 1$ и $k_2 \neq 1$, т. е. исходная деформация сводится к растяжению шара в направлении Oy_2 . В результате шар превращается в эллипсоид вращения с большой осью, направленной вдоль Oy_2 . Пусть $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 \neq 0$, т. е. прообраз, равномерно вращается вокруг вертикальной оси Oy_3 . В результате получаем эллипсоид, который вращается вокруг вертикальной оси Ox_3 , причем внешняя его форма остается неизменной (см. рис. 2.4). Деформирование эллипсоида описывается следующими уравнениями

$$\dot{x}_1 = -\frac{\omega_3}{k_2} x_2, \quad \dot{x}_2 = k_2 \omega_3 x_1, \quad \dot{x}_3 = 0.$$

Сопоставим их с решением (35):

$$\dot{x}_1 = (\gamma - \omega)x_2; \quad \dot{x}_2 = \omega x_1; \quad \dot{x}_3 = 0.$$

Видно, что решения совпадут, если положить

$$\omega_3 = \sqrt{\omega(\omega - \gamma)}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{\omega}{\omega - \gamma}}.$$

Таким образом, подходы, изложенные в п. 4.2 и здесь, привели к одному и тому же результату.

Обратимся теперь ко второму основному случаю. Выберем в качестве исходной деформации шара — его сдвиг параллельно плоскости Oy_1y_3 :

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_3 + \Gamma \cdot y_2, \quad (46)$$

где $\Gamma = \text{const}$. (В качестве исходной можно было бы взять и деформацию (43).) Пусть теперь шар вращается с постоянной условной скоростью вокруг вектора $\bar{\omega} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Продифференцируем (46), воспользуемся (45) и выразим y_1, y_2, y_3 через x_1, x_2, x_3 . В результате получим следующую кинематику деформирования эллипсоида:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(\omega_3 + \Gamma\omega_2)x_2 + \omega_2x_3, \\ \dot{x}_2 &= \omega_3x_1 + \Gamma\omega_1x_2 - \omega_1x_3, \\ \dot{x}_3 &= (\Gamma\omega_3 - \omega_2)x_1 + (\omega_1 + \Gamma^2\omega_1)x_2 - \Gamma\omega_1x_3. \end{aligned} \quad (47)$$

Сопоставим (47) с ранее полученным решением (36):

$$x_1 = \gamma x_2 + \theta x_3; \quad \dot{x}_2 = 0, \quad \dot{x}_3 = -\theta x_1.$$

Видно, что результаты совпадают, если положить

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_3 = 0; \quad \omega_2 = \theta, \quad \Gamma = -\frac{\gamma}{\theta}. \quad (48)$$

Таким образом, процесс деформирования (36) совпадает с одним из частных случаев процессов класса (45). Этот факт можно использовать для экспериментального моделирования приливных деформаций в лабораторных условиях. Действительно, реализовать в лаборатории деформирование эллипсоида так, чтобы в процессе деформирования он переходил сам в себя — весьма проблематично. Гораздо проще реализовать деформирование наклонного цилиндра по схемам, изображенным на рис. 4.8 или 4.9. Ниже будет рассмотрен пример реализации такого процесса.

Основным для исследования будет случай типа (35). Третий тип деформирования, определяемый равенствами (40), экспериментально не реализован и поэтому здесь не рассматривается.

§ 5. Кинематический метод моделирования приливных волн

1. Плоская деформация. Итак, мы пришли к следующей программе дальнейших действий. Вначале необходимо взять тело, ограниченное в плане эллиптической кривой. На поверхности тела требуется задать обе компоненты вектора скорости. Вектор должен

быть направлен вдоль границы, а его величина должна быть постоянной. Необходимо также обеспечить выполнение условий плоской деформации.

Приступим к реализации этой программы. Для того чтобы выдержать условия плоской деформации, необходимо располагать образцом тела в форме прямого эллиптического цилиндра с достаточно большой высотой. Характер нагружения должен быть таким, чтобы все сечения образца, ортогональные к его образующей, находились в одинаковых условиях. Это обычные требования, которые фигурируют в плоских задачах [253]. К сожалению, здесь есть еще одно требование, которое связано с тем, что должна отсутствовать компонента массовой силы, параллельная образующей тела. Это требование выполнить точно невозможно. Однако его роль можно уменьшить, располагая тело вертикально и прикладывая к его поверхности достаточно большие нормальные нагрузки. (Заведомо большие, чем вес тела.) Внешняя пригрузка затрудняет наблюдения за кинематикой деформирования поверхности образца. Поэтому проще горизонтальную поверхность тела оставить свободной, а оценку роли силы тяжести сделать дополнительно.

Перейдем теперь к вопросу о способе нагружения. Обратимся к граничным условиям (31). В соответствии с этими условиями исходная эллиптическая область в процессе нагружения должна все время преобразовываться сама в себя (см. рис. 4.5), поэтому конфигурация внешней ее формы будет оставаться неизменной. Очевидно, что если взять материальное волокно АВ и расположить его вдоль границы, то в этих условиях его длина будет оставаться все время неизменной (рис. 5.1), т. е. граница тела растяжению не подвергается. С другой стороны, граница области имеет переменную кривизну, поэтому указанное волокно будет испытывать периодические изгибные деформации.

Для реализации таких условий можно взять гибкую цилиндрическую оболочку 1, поместить ее в жесткий неподвижный статор 2 и придать ей вращение с постоянной линейной скоростью v . Схема такого нагружения показана на рис. 5.1. При этом испытуемый образец (тело) 3 помещается внутрь оболочки. Гибкая оболочка призвана обеспечить необходимую кинематику на границе тела 3, поэтому контакт между телом и оболочкой должен быть как можно более плотным. В идеале необходимо реализовать условие полного прилипания. Для вязких жидкостей никакой проблемы нет. Полное прилипание будет всегда. Для образцов из других материалов ситуация сложнее. Подробнее она будет рассмотрена ниже.

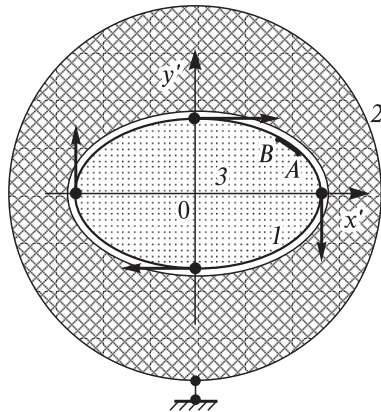


Рис. 5.1.

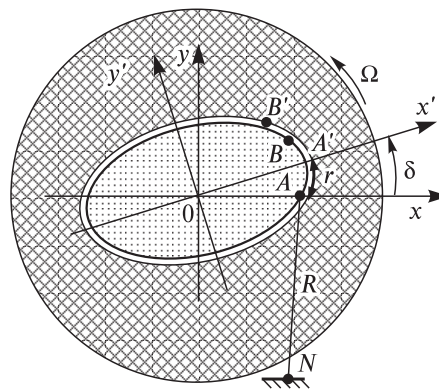


Рис. 5.2.

Статор должен быть жестким и иметь форму прямого кругового цилиндра. В нем выполняется полость, имеющая форму эллиптического цилиндра. В эту полость помещается гибкая оболочка, которая вращается относительно статора (поэтому ее можно назвать ротором). Очевидно, что ротор и статор должны иметь общую вертикальную ось. Для удержания испытуемого образца внутри оболочки последнюю необходимо закрыть дном. Дно не должно вносить заметной погрешности в процесс деформирования, т. е. в принципе оно должно деформироваться так же, как и само тело. Полностью выдержать условие невозможно. Самый приемлемый вариант состоит в том, чтобы выполнить дно в виде натянутой резины, которая не прогибается и в процессе деформирования не образует гофров. Таким образом, в результате мы получаем камеру с гибкой, но нерастяжимой боковой поверхностью и растяжимым, но не гибким дном. (Последнее условие обеспечивалось жесткой плитой, которая подвешивалась под дно камеры.)

Теперь о самом способе нагружения. Можно предложить множество различных его технических реализаций. Но если говорить о принципиальной схеме, то здесь, просматриваются только два основных варианта. Первый вариант показан на рис. 5.1. В этом варианте статор является неподвижным, а оболочка скользит по его внутренней поверхности с постоянной линейной скоростью. Во втором варианте (рис. 5.2) оболочка закрепляется с помощью гибких тяг, а статору придается вращение с постоянной угловой скоростью. В главном эти схемы совпадают между собой — они обеспечивают относительные скольжения оболочки и статора. Однако в динамическом отношении различие, конечно, есть.

В первой схеме при больших скоростях скольжения появляются центробежные силы. Во второй схеме центробежных сил нет, но при больших скоростях вращения статора становятся существенными инерционные силы, связанные с периодическим радиальным движением материала. В данной работе задача моделирования центробежных сил не ставилась, поэтому можно ограничиться только второй схемой нагружения, тем более что в техническом отношении эта схема оказалась проще первой. Во всем дальнейшем, за немногими исключениями, скорость вращения статора выбиралась достаточно медленной так, чтобы в целом процесс деформирования носил квазистатический характер.

На рис. 5.3 показано устройство нагружения: образец (1), который подвергается испытанию, имеет цилиндрическую камеру (2) (оболочка), выполненную из листовой бериллиевой бронзы толщиной 0,3 мм; дно (3) изготовлено из тонкой листовой резины. Оно предварительно натянуто и приклеено к оболочке. Фактически нет необходимости делать статор (4) в виде сплошного тела. Оказалось, что свою роль статор выполнит, если он будет охватывать оболочку всего в двух сечениях, поэтому его можно изготовить в виде двух шаблонов с эллиптическими вырезами. Шаблоны устанавливаются соосно и охватывают камеру в двух сечениях. При деформировании камера сохраняет форму прямого цилиндра, так как прогибы обо-

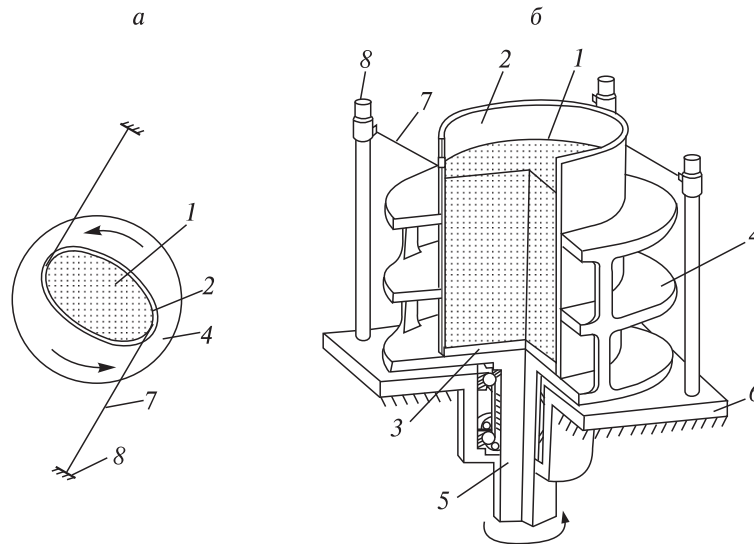


Рис. 5.3.

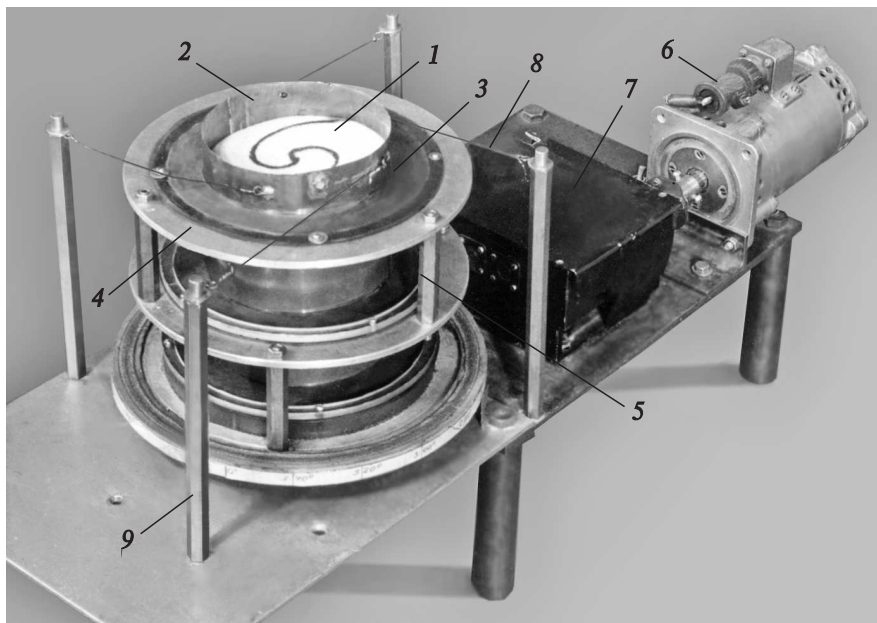


Рис. 5.4.

лочки между шаблонами практически отсутствуют. На оси (5) закреплена жесткая опора для дна камеры и сам статор. Статор опирается на неподвижную опору 6 с жесткими стойками 7. Стойки служат для крепления оболочки с помощью гибких тяг 8. Вращающий момент на статор передавался через ось 5 от электродвигателя и редуктора со ступенчатым переключением скорости вращения вала.

На рис. 5.4 показана фотография общего вида стенда: 1 — образец из сыпучего материала; 2 — гибкая камера; 3–5 — статоры; 6, 7 — электродвигатель и редуктор; 8 — гибкие тяги, закрепленные к неподвижным стойкам 9. Общий вид с камерой, заполненной вязкой жидкостью, изображен на рис. 5.5.

В одной из модификаций прибора усилия на камеру от статора передавались через обжимные ролики (рис. 5.6). Это позволило заменить трение скольжения между статором и камерой на трение качения. (Поэтому уменьшается крутящий момент, а также износ оболочки.) На рис. 5.7 изображен общий вид указанной модификации стенда с блоком измерительной аппаратуры.

2. Кинематика устройства нагружения. Конструкция стенда позволяет непосредственно наблюдать кинематику деформирования свободной поверхности образца. Эксперименты показали, что поле

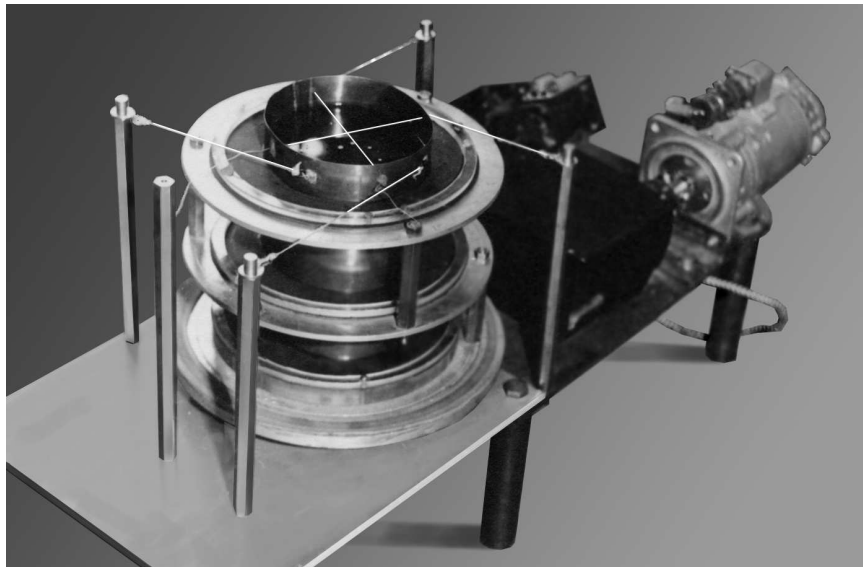


Рис. 5.5.

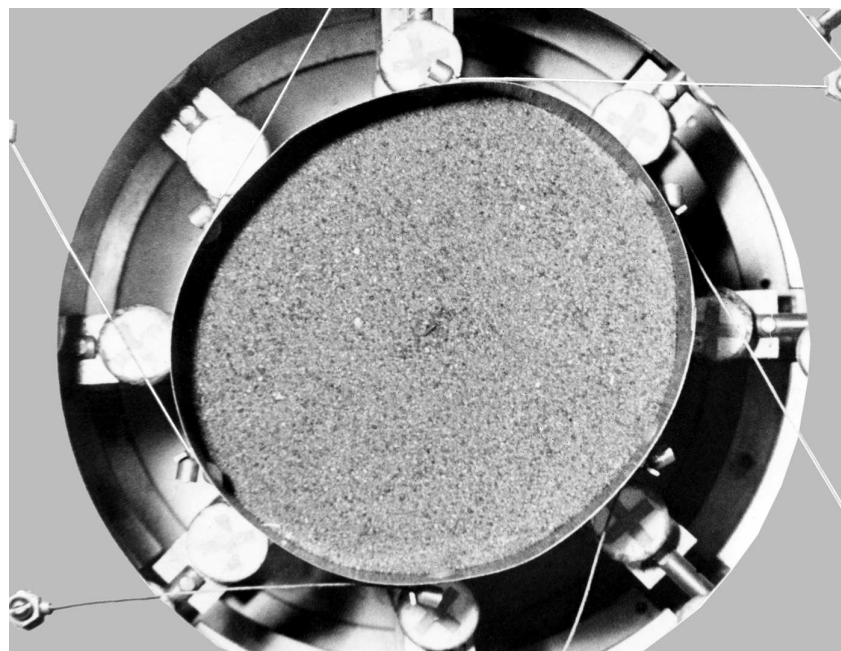


Рис. 5.6.



Рис 5.7.

скоростей имеет периодические колебания во времени. Оказалось, что эти колебания связаны только с выбранной кинематической схемой нагружения. Это заставило рассмотреть кинематику станда подробнее. Она не так проста, как это может показаться на первый взгляд.

Выше мы остановились на схеме нагружения, при которой статор вращается, а камера закреплена. Однако считать камеру неподвижной нельзя. Все ее точки описывают в пространстве довольно сложные траектории. Кроме того, несмотря на то что скорость вращения статора принята постоянной, кинематическая картина в целом стационарной не является. Нестационарность вносится точками закрепления гибких тяг.

Существо дела можно понять, если рассмотреть два крайних случая, изображенных на рис. 5.8. В положении *a* через точку закрепления проходит большая ось эллипса. Следовательно, линейная скорость скольжения оболочки относительно статора будет равна $v_a = \Omega \cdot a$, где, как отмечалось, Ω — угловая скорость вращения статора. Оболочка нерастяжима. Поэтому с такой же линейной скоростью будут скользить все ее точки. Теперь другой крайний случай. В положении *b* через точку закрепления проходит малая ось эллипса, поэтому скорость скольжения будет равна $v_b = \Omega \cdot b$. Ясно, что

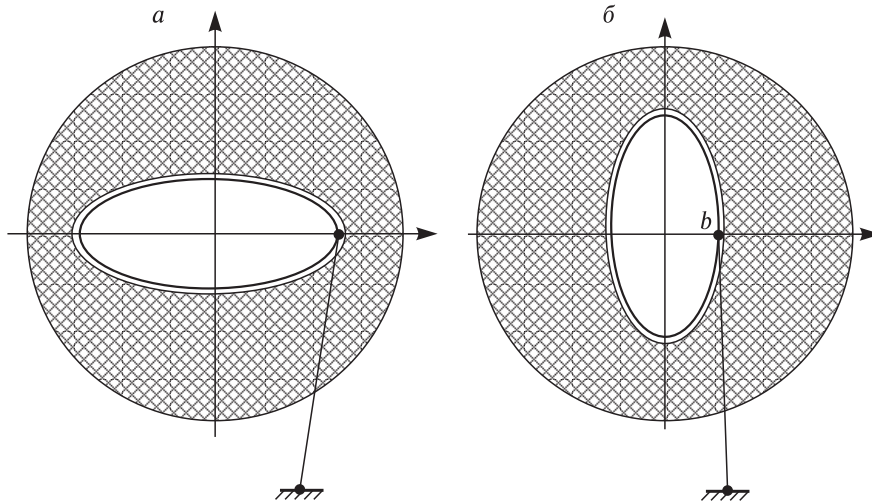


Рис. 5.8.

в промежуточных положениях скорость будет равна некоторому промежуточному значению между v_b и v_a . Таким образом, при постоянной угловой скорости вращения статора Ω скорость скольжения оболочки постоянной не является и колеблется в интервале $[\Omega \cdot b - \Omega \cdot a]$. В этом состоит причина нестационарности. На рис. 5.9 изображены положения статора через одинаковые промежутки проскальзывания ($a = 1$; $b = 0,5$). Отчетливо видна соответствующая неравномерность по углу.

Рассмотрим теперь кинематику граничных точек в лабораторных, неподвижных координатах. Обозначим эту систему через Oxy . Подвижную систему $Ox'y'$ свяжем со статором. Пусть A — материальная точка на оболочке, которая закреплена к гибкой тяге AN (см. рис. 5.2), N — неподвижный конец тяги. Во время вращения статора точка A будет смещаться по дуге окружности радиуса $AN = R$. Тягу выберем жесткой так, чтобы ее растяжением можно было пренебречь. Кинематика упростится, если тягу взять достаточно длинной, а неподвижный ее конец закрепить

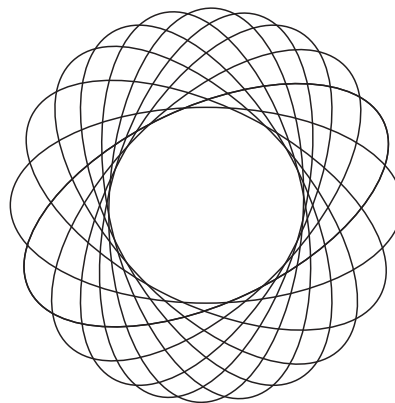


Рис. 5.9.

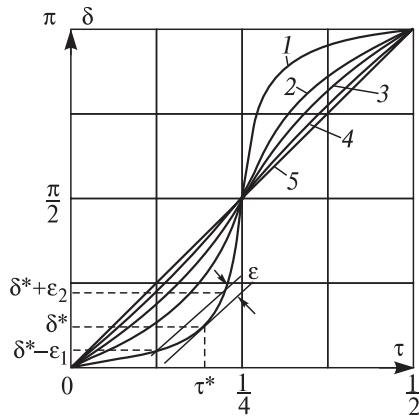


Рис. 5.10.

в точке $x = (a - b)/2$; $y = -R$, где $R \gg a - b$. В этом случае можно принять, что точка A смещается вдоль оси Ox .

Допустим, что δ — угол поворота статора, A' — точка на большой оси его эллиптического выреза. Для определенности будем считать, что в начальный момент времени точки A и A' совпадают между собой. Пусть $L(a, b)$ — длина всей эллиптической кривой, которую удобно принять за линейный масштаб. Обозначим через $\tilde{\tau} = \tau \cdot L$ длину дуги AA' . Величина τ равна безразмерному относительному проскальзыванию. Воспользовавшись стандартной программой для подсчета эллиптического интеграла, нетрудно построить графики функций $\delta = \delta(\tau, b/a)$ (рис. 5.10); кривые 1–5 соответствуют значениям $b/a = 0,1; 0,3; 0,5; 0,8$ и 1. Возьмем теперь произвольную материальную точку B , принадлежащую деформируемой оболочке. Через B' обозначим соответствующую точку статора (см. рис. 5.2). Пусть $S \cdot L$ — длина дуги BA и $B'A'$. S играет роль лангражевой координаты точек B и B' . Проскальзывание τ можно рассматривать как параметр нагружения. Очевидно, что при $\tau < S$ длина дуги $A'B$ равна $(S - \tau)L$. Это позволяет определить координаты точки B в системе $Ox'y$. Кроме того, графики на рис. 5.10 по известному значению τ позволяют найти величину угла δ . Отсюда легко пересчитываются координаты точки B в неподвижную систему Oxy . При переходе величины τ через значение, равное S , т. е. при $\tau \geq S$ длина дуги отсчитывается от A' по часовой стрелке и все вычисления аналогичны. Теперь можно ввести физическое время $t = \delta/\Omega$. Это позволяет определить траектории всех точек и закон движения по ним в подвижных координатах. На рис. 5.11, 5.12 показаны траектории точек для различных величин сжатия эллипса. Из симметрии следует, что дополнительное закрепление эллипса во второй точке, расположенной на другом конце его диаметра, кинематики не меняет (для компенсации крутящего момента такое закрепление в двух точках удобнее). Однако если закрепление осуществить в другой точке, то кинематика изменится. В этом случае тяги в работу будут включаться попеременно.

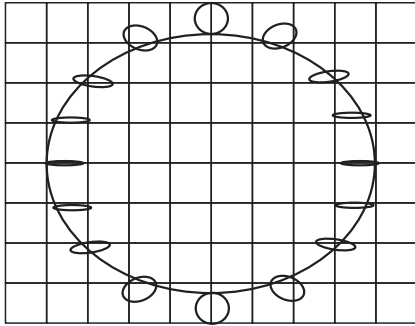


Рис. 5.11.

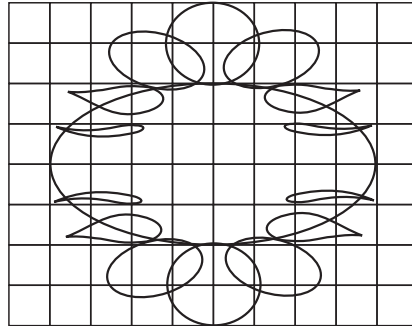


Рис. 5.12.

Действительно, расположим вторую пару тяг, например, так, как показано на рис. 5.13. В рассмотренной выше схеме (рис. 5.2) тяга была все время натянута, поэтому ее можно было выполнить и в виде жесткого стержня. На схеме же, изображенной на рис. 5.14, в случае жестких тяг деформации невозможны, поэтому тяги должны быть гибкими, так чтобы расстояние между точками A и N , C и M удовлетворяли условиям типа неравенств: $AN \leq R, CM \leq R$. При увеличении угла δ от 0 в работу вначале включается тяга AN . При этом точка C движется по траектории, показанной на рис. 5.12, 5.13. Тяга CM при этом провисает. Затем включается в работу тяга CM , а тяга AN провисает. На рис. 5.14, 5.15 показаны соответствующие траектории точек.

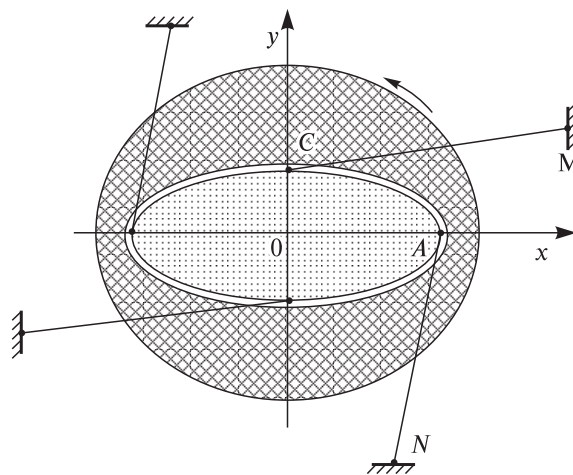


Рис. 5.13.

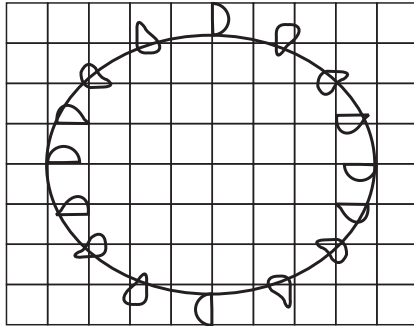


Рис. 5.14.

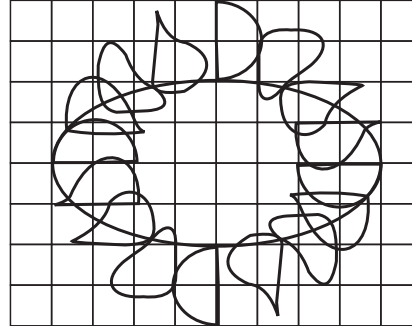


Рис. 5.15.

Теперь можно поставить вопрос об оптимизации всего процесса. Из сказанного выше видно, что путем закрепления камеры в ряде точек и при соответствующем подборе тяг колебания скорости скольжения оболочки можно сгладить. Можно даже добиться того, чтобы при постоянной скорости вращения статора скорость скольжения оболочки была бы также практически постоянной.

Действительно, обратимся к графику (см. рис. 5.10). На нем есть точка $(\tau^* \delta^*)$, в которой мгновенная скорость скольжения совпадает со средней скоростью скольжения оболочки за полный оборот статора. Проведем секущую к графику, параллельную касательной в точке $(\tau^* \delta^*)$ и отстоящую от нее на расстоянии $\varepsilon \cdot L$, где $\varepsilon \ll 1$. Получим две точки: $\delta^* - \varepsilon_1$ и $\delta^* + \varepsilon_2 \cdot t$. Примем положение статора $\delta^* - \varepsilon_1$ за начальное. Практически это означает, что первую пару тяг настроим на включение в работу именно в этом положении. Осуществим поворот статора до угла $\delta^* + \varepsilon_2$. Вторую пару тяг настраиваем на включение ее в работу в момент $\delta = \delta^* + \varepsilon_2$ и т. д. Путем передачи такой эстафеты можно получить скорость скольжения оболочки, которая будет близка к постоянной и равной, естественно, ее средней скорости. (Здесь, конечно, нет нужды обсуждать вопрос о том, что выбор числа ε должен быть таким, чтобы при полном обходе контура последняя точка закрепления совпадала с первой.) Таким образом, при точном измерении скоростей точек поверхности образца все поправки на колебания, связанные с конструкцией стенда, можно вычислить, используя рассмотренные выше результаты. Учет этих колебаний необходим также при исследовании скорости вращения внутреннего ядра. В экспериментах периодические колебания ядра отчетливо регистрируются и с процессом деформирования самого материала никак не связаны.

Ниже описаны другие виды стенов, которые использовались для моделирования волн большой амплитуды, а также для моделирования пространственной деформации.

§ 6. Методика проведения экспериментов

Итак, на пути к лабораторному моделированию приливов мы решили вопросы о форме образца небесного тела и способе его нагружения, который имитировал бы движение приливных волн. Следующие вопросы носят конкретный характер и возникают при непосредственной постановке экспериментов: первый — какую высоту приливной волны необходимо задавать в экспериментах, второй — какие материалы можно использовать для изготовления образцов.

Как отмечалось, во всех построениях мы будем иметь в виду не только Землю, но и другие небесные тела, например спутники планет, двойные планетные системы и т. д. Это позволит рассматривать более широкий диапазон приливных сил и расширит свободу действий. Такое расширение имеет определенный смысл и для исследования самой Земли. В настоящее время высоту твердой приливной волны можно оценить в 0,5 м. Но в далеком прошлом она была в тысячи раз больше и достигала 1–1,5 км. Кроме того, нередкой является ситуация, когда небесное тело под действием приливных сил разрушается. В этом случае высота приливной волны возрастает и, по-видимому, становится сравнимой с размерами самого тела. Ясно, что при этом процесс приливного деформирования должен приобретать какие-то новые черты и завершаться разделением небесного тела на части. Как уже отмечалось во Введении, есть основания считать, что современная Луна образовалась в результате именно подобного разрушения другого небесного тела — прото-Луны.

Все сказанное позволяет сделать следующий вывод: в экспериментах необходимо исследовать более широкий диапазон амплитуд приливных волн. По крайней мере все ограничения должны диктоваться только техническими возможностями устройств нагружения. Формально принятая выше схема нагружения принципиальных ограничений на высоту приливной волны не накладывает. Однако практически она не позволяет достичь значительных амплитуд волны, поэтому для исследования больших амплитуд был разработан новый способ нагружения и изготовлен соответствующий стенд. Эта часть работы изложена в § 9.

Перейдем теперь к собственно модели небесного тела. Многочисленные данные показывают, что внутреннее строение Земли имеет четко выраженный слоистый характер. То же самое можно

сказать и о ближайших к Земле планетах и их спутниках. При моделировании сложных процессов всегда удобнее идти от самых простых ситуаций к более сложным, поэтому вначале вообще пренебрежем любыми неоднородностями внутреннего строения небесного тела. Никаких дополнительных условий на его реологическое поведение ставить не будем. Пусть снаружи тело ограничено упругой оболочкой (слоем). Эту оболочку можно рассматривать с двух точек зрения. Первая связана с исходной кинематической постановкой задачи. При такой постановке внешняя оболочка может рассматриваться как часть, устройства нагружения. В этой роли она служит только для создания определенных смещений на поверхности образца. И поэтому ее толщина имеет значение только для оптимизации характеристик самого устройства нагружения. От толщины зависят момент вращения ротора и все усилия, развиваемые в стенде. Последнее обстоятельство определяет контактные напряжения между оболочкой и статором, а также ресурс стенда в целом.

Внешнюю оболочку можно рассматривать и как составную часть самого образца. Для Земли и других небесных тел, имеющих твердую внешнюю поверхность, такая интерпретация вполне оправдана. В этой роли толщина оболочки должна определяться мощностью внешних упругих слоев небесного тела.

Моделирование деформаций внешнего упругого слоя никаких трудностей не представляет. Можно подобрать ряд упругих материалов, вполне удобных для постановки таких экспериментов, т. е. обладающих достаточной податливостью, чтобы не потребовались большие усилия на границе, а также достаточным пределом упругости, чтобы можно было не ограничивать высоту приливных волн. Правда, никаких особенных эффектов здесь ожидать не приходится. Упругое тело «не помнит» истории своего нагружения, поэтому циклические приливные деформации никакого эволюционного процесса в упругом теле вызвать не могут. Траектории всех точек тела всегда будут строго замкнутыми.

В настоящее время нет проблем и с математическим моделированием упругого процесса. Если заданы характеристики материала (в том числе и неоднородные), а также условия на контакте между слоями, то задача может быть исследована известными методами исчерпывающим образом. Ниже ограничимся только ссылками на классические работы по теории упругих приливов и постановкой экспериментов на плоской однородной модели.

Таким образом, в дальнейшем внешнюю упругую оболочку будем брать достаточно тонкой и относить ее к устройству нагружения. Вначале ограничимся однородными образцами. Затем рассмотрим

роль жесткого внутреннего ядра и некоторые эффекты, связанные с изменением свойств среды по глубине, а также слоистостью внутреннего строения тела.

Перейдем теперь к проблеме выбора материалов для экспериментальных моделей. Тело Земли обладает чрезвычайно широким диапазоном реологических свойств. Реакция геосреды на различные силы зависит не только от свойств самой среды, но и от характера силового воздействия. Хорошо известно, что один и тот же материал при больших временах воздействия может выступать как вязкая жидкость, а при малых — как упругая среда. Кроме того, есть существенная зависимость свойств среды от температуры, всестороннего давления и т. д. Приливное воздействие носит циклический характер. Одному циклу отвечает безусловно малое время. Но число циклов таково, что общее время приливных деформаций — это все время жизни небесного тела. Следовательно, это предельно большие времена.

Какие материалы можно использовать для моделей небесных тел? Вопрос о чисто упругих моделях затрагивался выше. Рассмотрим теперь, какие открываются возможности перед неупругими моделями. Здесь сразу возникает вопрос, насколько вообще оправданно применение неупругих моделей для исследования приливных деформаций Земли. К настоящему времени накоплено достаточно много наблюдений, которые позволяют ответить на этот вопрос однозначно и положительно — у приливной реакции Земли есть неупругая составляющая. Если бы реакция Земли была целиком упругой, то наблюдалось бы полное совпадение фаз между приливной силой и приливной волной. Вместе с тем в наблюдениях регистрируется устойчивое отставание максимума приливного горба от максимума приливной силы. Разные источники дают разные значения отставания, но сам по себе этот факт сомнению не подвергается.

Для приближенного моделирования конкретные значения разности фаз не так важны: достаточно только принять, что у реакции Земли есть неупругая составляющая и на этом основании считать оправданным исследование приливов на тех или иных неупругих моделях.

Таких оснований станет гораздо больше, если обратиться к истории образования Земли. В настоящее время наибольшее признание получила теория Шмидта — Сафронова об эволюции допланетного газово-пылевого облака в рой твердых тел и последующую аккумуляцию планет из твердых тел и частиц [62, 63]. Можно предположить, что на ранних стадиях эволюции планеты ее реология прошла путь от сыпучей среды со взвешенными и периодически

контактирующими частицами через сыпучую среду с частицами, испытывающими постоянные контакты, к твердому телу, в котором постепенно выделилось внутреннее ядро.

Далее. Как уже отмечалось при оценке высоты приливной волны, во всех построениях мы будем иметь в виду не только Землю с ее приливами от Солнца или Луны, но и другие двойные планетные системы, планеты и их спутники и т. д. Это позволяет расширить диапазон не только амплитуд приливных волн, но и реологических свойств небесных тел, а значит, и соответствующих им моделей.

Обратимся теперь к неупругим материалам, которые можно потенциально использовать в моделях. Класс неупругих сред является чрезвычайно обширным и изучен еще далеко не полно, поэтому естественно начать с наиболее простых его представителей. По-видимому, самой простой будет модель линейно-вязкой среды. Для использования вязких жидкостей в качестве модельных материалов есть ряд причин. Во-первых, внутреннее ядро современной Земли представляет собой вязкую жидкость [111]. Во-вторых, эффекты вязкого трения наблюдаются и у твердых тел, составляющих внешние оболочки Земли, особенно в условиях повышенных температур и давлений. В-третьих, модель жидкости (идеальной и вязкой) использовалась во многих классических работах, посвященных исследованию фигур равновесия вращающихся небесных тел [76–79]. Кроме того, если говорить не только о Земле, но и о других планетах Солнечной системы, то для них модель вязкой жидкости имеет смысл и для их внешних оболочек [254–256]. Итак, в качестве первого шага будем использовать образцы моделей небесных тел, представленные различными видами вязких жидкостей.

Другим простейшим представителем неупругих сред является пластическое тело. К пластическим можно отнести и геоматериалы. При сравнительно небольшом всестороннем сжатии геоматериалов проявляются свойства внутреннего трения. Однако при больших сжатиях и температурах внутреннее трение уменьшается и становится преобладающим чисто пластическое поведение. Однако если рассматривать процесс деформирования геосреды при фиксированном гидростатическом сжатии, то внутреннее трение проявляться не будет. Величина гидростатического сжатия войдет в качестве параметра в пластические модули среды и в целом ее поведение будет носить пластический характер [3–5]. Из подобных сред наиболее удобными для экспериментов являются сыпучие среды, и в частности, различные сухие кварцевые пески, поэтому их также будем использовать в качестве модельного материала.

Пластичность характеризуется наличием порога. Для сыпучих материалов он чрезвычайно мал (допредельные пластические деформации начинаются уже при малых сдвигах [257, 258]). Возникает вопрос, будет ли порог пластичности преодолен и в натуральных условиях? Если приливные деформации значительны, то да, если же незначительны (как, например, для Земли), то вопрос остается открытым. Его можно перенести на математические модели. Более близкими к реальности будут усложненные модели, сочетающие в себе вязкость, упругость, пластичность и, возможно, более сложные элементы.

Теперь самый трудный вопрос — как выбирать параметры материалов, из которых изготавливаются образцы, и как эти параметры должны соотноситься с аналогичными параметрами масс, из которых состоит небесное тело? Этот вопрос только внешне выглядит как чисто технический. В действительности он имеет принципиальный характер и связан со следующими обстоятельствами. Можно выделить две точки зрения, на цели экспериментального моделирования сложных явлений. Первую можно назвать ортодоксальной. Согласно этой точке зрения, при моделировании должны соблюдаться все критерии, которые диктуются теорией подобия и размерностей. В этом случае экспериментальные результаты, полученные на модели, легко переносятся на процессы, которые разыгрываются в естественных условиях. Пересчет является практически тривиальным и сводится только к изменению масштабов.

Согласно второй точке зрения, цель моделирования несколько иная: именно из сложного реального процесса выделяются только несколько отдельных факторов или, возможно, только единственный фактор. Затем ставится задача моделирования действия именно этого отдельного фактора в «чистом виде». Для выяснения роли других факторов проводятся серии экспериментов и т. д. Ясно, что при таком моделировании непосредственно перенести на натуру экспериментальные результаты невозможно, так как в естественных условиях все факторы действуют одновременно. Причем общий результат к простой суперпозиции частных результатов не сводится (реальные процессы носят, как правило, нелинейный характер), из-за чего простой пересчет путем изменения масштабов становится невозможным. Эту задачу можно решить только путем создания математической модели процесса, которая учитывала бы одновременное действие всех изученных факторов.

В настоящей работе, как уже не раз отмечалось, принята вторая точка зрения. Ряд аргументов в пользу такой постановки представлен выше. Здесь можно добавить только некоторые новые аргумен-

ты, которые непосредственно связаны с рассматриваемым вопросом — выбором параметров материалов для моделей небесных тел. Значения параметров легко вычисляются из соответствующих критериев подобия. Критерии подобия в свою очередь опираются на уравнения состояния внутренних масс Земли и других небесных тел. Причем в критериях должны фигурировать конкретные значения параметров реальных сред. Данные о последних так же, как и о самих уравнениях состояния, носят весьма приближенный характер, поэтому и критерии, полученные на этой основе, будут иметь ту же самую степень точности. Далее, если все же принять определенные значения натуральных параметров, то подобрать реальные материалы для моделей с требуемыми свойствами будет весьма непросто, тем более что для физически нелинейных сред все локальные значения параметров (касательные модули) будут зависеть от уровня деформации среды. В модели же геометрические критерии подобия выполнены в обобщенном смысле (воспроизводится характер реального нагружения, но степень деформации — безразмерная высота приливной волны — значительно увеличена). Уже одно это обстоятельство делает проблему подбора материала для моделей (по крайней мере с нелинейными свойствами) чрезвычайно трудной. Кроме того, выше мы отказались от моделирования гидростатического давления и температуры, поэтому нет смысла рассматривать критерии, где эти параметры фигурируют.

Таким образом, здесь можно только подтвердить общий вывод: альтернативы для принятой выше точки зрения на цели моделирования — практически нет. В такой постановке нет необходимости стремиться и к буквальному моделированию свойств мантии Земли, астеносферы и ее жидкого ядра. Достаточно рассматривать приливные эффекты только на отдельных типах реологического поведения в чистом виде. Проблемы пересчета эффектов на реальные значения вязкости, времени релаксации и других параметров переносятся на математические модели. Таким образом, далее мы будем придерживаться именно этого плана дальнейших действий.

§ 7. Результаты лабораторных экспериментов на плоских моделях**7.1. Модели без внутреннего ядра**

Эксперименты осуществлялись следующим образом. Образец материала 1 помещался в оболочку 2, представляющую собой прямой вертикальный цилиндр эллиптического поперечного сечения (см. рис. 5.3). Цилиндр изготовлен из листовой бронзы, так что форма его поперечного сечения может меняться. Дно выполняется в виде натянутой резины и устанавливается на гладкий горизонтальный диск. Нагружающее устройство представляет собой набор жестких шаблонов с эллиптическими вырезами. Шаблоны соосно крепятся к дискам 4, которые связаны между собой жесткими стойками. Диски с шаблонами приводятся во вращение электродвигателем 6 через редуктор 7 (см. рис. 5.4). Оболочка удерживается от вращения посредством гибких тяг 7, прикрепленных к неподвижным стойкам 8 (см. рис. 5.3). Таким образом обеспечивается относительное вращение оболочки и шаблонов. Поскольку форма образца в плане отлична от круговой, то такой процесс приводит к периодическому деформированию образца.

Характер деформирования можно представить следующим образом. Пусть от момента t до $t + \delta t$ шаблон совершает виртуальный поворот на угол $\delta\alpha$ (см. рис. 4.2, см. с. 57). Поскольку граница отличается от окружности, то области в моменты t , $t + \delta t$ не совпадают между собой, поэтому при действительном повороте на угол $d\alpha$ точки границы должны получить смещения, определяемые соответствующими областями «несовместности». Расположение областей «несовместности» таково, что в целом образец растягивается вдоль направления $x = -y$ и сжимается вдоль ортогонального направления $x = y$. Причем после реализации смещений объем (на единицу высоты образца) и форма тела не меняются, а само преобразование, если следить только за внешним очертанием границы, выглядит как жесткий поворот.

В системе координат, связанной с осями эллипса, граничные точки имеют одинаковые по величине скорости и направлены по касательной к границе, так что с этой точки зрения деформация является следствием вращения тела в условиях, когда его внешняя форма не меняется.

В лабораторных координатах оболочка закреплялась и нагружение осуществлялось путем вращения шаблонов. В основной серии экспериментов полуоси эллипса были равны: $a = 60,8$; $b = 55,3$ мм (эксцентриситет $\varepsilon = 0,4$, параметр $m = (a - b)/(a + b) = 0,047$, высота цилиндра — 180 мм, угловая скорость вращения шаблонов — $0,2 \text{ с}^{-1}$).

В качестве основного материала использовался сухой кварцевый песок. Кинематика отдельных точек исследовалась с помощью стереоскопического микроскопа МБС-9, снабженного окуляром с сеткой, на фоне которой фиксировались последовательные положения меченой частицы.

Если в оболочку поместить упругое тело, то за один оборот (т. е. время, за которое фиксированная материальная точка, двигаясь вдоль

неизменной границы, вернется в первоначальное положение) или за 2 цикла все точки тела опишут замкнутые траектории и вернуться к первоначальному положению (рис. 7.1, а, б).

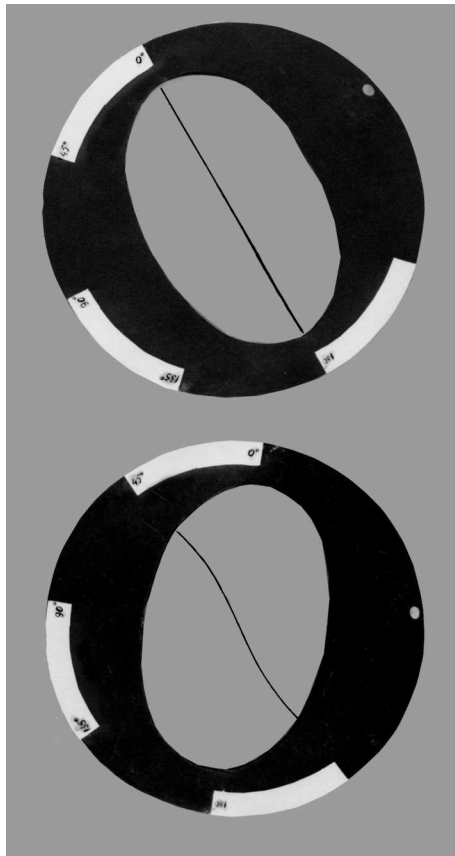


Рис. 7.1.

1. Сыпучие среды. Поведение сыпучего материала в этом отношении принципиально отличается от упругого. Несмотря на то, что за один цикл каждый объем сыпучей среды испытывает знакопеременную деформацию, тем не менее внутренние точки образца к первоначальному положению не возвращаются. Это приводит к тому, что от цикла к циклу происходит накопление «остаточных» смещений и материальные частицы от своего первоначального положения уходят все дальше. На рис. 7.2 изображены последовательно картины деформирования свободной поверхности образца после 3 и 50 об. Для визуализации процесса вдоль большой оси наносилась тонкая полоса окрашенного материала.

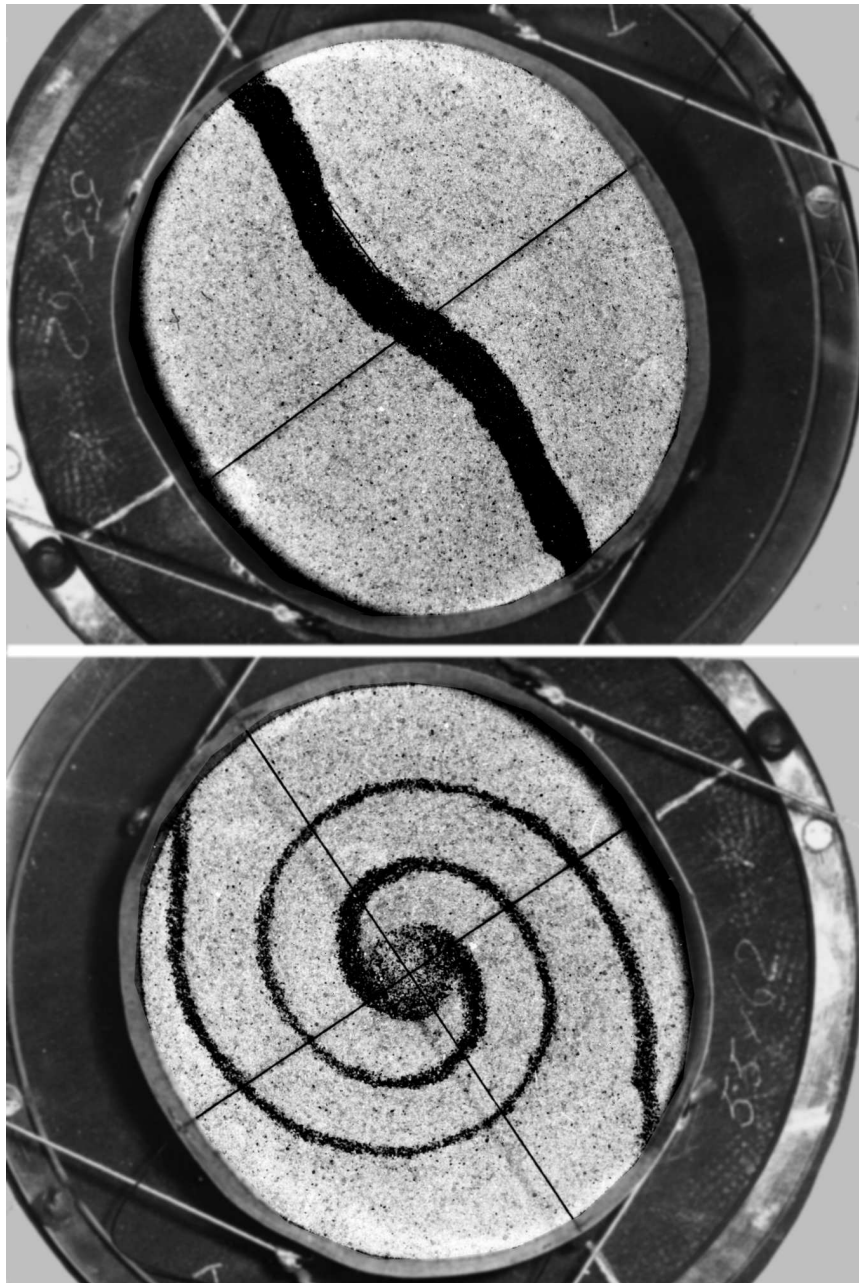


Рис. 7.2.

Эксперименты показывают, что прямая, проходящая в начальном состоянии через центр области, в процессе деформирования преобразуется в спираль, длина которой неограниченно увеличивается.

При достаточно большом числе циклов каждая частица описывает полный оборот вокруг центра. Периоды их обращения зависят от полярного радиуса. Наибольшая угловая скорость — в центре области и с удалением от него монотонно уменьшается.

Для проверки условий плоской деформации в различных горизонтальных сечениях образца вдоль оси помещались меченые частицы. После деформирования верхние слои удалялись и проводилось сравнение картин деформирования в различных сечениях. Проверка показала, что внутренние сечения образца деформируются так же, как и его свободная поверхность. Следует отметить, что, строго говоря, гладкие стенки оболочки не обеспечивают полного прилипания материала: за один цикл граничные точки получают незначительные смещения относительно оболочки. Увеличение шероховатости стенок, изменение масштаба модели (уменьшался в 2 раза), вида сыпучего материала (размер частиц увеличивался до 6 раз), скорости нагружения (менялись в диапазоне $4 \cdot 10^{-3} \div 5$ от основной) и эксцентриситетов до некоторого критического (равного 0,54 для песка) на качественной картине деформирования не сказываются.

При эксцентриситетах, превышающих критические, в материале появляются регулярные системы линий скольжения. Развитие линий, хотя и приводит к «сильным» разрывам поля скоростей, но основного эффекта — направленного переноса масс — также не меняет.

Данный механизм обуславливает резкое возрастание приливной диссипации энергии вращения тела и усиление ее тектонической активности. Для Земли, по крайней мере на современном этапе ее эволюции, приливные деформации гораздо ниже критических, поэтому вопрос локализации рассматривается отдельно в § 9.

Вернемся теперь к основному случаю докритических приливных деформаций. Эксперименты показали, что процесс переноса масс оказывается довольно чувствительным к несовершенствам формы шаблонов и незначительной несоосности в их установке. В этом нет ничего удивительного. Перенос масс определяется величиной смещений (для наблюдателя, который находится на поверхности деформируемого тела). Указанные возмущения влияют на скорости переноса, поэтому даже малые возмущения стационарного поля скоростей с течением времени приводят к конечным, а затем и к большим возмущениям поля перемещений.

Может быть, здесь уместно напомнить следующий известный факт. Свободное падение тела воспринимается нами как процесс,

безусловно, устойчивый. Однако это не совсем так. Если интересоваться только скоростями, то устойчивость, конечно, есть. Например, если дать малое горизонтальное возмущение начальной скорости, то скорость на всей траектории получит также малое возмущение. Возмущение перемещения пропорционально времени падения и может стать значительным.

Возмущения формы шаблонов и отклонения от степени их соосности при установке имеют ту же природу, поэтому данные возмущения могут существенно менять картину деформирования, которая получается после достаточно большого числа циклов нагружения. Эксперименты это подтверждают.

2. Вязкие жидкости. Перейдем теперь к результатам для вязких жидкостей. Опыты на меде, глицерине, растительном масле (кинематическая вязкость $860 \cdot 10^{-4}$; $12 \cdot 10^{-4}$; $1,2 \cdot 10^{-4}$ м²/с соответственно) показали, что качественные результаты остаются без изменений. В пределах одного цикла частицы описывают почти замкнутые траектории и к первоначальному положению не возвращаются. Так же, как и для сыпучих материалов, от цикла к циклу идет систематическое накопление «остаточных» смещений. На рис. 7.3 показано

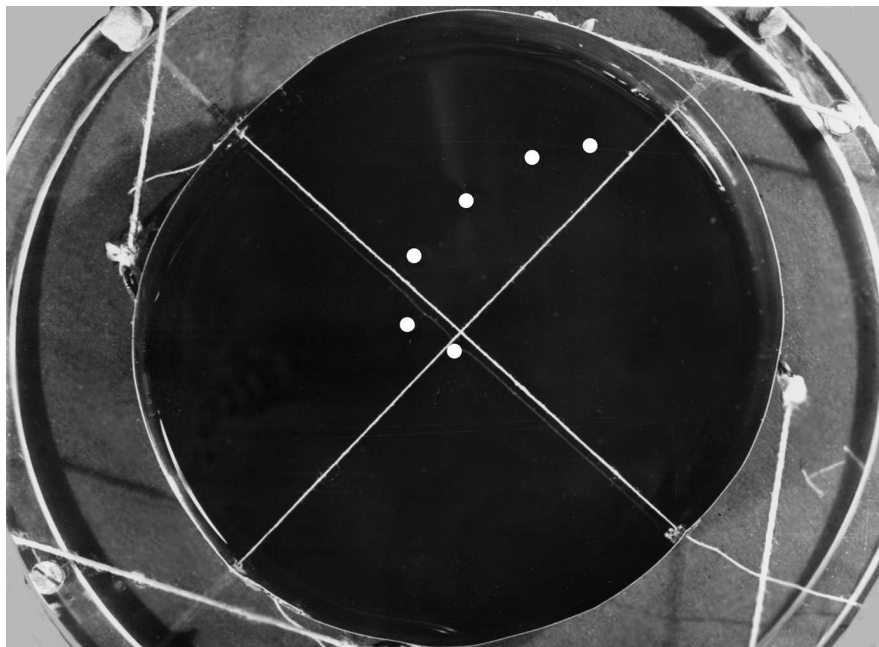


Рис. 7.3.

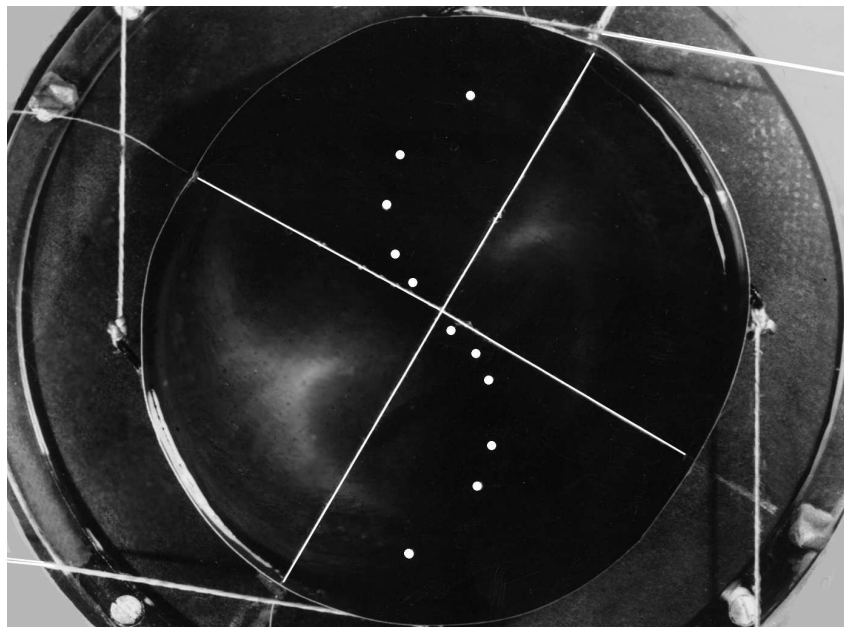


Рис. 7.4.

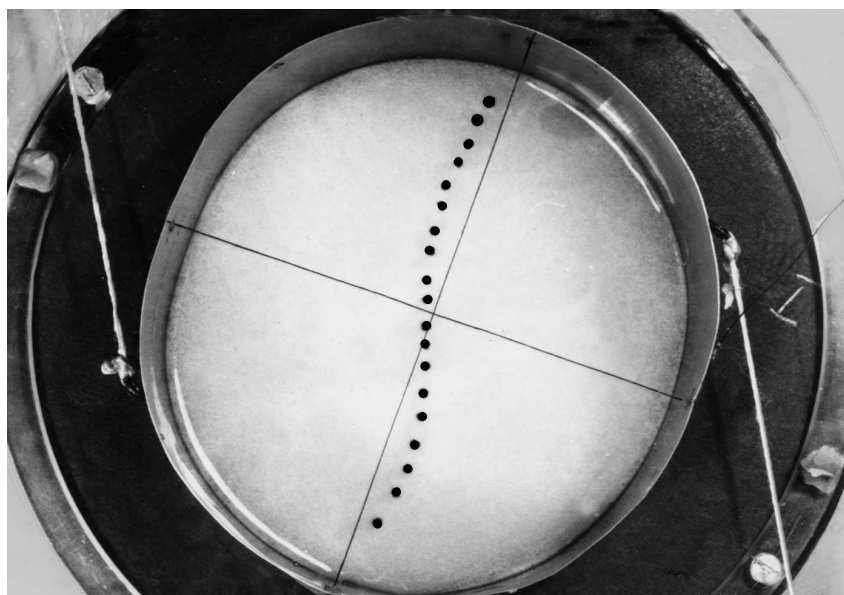


Рис. 7.5.

положение поплавков, установленных первоначально вдоль оси, после трех оборотов (масло). Наибольшая угловая скорость — в центре области, наименьшая линейная скорость — на 0,34 большой полуоси от центра эллипса. Аналогичные результаты имеют место для глицерина, меда (рис. 7.4, 7.5 — 20 об.) и других жидкостей.

3. Сложные среды. На рис. 7.6 показаны картины деформирования, полученные на песке с размером частиц 0,4–0,315 мм, насыщенном смесью глицерина и воды (50 % — глицерин, 50 % — вода; *a* — исходное состояние; *б*, *в* — через 20 и 30 полных оборотов).

Аналогичный результат получается и на пластилине. Здесь, однако, использование стенда становится затруднительным, поскольку образец не повторяет форму камеры. Этот опыт проводился по-другому. Образец из пластилина заворачивали в бумагу, которая на торцах скручивалась подобно обертке карамели. Затем образец прижимали к столу плоской дощечкой и прокатывали, подобно сигарете при ее разминании. После этого обертку удаляли, образец разрезали на две части и фотографировали. Результат показан на рис. 7.7. Этот опыт вполне возможен и в домашних условиях.

4. Независимое измерение составляющих момента и диссипации энергии. Рассмотренные течения приводят к диссипации энергии и вносят свой вклад в эволюционные процессы планеты. Диссипацию можно оценить по-разному. Во-первых,

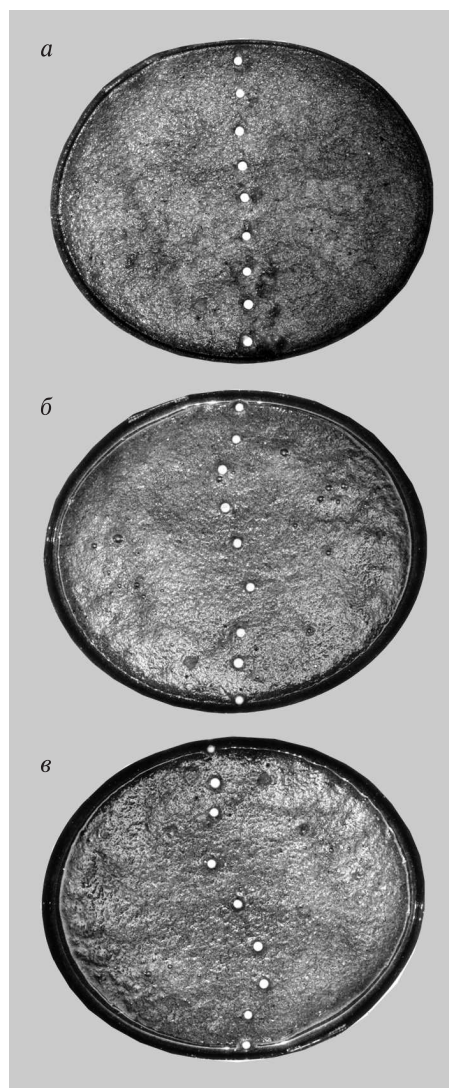


Рис. 7.6.

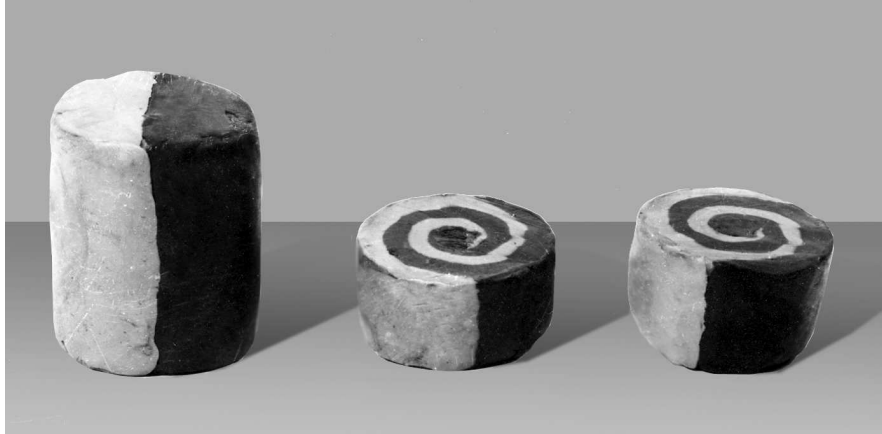


Рис. 7.7.

расчетным путем, если известны данные о реологии. Во-вторых, можно измерить локальные напряжения внутри тела и затем по деформациям восстановить диссипацию. Есть еще один путь — несколько видоизменить конструкцию стенда и получить интегральную оценку диссипации непосредственно из эксперимента, не прибегая к локальным измерениям и их последующему интегрированию.

В вопросе о диссипации есть еще одно обстоятельство. В опыте на границе задаются условия § 4 (31), и поэтому энергия, которая поступает в тело, есть энергия, совершаемая граничными напряжениями $\bar{\sigma}_n = \sigma_{nm} \cdot \bar{n} + \sigma_{nm} \cdot \bar{m}$ на смещениях § 4 (31). В действительности поверхность тела от напряжений свободна и энергия в него закачивается через массовые силы. Однако данному нагружению можно дать также следующую интерпретацию. Предположим, что внешняя оболочка тела является упругой и деформируется согласно условиям § 4 (31). В этом случае энергию, передаваемую через границу, можно рассматривать как работу сил, деформирующих оболочку.

Энергия граничных напряжений, отнесенная к единице времени, равна

$$W = \int_{\Gamma} \bar{v} \cdot \bar{\sigma}_n d\Gamma = v^0 \int_{\Gamma} \sigma_{nm} d\Gamma. \quad (1)$$

Нагружение является достаточно медленным, так что инерционными силами можно пренебречь, поэтому суммарный момент напряжений, возникающих на границе, будет равен нулю:

$$M = \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_n \cdot \bar{r} d\Gamma = M_n + M_m = 0. \quad (2)$$

$$M_n = \int_{\Gamma} \sigma_{nm} \bar{n} \cdot \bar{r} d\Gamma, \quad M_m = \int_{\Gamma} \sigma_{nm} \bar{m} \cdot \bar{r} d\Gamma = - \int_{\Gamma} \sigma_{nm} \cdot r_n d\Gamma,$$

где $r = r_n \cdot \bar{n} + r_m \cdot \bar{m}$ — радиус-вектор.

Сравним теперь интеграл I и выражение для M_m . Пусть эксцентриситет области мал. Тогда проекция $r \approx (a + b)/2$ и скорость диссипации оказываются пропорциональными моменту M_m . Последнюю составляющую момента можно измерить непосредственно.

Для этого введем дополнительную цилиндрическую камеру 1 (рис. 7.8). Боковая поверхность камеры представляет собой гибкую оболочку из тонкого листового металла. Дно камеры выполнено из пластичной резины. Дополнительная камера подвешена внутри основной камеры 2 рассмотренного выше стенда. Между оболочками внешней и внутренней камер установлены два ряда подшипников качения. Оси подшипников зафиксированы на стойках, которые закреплены на внутренней камере, как показано на рис. 7.8. Внешними обоймами подшипники упираются в оболочку основной камеры, поэтому оболочки между собой не соприкасаются, и деформирующее усилие на внутреннюю оболочку передается только через подшипники. Такая конструкция позволяет почти полностью устранить касательные напряжения на внешней границе дополнительной камеры. Заполним теперь внутреннюю камеру материалом и будем деформировать его путем вращения шаблонов 3 . Деформации вызовут напряжения на контакте материала с оболочкой 1 . Поскольку внешние касательные напряжения через подшипники не передаются, то появится момент M_m , который стремится повернуть внутреннюю камеру 1 . Данный момент можно измерить непосредственно.

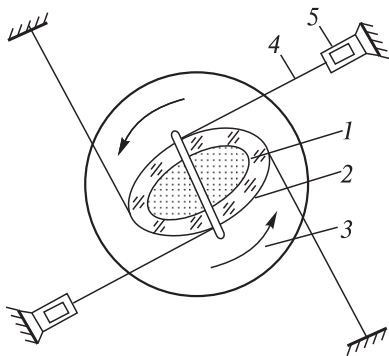


Рис. 7.8.

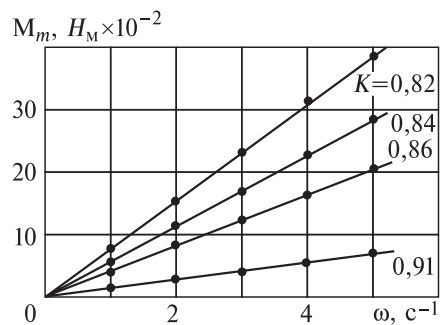


Рис. 7.9.

Эксперименты проводились в следующем порядке. В дополнительную камеру 1 помещался образец, моделирующий деформируемое тело. После этого шаблоны 3 приводились во вращение с определенной скоростью. Теперь устройством нагружения для образца служили шаблоны 3, внешняя камера 2 и подшипники качения. Гибкие тяги 4 удерживали внутреннюю камеру от вращения. Они связывались с тензорезисторными датчиками 5, подключенными к силоизмерительному прибору. Показания прибора фиксировались самописцем. Обратившись к равенствам (2), легко понять, что фактически здесь измерялась составляющая момента M_n , а значит, и момента M_m . Опыты показали, что момент в общем случае зависит от свойств материала, скорости деформирования, коэффициента сжатия и высоты образца. При этом пластическое тело дает постоянный момент M_m , не зависящий от скорости, а вязкое тело — момент, зависящий от скорости.

Приведем экспериментальные данные на примере меда. На рис. 7.9 представлены графики зависимости изменения величины момента от скорости вращения шаблонов для различных коэффициентов сжатия K эллиптических отверстий (кинематическая вязкость меда $860 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$). Сечение камеры имело средний диаметр, равный $(a + b) = 80 \text{ мм}$, высота заполнения материалом составила 75 мм .

7.2. Модели с внутренним жестким ядром. Восточный дрейф ядра

Рассмотрим модель внутреннего ядра Земли. Известно, что оно является относительно жестким. Это обстоятельство влияет на картины течения вне ядра. В случае плоской деформации введение в модель ядра никаких трудностей не представляет. Эксперименты проводились следующим образом. В центр камеры вводился круговой металлический цилиндр радиусом r^0 . Цилиндр свободно подвешивался на длинной гибкой нити. Вращение внешних шаблонов приводило в движение материал в камере, и последний в свою очередь увлекал в движение жесткое ядро (рис. 7.10). В установившемся режиме ядро вращалось так, что суммарный момент внешних сил, действующих на него, равнялся нулю. Основной эффект — дифференциальное вращение — имел место и здесь. На рис. 7.11 представлены графики редукции ξ (отношение числа оборотов шаблонов к числу оборотов ядра в лабораторных координатах) в зависимости от соотношений малой полуоси эллипса и радиуса ядра. Из графиков видно, что с увеличением отношения b/r^0 коэффициент редукции увеличивается и выходит на постоянное значение.

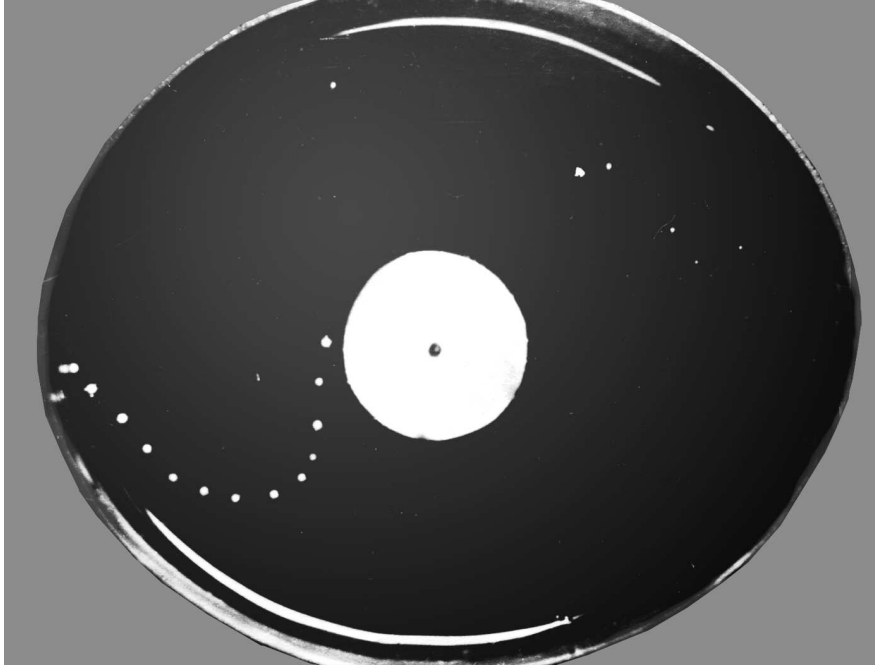


Рис. 7.10.

Причем меньшим значениям эксцентриситета отвечает большее значение ξ .

Главным в представленных результатах является то обстоятельство, что ядро вращается в ту же самую сторону, что и шаблоны. Это означает западный дрейф ядра. Причем определяющим фактором служит наличие вязкой жидкости, в которую погружено твердое внутреннее ядро. Таким образом, если принять, что внешнее ядро представляет собой линейно вязкую жидкость, то для внутреннего ядра экспериментальная модель показывает западный дрейф. При этом следует отметить, что в опытах реализуется плоская деформация и все возможные течения в жидком ядре (кроме приливного) исключены.

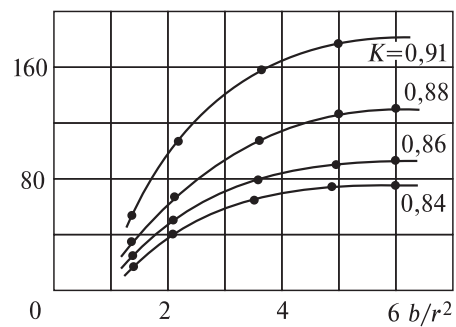


Рис. 7.11.

Лабораторные стенды позволяют исследовать в качестве внешнего ядра среды, более сложные, чем линейно-вязкие жидкости. В качестве последних использовались сыпучие среды без сцепления (сухой кварцевой песок), смеси песка с водой и глицерином в различных пропорциях, тесто различных консистенций (мука плюс вода), металлический порошок и др. Основным результатом данных опытов состоит в том, что для сложных сред уверенно регистрируется как западный, так и восточный дрейф внутреннего ядра. Направление и скорость дрейфа зависят от высоты приливной волны, диаметра внутреннего ядра и реологических свойств внешнего ядра. Для сыпучих материалов наблюдается существенная зависимость от размера частиц. Указанные зависимости носят довольно сложный и, как правило, немонотонный характер.

Приведем характерные данные для гибкой цилиндрической оболочки. Диаметр цилиндра до его сжатия равняется 116 мм, высота образца — 155 мм; использовались два типа шаблонов с коэффициентом сжатия 0,74 и 0,84. Диаметры внутреннего ядра $d_{\text{я}} = 11; 16; 21; 30$ и 41 мм. Вращение шаблонов осуществлялось с постоянной условной скоростью, равной $\Omega = 16$ об./мин. В установившемся режиме скорость вращения ядра ω постоянна. Поэтому постоянным будет и коэффициент редукции $\xi = \omega/\Omega$. Например, для сухого песка ($k = 0,74; d_{\text{я}} = 11$ мм) имеет место восточный дрейф: $\xi = -0,01$ для частиц размером 0,085 мм и западный дрейф $\xi = +0,006$ для частиц размером 0,55 мм. Налицо качественное влияние данного фактора. Причем влияние является нелинейным. Так, для частиц размером 0,174; 0,312 и 0,350 мм имеет место только западный дрейф с $\xi = 0,05; 0,062; 0,02$.

Полное насыщение образца песка водой, глицерином или смесью воды и глицерина (1 : 1), как правило, заметно влияет на дрейф ядра. Например, при $d_{\text{я}} = 30$ мм, $k = 0,84$ имеем восточный дрейф $\xi = -0,022$ (песок); $\xi = -0,31$ (песок, вода), $\xi = -0,04$ (песок, глицерин), $\xi = -0,2$ (песок, глицерин, вода). При $d_{\text{я}} = 16$ мм имеем $\xi \approx 0$ (песок), т. е. дрейфа ядра практически нет.

Для теста (мука, вода) скорость дрейфа существенно зависит от консистенции массы. Например, для консистенции: мука 760 — 1000 г, вода — 1000 г при диаметре ядра 41 мм имеем $\xi = -6,5 \cdot 10^{-4}$, а при консистенции: мука — 1000 г, вода 1000 г, $\xi = -3,4 \cdot 10^{-4}$. Значение коэффициента сжатия $k = 0,84$. Ряд данных по западному и восточному дрейфу ядра для приливных волн большой амплитуды приведен далее в § 9.

§ 8. Результаты пространственного моделирования

Рассмотрим моделирование объемного процесса деформирования. При моделировании необходимо обеспечить максимальные деформации в плоскости экватора и их уменьшение к полюсам. Расстояние между полюсами должно оставаться неизменным.

С учетом этих требований опробовано несколько схем нагружения, в частности, схема деформирования сферической поверхности вращающимися шаблонами с разными эксцентриситетами, уменьшающимися к полюсам. Однако реализация этой схемы оказалась весьма затруднительной и поэтому невыполнимой.

Приливный процесс нагружения может быть имитирован с помощью упругих металлических полуколец, средняя часть которых неподвижно закреплена в полюсах, а концевые части подвергаются деформированию. В этой схеме достаточно нагружения только в плоскости экватора, а за счет упругости полукольца напряжение передается и к другим широтам.

Рассмотрим схему стенда подробнее. Его общий вид показан на рис. 8.1. Нагружающее устройство представляет собой вращающийся ротор, на котором закрепляется шаблон с центральным эллиптическим вырезом (оси равны 217 и 100 мм). Привод на ротор осуществляется от двигателя через редуктор. Конструкция содержит следующие элементы. Вертикальная ось с фланцем неподвижно закреплена на станине. Фланец с девятью диаметрными отверстиями, равномерно расположенными по периметру его окружности, имитирует полюс. Проволочные упругие меридиональные полукольца вставлены в отверстия и неподвижно там закреплены. На полукольца с некоторым шагом надеты скользящие втулки с площадками на боковой поверхности. К площадкам приклеена резиновая оболочка полусферы. Конструкция верхней части аналогична.

Нагружение осуществляется деформированием двух ленточных колец разного диаметра из тонкого проката бериллиевой бронзы. Кольца вложены одно в другое с зазором и скреплены между собой 35 вертикально установленными втулками с отверстиями, равномерно распределенными по периметру. В отверстия со скользящей насадкой продеты концевые части полуколец с чередованием нижней и верхней полусфер. Верхняя полусфера оканчивается также гибким ленточным кольцом, к которому прикреплена резиновая оболочка. Поскольку вырез шаблона имеет форму эллипса, то и горизонтальные сечения камеры также примут форму, близкую к эллиптической. Причем по мере приближения к полюсам эксцентриситет

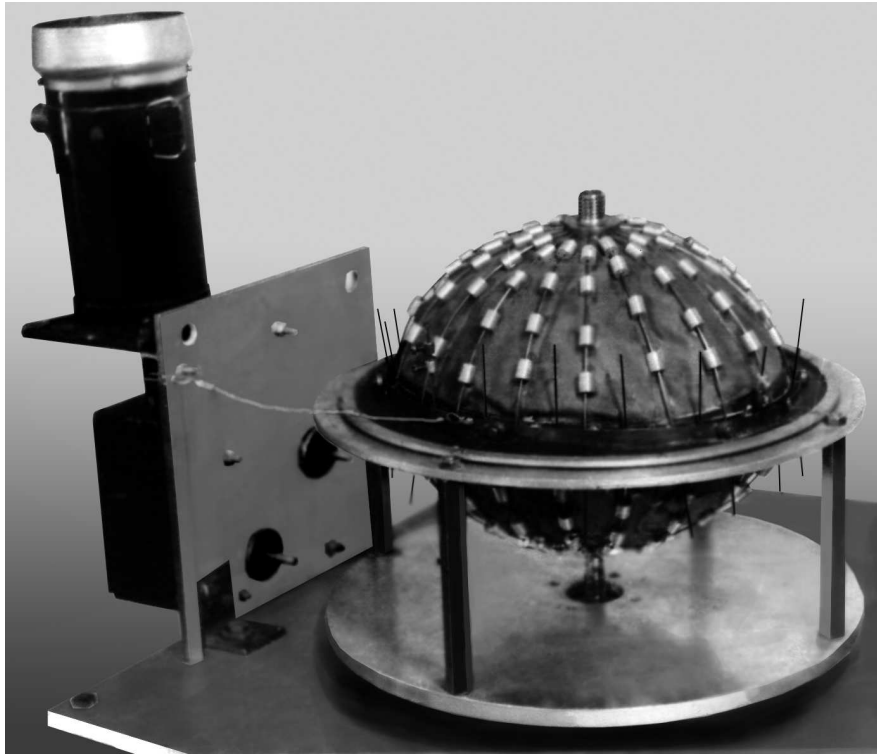


Рис. 8.1.

уменьшается. От вращения камера удерживается гибкими тягами, прикрепленными к неподвижным стойкам. Расстояние между полюсами сохраняется постоянным, поскольку «полюса» неподвижно закреплены на станине: нижний непосредственно, а верхний — с помощью кронштейна (на рисунках не показан).

Процесс передачи деформаций от экваториальной плоскости к полюсам исследован на вязкой жидкости, которая заливалась в нижнюю полусферу на разные уровни. На рис. 9 в работе [8] показаны положения поплавков, первоначально установленных по направлению большой оси эллипса после 104 циклов деформирования. Уровни жидкости от полюса составляли 49, 64, 79 мм. На фотографии видно, что устройство обеспечивает затухающий процесс направленного переноса по мере приближения к полюсу. Из сравнения картин деформирования плоской и объемной моделей видно, что одинаковым коэффициентам сжатия плоской и соответствующего сечения объемной модели отвечают близкие картины деформирования. Это

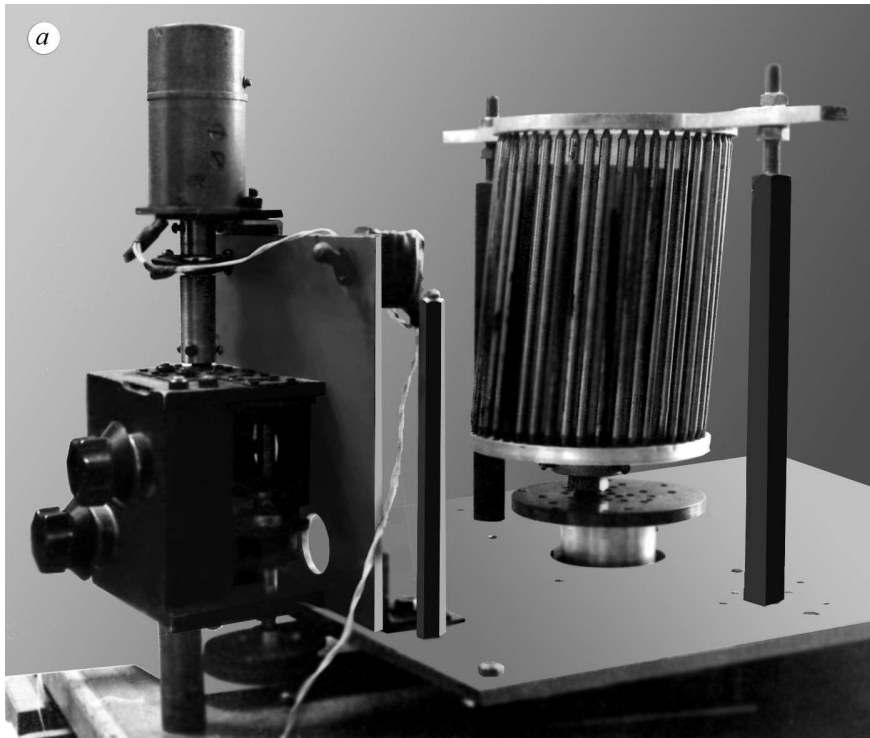
означает, что в определенной степени плоскую модель можно использовать и для имитации объемного деформирования (здесь широта будет выступать только в качестве параметра задачи).

Теперь о результатах при полной загрузке камеры. Эксперименты проводились на кварцевом песке с размером частиц 0,3 мм. В исходном положении со снятой верхней половиной в нижнюю часть в направлении малой оси вертикально устанавливались две параллельные тонкие пластины с зазором между ними. По форме пластины совпадали с сечением внутренней полости камеры. В зазор между пластинами засыпался окрашенный песок. Все остальное пространство заполнялось белым песком. Пластины аккуратно извлекались. В результате по всей глубине нижней полусферы оставалась вертикальная плоскость окрашенного материала. Затем монтировалась верхняя половина, а вся оставшаяся полость заполнялась песком через отверстие в вершине. После деформирования материал, находящийся в верхней части, удалялся через то же отверстие с помощью пылесоса. Верхняя часть демонтировалась. Затем песок нижней части послойно снимался, и делались фотографии горизонтальных сечений на разных глубинах. Типичные результаты показаны на рис. 8.2.

На основе этих данных можно сделать вывод о том,



Рис. 8.2.



что эффект направленного переноса при объемном деформировании сохраняется. При этом угловые скорости вращения материальных точек вокруг центра зависят от широты.

В заключение рассмотрим еще один тип деформирования, который может иметь место при определенных сочетаниях направления приливных сил относительно оси вращения тела. Обратимся к формулам (36), (47), (48) § 4. Если ограничиться аффинным приближением, то реализация течения (36) § 4 может быть осуществлена по схемам, показанным на рис. 4.8 или 4.9. В техническом отношении более удобной является схема, изображенная на рис. 8.3, *a, б*.

Эксперименты указывают на эффект дифференциального вращения сечений тела, расположенных на различных высотах. В результате диаметральной плоскость тела переходит в геликоидальную поверхность (рис. 8.4, *a, б*).

Если отвлечься от неоднородности процесса, связанного с влиянием веса, то можно утверждать, что в деформируемом образце можно выделить такой эллипсоид, который в процессе деформирования переходит в себя. Это первые приближения в реализации приливной

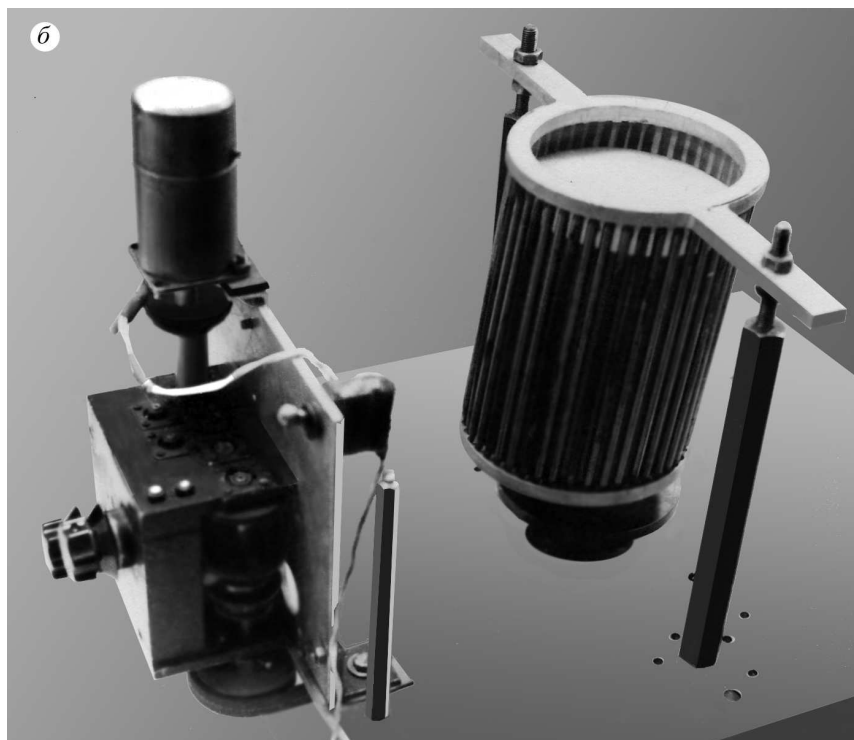


Рис. 8.3.



Рис. 8.4.

деформации данного типа. Следующее приближение должно быть аналогично рассмотренному выше переходу от кеплеровского распределения граничной скорости к постоянной скорости. (Материальные элементы границы не должны растягиваться или сжиматься.) Технически приемлемую реализацию данного условия найти не удалось. Поэтому ниже ограничимся исследованиями только основного типа приливной деформации, рассмотренной в § 7.

§ 9. Экспериментальные результаты с приливными волнами большой амплитуды

Как уже отмечалось, изучение приливных волн большой амплитуды имеет определенный смысл и вполне оправданно. Будем постепенно увеличивать амплитуду приливной волны. Эксперименты в лаборатории и расчеты показывают, что при достижении амплитудой критических значений механизм деформирования тела либо приобретает новые черты, либо вообще меняется качественно. Рассмотрим вначале экспериментальные результаты, когда в роли модели используется сыпучий материал без сцепления.

При большой интенсивности деформаций геоматериалы начинают разрушаться. Если этот процесс происходит в условиях всестороннего сжатия или в случае, когда материал уже изначально состоит из конгломерата отдельностей, то процесс разрушения приводит к формированию в материале поверхностей скольжения (фактически — трещин сдвига). Появление поверхностей скольжения обуславливает изменение распределения напряжений в материале, поэтому в целом здесь возможно достаточно много равновесных состояний, которым соответствуют различные картины разрушения материала. Рассмотрим основные случаи.

1. Пространственная структура, связанная с локализацией по системе параллельных плоскостей. В качестве базового будем рассматривать плоское эллиптическое течение, описанное в гл. 1. Нагружение будем осуществлять путем вращения пластин-шаблонов относительно гибкой камеры, в которую помещается деформируемый материал. В данном случае рассматривается деформирование сухого кварцевого песка. Если взять материальное волокно совпадающего с малой осью эллипса, то в процессе деформирования оно переходит в большую ось, затем опять в малую и т. д., т. е. его длина меняется в диапазоне $2b$, $2a$, где $a \geq b$ — полуоси эллипса. Поэтому в качестве обобщенной меры деформации можно принять величину $(a-b)/a$, либо эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$. Если $\varepsilon = 0$, то область

представляет собой круг, который вращается как жесткое целое относительно шаблонов. Если $\varepsilon \rightarrow 1$ при $b = \text{const}$, то $a \rightarrow f$. В пределе получается течение Куэтта между параллельными пластинами.

При малых ε течения этого типа исследовались в § 7. Здесь нас будет интересовать больший диапазон значений ε . Обозначим через α угол поворота шаблонов и будем считать его параметром нагружения. В процессе деформирования измерялись напряжения внутри образца, а также его высота (средняя плотность).

Если образец был получен свободной засыпкой струи, то при нагружении он необратимо уплотняется. Затем плотность образца выходит на асимптоту и больше уже не меняется. Если образец формировался так, что его исходная плотность была достаточно большой, то с началом нагружения он разрыхляется. Затем деформирование выходит на тот же самый стационарный режим. Иными словами, память об исходной структуре материала стирается и стационарное состояние от исходной упаковки частиц не зависит.

Будем теперь постепенно увеличивать значение ε . До значений $\varepsilon = 0,661$ реакция среды качественно не меняется. Затем происходит качественное изменение — дилатансия приобретает пульсирующий характер и стационарный режим сменяется новым, который характеризуется более или менее периодической реакцией. Период пульсации равен времени поворота шаблонов на угол примерно 40° .

Какова причина такого поведения? Обратимся к наблюдениям за кинематикой деформирования. При малых значениях ε поле скоростей носит гладкий характер. С увеличением ε интенсивность деформаций возрастает и в конце концов достигает таких значений, при которых начинается локализация. Это и является главной причиной формирования временных структур.

Рассмотрим механизм этого явления подробнее. Пусть установлена камера с эксцентриситетом $\varepsilon \geq \varepsilon^*$. Камера заполняется материалом и начинается нагружение. Некоторое время $0 < \alpha < \alpha^*$ материал деформируется без разрывов (допредельные деформации). Затем формируется система линий скольжения, для наблюдения за которыми на поверхность образца наносили маркирующие полосы из окрашенного материала (рис. 9.1). При повороте шаблона на угол $\alpha > \alpha^*$ полосы разбиваются на отдельные отрезки, между которыми образуются разрывы. Их величина — это и есть скачок касательной компоненты смещения. Впервые линии скольжения появляются на площадках, где отношение касательных и нормальных напряжений τ_n/σ_n максимально. В процессе деформирования линии скольжения вместе с материалом испытывают конвективный перенос и поворот,

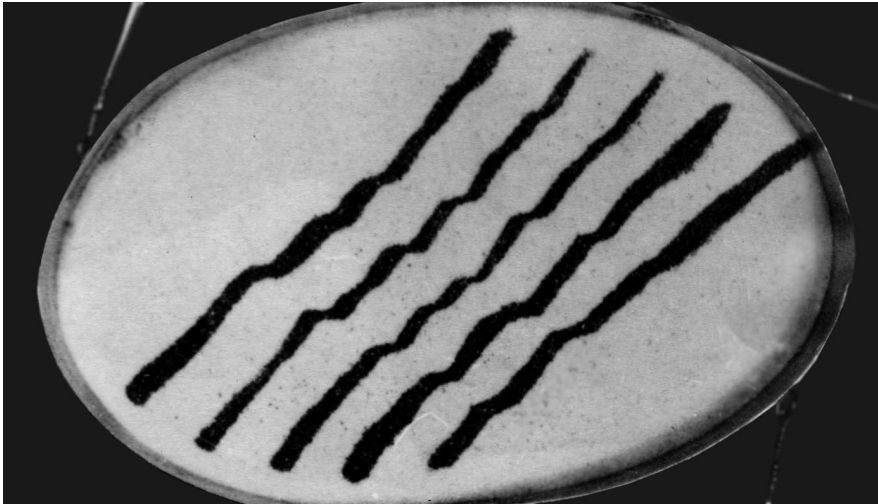


Рис. 9.1.

поэтому отношение напряжений τ_n/σ_n , действующих на линиях, уменьшается. Однако скольжение при этом не прекращается. Последнее связано с тем, что скольжение меняет свойство самого материала на линиях. Материал разупрочняется, и поэтому для продолжения скольжения требуются уже меньшие значения τ_n/σ_n . Таким образом, здесь действуют два фактора: уменьшение соотношений напряжений τ_n/σ_n , с одной стороны, и разрушение материала — с другой. При увеличении сдвига разупрочнение материала постепенно прекращается и его «прочность» (отношение τ_n/σ_n на линии) стабилизируется. Следовательно, первый фактор довольно быстро исчерпывает себя, второй фактор более существен, так как в данном классе нагрузений оси тензора напряжений непрерывно поворачиваются. Поэтому через определенный угол поворота отношение τ_n/σ_n уменьшается настолько, что скольжение все же прекращается.

Материал между линиями можно рассматривать как новый образец со специфическими границами. В силу заданных краевых условий этот образец будет сжиматься. Напряжения в нем достигают критической величины, и начинается новая локализация. Интересно отметить, что моменты прекращения скольжения на линиях одного семейства и начала скольжения на следующем семействе не совпадают. Промежуток между ними составляет примерно 10° , т. е. в это время деформирование образца происходит без локализации: идет подготовка нового семейства линий и материал разрыхляется. Затем все повторяется снова.

2. Перенос масс вокруг двух неподвижных центров. Рассмотренная система нагружения не позволяет реализовать деформацию сильно вытянутых областей. Для таких областей скручивающий момент, действующий на гибкую оболочку, возрастает, и оболочка теряет устойчивость. Для преодоления этой трудности изготовлен новый стенд, в котором в известной степени объединены идеи приборов однородного сдвига и сложного нагружения [2–5, 157]. Принципиальная схема (а) и общий вид стенда (б) показаны на рис. 9.2. Веду-

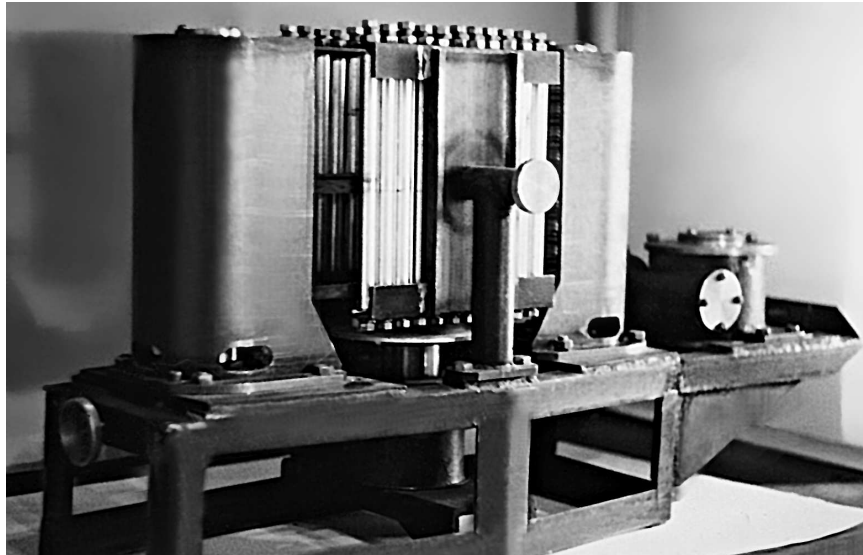
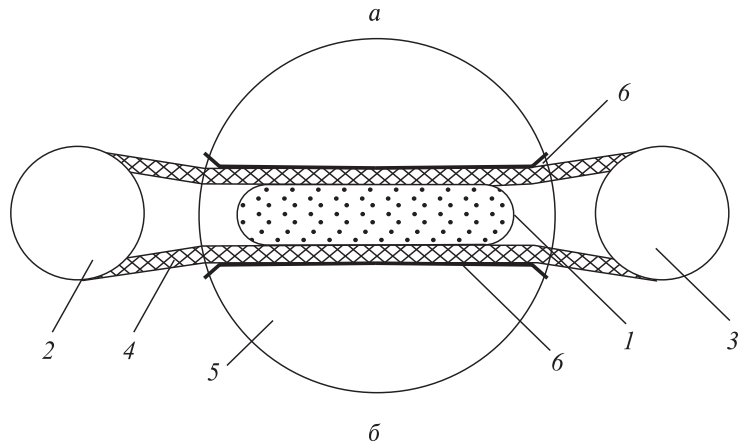


Рис. 9.2.

щий шкив 2 приводит во вращение, которое передается ведомому шкиву 3 с помощью нескольких одинаковых ременных передач 4, равномерно расположенных по высоте шкивов. Регулировка напряжения ремней осуществляется перемещением шкивов относительно друг друга. Внутри ременных передач на гладкую поверхность 5 устанавливается цилиндрическая камера 1 с исследуемым материалом. Боковая поверхность камеры изготовлена из упругого листового металла толщиной 0,3 мм, а дно представляет собой равномерно растянутую тонкую резину, приклеенную к боковой поверхности. Сжатие камеры задается путем регулирования расстояния между жесткими подвижными платформами 6. При движении ремней камера увлекалась ими за счет сил трения и происходило ее непрерывное деформирование так, что скорость всегда была направлена по касательной к границе.

Эксперименты показали, что в зависимости от параметров оболочки и крупности материала здесь также возможен целый ряд стационарных и нестационарных состояний материала.

Опыты проводились в следующем порядке. Оболочка помещалась между плитами и задавалось некоторое ее сжатие, которое в эксперименте оставалось фиксированным. После этого оболочка заполнялась материалом. Затем начиналось нагружение с постоянной скоростью (линейная скорость оболочки во всех опытах составляла $\sim 0,5$ см/с). Нагружение носило квазистатический характер.

Опыты показывают, что здесь каждое течение также проходит нестационарную стадию. Вначале при небольшом сдвиге процесс имеет характер допредельного деформирования. Затем происходит локализация и дальнейшее деформирование осуществляется уже в условиях локализации. Линии скольжения переносятся и в конце концов приобретают некоторую окончательную форму. В некоторых случаях эта форма стационарна, а в некоторых — квазистационарна, т. е. возникает еще одна форма, затем периодически другая, третья и т. д.

В зависимости от длины оболочки, степени сжатия и крупности материала, существует множество равновесных форм, что приводит к большому разнообразию картин течения. Здесь невозможно представить все стационарные состояния и переходы при различных формах линий скольжения, поэтому ограничимся характеристикой основных стационарных картин течения.

При описании всех опытов приводим следующие данные: 1) радиус оболочки, если ей в плане придать форму круга — R ; 2) малый диаметр оболочки (расстояние между плитами) — H ; 3) большой диаметр оболочки (наибольшее расстояние между точками горизонтального сечения оболочки) — L .

На рис. 9.3 приведена картина течения кварцевого песка частицами размером $0,25 \leq d \leq 0,45$ мм и следующими параметрами нагружения; мм: $R = 47$, $H = 75$, $L = 104$. Видно, что в стационарном состоянии сформированы линии скольжения, которые представляют собой спирали. Они идут от периферии к центру образца. Однако ближе к центру они становятся малозаметными и исчезают.

Отметим, что для течений данного типа характерно наличие эффекта дифференциального вращения среды. Это видно по искажению в процессе деформации первоначально прямолинейной маркерной полосы, нанесенной вдоль малого диаметра (на рисунке она окрашена темным цветом).

Будем теперь от опыта к опыту постепенно увеличивать степень сжатия деформируемой области. Для этого расстояние H между плитами будем постепенно уменьшать (сохраняя периметр оболочки в плане неизменным). Картина деформирования меняется непрерывно. Вначале она подобна изображенной на рис. 9.3. Затем происходит качественное изменение.

Линии формируются вначале как спирали, потом они замыкаются. При $R = 47$ мм, $H = 67$ мм, $L = 122$ мм, (материал прежний) имеет место первое качественное изменение. Оно выражается в том,

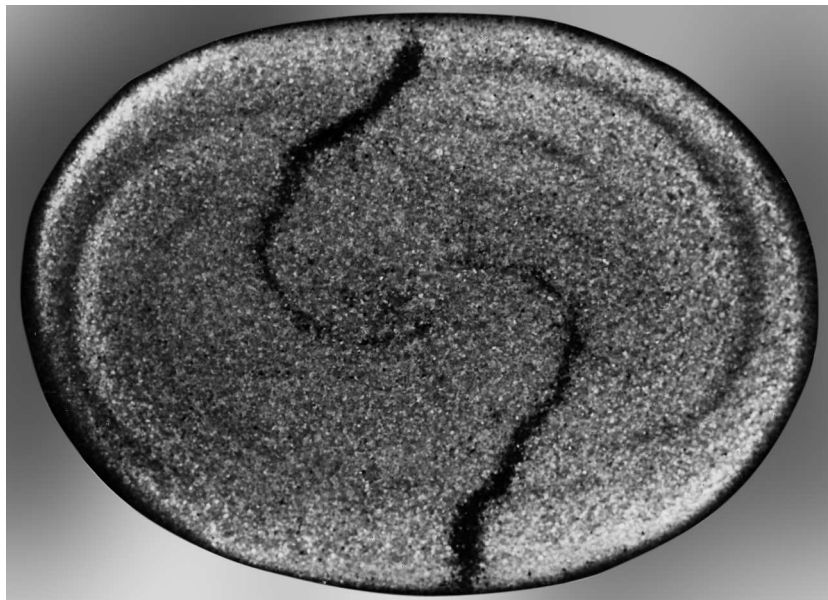


Рис. 9.3.

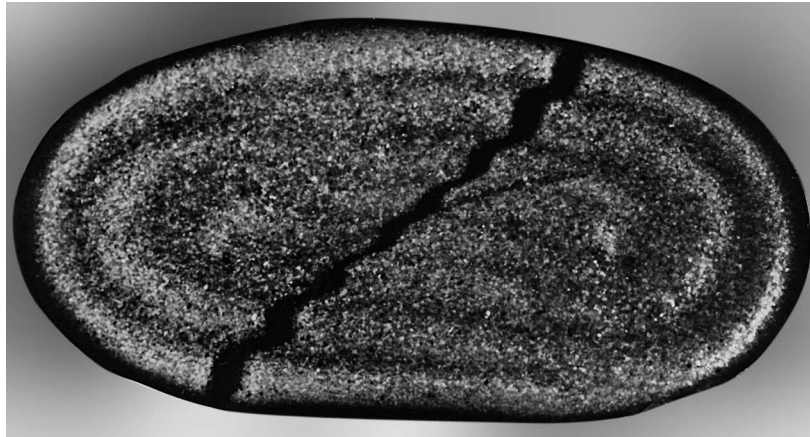


Рис. 9.4.

что формируются две внутренние области, ограниченные линиями скольжения, близкие по форме к лемнискате Бернулли.

Следующий качественный переход показан на рис. 9.4. Здесь $R = 47$ мм, $H = 60$ мм, $L = 117$ мм. Видна замкнутая внешняя линия скольжения. Начиная с этого момента, можно говорить о стационарных линиях, т. е. линиях, проскальзывание на которых может быть в принципе неограниченным. Это видно также на рис. 9.5 по искажению первоначально прямолинейной маркерной полосы, нанесенной вдоль малого диаметра.



Рис. 9.5.

Поскольку получить большее сжатие на этой оболочке не позволяет конструкция стенда, то в следующем опыте использовали оболочку с другим (большим) диаметром поперечного сечения. На рис. 9.6 приведена картина деформирования кварцевого песка. Здесь видны стационарные линии и внутренняя область, ограниченная кривой типа лемнискаты Бернулли, две неподвижные точки типа устойчивых фокусов и средняя неустойчивая точка. Здесь частицы все время смещаются либо в одну, либо в другую область. В целом форма стационарных линий скольжения в этом опыте близка к семейству овалов Кассини.

Таким образом:

1) в общем случае стационарные условия нагружения сыпучей среды порождают процесс деформирования, который является либо стационарным, либо близким к периодическому;

2) картина линий локализации зависит от формы контура деформируемой области. При малых сжатиях линии близки к логарифмическим спиральям. С увеличением сжатия линии замыкаются и принимают форму, близкую к овалам Кассини. Семейство овалов Кассини встречается в самых различных областях механики и физики (на фазовых портретах различных физических процессов, картинах линий равных потенциалов в электродинамике и т. д.). В настоящей работе это семейство во всем многообразии, включая лемнискату Бернулли, получено непосредственно в опытах с сыпучим материалом;

3) получены стационарные линии скольжения, на которых проскальзывания могут продолжаться сколь угодно долго.

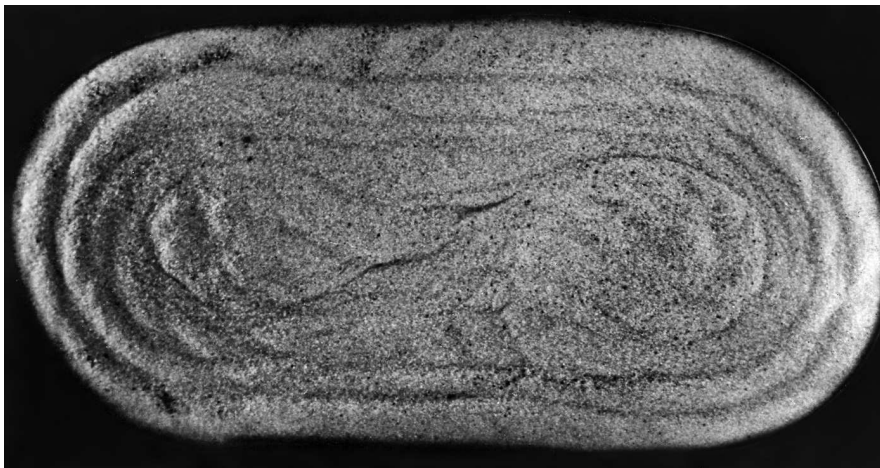


Рис. 9.6.

Это обстоятельство может быть использовано для исследования свойств различных геоматериалов в условиях неограниченных сдвигов и, в частности, при моделировании процессов сегрегации на разломах.

3. Роль внутреннего ядра. Из общих соображений непрерывности ясно, что при малых радиусах ядра картина локализации должна остаться прежней. Эксперименты подтверждают это. При увеличении диаметра цилиндра и эксцентриситета шаблонов, а также при уменьшении крупности материала число этих линий увеличивается, и они становятся менее закрученными.

В конце концов, происходит переход к новому механизму деформирования. Он характеризуется тем, что дополнительно к первому семейству линий скольжения нарезается второе семейство, которое имеет вид противоположно закрученных логарифмических спиралей (рис. 9.7). При этом материал вблизи цилиндра разбивается на блоки более или менее правильной формы. По мере поворота шаблонов происходит поочередное функционирование то одного, то другого семейства линий скольжения.

Переключение функционирования линий происходит через угол поворота шаблонов равный примерно 45° .

Следуя работам [38], рассмотрим вопрос о дрейфе внутреннего жесткого ядра. Вначале сделаем размерный анализ. Перечислим параметры, которые влияют на кинематику течения материала. Размерными величинами, характеризующими сыпучий материал, является масса образца M , средний размер частиц D и их плотность ρ . Существует также ряд безразмерных величин, характеризующих взаимодействие между частицами, а также между частицами и устройством нагружения. Это коэффициент внутреннего трения φ и коэффициенты трения по оболочке φ_1 и ядру φ_2 .

Область деформирования однозначно задается тремя параметрами. К ним можно отнести, например, R — радиус оболочки, если она имеет форму круга, малую полуось эллипса b и зазор $\Delta = b - r$, где r — радиус ядра.

Следует также учесть, что нагружение осуществляется вращением шаблонов с угловой скоростью Ω и процесс происходит в поле силы тяжести с ускорением свободного падения g .

Средняя угловая скорость ω ядра в стационарной стадии деформирования является некоторой функцией перечисленных выше параметров:

$$\omega = f(M, \rho, D, R, b, \Omega, g, \varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots).$$

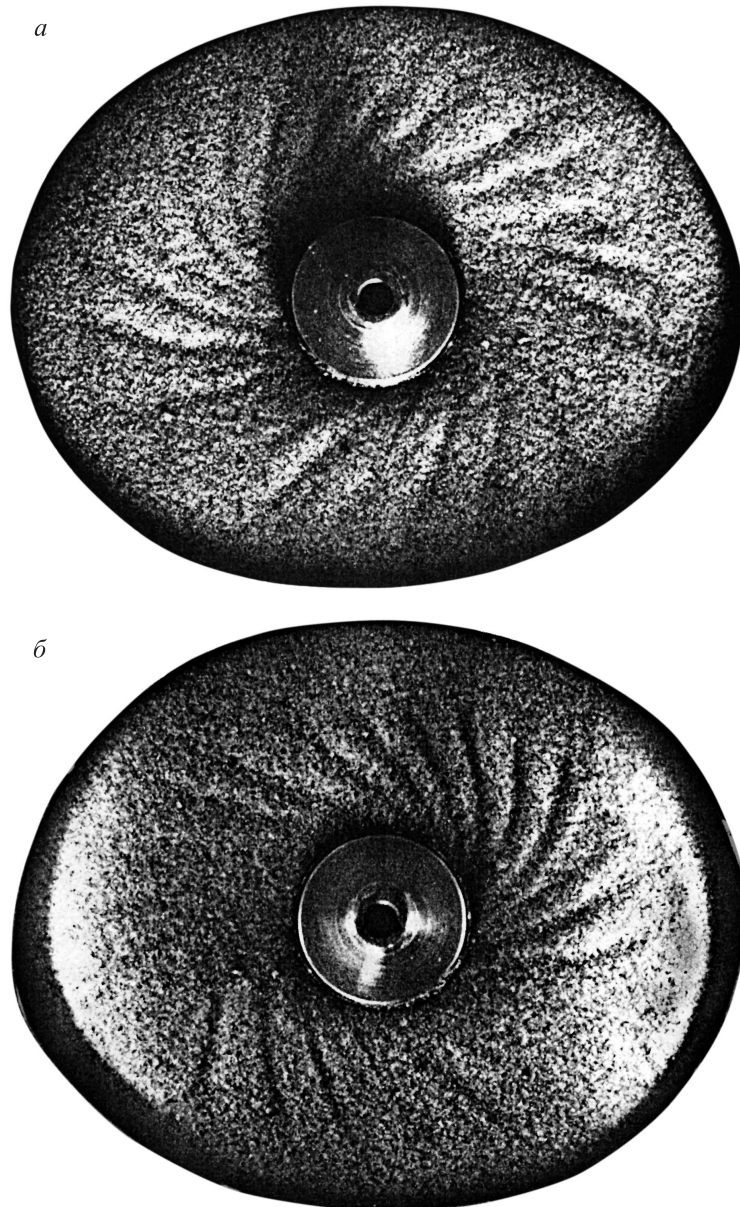


Рис. 9.7.

Из этих параметров можно составить следующие безразмерные комбинации:

$$\frac{M}{\rho R^3}; \frac{R\Omega^2}{g}; \frac{\Delta}{b}; \frac{R}{D}; \frac{b}{R},$$

которые в совокупности с φ , φ_1 , φ_2 являются основными параметрами рассматриваемого процесса.

Первый параметр в проведенных экспериментах не менялся, так как длина оболочки, масса образцов и плотность частиц материала от опыта к опыту оставались постоянными. Второй параметр определяет инерционные силы, действующие на образец в процессе нагружения. При угловой скорости вращения шаблонов, равной 1 об./с, его влияние достаточно мало и им можно пренебречь.

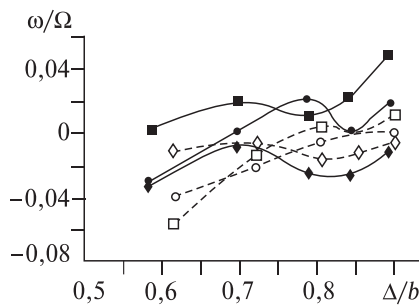
Таким образом, для скорости вращения ядра имеем:

$$\omega = \Omega \cdot F\left(\frac{\Delta}{b}, \frac{R}{D}, \frac{b}{R}, \varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots\right).$$

В соответствии с этим выражением экспериментально исследовалась зависимость угловой скорости вращения ядра от его диаметра и крупности материала при различных значениях эксцентриситета деформируемой области.

В [33] приведены графики относительной скорости вращения ядра в зависимости от величины отношений $\frac{\Delta}{b}$ для разных значений крупности материала и различных степеней сжатия эллипса.

Главный результат состоит в том, что в зависимости от параметров материала и условий нагружения возможен как западный,



Средний размер частиц, м:
 ◆ 0,084 ■ 0,179 ● 0,355

Рис. 9.8.

так и восточный дрейф ядра. Для достаточно хрупких частиц наблюдается исключительно восточный дрейф ядра (рис. 9.8. Зависимость ξ от радиуса ядра r : для резиновой крошки $2 \times 2 \times 2$ мм — 1; пластизольных шариков диаметром 4 мм — 2; мраморной крошки $3 \div 7$ мм — 3; кварцевого песка $0,3 \div 0,25$ мм, длина оболочки 365 мм; $k = 0,84$) [38]. Детально вопросы локализации деформаций рассмотрены в [259].

4. Ячеистые структуры. Выше рассматривалась среда без сцепления. Наличие сцепления вносит в картины деформирования качественно новые элементы. В качестве базового будем рассматривать плоское эллиптическое течение. В качестве потенциального носителя структуры выберем упруго-вязко-пластическую среду (кварцевый песок, насыщенный вязкой жидкостью). Такая среда обладает сцеплением и потому в ней возможны как линии скольжения, так и трещины нормального разрыва. Разрушение происходит, если деформация достигает определенного критического значения. Следовательно, если эксцентриситет эллипса взять достаточно большим, то однородность неизбежно нарушается и можно ожидать, что в среде возникнет определенная упорядоченная структура.

Опыты ставились в следующей последовательности. Сначала в камеру помещался образец из сухого песка, и проводилось нагружение до перехода упаковки частиц в стационарное состояние. При этом коэффициент сжатия эллипса выбирался таким, чтобы структур не возникало ($K = 0,91$; $a = 60,8$ мм; $b = 55,3$ мм). Использовался кварцевый песок с размером частиц 0,3 мм, вес образца — 545 г, в стационарном состоянии объемы образца и пор равны 320 см^3 и $v_n = 115 \text{ см}^3$, пористость — 36 %.

После достижения стационарного состояния нагружение прекращалось и в образец вводилась жидкость. Во всех опытах ее объем $V_{\text{ж}}$ превосходил объем пор, т. е. коэффициент насыщения $m_v = V_{\text{ж}}/V_{\text{п}}$ в исходном состоянии был больше 1. Поэтому перед деформированием на поверхности образца всегда оставался слой избыточной жидкости. Затем начиналось нагружение уже водонасыщенного образца. При повороте внешнего цилиндра упаковка частиц испытывает положительную дилатансию. Поэтому слой жидкости с поверхности образца всасывается в увеличенный объем пор. При достижении критических деформаций в образце формируется система параллельных трещин. Вследствие конвективного поворота трещины уходят из-под нагрузки и формируется новая система трещин. В этом отношении указанный процесс похож на деформирование сухого песка. Отличие состоит в том, что в сухом песке трещины носят только сдвиговый характер и залечиваются. Здесь же образуются отдельные устойчивые ячейки. При повороте углы их сглаживаются.

Общая картина деформирования зависит от вязкости жидкости. На рис. 9.9 показана структура, полученная на смеси кварцевого песка и глицерина с водой (1 : 1). Ячеистая структура, представленная на рисунке, сформировалась в течение 100 об. Она является устойчивой и при дальнейшем деформировании практически не



Рис. 9.9.

меняется. Ячейки медленно вращаются и взаимодействуют между собой, так что в целом кинематика является достаточно интересной.

Подведем итог. Если в экспериментах, моделирующих приливное деформирование, значительно увеличить высоту приливной волны, то помимо основного эффекта — направленного переноса масс, обнаруживается ряд новых эффектов, обусловленных появлением в теле различных регулярных структур, в том числе структур, связанных с линиями скольжения в виде лемнискаты Бернулли, овалов Кассини (перенос масс вокруг двух неподвижных центров) и т. д.

§ 10. Однородная вязкая жидкость

В § 4 было показано, что если на границе эллиптической области задать кеплеровское распределение скоростей, то распределение скоростей внутри области будет всегда линейным. Причем этот факт от реологии среды не зависит. Отклонение граничных условий от кеплеровского типа приводит к нелинейности поля скоростей и, следовательно, к зависимости его от реологии среды. Основные черты нелинейного поля можно проследить на модели ньютоновской вязкой жидкости. Задача сводится к решению стационарных уравнений Навье — Стокса

$$\nu \Delta u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\nu \Delta v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

внутри области $x^2/(1+m)^2 + y^2/(1-m)^2 \leq 1$ при условии, что на границе заданы обе компоненты скорости $\bar{v} = u, v$, удовлетворяющие (31) § 4, где $v_0 = 1$. Здесь использованы стандартные обозначения: x, y — декартовы координаты; ν — вязкость; ρ, p — плотность и давление; Δ — оператор Лапласа. Ограничимся случаем большой вязкости ($Re \ll 1$) и малых эксцентриситетов ($m \ll 1$). Методом малого параметра система сводится к последовательности бигармонических уравнений относительно членов разложения функции тока. Используя схему [249], получим:

$$u = -y + m(-3y + 2y^3) + m^2 \left(\frac{7}{4}y + \frac{7}{2}y^3 - \frac{9}{4}y^5 - \right. \tag{2}$$

$$\left. - \frac{21}{2}x^2y + \frac{15}{2}x^2y^3 + \frac{15}{4}x^4y \right) + m^3 \left(\frac{87}{8}y - \frac{57}{4}y^3 - \frac{33}{8}y^5 + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{5}{2}y^7 + \frac{165}{4}x^2y - \frac{105}{4}x^2y^5 + \frac{35}{4}x^6y \Big) + \\
 & + \frac{\text{Rem}}{16} (x - 2x^3 + x^5 - 6xy^2 + 5xy^4 + 6x^3y^2), \\
 v = & x + m(-3x + 2x^3) + m^2 \left(-\frac{7}{4}x - \frac{7}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^5 + \right. \\
 & + \frac{21}{2}xy^2 - \frac{15}{2}x^3y^2 - \frac{15}{4}xy^4 \Big) + m^3 \left(\frac{87}{8}x - \frac{57}{4}x^3 - \frac{33}{8}x^5 + \right. \\
 & + \frac{5}{2}x^7 + \frac{165}{4}x^3y^2 - \frac{165}{4}xy^4 - \frac{105}{4}x^3y^2 + \frac{35}{4}xy^6 \Big) + \\
 & + \frac{\text{Rem}}{16} (-y + 2y^3 - y^5 + 6x^2y - 5x^4y - 6x^2y^3).
 \end{aligned}$$

Перенос частиц и характер деформирования материальных объемов определялись численным интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx/dt = u(x, y), \quad dy/dt = v(x, e). \quad (3)$$

Расчеты показали, что все частицы движутся вокруг центра по замкнутым траекториям. Однако периоды обращения на различных траекториях различны. На рис. 10.1, 10.2 показаны траектории и положения частиц, находящиеся вначале на большой полуоси эллипса (a, b при $m = 0.1; 0.2$). Различие в периодах приводит к тому, что внутренние деформации тела с течением времени неограниченно растут (на рис. 10.3 представлено изменение формы квадратного

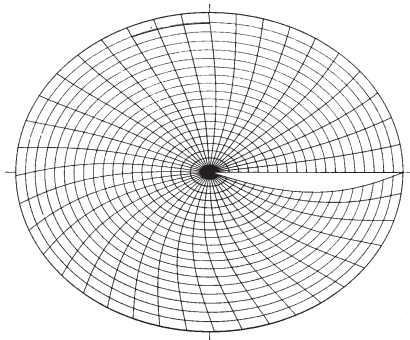


Рис. 10.1.

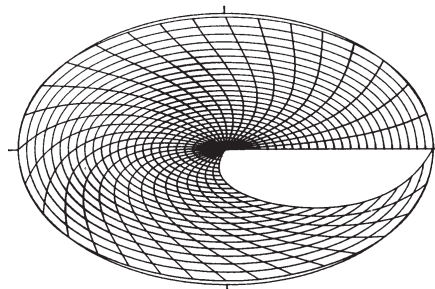


Рис. 10.2.

элемента из положения 0 в положение 1, 2, 3). Причем эти изменения происходят в условиях, когда внешние деформации малы (порядка m). Например, области, первоначально близкие к полукругу, в процессе деформирования приобретают спиралевидную форму (рис. 10.4; $m = 0,1, 16$ об.). С увеличением числа циклов они все больше закручиваются вокруг центра и в пределе вырождаются в две бесконечно тонкие и длинные спирали, которые вложены друг в друга так, что, последовательно чередуясь, полностью заполняют исходную двумерную область.

Для вязких жидкостей роль малых параметров m и Re в развитии течения различна: параметр m входит в решение (2) без коэффициента Re , а Re фигурирует только в произведении с m . Поэтому роль последнего в формировании «остаточных» смещений на фоне параметров m незначительна. Более того, если перейти к пределу $Re \rightarrow 0$ ($v \rightarrow f$), то кинематика течения по сравнению с $Re \ll 1$ практически не изменится даже количественно.

Итак, в системе координат (2) эффект выглядит как дифференциальное вращение материальных элементов вокруг центра. Лабораторные координаты соответствуют точке зрения наблюдателя, который связан с фиксированной точкой границы области. С этих позиций каждая точка границы описывает замкнутую петлю. Для упругого тела отсюда следует, что и все внутренние (см. рис. 7.1) точки также будут описывать замкнутые петли. Если же допустить наличие неупругой реакции, то за полный цикл на границе внутренняя точка опишет почти замкнутую петлю, но к первоначальному положению тем не менее не вернется. С увеличением числа циклов эффект будет накапливаться и точка начнет движение по «глобальной» траектории, параметры которой определяются расстоянием от центра.

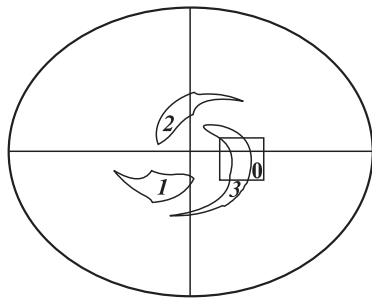


Рис. 10.3.

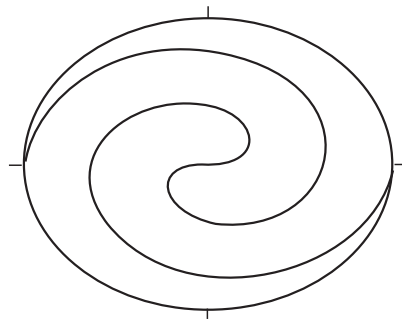


Рис. 10.4.

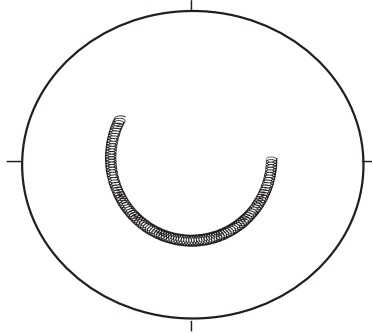


Рис. 10.5.

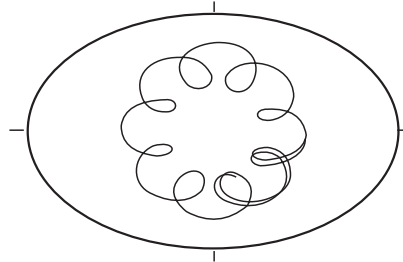


Рис. 10.6.

Интересно проследить этот перенос численно. На рис. 10.5 ($m = 0,05$) изображена траектория движения фиксированной точки при увеличении числа оборотов в указанных координатах (показано также положение границы после целого числа циклов). Увеличение эксцентриситета приведет к тому, что за один оборот точки получают большие остаточные смещения, т. е. траектории все больше отличаются от «почти замкнутых». В своем «глобальном» движении вокруг центра точки за определенное время совершат полный оборот. В общем случае это время не кратно времени совершения одного цикла, поэтому движение точки на следующем витке происходит по траектории, несколько отличной от предыдущей (рис. 10.6, $m = 0,2$) и т. д.

Таким образом, в системе координат (2) эффект выглядит как направленный перенос масс. Следует отметить, что в указанных координатах (особенно при малых эксцентриситетах эллипса) предложенный способ нагружения можно рассматривать как задание на поверхности тела определенного волнового движения.

§ 11. Неоднородная вязкая жидкость. Сыпучие среды

1. Неоднородная вязкая жидкость. В качестве первого шага по усложнению модели, следуя работе [10], учтем неоднородность распределения вязких свойств ($\mu = \mu(x, y)$). Это связано с тем, что реальные процессы происходят в условиях ярко выраженной слоистости материала, которая присутствует как на глобальном уровне, так и на уровне меньших масштабов.

При достаточно большой вязкости можно пренебречь инерционными силами. При отсутствии массовых сил уравнения движения

и уравнения состояния вязкой несжимаемой жидкости в плоском случае имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь, как обычно, σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} — компоненты тензора напряжений, u, v — компоненты вектора скорости, p — давление, μ — коэффициент вязкости.

После преобразования к безразмерным величинам запишем уравнения (1) в переменных $\Psi - \Omega$ (функция тока — вихрь):

$$\begin{aligned} \Delta \Omega + A_1 \Omega_x + A_2 \Omega_y + 2A_3 \Psi_{xy} + A_4 (\Psi_{yy} - \Psi_{xx}) = 0, \\ \Delta \Psi + \Omega = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь используются общепринятые обозначения производных по x и y , Δ — оператор Лапласа, функция тока Ψ определяется из уравнений:

$$\Psi_y = u, \quad \Psi_x = -v,$$

а коэффициенты имеют вид

$$A_1 = \frac{2\mu_x}{\mu}, \quad A_2 = \frac{2\mu_y}{\mu}, \quad A_3 = \frac{2\mu_{xy}}{\mu}, \quad A_4 = \frac{\mu_{xx} - \mu_{yy}}{\mu}.$$

Единицами масштаба (эталонными величинами) длин, напряжений и давления, скоростей, вязкости являются соответствующие данной задаче характерные величины. Будем считать, что процесс деформирования осуществляется в эллиптической области, на границе которой вектор скорости направлен по касательной и его величина выбрана в качестве характерной скорости. В качестве характерного линейного размера выберем полуось эллипса, в качестве характерной вязкости — вязкость на границе области.

Не ограничивая общности, можно считать, что на границе заданы следующие условия:

$$\Psi_n = -1, \quad \Psi_r = 0. \quad (3)$$

Здесь Ψ_n, Ψ_r — производные вдоль нормали и касательной к границе. Реальная приливная деформация Земли, как уже отмечалось, весьма мала. Поэтому если в расчетах значительно увеличить приливную деформацию, то увеличится и остаточное смещение, т. е. при численном моделировании остаточное смещение накопится за

меньшее число циклов. Для того чтобы проверить качественное влияние переменной вязкости, в дальнейшем выберем большой эксцентриситет эллипса.

Для получения конечномерного аналога системы (2) используется метод конечных элементов [260], а исследуемая эллиптическая область разбивается на треугольные конечные элементы с линейными функциями формы (рис. 11.1). Картина смещения материальных частиц строится при помощи численного решения дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = v(x, y),$$

где t — время.

В исследуемом случае задание функции тока и вихря скорости возможно лишь в табличном виде (в точках сетки), поэтому распределение скоростей определится в точках сетки, одно из семейств линий которой совпадает с линиями тока. Построение сетки конечных элементов, обладающей указанным свойством, осуществляется на основе решения задачи на произвольно выбранной сетке, а для аппроксимации линий сетки используются сплайн-функции третьего порядка.

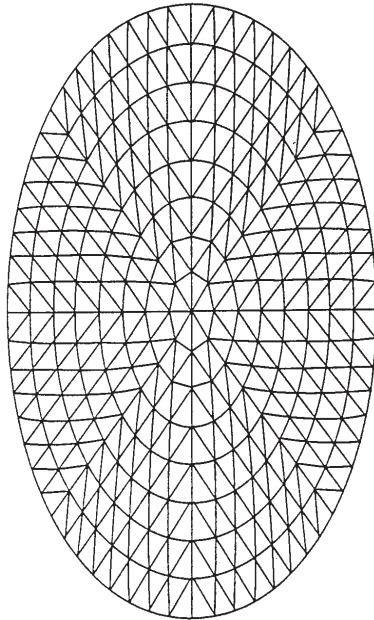


Рис. 11.1.

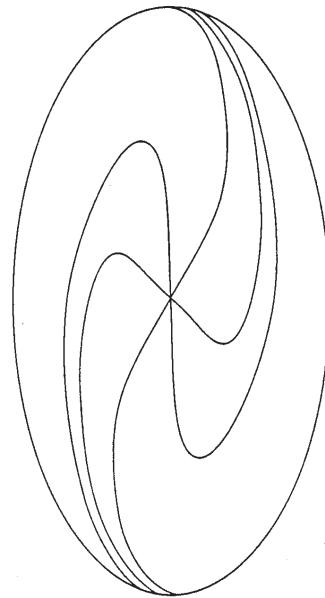


Рис. 11.2.

Расчеты производились по предложенной схеме для различных законов изменения вязкости и различных эксцентриситетов эллипса. Как и следовало ожидать, увеличение вязкости материала при приближении к центру приводит к уменьшению скоростей частиц, т. е. к большему запаздыванию. На рис. 11.2 показано положение частиц, первоначально находившихся на большой оси эллипса, при различных циклах нагружения в случае изменения вязкости по закону:

$$\mu(r) = \exp(a(r - 1)),$$

здесь $r = \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{b^2}}$, $b = 0,54$ — малая полуось эллипса, $a = -1$.

Хорошо заметно, что при большом числе циклов срединный участок почти прямолинеен, т. е. вращение внутренней области становится более близким к вращению абсолютно твердого тела.

2. Гипопластическая модель. Задача о приливном деформировании рассматривалась также в рамках гипопластической модели Коллимбаса [261–263]. Изначально модель была предназначена для описания упруго-пластических свойств сыпучих сред. Отличительная ее особенность состоит в том, что в рамках одних и тех же определяющих уравнений описываются как активное нагружение, так и разгрузка. Поэтому уравнения являются нелинейными даже относительно приращений напряжений и скоростей деформации. Характер нагружения в рассматриваемой задаче таков, что на границе задано стационарное поле скоростей. Эксперименты показывают, что на первой стадии деформирование неупругих образцов носит неустановившийся характер, а затем переходит в стационарную стадию. Расчеты проводились с учетом данного обстоятельства. Сначала решалась нестационарная задача об аффинном деформировании (на границе эллиптической области задавалось кеплеровское распределение скоростей) [28, 34]. Через полтора оборота распределение напряжений и скоростей выходило на стационарный режим. В рассматриваемой задаче данное распределение напряжений выбиралось как начальное. Оно играло роль первого приближения. Далее решалась задача с краевым условием (31) § 4 и определялись неоднородные поля напряжений и скоростей деформаций. Перемещения определялись численным интегрированием поля скоростей. Расчеты показали наличие эффекта направленного переноса масс. Качественно результаты получились такими же, как и для вязкой жидкости. Аналогично проводились расчеты и для жесткого внутреннего ядра. Показано, что ядро вовлекается во вращение окружающей средой, причем дрейф его относительно поверх-

ности тела является западным. Конкретные данные и рисунки приведены в статьях [9, 264].

3. Модель сыпучей среды [3–5]. Данные модели построены на основе гипотез о микродеформировании сыпучей среды. Действительная случайная упаковка частиц заменяется эффективной регулярной. Проводится осреднение, и в результате строится модель с внутренними переменными. Задача о приливном деформировании решается методом малого параметра. Модель адекватно описывает эффект направленного переноса масс. Результаты близки к описанному выше решению для вязких жидкостей.

§ 12. Динамическая модель

1. Постановка задачи. Выше рассматривалась кинематическая постановка задачи, когда на границе тела задаются скорости, соответствующие движению приливной волны. При этом собственно приливные силы из уравнений исключаются. Рассмотрим теперь «силовую» постановку задачи, когда приливные силы учитываются явно и учитывается также поворот тела относительно направлений действия приливных сил.

Пусть тело находится в естественном состоянии: смещения, скорости и напряжения равны нулю. В начальный момент $t = 0$ «включаются» приливные силы. С их направлениями свяжем координаты Ox . Предположим временно, что тело относительно осей Oxy не поворачивается. Будем считать, что в этом случае приливные силы вызовут некоторое течение со скоростями

$$u = \frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad v = \frac{dy}{dt} = g(x, y). \quad (1)$$

Здесь $x(t)$, $y(t)$ — координаты материальной частицы. Течение (1) назовем базовым.

Свяжем с телом систему координат $Ox'y'$ и «разрешим» вращение. Представим его как дискретную последовательность отдельных положений тела. Пусть в промежутке времени от 0 до Δt тело неподвижно и под действием массовых сил течет по закону (1). Затем оно скачком поворачивается на угол $\Omega \Delta t$, где Ω — некоторая постоянная. (Или лучше считать, что тело остается неподвижным, а скачком на угол $-\Omega \Delta t$ меняется направление массовых сил.) При $t \in (\Delta t, 2\Delta t)$ тело опять неподвижно. На прежние деформации накладываются новые, которым соответствует та же скорость (1), и т. д. Осуществляя, как и в § 4, суммирование смещений в $Ox'y'$, затем

переход к пределу $\Delta t \rightarrow 0$ и координатам Oxy , получим следующий результат:

$$\begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} = f(x, y) - \Omega y, \\ v &= \frac{dy}{dt} = g(x, y) + \Omega x. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь по-прежнему u, v — компоненты скорости в координатах Oxy . Таким образом, вращение тела приводит к появлению аддитивной составляющей вектора скорости. Ее роль в переносе материальных частиц весьма существенна. В частном случае, когда базовое течение было однородным, роль поворота рассмотрена в § 4.

Перейдем теперь к конкретным моделям. Предположим, что среда является вязкой, однородной и несжимаемой. Причем вязкость настолько велика, что инерционными силами можно пренебречь. В этом случае уравнения Навье — Стокса аналогичны уравнениям линейно-упругого тела [113], поэтому для решения задач можно использовать методы [253].

При оценке массовых сил ограничимся только приливным потенциалом [143]. Тогда компоненты сил равны

$$X = 2\rho\Gamma x, \quad Y = -\rho\Gamma y,$$

где ρ — плотность, $\Gamma = G/MD^3$ (G — гравитационная постоянная; M — масса, которая вызывает прилив; D — расстояние до ее центра). Примем $D = \text{const}$ и, следовательно, $\Gamma = \text{const}$.

Займемся теперь уравнениями Навье — Стокса. Вначале перейдем к безразмерным переменным (отмечены чертой сверху). Обозначим через R масштаб длины: $x = R\bar{x}$, $y = R\bar{y}$. Тогда в качестве масштаба напряжений необходимо взять величину $\rho\Gamma R^2$: $\sigma_{xx} = \rho\Gamma R^2\bar{\sigma}_{xx}$, $p = \rho\Gamma R^2\bar{p}$ и т. д. Здесь, как обычно, σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} — компоненты напряжений, p — давление. Для определения масштаба скорости необходимо ввести характерное время. Имея в виду использование результата (2), за единицу времени примем Ω^{-1} . Тогда $u = R\Omega\bar{u}$, $v = R\Omega\bar{v}$. Уравнения вязкого течения имеют вид:

$$\sigma_{xx} = -\rho + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{yy} = -\rho + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Видно, что для коэффициента вязкости естественен следующий масштаб: $\mu = \rho\Gamma R^2\Omega^{-1}\bar{\mu}$. В дальнейшем безразмерные переменные будем обозначать так же, как и размерные.

Уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + 2x = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - y = 0, \quad (4)$$

совместно с (3) образуют замкнутую безразмерную систему относительно скоростей u , v , напряжений σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} и давления p . Перейдем к задачам.

2. Деформирование без внутреннего ядра. Введем полярные координаты ρ и ϑ . Луч $\vartheta = 0$ направим вдоль оси Ox . Пусть исходная область имеет форму круга $x^2 + y^2 \leq 1$. Ее граница от напряжений свободна: $\sigma_{rr} = 0$, $\sigma_{r\vartheta} = 0$. Тогда приливные силы вызывают базовое течение:

$$8\mu u = -x^2 - 3xy^2 + 3x, \quad 8\mu v = y^3 + 3x^2y - 3y, \\ \sigma_{xx} = 1 - x^2 - y^2, \quad \sigma_{yy} = -0,5\sigma_{xx}, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad p = -0,25\sigma_{xx}. \quad (5)$$

Формула (5) дает точное решение системы (3), (4) и удовлетворяет поставленным краевым условиям.

В безразмерных переменных правила перехода от (1) к (2) сводятся к следующему:

$$u = f(x, y) - y, \quad v = f(x, y) + x. \quad (6)$$

Отсюда для решения (5):

$$\frac{dx}{dt} = -y + \lambda(-x^3 - 3xy^2 + 3x), \quad \frac{dy}{dt} = x + \lambda(y^3 + 3x^2y - 3y), \quad (7)$$

где коэффициент λ , выраженный через размерные параметры, имеет вид

$$\lambda = \frac{\rho \Gamma R^2}{8\mu \Omega}. \quad (8)$$

Как выглядит течение (7)? Этот вопрос удобно исследовать в полярных координатах. Здесь перенос вещества характеризуется следующим образом:

$$\frac{dr}{dt} = \lambda F(r) \cos 2\vartheta, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = 1 + 2G(r) \sin 2\vartheta, \quad (9)$$

$$F(r) = r(3 - r^2), \quad G(r) = -(3 - 2r^2). \quad (10)$$

Как правило, приливные силы невелики, так что $\lambda \ll 1$, поэтому можно использовать метод малого параметра. Разложим решение по λ :

$$r(t, \lambda) = r_0(t) + \lambda r_1(t) + \lambda^2 r_2(t) + \dots, \quad \vartheta(t, \lambda) = \vartheta_0(t) + \lambda \vartheta_1(t) + \lambda^2 \vartheta_2(t) + \dots$$

Сделаем подстановку в (9) и получим цепочку уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dr_0}{dt} = 0, \quad \frac{d\vartheta_0}{dt} = 1, \quad \frac{dr_1}{dt} = F(r_0)\cos 2\vartheta_0, \quad \frac{d\vartheta_1}{dt} = G(r_0)\sin 2\vartheta_0, \\ \frac{dr_2}{dt} = F'(r_0)\cos 2\vartheta_0 r_1(t) - 2F(r_0)\sin 2\vartheta_0 \vartheta_1(t), \\ \frac{d\vartheta_2}{dt} = G'(r_0)\sin 2\vartheta_0 r_1(t) + 2G(r_0)\cos 2\vartheta_0 \vartheta_1(t), \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Для наших целей вполне достаточно второго приближения. Пусть начальные условия имеют вид:

$$r(0, \lambda) = l, \quad \vartheta(0, \lambda) = 0, \quad r_0(0) = l, \quad \vartheta_0(0) = 0, \quad r_1(0) = 0, \quad \vartheta_1(0) = 0, \quad r_2(0) = 0, \\ \vartheta_2(0) = 0, \quad \dots, \quad 0 \leq l \leq 1,$$

т. е. рассмотрим перенос материальных частиц, расположенных на луче $\vartheta = 0$. Все уравнения интегрируются и приводят к следующему результату:

$$\begin{aligned} r_0(t) = l, \quad \vartheta_0(t) = t, \quad r_1(t) = F(l)\sin 2t/2, \quad \vartheta_1(t) = G(l)\sin^2 t, \\ r_2(t) = -F(l)G(l)\sin^2 t + F(l)[2G(l) + F'(l)]\frac{\sin^2 2t}{8}, \\ \vartheta_2(t) = [G'(l)F(l) - 2G^2(l)]\frac{t}{4} + G^2(l)\frac{\sin 2t}{2} - [G'(l)F(l) + 2G^2(l)]\frac{\sin 4t}{16}. \end{aligned} \quad (12)$$

Проследим судьбу двух материальных частиц $l = l_1, l_2$. Решение показывает, что эти частицы обращаются вокруг центра по замкнутым траекториям. В пределах одного оборота различие в их полярных углах возрастает на порядок λ и затем уменьшается до порядка λ^2 — налицо эффект дифференциального вращения. Главную роль играет первое слагаемое в формуле (12) для $\vartheta_2(t)$. Оно пропорционально времени, и поэтому с увеличением числа циклов даже близкие точки l_1, l_2 будут все больше расходиться. Это означает, что процесс идет с накоплением деформаций.

Под действием приливных сил меняется конфигурация внешней границы. При малых λ ее форма близка к эллиптической. Оси эллипса составляют с направлением Ox угол 45° . Последнее видно и непосредственно из (9): от угла $\vartheta = -45^\circ$ до $+45^\circ$ значение $r(t)$ возрастает, затем до $\vartheta = 135^\circ$ убывает и т. д. Таким образом, чисто вязкая модель без учета самогравитации дает сдвиг по фазе между

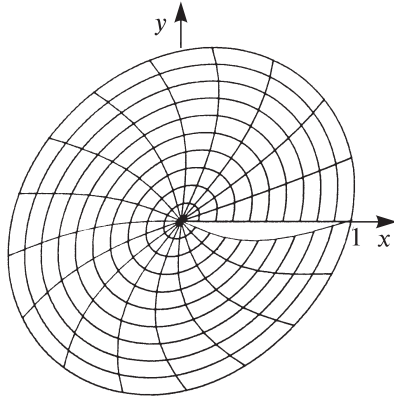


Рис. 12.1.

приливными волной и силой в 45° . На рис. 12.1 показаны траектории и положения частиц $0 \leq l \leq 1$ за один оборот. (Получены численным интегрированием (9) при $\lambda = 0,1$.)

Итак, безразмерное поле скоростей характеризуется параметром λ . Этот параметр определяет конфигурацию внешней границы и, следовательно, высоту приливной волны. Если высота известна, то можно найти величину λ , а значит, и эффективную вязкость тела.

Ситуация в рамках данной схемы следующая. Пусть задано некоторое тело. В начальный момент на него начинают действовать приливные силы. Как отмечалось, эти силы стремятся растянуть тело в одном направлении и сжать его в ортогональных направлениях. Поэтому если вращения нет ($\Omega = 0$, $\lambda = f$), то вследствие вязкой реологии тело будет вытягиваться в бесконечно длинную и тонкую иглу (базовое течение). Это связано с тем, что стабилизирующие механизмы типа самогравитации и внешних упругих оболочек здесь не учитываются. Единственный стабилизирующий механизм, который учитывается в модели, — это собственное вращение тела. Действует этот механизм следующим образом. Тело в направлении возмущающей массы вытягивается. Затем, вращаясь, оно «подставляет» растяжению новую сторону, которая до этого сжималась, и т. д. В результате устанавливается некоторая стабильная форма. Ее параметры зависят от соотношения эффективной вязкости и скорости вращения. Поскольку скорость известна, то можно определить вязкость.

Сделаем оценку для тела с параметрами Земли. При малых λ высота прилива равна λR . Если для последней принять величину 0,5 м, то формула (8) дает значения вязкости порядка 10^{16} П. Данная оценка не относится к Земле, но только к модели, в которой два важнейших фактора стабилизации формы тела (самогравитация и внешняя упругая оболочка) — исключены.

3. Деформирование с внутренним жестким ядром. Предположим, что в центре тела находится жесткое ядро радиуса L . Для определения базового течения поставим следующую задачу: найти поле скоростей, которое удовлетворяет уравнениям (3), (4), условиям прилипания на границе с ядром ($u = 0$, $v = 0$ при $r = L$) и условиям отсут-

ствия напряжений на внешней границе ($\sigma_{rr} = 0, \sigma_{r\theta} = 0$ при $r = 1$). Решение этой задачи с учетом формул (6) можно представить в виде (9). Здесь функции F и G имеют вид:

$$F(r) = -Ar - Br^3 + \frac{C}{r} + \frac{D}{r^3},$$

$$G(r) = A + 2Br^2 + \frac{D}{r^4}, \quad (13)$$

где $A = \frac{-12L^4 + 6L^2 - 6L^{-2}}{\Delta}$, $B = \frac{6L^2 - 4 + 2L^{-2}}{\Delta}$, $C = \frac{-6L^6 + 6L^2 - 12}{\Delta}$,

$$D = \frac{2L^6 - 4L^4 + 6L^2}{\Delta}, \quad \Delta = 2(L^6 + 4L^4 - 6L^2 + L^{-2} + 4).$$

Результаты (11), (12) не опирались на конкретный вид функций $F(r)$, $G(r)$, поэтому они имеют место и в случае (13). Основные выводы также сохраняются: течение (9), (13) приводит к эффекту направленного переноса, деформации со временем накапливаются (рис. 12.2, $\lambda = 0,2$; $L = 0,4$). При $L \rightarrow 0$ формулы (13) переходят в (10).

Перейдем теперь к случаю, когда тело имеет внешнюю упругую оболочку. Оболочка играет роль независимого стабилизирующего фактора: даже при отсутствии вращения форма тела сохраняется неизменной. Рассмотренные выше модели можно назвать динамическими в том смысле, что в них причиной течения выступают массовые силы. При этом граничные условия также имеют силовой характер. Попытки учета внешних оболочек приводят к другому классу моделей, которые можно назвать кинематическими. Эти модели опираются на следующие свойства уравнений Навье — Стокса. Подставим выражения для напряжений (3) в уравнения (4) и затем исключим давление. В результате получим замкнутую систему относительно скоростей. Если ротор массовых сил равен нулю (у нас как раз такой случай), то система будет однородной. Это значит, что информация о массовых силах из уравнений исчезает. Предположим теперь, что найдено решение ис-

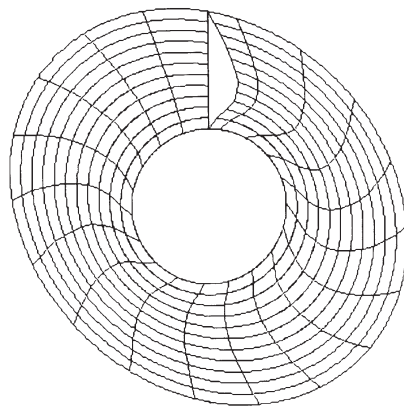


Рис. 12.2.

ходной «динамической задачи», т. е. решены уравнения с массовыми силами и какими-то силовыми условиями на границе. Этому решению соответствуют определенные конфигурации границы и распределение скоростей на ней. Если теперь эту информацию взять за исходную и построить решение однородной системы для скоростей, то, естественно, придем к тому же самому полю скоростей. Подобные кинематические постановки используют новые данные на границе и являются более простыми, чем исходные (см. § 3).

Пусть внешняя оболочка является гибкой и нерастяжимой. Аппроксимируем ее форму эллипсом:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (14)$$

$$a = 1 + m, \quad b = 1 - m, \quad 0 \leq m \leq 1.$$

Все параметры заранее известны. На границе должны выполняться два кинематических условия — вектор скорости v направлен по касательной к границе, его величина — постоянна (следствие нерастяжимости оболочки):

$$(\bar{v} \cdot \bar{n}) = 0, \quad |v| = \text{const}, \quad (15)$$

где n — внешняя нормаль. Решение задачи (14) и (15) при $m \ll 1$ рассмотрено в § 10. Это решение обладает интересной особенностью. Оказывается, его первое приближение совпадает с (9), (10). (Это легко показать, положив $\lambda = m$ и повернув систему координат на 45° .)

Таким образом, кинематическая модель также приводит к эффекту направленного переноса. При этом для $m \ll 1$ она дает те же количественные результаты, что и динамическая модель.

Естественно теперь посмотреть, что дает кинематическая модель при наличии жесткого ядра (рис. 12.3). Здесь течение происходит между ядром и внешней эллиптической оболочкой. Причиной течения выступает движение внешней оболочки по закону (15). На контакте с ядром выполняются условия прилипания, поэтому оно будет увлекаться во вращение с некоторой угловой скоростью ω : при $r = L$

$$v_r = 0, \quad v_\theta = L\omega. \quad (16)$$

Величину ω можно определить следующим образом. Фактически ядро находится в свободном со-

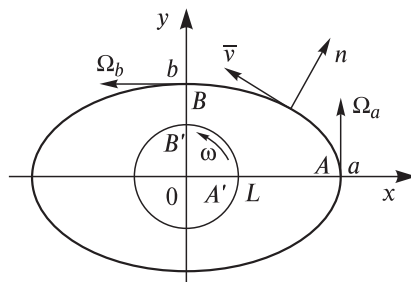


Рис. 12.3.

стоянии. В стационарном течении оно вращается равномерно. Следовательно, момент сил, действующих на него, равен нулю. Решим кинематические задачи (15), (16) для разных величин ω и подсчитаем момент сил. Действительным будет такое значение ω , при котором суммарный момент сил отсутствует.

Ниже ограничимся приближенной оценкой. Она основана на следующих соображениях. В целом о течении, изображенном на рис. 12.3, можно сказать, что оно происходит между коаксиальными цилиндрами с переменным зазором. В качестве оценки будем использовать решение для цилиндров с постоянным зазором [265]. Из этого решения видно, что если угловая скорость внешнего цилиндра будет больше, чем внутреннего, то на последний действует положительный момент, если наоборот, то отрицательный. В нашем случае на внешней границе постоянно не угловая, а линейная скорость, поэтому соотношение между угловыми скоростями для точек на одном радиусе будет переменным. Так, угловая скорость точки B — наибольшая, а точки A — наименьшая ($\Omega_b = |\bar{v}|/b$, $\Omega_a = |\bar{v}|/a$). Ясно, что ядро должно вращаться с некоторой промежуточной скоростью. При этом течение в зазоре $B'V$ стремится увлечь ядро во вращение против часовой стрелки, а в зазоре $A'A$ — затормозить его. Примем, что касательное напряжение в точке A' такое же, как и в случае двух коаксиальных цилиндров, зазор между которыми равен $A'A$, радиусы L , a и угловые скорости ω и Ω_a . Аналогичное уравнение примем и для точки B' . Предположим, что суммарный момент будет отсутствовать, если моменты от этих двух экстремальных на контуре напряжений компенсируют друг друга. Отсюда легко определяется скорость вращения ядра:

$$\omega = \frac{\Omega_a \left(1 - \frac{L^2}{b^2}\right) + \Omega_b \left(1 - \frac{L^2}{a^2}\right)}{2 - L^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)}. \quad (17)$$

Если значения a и b близки, то $\omega \approx (\Omega_a + \Omega_b)/2$. В другом крайнем случае, когда $L \rightarrow b$, скорость ядра $\omega \rightarrow \Omega_b$, причем независимо от величин a и Ω_a . В этом случае механизм переноса переходит в волновой механизм, рассмотренный в [25–135].

В работе [10] дано численное решение задачи (15), (16). Скорость вращения ядра определялась из условия отсутствия момента, действующего на ядро. Полученное решение сравнивалось с (17). Ошибка лежит в пределах 2 %.

§ 13. Связь приливных деформаций со всюду разрывными отображениями

Рассмотренные выше модели указывают на существование приливного переноса масс. Результат его длительного действия представляет интерес и с математической точки зрения. В последние годы возросла роль математических объектов типа фракталов, всюду

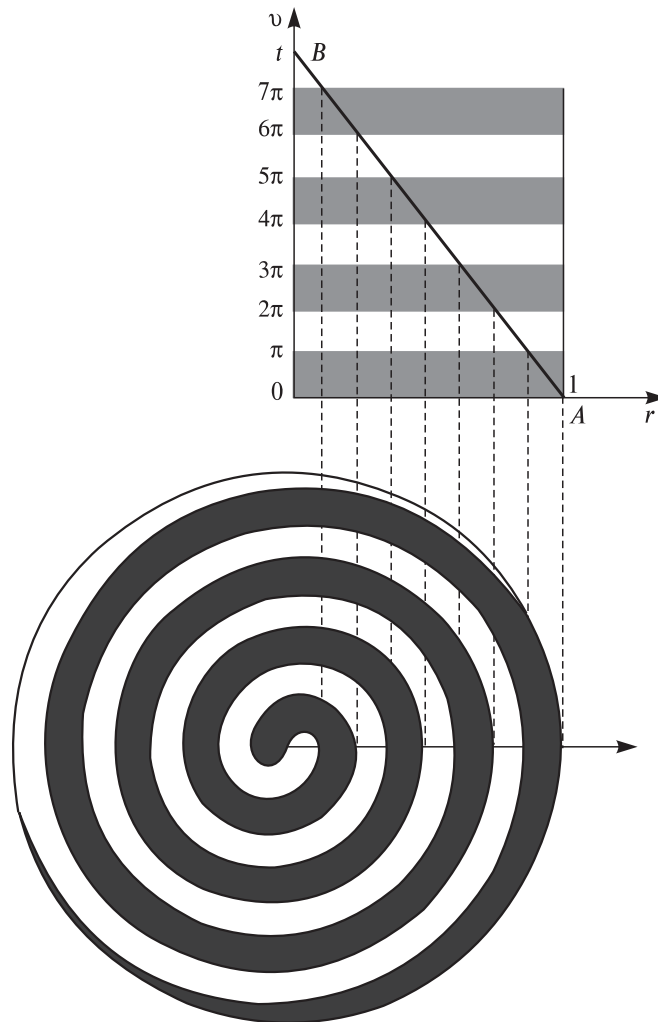


Рис. 13.1.

разрывных отображений и т. д. Приливной механизм дает еще один пример, показывающий, как вполне естественные внешние условия порождают всюду разрывные отображения. Ситуацию можно пояснить на самом простом примере. Пусть дифференциальное вращение создается следующим полем скоростей:

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = 1 - r.$$

Предположим, что в начальный момент половина круга $r \leq 1$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$ закрашена в белый цвет, другая половина — в черный. Зафиксируем в пространстве радиус $\vartheta = 0$ и будем интересоваться изменениями его цвета. Эволюцию лучше всего проследить в плоскости $r - \vartheta$. Пусть плоскость закрашена полосами, как показано на рис. 13.1. Соединим точки $r = 1, \vartheta = 0$ и $r = 0, \vartheta = t$ прямой. Тогда ее пересечение с белыми и черными полосами даст ответ на вопрос о раскраске радиуса в момент времени t . Видно, что с увеличением t количество белых и черных участков на радиусе неограниченно увеличивается. При этом любой фиксированный участок монотонно смещается от центра к наружной границе $r = 1$, а его длина стремится к нулю. Центр окружности $r = 0$ выступает как источник новых участков разного цвета. Для области в форме круга это означает, что обе ее половины преобразуются в две бесконечно длинные и тонкие спирали, которые вложены друг в друга так, что последовательно чередуясь, они целиком заполняют всю область. При этом материальные объемы неограниченно растягиваются и одновременно «складываются». В целом процесс деформирования аналогичен известному «преобразованию пекаря» [266].

§ 14. Пространственная задача о переносе масс приливными волнами

Выше задача о переносе масс ставилась как плоская. Ее решение приближенно описывало перенос масс в экваториальной плоскости небесного тела. При этом предполагается, что ось вращения тела ортогональна плоскости эклиптики (случай, показанный на рис. 2.4, см. с. 37). Кроме этого, предполагается, что тело однородно и процесс течения устойчив. Тогда из симметрии следует, что переноса вещества через экваториальное сечение не происходит и в качестве первого приближения можно ограничиться двумерной постановкой.

В работах [11, 36] сделан следующий шаг и рассмотрена та же самая задача в трехмерной постановке. Форма тела выбрана в виде эллипсоида вращения с малым эксцентриситетом ε и с осью вращения Ox (см. рис. 2.4). Предполагается, что тело является однородным и линейно вязким. При достаточно малых высотах приливной волны и малой скорости ее движения можно ограничиться ползущим приближением. Используются кватернионное представление общего решения системы и метод малого параметра. В качестве последнего используется параметр $\lambda = \varepsilon^2/2 \ll 1$. В результате строится поле скоростей $\{v_x, v_y, v_z\}$.

Для определения поля перемещений материальных частиц необходимо решить задачу Коши относительно системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_x(x(t), y(t), z(t)), \quad t > 0;$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = v_y(x(t), y(t), z(t));$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = v_z(x(t), y(t), z(t));$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0.$$

На экваториальной плоскости имеем точное равенство $v_z(x, y, 0) = 0$. Результаты численных решений задачи показывают, что все частицы движутся по замкнутым траекториям на плоскостях, параллельных экваториальной плоскости.

Периоды обращения частиц различны, так что налицо эффект дифференциального вращения (для наблюдателя на поверхности тела — эффект направленного переноса масс). В полном соответствии с лабораторными экспериментами (см. § 8) наибольший эффект имеет место в экваториальной плоскости. При смещении же к полюсам эффект уменьшается. На рис. 14.1 показаны положения частиц через 1 и 10 об. в экваториальном и двух сечениях тела (спроектированы на экваториальную плоскость; $\varepsilon = 0,5$; $\lambda = 0,125$). Первоначально частицы находи-

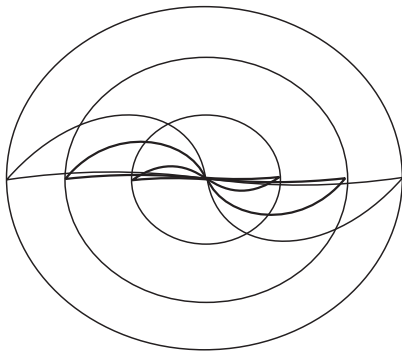


Рис. 14.1.

лись на большой полуоси соответствующего сечения тела. Для Земли средний радиус $R = 6371,032$ км; пусть h — высота приливной волны; λ — соответствующий h малый параметр $\lambda = \varepsilon^2/2$; $\varepsilon^2 = 1 - a^2/b^2$; $a = R + h$; $b = R - h$; v — скорость западного дрейфа. Приведем значения скорости западного дрейфа для разных значений приливной волны

$$h = 1500 \text{ м, } \lambda = 0,00047, \quad v = 1664 \text{ м/год,}$$

$$h = 100 \text{ м, } \lambda = 0,0000314, \quad v = 7,4 \text{ м/год,}$$

$$h = 10 \text{ м, } \lambda = 3,14 \cdot 10^{-6}, \quad v = 0,074 \text{ м/год,}$$

$$h = 0,5 \text{ м, } \lambda = 1,57 \cdot 10^{-7}, \quad v = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м/год.}$$

Для дополнительной проверки вычислительного алгоритма была также рассчитана задача в плоской постановке. Результаты совпали с полученными в § 10.

Подведем итог. Расчеты в рамках плоской и пространственной моделей однородного тела (либо тела с переменной по глубине вязкостью) для высоты приливной волны порядка 0,5 м дают нижнюю и весьма малую оценку направленного переноса масс. Увеличение высоты приливной волны приводит к значительному увеличению направленного переноса. Для Земли это обстоятельство имеет только историческое значение. Есть немало данных (см. Введение), которые указывают на то, что в прошлом прилив твердой оболочки Земли составлял порядка километра и этот фактор играл существенную роль во всех процессах формирования современного облика нашей планеты. Если обратиться к полученным выше результатам, то легко заметить, что основные предположения, которые приводят к ничтожно малому переносу масс (для амплитуды волны порядка 0,5 м), — это предположения об однородности небесного тела. Такие решения годятся только для демонстрации эффекта направленного переноса, но не для получения его реальных оценок. В реальных ситуациях тело является неоднородным, и это обстоятельство меняет ситуацию принципиально. Это видно из построенных выше решений для жесткого ядра. Для получения верхней оценки направленного переноса масс достаточно обратиться к расчетам § 12 и формуле (17) § 12. Как отмечалось в § 12, при стремлении диаметра внутреннего ядра L к радиусу Земли ($L > b$) угловая скорость вращения ядра ω стремится к значению Ω_α . Вычислим значение переноса, которое соответствует данному предельному случаю. Для получения предельной оценки достаточно ограни-

читься плоским экваториальным сечением. Длина кривой, ограничивающей эллипс с осями $a = b + h$ и b , равна

$$J = 2\pi \cdot b + \pi h, \quad (1)$$

если $h/b \ll 1$ и членами высших порядков малости пренебречь. Следовательно, если на контакте оболочки с ядром проскальзывания не будет, то суточный перенос составит πh , т. е. при высоте приливной волны порядка 0,5 м перенос составит порядка 500 м в год. Это теоретически возможный верхний предел переноса.

Формула (1) обладает чрезвычайно интересной и на первый взгляд неожиданной особенностью: второе слагаемое в сумме (1) от величины b — не зависит. Это свойство становится очевидным при следующем сравнении. Возьмем шар радиусом R размером с Землю и обвяжем его по экватору тонкой проволокой. Ее длина будет равна 40 000 км. Теперь вырежем из проволоки относительно ничтожный кусок, например длиной $\Delta l = 6$ м. Сведем концы проволоки вместе. Проволока углубится в шар. Поставим вопрос: на какую глубину? Формула для длины окружности $l = 2\pi R$ дает мгновенный ответ $\Delta R = \Delta l / 2\pi$, т. е. при $\Delta l = 6$ м проволока углубится на 1 м. Оказывается, 40 000 км здесь ни при чем. Если взять шар радиусом 1 млн км или радиусом 10 м — результат будет таким же: при изъятии из обвязки 6 м она углубится на 1 м от поверхности шара. Тот факт, что второе слагаемое в (1) зависит только от высоты прилива h и не зависит от радиуса шара b — имеет ту же самую природу. В данном случае следствием этого факта будет уже не углубление гипотетической проволоки в тело, а направленный перенос (или дифференциальное вращение) оболочек небесного тела.

Действительно, перейдем в формуле (1) к приращениям

$$\Delta J = 2\pi \cdot \Delta b + \pi \Delta h.$$

Рассмотрим теперь случай, когда параметры b и h относятся не только к поверхности, но и к внутренним точкам деформируемого тела. Наибольший интерес представляют глубины, на которых высота приливной волны h меняется скачком. Для таких глубин имеем $\Delta b = 0$, а $\Delta h \neq 0$. Относительный перенос (вследствие дифференциального вращения) равен $\pi \Delta h$ за 1 сут. Причем от самой глубины эффект переноса не зависит.

Резкое изменение амплитуды волны можно ожидать на глубинах, где свойства тела меняются скачком, например, на границах с астеносферными слоями, границе твердого и жидкого ядра и др. Как отмечалось, верхняя оценка эффекта составляет 500 м/год. Оценка была получена для ядра с максимально возможным радиу-

сом. В реальном случае слои с резким изменением свойств тела находятся на определенных глубинах. Однако их расстояние от центра Земли имеет тот же порядок радиуса Земли. Значит, если взять в качестве опорной линейную зависимость высоты волны от глубины, то фактор глубины может изменить перенос только в несколько раз. Основной вклад в эффект связан со скачком h вследствие изменения свойств тела. Для его оценки необходимы данные о реологии тела. Однако, даже если допустить, что скачок составляет всего 1 % от h , то получим оценку переноса порядка 100 см/год.

§ 15. Перенос масс волнами большой амплитуды

Эксперименты на моделях показывают, что с увеличением высоты приливной волны механизм деформирования тела приобретает качественно новые черты. Появляются различные системы линий скольжения, регулярные структуры и т. д. При достаточно большой волне тело так сплющивается, что его внутренние точки начинают обращаться вокруг двух центров.

Далее ограничимся рассмотрением только этого эффекта. Обратимся к решению (7) § 12. Поле скоростей (7) § 12 дает точное решение задачи при любых значениях λ (т. е. при построении решения не предполагалось, что $\lambda < 1$). Будем постепенно увеличивать значение λ . С увеличением λ небесное тело все больше вытягивается в направлении к возмущающей массе. Соответственно вытягиваются и линии тока материальных частиц (рис. 15.1, $\lambda = 0,33$). На всех рисунках размер квадратной сетки принят за единицу. Линии тока представляют собой овалы с общим центром. С увеличением λ эффект направленного переноса (дифференциального вращения) становится все более выраженным (рис. 15.2: $a - \lambda = 0,3$; $b - \lambda = 0,35$). Таким образом, если λ невелико, то все материальные точки обращаются вокруг центра по определенным замкнутым траекториям. И это кажется естественным. Парадоксальным выглядит то обстоятельство, что при больших λ угловая скорость в некоторых областях становится отрицательной, поэтому характер течения меняется. Такое поведение никаким уравнениям не про-



Рис. 15.1.

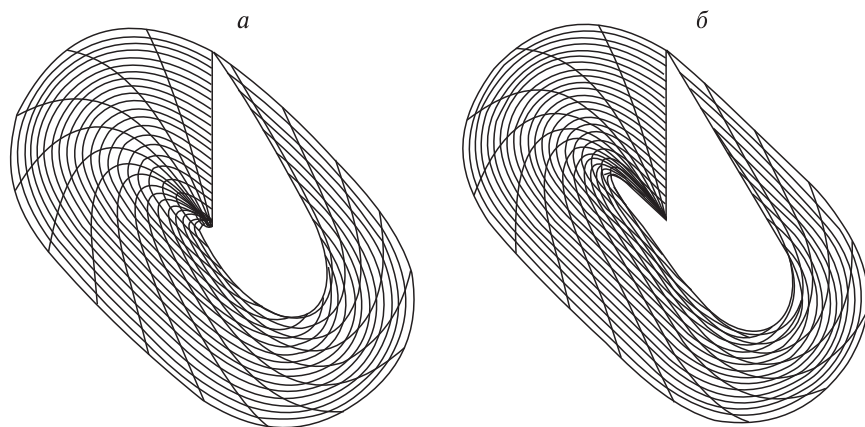


Рис. 15.2.

творечит и объясняется тем, что при большой скорости приливного растяжения скорость сжатия в ортогональном направлении настолько велика, что не компенсируется переносом вследствие поворота тела. Таким образом, существует критическое искажение формы (высота приливного горба порядка $0,3R$), при переходе через которое картина переноса масс меняется качественно. Конечно, если гово-

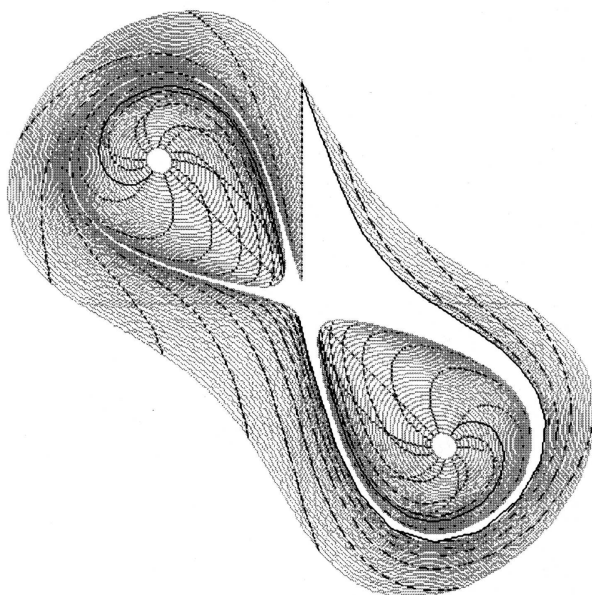


Рис. 15.3.



Рис. 15.4.

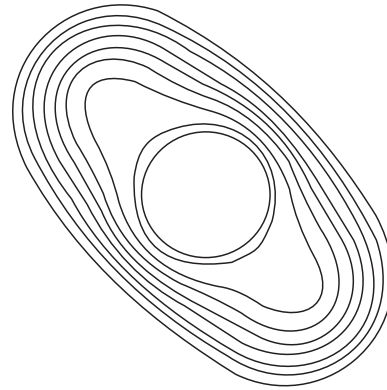


Рис. 15.5.

речь о реальных процессах, то полученный результат нужно рассматривать как посылку для поиска подобных режимов в рамках более сложных моделей.

На рис. 15.3 показана картина течения при $\lambda = 0,75$. Внутреннее течение осуществляется вокруг двух фокусов и отдельно от внешнего течения сепаратрисой. Наличие внутреннего жесткого ядра может изменить ситуацию качественно. Например, если ядро сравнительно мало ($R = 0,2$), то течение происходит вокруг двух центров (рис. 15.4, $\lambda = 0,75$). Увеличение же радиуса ядра до 0,4 приводит к течению вокруг одного центра (рис. 15.5, $\lambda = 0,75$).

Решение пространственной задачи (см. § 14 и [11, 36]) также указывает на возможность появления двух вихрей при достаточно большом приливном искажении формы небесного тела.

Рассмотренные выше модели приливного деформирования тела можно отнести к классу квазистатических. В рамках этих моделей однозначно предсказывается эффект направленного переноса, однако самогравитация тела и инерционные силы явно не учитываются.

В связи с этим рассмотрим другой класс моделей — модели динамического типа, в которых можно учесть инерцию среды, самогравитацию и, кроме того, получить обозримые результаты для трехмерной задачи. В расчетах мы не связаны реальными значениями параметров как самого небесного тела, так и действующих на него сил. Поэтому всегда можно уменьшить одни параметры и значительно увеличить другие. Например, можно убрать самогравитацию и центробежные силы, но сохранить чисто кинематические последствия вращения тела, можно также многократно увеличить приливные силы и рассмотреть эволюцию формы тела и его разрушение под действием этих сил и т. д. Последняя задача представляет интерес в связи с изучением эволюции двойных звезд, двойных планетных систем, а также систем «планета — ее спутники».

В настоящее время накоплено достаточно много данных, которые показывают, что ситуация, когда приливные силы планеты разрушают ее спутник, является достаточно типичной. По одной из теорий происхождения Луны связано именно с таким процессом приливного разрушения некоторого массивного тела — прото-Луны. Приливными разрушениями объясняется происхождение метеоритов, особенности их химического состава, а также целый ряд других фактов. Исследование такой ситуации представляет также и теоретический интерес. Есть многочисленные данные, показывающие, что и в истории формирования современного облика Земли приливные силы в прошлом играли гораздо большую роль, чем в настоящее время. Поэтому рассмотрим динамические модели, не накладывая заранее ограничений на высоту приливной волны.

§ 16. Динамическая модель приливного деформирования небесного тела

Сейчас общеизвестно, что Земля у полюсов сплюснута, т. е. радиус Земли от центра до полюса меньше, чем ее радиус от центра до экватора. Объясняется это тем, что Земля вращается вокруг своей оси. Ось проходит через полюсы, и поэтому центробежные силы, которые направлены от оси, будут максимальными на экваторе. Вблизи полюса они минимальны, а на самом полюсе равны нулю. В соответствии с этими силами Земля и принимает сплюснутую форму.

Ньютон не только предсказал сжатие Земли, но и дал ему количественную оценку. Причем сделал это, исходя из чрезвычайно простой и наглядной модели (рис. 16.1). Модель Ньютона сводилась к следующему. Рассматривались два канала, простирающиеся от полюса до центра Земли и от центра до экватора. Каналы заполнены водой и сообщаются между собой в центре Земли. Поэтому давление в центре в обоих каналах должно быть одинаковым. Центробежная сила «уничтожает» определенную часть веса воды в канале, направленном к экватору. Поэтому равновесие будет сохранено только в случае, когда высота столба воды, направленного к экватору, будет несколько больше высоты столба, направленного к полюсу. Отсюда Ньютон получил величину сжатия, равную $\varepsilon = 1/230$, где $\varepsilon = 1 - b/a$, b и a — полярный и экваториальный радиусы. Следует отметить, что в данном случае давления жидкости являются гидростатическими, поэтому совершенно неважно, будет ли жидкость в каналах идеальной, вязкой или какой-либо другой. Главное — чтобы отсутствовало трение на стенках канала, и выполнялся закон Паскаля.

1. Идея динамических моделей.

Итак, модель Ньютона дает величину сжатия, равную $\varepsilon = 1/230$. Современное значение сжатия оценивается как $1/298$, т. е. приближенное значение отличается от точного всего на 23 %. Кажется удивительным, что такая простая модель дала не только абсолютно верный качественный, но и вполне приемлемый количественный результат. Эти об-

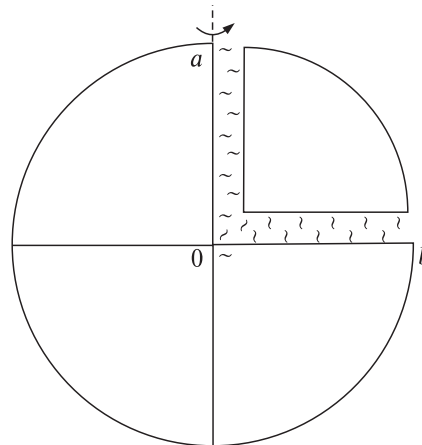


Рис. 16.1.

стоятельства позволяют надеяться, что и модель, построенная как обобщение классической модели, может дать вполне приемлемые результаты.

Идея обобщения очень проста. В исходной модели учитываются силы самогравитации и центробежные силы. Можно попытаться таким же образом учесть и приливные силы. Учет приливных сил вводит в систему элемент нестационарности. Для любого фиксированного канала, проведенного от центра Земли к ее поверхности, центробежную и гравитационную силы можно считать постоянными. Приливная же сила зависит от ориентации канала и будет все время меняться. Поэтому в анализ необходимо будет ввести динамику среды, а значит, и ее реологию. Предположим, что имеется бесконечно много каналов. Все они заполнены жидкостью и в центре тела сообщаются между собой. Собственно само тело можно теперь представлять как совокупность указанных каналов. Здесь возникает, конечно, ряд новых вопросов: надо ли учитывать радиальность каналов или можно считать их цилиндрическими; как учитывать влияние градиента скорости в соседних каналах и др.?

Ниже ограничимся построением самых простых моделей, которые были бы как можно ближе к исходной модели Ньютона. На величину приливных сил ограничений накладывать не будем. Поэтому для обобщения будем говорить о деформировании небесного тела, имея в виду Землю при малых силах или двойную планету, звезду или другой объект при больших приливных и центробежных силах.

2. Основное уравнение. Перейдем теперь к выкладкам. Рассмотрим вначале динамику вязкой жидкости в одном произвольном канале (рис. 16.2). Предположим, что канал имеет цилиндрическую форму. Пусть S и L — площадь и периметр поперечного сечения канала, r — координата вдоль его оси, $\sigma(r)$, $u(r)$ — среднее по сечению нормальное напряжение и смещение. Как обычно, сжимающие напряжения будем считать отрицательными.

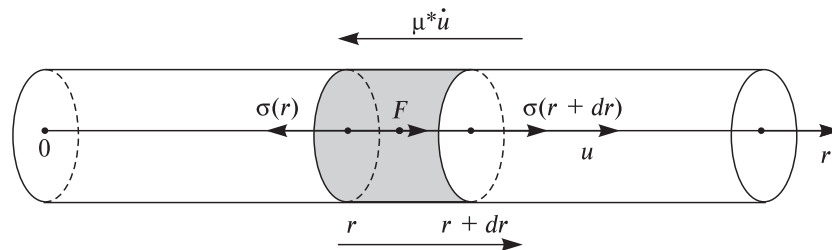


Рис. 16.2.

Предположим, что вязкое трение пропорционально скорости движения жидкости относительно стенок канала. Выделим двумя сечениями r и $r + dr$ элементарный объем. Тогда, пренебрегая силой Кариолиса, получим следующее уравнение движения:

$$\sigma(r + dr)S - \sigma(r)S - \mu^* \frac{du}{dt} Ldr + F(r)Sdr = \frac{d^2u}{dt^2} \rho Sdr.$$

Слева стоит сумма всех сил, действующих на элемент. Согласно второму закону Ньютона эти силы вызывают движение элемента с ускорением d^2u/dt^2 . Смысл остальных обозначений очевиден: μ^* — коэффициент вязкого трения, ρ — плотность жидкости, F — составляющая объемной силы вдоль оси канала. Предположим, что материал несжимаем и однороден как по плотности, так и по вязкостным свойствам, т. е. $\rho, \mu^* = \text{const}$. Кроме того, примем, что гравитационный потенциал тела не меняется и соответствует однородному шару радиуса R , т. е. изменения потенциала вследствие изменения формы тела учитывать не будем. Тогда гравитационная сила, действующая на элемент со стороны самого тела, будет пропорциональна координате r . Пропорциональными координате r будут также центробежная и приливные силы, поэтому для объемной силы можно принять, что $F = \gamma \cdot r$, где коэффициент γ от координаты r уже не зависит. Величину γ будем называть интенсивностью объемной силы. Конкретный ее вид и зависимость от времени рассмотрим далее. Перепишем теперь уравнение движения в следующем виде:

$$\frac{d\sigma}{dr} = \rho \ddot{u} + \mu \dot{u} - \gamma \cdot r, \quad (1)$$

где $\mu = \mu^* L/S$ и точкой обозначена производная по времени.

Вследствие несжимаемости переменная u может зависеть только от времени, поэтому уравнение (1) можно проинтегрировать по r . Результат будет следующим:

$$\sigma(r, t) = (\rho \ddot{u} + \mu \dot{u}) r - \frac{\gamma}{2} r^2 + c(t),$$

где $c(t)$ — «постоянная» интегрирования.

Теперь о начальных и краевых условиях. Будем считать, что в начальный момент времени канал заполнен жидкостью от сечения $r = 0$ до сечения $r = R$. Предположим, что поверхность $r = R$ от напряжений свободна: $\sigma(R, t) = 0$, т. е. влияние атмосферы и океана здесь не учитывается. Начальные смещения и скорости можно выбрать из дополнительных соображений.

Теперь о краевых условиях. В геометрических линейных задачах краевые условия ставятся обычно на недеформированной поверхности, т. е. если мы считаем, что в начальный момент тело представляет собой шар, граница которого от напряжений свободна, то линейная постановка предполагает, что напряжение отсутствует на исходной границе шара, т. е. на сфере, а не на той поверхности, в которую эта сфера перейдет. Рассматриваемая модель позволяет исследовать более точную постановку, а именно, учесть изменение границы. Итак, пусть новая поверхность от напряжений свободна, поэтому

$$\sigma(R + u) = 0. \quad (2)$$

Отсюда следует

$$\sigma(r, t) = -(\rho\ddot{u} + \mu\dot{u})[(R + u) - r] - \frac{\gamma}{2}[(R + u)^2 - r^2]. \quad (3)$$

Мы предполагаем рассмотреть множество каналов типа (3). Каналы связаны между собой в точке $r = 0$, поэтому значение напряжения в центре для всех каналов будет одинаковым: $\sigma(0, t) = \sigma^0(t)$. Положив в равенстве (3) $r = 0$, придем к следующему уравнению:

$$(\rho\ddot{u} + \mu\dot{u})(R + u) - \frac{\gamma}{2}(R + u)^2 + \sigma^0(t) = 0. \quad (4)$$

Таким образом, мы получили уравнение вынужденных колебаний с вязким сопротивлением и нелинейной восстанавливающей силой. Численно исследование таких колебаний не представляет больших трудностей. Однако основные и более ясные результаты можно получить, если сделать определенные упрощения и получить замкнутое решение.

Разберемся в этом вопросе детальнее. Чисто линейное краевое условие имело бы вид

$$\sigma(R, t) = 0. \quad (5)$$

Таким образом, отличие (2) от (5) состоит в учете сил, с которыми слой, заключенный между деформированной и недеформированной поверхностями, действует на первоначальную поверхность $r = R$. В свою очередь эта сила распадается на ряд составляющих, которые существенно различаются между собой. Рассмотрим их по отдельности. Для этого подсчитаем напряжение, которое возникает в сечении $r = R$ при точной подстановке задачи (2) (напряжение, вызванное ондуляцией):

$$\sigma(R, t) = \gamma R \cdot u + \frac{\gamma}{2} u^2 - (\rho\ddot{u} + \mu\dot{u}) \cdot u. \quad (6)$$

Естественно, что это равенство верно как для смещения $u > 0$, так и для $u < 0$. Выводы от знака смещения u также не зависят. Удобнее, однако, представлять себе, что $u > 0$, и говорить о весе слоя между поверхностями $r = R$ и $r = R + u$ при $u > 0$, а не о дефиците веса при $u < 0$.

В большинстве реальных ситуаций величина смещения $|u| \ll R$. Первое слагаемое в (6) описывает вес слоя в случае, если бы потенциал в пределах самого слоя не менялся: γR — это интенсивность объемной силы на подошве слоя, u — высота слоя. Это слагаемое является основным. Второе слагаемое $\gamma u^2/2$ учитывает поправку на изменения потенциала в пределах слоя $R \leq x \leq R + u$. Им можно пренебречь. Третье слагаемое $u \cdot (\rho \ddot{u} + \mu \dot{u})$ представляет собой дополнительное напряжение, которое появляется на подошве слоя и обеспечивает его ускорение и вязкое сопротивление на границе. Им также можно пренебречь по сравнению с первым слагаемым. В результате вместо (2), (5) приходим к следующему краевому условию

$$\sigma(R, t) = \gamma R \cdot u. \quad (7)$$

Соответствующее уравнение имеет вид

$$(\rho \ddot{u} + \mu \dot{u})R - \gamma r R u - \frac{\gamma}{2} R^2 + \sigma^0(t) = 0. \quad (8)$$

Это уравнение описывает динамику движения материала вдоль одного фиксированного канала. По существу, уравнение не замкнуто, так как последний член в уравнении неизвестен. Он определяется из дополнительного условия, описывающего деформирование всего тела в целом. При вычислении $\sigma^0(t)$ уже имеет значение, рассматриваем ли мы плоскую или пространственную постановку задачи, как ориентируем ось вращения тела относительно направления приливных сил и т. д. Поэтому рассмотрим последовательно различные варианты, начиная с самого простого — плоского случая.

§ 17. Плоская задача

1. Постановка задачи. В плоской модели шару соответствует круг (рис. 17.1). Пусть ось его вращения ортогональна плоскости чертежа. Внешнюю массу, вызывающую прилив, можно разбить на две, расположенные симметрично относительно тела. Это позволяет представлять себе приливные силы как чисто статические, вызванные притяжением указанных двух масс (см. гл. 1).

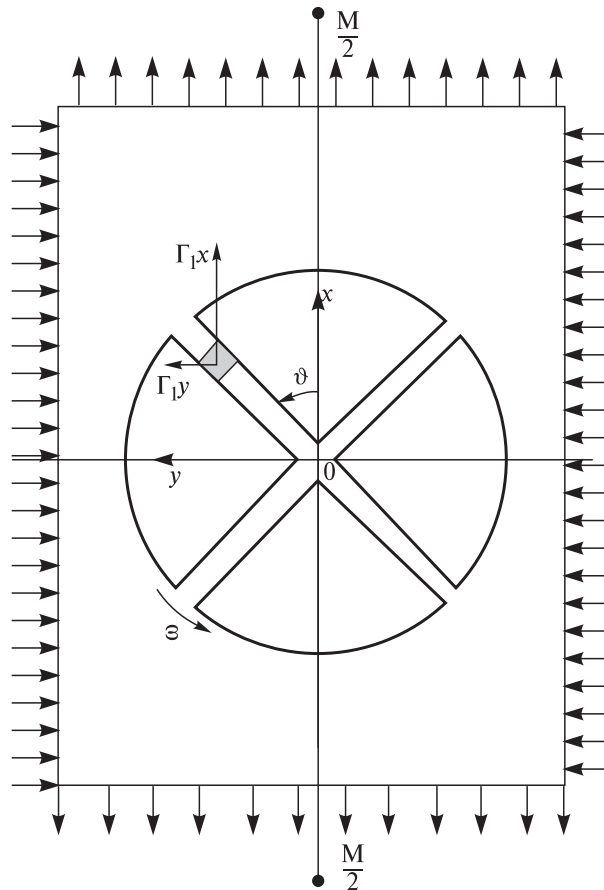


Рис. 17.1.

Итак, у нас есть множество каналов, каждый из которых направлен по своему радиусу. Пусть α — идентификатор конкретного канала. Например, α — угол между осью канала и осью Ox в начальный момент времени $t = 0$. (По существу, α — лангранжева координата канала.) Пусть ϑ — угол, который составляет ось канала с осью Ox в момент времени t (эйлерова координата).

Подсчитаем теперь интенсивность объемных сил для канала ϑ . Эти силы имеют три составляющие: силу самогравитации (γ_1), центробежную (γ_2) и приливную (γ_3): $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$. Вначале оценим самогравитацию. Уточним смысл плоской деформации. Ниже плоскую деформацию будем понимать в следующем смысле.

Именно гравитационный потенциал будем брать для пространственного и конечного тела — для шара. Но действие потенциала будем рассматривать только на плоское сечение типа, показанного на рис. 17.1. Таким образом, считается, что экваториальная плоскость тела совпадает с плоскостью орбиты и, кроме того, связями экваториального сечения планеты с параллельными ему сечениями можно пренебречь. Это позволяет исследовать деформирование экваториального сечения отдельно, причем в рамках плоской задачи.

Итак, пусть g_0 — ускорение свободного падения на поверхности тела $r = R$ (без поправок на центробежную и другие силы). Предположим, что тело однородное. Тогда гравитационное притяжение элемента среды с координатами (r, ϑ) равно: $\gamma_1 = -\rho \frac{g_0}{R}$. Для центробежной силы $\gamma_2 = \rho\omega^2$, где ω — угловая скорость вращения. Векторы приливной силы, отнесенные к единице объема, обозначим как $\{\Gamma_1 x, \Gamma_2 y\}$ (см. рис. 17.1). Как обычно, направления всех стрелок на рисунках соответствуют положительным значениям параметров. Для одной возмущающей массы имеем $\Gamma_1 = \Gamma$, $\Gamma_2 = -\Gamma$, где Γ — известная постоянная. Ради общности сохраним в выкладках оба значения Γ_1 и Γ_2 .

Уравнение движения материала в канале ϑ имеет вид (8) § 16. В нем фигурирует сила, направленная вдоль оси канала. Проектируя вектор приливной силы на ось, получим

$$\gamma_3 = \Gamma_1 \cos^2 \vartheta + \Gamma_2 \sin^2 \vartheta. \quad (1)$$

Таким образом, интенсивность суммарной силы равна

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = -\rho \frac{g_0}{R} + \rho\omega^2 + (\Gamma_1 \cos^2 \vartheta + \Gamma_2 \sin^2 \vartheta). \quad (2)$$

Теперь необходимо найти связь лангранжевой и эйлеровой координат. Проще говоря, необходимо вычислить положение некоторого фиксированного канала α относительно оси $0x$, т. е. найти угол ϑ как функцию параметра α и времени t . Пусть $\omega(t)$ — средняя скорость вращения тела от момента времени $t = 0$ до момента t . Тогда

$$\vartheta = \alpha + \omega \cdot t. \quad (3)$$

Здесь мы сталкиваемся с проблемой начальных данных. Для построения замкнутого решения достаточно задать начальные данные: $u(\alpha, 0)$, $\dot{u}(\alpha, 0)$ и начальную скорость вращения $\omega(0)$. Дальнейшую эволюцию всех параметров можно определить уже из решения зада-

чи. Однако такая чисто динамическая постановка излишне усложняет задачу. Действительно, определим из (3) мгновенную скорость вращения

$$\dot{\vartheta} = \dot{\omega}(t) \cdot t + \omega. \quad (4)$$

Наличие вязкости приведет к замедлению вращения. (Полное численное исследование динамической задачи больших трудностей не представляет.)

В настоящее время накоплено достаточно много фактов, которые показывают, что с течением времени скорость вращения Земли уменьшается. Это происходит по двум основным причинам. Первая связана с диссипацией механической энергии в процессе приливного деформирования Земли. Вторая причина замедления связана с формой, которую принимает Земля вследствие приливного деформирования. Форма Земли и ее ориентация относительно направления приливных сил таковы, что возникает момент, тормозящий вращение Земли. Таким образом, имеем некоторый «начальный» импульс планеты, который постепенно растрачивается на преодоление приливного трения. Это и есть одно из проявлений собственной жизни планеты, ее эволюции во времени.

Динамическая модель позволяет рассчитать вековое замедление вращения. Это можно сделать без усложнения поставленной выше задачи. Действительно, наблюдения и оценки показывают, что для Земли первое слагаемое в (4) (вековое замедление при разумных промежутках времени t) много меньше второго. Кроме того, динамический вклад этого замедления, равный $\dot{\omega}(t) \cdot R$, на фоне других сил, включая даже приливные, ничтожен. Поэтому задачи о приливном деформировании и о замедлении вращения планеты можно рассматривать как не связанные между собой.

Для решения первой задачи положим $\omega = \text{const}$. Это — кинематическая постановка. Такая постановка, строго говоря, предполагает, что к планете приложен некоторый внешний момент, который поддерживает скорость ее вращения постоянной. После подсчета этого момента из условия сохранения энергии можно будет определить вековое замедление вращения. Нетрудно рассчитать диапазон, когда динамика, связанная с замедлением вращения, становится заметной. Это, однако, весьма экзотическая ситуация и ее из анализа исключим. Ниже везде ограничимся чисто кинематической постановкой, когда скорость вращения ω заранее задана и поддерживается постоянной.

Итак, мы пришли к уравнению (8) § 17 относительно функции $u(\alpha, t)$. Здесь α — параметр канала, t — время. Канал вращается

вместе с планетой в поле действия приливных сил (собственно совокупность каналов и представляет собой планету). Закон вращения мы предположили заданным. Для плоского случая он имеет вид (3), где $\omega = \text{const}$. Тогда уравнение (8) § 17 опишет движения материала в канале α . При этом коэффициент в этом уравнении необходимо рассматривать как функции времени, где ϑ задано равенством (3).

Теперь можно сделать еще одно упрощение. Как отмечалось, восстанавливающая сила равна весу слоя материала, заключенного между деформированной и недеформированной поверхностями:

$$\gamma Ru = (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)Ru = \left(-\rho \frac{g_0}{R} \rho \omega^2 + \Gamma_1 \cos^2 \vartheta + \Gamma_2 \sin^2 \vartheta \right) Ru.$$

Первое слагаемое, связанное с γ_1 , — это вес слоя. Слагаемые γ_2, γ_3 играют роль поправки на центробежную и приливную силы. При этом последняя нестационарна и много меньше веса. Кроме того, величина $|u| \ll R$. Поэтому поправкой на прилив пренебрежем. По этой же причине ($R \gg |u|$) составляющую прилива в слагаемом $\gamma R^2/2$ сохраним. В результате придем к следующему уравнению:

$$(\rho \ddot{u} + \mu \dot{u})R - (\gamma_1 + \gamma_2)Ru - \gamma \frac{R^2}{2} + \sigma^0(t) = 0, \quad (5)$$

где $u = u(\alpha, t)$, α — параметр. Теперь информация о том, что все каналы связаны между собой, содержится только в одном условии: последнее слагаемое в уравнении не имеет аргумента α . Следовательно, во всех каналах давление в центре тела будет одним и тем же.

Далее, материал во всех каналах принят несжимаемым. Поэтому распределение смещений $u(\alpha, t)$ должно быть таким, чтобы общий объем материала во всех каналах был неизменным:

$$\int_0^{2\pi} u(\alpha, t) d\alpha = 0. \quad (6)$$

Произвол в выборе давления $\sigma^0(t)$ позволяет удовлетворить этому условию. Выше предполагалось, что все каналы имеют цилиндрическую форму. С другой стороны, естественно рассмотреть все тело как совокупность сходящихся к центру каналов. Ясно, что для тела в форме шара точно удовлетворить указанным двум условиям невозможно. Однако это обстоятельство принципиального значения не имеет. Замена цилиндрических каналов на радиальные принципи-

альных трудностей не представляет. Условие несжимаемости в этом случае примет вид

$$\int_0^{2\pi} \left(Ru + \frac{u^2}{2} \right) d\vartheta = 0. \quad (7)$$

При $|u| \ll R$ это условие совпадает с (6).

2. Замкнутая система уравнений. Подведем итог. Формально плоская задача свелась к следующей. Требуется найти функцию $u(\alpha, t)$ при $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $t \geq 0$, удовлетворяющую уравнению

$$(\rho \ddot{u} + \mu \dot{u})R - (\gamma_1 + \gamma_2)Ru - \gamma \frac{R^2}{2} + \sigma(t) = 0, \quad (8)$$

где $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$; $\gamma_1 = -\rho \frac{g_0}{R}$; $\gamma_2 = \rho \omega^2$; $\gamma_3 = \Gamma_1 \cos^2 \vartheta + \Gamma_2 \sin^2 \vartheta$;
 $\vartheta = \alpha + \omega t$, (9)

и следующим условиям:

$$u(0, t) \equiv u(2\pi, t); \quad \dot{u}(0, t) \equiv \dot{u}(2\pi, t) \quad (10)$$

либо

$$u(\alpha, 0) = u^0(\alpha), \quad \dot{u}(\alpha, 0) = v^0(\alpha),$$

а также условию

$$\int_0^{2\pi} u(\alpha, t) d\alpha = 0.$$

Функции $u^0(\alpha)$, $v^0(\alpha)$ и величина $\omega = \text{const}$ заданы, функция $\sigma^0(t)$ определяется в процессе решения задачи. Смысл остальных обозначений указан в предыдущих разделах. Таким образом, задача свелась к исследованию континуума связанных между собой осцилляторов. На каждый из осцилляторов действуют вынуждающая и восстанавливающая силы. В общем случае есть также вязкое сопротивление и диссипация энергии.

3. Стационарные решения. Перейдем теперь к построению решения. Пусть заданы некоторые начальные данные и скорость вращения тела. Зафиксируем условия самогравитации и приливные силы. Возможны два случая. Первый — у тела при заданных внешних силах нет устойчивого состояния. Тогда из начального состояния тело будет эволюционировать до тех пор, пока решение имеет смысл. Например, до значения $u = -R$ (в этом случае необходимо учесть, что условие $|u| \ll R$ уже не выполняется). Фактически это означает разрушение тела. Второй случай более интересен. Он реализуется, когда

тело эволюционирует к некоторому устойчивому состоянию. Сам переход к этому состоянию можно не рассматривать, так как он связан с начальными данными, а для небесного тела начальных данных, по крайней мере в традиционном смысле, не существует. Поэтому будем строить сразу стационарные решения, которые от начальных условий вообще не зависят.

Рассмотрим весь процесс с точки зрения наблюдателя, связанного с системой координат $0xy$ (т. е. из космоса). В этой системе внешняя форма планеты должна оставаться неизменной. Это означает, что от аргументов α и t смещение u должно зависеть так, чтобы при $\vartheta = \text{const}$ величина смещения u была постоянной. Поэтому должно быть верно представление

$$u(\alpha, t) = u(\alpha + \omega t). \quad (11)$$

В этом случае величина давления σ^0 от времени зависит уже не должна: $\sigma^0(t) = \sigma^0 = \text{const}$. Подставим (2.11) в (2.8) и перейдем к безразмерным переменным:

$$\begin{aligned} \tilde{u} = \frac{u}{R}; \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\rho\omega}; \quad \tilde{\sigma}^0 = \frac{\sigma^0}{R^2\rho\omega^2}; \quad \lambda = \frac{g_0}{R\omega}; \\ a = \frac{1}{\rho\omega^2} \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2}; \quad b = \frac{1}{\rho\omega^2} \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2}. \end{aligned} \quad (12)$$

В результате получим

$$u'' + \mu u' + (\lambda - 1)u = \frac{1}{2}(-\lambda + 1 + a + b \cos^2 \vartheta) - \sigma^0. \quad (13)$$

Вместо начальных условий здесь имеем два условия склейки (10). Знаки «тильда» везде опускаются, штрих означает производную по ϑ . Пусть $\lambda > 1$. (В соответствии с определением (9), условие $\lambda > 1$ означает, что центробежные силы остаются все время меньше сил самогравитации.)

Нетрудно понять, что условию (6) можно удовлетворить, если свободный член в правой части (13) приравнять нулю. Отсюда

$$\sigma^0 = \frac{-\lambda + 1 + a}{2} \quad (14)$$

и

$$u'' + \mu u' + (\lambda - 1)u = \frac{b}{2} \cos 2\vartheta. \quad (15)$$

Решение уравнений этого типа хорошо изучено [267, 268]. В данном случае они имеют вид

$$u = A \cos(2\vartheta - \kappa),$$

$$A = -\frac{b}{2\sqrt{(\lambda - 5)^2 + 4\mu^2}}, \quad \operatorname{tg} \kappa = \frac{2\mu}{\lambda - 5}. \quad (16)$$

Это решение дает следующий вид свободной поверхности тела: $r = 1 + A \cos(2\vartheta - \kappa)$ или в координатах (r, θ) , отклоненных от направления действия приливных сил, на угол $\kappa/2$ —

$$r = 1 + A \cos 2\theta. \quad (17)$$

Рассмотрим последовательность стационарных форм тела при постепенном увеличении параметра A от нуля. При малых A форма близка к кругу. При увеличении параметра A поверхность при $\theta = \pi/2$ уплощается, а затем становится вогнутой. С дальнейшим увеличением приливных сил перемычка утоньшается и в конце концов при $A = 1$ вырождается в точку — тело распадается на две части. Представляется весьма неожиданным, что такое сложное поведение описывается одним и тем же и таким простым уравнением. Последовательность форм тела напоминает овалы Кассини, а в критическом случае $A = 1$ — лемнискату Бернулли. Построенные выше решения имеют смысл только при $A < 1$. В размерных переменных это означает, что должно выполняться условие:

$$\frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{\rho} < 4 \sqrt{\left(\frac{g_0}{R} - 5\omega^2\right)^2 + 4\frac{\mu^2}{\rho^2} \omega^2}. \quad (18)$$

Строго говоря, уже при переходе тела к вогнутой форме в модели необходимо возвратиться к исходному уравнению (4) без упрощения.

4. Стабилизирующие и дестабилизирующие факторы. Перечислим факторы, которые учитываются в построенной модели: а) самогравитация тела; б) вращение тела вокруг оси и центробежная сила; в) приливные силы; г) вязкое трение. Для Земли количественные оценки этих факторов вполне определены и имеют различные масштабы. Для других небесных тел соотношения между ними могут быть другими. Например, для двойных звезд приливные силы могут стать преобладающими. Для быстро вращающихся объектов возрастает роль центробежных сил. Более важным фактором является самогравитация. В теоретических расчетах мы не связаны конкретными значениями параметров. Поэтому можно рассмотреть различные предельные случаи и выявить роль каждого из указанных факторов в отдельности.

Уравнение (15), включая различные предельные случаи, возникает во многих областях и исследовано, по-видимому, исчерпывающе [267, 268]. Ниже остается только учесть специфику поставленной задачи. Обратимся к уравнению (8). В нем при переходе к безразмерным переменным в качестве характерного напряжения бралась величина $R^2 \rho \omega^2$. Для исследования предельного случаями $\omega \rightarrow 0$ этот масштаб неудобен. Поэтому будем исходить непосредственно из уравнения (8). Для упрощения разделим обе части на ρR^2 и величины u/R , $\sigma/\rho R^2$, μ/ρ обозначим как u и σ , μ . Тогда

$$\ddot{u} + \mu \dot{u} + \left(\frac{g_0}{R} - \omega^2 \right) u = \frac{1}{2} \left(-\frac{g_0}{R} + \omega^2 + f_1 + f_2 \cos^2 \vartheta \right) - \sigma^0(t), \quad (19)$$

$$\text{где } f_1 = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2}; \quad f_2 = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2}.$$

Из структуры коэффициента при восстанавливающей силе видно, что самогравитация играет роль стабилизирующего фактора, а центробежная сила — дестабилизирующего.

Легко понять, что стабилизирующая роль самогравитации связана с тем, что в рассмотренной постановке задачи краевые условия брались на деформированной поверхности тела, а не сносились на поверхность тела до деформации. Роль самогравитации становится очевидной, если вращение тела вообще исключить. Тогда приливные силы будут компенсироваться исключительно силами самогравитации. В этом случае

$$\vartheta = \alpha, \quad \sigma(t) = -\frac{1}{2} \left(\frac{g_0}{R} + f_1 \right) = \text{const} \quad \text{и} \quad u = \frac{R}{2} \frac{f_2}{g_0} \cos^2 \alpha.$$

Посмотрим теперь, что будет, если силы самогравитации полностью исключить. Если при этом тело не вращается, то $\vartheta = \alpha$ и в поле приливных сил тело будет всегда неустойчивым. Это более или менее очевидный вывод, так как в данном случае он связан только реологией тела. Для вязкого тела даже малые приливные силы, если они действуют достаточно долго, могут привести к большим деформациям и разрушению:

$$u = \left(\frac{1}{\mu} \frac{f_2}{2} \cos^2 \alpha \right) t.$$

Таким образом, приливные силы необходимо отнести к дестабилизирующим факторам.

Рассмотрим теперь роль вращения. Было показано, что центробежные силы играют роль дестабилизирующего фактора. Однако

чисто кинематическое следствие вращения можно отнести к стабилизирующим факторам. Действительно, исключим из уравнения (19) динамическое проявление вращения (т. е. положим $\gamma_2 = 0$) и исключим также силы самогравитации ($\gamma_1 = 0$). При этом учтем изменение ориентации каналов вследствие вращения тела. В результате придем к уравнению:

$$\ddot{u} + \mu \dot{u} = \frac{f_2}{2} \cos^2(\alpha + \omega t).$$

Отсюда следует, что если вращение происходит достаточно быстро, то реологическая неустойчивость этим вращением подавляется. Механизм подавления неустойчивости объясняется следующим образом. Поле приливных сил таково, что в направлении к возмущающей массе происходит растяжение тела, а в ортогональных направлениях — его сжатие. Возьмем некоторый линейный элемент тела. Предположим, что вращения нет и поэтому ориентация элемента относительно приливных сил неизменна. Если элемент находится в зоне растяжения, то вследствие вязкости он будет растягиваться вплоть до разрушения тела. То же самое произойдет и в зоне сжатия. (Самогравитация здесь специально исключена.)

Вращение тела может изменить эту картину качественно. Действительно, поворот тела приводит к тому, что линейные элементы, которые были в зоне растяжения, перемещаются в зону сжатия, затем опять в зону растяжения и т. д., поэтому форма тела в целом может стабилизироваться только за счет этого фактора.

Теперь о роли вязкости. Она очевидна. Вязкость, безусловно, является стабилизирующим фактором. Кроме того, она приводит к сдвигу по фазе между действием приливной силы и кинематической реакции тела. Если в уравнении (2.19) допустить $\mu \rightarrow 0$, то придем к следующему решению:

$$u = A \cos^2 \vartheta, \quad A = \frac{b}{2(\lambda - 5)}, \quad \lambda > 5.$$

Вдали от резонанса форма тела устойчива и выпукла. Однако при подходе к резонансу появляется вогнутость и тело начинает разделяться на две части.

§ 18. Пространственная задача

Обычно переход от плоской к трехмерной постановке усложняет задачу принципиально. В рамках рассматриваемой модели это не так.

Последнее связано с тем, что и двух- и трехмерная задача фактически сводятся к одномерной. По-видимому, это предельно упро-

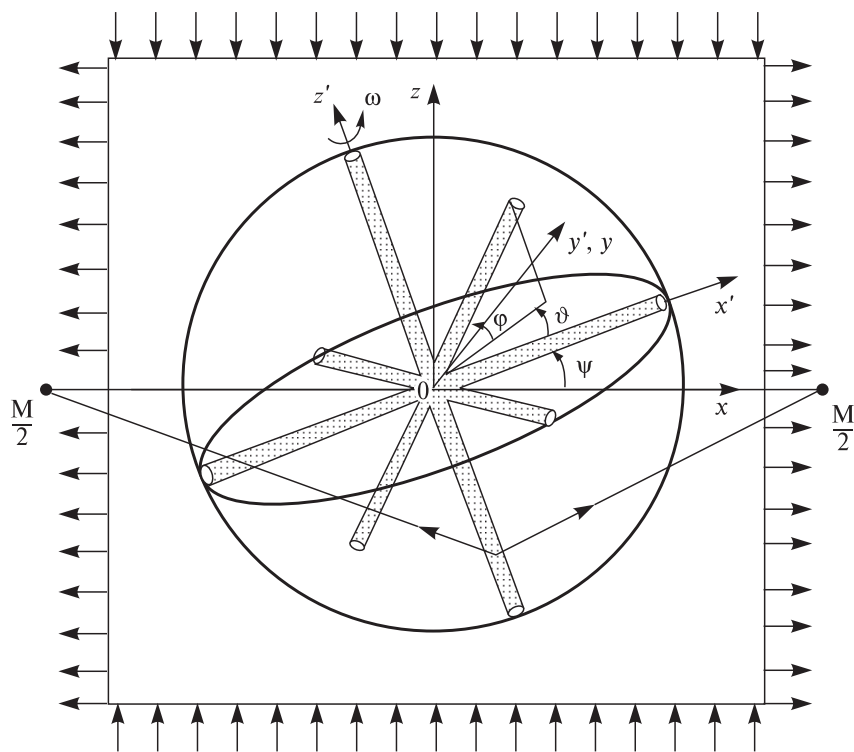


Рис. 18.1.

шенная постановка. Поэтому и при оценке действующих сил есть смысл ограничиться только самыми грубыми приближениями. Итак, пусть тело обращается вокруг одной возмущающей массы и ось его вращения ориентирована вдоль некоторого фиксированного (и произвольного) направления в пространстве. Изначально в рассматриваемой ситуации выделены одна точка и два направления. Точка — это центр деформируемого тела, одно направление — это направление от центра к возмущающей массе, второе направление — это ось, вокруг которой вращается тело. Введем две декартовы системы координат $0xyz$ и $0x'y'z'$ (рис. 18.1). Начала обеих систем поместим в центр тела, ось $0x$ направим к возмущающей массе M . Пользуясь приемом [142], разделим возмущающую массу на две равные части и поместим их, как показано на рисунке. Теперь обе массы $M/2$ и центр тела можно считать неподвижными, так что динамику движения тела по орбите (вокруг барицентра) можно исключить. Направим ось $0z'$ вдоль оси вращения тела, а ось координат $0y$ — орто-

гонально осям $0x$ и $0z'$. Ось $0y'$ направим вдоль $0y$, ось $0z$ ортогональна $0y$ и $0x$. Угол между осями $0x$ и $0x'$ обозначим через Ψ . Отметим, что в общем случае ось $0y$ в плоскости орбиты не лежит. Движение по орбите проявляется в изменении угла Ψ от значения Ψ_{\max} до $-\Psi_{\max}$. Ψ_{\max} — известно, прецессия и нутация исключены. Примем, что обе системы координат являются инерциальными, так что угол φ можно рассматривать как параметр задачи. С координатами $0x'y'z'$ свяжем сферические координаты (r, ϑ, φ) .

18.1. Ось вращения тела ортогональна к плоскости его орбиты

1. Постановка задачи. Вначале ограничимся наиболее простым случаем, когда ось вращения тела ортогональна плоскости его орбиты. В этом случае системы координат $0xyz$ и $0x'y'z'$ совпадают между собой и угол $\Psi \equiv 0$.

Возьмем некоторый канал и рассмотрим динамику движения материала в нем. Положение канала в пространстве характеризуется двумя параметрами. В качестве таких параметров выберем два угла: ϑ и φ . Пусть

$$0 \leq \vartheta \leq 2\pi; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Связь с декартовыми координатами дается следующими формулами:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \vartheta, \\ y &= r \cos \varphi \sin \vartheta, \\ z &= r \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Указанные углы ϑ и φ являются эйлеровыми координатами канала. В качестве лангранжевых координат возьмем значения тех же углов в начальной момент времени: $\alpha = \vartheta(0)$, $\beta = \varphi(0)$.

Уравнения движения материала в канале (α, β) имеют прежний вид — (4) § 16. Не меняется также и упрощенное уравнение движения (8) § 16:

$$(\rho\ddot{u} + \mu\dot{u})R - \gamma Ru - \frac{\gamma}{2}R^2 + \sigma^0(t) = 0. \quad (2)$$

Уравнение записано относительно функций $u(\alpha, \beta, t)$ и $\sigma^0(t)$. Здесь α, β — параметры, t — независимая переменная, $\sigma^0(t)$ — неизвестная функция, которая определяется из условия сохранения объема тела в целом:

$$\iint_{(\alpha, \beta)} u(\alpha, \beta, t) \cos \varphi d\alpha d\beta = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

Для сходящихся каналов условие сохранения объема имеет вид

$$\iint_{(\varphi, \vartheta)} \left(u + u^2 + \frac{u^3}{3} \right) \cos\varphi d\varphi d\vartheta = 0.$$

При $|u| \ll 1$ это условие совпадает с (3).

Вследствие вращения тела фиксированный канал (α, β) переносится в пространстве. Это вызывает изменения массовых сил, действующих на элемент среды, расположенной в канале. Указанные силы нетрудно определить.

Прежде всего о силах самогравитации. В уравнениях самогравитация представлена компонентом силы γ_1 . Примем для γ_1 прежнее выражение:

$$\gamma_1 = -\rho \frac{g_0}{R}. \quad (4)$$

В действительности, гравитационный потенциал зависит от формы, которую принимает тело в процессе деформирования. Представление (4) означает, что изменение не учитывается. Здесь потенциал берется для тела в форме шара, плотность которого с глубиной не меняется.

По-видимому, эти упрощения вполне оправданны, однако не ссылаемся на то, что указанные эффекты пренебрежимо малы (при большом искажении формы это не так), а общей точностью рассуждений, принятой в построенной модели. Если в начальных посылах заложены весьма грубые гипотезы, то нет смысла учитывать более тонкие эффекты в дальнейших построениях. Хотя следует отметить, что учет неоднородности по глубине в рамках предложенной и по существу одномерной модели никаких трудностей не представляет. Учет изменения потенциала сложнее, но также возможен.

Подсчитаем теперь интенсивность центробежной силы. Опыт решения плоской задачи показал, что роль вращения тела неоднозначна: с одной стороны, динамическое проявление вращения играет дестабилизирующую роль, с другой — чисто кинематическое его проявление может приводить к стабилизации. Поэтому удобно в динамических членах скорость вращения снабдить индексом « ∂ », а в кинематических — индексом « k ». Интенсивность центробежной силы равна $\rho\omega_{\partial}^2 \cos\varphi$. Проекция ее на ось равна

$$\gamma_2 = \rho\omega_{\partial}^2 \cos^2\varphi.$$

Займемся теперь подсчетом приливной составляющей объемной силы. Для трехмерного тела компоненты приливной силы пропорциональны декартовым координатам точки:

$$\{\Gamma_1 x, \Gamma_2 y, \Gamma_3 z\}.$$

Единичный вектор вдоль оси канала равен

$$\{x, y, z\}/r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Отсюда проекция приливной силы на ось канала равна

$$(\Gamma_1 x^2 + \Gamma_2 y^2 + \Gamma_3 z^2)/r.$$

Следовательно,

$$\gamma_3 = (\Gamma_1 x^2 + \Gamma_2 y^2 + \Gamma_3 z^2)/r^2, \quad (5)$$

$$\text{где (см. гл. 1)} \quad \Gamma_1 = 2\Gamma, \quad \Gamma_2 = -\Gamma, \quad \Gamma_3 = -\Gamma, \quad (6)$$

где Γ — известная величина, зависящая от возмущающей массы.

Предположим теперь, что тело вращается с известной и постоянной угловой скоростью ω_k . Это означает, что задачи о приливном деформировании тела и о вековом замедлении его вращения можно считать не связанными между собой. Тогда для канала (α, β) имеет место следующий весьма простой закон его переноса в пространстве:

$$\vartheta = \alpha + \omega_k t, \quad \varphi = \beta. \quad (7)$$

2. Замкнутая система уравнений. Обратимся к уравнению (2). Во втором слагаемом стоит коэффициент γ , который состоит из трех частей: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Величина γ_1 равна весу слоя между деформированной и недеформированной поверхностями тела, γ_2, γ_3 — поправки веса на центробежную и приливную составляющие. Уравнение усложняется за счет последней поправки, так как она зависит от времени. Ею вполне можно пренебречь (как и в плоской задаче).

Таким образом, задача сводится к следующей: требуется найти функцию $u(\alpha, \beta, t)$, которая удовлетворяет уравнению

$$(\rho \ddot{u} + \mu \dot{u})R - (\gamma_1 + \gamma_2)Ru = \frac{R^2}{2}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) - \sigma^0(t), \quad (8)$$

где

$$\gamma_1 = -\rho \frac{g_0}{R}; \quad \gamma_2 = \rho \omega_\delta^2 \cos^2 \varphi; \quad \gamma_3 = k + f \cdot \cos 2\varphi + h \cos^2 \varphi \cos 2\vartheta; \quad (9)$$

$$\vartheta = \alpha + \omega_k t, \quad \varphi = \beta; \quad 4k = \Gamma_1 + \Gamma_2 + 2\Gamma_3; \quad 4f = \Gamma_1 + \Gamma_2 - 2\Gamma_3; \quad 2h = \Gamma_1 - \Gamma_2$$

Последние выражения получены подстановкой (1) в (5). Функция $u(\alpha, \beta, t)$ должна удовлетворять следующим начальным условиям:

$$u(\alpha, \beta, 0) = u^0(\alpha, \beta), \quad \dot{u}(\alpha, \beta, 0) = v^0(\alpha, \beta),$$

а также условию сохранения объема всего тела

$$\iint_{\alpha, \beta} u(\alpha, \beta, t) \cos\varphi d\alpha d\beta = 0, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (10)$$

Именно в этом условии содержится информация о том, что рассматривается динамика трехмерного тела, а не отдельного канала.

3. Стационарные решения. Будем искать решение уравнения в следующем:

$$u(\alpha, \beta, t) = u(\alpha + \omega_k t, \varphi). \quad (11)$$

Производную по первому аргументу обозначим штрихом. Тогда, переходя в уравнении (8) к безмерным переменным

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{u}{R}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\rho\omega}; \quad \tilde{\sigma}^0 = \frac{\sigma^0}{R^2\rho\omega^2}; \\ \lambda &= \frac{g_0}{R\omega^2}, \quad \tilde{k} = \frac{1}{\rho\omega^2} k; \quad \tilde{f} = \frac{1}{\rho\omega^2} f, \quad \tilde{h} = \frac{1}{\rho\omega^2} h; \end{aligned} \quad (12)$$

получим:

$$\begin{aligned} u'' + \mu u' + (\lambda - \xi \cos^2\varphi) u &= \\ = -\sigma^0 + \frac{1}{2}(-\lambda + \xi \cos^2\varphi + k + f \cos 2\varphi + h \cos^2\varphi \cos 2\vartheta), \end{aligned} \quad (13)$$

где
$$\lambda = \frac{g_0}{R\omega_k^2}, \quad \xi = \omega_\delta / \omega_k.$$

Знаки «тильда» везде опущены. Решение уравнения (13) имеет вид

$$u = \frac{-\lambda + \xi \cos^2\varphi + f \cos 2\varphi + k - 2\sigma^0}{2(\lambda - \xi \cos^2\varphi)} + A \cos(2\vartheta - \kappa), \quad (14)$$

где
$$A = \frac{h \cos^2\varphi}{2\sqrt{(\lambda - \cos^2\varphi - 4)^2 + 4\mu^2}}, \quad \operatorname{tg}\kappa = \frac{2\mu}{\lambda - \xi \cos^2\varphi - 4}. \quad (15)$$

Решение (14), (15) показывает, что сечения тела различными коническими поверхностями $\varphi = \text{const}$ имеют различные вязкие запаздывания по фазе. Это создает дополнительное искажение формы тела в виде скручивания вокруг оси вращения. Причем происхождение

ние этого эффекта связано только с центробежной силой, действующей на слой материала, заключенный между деформированной и недеформированной поверхностями тела (слагаемое $\xi \cos^2 \varphi$ в левой части уравнения (13)).

Рассмотрим подробнее случай, когда указанным эффектом можно пренебречь. Для этого необходимо исключить динамическую роль вращения для слоя, расположенного между деформированной и недеформированной поверхностями. Это значит, что в левой части уравнения (13) можно положить $\xi = 0$, а в правой части $\xi = 1$. (Основной вклад центробежных сил по-прежнему учитывается.) В результате придем к следующему решению:

$$u = \frac{h \cos^2 \varphi}{2\sqrt{(\lambda - 4)^2 + 4\mu^2}} \cos(2\vartheta - \kappa) + \frac{f + 0,5}{2\lambda} \cos 2\varphi + \frac{k - 2\sigma^0 - \lambda + 0,5}{2\lambda}, \quad (16)$$

где $\operatorname{tg} \kappa = \frac{2\mu}{\lambda - 4}$.

Это решение определяет стационарную форму тела:

$$r = 1 + u(\vartheta, \varphi, \sigma^0). \quad (17)$$

Уравнению (17) удобно придать следующую форму:

$$\tilde{r} = r / M = 1 + m \cos^2 \varphi \cos 2\theta + n \cos 2\varphi, \quad (18)$$

где

$$\theta = \vartheta - \kappa; \quad M = \frac{k - 2\sigma^0 + \lambda + 0,5}{2\lambda}, \quad n = \frac{f + 0,5}{k - 2\sigma^0 + \lambda + 0,5}, \quad (19)$$

$$m = \frac{\lambda}{k - 2\sigma^0 + \lambda + 0,5} \cdot \frac{h}{\sqrt{(\lambda - 4)^2 + 4\mu^2}}.$$

4. Исследование равновесных форм поверхности тела. Уравнение, которое описывает форму тела, представлено в замкнутом и весьма простом виде. Его исследование никаких трудностей не представляет. Прежде всего запишем это уравнение в различных видах:

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= (1 - n) + (2n - m) \cos^2 \varphi + 2m \cos^2 \varphi \cos^2 \theta, \\ \tilde{r} &= \left(1 + \frac{m}{2} \cos 2\theta\right) + \left(n + \frac{m}{2} \cos 2\theta\right) \cos 2\varphi, \\ \tilde{r} &= (1 + n \cos 2\varphi) + m \cos^2 \varphi \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (20)$$

Параметры m и n будем рассматривать как параметры нагружения. В исходном состоянии $m = 0$, $n = 0$ и тело имеет форму шара. Увели-

чивая m и n , мы видим, как меняется форма тела с увеличением центробежных и приливных сил. По смыслу задачи величина \tilde{r} должна быть всегда положительной. Это условие накладывает ограничение на область определения m, n . Она легко находится из (18) и на рис. 18.2 обозначена как $OABC$. Форма тела (в координатах (\tilde{r}, θ)) от постоянной M не зависит, поэтому вначале задавались параметры m, n и затем определялся масштаб M из условия сохранения объема всего тела:

$$M^3 \iint_{\varphi, \vartheta} \tilde{r}^3 \cos \varphi \, d\varphi \, d\vartheta = 4\pi.$$

Из решения (19) видно, что отношение n/m от величин M, σ^0 не зависит:

$$\frac{n}{m} = \frac{f + 0,5}{h} \sqrt{\left(1 - \frac{4}{\lambda}\right)^2 + 4 \frac{\mu^2}{\lambda^2}}.$$

Равенства (20) показывают, что случай $n/m = 0,5$ является в определенном отношении особым (см. рис. 18.2, прямая OB). Пусть $m = 2n$ и, следовательно,

$$\tilde{r} = 1 - \frac{m}{2} + 2m \cos^2 \varphi \cos^2 \theta. \quad (21)$$

Возьмем сечение поверхности тела плоскостью $x = x^0 = \text{const}$. Если обратиться к формулам (1), нетрудно заметить, что для сечения $x = x^0, r = \text{const}$. Следовательно, в сечении получаем круг и, следовательно, тело имеет осесимметричную форму с осью симметрии, совпадающей с осью Ox . При $m = 0$ тело имеет форму шара. Затем с увеличением приливных сил тело постепенно вытягивается в направлении к возмущающей массе. При малых m — форма тела является выпуклой (сфероид). Затем у полюсов происходит уплощение и с дальнейшим увеличением сил образуется перемычка. В самом узком месте перемычка имеет радиус

$$\tilde{r} = 1 - \frac{m}{2}.$$

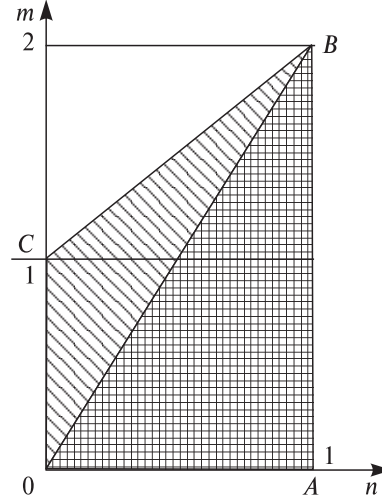


Рис. 18.2.

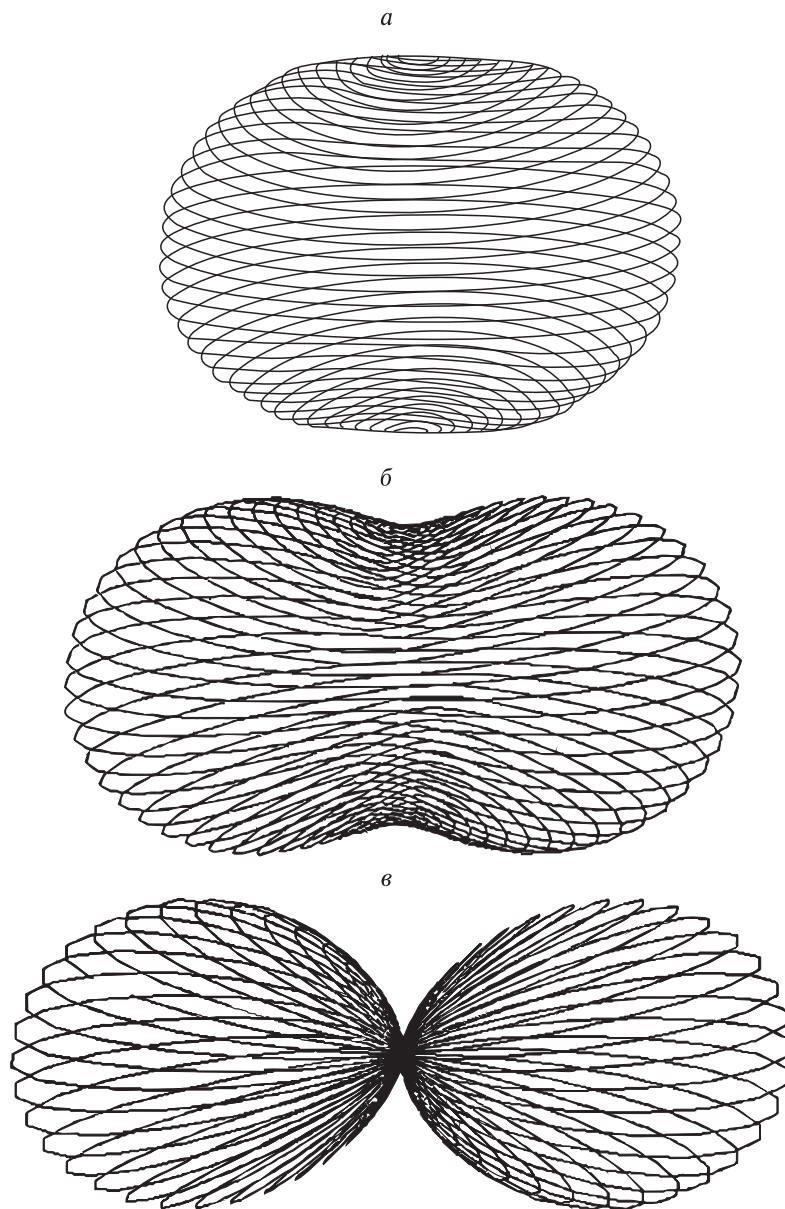


Рис. 18.3.

При $m = 2$, $n = 1$ перемычка вырождается в точку и происходит распад тела на два сфероида (рис. 18.3, a - $в$: $n = 0,1; 0,25; 1$, $m = 0,2; 0,5; 2$).

Другой крайний случай реализуется при $m = 0$. Из равенств (20) видно, что в этом случае зависимость от угла θ исчезает:

$$\tilde{r} = 1 + \cos 2\varphi,$$

поэтому ось вращения тела становится также и осью его симметрии. Этот случай реализуется, когда величиной m в (20) на фоне других слагаемых можно пренебречь. В частности, когда центробежные силы становятся преобладающими. Здесь критическое состояние реализуется при $n = 1$. При этом тело приобретает торообразную форму (южный и северный полюса соприкоснулись между собой) (рис. 18.4, a - $в$: $n = 0,25; 0,5; 1$; $m = 0$).

Значение $n = 1$ является особым и для других значений m . При $n = 1$ имеем (см. рис. 18.2, граница AB):

$$\tilde{r} = \left(1 + \frac{m}{2} \cos 2\theta\right)(1 + \cos 2\varphi).$$

Видно, что при любом m , если $\varphi \rightarrow \pm\pi/2$, то и $r \rightarrow 0$. Причем это имеет место для всех сечений тела плоскостями $\theta = \text{const}$ (рис. 18.5: $n = 1$; $m = 0,5$).

Рассмотрим теперь границу области CB (см. рис. 18.2). Здесь $m = n + 1$ и

$$\tilde{r} = (1 - n) \sin^2 \varphi + 2(n + 1) \cos^2 \theta.$$

Видно, что при всех значениях n всегда есть точка касания, если $\varphi = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Остался последний участок границы — $0C$. На этом участке $n = 0$, $0 \leq m \leq 1$ и $\tilde{r} = 1 + m \cos^2 \varphi \cos 2\theta$.

Итак, это были рассмотрены конфигурации пограничных (или в каком-то смысле особых) фигур тела. Все остальные сочетания параметров (m, n) дают уже типичные случаи.

18.2. Ось вращения тела наклонена к плоскости его орбиты

1. Замкнутая система уравнений. Приливные силы задают одно избранное направление в пространстве, ось вращения тела задает другое направление. Выше рассмотрен вариант, когда эти направления были ортогональны между собой. Перейдем теперь к общему

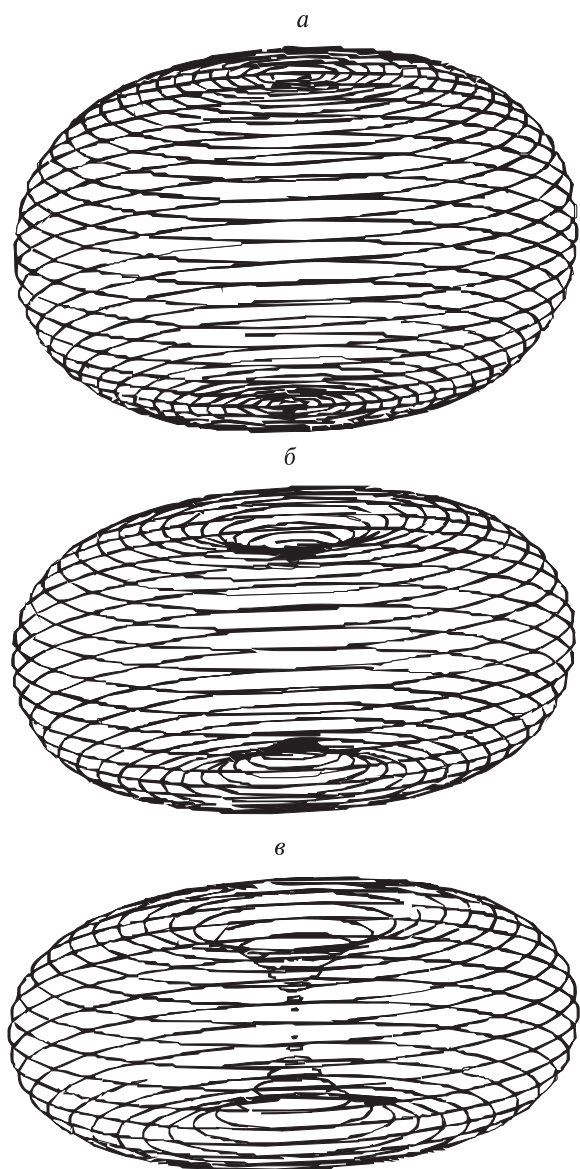


Рис. 18.4.

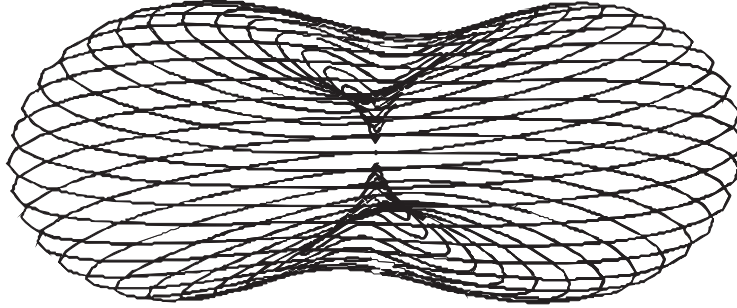


Рис. 18.5.

случаю, когда системы координат $0xyz$ и $0x'y'z'$ между собой не совпадают (см. рис. 18.1):

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \Psi - z' \sin \Psi, & x' &= r \cos \varphi' \cos \vartheta', \\ y &= y', & y' &= r \cos \varphi' \sin \vartheta', \\ z &= x' \sin \Psi + z' \cos \Psi, & z' &= r \sin \varphi'. \end{aligned} \quad (22)$$

Уравнение движения материала вдоль канала остается без изменений. Вся проблема состоит в том, чтобы описать закон изменения объемных сил. Выражение для силы самогравитации от направления оси вращения тела не зависит и поэтому остается прежним. Центробежная сила также не меняется.

Далее о приливной составляющей. Эта составляющая зависит только от положения материального канала относительно возмущающей массы. Поэтому выражение (5) остается без изменений. В рассматриваемом случае вращение происходит вокруг оси $0z'$, поэтому будут выполняться равенства:

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, \\ \gamma_1 &= -\rho \frac{g_0}{R}, \quad \gamma_2 = \rho \omega_0^2 \cos^2 \varphi, \quad \gamma_3 = \frac{1}{r^2} (\Gamma_1 x^2 + \Gamma_2 y^2 + \Gamma_3 z^2). \end{aligned} \quad (23)$$

Подставляя (22) в (23), после элементарных преобразований получим:

$$\gamma_3 = k' + f' \cos 2\varphi + h' \cos^2 \varphi \cos 2\vartheta - G \sin 2\varphi \cos \vartheta, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} 4k' &= \Gamma_1 + \Gamma_2 + 2\Gamma_3 + (\Gamma_1 - \Gamma_3) \sin^2 \Psi, \\ 2f' &= \Gamma_1 + \Gamma_2 - 2\Gamma_3 - 3(\Gamma_1 - \Gamma_3) \sin^2 \Psi, \\ 4h' &= \Gamma_1 - \Gamma_2 - (\Gamma_1 - \Gamma_3) \sin^2 \Psi, \\ 4G &= (\Gamma_1 - \Gamma_3) \sin^2 \Psi. \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, задача свелась к определению функции $u(\alpha, \beta, t)$. Параметры α, β являются лангражевыми координатами канала. Они имеют следующий смысл:

$$\vartheta = \alpha + \omega_k t, \quad \varphi = \beta, \quad (26)$$

где ϑ, φ — эйлеровы координаты. Уравнение движения, естественно, имеет прежний вид:

$$(\rho \ddot{u} + \mu \dot{u})R - (\gamma_1 + \gamma_2)Ru = \frac{R^2}{2} \cdot (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) - \sigma^0(t), \quad (27)$$

где γ_1, γ_2 определяются равенствами (22), а γ_3 — равенствами (24), (25), в которых ϑ, φ необходимо заменить выражениями (26). Кроме этого, должны выполняться условия несжимаемости:

$$\iint_{\alpha, \beta} u(\alpha, \beta, t) \cos \varphi d\alpha d\beta = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2},$$

а также начальные условия или условия периодичности (склейки) для стационарных решений.

2. Стационарные решения. Будем искать решения в следующем виде:

$$u(\alpha, \beta, t) = u(\alpha + \omega_k t, \beta) = u(\vartheta, \varphi). \quad (28)$$

Производную по аргументу ϑ обозначим штрихом. Перейдем к безразмерным переменным (12). Тогда задача (27), (28) сведется к решению следующего уравнения:

$$u'' + \mu u' + (\lambda - \xi \cos^2 \varphi)u = -\sigma^0 + \frac{1}{2}[-\lambda + \xi \cos^2 \varphi + k' + f' \cos 2\varphi + h' \cos^2 \varphi \cos 2\vartheta - G \sin 2\varphi \cos \vartheta], \quad (29)$$

где, как и прежде,

$$\lambda = \frac{g_0}{R\omega_k^2}, \quad \xi = \frac{\omega_\partial}{\omega_k}.$$

Безразмерные постоянные k', f', h', G равны правым частям выражений (25), отнесенным к $\rho\omega_k^2$, напряжение отнесено к $\rho R^2\omega_k^2$, смещение — к R . Величина ϑ является безразмерной и одновременно играет роль полярного угла и времени.

Для стационарного решения начальные условия фактически заменяются следующими условиями склейки:

$$u(0, \varphi) \equiv u(2\pi, \varphi), \\ u'(0, \varphi) \equiv u'(2\pi, \varphi).$$

Уравнение (29) является линейным. Его решение никаких трудностей не представляет [267, 268]:

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{-\lambda + \xi \cos^2 \varphi + k' + f' \cos 2\varphi - 2\sigma^0}{2(\lambda - \xi \cos^2 \varphi)} + \\
 & + \frac{h' \cos^2 \varphi}{2\sqrt{(\lambda - \xi \cos^2 \varphi - 4)^2 + 4\mu^2}} \cos(2\vartheta - \kappa) - \\
 & - \frac{G \sin 2\varphi}{2\sqrt{(\lambda - \xi \cos^2 \varphi - 1)^2 + \mu^2}} \cos(\vartheta - \delta),
 \end{aligned} \tag{30}$$

где

$$\operatorname{tg} \kappa = \frac{2\mu}{\lambda - \xi \cos^2 \varphi - 4}, \quad \operatorname{tg} \delta = -\frac{\mu}{\lambda - \xi \cos^2 \varphi - 1}.$$

Полученное решение позволяет выявить роль наклона оси вращения тела к плоскости его орбиты. В решении фигурируют четыре параметра, каждый из которых зависит от угла Ψ — угла наклона оси вращения тела. Вспомним, что для приливных сил $\Gamma_1 = 2\Gamma$, $\Gamma_2 = \Gamma_3 = -\Gamma$ и рассмотрим подробнее именно этот случай. Из (25) следует, что

$$\begin{aligned}
 4k' &= -\Gamma(1 - 3\sin^2 \Psi), \\
 4f' &= 3\Gamma(1 - 3\sin^2 \Psi), \\
 2h' &= 3\Gamma(1 - 3\sin^2 \Psi), \\
 4G &= 3\Gamma \sin^2 2\Psi.
 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что случай $\Psi = 90^\circ$ является особым. Значению $\Psi = 90^\circ$ соответствует тело, ось вращения которого направлена строго к возмущающей массе. В этом случае $h' = 0$, $G = 0$ и решение от угла ϑ становится независимым. Тело под действием приливных, гравитационных и центробежных сил приобретает определенную осесимметричную форму. Причем в процессе вращения форма переходит сама в себя, так что деформации тела не происходит. Тело вращается как жесткое целое.

Можно также отметить случай, когда $\sin^2 \Psi = 1/3$, $\Psi = 35,3^\circ$ и $k' = f' = 0$. Здесь решение упрощается, но принципиально от общего случая оно, однако, ничем не отличается.

Качественно новые черты, связанные с неортогональностью оси, дает только последнее слагаемое в (30). Во-первых, его появление связано исключительно с неортогональностью оси вращения: при $\Psi = 0$, постоянная G также равна нулю. Во-вторых, только это

слагаемое нечетно по углу ϑ . Все остальные слагаемые в (30) являются четными. Следовательно, материальные элементы тела с координатами (ϑ, φ) и $(\vartheta, -\varphi)$ на приливные силы реагируют по-разному. Это приводит к несимметрии Северного и Южного полушарий. В-третьих, только в этом слагаемом содержится гармоника с периодом по φ равным 2π . (В остальных слагаемых период равен π .) Это значит, что при замене φ на $(\varphi + \pi)$ знак слагаемого также меняется, поэтому появляется вклад в несимметрию формы и по отношению к плоскостям, проходящим через ось вращения тела. Очевидно также, что при одновременной замене φ на $(-\varphi)$ и ϑ на $(\vartheta + \pi)$ слагаемое не меняется. Ранее при записи динамического уравнения угла наклона Ψ предполагался постоянным. В действительности этот угол меняется, причем весьма сложным образом, поэтому запись (27) означает только, что производными $\dot{\Psi}$ по сравнению с величиной ω_k можно везде пренебречь. Отметим, однако, что это ограничение не принципиально. Рассматриваемая модель настолько проста (фактически, это одномерная модель), что учет многих факторов такого типа к большим трудностям не приводит.

Наличие вязкости приведет к тому, что форма тела к изменению угла Ψ будет приспосабливаться не мгновенно. В случае необходимости в рамках рассмотренной модели все запаздывания по изменению угла Ψ также можно рассчитать. Точно так же можно учесть и движение полюсов относительно поверхности Земли.

§ 19. Вязкозимерические течения.**Исследование реологических свойств сложных сред**

Прежде всего отметим, что приливные деформации тесно связаны с аффинными преобразованиями сплошной среды (см. § 4). Если принять, что небесное тело является однородным, то аффинные преобразования определенного типа можно рассматривать как первые приближения для описания приливных деформаций. Ничто не мешает рассмотреть данную связь в обратном виде. Тогда мы приходим к выводу, что приливные деформации (как они реализуются в описанных моделях) это есть не что иное, как первое приближение аффинных деформаций. С теоретической точки зрения аффинная деформация является более простой, чем приливно-ая.

Но, с другой стороны, если говорить о трудностях экспериментальной реализации, то ситуация становится обратной: реализация приливной деформации гораздо проще, чем аффинной. Например, в плоской модели в первом случае на границе эллиптической области необходимо задавать постоянный по величине вектор скорости (направленный вдоль границы). Во втором случае вектор скорости должен меняться по закону Кеплера. Таким образом, все эксперименты, которые были поставлены с целью имитирования приливов, теперь можно рассматривать как эксперименты, приближенно реализующие аффинную деформацию. Поэтому все течения можно рассматривать как вязкозимерические, а их результаты использовать для построения определяющих уравнений сложных сред. Ясно, что в этом случае программы нагружения должны быть значительно расширены (например, включены циклические нагружения). Кроме того, должны проводиться измерения напряжений внутри образца и т. д. Но главным является то обстоятельство, что можно использовать те же способы напряжения и стенды, которые создавались для моделирования приливов [44, 46–48, 50, 51].

Как отмечалось, приливная деформация дает пример сложного нагружения с непрерывным поворотом осей тензоров напряжений и деформаций.

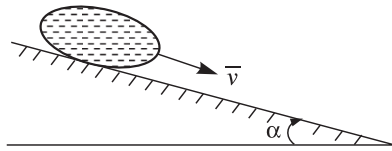


Рис. 19.1.

Рассмотрим еще две схемы реализации подобных нагружений, по-видимому, наиболее простые и удобные для лабораторных исследований [48, 50]. Первая из них показана на рис. 19.1. Гибкая цилиндрическая оболочка (капсула) заполняется испытуемым материалом и помещается на наклонную плоскость. Под действием силы тяжести капсула смещается вниз, перекатываясь подобно гусенице трактора. При этом форма ее все время переходит сама в себя, т. е. остается неизменной. Вектор граничной скорости всегда направлен строго вдоль границы, и величина его постоянна (так как оболочка в процессе скатывания дополнительно не растягивается). Из общих соображений ясно, что за счет искажения формы капсулы течение будет более неоднородным, чем описанное в § 10. Однако в целом оно является течением того же класса, что и эллиптические течения. Степень неоднородности течения можно рассчитать и при интерпретации учесть необходимые поправки.

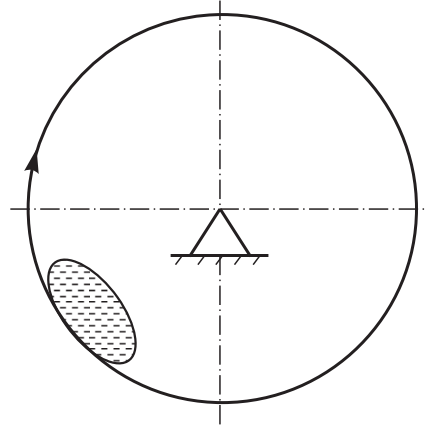


Рис. 19.2.

Преимуществом схемы являются ее исключительная простота, точные данные о действующих силах (без силовых измерений) и высокая точность измерения скорости деформаций, если они незначительны. (Чем медленнее капсула скатывается вниз, тем точнее измеряется ее скорость.) Недостаток также очевиден — рассмотренная методика применима либо к вязким и сложным реологическим жидкостям, либо к пластическим телам с низким пределом пластичности. Для расширения диапазона можно использовать схему нагружения, указанную в [3]. Интересно отметить, что схема испытаний рис. 19.1 была также предложена в работе [269].

Рассмотренный тип нагружения можно отнести к мягкому: задаются напряжения (угол ската) и меряются скорости деформаций. В схеме, показанной на рис. 19.2, напротив: задаются скорости и измеряются напряжения. Здесь капсула с материалом помещается на внутреннюю поверхность барабана, которому придается вращение

с постоянной угловой скоростью. Вследствие этого капсула перемещается в положение, при котором скорость ее скатывания становится равной заданной скорости вращения барабана. Измеряя угол ската, можно вычислить все напряжения.

Необходимо отметить большую наглядность всех опытов. Например, если свойства материала меняются во времени, то хорошо видно, как при постоянной скорости вращения барабана устойчивое и «стационарное» положение капсулы постепенно смещается книзу (опыты с тестом). Рассмотренные схемы удобны также для исследования вибровязких свойств сыпучих сред.

Отметим одно обстоятельство общего характера. Пусть в безграничном пространстве задано некоторое однородное течение сплошной среды. Формально это означает, что задано некоторое поле скоростей, линейное по координатам. Если вместо исходных координат взять теперь другую систему (возможно, вращающуюся относительно исходной), то получается некоторое альтернативное описание того же самого течения. Хотя полученное течение и совпадает с исходным (при квазистатическом нагружении), тем не менее внешне оно может выглядеть совершенно по-другому. В гл. 3 это обстоятельство использовалось для того, чтобы дать различные интерпретации одного и того же процесса деформирования. Это обстоятельство можно использовать и для поиска новых технических решений.

В качестве примера можно привести [46, 51], где описаны два устройства для реализации одного и того же течения. Не останавливаясь на технических деталях, отметим работы [44, 47], в которых описаны устройства для реализации течений эллиптического вида.

§ 20. Псевдовязкость сыпучих сред и задачи обогащения полезных ископаемых

Вначале рассмотрим одно свойство сыпучих сред, связанное с внешним сухим трением между ее частицами.

1. Основной закон, который управляет поведением сыпучих сред, — это закон сухого трения Кулона — Амантона. Согласно этому закону, два соприкасающихся тела начинают скользить друг по другу, когда касательное усилие T достигает определенной доли от нормального усилия P :

$$T = f \cdot P. \quad (1)$$

Здесь f — коэффициент внешнего трения, который зависит только от свойств поверхности контакта и не зависит ни от величины сжатия P , ни от площади контакта и скорости сдвига. Несмотря на привыч-

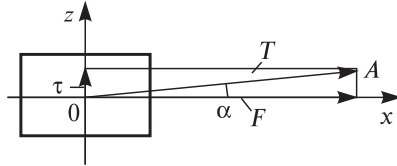


Рис. 20.1.

ность и внешнюю простоту, соотношение (1) содержит в себе одно неожиданное, на первый взгляд, следствие. Оказывается, что сухое трение в определенном смысле может проявляться в принципиально другом режиме, а именно, как трение вязкое. Это проще всего проиллюстрировать на следующем примере.

Пусть на жесткой горизонтальной поверхности покоится тело весом P (рис. 20.1, вид сверху). Приложим к телу в направлении $0z$ сдвигающую силу τ . Будем считать, что эта сила мала, так что порог трения она не преодолевает и поэтому тело остается неподвижным. Затем приложим в направлении $0x$ силу F , которую будем увеличивать монотонно от нуля. В какой-то момент времени порог трения будет преодолен и тело начнет скользить по горизонтальной поверхности. Легко видеть, что скольжение будет происходить не в направлении $0x$, а в направлении $0A$, причем

$$\sqrt{F^2 + \tau^2} = f \cdot P, \quad \sin\alpha = \frac{\tau}{P \cdot f}, \quad v_z = v \sin\alpha. \quad (2)$$

Здесь v — скорость тела, v_z — составляющая скорости в направлении $0z$. Из равенств (2) следует, что

$$v_z = \frac{v}{Pf} \tau. \quad (3)$$

Последнее равенство показывает, что скорость тела в направлении $0z$ пропорциональна силе τ , действующей в этом же направлении. Иными словами, закон трения проявляется как вязкий (точнее, псевдовязкий). Это свойство хорошо известно и используется в ряде устройств [270].

Внутреннее трение сыпучих материалов является следствием внешнего трения частиц, из которых сложены эти материалы. Поэтому можно ожидать, что при определенных условиях эффекты, подобные (3), будут наблюдаться и для сыпучих сред. Какими должны быть эти условия? Из равенств (2), (3) прежде всего ясно, что псевдовязкость может обнаружить себя только на фоне сил, которые преодолели порог сухого трения. Поэтому необходимо реализовать такое деформирование сыпучей среды, которое обеспечит относительные проскальзывания между ее частицами. Причем для получения заметного эффекта необходимо задать достаточно большую величину

ну относительного скольжения. Действительно, если в (3) от скоростей перейти к смещениям, то, очевидно, получим

$$u_z = \frac{u}{P \cdot f} \tau, \quad (4)$$

где u — величина относительного скольжения; u_z — составляющая скольжения в направлении действия τ . В равенстве (3) выражение $u/P \cdot f$ играет роль коэффициента вязкости. При этом главным является то обстоятельство, что равенства (3), (4) не содержат никакого порога: какой бы малой ни была сила τ , перемещение в направлении действия этой силы все равно будет реализовано. Для увеличения компоненты u_z необходимо, чтобы одна из величин τ или $u/P \cdot f$ была достаточно большой. Практически возможности в управлении величинами τ и $P \cdot f$ весьма ограничены, поэтому остается только один путь — увеличение относительного скольжения u .

Наиболее интенсивное скольжение происходит на поверхностях локализации сдвигов. Если они расположены вертикально, то механизм псевдовязкости приведет к погружению тяжелых частиц и всплытию легких в зоне локализации. В естественных условиях они имеют значение для переноса масс в зонах разломов земной коры.

Представляет интерес также случай, когда эффекты псевдовязкости проявляются во всем объеме сыпучего материала. Равенство (4) показывает, что в этом случае необходимо реализовать значительные относительные сдвиги во всем объеме. С этой точки зрения более удобным является сложное нагружение с непрерывным поворотом осей тензора деформаций.

2. Итак, в режиме псевдовязкого деформирования в сыпучей среде проявляется закон, подобный закону Архимеда в обычной вязкой жидкости. Это обстоятельство можно использовать для разделения сыпучих сред по удельному весу частиц, т. е. для решения задачи обогащения.

Представляет интерес случай, когда тяжелая частица имеет размеры, гораздо меньшие, чем частицы, из которых состоит внешняя среда, например, размеры, достаточные для проникания частицы через трехмерный лабиринт порового пространства. В этом случае псевдовязкое течение также обеспечивает обогащение. Практически важным является также то обстоятельство, что основной эффект сохраняется и в случае, когда поровое пространство заполнено водой.

Для реализации процесса возможны самые различные технические решения. Некоторые примеры технических решений рассмотрены в [41, 43].

§ 21. Приложения эффектов сложного нагружения для обработки неупругих материалов

1. Способ создания (уплотнения) однородных плотных упаковок частиц порошковых материалов.

В некоторых технологических процессах возникает проблема создания однородных плотных упаковок частиц порошковых материалов. Причем эти упаковки должны иметь минимальное число дефектов, особенно крупных (арок, дислокаций, вакансий). Идеальным был бы способ формирования упаковки по одной частице, когда очередная частица непосредственно укладывается в нужное место упаковки. Однако технически этот способ нереален, поэтому необходимо ставить задачу по-другому. А именно, пусть уже задана некоторая упаковка частиц, которая получена произвольным образом (например, путем засыпки материала струей или дождем). При этом исходная упаковка частиц будет неоднородной, как правило, рыхлой и, главное, будет содержать множество дефектов. Причем большая часть этих дефектов — довольно устойчива к внешней обжатии. Теперь задача сводится к тому, чтобы улучшить качество исходной упаковки.

Обычно для уплотнения используется вибрация. Этот способ имеет ряд недостатков. Вибрация приводит к сегрегации, а при большой интенсивности и к вихревым течениям, а значит, и к неоднородности упаковки. Кроме того, вибрация требует большого времени.

Рассмотренные выше способы нагружения приводят к деформированию всего объема материала, причем к деформированию квазистатическому и близкому к однородному. Вследствие свойства псевдовязкости (§ 20) дефекты разрушаются и упаковка переходит в плотное состояние с меньшим числом дефектов [271, 272].

2. Реализация больших пластических деформаций. Обратимся к эффекту направленного переноса. На рис. 21.1 изображены картины деформирования области, близкой к кругу. В начальном положении половина области закрашена в черный цвет, другая половина — в белый.

Видно, что длина границы раздела неограниченно увеличивается. При этом внешняя деформация области имеет порядок $1-b/a$, т. е. мала (a, b как и прежде полуоси эллипса), однако за счет эффекта накопления внутренних деформаций может быть сколь угодно большой. Это свойство можно использовать для реализации различных процессов обработки материалов давлением [273].

3. Композиционные материалы. Осуществим теперь сложное нагружение образца, составленного из различных материалов. Тогда, подбирая различные исходные сочетания компонентов одинаковой плотности, можно получить различные композиционные материалы (рис. 21.2) [42].

4. Операция усреднения. Эффект направленного переноса приводит к смещению материалов или их усреднению (в условиях отсутст-



Рис. 21.1.

Рис. 21.2.

вия переноса массы по радиусу). Нетрудно определить параметры процесса, которые обеспечивают одинаковое содержание компонент разных типов в любом наперед заданном объеме пробы [45].

Возможны и некоторые другие приложения [49].

§ 22. Задача о формировании шара под действием сил поверхностного натяжения

Приливные деформации приводят к преобразованию тела из эллипсоида (в первом приближении) в эллипсоид с теми же осями, но повернутыми относительно тела на определенный угол. Приближенно данное преобразование можно считать аффинным. Данный подход можно применить к решению еще одной задачи, возникающей в некоторых технологических процессах получения гранулированных материалов.

Согласно классическому опыту Плато, жидкость в свободном состоянии принимает форму шара. Это свойство используется при изготовлении ряда гранулированных материалов. Здесь возникает задача анализа эволюции изолированного объема жидкости под действием сил поверхностного натяжения. Представляет интерес получение количественных оценок как для линейно-вязких, так и для сред с более сложной реологией. В строгой постановке задача является весьма трудной в силу нелинейности, а также в связи с ее трехмерностью и необходимостью анализа инерционных эффектов. С учетом неизбежной приближенности «строгой» постановки для описания реальной ситуации представляется необходимым поиск идеализации, которая позволила бы учесть основные черты реального процесса и преодолеть трудности «строгой» постановки.

Пусть в исходном состоянии объем имеет форму эллипсоида. При подходящих внешних условиях под действием сил поверхностного натяжения объем через определенное время приобретает форму шара. Таким образом, результирующее преобразование является аффинным. С достаточной степенью точности можно предположить, что и в промежуточные моменты времени объем имеет форму эллипсоида, т. е. в своей эволюции он проходит через последовательность эллипсоидов. Следовательно, задача сводится к исследованию однородного течения с учетом сил инерции и, возможно, сложной реологии среды. Как отмечалось, течение происходит под действием сил поверхностного натяжения. В реальных условиях процесс осуществляется в присутствии внешней среды (это позволяет приблизиться к условиям невесомости), поэтому энергия

поверхностного натяжения тратится также на вовлечение в движение внешней среды. Решение задачи в рамках указанной постановки изложено в работах [12–15].

§ 23. Модели пластичности и рулонированные оболочки

Вернемся к рис. 9.7 (см. с. 119). На нем четко видны два семейства линий скольжения, которые близки к логарифмическим спиралам. В эксперименте непосредственно можно наблюдать механизм деформирования сыпучего материала в данных условиях.

Полученные результаты позволяют яснее понять механизм пластической деформации вообще. Классические теории пластичности дают два семейства линий скольжения. Главным является то, что оба семейства совершенно равноправны; на них действуют одинаковые касательные напряжения, реализуются одинаковые сдвиги и т. д. При этом линии между собой пересекаются, образуя сетку. Трудно представить себе одновременное функционирование пересекающихся линий.

В поставленном эксперименте получены прямые и непосредственные данные о механизме скольжения — линии скольжения из разных семейств функционируют попеременно. Для металлов подобный механизм функционирования получил название турбулентного пластического течения [274].

Глядя на картины деформирования на рис. 9.7, нельзя не заметить их поразительное сходство с линиями скольжения, которые получаются при решении задачи о распределении напряжений вокруг цилиндрической выработки методами теории предельных состояний. Это сходство показывает адекватность моделирования горных пород сыпучими материалами и позволяет надеяться на полезность такого моделирования для разработки расчетных схем о деформировании подземных выработок с учетом структуры горного массива.

Наличие структуры приводит к необходимости учитывать в математических моделях пластичности внутренние переменные, и в частности, внутреннее микровращение. Именно микровращение позволяет описать несимметричность функционирования линий скольжения из различных семейств. В предельном случае одно из семейств линий может вообще не функционировать, так что все сдвиги будут сосредоточены только на втором семействе.

Последний режим представляет интерес для описания деформирования рулонированных оболочек. Данная идея возникла из следующих соображений. Обратимся к классическому решению задачи Ламе для толстостенной цилиндрической трубы. В силу осевой сим-

метрии задачи касательные напряжения отсутствуют: $\sigma_{r\theta} = 0$ (r, θ — полярные координаты). Но это означает, что если в трубе сделать произвольное число разрезов по окружностям $r = \text{const}$, то на работе конструкции эти разрезы никак не отразятся. Следовательно, все сечение трубы можно представить набранным из тонких отдельных колец, вплотную вставленных друг в друга; кольца работают так, что условия на контактах между ними на работе всей конструкции не сказываются. Как известно, в такой схеме материал нагружен весьма неравномерно, причем если внешний радиус трубы превосходит внутренний более чем в 3–4 раза, то дальнейшее увеличение толщины трубы на переход внутренней области в пластическое состояние

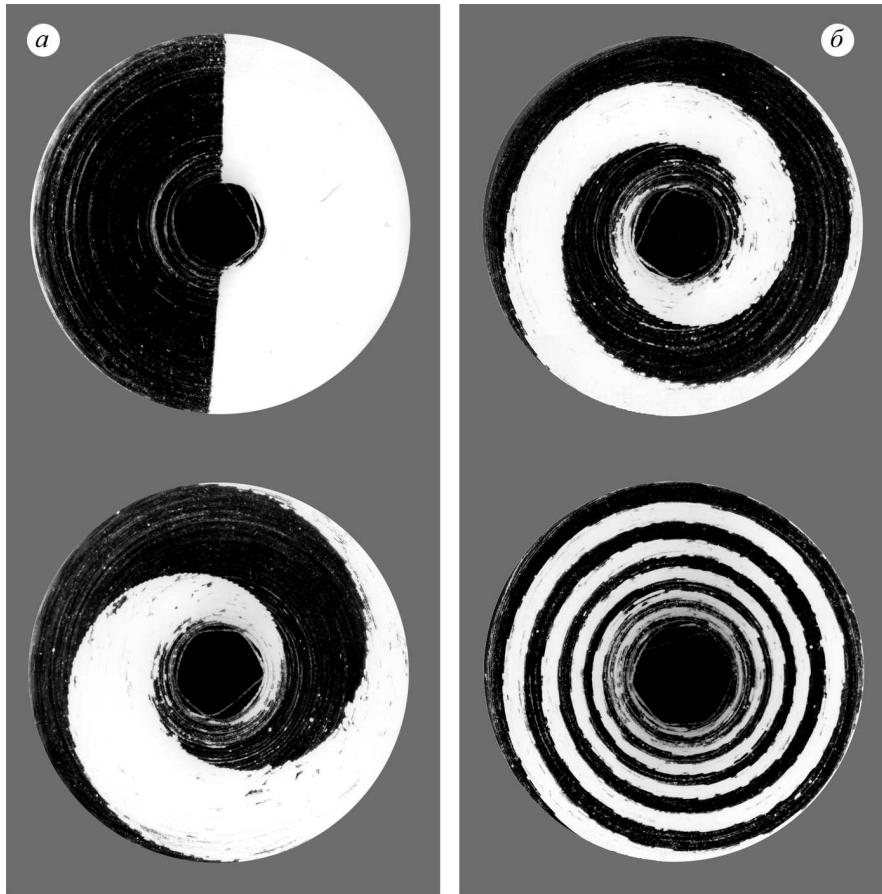


Рис. 23.1.

(разрушение) практически не влияет. Поэтому, естественно, возникает идея: нельзя ли работу упругих колец организовать таким образом, чтобы между ними мобилизовались силы внешнего трения, которые внесли бы свой вклад в «противостояние» внутреннему давлению.

Разрежем кольца по некоторому радиусу и склеим их со сдвигом в один шаг (рис. 23.1, *a*, *б*). Полученная конструкция отличается от предыдущей принципиально. Можно сказать, что за счет проскальзывания слоев удастся включить в работу материал, удаленный от внутренней границы и, следовательно, приложенную нагрузку распределить более равномерно, увеличив тем самым несущую способность конструкции. На рис. 23.1 показана модель подобной конструкции. Модель представляет собой рулон фотопленки, которая под действием внутренних усилий постепенно раскручивается. Четко виден эффект дифференциального вращения, связанный с относительным скольжением ее слоев.

Таким образом, здесь видна аналогия с дифференциальным вращением, которое возникает в небесном теле под действием приливных сил.

Для описания деформирования рулонированных оболочек можно использовать модели пластичности, описанные в [3, 275]. За счет выбора условий трения на контакте можно добиться значительного увеличения несущей способности подобной конструкции. Эти вопросы изложены в [3, 276, 277].

Библиографический список

1. Revuzhenko-af.narod.ru
2. **Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И.** О возможном механизме перемещения масс Земли // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 272, № 5. — С. 1097–1099.
3. **Ревуженко А.Ф.** Механика упруго-пластических сред и нестандартный анализ. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 2000. — 428 с.
4. **Ревуженко А.Ф.** Механика сыпучей среды. — Новосибирск: ЗАО ИПП «ОФСЕТ», 2003. — 373 с.
5. **Revuzhenko A.Ph.** Mechanics of Granular. — Berlin; Heidelberg: Media Springer-Verlag, 2006. — 308 p.
6. **Revuzhenko A.** Experimental Detection of constitutive behaviour and self-organization // Modern Approaches to Plasticity / ed. D. Kolymbas. — Amsterdam; L.; N. Y.; Tokyo: Elsevier, 1993. — P. 727–735.
7. **Ревуженко А.Ф.** О приливном механизме переноса масс // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1991. — № 6. — С. 13–20.
8. **Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И.** Приливное деформирование планет: опыт экспериментального моделирования // Геотектоника. — 1991. — № 6. — С. 21–34.
9. **Lavrikov S.V., Revuzhenko A.Ph.** Complex loading of heterogeneous materials with redistribution of internal mass // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. — 1998. — Vol. 29. — P. 85–91.
10. **Бушманова О.П., Ревуженко А.Ф.** Об эффекте направленного переноса масс при сложном нагружении // Вычислительные технологии. — 1999. — Т. 4, № 3. — С. 36–41.
11. **Григорьев Ю.М., Ревуженко А.Ф.** Пространственная задача о переносе масс приливными волнами // Препринт № 8. — НГУ, 1999.
12. **Ревуженко А.Ф.** Образование шара из свободного объема неньютоновской капиллярной жидкости // Докл. АН СССР. — 1987. — Т. 295, № 5. — С. 1070–1073.
13. **Димов А.И., Ревуженко А.Ф.** Образование шара из свободного объема жидкости под действием сил поверхностного натяжения // Изв. СО АН СССР. Технические науки. — 1989. — Вып. 6. — С. 66–71.
14. **Басманова Т.Ф., Ревуженко А.Ф.** Влияние внешней среды на образование шара из объема капиллярной жидкости // Сиб. физ.-техн. журн. — 1991. — Вып. 3. — С. 10–15.

15. **Адилбеков Е.Н., Ревуженко А.Ф.** Роль внешней среды при стягивании объема капиллярной жидкости к шару // Сиб. физ.-техн. журн. — 1993. — Вып. 1.
16. **Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф.** О псевдовязкости сыпучих сред // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1996. — № 3. — С. 18–26.
17. **Ревуженко А.Ф., Чаньшев А.И., Шемякин Е.И.** Математические модели упруго-пластических тел // Актуальные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. — Новосибирск: Наука, 1985.
18. **Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И.** О сложном нагружении упруго-пластических тел // Современные проблемы механики сплошных сред. — М., 1985.
19. **Ревуженко А.Ф.** Один класс сложных нагружений неупругой среды // ПМТФ. — 1986. — № 5. — С. 150–158.
20. **Аннин Б.Д., Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И.** Механика деформированного твердого тела в СО АН СССР // ПМТФ. — 1987. — № 4. — С. 66–86.
21. **Ревуженко А.Ф.** О самых простых течениях сплошной среды // Докл. АН СССР, 1988. — Т. 303, № 1. — С. 54–58.
22. **Бобряков А.П., Косых В.П., Ревуженко А.Ф.** О временных структурах в процессах деформирования сыпучей среды // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1990. — № 2. — С. 29–39.
23. **Revuzhenko A.Ph., Shemyakin E.I.** The modelling of the Motion of the Inner Masses of the Earth // International Conference on Mechanics, Physics and Structure of Materials «A Celebration of Aristotle's 23 Centuries». — Thessaloniki, Greece, 1990.
24. **Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф.** Об одном методе испытания неупругих материалов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1990. — № 4. — С. 178–182.
25. **Ревуженко А.Ф.** Диссипативные структуры в сплошной среде // Изв. вузов. Сер. Физика. — 1992. — № 4. — С. 94–104.
26. **Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф.** Способ получения регулярной структуры в деформируемой области сплошной среды // ПМТФ. — 1993. — № 1. — С. 137–144.
27. **Revuzhenko A.Ph.** Vorgänge der Selbstorgani-Sierung in den Boden // Mitteilungen der Deutschen Bodenkundlichen Gesellschaft. — 1993. — Bd 71. — S. 77–85.
28. **Колимбас Д., Лавриков С.В., Ревуженко А.Ф.** Однородное деформирование сыпучей среды: теория и эксперимент // ПМТФ. — 1994. — № 6. — С. 114–121.
29. **Ревуженко А.Ф.** Однородные сдвиговые течения сыпучей среды // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1996. — № 1. — С. 3–14.
30. **Ревуженко А.Ф.** Однородная деформация сплошной среды // ПМТФ. — 1997. — Т. 38, № 3.
31. **Бобряков А.П., Косых В.П., Ревуженко А.Ф.** О течении сыпучей среды с возможным неограниченным скольжением по поверхностям локализации // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1997. — № 3. — С. 37–42.
32. **Lavrikov S.V., Revuzhenko A.Ph.** Complex loading of heterogeneous materials with redistribution of internal mass // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. — 1998. — Vol. 29. — P. 85–91.

33. **Ревуженко А.Ф., Косых В.П., Бобряков А.П.** О локализованном пластическом течении геосреды вокруг жесткого включения // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1998. — № 6. — С. 27–34.
34. **Колимбас Д., Лавриков С.В., Ревуженко А.Ф.** Об одном методе анализа математических моделей сред при сложном нагружении // ПМТФ. — 1999. — Т. 40, № 5. — С. 133–142.
35. **Lavrikov S.V., Revuzhenko A.Ph.** Hypoplastic simulation of complex loading path Constitutive Modelling of Granular Materials / D. Kolymbas (ed.). — Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer-Verlag, 2000.
36. **Григорьев Ю.М., Ревуженко А.Ф.** Пространственная задача о переносе масс приливными волнами // Вычислительные технологии. — 2000. — Т. 5, № 4. — С. 40–54.
37. **Ревуженко А.Ф.** Перенос масс Земли приливными волнами // Большая Медведица. — 2002. — № 1. — С. 75–76.
38. **Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф.** Экспериментальное моделирование спиральных линий скольжения в сыпучих материалах // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 2009. — № 2. — С. 3–9.
39. **Краус Е.И., Лавриков С.В., Медведев А.Е., Ревуженко А.Ф., Шабалин И.И.** Моделирование эффекта дифференциального вращения при сложном нагружении сыпучих сред // ПМТФ. — 2009. — Т. 50, № 4. — С. 139–149.
40. **Ревуженко А.Ф., Клишин С.В.** Об одном методе сопоставления моделей молекулярной динамики с континуальными моделями сплошных сред // Проблемы и достижения прикладной математики и механики: к 70-летию академика В.М. Фомина: сб. науч. тр. — Новосибирск: Параллель, 2010. — С. 577–585.
41. **А.с. № 1167803 (СССР).** Устройство для гравитационного разделения частиц / Бобряков А.П., Бочкарев Г.Р., Ревуженко А.Ф. и др. — 1984.
42. **А.с. № 1199452 (СССР).** Способ получения композиционных заготовок и устройство для его осуществления / Шемякин Е.И., Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф. и др. — Бюл. № 47, 1985.
43. **А.с. № 1311790 (СССР).** Устройство для разделения сыпучего материала / Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б. и др. — 1985.
44. **А.с. № 1132192 (СССР).** Устройство для испытания образцов сыпучих материалов / Шемякин Е.И., Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф. и др. — Бюл. № 48, 1984.
45. **А.с. № 1197713 (СССР).** Способ смешения сыпучих материалов / Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И., Бобряков А.П. — Бюл. № 46, 1985.
46. **А.с. № 1308879 (СССР).** Устройство для испытаний сыпучих материалов / Ревуженко А.Ф., Бобряков А.П. — Бюл. № 17, 1987.
47. **А.с. № 1332187 (СССР).** Устройство для испытания образцов сыпучих материалов / Ревуженко А.Ф., Бобряков А.П. — Бюл. № 31, 1987.
48. **А.с. № 1582078 (СССР).** Способ определения реологических характеристик неупругих материалов / Ревуженко А.Ф. — Бюл. изобр. № 28, 1990.
49. **А.с. № 1668220 (СССР).** Бункер для трудносыпучего материала / Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф. — Бюл. № 29, 1991.
50. **А.с. № 1755114 (СССР).** Способ реометрического исследования неупругих материалов / Ревуженко А.Ф. — Бюл. № 30, 1992.

51. А.с. № 1778626 (СССР). Устройство для определения реологических свойств материала / Ревуженко А.Ф., Бобряков А.П. — Бюл. № 44, 1992.
52. **Ньютон И.** Математические начала натуральной философии: пер. с лат. // Собр. тр. акад. А.Н. Крылова. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936. — Т. 7. — 696 с.
53. **Euler L.** Novi commentarii Academiae Scientiarum petropolitanae I. (1748–48) 1750. — С. 428–443.
54. **Дарвин Дж.Г.** Приливы и родственные им явления. — М.: Наука, 1965. — 251 с.
55. **Авсюк Ю.Н.** Приливные силы и природные процессы. — М.: Изд-во ОИФЗ РАН, 1996. — 188 с.
56. **Авсюк Ю.Н.** Поправка в приливную силу // Докл. АН СССР. — 1976. — Т. 229, № 5. — С. 1071–1074.
57. **Авсюк Ю.Н.** О приливной силе // Письма в астрономический журнал. — 1977. — Т. 3. — С. 184–188.
58. **Авсюк Ю.Н.** Приливная сила в случае невозмущенного (кеплерова) движения исследуемого тела и в случае возмущенного движения // Физика Земли. — 2001. — № 11. — С. 40–49.
59. **Голдрайх П.** История лунной орбиты // Приливы и резонансы в солнечной системе. — М.: Мир, 1975. — С. 97–129.
60. **Макдональд Г.Дж.Ф.** Приливное трение // Приливы и резонансы в солнечной системе. — М.: Мир, 1975. — С. 9–96.
61. **Рускол Е.Л.** Происхождение Луны. — М.: Наука, 1975. — 188 с.
62. **Шмидт О.Ю.** Происхождение Земли и планет. — М.: Изд-во АН СССР, 1962. — 130 с.
63. **Сафронов В.С.** Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. — М.: Наука, 1969. — 244 с.
64. **Harris A.W., Kaula W.M.** A co-accretion model of satellite formation. Presented at IAU Colloquium No. 28 // Icarus. — 1975. — Vol. 24. — P. 516–524.
65. **Смит Дж.В.** Развитие системы Земля — Луна и выводы применительно к геологии ранней Земли // Ранняя история Земли / под ред. Б. Уиндли. — М.: Мир, 1980. — С. 9–28.
66. **Орик Е.Дж.** Tidal deformation and the origin of the moon // Astron. J. — 1961. — Vol. 66. — P. 60–67.
67. **Wood J.A., Mitler H.E.** Origin of the Moon by a modified capture mechanism, or half a loaf is better than a whole one // Lunar Science. — 1974. — Vol. 5. — P. 851–853.
68. **Сорохтин О.Г.** Происхождение Луны и начальные этапы развития Земли // Жизнь Земли. — М.: Изд-во МГУ, 1988. — С. 5–24.
69. **Сорохтин О.Г., Ушаков С.А.** Роль лунных приливов в энергетическом балансе Земли // Жизнь Земли. — М.: Изд-во МГУ, 1988. — С. 24–46.
70. **Сорохтин О.Г., Ушаков С.А.** Происхождение Луны и ее влияние на глобальную эволюцию Земли. — М.: Изд-во МГУ, 1989.
71. **Сорохтин О.Г., Ушаков С.А.** Глобальная эволюция Земли. — М.: Изд-во МГУ, 1991. — 446 с.
72. **Монин А.С., Сорохтин О.Г., Ушаков С.А.** О вкладе лунных приливов в эволюцию Земли // Докл. АН СССР. — 1987. — Т. 293, № 6. — С. 1341–1345.

73. **Садовский М.А., Авсюк Ю.Н.** Глобальные изменения природной среды и варианты объяснения наблюдаемых аномалий в рамках современной геодинамической модели // Глобальное изменение природной среды и климата. — М., 1997.
74. **Садовский М.А., Авсюк Ю.Н.** Причина асейсмичности Антарктиды // Докл. РАН. — 1999. — Т. 314, № 6.
75. **Грушинский Н.П.** Теория фигуры Земли. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Физматлит, 1976. — 512 с.
76. **Клеро А.** Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики. — М.: Изд-во Академии наук СССР, 1947. — Сер. «Классики науки». — 358 с.
77. **Пицетти П.** Основы механической теории фигуры планет. — М; Л.: Гос. тех.-теор. изд-во, 1933. — 170 с.
78. **Лихтенштейн Л.** Фигуры равновесия вращающейся жидкости. — М.: Физматлит, 1965. — 252 с.
79. **Чандрасекхар С.** Эллипсоидальные фигуры равновесия. — М.: Мир, 1973. — 288 с.
80. **Манк У., Макдональд Г.** Вращение Земли. — М.: Мир, 1964. — 384 с.
81. **Ержанов Ж.С., Калыбаев А.А.** Общая теория вращения Земли. — М.: Наука, 1984. — 254 с.
82. **Куликов К.А.** Вращение Земли. — М.: Недра, 1985. — 159 с.
83. **Киселев В.М.** Солнечная активность, приливное трение и вращение Земли за последние 2000 лет // Астроном. журн. — 1981. — Т. 58, вып. 3. — С. 590–596.
84. **Сидоренков Н.С.** Нестабильность вращения Земли // Вестн. РАН. — 2004. — Т. 74, № 8. — С. 701–715.
85. **Перепелкин В.В.** Вращение деформируемой Земли с учетом флуктуационно-диссипативных моментов сил // Механика твердого тела. — 2006. — № 4.
86. **Дычко И.А., Карба П.С.** // О приливном замедлении вращения Земли // Вращение и приливные деформации Земли. — Киев: Наук. думка, 1974. — Вып. 6. — С. 92–95.
87. **Монин А.С.** История Земли. — Л.: Наука, 1977. — 228 с.
88. **Головков В.П., Коломийцева Г.И., Ротанова Н.М.** Динамика главного магнитного поля Земли // Электромагнитные и плазменные процессы от Солнца до ядра Земли. — М.: Наука, 1989. — С. 212–232.
89. **Бенькова Н.П., Долгинов Ш.Ш.** Геомагнитное поле: исследование внутренних и внешних источников со спутников // Электромагнитные и плазменные процессы от Солнца до ядра Земли. — М.: Наука, 1989. — С. 233–246.
90. **Калинин Ю.Д.** Вековые геомагнитные вариации. — Новосибирск: Наука, 1984. — 159 с.
91. **Гаусс К.Ф.** Общая теория земного магнетизма: избр. тр. по земному магнетизму. — М.: Изд-во АН СССР, 1952. — 341 с.
92. **Джекобс Дж.** Земное ядро: пер. с англ. — М.: Мир, 1979. — С. 305.
93. **Моффат Г.** Возбуждение магнитного поля в проводящей среде: пер. с англ. под ред. Я.Б. Зельдовича. — М.: Мир, 1980. — 330 с.
94. **Паркер Е.** Космические магнитные поля, их образования и проявления / пер. с англ. под ред. Я.Б. Зельдовича. — М.: Мир, 1982. — Ч. 1. — 608 с.; Ч. 2. — 479 с.

95. **Elsasser W.M.** Induction effects in terrestrial magnetism. Pt I: Theory // *Phys. Rev.* — 1946. — Vol. 69, N 106.
96. **Elsasser W.M.** Induction effects in terrestrial magnetism. Pt II: The secular variation // *Phys. Rev.* — 1946. — Vol. 70, N 202.
97. **Elsasser W.M.** Induction effects in terrestrial magnetism. Pt III: Electric modes // *Phys. Rev.* — 1947. — Vol. 72, N 821.
98. **Bullard E.C.** The magnetic field within the Earth // *Proc. Roy. Soc. Lond.* — 1949. — Vol. A107. — P. 433–453.
99. **Bullard E.C., Gellman H.** Homogeneous dynamos and terrestrial magnetism // *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* — 1954. — Vol. A247. — P. 41–51.
100. **Backus G.E., Chandrasekhar S.** On Cowling's theorem on the impossibility of self-maintained axi-symmetric homogeneous dynamos // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* — 1956. — Vol. 42, N 105.
101. **Herzenberg A.** Geomagnetic dynamos // *Phil. Trans. Roy. Soc.* — 1958. — Vol. A250, N 543.
102. **Брагинский С.И.** Геомагнетизм и высокие слои атмосферы // *Итоги науки и техники.* — М.: ВИНТИ, 1980. — Т. 5. — С. 96–130.
103. **Брагинский С.И.** Самовозбуждение магнитного поля при движении высокопроводящей жидкости // *ЖЭТФ.* — 1964. — Т. 47, № 9.
104. **Брагинский С.И.** Теория гидромагнитного динамо // *ЖЭТФ.* — 1964. — Т. 47, № 12.
105. **Брагинский С.И.** Геомагнитное динамо // *Изв. АН СССР. Физика Земли.* — 1978. — № 9. — С. 74–90.
106. **Braginsky S.I., Roberts P.H.** A model-Z geodynamo // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* — 1987. — Vol. 38. — P. 327–349.
107. **Braginsky S.I., Roberts P.H.** Equations governing convection in the Earth's core and the geodynamo // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* — 1995. — Vol. 79. — P. 1–97.
108. **Malkus W.V.R.** Precession of the Earth as the cause of geomagnetism // *Science.* — 1968. — Vol. 160. — P. 259–264.
109. **Malkus W.V.R.** An experimental study of global instabilities due to the tidal (elliptical) distortion of a rotating elastic cylinder // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* — 1989. — Vol. 48. — P. 123–134.
110. **Долгинов Ш.Ш.** Исследования магнитных полей планет // *Электромагнитные и плазменные процессы от Солнца до ядра Земли.* — М.: Наука, 1989. — С. 247–261.
111. **Жарков В.Н.** Внутреннее строение Земли и планет. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Физматгиз, 1983. — 416 с.
112. **Овчинников В.М., Адушкин В.В., Ан В.А.** О скорости относительного вращения внутреннего ядра Земли // *Докл. РАН.* — 1998. — Т. 362, № 5. — С. 683–686.
113. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. — М.: Мир, 1969. — Т. 2. — 863 с.
114. **Вегенер А.** Происхождение континентов и океанов. — М.: Наука, 1984. — 285 с.

115. **Штауб Р.** Механизм движений земной коры в приложении к строению земных горных систем. — Л.; М.: Главная редакция геологоразвед. и геофиз. лит-ры, 1938. — 271 с.
116. **Бончковский В.Ф.** Внутреннее строение Земли. — М.: Изд-во АН СССР, 1953. — 175 с.
117. **Кузнецов В.В.** Введение в физику горячей Земли. — Петропавловск-Камчатский: Изд-во Кам. ГУ, 2008. — 367 с.
118. **Кузнецов В.В.** Анизотропия свойств внутреннего ядра Земли // Усп. физ. наук. — 1997. — Т. 167, № 9. — С. 1001–1012.
119. **Ромашев А.Н.** Планета Земля: Гектонофизика и эволюция. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 264 с.
120. **Хаин В.Е., Полетаев А.И.** Ротационная тектоника: Предыстория, современное состояние, перспективы развития // Ротационные процессы в геологии и физике. — М.: КомКнига, 2007. — 528 с.
121. **Ротационные** процессы в геологии и физике. — М.: КомКнига, 2007. — 528 с.
122. **Павленкова Н.И.** Ротационные движения крупных элементов Земли и глобальная геодинамика // Ротационные процессы в геологии и физике. — М.: КомКнига, 2007. — С. 103–114.
123. **Danes Z.F.** Mainstream mantle convection: A geologic analysis of plate motion: discussion // Amer. Assoc. Pet. Geol. Bull. — 1973. — Vol. 57. — P. 410–411.
124. **Маслов Л.А.** Геодинамика литосферы тихоокеанского подвижного пояса. — Хабаровск; Владивосток: Дальнаука, 1996. — 199 с.
125. **Середин Б.Н.** Приливный энергомеханизм движений и деформаций литосферы (системный анализ) // Системные исследования и разработки в геологии. — М.: Наука, 1985. — С. 120–128.
126. **Добролюбов А.И.** Механизмы на гибких и упругих элементах. — Минск: Наука и техника, 1984. — 117 с.
127. **Добролюбов А.И.** Бегущие волны деформации. — Минск: Наука и техника, 1987. — 144 с.
128. **Добролюбов А.И.** Волновые движения деформируемых тел и жидкостей: Кинематика и массоперенос. — Минск: Наука и техника, 1989. — 94 с.
129. **Добролюбов А.И.** Скольжение, качение, волна. — М.: Наука — Физматлит, 1991. — 176 с.
130. **Добролюбов А.И.** Волновой перенос вещества. — Минск: Белорусская наука, 1996. — 304 с.
131. **Гарецкий Р.Г., Добролюбов А.И.** Приливные дискретно-волновые движения и дрейф континентов. — Минск: Геотектоника, 2006. — № 1. — С. 3–13.
132. **Добролюбов А.И.** Глобальный механизм генерации горизонтальных движений земной коры // Докл. АН БССР. — 1982. — Т. 24, № 4. — С. 358–361.
133. **Добролюбов А.И.** О движущем механизме геомагнитного динамо // Доклады Академии наук БССР. — 1988. — Т. 32, № 5. — С. 429–432.
134. **Гарецкий Р.Г., Добролюбов А.И., Левков Э.А., Середин Б.П.** Приливный энергомеханизм глобальной тектоники // Системный подход в геологии (теоретические и прикладные аспекты). II Всесоюз. конф.: тез. докл. — М.: Наука, 1986. — Ч. 2. — С. 324–326.

135. **Гарецкий Р.Г., Добролюбов А.И., Левков Э.А., Середин Б.П.** Дискретно-волновой механизм глобальных горизонтальных перемещений в литосфере // Докл. АН БССР. — 1988. — Т. 32, № 3. — С. 248–251.
136. **Сретенский Л.Н.** Теория волновых движений жидкости. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1977. — 816 с.
137. **Макдональд Г.Дж.Ф.** Приливное трение // Приливы и резонансы в солнечной системе: сб. ст. — М.: Мир, 1975. — С. 9–96.
138. **Голдрайх П., Сотер С.** Q в солнечной системе // Приливы и резонансы в солнечной системе: сб. ст. — М.: Мир, 1975. — С. 248–272.
139. **Каган Б.А.** Глобальное взаимодействие океанских и земных приливов. — Л.: Гидрометеиздат, 1977. — 48 с.
140. **Березкин В.А.** Динамика моря. — М.; Л.: Гидрометеиздат, 1947. — 683 с.
141. **Дронкерс (Dronkers J.J.)** Tidal computations in rivers and coastal waters [Русский перевод: «Расчет приливов в реках и прибрежных водах». — Л.: Гидрометеиздат, 1967. — 291 с.
142. **Ламб Г.** Гидродинамика: пер. с англ. проф. Н.А. Слезкина. — М.; Л.: ОГИЗ, 1947. — 929 с.
143. **Марчук Г.И., Каган Б.А.** Океанские приливы // Математические модели и численные эксперименты. — Л.: Гидрометеиздат, 1977. — 296 с.
144. **Панин В.Е., Лихачев А.А., Гриняев Ю.В.** Структурные уровни деформации твердых тел. — Новосибирск: Наука, 1985. — 229 с.
145. **Панин В.Е., Гриняев Ю.В.** Физическая мезомеханика — новая парадигма на стыке физики и механики деформируемого твердого тела // Физ. мезомех. — 2003. — Т. 6, № 4. — С. 9–36.
146. **Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов /** под ред. В.Е. Панина. — Новосибирск: Наука, 1995. — Т. 1. — 298 с., Т. 2. — 320 с.
147. **Садовский М.А.** Избранные труды: Геофизика и физика взрыва. — М.: Наука, 2004. — 440 с.
148. **Садовский М.А.** Естественная кусковатость горной породы // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 247, № 4. — С. 829–831.
149. **Садовский М.А., Болховитинов Л.Г., Писаренко В.Ф.** О свойстве дискретности горных пород // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1982. — № 12.
150. **Садовский М.А., Писаренко В.Ф., Родионов В.Н.** От сейсмологии к геомеханике. О модели геофизической среды // Вестн. АН СССР. — 1983. — № 1.
151. **Садовский М.А.** О моделях геофизической среды и сейсмического процесса // Горн. журн. — 1984. — № 7.
152. **Родионов В.Н., Сизов И.А., Цветков В.М.** Основы геомеханики. — М.: Недра, 1986.
153. **Садовский М.А.** О значении и смысле дискретности в геофизике // Дискретные свойства геофизической среды. — М.: Наука, 1989.
154. **Садовский М.А., Писаренко В.Ф.** Подобие в геофизике // Природа. Геофизика. — 1991. — № 1.
155. **Садовский М.А.** Прикладная сейсмология последних десятилетий века // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1992. — № 2.
156. **Кочарян Г.Г., Спивак А.А.** Динамика деформирования блочных массивов горных пород. — М.: ИКЦ «Академкнига», 2003. — 423 с.

157. **Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б., Шемякин Е.И.** О механизме деформирования сыпучего материала при больших сдвигах // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1974. — № 3. — С. 130–133.
158. **Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б., Шемякин Е.И.** Несимметрия пластического течения в сходящихся осесимметричных каналах // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 246, № 3. — С. 572–574.
159. **Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И.** Однородный сдвиг сыпучего материала. Локализация деформаций // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1983. — № 5. — С. 7–21.
160. **Ревуженко А.Ф.** О структурах пластического деформирования // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1987. — № 5. — С. 3–10.
161. **Крамаренко В.И., Ревуженко А.Ф.** О формировании блочной структуры при сдвиге сыпучей среды // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1988. — № 2. — С. 3–10.
162. **Бобряков А.П., Косых В.П., Ревуженко А.Ф.** О временных структурах в процессах деформирования сыпучей среды // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1990. — № 2. — С. 29–30.
163. **Лавриков С.В., Ревуженко А.Ф.** Об устойчивости деформирования блочного массива вокруг выработки // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1991. — № 1. — С. 37–43.
164. **Ревуженко А.Ф.** Диссипативные структуры в сплошной среде // Изв. вузов. Физика. — № 4. — 1992. — С. 94–104.
165. **Revuzhenko A.** Vorgnge der Selbstorgani-Sierung in den Boden // Mitteilungen der Deutschen Bodenkundlichen Gesellschaft. — 1993. — Bd 71. — P. 77–85.
166. **Бушманова О.П., Ревуженко А.Ф.** О пластическом деформировании в условиях локализации сдвигов на дискретной системе линий // Физическая мезомеханика. — 2002. — Т. 5, № 3. — С. 9–16.
167. **Ревуженко А.Ф.** Об использовании в механике твердого тела концепции пространства, наделенного иерархией структурных уровней // Физическая мезомеханика. — 2003. — Т. 6, № 4. — С. 73–83.
168. **Ревуженко А.Ф.** Неархимедовое пространство как основа математического аппарата геомеханики. Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: сб. ст. к 75-летию Е.И. Шемякина. — М.: Физматлит, 2006. — С. 605–626.
169. **Лавриков С.В., Микенина О.А., Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И.** Концепция неархимедова многомасштабного пространства и модели пластических сред со структурой // Физическая мезомеханика. — 2008. — Т. 11, № 3. — С. 45–60.
170. **Механика** — от дискретного к сплошному. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. — 344 с.
171. **Ревуженко А.Ф.** Об использовании в теории пластичности методов неархимедова анализа // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Механика предельного состояния. — 2010. — № 2 (8). — С. 439–451.
172. **Спивак А.А., Кишкина С.Б.** Прецессия структурных блоков земной коры // Триггерные эффекты в геосистемах: материалы Всероссийского семинара

- совещания, г. Москва 22–24 июня 2010 г. / под ред. акад. РАН В.В. Адушкина, проф. Г.Г. Кочаряна. — М.: Геос, 2010. — С. 309–316.
173. **Матвеев П.С.** О возможности использования результатов наклономерных наблюдений для исследования особенностей строения земной коры // Вращение и приливные деформации Земли. — Киев: Наук. думка, 1970. — Вып. 1. — С. 72–86.
174. **Дычко И.А., Панченко Н.И.** Развитие геофизических и астрономических исследований в Полтавской гравиметрической обсерватории за 50 лет // Вращение и приливные деформации Земли. — Киев: Наук. думка, 1976. — Вып. 8. — С. 3–19.
175. **Кутный А.М.** Исследование приливных наклонов в обвалоопасной зоне (шурфы № 2 и № 4) // Вращение и приливные деформации Земли. — Киев: Наук. думка, 1980. — Вып. 12. — С. 47–50.
176. **Машинский Э.И., Кочегаров Г.Г.** Квазимикропластическая неупругость горных пород // Докл. АН СССР. — 1992. — Т. 324, № 6. — С. 1175–1178.
177. **Машинский Э.И., Кочегаров Г.Г., Кокшаров В.З., Чаплыгин В.Н.** Экспериментальные исследования квазимикропластичности пород при деформации сжатием // Геология и геофизика. — 1994. — № 12. — С. 131–137.
178. **Машинский Э.И., Дьяков Г.Н.** Микропластическая анизотропия при деформировании сжатием // Геофизика. — 1997. — № 6. — С. 44–46.
179. **Машинский Э.И.** Эффект Портевина — ле Шателье в осадочных породах в сейсмическом диапазоне деформаций // Теория и практика вибросейсмического зондирования земной коры. — Новосибирск: Изд-во ИГиГ СО АН СССР, 1988. — С. 66–72.
180. **Машинский Э.И.** Процессы квазимикропластичности и нелинейная сейсмика // Известия РАН. Физика Земли. — 1994. — № 2. — С. 3–10.
181. **Машинский Э.И.** Энергия квазимикропластической деформации горных пород // Геология и геофизика. — 1996. — Т. 37, № 5. — С. 111–115.
182. **Машинский Э.И.** Нелинейно-неупругие сейсмические эффекты и расширение возможностей методики ПГР // Геофизика. — 1999. — № 6. — С. 20–23.
183. **Машинский Э.И.** Нелинейность квазистатической связи напряжение — деформация: зависимость от уровня механической энергии // Геофизика. — 2001. — № 2. — С. 37–41.
184. **Машинский Э.И.** Влияние микропластичности на статические и динамические модули упругости горных пород // ФТПРПИ. — 2002. — № 3. — С. 11–18.
185. **Машинский Э.И.** Физические причины различия статических и динамических модулей упругости горных пород // Геология и геофизика. — 2003. — Т. 44, № 9. — С. 953–959.
186. **Машинский Э.И.** Экспериментальные соотношения напряжение — деформация и амплитудная зависимость скоростей волн в осадочных породах // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 2003. — № 1. — С. 10–17.
187. **Машинский Э.И.** Девиация кривых напряжение — деформация и амплитудная зависимость скоростей волн // Рос. геофиз. журн. — 2004. — Т. 34, № 33. — С. 4–11.

188. **Mashinskii E.I.** Non-linear stress-strain relation in sedimentary rocks and its effect on seismic wave velocity // *Geophysica*. — 2005. — Vol. 41, N 1–2 (Fin.).
189. **Триггерные** эффекты в геосистемах // Тез. докл. семинара-совещания (- Москва, июнь 2010 г.). — М.: ИГД РАН, 2010. — 105 с.
190. **Триггерные** эффекты в геосистемах // Материалы Всерос. семинар-совещ., г. Москва 22–24 июня 2010 г. / под ред. акад. РАН В.В. Адушкина, проф. Г.Г. Кочаряна. — М.: Геос, 2010. — 348 с.
191. **Varga P.** Connection between lunar solar and loading effects and the outbreak of earthquakes // *Proc. 9 Int. Symp. Earth Tides*. — N. Y., Aug. 17–22, 1981. — Stuttgart, 1983. — P. 663–668.
192. **Шабаров А.Н., Тарасов Б.Г.** О влиянии на напряженно-деформированное состояние горных массивов волн земных приливов // *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых*. — 2004. — № 1. — С. 62–71.
193. **Яковлев Д.В., Тарасов Б.Г.** Ритмы земных приливов и вариации интенсивности горных ударов // *Проблемы геодинамической безопасности: II Междунар. рабочее совещ. 24–27 июня 1997 г.* — СПб.: ВНИМИ, 1997.
194. **Яковлев Д.В., Тарасов Б.Г.** Энергетика техногенных сейсмических событий и приливные циклы лунного месяца // *Проблемы геодинамической безопасности: II Междунар. рабочее совещ. 24–27 июня 1997 г.* — СПб.: ВНИМИ, 1997.
195. **Яковлев Д.В., Тарасов Б.Г.** Земной прилив и его отражение в статистике геодинамической активности // *Горная геомеханика и маркшейдерское дело. 70 лет ВНИМИ*. — СПб., 1999.
196. **Яковлев Д.В., Тарасов Б.Г.** Динамика геологической среды в циклах Земли и Солнца и аварийность инженерных объектов // *Геодинамическая и экологическая безопасность при освоении месторождений газа, его транспортировке и хранении: III Междунар. совещ. 27–29 июня 2001 г.* — СПб., 2001.
197. **Козырев Н.А.** О связи тектонических процессов Земли и Луны // *Избранные труды / сост. А.Н. Дадаев, Л.С. Шихобалов*. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1991. — 448 с.
198. **Green J.** Lunar Defluidization and Volcanism. [Downey (California)]: North American Aviation, Inc., 1964.
199. **Авсюк Ю.Н.** Механическая интерпретация некоторых особенностей лунной сейсмичности // *Докл. АН СССР*. — 1983. — Т. 268, № 1. — С. 51–55.
200. **Садовский М.А., Николаев А.В.** Новые методы сейсмической разведки: Перспективы развития // *Вестн. АН СССР*. — 1982. — № 1.
201. **Рыкунов Л.Н., Хаврошкин О.Б., Цыплаков В.В.** Временные вариации высокочастотных сейсмических шумов // *Физика Земли*. — 1979. — № 11. — С. 72–77.
202. **Рыкунов Л.Н., Хаврошкин О.Б., Цыплаков В.В.** Лунно-солнечная приливная периодичность в линиях спектров временных вариаций высокочастотных микросейсм // *Докл. АН СССР*. — 1980. — Т. 252, № 3. — С. 577–580.
203. **Спивак А.А., Кишкина С.Б.** Исследование микросейсмического фона с целью определения активных тектонических структур и геодинамических характеристик среды // *Физика Земли*. — 2004. — № 7. — С. 35–49.

204. **Гольдин С.В., Тимофеев В.Ю., Ван Раумбеке М. и др.** Приливная модуляция слабой сейсмичности для южной части Сибири // Физическая мезомеханика. — 2008. — Т. 11, № 4. — С. 81–93.
205. **Соболев Г.А., Тюпкин Ю.С.** Аномалии в режиме слабой сейсмичности перед сильными землетрясениями Камчатки // Вулканология и сейсмология. — 1996. — № 4. — С. 64–74.
206. **Соболев Г.А., Тюпкин Ю.С.** Стадии подготовки, сейсмологические предвестники и прогноз землетрясений Камчатки // Вулканология и сейсмология. — 1998. — № 6. — С. 17–26.
207. **Салтыков В.А., Сеницын В.И., Чебров В.Н.** Вариации приливной компоненты высокочастотного сейсмического шума в результате изменений напряженного состояния среды // Вулканология и сейсмология. — 1997а. — № 4. — С. 73–83.
208. **Салтыков В.А., Сеницын В.И., Чебров В.Н.** Использование высокочастотного сейсмического шума для среднесрочного прогноза сильных камчатских землетрясений. Кроноцкое землетрясение на Камчатке 5 декабря 1997 года: Предвестники, особенности, последствия. — Петропавловск-Камчатский: КГАРФ, 1998. — С. 99–105.
209. **Салтыков В.А., Кугаенко Ю.А.** Особенности пространственной связи приливной компоненты сейсмических шумов с областями подготовки сильных землетрясений: По материалам долговременных режимных наблюдений на Камчатке // Физика Земли. — 2007. — № 9. — С. 48–60.
210. **Журков С.Н.** Кинетическая концепция прочности твердых тел // Вестн. АН СССР. — 1968. — № 3. — С. 46–52.
211. **Куксенко В.С.** Диагностика и прогнозирование разрушения крупномасштабных объектов // Физика твердого тела. — 2005. — Т. 47, № 5. — С. 788–792.
212. **Садовский М.А., Мирзоев К.М., Негматуллаев С.Х., Саломов Н.Г.** Влияние механических вибраций на характер пластических деформаций материалов // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. — 1981. — № 6. — С. 32–42.
213. **Садовский М.А., Шамина О.Г., Стопинский З.** Изменение физических свойств горных пород под влиянием ультразвуковых вибраций // Докл. АН СССР. — 1989. — Т. 309, № 6.
214. **Мирзоев К.А., Виноградов С.Д., Рузibaев З.** Влияние микросейсм и вибраций на акустическую эмиссию // Физика Земли. — 1991. — № 12. — С. 69–72.
215. **Трапезников Ю.А., Манжиков Б.Ц., Богомолов Л.М.** Влияние слабых вибраций на деформирование горных пород при постоянной нагрузке // Вулканология и сейсмология. — 2000. — № 1. — С. 66–71.
216. **Соболев Г.А., Пономарев А.В.** Физика землетрясений и предвестники. — М.: Наука, 2003. — 270 с.
217. **Куксенко В.С., Манжиков Б.Ц., Тилегенов К. и др.** Триггерный эффект слабых вибраций в твердых телах // Физика твердого тела. — 2003. — Т. 45, № 12. — С. 2182–2186.
218. **Бобряков А.П., Косых В.П., Ревуженко А.Ф.** О катастрофических последствиях длительных слабых воздействий на сыпучую среду // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1995. — № 1. — С. 19–24.

219. **Бобряков А.П., Косых В.П., Ревуженко А.Ф.** О влиянии длительных слабых воздействий на сопротивление сыпучих сред срезу // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. — 1996. — № 2. — С. 26–30.
220. **Бобряков А.П., Косых В.П., Лубягин А.В.** Неустойчивость пластического течения сыпучих сред при статических нагрузках и слабых сотрясениях // Триггерные эффекты в геосистемах: Материалы Всерос. семинар-совещ., г. Москва 22–24 июня 2010 г. / под ред. акад. РАН В.В. Адушкина, проф. Г.Г. Кочаряна. — М.: Геос, 2010. — С. 175–183.
221. **Адушкин В.В., Спивак А.А.** Приливная сила как триггер геофизических процессов в окружающей среде // Триггерные эффекты в геосистемах: Материалы Всероссийского семинар-совещ., г. Москва 22–24 июня 2010 г. / под ред. акад. РАН В.В. Адушкина, проф. Г.Г. Кочаряна. — М.: Геос, 2010. — С. 8–18.
222. **Адушкин В.В., Спивак В.А., Харламов В.А.** Влияние лунно-солнечного прилива на вариации геофизических полей на границе земная кора — атмосфера // Физика Земли. — 2012. — № 2. — С. 14–26.
223. **Кугаенко Ю.А.** Особенности геоэлектрического отклика среды на приливное воздействие // Физика Земли. — 2005. — № 7. — С. 65–74.
224. **Спивак А.А., Харламов В.А.** Статистические и корреляционные свойства микросейсмических и геоэлектрических импульсов в земной коре // Локальные и глобальные проявления воздействий на геосферы: сб. научных трудов ИДГ РАН. — М.: ГЕОС, 2008. — С. 236–245.
225. **Спивак А.А., Кишкина С.Б., Локтев Д.Н. и др.** Вариации геофизических полей в приповерхностной зоне континентальной земной коры в результате твердого прилива // Проблемы взаимодействующих геосфер: сб. науч. тр. ИГД РАН. — М.: ГЕОС, 2009. — С. 222–232.
226. **Спивак А.А., Кишкина С.Б., Локтев Д.Н., Овчинников В.М.** Периодичности микросейсмических процессов // Докл. РАН. — 2004. — Т. 398, № 3. — С. 400–403.
227. **Горбунова Э.М., Кабыченко Н.В., Кочарян Г.Г. и др.** Исследование динамики вариаций уровня подземных вод под воздействием внешних факторов // Проблемы взаимодействующих геосфер: сб. науч. тр. ИГД РАН. — М.: ГЕОС, 2009. — С. 232–244.
228. **Сардаров С.С. (мл.), Осокин В.Д.** Экспериментальные исследования приливных колебаний дебита термальных источников // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1980. — № 3. — С. 78–82.
229. **Спивак А.А., Кожухов С.А., Сухоруков М.В., Харламов В.А.** Эманация радона как индикатор интенсивности межгеосферных взаимодействий на границе земная кора — атмосфера // Физика Земли. — 2009. — № 2. — С. 34–48.
230. **Александров И.М.** Сравнение интенсивности выделения газа из скважины в шахте № 1 рудоуправления «Артемсоль» с приливными наклонами // Вращение и приливные деформации Земли. — Киев: Наук. думка, 1972. — С. 90–93.
231. **Шемякин Е.И.** Геомеханическая модель магнитного поля Земли // Сб. науч. тр. Ин-та геодинамики геосфер РАН. — 1998. — С. 18–26.
232. **Шемякин Е.И.** О возможной природе солнечной активности // Докл. АН. — 1992. — Т. 326, № 1. — С. 59–62.

233. **Шемякин Е.И.** Об одном эффекте сложного нагружения // Упругость и пластичность, посвящ. 90-летию А.А. Ильюшина. — М.: Изд. МГУ, 2001.
234. **Шемякин Е.И.** Деформация вращающихся планет (новые материалы) // Тез. докл. Всерос. конф. по теор. и прикл. механике. — Пермь, 2001.
235. **Шемякин Е.И.** О деформации вращающихся планет (новые материалы) // Материалы Ломоносовских чтений. — М.: Изд-во МГУ, ноябрь 2005.
236. **Косыгин Ю.А., Маслов Л.А.** Роль твердых лунных приливов в тектоническом процессе // Геотектоника. — 1986. — № 6. — С. 3–7.
237. **Косыгин Ю.А.** Тектоника. — М.: Недра, 1988. — 462 с.
238. **Косыгин Ю.А., Маслов Л.А.** О физических полях вращающихся планет // Геотектоника. — 1989. — № 1. — С. 8–11.
239. **Григорьев Ю.М., Скрябина О.Е.** Моделирование направленного переноса внутренних масс Земли приливными деформациями / VII Лаврентьевские чтения: науч. конф. Секция «Математика, механика и физика»: сб. ст. 7–11 апреля 2003 г. — Якутск, 2003. — Т. 1. — С. 33–38.
240. **Григорьев Ю.М., Скрябина О.Е.** Математические проблемы моделирования направленного переноса внутренних масс Земли приливными деформациями // Динамика сплошной среды. — Новосибирск, 2004. — Вып. 122. — С. 57–62.
241. **Григорьев Ю.М., Скрябина О.Е.** О приливном механизме дифференциального вращения внутреннего ядра Земли / IX Всерос. съезд по теоретической и прикладной механике: аннотации докладов (Н. Новгород, 22–28 августа 2006 г.). — Н. Новгород: Изд. НГГУ, 2006. — Т. 1. — С. 139–140.
242. **Григорьев Ю.М., Скрябина О.Е.** Математическое моделирование относительной динамики твердого и жидкого ядер Земли // Вестн. Сиб. гос. аэрокосмического ун-та им. акад. М.Ф. Решетнева. — 2008. — Т. 4, № 21. — С. 68–72.
243. **Григорьев Ю.М., Скрябина О.Е.** Математическое моделирование движений жидкого и твердого ядер Земли, вызванных приливным деформированием // Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений: Междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения академика С.Л. Соболева, 5–12 октября 2008, г. Новосибирск: Тез. докл. — Новосибирск: ИМ СО РАН, 2008. — С. 476.
244. **Григорьев Ю.М., Скрябина О.Е.** О влиянии приливных деформаций на вращение внутреннего ядра Земли // Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение: Всерос. конф., приуроченная к 90-летию академика Л.В. Овсянникова, 23–28 апреля 2009, г. Новосибирск: тез. докл. — Новосибирск: ИГиЛ СО РАН, 2009. — С. 56–57.
245. **Григорьев Ю.М., Мохначевский А.Н., Скрябина О.Е.** Математическое моделирование влияния приливного деформирования земли на дифференциальное вращение внутреннего ядра // Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций: тезисы докл. II Всерос. конф. Новосибирск, 10–14 октября 2011 г. — Новосибирск: НГТУ, 2011. — С. 30.
246. **Аннин Б.Д., Григорьев Ю.М.** Общее решение уравнений равновесия несжимаемых упругих тел // Современные проблемы механики и прикладной математики: материалы школы-семинара, посвящ. 70-летию проф. Д.Д. Ивлева. — Воронеж, 2000. — С. 12–20.

247. **Седов Л.И.** Методы подобия и размерности в механике. — 10-е изд. — М.: Наука, 1987. — 430 с.
248. **Риман Б.** О движении жидкого однородного эллипсоида // Сочинения. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. — 339 с.
249. **Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М.** Системы гидродинамического типа и их применение. — М.: Наука, 1981. — 368 с.
250. **Жуковский Н.Е.** Избранные сочинения. — М.; Л.: ОГИЗ, 1948. — Т. 1.
251. **Моденов П.С.** Аналитическая геометрия. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969. — 699 с.
252. **Постников М.М.** Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1973. — 751 с.
253. **Мухелишвили Н.И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. — 707 с.
254. **Очерки** сравнительной планетологии. — М.: Наука, 1981. — 326 с.
255. **Хаббард У.** Внутреннее строение планет. — М.: Мир, 1987. — 328 с.
256. **Жарков В.Н., Трубицин В.П., Самсоненко Л.В.** Физика Земли и планет: Фигуры и внутреннее строение. — М.: Наука, 1971. — 384 с.
257. **Николаевский В.Н.** Механические свойства грунтов и теория пластичности // Итоги науки и техники. — М., 1972. — Т. 6 (Сер. «Механика твердых деформируемых тел»). — С. 86.
258. **Николаевский В.Н.** Механика геоматериалов. Усложненные модели // Итоги науки и техники. Серия. Механика деформируемого твердого тела. — М.: ВИНТИ, 1987. — Т. 19. — С. 148–182.
259. **Бобряков А.П.** Экспериментальное моделирование локализации пластических деформаций вокруг отверстий // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: тр. 17-й Межресп. конф. под ред. В.М. Фомина. — Новосибирск, 2001. — С. 32–37.
260. **Сегерлинд Л.** Применение методов конечных элементов. — М.: Мир, 1979. — С. 392.
261. **Kolymbas D.** Computer-aided design of constitutive laws // Intern. J. Numer. Anal. Methods Geomech. — 1991. — Vol. 15. — P. 593–604.
262. **Kolymbas D., Wu W.** Introduction to hypoplasticity // Modern approaches to plasticity / ed. by D. Kolymbas. — Amsterdam etc.: Elsevier, 1993. — P. 213–223.
263. **Kolymbas D., Herle I., von Wolfersdorff P.-A.** Hypoplastic constitutive equation with internal variables // Intern. J. Numer. Anal. Methods Geomech. — 1995. — Vol. 19. — P. 415–436.
264. **Лавриков С.В.** К расчету дифференциального вращения жесткого ядра при сложном нагружении гипопластических сред // ПМТФ. — 2002. — Т. 43, № 6. — С. 75–83.
265. **Джозеф Д.** Устойчивость движений жидкости. — М.: Мир, 1981. — 638 с.
266. **Шредер М.** Фракталы, хаос, степенные законы. — Ижевск: НИЦ, 2001. — 528 с.
267. **Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.** Теория колебаний. — М.: Наука, 1981. — 568 с.
268. **Бабаков И.М.** Теория колебаний. — 3-е изд. — М.: Наука, 1968. — 560 с.
269. **Arvid M. Johnson, Sumaryanto Y. Martosudarmo.** Discrimination between inertial and macro-viscous flows of fine-grained debris with a rolling-sleeve viscometer //

- Debris-Flow Hazards Mitigation: Mechanics, Prediction, and Assessment / ed. by Cheng-Lung Chen // ASCE. — 1997. — P. 229–238.
270. **Хайкин С.Э.** Физическая механика. — М.; Л.: ОГИЗ, 1947. — 574 с.
271. **А.с. № 1202706 (СССР).** Способ уплотнения порошковых материалов / Шемякин Е.И., Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф. — Бюл. № 1, 1986.
272. **Бобряков А.П., Ревуженко А.Ф.** Две задачи обработки порошковых материалов: дозирование и уплотнение // Сиб. физ.-техн. журн. — 1993. — № 5. — С. 94–101.
273. **А.с. № 1669623 (СССР).** Устройство для поперечной прокатки / Афиногенов Ю.А., Бобряков А.П., Жигалкин В.М., Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И. — Бюл. № 30, 1991.
274. **Cottrell A.H.** Dislocations and Plastic Flow in Crystals. — Oxford: Clarendon Press, 1953.
275. **Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И.** К вопросу о плоском деформировании упрочняющихся и разупрочняющихся пластических материалов // ПМТФ. — 1977. — № 3. — С. 157–173.
276. **Лавриков С.В., Ревуженко А.Ф.** Пластические модели в задачах упругого деформирования рулонированных оболочек // ПМТФ. — 1988. — № 3. — С. 153–159.
277. **Лавриков С.В., Ревуженко А.Ф.** Об оптимизации конструкций рулонированных оболочек // ПМТФ. — 1988. — № 5. — С. 162–167.

Оглавление

Предисловие	3
Введение	6
Глава 1	
Кинематический метод экспериментального исследования приливных волн	23
§ 1. Приливные силы	23
§ 2. Приливные волны	31
§ 3. Критерии моделирования	37
§ 4. О связи приливных деформаций с аффинными преобразованиями сплошной среды	53
4.1. Приливное деформирование как суперпозиция однородных растяжений и сжатий	55
4.2. Приливное деформирование как суперпозиция однородных сдвигов	67
4.3. Приливные деформации как результат вращения тела в условиях неизменности его внешней формы	73
§ 5. Кинематический метод моделирования приливных волн	76
§ 6. Методика проведения экспериментов	87
Глава 2	
Эффект направленного переноса масс приливыми волнами	93
§ 7. Результаты лабораторных экспериментов на плоских моделях	93
7.1. Модели без внутреннего ядра	93
7.2. Модели с внутренним жестким ядром. Восточный дрейф ядра	102
§ 8. Результаты пространственного моделирования	105
§ 9. Экспериментальные результаты с приливыми волнами большой амплитуды	110
Глава 3	
Теоретическое исследование эффекта направленного переноса масс	
§ 10. Однородная вязкая жидкость	123

§ 11. Неоднородная вязкая жидкость. Сыпучие среды	126
§ 12. Динамическая модель	130
§ 13. Связь приливных деформаций со всюду разрывными отображениями	138
§ 14. Пространственная задача о переносе масс приливными волнами	139
§ 15. Перенос масс волнами большой амплитуды	143
Глава 4	
Динамика деформирования и разрушения небесного тела приливными силами	146
§ 16. Динамическая модель приливного деформирования небесного тела	147
§ 17. Плоская задача	151
§ 18. Пространственная задача	160
18.1. Ось вращения тела ортогональна к плоскости его орбиты	162
18.2. Ось вращения тела наклонена к плоскости его орбиты	169
Глава 5	
Приложение результатов в смежных областях механики	175
§ 19. Вязкозаметрические течения. Исследование реологических свойств сложных сред	175
§ 20. Псевдовязкость сыпучих сред и задачи обогащения полезных ископаемых	177
§ 21. Приложения эффектов сложного нагружения для обработки неупругих материалов	180
§ 22. Задача о формировании шара под действием сил поверхностного натяжения	182
§ 23. Модели пластичности и рулонированные оболочки	183
Библиографический список	186

1—735 2—735 3—735 4—735 5—735 6—735 7—735

8—735 9—735 10—735 11—735 12—735 13—735

2 Заказ № 735 3 Заказ № 735 4 Заказ № 735 5 Заказ № 735 6 Заказ № 735 7 Заказ № 735

8 Заказ № 735 9 Заказ № 735 10 Заказ № 735 11 Заказ № 735 12 Заказ № 735 13 Заказ № 735

Научное издание

Ревуженко Александр Филиппович

ПРИЛИВНЫЕ ВОЛНЫ И НАПРАВЛЕННЫЙ ПЕРЕНОС МАСС ЗЕМЛИ

Редактор *Т.П. Гришина*
Художественный редактор *Л.В. Матвеева*
Художник *Н.А. Горбунова*
Технический редактор *Н.М. Остроумова*
Корректоры *И.Л. Мальшева, Л.А. Анкушева*
Оператор электронной верстки *Р.Г. Усова*

Сдано в набор 22.03.13. Подписано в печать 25.04.13. Бумага ВХИ. Формат 60×90 1/16. Офсетная печать. Гарнитура Times ET. Усл. печ. л. 12,75. Уч.-изд. л. 11,4. Тираж 400 экз. Заказ № 735.

Сибирская издательская фирма «Наука» АИЦ «Наука» РАН.
630077, Новосибирск, ул. Коммунистическая, 1.
Сибирское предприятие «Наука» АИЦ РАН. 630077, Новосибирск, ул. Станиславского, 25.