

# ТЕОРИЯ ПОЛЯ. СОВРЕМЕННЫЙ ВВОДНЫЙ КУРС

М.: Мир, 1984, 336 с.

В книге П.Рамона (США) последовательно излагается квантовая теория поля (в рамках теории возмущений) на основе понятия функционального интеграла. Все важнейшие выкладки представлены полностью, что дает возможность читателю не только ознакомиться с основными идеями новейшей квантовой теории поля, но и овладеть техникой сложных вычислений. После каждой главы даются упражнения и задачи. Книга может служить основой для дальнейшего изучения предмета по более специализированным обзорам, монографиям и оригинальным статьям, так что она заполняет существенный пробел в учебной литературе по современной квантовой теории поля.

Для студентов старших курсов, аспирантов и начинающих научных работников в области физики элементарных частиц.

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА 5

ПРЕДИСЛОВИЕ 9

**Глава 1. Функционал действия 11**

§ 1. Элементарные сведения 11

§ 2. Группа Лоренца (беглый обзор) 15

§ 3. Группа Пуанкаре 21

§ 4. Локальные поля и преобразования группы Пуанкаре 24

§ 5. Общие свойства действия 36

§ 6. Действие для скалярных полей 43

§ 7. Действие для спинорных полей 47

§ 8. Действие со скалярными и спинорными полями и суперсимметрия 53

**Глава 2. Функционал действия в квантовой механике: 61**

## **фейнмановский интеграл по траекториям**

§ 1. Канонические преобразования в классической и квантовой механике 62

§ 2. Фейнмановский интеграл по траекториям 67

§ 3. Интеграл по траекториям и гармонический осциллятор, наводящийся под действием силы 74

**Глава 3. Фейнмановский интеграл по траекториям в теории поля 80**

§ 1. Производящий функционал 80

§ 2. Фейнмановский пропагатор 83

§ 3. Эффективное действие 88

§ 4. Вычисление интеграла по траекториям методом перевала 94

§ 5. Первые квантовые поправки. Вычисление детерминантов с помощью  $\zeta$ -функции 102

§ 6. Изменение масштаба детерминантов Константа связи, зависящая от масштаба 107

**Глава 4. Вычисление фейнмановского интеграла по траекториям 111**

## **методом теории возмущений: теория $\phi^4$**

§ 1. Фейнмановские правила для теории  $\phi^4$  111

§ 2. Расходимости фейнмановских диаграмм	120
§ 3. Размерная регуляризация фейнмановских интегралов	127
§ 4. Вычисление фейнмановских интегралов	132
§ 5. Перенормировка	141
§ 6. Рецепты перенормировки	152
§ 7. Зависимость коэффициентов ренормгруппы от рецепта перенормировки	164
§ 8. Продолжение в пространство Минковского, аналитичность	166
§ 9. Сечения и унитарность	172
<b>Глава 5. Интеграл по траекториям при наличии фермионов</b>	<b>181</b>
§ 1. Интегрирование по грассмановым числам	181
§ 2. Интеграл по траекториям для свободных ферми-полей	185
§ 3. Фейнмановские правила для спинорных полей	191
§ 4. Вычисление и масштабное преобразование фермионных детерминантов	196
<b>Глава 6. Калибровочные симметрии, конструкция Янга — Миллса</b>	<b>203</b>
§ 1. Глобальные и локальные симметрии	203
§ 2. Построение локально симметричных лагранжианов	214
§ 3. Чисто янг-миллсовская теория	220
<b>Глава 7. Интеграл по траекториям в калибровочных теориях</b>	<b>232</b>
§ 1. Гамильтонов формализм в калибровочных теориях, абелев случай	232
§ 2. Гамильтонов формализм для калибровочных теорий, неабелев случай	241
§ 3. Непосредственное определение янг-миллсовского ФИТ, процедура Фаддеев а — Попова	249
<b>Глава 8. Вычисления по теории возмущений в калибровочных теориях</b>	<b>253</b>
§ 1 Фейнмановские правила для калибровочных теорий в евклидовом пространстве	253
§ 2. КЭД, однопетлевая структура	261
§ 3. КЭД, тождества Уорда	274
§ 4. КЭД, применения	280
§ 5. Янг-миллсовская теория, предварительные замечания	287
§ 6. Янг-миллсовская теория, однопетлевая структура	292
§ 7. Янг-миллсовская теория, тождества Славнова - Тейлора	305
§ 8. Янг-миллсовская теория, асимптотическая свобода	311
<b>Приложения</b>	<b>317</b>
А. Гауссово интегрирование	317
Б. Интегрирование при произвольном числе измерений	320
В. Фейнмановские правила в ковариантной калибровке в евклидовом пространстве ( $2\omega$ измерений)	323
<b>БИБЛИОГРАФИЯ</b>	<b>324</b>

## Предисловие переводчика

Книга П.Рамона "Теория поля. Современный вводный курс" была опубликована в 1981 г. под № 51 в известной серии "Рубежи физики". Многие издания этой серии получили широкую известность и были переведены на русский язык. Достаточно упомянуть книги Фейнмана "Квантовая электродинамика" ("Мир", 1964) и "Взаимодействие фотонов с адронами" ("Мир", 1975) и др., книгу Адлера и Дашена "Алгебры токов и их применение в физике частиц" ("Мир", 1970), книгу Коккедэ "Теория кварков" ("Мир", 1971). В этой же серии вышли и переведенные с русского монографии советских ученых И.М.Халатникова "Введение в теорию сверхпроводимости", А.Б.Мигдала "Метод квазичастиц в теории ядра", а также (под № 50) близко примыкающая по теме к данной книге монография А.А.Славнова и Л.Д.Фаддеева "Введение в квантовую теорию калибровочных полей".

Бессменный издатель серии "Рубежи физики" известный американский физик Дэвид Пайнс так определил в 1961 г. задачи серии: "В наши дни настоятельно необходимо решение задачи понятного изложения последних достижений в наиболее волнующих и активных областях физики. . . Ведущие ученые часто читают циклы лекций и специальные курсы лекций для аспирантов, посвященные интересующей их узкой области физики. Цель таких лекций — суммировать современное состояние быстро развивающейся области, и чаще всего они оказываются единственным в данный момент более или менее полным и последовательным изложением предмета. Часто появляются и конспекты этих лекций (подготовленные самим лектором, студентами старших курсов или аспирантами), распространяемые ограниченным тиражом. Одна из главных задач серии "Рубежи физики" — сделать такие конспекты доступными более широкому кругу физиков. Необходимо подчеркнуть, что конспекты лекций, конечно, не очень хорошо обработаны и не отличаются особой строгостью как стиля, так и содержания... Смысл всей серии в том, чтобы предложить новые, быстрые, более свободные по форме и, как можно надеяться, более эффективные способы обучения одних физиков другими..."

Все сказанное Пайнсом в полной мере относится и к предлагаемой книге П.Рамона. Во-первых, это учебник, пригодный для перво-

начального ознакомления с современными идеями и методами теории поля. Читателями книги могут быть студенты старших курсов физических факультетов университетов и других вузов с аналогичной программой и аспиранты, приступающие к самостоятельной работе в области физики высоких энергий и квантовой теории поля. Во-вторых, она представляет собой конспекты лекций, и весь стиль изложения в ней, в котором отсутствует стремление к изяществу, несет на себе отпечаток данного обстоятельства. В-третьих, предмет этой книги еще не нашел достаточного отражения в существующих монографиях и учебниках на уровне, доступном новичку.

Необходимость подобного рода пособия по современной теории поля продиктована временем. Развитие квантовой теории поля за последние 15 лет было чрезвычайно бурным и плодотворным. Если говорить о приложениях, то достаточно упомянуть единую теорию электро-слабого взаимодействия (в справедливости которой сейчас вряд ли кто-нибудь сомневается) и квантовую хромодинамику (КХД) — главного претендента на роль истинной теории сильного взаимодействия. Эти две теории, в основе которых лежит современная квантовая теория неабелевых калибровочных полей, стали фундаментом конкретных расчетов наблюдаемых явлений в физике частиц. Таким образом, знание основ современной квантовой теории поля — необходимый элемент образования любого специалиста-физика, как теоретика, так и экспериментатора.

Это требует значительной ломки традиционного подхода к преподаванию квантовой теории поля, существующего уже три десятилетия. Если до недавнего времени стандартные курсы лекций сводились к изложению канонического квантования свободных полей, а в качестве единственного примера теории с взаимодействием подробно рассматривалась квантовая электродинамика (КЭД), для которой развивалась диаграммная техника и обсуждались правила вычислений наблюдаемых величин, перенормировка и т.п., то сейчас КЭД воспринимается уже как некоторый весьма частный случай общего класса калибровочных теорий. Кроме того, развитие квантовой теории поля за последние годы сопровождалось разработкой новых методов и подходов и усовершенствованием техники вычислений. Так, наиболее экономным при выводе фейнмановских правил для разложения в ряд по теории возмущений в калибровочных теориях оказался метод континуального интеграла (интеграла по траекториям). Был развит метод размерной регуляризации расходящихся интегралов в теории, последовательно сохраняющий на всех этапах вычислений калибровочную инвариантность. В связи с развитием суперсимметричных теорий и теории супергра-

витации существенными стали формальные правила обращения с грасмановыми переменными.

Цель книги П.Рамона в том, чтобы познакомить читателя именно с современными методами квантовой теории поля. Главный итог книги — обоснование фейнмановских правил для янг-миллсовских теорий (в частности, для КХД) и примеры вычислений по теории возмущений в КЭД и КХД, прежде всего связанных с выявлением асимптотического поведения инвариантного заряда. При этом все изложение базируется на методе интеграла по траекториям. Попутно излагаются такие вопросы, как группа Лоренца и группа Пуанкаре, преобразования суперсимметрии, построение лагранжианов, инвариантных относительно определенных групп симметрии, и построение соответствующих сохраняющихся величин, классические решения уравнений янг-миллсовского поля, вычисление первых квантовых поправок к классическим решениям, техника размерной регуляризации и ряд других вопросов.

Отличительной чертой книги является стремление научить читателя технике конкретных вычислений. В то же время автор отказался от попыток излагать строгие доказательства (например, перенормируемости янг-миллсовских теорий). Книга очень прагматична, и в этом, на наш взгляд, ее большое достоинство. Специалисты, несомненно, заметят то влияние, которое оказали на структуру книги и стиль изложения известные лекции С.Коулмена (см. библиографию в конце книги).

Ограниченный объем не позволил автору охватить многие важные вопросы современной теории. Об этом сам П.Рамон пишет в своем предисловии. Кроме того, в книге полностью отсутствуют физические приложения. Но это отвечает справедливому убеждению автора, что конкретные вычисления в теории электрослабого взаимодействия и в КХД должны сегодня составлять содержание отдельного учебника, точно так же, как и все методы, связанные с выходом за рамки теории возмущений.

Мы думаем, что книга П.Рамона будет ценным пособием для всех приступающих к изучению современной квантовой теории поля и ее приложений. Она прекрасно дополняет известный учебник Н. Н.Боголюбова и Д.В.Ширкова "Квантовые поля", также рассчитанный на начальное обучение. Читатели, желающие глубже изучить проблему квантования калибровочных теорий, могут обратиться к уже упомянутой монографии А.А.Славнова и Л.Д.Фаддеева.

При переводе мы воздержались от развернутых комментариев, ограничившись лишь мелкими замечаниями. В противном случае это

нарушило бы замысел и стиль всей книги. Для тех читателей, которые захотят углубить свои знания по отдельным вопросам, лишь бегло упомянутым в книге, представлен список дополнительной литературы. Мы добавили в него несколько ссылок, в основном на монографии советских авторов. При переводе были исправлены замеченные опечатки в формулах. Я благодарен И.Б.Хриповичу за указание на некоторые из них.

*А.Берков*

# Предисловие

Доказательство перенормируемости янг-миллсовских теорий, данное т Хофтом, повлекло за собой бурное развитие методов и приложений квантовой теории поля. Однако за прошедшие годы было написано мало учебников, так что аспирант, специализирующийся в области теории поля, вынужден обращаться к оригинальной литературе или к обзорам. Сейчас много прекрасных обзорных статей, но они, к сожалению, часто пишутся не для начинающих, а для специалистов. Предлагаемые конспекты лекций, читанных в Калифорнийском технологическом институте в 1978 – 1980 гг. в виде курса теории поля для аспирантов первого года обучения, преследуют цель заполнить этот пробел путем простого изложения вычислений, в которых применяется современный аппарат, используемый специалистом по теории поля.

С педагогической точки зрения теперь уже немислимо рассказать за один год пертурбативную теорию поля – времена одногодичного учебного курса, основанного на КЭД, ушли навсегда. Поэтому предлагаемые конспекты лекций освещают лишь избранный круг вопросов. Современное изложение предмета должно состоять по крайней мере из трех частей: из первого курса, в котором внимание сосредоточено на структуре и методах пертурбативных теорий поля, знакомящего аспиранта с теорией перенормировок и вычислением фейнмановских диаграмм в калибровочных теориях; из второго курса, имеющего дело с приложениями калибровочных теорий и в основном сконцентрированного на вычислениях по теории возмущений в квантовой хромодинамике (КХД), динамике ароматов (модель Глешоу – Вайнберга – Салама) и, возможно, в теориях великого объединения; и из третьего курса по непертурбативной технике. Наши конспекты относятся к первой части. Сначала в них излагается на элементарном уровне классическая теория поля, причем детально рассматриваются группа Лоренца, дираковские и майорановские массы: и суперсимметрия, а затем описываются методы регуляризации, теория перенормировок и другие формальные стороны предмета. Все изложения ведется в форме вычислений; доказательство перенормируемости не дается, а указывается лишь, почему это свойство представляется правдоподобным. Очень подробно рассмотрена перенормировка теории  $\lambda\phi^4$ , а в перенормировке калибро-

вочных теорий речь идет лишь вскользь. Переход от классической теории поля к квантовой описан с помощью фейнмановского интеграла по траекториям, что приемлемо с точки зрения и пертурбативных, и непертурбативных исследований. Кроме того, для простых теорий описана техника вычисления функциональных детерминантов, основанная на  $\zeta$ -функциях.

Весь материал излагается достаточно подробно, с тем чтобы читатель мог проследить каждый шаг. Однако при этом вообще опущен ряд очень существенных теоретических вопросов, таких, как инфракрасная структура ненарушенных калибровочных теорий и вычисления в калибровочных теориях с нарушенной симметрией. Мы все же надеемся, что наши конспекты смогут служить введением в пертурбативные вычисления в калибровочных теориях. В конце каждого параграфа помещены задачи, причем степень их трудности отмечена звездочками. Чтобы указать пути дальнейшего изучения предмета, приведен список литературы.

Я хотел бы выразить свою признательность проф. С.Фраучи и Дж.Харви за внимательное прочтение рукописи и конструктивную критику. Особо приношу благодарность Ю.Корригэну и Дж.Харви за то, что они познакомили меня с техникой  $\zeta$ -функций, а также аспирантам группы Физика-230 за их терпение и многочисленные предложения. Наконец, я глубоко признателен Роме Гейнс и Хелене Так, современным копиистам, без героических усилий которых эти конспекты никогда не увидели бы света.

Пасадена, лето 1980 г.

*П.Рамон*



## Функционал действия

## § 1. Элементарные сведения

Есть нечто прекрасное и способное внушить благоговейные чувства в том, что все основные законы классической физики можно вывести из одной-единственной математической конструкции, именуемой действием. Из нее вытекают классические уравнения движения, а анализ условий инвариантности действия позволяет найти величины, сохраняющиеся при классическом движении. Вдобавок, как показали Дирак и Фейнман, роль понятия действия полностью раскрывается в квантовой физике. Благодаря этому обеспечивается ясный и элегантный язык для описания перехода от классической к квантовой физике с использованием фейнмановского интеграла по траекториям (ФИТ).

Таким образом, наша задача ясна: сначала мы научимся строить приемлемые функционалы действия (ФД), а затем выведем квантовые свойства системы, описываемой заданным ФД, вычисляя связанный с ним ФИТ. Прежде всего исследуем ФД для элементарной системы — точечной частицы, вектор положения которой в момент времени  $t$  есть  $x_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и которая движется в независимом от времени потенциале  $V(x_i)$ . Соответствующий ФД дается выражением

$$S([x_i]; t_1, t_2) \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{1}{2} m \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_i}{dt} - V(x_i) \right). \quad (1.1)$$

Он является функцией начального и конечного моментов времени  $t_1$  и  $t_2$  и функционалом от траектории  $x_i(t)$  при  $t_1 < t < t_2$ . (По повторяющимся латинским индексам проводится суммирование.) Все это означает, что заданной траектории  $x_i(t)$  мы сопоставляем некое число, именуемое функционалом (в данном случае  $S$ ). Функциональный аргумент мы будем заключать в квадратные скобки [...]. Например, длина траектории есть функционал от траектории.

Посмотрим, как меняется  $S$  при малой деформации траектории  $x_i(t) \rightarrow x_i(t) + \delta x_i(t)$ .

(1.2)

Имеем

$$S[\dot{x}_i + \delta x_i] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{1}{2} m \frac{d(x_i + \delta x_i)}{dt} - \frac{d(x_i + \delta x_i)}{dt} - V(x_i + \delta x_i) \right). \quad (1.3)$$

Пренебрегая членами  $O(\delta x)^2$ , можно написать

$$\frac{d(x_i + \delta x_i)}{dt} - \frac{d(x_i + \delta x_i)}{dt} = \frac{dx_i}{dt} - \frac{dx_i}{dt} - 2 \frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i + 2 \frac{d}{dt} \left( \delta x_i \frac{dx_i}{dt} \right), \quad (1.4)$$

$$V(x_i + \delta x_i) = V(x_i) + \delta x_i \partial_i V. \quad (1.5)$$

(Здесь  $\partial_i \equiv \partial / \partial x_i$ .) Таким образом,

$$S[x_i + \delta x_i] \approx S[x_i] + \int_{t_1}^{t_2} dt \delta x_i \left( -\partial_i V - m \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) + m \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \delta x_i \frac{dx_i}{dt} \right). \quad (1.6)$$

Последнее слагаемое есть "поверхностный" член. Его можно устранить, если ограничиться вариациями траекторий, обращающимися в нуль в конечных точках:  $\delta x_i(t_1) = \delta x_i(t_2) = 0$ . Если принять это условие, то из требования постоянства действия  $S$  при любых  $\delta x_i$  вытекают классические уравнения движения системы. Символически запишем это как равенство нулю функциональной производной, определяемой соотношением

$$S[x_i + \delta x_i] = S[x_i] + \int dt \delta x_i \frac{\delta S}{\delta x_i} + \dots \quad (1.7)$$

Итак,

$$\frac{\delta S}{\delta x_i} = - \left( m \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \partial_i V \right) = 0. \quad (1.8)$$

Следовательно, мы установили взаимное соответствие между уравнениями движения и условием экстремальности действия  $S$ . Заметим, однако, что условие экстремальности действия  $S$  приводит к целому

классу возможных траекторий. По какой из них на самом деле происходит движение, зависит от граничных условий, задаваемых как начальные значения величин  $x_i$  и  $dx_i/dt$ .

Следующий и самый важный момент, который нужно отметить, это наличие взаимного соответствия между симметриями действия  $S$  и существованием величин, сохраняющихся в процессе движения системы. Приведем пример. Пусть  $V(x_i)$  — функция длины вектора  $x_i$ , т.е. величины  $r = (x_i x_i)^{1/2}$ . Тогда действие  $S$ , очевидно, инвариантно по отношению к вращениям трехмерного вектора  $x_i$ , поскольку оно зависит только от длины этого вектора, а она при вращениях не меняется. При бесконечно малом произвольном вращении имеем  $\delta x_i = \epsilon_{ij} x_j$ ,  $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$ , причем  $\epsilon_{ij}$  не зависит от времени. (1.9)

Далее, так как действие  $S$  инвариантно, выполняется равенство  $\delta S = 0$ . Но ранее мы видели, что  $\delta S$  состоит из двух слагаемых: функциональной производной, равной нулю для классической траектории, и поверхностного члена. Однако для данной конкретной вариации мы не можем наложить на  $\delta x_i(t)$  граничные условия, и поэтому инвариантность действия  $S$  совместно с уравнениями движения приводит к равенству

$$0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( m \frac{dx_i}{dt} \delta x_i \right) = \epsilon_{ij} m x_j \frac{dx_i}{dt} \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (1.10)$$

Поскольку это верно при любых  $\epsilon_{ij}$ , величины

$$l_{ij}(t) \equiv \frac{1}{2} m \left( x_i \frac{dx_j}{dt} - x_j \frac{dx_i}{dt} \right) \quad (1.11)$$

удовлетворяют равенству

$$l_{ij}(t_1) = l_{ij}(t_2) \quad (1.12)$$

и потому сохраняются в процессе движения. Как известно, это компоненты углового момента. Инфинитезимальную форму закона сохранения можно получить, положив  $t_2 \rightarrow t_1$ . Итак, мы доказали в одном простом случае знаменитую теорему Эмми Нетер, связывающую инвариантность (здесь по отношению к вращениям) с законом сохранения (углового момента). Суммируем уроки, извлеченные нами из этого элементарного примера: 1) классические уравнения движения получаются из условия экстремальности действия  $S$ ; 2) граничные условия должны задаваться извне; 3) симметрии действия  $S$  находятся во взаимном соответствии с сохраняющимися величинами и поэтому отражают основные симметрии физической систе-

мы. Пример относился к классической механике. Его можно обобщить и на классическую теорию поля, например максвелловскую электродинамику или общую теорию относительности Эйнштейна.

Действие есть всего лишь некая математическая конструкция, и число возможных конструкций такого рода неограниченно. Но действие должно описывать физический мир, который, как мы полагаем, устроен совершенно определенным образом. Следовательно, среди многих возможных должен существовать *один* очень специальный ФД, правильно описывающий то, что происходит на самом деле. Возникает вопрос: как отличить это единственное действие от других действий? Ответ нам подсказывает теорема Нетер, указывающая на связь между симметриями системы и симметриями функционала. Нам хорошо известны некоторые симметрии, вроде тех, которые вытекают из специальной теории относительности, и из всех возможных действий мы должны выбрать только те, которые отражают эти симметрии. Другие симметрии, вроде сохранения электрического заряда, еще более ограничивают вид искомого ФД. Есть основания полагать, что природа предпочитает определенные типы действия, которые обладают всякими инвариантностями, меняющимися от точки к точке. Подобные инвариантности приводят к калибровочным теориям, о которых будет идти речь далее в этой книге. Пока что научимся строить ФД для систем, удовлетворяющих законам специальной теории относительности. Формальным признаком таких систем является инвариантность относительно преобразований, порождаемых неоднородной группой Лоренца или, что то же, группой Пуанкаре, к изучению которых мы и перейдем.

### Задачи

Замечания: 1) задачи приведены в порядке возрастающей сложности; 2) решайте задачи, пользуясь функционалом действия, даже если вам знакомы более элементарные способы решения.

А. 1). Докажите, что при движении, описываемом действием

$$S = \int dt \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad x \equiv dx/dt,$$

сохраняется импульс.

2) Предполагая, что  $V(x_i) = v[1 - \cos(r/a)]$ , найдите выражение для скорости изменения импульса.

Б. Выведите выражение для скорости изменения углового момента точечной частицы, движущейся в произвольном потенциале.

\*В. Найдите инвариантности ФД в случае точечной частицы, дви-

жущейся в потенциале  $V = -a/r$ . Указание: ньютоновские орбиты не прецессируют, что приводит к нетривиальной сохраняющейся величине, вектору Рунге – Ленца.

\*Г. Считая ФД инвариантным относительно однородных трансляций во времени, выведите выражение для связанной с этим сохраняющейся величины. Возьмите в качестве примера точечную частицу, движущуюся в независящем от времени потенциале. Что произойдет если потенциал будет зависеть от времени?

## § 2. Группа Лоренца (беглый обзор)

В специальной теории относительности постулируется, что скорость света одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Это означает, что если  $x_i$  – координаты светового сигнала в момент времени  $t$  в одной системе и тот же самый световой луч регистрируется в точке  $x'_i$  в момент времени  $t'$  в другой системе, то должно выполняться равенство

$$s^2 \equiv c^2 t^2 - x_i x_i = c^2 t'^2 - x'_i x'_i. \quad (2.1)$$

Множество линейных преобразований, связывающих  $(x'_i, t')$  с  $(x_i, t)$  и сохраняющих неизменным приведенное выше выражение, образует группу, называемую группой Лоренца (см. задачи). Выберем систему единиц, в которой выполняется равенство  $c = 1$ , и введем обозначения

$x^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3$ , где  $x^0 = t, (x^1, x^2, x^3) = (x^i) = \mathbf{x}$ ,

т.е.  $x^\mu = (x^0, x^i) = (t, \mathbf{x}), i = 1, 2, 3$ .

В этих компактных обозначениях величину  $s^2$  можно записать в виде

$$s^2 = x^0 x^0 - x^i x^i \equiv x^\mu x^\nu g_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

где метрический тензор  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$  равен нулю во всех случаях, кроме случая  $\mu = \nu$ , причем  $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$ . Если нет особых оговорок, то по повторяющимся индексам проводится суммирование. Теперь уравнение (2.1) принимает вид

$$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu. \quad (2.3)$$

Рассмотрим множество линейных преобразований

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu = \Lambda^0_\nu x^0 + \Lambda^i_\nu x^i, \quad (2.4)$$

сохраняющих  $s^2$ . По этой причине величины  $\Lambda^\mu_\nu$  должны удовлетворять условию

$$g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma x^\rho x^\sigma = g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma. \quad (2.5)$$

Поскольку соотношение (2.5) должно выполняться при любых  $x^\mu$ , мы имеем

$$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu. \quad (2.6)$$

Во многих отношениях удобнее матричные обозначения: будем рассматривать  $x^\mu$  как вектор-столбец и обозначать его через  $x$ , а  $g_{\mu\nu}$  — как матрицу, обозначаемую через  $g$ . Тогда

$$s^2 = x^T g x, \quad x' = L x, \quad (2.7), (2.8)$$

где  $L$  — матрица, эквивалентная коэффициентам  $\Lambda_\nu^\mu$ , а индексом  $T$  обозначена транспонированная матрица. Чтобы матрицы  $L$  были матрицами преобразований Лоренца (ПЛ), они должны удовлетворять соотношению

$$g = L^T g L. \quad (2.9)$$

Исследуем уравнение (2.9). Во-первых, вычислим детерминанты обеих его частей:

$$\det g = \det L^T \det g \det L, \quad (2.10)$$

откуда мы заключаем, что

$$\det L = \pm 1. \quad (2.11)$$

Случай  $\det L = 1$  ( $-1$ ) соответствует собственным (несобственным) ПЛ. Например, ПЛ, задаваемое численно матрицей  $L = g$ , является несобственным; физически такое преобразование отвечает заменам  $x^0 \rightarrow x^0$ ,  $x^i \rightarrow -x^i$ , т.е. пространственному отражению. Во-вторых, выпишем компоненту уравнения (2.6) с индексами 00:

$$1 = \Lambda_0^\rho g_{\rho\sigma} \Lambda_0^\sigma = (\Lambda_0^0)^2 - (\Lambda_0^i)^2, \quad (2.12)$$

$$\text{откуда следует, что } |\Lambda_0^0| \geq 1. \quad (2.13)$$

Если  $\Lambda_0^0 \geq 1$ , то ПЛ называют ортохронными, а  $\Lambda_0^0 \leq -1$  отвечает неортохронным ПЛ. Таким образом, все ПЛ можно разделить на четыре категории (см. задачу):

- 1) собственные ортохронные, иначе называемые ограниченными ( $L_+^\dagger$ ) с  $\det L = +1$ ,  $\Lambda_0^0 \geq 1$ ;
- 2) собственные неортохронные ( $L_+^\ddagger$ ) с  $\det L = +1$ ;  $\Lambda_0^0 \leq -1$ ;
- 3) несобственные ортохронные ( $L_-^\dagger$ ) с  $\det L = -1$ ;  $\Lambda_0^0 \geq 1$ ;
- 4) несобственные неортохронные ( $L_-^\ddagger$ ) с  $\det L = -1$ ;  $\Lambda_0^0 \leq -1$ .

Приведем несколько примеров.

1). Вращения:  $x'^0 = x^0$ ,  $x'^i = a^i_j x^j$ , где  $a^i_j$  — ортогональная матрица.

Матрицу  $L$  можно записать в блочной форме

$$L = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & a \end{array} \right), \quad (2.14)$$

так что  $\det L = \det a$ . Возможны случаи  $\det a = \pm 1$ , отвечающие собственным и несобственным вращениям, при этом  $L$  относится к  $L^{\uparrow}_+$  и  $L^{\uparrow}_-$ .

2. Бусты: преобразования

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0 \operatorname{ch} \eta - x^1 \operatorname{sh} \eta, \\ x'^1 &= -x^0 \operatorname{sh} \eta + x^1 \operatorname{ch} \eta, \\ x'^{2,3} &= x^{2,3} \end{aligned} \quad (2.15)$$

описывают буст в направлении оси 1. Тогда в блочной форме  $2 \times 2$  имеем

$$L = \left( \begin{array}{cc|c} \operatorname{ch} \eta & -\operatorname{sh} \eta & 0 \\ -\operatorname{sh} \eta & \operatorname{ch} \eta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad (2.16)$$

$$\det L = \operatorname{ch}^2 \eta - \operatorname{sh}^2 \eta = 1, \quad \Lambda^0_0 = \operatorname{ch} \eta \geq 1. \quad (2.17), \quad (2.18)$$

Такое преобразование принадлежит к типу  $L^{\uparrow}$ . Отметим, что перейдя к новой переменной  $v$  (скорости движущейся системы отсчета), связанной с  $\eta$  соотношениями

$$\operatorname{ch} \eta = (1 - v^2)^{-1/2}, \quad \operatorname{sh} \eta = v(1 - v^2)^{-1/2}, \quad (2.19)$$

мы получим более знакомую форму этого преобразования.

3. Обращение времени, определяемое как преобразование

$$x'^0 = -x^0, \quad x'^i = x^i. \quad \text{Такое преобразование имеет } \det L = -1 \text{ и } \Lambda^0_0 = -1 \text{ и принадлежит поэтому к категории } L^{\downarrow}_-$$

4. Полное отражение, определяемое как преобразование  $x'^\mu = -x^\mu$ .

В этом случае  $\det L = +1$ ,  $\Lambda^0_0 = -1$  и преобразование принадлежит к категории  $L^{\downarrow}_+$ . Полное отражение можно представить как произведение пространственного и временного отражений.

Любое преобразование Лоренца можно представить в виде произведения преобразований указанных четырех типов (см. задачи). Следовательно, мы можем ограничиться изучением вращений и бустов. Поскольку возможны три вращения и три буста, по одному на каждое пространственное направление, преобразование Лоренца характеризу-

ется шестью параметрами. Займемся построением шести соответствующих генераторов. Рассмотрим бесконечно малое ПЛ

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \epsilon^\mu_\nu, \quad (2.20)$$

где  $\delta^\mu_\nu$  — символ Кронекера, равный нулю при  $\mu \neq \nu$  и единице в остальных случаях. Подстановка выражения (2.20) в уравнение (2.6) дает с точностью до  $O(\epsilon)$

$$0 = g_{\nu\rho} \epsilon^\rho_\mu + g_{\mu\rho} \epsilon^\rho_\nu. \quad (2.21)$$

Используем метрический тензор для опускания индексов, например:

$$x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0 - \mathbf{x}). \quad (2.22)$$

Тогда уравнение (2.21) принимает вид

$$0 = \epsilon_{\nu\mu} + \epsilon_{\mu\nu}, \quad (2.23)$$

т.е.  $\epsilon_{\mu\nu}$  — антисимметричный тензор с  $4 \cdot 3/2 = 6$  (как и ожидалось) независимыми компонентами. Введем эрмитовы генераторы

$$L_{\mu\nu} \equiv i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu), \quad \text{где } \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right). \quad (2.24), (2.25)$$

Тогда можно написать

$$\delta x^\mu = i \frac{1}{2} \epsilon^{\rho\sigma} L_{\rho\sigma} x^\mu = \epsilon^{\mu\rho} x_\rho. \quad (2.26)$$

Легко видеть, что генераторы  $L_{\mu\nu}$  образуют алгебру Ли:

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = i g_{\nu\rho} L_{\mu\sigma} - i g_{\mu\rho} L_{\nu\sigma} - i g_{\nu\sigma} L_{\mu\rho} + i g_{\mu\sigma} L_{\nu\rho}, \quad (2.27)$$

которую можно отождествить с алгеброй Ли группы  $SO(3,1)$ . Наиболее общее представление генераторов  $SO(3,1)$ , удовлетворяющих перестановочным соотношениям (2.27), имеет вид

$$M_{\mu\nu} \equiv i(x_\mu \partial'_\nu - x_\nu \partial'_\mu) + S_{\mu\nu}, \quad (2.28)$$

где  $S_{\mu\nu}$  — эрмитовы операторы, которые образуют ту же алгебру Ли, что и  $L_{\mu\nu}$ , и коммутируют с ними. Эрмитовы генераторы  $M_{ij}$ , где  $i, j = 1, 2, 3$ , сами образуют алгебру

$$[M_{ij}, M_{kl}] = -i \delta_{jk} M_{il} + i \delta_{ik} M_{jl} + i \delta_{jl} M_{ik} - i \delta_{il} M_{jk}, \quad (2.29)$$

отвечающую группе вращений  $SU(2)$ . Можно получить более знакомое выражение, если ввести новые операторы

$$J_i \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M_{jk}, \quad (2.30)$$

где  $\epsilon_{ijk}$  — символ Леви-Чивиты, полностью антисимметричный по всем



своим индексам, и  $\epsilon_{123} = +1$ . (По повторяющимся латинским индексам проводится суммирование.) Тогда

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k. \quad (2.31)$$

Введем генераторы бустов

$$K_i \equiv M_{0i}. \quad (2.32)$$

Из алгебры Ли следует, что

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J_k, [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k. \quad (2.33), \quad (2.34)$$

Генераторы  $K_i$  и  $J_i$  эрмитовы, но при этом  $K_i$  некомпактны. Перестановочные соотношения можно расцепить, введя новые линейные комбинации

$$N_i \equiv \frac{1}{2} (J_i + iK_i). \quad (2.35)$$

Хотя они и неэрмитовы, т.е.  $N_i \neq N_i^\dagger$ , у них имеется то преимущество, что для них выполняются простые перестановочные соотношения

$$[N_i, N_j^\dagger] = 0, \quad (2.36)$$

$$[N_i, N_j] = i\epsilon_{ijk} N_k, \quad (2.37)$$

$$[N_i^\dagger, N_j^\dagger] = -i\epsilon_{ijk} N_k. \quad (2.38)$$

Это означает, что и  $N_i$ , и  $N_i^\dagger$  образуют алгебру Ли группы  $SU(2)$ . Поэтому можно воспользоваться хорошо известной теорией представлений этой группы. Из общеизвестных результатов этой теории для (спиновой) группы  $SU(2)$  следует, в частности, что в данном случае существуют два оператора Казимира (операторы, которые коммутируют со всеми генераторами)

$N_i N_i$  с собственными значениями  $n(n+1)$ ,

$N_i^\dagger N_i^\dagger$  с собственными значениями  $m(m+1)$ ,

где  $m, n = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$ . Полученные представления индицируются парой чисел  $(n, m)$ , а состояния внутри представления различаются дополнительно по собственным значениям операторов  $N_3$  и  $N_3^\dagger$ . Заметим, что две группы  $SU(2)$  не являются независимыми, так как их можно менять местами, производя операцию четности  $P$ , в результате которой имеем

$$J_i \rightarrow J_i, \quad K_i \rightarrow -K_i,$$

и операцию эрмитового сопряжения, меняющую знак мнимой единицы

и поэтому превращающую  $N_i$  в  $N_i^\dagger$ . В общем случае представления группы Лоренца не являются собственными состояниями ни четности, ни (эрмитового) сопряжения. Поскольку  $J_i = N_i + N_i^\dagger$ , можно отождествить спин представления с  $m + n$ . Рассмотрим для примера следующие представления:

а)  $(0, 0)$ : спин равен нулю, скалярное представление с определенной четностью (может быть скаляром и псевдоскаляром);

б)  $(1/2, 0)$ : спин равен  $1/2$ , левый спинор (определение левого и правого условное);

в)  $(0, 1/2)$ : спин равен  $1/2$ , правый спинор.

Эти спиноры имеют по две компоненты ("спин вверх" и "спин вниз"), и их называют вейлевскими. Когда требуется учитывать четность, следует рассматривать линейную комбинацию  $(0, 1/2) \oplus (1/2, 0)$ , образующую дираковский спинор.

Любопытно, что, задав эти спинорные представления, мы можем, умножая их друг на друга, построить любое другое представление. Это эквивалентно построению состояний с высшими спинами путем образования (кронекеровского) произведения многих состояний со спином  $1/2$  в группе вращений. Приведем два примера.

а) Произведение  $(1/2, 0) \otimes (0, 1/2) = (1/2, 1/2)$  дает представление со спином 1 с четырьмя компонентами. В тензорном обозначении оно записывалось бы как 4-вектор.

б)  $(1/2, 0) \otimes (1/2, 0) = (0, 0) \oplus (1, 0)$ . Здесь скалярное представление дается антисимметричным произведением. Новое представление  $(1, 0)$  описывается антисимметричным самодуальным тензором второго ранга, т.е. тензором  $B_{\mu\nu}$ , удовлетворяющим условиям

$$B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}, \quad B_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu}^{\rho\sigma} B_{\rho\sigma}, \quad (2.39), \quad (2.40)$$

где  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  — символ Леви-Чивиты в четырех измерениях, полностью антисимметричный по своим индексам, причем  $\epsilon^{0123} = +1$ . Представление  $(0, 1)$  отвечает антисамодуальному тензору

$$B_{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu}^{\rho\sigma} B_{\rho\sigma}. \quad (2.41)$$

Например, максвелловский тензор напряженности поля  $F_{\mu\nu}$  преобразуется по отношению к группе Лоренца как  $(0, 1) \oplus (1, 0)$ .

Подчеркнем, наконец, один важный момент. Предположим, что мы рассматриваем ПЛ в так называемом "евклидовом пространстве", где переменная  $t$  заменена величиной  $\sqrt{-1}t$ . Тогда перестановочные соотношения сохраняются, с той только разницей, что  $g_{\mu\nu}$  заменится кро-

некеровским дельта-символом  $-\delta_{\mu\nu}$ , и в результате мы приходим к алгебре Ли группы  $SO(4)$ , т.е. группы вращений в четырех измерениях. Теперь уже расщепление на две коммутирующие группы  $SU(2)$  достигается с помощью эрмитовых комбинаций  $J_i \pm K_i$ . Эти две группы  $SU(2)$  полностью независимы, поскольку они не могут быть переведены друг в друга сопряжением. Четность может все еще связывать эти две группы, но в евклидовом пространстве, где все направления эквивалентны, это уже значительно менее интересно.

### Задачи

**А.** Покажите, что преобразования Лоренца удовлетворяют групповым аксиомам, т.е. что если  $L_1$  и  $L_2$  — два ПЛ, то и произведение  $L_1 L_2$  — тоже ПЛ; существует тождественное преобразование, и если  $L$  — ПЛ, то и обратное преобразование  $L^{-1}$  — тоже ПЛ.

**Б.** Покажите, что  $\det L$  и знак величины  $\Lambda^0_0$  являются лоренц-инвариантными и могут быть поэтому использованы для классификации преобразований Лоренца.

**В.** Покажите, что если  $L$  — ограниченное ПЛ ( $\det L = +1$ ,  $\Lambda^0_0 > 1$ ), то все преобразования Лоренца могут быть записаны в виде

$L \times$  пространственное отражение для  $L^\dagger_-$

$L \times$  обращение времени для  $L^\dagger_+$ ,

$L \times$  пространственное отражение  $\times$  обращение времени для  $L^\dagger_\pm$ .

**Г.** Покажите, что ограниченное преобразование Лоренца можно однозначно представить в виде произведения буста и вращения.

**\*Д.** Задача о перетасовке индексов: покажите, что компоненты самодуального антисимметричного тензора второго ранга преобразуются друг через друга, т.е. неприводимо по отношению к группе Лоренца.

### § 3. Группа Пуанкаре

Другой фундаментальный принцип — это инвариантность поведения изолированной физической системы по отношению к однородным трансляциям в пространстве и времени. (Чтобы генерировать гравитационные взаимодействия, этот принцип следует обобщить на произвольные трансляции.) Такое преобразование записывается в виде

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu, \quad (3.1)$$

где  $a^\mu$  — произвольный постоянный 4-вектор. Следовательно, общей группой инвариантности является десятипараметрическая группа, на-

зываемая группой Пуанкаре, для которой

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu. \quad (3.2)$$

Трансляции (3.1) не коммутируют с ПЛ. Действительно, рассмотрим два последовательных преобразования группы Пуанкаре (ГП) с параметрами  $(\Lambda_1, a_1)$  и  $(\Lambda_2, a_2)$ :

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_{1\nu} x^\nu + a^\mu_{1\nu} \rightarrow \Lambda^\mu_{2\rho} \Lambda^\rho_{1\nu} x^\nu + \Lambda^\mu_{2\rho} a^\rho_{1\nu} + a^\mu_{2\rho}. \quad (3.3)$$

Мы видим, что параметры трансляции подвергаются вращению. Здесь нет ничего удивительного, поскольку так и должно быть в случае 4-векторов. Подобное связывание группы трансляций с группой Лоренца называется полупрямым произведением. Тем не менее, как явствует из самого названия, преобразования ГП образуют группу (см. задачу А). Чтобы получить алгебру генераторов, заметим, что изменение координат мировой точки  $x$  при бесконечно малой трансляции можно записать в виде

$$\delta x^\mu = i \epsilon^\rho P_\rho x^\mu = \epsilon^\mu, \quad (3.4), (3.5)$$

где  $\epsilon^\mu$  — параметры, а

$$P_\rho = -i \partial_\rho \quad (3.6)$$

— эрмитовы генераторы этого преобразования. Очевидно, что они коммутируют друг с другом:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (3.7)$$

но не коммутируют (ибо они 4-векторы) с генераторами группы Лоренца:

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = -i g_{\mu\rho} P_\nu + i g_{\nu\rho} P_\mu. \quad (3.8)$$

Перестановочными соотношениями (3.7) и (3.8), а также перестановочными соотношениями для  $M_{\mu\nu}$  определяется алгебра Ли группы Пуанкаре. "Длина"  $P_\mu P^\mu$  вектора  $P_\rho$ , очевидно, инвариантна по отношению к преобразованиям Лоренца, а потому в силу формулы (3.7) является оператором Казимира. Не столь очевидно, как построить другой оператор Казимира, но, как мы только что заметили, таким оператором может служить длина любого 4-вектора, коммутирующего с генераторами  $P_\mu$ . Как раз таким вектором является 4-вектор Паули — Любанского  $W^\mu$ :

$$W^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma}. \quad (3.9)$$

С учетом формул (3.7) и (3.8) и антисимметрии символа Леви-Чивиты

получаем

$$[W^\mu, P^\rho] = 0, \quad (3.10)$$

а поскольку  $W_\rho$  преобразуется как 4-вектор, мы имеем

$$[M_{\mu\nu}, W_\rho] = -i g_{\mu\rho} W_\nu + i g_{\nu\rho} W_\mu. \quad (3.11)$$

Поэтому длина  $W^\mu W_\mu$  данного вектора является инвариантом Казимира. Самые общие выражения для десяти генераторов группы Пуанкаре таковы:

$$P_\rho = -i \partial_\rho, \quad M_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) + S_{\mu\nu},$$

так что

$$W^\mu = -\frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} S_{\rho\sigma} \partial_\nu. \quad (3.12)$$

Теория представлений ГП была разработана В. Вигнером. Ее представления распадаются на три класса.

1. Собственное значение оператора  $P_\rho P^\rho \equiv m^2$  есть действительное положительное число. Тогда собственное значение оператора  $W_\rho W^\rho$  равно  $-m^2 s(s+1)$ , где  $s$  — спин, принимающий дискретные значения  $s = 0, 1/2, 1, \dots$ . Такие представления индицируются массой  $m$  и спином  $s$ . Состояния внутри представления различаются третьей компонентой спина  $s_3 = -s, -s+1, \dots, s-1, s$ , а также непрерывными собственными значениями  $P_i$ . Физически это состояние соответствует частице массой  $m$ , со спином  $s$ , трехмерным импульсом  $p_i$  и проекцией спина  $s_3$ . Массивные частицы со спином  $s$  имеют  $2s+1$  степеней свободы.

2. Собственное значение оператора  $P_\rho P^\rho$  равно нулю, что отвечает частице с нулевой массой покоя. При этом собственное значение оператора  $W_\rho W^\rho$  тоже равно нулю, а так как  $P^\rho W_\rho = 0$ , операторы  $W_\mu$  и  $P_\mu$  пропорциональны друг другу. Соответствующий коэффициент пропорциональности называется спиральностью и равен  $\pm s$ , где  $s = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$  — спин представления. Таким образом, безмассовые частицы со спином  $s \neq 0$  имеют две степени свободы. Они дополнительно различаются тремя значениями их импульса вдоль осей  $x, y, z$ . Примером частиц, попадающих в эту категорию, могут служить фотон со спином 1 и двумя состояниями со спиральностью  $\pm 1$ , нейтрино со спиральностью  $\pm 1/2$  и гравитон с двумя состояниями поляризации  $\pm 2$ .

3.  $P_\rho P^\rho = 0$ , но при этом спин непрерывен. Длина вектора  $W$  равна квадрату положительного числа, взятому со знаком минус. Этот тип представления описывает частицу с нулевой массой покоя и с бесконеч-

ным числом состояний поляризации, индицируемых непрерывной переменной. Такие представления, по-видимому, не реализуются в природе.

За подробностями мы отсылаем читателя к статье В. Баргмана и Ю. Вигнера [1]<sup>1)</sup>. Существуют также "тахсионные" представления с  $P_\rho P^\rho < 0$ , которые мы не рассматриваем.

Имеются и другие представления ГП, но они неунитарны. Квантовая механика допускает отождествление с состояниями частиц только унитарных представлений. Вигнеровские представления бесконечномерны, что соответствует частицам с неограниченным импульсом. Полезно сравнить этот случай с тем, что мы получили для группы Лоренца, где речь шла о конечномерных, но неунитарных представлениях. Введя в рассмотрение поля, мы сможем использовать эти представления.

### Задачи

А. Покажите, что преобразования (3.2) образуют группу.

В. Покажите, что если  $P_\rho P^\rho = m^2 > 0$ , то собственное значение оператора  $W_\rho W^\rho$  действительно равно  $-m^2 s(s+1)$ .

\*В. Найдите представление генераторов ГП на пространственно-подобной поверхности  $x_0 = 0$  в случае, когда  $m^2 = 0$  и  $s = 0$ .

Указание. Положив  $x_0 = 0$ , следует выразить сопряженную величину  $P_0$  через оставшиеся переменные. Для этого используйте оператор Казимира. Затем выразите все генераторы ГП через  $x_i$ ,  $P_i$  и  $m^2$ . См. по этому поводу статью [2].

\*Г. Решите предыдущую задачу в случае пространственноподобной поверхности  $x^0 = x^3$ .

\*\*Д. Решите задачу Г в случае, когда  $s \neq 0$  и  $m^2 > 0$ .

## § 4. Локальные поля и преобразования группы Пуанкаре

Рассмотрим произвольную функцию пространственно-временной точки  $P$ . В одной инерциальной системе отсчета, в которой точке  $P$  соответствуют координаты  $x^\mu$ , это будет функция  $f(x^\mu)$ ; в другой системе отсчета, где точке  $P$  соответствуют координаты  $x'^\mu$ , это будет функция  $f'(x'^\mu)$ , поскольку функциональная зависимость, вообще говоря, зависит от выбора системы отсчета. Запишем изменение функ-

<sup>1)</sup> Литература помещена в конце глав. Кроме того, в конце книги имеется аннотированная библиография. — Прим. перев.

ции при бесконечно малом преобразовании координат в виде

$$\begin{aligned} \delta f &= f'(x') - f(x) = f'(x + \delta x) - f(x) = \\ &= f'(x) - f(x) + \delta x^\mu \partial_\mu f' + O(\delta x^2). \end{aligned} \quad (4.1)$$

С точностью до  $O(\delta x^\mu)$  можно заменить  $\partial_\mu f'$  величиной  $\partial_\mu f$ . Тогда

$$\delta f = \delta_0 f + \delta x^\mu \partial_\mu f, \quad (4.2)$$

где через  $\delta_0 f$  обозначено изменение функции в данной точке  $x$ :

$$\delta_0 f = f'(x) - f(x). \quad (4.3)$$

Второй член в формуле (4.2) называется переносным членом. Равенство (4.2) можно формально записать как операторное:

$$\delta = \delta_0 + \delta x^\mu \partial_\mu. \quad (4.4)$$

При трансляциях в пространстве-времени локальное поле не меняется, т.е.

$$\delta f = 0 = \delta_0 f + \epsilon^\mu \partial_\mu f, \quad (4.5)$$

$$\text{или } \delta_0 f = -\epsilon^\mu \partial_\mu f = -i \epsilon^\mu P_\mu f, \quad (4.6)$$

где  $P_\mu$  — оператор, определенный формулой (3.6). При лоренцевых же преобразованиях ситуация более сложная, и для ее выяснения мы рассмотрим несколько примеров.

#### а) Скалярное поле

Построим (или представим себе) некоторую функцию  $\varphi(x)$  координат  $x^\mu$ , принимающую одно и то же значение при измерении в различных инерциальных системах отсчета, связанных преобразованием Лоренца, т.е.

$$\varphi'(x') = \varphi(x). \quad (4.7)$$

Этим условием определяется некое скалярное поле (по отношению к к ПЛ). В случае бесконечно малого преобразования, используя формулы (4.7) и (4.2), находим, что

$$0 = \delta\varphi = \delta_0\varphi + \delta x^\mu \partial_\mu \varphi, \quad (4.8)$$

где  $\delta x^\mu$  дается формулой (2.26). Полагая

$$\delta_0\varphi = -\frac{i}{2} \epsilon^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma} \varphi \quad (4.9)$$

и сравнивая с (4.8), мы видим, что представление генераторов группы

Лоренца  $M_{\mu\nu}$  в случае скалярного поля есть просто  $i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$ . Это означает, что введенный ранее оператор  $S_{\mu\nu}$ , действуя на скалярное поле, дает нуль. Как возникает нетривиальное  $S_{\mu\nu}$ , можно увидеть, рассмотрев конструкцию  $\delta_\mu\phi(x)$ . Заметим, что это выражение — скаляр по отношению к трансляциям, так же как и  $\phi$ , поскольку оператор производной не меняется при трансляциях (конечно, только при однородных трансляциях). Имеем

$$\delta\delta_\mu\phi = [\delta, \partial_\mu]\phi + \partial_\mu\delta\phi. \quad (4.10)$$

Так как  $\phi$  — лоренцовский скаляр, величина  $\delta\phi$  равна нулю. Но из формулы (4.4) мы видим, что

$$[\delta, \partial_\mu] = [\delta_0, \partial_\mu] + [\delta x^\nu\partial_\nu, \partial_\mu]. \quad (4.11)$$

Оператор  $\delta_0$  не меняет величины  $x^\mu$  и поэтому коммутирует с  $\partial_\mu$ , но к  $\delta x^\nu$  это не относится. Вычисление последнего коммутатора дает

$$[\delta, \partial_\mu] = \epsilon_\mu{}^\nu\partial_\nu. \quad (4.12)$$

Собирая все полученные результаты, находим, что

$$\delta_0\partial_\mu\phi = -\frac{i}{2}\epsilon^{\rho\sigma}L_{\rho\sigma}\partial_\mu\phi - \frac{i}{2}(\epsilon^{\rho\sigma}S_{\rho\sigma})_\mu{}^\nu\partial_\nu\phi, \quad (4.13)$$

$$\text{где } (S_{\rho\sigma})_\mu{}^\nu = i(g_{\rho\mu}g_\sigma{}^\nu - g_{\sigma\mu}g_\rho{}^\nu). \quad (4.14)$$

Как нетрудно убедиться, найденные операторы удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и генераторы  $L_{\mu\nu}$ . Сравнивая соотношение (4.13) с канонической формой

$$\delta_0(\text{что угодно}) = -\frac{i}{2}\epsilon^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}(\text{что угодно}), \quad (4.15)$$

мы получаем представление лоренцовских генераторов для поля  $\delta_\mu\phi$ . Поле, преобразующееся как  $\delta_\mu\phi(x)$ , называется векторным полем. Заметим, что роль "спиновой части"  $M_{\mu\nu}$  заключается в перестановке индексов.

Тензорное поле со многими лоренцовскими индексами будет преобразовываться тоже по закону (4.13). Действие оператора  $S_{\rho\sigma}$  на такое поле будет представляться суммой выражений типа (4.14), по одному на каждый индекс. Например, действие оператора  $S_{\rho\sigma}$  на тензор второго ранга  $B_{\mu\nu}$  дается формулой

$$(S_{\rho\sigma}B)_{\mu\nu} = -i(g_{\sigma\mu}B_{\rho\nu} - g_{\rho\mu}B_{\sigma\nu} + g_{\sigma\nu}B_{\mu\rho} - g_{\rho\nu}B_{\mu\sigma}). \quad (4.16)$$

Теперь уже легко построить из скалярных полей инварианты по отношению к группе Пуанкаре. Это любые скалярные функции  $\phi(x)$ , такие,



как  $\varphi^n$ , сов  $\varphi(x)$  и т.д.,  $\partial_\mu \partial^\mu \varphi(x)$ ,  $(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi)$  и т.д. (см. задачу). Но величина  $x^\mu \partial_\mu \varphi$ , будучи лоренц-инвариантной, не является пуанкаре-инвариантной.

### б) Спинорные поля

Спинорные представления  $(1/2, 0)$  и  $(0, 1/2)$  группы Лоренца реализуются двухкомпонентными комплексными спинорами. Обозначим эти спиноры через  $\psi_L(x)$  и  $\psi_R(x)$ . Двухзначные спинорные индексы яро не выписаны. [В литературе спинорные индексы  $L$ -типа отмечают точкой сверху, а индексы  $R$ -типа пишут без точки.] Запишем преобразование спиноров в виде

$$\Psi_L(x) \rightarrow \Psi_L^*(x^*) = \Lambda_L \Psi_L(x) \quad \text{для } (1/2, 0)$$

$$\Psi_L(x) \rightarrow \Psi_R^*(x^*) = \Lambda_R \Psi_R(x) \quad \text{для } (0, 1/2).$$

где  $\Lambda_{R, L}$  — матрицы  $2 \times 2$  с комплексными элементами. В случае когда преобразование является вращением, явный вид матрицы  $\Lambda_{L, R}$  известен из спинорных представлений группы  $SU(2)$ :

$$\Lambda_{L(R)} = e^{i \frac{\sigma}{2} \omega} \quad (\text{вращение}). \quad (4.17)$$

Здесь  $\omega^i$  — параметры вращения, а  $\sigma^i$  — эрмитовы  $2 \times 2$ -матрицы Паули:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Эти матрицы удовлетворяют соотношению

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k. \quad (4.19)$$

Сопоставив таким образом генераторы вращений  $J_i$  с  $1/2 \sigma^i$ , мы можем записать в такой же  $2 \times 2$ -форме и генераторы бустов. Нам уже известно, что генераторы  $K_i$  не должны быть унитарными, так как расщепление на две  $SU(2)$ -группы неунитарно. Представление генераторов в виде

$$K = -\frac{i}{2} \sigma \quad (4.20)$$

удовлетворяет всем требуемым перестановочным соотношениям. Поэтому

$$\Lambda_L = e^{\frac{i}{2} \sigma \cdot (\omega - i v)} \quad (4.21)$$

где  $\nu$  — параметры буста, связанные с генераторами  $\mathbf{K}$ . Поскольку представления  $(1/2, 0)$  и  $(0, 1/2)$  связаны между собой преобразованием четности, можно, зная  $\Lambda_L$ , построить  $\Lambda_R$ , изменив знак параметров буста:

$$\Lambda_R = e^{\frac{i}{2} \sigma \cdot (\omega + i\nu)} \quad (4.22)$$

Эти выражения для  $\Lambda_L$  и  $\Lambda_R$  дают возможность вывести ряд важных свойств. Во-первых, мы видим, что  $\Lambda_L$  и  $\Lambda_R$  связаны между собой соотношением

$$\Lambda_L^{-1} = \Lambda_R^\dagger \quad (4.23)$$

Во-вторых, в силу магического свойства матриц Паули

$$\sigma^2 \sigma^i \sigma^2 = -(\sigma^i)^*, \quad (4.24)$$

где звездочкой обозначена, как обычно, комплексно сопряженная матрица, можно написать соотношение

$$\sigma^2 \Lambda_L \sigma^2 = e^{-\frac{i}{2} \sigma^* \cdot (\omega - i\nu)} = \Lambda_R^* \quad (4.25)$$

В-третьих, из эрмитово-сопряженного равенства (4.24) с учетом эрмитовости матриц Паули следует, что

$$\Lambda_L^T = \sigma^2 \Lambda_L^{-1} \sigma^2, \quad (4.26)$$

$$\text{откуда } \sigma^2 \Lambda_L^T \sigma^2 \Lambda_L = 1, \text{ или } \Lambda_L^T \sigma^2 \Lambda_L = \sigma^2. \quad (4.27)$$

Такое же равенство справедливо и для  $\Lambda_R$ . Все эти соотношения понадобятся при построении лоренц-инвариантных выражений, содержащих спинорные поля. В качестве первого применения, используя комплексно сопряженное равенство (4.25), находим, что при лоренцевских преобразованиях выполняются соотношения

$$\sigma^2 \psi_L^* \rightarrow \sigma^2 \Lambda_L^* \psi_L^* = \sigma^2 \Lambda_L^* \sigma^2 \sigma^2 \psi_L^* = \Lambda_R \sigma^2 \psi_L^*. \quad (4.28)$$

Формула (4.28) показывает, что, если задан спинор  $\psi_L$ , преобразующийся как  $(1/2, 0)$ , можно построить связанный с ним спинор  $\sigma^2 \psi_L^*$ , преобразующийся как  $(0, 1/2)$ . Точно так же, если спинор  $\psi_R$  преобразуется как  $(0, 1/2)$ , то спинор  $\sigma^2 \psi_R^*$  преобразуется как  $(1/2, 0)$ .

Ранее отмечалось, что можно построить скалярное представление, взяв антисимметричное произведение двух представлений  $(1/2, 0)$ . Теперь это можно явно показать. Пусть  $\psi_L$  и  $\chi_L$  — два спинора, преобразующиеся по представлению  $(1/2, 0)$ . Как следует из формулы (4.27),

при лоренцовских преобразованиях

$$\chi_L^T \sigma^2 \Psi_L \rightarrow \chi_L^T \Lambda_L^T \sigma^2 \Lambda_L \Psi_L = \chi_L^T \sigma^2 \Psi_L. \quad (4.29)$$

Это и есть искомый скаляр. С точки зрения теории групп скалярное произведение возникает как антисимметричное произведение; поэтому, взяв  $\chi_L = \Psi_L$ , мы должны получить, что скалярный инвариант не существует. В явной форме находим, что

$$\Psi_L^T \sigma^2 \Psi_L = (\Psi_{L_1} \Psi_{L_1}) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{L_1} \\ \Psi_{L_1} \end{pmatrix} = -i \Psi_{L_1} \Psi_{L_2} + i \Psi_{L_2} \Psi_{L_1}, \quad (4.30)$$

и это выражение обращается в нуль, если  $\Psi_{L_1}$  и  $\Psi_{L_2}$  — обычные числа. Но если взять в качестве  $\Psi_{L_1}$  и  $\Psi_{L_2}$  грассмановы числа, антикоммутирующие друг с другом, то такой скалярный инвариант будет иметь ненулевое значение. И действительно, как мы увидим ниже, спинорные поля будут рассматриваться как классические грассмановы (антикоммутирующие) числа.

Можно также взять  $\chi_L = \sigma^2 \Psi_R^*$ . Тогда инвариант принимает вид

$$i (\sigma^2 \Psi_R^*)^T \sigma^2 \Psi_L = -i \Psi_R^\dagger \Psi_L. \quad (4.31)$$

Ни один из этих инвариантов не является действительным. Заменяя  $L$  на  $R$  и наоборот, мы получим комплексно сопряженные инварианты.

Из двух спиноров можно построить и представление, отвечающее 4-вектору. Простейший путь — начать со спинора  $\Psi_L \sim (1/2, 0)$ , так как из него можно сконструировать спинор  $(0, 1/2)$ , а затем перемножить эти два спинора. Известно, что величина  $\Psi_L^\dagger \Psi_L$  инвариантна по отношению к вращениям, которые представляются унитарными операторами, действующими на спиноры. Но она не инвариантна по отношению к бустам, поскольку

$$\Psi_L^\dagger \Psi_L \rightarrow \Psi_L^\dagger e^{\sigma \cdot \mathbf{v}} \Psi_L \approx \Psi_L^\dagger \Psi_L + \mathbf{v} \cdot \Psi_L^\dagger \sigma \Psi_L + O(v^2). \quad (4.32)$$

Однако дополнительно возникшая величина преобразуется по правилу

$$\begin{aligned} \Psi_L^\dagger \sigma^i \Psi_L \rightarrow \Psi_L^\dagger e^{\frac{1}{2} \sigma \cdot \mathbf{v}} \sigma^i e^{-\frac{1}{2} \sigma \cdot \mathbf{v}} \Psi_L &\approx \Psi_L^\dagger \sigma^i \Psi_L + \\ + \frac{1}{2} v^j \Psi_L^\dagger \{ \sigma^i, \sigma^j \} \Psi_L + O(v) &\approx \Psi_L^\dagger \sigma^i \Psi_L + v^j \Psi_L^\dagger \sigma^j \Psi_L + O(v^2), \end{aligned} \quad (4.33)$$

где фигурными скобками  $\{ \}$  обозначен антикоммутатор. Следовательно, под действием бустов две указанные величины преобразуются друг в друга:

$$\delta \psi_L^\dagger \psi_L = v^i \psi_L^\dagger \sigma^i \psi_L, \quad \sigma \psi_L^\dagger \sigma^i \psi_L = v^i \psi_L^\dagger \psi_L, \quad (4.34)$$

а по отношению к вращению величина  $\psi_L^\dagger \sigma^i \psi_L$  ведет себя как трехмерный вектор. Сравним соотношения (4.34) с Законом преобразования 4-вектора

$$\delta V^\mu = \varepsilon^\mu_\nu V^\nu, \quad (4.35)$$

где  $\varepsilon^{\sigma i} = -v^i$  — параметры буста. Отсюда вытекает, что величина

$$i \psi_L \sigma^\mu \psi_L = i (\psi_L \psi_L, \psi_L \sigma^i \psi_L) \quad (4.36)$$

является 4-вектором. Здесь мы обозначили через  $\sigma^0$  единичную  $2 \times 2$ -матрицу. Начав с  $\psi_R$  и изменив знак пространственных компонент, можно получить другой 4-вектор

$$i \psi_R \sigma^{-\mu} \psi_R = i (\psi_R^\dagger \psi_R, -\psi_R^\dagger \sigma^i \psi_R) \quad (4.37)$$

Эти два вектора действительны, поскольку  $\psi_L$  и  $\psi_R$  — грассмановы переменные:  $(\psi_L^\dagger \psi_R)^* = \psi_L^T \psi_R^* = -\psi_R^\dagger \psi_L$ , их сумма (разность) имеет положительную (отрицательную) четность.

Каждый из этих 4-векторов, скомбинированный с другим, может дать лоренцовский инвариант. Как мы видели ранее, простейшим 4-вектором является оператор производной  $\partial_\mu$ , который вдобавок еще и трансляционно-инвариантен. Так как оператор  $\partial_\mu$  может действовать на любое из полей, получаем следующие билинейные по спинорным полям инварианты:

$$\partial_\mu \psi_R^\dagger \sigma^{-\mu} \psi_R, \quad \psi_R^\dagger \sigma^{-\mu} \partial_\mu \psi_R, \quad \partial_\mu \psi_L^\dagger \sigma^\mu \psi_L, \quad \psi_L^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_L \quad (4.38)$$

Подразумевается, что оператор производной действует направо и только на ближайшую соседнюю величину. Указанные лоренцовские инварианты уже не являются действительными; однако можно образовать действительные комбинации, например

$$\frac{1}{2} \psi_L^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_L - \frac{1}{2} \partial_\mu \psi_L^\dagger \sigma^\mu \psi_L \equiv \frac{1}{2} \psi_L^\dagger \sigma^\mu \leftrightarrow \partial_\mu \psi_L \quad (4.39)$$

и аналогичное выражение, в котором  $L$  заменено на  $R$ , а  $\sigma^\mu$  — на  $\bar{\sigma}^\mu$ .

Если четность существенна, то следует объединить представления  $(1/2, 0)$  и  $(0, 1/2)$ . Поскольку невозможно приравнять спинор  $\psi_L$

спинору  $\sigma^2 \psi^*_L$ , не придя к противоречию или к условию  $\psi_L = 0$ , необходимо построить четырехкомпонентный спинор, называемый дираковским спинором:

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

для которого операция пространственной инверсии хорошо определена:

$$P: \quad \Psi \rightarrow \Psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Psi \equiv \gamma_0 \Psi, \quad (4.41)$$

где введена  $4 \times 4$ -матрица  $\gamma_0$ . С помощью проекционных операторов

$$\frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5), \quad (4.42)$$

где (в блочной форме)

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.43)$$

можно спроектировать дираковский спинор на левый или правый спиноры.

Все построенные ранее инварианты можно выразить через дираковские спиноры. Например,

$$\psi_R^\dagger \psi_L + \psi_L^\dagger \psi_R = \psi^\dagger \gamma^0 \psi = \bar{\psi} \psi, \quad (4.44)$$

где  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  — дираковски-сопряженный спинор. Так как величина (4.44) является лоренцовским инвариантом, спинор  $\bar{\psi}$  преобразуется контраградиентно по отношению к  $\psi$ . Аналогично

$$\frac{1}{2} (\psi_L^\dagger \sigma^\mu \vec{\partial}_\mu \psi_L + \psi_R^\dagger \bar{\sigma}^\mu \vec{\partial}_\mu \psi_R) = \frac{1}{2} \psi \gamma^\mu \vec{\partial}_\mu \psi, \quad (4.45)$$

где введены  $4 \times 4$ -матрицы

$$\gamma^i \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

Поскольку величина (4.45) — лоренцовский инвариант, индекс  $\mu$  у  $\gamma$ -матриц является истинным 4-векторным индексом. Ясно, что это дираковские матрицы в вейлевском представлении. Они удовлетворяют соотношению

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (4.47)$$

Матрица  $\gamma_5$  связана с другими  $\gamma$ -матрицами формулой

$$\gamma_5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3. \quad (4.48)$$

Учитывая эквивалентность спиноров  $\psi_L$  и  $\sigma^2 \psi_R^*$  по отношению к преобразованиям Лоренца, можно построить соответствующий дираковский спинор

$$\Psi^c \equiv \begin{pmatrix} \sigma^2 \psi_R^* \\ -\sigma^2 \psi_L^* \end{pmatrix}. \quad (4.49)$$

Заметим, что

$$(\Psi^c)^c = \Psi. \quad (4.50)$$

Спинор  $\Psi^c$  называется (зарядово) сопряженным. Поскольку  $\sigma^2 \psi_L^*$  преобразуется так же, как  $\psi_R$ , можно построить и специальный тип четырехкомпонентного спинора, называемый майорановским спинором,

$$\Psi^M = \begin{pmatrix} \psi_L \\ -\sigma^2 \psi_L^* \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

Он (зарядово) самосопряжен. Майорановский спинор — это вейлевский спинор, записанный в четырехкомпонентной форме. Мы остановимся на физической интерпретации этого спинора, когда построим из спинорных полей функционалы действия. Сейчас же заметим лишь, что майорановский или вейлевский спинор описывает объекты с вдвое меньшим, чем у дираковских спиноров, числом степеней свободы.

Как мы отмечали в конце § 2, в евклидовом пространстве нельзя связать друг с другом две  $SU(2)$ -группы, образующие (евклидову) группу Лоренца. Теперь мы можем показать, почему это так. Каждая из групп  $SU(2)$  реализуется унитарными операторами, и поэтому мы имеем новые выражения

$$\Lambda_L \rightarrow \Lambda_L^E = e^{\frac{i}{2} \sigma \cdot (\omega + \mathbf{v})}, \quad (4.52)$$

$$\Lambda_R \rightarrow \Lambda_R^E = e^{\frac{i}{2} \sigma \cdot (\omega - \mathbf{v})}$$

откуда видно, что между  $\Lambda_L^E$  и  $\Lambda_R^E$  нет никаких связей. Следовательно, в евклидовом пространстве не существуют майорановские спиноры, так как невозможно связать  $\psi_L^E$  и  $\psi_R^E$ . Однако мы свободны в выборе  $\psi_L^E$  или  $\psi_R^E$  по отдельности и даже можем образовать дираковский спинор  $\Psi^E$ , понимая при этом, что введенная ранее операция зарядового сопряжения перестает существовать.

## в) Векторное поле

Векторное поле преобразуется по представлению  $(1/2, 1/2)$ . Мы уже видели, как действует оператор  $S_{\rho\sigma}$  на произвольное векторное поле  $A_\mu(x)$ . К этому можно добавить, что существует другое представление векторного поля в виде эрмитовой  $2 \times 2$ -матрицы

$$A^\mu \rightarrow A = \begin{pmatrix} A^0 + A^3 & A^1 + i A^2 \\ A^1 - i A^2 & A^0 - A^3 \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

Преобразования Лоренца определяются как такие преобразования, при которых сохраняется условие  $A = A^\dagger$  и инвариантна величина  $\det A$ . Можно рассмотреть ряд инвариантов, таких, как  $A_\mu(x) A^\mu(x)$ ,  $\partial_\mu A_\nu(x) \partial^\nu A^\mu(x)$ ,  $\partial_\mu A_\nu(x) \partial^\mu A^\nu(x)$ ,  $\partial^\mu \phi_\mu(x)$ , и т.д. Поскольку для того представления четность определена, можно определить как векторные, так и аксиально-векторные поля.

г) Поле со спином  $3/2$ 

Можно по-разному определять поле со спином  $3/2$  в зависимости от того, какую роль должна играть четность. Один из возможных способов заключается в том, чтобы образовать произведения трех представлений  $(1/2, 0)$ :

$$(1/2, 0) \otimes (1/2, 0) \otimes (1/2, 0) = (3/2, 0) \oplus (1/2, 0) \oplus (1/2, 0). \quad (4.54)$$

Полностью симметричное произведение отвечает спину  $3/2$  [два представления  $(1/2, 0)$  имеют смешанную симметрию]. Таким образом, поле со спином  $3/2$  представляется полем, полностью симметричным относительно перестановок трех его спинорных индексов  $L$ -типа. Трансформационные свойства такого поля получаются путем соответствующего обобщения действия оператора  $S_{\rho\sigma}$  на индекс  $L$ -типа (см. задачу). В этом случае собственные состояния оператора четности даются комбинацией представлений  $(3/2, 0) \sim (0, 3/2)$ . Однако подобное представление довольно громоздко из-за большого числа индексов у символа поля.

Более удобное представление поля со спином  $3/2$  дает произведение вектора и спинора:

$$(1/2, 1/2) \otimes (1/2, 0) = (1, 1/2) \oplus (0, 1/2). \quad (4.55)$$

Соответствующая полевая величина имеет 4-векторный и спинорный индексы. Собственным состоянием оператора четности будет в этом случае четырехкомпонентное поле Рариты – Швингера

$$\Psi_\mu = \begin{pmatrix} \Psi_{\mu L} \\ \Psi_{\mu R} \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

(спинорные индексы опущены). Записанное в таком виде поле описывает все состояния, содержащиеся в произведении (4.55), вместе с их партнерами по четности. Следовательно, необходимо лоренц-инвариантным образом отбросить лишние компоненты  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ . Поэтому мы налагаем на поле дополнительные условия

$$\sigma^\mu \psi_{\mu L} = \bar{\sigma}^\mu \psi_{\mu R} = 0 \quad (4.57)$$

или, с использованием матриц Дирака,

$$\gamma^\mu \psi_\mu = 0 \quad (4.58)$$

Можно построить те же типы ковариантов и инвариантов, что и в спинорном случае, с той только разницей, что теперь имеется еще один векторный индекс. Инвариантами, например, будут

$$\psi_{\mu L}^T \sigma_2 \psi_L^\mu, \psi_{\mu R}^T \sigma_2 \psi_R^\mu, \psi_{\mu R} \psi_L^\mu, \dots \quad (4.59)$$

Используя набор векторов

$$\psi_{\mu L}^\dagger \sigma_\rho \psi_{\nu L} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \psi_{\mu R}^\dagger \bar{\sigma}_\rho \psi_{\nu R} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (4.60)$$

в комбинации с оператором  $\partial_\rho$ , образуем инварианты вида

$$\partial_\mu \psi_{\sigma L}^\dagger \sigma_\rho \psi_{\nu L} \epsilon^{\mu\sigma\rho\nu} \quad \text{и т.д.} \quad (4.61)$$

Действительным скалярным инвариантом является комбинация

$$\frac{1}{2} (\psi_{\mu L}^\dagger \bar{\sigma}_\rho \partial_\sigma^\dagger \psi_{\nu L} - \psi_{\mu R} \sigma_\rho \bar{\partial}_\sigma \psi_{\nu R}) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\rho \partial_\sigma \Psi_\nu \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (4.62)$$

Наличие знака минус, или, что то же, матрицы  $\gamma_5$ , диктуется свойствами тензора  $\epsilon$  по отношению к преобразованию четности. Наконец, заметим, что, как и в случае поля со спином  $1/2$ , на поля Рариты – Швингера можно наложить майорановские условия.

#### д) Поле со спином 2

И в этом случае существует много способов описать поле со спином 2:  $(2, 0)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(1, 1)$ . Выберем последний способ. Такое представление возникает в произведении

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = [(0, 0) \oplus (1, 1)]_S \oplus [(0, 1) \oplus (1, 0)]_A, \quad (4.63)$$

где индексами  $S$  и  $A$  обозначены симметричная и антисимметричная части. Следовательно, поле со спином 2 может быть описано симме-



тричным тензором второго ранга  $h_{\mu\nu}$ . Следы этого тензора соответствует скалярная компонента, которую можно отбросить, наложив условие бесследовости

$$g^{\mu\nu} h_{\mu\nu}(x) = 0. \quad (4.64)$$

Инварианты легко строятся путем "насыщения" векторных индексов и использования оператора  $\partial_\rho$ . Вот примеры:

$$h_{\mu\nu} h^{\mu\nu}, \partial_\rho h_{\mu\nu} \partial^\rho h^{\mu\nu}, \partial_\rho h_{\mu\nu} \partial^\mu h^{\rho\nu}, \dots \quad (4.65)$$

Такое тензорное поле возникает в общей теории относительности, где оно используется для описания гравитона.

Завершая параграф, заметим, что можно построить и много других полей, обладающих определенными свойствами по отношению к лоренцовским преобразованиям. Мы выбрали для более детального обсуждения только те из них, которые используются для описания физических явлений. Это как раз те поля, которым мы можем сопоставить фундаментальные частицы. Так, дираковским спинорам мы ставим в соответствие заряженные фермионы, подобные электрону, мюону, тау-лептону, кваркам; вейлевским спинорам — нейтрино  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ . Векторным полям мы сопоставляем фотон, глюоны, посредством которых осуществляются сильные взаимодействия, и  $W$ -бозоны, посредством которых осуществляются слабые взаимодействия. Наконец, тензорному полю соответствует гравитон, посредством которого осуществляется гравитационное взаимодействие.

### Задачи

А. Найдите в явной форме результат действия оператора  $S_{\rho\sigma}$  на  $\psi_L$  и  $\psi_R$ .

Б. Выразите результат действия оператора  $S_{\rho\sigma}$  на дираковский спинор через дираковские матрицы, т.е. представьте в виде, не зависящем от представления.

В. Постройте явное выражение для поля, билинейного по спинорам  $\chi_L$  и  $\psi_L$  и преобразующегося по представлению  $(1, 0)$ . Можно ли построить такое поле только из поля  $\psi_L$ ?

Г. Используя матрицы  $\Lambda_L$  и  $\Lambda_R$ , найдите форму, которую принимают преобразования Лоренца, действующие на матрицу (4.53).

Д. Исходя из полей  $\psi_L(x)$  и  $A_\mu(x)$ , постройте по крайней мере два инварианта, в которые входят оба эти поля.

Е. Найдите представление матриц Дирака, в котором компоненты майорановского спинора действительны. Такое представление называется майорановским представлением.

## § 5. Общие свойства действия

В предыдущих параграфах мы познакомились с тем, как построить пуанкаре-инвариантные выражения из полей, имеющих вполне определенные трансформационные свойства по отношению к группе Пуанкаре. Теперь мы можем объединять эти инварианты в выражения для функционалов действия, которые могли бы служить основой для более или менее приемлемых физических теорий. Требование инвариантности по отношению к группе Пуанкаре гарантирует, что эти теории будут подчиняться аксиомам специальной теории относительности. Но, освоившись с таким построением, мы увидим, что получается слишком много вариантов теорий и что одного требования пуанкаре-инвариантности недостаточно для того, чтобы выделить истинное действие, описывающее мир. Попытаемся сузить круг наших поисков и перечислим некоторые искусственно налагаемые требования, которые, как выяснилось, достаточны для того, чтобы отобрать приемлемые теории.

1. Мы используем функционалы действия вида

$$S \equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4 x \mathcal{L}, \quad (5.1)$$

где  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — пределы интегрирования, а

$$d^4 x = dt \, dx^1 \, dx^2 \, dx^3 \quad (5.2)$$

есть мера интегрирования в четырехмерном пространстве Минковского. Иногда по математическим соображениям мы будем менять число измерений пространства-времени или даже рассматривать меру в евклидовом пространстве, где  $d^4 x$  заменяется евклидовой мерой

$$d^4 \bar{x} = d\bar{x}^0 \, d\bar{x}^1 \, d\bar{x}^2 \, d\bar{x}^3, \quad (5.3)$$

причем  $\bar{x}^0 = i x^0$ ,  $\bar{x}^i = x^i$ . Подынтегральное выражение  $\mathcal{L}$  называется лагранжевой плотностью или, короче, лагранжианом. Лагранжиан является *функцией* только полей и их производных, чем обеспечивается трансляционная инвариантность. Кроме того, он зависит от полей, взятых только в одной пространственно-временной точке  $x^\mu$ , следствием чего оказывается *локальный* характер теории поля. Ясно, что такой выбор — простейший из возможных: нетрудно вообразить и нелокальные теории поля, но они, конечно, будут более сложными. Однако наша вера в локальную теорию поля такова, что мы считаем такую теорию пригодной даже для описания нелокальных явлений!

2. Мы требуем, чтобы функционал  $S$  был действительным. Это требование, как установлено, совершенно необходимо для получения удов-

летворительных квантовых теорий поля, в которых сохранялась бы полная вероятность. Комплексный потенциал в классической физике означает поглощение, т.е. превращение материи в ничто; ясно, что это нам не подходит.

3. Мы требуем, чтобы из действия  $S$  следовали классические уравнения движения, содержащие производные не выше второго порядка. В классических системах, описываемых дифференциальными уравнениями более высокого порядка, обычно имеются непричинные решения. Хорошо известный пример — уравнение Лоренца — Дирака в электродинамике. Это дифференциальное уравнение третьего порядка, включающее эффекты реакции излучения и обнаруживающее такие непричинные явления, как ускорение частиц до их взаимодействия с излучением. Чтобы удовлетворить указанному требованию, мы рассматриваем такие лагранжианы  $\mathcal{L}$ , которые содержат не более двух операторов  $\partial_\mu$ . Вследствие этого классические уравнения движения (возведенные в квадрат в случае спинорных полей) будут содержать действующий на поле оператор  $\partial_\mu \partial^\mu$ . Когда уравнения движения превращаются в условие на собственные значения этого оператора, мы говорим, что имеем дело со свободной теорией поля, так как можно отождествить  $\partial_\mu \partial^\mu$  с оператором Казимира группы Пуанкаре, а уравнения движения ограничивают наш выбор представлением, отвечающим (свободной) частице.

4. Принимается, что действие  $S$  инвариантно по отношению к группе Пуанкаре, как уже говорилось выше.

5. Могут быть дополнительные требования инвариантности действия  $S$ . И действительно, феноменологический успех калибровочных теорий указывает на то, что функционал действия должен быть инвариантным относительно необычных новых преобразований, включающих новые степени свободы, подобные электрическому заряду, слабому заряду, цветовому заряду и другим зарядам, которые еще предстоит открыть. Калибровочные теории строятся на действиях, инвариантных относительно локальных (т.е. зависящих от  $x$ ) преобразований, совершаемых среди этих внутренних степеней свободы. Позже мы подробнее рассмотрим этот вопрос.

В классической теории действие имеет вполне определенную размерность  $ML^2T^{-1}$  углового момента, или, что эквивалентно, постоянной  $\hbar$ . В естественной системе единиц, в которых  $\hbar = 1$ , действие  $S$  становится "безразмерным". Следовательно, лагранжева плотность в четырех измерениях имеет естественную размерность  $L^{-4}$ <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Далее в книге автор часто указывает только показатель  $n$  в выражении  $L^n$  для размерности каких-то величин. — Прим. перев.

Рассмотрим действие

$$S(\tau_1, \tau_2, [\Phi]) \equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi), \quad (5.4)$$

где  $\Phi(x)$  — любое локальное поле или любая совокупность локальных полей (они могут быть скалярами, спинорами, ...; все индексы мы опускаем);  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — границы области интегрирования. Изменение действия  $S$  при произвольном изменении  $\Phi$  на величину  $\delta\Phi$  таково:

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \delta \mathcal{L} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta (\partial_\mu \Phi) \right). \quad (5.5), (5.6)$$

Так как при этой вариации  $x$  не меняется, мы имеем

$$\delta (\partial_\mu \Phi) = \partial_\mu (\delta \Phi). \quad (5.7)$$

Выражение (5.6) можно преобразовать к виду

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) \delta \Phi + \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi \right). \quad (5.8)$$

Последнее слагаемое здесь — поверхностный член, который можно переписать в виде интеграла по поверхности

$$\oint_{\sigma} d\sigma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi, \quad (5.9)$$

где  $\sigma$  — граничная поверхность, а  $d\sigma_\mu$  — элемент этой поверхности. Потребуем теперь, чтобы вариация  $\delta\Phi$  была равна нулю на поверхности  $\sigma$ . Из требования стационарности действия  $S$  при произвольном изменении  $\delta\Phi$ , равном нулю на границах, мы получаем уравнения Эйлера — Лагранжа

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = 0,$$

которые представляют собой классические уравнения поля для системы, описываемой действием  $S$ . Можно рассматривать выражение (5.10) как функциональную производную действия  $S$  по  $\Phi$ . Еще раз подчеркнем, что она хорошо определена только для таких вариаций, которые обращаются в нуль на границах области интегрирования. Как одно из важных следствий отбрасывания поверхностного члена отметим,

что можно получить те же самые уравнения движения, задавшись новой лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu \Lambda^\mu \quad (5.11)$$

с произвольными  $\Lambda^\mu$ . Подобное изменение лагранжиана  $\mathcal{L}$  приводит к изменению действия  $S$ , полностью зависящему от выбора граничных условий для полей, входящих в  $\mathcal{L}'$  (такой свободы нет в присутствии гравитационного поля). Преобразование, связывающее  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}'$ , в классической механике называется каноническим преобразованием. Заметим также, что добавление к лагранжиану  $\mathcal{L}$  постоянной величины не меняет характера классической системы, но оказывает влияние на связь системы с гравитационным полем, поскольку такая добавка порождает бесконечную энергию.

Посмотрим теперь, как меняется действие в результате пока еще неконкретизированных (но не произвольных) изменений координат  $\delta x^\mu$  и полей  $\delta\Phi$ . Изменению координат отвечает изменение меры интегрирования, даваемое формулой Якоби

$$\delta(d^4x) = d^4x \partial_\mu \delta x^\mu. \quad (5.12)$$

Отсюда следует, что

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x (\partial_\mu \delta x^\mu \mathcal{L} + \delta \mathcal{L}). \quad (5.13)$$

С учетом формулы (4.4) получим

$$\delta \mathcal{L} = \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \delta_0 \mathcal{L} = \quad (5.13)$$

$$= \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta_0 \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta_0 \partial_\mu \Phi. \quad (5.15)$$

Так как  $\delta_0$  — изменение только самой функции, имеем

$$\delta_0 \partial_\mu \Phi = [\delta_0, \partial_\mu] \Phi + \partial_\mu \delta_0 \Phi = \partial_\mu \delta_0 \Phi. \quad (5.16), (5.17)$$

Простые выкладки приводят к выражению

$$\delta \mathcal{L} = \delta x^\rho \partial_\rho \mathcal{L} + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right) \delta_0 \Phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta_0 \Phi \right). \quad (5.18)$$

Привлекая классические уравнения движения, можно записать измене-

ние действия в виде

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \left[ \mathcal{L} \delta x^\mu + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta_0 \Phi \right) \right] = \quad (5.19)$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \partial_\mu \left( \mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta_0 \Phi \right). \quad (5.20)$$

Можно также, выразив  $\delta_0$  через  $\delta$ , написать

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \partial_\mu \left( (\mathcal{L} g_\rho^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \partial_\rho \Phi) \delta x^\rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi \right). \quad (5.21)$$

Выразим вариации координат и полей через *глобальные* (т.е. не зависящие от  $x$ ) параметры преобразования:

$$\delta x^\rho = \frac{\delta x^\rho}{\delta \omega^a} \delta \omega^a, \quad (5.22)$$

$$\delta \Phi = \frac{\delta \Phi}{\delta \omega^a} \delta \omega^a. \quad (5.23)$$

Здесь индекс  $a$  нумерует параметры преобразования. Следовательно,

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d^4x \partial_\mu \left( (\mathcal{L} g_\rho^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \partial_\rho \Phi) \frac{\delta x^\rho}{\delta \omega^a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \frac{\delta \Phi}{\delta \omega^a} \right) \delta \omega^a. \quad (5.24)$$

Если действие инвариантно по отношению к преобразованиям (5.22) и (5.23), то отсюда вытекает, что плотность тока

$$j_a^\mu \equiv - (\mathcal{L} g_\rho^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \partial_\rho \Phi) \frac{\delta x^\rho}{\delta \omega^a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \frac{\delta \Phi}{\delta \omega^a} \quad (5.25)$$

сохраняется, т.е.

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0. \quad (5.26)$$

Это уравнение сохранения есть следствие того, что выражение (5.24) справедливо при всех  $\delta \omega^a$ . Таким образом, мы доказали для классической теории поля теорему Нетер, связывающую уравнение сохранения с инвариантностью действия.

Но если действие не сохраняется, то и это уравнение сохранения более не справедливо. Например, при  $\delta x^p = 0$  оно имеет особенно простой вид

$$\partial_\mu j_a^\mu = - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \omega^a} . \quad (5.27)$$

Предположим, что мы нашли совокупность преобразований (5.22) и (5.23), оставляющих действие инвариантным. Проинтегрируем обе части равенства (5.26) в бесконечных пределах по пространственным направлениям и в конечном интервале по времени. Тогда

$$0 = \int_{T_1}^{T_2} dx^0 \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x \partial_\mu j_a^\mu = \int_{T_1}^{T_2} dx^0 \frac{\partial}{\partial x^0} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x j_a^0 + \int_{T_1}^{T_2} dx^0 \int d^3x \partial_t j_a^i . \quad (5.28)$$

Если пространственные границы выбраны подходящим образом, то последний член обращается в нуль. В результате

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x j_a^0 (T_1, \mathbf{x}) - \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x j_a^0 (T_2, \mathbf{x}) . \quad (5.29)$$

Следовательно, заряды, определенные формулой

$$Q_a(T) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x j_a^0(T, \mathbf{x}) , \quad (5.30)$$

не зависят от времени, поскольку приведенные выше рассуждения верны независимо от выбранных пределов интегрирования по времени.

Итак,

$$\frac{dQ_a}{dt} = 0 . \quad (5.31)$$

Из условия  $\delta S = 0$  нам удалось вывести существование сохраняющихся зарядов.

Когда параметры преобразований безразмерны, как в случаях преобразований Лоренца и внутренних преобразований (но не трансляций), получающиеся токи всегда имеют размерность  $L^{-D+1}$  в  $D$  измерениях так что заряды оказываются безразмерными.

Заметим далее, что сохраняющийся ток определен неоднозначно, так как к нему всегда можно добавить четырехмерную дивергенцию антисимметричного тензора  $\partial_\rho t_a^{\rho\mu}$ . Это особенно ясно видно, если учесть формулу (5.11). Кроме того, поскольку  $j_a^\mu$  сохраняется только после использования уравнений движения, мы свободны добавлять к нему любую величину, обращающуюся в нуль в силу уравнений движения. Это существенно, в частности, тогда, когда  $a$  — лоренцовский индекс, как в случае трансляций, для которых

$$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu; \quad \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega^a} \rightarrow g_\rho^\mu \quad (a = \rho), \quad (5.32)$$

и в случае преобразований Лоренца, для которых

$$\delta x^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} x_\nu; \quad \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega^a} \rightarrow \frac{1}{2} (g_\rho^\mu x_\nu - g_\nu^\mu x_\rho). \quad (5.33)$$

В последнем случае параметр  $a$  заменяется антисимметричной парой индексов  $[\rho\nu]$ .

В заключение отметим, что преобразование, оставляющее инвариантным действие  $S$ , может изменять лагранжиан  $\mathcal{L}$  на полную дивергенцию, и это означает, что операция симметрии сопровождается каноническим преобразованием. В квантовой теории, где уже нельзя полагаться на уравнения движения, утверждение о сохранении тока теряет свое значение, но заменяется соотношениями между функциями Грина, так называемыми тождествами Уорда.

## Задачи

А. Покажите, что конформные преобразования

$$\delta x^\mu = (2x^\mu x^\rho - g^{\mu\rho} x_\tau x^\tau) c^\rho,$$

где  $c^\rho$  — бесконечно малый 4-вектор, в совокупности с дилатациями  $\delta x^\mu = \alpha x^\mu$ , где  $\alpha$  — бесконечно малая величина, и преобразованиями группы Пуанкаре образуют 15-параметрическую группу (она называется конформной группой). Найдите генераторы этой группы и их перестановочные соотношения.

Б. Дилатации и группа Пуанкаре образуют вместе так называемую группу Вейля. При дилатациях поле  $\Phi$  размерности  $d$  преобразуется по правилу  $\delta\Phi = +d\Phi$ . Предполагая, что действие  $S$  инвариантно по отношению к группе Вейля и содержит  $\Phi$ , найдите сохраняющийся ток, соответствующий дилатациям.



## § 6. Действие для скалярных полей

Лагранжева плотность, содержащая только одно скалярное поле  $\varphi(x)$ , записывается в наиболее общем виде как

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi(x) \partial^\mu \varphi(x) - V(\varphi(x)), \quad (6.1)$$

где коэффициент  $1/2$  чисто условен, а  $V$  — скалярная функция. Первое слагаемое носит название кинетического члена, а второе — потенциального. Кинетический член обладает более широкой, нежели потенциальный, группой инвариантности: он инвариантен по отношению к сдвигу поля  $\varphi \rightarrow \varphi + a$ , где  $a$  — глобальная постоянная. Поэтому в четырех измерениях  $\varphi(x)$  имеет естественную размерность  $L^{-1}$  (или размерность массы). В классической теории форма функции  $V(\varphi(x))$  ничем не ограничена. Простейшим примером может служить лагранжиан

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2, \quad (6.2)$$

где  $m$  имеет размерность массы. Такое действие описывает свободную частицу массой  $m$  (как мы позднее выведем, исходя из интеграла по траекториям.) Заметим, что лагранжиан  $\mathcal{L}_0$  инвариантен также по отношению к дискретному преобразованию симметрии

$$\varphi(x) \rightarrow -\varphi(x). \quad (6.3)$$

Более сложный пример — лагранжиан

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4, \quad (6.4)$$

описывающий теорию с самодействием. Отметим, что  $\lambda$  — безразмерный параметр (в четырех измерениях). Знаком минус обеспечивается положительность функции  $V$ . Такое действие приводит к приемлемой квантовой теории поля. Другой пример — синус-гордоновский лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{m^4}{\lambda} \left( \cos \frac{\sqrt{\lambda} \varphi}{m} - 1 \right), \quad (6.5)$$

где  $\lambda$  — безразмерная константа. При  $\sqrt{\lambda} \varphi / m \ll 1$  этот лагранжиан сводится к предыдущему с отличием лишь в знаке члена с  $\varphi^4$ . К сожалению, неизвестно, приводит ли такой лагранжиан к приемлемой квантовой теории поля в четырех измерениях; но он дает хорошую квантовую теорию в двух измерениях!

Какова бы ни была форма функции  $V$ , легко получить уравнения

движения

$$\partial_{\mu} \partial^{\mu} \varphi = -V'(\varphi), \quad (6.6)$$

где штрихом обозначена производная по полю  $\varphi$ . Следуя сказанному в предыдущем параграфе, можно построить сохраняющуюся величину.

1. При бесконечно малой трансляции, для которой  $\delta x^{\mu} = \epsilon^{\mu}$  и  $\delta \varphi = 0$ , уравнения (5.25) и (5.26) принимают вид

$$j_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \partial_{\mu} \varphi \partial_{\nu} \varphi, \quad \partial^{\mu} j_{\mu\nu} = 0. \quad (6.7), (6.8)$$

Мы видим, что в этом случае  $j_{\mu\nu}$  — симметричный тензор; он называется тензором энергии-импульса. Соответствующий сохраняющийся заряд таков:

$$P_{\mu} = \int d^3x \quad j_{\mu 0} = \int d^3x (-g_{\mu 0} \mathcal{L} + \partial_0 \varphi \partial_{\mu} \varphi). \quad (6.9)$$

Поскольку  $P_0$  есть энергия системы, плотность энергии дается выражением

$$j_{00} = -\mathcal{L} + \partial_0 \varphi \partial_0 \varphi = -\frac{1}{2} \partial_0 \varphi \partial_0 \varphi + \frac{1}{2} \nabla \varphi \nabla \varphi + V(\varphi) \quad (6.10), (6.11)$$

и, как нетрудно видеть, положительно определена, если  $V > 0$ . Та левая конфигурация, которая приводит к наименьшему значению  $j_{00}$ , отвечает основному состоянию. Поскольку члены с производными дают положительный вклад, такая конфигурация всегда возникает для статического поля  $\varphi_0$  ( $\partial_0 \varphi_0 = \partial_i \varphi_0 = 0$ ), и в этом случае плотность энергии есть значение потенциала  $V(\varphi_0)$  для этого конкретного поля.

2. При лоренцовских преобразованиях сохраняющийся нетеровский ток представляет собой трехиндексную величину

$$j_{\mu\nu\rho} = (-g_{\mu\lambda} \mathcal{L} + \partial_{\mu} \varphi \partial_{\lambda} \varphi)(g_{\nu}^{\lambda} x_{\rho} - g_{\rho}^{\lambda} x_{\nu}) = j_{\mu\nu} x_{\rho} - j_{\mu\rho} x_{\nu}. \quad (6.12), (6.13)$$

Соответствующие сохраняющиеся заряды — это генераторы лоренцовских преобразований

$$M_{\nu\rho} = \int d^3x \quad j_{0\nu\rho} = \int d^3x (j_{0\nu} x_{\rho} - j_{0\rho} x_{\nu}). \quad (6.14)$$

Сохранение этих зарядов есть следствие инвариантности действия по отношению к преобразованиям группы Пуанкаре.

В качестве примера применения теоремы Нетер к таким преобразованиям, по отношению к которым действие  $S$  не обязательно инвари-

антно, рассмотрим бесконечно малую дилатацию

$$\delta x^\mu = \alpha x^\mu, \quad \delta \varphi = -\alpha \varphi, \quad (6.15)$$

Нетеровский ток имеет вид

$$j_D^\mu = (-g_\rho^\mu \mathcal{L} + \partial^\mu \varphi \partial_\rho \varphi) x^\rho + \varphi \partial^\mu \varphi = j^{\mu\rho} x_\rho + \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi^2. \quad (6.16), (6.17)$$

Пользуясь формулой (6.8), получаем, что

$$\partial_\mu j_D^\mu = j_\mu^\mu + \frac{1}{2} \partial^\mu \partial_\mu \varphi^2. \quad (6.18)$$

Если  $\mathcal{L} = 1/2 \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - (\lambda/4!) \varphi^4$ , то легко доказать, что дивергенция тока  $j_D^\mu$  равна нулю (в четырех измерениях; см. задачу). Однако, если бы мы добавили к  $\mathcal{L}$  "массовый член"  $-1/2 m^2 \varphi^2$ , его вклад оказался бы равным

$$\partial_\mu j_D^\mu = m^2 \varphi^2 \neq 0. \quad (6.19)$$

Причина того, что в этом случае ток  $j_D^\mu$  перестал сохраняться, заключается в появлении в лагранжиане  $\mathcal{L}$  размерного параметра.

Напомним, что вид тензора  $j_{\mu\nu}$  неоднозначен. В качестве примера рассмотрим новое определение

$$\Theta_{\mu\nu} \equiv j_{\mu\nu} + a (\partial_\mu \partial_\nu - g_{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\rho) \varphi^2, \quad (6.20)$$

где  $a$  — безразмерное число. При этом все еще выполняется условие

$$\partial^\mu \Theta_{\mu\nu} = 0. \quad (6.21)$$

Зафиксируем  $a$ , потребовав, чтобы в теории, инвариантной относительно дилатаций, тензор  $\Theta_{\mu\nu}$  имел нулевой след. Если взять для примера лагранжиан (6.4) с  $m^2 = 0$ , то

$$\Theta_\mu^\mu = (1 + 6a) (-\partial_\rho \varphi \partial^\rho \varphi - \varphi \partial_\rho \partial^\rho \varphi), \quad (6.22)$$

откуда мы получаем, что  $a = -1/6$ . Более того, разность величин  $\Theta_{\mu\nu}$  и  $j_{\mu\nu}$  есть поверхностный член, не меняющий сохраняющихся зарядов. Можно теперь определить новый ток дилатации в виде

$$j_D^\mu \equiv x_\rho \Theta^{\mu\rho}. \quad (6.23)$$

С учетом формулы (6.21) найдем

$$\partial_\mu j_D^\mu = \Theta_\mu^\mu, \quad (6.24)$$

откуда следует, что инвариантность относительно дилатаций эквивалентна бесследовости тензора  $\Theta_{\mu\nu}$ . Новый ток дилатации связан со старым соотношением

$$\begin{aligned} j_D^{\mu} &= x_{\rho} j^{\mu\rho} - \frac{1}{6} x_{\rho} (\partial^{\mu} \partial^{\rho} - g^{\mu\rho} \partial_{\tau} \partial^{\tau}) \varphi^2 = \\ &= j_D^{\mu} - \frac{1}{2} \partial^{\mu} \varphi^2 - \frac{1}{6} x_{\rho} (\partial^{\mu} \partial^{\rho} - g^{\mu\rho} \partial_{\tau} \partial^{\tau}) \varphi^2 = \\ &= j_D^{\mu} + \frac{1}{6} \partial_{\rho} [x^{\mu} \partial^{\rho} - x^{\rho} \partial^{\mu}] \varphi^2, \end{aligned} \quad (6.25)$$

которое получается, если использовать формулу (6.17). Мы видим, что эти два тока отличаются друг от друга на полную дивергенцию, и поэтому заряд дилатации не меняется. Тензор  $\Theta_{\mu\nu}$  носит название "нового улучшенного тензора энергии-импульса" [3, 4]. Разности тензоров  $\Theta_{\mu\nu}$  и  $j_{\mu\nu}$  и векторов  $j_{\mu D}$  и  $j_{\mu D}^{\prime}$  — это поверхностные члены.

Указанные новые формы тензора энергии-импульса и тока дилатаций можно получить каноническим образом, если добавить к лагранжиану скалярного поля поверхностный член вида  $\partial_{\mu} \Lambda^{\mu}$ , где

$$\Lambda^{\mu} = \frac{1}{6} (x^{\mu} \partial^{\rho} - x^{\rho} \partial^{\mu}) \partial_{\rho} \varphi^2, \quad (6.26)$$

так что его добавление соответствует некоторому каноническому преобразованию.

В полевых теориях для полей с высшими спинами инвариантность относительно дилатаций всегда связана с бесследовостью тензора энергии-импульса. Как будет видно далее, даже если инвариантность относительно дилатаций присутствует в исходном лагранжиане, она нарушается квантовыми эффектами.

Теория поля с несколькими скалярными полями во многом аналогична изложенной выше, но в ней возникают новые интересные симметрии. Рассмотрим для примера  $N$  действительных скалярных полей  $\varphi_a$ , где  $a = 1, \dots, N$ , и лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \partial_{\mu} \varphi_a \partial^{\mu} \varphi_a. \quad (6.27)$$

Помимо обычных инвариантностей, этот лагранжиан очевидно инвариантен по отношению к глобальному (т.е. не зависящему от  $x$ ) вращению  $N$  действительных скалярных полей, переводящему одно поле в другое,

$$\delta \varphi_a = -\varepsilon_{ab} \varphi_b, \quad \varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba}. \quad (6.28)$$

В результате появляется  $1/2 N(N-1)$  сохраняющихся нетеровских токов

$$j_{ab}^{\mu} = \varphi_a \partial^{\mu} \varphi_b - \varphi_b \partial^{\mu} \varphi_a. \quad (6.29)$$

Это пример внутренней симметрии, возникающей из-за наличия многих полей одного типа. Если дополнить теорию потенциалом, зависящим только от инвариантной по отношению к вращениям "длины"  $\varphi_a \varphi_a$ , то внутренняя инвариантность относительно вращений сохранится.

### Задачи

**А.** Покажите, что в четырех измерениях дивергенция канонического тока дилатаций равна нулю, если  $\mathcal{L} = 1/2 \partial_{\mu} \varphi \partial^{\mu} \varphi - (\lambda/4!) \varphi^4$ .

**Б.** Выведите в  $D$  измерениях выражение для дивергенции тока дилатаций, если  $\mathcal{L} = 1/2 \partial_{\mu} \varphi \partial^{\mu} \varphi - V(\varphi)$ .

**\*В.** Канонический тензор энергии-импульса в общем случае обязан быть симметричным. Покажите, что всегда можно найти член  $B^{\rho\mu\nu}$ , антисимметричный при заменах  $\rho \rightarrow \mu$  или  $\rho \rightarrow \nu$ , такой, что тензор Белинфанте

$$j_B^{\mu\nu} = j^{\mu\nu} + \partial_{\rho} B^{\rho\mu\nu}$$

симметричен и сохраняющийся нетеровский ток для лоренцовских преобразований записывается в виде

$$j^{\mu\nu\rho} = (j_B^{\mu\nu} x^{\rho} - j_B^{\mu\rho} x^{\nu}).$$

**Указание:** для скалярного поля  $B^{\rho\mu\nu} = 0$ , так что эта величина имеет отношение к  $S^{\mu\nu}$ .

**\*Г.** Найдите  $\delta\varphi'$  для конформного преобразования. Покажите, что действие  $S = \int d^4x \ 1/2 \partial_{\mu} \varphi \partial^{\mu} \varphi$  инвариантно относительно конформного преобразования. Постройте сохраняющийся нетеровский ток.

**Д.** Выведите выражение для сохраняющихся токов, соответствующих преобразованиям (6.28), если лагранжиан  $\mathcal{L}$  задан в виде (6.27).

### § 7. Действие для спинорных полей

В данном параграфе мы прежде всего займемся построением выражений для действий, включающих спинорные грассмановы поля  $\psi_L$  и  $\psi_R$ . Если воспользоваться результатами § 4, то простейшие формы спинорного кинетического члена будут такими:

$$\mathcal{L}_L = \frac{1}{2} \psi_L^{\dagger} \sigma^{\mu} \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \psi_L, \quad \mathcal{L}_L = \mathcal{L}_L^*, \quad (7.1)$$

$$\mathcal{L}_R = \frac{1}{2} \bar{\psi}_R \sigma^\mu \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \psi_R, \quad \mathcal{L}_R = \mathcal{L}_R^*, \quad (7.2)$$

или, если четность существенна,

$$\mathcal{L}_{\text{Дирак}} = \frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi = \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_L. \quad (7.3), \quad (7.4)$$

В частном случае  $\psi_R = -\sigma_2 \psi_L^*$  легко показать, что лагранжиан  $\mathcal{L}_R$  эквивалентен  $\mathcal{L}_L$  с точностью до полной дивергенции (см. задачу А). Следовательно, если  $\Psi_M$  — четырехкомпонентный майорановский спинор, лагранжиан записывается в виде

$$\mathcal{L}_{\text{Майорана}} = \frac{1}{4} \bar{\Psi}_M \gamma^\mu \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \Psi_M \quad (7.5)$$

и совпадает с  $\mathcal{L}_L$ , в чем можно убедиться, используя грассмановы свойства спинора  $\psi_L$ . В литературе часто можно встретить кинетический член (7.3), записанный так, что оператор производной действует только направо и при этом отсутствует множитель  $1/2$ . Хотя на первый взгляд такая форма лагранжиана отличается от формы (7.3), все различие сводится к полной дивергенции. Подобное отличие не имеет значения до тех пор, пока система не взаимодействует с гравитационным полем.

Из приведенных выражений явствует, что в  $D$  измерениях спинорное поле имеет (по построению) размерность  $L^{-\frac{1}{2}(D-1)}$ ; в четырех измерениях размерность спинорных полей равна  $-3/2$ .

Указанные возможные кинетические члены инвариантны относительно конформных преобразований (см. задачу Ж), так же как это было для кинетического члена скалярного поля, но вдобавок эти члены обладают своими фазовыми инвариантностями. Рассмотрим, например, лагранжиан  $\mathcal{L}_L$  (то же самое относится и к  $\mathcal{L}_R$ ). Поскольку  $\psi_L$  — комплексный спинор, можно подвергнуть его фазовому преобразованию

$$\psi_L \rightarrow e^{i\alpha} \psi_L, \quad (7.6)$$

оставляющему  $\mathcal{L}_L$  инвариантным, если  $\alpha$  не зависит от  $x$ . У дираковского лагранжиана (7.3) две такие инвариантности. Пользуясь четырехкомпонентной формой записи, их можно разделить на общее фазовое преобразование

$$\Psi \rightarrow e^{i\beta} \Psi \quad (7.7)$$

и киральное преобразование

$$\Psi \rightarrow e^{i\beta} \gamma_5 \Psi. \quad (7.8)$$

Наконец, как и в скалярном случае, действие с  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_L$  (или  $\mathcal{L}_R$ ) инвариантно относительно постоянного сдвига полей, поскольку

$$\mathcal{L}_L(\psi_L + \alpha_L) = \mathcal{L}_L + \frac{1}{2} \partial_\mu (\alpha_L^\dagger \sigma^\mu \psi_L - \psi_L^\dagger \sigma^\mu \alpha_L). \quad (7.9)$$

На основании теоремы Нетер можно построить сохраняющиеся токи, отвечающие преобразованиям (7.7) и (7.8):

$$j^\mu = -i \Psi \gamma^\mu \Psi = i \psi_L^\dagger \sigma^\mu \psi_L + i \psi_R^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_R \quad (7.10)$$

$$j_5^\mu = i \Psi \gamma^\mu \gamma^5 \Psi = i \psi_L^\dagger \sigma^\mu \psi_L - i \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R \quad (7.11)$$

Соответствующие сохраняющиеся заряды таковы:

$$Q = i \int d^3x \Psi \gamma^0 \Psi = i \int d^3x (\psi_L^\dagger \psi_L + \psi_R^\dagger \psi_R), \quad (7.12)$$

$$Q_5 = i \int d^3x \Psi \gamma^0 \gamma^5 \Psi = i \int d^3x (\psi_L^\dagger \psi_L - \psi_R^\dagger \psi_R). \quad (7.13)$$

Для майорановского поля существует только киральное преобразование, поскольку поле  $\psi_R$  сопряжено полю  $\psi_L$ , и потому фазовые преобразования полей  $\psi_L$  и  $\psi_R$  противоположны.

Из спинорных полей можно построить другие некинетические квадратичные инварианты (§ 4). Используя только поле  $\psi_L$ , получим

$$\mathcal{L}_L^m = \frac{im}{2} (\psi_L^T \sigma^2 \psi_L + \psi_L^\dagger \sigma^2 \psi_L^*),$$

$$\mathcal{L}_{L5}^m = \frac{m}{2} (\psi_L^T \sigma^2 \psi_L - \psi_L^\dagger \sigma^2 \psi_L^*), \quad (7.14), (7.15)$$

где  $m$  — параметр с размерностью массы (в любом числе измерений). Выражения (7.15) и (7.16) — это так называемые массовые члены. Так как для описания майорановского спинора  $\psi_M$  можно использовать поле  $\psi_L$ , выражение (7.14) может служить массовым членом для майорановского спинора. Записанное в четырехкомпонентных обозначениях, выражение (7.14) называется майорановской массой. Итак, наличие только одного поля  $\psi_L$  еще не гарантирует безмассовости, как столь часто неправильно утверждают. (Например, это относится к модели Вайнберга — Салама слабых и электромагнитных взаимодействий, в которой нейтрино описывается двухкомпонентным левым спинором без правого партнера. В этом случае безмассовость нейтрино есть результат отсутствия определенных хиггсовских бозонов, и сохранение фермионного числа оставляет нейтрино безмассовым даже после учета радиационных поправок.) Замечание представляется особенно уместным в связи с тем, что нейтрино принято описывать левым полем. Отметим, что выражение

$\mathcal{L}_L^m$  нарушает непрерывную симметрию относительно фазовых преобразований (7.6), и от нее остается только воспоминание в виде дискретной симметрии относительно замены  $\Psi_L \rightarrow -\Psi_L$ . В майорановских обозначениях

$$\mathcal{L}_L^m = -\frac{im}{2} \bar{\Psi}_M \Psi_M, \quad \mathcal{L}_{L5}^m = -\frac{m}{2} \bar{\Psi}_M \gamma_5 \Psi_M. \quad (7.16), (7.17)$$

Если присутствуют оба поля  $\psi_L$  и  $\psi_R$ , то можно построить еще два квадратичных инварианта, что приводит к выражениям

$$\mathcal{L}_D^m = im \bar{\Psi} \Psi = im (\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L), \quad (7.18)$$

$$\mathcal{L}_{D5}^m = m \bar{\Psi} \gamma_5 \Psi = m (\psi_L^\dagger \psi_R - \psi_R^\dagger \psi_L). \quad (7.19)$$

Они оба инвариантны по отношению к общему фазовому преобразованию (7.7), но неинвариантны по отношению к киральному преобразованию (7.8), при котором

$$\psi \rightarrow e^{i\beta \gamma_5} \psi, \quad \bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0 \rightarrow \bar{\Psi} e^{i\beta \gamma_5} \quad (7.20)$$

и, следовательно,

$$\mathcal{L}_D^m \rightarrow im \bar{\Psi} e^{2i\beta \gamma_5} \Psi. \quad (7.21)$$

Применяя формулу (5.27), находим, что

$$\partial_\mu j_5^\mu = -2m \bar{\Psi} \gamma_5 \Psi, \quad (7.22)$$

тогда как дивергенция тока  $j^\mu$ , определяемого формулой (7.10), остается равной нулю. Из этого не следует делать вывод, что нельзя построить квадратичных по дираковским полям членов, не содержащих производных и сохраняющих киральную инвариантность. Нижеследующий пример демонстрирует это. Рассмотрим выражение

$$\sigma(x) \Psi(x) \Psi(x) + i \pi(x) \Psi(x) \gamma_5 \Psi(x) \quad (7.23)$$

равное сумме  $\mathcal{L}_D^m$  и  $\mathcal{L}_{D5}^m$ , но с коэффициентами, зависящими на этот раз от  $x$ . Чтобы сохранить киральную инвариантность, величины  $\sigma$  и  $\pi$  должны при киральных преобразованиях трансформироваться следующим образом:

$$[\sigma(x) + i\gamma_5 \pi(x)] \rightarrow [\sigma'(x) + i\gamma_5 \pi'(x)] = e^{-i\beta \gamma_5} [\sigma(x) + i\gamma_5 \pi(x)] e^{-i\beta \gamma_5} \quad (7.24)$$

При бесконечно малых  $\beta$  поля  $\sigma$  и  $\pi$  поворачиваются, переходя одно в



другое:

$$\delta\sigma = +2\beta\pi, \quad \delta\pi = -2\beta\sigma. \quad (7.25)$$

Такое преобразование оставляет инвариантной величину  $\sigma^2 + \pi^2$ . Следовательно, лагранжиан

$$\mathcal{L}_f = \frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi + i\hbar \bar{\Psi} (\sigma + i\gamma_5 \pi) \Psi \quad (7.26)$$

кирально-инвариантен. Если  $\sigma$  и  $\pi$  — канонические поля, то  $\hbar$  — безразмерная постоянная (называемая обычно юкавской константой взаимодействия). Можно вдохнуть жизнь в сами поля  $\sigma$  и  $\pi$ , добавив к  $\mathcal{L}$  их кинетические члены, а также самодействие этих полей, сохраняющее условие (7.25). Это приводит к лагранжиану

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi + i\hbar \bar{\Psi} (\sigma + i\gamma_5 \pi) \Psi + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi - V(\sigma^2 + \pi^2). \quad (7.27)$$

Такой лагранжиан обладает следующими симметриями (все они глобальные):

а) общая дираковская фазовая симметрия

$$\Psi \rightarrow e^{i\alpha} \Psi; \quad \sigma, \pi \rightarrow \sigma, \pi;$$

б) киральная симметрия

$$\delta\Psi = i\beta\gamma_5 \Psi, \quad \delta\sigma = 2\beta\pi, \quad \delta\pi = -2\beta\sigma,$$

оставляющая инвариантным выражение  $\sigma^2 + \pi^2$ ;

в) дискретная симметрия относительно преобразования четности  $\Psi \rightarrow \gamma_0 \Psi$ ,  $\sigma \rightarrow \sigma$ ,  $\pi \rightarrow -\pi$ ; отсюда следует, что  $\sigma(x)$  — скалярное поле, а  $\pi(x)$  — псевдоскалярное.

Лагранжиан подобного типа был впервые построен Гелл-Манном и Леви. Теории такого рода называются  $\sigma$ -моделями и подходят для описания физических  $\pi$ -мезонных взаимодействий. (В рассмотренном примере изоспин пиона не принимался во внимание.)

Мы видим, что требование сохранения во взаимодействии симметрии кинетического члена приводит к введению дополнительных полей. Это общее свойство: расширение симметрий  $\rightarrow$  добавочные поля.

Заметим, что в четырех измерениях инвариантные члены, содержащие более двух спинорных полей, имеют размерность по меньшей мере — 6, так что для восстановления размерности  $\mathcal{L}$  требуются размерные константы. Но в двух измерениях члены типа  $(\bar{\Psi}\Psi)^2$  или  $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi$  имеют ту же размерность, что и  $\mathcal{L}$ .

Поскольку двухкомпонентные спинорные поля всегда комплексны, уравнения движения получаются независимым варьированием по полям  $\psi_L$  и  $\bar{\psi}_L^\dagger$ . Здесь нужно быть крайне осторожным, так как мы рассматриваем  $\psi_L$  и  $\psi_L^\dagger$ , как грассмановы поля и не можем протащить  $\delta\psi$  через  $\psi$ , не изменив знака. Например

$$\delta\mathcal{L} = \frac{1}{2} \delta\psi_L^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_L - \frac{1}{2} \partial_\mu \delta\psi_L^\dagger \sigma^\mu \psi_L + \frac{1}{2} \psi_L^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \delta\psi_L - \frac{1}{2} \partial_\mu \psi_L^\dagger \sigma^\mu \delta\psi_L = \quad (7.28)$$

$$= \delta\psi_L^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_L - (\partial_\mu \psi_L^\dagger \sigma^\mu) \delta\psi_L + \text{Пов. члены}, \quad (7.29)$$

что приводит к сопряженным уравнениям

$$\sigma^\mu \partial_\mu \psi_L = 0 \quad \text{или} \quad \partial_\mu \psi_L^\dagger \sigma^\mu = 0. \quad (7.30)$$

В случае дираковского спинора, чтобы получить уравнения движения, нужно произвести независимые вариации по  $\Psi$  и  $\bar{\Psi}$ .

В заключение заметим, что можно построить, и более сложные инварианты, содержащие спинорные поля, например  $\partial_\mu \bar{\Psi} \partial^\mu \Psi$ . Хотя в членах такого типа нет ничего плохого с точки зрения требований инвариантности, их включение не приводит к удовлетворительным теориям по той причине, что они нарушают связь между спином и статистикой. Мы вернемся к этому вопросу позднее при рассмотрении калибровочных теорий.

### Задачи

А. Покажите, что лагранжиан  $\mathcal{L}_R$ , в котором  $\psi_R = \sigma^2 \psi_L^*$ , равен лагранжиану  $\mathcal{L}_L$  с точностью до полной дивергенции.

Б. Найдите тензор энергии-импульса Белинфанте для лагранжиана  $\mathcal{L}_{\text{Дирак}}$ .

В. Покажите, что для  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Дирак}}$  ток дилатаций можно записать в виде  $j_D^\mu = x_\rho j_B^{\mu\rho}$ , где  $j_B^{\mu\rho}$  — тензор энергии-импульса в форме Белинфанте. Тем самым вы покажете, что тензор Белинфанте совпадает с новым улучшенным тензором энергии-импульса для дираковского поля.

Г. Пусть задан лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi + im \bar{\Psi} \Psi + m' \bar{\Psi} \gamma_5 \Psi.$$

Используйте киральное преобразование для того, чтобы исключить псевдоскалярный член. Какова будет масса получившегося дираковского поля?

\*Д. Пусть задан квадратичный лагранжиан, содержащий поля  $\psi_L$  и  $\psi_R$ ,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_L^m + \mathcal{L}_R^m + iM(\psi_R^\dagger \psi_L + \psi_L^\dagger \psi_R),$$

и включающий дираковскую и майорановскую массы. Диагонализируйте поля таким образом, чтобы получить несмешанные массы. Каковы будут массы полей? Каков физический смысл различных степеней свободы?

\*Е. Рассмотрите лагранжиан  $\sigma$ -модели. а) Пользуясь теоремой Нетер, выведите выражение для сохраняющегося кирального тока. б) Предположим, мы добавили к  $\mathcal{L}$  член, линейный по  $\sigma$ ; найдите дивергенцию кирального тока. Это последнее уравнение отображает гипотезу ЧСАТ (частично сохраняющегося аксиального тока) пионной физики.

\*Ж. Как преобразуется при конформных преобразованиях поле  $\psi_L$ ? Покажите, что лагранжиан  $\mathcal{L}_L$  конформно-инвариантен.

### § 8. Действие со скалярными и спинорными полями и суперсимметрия

Между простейшим кинетическим членом  $\mathcal{L}_L$  для спинорных полей и его аналогом для скалярного поля  $S$  имеются определенные различия. В то время как  $\mathcal{L}_L$  содержит одну производную, скалярный кинетический член содержит две производные; поле  $\psi_L$  является грассмановым полем, а  $S$  — обычное поле; наконец,  $\mathcal{L}_L$  обладает фазовой инвариантностью (7.6), а кинетический член для одного скалярного поля ею не обладает. В то же время имеется и сходство, поскольку оба кинетических члена конформно-инвариантны. В данном параграфе мы рассмотрим вопрос о возможности существования симметрии между полями, связывающей фермионный и скалярный кинетические члены. Такая симметрия называется суперсимметрией — благодаря ей возможны нетривиальные взаимодействия между скалярными и спинорными полями. Чтобы легче было выявить новую симметрию, запишем кинетический член скалярного поля в виде, как можно более похожем на  $\mathcal{L}_L$ . Для этого введем кинетический член для двух скалярных полей, которые мы обозначим через  $S$  и  $P$ , и сравним его с кинетическим членом для майорановского спинорного поля, которое мы обозначим через  $\chi$ . Тогда каждый кинетический член будет обладать своей фазовой инвариантностью. В самом деле, лагранжиан

$$\mathcal{L}_0^{\mathcal{W}Z} = \frac{1}{2} \partial_\mu S \partial^\mu S + \frac{1}{2} \partial_\mu P \partial^\mu P + \frac{1}{4} \chi \gamma^\mu \vec{\sigma}_\mu \chi \quad (8.1)$$

помимо того, что он конформно-инвариантен, обладает двумя независимыми глобальными фазовыми инвариантностями

$$\chi \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5} \chi, \quad S + iP \rightarrow e^{i\beta} (S + iP). \quad (8.2)$$

Любая дальнейшая инвариантность будет включать преобразования, переводящие бесспиновые поля  $S$  и  $P$  в спинорное поле  $\chi$ . Общие свойства преобразования этого типа таковы: а) параметр преобразования, обозначим его через  $\alpha$ , должен быть грассмановым спинорным полем, т.е. глобальным бесконечно малым майорановским спинорным параметром; б) в простейшем случае преобразование полей  $S$  и  $P$  не должно включать оператора производной, а преобразование поля  $\chi$  должно включать одну производную меньше, чем скалярный кинетический член. Таким образом, мы приходим к преобразованию

$$\delta(S \text{ или } P) = \bar{\alpha} M \chi, \quad (8.3)$$

где  $M$  — некоторая  $4 \times 4$ -матрица. Так как сюда не входят никакие 4-векторные индексы, матрица  $M$  должна содержать только матрицы  $I$  и  $\gamma_5$ . Следовательно, можно зафиксировать преобразование в виде

$$\delta S = -a \bar{\alpha} \chi, \quad \delta P = ib \bar{\alpha} \gamma_5 \chi, \quad (8.4), (8.5)$$

где  $a$  и  $b$  — неизвестные действительные коэффициенты. Здесь мы воспользовались фазовой инвариантностью (8.2), чтобы определить вариацию  $S$  через матрицу  $I$ , а вариацию  $P$  — через матрицу  $i\gamma_5$ . Правая часть этих вариаций построена так, чтобы они были действительными. (В майорановском представлении для матриц Дирака все четыре компоненты майорановских спиноров действительны, а все матричные элементы  $\gamma$ -матриц чисто мнимы, так что  $i\gamma_5$  имеет действительные матричные элементы). Далее (предполагая, что  $\partial_\mu$  не изменяется; см. задачу E) находим

$$\delta \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu S \partial^\mu S + \frac{1}{2} \partial_\mu P \partial^\mu P \right] = (a \partial^\mu S \bar{\alpha} + ib \partial^\mu P \bar{\alpha} \gamma_5) \partial_\mu \chi. \quad (8.6)$$

Чему может равняться вариация поля  $\chi$ ? Заметим, во-первых, что с точностью до полной дивергенции

$$\delta \left[ \frac{1}{4} \bar{\chi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \chi \right] = \frac{1}{2} \delta \chi \gamma^\mu \partial_\mu \chi - \frac{1}{2} \partial_\mu \bar{\chi} \gamma^\mu \delta \chi. \quad (8.7)$$

Используем теперь векторную часть свойств "майорановского перепорота": при замене  $\xi \rightarrow \eta$  комбинации  $\bar{\xi} \eta$ ,  $\bar{\xi} \gamma_5 \eta$  и  $\bar{\xi} \gamma_\mu \gamma_5 \eta$  четны, а  $\bar{\xi} \gamma_\mu \eta$  и

$\xi_{\mu\nu}\eta$  нечетны. Это справедливо для любых двух майорановских спиноров  $\xi$  и  $\eta$  (см. задачу). Учитывая это в преобразовании (8.7), получаем с точностью до поверхностных членов

$$\delta \left[ \frac{1}{4} \bar{\chi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \chi \right] = \delta \chi \gamma^\mu \partial_\mu \chi. \quad (8.8)$$

Соберем все полученные результаты:

$$\delta \mathcal{L} \stackrel{WZ}{=} (\delta \bar{\chi} \gamma_\mu + a \partial_\mu S \bar{\alpha} + i b \partial_\mu P \bar{\alpha} \gamma_5) \partial^\mu \chi + \text{Пов. член} = \quad (8.9)$$

$$= -(\partial_\mu \delta \bar{\chi} \gamma^\mu + a \partial_\mu \partial^\mu S \bar{\alpha} + i b \partial_\mu \partial^\mu P \bar{\alpha} \gamma_5) \chi + \text{Пов. член}, \quad (8.10)$$

причем при переходе от (8.9) к (8.10) выполнено интегрирование по частям. Итак, если  $\delta \bar{\chi}$  удовлетворяет уравнению ( $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu$ )

$$\partial_\mu \delta \chi \gamma^\mu + a \square S \bar{\alpha} + i b \square P \bar{\alpha} \gamma_5 = 0, \quad (8.11)$$

то лагранжиан  $\mathcal{L} \stackrel{WZ}{0}$  изменяется лишь на полную дивергенцию. Решение этого уравнения легко находится:

$$\delta \chi = a \gamma_\rho \alpha \partial^\rho S - i b \gamma_\rho \gamma_5 \alpha \partial^\rho P. \quad (8.12)$$

Здесь мы использовали равенство  $\gamma_\rho \gamma_\sigma \partial^\rho \partial^\sigma = \partial_\rho \partial^\rho$ . Таким образом, мы достигли поставленной цели: найдена совокупность преобразований между бесспиновым полем и полем со спином 1/2, оставляющих инвариантной сумму их кинетических членов (с точностью до канонического преобразования). Для большей убедительности нужно проверить, является ли эти преобразования замкнутыми и образуют ли они группу.

Вначале посмотрим, как действуют на поля два суперсимметричных преобразования. Имеем

$$\begin{aligned} [\delta_1, \delta_2] S &= a \bar{\alpha}_2 \delta_1 \chi - (1 \leftrightarrow 2) = \\ &= a \bar{\alpha}_2 [a \gamma_\rho \alpha_1 \partial^\rho S - i b \gamma_\rho \gamma_5 \alpha \partial^\rho P] - (1 \leftrightarrow 2) = 2a^2 \bar{\alpha}_2 \gamma_\rho \alpha_1 \partial^\rho S. \end{aligned} \quad (8.13)$$

В последнем равенстве мы воспользовались свойствами майорановского переворота для аксиально-векторной части. Следовательно, действие двух суперсимметричных преобразований на поле  $S$  сводится к трансляции поля  $S$  на величину  $2ia^2 \bar{\alpha}_2 \gamma_\rho \alpha_1$ . Посмотрим, что происходит с полем  $P$ :

$$[\delta_1, \delta_2] P = i b \bar{\alpha}_2 \gamma_5 \delta_1 \chi - (1 \leftrightarrow 2) = 2b^2 \bar{\alpha}_2 \gamma_\rho \alpha_1 \partial^\rho P, \quad (8.14)$$

опять с учетом тождества для майорановского переворота аксиального вектора. Поскольку преобразования полей  $S$ ,  $P$  и  $\chi$  должны быть одинаковы, необходимо положить

$$b = \pm a. \quad (8.15)$$

Убедимся, наконец, в том, что два суперсимметричных преобразования поля  $\chi$  представляют собой трансляцию. Имеем

$$\begin{aligned} [\delta_1, \delta_2] \chi &= a \gamma_\rho \alpha_2 \partial^{\rho\delta_1} S - i b \gamma_\rho \gamma_5 \alpha_2 \partial^{\rho\delta_1} P - (1 \leftrightarrow 2) = \\ &= a^2 \gamma_\rho \alpha_2 \bar{\alpha}_1 \partial^\rho \chi + b^2 \gamma_\rho \gamma_5 \alpha_2 \bar{\alpha}_1 \gamma_5 \partial^\rho \chi - (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Хотелось бы переписать правую часть этого равенства в форме, похожей на остальные, т.е. содержащей комбинацию  $\bar{\alpha}_2 \gamma_\rho \alpha_1$ , а не  $\alpha_2 \bar{\alpha}_1$ . Для этого применим прием, предложенный Фирцем. Возьмем любые два дираковских спинора (не обязательно майорановских)  $\Psi$  и  $\Lambda$ ;  $4 \times 4$ -матрицу  $\Lambda \bar{\Psi}$  можно представить в виде линейной комбинации 16 дираковских ковариантов  $I, \gamma_5, \gamma_5 \gamma_\mu, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu} = 1/4 [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ . Коэффициенты вычисляются путём взятия соответствующих следов. В результате имеем

$$\begin{aligned} \Lambda \bar{\Psi} &= -\frac{1}{4} \bar{\Psi} \Lambda - \frac{1}{4} \gamma_5 \bar{\Psi} \gamma_5 \Lambda + \frac{1}{4} \gamma_5 \gamma_\rho \bar{\Psi} \gamma_5 \gamma^\rho \Lambda - \frac{1}{4} \gamma_\rho \bar{\Psi} \gamma^\rho \Lambda + \\ &+ \frac{1}{2} \sigma_{\rho\sigma} \bar{\Psi} \sigma^{\rho\sigma} \Lambda. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Числовые коэффициенты всех членов образуют первую строку знаменитой матрицы Фирца. Они содержат всю необходимую информацию для построения матрицы в целом. В применении к нашему случаю находим

$$\alpha_2 \bar{\alpha}_1 - \alpha_1 \bar{\alpha}_2 = -\frac{1}{2} \bar{\alpha}_1 \gamma^\rho \alpha_2 \gamma_\rho + i \bar{\alpha}_1 \sigma^{\rho\sigma} \alpha_2 \sigma_{\rho\sigma}, \quad (8.18)$$

если одновременно использовать свойства майорановского переворота. С учетом формул (8.15) и (8.18) получаем

$$[\delta_1, \delta_2] \chi = a^2 \bar{\alpha}_2 \gamma^\mu \alpha_1 \gamma_\rho \gamma_\mu \partial^\rho \chi. \quad (8.19)$$

Воспользовавшись антикоммутатором для  $\gamma$ -матриц, перепишем это выражение в виде

$$[\delta_1, \delta_2] \chi = 2 a^2 \bar{\alpha}_2 \gamma^\mu \alpha_1 \partial_\mu \chi - a^2 \bar{\alpha}_2 \gamma^\mu \alpha_1 \gamma_\mu \gamma^\rho \partial_\rho \chi. \quad (8.20)$$

Первый член и есть нужный нам результат, но, к сожалению, у нас возник дополнительный член, пропорциональный  $\gamma^\rho \partial_\rho \chi$ . Этот дополнитель-

ный член исчезает только в том случае, когда справедливы классические уравнения движения. Чтобы устранить этот член, мы можем расширить определение вариации  $\delta\chi$  и посмотреть, к чему это приведет. Заметим, что если добавить к выражению (8.12) для  $\delta\chi$  дополнительную вариацию вида

$$\delta_{\text{доп}} \chi = (F + i\gamma_5 G)\alpha, \quad (8.21)$$

где  $F$  и  $G$  — функции координаты  $x$ , но не канонические поля, так как их размерность равна  $L^{-2}$ , то выражения (8.13) и (8.14) не изменятся благодаря свойствам майорановского переворота. Например,

$$\begin{aligned} [\delta_1, \delta_2]_{\text{доп}} S &= a \bar{\alpha}_2 \delta_1 \delta_{\text{доп}} \chi - (1 \leftrightarrow 2) = \\ &= a \bar{\alpha}_2 (F + i\gamma_5 G) \alpha_1 - (1 \leftrightarrow 2) = 0. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Однако эта добавочная вариация дает вклад в преобразование  $\chi$ , а именно:

$$[\delta_1, \delta_2]_{\text{доп}} \chi = (\delta_1 F + i\gamma_5 \delta_1 G) \alpha_2 - (1 \leftrightarrow 2). \quad (8.23)$$

Дополнительный член в формуле (8.20) можно переписать подходящим образом с помощью фирцевского преобразования

$$\bar{\alpha}_2 \gamma^\mu \alpha_1 \gamma_\mu = \alpha_1 \bar{\alpha}_2 - \gamma_5 \alpha_1 \bar{\alpha}_2 \gamma_5 - (1 \leftrightarrow 2). \quad (8.24)$$

Сравнение с выражением (8.23) показывает теперь, что выбрав

$$\delta_1 F = a^2 \bar{\alpha}_1 \gamma^\rho \partial_\rho \chi, \quad \delta_1 G = -i a^2 \bar{\alpha}_1 \gamma_5 \gamma^\rho \partial_\rho \chi, \quad (8.25), \quad (8.26)$$

мы сократим дополнительный член и получим желаемый результат. Оставляем в качестве упражнения (см. задачу) доказательство того что в применении к функциям  $F$  и  $G$  выплывает операторное соотношение

$$[\delta_1, \delta_2] = 2a^2 \bar{\alpha}_2 \gamma^\mu \alpha_1 \partial_\mu. \quad (8.27)$$

К сожалению, новое выражение для  $\delta\chi$  не оставляет инвариантным исходное действие из-за наличия члена  $\delta_{\text{доп}}\chi$ . Но заметим, что

$$\begin{aligned} \delta_{\text{доп}} \int_0^W \mathcal{L} = \delta_{\text{доп}} \bar{\chi} \gamma^\mu \partial_\mu \chi &= i \bar{\alpha} \gamma^\rho \partial_\rho \chi F - \bar{\alpha} \gamma_5 \gamma^\rho \partial_\rho \chi G = \\ &= -\frac{1}{2a^2} \delta(F^2 + G^2). \end{aligned} \quad (8.28)$$

Следовательно, действие

$$\begin{aligned} S_0^{WZ} = \int d^4 x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu S \partial^\mu S + \frac{1}{2} \partial_\mu P \partial^\mu P + \frac{1}{4} \bar{\chi} \gamma^\rho \bar{\alpha} \partial_\rho \chi + \right. \\ \left. + \frac{1}{2a^2} (F^2 + G^2) \right]. \end{aligned} \quad (8.29)$$

инвариантно относительно преобразований суперсимметрии

$$\begin{aligned} \delta S &= a \bar{\alpha} \chi; \quad \delta P = i a \bar{\alpha} \gamma_5 \chi; \quad \delta F = a^2 \bar{\alpha} \gamma^{\rho\sigma} \rho \chi; \quad \delta G = -i a^2 \bar{\alpha} \gamma_5 \gamma^{\rho} \partial_{\rho} \chi; \\ \delta \chi &= a \gamma_{\rho} \alpha \partial^{\rho} S - i a \gamma_{\rho} \gamma_5 \alpha \partial^{\rho} P + (F + i \gamma_5 G) \alpha. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Все эти преобразования удовлетворяют теперь операторному уравнению (8.27). Такое действие впервые было написано Вессом и Зумино [5].

Благодаря введению вспомогательных полей  $F$  и  $G$  у нас теперь независимо от уравнений движения имеется одинаковое число бесспиновых ( $S$ ,  $P$ ,  $F$  и  $G$ ) и спинорных (четыре действительные компоненты поля  $\chi$ ) полей. Читатель может сам убедиться, что "на массовой поверхности" (т.е. на классической траектории), где поля  $F$  и  $G$  не являются необходимыми, баланс между бесспиновыми и спинорными степенями свободы все равно сохраняется. Этот баланс между числом бозонных (целый спин) и фермионных (полуцелый спин) степеней свободы есть общая закономерность суперсимметричных теорий.

Из выражения (8.27) следует, что результатом двух суперсимметричных преобразований является трансляция. Вдобавок к этому, поскольку суперсимметричные параметры — спиноры, генераторы суперсимметрии преобразуются как спиноры. Поэтому нужно расширить группу Пуанкаре, включив в нее генераторы суперсимметрии (см. задачу). У полей  $F$  и  $G$  нет кинетических членов в действии; они служат лишь вспомогательными полями и в свободной теории полностью отделены от других полей.

Красота преобразований суперсимметрии (8.30) заключается в возможности их обобщения на теории с взаимодействием. Например, можно ввести суперсимметричную юкавскую связь, сохраняющую глобальную киральную инвариантность,

$$\mathcal{L}_{\text{юкава}}^{\mathbb{W}Z} = i h (\bar{\chi} \chi S - i \chi \gamma_5 \chi P + F(P^2 - S^2) - 2GS P) \quad (8.31)$$

или

$$\mathcal{L}_{\text{юкава}}^{\mathbb{W}Z'} = i h' (\bar{\chi} \chi P + i \bar{\chi} \gamma_5 \chi S + G(S^2 - P^2) - 2FSP). \quad (8.32)$$

Можно выписать и массовые члены

$$\mathcal{L}_m^{\mathbb{W}Z} = -i \frac{m}{2} (\bar{\chi} \chi - \frac{1}{a} SF - \frac{1}{a} PC). \quad (8.33)$$

Последнее выражение позволяет обнаружить одну важную и фатальную особенность суперсимметричных теорий. Рассмотрим урав-



нения движения для лагранжиана Весса – Зумино с массой. Эти уравнения имеют вид

$$\hat{\partial} \chi = i \frac{m}{2} \chi, \quad \square S = \frac{m}{2a} F, \quad \square P = \frac{m}{2a} G, \quad (8.34) - (8.36)$$

$$0 = \frac{1}{a^2} F + \frac{m}{2a} S, \quad 0 = \frac{1}{a^2} G + \frac{m}{2a} P. \quad (8.37), (8.38)$$

Без особого труда можно, решив последние два уравнения относительно  $F$  и  $G$ , выразить их через  $S$  и  $P$  и подставить полученные выражения в уравнения (8.35) и (8.36) для  $S$  и  $P$ . Тогда они примут вид

$$\square S = -\frac{m^2}{4} S, \quad \square P = -\frac{m^2}{4} P. \quad (8.39)$$

Следовательно все три поля  $\chi$ ,  $S$  и  $P$  имеют одинаковую массу. Таково общее свойство суперсимметрии: все поля, входящие в супермультиплет, имеют одну и ту же массу. Это объясняется тем, что массовый оператор  $P_\mu P^\mu$  коммутирует со всеми генераторами суперсимметрии. Отсюда немедленно вытекает, что в природе не может быть точной суперсимметрии, поскольку у частиц с разными спинами нет вырождения по массе.

Проделанные простые вычисления показывают, какова роль вспомогательных полей в том случае, когда могут быть решены уравнения движения. Проиллюстрируем теперь роль вспомогательных полей, не обращаясь к уравнениям движения, с помощью следующей примитивной модели. Пусть  $\rho(x)$  – некое скалярное поле, а  $A(x)$  – некое вспомогательное поле. Возьмем лагранжиан в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} A^2 + A \phi^2. \quad (8.40)$$

Дополнив это выражение до полного квадрата, получим

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} (A + \phi^2)^2 - \frac{1}{2} \phi^4. \quad (8.41)$$

Определив новое, теперь уже невзаимодействующее вспомогательное поле  $A' = A + \phi^2$ , мы приходим к лагранжиану взаимодействия  $(1/2) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - (1/2) \phi^4$ .

Мы рассмотрели простейший пример суперсимметричной теории в 4 измерениях. В настоящее время суперсимметрия – это чисто "теоретическая симметрия", не имеющая никакой экспериментальной поддержки. Но мы думаем, что было бесполезно обратить внимание читателя на существование нетривиальных симметрий между полями с разными спинами.

## Задачи

А. Докажите свойства майорановского переворота.

Б. Пользуясь тождествами для  $\gamma$ -матриц, убедитесь в справедливости разложения Фирца (8.17).

В. Проверьте киральную инвариантность действия  $S_0^{WZ}$  и найдите, как действуют киральные преобразования на поля.

Г. Покажите, что интеграл  $\int [(i/2) \bar{\chi} \gamma_5 \chi + (1/a) SG - (1/a) PF] \times d^4x$  инвариантен относительно преобразований суперсимметрии.

\*Д. Введите майорановские спинорные генераторы суперсимметрии  $Q$ , записав конечное преобразование суперсимметрии в виде  $e^{i\alpha Q}$ . Выведите выражения для антикоммутатора двух генераторов  $Q$  и для коммутатора  $Q$  с генераторами группы Пуанкаре. Получившаяся алгебра, включающая как коммутаторы, так и антикоммутаторы, образует градуированную алгебру Ли (супералгебру). Покажите, что, как следствие этого, генератор  $Q$  коммутирует с массой.

\*Е. Найдите изменение координаты  $x^\mu$  при преобразованиях суперсимметрии и убедитесь, что  $\partial_\mu$  — инвариант относительно этих преобразований.

\*\*Ж. На основании теоремы Нетер выведите выражение для сохраняющегося суперсимметричного тока. Здесь нужна осторожность, так как при суперсимметричном изменении к  $\mathcal{L}_0^{WZ}$  добавляется полная дивергенция.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Bargmann V., Wigner E.P., Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), vol. 34, №5, 211 (1946).
2. Dirac P.A.M., Rev. Mod. Phys., 21, 392 (1949).
3. Gürsey F., Ann. of Phys., 24, 211 (1963).
4. Coleman S., Jackiw R., Ann. of Phys., 67, 552 (1971).
5. Wess J., Zumino B., Nucl. Phys., B78, 1 (1974).

## Функционал действия в квантовой механике: фейнмановский интеграл по траекториям

В предыдущей главе мы занимались построением функционалов действия, которые порождают (классические) теории, согласующиеся с постулатами специальной теории относительности. Эта глава посвящена использованию ФД в квантовой теории. Для простоты и ясности мы сначала остановимся на роли действия в квантовой механике, а в следующей главе перейдем к квантовой теории поля.

Первыми осознали роль действия в квантовой механике Дирак и Фейнман. Дирак искал такую формулировку квантовой механики, в которой время и пространственные переменные рассматривались бы сходным образом. Напомню, что в обычной формулировке квантовой механики задается квантовая система, находящаяся в начальный момент времени в определенном состоянии, одном из собственных состояний полного набора операторов, коммутирующих с гамильтонианом и друг с другом. Затем, пользуясь гамильтонианом, находят, в каком состоянии окажется система в более поздний момент времени  $t$ . После этого вычисляют амплитуду перехода из состояния  $S_0$  в момент времени  $t_0$  в состояние  $S$  в момент времени  $t$  и т.д. Как нетрудно видеть, время в таком описании играет центральную роль, и в случае релятивистской системы это вызывает беспокойство, поскольку теряется *явная* лоренцовская инвариантность теории, хотя окончательный результат и оказывается релятивистски-инвариантным. Поэтому Дирак и искал такую формулировку, в которой время не было бы особо выделено. В своих поисках Дирак обратился вновь к классической механике, в которой известны два (эквивалентных) подхода: гамильтонов, в котором с самого начала выделяется время, и лагранжев, в котором этого нет. Конкретно Дирак выяснял, каков смысл ФД в классической механике, с намерением обобщить это понятие в квантовой механике. В классической механике действие является генератором канонического преобразования, переводящего систему от одного момента времени к другому. Поэтому будет неплохо освежить наши знания о канонических преобразованиях.

## § 1. Канонические преобразования в классической и квантовой механике

Рассмотрим частицу, движущуюся в одном измерении. Состояние движения этой частицы в момент времени  $t$  задается ее координатой  $q$  и импульсом  $p$ , являющимися независимыми функциями времени  $t$ . Изменение этих функций со временем определяется системой двух дифференциальных уравнений первого порядка (уравнений Гамильтона)

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (1.1)$$

где гамильтониан  $H$  зависит от  $q$ ,  $p$  и  $t$  и представляет собой энергию системы. Уравнения Гамильтона можно изящно записать, если ввести скобки Пуассона

$$\{A, B\}_{q, p} \equiv \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q}, \quad (1.2)$$

где  $A$  и  $B$  — две произвольные функции переменных  $q$ ,  $p$  и  $t$ . Тогда уравнения Гамильтона принимают вид

$$\frac{dq}{dt} = \{q, H\}, \quad \frac{dp}{dt} = \{p, H\}. \quad (1.3)$$

Отсюда следует, что если  $F$  — любая функция переменных  $q$ ,  $p$  и  $t$ , то ее производная по времени равна

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (1.4)$$

Последний член учитывает любую явную зависимость функции  $F$  от времени. Уравнения Гамильтона можно вывести из вариационного принципа

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left( p \frac{dq}{dt} - H(p, q) \right) = 0, \quad (1.5)$$

причем *независимые* вариации  $\delta p$  и  $\delta q$  принимаются равными нулю в конечных точках.

Определим *каноническое преобразование*

$$p \rightarrow P, \quad q \rightarrow Q \quad (1.6)$$

как такое преобразование, при котором не меняется форма уравнений Гамильтона, т.е. в новой системе переменных  $(Q, P)$  существует та-

кой новый гамильтониан  $\mathcal{H}(Q, P)$ , что

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P}, \quad \frac{dP}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}. \quad (1.7)$$

Ясно, что эти уравнения также можно вывести из вариационного принципа

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left( P \frac{dQ}{dt} - \mathcal{H}(Q, P) \right) = 0. \quad (1.8)$$

Отсюда вытекает условие, что подынтегральные выражения в формулах (1.5) и (1.8) могут отличаться не более чем на полную производную по времени:

$$p \frac{dq}{dt} - H(q, p) = P \frac{dQ}{dt} - \mathcal{H}(Q, P) + \frac{dG}{dt}. \quad (1.9)$$

Функция  $G$  называется производящей функцией канонического преобразования. Она может зависеть от  $t$  и от любой "смешанной" пары переменных  $(q, Q)$ ,  $(q, P)$ ,  $(p, Q)$  или  $(p, P)$ . Пусть  $G$  зависит от пары независимых переменных  $(q, Q)$ . Тогда

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial G}{\partial Q} \frac{dQ}{dt}, \quad (1.10)$$

Рассмотрим теперь выражение (1.9), считая  $q$  и  $Q$  независимыми переменными. Мы получаем, что

$$\left( p - \frac{\partial G}{\partial q} \right) \dot{q} - \left( P + \frac{\partial G}{\partial Q} \right) \dot{Q} = H - \mathcal{H} + \frac{\partial G}{\partial t}, \quad (1.11)$$

и остающиеся переменные  $(p, P)$  выражаются теперь в виде

$$p = \frac{\partial G}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial G}{\partial Q}, \quad (1.12)$$

а новый гамильтониан определяется формулой

$$\mathcal{H} = H + \frac{\partial G}{\partial t}. \quad (1.13)$$

Можно с равным успехом начать с того, что взять функцию  $G$ , зависящую от переменных  $(q, P)$ . Тогда аналогичные рассуждения приводят к уравнениям

$$p = \frac{\partial G(q, P)}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial G(q, P)}{\partial P}. \quad (1.14)$$

В частности, выбор  $G$  в виде

$$G = qP \quad (1.15)$$

приводит к тождественному преобразованию, как можно убедиться с помощью уравнений (1.14). Поэтому бесконечно малое каноническое преобразование с параметром  $\epsilon \ll 1$

$$Q = q + O(\epsilon), \quad P = p + O(\epsilon) \quad (1.16)$$

будет порождаться производящей функцией, отличающейся от выражения (1.15) членом, пропорциональным  $\epsilon$ :

$$G(q, P) = qP + \epsilon F(q, P) + O(\epsilon^2) = \quad (1.17)$$

$$= qP + \epsilon F(q, p) + O(\epsilon^2), \quad (1.18)$$

так как  $p$  отличается от  $P$  на величину  $O(\epsilon)$ . Функция  $F(q, p)$ , которая зависит теперь только от исходной системы, называется *генератором* канонического преобразования. Подстановка выражения (1.18) в (1.14) дает

$$p = P + \epsilon \frac{\partial F}{\partial q}, \quad Q = q + \epsilon \frac{\partial F}{\partial p}, \quad (1.19), (1.20)$$

или

$$\delta q \equiv Q - q = \epsilon \frac{\partial F}{\partial p} = \epsilon \{q, F\}, \quad \delta p \equiv P - p = -\epsilon \frac{\partial F}{\partial q} = \epsilon \{p, F\}. \quad (1.21), (1.22)$$

Отсюда следует, что бесконечно малое изменение любой функции  $f$  переменных  $q$  и  $p$ , вызванное бесконечно малым каноническим преобразованием с генератором  $F(q, p)$  и параметром  $\epsilon$  дается выражением

$$\delta f(p, q) = \{f(p, q), \epsilon F\}. \quad (1.23)$$

В частности, сравнивая это выражение с (1.4), мы видим, что гамильтониан является генератором бесконечно малых трансляций во времени.

Представим себе теперь очень специальный тип канонического преобразования, которое отображает переменные  $q, p$  на множество других переменных  $Q, P$ , не зависящих от времени. В этом случае знание уравнений преобразования

$$q = q(Q, P, t), \quad p = p(Q, P, t)$$

эквивалентно решению динамической задачи, поскольку  $Q$  и  $P$  являются константами, которые можно определить из начальных условий. Было бы неплохо узнать, чем порождается такое преобразование. Так

как мы требуем равенства

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dP}{dt} = 0, \quad (1.24)$$

новый гамильтониан не зависит от  $Q$  и  $P$ . Он может быть только константой, зависящей или не зависящей от времени. Для простоты положим  $\mathcal{H}$  равным нулю. Тогда, приняв за независимые переменные  $q$  и  $Q$ , получим, что выражение (1.13) будет иметь вид

$$H(q, p = \frac{\partial S}{\partial q}, t) = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad (1.25)$$

где  $S(q, Q = \text{const}, t)$  — производящая функция. Мы пришли к уравнению Гамильтона — Якоби, решением которого является функция  $S$  (она называется главной функцией Гамильтона). Из формулы (1.12) имеем

$$P = \text{const} = -\frac{\partial S}{\partial Q}(q, Q, t) \Big|_{Q = \text{const}}, \quad (1.26)$$

и обращение этого выражения дает  $q$  как функцию переменных  $Q, P$  и  $t$ , а тем самым решена динамическая задача.

Далее, производная по времени функции  $S$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q} \frac{dq}{dt} = -H(q, p, t) + p \frac{dq}{dt} \quad (1.27), (1.28)$$

есть не что иное, как лагранжиан. В результате интегрирования получаем

$$S = \int_{t_0}^t L dt' \quad (1.29)$$

и обнаруживаем, что  $S$  есть действие, рассматриваемое как *функция* переменных  $q(t)$  и  $q(t_0) = Q$  в случае, когда решение задачи уже подставлено в  $L$  и проведено интегрирование по времени. Таким образом, мы приходим к основному результату: действие есть производящая функция канонического преобразования, т.е. преобразования переменных, описывающих систему, от одного момента времени к другому. Посмотрим, как интерпретировать этот результат в рамках квантовой механики.

Перейдем к квантовому описанию системы с одной степенью свободы в одном измерении. Рассматривая операторы  $q$  и  $p$  (операторы будем помечать шляпкой " $\wedge$ "), удовлетворяющие фундаментальным перестановочным соотношениям

$$[\hat{q}, \hat{q}] = [\hat{p}, \hat{p}] = 0; \quad [\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar, \quad (1.30)$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка, состояния системы в данный момент времени можно взять как состояния  $|q\rangle$ , отвечающие заданному положению и удовлетворяющие соотношениям

$$\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle, \quad \langle q|q'\rangle = \delta(q - q'), \quad \int dq |q\rangle \langle q| = 1. \quad (1.31) - (1.33)$$

(Здесь  $q$  — обычное число или функция, но не оператор!) В квантовой механике определяется каноническое преобразование между операторами  $(\hat{q}, \hat{p})$  и  $(\hat{Q}, \hat{P})$  как такое преобразование, которое не изменяет форму фундаментальных перестановочных соотношений (1.30). Тогда система будет описываться состояниями  $|Q\rangle$ , обладающими теми же свойствами, что и состояния  $|q\rangle$  (конечно, с заменой  $q$  на  $Q$ ).

Следуя Дираку, сосредоточим внимание на "смешанном" матричном элементе  $\langle q|Q\rangle$ . Исходя из формулы (1.31), легко получить, что

$$\langle q|\hat{q}|Q\rangle = q\langle q|Q\rangle,$$

или, эквивалентно,

$$\langle q|\hat{Q}|Q\rangle = Q\langle q|Q\rangle. \quad (1.34), (1.35)$$

$$\text{Кроме того, так как } \hat{p}|q\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}|q\rangle, \quad (1.36)$$

мы имеем

$$\langle q|\hat{p}|Q\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial q}\langle q|Q\rangle, \quad \langle q|\hat{P}|Q\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial Q}\langle q|Q\rangle \quad (1.37), (1.38)$$

Но операторы  $\hat{Q}$  и  $\hat{q}$  не обязаны коммутировать между собой, так что собственное значение произвольного оператора  $F(\hat{q}, \hat{Q})$  в смешанном представлении может и не быть хорошо определенным, пока не наложены дополнительные условия на форму оператора  $F$ . Например, из соотношений (1.34) и (1.35) явствует, что

$$\langle q|f_1(\hat{q})f_2(Q)|\hat{Q}\rangle = f_1(q)f_2(Q)\langle q|Q\rangle. \quad (1.39)$$

Поэтому мы будем рассматривать только "хорошо упорядоченные" функции, для которых

$$\langle q|F(\hat{q}, \hat{Q})|Q\rangle = F(q, Q)\langle q|Q\rangle. \quad (1.40)$$



(Хорошее упорядочение означает, что эти функции представимы в виде произведения функции оператора  $\hat{q}$  на функцию оператора  $\hat{Q}$ .) Тогда, если мы положим (с дираковской способностью предвидеть!)

$$\langle q | Q \rangle = e^{-(i/\hbar) G(q, Q)}, \quad (1.41)$$

где  $G$  — функция переменных  $q$  и  $Q$ , то уравнения (1.37) и (1.38) примут вид

$$\langle q | \hat{p} | Q \rangle = \frac{\partial G}{\partial q} \langle q | Q \rangle, \quad \langle q | \hat{P} | Q \rangle = -\frac{\partial G}{\partial Q} \langle q | Q \rangle. \quad (1.42), (1.43)$$

Затем, если предположить, что  $\partial G/\partial q$  и  $\partial G/\partial Q$  — «хорошо упорядоченные» функции в смысле определения (1.40), то последние уравнения могут стать уже уравнениями для операторов

$$\hat{p} = \frac{\partial \hat{G}}{\partial q}, \quad \hat{P} = -\frac{\partial \hat{G}}{\partial Q}. \quad (1.44)$$

Итак, мы видим, что определенная соотношением (1.41) функция  $G$  есть квантовый эквивалент производящей функции. Дирак назвал ее «аналогичной» производящей функции [1, 2].

### Задачи

А. Покажите, что скобки Пуассона инвариантны относительно канонического преобразования.

Б. Рассмотрите бесконечно малое каноническое преобразование

$$\delta f = \{ f, \epsilon_\alpha F_\alpha \},$$

где  $\epsilon_\alpha$  — параметры преобразования, а  $F_\alpha$  — генераторы. Покажите, что операция  $[\delta_1, \delta_2] f$  сама есть каноническое преобразование. Индексы здесь отвечают двум различным параметрам  $\epsilon_{1\alpha}$  и  $\epsilon_{2\alpha}$ . Что является генератором этого канонического преобразования? Удовлетворяют ли канонические преобразования групповым аксиомам?

В. Рассмотрите систему с координатами  $q_i$  и импульсами  $p_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Найдите генераторы бесконечно малых вращений и проверьте результаты задачи Б.

## § 2. Фейнмановский интеграл по траекториям

Далее Дирак попытался применить эту аналогию к главной функции Гамильтона, в которой  $q = q^t$  в момент времени  $t$  и  $Q = q^T$  в момент времени  $T$ :

$$\langle q_t^* | q_T \rangle \sim e^{(i/\hbar) \int_T^t L dt} \quad (2.1)$$

Подчеркнем, что тильда "∼" означает всего лишь некоторую неопределенную связь между правой и левой частями, так как при выводе формулы (1.44)<sup>1)</sup> Дираку пришлось сделать множество предположений без какого-либо обоснования. В самом деле, как нетрудно видеть, знак равенства в формуле (2.1) был бы неправилен, если считать временной интервал  $T - t$  конечным. Действительно, разобьем  $T - t$  на  $N$  бесконечно малых временных интервалов  $t_\alpha = t + \alpha \epsilon$ ;  $N \epsilon = T - t$ . Пусть  $q_\alpha = q_{t_\alpha}$ ; тогда, используя соотношение полноты (1.33) для каждого  $t_\alpha$ , можно написать

$$\langle q_t^* | q_T \rangle = \int dq_1 dq_2 \dots dq_{N-1} \langle q_t^* | q_1 \rangle \langle q_1 | q_2 \rangle \dots \dots \langle q_{N-1} | q_T \rangle. \quad (2.2)$$

Это точная квантовомеханическая формула. Если считать, что соотношение (2.1) есть равенство, то интеграл в экспоненте можно разбить на много областей интегрирования и это приведет к неправильной формуле

$$\langle q_t^* | q_T \rangle = \langle q_t^* | q_1 \rangle \langle q_1 | q_2 \rangle \dots \langle q_{N-1} | q_T \rangle, \quad (2.3)$$

отличающейся от правильной отсутствием промежуточных интегрирований. В последней формуле  $q_1, q_2, \dots$  — классические значения траектории, взятые в моменты времени  $t_1, t_2, \dots$ .

Но если предположить, что в формуле (2.1) выполняется равенство (с точностью до константы) только для *бесконечно малого* промежутка времени, т.е.

$$\langle q_t^* | q_{t+\delta t} \rangle = A e^{- (i/\hbar) \delta t L(q_t^*, q_{t+\delta t})}, \quad (2.4)$$

где  $L$  (как в теории Гамильтона — Якоби) понимается как функция переменных  $q_t^*$  и  $q_{t+\delta t}$ , то мы не вступим в противоречие с квантовомеханической формулой (2.2). Именно это и сделал Фейнман [3]! Если подставить (2.4) в (2.2), то это приведет к фейнмановскому интегралу по траекториям амплитуды перехода:

<sup>1)</sup> Номер главы будет указываться только в ссылках на формулы из предыдущих глав.

$$\langle q_i^* | q_T \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} A^N \int \left( \prod_{i=1}^{N-1} dq_i \right) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_T^t dt L(q, \dot{q})} \equiv$$

$N \in \text{фиксировано}$

$$(2.5)$$

$$\equiv \int \mathcal{D}q e^{-\frac{i}{\hbar} S(t, T, [q])}, \quad (2.6)$$

где второе выражение есть просто хитрый способ скрыть то, что мы не знаем меру интегрирования. Граничными условиями служат значения траектории, взятые в начальный и конечный моменты времени. Формула (2.5) означает, что если вы хотите вычислить амплитуду вероятности того, что частица, находящаяся в момент времени  $T$  в точке  $q$ , будет находиться в момент времени  $t$  в точке  $q^*$ , то вам нужно представить эту амплитуду как сумму по всем возможным траекториям, которые начинаются в момент времени  $T$  в точке  $q$  и кончаются в момент времени  $t$  в точке  $q^*$ , с весом, равным экспоненте от произведения отношения  $(-i/\hbar)$  на действие, вычисленное для конкретной траектории. Из такой формулировки ясно видно различие между классической и квантовой механикой. В первом случае частица движется только по одной траектории, идущей от  $q$  до  $q^*$ , а во втором вклад дают все траектории.

Формула (2.6) очень ясно указывает на то, какова связь между классической и квантовой механикой. В классическом пределе  $\hbar \rightarrow 0$  подынтегральное выражение при изменении  $q$  будет осциллировать со все большей частотой и само себя гасить, если только действие  $S$  не является почти постоянным; но это так и есть, когда  $S$  стационарно и  $q$  — классическая траектория (а может ли быть несколько стационарных точек?). Таким образом, мы видим, что при  $\hbar \rightarrow 0$  классическая траектория естественным образом выделяется и восстанавливается формула (2.3), но только в классическом пределе.

Благодаря указанной связи, отмеченной впервые Дираком, функционал действия и становится столь важным понятием. Мы видели, что действие  $S$ , как оно ни прекрасно, играло лишь очень незначительную роль в классической механике, поскольку там требовалось только знать положение его экстремумов. В квантовой же механике действие используется во всех точках. Обращаясь к прошлому, как не задуматься над тем, задавали ли себе физики прошлого столетия вопрос, почему так мало берется от понятия действия!

Проверим теперь путем явных вычислений, насколько справедлива гипотеза Фейнмана (2.4). Пусть  $\hat{H}$  — независимый от времени оператор Гамильтона нашей одномерной системы. В гейзенберговской кар-

тине состояние  $|q\rangle$  в момент времени  $t + \delta t$  получается из состояния в момент времени  $t$  следующим образом:

$$|q_t + \delta t\rangle \approx |q_t\rangle + \frac{i}{\hbar} \delta t \hat{H} |q_t\rangle + O((\delta t)^2). \quad (2.7)$$

Отсюда

$$\langle q_t^* + \delta t | q_t \rangle = \langle q_t^* | q_t \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle q_t^* | \hat{H} | q_t \rangle \delta t + O((\delta t)^2). \quad (2.8)$$

В качестве простого примера положим

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hat{p}^2 + V(\hat{q}), \quad (2.9)$$

чтобы избежать (на время) трудностей с упорядочением. Тогда

$$\langle q_t^* | H | q_t \rangle = \left[ -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q) \right] \langle q_t^* | q_t \rangle = \quad (2.10)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl}{2\pi} \left[ -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q) \right] e^{il(q^* - q)}, \quad (2.11)$$

если использовать формулу (1.32) и интегральное представление  $\delta$ -функции

$$\delta(x - x^*) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl}{2\pi} e^{il(x - x^*)}. \quad (2.12)$$

Собирая все формулы и выполняя дифференцирование по  $q$ , получаем

$$\langle q_t^* + \delta t | q_t \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl}{2\pi} e^{il(q^* - q)} \left[ 1 - \frac{i}{\hbar} \delta t H(l, q) + O((\delta t)^2) \right], \quad (2.13)$$

где

$$H(l, q) = \frac{\hbar^2}{2} l^2 + V(q). \quad (2.14)$$

Положим

$$q^* - q = \frac{dq}{dt} \delta t = \dot{q} \delta t \quad (2.15)$$

и поднимем  $N$  в показатель экспоненты [ вводя при этом ошибку  $O((\delta t)^2)$  ]. В результате

$$\langle q_{t+\delta t}^{\circ} | q_t \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl}{2\pi} e^{i(\delta t/\hbar) [ \hbar l \dot{q} - \frac{1}{2} \hbar^2 l^2 - V(q) ]} + O((\delta t)^2). \quad (2.16)$$

На этой стадии манипуляции становятся формальными и не очень хорошо определенными. Мы хотим взять интеграл по  $l$ , а подынтегральное выражение — чисто осциллирующая функция. Есть два способа выйти из этого положения: либо искусственно ввести для сходимости множитель вида  $e^{-\epsilon l^2}$ , либо формально считать  $i\delta t$  "действительной" величиной, т.е. продолжить выражение в евклидово пространство, заменив  $t$  на  $it$ . Сохраним на время множитель  $i\delta t$  и будем рассматривать его как действительную константу. Тогда, производя замену переменных

$$l \rightarrow l^{\circ} = \left( \frac{i\delta t}{\hbar} \right)^{1/2} (\hbar l - \dot{q}), \quad (2.17)$$

приходим к выражению

$$\langle q_{t+\delta t}^{\circ} | q_t \rangle = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{i\delta t}{\hbar} \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right]} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl^{\circ}}{\sqrt{i\delta t \hbar}} e^{-\frac{1}{2} l^{\circ 2}}. \quad (2.18)$$

Вычисляя гауссов интеграл, получаем

$$\langle q_{t+\delta t}^{\circ} | q_t \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi i \delta t \hbar}} e^{\frac{i\delta t}{\hbar} \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right]}. \quad (2.19)$$

Напомним, что величина  $\dot{q}$  определена формулой (2.15) и в нее входит как  $q^{\circ}$ , так и  $q$ . Величина, стоящая в квадратных скобках, действительно является лагранжианом. Следовательно, гипотеза Фейнмана оказывается правильной, если не считать того, что возникшая константа по меньшей мере необычна. Таким образом, для конечного интервала времени

$$\begin{aligned} \langle q^f | q_T^i \rangle &= \lim_{\substack{\delta t \rightarrow 0 \\ N \delta t \text{ фиксировано}}} \int \dots \int_{j=1}^{N-1} \left\{ dq_j \left( \frac{1}{2\pi i \delta t \hbar} \right)^{1/2} \right\} \times \\ &\times e^{(i/\hbar) \int_T^t L dt} \quad (q^f \equiv q_N, \quad q^i \equiv q_0). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Предполагая, что этот предел имеет смысл, мы видим, что вряд ли можно опустить константу пропорциональности между амплитудой перехода и интегралом по траекториям. Этот вывод является строгим для систем, описываемых гамильтонианом вида (2.9).

Предположим теперь, что мы хотим вычислить амплитуду перехода для системы с классическим гамильтонианом вида

$$H = \frac{1}{2} p^2 v(q), \quad (2.21)$$

где  $v(q)$  — некоторая функция переменной  $q$ . Нужно очень аккуратно определить соответствующий оператор Гамильтона, поскольку  $\hat{p}$  и  $\hat{q}$  не коммутируют. Теперь очередь за предписанием об упорядочении. Определим симметричное упорядочение "... " так, что

$$\langle q'_t | \frac{1}{2} \hat{p}^2 v(\hat{q}) | q_t \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl}{2\pi} \frac{\hbar^2}{2} l^2 v\left(\frac{q+q'}{2}\right) \times \\ \times e^{il(q'-q)} \quad (2.22)$$

Как нетрудно убедиться, таким условием действительно определяется некое упорядочение. При этом  $q$  и  $q'$  рассматриваются равноправно.

Далее, полагая  $\hbar = 1$ , путем непосредственных вычислений получаем, что

$$\langle q'_t + \delta t | q_t \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl}{2\pi} e^{il(q'-q) - i\delta t \frac{1}{2} l^2} v\left(\frac{q+q'}{2}\right) + \\ + O((\delta t)^2), \quad (2.23)$$

так что интегрирование по  $l$  становится более сложным. Производя замену переменных

$$l' = \sqrt{i\delta t} (l v^{1/2} - v^{1/2} \dot{q}), \quad (2.24)$$

где  $\dot{q}$  — величина, определенная формулой (2.15), находим

$$\langle q'_t + \delta t | q_t \rangle = \frac{1}{2\pi} e^{-i\delta t \frac{1}{2} \dot{q}^2} \frac{1}{\sqrt{i\delta t v}} \int_{-\infty}^{+\infty} dl' e^{-l'^2/2} = \\ (2.25)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi i\delta t}} e^{-i\delta t \frac{1}{2} v^{-1} q^2} \left(\frac{1}{\sqrt{v}}\right). \quad (2.26)$$

Выражение в показателе экспоненты можно интерпретировать как лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} v^{-1} \dot{q}^2, \quad (2.27)$$

в чем нетрудно убедиться, образовав каноническим способом гамильтониан (см. задачу); но в (2.26) имеется и дополнительный член  $v^{-1/2} [(q + q^*) / 2]$ , который в данном случае вносит вклад в интеграл по траекториям, имеющий вид

$$\langle q_i^* | q_T \rangle = \int \dots \int \prod_{i=1}^{N-1} \frac{dq_i}{\sqrt{2\pi i \delta t}} v^{-1/2} (q_i + q_{i-1}) e^{+i \int_T^t L dt} \quad (2.28)$$

Заметим, что это выражение отличается от наивного выражения, в котором траектория берется только с весом  $e^{iS}$ . Таким образом, магическая мера " $\mathcal{D}q$ " иногда содержит странные сюрпризы, вроде множителя  $v^{-1/2}$  в данном случае. Отсюда можно извлечь один урок: правильное выражение для амплитуды перехода получается только в том случае, если сначала используется гамильтонов формализм. Более правильное выражение имеет вид

$$\langle q_i^* | q_T \rangle = \int \dots \int \mathcal{D}p \mathcal{D}p e^{i \int_T^t d\tau [p \frac{dq}{d\tau} - H(p, \langle q \rangle)]}, \quad (2.29)$$

где " $\mathcal{D}p$ " означает  $\prod (dp_i / 2\pi)$ , а  $\langle q \rangle$  — среднее значение переменной  $q$  на данном интервале. Итак, выражение для амплитуды перехода в виде экспоненты от действия следует рассматривать как выведенное из фундаментальной формы (2.29), содержащей гамильтониан.

### Задачи

А. Выведите формулу (2.11), непосредственно вычислив матричные элементы оператора  $\hat{H}$  в импульсном представлении и затем выполнив обратное преобразование в  $q$ -представление.

Б. Найдите точные выражения для " $\hat{q}^n \hat{p}$ " и " $\hat{q}^n \hat{p}^2$ " в соответствии с определением, содержащимся в соотношении упорядочения (2.22).

В. Пользуясь обычной процедурой, покажите, что лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} v^{-1} \dot{q}^2 \text{ приводит к гамильтониану } H = \frac{1}{2} p^2 v(q).$$

Г. Покажите, что если  $T < t_1, t_2 < t$ , то

$$\int \mathcal{D}q \mathcal{D}p q(t_1) q(t_2) e^{i \int_T^t dt [p \dot{q} - H]} = \langle q_i^* | T [\hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2)] | q_T \rangle,$$

где символ  $T [ \dots ]$  означает хронологически упорядоченное произведение:

$$T [ \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) ] = \begin{cases} \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) & \text{при } t_1 > t_2, \\ \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_1) & \text{при } t_2 > t_1. \end{cases}$$

### § 3. Интеграл по траекториям и гармонический осциллятор, находящийся под действием внешней силы

Очень хорошей иллюстрацией к применению метода интеграла по траекториям может служить задача о гармоническом осцилляторе, на который действует внешняя сила. Мы хотим вычислить амплитуду перехода при наличии действительной вынуждающей силы  $F$

$$\langle Q_t^{\circ} | Q_T \rangle_E = \int \mathcal{D}q e^{i \int_T^t dt \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{1}{2} \omega^2 q^2 + F(t) q(t) \right]} \quad (3.1)$$

со следующими граничными условиями:  $q = Q^{\circ}$  в момент времени  $t$  и  $q = Q$  в момент времени  $T$ . Записанное так подынтегральное выражение будет чисто осциллирующим; один из способов восстановить сходимость таков: добавить затухающий член

$$\frac{1}{2} \epsilon \int_T^t dt q^2(t), \quad \epsilon > 0, \quad (3.2)$$

и устремить  $\epsilon$  к нулю по окончании вычислений. Тогда подынтегральное выражение примет вид

$$\exp \left\{ i \int dt \left[ \frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{1}{2} (\omega^2 - i \epsilon) q^2 + Fq \right] \right\}.$$

Предположим теперь, что в случае осциллятора с внешней вынуждающей силой мы хотим вычислить амплитуду перехода из состояния  $Q$  в бесконечно далеком прошлом в состояние  $Q^{\circ}$  в бесконечно далеком будущем. Чтобы осуществить это, удобно ввести преобразование Фурье

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{\sqrt{2\pi}} e^{iEt} \tilde{G}(E) \quad (3.3)$$

и обратное ему преобразование

$$\tilde{G}(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} e^{-iEt} G(t), \quad (3.4)$$



где  $G$  — любая функция времени  $t$ , а  $\tilde{G}$  — ее фурье-образ. Выразим  $q(t)$  и  $F(t)$ , входящие в (3.1), через их фурье-образы:

$$\frac{1}{2} [\dot{q}^2 - (\omega^2 - i\varepsilon)q^2] = \frac{1}{2} \int \frac{dE}{\sqrt{2\pi}} \frac{dE'}{\sqrt{2\pi}} e^{i(E+E')t} [-EE' - \omega^2 + i\varepsilon] \tilde{q}(E) \tilde{q}(E'), \quad (3.5)$$

$$F_{\text{внеш}}(t) q(t) = \frac{1}{2} \int \frac{dE}{\sqrt{2\pi}} \frac{dE'}{\sqrt{2\pi}} e^{i(E+E')t} [\tilde{q}(E) \tilde{F}(E') + \tilde{q}(E') \tilde{F}(E)]. \quad (3.6)$$

Интегрирование по  $t$ , использование интегрального представления (2.12) для  $\delta$ -функции и затем интегрирование по  $E'$  приводит к выражению в показателе экспоненты

$$\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dE [(E^2 - \omega^2 + i\varepsilon) \tilde{q}(E) \tilde{q}(-E) + \tilde{q}(E) \tilde{F}(-E) + \tilde{q}(-E) \tilde{F}(E)]. \quad (3.7)$$

Определяя новые переменные в  $E$ -пространстве

$$\tilde{q}^*(E) = \tilde{q}(E) + \frac{\tilde{F}(E)}{E^2 - \omega^2 + i\varepsilon} \quad (3.8)$$

или в  $t$ -пространстве

$$q^*(t) = q(t) + \int \frac{dE}{\sqrt{2\pi}} e^{iEt} \frac{\tilde{F}(E)}{E^2 - \omega^2 + i\varepsilon}, \quad (3.9)$$

приходим к выражению для амплитуды перехода

$$\langle Q_{\infty}^* | Q_{-\infty} \rangle_F = e^{-\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \frac{\tilde{F}(E) \tilde{F}(-E)}{E^2 - \omega^2 + i\varepsilon}} \times \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \tilde{q}^*(E) (E^2 - \omega^2 + i\varepsilon) \tilde{q}(-E)}. \quad (3.10)$$

Теперь-то и проявляется магия интеграла по траекториям, поскольку якобиан преобразования (3.8) равен единице. Следовательно,

$$\mathcal{D}q^* = \mathcal{D}q \quad (3.11)$$

и в последнем множителе в формуле (3.10) мы узнаем амплитуду пере-

хода при  $F = 0$ , так что в результате

$$\langle Q'_{+\infty} | Q_{-\infty} \rangle_F = \langle Q'_{+\infty} | Q_{-\infty} \rangle_{F=0} e^{-\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \frac{\widetilde{F}(E) \widetilde{F}(-E)}{E^2 - \omega^2 + i\varepsilon}} \quad (3.12)$$

Зависимость от  $F$  выделена в явном виде. Можно еще немного преобразовать это выражение, придав ему форму интеграла по времени

$$\exp\left\{-\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt F(t) D(t-t') F(t') dt'\right\}, \quad (3.13)$$

$$\text{где } D(t-t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-i(t-t')E}}{E^2 - \omega^2 + i\varepsilon}. \quad (3.14)$$

Каков физический смысл выражения (3.13)? Допустим, что вынуждающая сила отсутствует в моменты времени  $t = \pm\infty$ . Тогда в эти моменты времени вакуумные состояния не будут зависеть от существования силы  $F$ . Пусть  $|\Omega_{\pm\infty}\rangle$  — вакуумные состояния в бесконечно далеком будущем и прошлом. Выразим их через состояния  $|Q_{\pm\infty}\rangle$ , которые входят в выражение (3.12). Имеем

$$\begin{aligned} \langle \Omega_{+\infty} | \Omega_{-\infty} \rangle_F &= \\ &= \int dQ' dQ \langle \Omega_{+\infty} | Q'_{+\infty} \rangle \langle Q'_{+\infty} | Q_{-\infty} \rangle_F \langle Q_{-\infty} | \Omega_{-\infty} \rangle = \\ &= \int dQ' dQ \langle \Omega_{+\infty} | Q'_{+\infty} \rangle \langle Q'_{+\infty} | Q_{-\infty} \rangle_{F=0} \times \\ &\quad \times \langle Q_{-\infty} | \Omega_{-\infty} \rangle e^{-\frac{i}{2} \langle FDF \rangle}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где мы ушли выражение (3.12) и ввели обозначение  $\langle \dots \rangle$  для указания интегрирования по  $t$  и  $t'$ . Пользуясь теперь выражением (3.15) с  $F = 0$ , можно переписать (3.16) в виде

$$\langle \Omega_{+\infty} | \Omega_{-\infty} \rangle_F = \langle \Omega_{+\infty} | \Omega_{-\infty} \rangle_{F=0} e^{-\frac{i}{2} \langle FDF \rangle}. \quad (3.17)$$

Но величина  $\langle \Omega_{+\infty} | \Omega_{-\infty} \rangle_{F=0}$  есть амплитуда того, что система, находившаяся в бесконечно далеком прошлом в основном состоянии, окажется в бесконечно далеком будущем в отсутствие всякой вынуждающей

силы. Такая амплитуда должна равняться 1 (если она нормируема). Следовательно, выражение (3.13) мы отождествляем с амплитудой перехода системы из основного состояния в прошлом в основное состояние в будущем при наличии внешней вынуждающей силы.

Обозначим величину (3.13) символом  $W[F]$  и введем  $Z[F]$  в соответствии с равенством

$$W[F] \equiv e^{-\frac{i}{2} \langle F_1 D_{12} F_2 \rangle_{1;2}} \equiv e^{-iZ[F]}. \quad (3.18), (3.19)$$

Здесь вновь символ  $\langle \dots \rangle_{12}$  означает интегрирование по немым переменным "1" и "2", при этом  $F_1$  означает  $F_1^{(1)}$  и т.д. Заметим, что функционал  $W$  нормирован так, что  $W[0] = 1$ .

Нетрудно показать (см. задачу), что

$$D(t) = \frac{1}{2i\omega} [\theta(t) e^{-i\omega t} + \theta(-t) e^{i\omega t}], \quad (3.20)$$

где  $\theta(x)$  — ступенчатая функция:

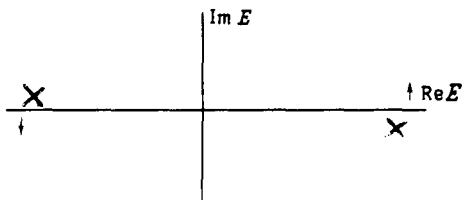
$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Далее, непосредственно дифференцируя выражение (3.14), мы убеждаемся, что

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) D(t) = -\delta(t). \quad (3.22)$$

Следовательно,  $D(t)$  есть функция Грина оператора  $(d^2/dt^2) + \omega^2$ , а правилом добавления  $-i\epsilon$ , предписываемым интегралом по траекториям, фиксируются граничные условия. Как явствует из выражения (3.20),  $D(t)$  представляет собой смесь запаздывающего и опережающего сигналов. Это "предшественник" фейнмановского пропагатора, описывающего распространение сигнала как обусловленное двумя факторами: движением состояний с положительной энергией (частиц) в положительном направлении во времени и состояний с отрицательной энергией (античастиц) назад во времени.

Отметим еще одно интересное обстоятельство: выражение (3.13) можно продолжить на мнимые значения  $E$ , не встретив при повороте контура никакой сингулярности (рис. 1). Возможность выполнения та-



Р и с. 1.

кой операции, называемой виковским поворотом, очень существенна, поскольку эта операция соответствует рассмотрению с самого начала "евклидова" ( $t \rightarrow it$ ) определения интеграла по траекториям. Такой способ альтернативен введению  $i\varepsilon$ -затухания, ибо подынтегральные выражения в евклидовом пространстве уже не осциллируют. Например, мы могли бы начать с выражения

$$W_E [ F ] = \int \mathcal{D} q e^{-\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dq}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2 - Fq \right]}, \quad (3.23)$$

полученного подстановкой  $\tau = it$  в формулу (3.1). Тогда ответ в действительном времени получается аналитическим продолжением выражения для  $W_E [ F ]$ . Такой процесс приводит к той же полюсной структуре функции  $D(t)$ , что и добавление  $-i\varepsilon$  (см. задачу). Мы подробнее проследим за этой процедурой при вычислении фейнмановских диаграмм. Однако отсутствие сингулярностей в евклидовом пространстве, хотя и привлекательно с математической точки зрения, затемняет физический смысл теоретико-полевых амплитуд. На практике, конечно, каждый считает себя вправе продолжать функции и вычисляет так, как ему легче. Но по формальным причинам разница между описанием в евклидовом пространстве и пространстве Минковского может быть огромной (смысл добавки  $-i\varepsilon$  в случае фермионов, "калибровка" на световом конусе" и т.п.).

### Задачи

А. Методом, изложенным в приложении А, покажите, что

$$\int \prod_{i=1}^N dz_i \delta z_i^* e^{-z^\dagger C z} = \frac{\pi^N}{\det C}.$$

Каким условиям должна удовлетворять матрица  $C$  (если она эрмитова)?

Дополнительное упражнение для желающих: доказать приведенную выше формулу в случае, когда  $C$  — неэрмитова матрица.

**В.** Вычислите функции Грина

$$D_a = \int \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iEt}}{E^2 - \omega^2 - i\epsilon E}, \quad D_r = \int \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iEt}}{E^2 - \omega^2 + i\epsilon E}, \quad \epsilon > 0,$$

методом теории вычетов. Выясните, каков физический смысл граничных условий для этих функций Грина. Можете ли вы каким-либо способом получить указанные функции с помощью интеграла по траекториям? Выразите через функции  $D_a$  и  $D_r$  функцию  $D$  [формула (3.20)].

**\*В.** Исходя из выражения

$$W_E[F] \sim \int \mathcal{D}q \exp \left\{ - \int d\tau \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dq}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2 - Fq \right] \right\},$$

покажите, что

$$W_E[F] = W_E[0] \exp \left\{ - \frac{1}{2} \int d\tau d\sigma F(\tau) D_E(\tau - \sigma) F(\sigma) \right\},$$

причем выражение для  $D_E(\tau)$  следует найти. Затем путем аналитического продолжения выведите выражение (3.20) для функции  $D$ .

**Г.** Покажите, что

$$D(t) = \int \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iEt}}{E^2 - \omega^2 + i\epsilon} = \frac{1}{2i\omega} \left[ \theta(t) e^{-i\omega t} + \theta(-t) e^{i\omega t} \right]$$

( $\epsilon > 0$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Dirac P. A. M., Phys. Zs. Sowjetunion, **3**, Hf. 1 (1933).
2. Dirac P. A. M. — in: Selected Papers on Quantum Electrodynamics, ed. J. Schwinger, Dover, 1958.
3. Feynman R. P., Rev. Mod. Phys., **20**, 267 (1948).

## Фейнмановский интеграл по траекториям в теории поля

### § 1. Производящий функционал

Обобщим теперь интеграл по траекториям на случай теории поля. Рассуждая по аналогии с квантовой механикой и взяв для удобства в качестве примера действительное скалярное поле, мы можем описывать состояния системы в данный момент времени  $t$  кет-вектором  $|\varphi(\mathbf{x})\rangle$ . Назовем это состояние конфигурацией. Можно вычислить амплитуду перехода между конфигурацией в момент времени  $t_0$  и новой конфигурацией в более поздний момент времени  $t$ , но при этом мы немедленно сталкиваемся с необходимостью выразить кет-вектор конфигурации через возможные физические состояния системы. Идентификация состояний системы обычно существенным образом зависит от возможности использовать метод малых возмущений. Сначала рассматривают теорию в нулевом приближении, и в этом случае состояния легко определяются. Переход к полной теории осуществляется добавлением малого возмущения к идеализированной теории нулевого порядка. Затем вычислят влияние этого *малого* возмущения на идеализированные состояния в нулевом порядке. Указанные шаги возможны только в том случае, если удастся построить полную теорию, рассматривая малое возмущение простой системы, и на основе такой теории вычислить поправки к идеализированным состояниям нулевого порядка. Примером может служить квантовая электродинамика (КЭД), в которой легко обнаруживается малый параметр  $\alpha \approx (137)^{-1}$ . Теория нулевого порядка отвечает значению  $\alpha = 0$ . Такая теория без труда описывается с помощью *идеализированных* состояний фотона и электрона (или мюона, тау, кварка, . . .). Последовательно в каждом порядке по  $\alpha$  вычисляется влияние взаимодействия на указанные состояния и их взаимодействия. После некоторых ухищрений (а именно, теории перенормировок) обнаруживается, что эти поправки приводят к физическим состояниям электрона и фотона и их взаимодействиям. Цель всего сказанного — подчеркнуть, что успех КЭД основан на том, что нам

удалось выявить идеализированные электронно- и фотоподобные состояния в теории нулевого порядка. Такое выявление стало возможным только благодаря тому, что  $\alpha$  — малое число. Примером еще нерешенной теории может служить КХД, квантовая хромодинамика, которая, как полагают, описывает взаимодействия кварков и глюонов (эквивалент фотонов в КХД). Считается, что кварки не являются физическими частицами, а таковыми являются связанные состояния кварков — протоны,  $\pi$ -мезоны и т.д. Но априори ничто не заставляет считать, что кварки — не физические состояния. Поэтому, чтобы двигаться дальше, мы должны решить, каковы константы взаимодействия кварков друг с другом. Если они малы, то кварки можно рассматривать как физические состояния (здесь "физические" означает, что состояния "выживают" в изоляции); если же константы велики, то говорить о кварках как о частицах не имеет особого смысла, поскольку кварки будут связываться друг с другом, а не существовать в виде асимптотических состояний.

Таким образом, знание физических состояний теории поля во многом зависит от решения. Но его-то мы и ищем! Нам нужно найти такую формулировку теории, основанную на интегралах по траекториям, при которой не требовалось бы знать ее физические состояния (это будет выведено). Прием, который позволяет выбраться из этой западни, очень прост. Всякий согласится, что, какими бы ни были состояния, должно существовать состояние с наименьшей энергией, которое мы назовем вакуумным. Оно может иметь очень сложную структуру (например, сверхпроводимость) и может быть заселено всеми видами странных объектов, но тем не менее считается, что оно существует. Предположим теперь, что нас интересует амплитуда перехода системы из вакуумного состояния при  $t = -\infty$  в вакуумное состояние при  $t = +\infty$  в присутствии произвольной вынуждающей силы. Это означает, что в любой момент времени мы сохраняем за собой право как угодно возбуждать систему по своему желанию и наблюдать за ее откликом. Тогда мы можем получить ответ на все вопросы, если только мы достаточно умны, чтобы применять такие пробы, которые дают распознаваемые отклики. Следовательно, план действий будет таким: а) решить задачу о построении амплитуды  $\langle \Omega | \Omega \rangle_J$  для произвольного источника  $J(x)$ ; б) интерпретировать результаты, т.е. опознать амплитуды рассеяния; в) исходя из этих амплитуд, рассчитать физические следствия теории.

По традиции источник привязывается к локальному полю, так как это приводит к вынуждающему члену общего вида, с помощью которого могут быть построены все возможные источники. В случае, когда применима теория возмущений, локальные поля естественным образом интерпретируются как частицы.

Начнем с простейшей теории поля – самодействующего скалярного поля, описываемого действием

$$S = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - V(\varphi) \right] = \int d^4x \quad \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi).$$

$$(1.1), (1.2)$$

Чтобы построить гамильтонову плотность  $\mathcal{H}$ , определим канонический импульс

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)} = \partial_0 \varphi = \dot{\varphi} \quad (1.3)$$

и выполним затем преобразование Лежандра

$$\mathcal{H}(\pi, \varphi, \nabla \varphi) = \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\pi^2 + \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + m^2 \varphi^2) + V(\varphi). \quad (1.4), (1.5)$$

Если  $m^2 > 0$  и  $V > 0$ , то функция  $\mathcal{H}$  положительно определена.

Амплитуда перехода вакуума в вакуум определяется как

$$\langle \Omega | \Omega \rangle_J \equiv W[J] = N \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\pi e^{i \langle \pi \dot{\varphi} - \mathcal{H} + J\varphi \rangle}, \quad (1.6)$$

где  $N$  – постоянная (обычно плохо определенная), символ  $\langle \dots \rangle$  означает теперь интегрирование по пространственно-временным переменным, а  $J(x)$  – произвольный источник. Интегрируя по  $\pi$  методом, изложенным в предыдущей главе, получим

$$W[J] = N' \int \mathcal{D}\varphi \quad e^{i \langle \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - V(\varphi) + J\varphi \rangle}. \quad (1.7)$$

В этом случае через  $\mathcal{D}\varphi$  (или  $\mathcal{D}\pi$ ) обозначено произведение всех  $d\varphi_k$ , где  $\varphi_k$  – значение  $\varphi$  при  $x = x_k$ .

Подынтегральное выражение в (1.7) осциллирует, и даже интегралы по траекториям плохо определены. Существуют два способа избавиться от этой трудности: а) ввести множитель  $\exp(-\frac{1}{2} \epsilon \langle \varphi^2 \rangle)$ , с  $\epsilon > 0$ , обеспечивающий сходимости; б) определить  $W$  в евклидовом пространстве, положив  $x_0 = ix_0$ ,  $d^4x = -i d^4x$ ,  $\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi = -\partial_\mu \varphi \bar{\partial}_\mu \varphi$ , где



чертой отмечены переменные в евклидовом пространстве и  $\bar{\partial}_\mu = \partial / \partial \bar{x}_\mu$ . Тогда выражение (1.7) примет вид

$$W_E[J] = N_E \int \mathcal{D}\varphi e^{-\left\langle \frac{1}{2} \bar{\partial}_\mu \varphi \bar{\partial}_\mu \varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + V(\varphi) - J\varphi \right\rangle}. \quad (1.8)$$

Теперь уже показатель экспоненты под интегралом отрицательно определен при положительных  $m^2$  и  $V$ .

В обоих случаях производящий функционал используется для построения функций Грина, являющихся коэффициентами функционального разложения

$$W[J] = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(i)^N}{N!} \langle J_1 J_2 \dots J_N G^{(N)}(1, 2, \dots, N) \rangle_{1, \dots, N} \quad (1.9)$$

или

$$G^{(N)}(1, 2, \dots, N) = \frac{1}{(i)^N} \frac{\delta}{\delta J_1} \frac{\delta}{\delta J_2} \dots \frac{\delta}{\delta J_N} W[J] \Big|_{J=0}, \quad (1.10)$$

где, как обычно,  $J_i = J(x_i)$  и т.д., символ  $\langle \dots \rangle_{1, \dots, N}$  означает интегрирование по  $d^4x_1 \dots d^4x_N$ . Главная задача теперь в том, чтобы вычислить функции  $G^{(N)}(x_1, \dots, x_N)$  методом теории возмущений или иным способом. В  $p$ -пространстве эти функции будут отождествлены с амплитудами перехода. Это нетривиально, поскольку амплитуды перехода должны удовлетворять требованиям унитарности и полноты. Для построения таких функций  $G_E^{(N)}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)$  используется функционал  $W_E[J]$  в евклидовом пространстве; функции  $G_E^{(N)}$  связаны с  $G^{(N)}$  аналитическим продолжением (виковским поворотом), и это заранее предполагает, что в процессе поворота контура не пересекаются сингулярности. Такого условия достаточно для определения структуры особенностей  $G^{(N)}$ , но нетривиальной задачей становится доказательство того, что подобная процедура совместима с унитарностью. Мы надеемся, что все эти несколько смутные замечания станут яснее после явных вычислений.

## § 2. Фейнмановский пропагатор

В данном параграфе мы вычислим  $W[J]$  для случая  $V = 0$ . Сделаем это в пространстве Минковского с помощью  $\epsilon$ -процедуры. Положим

$$W_0[J] \equiv N \int \mathcal{D}\varphi e^{i \left\langle \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} (m^2 - i\varepsilon) \varphi^2 + J\varphi \right\rangle}. \quad (2.1)$$

Легче всего проделать вычисления в пространстве фурье-образов (импульсном пространстве) тем же методом, что и в случае вынужденного гармонического осциллятора. Введем четырехмерное преобразование Фурье

$$\tilde{F}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} F(x), \quad (2.2)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot x} \tilde{F}(p) \quad (2.3)$$

и

$$\delta^{(4)}(x - x') = \delta(x^0 - x'^0) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i(x - x') \cdot p}, \quad (2.4)$$

где  $x \cdot p = x^0 \cdot p^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}$ , а  $F$  — любая функция с достаточно хорошим поведением. Экспонента под интегралом легко выражается через фурье-образы функций  $\varphi$  и  $J$ ; в результате в показателе экспоненты возникает выражение

$$\frac{i}{2} \int d^4 p [\tilde{\varphi}'(p) [p^2 - m^2 + i\varepsilon] \tilde{\varphi}'(-p) - \tilde{J}(p) (p^2 - m^2 + i\varepsilon)^{-1} \tilde{J}(-p)], \quad (2.5)$$

$$\text{где } \tilde{\varphi}'(p) = \tilde{\varphi}(p) + (p^2 - m^2 + i\varepsilon)^{-1} \tilde{J}(p). \quad (2.6)$$

Новая переменная  $\varphi'$  отличается от  $\varphi$  на константу в пространстве функций, так что

$$\mathcal{D}\varphi = \mathcal{D}\varphi'. \quad (2.7)$$

Объединяя все результаты, находим

$$W_0[J] = N e^{-\frac{i}{2} \int d^4 p \frac{|\tilde{J}(p)|^2}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}} \int \mathcal{D}\varphi' e^{i \left\langle \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi' \partial^\mu \varphi' - \frac{1}{2} (m^2 - i\varepsilon) \varphi'^2 \right\rangle}, \quad (2.8)$$

причем мы замечаем, что зависящий от  $\varphi'$  член оказался точно таким же, как член, зависящий от  $\varphi$ , в выражении (2.1) при  $J = 0$ . Следова-

тельно,

$$W_0[J] = W_0[0] e^{-\frac{i}{2} \int d^4p \frac{\tilde{J}(p)\tilde{J}(-p)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}} \quad (2.9)$$

Выбрав должным образом  $N$ , можно положить  $W_0[0] = 1$ . Заметим, что  $W_0[0]$  можно формально вычислить, пользуясь формулами приложения А. Важно то, что нам удалось найти явную зависимость  $W_0[J]$  от  $J$ . Пользуясь обратным преобразованием Фурье, получаем

$$W_0[J] = W_0[0] e^{\frac{-i}{2} \langle J_1 \Delta_{F12} J_2 \rangle_{12}}, \quad (2.10)$$

где через  $\Delta_{F12}$  обозначено  $\Delta_F(x_1 - x_2)$ :

$$\Delta_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x - y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (2.11)$$

Это — фейнмановский пропагатор. Теперь можно интерпретировать получающиеся из  $W_0$  функции Грина. Из выражения (1.10) находим

$$G_0^{(2)}(x_1, x_2) = i \Delta_F(x_1 - x_2), \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} G_0^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = & -[\Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F(x_3 - x_4) + \\ & + \Delta_F(x_1 - x_3)\Delta_F(x_2 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_4)\Delta_F(x_2 - x_3)] \end{aligned} \quad (2.13)$$

и т.д. причем одновременно с этим все  $G$  с нечетным числом переменных обращаются в нуль. Последнее легко понять, так как  $W_0[J]$  зависит только от  $J^2$ . Попутно заметим, что все  $G$  являются функциями только разностей координат, в чем отражается трансляционная инвариантность теории. Другой вывод заключается в том, что все функции Грина более высоких порядков можно выразить через  $G_0^{(2)}$ . Поэтому может оказаться более удобным положить

$$W[J] = e^{iZ[J]} \quad (2.14)$$

и определить новые функции Грина с помощью  $Z[J]$ :

$$iZ[J] = \sum_N \frac{(i)^N}{N} \langle G_c^{(N)}(1, \dots, N) J_1 \dots J_N \rangle_{1 \dots N}. \quad (2.15)$$

Теперь мы видим, что по крайней мере в случае  $W_0$  величина  $G_c$  на много проще, чем  $G$ .

Выясним теперь физический смысл функций Грина, порождаемых функционалом  $W_0$ . Прямым вычислением находим, что

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Delta_F(x) = -\delta^{(4)}(x), \quad (2.16)$$

тем самым отождествляя  $\Delta_F$  с функцией Грина оператора  $\square + m^2$ . Граничные условия для нее определяются из  $(-i\epsilon)$ -процедуры, диктуемой интегралом по траекториям. Поэтому можно отождествить  $\Delta_F(x-y)$  с пропагатором некоего сигнала из точки  $x$  в точку  $y$ . Сигнал представляет собой состояния одиночной частицы или одиночной античастицы, поскольку эти состояния являются решениями уравнения Клейна – Гордона

$$(\square + m^2)\varphi = 0. \quad (2.17)$$

О том, какие решения распространяются, говорит нам  $(-i\epsilon)$ -процедура. Можно показать, что решения с положительной энергией уравнения Клейна – Гордона распространяются вперед во времени, а решения с отрицательной энергией – назад во времени (см. задачу).

Поскольку эти решения должны быть сопоставлены состояниям частицы (или античастицы) с энергией  $E = p^0 = \sqrt{p^2 + m^2}$  (или  $-\sqrt{p^2 + m^2}$ ), мы приходим к очень симметричной физической картине: информация переносится вперед во времени частицами, а назад во времени – античастицами. Спросим себя, например, сколькими способами можно перенести какое-то квантовое число из точки  $x$  в точку  $y$ , если у нас имеется частица, несущая одну единицу этого квантового числа, и античастица, несущая минус одну единицу. Квантовым числом может быть электрический заряд, а частицей  $\pi^+$ -мезон. Ответ – двумя способами: либо за счет распространения  $\pi^+$ -мезона из  $x$  в  $y$  с уничтожением заряда  $+1$  в точке  $x$  и переносом его в точку  $y$ , либо за счет распространения  $\pi^-$ -мезона, античастицы для  $\pi^+$ -мезона, с переносом отрицательного заряда из  $y$  в  $x$ .

Выводы: 1) мы установили, что рассматриваемая функция Грина есть пропагатор определенных сигналов, и 2) мы знаем, какие сигналы она распространяет. Отсюда естественно вытекает, что в нашем примере состояния должны быть состояниями частиц с массой  $m^2$ , а функцию  $G_0^{(2)}(x-y)$  мы интерпретируем как амплитуду перехода частицы из точки  $x$  в точку  $y$ . Можно ввести диаграммное представление в  $x$ -пространстве, сопоставив с  $\Delta_F(x-y)$  линию, связывающую две

пространственно-временные точки  $x$  и  $y$ :

$$G_0^{(2)}(x, y): \overset{\cdot}{x} \text{---} \overset{\cdot}{y}$$

Для функций Грина высших порядков мы с помощью диаграмм добавляем вклады, скажем, соответствующие формуле (2.13):

$$G_0^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4): \left( \overset{\cdot}{x_1} \text{---} \overset{\cdot}{x_2} \right) + \left( \overset{\cdot}{x_1} \text{---} \overset{\cdot}{x_3} \right) + \left( \overset{\cdot}{x_1} \text{---} \overset{\cdot}{x_4} \right) + \left( \overset{\cdot}{x_2} \text{---} \overset{\cdot}{x_3} \right) + \left( \overset{\cdot}{x_2} \text{---} \overset{\cdot}{x_4} \right) + \left( \overset{\cdot}{x_3} \text{---} \overset{\cdot}{x_4} \right)$$

Ясно, что  $G_0^{(4)}$  — существенно несвязный объект. Эту функцию можно интерпретировать как амплитуду, например, перехода из  $x_1, x_2$  в  $x_3, x_4$ . В данном приближении имеется лишь столько способов распространения сигнала, сколько изображено выше с помощью диаграмм.

Значительно более ясной оказывается интерпретация в пространстве фурье-образов. Мы видели, что структура оператора  $\Delta_F$  вынуждает нас интерпретировать  $p_\mu$  как 4-импульс состояния частицы. Это совместимо с трансляционной инвариантностью и приводит к сохранению  $p$ . Действительно, поскольку  $G$  зависит только от разностей координат  $x$ , простой фурье-образ

$$\int d^4x_1 \dots d^4x_N e^{-i(p_1 x_1 + \dots + p_N x_N)} G^{(N)}(x_1, \dots, x_N)$$

обязательно содержит  $\delta$ -функцию от  $(p_1 + \dots + p_N)$ . Поэтому мы полагаем

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{(N)}(p_1, \dots, p_N) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + \dots + p_N) = \\ = \int d^4x_1 \dots d^4x_N e^{-i(p_1 x_1 + \dots + p_N x_N)} G^{(N)}(x_1, \dots, x_N), \end{aligned} \quad (2.18)$$

где функция  $\tilde{G}^{(N)}(p_1, \dots, p_N)$  определена лишь при условии  $p_1 + \dots + p_N = 0$ .

$$\text{Например, } \tilde{G}_0^{(2)}(p, -p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (2.19)$$

представляет собой амплитуду распространения частицы с импульсом  $p$  и массой  $m^2$ . Это же можно изобразить с помощью диаграммы

$$\tilde{G}_0^{(2)}(p) = \text{---} \overrightarrow{p} \text{---} . \quad (2.20)$$

Но в общем случае мы будем представлять функцию Грина  $\tilde{G}^{(N)}(p_1, \dots, p_N)$  кружком с входящими в него  $N$  линиями с символами  $p_1, p_2, \dots, p_N$  при условии  $p_1 + \dots + p_N = 0$ , выражающем сохранение импульса:

$$\tilde{G}^{(N)}(p_1, \dots, p_N) = \text{---} \overrightarrow{p_2} \text{---} \text{---} \text{---} \overrightarrow{p_N} \text{---} \text{---} \text{---} \overrightarrow{p_1} \text{---} . \quad (2.21)$$

Такая диаграмма будет интерпретироваться, скажем, как амплитуда рассеяния состояний с импульсами  $p_1, \dots, p_j$  в состояния с импульсами  $p_{j+1}, \dots, p_N$ , если при этом считать линии  $j+1, \dots, N$  выходящими. Снова заметим, что именно видом функции  $\tilde{G}_0^{(2)}$  определяется характер внешних состояний. На тех ограничениях, которые накладываются на  $\tilde{G}$  унитарностью, мы остановимся позже.

### Задачи

А. Исходя из евклидова выражения для  $W_E[J]$ , выведите соответствующее выражение для фейнмановского пропагатора и покажите, что после аналитического продолжения в пространство Минковского он сводится к обычному.

Б. Покажите, что  $\Delta_F(x)$  — пропагатор сигналов с положительной энергией вперед по времени и с отрицательной — назад по времени.

В. Найдите действительную и мнимую части пропагатора  $\Delta_F(x)$ ; выясните их физический смысл. Можете ли вы выразить  $\Delta_F$  через  $\text{Im} \Delta_F$ ?

### § 3. Эффективное действие

С помощью производящего функционала можно сконструировать локальные величины, допускающие привычную интерпретацию. Например,

$$\frac{\delta W_0}{\delta J(x)} = -i \langle \Delta_F(x-1) J_1 \rangle_1 W_0[J] , \quad (3.1)$$

так что

$$\varphi_{\text{кп}}^{(0)}(x) \equiv -i \frac{\delta \ln W_0}{\delta J(x)} = \frac{\delta Z_0}{\delta J(x)} \quad (3.2)$$

удовлетворяет [для доказательства нужно воспользоваться формулой (2.16)] классическому уравнению движения

$$(\square + m^2) \varphi_{\text{кп}}^{(0)}(x) = J(x). \quad (3.3)$$

В самом деле, на основании уравнения (3.3) можно заменить  $J(x)$  выражением, содержащим  $\varphi_{\text{кп}}^{(0)}(x)$ . Формально это сводится к осуществлению функционального преобразования Лежандра; вводя

$$\Gamma_0[\varphi_{\text{кп}}^{(0)}] = Z_0[J] - \langle J \varphi_{\text{кп}}^{(0)} \rangle, \quad (3.4)$$

мы с учетом формулы (3.2) находим, что  $\Gamma_0$  не зависит от  $J$ . В этом случае легко найти явное выражение для  $\Gamma_0$ , выразив  $J$  через  $\varphi_{\text{кп}}^{(0)}$ . Пользуясь формулой (2.16), получаем (интегрируя по частям по ходу дела)

$$\begin{aligned} \Gamma_0[\varphi_{\text{кп}}^{(0)}] &= -\frac{1}{2} \langle [(\square + m^2)\varphi_{\text{кп}}^{(0)}]_1 \Delta_{F12} [(\square + m^2)\varphi_{\text{кп}}^{(0)}]_2 \rangle - \\ &- \langle \varphi_{\text{кп}}^{(0)} (\square + m^2) \varphi_{\text{кп}}^{(0)} \rangle = -\frac{1}{2} \langle \varphi_{\text{кп}}^{(0)} (\square + m^2) \varphi_{\text{кп}}^{(0)} \rangle. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Интегрирование по частям приводит к окончательному выражению

$$\Gamma_0[\varphi_{\text{кп}}^{(0)}] = \frac{1}{2} \int d^4x [\partial_\mu \varphi_{\text{кп}}^{(0)} \partial^\mu \varphi_{\text{кп}}^{(0)} - m^2 \varphi_{\text{кп}}^{(0)2}], \quad (3.6)$$

представляющему собой то свободное действие, с которого мы начинали.

Аналогичную процедуру можно осуществить и в общем случае, когда  $V \neq 0$ . образуем

$$\varphi_{\text{кп}}(x) \equiv -i \frac{\delta \ln W}{\delta J} = \frac{\delta Z[J]}{\delta J} \quad (3.7)$$

и попробуем вычислить эффективное действие

$$\Gamma[\varphi_{\text{кп}}] = Z[J] - \langle J \varphi_{\text{кп}} \rangle, \quad (3.8)$$

$$\text{где теперь } J(x) = - \frac{\delta \Gamma[\varphi_{\text{кп}}]}{\delta \varphi_{\text{кп}}(x)}, \quad (3.9)$$

в чем нетрудно убедиться, продифференцировав (3.8) по  $\varphi_{\text{кп}}$ . (Конечно,  $\Gamma[\varphi_{\text{кп}}]$  зависит только от  $\varphi_{\text{кп}}$ , а  $Z[J]$  — только от  $J$ .) Между прочим, мы видим, что, поскольку  $\Gamma$  — эффективное действие, величина (3.9) входит в правую часть уравнения движения, возникающего из условия экстремальности  $\Gamma$ . В случае  $V = 0$  это явствует из выражения (3.3).

Чтобы вывести уравнение движения для  $\varphi_{\text{кп}}(x)$ , нам следует записать  $W[J]$  в какой-либо приемлемой форме. Напишем

$$W[J] \equiv N \int \mathcal{D}\varphi e^{i \left\langle \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} (m^2 - i\varepsilon) \varphi^2 - V(\varphi) + J(\varphi) \right\rangle} \quad (3.10)$$

$$= N \int \mathcal{D}\varphi e^{-i \langle V(\varphi) \rangle} e^{i \left\langle \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} (m^2 - i\varepsilon) \varphi^2 + J\varphi \right\rangle} \quad (3.11)$$

А теперь — главный трюк: заметим, что

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} e^{i \langle J\varphi \rangle} = \varphi(x) e^{i \langle J\varphi \rangle}, \quad (3.12)$$

а так как  $J$  и  $\varphi$  — независимые переменные, то же самое будет верно и для любой функции от  $\varphi$ . В частности,

$$e^{-i \langle V(\varphi) \rangle} e^{i \langle J\varphi \rangle} = e^{-i \left\langle V \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) \right\rangle} e^{i \langle J\varphi \rangle}. \quad (3.13)$$

Это позволяет вынести из-под знака интеграла множитель, зависящий от  $V$ :

$$W[J] = e^{-i \left\langle V \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) \right\rangle} N \int \mathcal{D}\varphi e^{i \left\langle \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} (m^2 - i\varepsilon) \varphi^2 + J\varphi \right\rangle} = \quad (3.14)$$

$$= e^{-i \left\langle V \left( \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) \right\rangle} W_0[J], \quad (3.15)$$



$$\text{или } e^{iZ[J]} = W[J] = Ne^{-i \langle V(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}) \rangle} e^{-\frac{i}{2} \langle J_1 \Delta F_{12} J_2 \rangle}. \quad (3.16)$$

Это выражение будет отправным при вычислении  $W[J]$  методом теории возмущений. В данный момент выведем из него уравнение для  $\Phi_{\text{кп}}$ .

Из выражения (3.16) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\delta W}{\delta J_x} &= -ie^{-i \langle V(-i \frac{\delta}{\delta J}) \rangle} \langle \Delta_{F_{x1}} J_1 \rangle_1 W_0[J] = \\ &= -ie^{-i \langle V(-i \frac{\delta}{\delta J}) \rangle} \langle \Delta_{F_{x1}} J_1 \rangle_1 e^{i \langle V(-i \frac{\delta}{\delta J}) \rangle} W[J]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Отсюда следует, что

$$(\square_x + m^2) \frac{\delta W}{\delta J_x} = i \mathcal{O}_x W[J], \quad (3.18)$$

$$\text{где } \mathcal{O}_x = e^{-i \langle V(-i \frac{\delta}{\delta J}) \rangle} J_x e^{i \langle V(-i \frac{\delta}{\delta J}) \rangle}. \quad (3.19)$$

Величину  $\mathcal{O}_x$  можно вычислить, применив еще один трюк. Положим

$$\mathcal{O}_x(\lambda) = e^{-i \lambda \langle V(-i \frac{\delta}{\delta J}) \rangle} J_x e^{i \lambda \langle V(-i \frac{\delta}{\delta J}) \rangle}, \quad (3.20)$$

где  $\lambda$  — некий параметр. Ясно, что

$$\frac{d\mathcal{O}_x(\lambda)}{d\lambda} = e^{-i \lambda \langle V(-i \frac{\delta}{\delta J}) \rangle} [-i \langle V'(-i \frac{\delta}{\delta J}) \rangle, J_x] e^{i \lambda \langle V(-i \frac{\delta}{\delta J}) \rangle}. \quad (3.21)$$

$$\text{Но } [V(-i \frac{\delta}{\delta J_y}), J_x] = -i V'(-i \frac{\delta}{\delta J_y}) \delta^{(4)}(x-y), \quad (3.22)$$

где  $V'$  — производная функции  $V$  по ее аргументу. Интегрируя по  $y$ ,

находим

$$\frac{d\mathcal{O}_x(\lambda)}{d\lambda} = -V'(-i \frac{\delta}{\delta J_x}). \quad (3.23)$$

Это уравнение интегрируется теперь по  $\lambda$ , так что в результате

$$\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_x(\lambda = 1) = J(x) - V'(-i \frac{\delta}{\delta J_x}). \quad (3.24)$$

Следовательно,

$$(\square_x + m^2) \frac{\delta W}{\delta J} = i (J(x) - V'(-i \frac{\delta}{\delta J_x})) W[J], \quad (3.25)$$

$$\text{или } (\square_x + m^2) \varphi_{\text{кп}}(x) = J(x) - \frac{1}{W[J]} V'(-i \frac{\delta}{\delta J_x}) W[J]. \quad (3.26)$$

Очевидно, что последний член похож на силу. Например, возьмем

$V = \frac{\lambda}{4!} \varphi^4$ , где  $\lambda$  — безразмерная величина. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{W[J]} V'(-i \frac{\delta}{\delta J_x}) W[J] &= \frac{\lambda}{3!} (-i)^3 \frac{1}{W} \frac{\delta^3}{\delta J_x^3} W[J] = \\ &= \frac{\lambda}{3!} \left[ \varphi_{\text{кп}}^3(x) - \frac{\delta^2 \varphi_{\text{кп}}}{\delta J_x^2} - 3i \varphi_{\text{кп}} \frac{\delta \varphi_{\text{кп}}}{\delta J_x} \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

и окончательно

$$(\square_x + m^2) \varphi_{\text{кп}}(x) = J(x) - \frac{\lambda}{3!} \varphi_{\text{кп}}^3(x) + \frac{\lambda}{3!} \frac{\delta^2 \varphi_{\text{кп}}(x)}{\delta J^2(x)} + \frac{i\lambda}{4} \frac{\delta \varphi_{\text{кп}}^2(x)}{\delta J(x)}. \quad (3.29)$$

Два первых члена в правой части соответствуют классическому уравнению движения, но к ним добавляются два последних члена, которые представляют собой поправки, даваемые квантовой теорией (см. задачу).

В случае  $V \neq 0$  явный вид эффективного действия, конечно, неизвестен. Его можно представить в виде функционального разложения по

$\Phi_{\text{кп}}$  в виде

$$\Gamma[\Phi_{\text{кп}}] = \int d^4x \left[ -V^e(\Phi_{\text{кп}}) + \frac{1}{2} F(\Phi_{\text{кп}}) \partial_\mu \Phi_{\text{кп}} \partial^\mu \Phi_{\text{кп}} + \text{Производные высших порядков} \right], \quad (3.30)$$

причем, включив производные функции  $\Phi_{\text{кп}}$  произвольно высоких порядков, мы учли теперь нелокальные эффекты. Произвольные функции  $V^e(\Phi_{\text{кп}})$ ,  $F(\Phi_{\text{кп}})$  и т.д. подлежат определению. Функция  $V^e$  — это, очевидно, эффективный потенциал. Выражая  $J$  через  $\Phi_{\text{кп}}$  по формуле (3.29) и интегрируя выражение (3.9), находим

$$V^e(\Phi_{\text{кп}}) = \frac{\lambda}{4!} \Phi_{\text{кп}}^4 + \frac{m^2}{2} \Phi_{\text{кп}}^2 + \mathcal{O}(\hbar), \quad (3.31)$$

$$F(\Phi_{\text{кп}}) = 1 + \text{Поправки}. \quad (3.32)$$

Можно также действовать иначе — нелокальным образом разложить эффективное действие по  $\Phi_{\text{кп}}$ :

$$\Gamma(\Phi_{\text{кп}}) = \sum_n \frac{1}{n!} \langle \Gamma^{(N)}(1, \dots, N) \Phi_{\text{кп}}(1) \dots \Phi_{\text{кп}}(N) \rangle_{1, \dots, N}. \quad (3.33)$$

Коэффициенты  $\Gamma^{(N)}(x_1, \dots, x_N)$  называются собственными вершинными частями. В силу трансляционной инвариантности они зависят от разностей  $x_i - x_j$ , так что фурье-образы вершинных частей определяются формулой

$$\begin{aligned} \Gamma^{(N)}(p_1, \dots, p_N) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + \dots + p_N) = \\ = \int d^4x_1 \dots d^4x_N e^{-i(p_1 x_1 + \dots + p_N x_N)} \Gamma^{(N)}(x_1, \dots, x_N), \end{aligned} \quad (3.34)$$

где  $\Gamma^{(N)}$  определены только при условии, что сумма их аргументов равна нулю.

### Задачи

А. Включив там, где это требуется, постоянную  $\hbar$ , покажите, что неклассические члены в уравнении для  $\Phi_{\text{кп}}$  действительно исчезают при  $\hbar \rightarrow 0$ .

Б. Допустим, что в действии для скалярного поля  $V = 1/2\delta m^2\varphi^2$ . Выведите уравнение, которому подчиняется  $\varphi_{\text{кл}}$ .

#### § 4. Вычисление интеграла по траекториям методом перевала

Интегралы вида

$$I \equiv \int dx e^{-a(x)}, \quad (4.1)$$

где  $a(x)$  — функция координаты  $x$ , можно приближенно вычислить, разложив  $a(x)$  в ряд вблизи точки  $x_0$ , в которой функция  $a(x)$  стационарна:

$$a(x) \approx a(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 a''(x_0) + \dots \quad (4.2)$$

$$\text{Тогда } I \approx e^{-a(x_0)} \int dx e^{-1/2(x - x_0)^2 a''(x_0)} \quad (4.3)$$

и интеграл легко вычисляется, если  $a''(x_0) > 0$  и можно пренебречь высшими производными (этот интеграл гауссов). Такое приближение допустимо в том случае, если подинтегральное выражение максимально, когда величина  $a(x)$  минимальна, и точки вдали от минимума не дают существенного вклада, как это показано на рис. 2.

В данном параграфе мы применим подобный метод вычислений к производящему функционалу в евклидовом пространстве.

Начнем с определения производящего функционала в евклидовом пространстве

$$W_E[J] = N_E \int \mathcal{D}\varphi e^{-S_F[\varphi, J]}, \quad (4.4)$$

$$\text{где } S_F[\varphi, J] = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \bar{\partial}_\mu \varphi \bar{\partial}_\mu \varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + V(\varphi) - J\varphi \right]. \quad (4.5)$$

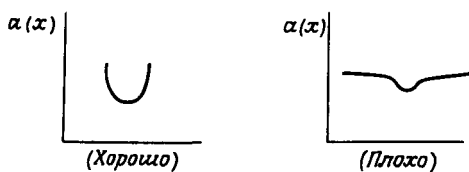


Рис. 2.

Разложим затем действие в ряд вблизи полевой конфигурации  $\varphi_0$ :

$$S_E[\varphi, J] = S_E[\varphi_0, J] + \left\langle \frac{\delta S_E}{\delta \varphi} (\varphi - \varphi_0) \right\rangle + \\ + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\delta^2 S_E}{\delta \varphi_1 \delta \varphi_2} (\varphi - \varphi_0)_1 (\varphi - \varphi_0)_2 \right\rangle_{1,2} + \dots, \quad (4.6)$$

где функциональные производные вычислены в точке  $\varphi_0$ . Примем, что действие  $S_E$  стационарно в точке  $\varphi_0$ , т.е. что  $\varphi_0$  подчиняется классическим уравнениям движения с источником

$$\frac{\delta S_E}{\delta \varphi} \Big|_0 = -\partial_\mu \bar{\partial}_\mu \varphi_0 + m^2 \varphi_0 + V'(\varphi_0) - J = 0. \quad (4.7)$$

После интегрирования по частям находим, что

$$S_E[\varphi_0, J] = \frac{1}{2} \int d^4 \bar{x} (2 - \varphi_0 \frac{d}{d\varphi_0}) (-J \varphi_0 + V(\varphi_0)), \quad (4.8)$$

тогда как

$$\frac{\delta^2 S_E}{\delta \varphi_1 \delta \varphi_2} = [-\bar{\partial}_\mu \bar{\partial}_\mu + m^2 + V''(\varphi)]_1 \delta(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \quad (4.9)$$

является оператором. В соответствии с методом перевала производящий функционал принимает вид

$$W_E[J] \approx N_E e^{-S_E[\varphi_0, J]} \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2} \left\langle \varphi_1 \frac{\delta^2 S_E}{\delta \varphi_1 \delta \varphi_2} \varphi_2 \right\rangle_{1,2}}. \quad (4.10)$$

Гауссов интеграл может быть взят (приложение А), что приводит к формальному результату

$$W_E[J] \approx N_E e^{-S_E[\varphi_0, J]} \{ \det [ [-\bar{\partial}_\mu \bar{\partial}_\mu + m^2 + V''(\varphi_0)] \delta_{12} ] \}^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.11)$$

Очевидно, что не очень-то понятно, как пользоваться таким выражением. С учетом тождества

$$\det M = e^{\text{Sp} \ln M} \quad (4.12)$$

его можно переписать в несколько более осмысленном виде

$$W_F[J] = N_E e^{-S_E[\varphi_0, J] - \frac{1}{2} \text{Sp} \ln \{ [-\bar{\partial}_\mu \bar{\partial}_\mu + m^2 + V''(\varphi_0)] \delta_{12} \}}, \quad (4.13)$$

так что становится ясным, что мы вычисляем поправки к  $Z[J]$ . Физический смысл такого приближения можно понять, если внимательно восстановить все множители  $\hbar$ . После этого можно убедиться, что приближение соответствует асимптотическому ряду по  $\hbar$  (см. задачу). Первый член  $S_E[\varphi_0, J]$  дает классический вклад в функцию Грина (вспомните гипотезу Дирака!). Следующий член порядка  $O(\hbar)$  представляет первую квантовую поправку к функции Грина. (Детерминант оператора следует понимать как произведение его собственных значений.) Начнем с вычисления классического вклада в  $W[J]$ . При этом следует помнить, что так как функция  $\varphi_0$  есть решение уравнения (4.7), она является функционалом от  $J$ . Поэтому процедура вычислений очень проста: а) вычислим функциональную зависимость  $\varphi_0$  от  $J$ ; б) подставим найденное выражение в (4.8); в) сравним получившееся выражение с разложением (2.15), извлечем функции Грина  $G_c^{(N)}(1, \dots, N)$ . К сожалению, при выполнении шага "а" мы сталкиваемся с серьезными теоретическими трудностями. Уравнение, которому удовлетворяет  $\varphi_0$ , представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение (в случае  $V' \neq 0$ ), и оно еще никем не решено в замкнутой форме. Лучшее, что можно сделать, это попытаться решить его в рамках теории возмущений. Конкретно, возьмем потенциал  $\varphi^4$  и будем раскладывать вблизи  $\lambda = 0$ .

Запишем разложение

$$\varphi_0 = \varphi^{(0)} + \lambda \varphi^{(1)} + \lambda^2 \varphi^{(2)} + \dots, \quad (4.14)$$

так что

$$S_E = -\frac{1}{2} \int d^4 \bar{x} [J(\varphi^{(0)} + \lambda \varphi^{(1)} + \dots) + \frac{\lambda}{12} (\varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \dots)^4] = \quad (4.15)$$

$$= -\frac{1}{2} \int d^4 \bar{x} J \varphi^{(0)} - \frac{\lambda}{2} \int d^4 \bar{x} [J \varphi^{(1)} + \frac{1}{12} \varphi^{(0)4}] + O(\lambda^2).$$

$$(4.16)$$

Если теперь (в очевидных обозначениях) определить евклидову функцию Грина

$$(\bar{\partial}_\mu \bar{\partial}_\mu - m^2) G_{xy} = -\delta_{xy}, \quad (4.17)$$

то тогда  $\varphi^{(0)}(x) = \langle G_{xa} J_a \rangle_a$ ,

$$\varphi^{(1)}(x) = -\frac{1}{6} \langle G_{xy} G_{ya} G_{yb} G_{yc} J_a J_b J_c \rangle_{abc} \text{ и т.д.} \quad (4.18)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} S_E[J] = & -\frac{1}{2} \langle J_a G_{ab} J_b \rangle_{ab} + \\ & + \frac{\lambda}{4!} \langle G_{xa} G_{xb} G_{xc} G_{xd} J_a J_b J_c J_d \rangle_{abcd} + \dots \\ & - \frac{\lambda^2}{3 \cdot 4!} \langle G_{xa} G_{xb} G_{xc} G_{xy} G_{yd} G_{ye} G_{yf} J_a J_b J_c J_d J_e J_f \rangle_{abcdefxy} + O(\lambda^3). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Соответственно этому (связные) евклидовы функции Грина определяются как

$$G_E^{(N)}(x_1, \dots, x_N) = -\frac{\delta^N W_E}{\delta J_1 \dots \delta J_N}, \quad \text{где } W_E[J] = N_E e^{-Z_E[J]}. \quad (4.20), (4.21)$$

В рассматриваемом классическом приближении связанные функции Грина оказывается равными

$$G_E^{(2)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = G(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\bar{p} \cdot (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}}{p^2 + m^2}, \quad (4.22)$$

$$G_E^{(4)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4) = -\lambda \int d^4 y G(x_1, y) G(\bar{x}_2, \bar{y}) G(\bar{x}_3, \bar{y}) G(\bar{x}_4, \bar{y}), \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} G_E^{(6)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6) = & \lambda^2 \int d^4 \bar{x} \int d^4 \bar{y} G(\bar{x}, \bar{y}) \times \\ & \times P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6), \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \text{где } P(\bar{x}, \bar{y}, \{\bar{x}_i\}) = & \sum_{(ijk)} G(\bar{x}, \bar{x}_i) G(\bar{x}, \bar{x}_j) G(\bar{x}, \bar{x}_k) G(\bar{y}, \bar{x}_e) \times \\ & \times G(\bar{y}, \bar{x}_m) G(\bar{y}, \bar{x}_n) \end{aligned}$$

и сумма берется по всем нижеследующим тройкам чисел  $(i j k) = (123), (124), (125), (126), (134), (135), (136), (145), (146), (156)$ , причем предполагается, что  $(lmn)$  принимает дополнительные значения [например,  $(lmn) = (456)$ , если  $(ijk) = (123)$ ]. Заметим, что индексы  $(ijk)$  пробегает только половину возможных значений. Это связано с тем, что выражение для  $P$  симметрично относительно замены  $x \rightarrow y$ .

Указанные функции являются единственными ненулевыми функциями Грина в данном классическом приближении в порядке  $\lambda^2$ .

Как легко видеть, функции Грина в импульсном пространстве, определяемые формулой

$$G_E^{(N)}(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_N)(2\pi)^{4N} \delta(\bar{p}_1 + \dots + \bar{p}_N) = \int d^4\bar{x}_1 \dots d^4\bar{x}_N e^{i\bar{p}_1\bar{x}_1 + \dots + i\bar{p}_N\bar{x}_N} G_E^{(N)}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N), \quad (4.26)$$

таковы:

$$\tilde{G}_E^{(2)}(\bar{p}_1, \bar{p}_2 = -\bar{p}_1) = \frac{1}{\bar{p}_1^2 + m^2} + O(\hbar), \quad (4.27)$$

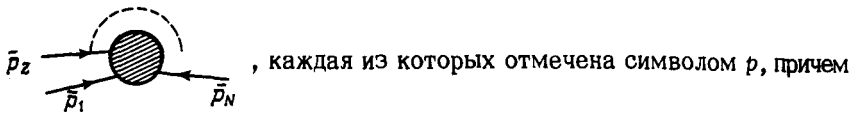
$$G_E^{(4)}(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \bar{p}_4) = \left( \frac{1}{\bar{p}_1^2 + m^2} \frac{1}{\bar{p}_2^2 + m^2} \frac{1}{\bar{p}_3^2 + m^2} \frac{1}{\bar{p}_4^2 + m^2} \right) + O(\hbar), \quad (4.28)$$

$$\tilde{G}_E^{(6)}(p_1, \dots, p_6) = \left[ \prod_{i=1}^6 \frac{1}{\bar{p}_i^2 + m^2} \right] \sum_{(ijk)} \frac{\lambda^2}{(\bar{p}_i + \bar{p}_j + \bar{p}_k)^2 + m^2} + O(\lambda^2), \quad (4.29)$$

где опять сумма берется по тем же тройкам чисел, что и в (4.25). В приведенных выражениях функции  $\tilde{G}$  должны вычисляться только при условии, что сумма их аргументов равна нулю.

Вычисляя  $\varphi_0$  методом теории возмущений, мы видим, что  $\varphi(k)$  всегда зависит от  $J^{1+2k}$ . Следовательно, порядок  $\lambda^k$  вносит вклад только в функцию  $G^{2(k+1)}$ . Это артефакт данного приближения, в котором пренебрегается вкладами порядка  $\hbar$ . Следуя Фейнману, разработаем графическое представление полученных функций Грина. Будем изображать  $G_E^{(N)}(p_1, \dots, p_N)$  кружком с  $N$  внешними линиями





все стрелки входят внутрь. Этот кружок можно представить в виде диаграмм, если воспользоваться следующими правилами:

— означает пропагатор  $\frac{1}{p^2 + m^2}$ ,

X означает вершину  $-\lambda$ .

При этом подразумевается, что сумма всех  $\vec{p}$ , текущих через вершину, сохраняется. Сама вершина X не имеет стрелок на линиях, и это указывает на то, что пропагаторные множители для линий не включены в определение вершины. Сравнение с формулами (4.27) – (4.29) приводит к диаграммам

$$\text{шaded circle with } p \text{ in} = \text{propagator } p \text{ out} + O(\hbar),$$

$$\text{circle with } p_1, p_2, p_3, p_4 \text{ in} = \text{X vertex with } p_1, p_2, p_3, p_4 \text{ in} + O(\hbar),$$

$$\begin{aligned} & \text{circle with } 1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{ in} = \\ & \begin{aligned} & \text{propagator } 1 \rightarrow 2 \text{ with } 3, 4 \text{ in} + \text{propagator } 1 \rightarrow 3 \text{ with } 2, 4 \text{ in} + \text{propagator } 1 \rightarrow 4 \text{ with } 2, 3 \text{ in} \\ & + \text{propagator } 1 \rightarrow 5 \text{ with } 2, 3, 4, 6 \text{ in} + \text{propagator } 1 \rightarrow 6 \text{ with } 2, 3, 4, 5 \text{ in} \\ & + \text{propagator } 1 \rightarrow 3 \text{ with } 2, 4, 5, 6 \text{ in} + \text{propagator } 1 \rightarrow 5 \text{ with } 2, 3, 4, 6 \text{ in} \\ & + \text{propagator } 1 \rightarrow 6 \text{ with } 2, 3, 4, 5 \text{ in} \end{aligned} + O(\hbar). \end{aligned}$$

Таким образом, фейнмановские правила в данном порядке по  $\hbar$  заключаются в следующем: пользуясь элементами — и X как основными строительными блоками, изобразить все возможные сочетания линий так, чтобы не возникало замкнутых контуров (называемых иначе пет-

лями). Подобные диаграммы называются древесными. Не составляет труда убедиться, что в рассматриваемом приближении функции Грина представляются древесными диаграммами.

Рассмотрим диаграмму с  $E$  внешними линиями,  $I$  внутренними линиями и  $V_n$  вершинами, каждая из которых содержит  $n$  линий (в нашем случае  $n = 4$ ). Каждая внутренняя линия соединяется с двумя линиями от вершин. Следовательно, число внешних линий в точности равно числу линий в вершинах минус удвоенное число внутренних линий:

$$E = nV_n - 2I.$$

В приближении  $O(\hbar^0)$  мы имеем  $E = 2k + 2$ ,  $n = 4$ ,  $V_4 = k$ , откуда  $I = V_4 - 1$  (только в порядке  $O(\hbar^0)$ ), так что в фейнмановской диаграмме не может быть никаких замкнутых петель и, следовательно, эти диаграммы древесные. Правило изображения произвольной (древесной) диаграммы заключается в том, чтобы нарисовать все топологически неэквивалентные диаграммы с установленной нумерацией внешних линий. Например, в  $\tilde{G}_3^{(6)}$ , когда одни и те же линии выходят из вершины, такая диаграмма учитывается только один раз, поскольку перестановка линий будет давать топологически эквивалентные диаграммы

$$\left[ \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right\rangle \leftarrow \leftarrow \sim \left[ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right\rangle \leftarrow \leftarrow \text{ и т. д.} \right].$$

С помощью этих правил нетрудно записать выражение для  $\tilde{G}^{(8)}$  ...: сначала мы изображаем все возможные неэквивалентные древесные упорядочения с пронумерованными внешними линиями, а затем, пользуясь правилами соответствия, получаем аналитическое выражение. Подобное диаграммное представление оказалось очень удобным при вычислении функций Грина методом теории возмущений.

Интересно выразить полученные результаты через классическое поле  $\varphi_{\text{кл}}(x)$  и посмотреть на вид получающегося эффективного действия. Мы определяем классическое поле в евклидовом пространстве как

$$\varphi_{\text{кл}}(\bar{x}) = - \frac{\delta Z_E}{\delta J(x)} \approx - \frac{\delta S_E}{\delta J(x)} + O(\hbar). \quad (4.30)$$

Используя формулу (4.19), можно найти  $\varphi_{\text{кл}}(\bar{x})$  как функционал от  $J$  последовательно в каждом порядке по  $\lambda$ . Затем мы обращаем это уравнение по теории возмущений и находим  $J(\bar{x})$  как функционал от  $\varphi_{\text{кл}}$ .

В результате

$$J(\bar{x}) = (\bar{\partial}^2 - m^2) \varphi_{\text{кп}}(\bar{x}) - \frac{\lambda}{3!} \varphi_{\text{кп}}^3(\bar{x}). \quad (4.31)$$

Примечательно, что в этом уравнении нет членов более высокого порядка по  $\lambda$ . Сравнивая с выражением (4.7), заключаем, что

$$\varphi_{\text{кп}}(\bar{x}) = \varphi_0(\bar{x}) + O(\hbar). \quad (4.32)$$

Интегрирование уравнения (3.9) немедленно приводит к следующему виду эффективного действия в данном порядке:

$$\Gamma_E[\varphi_{\text{кп}}] = - \int d^4\bar{x} \left[ \frac{1}{2} \varphi_{\text{кп}}(\bar{\partial}^2 - m^2) \varphi_{\text{кп}} - \frac{\lambda}{4!} \varphi_{\text{кп}}^4(\bar{x}) \right]. \quad (4.33)$$

Таким образом,  $\Gamma_E$  есть классическое действие. Следовательно, можно вывести выражения для собственных вершинных частей. В данном приближении  $\Gamma^{(2)}$ , очевидно, равняется обратному пропагатору, взятому со знаком минус, а  $\Gamma^{(n)}$  с  $n > 4$  обращаются в нуль. Диаграммы более высокого порядка не возникают. Это объясняется тем, что  $\Gamma^{(N)}$  порождают только такие фейнмановские графики, которые не могут стать несвязными при разрезании одной из их внутренних линий. Подобные диаграммы называются одночастично-неприводимыми. Мы видели, что все древесные диаграммы одночастично-приводимы, кроме диаграммы низшего порядка.

### Задачи

А. Покажите, что вычисление интеграла по траекториям методом перевала соответствует асимптотическому разложению по  $\hbar$ .

Б. Решите уравнение

$$(\partial^2 - m^2 - \frac{\lambda}{3!} \varphi^2) \varphi = -J$$

последовательно в каждом порядке по  $\lambda$  вблизи  $\lambda = 0$ . Положив  $\varphi = \varphi^{(0)} + \lambda \varphi^{(1)} + \lambda^2 \varphi^{(2)} + \dots$ , выведите явные выражения для  $\varphi^{(2)}$  и  $\varphi^{(3)}$ .

В. Для теории  $\lambda \varphi^4$  найдите эффективное классическое действие в порядке  $\lambda^3$  и выведите как в  $\bar{x}$ -, так и в  $\bar{p}$ -пространстве выражения для классических евклидовых функций Грина в порядке  $\lambda^3$ .

## § 5. Первые квантовые поправки. Вычисление детерминантов с помощью $\zeta$ -функции

Поправка порядка  $O(\hbar)$  к эффективному действию находится путем вычисления детерминанта в выражении (4.11). Этот детерминант следует понимать как произведение собственных значений оператора. Один из возможных способов вычисления — ограничить пространство, например, ящиком, что приведет к дискретным собственным значениям. Вычисляется произведение этих значений, а затем размер ящика устремляют к бесконечности. Ниже для вычисления детерминанта операторов мы будем пользоваться мощным формальным методом.

Рассмотрим оператор  $A$  с положительными и действительными дискретными собственными значениями  $a_1, \dots, a_n$ ; обозначим через  $f_n(x)$  собственные функции этого оператора:

$$A f_n(x) = a_n f_n(x). \quad (5.1)$$

Образуем теперь выражение

$$\zeta_A(s) = \sum_n \frac{1}{a_n^s}, \quad (5.2)$$

называемое  $\zeta$ -функцией, связанной с оператором  $A$ . (В случае когда  $A$  — гамильтониан одномерного гармонического осциллятора, она совпадает с римановской  $\zeta$ -функцией, если не считать энергии основного состояния.) Затем сумма распространяется на все собственные значения и  $A$  становится действительной переменной. Заметим, что

$$\left. \frac{d\zeta_A(s)}{ds} \right|_{s=0} = - \sum_n \ln a_n e^{-s \ln a_n} \Big|_{s=0} = - \ln \left( \prod_n a_n \right), \quad (5.3)$$

$$\text{откуда } \det A \equiv \prod_n a_n = e^{-\zeta'_A(0)}. \quad (5.4)$$

Преимущество такого представления для  $\det A$  заключается в том, что для многих имеющих физический интерес операторов функция  $\zeta_A$  неингулярна при  $s = 0$ . Действительно, введем "тепловую функцию"

$$G(x, y, \tau) \equiv \sum_n e^{-a_n \tau} f_n(x) f_n^*(y), \quad (5.5)$$

которая, как можно убедиться прямой подстановкой, удовлетворяет дифференциальному уравнению (уравнению теплопроводности)

$$A_x G(x, y, \tau) = - \frac{\partial}{\partial \tau} G(x, y, \tau). \quad (5.6)$$

Если теперь воспользоваться ортогональностью собственных функций и хорошо известным представлением  $\Gamma$ -функции, то можно без труда выразить  $\zeta$ -функцию через введенную "тепловую функцию":

$$\zeta_A(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \int dx G(x, x, \tau). \quad (5.7)$$

Это и есть нужное нам аналитическое представление функции  $\zeta_A(s)$ . Заметим, что

$$G(x, y, \tau = 0) = \delta(x - y) \quad (5.8)$$

в силу ортонормированности собственных функций. Таким образом, один из возможных способов вычисления  $\det A$  состоит в следующем: 1) найти решение уравнения (5.6), подчиненное начальному условию (5.8); 2) подставить найденное решение в (5.7), вычислить  $\zeta_A(s)$  и, пользуясь формулой (5.4), найти  $\det A$ .

Рассмотренную процедуру можно обобщить на случай нашей задачи. Теперь оператор имеет вид  $[-\bar{\partial}^2 + m^2 + (\lambda/2)\phi_0^2(\bar{x})]$ , где  $\phi_0(\bar{x})$  — решение классических уравнений с источником  $J$ . Легко убедиться, что решение уравнения

$$-\bar{\partial}_x^2 G_0(\bar{x}, \bar{y}, \tau) = - \frac{\partial G_0}{\partial \tau} \quad (5.9)$$

с граничным условием (5.8) имеет (только в четырех измерениях!) вид

$$G_0(\bar{x}, \bar{y}, \tau) = \frac{1}{16\pi^2 \tau^2} e^{-\frac{1}{4\tau}(\bar{x} - \bar{y})^2}. \quad (5.10)$$

Это еще не решает нашей задачи. В частности, получающаяся вычислением по формуле (5.7) функция  $\zeta_{-\bar{\partial}^2}(s)$  не существует. Мы хотим найти функцию  $G(\bar{x}, \bar{y}, \tau)$ , удовлетворяющую условию (5.8) и уравнению

$$[-\bar{\partial}_x^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2(\bar{x})] G(\bar{x}, \bar{y}, \tau) = - \frac{\partial G(x, y, \tau)}{\partial \tau}. \quad (5.11)$$

Ясно, что при произвольной функции  $\varphi_0(\bar{x})$  это уравнение очень трудно решить. Тем не менее посмотрим, что здесь можно сделать. Написав эффективное действие в виде

$$\Gamma_E[\varphi_{\text{кп}}] = \Gamma_E^{(0)}[\varphi_{\text{кп}}] + \hbar \Gamma_E^{(1)}[\varphi_{\text{кп}}] + \dots, \quad (5.12)$$

нетрудно заметить, что

$$\Gamma_E^{(1)}[\varphi_{\text{кп}}] = \frac{1}{2} \zeta \left[ -\bar{\partial}_x^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi_{\text{кп}}^2(\bar{x}) \right]^{(0)}, \quad (5.13)$$

если заменить  $\varphi_0$  на  $\varphi_{\text{кп}}$ , что не вносит никакой ошибки с точностью  $O(\hbar)$ , и воспользоваться формулами (5.4) и (4.11).

С другой стороны, можно положить

$$\Gamma_E[\varphi_{\text{кп}}] = \int d^4\bar{x} [V(\varphi_{\text{кп}}(\bar{x})) + F(\varphi_{\text{кп}}) \partial_\mu \varphi_{\text{кп}}(\bar{x}) \partial_\mu \varphi_{\text{кп}}(\bar{x}) + \dots]. \quad (5.14)$$

Следовательно, если мы хотим вычислить вклад порядка  $O(\hbar)$  в  $V(\varphi_{\text{кп}})$ , то достаточно рассмотреть постоянную полевую конфигурацию. Положим, например,

$$\varphi_{\text{кп}}(\bar{x}) = v, \quad (5.15)$$

где  $v$  — константа, не зависящая от  $x$ . Тогда

$$\Gamma_E[\varphi_{\text{кп}}] = \int d^4\bar{x} V(v) \quad (5.16)$$

и действие пропорционально бесконечному объему  $\int d^4\bar{x}$ , так как евклидово пространство  $R_4$  неограниченно. Но если допустить, что мы находимся на поверхности  $S_4$  сферы в пяти измерениях, то мы получим конечный элемент объема (поверхность сферы). Подобный прием позволяет избежать указанной инфракрасной расходимости. Позднее можно устремить радиус сферы к бесконечности.

Из предыдущего следует, что вклад порядка  $O(\hbar)$  в потенциал дается выражением

$$V(v) \int d^4x = -\frac{1}{2} \zeta \left[ -\bar{\partial}^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} v^2 \right]^{(0)} \quad (5.17)$$

Уравнение (5.11) при постоянном  $v$  можно очень легко проинтегрировать. Имеем

$$G(\bar{x}, \bar{y}, \tau) = \frac{\mu^2}{16\pi^2 \tau^2} e^{\mu^2(\bar{x} - \bar{y})^2/4\tau} e^{-(m^2 + \frac{\lambda}{2} v^2) \tau/\mu^2}, \quad (5.18)$$

где для того, чтобы показатель степени был безразмерным, величина  $\tau$  поделена на произвольную величину  $\mu^2$  с размерностью массы в квадрате. Затем, пользуясь формулой (5.7), получаем

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \int d^4\bar{x} \frac{\mu^4}{16\pi^2 \tau^2} e^{-\left(m^2 + \frac{\lambda}{2} v^2\right) \tau / \mu^2} = (5.19)$$

$$= \frac{\mu^4}{16\pi^2} \left( \frac{m^2 + \frac{\lambda}{2} v^2}{\mu^2} \right)^{2-s} \frac{\Gamma(s-2)}{\Gamma(s)} \int d^4\bar{x}, \quad (5.20)$$

изменив попутно масштаб величины  $\tau$  (строго говоря, интегрирование по  $\tau$  возможно только при  $s - 2 > 0$ , но путем аналитического продолжения мы определяем  $\zeta(s)$  всюду). Обратим внимание на появление объемного множителя  $\int d^4\bar{x}$ , который сокращается с соответствующим множителем в формуле (5.17) Сравнение формул приводит к результату

$$V(v) = - \frac{\mu^4}{32\pi^2} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{(s-2)(s-1)} \left( \frac{m^2 + \frac{\lambda}{2} v^2}{\mu^2} \right)^{2-s} \right\} \Big|_{s=0} = (5.21)$$

$$= \frac{1}{64\pi^2} \left[ m^2 + \frac{\lambda}{2} v^2 \right]^2 \left( -\frac{3}{2} + \ln \frac{m^2 + \frac{\lambda}{2} v^2}{\mu^2} \right). \quad (5.22)$$

Выяснив функциональный вид  $V$ , мы можем утверждать, что эффективный потенциал в теории дается выражением

$$V[\Phi_{\text{кп}}] = \frac{1}{2} m^2 \Phi_{\text{кп}}^2(\bar{x}) + \frac{\lambda}{4!} \Phi_{\text{кп}}^4(\bar{x}) + \frac{\hbar}{64\pi^2} \left( m^2 + \frac{\lambda}{2} \Phi_{\text{кп}}^2 \right)^2 \left[ -\frac{3}{2} + \ln \frac{m^2 + \frac{\lambda}{2} \Phi_{\text{кп}}^2}{\mu^2} \right] + O(\hbar^2). \quad (5.23)$$

Полученный результат выглядит довольно странно, так как кажется зависящим от введенного совершенно произвольно неизвестного масштаба  $\mu^2$ . Означает ли это, что полученный потенциал произволен? Заметим, что  $V$  зависит от параметров  $m^2$  и  $\lambda$ . Они по сущест-

ву еще не были определены, если не считать того, что они входили как начальные параметры в классический лагранжиан. Для простоты возьмем сначала  $m^2 = 0$ . Тогда легко убедиться, что автоматически

$$\frac{d^2 v}{d\varphi^2} = 0 \quad \text{при } \varphi = 0. \quad (5.24)$$

Определим квадрат массы как коэффициент перед  $\varphi^2$  в лагранжиане  $\mathcal{L}$ , вычисленный при  $\varphi = 0$ ; оказывается, что если его классическое значение равно нулю, то это же верно и здесь с точностью  $O(\hbar)$ . А как обстоит дело с  $\lambda$ ? Определим этот параметр как коэффициент, равный четвертой производной  $V$ , вычисленной в какой-то постоянной точке  $\varphi = M$ :

$$\lambda \equiv \frac{d^4 V}{d\varphi^4} \quad \text{при } \varphi = M. \quad (5.25)$$

Отметим, что здесь нельзя, как в предыдущем случае, положить  $\varphi = 0$  из-за расходимости, содержащейся в логарифме (инфракрасная расходимость). Это типично для теорий, в которых классическое значение  $m^2 = 0$ .

Из условия (5.25) вытекает, что

$$\ln \frac{\lambda M^2}{2\mu^2} = -\frac{8}{3}, \quad (5.26)$$

в чем можно убедиться, продифференцировав (5.23), положив  $m^2 = 0$  и используя (5.25). Следовательно, можно исключить комбинацию  $2\mu^2/\lambda$ , заменив ее величиной  $M^2$ , и записать результат в виде

$$V(\varphi_{\text{кп}}) = \frac{\lambda}{4!} \varphi_{\text{кп}}^4 + \frac{\lambda^2 \varphi_{\text{кп}}^4}{256\pi^2} \left[ \ln \frac{\varphi_{\text{кп}}^2}{M^2} - \frac{25}{6} \right] \quad (5.27)$$

в согласии с тем, что получили С. Коулмен и Ю. Вайнберг [1]. Это небольшое упражнение показывает, что когда имеешь дело с квантовыми поправками, нужно внимательно определять входные параметры лагранжиана. Выражение (5.27) все еще представляется зависящим от одного произвольного масштаба  $M^2$ , но на самом деле это не так, поскольку, меняя при заданном условии нормировки масштаб от  $M^2$  до  $M'^2$ , мы должны одновременно заменить  $\lambda$  на  $\lambda'$ , где



$$\lambda' = \lambda + \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \ln \frac{M'}{M} \quad (5.28)$$

[с учетом (5.25)]. Мы видим, что потенциал

$$V(\varphi_{\text{кп}}) = \frac{\lambda'}{4!} \varphi_{\text{кп}}^4 + \frac{\lambda'^2 \varphi_{\text{кп}}^4}{256\pi^2} \left[ \ln \frac{\varphi_{\text{кп}}^2}{M'^2} - \frac{25}{6} \right] + O(\lambda^3) \quad (5.29)$$

оказывается форм-инвариантным по отношению к такой репараметризации:

$$V(\lambda', M') = V(\lambda, M). \quad (5.30)$$

Это свидетельствует о том, что меняется не физика, а только наш способ интерпретации констант.

### Задачи

**А.** Допустим, что классический потенциал имеет вид  $V_{\text{кп}} = 1/6f\varphi^3$ , где  $f$  — константа с размерностью массы. Методом перевала найдите первую квантовую поправку к этому потенциалу. Выясните физический смысл полученного потенциала.

**Б.** Решите ту же задачу при  $V_{\text{кп}} = 1/6f\varphi^3 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4$ . Найдите физический смысл.

**\*\*В.** Найдите решение уравнения теплопроводности  $(\partial^2 - m^2)G(x, y, \tau) = -\partial G/\partial \tau$ ,  $G(\bar{x}, \bar{y}, 0) = \delta(\bar{x} - \bar{y})$  в  $d$  измерениях. На основании полученного результата вычислите эффективный потенциал в теории, определяемой действием

$$\int d^d \bar{x} \left[ \frac{1}{2} \bar{\partial}_\mu \varphi \partial_\mu \varphi + m^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{3!} \varphi^3 \right]$$

в шести измерениях. В частности, найдите то изменение масштаба  $\lambda$ , которое необходимо, чтобы обеспечить инвариантность результата по отношению к масштабным преобразованиям. Интерпретируйте знак добавки к  $\lambda$  и нарисуйте график изменения  $\lambda$  с изменением масштаба.

### § 6. Изменение масштаба детерминантов. Константа связи, зависящая от масштаба

Метод вычисления детерминанта операторов с помощью  $\zeta$ -функции позволяет особенно просто вывести масштабные свойства этих детерминантов. При изменении масштаба мы имеем

$$A \rightarrow A' = e^{ad} A, \quad (6.1)$$

где  $d$  — (естественная) размерность величины  $A$ . Из определения  $\zeta$ -функции следует, что

$$\zeta_{A'C}(s) = e^{-sad} \zeta_A(s), \quad (6.2)$$

$$\text{откуда } \det(e^{ad}A) = e^{ad} \zeta_A(0) \det(A). \quad (6.3)$$

Приведем пример применения этой формулы. При дилатации

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = e^a x_\mu, \quad \varphi_{\text{кп}} \rightarrow \varphi'_{\text{кп}} = e^{-a} \varphi_{\text{кп}} \quad (6.4)$$

классическое действие с  $m^2 = 0$

$$S_E[\varphi_{\text{кп}}] = - \int d^4\bar{x} \left[ \frac{1}{2} \varphi_{\text{кп}} \bar{\partial}^2 \varphi_{\text{кп}} - \frac{\lambda}{4!} \varphi_{\text{кп}}^4 \right] \quad (6.5)$$

не изменяется. Но интеграл по траекториям для этого действия не является масштабно-инвариантным. Действительно, в приближении метода перевала мы находим, что изменение эффективного действия с точностью  $O(\hbar)$  равно

$$S_E^{\text{эфф}}[\varphi_{\text{кп}}] \rightarrow S_E^{\text{эфф}}[\varphi_{\text{кп}}] = S_E^{\text{эфф}}[\varphi_{\text{кп}}] - \hbar a \zeta \left[ -\bar{\partial}^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi_{\text{кп}}^2 \right] (0). \quad (6.6)$$

Можно вычислить  $\zeta$ -функцию для оператора  $-\bar{\partial}^2 + (\lambda/2)\varphi_{\text{кп}}^2$ , предполагая, что  $G(\bar{x}, \bar{y}, \tau)$  имеет асимптотическое разложение (полагаем  $\mu^2 = 1$ )

$$G(\bar{x}, \bar{y}, \tau) = \frac{e^{-(\bar{x} - \bar{y})^2/4\tau}}{16\pi^2 \tau^2} e^{-\epsilon \tau} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\bar{x}, \bar{y}) \tau^n, \quad (6.7)$$

где мы ввели искусственный множитель, обеспечивающий сходимость с  $\epsilon > 0$ . Читатель, не довольный такой процедурой, может с самого начала вообразить, что  $m^2 \neq 0$ . В силу граничного условия (5.8) имеем

$$a_0(\bar{x}, \bar{x}) = 1. \quad (6.8)$$

Далее, дифференциальное уравнение (5.11), примененное к выражению (6.7), приводит к рекуррентным соотношениям для коэффициентов  $a_n(\bar{x}, \bar{y})$ :

$$(\bar{x} - \bar{y})_\mu \frac{\partial}{\partial \bar{x}_\mu} a_0(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad (6.9)$$

$$[(n+1) + (\bar{x} - \bar{y})_{\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_{\mu}}] a_{n+1}(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{\partial}_x^2 - \frac{\lambda}{2} \Phi_{\text{кп}}^2(\bar{x}) + \epsilon) a_n(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$n = 0, 1, \dots \quad (6.10)$$

Можно решить эти уравнения:

$$a_1(\bar{x}, \bar{x}) = -\frac{\lambda}{2} \Phi_{\text{кп}}^2(\bar{x}) + \epsilon; \quad a_2(\bar{x}, \bar{x}) = \frac{\lambda^2}{8} \Phi_{\text{кп}}^4(\bar{x}) - \frac{\lambda}{6} \bar{\partial}^2 \Phi_{\text{кп}}(x) +$$

$$+ \epsilon \lambda \Phi_{\text{кп}}^2. \quad (6.11)$$

В результате получаем для  $\zeta$ -функции, вычисленной при  $s = 0$ , выражение

$$\zeta(0) = \frac{1}{16\pi^2} \left[ \frac{\epsilon^4}{2} \int d^4\bar{x} + \frac{\epsilon^2 \lambda}{2} \int d^4\bar{x} \Phi_{\text{кп}}^2(\bar{x}) + \int d^4\bar{x} \frac{\lambda^2}{8} \Phi_{\text{кп}}^4(\bar{x}) \right] \quad (6.12)$$

с учетом определений (5.7), (6.7) и (6.11). Член с  $\bar{\partial}^2$  в выражении для  $a_2(x, x)$  выпал при интегрировании. Полагая  $\epsilon$  равным нулю, приходим к окончательному результату

$$S'_E \text{эфф} = S_E \text{эфф} - \hbar a \frac{\lambda^2}{8 \cdot 16\pi^2} \int d^4\bar{x} \Phi_{\text{кп}}^4(\bar{x}). \quad (6.13)$$

Таким образом, единственным следствием дилатации (в данном порядке по  $\hbar$ ) является изменение константы связи  $\lambda$ :

$$\frac{\lambda}{4!} \rightarrow \frac{\lambda'}{4!} = \frac{\lambda}{4!} - \hbar a \frac{\lambda^2}{8 \cdot 16\pi^2}, \quad \text{т.е. } \lambda \rightarrow \lambda' = \lambda - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \hbar a. \quad (6.14), (6.15)$$

Из этой очень важной формулы явствует, что константа связи, в классической теории безразмерный параметр, приобретает в результате квантовых эффектов зависимость от масштаба. В данном конкретном случае из этой формулы следует, что при больших масштабах константа связи уменьшается, и это означает, что теория без взаимодействия в определенном смысле является хорошим приближением для асимптотических состояний. При уменьшении масштаба константа связи начинает расти и, даже если мы начали с некоторого малого значения  $\lambda$  при некотором масштабе, дальше  $\lambda$  может настолько вырасти, что это обесценит те результаты, которые получены методом теории возмущений по  $\lambda$ . Отметим, что этот масштабный закон полностью совпадает с тем, который получен в предыдущем параграфе (напомним, что

$a = -i\mu M^2/M$ . Этот результат точен в порядке  $O(\hbar)$ . Принято вводить  $\beta$ -функцию

$$\beta = \frac{d\lambda(M^2)}{d\ln M^2} = \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \hbar + \dots, \quad (6.16)$$

которая в данном случае оказывается положительной.

Итак, мы разными путями убедились в том, что в квантовых теориях поля следует определять константы связи в некотором масштабе, поскольку, даже если в классическом пределе константы не зависят от масштаба, они приобретают квантовые масштабные зависимости.

### Задачи

**\*\*А.** При  $m^2 \neq 0$  классическое действие с потенциалом  $V_{\text{кп}} = 1/2 m^2 \phi_{\text{кп}}^2 + (\lambda/4!) \phi_{\text{кп}}^4$  уже более не инвариантно относительно дилатаций. Найдите изменение эффективного действия, возникающее в результате дилатации. В частности, найдите как в классическом приближении, так и с учетом квантовых поправок [с точностью  $O(\hbar)$ ] изменение величины  $m^2$ .

**\*\*Б.** Исходя из нового асимптотического разложения для функции  $G(\bar{x}, \bar{y}, \tau)$

$$G(\bar{x}, \bar{y}, \tau) = \frac{e^{-(\bar{x} - \bar{y})^2/4\tau}}{16\pi^2 \tau^2} e^{-\frac{\lambda}{2} \phi^2(\bar{x})\tau} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\bar{x}, \bar{y}) \tau^n,$$

отвечающего оператору  $-\partial^2 + (\lambda/2)\phi^2(x)$ , выведите рекуррентное соотношение для коэффициентов  $b_n$ , а также выражения для коэффициентов  $b_n(\bar{x}, \bar{x})$  при  $n = 0, 1, 2, 3$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Coleman S., Weinberg E., Phys. Rev., **D7**, 1888 (1973).

# Вычисление фейнмановского интеграла по траекториям методом теории возмущений: теория $\varphi^4$

## § 1. Фейнмановские правила для теории $\lambda\varphi^4$

Перейдем к обычному вычислению по теории возмущений функций Грина в евклидовом пространстве. Исходить будем из выражения

$$W_E[J] = e^{-Z_E[J]} = N \int \mathcal{D}\varphi e^{-\int d^4x \left[ \frac{1}{2} \bar{\partial}_\mu \varphi \bar{\partial}_\mu \varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + V(\varphi) - J(\varphi) \right]}, \quad (1.1)$$

где  $N$  — произвольная (бесконечная) нормировочная постоянная. Связные функции Грина определяются как

$$G_E^{(N)}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N) = - \frac{\delta^N Z_E[J]}{\delta J_1 \dots \delta J_N} \Big|_{J=0}. \quad (1.2)$$

Мы будем вычислять их, рассматривая потенциал  $V$  как малое возмущение. Для простоты ниже мы будем обходиться без индекса  $E$  и без черты над  $x$ , указывающих на евклидово пространство. Позднее же в тех случаях, когда будет возможна путаница с пространством Минковского, эти символы будут восстановлены. Пользуясь приемом, изложенным в гл. 3, § 3, находим

$$W[J] = N e^{-\langle V \left( \frac{\delta}{\delta J} \right) \rangle} e^{-Z^0[J]}, \quad (1.3)$$

где

$$Z^0[J] = - \frac{1}{2} \langle J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \rangle_{xy}, \quad (1.4)$$

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 + m^2}. \quad (1.5)$$

После небольших алгебраических преобразований получаем выражение

$$Z[J] = -\ln N + Z^0[J] - \ln(1 + e^{Z^0} (e^{-\langle V(\frac{\delta}{\delta J}) \rangle} - 1) e^{-Z^0}), \quad (1.6)$$

которое уже допускает разложение в ряд теории возмущений по потенциалу  $V$ . Если положить

$$\delta = e^{Z^0} [e^{-\langle V(\frac{\delta}{\delta J}) \rangle} - 1] e^{-Z^0}, \quad (1.7)$$

то

$$Z[J] = -\ln N + Z^0[J] - \delta[J] + \frac{1}{2} \delta^2[J] - \frac{1}{3} \delta^3[J] + \dots \quad (1.8)$$

В частности, если  $V = (\lambda/4!) \phi^4$ , то можно провести разложение по степеням безразмерной (в четырех измерениях) константы связи  $\lambda$ .

Записывая

$$\delta = \delta_1 \lambda + \delta_2 \lambda^2 + \dots, \quad (1.9)$$

$$\text{находим, что } Z[J] = -\ln N + Z^0[J] - \lambda \delta_1[J] - \lambda^2 (\delta_2[J] - \frac{1}{2} \delta_1^2[J]) - \lambda^3 (\delta_3[J] - \delta_1[J] \delta_2[J] + \frac{1}{3} \delta_1^3[J]) + \dots \quad (1.10)$$

Разлагая экспоненту в формуле (1.7), получаем

$$\delta_1[J] = -\frac{1}{4!} e^{Z^0[J]} \langle \frac{\delta^4}{\delta J^4} \rangle e^{-Z^0[J]}, \quad (1.11)$$

$$\delta_2[J] = \frac{1}{2(4!)^2} e^{Z^0[J]} \langle \frac{\delta^4}{\delta J_1^4} \rangle_1 \langle \frac{\delta^4}{\delta J_2^4} \rangle_2 e^{-Z^0[J]} \text{ и т.д.} \quad (1.12)$$

Подставляя выражение (1.4) для  $Z^0$ , приходим к выражению

$$\delta_1[J] = -\frac{1}{4!} [\langle \Delta_{xa} \Delta_{xb} \Delta_{xc} \Delta_{xd} J_a J_b J_c J_d \rangle + 6 \langle \Delta_{xx} \Delta_{xa} \Delta_{xb} J_a J_b \rangle + + 3 \langle \Delta_{xx}^2 \rangle], \quad (1.13)$$

в котором под знаком  $\langle \dots \rangle$  производится интегрирование по соответствующим переменным  $x, a, b, c, d$ . Аналогично, но несколько более искусственным образом можно вычислить  $\delta_2$ . Заметим, что если

вставить  $\exp\{-Z^0\}\exp\{Z^0\}$  в середину формулы (1.12), то

$$\delta_2[J] = \frac{1}{2(4!)^2} e^{Z^0} \left\langle \frac{\delta^4}{\delta J_1^4} \right\rangle_1 e^{-Z^0} \delta_1[J]. \quad (1.14)$$

Затем с учетом разложения

$$\begin{aligned} \frac{\delta^4}{\delta J^4} e^{-Z^0} &= \frac{\delta^4 e^{-Z^0}}{\delta J^4} + 4 \frac{\delta^3 e^{-Z^0}}{\delta J^3} \frac{\delta}{\delta J} + 6 \frac{\delta^2 e^{-Z^0}}{\delta J^2} \times \\ &\times \frac{\delta^2}{\delta J^2} + 4 \frac{\delta e^{-Z^0}}{\delta J} \frac{\delta^3}{\delta J^3} + e^{-Z^0} \frac{\delta^4}{\delta J^4} \end{aligned} \quad (1.15)$$

можно написать

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \frac{1}{2} \delta_1^2 - \frac{1}{2(4!)^2} e^{Z^0} \left\langle \left( 4 \frac{\delta^3 e^{-Z^0}}{\delta J_1^3} \frac{\delta}{\delta J_1} + 6 \frac{\delta^2 e^{-Z^0}}{\delta J_1^2} \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \frac{\delta^2}{\delta J_1^2} + 4 \frac{\delta e^{-Z^0}}{\delta J_1} \frac{\delta^3}{\delta J_1^3} + e^{-Z^0} \frac{\delta^4}{\delta J_1^4} \right) \right\rangle_1 \delta_1[J]. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Сравнение с разложением (1.10) для  $Z[J]$  показывает, что "несвязная" часть  $1/2\delta_1^2$  выпадает. Под несвязной частью мы понимаем вклад в выражение, который может быть записан как произведение двух или более функционалов от  $J$ . Этот термин станет очевидным в диаграммном представлении. То, что  $Z$  порождает только связные куски, верно во всех порядках (см. задачу). Например, вклад порядка  $\lambda^3$  в разложении (1.10) связный; действительно, напомним

$$\begin{aligned} \delta_3 &= -\frac{1}{3!} \langle e^{Z^0} V_x V_y V_z e^{-Z^0} \rangle_{xyz} = -\frac{1}{3!} \langle (e^{-Z^0} V_x e^{-Z^0})(e^{Z^0} V_y e^{-Z^0}) \times \\ &\times (e^{Z^0} V_z e^{-Z^0}) \rangle_{xyz} - \frac{1}{2} \langle (e^{Z^0} V_x e^{-Z^0})(e^{Z^0} V_y V_z e^{-Z^0}) \rangle_{xyz} + \delta_3^c = \\ &= \frac{1}{3!} \delta_1^3[J] + \delta_1[J] \delta_2^c[J] + \delta_3^c[J]. \end{aligned} \quad (1.18)$$

В последнем выражении через  $\delta_2^c$  и  $\delta_3^c$  обозначены связанные куски. Чтобы получить это выражение, мы использовали то обстоятельство, что имеются только два типа "несвязности": либо все три переменные  $x, y, z$  несвязны, либо одна переменная несвязна с двумя другими, причем последний вариант можно получить тремя способами. Скобки в выражении (1.17) служат для того, чтобы защитить другие члены от действия операторов производной внутри скобок. С учетом формулы (1.18) член, возникающий в разложении  $Z$ , можно переписать в виде

$$\delta_3 - \delta_1 \delta_2 + \frac{1}{3} \delta_1^3 = \delta_3^c + \frac{1}{3!} \delta_1^3 + \delta_1 \delta_2^c - \delta_1 (\delta_2^c + \frac{1}{2} \delta_1^2) + \frac{1}{3} \delta_1^3 = \delta_3^c. \quad (1.19)$$

Наконец, явное вычисление связанной части  $\delta_2$  приводит с точностью до независимой от  $J$  части к выражению

$$\begin{aligned} \delta_2^c [J] = & \frac{1}{2} \langle J_a \Delta_a x (\frac{1}{6} \Delta_{xy}^3 + \frac{1}{4} \Delta_{xx} \Delta_{yy} \Delta_{xy}) \Delta_{yb} J_b \rangle_{xyab} + \\ & + \frac{1}{8} \langle J_a \Delta_a x \Delta_{yy} \Delta_{xy}^2 \Delta_{xb} J_b \rangle_{xyab} + \frac{2}{4!} \langle J_a \Delta_a x \Delta_{xx} \Delta_{xy} \Delta_{yb} \times \\ & \times \Delta_{yc} \Delta_{yd} J_b J_c J_d \rangle_{xyabcd} + \frac{3}{2(4!)} \langle J_a J_b \Delta_a x \Delta_b x \Delta_{xy}^2 \Delta_{yc} \Delta_{yd} \times \\ & \times J_c J_d \rangle_{xyabcd} + \frac{1}{2(3!)^2} \langle J_a J_b J_c \Delta_a x \Delta_b x \Delta_c x \Delta_{xy} \Delta_{yd} \Delta_{ye} \Delta_{yf} \times \\ & \times J_d J_e J_f \rangle_{xyabcdef}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

С помощью формулы (1.2) находим выражения для связанных функций Грина:

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x_1, x_2) = & \Delta(x_1 - x_2) - \frac{\lambda}{2} \int d^4 y \Delta(x_1 - y) \Delta(y - x_2) \Delta(y - x_2) + \\ & + \frac{\lambda^2}{6} \int d^4 x d^4 y \Delta(x_1 - x) \Delta^2(x - y) \Delta(y - x_2) + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda^2}{4} \int d^4x d^4y \Delta(x_1 - x) \Delta^2(x - y) \Delta(y - y) \Delta(x - x_2) + \\
& + \frac{\lambda^2}{4} \int d^4x d^4y \Delta(x_1 - x) \Delta(x - x) \Delta(x - y) \Delta(y - y) \Delta(y - x_2) + \\
& + O(\lambda^3), \tag{1.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = & -\lambda \int d^4x \Delta(x_1 - x) \Delta(x_2 - x) \Delta(x_3 - x) \Delta(x_4 - x) + \\
& + \frac{\lambda^2}{2} \int d^4x d^4y \Delta^2(x - y) [\Delta(x_1 - x) \Delta(x_2 - x) \Delta(x_3 - y) \Delta(x_4 - y) + \\
& + \Delta(x_1 - x) \Delta(x_3 - x) \Delta(x_2 - y) \Delta(x_4 - y) + \Delta(x_1 - x) \times \\
& \times \Delta(x_4 - x) \Delta(x_2 - y) \Delta(x_3 - y)] + \frac{\lambda^2}{2} \int d^4x d^4y \times \\
& \times \Delta(y - y) \Delta(x - y) [\Delta(x_1 - x) \Delta(x_2 - x) \Delta(x_3 - x) \Delta(x_4 - \\
& - y) + \text{циклическая перестановка}] + O(\lambda^3), \tag{1.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^{(6)}(x_1, \dots, x_6) = & \lambda^2 \int d^4x d^4y \Delta(x - y) \sum_{(ijk)} \Delta(x_i - x) \Delta(x_j - x) \\
& \Delta(x_k - x) \Delta(x_l - y) \Delta(x_m - y) \Delta(x_n - y) + O(\lambda^3), \tag{1.23}
\end{aligned}$$

причем сумма в последнем выражении берется по тройкам чисел  $(ijk) = (123), (124), (125), (126), (134), (135), (136), (145), (146), (156)$ , а тройка чисел  $(lmn)$  принимает дополнительные к ним значения, т.е.  $(lmn) = (456)$ , если  $(ijk) = (123)$  и т.д. В данном порядке по  $\lambda$  вклад в остальные функции Грина отсутствует. Заметим, что вклады порядка  $\lambda^0$  в  $G^{(2)}$ , порядка  $\lambda$  в  $G^{(4)}$ , порядка  $\lambda$  в  $G^{(4)}$  и порядка  $\lambda^2$  в  $G^{(6)}$  уже были получены ранее в классическом приближении, рассматривавшемся в предыдущей главе.

Прямым вычислением, пользуясь формулой (4.26) гл. 3, можно найти функции Грина в  $p$ -пространстве. Имеем

$$\tilde{G}^{(2)}(p - p) = \frac{1}{p^2 + m^2} - \frac{\lambda}{2} \frac{1}{(p^2 + m^2)^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda^2}{6} \frac{1}{(p^2 + m^2)^2} \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_3}{(2\pi)^4} \times \\
& \times \frac{\delta(p - q_1 - q_2 - q_3)(2\pi)^4}{(q_1^2 + m^2)(q_2^2 + m^2)(q_3^2 + m^2)} + \frac{\lambda^2}{4} \frac{1}{(p^2 + m^2)^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \times \\
& \times \frac{1}{q^2 + m^2} \int \frac{d^4 l_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l_2}{(2\pi)^4} \frac{\delta(p - l_1 - l_2)(2\pi)^4}{(l_1^2 + m^2)(l_2^2 + m^2)} + \\
& + \frac{\lambda^2}{4} \frac{1}{(p^2 + m^2)^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2} \frac{1}{p^2 + m^2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \times \\
& \times \frac{1}{l^2 + m^2} + O(\lambda^3), \tag{1.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \prod_{i=1}^4 \frac{1}{(p_i^2 + m^2)} \left\{ -\lambda + \frac{1}{2} \lambda^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2} \times \right. \\
& \times \sum_{i=1}^4 \frac{1}{p_i^2 + m^2} + \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \times \\
& \times \frac{1}{(q_1^2 + m^2)(q_2^2 + m^2)} \sum_{(ij)} \delta(q_1 + q_2 - p_i - p_j)(2\pi)^4 + O(\lambda^3) \left. \right\}. \tag{1.25}
\end{aligned}$$

В последнем выражении сумма берется только по  $(ij) = (12), (13)$  и  $(14)$ . Наконец,  $\tilde{G}^{(6)}$  дается выражением (4.29) гл. 3. Полученные выражения очень громоздки, но существуют так называемые *фeyнмановские правила*, позволяющие довольно просто записывать их. Эти правила таковы.

1. Каждому множителю  $1/(p^2 + m^2)$  сопоставляется линия с текущим по ней импульсом  $p$ :

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ p \end{array} : \frac{1}{p^2 + m^2}.$$

2. Каждому множителю  $-\lambda/4!$  сопоставляется четырехточечная вершина, причем подразумевается, что полный импульс, втекающий в вершину, равен нулю:

$$-\frac{\lambda}{4!} \begin{array}{c} p_4 \swarrow \quad \nwarrow p_3 \\ \nearrow p_1 \quad \searrow p_2 \end{array} \quad (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0).$$

3. Чтобы получить вклад в  $\tilde{G}^{(N)}(p_1, \dots, p_N)$ , нужно, обозначив внешние хвосты диаграммы, нарисовать все возможные топологически неэквивалентные перестановки. Число способов, которым может быть нарисована данная диаграмма, называется ее топологическим весом.

4. После того как обеспечено сохранение импульса в каждой вершине, берется интеграл по импульсам внутренних петель  $\int d^4q / (2\pi^4)$ .

В результате мы приходим к желаемой функции Грина. Пожалуй, более последовательно было бы сопоставлять каждой вершине множитель  $(-\lambda/4!)\delta(\Sigma p)(2\pi)^4$ , где  $\Sigma p$  представляет собой полный импульс, входящий в данную вершину. Тогда интегрировать нужно по всем внутренним импульсам. При таком способе возникает общий множитель  $(2\pi)^4\delta(\Sigma p)$ , где  $\Sigma p$  — полный импульс, входящий в функцию Грина. Например, на диаграммном языке выражение (1.24) запишется в виде

$$\text{шарик} = \text{линия} + \text{петля} + \text{петля} + \text{двойная петля} + \text{две петли} \quad (1.26)$$

По сформулированным правилам нетрудно написать аналитические выражения, соответствующие этим диаграммам.



1. Нам нужна одна вершина и три пропагатора. Можно четырьмя способами прицепить первый хвост вершины к точке 1 и тремя — второй хвост к точке 2. Следовательно, вес равен  $(1/4!)4 \cdot 3 = 1/2$ . Сама вершина вносит вклад  $-\lambda$ . После этого правила приводят к выражению

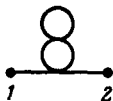
$$-\frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + q - q) \frac{1}{q^2 + m^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)^2}.$$



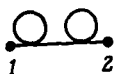
2. У нас две вершины. Можно четырьмя способами прицепить первый хвост первой вершины к точке 1, четырьмя способами прицепить первый хвост второй вершины в точке 2, тремя способами связать второй хвост первой вершины со второй вершиной и двумя способами связать третий хвост первой вершины со второй. Следовательно, вес равен  $(1/4!) \cdot (1/4!) 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1/6$ . Мы не учитывали, что у нас с самого начала две вершины. Дело в том, что диаграммы остаются теми же самыми независимо от того, с какой вершины начать. Вклад диаграммы пропорционален  $(-\lambda)^2 = \lambda^2$ . Если обозначить импульсы внутренних линий через  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$ , то, согласно фейнмановским правилам, вклад диаграммы равен

$$\frac{\lambda^2}{6} \frac{1}{(p^2 + m^2)^2} \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_3}{(2\pi)^4} (2\pi)^8 \times$$

$$\times \frac{\delta(p_1 - q_1 - q_2 - q_3) \delta(p_2 + q_1 + q_2 + q_3)}{(q_1^2 + m^2)(q_2^2 + m^2)(q_3^2 + m^2)}.$$



3. В нашем распоряжении две вершины. Можно четырьмя способами прицепить первый хвост к точке 1, тремя — второй хвост к точке 2, четырьмя — третий хвост уже связанной вершины к другой и тремя же — четвертый хвост первой вершины ко второй вершине. Следовательно, вес равен  $(1/4!) \cdot (1/4) 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 1/4$ . Вклад диаграммы пропорционален  $(-\lambda)^2$ .



4. У нас две вершины. Можно четырьмя способами прицепить первую вершину к точке 1 и четырьмя — вторую вершину к точке 2. В результате у каждой вершины остается по три свободных хвоста для того, чтобы связаться друг с другом. Каждая вершина может тремя способами замкнуться в петлю. Следовательно, вес равен  $(1/4!) \cdot (1/4!) 4 \times 4 \cdot 3 \cdot 3 = 1/4$ . Вклад диаграммы пропорционален  $(-\lambda)^2$ .

Таким образом, фейнмановские правила сводят все к задаче, которую решает ребенок, собирающий игрушку из элементов конструктора. Основные элементы — пропагатор (линия) и вершина. Немного наловчившись, можно научиться читать сопоставляемые им множители прямо в лагранжиане. По тем же правилам в соответствии с аналитическим выражением (1.25) получим для четырехточечной функции следующее диаграммное представление:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram with shaded circle} = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \\
 & + \text{Diagram 6} + \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8} . \quad (1.27)
 \end{aligned}$$

Предоставляем читателю проверить правильность численных множителей в формуле (1.25).

Заметим теперь, что в выражении для  $\tilde{G}^{(N)}(p_1, \dots, p_N)$  имеется мультипликативный множитель  $\prod_{i=1}^N (p_i^2 + m^2)^{-1}$ , соответствующий пропагаторам внешних хвостов.

Значительно удобнее иметь дело с функциями Грина, порождаемыми эффективным действием. Связь этих функций Грина с  $\tilde{G}^{(n)}$  очень проста: в то время как функции  $\tilde{G}^{(n)}$  связны, функции  $\tilde{\Gamma}^{(n)}$  одночастично-неприводимы. В частности, функция  $\tilde{\Gamma}^{(2)}(p)$  равна обратному пропагатору, взятому со знаком минус. Мы уже столкнулись с этим результатом в связи с древесными диаграммами, но он верен во всех порядках теории возмущений. Таким образом,  $\tilde{\Gamma}^{(4)}$  содержит только диаграммы

$$\tilde{\Gamma}^{(4)} = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} , \quad (1.28)$$

причем внешним хвостам *не соответствуют* пропагаторы. Чтобы показать, что функции Грина  $\tilde{\Gamma}^{(n)}$  одночастично-неприводимы, можно исходить из определяющих уравнений

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi} = -J, \quad \frac{\delta Z[J]}{\delta J} = \varphi \quad (1.29)$$

и дифференцировать их.

После всего сказанного вернемся к лагранжиану, в котором можно легко идентифицировать все компоненты фейнмановских правил: четырехточечную вершину, возникающую из члена  $\lambda\phi^4$ , и пропагатор, возникающий из кинетического и массового членов. Отсюда следует, что после небольшой практики можно просто считать фейнмановские правила с лагранжиана  $\mathcal{L}$ . Основная трудность в том, чтобы получить при этом правильные знаки и весовые множители перед диаграммами.

### Задачи

А. Нарисуйте вклады порядка  $\lambda^4$  в двухточечную функцию  $G^{(2)}$ .

Е. Нарисуйте вклады порядка  $\lambda^3$  в  $G^{(4)}$ .

В. Напишите аналитические выражения для диаграмм задачи А с учетом весов.

\*Г. Выведите фейнмановские правила в случае  $V = (\lambda/4!)\phi^4 + (\mu/3!)\phi^3$ .

\*\*Д. Покажите, что  $Z[J]$  порождает только связанные фейнмановские диаграммы.

\*\*Е. Найдите вид эффективного действия  $S^{\text{эфф}}[\varphi_{\text{кп}}]$  в порядке  $\lambda^2$  и покажите, что в порождаемых им функциях Грина не возникают одночастично-приводимые диаграммы.

## § 2. Расходимости фейнмановских диаграмм

Красота фейнмановских правил несколько блекнет, когда мы осознаем, что большинство интегралов по петлям расходится! Например, вклад порядка  $O(\lambda)$  в  $\tilde{G}^{(2)}$  содержит интеграл

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + m^2}.$$

Очевидно, что он расходится при  $q \rightarrow \infty$ , так как подынтегральному выражению не хватает сил побороть меру интегрирования. Подобная расходимость называется ультрафиолетовой. Она возникает при больших импульсах или, что эквивалентно, на малых расстояниях [в  $x$ -пространстве расходимость возникает от  $\Delta(0)$ ] и, очевидно, связана с тем, что приходится вычислять слишком много производных по  $J$  в одной точке. Другой пример — диаграмма под названием "рыба":

$$\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ 4 \end{array} \sim \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{\delta(q_1 + q_2 - p_1 - p_2)}{(q_1^2 + m^2)(q_2^2 + m^2)} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 + m^2)((q - p_1 - p_2)^2 + m^2)}.$$

В этом случае при  $q \rightarrow \infty$  интеграл ведет себя как интеграл от  $d^4 q/q^4$ , т. е. как логарифм  $\ln q$ . Он тоже расходится! Попутно заметим, что когда  $m^2 = 0$  и  $(p_1 + p_2)^2 = 0$ , этот интеграл расходится и при малых  $q$ . Подобная расходимость называется инфракрасной. Обычно такие расходимости возникают только в безмассовом случае и при некоторых специальных значениях внешних импульсов (в данном случае  $p_1 + p_2 = 0$ , поскольку мы находимся в евклидовом пространстве). Положим на некоторое время  $m^2 \neq 0$  и сосредоточим внимание на ультрафиолетовой расходимости.

То, что столь заботливо сконструированные функции Грина расходятся, выглядит как полное крушение нашей программы. Но не будем предаваться отчаянию, а попробуем узнать несколько больше об этих расходимостях. Мы вскоре обнаружим, что они возникают легко прослеживаемым образом и исчезают при подходящем переопределении полей и констант связи! Таково чудо перенормировки, которое, как мы увидим, возникает только в определенных теориях.

Покажем, как путем топологических рассуждений и подсчета степеней узнать, имеется ли расходимость. Рассмотрим фейнмановскую диаграмму с  $V$  вершинами,  $E$  внешними линиями и  $I$  внутренними линиями. Сначала будем считать, что имеются только скалярные частицы.

Число независимых внутренних импульсов равно числу петель  $L$  в диаграмме. Для  $I$  внутренних импульсов выполняется  $V - 1$  соотношений (единицу нужно вычесть, чтобы учесть общий закон сохранения импульса), так что

$$L = I - V + 1. \quad (2.1)$$

Это соотношение позволяет наивно подсчитать степени импульса для диаграммы. Такой подсчет даст кажущуюся степень расходимости диаграммы, обозначаемую через  $D^{(1)}$ . Чтобы вычислить  $D$ , заметим, что у нас имеются  $L$  независимых интегрирований по петлям, причем в  $d$  измерениях каждое вносит  $d$  степеней импульса, и  $I$  внутренних импульсов, каждый из которых соответствует пропагатору, вносящему две обратные степени импульса. Следовательно,

$$D = dL - 2I. \quad (2.2)$$

<sup>1)</sup> В отечественной литературе величина  $D$  называется индексом диаграммы. — Прим. перев.

Нам нужно еще одно соотношение между  $V$ ,  $E$  и  $I$ . Пусть  $V_N$  обозначает число вершин с  $N$  хвостами. В диаграмме с  $V_N$  такими вершинами имеется  $NV_N$  линий, являющихся либо внешними, либо внутренними. Каждая внутренняя линия учитывается дважды, поскольку она начинается и заканчивается в вершине, так что

$$NV_N = E + 2I. \quad (2.3)$$

Соотношения (2.2) и (2.3) позволяют выразить  $D$  через число внешних линий и вершин:

$$D = d - \frac{1}{2}(d-2)E + V_N \left( \frac{N-2}{2}d - N \right). \quad (2.4)$$

В четырех измерениях имеем

$$D = 4 - E + (N-4)V_N \quad (\text{четыре измерения}). \quad (2.5)$$

Далее, в рассматриваемой нами сейчас теории  $N = 4$ . Следовательно,

$$D = 4 - E \quad (\text{для теории } \lambda\phi^4 \text{ в четырех измерениях}) \quad (2.6)$$

Полученный здесь важный результат заключается в том, что кажущаяся степень расходимости зависит не от числа вершин, а только от числа внешних хвостов! Таким образом, имеются лишь два возможных варианта с  $D > 0$ :

$\tilde{G}^{(2)}$  с кажущейся квадратичной расходимостью  $D = 2$ ,

$\tilde{G}^{(4)}$  с кажущейся логарифмической расходимостью  $D = 0$ .

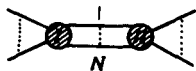
Заметим, что указанные двух- и четырехточечные взаимодействия уже присутствуют в лагранжиане и это обстоятельство окажется решающим для перенормировки. Кроме того,  $D = 0$  не обязательно означает логарифмическую расходимость: фундаментальная вершина имеет  $D = 0$ .

Проведенный анализ не доказывает, что функции  $\tilde{G}^{(6)}$ ,  $\tilde{G}^{(8)}$ , ..., для которых величина  $D$  отрицательна, сходятся. Поэтому  $D$  и называется кажущейся степенью расходимости. Рассмотрим " $n$ -частично-приводимую" диаграмму с  $E$  внешними линиями; это такая диаграмма, которую можно разделить на части, разрезав не менее  $n$  внутренних линий. В общем случае если  $D_1$  и  $D_2$  — кажущиеся степени расходимости двух блоков, показанных ниже, то для всей  $n$ -частично-приводимой диаграммы

$$D = D_1 + D_2 + 4(n-1) - 2n, \quad (2.7)$$




поскольку два блока связаны  $n$  пропагаторами и  $n - 1$  петлями:

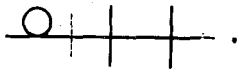


Заметим, что по определению блоки I и II сами по меньшей мере  $n$ -частично-приводимы.

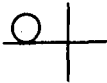
В нашем случае, когда  $n = 1$ , мы можем иметь  $D_1 = D_2 = 0$  и при этом получим  $D = -2$ , что соответствует на первый взгляд сходящейся диаграмме. Примером этой ситуации может служить диаграмма

"динозавр" , которая очевидным образом расходится


из-за двух расходящихся интегрирований по петлям. Другой пример


одночастично-приводимой диаграммы таков: .

В этом случае  $D_1 = 2, D_2 = -2$ ; кажется, что диаграмма сходится, но это не так из-за "бородавки" на одном из хвостов. Последний пример показывает также, что четырехточечная функция может расходиться сильнее, чем кажется при наивном подсчете: доказательством служит

квадратично-расходящаяся четырехточечная функция .

Отметим, что, рассматривая  $\tilde{\Gamma}^{(n)}$ , мы избегаем таких одночастично-приводимых диаграмм. При  $n = 2$  мы имеем  $D = D_1 + D_2$  и вполне может быть так, что степень  $D_1$  (или  $D_2$ ) отрицательна и достаточно велика, чтобы перекрыть  $D_2$  (или  $D_1$ ) и привести к отрицательной степени  $D$ .

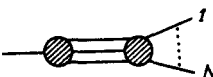
Примером служит диаграмма "омар" . Аналогично

при  $n = 3$  могут быть диаграммы типа 

(в этой сложной диаграмме из каждой вершины выходит не более одной внешней линии). В теории  $\lambda\varphi^4$  могут существовать не более чем трехчастично-приводимые диаграммы, так как каждую вершину, связанную

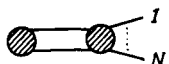
с одной внешней линией, можно отделить от диаграммы, разрезав оставшиеся три хвоста.

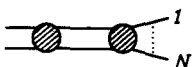
Теперь ясно, как вылавливать диаграммы, которые, имея отрицательную степень  $D$ , все же расходятся. Возьмите любую фейнмановскую диаграмму и классифицируйте ее по степени приводимости; в нашем случае всякая диаграмма 1-, 2- или 3-частично-приводима. Если она трехчастично-приводима, то разложите ее на составные части и поищите

возможность разбиения вида   $N \geq 5$ . Тогда в этом

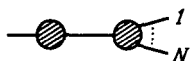
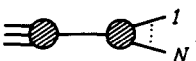
типе диаграмм имеется примитивно расходящаяся четырехточечная функция, а второй блок должен быть сам по себе разложен таким же образом.

Аналогично, скрытые расходимости в двухчастично-приводимых

диаграммах будут возникать в диаграммах вида   $N > 4$ ;


  $N > 2$  с повторением такого разбиения во втором

блоке. Наконец, одночастично-приводимые диаграммы, которые можно представить в виде


  $N > 5$ ;   $N > 3$ , будут иметь скры-

тые расходимости. Такое же разложение можно провести для вторых блоков, до тех пор пока не будут выявлены все подобные структуры.

Это исчерпывающее перечисление показывает, что истинно сходящиеся диаграммы не содержат скрытых двух- и четырехточечных функций.

Можно и еще проще объяснить происхождение скрытых ультрафиолетовых расходимостей в любой диаграмме. Рассмотрим любую петлю, помещающуюся внутри диаграммы. Интегрирование по импульсу в петле в четырех измерениях приведет к ультрафиолетовой расходимости, если эта петля образована не более чем одним или двумя пропагаторами (внутренними линиями). Большее число приведет к ультрафиолетовой расходимости. Петля, образованная одним пропагатором, содержит только одну вершину ; при этом остаются два свободных хвоста,

которые в свою очередь могут быть присоединены к остальной части диаграммы (или один хвост может быть внешним, а другой — присоединенным). В этом случае можно изолировать такую двухточечную функцию от внутренней части диаграммы. Петля, ограниченная двумя пропагаторами, содержит две вершины и, следовательно, четыре свободных

хвоста  , которые можно присоединить к оставшейся части

диаграммы, либо какие-то из этих хвостов, числом до трех, могут являться внешними линиями. Во всех этих случаях мы должны изолировать от остальной части диаграммы четырехточечную функцию или двухточечную функцию, если два из четырех хвостов соединены вместе (в этом случае расходимость становится квадратичной). Тогда можно увидеть, что ультрафиолетовые расходимости внутри диаграммы обусловлены такими петлями и что такие петли возникают в двух- и четырехточечных функциях, гнездящихся внутри диаграммы.

Итак, в теории  $\lambda\varphi^4$  в четырех измерениях фейнмановская диаграмма является действительно сходящейся, если ее кажущаяся степень расходимости  $D$  положительна и если диаграмма не может быть расщеплена на трех-, двух- или одночастично-приводимые части описанного выше типа, которые могут содержать изолированные двух- и четырехточечные блоки. Более изящно выглядит такая формулировка: фейнмановская диаграмма сходится, если кажущаяся степень расходимости самой диаграммы и всех ее поддиаграмм положительна. Это так называемая теорема Вайнберга, которая верна независимо от типа теории поля.

Все сказанное означает, что причиной расходимостей являются только двух- и четырехточечные функции и ничто более. В них все зло! Так что если мы можем контролировать их в функциях  $\tilde{G}^{(2)}$  и  $\tilde{G}^{(4)}$ , то у нас есть возможность контролировать расходимости всех других функций  $\tilde{G}^{(N)}$ .

Диаграммы, содержащие указанные основные расходимости, называются *примитивно* расходящимися. То обстоятельство, что в теории  $\lambda\varphi^4$  число примитивно расходящихся взаимодействий конечно (двух- и четырехточечные взаимодействия), а сами эти взаимодействия того же типа, что и содержащиеся в лагранжиане, является необходимым условием успешного устранения ультрафиолетовых расходимостей путем ловких переопределений. Теория, в которой подобное возможно, называется перенормируемой. Из формулы (2.4) можно увидеть, что этим требованиям удовлетворяют очень немногие теории взаимодействующих скаляров (см. задачу).

При  $d = 4$  степень  $D$  растет с ростом числа вершин, для которых  $N > 4$ . Следовательно, теории  $\phi^5, \phi^6, \dots$ , хотя и совершенно приемлемы с классической точки зрения, приводят к бесконечному числу примитивно расходящихся диаграмм (чем больше вершин, тем сильнее расходимость!). В этом случае ситуация быстро выходит из-под контроля и надежда навесить ярлыки на все расходимости, а следовательно, и перенормируемость, исчезает.

Когда  $d = 2$  (одно пространственное и одно временное измерения), положение меняется на обратное. В данном случае

$$d = 2 - 2V_N \quad (2 \text{ измерения}) \quad (2.8)$$

и степень  $D$  оказывается независимой от числа  $N$ , отмечающего тип взаимодействия! Величина  $D$  зависит только от числа вершин, причем чем больше вершин, тем более сходящейся оказывается фейнмановская диаграмма! Кроме того,  $D$  не зависит от числа внешних 'хвостов! Таким образом, единственные примитивно расходящиеся диаграммы либо имеют одну вершину, либо не имеют ни одной. Так как расходимости возникают из-за интегрирований по петлям, это означает, что расходимости появляются только в том случае, когда хвост некой вершины связан с той же самой вершиной, а не в случае взаимодействия двух или более вершин. Подобные расходимости называются расходимостями "нормального упорядочения". В двух измерениях ультрафиолетовые расходимости происходят только от "нормального упорядочения", а не от типа взаимодействия.

Заметим, наконец, что при  $d > 7$  не существует теорий с конечным числом примитивно расходящихся диаграмм. Последняя из возможных теорий в высших измерениях это теория  $\lambda\phi^3$  в шести измерениях, причем здесь величина  $\lambda$  безразмерна, так как размерность величины  $\phi$  теперь уже равна  $-2$ . Число примитивно расходящихся диаграмм невелико, поскольку  $V$  не входит в выражение для  $D$ :

$$D = 6 - 2E \quad (\phi^3 \text{ в } 6 \text{ измерениях}), \quad (2.9)$$

так что примитивно расходятся одно-, двух- и трехчастичные функции (как четвертая степень, квадратично и логарифмически). Хотя потенциал в этой теории неудовлетворителен, так как он неограничен снизу, сама теория интересна, поскольку она наряду с более сложными калибровочными теориями обладает свойством асимптотической свободы.

Итак, в данном параграфе мы обнаружили в фейнмановских диаграммах с петлями ультрафиолетовые расходимости (плохие новости), но

убедились, что по крайней мере в нашей теории эти расходимости проистекают только от двух примитивно расходящихся функций Грина (хорошие новости). Следовательно, если нам удастся предотвратить появление расходимостей в  $\tilde{G}^{(2)}$  и  $\tilde{G}^{(4)}$ , то у нас будет надежда предотвратить катастрофу и получить сходящиеся ответы.

### Задачи

А. Найдите все примитивно расходящиеся диаграммы в теории  $\varphi^3$  в четырех измерениях. Для каждой такой диаграммы приведите пример в низшем порядке теории возмущений.

Б. Перечислите все теории взаимодействующих скаляров с конечным числом примитивно расходящихся диаграмм в трех измерениях ( $d = 3$ ).

В. Повторите задачу Б при  $D = 5$  и покажите, что при  $d > 7$  не существует теорий с конечным числом примитивно расходящихся диаграмм.

Г. Для случаев  $d = 2, 3, 5, 6$  найдите размерности различных констант связи в теориях с конечным числом примитивно расходящихся диаграмм.

### § 3. Размерная регуляризация фейнмановских интегралов

Ниже мы продолжим вычисление фейнмановских диаграмм. Вычисление ультрафиолетово-сходящихся диаграмм производится непосредственно, в случае же расходящихся диаграмм требуются особые меры. В этом случае мы сталкиваемся с интегралами вида

$$I_4(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 l F(l, k), \quad (3.1)$$

где при больших  $l$  функция  $F$  ведет себя как  $l^{-2}$  или  $l^{-4}$ . Суть метода размерной регуляризации в том, что при понижении числа измерений, по которым ведется интегрирование, расходимости тривиальным образом исчезают. Например, если  $F \rightarrow l^{-4}$ , то в двух измерениях интеграл (3.1) на ультрафиолетовом пределе сходится.

С математической точки зрения мы вправе ввести функцию

$$I(\omega, k) = \int d^2 \omega l F(l, k) \quad (3.2)$$

как функцию (комплексной) переменной  $\omega$ . Вычислим ее в той области,

где  $l$  не имеет сингулярностей в  $\omega$ -плоскости. Затем придумаем функцию  $l'(\omega, k)$ , совпадающую с  $l$  в области сходимости интеграла (3.2) в  $\omega$ -плоскости и имеющую хорошо определенные сингулярности вне области сходимости. Осуществляя аналитическое продолжение, мы можем утверждать, что функции  $l$  и  $l'$  совпадают.

Прекрасным примером, демонстрирующим суть метода аналитического продолжения, может служить разница между эйлеровским и вейерштрассовским определениями  $\Gamma$ -функции. При  $\operatorname{Re} z > 0$  эйлеровское представление имеет вид

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{z-1}. \quad (3.3)$$

Этот интеграл расходится при  $\operatorname{Re} z < 0$ , поскольку при  $t \rightarrow 0$  он ведет себя как  $dt/t^{1+\operatorname{Re} z}$ , т. е. стремится к бесконечности. Однако, пользуясь выражением (3.3), можно отщипнуть причиняющую беспокойство область интегрирования, написав

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\alpha} dt t^{n+z-1} + \int_{\alpha}^{\infty} dt e^{-t} t^{z-1}, \quad (3.4)$$

где  $\alpha$  — совершенно произвольная величина. Второй интеграл хорошо определен даже при  $\operatorname{Re} z < 0$  до тех пор, пока  $\alpha > 0$ . Первый интеграл имеет простые полюса во всех точках, где  $z$  — отрицательное целое число или нуль. Тогда

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\alpha^{n+z}}{(z+n)} + \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{z-1}. \quad (3.5)$$

Это выражение справедливо всюду в  $z$ -плоскости. Более того, оно не должно зависеть от произвольного коэффициента  $\alpha$  (читатель может сам убедиться, что  $d\Gamma/d\alpha = 0$ ). При  $\alpha = 1$  мы получаем вейерштрассовское представление  $\Gamma$ -функции. Все же, чтобы изолировать особенности, нам пришлось ввести в процессе вычислений произвольный масштаб, хотя конечный результат от него не зависит.

Наша проблема заключается в том, что интегралы типа (3.2) похожи на эйлеровский интеграл. Мы же хотим найти эквивалент вейерштрассовского представления. Процедура будет следующей: 1) установим конечную область сходимости интеграла по петле в  $\omega$ -плоскости; для расходящихся интегралов эта область обычно будет лежать слева от прямой  $\omega = 2$ ; 2) построим новую функцию, которая перекрывается с интегралом по петле в его области сходимости, но определена в более

широкой области, включающей точку  $\omega = 2$ ; 3) перейдем к пределу при  $\omega \rightarrow 2$ .

Покажем, как это делается в случае однопетлевых диаграмм, следуя методу 'т Хофта и Вельтмана [1]. Возьмем в качестве примера квадратично-расходящуюся диаграмму "головастик"<sup>1)</sup>. Прежде всего расщепим область интегрирования, написав

$$d^2 \omega l \rightarrow d^4 l d^2 \omega^{-4} l.$$

Затем введем в пространстве размерности  $2\omega - 4$  полярные координаты и обозначим через  $L$  длину  $(2\omega - 4)$ -мерного  $l$ -вектора. Тогда интеграл примет вид

$$I = \int d^4 l \int d\Omega_{2\omega-4} \int_0^\infty dL L^{2\omega-5} \frac{1}{(L^2 + l^2 + m^2)}. \quad (3.6)$$

Можно провести интегрирование по углам (приложение Б), что приводит к выражению

$$I = \frac{2\pi^{\omega-2}}{\Gamma(\omega-2)} \int d^4 l \int_0^\infty dL L^{2\omega-5} \frac{1}{(L^2 + l^2 + m^2)}. \quad (3.7)$$

Оно определено не очень хорошо, поскольку при  $\omega > 1$  у него ультрафиолетовая расходимость, а, кроме того, интеграл по  $L$  расходится на нижнем пределе (в "инфракрасной" области) при всех  $\omega \leq 2$ . Следовательно, в  $\omega$ -плоскости отсутствует перекрывающаяся область, в которой интеграл  $I$  хорошо определен. Однако инфракрасная расходимость является артефактом разбиения меры интегрирования. Заметим, что написав

$$L^{2\omega-5} = \frac{1}{\omega-2} \frac{d}{dL^2} (L^2)^{\omega-2}, \quad (3.8)$$

проинтегрировав по частям по  $L^2$  и отбросив поверхностный член, мы получим

$$I = \frac{\pi^{\omega-2}}{\Gamma(\omega-1)} \int d^4 l \int_0^\infty dL^2 (L^2)^{\omega-2} \left(-\frac{d}{dL^2}\right) \frac{1}{L^2 + l^2 + m^2}, \quad (3.9)$$

если еще воспользуемся равенством  $\Gamma(\omega-1) = (\omega-2)\Gamma(\omega-2)$ . Теперь уже представление (3.9) обладает инфракрасной расходимостью при

<sup>1)</sup> Вторая диаграмма в выражении (1.26). — Прим. перев

$\omega \leq 1$  и все той же ультрафиолетовой расходимостью при  $\omega \geq 1$ , так что перекрывающаяся область сходимости все еще отсутствует. Повторим эту процедуру и в результате придем к выражению

$$I = \frac{\pi^{\omega-2}}{\Gamma(\omega)} \int d^4 l \int_0^\infty dL^2 (L^2)^{\omega-1} \left( -\frac{d}{dL^2} \right)^2 \frac{1}{L^2 + l^2 + m^2}, \quad (3.10)$$

которое уже хорошо определено при  $0 < \omega < 1$ . Отметим, что для получения ненулевой области сходимости нам пришлось сдвинуть область инфракрасной сходимости на две единицы. Если бы интеграл по петле расходился логарифмически, было бы достаточно одного такого шага.

Получив для  $I$  выражение (3.10), сходящееся в конечной области (в данном случае в области  $0 < \omega < 1$ ), мы хотим продолжить его к физической точке  $\omega = 2$ . Это делается следующим образом. Подставим в подынтегральное выражение хитроумную конструкцию

$$1 = \frac{1}{5} \left( \frac{\partial L}{\partial L} + \frac{\partial l_\mu}{\partial l_\mu} \right) \quad (3.11)$$

и проинтегрируем по частям в области сходимости. Получим

$$I = -\frac{1}{5} \frac{2\pi^{\omega-2}}{\Gamma(\omega)} \int d^4 l \int_0^\infty dL^2 \left[ l_\mu \frac{\partial}{\partial l_\mu} + L^2 \frac{\partial}{\partial L^2} \right] \frac{(L^2)^{\omega-1}}{(L^2 + l^2 + m^2)^3}. \quad (3.12)$$

После небольших алгебраических преобразований, выразив правую часть через  $I$ , придем к выражению

$$I = -\frac{3m^2}{\omega-1} \frac{2\pi^{\omega-2}}{\Gamma(\omega)} \int d^4 l \int_0^\infty dL^2 \frac{(L^2)^{\omega-1}}{(L^2 + l^2 + m^2)^4}. \quad (3.13)$$

В нем в явной форме выделен полюс при  $\omega = 1$ . Интеграл теперь расходится на верхнем пределе при  $\omega \geq 2$ . Поэтому мы повторяем процесс и вновь подставляем (3.11) в (3.13). Результат можно предсказать:

$$I = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 m^4}{(\omega-1)(\omega-2)} \frac{\pi^{\omega-2}}{\Gamma(\omega)} \int d^4 l \int_0^\infty dL^2 \frac{(L^2)^{\omega-1}}{(L^2 + l^2 + m^2)^5}. \quad (3.14)$$

Именно к нему мы и стремились. Вся расходимость теперь обязана простому полюсу при  $\omega = 2$ , так как интеграл теперь сходится.



Подведем итоги. Вначале мы определили конечный интеграл в  $\omega$ -плоскости, который по смыслу должен совпадать с тем, что мы обозначили выше  $\int d^2 \omega l F(l, k)$ ; в нашем случае это выражение (3.10), которое и является исходным для дальнейшего. Затем, если область сходимости не включает в себя точку  $\omega = 2$ , мы совершаем аналитическое продолжение с помощью трюка (3.11).

Было бы хорошо показать, что для сходящихся интегралов процедура, приводящая к (3.10), действительно дает правильный результат. Возьмем в качестве примера сходящийся интеграл

$$I = \int d^2 \omega l \frac{1}{(l^2 + m^2)^6}.$$

Нетрудно видеть, что описанная процедура приводит к выражению

$$I(\omega) = \frac{\pi^{\omega-2}}{\Gamma(\omega-1)} \int d^4 l \int_0^\infty dL^2 (L^2)^{\omega-2} \left( -\frac{d}{dL^2} \right) \frac{1}{(L^2 + l^2 + m^2)^6}, \quad (3.15)$$

которое прекрасным образом конечно при  $\omega = 2$ . Как нам и хотелось,

$$I(2) = \int d^4 l \frac{(-1)}{(L^2 + l^2 + m^2)^6} \Big|_0^\infty = \int d^4 l \frac{1}{(l^2 + m^2)^6}.$$

Таким образом, процедура действительно самосогласована.

После всей этой нудной работы обратимся к более бесцеремонной интерпретации интегралов в  $2\omega$  измерениях, представленной в приложении Б. Если бы мы слепо воспользовались формулами приложения Б, то получили бы

$$\int \frac{d^2 \omega l}{(l^2 + m^2)} = \pi^\omega \frac{\Gamma(1-\omega)}{\Gamma(1)} \frac{1}{(m^2)^{1-\omega}}. \quad (3.16)$$

Разложим это выражение вблизи  $\omega = 2$ , используя при  $n = 0, 1, 2, \dots$  и  $\epsilon \rightarrow 0$  формулу

$$\Gamma(-n + \epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \psi(n+1) + \frac{1}{2} \epsilon \left( \frac{\pi^2}{3} + \psi^2(n+1) - \psi'(n+1) \right) + O(\epsilon^2) \right], \quad (3.17)$$

где  $\psi(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma$  [ $\psi(s) = \frac{d \ln \Gamma(s)}{ds}$ ], (3.18)

$$\psi'(n+1) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}, \quad \psi'(1) = \frac{\pi^2}{6}, \quad (3.19)$$

а  $\gamma$  – постоянная Эйлера – Маскерони:

$$\psi(1) = -\gamma = -0,5772 \dots \dots \quad (3.20)$$

В результате имеем

$$\lim_{\omega \rightarrow 2} \int \frac{d^2 \omega l}{l^2 + m^2} = -\pi^2 m^2 \left[ \frac{1}{2 - \omega} + \psi(2) \right]. \quad (3.21)$$

Можно показать, что этот результат совпадает с тем, который получается интегрированием выражения (3.14).

Далее мы будем пользоваться наивными формулами приложения Б, не задумываясь об их обосновании, поскольку благодаря 'т Хофту и Вельтману мы знаем, что эти формулы законны.

### Задачи

**А.** Покажите, что наивные вычисления по формулам приложения Б и более строгая процедура, изложенная в данном параграфе, приводят для интегралов

$$I = \int d^2 \omega l \frac{1}{(l^2 + m^2)}, \quad I = \int d^2 \omega l \frac{1}{(l^2 + m^2)^2}$$

к одним и тем же результатам.

**Б.** Докажите последние четыре формулы приложения Б.

### § 4. Вычисление фейнмановских интегралов

Продолжим вычисление фейнмановских диаграмм низшего порядка в теории  $\lambda \phi^4$ , пользуясь методом вычислений, изложенным в § 3, и формулами приложения Б.

Мы видели, что метод размерной регуляризации основан на вычислении фейнмановских интегралов в  $2\omega$  измерениях, где константа связи  $\lambda$  уже более не безразмерна. Для удобства введем новую, безразмерную константу связи  $\lambda_{\text{нов}}$  в соответствии с соотношением

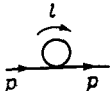
$$\lambda_{\text{стар}} = \lambda_{\text{нов}} (\mu^2)^{2-\omega}, \quad (4.1)$$

где  $\mu^4$  — произвольная константа с размерностью массы. Иначе говоря, мы вычисляем функции Грина в теории, определяемой действием

$$S_{\omega}[\varphi] = \int d^2 \omega x \left[ \frac{1}{2} \partial_{\mu} \varphi \partial_{\mu} \varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} (\mu^2)^2 - \omega \varphi^4 \right]. \quad (4.2)$$

Фейнмановские правила для нее совершенно такие же, как и для теории в четырех измерениях, кроме трех пунктов: 1) в скалярном произведении векторов сумма берется по их  $2\omega$  компонентам; 2) петлевые интегралы имеют вид  $\int d^2 \omega / (2\pi)^{2\omega}$ ; 3) константа  $-\lambda$  в вершине заменяется константой  $(-\lambda)(\mu^2)^2 - \omega$ .

Вычислим диаграммы низшего порядка в такой теории. Начнем с диаграммы "головастик" (такая диаграмма возникает от ненормального упорядочения в члене взаимодействия). Вклад этой диаграммы дается выражением



$$\equiv T = \frac{1}{2} (-\lambda)(\mu^2)^2 - \omega \int \frac{d^2 \omega l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(l^2 + m^2)} = \quad (4.3)$$

$$= - \frac{\lambda m^2}{2(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^{2-\omega} \Gamma(1-\omega), \quad (4.4)$$

где мы использовали формулу (Б.16) и вынесли вперед множитель  $m^2$ , поскольку размерность вклада этой диаграммы равна квадрату массы. Разлагая в ряд вблизи  $\omega = 2$ , получаем

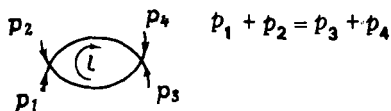
$$T = - \frac{\lambda m^2}{32 \pi^2} \left[ 1 + (2-\omega) \ln \frac{4\pi\mu^2}{m^2} + \dots \right] \left[ - \frac{1}{2-\omega} - \psi(2) + \dots \right] = \quad (4.5)$$

$$= \frac{\lambda m^2}{32 \pi^2} \left\{ \frac{1}{2-\omega} + \psi(2) - \ln \frac{m^2}{4\pi\mu^2} + O(2-\omega) \right\}. \quad (4.6)$$

Заметим, что благодаря введению произвольного масштаба  $\mu^2$  мы можем в этой формуле проследить за размерностью и что полюс в разложении функции  $\Gamma$  сокращается с первым членом разложения величины  $(4\pi\mu^2/m^2)^{2-\omega}$ , в результате чего остается конечный вклад при  $\omega \rightarrow 2$ . Такое положение сохранится при вычислении всех расходящихся диаграмм. Таким образом, мы заключаем, что расходимость в  $T$  проявляется в виде простого полюса, а конечная часть  $T$ , которая в данном случае

не зависит от внешних импульсов, полностью произвольна, поскольку на нее влияет изменение  $\mu^2$ .

Следующая диаграмма — "рыба":



По фейнмановским правилам

$$\text{Fish Loop} = \frac{1}{2} (-\lambda)^2 (\mu^2)^4^{-2\omega} \int \frac{d^2 \omega l}{(2\pi)^2 \omega} \frac{1}{(l^2 + m^2)} \frac{1}{[(l-p)^2 + m^2]} \quad (4.7)$$

Так как здесь в интеграле по петле имеется более одного пропагатора, можно для удобства ввести фейнмановскую параметризацию, основанную на формуле

$$\frac{1}{D_1^{a_1} D_2^{a_2} \dots D_k^{a_k}} = \frac{\Gamma(a_1 + a_2 + \dots + a_k)}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2) \dots \Gamma(a_k)} \int_0^1 \dots \int_0^1 dx_1 \dots dx_k \times \\ \times \frac{\delta(1 - x_1 - \dots - x_k) x_1^{a_1-1} \dots x_k^{a_k-1}}{(D_1 x_1 + \dots + D_k x_k)^{a_1 + \dots + a_k}} \quad (4.8)$$

Она позволяет в удобной форме перегруппировать импульсы в петле. В данном случае используем ее в виде

$$\frac{1}{(l^2 + m^2)[(l-p)^2 + m^2]} = \int_0^1 dx \frac{1}{[l^2 + m^2 - 2l \cdot p(1-x) + p^2(1-x)]^2} \quad (4.9)$$

Знаменатель можно переписать в виде

$$l'^2 + m^2 + p^2 x(1-x), \quad l' = l - p(1-x). \quad (4.10)$$

Так как мы имеем дело со сходящимися интегралами, можно положить  $d^2 \omega l' = d^2 \omega l$  и обозначить  $l'$  через  $l$  в интеграле по петле. В результате имеем

$$\text{Fish Loop} = \frac{\lambda^2}{2} (\mu^2)^4^{-2\omega} \int_0^1 dx \int \frac{d^2 \omega l}{(2\pi)^2 \omega} \frac{1}{[l^2 + m^2 + p^2 x(1-x)]^2} \quad (4.11)$$

Благодаря указанному приему можно теперь воспользоваться формулой (Б.16) и взять интеграл, получив при этом

$$\text{Diagram} = \frac{\lambda^2}{2} (\mu^2)^{4-2\omega} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2-\omega)}{(4\pi)^\omega} \frac{1}{[m^2 + p^2 x(1-x)]^{2-\omega}}. \quad (4.12)$$

Прежде чем производить разложение, вспомним, что размерность диаграммы равна  $(\mu^2)^{2-\omega}$ ; это мы и получили. После разложения имеем

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= (\mu^2)^{2-\omega} \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \frac{1}{2-\omega} + \psi(1) - \right. \\ &\left. - \ln\left(\frac{m^2 + p^2 x(1-x)}{4\pi\mu^2}\right) + O(2-\omega) \right\} = \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} &= (\mu^2)^{2-\omega} \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \left[ \frac{1}{2-\omega} + \psi(1) - \int_0^1 dx \times \right. \\ &\left. \times \ln\left(\frac{m^2 + p^2 x(1-x)}{4\pi\mu^2}\right) + O(2-\omega) \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Еще раз отметим, что конечная часть произвольным образом зависит от  $\mu^2$ , хотя в данном случае она зависит и от внешних импульсов. Подчеркнем, что такой произвол в конечной части связан с методом вычислений, а именно с тем, что расходящееся выражение разделяется на расходящуюся и конечную части (ведь  $\infty + 5 = \infty + 6$ !).

Остается проинтегрировать по фейнмановскому параметру  $x$ . Так как величина  $x(1-x)$  всегда положительна [ $0 < x(1-x) < 1/4$ ] в области интегрирования, аргумент логарифма всегда положителен, что позволяет легко вычислить интеграл. Воспользуемся формулой

$$\int_0^1 dx \ln \left[ 1 + \frac{4}{a} x(1-x) \right] = -2 + \sqrt{1+a} \ln \left( \frac{\sqrt{1+a} + 1}{\sqrt{1+a} - 1} \right), \quad a > 0. \quad (4.15)$$

В результате получим

$$p \rightarrow \text{Diagram} = (\mu^2)^{2-\omega} \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \left[ \frac{1}{2-\omega} + \psi(1) + 2 + \ln \frac{4\pi\mu^2}{m^2} - \right.$$

$$-\sqrt{1 + \frac{4m^2}{p^2}} \ln \left\{ \frac{\sqrt{1 + 4m^2/p^2} + 1}{\sqrt{1 + 4m^2/p^2} - 1} \right\} + O(2 - \omega), \quad (4.16)$$

При вычислении четырехточечной функции возникнут три подобных вклада с  $p = p_1 + p_2$ ,  $p = p_1 + p_3$  и  $p = p_1 + p_4$ , отвечающих вкладам  $s$ -,  $t$ - и  $u$ -каналов (предупреждение: все импульсы считаются входящими). Рассмотренная диаграмма вычислена в евклидовой области; продолжение в пространство Минковского повлечет за собой изменение знака величины  $p^2$  и потребует внимательной интерпретации результата.

Но в том виде, как это пока что записано, конечная часть не содержит никакой интересной аналитической структуры до тех пор, пока  $p^2 > 0$ . Мы вернемся к этому вопросу, когда дойдем до интерпретации результата в пространстве Минковского.

Тем же методом вычислим диаграмму "двойной ковш":

$$\underbrace{\text{8}}_q^l = \frac{1}{4} \lambda^2 (\mu^2)^4 \int \frac{d^2 \omega q}{(2\pi)^2 \omega} \frac{1}{l^2 + m^2} \int \frac{d^2 \omega q}{(2\pi)^2 \omega} \times \quad (4.17)$$

$$\times \frac{1}{(q^2 + m^2)^2} = - \frac{\lambda^2 m^2}{1024 \pi^4} \left\{ \frac{1}{(2 - \omega)^2} + \frac{1}{(2 - \omega)} \times \right.$$

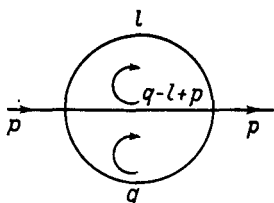
$$\times \left[ 2 \ln \frac{4\pi \mu^2}{m^2} + \psi(2) + \psi(1) \right] + 2 \ln^2 \frac{4\pi \mu^2}{m^2} +$$

$$+ 2 \ln \frac{4\pi \mu^2}{m^2} (\psi(2) + \psi(1)) + \frac{1}{2} [(\psi(2) +$$

$$+ \psi(1))^2 + \frac{2\pi^2}{3} - \psi'(2) - \psi'(1)] + O(2 - \omega) \}. \quad (4.18)$$

Отметим появление двойного полюса и произвольность вычета в простом полюсе и конечной части.

Наконец, детально вычислим диаграмму "заходящее солнце"



Полезно сделать это подробно, так как

диаграмма содержит две петли. Обозначим вклад этой диаграммы через  $\Sigma(p)$ . По фейнмановским правилам

$$\Sigma(p) = \frac{\lambda^2}{6} (\mu^2)^4 - 2\omega \int \frac{d^2 \omega l}{(2\pi)^2 \omega} \int \frac{d^2 \omega q}{(2\pi)^2 \omega} \times \frac{1}{(l^2 + m^2)(q^2 + m^2)([q + p - l]^2 + m^2)}. \quad (4.19)$$

В диаграммах, содержащих несколько петель, ультрафиолетовые расходимости проникают в интегралы по параметру. Желательно иметь в этих интегралах возможно меньше расходимостей. Это означает, что, прежде чем вводить фейнмановские параметры, нужно с помощью специальной техники преобразовать выражение (4.19), несмотря на то что интеграл в худшем случае расходится логарифмически. Воспользуемся следующим приемом. Преобразуем подынтегральное выражение в формуле (4.19) с учетом равенства

$$1 = \frac{1}{4\omega} \left[ \frac{\partial l_\mu}{\partial l_\mu} + \frac{\partial q_\mu}{\partial q_\mu} \right] \quad (4.20)$$

и выполним интегрирование по частям; находим

$$\Sigma(p) = - \frac{1}{4\omega} \frac{\lambda^2}{6} (\mu^2)^4 - 2\omega \int \frac{d^2 \omega l}{(2\pi)^2 \omega} \int \frac{d^2 \omega q}{(2\pi)^2 \omega} \left( l_\mu \frac{\partial}{\partial l_\mu} + q_\nu \frac{\partial}{\partial q_\nu} \right) \frac{1}{(l^2 + m^2)(q^2 + m^2)([q + p - l]^2 + m^2)}, \quad (4.21)$$

причем мы отбросили поверхностные члены, имея в виду аналитическое

продолжение, о котором говорилось в связи с однопетлевыми диаграммами (см. работы [1, 2]).

После явного дифференцирования получаем

$$\Sigma(p) = - \frac{1}{(2\omega - 3)} \frac{\lambda^3}{6} (\mu^2)^{4-2\omega} \int \frac{d^2\omega l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{d^2\omega q}{(2\pi)^{2\omega}} \times$$

$$\times \frac{3m^2 + p \cdot (p + q - l)}{(q^2 + m^2)(l^2 + m^2)[(q - l + p)^2 + m^2]^2} = \quad (4.22)$$

$$= - \frac{1}{2\omega - 3} \frac{\lambda^2}{6} (\mu^2)^{4-2\omega} [3m^2 K(p) + p_\mu K_\mu(p)], \quad (4.23)$$

$$K(p) = \int \frac{d^2\omega l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{d^2\omega q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(q^2 + m^2)(l^2 + m^2)[(q - l + p)^2 + m^2]}, \quad (4.24)$$

$$K_\mu(p) = \int \frac{d^2\omega l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{d^2\omega q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{(p + q - l)_\mu}{(q^2 + m^2)(l^2 + m^2)[(q - l + p)^2 + m^2]^2}, \quad (4.25)$$

причем по ходу вычислений мы не задумываясь произвели несколько линейных замен переменных в импульсах в петлях. Теперь видно, что  $K_\mu(p)$  расходится логарифмически, а  $K(p)$  — линейно. Вычислим сначала  $K(p)$ .

Введем фейнмановские параметры сначала для одной петли, начав с сильнее расходящейся. Получим

$$K(p) = \int \frac{d^2\omega l}{(2\pi)^{2\omega}} \int \frac{d^2\omega q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(q^2 + m^2)^2} \times$$

$$\times \int_0^1 dx \frac{1}{[l^2 + m^2 + (p + q)^2 x(1 - x)]^2}. \quad (4.26)$$

Пользуясь формулой (Б.16), интегрируем по  $l$ , что дает



$$K(p) = \frac{\Gamma(2-\omega)}{(4\pi)^\omega} \int_0^1 dx \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(q^2 + m^2)^2} \times \\ \times \frac{1}{[m^2 + (p+q)^2 x(1-x)]^{2-\omega}}. \quad (4.27)$$

Вновь используя формулу (4.8), перепишем выражение в виде

$$K(p) = \frac{\Gamma(4-\omega)}{(4\pi)^\omega} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{\omega-2} \int_0^1 dy y^{1-\omega} (1-y) \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \times \\ \times [q^2 + p^2 y(1-y) + m^2(1-y + \frac{y}{x(1-x)})]^{2-\omega}. \quad (4.28)$$

Наконец, интегрирование по  $q$  дает

$$K(p) = \frac{\Gamma(4-2\omega)}{(4\pi)^{2\omega}} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{\omega-2} \int_0^1 dy y^{1-\omega} (1-y) \times \\ \times [p^2 y(1-y) + m^2(1-y + \frac{y}{x(1-x)})]^{2\omega-4}. \quad (4.29)$$

Для удобства введем величину

$$2 - \omega \equiv \epsilon$$

(которая положительна из-за аналитического продолжения) и разложим (4.29) вблизи  $\epsilon = 0$ . Интеграл по параметру имеет полюс при  $\epsilon = 0$ , возникающий от точки  $y = 0$ . Напишем

$$K(p) = \frac{\Gamma(2\epsilon)}{(4\pi)^{4-2\epsilon}} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\epsilon} \int_0^1 dy y^{-1+\epsilon} (1-y) \times \\ \times [p^2 y(1-y) + m^2(1-y + \frac{y}{x(1-x)})]^{-2\epsilon}. \quad (4.31)$$

Пользуясь соотношением

$$y^{-1+\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \frac{d}{dy} y^\epsilon \quad (4.32)$$

и интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned}
 K(p) = & \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{(4\pi)^4 - 2\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\varepsilon} \int_0^1 dy y^\varepsilon \times \\
 & \times \left\{ 1 + 2\varepsilon(1-y) \frac{d}{dy} \ln \left[ p^2 y(1-y) + m^2(1-y) + \frac{y}{x(1-x)} \right] \right\} \times \\
 & \times \left[ p^2 y(1-y) + m^2(1-y) + \frac{y}{x(1-x)} \right]^{-2\varepsilon}. \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

Теперь уже можно взять интеграл по параметру, разлагая вблизи  $\varepsilon = 0$ .

Вычисление  $K_\mu$  производится аналогично и приводит к выражению

$$\begin{aligned}
 p_\mu K_\mu = & p^2 \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{(4\pi)^4 - 2\varepsilon} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{-\varepsilon} \int_0^1 dy y^\varepsilon (1-y) \left[ p^2 y(1-y) + \right. \\
 & \left. + m^2(1-y) + \frac{y}{x(1-x)} \right]^{-2\varepsilon}. \quad (4.34)
 \end{aligned}$$

В данном случае интеграл по параметру сходится, так что сингулярности по  $p^2$  сводится только к простому полюсу.

Разложение вблизи  $\varepsilon = 0$  дает

$$K(p) = \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{(4\pi)^4 - 2\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \{ 1 + \varepsilon - 2\varepsilon \ln m^2 + O(\varepsilon^2) \}, \quad (4.35)$$

$$p_\mu K_\mu(p) = p^2 \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{(4\pi)^4 - 2\varepsilon} \left[ \frac{1}{2} + O(\varepsilon) \right]. \quad (4.36)$$

Члены  $O(\varepsilon^2)$  и  $O(\varepsilon)$  в интеграле по параметру для  $K(p)$  и  $p_\mu K_\mu(p)$  очень сложны и дают вклад в конечную часть  $\Sigma(p)$ .

Собирая все результаты вместе, находим

$$\begin{aligned}
 \Sigma(p) = & - \frac{\lambda^2}{6(16\pi^2)^2} \left[ \frac{3m^2}{2\varepsilon^2} + \frac{3m^2}{\varepsilon} \left( \frac{3}{2} + \psi(1) + \ln \frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right) + \right. \\
 & \left. \frac{1}{4\varepsilon} p^2 + \text{конечная часть} \right]. \quad (4.37)
 \end{aligned}$$

Заметим, что теперь уже произвол возник и на уровне простого полюса (так же как и в конечной части).

Конечную часть функции  $\Sigma(p)$  вычислить очень трудно. Это невозможно сделать в замкнутой форме, и приходится вводить "дилогарифм" (или функцию Спенса), определяемый как

$$\text{Li}_2(x) \equiv -\int_0^1 \frac{dt}{t} \ln(1 - xt), \quad (4.38)$$

Опыт показывает, что, когда присутствуют массы, вычисление конечных частей двухпетлевых диаграмм требует очень длинных выкладок.

### Задачи

А. Покажите, что при  $a > 0$

$$I(a) = \int_0^1 dx \ln\left[1 + \frac{4}{a} x(1-x)\right] = -2 + \sqrt{1+a} \ln \frac{\sqrt{1+a} + 1}{\sqrt{1+a} - 1}.$$

\*Б. Положите теперь  $z = 4/\mu$ . Найдите структуру сингулярностей функции  $I(z)$  в комплексной  $z$ -плоскости и установите вид  $I(z)$  при действительных  $z$ .

В. Найдите вид конечной части функции  $\Sigma(p)$  при  $m^2 = 0$ .

Г. Выведите выражение для  $p_{\mu_1} K_{\mu_2}$  [формула (4.34)].

\*\*Д. Найдите  $K(p)$  в порядке  $\epsilon^2$  и выразите получившиеся интегралы через дилогарифмы.

## § 5. Перенормировка

В предыдущих параграфах мы показали, как вычислять фейнмановские интегралы. Мы установили, что в теории  $\lambda\varphi^4$  некоторые диаграммы имеют ультрафиолетовые расходимости, причем расходимости появляются только в двух- и четырехточечных функциях Грина (примитивно расходящиеся диаграммы). Когда к этим диаграммам была применена размерная регуляризация, бесконечности свелись к полюсам по переменной  $\epsilon = 2 - n/2 > 0$  в комплексной плоскости числа измерений, где  $n$  — число измерений пространства-времени; вдобавок, конечная часть этих диаграмм оказалась произвольной, зависящей в нашей схеме от загадочного параметра массы  $\mu$ .

Теперь мы покажем, как можно устранить эти полюса последовательно в каждом порядке по  $\lambda$ . Метод очень прост: изменим фейнманов-

ские правила в каждом порядке так, чтобы получить конечный результат при  $\epsilon \rightarrow 0$ . В качестве первого примера рассмотрим диаграмму "головастик":

$$\text{---}\bigcirc\text{---} = m^2 \frac{\hat{\lambda}}{2} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \psi(2) - \ln \hat{m}^2 + O(\epsilon) \right], \quad (5.1)$$

$$\text{где } \hat{\lambda} \equiv \frac{\lambda}{16\pi^2}, \quad \hat{m}^2 = \frac{m^2}{4\pi\mu^2}. \quad (5.2)$$

Содержащуюся здесь бесконечность можно устранить, добавив к лагранжиану  $\mathcal{L}$  дополнительный член

$$\frac{m^2}{4} \hat{\lambda} \left[ \frac{1}{\epsilon} + F_1(\epsilon, \hat{m}^2) \right] \varphi^2, \quad (5.3)$$

который мы рассматриваем как дополнительный член взаимодействия. Здесь  $F_1$  — произвольная безразмерная функция, аналитическая при  $\epsilon \rightarrow 0$ ; наличие этой функции отражает произвольность самой процедуры. Дополнительный член приводит к новому фейнмановскому правилу, изображаемому следующим образом:

$$\text{---}\times\text{---} = -\frac{1}{2} m^2 \hat{\lambda} \left( \frac{1}{\epsilon} + F_1 \right). \quad (5.4)$$

Поэтому если мы вычисляем обратный пропагатор в порядке  $O(\lambda)$ , то

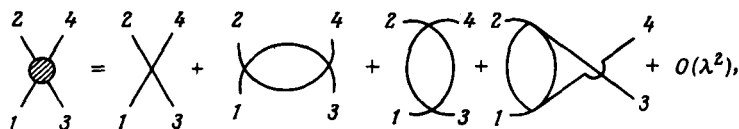
$$\text{---}\bigcirc\text{---} = \text{---} + \text{---}\bigcirc\text{---} + \text{---}\times\text{---} + O(\lambda^2),$$

$$\tilde{\Gamma}_{\text{нов}}^{(2)}(p) = p^2 + m^2 \left[ 1 - \frac{1}{2} \hat{\lambda} (\psi(2) - \ln \hat{m}^2 - F_1) \right] + O(\lambda^2) \quad (5.5)$$

(следует помнить, что поправка к обратному пропагатору при обращении приобретает знак минус). Эта весьма наивная процедура делает теорию конечной в порядке  $\lambda$ . Дополнительный член (5.3) называется *контрчленом*. Чрезвычайно важно то, что его зависимость от поля (и производных поля) такая же, как и у члена, уже имеющегося в лагранжиане  $\mathcal{L}$  (в данном случае массового члена).

Переходим к порядку  $\lambda^2$ . Одночастично-неприводимая (ОЧН) четы-

рехточечная функция дается диаграммами



$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}_{(p_1, p_2, p_3, p_4)}^{(4)} &= -\mu^{2\epsilon} \lambda \left[ 1 - \frac{3}{2} \widehat{\lambda} \left( \frac{1}{\epsilon} + \psi(1) + 2 - \ln \widehat{m}^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{3} A(s, t, u) + O(\epsilon) \right) \right] + O(\lambda^3), \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\text{где } A(s, t, u) = \sum_{z=s, t, u} \left( 1 + \frac{4m^2}{z} \right)^{1/2} \ln \frac{\sqrt{1 + 4m^2/z} + 1}{\sqrt{1 + 4m^2/z} - 1} \quad (5.7)$$

и  $s, t, u$  — мандельштамовские переменные:

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 + p_3)^2, \quad u = (p_1 + p_4)^2. \quad (5.8)$$

В том виде, как она написана, функция  $\widehat{\Gamma}^{(4)}$  расходится при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Чтобы исправить положение, добавим еще один член к  $\mathcal{L}$ :

$$\frac{1}{4!} \mu^{2\epsilon} \lambda \frac{3\widehat{\lambda}}{2} \left[ \frac{1}{\epsilon} + G_1(\epsilon, \widehat{m}^2) \right] \varphi^4, \quad (5.9)$$

где  $G_1$  — произвольная безразмерная функция переменной  $\epsilon$ , аналитическая при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Этот новый контрчлен приводит к дополнительному фейнмановскому правилу, изображаемому в виде

$$\text{шaded vertex} = -\frac{3}{2} \mu^{2\epsilon} \widehat{\lambda} \left[ \frac{1}{\epsilon} + G_1 \right]. \quad (5.10)$$

Он добавляется при вычислении новой функции  $\Gamma^{(4)}$ , приводя при  $\epsilon \rightarrow 0$  к конечному результату:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma}_{\text{нов}}^{(4)} &= \text{cross} + \text{bubble} + \text{two-bubbles} + \text{triangle} + \text{shaded vertex} = \\ &= -\mu^{2\epsilon} \widehat{\lambda} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \widehat{\lambda} \left[ -G_1 + \psi(1) + 2 - \ln \widehat{m}^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{3} A(s, t, u) \right] \right\} + O(\lambda^3). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Аналогично можно вычислить вклад в  $\tilde{\Gamma}^{(2)}$  порядка  $O(\lambda^2)$ , но здесь уже нужно использовать дополнительные фейнмановские правила (5.4) и (5.10). В диаграммном представлении для обратного пропагатора получим

$$\begin{aligned} \text{---} \textcircled{\text{X}} \text{---} &= \text{---} \text{---} + \text{---} \textcircled{\text{O}} \text{---} + \text{---} \text{X} \text{---} + \\ &+ \text{---} \textcircled{\text{O}} \text{---} + \text{---} \textcircled{\text{X}} \text{---} + \text{---} \textcircled{\text{O}} \text{---} + \text{---} \textcircled{\text{O}} \text{---}, \end{aligned}$$

где дополнительные фейнмановские правила привели в данном порядке к двум новым диаграммам. Они легко вычисляются (см. задачу). Оказывается, что

$$\text{---} \textcircled{\text{X}} \text{---} = \frac{m^2}{4} \hat{\lambda}^2 \left\{ \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} [\psi(1) + F_1, -\ln \hat{m}^2] + \dots \right\}, \quad (5.13)$$

где мы показали только полюса по  $\epsilon$ ; кроме того,

$$\text{---} \textcircled{\text{O}} \text{---} = \frac{3m^2}{4} \hat{\lambda}^2 \left\{ \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} [\psi(2) + G_1, -\ln \hat{m}^2] + \dots \right\}, \quad (5.14)$$

Сравнивая с диаграммой "двойной ковш" из предыдущего параграфа

$$\text{---} \textcircled{\text{O}} \text{---} = - \frac{m^2}{4} \hat{\lambda}^2 \left\{ \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} [\psi(2) + \psi(1) - 2 \ln \hat{m}^2] + \dots \right\}, \quad (5.15)$$

замечаем, что двойной полюс в последнем выражении в точности сокращается с контрчленной диаграммой (5.13), хотя простой полюс остается. Это явствует из диаграмм, поскольку сумма  $\text{---} \textcircled{\text{O}} \text{---} + \text{---} \text{X} \text{---}$

по определению конечна. Складывая все диаграммы, находим

$$\begin{aligned} \text{---} \textcircled{\text{X}} \text{---} &= - \frac{\hat{\lambda}^2}{24\epsilon} p^2 + \frac{m^2}{2} \lambda^2 \left[ \frac{1}{\epsilon^2} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2\epsilon} (F_1 + 3G_1 - 1) + \dots \right] + O(\lambda^2), \quad (5.16) \end{aligned}$$

где опять не выписана конечная часть. И вновь мы сталкиваемся с расходящимся выражением при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Но, о чудо! Члены с  $\ln \hat{m}^2$ , присутствующие при простых полюсах отдельных диаграмм, исчезли, так же как и эйлеровская постоянная, содержащаяся в каждой функции

$\psi(n)$ , но отсутствующая в разности

$$\psi(n+1) - \psi(n) = \frac{1}{n}. \quad (5.17)$$

Чтобы сократить полюса в (5.16), мы вводим новый массовый контрчлен, так что фейнмановское правило для массового контрчлена принимает вид

$$\text{---} \times \text{---} = - \frac{m^2}{2} \left[ \frac{\hat{\lambda}^2}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \left( \hat{\lambda} + \frac{\hat{\lambda}^2}{4} (F_1 + 3G_1 - 1) \right) + \hat{\lambda}^2 F_2 + \hat{\lambda} F_1 \right], \quad (5.18)$$

где  $F_2$  — функция переменных  $\epsilon$  и  $\hat{m}^2$ , произвольная, но конечная при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Этот член порождается добавочным контрчленом в лагранжиане

$$\frac{m^2}{4} \varphi^2 \left\{ \frac{\hat{\lambda}^2}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \left[ \hat{\lambda} + \frac{\hat{\lambda}^2}{4} (F_1 + 3G_1 - 1) \right] + \hat{\lambda}^2 F_2 + \hat{\lambda} F_1 \right\}. \quad (5.19)$$

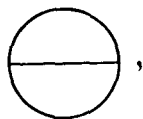
Он отвечает только за один тип бесконечностей в  $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ . Другой тип бесконечностей сокращается путем добавления к нашему все разрастающемуся лагранжиану еще одного члена

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi \left[ - \frac{\hat{\lambda}^2}{24\epsilon} - \hat{\lambda}^2 H_2(\epsilon, \hat{m}^2) \right], \quad (5.20)$$

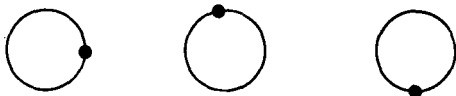
где  $H_2$  — произвольная функция, аналитическая при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Таким образом, проделав все это, мы получаем возможность устранить ультрафиолетовые расходимости в порядке  $\lambda^2$ . Ясно, что такую игру можно продолжать, пока не надоест: вычисляем диаграммы порядка  $\lambda^3$ , пользуясь исходным лагранжианом  $\mathcal{L}$  и контрчленами (5.19) и (5.20); затем вводим новые контрчлены, которые выбраны с точностью  $O(\lambda^2)$  так, чтобы сократить новые расходимости, и т.д. До сих пор примечательным в этом процессе было то, что все необходимые для устранения расходимостей контрчлены порождали новые взаимодействия того же типа, как и те, которые уже содержатся в исходном лагранжиане; нам не пришлось [с точностью  $O(\lambda^2)$ ] вводить контрчлены, соответствующие членам отсутствующего в  $\mathcal{L}$  типа. Если бы удалось показать, что столь примечательное соответствие сохраняется во всех порядках

по  $\lambda$ , то мы сказали бы, что теория перенормируема. Мы не будем здесь пытаться доказать это для теории  $\lambda\phi^4$ , а лишь укажем на то место, где вся процедура может оказаться несостоятельной.

Рассмотрим типичную двухпетлевую диаграмму



в которой удалены все внешние хвосты. Из-за различных петлевых интегрирований эта диаграмма расходится. В соответствии с нашими новыми правилами для контрчленов к указанной диаграмме следует добавить три контрчленные диаграммы



Здесь каждая линия  $\text{---}\bullet\text{---}$  представляет контрчленную вершину низшего порядка, необходимую для сокращения бесконечности, возникающей в однопетлевой диаграмме. Поэтому такие контрчленные диаграммы будут содержать член  $1/\epsilon$ , проистекающий от вклада диаграммы

$\text{---}\bullet\text{---}$ , умноженный на  $\ln p^2$ , где  $p$  — некоторый импульс, возникающий при интегрировании по петле. Следовательно, все это будет выглядеть так, будто указанные члены порождают в лагранжиане контрчлены вида  $\ln p^2/\epsilon$ , которые не соответствуют никакому члену в  $\mathcal{L}$ , так как вычет  $\ln p^2$  чрезвычайно нелокален в координатном пространстве. Подобные члены — это ложка дегтя в бочке меда. В этом заключается знаменитая проблема *перекрывающихся расходимостей*. Внимательное изучение приведенных диаграмм показывает, что сумма всех диаграмм не содержит никаких полюсов с логарифмическим вычетом: они сокращаются с соответствующими полюсами, содержащимися в двухпетлевой диаграмме. Мы на самом деле видели пример этого чуда, когда члены с  $\ln^2$  сократились с вычетом простого полюса в формуле (5.16). (Подробнее см. в работе [1].) Критическим пунктом при доказательстве перенормируемости является возможность доказать, что эти перекрывающиеся расходимости действительно сокращаются.

Предположим, что все это так и есть и что для обеспечения конечности теории в произвольном порядке по  $\lambda$  нужны только такие контрчлены, которые соответствуют исходному лагранжиану  $\mathcal{L}$ . Это означает.



что тот лагранжиан, который приводит к конечным ответам, имеет вид

$$\mathcal{L}^{\text{пер}} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{контр}}, \quad (5.21)$$

где  $\mathcal{L}$  — наш исходный лагранжиан,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \mu^{2\epsilon} \varphi^4, \quad (5.22)$$

а  $\mathcal{L}_{\text{контр}}$  — лагранжиан контрчленов,

$$\mathcal{L}_{\text{контр}} = \frac{1}{2} A \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi + \frac{1}{2} m^2 B \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \mu^{2\epsilon} C \varphi^4. \quad (5.23)$$

Он имеет (по предположению, которое проверено в порядке  $O(\lambda^2)$ ) в точности тот же вид, что и  $\mathcal{L}$ , но со специально подобранными  $A$ ,  $B$  и  $C$ , так что функции Грина, порождаемые лагранжианом  $\mathcal{L}^{\text{пер}}$ , конечны при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Определив новые поля и параметры, можно переписать  $\mathcal{L}^{\text{пер}}$  в виде

$$\mathcal{L}^{\text{пер}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_0 \partial_\mu \varphi_0 + \frac{1}{2} m_0^2 \varphi_0^2 + \frac{\lambda_0}{4!} \varphi_0^4, \quad (5.24)$$

$$\text{где } \varphi_0 \equiv (1 + A)^{1/2} \varphi \equiv Z_\varphi^{1/2} \varphi, \quad (5.25)$$

$$m_0^2 = m^2 \frac{1 + B}{1 + A} = m^2 (1 + B) Z_\varphi^{-1}, \quad (5.26)$$

$$\lambda_0 = \lambda \mu^{2\epsilon} \frac{1 + C}{(1 + A)^2} = \lambda \mu^{2\epsilon} (1 + C) Z_\varphi^{-2} \quad (5.27)$$

так называемые *голые* поле, масса и константа связи. Заметим, что  $\mathcal{L}^{\text{пер}}$  выглядит совершенно так же, как  $\mathcal{L}$ , если не считать обозначений параметров и поля. В то же время  $\mathcal{L}^{\text{пер}}$  приводит к конечной теории, а  $\mathcal{L}$  — нет. Это показывает, что, хитроумно запрятав все бесконечности в  $\varphi_0$ ,  $m_0$  и  $\lambda_0$ , мы можем сделать теорию конечной. После этого бесконечности поглощаются перенормировкой. Все голые величины расходятся при  $\epsilon \rightarrow 0$ , тогда как (перенормированные) величины  $m$  при  $\epsilon \rightarrow 0$  принимают конечные (но произвольные) значения. Последние следует отождествить с физи-

ческими параметрами теории. В подходе, основанном на интеграле по траекториям, производится интегрирование по полям; отсюда можно убрать изменение масштаба полей в множитель  $Z_\varphi$ , если одновременно соответствующим образом изменить масштаб источника, определив голый источник

$$J_0 = Z_\varphi^{-1/2} J \quad (5.28)$$

или голое классическое поле

$$\Phi_{\text{кл}0} = Z_\varphi \Phi_{\text{кл}}. \quad (5.29)$$

Взяв за исходный новый лагранжиан (5.21), мы получим функции Грина предыдущего параграфа, в которых  $m$  и  $\lambda$  заменены величинами  $m_0$  и  $\lambda_0$ . Но выразив голые параметры через физические параметры  $m$  и  $\lambda$  и подходящим образом перенормировав  $J$ , мы получим конечные функции Грина. В случае ОЧН-функций Грина это равенство имеет вид

$$\tilde{\Gamma}_0^{(n)}(p_1, \dots, p_n; \lambda_0, m_0, \epsilon) = Z_\varphi^{-n/2} \tilde{\Gamma}^{(n)}(p_1, \dots, p_n; \lambda, m, \mu, \epsilon), \quad (5.30)$$

где  $\tilde{\Gamma}^{(n)}$  — функции, конечные при  $\epsilon \rightarrow 0$ . В этом равенстве можно либо рассматривать голые параметры как функции перенормированных, либо считать голые параметры независимыми переменными; в последнем случае одетые параметры являются функциями голых. Заметим теперь, что левая часть равенства (5.30) не зависит от  $\mu$ , тогда как правая явно, а также и неявно (через  $\lambda$  и  $m$ ) зависит от  $\mu$ . Поэтому, дифференцируя обе части равенства (5.30) по  $\mu$ , мы получим дифференциальное уравнение, отражающее всю магию перенормировки<sup>1)</sup>:

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \mu \frac{\partial m}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial m} - \frac{n}{2} \mu \frac{\partial \ln Z_\varphi}{\partial \mu} \right) \tilde{\Gamma}^{(n)} = 0. \quad (5.31)$$

Красота этого уравнения в том, что оно содержит только перенормированные функции Грина  $\tilde{\Gamma}^{(n)}$ , которые конечны при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Различные производные возникают вследствие неявной зависимости  $\tilde{\Gamma}^{(n)}$  от  $\mu$

<sup>1)</sup> Это уравнение, отражающее групповой характер конечных перенормировок функций Грина, отвечающих различным рецептам перенормировки, называется уравнением ренормализационной группы (ренормгруппы). — Прим. перев.

через  $\lambda$  и  $m$ . Определим коэффициенты

$$\beta(\lambda, \frac{m}{\mu}, \epsilon) \equiv \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu}, \quad (5.32)$$

$$\gamma_d(\lambda, \frac{m}{\mu}, \epsilon) \equiv \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \ln Z_\varphi}{\partial \mu}, \quad (5.33)$$

$$\gamma_m(\lambda, \frac{m}{\mu}, \epsilon) \equiv \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \ln m^2}{\partial \mu}, \quad (5.34)$$

Они аналитичны при  $\epsilon \rightarrow 0$ , безразмерны и зависят только от  $\lambda$  и  $m/\mu$ .

С другой стороны,  $\Gamma^{(n)}$  по построению имеет размерность, равную  $4 - n + \epsilon(n - 2)$ , которую можно понимать как суммарную степень однородности функции  $\Gamma^{(n)}$  по ее размерному параметру, т.е.

$$\left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + s \frac{\partial}{\partial s} + m \frac{\partial}{\partial m} - [4 - n + \epsilon(n - 2)] \right\} \times \\ \times \Gamma^{(n)}(s p; m, \lambda, \mu, \epsilon) = 0, \quad (5.35)$$

где мы ввели масштаб  $s$  для импульсов. Это уравнение в сочетании с (5.31) можно, исключив  $\mu \partial / \partial \mu$ , превратить в уравнение, описывающее масштабные свойства  $\tilde{\Gamma}^{(n)}$ . Переходя к пределу при  $\epsilon \rightarrow 0$ , получаем

$$\left\{ -s \frac{\partial}{\partial s} + \beta(\lambda, \frac{m}{\mu}) \frac{\partial}{\partial \lambda} + [\gamma_m(\lambda, \frac{m}{\mu}) - 1] m \frac{\partial}{\partial m} - \right. \\ \left. - n \gamma_d(\lambda, \frac{m}{\mu}) + 4 - n \right\} \Gamma^{(n)}(s p, m, \lambda, \mu) = 0. \quad (5.36)$$

В выписанном уравнении суммировано поведение  $\tilde{\Gamma}^{(n)}$  при изменении масштаба входящих в  $\tilde{\Gamma}^{(n)}$  импульсов. (Впервые уравнение подобного типа для КЭД было получено Гелл-Манном и Лоу [3]). Если бы мы могли его решить, то узнали бы, как функции Грина при значениях импульсов  $s p$  связаны с теми же функциями при некоторых исходных значениях  $p$ . Трудность решения уравнения (5.36) связана с тем, что коэффициенты  $\beta$ ,  $\gamma_d$  и  $\gamma_m$  зависят от двух переменных  $\lambda$  и  $m/\mu$ . Эти коэффициенты можно вычислить явно в каждом порядке теории возмущений, но в данный момент они совершенно произвольны, поскольку мы еще не установили, чему равны конечные части контрчленов. Это будет сделано в

следующем параграфе, где будут исследованы различные "рецепты перенормировки". Сейчас отметим лишь, что указанные коэффициенты зависят от способа выбора конечных частей контрчленов.

Голые параметры можно представить в виде рядов Лорана по перенормированным параметрам:

$$\lambda_0 = \mu^{2\epsilon} \left( a_0 \left( \lambda, \frac{m}{\mu}, \epsilon \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \left( \lambda, \frac{m}{\mu} \right)}{\epsilon^k} \right), \quad (5.37)$$

$$m_0^2 = m^2 \left( b_0 \left( \lambda, \frac{m}{\mu}, \epsilon \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k \left( \lambda, \frac{m}{\mu} \right)}{\epsilon^k} \right), \quad (5.38)$$

$$Z_{\phi} = c_0 \left( \lambda, \frac{m}{\mu}, \epsilon \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k \left( \lambda, \frac{m}{\mu} \right)}{\epsilon^k}, \quad (5.39)$$

где  $a_0$ ,  $b_0$  и  $c_0$  аналитичны при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Сравнивая с уже вычисленными с точностью  $O(\lambda^2)$  контрчленами, находим

$$a_0 \left( \lambda, m/\mu, \epsilon \right) = \lambda \left( 1 + \frac{3}{2} \hat{\lambda} G_1 \right) + O(\lambda^3), \quad (5.40)$$

$$b_0 \left( \lambda, m/\mu, \epsilon \right) = 1 + \frac{1}{2} \left( \hat{\lambda} F_1 + \hat{\lambda}^2 F_2 \right) + \hat{\lambda}^2 H_2 + O(\lambda^3), \quad (5.41)$$

$$c_0 \left( \lambda, m/\mu, \epsilon \right) = 1 - \hat{\lambda}^2 H_2 \left( \epsilon, m/\mu \right) + O(\lambda^3), \quad (5.42)$$

$$a_1 \left( \lambda, m/\mu \right) = \frac{3}{2} \lambda^2 / 16\pi^2 + O(\lambda^3), \quad (5.43)$$

$$b_1 \left( \lambda, m/\mu \right) = \frac{1}{2} \left[ \hat{\lambda} + \hat{\lambda}^2 / 4 (F_1 + 3G_1 - 1) \right] + \hat{\lambda}^2 / 24 + O(\lambda^3), \quad (5.44)$$

$$b_2 \left( \lambda, m/\mu \right) = \frac{1}{2} \hat{\lambda}^2 + O(\lambda^3), \quad (5.45)$$

$$c_1 \left( \lambda, m/\mu \right) = -\hat{\lambda}^2 / 24 + O(\lambda^3). \quad (5.46)$$

Заметим, что в этих формулах коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  зависят от  $m/\mu$  только через неизвестные функции  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $G_1$ ,  $H_2$ . Эвристически это можно объяснить следующим образом. Контрчлены исполь-

зуются для исключения тех расходимостей, которые возникают при очень больших масштабах импульсов (масс). Поэтому любой фиксированный массовый параметр не должен играть никакой роли. Следовательно, до тех пор пока последовательно в каждом порядке теории возмущений контрчлены не имеют конечной части, вычеты в их полюсах не должны зависеть от  $m$ . Именно это и отражают формулы (5.40) – (5.46). Сказанное лежит в основе независящего от масс рецепта перенормировки, на котором мы остановимся в следующем параграфе. В зависимости коэффициентов от произвольных конечных частей контрчленов отражается зависимость  $\beta$ - и  $\gamma$ -функций от выбранного априори рецепта. Отсюда вытекает, что не следует пытаться найти решение уравнения ренормгруппы (5.31) до тех пор, пока не выбран рецепт перенормировки. Техническая трудность при нахождении решений связана с тем, что коэффициенты зависят одновременно от  $\lambda$  и  $m/\mu$ . Но, как мы увидим, существует рецепт, при котором коэффициенты становятся не зависящими от масс, что чрезвычайно облегчает решение уравнения (5.31). Иначе приходится решать (5.31) в области, где можно пренебречь массами, т.е. там, где импульсы велики по сравнению с исходными массовыми параметрами.


В заключение заметим, что можно вывести и другой тип уравнения ренормгруппы, полученный впервые Калланом [4] и Симанчиком [5]. В уравнении этого типа изучается изменение функций  $\tilde{\Gamma}$  в зависимости от физической массы. Коэффициенты  $\beta$  и  $\gamma$  зависят только от  $\lambda$ ; члены с  $\gamma_m$  и  $\mu d/d\mu$  вообще отсутствуют, а вместо них имеется неоднородный член, которым можно пренебречь в пределе малых масс или, что то же, больших импульсов.

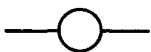
### Задачи

А. Рассчитайте вклад дополнительных контрчленных диаграмм (5.12) и (5.13) с учетом конечных частей.

Б. Покажите, что с точностью  $O(\lambda^2)$  сам пропагатор конечен.

Указание: пропагатор содержит одночастично-приводимые диаграммы.

\* \* В. Покажите, что в теории  $\lambda\varphi^3$  перекрывающиеся расходимости от диаграммы  в действительности компенсируются контрчленной диаграммой, регуляризующей однопетлевую диаграмму



## § 6. Рецепты перенормировки

В предыдущем параграфе мы детально осуществили процедуру перенормировки в теории  $\lambda\phi^4$ . Исключение расходимостей привело, помимо произвольного масштаба  $\mu$ , к дополнительному произволу, отраженному в функциях  $F_1, F_2, G_1, H_2, \dots$ , составляющих конечную часть контрчленов. Из структуры того лагранжиана, который приводит к конечным результатам,

$$\mathcal{L}_{\text{пер}} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{контр}}, \quad (6.1)$$

явствует, что конечная часть  $\mathcal{L}_{\text{контр}}$  может быть устранена переопределением (или конечной перенормировкой) исходных начальных параметров, содержащихся в  $\mathcal{L}$ , поскольку  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}_{\text{контр}}$  имеют одинаковую структуру. Отсюда вытекает, что конечную часть контрчленов можно фиксировать, только определив параметры, входящие в  $\mathcal{L}$ . Однако способ определения  $m, \lambda$  и  $\phi$  содержит много произвола, и он выбирается либо из соображений удобства, либо с учетом требований сходимости теории возмущений.

В некоторых случаях можно непосредственно связать перенормированные параметры с физически измеримыми величинами. Именно так обстоит дело в КЭД, где физический электрический заряд приравнивается значению вершинной функции в томсоновском пределе.

Конкретное задание масштаба путем приравнивания перенормированных параметров соответствующим функциям Грина в значительной степени произвольно (в евклидовом пространстве); есть лишь одно важное ограничение в случае теорий, включающих безмассовые частицы. Такие теории приводят к инфракрасно-расходящимся функциям Грина при нулевых значениях входных импульсов. Было бы неразумно выбирать точку вычитания при том значении масштаба, при котором функция Грина расходится. Подобных точек следует избегать. Позже, когда амплитуда будет продолжаться в пространство Минковского, масштаб вычитания проявится при пространственно-подобных значениях входных импульсов и не будет оказывать влияния на те сингулярности, которые функции Грина должны иметь и имеют для того, чтобы они были амплитудами перехода. Такие сингулярности возникают в физической области, где по меньшей мере некоторые из импульсов всегда времениподобны.

Приведем несколько примеров вычитаний, называемых иначе рецептами перенормировки.

А. Это чаще всего применяемый рецепт фиксации параметров. Мы определяем входные параметры равенствами

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p, m_A) = p^2 + m_A^2 \text{ при } p^2 = 0, \quad (6.2)$$

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = -\mu^{2\epsilon} \lambda_A \text{ при } p_i = 0. \quad (6.3)$$

В отсутствие инфракрасных расходимостей, возникающих при  $m^2 = 0$ , такой рецепт хорошо определен. Чтобы подчеркнуть способ, которым определены входные параметры, мы приписали им соответствующий индекс. Отметим, что (6.2) содержит два условия, так как это равенство фиксирует не только массу, но и нормировку поля. Приведенными условиями фиксируется конечная часть контрчленов. В частности, мы находим, что

$$F_1^A = \psi(2) - \ln \hat{m}_A^2; G_1^A = \psi(1) - \ln \hat{m}_A^2; H_2^A = 0 \text{ и т.д.} \quad (6.4)$$

В идеале было бы более предпочтительным отождествить константу связи с  $\tilde{\Gamma}^{(4)}$  в физической точке, где частицы находятся в пространстве Минковского на своих массовых поверхностях ( $p^2 = m^2$ ).

Б. Можно по желанию изменить точку вычитания, лишь бы это не оказывало влияния на продолжение в пространство Минковского или на инфракрасные сингулярности. Добавим, что коль скоро вычитательная процедура осуществляется над евклидовыми функциями Грина, она приводит к пространственно-подобному вычитанию в пространстве Минковского. Таким образом, наш второй рецепт [6] аналогичен рецепту А, но проводится при произвольном значении  $p$ :

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p, m_B) = p^2 + m_B^2 \text{ при } p^2 = M^2, \quad (6.5)$$

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = -\mu^{2\epsilon} \lambda_B \text{ при } p_i p_j = M^2(\delta_{ij} - 1/4), \quad (6.6)$$

причем последняя точка выбрана так, что  $s = t = u = M^2$ . Конечно, можно выбрать любые значения величин  $s, t, u$  и любое значение  $p^2$ , при котором нормируется  $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ . Неизвестные функции в этом рецепте фиксированы и равны

$$F_1^B = \psi(2) - \ln \hat{m}_B^2; H_2^B = 0; \quad (6.7)$$

$$G_1^B = \psi(1) - \ln \hat{m}_B^2 - \int_0^1 dx \ln \left[ 1 + \frac{M^2}{m_B^2} x(1-x) \right] \text{ и т.д.} \quad (6.8)$$

В данном случае масштаб  $\mu$  полностью устраняется и заменяется масштабом  $M^2$ , который в равной степени произволен. Ясно, что теперь при выборе  $M$  существенным становится численное значение  $M^2/m_B^2$ .

Недостатком такого рецепта перенормировки является то, что уравнение ренормгруппы из предыдущего параграфа трудно решить где-либо, кроме глубокоевклидовой области, в которой, по-видимому, можно пренебречь всеми массами. Все же приравнивание константы связи значению амплитуды при некотором масштабе имеет определенную привлекательность с физической точки зрения, даже если такое сравнение имеет место в нефизической точке. Дело в том, что при этом в вычисления явно включаются массы и можно непосредственно идентифицировать разные физические пороги.

В. Очень красивый рецепт предложен 'т Хофтом [7] и Вайнбергом [8]. Он весьма просто формулируется и позволяет без труда найти решение "уравнения ренормгруппы" (5.36) из предыдущего параграфа. Рецепт состоит в том, что просто все конечные части контрчленов полагают равными нулю последовательно в каждом порядке  $\lambda$ , т.е. принимают

$$F_1^B = F_2^B = G_1^B = H_2^B = 0 \text{ и т.д.} \quad (6.9)$$

Тогда, сравнивая с выражениями (5.40) – (5.46) предыдущего параграфа, мы замечаем, что все коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  не зависят от  $m$ . Такой рецепт называется "не зависящей от массы" перенормировкой. Независимость от массы сохраняется вплоть до произвольно высокого порядка; эвристически это нетрудно объяснить следующим образом. Когда у контрчленов нет конечной части, они имеют лишь ту "голую скелетную" структуру, которая нужна для компенсации бесконечностей на очень малых расстояниях, но там, при бесконечных импульсах, всеми массами, по-видимому, можно пренебречь, считая при этом, что амплитуды хорошо себя ведут при  $p \rightarrow \infty$ . Отсюда и вытекает независимость от масс. И действительно, в рецептах А и Б зависимость от массы обусловлена только конечной частью контрчленов. Такое колоссальное упрощение позволяет непосредственно вычислить коэффици-



енты  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\gamma_m$ , входящие в (5.36). Например, мы можем теперь написать

$$\lambda_0 = \mu^{2\epsilon} \left[ \lambda + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(\lambda)}{\epsilon^k} \right]. \quad (6.10)$$

Дифференцируя по  $\mu$  при фиксированном  $\lambda_0$ , получаем

$$0 = 2\epsilon \left( \lambda + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a'_k(\lambda)}{\epsilon^k} \right) + \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a'_k(\lambda)}{\epsilon^k} \right), \quad (6.11)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по  $\lambda$ . В этой формуле  $\lambda$  и  $\mu (\partial \lambda / \partial \mu)$  — функции, аналитические при  $\epsilon = 0$ . Отсюда вытекает, что

$$\mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = -2\epsilon \lambda - 2a_1(\lambda) - 2\lambda a'_1(\lambda), \quad (6.12)$$

или, в пределе при  $\epsilon \rightarrow 0$ ,

$$\beta(\lambda) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = -2 \left( 1 - \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) a_1(\lambda), \quad (6.13)$$

т.е.  $\beta$ -функция, входящая в "уравнение ренормгруппы", зависит только от  $\lambda$  и определяется вычетом в простом полюсе по  $\epsilon$ . С учетом уравнения (6.12) и того обстоятельства, что вычеты в разных полюсах по  $\epsilon$  должны обращаться в нуль в выражении (6.11), находим

$$\left( 1 - \lambda \frac{d}{d\lambda} \right) a_{k+1}(\lambda) = a'_k(\lambda) \left( 1 - \lambda \frac{d}{d\lambda} \right) a_1(\lambda). \quad (6.14)$$

Смысл уравнения (6.12) ясен: успешная перенормировка означает, что голая константа связи не зависит от  $\mu$ , так как изменение величины  $\mu$  сопровождается таким изменением  $\lambda$ , что соотношение (6.10) не меняется. Вычислим теперь  $\beta$  в теории возмущений. Пользуясь формулой (5.43), получаем

$$\mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + O(\lambda^3). \quad (6.15)$$

Пренебрегая членами  $O(\lambda^3)$ , можно без труда проинтегрировать (6.15), так что в результате имеем

$$\lambda = \lambda_0 \frac{1}{1 - \frac{3}{16\pi^2} \lambda_0 \ln(\mu/\mu_0)}, \quad (6.16)$$

где  $\lambda_0$  — значение величины  $\lambda$  в точке  $\mu_0$ .

Из формулы (6.15) видно, что  $\lambda$  растет с ростом  $\mu$ . Таким образом, если мы начнем с малого значения  $\lambda_0 (\ll 1)$  при заданном масштабе  $\mu_0$ , то эффективная константа связи с ростом  $\mu$  будет расти. Но при этом мы будем иметь дело со все большими  $\lambda$  и рано или поздно выйдем за область применимости теории возмущений  $\lambda \ll 1$ , или, точнее,  $(3/16\pi^2)\lambda_0 \ln \mu / \mu_0 \ll 1$ . Поэтому на более коротких расстояниях мы должны добавить члены более высокого порядка в правую часть равенства (6.15).

Итак, в теории  $\lambda\phi^4$  теория возмущений становится все более применимой на больших расстояниях, т.е. в той области, где проявляются дальнедействующие свойства взаимодействия; следовательно, можно доверять определению асимптотических состояний, основанному на теории возмущений. Если бы в теории поля обнаружилось, что правая часть равенства (6.15) отрицательна, то это означало бы, что способ, основанный на теории возмущений, не пригоден для определения асимптотических состояний, но очень хорош для определения поведения на малых расстояниях.

Далее мы увидим, что так обстоит дело в квантовой хромодинамике (КХД), которая описывает взаимодействие между кварками. Кварки позволяют правильно описать короткодействующее взаимодействие двух протонов, но они не являются асимптотическими состояниями, а лишь входят как составные части в асимптотические состояния, подобные протону.

Отметим, что полученное здесь выражение для  $\beta(\lambda)$  совпадает с тем, которое было получено при вычислении детерминантов методом  $\zeta$ -функций. Этому не следует удивляться, поскольку точность предыдущего метода была равна  $O(\hbar)$ , а здесь мы получили лишь результат, связанный с однопетлевым приближением, точность которого тоже равна  $O(\hbar)$ .

Посмотрим теперь, отвлекаясь от теории возмущений, какой может быть форма зависимости  $\lambda$  от  $\mu$ . Прежде всего заметим, что если  $\beta(\lambda)$  дается формулой (6.15) даже при больших  $\lambda$ , то эта функция обратится в бесконечность при масштабе

$$\mu = \mu_0 \exp \left[ \frac{16\pi^2}{3\lambda_0} \right], \quad (6.17)$$

очень большим, если исходное значение  $\lambda_0$  мало. Эта точка называется точкой Ландау, ибо оно обнаружил подобную закономерность в КЭД. Однако нет никаких оснований считать, что выражение для однопетле-

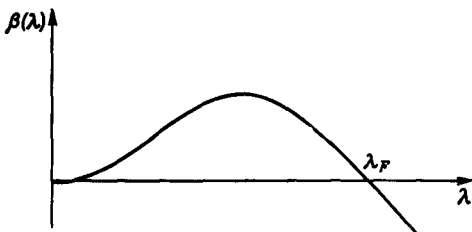


Рис. 3.

вого вклада в  $\beta$  справедливо при больших  $\lambda$ . Мы не знаем, как вычислить  $\beta$  при больших  $\lambda$ , но рассмотрим несколько возможных вариантов поведения  $\beta$ , начав с  $\beta = 0$  при  $\lambda = 0$ , т.е. с точки без взаимодействия.

1. Функция  $\beta(\lambda)$  остается положительной при больших  $\lambda$ ; тогда  $\lambda$  продолжает расти с ростом масштаба, описывая выпуклую или вогнутую кривую в зависимости от знака  $\beta'(\lambda)$ . Если  $\beta(\lambda)$  обращается в бесконечность при некотором значении  $\lambda$ , то и сама константа  $\lambda$  становится в этой точке бесконечной (точка Ландау).

2. Функция  $\beta(\lambda)$  сначала положительна при малых  $\lambda$ , а затем проходит через максимум и становится отрицательной, пересекая ось в точке  $\lambda_F$ :

$$\beta(\lambda_F) = 0 \tag{6.18}$$

(рис. 3). Точка  $\lambda_F$  называется фиксированной точкой, так как если по каким-то причинам константа была первоначально равна  $\lambda_F$ , то она и остается в этой точке. Можно проанализировать поведение константы  $\lambda$  вблизи  $\lambda_F$ , разложив  $\beta$  вблизи  $\lambda_F$ , что приводит к уравнению

$$\mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = (\lambda - \lambda_F) \beta'(\lambda_F) + \dots \tag{6.19}$$

Мы видим, что все зависит от знака производной  $\beta'(\lambda_F)$ . Если  $\beta'(\lambda_F) < 0$ , как на рис. 3, то величина  $\mu(\partial\lambda/\partial\mu)$  положительна при  $\lambda$ , немного меньших  $\lambda_F$ , в связи с чем величина  $\lambda$  смещается в сторону больших значений, т.е. к фиксированной точке  $\lambda_F$ ; когда же  $\lambda$  дальше фиксированной точки  $\lambda_F$ , величина  $\mu(\partial\lambda/\partial\mu)$  отрицательна, и при этом опять  $\lambda$  смещается к  $\lambda_F$ . Таким образом, с ростом  $\mu$  константа  $\lambda$  будет приближаться к  $\lambda_F$ . Такая фиксированная точка называется ультрафиолетово-стабильной, поскольку  $\lambda$  асимптотически приближается к значению  $\lambda_F$  при  $\mu \rightarrow \infty$ , причем сверху или снизу в зависимости от положения начальной точки  $\lambda_0$ , которая может быть взята выше или

ниже  $\lambda_F$ . Если бы существовала теория поля, в которой функция  $\beta$  вела себя так, как показано на рис. 3, то на очень малых расстояниях константа  $\lambda$  все больше приближалась бы к  $\lambda_F$ . Если бы при этом величина  $\lambda_F$  была мала, то это означало бы, что, начав с малых  $\lambda < \lambda_F$ , мы никогда не выйдем из области применимости теории возмущений! Если же мы начали бы с  $\lambda > \lambda_F$ , то с уменьшением расстояния константа  $\lambda$  приближалась бы к области применимости теории возмущений. Эти две возможные ситуации изображены на рис. 4. Ни одна из теорий поля в четырех измерениях не обнаруживает такого поведения в рамках теории возмущений ( $\lambda_F \ll 1$ ).

Точка  $\lambda = 0$  является фиксированной точкой, в которой  $\beta'(0) > 0$ ; это означает, что выше этой точки величина  $\mu(\partial\lambda/\partial\mu)$  положительна и, следовательно, константа  $\lambda$  удаляется от этой точки при уменьшении расстояния. Такая фиксированная точка называется инфракрасно-стабильной. Заметим, наконец, что при малых  $\lambda$  большинство теорий поля ведет себя именно так, что функция  $\beta(\lambda)$  поначалу положительна.

3. Функция  $\beta(\lambda)$  отрицательна при малых  $\lambda$ , монотонно уменьшаясь по величине. Это означает, что константа  $\lambda$  монотонно уменьшается с ростом  $\ln \mu$ . В этом случае приближение теории возмущений становится все лучше на более коротких расстояниях, и  $\lambda$  смещается к нулю, который в данном случае оказывается ультрафиолетово-стабильной фиксированной точкой. Подобное поведение константы связи при малых  $\lambda$  обнаруживается в калибровочных теориях в четырех измерениях — явление, известное под названием *асимптотической свободы*. Мы детально остановимся на этом явлении при изучении калибровочных теорий.

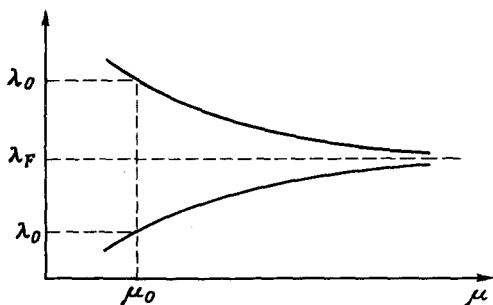


Рис. 4.

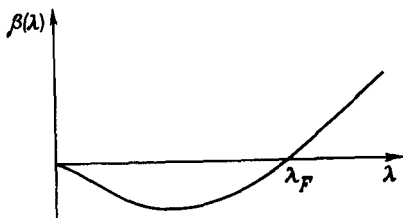


Рис. 5.

4. Функция  $\beta(\lambda)$  сначала отрицательна, затем проходит через минимум и становится положительной, пересекая ось в точке  $\lambda_F$  (рис. 5). В данном случае  $\beta'(\lambda_F) > 0$  и  $\lambda_F$  — инфракрасно-стабильная фиксированная точка. Это означает, что если при некотором  $\mu_0$  мы имеем  $\lambda_0 < \lambda_F$ , то  $\lambda$  будет смещаться к нулю, но если  $\lambda_0 > \lambda_F$ , то она будет смещаться от  $\lambda_F$  в сторону больших значений (рис. 6).

Взяв за исходное выражение (5.41), в котором  $b_0 = 1$  и  $b_k$  не зависят от  $m/\mu$ , можно найти зависимость массы от  $\mu$ ; нетрудно получить соотношение

$$\mu \frac{\partial m^2}{\partial \mu} = 2\lambda m^2 \frac{db_1}{d\lambda}, \quad \text{откуда } \gamma_m(\lambda) = \lambda \frac{db_1(\lambda)}{d\lambda}, \quad (6.20), (6.21)$$

что в теории  $\lambda\varphi^4$  приводит к выражению

$$\gamma_m(\lambda) = \frac{\lambda}{16\pi^2} + \frac{7}{12} \left( \frac{\lambda}{16\pi^2} \right)^2 + O(\lambda^3). \quad (6.22)$$

Мы можем вывести также рекуррентную формулу для вычетов в полю-

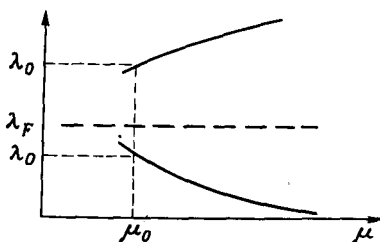


Рис. 6.

сах более высокого порядка:

$$\lambda \frac{db_{k+1}}{d\lambda} = b_k \lambda \frac{db_1}{d\lambda} - \frac{db_k}{d\lambda} \left(1 - \lambda \frac{d}{d\lambda}\right) a_1(\lambda); \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.23)$$

Наконец, из определения функции  $Z_\varphi$ , в котором  $c_0 = 1$  и  $c_k$  не зависят от  $m/\mu$ , можно вывести уравнение

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_\varphi = -2\lambda \frac{dc_1}{d\lambda}, \quad (6.24)$$

$$\text{откуда } \gamma_d(\lambda) = -\lambda \frac{dc_1}{d\lambda}, \quad (6.25)$$

так что в теории  $\lambda\varphi^4$

$$\gamma_d(\lambda) = \frac{1}{12} \left(\frac{\lambda}{16\pi^2}\right)^2 + O(\lambda^3). \quad (6.26)$$

Коэффициенты  $c_k$  в свою очередь удовлетворяют соотношению

$$\lambda \frac{dc_{k+1}}{d\lambda} = c_k \lambda \frac{dc_1}{d\lambda} - \left(a_1 - \lambda \frac{da_1}{d\lambda}\right) \frac{dc_k}{d\lambda}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.27)$$

Приведенные рекуррентные соотношения позволяют вычислять вычеты в полюсах более высокого порядка, исходя из вычетов в простых полюсах. В этом и состоит ценность изложенной процедуры: если теория перенормируема, то многие коэффициенты можно вычислить косвенным путем без помощи фейнмановских диаграмм.

Пользуясь рассмотренным не зависящим от масс рецептом перенормировки т Хофта – Вайнберга, легко проинтегрировать уравнение ренормгруппы, так как коэффициенты утратили зависимость от  $m$ . Теперь уравнение имеет вид

$$\left\{ -s \frac{\partial}{\partial s} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + [\gamma_m(\lambda) - 1] m \frac{\partial}{\partial m} + d_n - n\gamma_d(\lambda) \right\} \times \\ \times \tilde{\Gamma}^{(n)}(s; p; m, \lambda, \mu) = 0. \quad (6.28)$$

Введем зависящие от масштаба переменные  $\bar{\lambda}(s)$  и  $\bar{m}(s)$  в соответствии с равенствами

$$s \frac{\partial \bar{\lambda}(s)}{\partial s} = \beta(\bar{\lambda}(s)), \quad \bar{\lambda}(s=1) = \lambda, \quad (6.29)$$

$$s \frac{\partial \bar{m}(s)}{\partial s} = m(s)[\gamma_m(\bar{\lambda}(s)) - 1], \quad \bar{m}(s=1) = m. \quad (6.30)$$

Тогда уравнение (6.28) легко интегрируется, так как оно превращается в дифференциальное уравнение первого порядка по  $s$ ; в результате получаем

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(s; p; m, \lambda, \mu) = s^{d_n} \tilde{\Gamma}^{(n)}(p; \bar{m}(s), \bar{\lambda}(s), \mu) e^{-n \int_1^s \frac{ds'}{s'} \gamma_d(\lambda(s'))} \quad (6.31)$$

Из этого равенства явствует несколько неожиданное масштабное преобразование функций Грина при изменении масштаба внешних импульсов: константа связи и масса преобразуются нетривиальным образом, а функции Грина наряду с естественной размерностью  $d_n$  обнаруживают еще и аномальную размерность  $\gamma_d$  для каждого внешнего хвоста.

Допустим, что с самого начала мы приняли  $m = 0$ . Тогда классическая теория была бы инвариантной по отношению к дилатациям (и конформным преобразованиям, гл. 1). Но в квантовой теории это не выполняется, так как при регуляризации вводится некий масштаб либо через обрезание при больших импульсах, либо через параметр  $\mu$  размерной регуляризации, а тем самым нарушается инвариантность относительно дилатаций (см. по этому поводу лекцию Коулмена [9]).

Кроме того, мы видим, что поведение функций Грина при измененных значениях импульсов определяется функциями  $\bar{\lambda}(s)$  и  $\bar{m}(s)$ , которыми, стало быть, определяется и физика при больших масштабах.

Интересно исследовать поведение функций Грина при больших  $s$ . Предположим, что в теории имеется ультрафиолетово-стабильная фиксированная точка при значении  $\lambda = \lambda_F$ . При больших масштабах величина  $\lambda$  будет смещаться к  $\lambda_F$ . Следовательно,  $\gamma_m$  и  $\gamma_d$  будут сдвигаться к  $\gamma_m(\lambda_F)$  и  $\gamma_d(\lambda_F)$ , так что решение уравнения (6.21)

$$s \bar{m}(s) = m e^{\int_1^s d \ln s \gamma_m(\bar{\lambda}(s))} \quad (6.32)$$

можно проинтегрировать, получив в результате

$$m(s) \rightarrow m s^{(-1 + \gamma_m(\lambda_F))}, \quad (6.33)$$

если только предположить, что интеграл определяется областью больших  $s$ . Аналогичное предположение относительно интегрирования  $\gamma_d$  приводит к формуле

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(s, p; m, \lambda, \mu) \rightarrow s^{(d_n - n\gamma_d(\lambda_F))} \bar{\Gamma}^{(n)}(p; ms^{\gamma_m(\lambda_F) - 1}, \lambda_F, \mu). \quad (6.34)$$

Таким образом, если величина  $1 - \gamma_m(\lambda_F)$  положительна, то при больших масштабах вообще можно пренебречь массой  $m$ , кроме того, действительно  $\gamma_d(\lambda_F)$  появляется как аномальная размерность.

Как явствует из формулы (6.33), справедливость наивного предположения, что массы выпадут из теории при больших масштабах, существенно зависит от значения интеграла от аномальных размерностей, который мы запишем в виде

$$\int_{\lambda}^{\bar{\lambda}(s)} d\lambda' \frac{\gamma_m(\lambda')}{\beta(\lambda')}. \quad (6.35)$$

Такая форма записи показывает, что если  $\beta(\lambda)$  и  $\gamma_m(\lambda)$  не имеют одновременно нулей, то наибольший вклад в интеграл будут давать фиксированные точки, чем "отчасти" и подтверждается сделанное нами выше предположение.

Если ультрафиолетово-стабильная точка находится при  $\lambda_F \approx 0$  (как в калибровочных теориях), то тогда вообще нет проблем, поскольку поведение теории при больших импульсах определяется теорией возмущений, т.е.  $\gamma_m(0) = 0$ .

Можно проинтегрировать различные уравнения в теории  $\lambda\phi^4$ , пользуясь результатами, полученными для  $\gamma_m$  и  $\gamma_d$  в низшем порядке теории возмущений. Это дает

$$\bar{m}(s) = ms^{-1} \left( \frac{\bar{\lambda}(s)}{\lambda} \right)^{1/3} \exp \left[ \frac{7}{36} \frac{\bar{\lambda}(s) - \lambda}{16\pi^2} \right] \quad (6.36)$$

для зависящей от масштаба массы  $m$  и

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(s, p) \sim s^{d_n - \frac{n}{36} \frac{\lambda(s) - \lambda}{16\pi^2}} \tilde{\Gamma}^{(n)}(p) \quad (6.37)$$

для аномальной размерности. Эти результаты верны только при малых масштабах масс, так как мы видели, что вычисленная по теории возму-



щений  $\beta$ -функция положительна, и поэтому по достижении некоторого масштаба теория возмущений теряет применимость.

### Задачи

А. Задав  $\beta(\lambda) = \mu(\partial\lambda/\partial\mu)$ , проанализируйте гипотетические теории поля, в которых

$$1. \beta(\lambda_F) = \beta'(\lambda_F) = 0,$$

$$2. \beta(\lambda_k) = 0, \lambda_k = \lambda_F + a/k, k = 1, 2, \dots, \infty.$$

Б. Пусть

$$m_0^2 = m^2 \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(\lambda)}{\varepsilon^n} \right) \equiv m^2 Z_m.$$

Покажите, что

$$\gamma_m = -\frac{1}{2} \mu \frac{\partial \ln Z_m}{\partial \mu} = \lambda \frac{db_1(\lambda)}{d\lambda},$$

$$\lambda \frac{db_{n+1}}{d\lambda} = b_n \lambda \frac{db_1}{d\lambda} + \frac{1}{2} \frac{db_n}{d\lambda} \beta(\lambda), \quad n = 1, 2, \dots$$

Выведите формулу, связывающую  $b_{n, n+1}$  с  $b_{1, 2}$ , если

$$b_n(\lambda) = b_{n, n+1} \lambda^{n+1} + O(\lambda^2).$$

$$В. Пусть \varphi_0 = \varphi \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(\lambda)}{\varepsilon^n} \right)^{1/2} \equiv \varphi Z_\varphi^{1/2}.$$

$$\text{Покажите, что } \gamma_d(\lambda) = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \ln Z_\varphi}{\partial \mu} = -\lambda \frac{dc_1}{d\lambda},$$

$$\lambda \frac{dc_{n+1}}{d\lambda} = c_n \lambda \frac{dc_1}{d\lambda} + \frac{1}{2} \frac{dc_n}{d\lambda} \beta(\lambda).$$

Г. Убедитесь в правильности уравнения ренормгруппы в теории  $\lambda\varphi^4$ , пользуясь результатами теории возмущений для  $\beta$ ,  $\gamma_m$  и  $\gamma_d$ .

## § 7. Зависимость коэффициентов ренормгруппы от рецепта перенормировки

В предыдущем параграфе мы вычислили коэффициенты  $\beta$  и  $\gamma$  в низшем нетривиальном порядке по  $\lambda$ , пользуясь не зависящим от массы рецептом перенормировки 'т Хофта — Вайнберга. Исследуя их поведение, мы сделали важные физические выводы. Внимательный читатель вправе задать вопрос, в какой мере эти коэффициенты зависят от рецепта перенормировки. В случае общего рецепта типа А или Б они будут, вообще говоря, зависеть от масс через конечные части контрчленов.

Исходя из формул (5.37) — (5.39), дифференцированием по  $\mu$  при фиксированных голых параметрах находим

$$0 = 2\varepsilon \left[ a_0 + \frac{a_1}{\varepsilon} \right] + \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \left[ a'_0 + \frac{a'_1}{\varepsilon} \right] + \left( \frac{\partial m}{\partial \mu} - \frac{m}{\mu} \right) \times \\ \times \left[ \dot{a}_0 + \frac{\dot{a}_1}{\varepsilon} \right] + \text{полюсы высших порядков}, \quad (7.1)$$

откуда выводим, что

$$\mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = \varepsilon \left( -2\lambda + \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} G_1 \right) + \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + \\ + \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \dot{G}_1 + O(\lambda^3). \quad (7.2)$$

В этих формулах штрихом обозначено дифференцирование по  $\lambda$ , а точкой — по  $m/\mu$ . Сравнивая с выражением (6.15), мы видим, что из-за  $G_1$  возникла явная зависимость от рецепта. В частности, мы замечаем, что зависимость от рецепта возникает в низшем порядке из-за массы. При выводе уравнения (7.2) становится очевидным, что члены порядка  $\lambda^3$  в (7.2) зависят непосредственно от  $G_1$  без мультипликативных массовых факторов. Аналогично можно показать, что

$$\gamma_m = \mu \frac{\partial \ln m}{\partial \mu} = \left( \frac{1}{2} \frac{\lambda}{16\pi^2} + \frac{1}{4} \frac{m}{\mu} \frac{\lambda}{16\pi^2} \dot{F}_1 \right) + \\ + \varepsilon \frac{1}{2} \frac{\lambda}{16\pi^2} F_1 + O(\lambda^3), \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} \gamma_d = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_\phi^{1/2} &= \frac{1}{48} \left( \frac{\lambda}{16\pi^2} \right)^2 - \frac{m}{2\mu} \left( \frac{\lambda}{16\pi^2} \right)^2 H_2 + \\ &+ \varepsilon \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda}{16\pi^2} \right)^2 H_2 + O(\lambda^3). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Полагаем  $\varepsilon \rightarrow 0$  и получаем окончательно

$$\beta(\lambda, m/\mu) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} \frac{\lambda^2}{16\pi^2} G_1 + O(\lambda^3), \quad (7.5)$$

$$\gamma_m(\lambda, m/\mu) = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{16\pi^2} + \frac{1}{4} \frac{m}{\mu} \frac{\lambda}{16\pi^2} F_1 + O(\lambda^2), \quad (7.6)$$

$$\gamma_d(\lambda, m/\mu) = \frac{1}{48} \left( \frac{\lambda}{16\pi^2} \right)^2 - \frac{m}{2\mu} \left( \frac{\lambda}{16\pi^2} \right)^2 H_2 + O(\lambda^3). \quad (7.7)$$

Эти формулы показывают, что, когда присутствуют массы, зависимость от рецепта входит уже в низшем порядке. Следовательно, только в случае, когда можно пренебречь массами, мы можем говорить, что коэффициенты низшего порядка в уравнении ренормгруппы не зависят от рецепта перенормировки. Обычно при использовании рецепта типа А или Б уравнение ренормгруппы решается в условиях, когда можно пренебречь массами. Если  $\mu$  — точка перенормировки, то мы можем считать  $m/\mu$  сколь угодно малой величиной, выбрав очень большое  $\mu$ .

Предположим, что у нас имеются два рецепта перенормировки. Они должны быть связаны друг с другом конечной перенормировкой, поскольку различаются только определением перенормированных параметров. Следовательно, параметры в одном рецепте будут связаны с параметрами в другом соотношениями

$$\lambda' = T(\lambda, m/\mu) = \lambda + O(\lambda^2), \quad (7.8)$$

$$Z'_m(\lambda', (m/\mu)') = Z_m(\lambda, m/\mu) U(\lambda, m/\mu); \quad U = 1 + O(\lambda), \quad (7.9)$$

$$Z'_\phi(\lambda', (m/\mu)') = Z_\phi(\lambda, m/\mu) V(\lambda, m/\mu); \quad V = 1 + O(\lambda^3). \quad (7.10)$$

В частности, отсюда следует, что

$$\beta'(\lambda', (m/\mu)') = \beta(\lambda, m/\mu) A' + (m/\mu)(\gamma_m - 1) \dot{A}', \quad (7.11)$$

где  $A$  — некоторая функция переменных  $\lambda$  и  $m/\mu$ . В глубоко-евклидовой области это сводится к уравнению вида

$$\beta'(\lambda') = \beta(\lambda) A'(\lambda), \quad (7.12)$$

которое показывает, что фиксированная точка  $\lambda = \lambda_F$  превращается в фиксированную точку  $\lambda'_F = A(\lambda_F) \neq \lambda_F$ . Отметим, что этот результат получен без применения теории возмущений. Следовательно, как можно было ожидать, наличие (или отсутствие) фиксированной точки не зависит от рецепта перенормировки. Можно также показать что и *знак* первой производной функции  $\beta$  в фиксированной точке не зависит от рецепта (см. задачу).

Другие параметры ренормгруппы  $\gamma_m$  и  $\gamma_d$  тоже обладают некоторыми не зависящими от рецепта перенормировки свойствами; в частности, таковы их численные значения в фиксированной точке в глубоко-евклидовой области.

### Задачи

А. Докажите правильность формул (7.2) — (7.4).

Б. Докажите правильность в низшем порядке уравнения ренормгруппы для  $\tilde{\Gamma}^{(2)}$  и  $\tilde{\Gamma}^{(4)}$ , удерживая конечные части  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $H_2$  и  $G_1$ .

В. Пренебрегая массами покажите, что знак величины  $d\beta/d\lambda$  в фиксированной точке  $\lambda_F$  не зависит от рецепта перенормировки.

\*Г. Найдите связь между  $\dot{\gamma}'_d(\lambda')$  и  $\dot{\gamma}'_m(\lambda')$  и  $\gamma_d(\lambda)$ ,  $\gamma_m(\lambda)$ ,  $\beta(\lambda)$ , где штрихованные и нештрихованные величины относятся к двум независимым от масс схемам перенормировки (функции  $F$ ,  $G$  и  $H$  берутся сначала независимыми от  $m/\mu$ , но могут иметь численные значения). Покажите, что значения параметров  $\gamma_d$  и  $\gamma_m$  в точке  $\lambda_F$  не зависят от рецепта.

## § 8. Продолжение в пространство Минковского, аналитичность

Мы получили конечные функции Грина ценой введения произвольного масштаба. Но из уравнения ренормгруппы мы знаем, что если изменить этот масштаб, то с функциями Грина ничего не случится,

поскольку их изменение компенсируется одновременным изменением перенормированных параметров и поля. Чтобы не отрываться от реальности, нам нужно представить функции Грина в пространстве Минковского.

Это достигается путем аналитического продолжения. Рассмотрим евклидову функцию Грина, зависящую от импульсов  $p_1, \dots, p_N$ . Прежде всего изменим все временные компоненты импульсов  $p$ , сделав их мнимыми:

$$\bar{p} = (\bar{p}_0, \bar{p}_i) \rightarrow p = (p_0 = i\bar{p}_0, p_i = \bar{p}_i).$$

Посмотрим, например, что случится с пропагатором. В соответствии со сказанным выше произойдет замена

$$\frac{1}{\bar{p}^2 + m^2} \rightarrow \frac{1}{-p^2 + m^2},$$

так как мы используем метрику в пространстве Минковского  $g_{00} = -g_{ii} = +1$ . Такая замена не совсем удовлетворительна, поскольку выражение, полученное в пространстве Минковского, имеет полюс при  $p^2 = m^2$ , т.е. при

$$p_0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}.$$

Процесс продолжения можно рассматривать как переход от мнимой к действительной оси в плоскости  $p_0$ , осуществляемый поворотом по часовой стрелке; возможность такого перехода зависит от того, можно ли избежать любого полюса. Отсюда следует, что полюса по  $p_0$  следует считать лежащими несколько ниже (выше) положительной (отрицательной) действительной оси, т.е. продолжение происходит от  $1/(p^2 + m^2)$  к  $-1/(p^2 - m^2 + i\epsilon)$ , где  $\epsilon > 0$ , а в конце всех вычислений нужно перейти к пределу при  $\epsilon \rightarrow 0^+$ . В более сложных случаях полюса следует выбирать так, чтобы они не мешали вращению по часовой стрелке мнимой временной оси к действительной временной оси. В этом  $(-i\epsilon)$ -предписании мы узнаем знакомый (см. выше) способ сделать сходящимся интеграл по траекториям. Можно также сравнить фейнмановские правила в пространствах Евклида и Минковского, скажем, для теории  $\phi^4$ :

$$\text{---} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\bar{p}^2 + m^2} \quad (\text{Евкл.}), \\ \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (\text{Минк.}), \end{array} \right. \quad (8.1)$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} -\lambda \quad (\text{Евкл.}), \\ -i\lambda \quad (\text{Минк.}). \end{array} \right. \quad (8.2)$$

Интегрирование по петлям:  $\frac{d^4 \bar{k}}{(2\pi)^4}$  (Евкл.),

$$\frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \quad (\text{Минк.}). \quad (8.3)$$

Рассмотрим фейнмановскую диаграмму с  $L$  петлями,  $V$  вершинами и  $I$  внутренними линиями. Разница между вычислением такой диаграммы в пространствах Евклида и Минковского будет заключаться в множителе  $-i$  для каждой вершины и каждого пропагатора и в множителе  $i$  для каждой петли, так как  $d^4 k = i d^4 \bar{k}$ . Кроме того, величина  $m^2$  в евклидовой функции Грина заменяется величиной  $m^2 - i\epsilon$  в соответствующем выражении в пространстве Минковского. Таким образом, мы приходим к соотношению

$$G_M^{(n)}(p_1, \dots, p_n; m^2) = (i)^{V+L+I} (-1)^I G_E^{(n)}(\bar{p}_1 = p_1; \dots, \bar{p}_n = p_n; m^2 - i\epsilon), \quad (8.4)$$

заменив в евклидовой функции все импульсы продолженными в пространство Минковского, т.е. заменив импульсы  $\bar{p} = (\bar{p}_0, \bar{p}_i)$  импульсами  $p = (i\bar{p}_0, \bar{p}_i)$ . Пользуясь топологическим соотношением  $L = I - V + 1$  ( $\bar{v} \neq 0$ ), получаем соотношение

$$G_M^{(n)}(p, m^2) = (i) G_E^{(n)}(p = \bar{p}; m^2 - i\epsilon), \quad (8.5)$$

справедливое для любой фейнмановской диаграммы с  $V \neq 0$ . Исключением из этого правила является выражение для самого пропагатора

( $V = 0$ ), в котором  $i$  заменяется на  $-i$ , что можно увидеть из (8.4), положив  $L = V = 0, I = 1$ .

В качестве примера использования такой процедуры рассмотрим четырехточечную функцию в пространстве Минковского. Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_M^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = i \left[ -\lambda - \frac{\lambda^2}{2 \cdot 16\pi^2} \times \right. \\ \left. \times \int_0^1 dx \ln \left( \frac{m^2 - i\epsilon - sx(1-x)}{m^2 - i\epsilon + M^2x(1-x)} \right) + t\text{- и } u\text{-каналы} \right], \end{aligned} \quad (8.6)$$

Здесь мы умножили евклидово выражение на  $i$ , заменили  $\bar{p}^2$  на  $-p^2$  и  $m^2$  на  $m^2 - i\epsilon$ . Вычитание в евклидовой функции Грина было сделано при  $\bar{p}_i \bar{p}_j = M^2(\delta_{ij} - 1/4)$ , так что  $\Gamma_E^{(4)} = -\lambda$  в этой симметричной точке (рецепт Б). Заметим, что точка вычитания входит как параметр и не подвергается изменению в процессе продолжения. Добавка  $-i\epsilon$  в знаменателе не нужна, так как знаменатель нигде не обращается в нуль. Числитель не может изменить знак при некотором значении  $s = (p_1 + p_2)^2$ . Когда это происходит, у логарифма появляется разрез в комплексной  $s$ -плоскости. Рассмотрим аргумент логарифма

$$F(s, x) \equiv m^2 - i\epsilon - sx(1-x), \quad (8.7)$$

Величина  $x(1-x)$  положительно определена и изменяется от 0 до 1/4. Следовательно, наименьшее значение  $s$ , при котором  $F$  обращается в нуль, равно

$$s_0 = 4m^2, \quad (8.8)$$

где предполагается, что произведение  $x(1-x)$  равно своему максимальному значению. В этой точке у функции  $\tilde{\Gamma}^{(4)}$  появляется точка ветвления. По традиции из этой точки проводят разрез в комплексной  $s$ -плоскости, идущий от  $4m^2$  до  $+\infty$  вдоль положительной действительной оси. Аналогичным образом вклады  $t$ - и  $u$ -каналов дают разрезы, начинающиеся при  $t_0$  и  $u_0 - 4m^2$ . В силу соотношения

$$s + t + u = 4m^2 \quad (8.9)$$

не все эти разрезы независимы. Физический смысл возникших точек ветвления нетрудно выяснить, если интерпретировать  $\Gamma^{(4)}$  как амплитуду рассеяния для рассеяния двух частиц с импульсами  $p_1$  и  $p_2$  в

две частицы с импульсами  $p_3$  и  $p_4$  :

$$p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4.$$

Предположив, что начальные и конечные частицы находятся "на массовой поверхности", т.е. что

$$p_a^2 = m^2, \quad a = 1, 2, 3, 4,$$

легко увидеть, что значение  $s_0 = 4m^2$  соответствует тому, что две частицы имеют минимальные энергии  $E_a = m$ . Только при  $s_0 > 4m^2$  две частицы имеют достаточно энергии, чтобы нетривиальным образом рассеяться в две другие. Поэтому  $s_0$  называется физическим двухчастичным порогом. Ниже этого порога функция  $\tilde{\Gamma}^{(4)}$  — действительная функция своих аргументов, но при  $s > s_0$  у нее появляется мнимая часть.

Резюмируем: продолжив функцию  $\tilde{\Gamma}^{(4)}$  в пространство Минковского, мы обнаружили возникновение нетривиальной аналитической структуры; эта структура, конечно, определяется условиями унитарности и причинности, что и позволяет нам рассматривать функции Грина в пространстве Минковского как амплитуды перехода.

Другой пример нетривиальной аналитической структуры, возникающей в результате продолжения в пространство Минковского, связан с диаграммой "заходящее солнце". В этом случае лучший способ найти точки ветвления — посмотреть на аргумент логарифма в интеграле по параметру. В данном случае интересующий нас аргумент имеет вид

$$A = -y(1-y)p^2 + m^2(1-y + \frac{y}{x(1-x)}). \quad (8.10)$$

Он обращается в нуль, если

$$p^2 = m^2 \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{x(1-x)(1-y)} \right), \quad (8.11)$$

и положение точки ветвления будет определяться *наименьшим* таким значением  $p^2$ . Чтобы найти это наименьшее значение, нам нужно минимизировать параметрическое выражение, на которое умножается  $m^2$ . В случае двухточечной функции точки ветвления будут, вообще говоря, возникать при минимальных значениях  $p^2$ , для которых

$$p^2 = m^2 f(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad (8.12)$$



где  $x_1, \dots, x_N$  — фейнмановские параметры, необходимые для  $N$ -петлевой диаграммы. Тогда точка ветвления расположена при

$$p^2 = m^2 f(x_1^0, \dots, x_N^0), \quad (8.13)$$

$$\text{где точки } x_i^0 \text{ определяются уравнениями} \quad (8.14)$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$  при  $x_i = x_i^0$  (нужно убедиться в том, что при  $x_i = x_i^0$  действительно достигается минимум). По имени Ландау, разработавшего систематическую процедуру охоты за точками ветвления фейнмановских диаграмм, такие уравнения называются уравнениями Ландау. Применяя эту процедуру к нашему случаю, получим из (8.14), что минимум возникает при  $x = 1/2$ ,  $y = 1/3$ , так что точка ветвления расположена при значении

$$p^2 = 9m^2. \quad (8.15)$$

Если вспомнить вид диаграммы "заходящее солнце"  $\ominus$ , то станет ясно, что эта точка соответствует минимальной энергии, необходимой для возбуждения трех частиц, почему она и называется трехчастичным порогом.

Итак, пропагатор в пространстве Минковского имеет следующую структуру особенностей: полюс при  $p^2 = m^2$  [должным образом сдвинутый с помощью правила  $(-i\epsilon)$ ] и точка ветвления при  $p^2 = 9m^2$  с разрезом, проведенным по традиции вдоль действительной оси  $p^2$  и простирающимся до  $p^2 = +\infty$ . Когда включаются более высокие порядки по  $\lambda$ , то должны, по-видимому, встречаться точки ветвления при больших значениях  $p^2$ . Такая структура особенностей (конечно) согласуется с интерпретацией  $G^{(2)}$  как пропагатора.

### Задачи

\*А. Пользуясь диаграммами и учитывая физические соображения, найдите положение точек ветвления в  $\tilde{\Gamma}^{(4)}$  с учетом членов  $O(\lambda^4)$ .

\*Б. Повторите задачу А для пропагатора.

\*В. Покажите, что функция  $\tilde{\Gamma}^{(4)}$  удовлетворяет дисперсионному соотношению, выраженному действительную часть  $\tilde{\Gamma}^{(4)}$  через ее мнимую часть. [Используйте только выражение для  $\tilde{\Gamma}^{(4)}$ , найденное по теории возмущений с точностью  $O(\lambda^2)$ .]

### § 9. Сечения и унитарность

Теперь мы уже почти у цели. Мы хотим отождествить функции Грина в пространстве Минковского с амплитудами перехода. Но не все функции могут быть амплитудами перехода, так как они должны удовлетворять определенным требованиям, в частности тем, которые вытекают из унитарности и причинности. Как вы, наверное, уже догадываетесь, функции Грина из предыдущего параграфа удовлетворяют этим требованиям.

Чтобы точно сформулировать требования, вспомним формализм  $S$ -матрицы и применим его к теории  $\lambda\phi^4$ .

Допустим, что можно определить состояния очень далеко от области взаимодействия, в частности в очень отдаленном прошлом или будущем. Смысл таких состояний вполне ясен в случае короткодействующих сил, например в случае слабого или сильного взаимодействия. Когда же включаются и дальнедействующие силы, дело усложняется и при определении таких состояний нужно быть особенно внимательным. Пусть состояния описываются кет-векторами  $|\alpha; \pm T\rangle$ , где  $T$  — очень большое время, а  $\alpha$  — полный набор наблюдаемых. Эти состояния удовлетворяют требованиям полноты и ортогональности

$$\sum_{\alpha} |\alpha; \pm T\rangle \langle \pm T; \alpha| = 1, \quad \langle \alpha; \pm T | \beta; \pm T \rangle = \delta_{\alpha\beta}. \quad (9.1), (9.2)$$

Если наша система — гармонический осциллятор, то  $\alpha$  — число заполнения и т.д. Очень важно то обстоятельство, что приведенные соотношения выполняются только в данный момент времени и поэтому не учитывают никакой динамики, а только кинематику. Если при больших  $T$  взаимодействие можно выключить (короткодействующие силы), то такие состояния легко опознать как диагонализующие невозмущенный гамильтониан.

В теории  $\lambda\phi^4$  при  $m^2 \neq 0$  не составляет труда опознать такие состояния. Они составлены из одночастичных вигнеровских состояний, отмеченных значениями  $m$  и  $p$ , причем энергия определяется как  $+\sqrt{p^2 + m^2}$ . Если мы перейдем к обозначениям более релятивистского вида, т.е. обозначим эти состояния символом  $|p\rangle$ , где  $p$  — вектор 4-импульса, то требуется, чтобы они удовлетворяли соотношениям

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} |p\rangle \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) \langle p| = 1, \quad (9.3)$$

$$\langle p | p' \rangle = 2(2\pi)^3 \sqrt{p^2 + m^2} \delta(p - p'). \quad (9.4)$$

Тогда любое многочастичное состояние будет суперпозицией невзаимодействующих одночастичных состояний

$$|\alpha, \pm\infty\rangle \sim |p_1, p_2, \dots, p_n\rangle = |p_1\rangle \otimes |p_2\rangle \otimes \dots \otimes |p_n\rangle \quad (9.5)$$

В теории  $\lambda\varphi^4$  имеется некоторое оправдание нашей уверенности в том, что эти состояния дают асимптотические состояния: поведение константы связи при больших масштабах таково, что свободный фейнмановский пропагатор точно описывает распространение сигнала, а мы знаем, что  $\Delta_F$  — действительно пропагатор одночастичных состояний описанного выше типа. (Здесь мы рассуждаем несколько бесцеремонно, поскольку, строго говоря,  $\Delta_F$  — пропагатор состояний как с положительной, так и с отрицательной энергией.) Попутно заметим, что если на больших расстояниях константа связи растет с расстоянием, то как асимптотические состояния следует идентифицировать лишь конструкции, которые могут избежать влияния столь огромных сил. По-видимому, именно так обстоит дело в КХД, где на кварки действуют такие силы. Поэтому кварки не могут служить асимптотическими состояниями. Но эти силы действуют только на объекты с цветом, что позволяет определить асимптотические состояния, не имеющие цвета (адроны).

С физической точки зрения интерес представляет вычисление амплитуды перехода

$$T_{\alpha\beta} = \langle \alpha, +\infty | \beta, -\infty \rangle. \quad (9.6)$$

Следуя Гейзенбергу, определим  $S$ -матрицу, обладающую свойством

$$|\beta, +\infty\rangle = \hat{S} |\beta, -\infty\rangle. \quad (9.7)$$

Такая  $S$ -матрица должна содержать всю динамическую информацию об эволюции физических состояний во времени. Из условия полноты состояний на  $+\infty$  и на  $-\infty$

$$1 = \sum_{\beta} |\beta, +\infty\rangle \langle +\infty, \beta| = \sum_{\beta} \hat{S} |\beta, -\infty\rangle \langle -\infty, \beta| \hat{S}^\dagger = \hat{S} \hat{S}^\dagger \quad (9.8)$$

следует, что оператор  $\hat{S}$  унитарен. (Вы можете также показать, что  $\hat{S}^\dagger \hat{S} = 1$ ). Физический смысл унитарности в том, что система не может превратиться в ничто (черные дыры?). Когда состояния рассеиваются, то большую часть времени ничего не случается — они значительно

охотнее пропускают друг друга, чем взаимодействуют. По этой причине положим

$$\hat{S} = 1 + i\hat{R}, \quad (9.9)$$

где  $\hat{R}$  содержит интересующую нас информацию. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= \langle \alpha, -\infty | \hat{S}^+ | \beta, -\infty \rangle \\ &= \delta_{\alpha\beta} - i \langle \alpha, -\infty | \hat{R}^+ | \beta, -\infty \rangle. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Поскольку взаимодействие лоренц-инвариантно, можно написать

$$T_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - i (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\alpha - p_\beta) \langle \alpha, -\infty | \hat{T}^+ | \beta, -\infty \rangle, \quad (9.12)$$

где  $p_\alpha$  ( $p_\beta$ ) — сумма импульсов в конечном (начальном) состоянии. Тогда вероятность перехода во всем пространстве-времени дается выражением

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha\beta} &= [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\alpha - p_\beta)]^2 \times \\ &\times \langle \alpha, -\infty | \hat{T}^+ | \beta, -\infty \rangle \langle \beta, -\infty | \hat{T} | \alpha, -\infty \rangle. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Легко сообразить, какой смысл имеет квадрат  $\delta$ -функции: величина  $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0)$  есть объем пространства-времени (в чем нетрудно убедиться, поместив систему в некий ящик). Отсюда вытекает, что вероятность перехода в единице объема пространства-времени равна

$$\Omega_{\alpha\beta} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\alpha - p_\beta) | \langle \alpha | \hat{T} | \beta \rangle |^2. \quad (9.14)$$

Это выражение справедливо для состояний, удовлетворяющих соотношению (9.2). В нашем случае состояния с заданным импульсом нормированы не на 1, а согласно (9.4). Поделив на нормировочный коэффициент, находим

$$\Omega(p_\alpha | p_\beta) \equiv \Omega_{p_\alpha p_\beta} = \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\alpha - p_\beta)}{(2E_\alpha)(2E_\beta)} | \langle \alpha | \hat{T} | \beta \rangle |^2, \quad (9.15)$$

где  $E_\alpha$  ( $E_\beta$ ) означает произведение энергий в состояниях  $\alpha$  ( $\beta$ ), причем каждая энергия определяется как

$$E_i = \sqrt{p_i^2 + m^2}. \quad (9.16)$$

В экспериментах по рассеянию обычно измеряют сечение рассеяния двух частиц (мишени и налетающей частицы) с превращением в несколько частиц. Такое сечение находится по формуле

$$d\sigma(a + b \rightarrow 1 + 2 + \dots + N) = \frac{1}{v_{ab}} \Omega(p_a, p_b | p_1, p_2, \dots, p_N) \times \\ \times \frac{d^3p_1 d^3p_2 \dots d^3p_N}{(2\pi)^{3N}}. \quad (9.17)$$

Здесь  $v_{ab}$  — относительная скорость частиц  $a$  и  $b$ ; в случае частиц с одинаковой массой она дается выражением

$$v_{ab} = \frac{\sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m^4}}{E_a E_b}. \quad (9.18)$$

Собирая все результаты, получаем

$$d\sigma(a + b \rightarrow 1 + 2 + \dots + N) = \\ = \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_1 - \dots - p_N)}{4\sqrt{(p_a p_b)^2 - m^4}} \times \\ \times \langle p_a p_b | \hat{T} | p_1 \dots p_N \rangle^2 \prod_{i=1}^N \frac{d^3p_i}{2(2\pi)^3 E_i}. \quad (9.19)$$

Заметим, что мера интегрирования  $d^3p/2E$  релятивистски-инвариантна, поскольку

$$d^3p/2E = d^4p \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2). \quad (9.20)$$

Рассмотрим интересный частный случай упругого рассеяния, для которого  $N = 2$ . Определим систему центра масс, в которой

$$\mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b = \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = 0. \quad (9.21)$$

Тогда из простых соображений кинематики можно написать

$$d\sigma(a + b \rightarrow 1 + 2) = \frac{|T|^2}{64\pi^2 s} d\Omega, \quad (9.22)$$

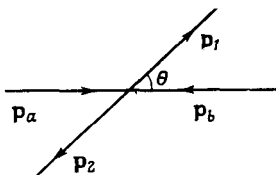


Рис. 7.

где  $d\Omega = d\varphi d(\cos \theta)$ , причем  $\theta$  — угол между начальным и конечным направлениями импульсов (рис. 7), а  $s$  — мандельштамовская переменная:  $s = (p_a + p_b)^2$ .

Как и можно было ожидать, перенормированные функции Грина мы отождествим с матричными элементами оператора  $\hat{T}$ . Поэтому важно перейти от требования унитарности к условиям для  $T$  и убедиться в том, что они выполняются при таком отождествлении.

Из условия унитарности для  $S$  вытекает, что

$$\hat{R} - \hat{R}^\dagger = i \hat{R}^\dagger \hat{R} = i \hat{R} \hat{R}^\dagger. \quad (9.23)$$

В этом операторном уравнении собраны все ограничения на  $R$ , диктуемые унитарностью. Возьмем, например, матричный элемент этого соотношения между двухчастичными состояниями  $|1, 2\rangle$  или  $|3, 4\rangle$ :

$$\langle 3, 4 | \hat{R} | 1, 2 \rangle - \langle 3, 4 | \hat{R}^\dagger | 1, 2 \rangle = i \langle 3, 4 | \hat{R} \hat{R}^\dagger | 1, 2 \rangle. \quad (9.24)$$

Как нетрудно видеть, в случае, когда внешние частицы бесспиновые,

$$\langle 3, 4 | \hat{R}^\dagger | 1, 2 \rangle = \langle 1, 2 | \hat{R}^\dagger | 3, 4 \rangle. \quad (9.25)$$

$$\text{С учетом равенства } \langle 1, 2 | \hat{R}^\dagger | 3, 4 \rangle = (\langle 3, 4 | \hat{R} | 1, 2 \rangle)^* \quad (9.26)$$

$$\text{получаем } 2\text{Im} \langle 3, 4 | \hat{R} | 1, 2 \rangle = \langle 3, 4 | \hat{R} \hat{R}^\dagger | 1, 2 \rangle. \quad (9.27)$$

Правую часть можно переписать иначе, если ввести набор промежуточных состояний. Так как мы хотим ограничиться взаимодействиями, включающими четное число состояний (инвариантность при замене  $\varphi \rightarrow -\varphi$ ), низшим по энергии промежуточным состоянием будет двухчастичное состояние  $|a, b\rangle = |a\rangle|b\rangle$ . Поэтому с учетом формулы (9.3) приходим к выражению

$$2\text{Im} \langle 3,4 | \hat{R} | 1,2 \rangle = \int \frac{d^4 a d^4 b}{(2\pi)^8} \theta(a_0) \theta(b_0) \delta(a^2 - m^2) \times \\ \times \delta(b^2 - m^2) \langle 3,4 | \hat{R} | a, b \rangle \langle a, b | \hat{R}^\dagger | 1,2 \rangle + \dots, \quad (9.28)$$

где многоточием обозначена сумма по 4-, 6-, ...-частичным промежуточным состояниям. В случае  $T$ -матрицы (9.1.2) выражение (9.28) принимает вид

$$2\text{Im} \langle 3,4 | \hat{T} | 1,2 \rangle = \int \frac{d^4 a d^4 b}{(2\pi)^4} \theta(a_0) \theta(b_0) \delta(a^2 - m^2) \times \\ \times \delta(b^2 - m^2) \delta(a + b - 1 - 2) \langle 3,4 | \hat{T}^\dagger | a, b \rangle \langle a, b | \hat{T} | 1,2 \rangle + \dots \quad (9.29)$$

Так как  $a$  и  $b$  находятся на массовой поверхности, это выражение будет отлично от нуля только в том случае, если начальное состояние  $|1,2\rangle$  обладает достаточной энергией, чтобы породить промежуточное состояние  $|a, b\rangle$ , т.е. если  $s = (p_1 + p_2)^2 \geq 4m^2$ . Таким образом, вследствие унитарности и полноты  $T$ -матрицы ее элементы действительны при  $s < 4m^2$  и приобретают мнимую часть после того, как пересекается двухчастичный порог, а для всех других, более высоких порогов имеются дополнительные вклады в мнимую часть.

Сравним теперь это с четырехточечной функцией, полученной по теории возмущений,

$$\tilde{\Gamma}^{(4)} = -i \left[ \lambda + \frac{\lambda^2}{2 \cdot 16\pi^2} \int dx \ln \left[ \frac{m^2 - i\epsilon - sx(1-x)}{m^2 + M^2 x(1-x)} \right] + \right. \\ \left. + (s \rightarrow t) + (s \rightarrow u) + O(\lambda^3) \right]. \quad (9.30)$$

Мы видели, что интеграл по параметру действительно приобретает мнимую часть и имеет точку ветвления при  $s = 4m^2$ , так что все это согласуется с соотношением унитарности (9.29). Таким образом, мы получаем возможность отождествить функции Грина с величиной  $-i$ , умноженной на  $T$ -матрицу. В данном случае

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(1, 2, 3, 4) = -i \langle 3, 4 | \hat{T} | 1, 2 \rangle. \quad (9.31)$$

В самом деле, мы уже вычислили мнимую часть функции  $\tilde{\Gamma}^{(4)}$ ; она имеет порядок  $\lambda^2$  и появляется только при  $s > 4m^2$ . Но можно вычис-

лить эту мнимую часть из соотношения унитарности (9.29), подставив в его правую часть вершину низшего порядка теории возмущений. Это приводит к выражению

$$2\text{Im}(i\tilde{\Gamma}^{(4)}) = \frac{\lambda^2}{(2\pi)^2} \int d^4a d^4b \theta(a_0)\theta(b_0)\delta(a^2 - m^2) \times \\ \times \delta(b^2 - m^2)\delta(1 + ? - a - b) + O(\lambda^4), \quad (9.32)$$

показать правильность которого мы предоставляем читателю. Оно содержит только вклад низшего порядка в мнимую часть; 4-, 6-, ... -частичные пороги будут давать вклад в мнимую часть лишь в более высоких порядках по  $\lambda$ .

Если учесть эту связь между функциями Грина и амплитудами рассеяния, то возникает новый способ вычисления мнимой части диаграмм, основанный на соотношении унитарности. Такой способ пригоден для вычислений по теории возмущений, поскольку правая часть равенства (9.29) имеет квадратичную структуру; это означает, что если амплитуда  $\langle a, b | T | 1, 2 \rangle$  вычислена в порядке  $\lambda^k$ , то мнимая часть будет определяться в порядке  $\lambda^{k+1}$ . Сказанное имеет важное значение благодаря существованию оптической теоремы, которая связывает мнимую часть амплитуды рассеяния вперед с полным сечением. Эта теорема легко доказывается подстановкой  $|3, 4\rangle = |1, 2\rangle$  в формулу (9.29) и сравнением правой части получившегося выражения с проинтегрированным выражением (9.22).

Можно получить и диаграммное представление унитарных ограничений, если вспомнить смысл фейнмановского пропагатора. Имеем

$$\Delta_F(x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{ikx}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} = \theta(x_0) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \theta(-k_0) \times \\ \times \delta(k^2 - m^2) + \theta(-x_0) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \theta(+k_0) \delta(k^2 - m^2),$$

и здесь в явном виде выражается то обстоятельство, что  $\Delta_F$  — пропагатор состояний как с положительной, так и с отрицательной энергией в зависимости от знака  $x_0$ . Если теперь ввести новый набор правил, в котором полный пропагатор  $\Delta_F$  заменен произведением  $\theta(k_0)\delta(k^2 - m^2)$ , то мы получим графический способ вычисления



мнимых частей и, следовательно, полных сечений. Конечно, новое правило применимо только в пространстве Минковского. Вместо старого правила

$$\text{---} \rightarrow \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

введем новое правило для пропагатора с разрезом

$$\text{---} \left| \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right. \rightarrow (2\pi)\theta(p_0)\delta(p_0^2 - m^2).$$

Заметим, что разрезанный пропагатор несимметричен, как показывает штриховка. Дело в том, что, поскольку мы должны вычислять  $TT^\dagger$  в правой части (9.29), части диаграммы, лежащие слева от разреза, должны соответствовать сопряженной диаграмме справа от него, хотя они могут быть и неодинаковыми. Мы отсылаем заинтересованного читателя за деталями к работе 'т Хофта и Вельтмана "Диagramматика" [10].

Итак, равенство (9.32) в диаграммном представлении запишется

в следующем виде:  $\text{Im} \left( \text{---} \right) = \left( \text{---} \right) \left| \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right.$  . Окончательный

результат заключается в том, что можно вывести общие формулы, в которых мнимая часть диаграмм представляется в виде суммы всех возможных разрезов этих диаграмм. (Это не так плохо, как кажется, поскольку многие из разрезанных диаграмм дают нуль в силу закона сохранения энергии, ибо разрезание фейнмановского пропагатора ограничивает поток энергии одним направлением).

На этом мы завершаем изучение теории  $\lambda\phi^4$  в рамках теории возмущений.

### Задачи

А. Исходя из выражения (9.19), покажите, что  $d\sigma/d\Omega = (1/s) |T|^2 64\pi^2$ .

Б. Покажите, что для упругого рассеяния бесспиновых частиц  $\langle 3,4 | \hat{S} | 1,2 \rangle = \langle 1,2 | \hat{S} | 3,4 \rangle$ .

В. Исходя из соотношения унитарности вычислите  $\text{Im}(i\tilde{\Gamma}^{(4)})$  и сравните с результатом, полученным ранее по теории возмущений.

Г. Покажите, что в общем случае при  $\epsilon > 0$

$$\frac{1}{x + i\epsilon} = -i\pi \delta(x) + P\left(\frac{1}{x}\right),$$

где  $P(1/x)$  — главное значение величины  $1/x$  в смысле Коши, определяемое как

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{ixy} [\theta(y) - \theta(-y)].$$

\*Д. Вычислите мнимую часть диаграммы "заходящее солнце",

пользуясь соотношением унитарности  $\text{Im} [i \text{---} \bigcirc ] = \text{---} \bigcirc \text{---}$ .

\*\*Е. Пусть задан лагранжиан  $\mathcal{L}_E = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{\hbar}{3!} \varphi^3 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4$ ;

а) выведите фейнмановские правила; б) найдите изменение  $m$ ,  $\hbar$  и  $\lambda$  в результате изменения масштаба с точностью  $O(\hbar)$ ; в) решите уравнения, полученные в пункте б, и дайте физическую интерпретацию результата. Можно пользоваться любым рецептом перенормировки, но мы рекомендуем рецепт, не зависящий от масс.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. 't Hooft G., Veltman M., Nucl. Phys., **E44**, 189 (1972).
2. Curtright, Ghandour, Ann. of Phys., **106**, 209 (1977).
3. Gell-Mann M., Low F., Phys. Rev., **95**, 1300 (1954).
4. Callan C., Phys. Rev., **D5**, 3202 (1972).
5. Symanzik K., Comm. Math. Phys., **23**, 49 (1971).
6. Georgi H., Politzer H.D., Phys. Rev., **D14**, 1829 (1976).
7. 't Hooft G., Nucl. Phys., **B61**, 455 (1973).
8. Weinberg S., Phys. Rev., **D8**, 3497 (1973).
9. Coleman S., in: Proc. of the 1971 Int. School of Subnuclear Physics, Erice, Italy, ed. A. Zichichi, Acad. Press, 1973.
10. 't Hooft G., Veltman M., In: Particle Interactions at Very High Energy, part B, eds. D. Speiser et al., Plenum Press, N.Y., 1974.

## Интеграл по траекториям при наличии фермионов

### § 1. Интегрирование по грассмановым числам

В гл. 1 мы привели несколько примеров функционалов действия, содержащих ферми-поля, т.е. поля, преобразующиеся по представлениям группы Лоренца с полуцелым спином. Там же было отмечено, что ферми-поля должны рассматриваться как антикоммутирующие классические поля и что такое *классическое* условие не означает квантования. Если рассуждать по аналогии с квантованием, скажем, скалярного поля, то мы придем к рассмотрению интеграла "по траекториям" от антикоммутирующих полей. В лучшем случае это может быть формальным понятием, лишенным прямого физического смысла, но, как обычно бывает в подобных случаях, окончательный результат будет представлять интерес, хотя метод его получения таков, что можно лишь пожалеть плечами.

Сначала рассмотрим случай одной грассмановой (антикоммутирующей) "переменной"  $\theta$ . Она удовлетворяет условию

$$\{\theta, \theta\} = 0, \quad \text{или} \quad \theta^2 = 0 \quad (1.1)$$

(символ  $\{, \}$  означает антикоммутатор). Определим дифференциальный оператор  $d/d\theta$  равенством

$$\left\{ \frac{d}{d\theta}, \theta \right\} = 1. \quad (1.2)$$

В силу соотношения (1.1) разложение любой функции  $f(\theta)$  переменной  $\theta$  будет иметь простой вид

$$f(\theta) = \alpha + \beta \theta. \quad (1.3)$$

Для удобства будем считать  $\beta$  величиной грассманова типа, а  $\alpha$  — действительным коммутирующим числом. (Далее грассмановы переменные будем обозначать греческими буквами.) Отсюда следует, что

$$\frac{df}{d\theta} = -\beta, \quad \frac{d^2 f}{d\theta^2} = 0, \quad (1.4), (1.5)$$

если принять  $(d/d\theta) \alpha = \{d/d\theta, \beta\} = 0$ . Из уравнения (1.5) следует,

что

$$\left\{ \frac{d}{d\theta}, \frac{d}{d\theta} \right\} = 0, \quad (1.6)$$

т.е. что для дифференцирования нет обратной операции. Это очень неудобно, так как все привыкли думать об интегрировании и дифференцировании как об обратных операциях. Но тем самым мы предупреждены о том, что интегрирование следует вводить формальным путем. Определим его как операцию, обозначаемую символом  $\int d\theta \dots$ , со свойствами

$$\int d\theta = 0, \quad \int d\theta \theta = 1, \quad (1.7)$$

т.е. эта операция действует в точности как дифференцирование. При таком определении операция интегрирования удовлетворяет критерию инвариантности относительно трансляции переменной интегрирования на постоянную величину.

Мир одной грассмановой переменной довольно уныл, а потому рассмотрим  $N$  грассмановых переменных  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , удовлетворяющих условиям

$$\{\theta_i, \theta_j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (1.8)$$

Введем соответствующие операторы производных в соответствии с равенствами

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \theta_j \right\} = \delta_{ij}, \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\} = 0. \quad (1.9), (1.10)$$

Любую нормальную (т.е. не грассманову) функцию переменных  $\theta_i$  можно записать в виде

$$f(\theta_i) = a + \beta_i \theta_i + c_{ij} \theta_i \theta_j + \dots + c \theta_1 \theta_2 \dots \theta_N, \quad (1.11)$$

где последний коэффициент является грассмановым или нормальным в зависимости от  $N$ . Интегрирование определяется так же, как и в случае одной переменной:

$$\int d\theta_i = 0, \quad \int d\theta_i \theta_i = 1 \quad (\text{по } i \text{ нет суммирования}). \quad (1.12)$$

Когда мера интегрирования и подынтегральное выражение содержат более одной переменной, условимся проводить интегрирование в соответствии с процедурой вложения. Так, например,

$$\int d\theta_1 d\theta_2 \theta_1 \theta_2 = - \int d\theta_1 (d\theta_2 \theta_2) \theta_1 = -1. \quad (1.13)$$

В качестве примера рассмотрим интеграл

$$I_N(M) = \int d\theta_1 \dots d\theta_N e^{-\theta^T M \theta}, \quad (1.14)$$

где  $M$  — антисимметричная  $N \times N$ -матрица с нормальными элементами  $m_{ij}$ , а экспонента определяется своим разложением в ряд. При  $N = 2$  имеем

$$I_2(M) = \int d\theta_1 d\theta_2 [1 - 2m_{12}\theta_1\theta_2] = \quad (1.15)$$

$$2m_{12} = 2\sqrt{\det M}. \quad (1.16)$$

При нечетном  $N$  можно показать, что интеграл  $I$  обращается в нуль; это согласуется с тем, что интеграл  $I$  пропорционален квадратному корню из детерминанта, так как детерминант нечетномерной антисимметричной матрицы равен нулю. Чтобы угадать вид общей формулы, рассмотрим случай  $N = 4$ . Нетрудно видеть, что соответствующие члены в разложении экспоненты имеют вид

$$e^{-\theta^T M \theta} = \dots + \frac{1}{2!} (\theta^T M \theta)^2 + \dots = 4\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4 [m_{12}m_{34} - m_{13}m_{24} + \\ + m_{14}m_{23}] + \dots, \quad (1.17)$$

$$\text{откуда } I_4(M) = 4[m_{12}m_{34} - m_{13}m_{24} + m_{14}m_{23}] = 4\sqrt{\det M}, \quad (1.18), \quad (1.19)$$

так что общая формула может быть записана в виде

$$I_N(M) = (2)^{N/2} \sqrt{\det M}. \quad (1.20)$$

Это первая интересная формула. Ее следует сравнить с эквивалентной формулой для бозонных (нормальных) полей, в которую квадратный корень из детерминанта входит в знаменатель.

Далее рассмотрим интеграл

$$I_N(M; \chi) \equiv \int d\theta_1 \dots d\theta_N e^{-\theta^T M \theta + \chi_i \theta_i}, \quad (1.21)$$

где  $\chi_i$  — грассманы числа,

$$\{\chi_i, \chi_j\} = 0, \quad \{\chi_i, \theta_j\} = 0. \quad (1.22)$$

Чтобы упростить задачу, вычислим (1.21) сразу при  $N = 2$ . Тогда

$$e^{-\theta^T M \theta + \chi^T \theta} = 1 - 2m_{12}\theta_1\theta_2 - \chi_1\chi_2\theta_1\theta_2, \quad (1.23)$$

$$\text{так что } I_2(M; \chi) = 2(m_{12} + \frac{1}{2} \chi_1\chi_2). \quad (1.24)$$

Этот результат можно было бы получить и более простым путем, формально дополнив до полного квадрата показатель экспоненты и сдвинув переменную интегрирования так, как будто мы имеем дело с обычным интегрированием, т.е. положив

$$\theta' = \theta + \frac{1}{2} M^{-1} \chi \quad (1.25)$$

и записав

$$I_N(M; \chi) = \int d\theta_1 \dots d\theta_N e^{-\theta'^T M \theta' + \frac{1}{4} \chi^T M^{-1} \chi} = \quad (1.26)$$

$$= e^{\frac{1}{4} \chi^T M^{-1} \chi} I_N(M). \quad (1.27)$$

В частном случае  $N = 2$  мы приходим к формуле (1.24). Цель этого небольшого упражнения двоякая: во-первых, вывести формулу (1.27)  $\therefore$ , во-вторых, показать, что благодаря определению (1.7) при грассмано-вом интегрировании разрешен сдвиг переменных.

Приведенные выше формулы можно обобщить на случай интегрирования по комплексным грассмановым переменным. Для примера положим

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} (\theta_1 + i\theta_2); \quad \eta^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\theta_1 - i\theta_2), \quad (1.28)$$

$$\text{так что } d\theta_1 d\theta_2 = d\eta^* d\eta, \quad \theta^T M \theta = -2i\eta^* m_{12} \eta. \quad (1.29), \quad (1.30)$$

Если ввести  $1 \times 1$ - матрицу  $2m_{12}$ , то на основании формулы (1.16) получим

$$\int d\eta d\eta^* e^{i\eta^* M \eta} = \det M, \quad M = 2m_{12}. \quad (1.31)$$

Эту формулу можно обобщить на случай  $N$  комплексных грассмановых чисел. Аналогично доказывается, что

$$\int d\eta^* d\eta e^{i\eta^* M \eta + i\zeta^* \eta + i\zeta \eta^*} = \det M e^{-i\zeta^* (M)^{-1} \zeta}, \quad (1.32)$$

где  $\zeta$  и  $\zeta^*$  — комплексные грассмановы числа. Формулы (1.27) и (1.32) чрезвычайно важны для вычисления интегралов по траекториям при наличии фермионов, связанных с внешними грассмановыми источниками.

## Задачи

А. Дайте общее доказательство формулы (1.20).

Б. Докажите формулу (1.27) при  $N = 4$  явным вычислениям.

В. Докажите соотношение (1.31), если  $M$  есть матрица  $2 \times 2$ .

Г. Докажите формулу (1.32).

Д. Покажите, что  $\int d\alpha d\beta e^{\alpha M \beta} = \det M$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — независимые грассмановы переменные.

## § 2. Интеграл по траекториям для свободных ферми-полей

Существуют три способа описания свободных частиц со спином  $1/2$  в пространстве Минковского.

А. Вейлевский лагранжиан

$$\mathcal{L}_W = \psi_L^\dagger \sigma \cdot \partial \psi_L \quad (2.1)$$

описывает с помощью двухкомпонентного комплексного спинора  $\psi_L$  левую безмассовую частицу одновременно с ее правой античастицей (например, безмассовое левое нейтрино и правое антинейтрино), причем эти частицы связаны между собой дискретным CP-преобразованием

$$\text{CP: } \psi_L \rightarrow \sigma_2 \psi_L^* \quad (2.2)$$

Б. Майорановский лагранжиан

$$\mathcal{L}_M = \psi_L^\dagger \sigma \cdot \partial \psi_L - \frac{im}{2} (\psi_L^T \sigma_2 \psi_L + \psi_L^\dagger \sigma_2 \psi_L^*) \quad (2.3)$$

описывает массивный вейлевский спинор. Он интерпретируется как самосопряженная частица со спином  $1/2$  и двумя степенями свободы, отвечающими спину, направленному вверх или вниз. Массивный вейлевский спинор можно выразить через четырехкомпонентное майорановское поле

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \psi_L \\ -\sigma_2 \psi_L^* \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

так что майорановский лагранжиан принимает вид

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_M \gamma \cdot \partial \Psi_M + i \frac{m}{2} \bar{\Psi}_M \Psi_M \quad (2.5)$$

### В. Дираковский лагранжиан

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}_L^\dagger \sigma \cdot \partial \psi_L + \bar{\psi}_R^\dagger \bar{\sigma} \cdot \partial \psi_R + im(\bar{\psi}_R^\dagger \psi_L + \bar{\psi}_L^\dagger \psi_R) \quad (2.6)$$

описывает частицу с двумя степенями свободы и отдельную от нее античастицу (например, электрон и позитрон). Этот лагранжиан имеет вдвое больше степеней свободы, нежели вейлевский и майорановский, и помимо  $CP$  сохраняет и  $P$ . Для удобства этот лагранжиан выражают через четырехкомпонентный дираковский спинор

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

$$\text{в виде } \mathcal{L}_D = \bar{\Psi}_D (\gamma \cdot \partial + im) \Psi_D. \quad (2.8)$$

Если ввести связь с внешними источниками, то для каждого из этих лагранжианов можно построить производящий функционал. Вейлевские поля  $\psi_L$  могут быть связаны с источниками в выражениях вида

$$\chi_L^T \sigma_2 \psi_L + \text{э.с.}, \quad \chi_R^\dagger \psi_L + \text{э.с.} \quad (2.9)$$

Эти два вида связи эквивалентны при замене  $\chi_R = \sigma_2 \chi_L^*$ . Следовательно, можно рассматривать только один тип связи с источником.

В вейлевском случае рассмотрим функционал

$$\mathcal{W}[\chi_L, \chi_L^\dagger] = N \int \mathcal{D}\psi_L^- \mathcal{D}\psi_L^\dagger e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_W + i \chi_L^T \sigma_2 \psi_L + i \bar{\psi}_L^\dagger \sigma_2 \chi_L^*]} \quad (2.10)$$

Как и во всех свободных теориях, он без труда вычисляется. Введем фурье-образы

$$\psi_L(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} e^{ip \cdot x} \tilde{\psi}_L(p) \quad \text{и т.д.}, \quad (2.11)$$

как в гл. 3. Показатель экспоненты принимает вид

$$iS_W = - \int d^4p [\tilde{\psi}_L^\dagger(p) \sigma \cdot p \tilde{\psi}_L(p) + \tilde{\chi}_L^T(-p) \sigma_2 \tilde{\psi}_L(p) + \tilde{\psi}_L^\dagger(p) \sigma_2 \tilde{\chi}_L^*(-p)].$$

Перепишем его в виде (2.12)

$$- \int d^4p \{ [\tilde{\psi}_L^\dagger(p) + \tilde{\psi}_L^\dagger(p)] \sigma \cdot p [\tilde{\psi}_L(p) + \tilde{\psi}_L(p)] + \tilde{\psi}_L^\dagger(p) \sigma \cdot p \tilde{\psi}_L(p) \}, \quad (2.13)$$



где  $\tilde{\varphi}_L(p)$  — решение уравнений движения

$$\tilde{\varphi}_L(p) = \frac{\bar{\sigma} \cdot p}{p^2} \sigma_2 \chi_L^*(-p). \quad (2.14)$$

При такой форме записи мы видим, что можно сразу провести интегрирование по  $\psi_L$ , заменив переменную интегрирования на  $\tilde{\varphi}_L$ , что приведет к изменению произвольной нормировки:

$$W[\chi_L, \chi_L^\dagger] = N e^{-\int d^4 p \tilde{\chi}_L^\dagger(p) \frac{\sigma \cdot p}{p^2} \tilde{\chi}_L(p)}, \quad (2.15)$$

где мы использовали соотношения [гл. 1, формула (4.37)]

$$\sigma \cdot p \sigma \cdot p = p^2, \quad \sigma_2^T \sigma \cdot p \sigma_2 = \sigma \cdot p. \quad (2.16), \quad (2.17)$$

Если мы, как и в бозонном случае, положим

$$W = e^{iZ}, \quad (2.18)$$

где  $Z$  — производящий функционал связанных функций Грина, то

$$Z[\chi_L, \chi_L^\dagger] = -i \int d^4 x \chi_L^\dagger(x) (i\bar{\sigma} \cdot \partial)^{-1} \chi_L(x). \quad (2.19)$$

Отсюда мы извлекаем двухточечную связную функцию Грина

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = -i (i\bar{\sigma}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu})^{-1} \delta^{(4)}(x_1 - x_2) \quad (2.20)$$

или в импульсном пространстве

$$\tilde{G}^{(2)}(p) = -\frac{i}{\bar{\sigma} \cdot p} = -i \frac{\sigma \cdot p}{p^2}; \quad (2.21)$$

это, конечно, не что иное, как пропагатор. В такой форме данное выражение не имеет смысла, если не задано правило обхода полюса при  $p^2 = 0$ . Мы можем задать его по аналогии с бозонным случаем, но нужно иметь в виду, что в фермионном случае применение  $(-i\epsilon)$ -правила не обосновано соображениями сходимости, так как мы имеем дело с формальным грассмановым интегрированием. Поэтому для подтверждения того же самого предписания обходя полюса, что и в бозонном случае, видимо, нужно перенести проблему в евклидово пространство.

Другие два случая рассматриваются аналогично. В майорановском случае исходим из

$$W_M[\chi_M] = N \int \mathcal{D}\Psi_M e^{i \int d^4 x [\mathcal{L}_M + i\bar{\Psi}_M \chi_M]}. \quad (2.22)$$

и, дополняя до полного квадрата, получаем

$$W_M[\chi_M] = N^* e^{-\frac{1}{2} \int d^4 p \bar{\chi}_M (p+m)^{-1} \chi_M}, \quad (2.23)$$

$$\text{где } \hat{p} = \gamma^\mu p_\mu, \quad (2.24)$$

что приводит к пропагатору

$$\tilde{G}_M^{(2)}(p) = \frac{-i}{\hat{p} + m} = -i \frac{\hat{p} - m}{p^2 - m^2}, \quad (2.25)$$

если учесть равенство  $\hat{p}\hat{p} = p^2$ . И в этом выражении нужно в явной форме добавить правило обхода полюса. Дираковский случай исследуется сходным образом, исходя из функционала

$$W_D[\zeta, \bar{\zeta}] = N \int \mathcal{D}\Psi_D \mathcal{D}\bar{\Psi}_D e^{i \int d^4 x [\bar{\zeta}_D + i\bar{\Psi}_D \zeta + i\bar{\zeta} \Psi_D]}, \quad (2.26)$$

где теперь  $\zeta$  и  $\bar{\zeta}$  — четырехкомпонентные дираковские грассманы источники. Аналогичные выкладки приводят к выражению

$$W_D = N^* e^{-\int d^4 p \bar{\zeta}_D (\hat{p} + m)^{-1} \zeta_D}, \quad (2.27)$$

из которого мы извлекаем пропагатор

$$\tilde{G}_D^{(2)}(p) = \frac{-i}{\hat{p} + m} = -i \frac{\hat{p} - m}{p^2 - m^2}, \quad (2.28)$$

куда следует добавить  $(-i\epsilon)$ -предписание.

Как и в бозонном случае, можно построить производящий функционал непосредственно в евклидовом пространстве, а затем продолжить функции Грина в пространство Минковского.

Группа Лоренца в евклидовом пространстве становится компактной, что означает (гл. 1), что она состоит из двух совершенно неэквивалентных  $SU(2)$ -компонент. Однако оператор производной все так же преобразуется по представлению  $(1/2, 1/2)$ , и если мы теперь захотим составить лоренцовский скаляр, линейный по производной, то нам потребуется два разных поля  $\psi_L \sim (1/2, 0)$  и  $\psi_R \sim (0, 1/2)$  для построения векторных величин, преобразующихся как  $(1/2, 1/2)$ . Можно построить два таких действительных вектора с компонентами

$$(i\psi_L^\dagger \psi_{\hat{R}} + i\psi_R^\dagger \psi_L, -\psi_L^\dagger \sigma \psi_R + \psi_R^\dagger \sigma \psi_L), \quad (2.29)$$

$$(\psi_L^\dagger \psi_R - \psi_R^\dagger \psi_L, i\psi_L^\dagger \sigma \psi_{\hat{R}} + i\psi_R^\dagger \sigma \psi_L), \quad (2.30)$$

помня при этом, что, так как  $\psi_L$  и  $\psi_R$  — грассмановы числа,

$$(\psi_L^\dagger \psi_R)^* = \psi_L^T \psi_R^* = -\psi_R^\dagger \psi_L. \quad (2.31)$$

Если ввести четырехкомпонентный евклидов дираковский спинор

$$\Psi_E \equiv \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

то можно переписать рассматриваемые векторы в виде

$$\Psi_E^\dagger \bar{\gamma}_\mu \Psi_E, \quad \Psi_E^\dagger \bar{\gamma}_5 \bar{\gamma}_\mu \Psi_E, \quad (2.33)$$

где  $\bar{\gamma}_\mu$  — евклидовы  $\gamma$ -матрицы

$$\bar{\gamma}_0 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma}_i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

удовлетворяющие соотношению

$$\{\bar{\gamma}_\mu, \bar{\gamma}_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu}; \quad (2.35)$$

$$\bar{\gamma}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Возможные массовые члены имеют вид (в евклидовом пространстве существует только один тип массы)

$$\psi_L^\dagger \psi_L, \quad \psi_R^\dagger \psi_R, \quad (2.37)$$

так что евклидов лагранжиан дается выражением

$$\mathcal{L}_E = \psi_E^\dagger \bar{\gamma}_\mu \bar{\partial}_\mu \psi_E + im \psi_E^\dagger \psi_E, \quad (2.38)$$

причем мы позаботились о том, чтобы лагранжиан был действительным,

$$\mathcal{L}_E^* = \mathcal{L}_E. \quad (2.39)$$

Соответствующий производящий функционал таков:

$$W_E[\zeta_E, \zeta_E^\dagger] = N \int \mathcal{D}\psi_E^\dagger \mathcal{D}\psi_E e^{-\int d^4\bar{x} [\mathcal{L}_E + i\zeta_E^\dagger \psi_E + i\psi_E^\dagger \zeta_E]} = (2.40)$$

$$= N e^{i \int d^4p \zeta_E^\dagger(p) (\hat{p} + m)^{-1} \zeta_E(p)}, \quad (2.41)$$

откуда получаем выражение для пропагатора

$$G_E(p) = \frac{-i}{\hat{p} + m} = i \frac{\hat{p} - m}{\bar{p}^2 + m^2}, \quad (2.42)$$

где учтено, что  $\frac{\hat{p}\hat{p}}{\bar{p}\bar{p}} = -\bar{p}^2$ . Отметим, что, как и ожидалось, в знаменателе пропагатора стоит величина  $\bar{p}^2 + m^2$ . Мы с удовлетворением видим, что у него такая же структура, как и у дираковского пропагатора в пространстве Минковского.

В случае вейлевских полей, по-видимому, не должно быть подобного соответствия: в евклидовом пространстве невозможно построить уравнение первого порядка для поля, преобразующегося по представлению  $(1/2, 0)$ , исходя из инвариантного лагранжиана, содержащего только это поле (как мы только что видели, это легко можно сделать, если рассматривать два вейлевских поля). Если ФИТ может быть хорошо определен только в евклидовом пространстве, как утверждают специалисты по аксиоматике, то тогда, вероятно, мы столкнемся с вполне реальной проблемой там, где приходится иметь дело с вейлевскими полями, например в теории слабых взаимодействий или в ее объединении с КХД. Подчеркнем, что в рамках теории возмущений с теорией поля, содержащей вейлевские поля в пространстве Минковского, вроде бы не происходит ничего плохого. Но может оказаться, что при более полном исследовании обнаружатся сюрпризы, которые потребуют удвоения числа вейлевских фермионов, что при некотором (большом) масштабе восстановит векторно-подобную структуру слабых взаимодействий.

С другой стороны, поскольку ферми-поля входят в перенормируемый лагранжиан квадратично, их интегрирование приводит только к детерминантам. Поэтому можно думать, что нам требуется лишь какой-нибудь евклидов функционал, который приводил бы к правильному (в смысле его продолжения в пространстве Минковского) детерминанту. Такой подход требует удвоения числа независимых грассмановых полей (см. лекции Коулмена "Применения инстантонов" [1] и задачу Д).

### Задачи

А. Вычислите производящий функционал для майорановского и дираковского полей в пространстве Минковского.

Б. Покажите, что в евклидовом пространстве оператор  $\partial_\mu$  преобразуется по представлению  $(1/2, 1/2)$ .

В. Пусть в евклидовом пространстве задано  $\psi_L \sim (1/2, 0)$ . Постройте квадратичную форму, преобразующуюся по представлению  $(1, 0)$ .

Г. Покажите, что спинорный лагранжиан в евклидовом пространстве обладает следующим любопытным свойством: массовый член в лагранжиане инвариантен относительно так называемого кирального преобразования  $\Psi_E \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5} \Psi_E$ , а кинетический член — нет!

Д. Формально определим  $\mathcal{L} = \chi(\hat{\partial} + im)\psi$ , где  $\chi$  и  $\psi$  — независимые четырехкомпонентные грассманы поля. Покажите, как нужно интегрировать, чтобы получить обычный дираковский детерминант. Проанализируйте в этом случае киральную инвариантность.

### § 3. Фейнмановские правила для спинорных полей

В предыдущем параграфе говорилось о фейнмановских правилах для свободных ферми-полей. Здесь мы выведем правила для взаимодействующих спиноров. Спиноры могут взаимодействовать по-разному, лишь бы выполнялось условие сохранения спина, которое требует, чтобы все вершины взаимодействия содержали четное число пар спинорных полей. В гл. 1 мы уже приводили примеры теорий со взаимодействующими фермионами.

Число возможных фермионных взаимодействий резко сокращается, если мы накладываем условие перенормируемости, которое требует, чтобы число примитивно расходящихся диаграмм было конечным. Поэтому вычислим кажущуюся степень расходимости  $D$  произвольной фейнмановской диаграммы с фермионами.

Рассмотрим диаграмму с  $L$  петлями,  $I_b$  бозонными внутренними линиями,  $I_f$  фермионными внутренними линиями,  $V$  вершинами, каждая из которых имеет  $N_b$  бозонных и  $N_f$  фермионных хвостов,  $E_b$  внешними бозонными линиями и  $E_f$  внешними фермионными линиями. Как мы только что отметили, числа  $N_f$  и  $E_f$  должны быть четными. Число петель дается соотношениями

$$L = I - V + 1 = I_b + I_f - V + 1. \quad (3.1)$$

Кажущаяся степень расходимости в  $d$  измерениях равна

$$D_d = dL - I_f - 2I_b, \quad (3.2)$$

так как каждая внутренняя спинорная линия вносит только одну обратную степень импульса. Далее, полное число фермионных линий равно

$$N_f V = E_f + 2I_f \quad (3.3)$$

и аналогично полное число бозонных линий —

$$N_b V = E_b + 2I_b. \quad (3.4)$$

Эти соотношения позволяют записать  $D_d$  в виде

$$D_d = d - \frac{1}{2} (d-1) E_f - \frac{1}{2} (d-2) E_b - V \left[ d - \frac{1}{2} (d-1) N_f - \frac{1}{2} (d-2) N_b \right]. \quad (3.5)$$

При  $N_f = E_f = 0$  данное выражение сводится к полученному ранее выражению для случая одних бозонов. В других измерениях выражение (3.5) имеет вид

$$D_2 = 2 - \frac{1}{2} E_f - V \left( 2 - \frac{1}{2} N_f \right) \quad (2 \text{ измерения}), \quad (3.6)$$

$$\text{откуда следует, что } N_f \leq 4 \quad (2 \text{ измерения}), \quad (3.7)$$

так как в противном случае расходимость будет расти с ростом числа вершин. Следовательно, даже в двух измерениях существует ограничение на тип разрешенных фермионных взаимодействий: в нем не должны содержаться степени выше  $(\psi)^4$ . Можно сказать иначе: в противоположность бозонным полям, которые в двух измерениях безразмерны, спинорные поля имеют размерность  $(-1/2)$ , так что взаимодействие наибольшей степени, не требующее введения размерной константы связи, — это  $\psi^4$ .

В четырех измерениях имеем

$$D_4 = 4 - \frac{3}{2} E_f - E_b - V \left[ 4 - \frac{3}{2} N_f - N_b \right]. \quad (3.8)$$

Если мы не хотим, чтобы число примитивно расходящихся диаграмм росло с ростом числа вершин, то нужно потребовать, чтобы выполнялось условие

$$4 - \frac{3}{2} N_f - N_b \geq 0, \quad (3.9)$$

где  $N_f$  — четное число. Решение этого неравенства  $N_b = 0, N_f = 2$  похоже на включение массового члена, а не на вершину взаимодействия; решение  $N_f = 0, N_b = 2, 3, 4$  приводит к рассмотренным ранее взаимодействиям  $\varphi^2, \varphi^3$  и  $\varphi^4$ . Единственное новое решение, включающее как фермионы, так и бозоны, таково:

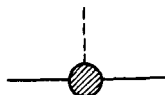
$$N_f = 2, N_b = 1, \quad (3.10)$$

что дает

$$D_4 = 4 - \frac{3}{2} E_f - E_b. \quad (3.11)$$

Это новое решение, описывающее единственное разрешенное перенормируемостью фермионное взаимодействие, невероятно ограничивает все возможности: перенормируемые фермионные взаимодействия должны содержать не более двух фермионных полей и одного бозонного поля.

Следовательно, в четырех измерениях фермионы входят в лагранжиан  $\mathcal{L}$  только квадратично! Данное обстоятельство можно выразить иначе: в четырех измерениях фермионы имеют размерность  $(-3/2)$ , а бозоны  $(-1)$ . Стало быть, единственная нетривиальная связь размерности 4 — это связь двух фермионов и одного бозона



Сделанный нами примечательный вывод чрезвычайно упрощает анализ теорий, включающих взаимодействие спиноров. Если заданы два поля со спином  $1/2$ , то можно образовать комбинации либо со спином  $0$ , либо со спином  $1$ . Связи с полем спина  $0$  — это юкавские связи, и они возникают во многих обличиях. В пространстве Минковского для дираковского поля имеем связи

$$i\bar{\Psi}_D \Psi_D \Phi, \quad \bar{\Psi}_D \gamma_5 \Psi_D \Phi', \quad (3.12)$$

где  $\Phi$  — скалярное, а  $\Phi'$  — псевдоскалярное поле. Для вейлевского поля имеем

$$i\psi_L^T \sigma_2 \psi_L \Phi_1, \quad i\psi_L^\dagger \sigma_2 \psi_L^* \Phi_2, \quad (3.13)$$

где  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  не обладают определенной четностью. В евклидовом пространстве возможные связи имеют вид

$$i\bar{\Psi}_E^\dagger \Psi_E \Phi, \quad \bar{\Psi}_E^\dagger \gamma_5 \Psi_E \Phi' \quad (\text{евклидово пространство}). \quad (3.14)$$

Связи со спином  $1$  для дираковской частицы в пространстве Минковского имеют вид

$$i\bar{\Psi}_D \gamma_\mu \Psi_D A^\mu, \quad \bar{\Psi}_D \gamma_\mu \gamma_5 \Psi_D A_P^\mu, \quad (3.15)$$

где  $A^\mu$  — векторное поле, а  $A_P^\mu$  — аксиально-векторное поле. Для вейлевских полей имеем связи

$$i\psi_L^\dagger \sigma_\mu \psi_L B^\mu, \quad i\psi_R^\dagger \bar{\sigma}_\mu \psi_R B^{\prime\mu}, \quad (3.16)$$

где  $B^\mu$  и  $B^{\sigma\mu}$  не обладают определенной четностью. Векторные связи в евклидовом пространстве таковы:

$$i\Psi_E^\dagger \bar{\gamma}_\mu \Psi_E A_\mu, \quad \Psi_E^\dagger \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_5 \Psi_E A_{\rho\mu}. \quad (3.17)$$

Взаимодействие спинорных и векторных полей будет подробно рассматриваться в следующих главах. Фейнмановские правила для вершин юкавского взаимодействия сводятся просто к самим безразмерным юкавским константам связи:

$$\begin{array}{c} | \\ \hline \end{array} \longleftrightarrow if: if\bar{\Psi}\Psi\phi, \quad (3.18)$$

$$\begin{array}{c} | \\ \hline \end{array} \longleftrightarrow f^{\sigma}\gamma_5: f^{\sigma}\bar{\Psi}\gamma_5\Psi\phi_p. \quad (3.19)$$

Здесь штриховыми линиями обозначено бозонное поле, а сплошными — спинорное, причем спинорные индексы опущены.

Грассманова природа спинорного поля находит отражение в одном кардинальном изменении фейнмановских правил: если в диаграмме имеется замкнутая фермионная линия (петля), эту диаграмму нужно брать со знаком минус, что иллюстрируется следующим примером.

Рассмотрим выражение (скажем, в евклидовом пространстве)

$$\mathbb{W} = \frac{\det[\partial_\mu\partial_\mu + \lambda A(x)]}{\det[\partial_\mu\partial_\mu + \lambda A(x)]} = 1, \quad (3.20)$$

где  $A(x)$  — скалярное поле, а детерминанты следует понимать как функциональные. Мы можем выразить их через интегралы по траекториям, причем детерминант в знаменателе дается интегралом по бозонным полям, а в числителе — по грассмановым полям. В результате имеем

$$\mathbb{W} = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\Psi^* e^{i\langle \Psi^*(\partial^2 + \lambda A(x))\Psi \rangle + \langle \phi^*(\partial^2 + \lambda A(x))\phi \rangle}. \quad (3.21)$$

В такой форме это выглядит как теория грассманова поля  $\psi$ , взаимодействующего с комплексным скалярным полем через внешнее поле



$A(x)$ . Фейнмановские правила таковы:

$$\begin{aligned} \text{---} &: \frac{i}{p^2} \text{ для гравитационной линии,} \\ \text{---} &: \frac{1}{p^2} \text{ для линии бозонного поля,} \end{aligned}$$

$$\text{---} \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right. : \lambda ; \quad \text{---} \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right. : \lambda ,$$

где поле  $A$  изображается волнистой линией. В такой теории пропагатор поля  $A$  будет иметь поправки, связанные с диаграммами "поляризации вакуума"

$$\text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} ,$$

согласно приведенным фейнмановским правилам, совершенно одинаковы. Но эти диаграммы не должны изменять пропагатор  $A$ , поскольку мы, начав с  $W = 1$ , знаем, что теория должна быть тривиальной! Следовательно, при сложении эти две диаграммы должны взаимно уничтожиться: гравитационная петля должна приобрести знак, обратный знаку бозонной петли.

Итак, где бы не встречались гравитационные (спинорные) поля, согласно фейнмановским правилам, нужно умножать диаграмму с  $n$  разными фермионными петлями на  $(-1)^n$ . Можно объяснить это правило тем, что разрезанная фермионная петля в соответствии с обобщенной ферми-статистикой должна быть антисимметричной относительно перестановки ее хвостов, так как в силу условия унитарности такая петля связана с физической амплитудой.

В заключение заметим, что юкавская связь допускает перенормируемые самодействия среди скалярных полей (см. задачу).

### Задачи

А. Найдите размерности, при которых существуют перенормируемые теории, содержащие фермионы.

Б. Задан лагранжиан

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_D (\gamma \cdot \partial + im) \Psi_D + if \bar{\Psi}_D \Phi \Psi_D + \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 ;$$

1) выведите фейнмановские правила; 2) найдите на однопетлевом уровне зависимость юкавской константы связи от масштаба; 3) исследуйте перенормируемость лагранжиана; в частности, проанализируйте

все однопетлевые диаграммы и исследуйте структуру требуемых контрчленов. Является ли лагранжиан в такой форме перенормируемым? Если нет, исправьте его.

#### § 4. Вычисление и масштабное преобразование фермионных детерминантов

Начнем с производящего функционала в евклидовом пространстве для теории, описывающей взаимодействие скалярного поля с четырехкомпонентным спинорным полем

$$W_E[\zeta^\dagger, \zeta, J] = e^{-Z_E} = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Psi^\dagger \mathcal{D}\Psi e^{-S_E[\Phi, \Psi^\dagger, \Psi, J, \zeta^\dagger, \zeta]}, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \text{где } S = \int d^4x & \left[ \frac{1}{2} \bar{\partial}_\mu \Phi \bar{\partial}_\mu \Phi + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \Phi^4 - \right. \\ & \left. - J \Phi^\dagger + \Psi^\dagger (\hat{\partial} + im + i\varphi) \Psi - i\zeta^\dagger \Psi - i\Psi^\dagger \zeta \right]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Спинорные поля входят в это выражение квадратично и поэтому могут быть функционально проинтегрированы. В результате приходим к выражению  $(S_E[\Phi, J])$  дается формулой (4.5) из гл. 3)

$$\begin{aligned} W_E[\zeta^\dagger, \zeta, J] = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_E[\Phi, J]} \det(\hat{\partial} + im' + i\varphi) \times \\ \times e^{\langle \zeta^\dagger (\hat{\partial} + im' + i\varphi)^{-1} \zeta \rangle}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где после дополнения до полного квадрата мы использовали формулу (1.31). Можно переписать его в виде

$$W_E = e^{\langle \zeta^\dagger (\hat{\partial} + im' + i\varphi \frac{\delta}{\delta J})^{-1} \zeta \rangle} \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_E[\Phi, J]} \det(\hat{\partial} + im' + i\varphi). \quad (4.4)$$

Это очень хорошая формула, позволяющая вычислять  $W_E$  по теории возмущений. В данном параграфе мы сосредоточимся на вычислении  $W_E$  методом перевала. Для начала разложим  $S_E$  вблизи классической полевой конфигурации  $\Phi_0, \Psi_0, \Psi_0^\dagger$ . Функциональное разложение имеет вид

$$\begin{aligned} S_E = S_E|_0 + \langle \eta^\dagger \frac{\delta S}{\delta \Psi^\dagger} |_\theta \rangle + \langle \frac{\delta S}{\delta \Psi} |_{\theta \eta} \rangle + \langle \frac{\delta S}{\delta \Phi} |_{\theta \rho} \rangle + \\ + \frac{1}{2} \langle \rho_1 \frac{\delta^2 S}{\delta \Phi_1 \delta \Phi_2} |_{\theta \rho_2} \rangle_{1,2} + \langle \eta_1^\dagger \frac{\delta^2 S}{\delta \Psi_1^\dagger \delta \Psi_2} |_{\theta \eta_2} \rangle_{1,2} + \end{aligned}$$

$$+ \langle \rho_1 \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_1 \delta \psi_2} |_0 \eta_2 \rangle + \langle \eta_1^\dagger \frac{\delta^2 S}{\delta \psi_1^\dagger \delta \varphi_2} |_0 \rho_2 \rangle + \dots, \quad (4.5)$$

где  $\eta = \Psi - \Psi_0$ ,  $\rho = \varphi - \varphi_0$ .

Как и в гл. 3, § 4, мы проводим разложение вблизи тех полевых конфигураций, которые оставляют действие стационарным, т.е. удовлетворяют классическим уравнениям движения:

$$\frac{\delta S}{\delta \psi^\dagger} |_0 = (\hat{\partial} + im' + if\varphi_0) \Psi_0 - i\zeta = 0, \quad (4.6)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi} |_0 = \Psi_0^\dagger (-\hat{\partial} + im' + if\varphi_0) - i\zeta^\dagger = 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi} |_0 = (-\partial^2 + m^2 + \frac{\lambda}{3!} \varphi_0^2) \varphi_0 + if \Psi_0^\dagger \Psi_0 - J = 0. \quad (4.8)$$

Отбрасывая эти линейные члены, мы получаем приближенное выражение для  $S_E$ , которое квадратично по отклонениям полей от их стационарных значений. В явной форме

$$S_E \approx S_E |_0 + \langle \eta^\dagger (\hat{\partial} + im' + if\varphi_0) \eta \rangle + \frac{1}{2} \langle \rho (-\partial^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi_0^2) \rho \rangle + \\ + if \langle \eta^\dagger \rho \Psi_0 \rangle + if \langle \Psi_0^\dagger \rho \eta \rangle. \quad (4.9)$$

Так как мы хотим функционально проинтегрировать по  $\eta$ ,  $\eta^\dagger$  и  $\rho$ , то дополняем это выражение до полных квадратов, получая

$$S_E \approx S_E |_0 + \langle \eta'^{\dagger} (\hat{\partial} + im' + if\varphi_0) \eta' \rangle + \frac{1}{2} \langle \rho [-\partial^2 + m^2 + \\ + \frac{\lambda}{2} \varphi_0^2 + 2f^2 \Psi_0^\dagger (\hat{\partial} + im' + if\varphi_0)^{-1} \Psi_0] \rho \rangle, \quad (4.10)$$

$$\text{где } \eta' = \eta + if (\hat{\partial} + im' + if\varphi_0)^{-1} \rho \Psi_0. \quad (4.11)$$

Кроме того, в данном приближении

$$\mathcal{D}\Psi = \mathcal{D}\eta = \mathcal{D}\eta', \quad \mathcal{D}\varphi = \mathcal{D}\rho, \quad (4.12), (4.13)$$

поскольку якобиан преобразования равен 1. Это позволяет выполнить функциональное интегрирование выражения (4.10), пользуясь формула-

ми приложения  $A$  и § 1 этой главы. В результате имеем

$$\begin{aligned} W_E \approx e^{-S_E|_0} \det(\hat{\partial} + im' + if\varphi_0) [\det(-\partial^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi_0^2 + \\ + 2f^2\Psi_0^\dagger(\hat{\partial} + im' + if\varphi_0)^{-1}\Psi_0)]^{-1/2}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где обратный оператор во втором детерминанте действует как на  $\Psi_0$ , так и через  $\varphi_0$ .

Так же как и в приближении метода перевала для скалярной теории поля, действие  $S_E|_0$ , рассматриваемое как функционал от источников  $J$ ,  $\zeta$  и  $\zeta^\dagger$ , порождает все древесные диаграммы, тогда как детерминанты дают однопетлевые вклады, имеющие первый порядок по  $\hbar$ .

Выполним функциональное преобразование Лежандра между источниками  $J$ ,  $\zeta$  и  $\zeta^\dagger$  и новыми классическими источниками

$$\Phi_{\text{кп}}(x) = -\frac{\delta Z_E}{\delta J(x)} \approx -\frac{\delta S_E}{\delta J(x)} + O(\hbar), \quad (4.15)$$

$$\Psi_{\text{кп}}(x) = -\frac{\delta Z_E}{\delta \zeta^\dagger(x)} \approx -\frac{\delta S_E}{\delta \zeta^\dagger(x)} + O(\hbar) \quad (4.16)$$

и введем эффективное действие

$$\Gamma_E[\Phi_{\text{кп}}, \Psi_{\text{кп}}, \Psi_{\text{кп}}^\dagger] \equiv Z_E[J, \zeta, \zeta^\dagger] - \langle J\Phi_{\text{кп}} \rangle - i\langle \zeta^\dagger\Psi_{\text{кп}} \rangle - i\langle \Psi_{\text{кп}}^\dagger\zeta \rangle, \quad (4.17)$$

порождающее одночастично-неприводимые функции Грина. В классическом приближении это не что иное, как классическое действие с классическими источниками (4.15) и (4.16), играющими роль полей:

$$\begin{aligned} \Gamma_E = \langle \Psi_{\text{кп}}^\dagger(\hat{\partial} + im' + if\varphi_{\text{кп}})\Psi_{\text{кп}} \rangle + \\ + \frac{1}{2} \langle \Phi_{\text{кп}}(-\partial^2 + m^2 + \frac{\lambda}{12}\varphi_{\text{кп}}^2)\Phi_{\text{кп}} \rangle + O(\hbar). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Первые квантовомеханические поправки к (4.18) даются детерминантами (4.14). Пользуясь методом  $\zeta$ -функций, (гл. 3), установим некоторые их свойства. Эти детерминанты более сложны из-за наличия спинорных индексов и обратного оператора во втором детерминанте в формуле (4.14).

Будем рассматривать частный случай *постоянных* полевых конфигураций и пренебрежем всеми массами. Тогда

$$\frac{1}{\hat{\partial} + i f \varphi_0} = (\hat{\partial} - i f \varphi_0) \frac{1}{[-\partial^2 + f^2 \varphi_0^2]}, \quad (4.19)$$

так что аргумент детерминанта скалярного поля принимает вид

$$\left[ \left( -\partial^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi_0^2 \right) (-\partial^2 + f^2 \varphi_0^2) + 2f^2 \Psi_0^\dagger (\hat{\partial} - i f \varphi_0) \Psi_0 \right] \frac{1}{(-\partial^2 + f^2 \varphi_0^2)}. \quad (4.20)$$

Кроме того, при постоянном  $\varphi_0$  фермионный детерминант равен (см. задачу)

$$\det (\hat{\partial} + i f \varphi_0) = [\det (-\partial^2 + f^2 \varphi_0^2)]^2. \quad (4.21)$$

На основании формулы (4.20) производящий функционал можно переписать в виде

$$W_E \approx e^{-S_E|_0} [\det (-\partial^2 + f^2 \varphi_0^2)]^{5/2} \left[ \det \left( \left( -\partial^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi_0^2 \right) (-\partial^2 + f^2 \varphi_0^2) + 2f^2 \Psi_0^\dagger (\hat{\partial} - i f \varphi_0) \Psi_0 \right) \right]^{-1/2}, \quad (4.22)$$

что, правда, допустимо только при постоянных  $\varphi_0$  и  $\Psi_0$ . Чтобы еще больше упростить дело, предположим, что  $\Psi_0$  — киральное поле, т.е. что  $\Psi_0^\dagger \gamma_\mu \Psi_0 = 0$  (или  $\Psi_R = 0$ );  $\Psi^\dagger \Psi \neq 0$ .

$$(4.23)$$

Тогда аргумент второго детерминанта можно переписать в виде

$$(-\partial^2 + A)(-\partial^2 + B), \quad (4.24)$$

где  $A$  и  $B$  — константы, содержащие  $\varphi_0$  и  $\Psi_0^\dagger \Psi_0$  и удовлетворяющие равенствам

$$A + B = \left( f^2 + \frac{\lambda}{2} \right) \varphi_0^2, \quad (4.25)$$

$$AB = \frac{1}{2} \lambda f^2 \varphi_0^4 - 2i f^3 \Psi_0^\dagger \varphi_0 \Psi_0. \quad (4.26)$$

Таким образом, задача сводится к вычислению детерминантов вида  $\det(-\partial^2 + C)$ , где  $C$  — константа. Из изложенного в гл. 3 мы знаем, что

$$\det(-\partial^2 + C) = e^{-\zeta'[-\partial^2 + C]^{(0)}}, \quad (4.27)$$

где

$$\zeta[-\partial^2 + C](s) = \frac{\mu^4}{16\pi^2} \left(\frac{C}{\mu^2}\right)^{2-s} \frac{\Gamma(s-2)}{\Gamma(s)} \int d^4x, \quad (4.28)$$

или

$$\zeta[-\partial^2 + C](0) = -\frac{1}{32\pi^2} C^2 \left(-\frac{3}{2} + \ln \frac{C}{\mu^2}\right). \quad (4.29)$$

Вооружившись этими формулами, нетрудно найти однопетлевой вклад в эффективный потенциал (см. задачу). Приведем лишь результат при

$$\Psi_0 = 0:$$

$$V(\Phi_0) = \frac{\lambda^2}{256\pi^2} \Phi_0^4 \left(-\frac{3}{2} + \ln \frac{\lambda\Phi_0^2}{2\mu^2}\right) - \frac{f^4}{8\pi^2} \Phi_0^4 \left(-\frac{3}{2} + \ln \frac{f^2\Phi_0^2}{\mu^2}\right). \quad (4.30)$$

Здесь первый член такой же, как и в чисто скалярном случае; его дают бозонные петли. Второй член — это вклад фермионных петель в потенциал; как и полагается, он взят со знаком минус.

Масштабные свойства этих детерминантов выясняются столь же просто. Напомним (гл. 3), что при изменении масштаба

$$\det[e^{-2a}(-\partial^2 + C)] = e^{-2a\zeta[-\partial^2 + C](0)} \det(-\partial^2 + C), \quad (4.31)$$

где  $\zeta$  — функция, даваемая выражением (4.28), так что

$$\det^n[e^{-2a}(-\partial^2 + C)] = e^{-2na} \int d^4x \frac{C^2}{8 \cdot 16\pi^2} \det^n(-\partial^2 + C), \quad (4.32)$$

если принять, что константа  $C$  при масштабных преобразованиях меняется с такой же размерностью, как и  $-\partial^2$ . Более строго вопрос рассматривается в гл. 3, § 6. Таким образом, однопетлевая масштабная поправка равна

$$\Gamma_E \rightarrow \Gamma_E + \frac{\hbar a}{128\pi^2} \int d^4\bar{x} \left[-2\left(\frac{5}{2}\right)(f^2\Phi^2)^2 + (-2)\left(-\frac{1}{2}\right)(A^2 + B^2)\right]. \quad (4.33)$$

Написав

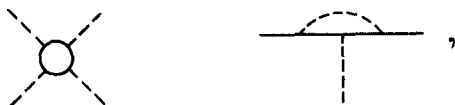
$$A^2 + B^2 = (A + B)^2 - 2AB = \\ = \left(f^2 + \frac{\lambda}{2}\right)^2 \varphi_0^4 - \lambda f^2 \varphi_0^4 + 4if^3 \Psi_0^\dagger \varphi_0 \Psi_0, \quad (4.34)$$

мы видим, что при изменении масштаба функция  $\Gamma_E$  приобретает члены того же типа, что и в классическом лагранжиане, а это приводит к изменению безразмерных констант связи:


$$\frac{\lambda}{4!} \rightarrow \frac{\lambda'}{4!} = \frac{\lambda}{4!} - \frac{\hbar a}{128 \pi^2} \left(-\frac{\lambda^2}{4} - 5f^4\right), \quad (4.35)$$

$$f \rightarrow f' = f - \frac{\hbar a}{32 \pi^2} f^2. \quad (4.36)$$

Таков пример зависимости от масштаба в теории с несколькими константами связи. Новое здесь в том, что изменения масштаба образуют связанную систему. Такое явление легко объяснить, пользуясь диаграммами: фермионная петля, очевидно, вносит вклад в константу  $\varphi^4$ , а с точностью  $O(\hbar)$  фермионная константа связи определяется только присутствием исходной фермионной вершины:



где штриховые линии отвечают скалярным, а сплошные — спинорным полям.

Заметим, что при изменении масштаба должны также возникать добавки к фермионному и скалярному кинетическим членам, но в нашем приближении постоянных полей эти добавки не появились [формулы (4.35) и (4.36)]. Например, фермионный детерминант  $\det(\hat{\partial} + if\varphi)$  нельзя записать в виде (4.21), если  $\varphi$  зависит от  $x$ . В общем случае в закон масштабного преобразования этого детерминанта будет входить кинетический член; это соответствует тому, что сами поля приобретают на однопетлевом уровне аномальные размерности, проистекающие от диаграммы . В чистой теории  $\varphi^4$  скалярное поле приобретает аномальную размерность только на двухпетлевом уровне, так что при изменении масштаба детерминантов данный эффект не проявляется. Итак, формулы (4.35) и (4.36) должны быть поправлены с учетом перенормировки волновой функции.

## Задачи

А. Покажите, что если пренебречь членами  $O(\hbar)$ , то  $\Gamma_E[\Phi_{\text{кп}}, \Psi_{\text{кп}}, \Psi_{\text{кп}}^\dagger]$  есть классическое действие.

Б. Покажите, что в четырех измерениях  $\det(\hat{\partial} + im) = [\det(-\partial^2 + m^2)]^2$ .

В. Найдите однопетлевой вклад в потенциал, включая вклад фермионов.

\*Г. Пользуясь диаграммами, выведите на однопетлевом уровне формулы для зависимости  $\lambda$  и  $f$  от масштаба (с учетом перенормировки волновой функции) и сравните с формулами (4.35) и (4.36).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Coleman S.*, in: Proc. of the 1977 Int. School of Subnuclear Physics, Erice, Italy, ed. A. Zichichi, Acad. Press, 1979.



## Калибровочные симметрии, конструкция Янга-Миллса

### § 1. Глобальные и локальные симметрии

В гл. 1 мы привели примеры лагранжианов, содержащих поля со спином 0 и  $\frac{1}{2}$ , но не стали рассматривать какие-либо теории, содержащие взаимодействие с полями более высоких спинов. Дело в том, что поля со спином 1,  $\frac{3}{2}$  и 2 можно очень красиво ввести, просто потребовав, чтобы все симметрии, какие только имеются в системе со спинами  $\frac{1}{2}$  и 0, могли произвольным образом меняться от точки к точке в пространстве-времени. Поля со спином 1 соответствуют обобщению внутренних (т.е. не-лоренцовских) симметрий; поля со спином 2 возникают тогда, когда пространственно-временные симметрии (глобальная инвариантность относительно группы Пуанкаре) становятся локальными в пространстве-времени; поля со спинами  $\frac{3}{2}$  и 2 появляются при обобщении глобальных суперсимметричных теорий и превращении их в локально суперсимметричные.

Мы не будем рассматривать локальное обобщение пространственно-временных симметрий, а, следуя Янгу и Миллсу [1], сосредоточим внимание на построении теорий, локально инвариантных относительно внутренних симметрий. Самый старый пример теории с локальной симметрией — электродинамика Максвелла. Общий характер понятия "калибровки" (т.е. локализации) впервые осознала Э.Нетер [2]. Процедура калибровки в ее современной форме была разработана в 20-х годах Вейлем.

Рассмотрим простейший возможный лагранжиан, содержащий спинорное поле,

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \psi_L^\dagger \sigma \cdot \vec{\partial} \psi_L = \psi_L^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_L + \text{Поверхностный член}, \quad (1.1)$$

который, как нам известно, инвариантен относительно фазового преобразования

$$\psi_L(x) \longrightarrow e^{i\alpha} \psi_L(x), \quad (1.2)$$

где  $\alpha$  — константа. Основная идея "калибровки" этой фазовой симметрии заключается в том, чтобы сделать лагранжиан  $\mathcal{L}$  инвариантным относительно фазовых преобразований того же вида, что и (1.2), но с константой  $\alpha$ , произвольным образом зависящей от  $x$ , т.е. инвариантным относительно преобразований

$$\psi_L(x) \longrightarrow e^{i\alpha(x)} \psi_L(x). \quad (1.3)$$

Инвариантность лагранжиана  $\mathcal{L}$  относительно локального фазового преобразования (1.3) нарушается из-за наличия в нем оператора производной  $\partial_\mu$ , так как в результате преобразования (1.3) мы имеем

$$\partial_\mu \psi_L(x) \longrightarrow \partial_\mu e^{i\alpha(x)} \psi_L(x) = e^{i\alpha(x)} [\partial_\mu + i\partial_\mu \alpha(x)] \psi_L(x), \quad (1.4)$$

так что

$$\mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{L}_0 + i\psi_L^\dagger \sigma^\mu \psi_L \partial_\mu \alpha(x). \quad (1.5)$$

Чтобы получить нужное обобщение лагранжиана  $\mathcal{L}$ , введем новый оператор  $\mathcal{D}_\mu$  (который будет обобщением оператора  $\partial_\mu$ ), обладающий тем свойством, что при локальном фазовом преобразовании

$$\mathcal{D}_\mu \psi_L \longrightarrow e^{i\alpha(x)} \mathcal{D}_\mu \psi_L, \quad (1.6)$$

или, на операторном языке,

$$\mathcal{D}_\mu \longrightarrow e^{i\alpha(x)} \mathcal{D}_\mu e^{-i\alpha(x)}. \quad (1.7)$$

Этот новый оператор производной называется *ковариантной производной*. Теперь оказывается тривиальным следствием, что новый лагранжиан

$$\mathcal{L} \equiv \psi_L^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_L \quad (1.8)$$

инвариантен относительно преобразования (1.3). Все это превосходно, но нужно построить саму ковариантную производную. Мы допускаем, что она имеет вид

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iA_\mu(x), \quad (1.9)$$

где  $A_\mu(x)$  — некая функция координаты  $x$ . В таком случае требование ковариантности

$$\mathcal{D}_\mu \longrightarrow \mathcal{D}_\mu^* = \partial_\mu + iA_\mu^*(x) = e^{i\alpha(x)} [\partial_\mu + iA_\mu(x)] e^{-i\alpha(x)} \quad (1.10)$$

становится трансформационным свойством функции  $A_\mu$ :

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu^\alpha(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \alpha(x). \quad (1.11)$$

Теперь уже новый лагранжиан

$$\mathcal{L} = \psi_L^\dagger \sigma^\mu (\partial_\mu + iA_\mu(x)) \psi_L = \mathcal{L}_0 + i\psi_L^\dagger \sigma^\mu \psi_L A_\mu(x) \quad (1.12)$$

инвариантен относительно одновременных локальных преобразований

$$\psi_L(x) \longrightarrow e^{i\alpha(x)} \psi_L, \quad A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \alpha(x). \quad (1.13)$$

Глобальная симметрия лагранжиана  $\mathcal{L}_0$  обобщается на локальную симметрию, т.е. калибруется, ценой введения нового векторного поля  $A_\mu(x)$ , взаимодействующего с сохраняющимся током. Как нетрудно видеть, новое поле  $A_\mu(x)$  имеет ту же размерность, что и  $\partial_\mu$ ; поэтому его можно отождествить с каноническим полем в четырех измерениях (при другом числе измерений поле  $A_\mu$  нужно умножить на размерную константу связи, прежде чем его можно будет таким образом интерпретировать). Кроме того, так как оператор  $i\partial_\mu$  эрмитов, поле  $A_\mu(x)$  действительно.

Заметив, что комбинация

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.14)$$

инвариантна относительно калибровочного преобразования (1.13), нетрудно теперь записать кинетический член для поля  $A_\mu(x)$  так, чтобы сохранить эту инвариантность. Размерность комбинации (1.14) равна  $-2$ , и поэтому мы можем построить из нее новый лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (1.15)$$

где  $g$  — безразмерная константа, которую можно устранить, положив  $A_\mu = gA_\mu^\alpha$ , так что если переписать все через  $A_\mu^\alpha$ , то эта константа войдет в произведение  $A_\mu^\alpha$  на ток  $\psi_L^\dagger \sigma^\mu \psi_L$  в формуле (1.12). Множитель  $1/4$  соответствует принятому определению константы  $g$ . Конечно, как можно было бы уже догадаться, выражение (1.15) — это максвелловский лагранжиан. У нас получилась замкнутая теория взаимодействующих полей со спином 1 и  $1/2$ , описываемая лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \psi_L^\dagger \sigma^\mu (\partial_\mu + iA_\mu(x)) \psi_L. \quad (1.16)$$

Хотя эта теория и очень хороша, она неперенормируема (в чем мы убедимся ниже) из-за одного неожиданного осложнения, совершенно правильно называемого аномалией (Адлера – Белла – Джекива) и имеющего отношение к левоспиральной природе поля  $\psi_L$ . Если мы калибровочно-инвариантным образом свяжем  $A_\mu$  с четырехкомпонентным дираковским полем, то никаких проблем не возникнет и мы придем к лагранжиану

$$\mathcal{L}_{\text{кэд}} = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu + i A_\mu(x)) \Psi, \quad (1.17)$$

который описывает КЭД, если отождествить  $A_\mu(x)$  с фотоном,  $\Psi$  с электроном и  $g$  с электрическим зарядом. Лагранжиан  $\mathcal{L}_{\text{кэд}}$  инвариантен относительно локальной симметрии

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \Psi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \alpha(x),$$

а в отсутствие массового члена для поля  $\Psi$  еще и относительно глобального кирального преобразования

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\beta} \gamma_5 \Psi(x). \quad (1.18)$$

В квантовой теории поля эта киральная симметрия не точна (вновь аномалия) даже в отсутствие массы у электрона, но это не создает никаких проблем, так как с ней не связано никакое калибровочное поле.

Калибровочная инвариантность не допускает наличия какого-либо массового члена для  $A_\mu$ .

Прежде чем обобщать это построение на более сложные симметрии, кратко остановимся на разных типах глобальных симметрий.

Лагранжиан для  $N$  действительных скалярных полей  $\phi_1, \dots, \phi_N$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi^T \partial^\mu \Phi \quad (1.19)$$

инвариантен относительно глобальных вращений в  $N$  измерениях  $O(N)$ , под действием которых  $N$ -мерный вектор-столбец  $\Phi$  меняется по правилу

$$\Phi \rightarrow \Phi' = R\Phi, \quad (1.20)$$

где  $R$  – матрица вращений (собственных и несобственных). Так как произведение  $\Phi^T \Phi$  (длина вектора  $\Phi$ )  $O(N)$ -инвариантно, для матрицы  $R$  выполняется соотношение

$$R^T R = R R^T = 1. \quad (1.21)$$

Матрицы собственных вращений можно записать в виде

$$R = \exp\left(\frac{i}{2} \omega^{ij} \Sigma_{ij}\right), \quad (1.22)$$

где  $\omega^{ij} = -\omega^{ji}$  — действительные параметры группы вращений, число которых равно  $N(N-1)/2$ , а  $\Sigma_{ij}$  — генераторы этой группы, число которых тоже равно  $N(N-1)/2$ . Рассматривая бесконечно малое изменение вектора  $\Phi$

$$\delta\Phi = \frac{i}{2} \omega^{ij} \Sigma_{ij} \Phi \quad (1.23)$$

и требуя, чтобы выполнялись групповые свойства, можно доказать, что генераторы  $\Sigma_{ij}$  образуют алгебру Ли

$$[\Sigma_{ij}, \Sigma_{kl}] = i\delta_{ik}\Sigma_{jl} + i\delta_{jl}\Sigma_{ik} - i\delta_{il}\Sigma_{jk} - i\delta_{jk}\Sigma_{il}. \quad (1.24)$$

Выше мы получили алгебру Ли для группы  $SO(N)$ , пользуясь  $N \times N$ -матрицами  $\Sigma_{ij}$ , действующими на  $N$ -мерный вектор  $\Phi$ . Из формул (1.21) и (1.22) легко видеть, что эти матрицы действительны и антисимметричны. Но можно построить много разных матриц, удовлетворяющих соотношениям (1.24). Это объясняется тем, что можно многими разными способами представить группу  $SO(N)$ . Мы выбрали способ, при котором используется  $N$ -мерное представление, но с таким же успехом можно было выбрать присоединенное представление, число измерений которого равно числу параметров группы. В случае группы  $SO(N)$  присоединенным представлением может служить антисимметричный тензор второго ранга  $A_{ij} = -A_{ji}$ . При этом элементы  $A_{ij}$  удобно рассматривать как элементы некой антисимметричной матрицы  $A$ . Тогда при вращении

$$A \rightarrow A' = RAR^T; \quad A^T = -A, \quad (1.25)$$

где  $R$  —  $N \times N$ -матрица (1.22). Затем легко построить инвариантный лагранжиан, в котором  $A$  — скалярные поля:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \text{Sp}(\partial_\mu A^T \partial^\mu A). \quad (1.26)$$

Симметричное "квадрупольное" представление  $S_{ij} = +S_{ji}$  можно рассмотреть аналогичным образом, если только известно, что след тензо-

ра  $S$  инвариантен относительно преобразований группы  $SO(N)$ . Начав с представления  $N$  группы  $SO(N)$ , можно построить более сложные представления, описываемые тензорами более высокого ранга. В общем случае тензор произвольно высокого ранга есть комбинация тензоров, преобразующихся неприводимо (друг через друга) при преобразованиях группы. Рассмотрим, например, тензор третьего ранга  $T_{ijk}$  и возьмем для определенности  $i, j, k = 1, \dots, 10$ . Этот тензор следующим образом разлагается на неприводимые представления группы  $SO(10)$ :

- 1) полностью антисимметричная часть  $T_{[ijk]}$ , имеющая  $10 \cdot 9 \cdot 8 / 1 \cdot 2 \cdot 3 = 120$  компонент;
- 2) полностью симметричная часть  $T_{(ijk)}$ , имеющая  $10 \cdot 11 \cdot 12 / 1 \cdot 2 \cdot 3 = 220$  компонент, которая содержит, после свертки по двум индексам, вектор  $T_{ij}$  с 10 компонентами; следовательно,  $T_{(ijk)}$  разлагается на неприводимое представление с 210 компонентами и представление с 10 компонентами;
- 3) тензоры со смешанной симметрией относительно перестановки индексов: антисимметричный относительно перестановки двух индексов с 320 компонентами ( $= 45 \cdot 10 - 10 - 120$ ), и симметричный только по двум индексам с  $320 + 10$  компонентами.

Итак, мы получили разложение приводимого тензора третьего ранга в группе  $SO(10)$  с 1000 компонентами на неприводимые части:

$$1000 = 120 + 220 + 10 + 10 + 320 + 320.$$

Подобное построение неприводимых представлений осуществляется просто (хотя и утомительно); единственная тонкость возникает в том случае, когда  $N$ -четное число, и тогда можно использовать тензор Леви-Чивиты  $\epsilon_{ij \dots k}$  с  $N$  индексами, чтобы расщепить пополам полностью антисимметричный тензор ранга  $N/2$ . Кроме того, когда  $N/2$  — четное число, антисимметризованный тензор ранга  $N/2$  расщепляется на два действительных и неэквивалентных представления. Когда же  $N/2$  — нечетное число в результате получаются два сопряженных друг другу представления. Например, в группе  $SO(10)$  полностью антисимметричный тензор 5 ранга имеет 252 компоненты, которые расщепляются на 126-мерное представление и сопряженное ему, причем операцию сопряжения выполняет  $\epsilon$ -символ.

Путем образования тензорных произведений векторов мы не получим всех представлений, поскольку у группы  $SO(N)$  имеются дополнительно спинорные представления (например, группа  $SO(3)$  имеет пред-

ставление с полуцелым спином). Если  $N = 2n + 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , то группа  $SO(N)$  имеет только одно действительное фундаментальное спинорное представление размерности  $2^n$ ; например, группа  $SO(3)$  имеет действительное двумерное представление,  $SO(5)$  — действительное четырехмерное спинорное представление и т.д., и из этих представлений могут быть построены все остальные. Если  $N = 2n$ ,  $n = 2, 4, 6, \dots$ , то группа  $SO(N)$  имеет два действительных и неэквивалентных фундаментальных спинорных представления размерностью  $2^{n-1}$  каждое. Наконец, при  $N = 2n$ ,  $n = 3, 5, \dots$ , группа  $SO(N)$  имеет два фундаментальных комплексных сопряженных друг другу спинорных представления. Например, группа  $SO(6)$  имеет сопряженные представления  $4$  и  $\bar{4}$  и т.д. Все представления могут быть построены из описанных спинорных представлений, так что они в этом смысле более фундаментальны, чем векторное представление.

Рассмотрим теперь кинетический член для  $N$  двухкомпонентных спинорных полей

$$\mathcal{L}_F = \frac{1}{2} \Psi_L^\dagger \sigma^\mu \vec{\partial}_\mu \Psi_L, \quad (1.27)$$

где  $a$  пробегает значения от 1 до  $N$  и производится суммирование по  $a$ . Мы видели, что в случае  $a = 1$  выражение (1.27) инвариантно относительно фазового преобразования. При  $a > 1$  лагранжиан  $\mathcal{L}_F$  инвариантен относительно гораздо более широкой симметрии. Рассмотрим (опустив индекс  $a$ ) преобразование

$$\Psi_L \rightarrow U \Psi_L, \quad (1.28)$$

где  $U$  — матрица  $N \times N$ ; тогда

$$\Psi_L^\dagger \rightarrow \Psi_L^\dagger U^\dagger. \quad (1.29)$$

Ясно, что если матрица  $U$  не зависит от  $x$  и унитарна, т.е.

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1, \quad (1.30)$$

то лагранжиан  $\mathcal{L}_F$  инвариантен по отношению к преобразованию (1.28). Из унитарности матрицы  $U$  следует, что ее можно выразить через эрмитову  $N \times N$ -матрицу  $H$  в виде

$$U = e^{iH}; \quad H = H^\dagger. \quad (1.31)$$

Эта эрмитова матрица  $H$  зависит от  $N^2$  действительных параметров. Заметим, что взяв матрицу  $H$  пропорциональной единичной матрице, мы вернемся к рассмотренной ранее фазовой инвариантности. Следовательно, дополнительные новые преобразования порождаются бесследовой частью матрицы  $H$ , выражающейся через  $N^2 - 1$  действительных параметров в виде

$$H = \sum_{A=1}^{N^2-1} \omega^A T^A, \quad T^{A\dagger} = T^A, \quad (1.32)$$

где  $\omega^A$  — действительные параметры, а  $T^A$  — эрмитовы  $N \times N$  — матрицы с нулевым следом. Эти матрицы порождают унитарную группу  $SU(N)$  в  $N$  измерениях и удовлетворяют соответствующим перестановочным соотношениям алгебры Ли

$$[T^A, T^B] = if^{ABC} T^C, \quad (1.33)$$

где  $f^{ABC}$  — действительные полностью антисимметричные коэффициенты, называемые структурными константами алгебры [это соотношение похоже на (1.24), но содержит другие коэффициенты  $f$ ]. Приведем некоторые знаменитые примеры:  $N=2$ :  $T^A = \frac{1}{2}\sigma^A$ ,  $\sigma^A$  — спиновые матрицы Паули,  $A=1, 2, 3$ ;  $N=3$ :  $T^A = \frac{1}{2}\lambda^A$ ,  $\lambda^A$  — матрицы Гелл-Манна,  $A=1, \dots, 8$ . Матрицы Гелл-Манна удовлетворяют условию нормировки

$$\text{Sp}(\lambda^A \lambda^B) = 2\delta^{AB} \quad (1.34)$$

и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, в группе  $SU(N)$  имеются следующие фундаментальные



представления:

$$\psi \sim N \text{ означает, что } \delta\psi = i\omega^A T^A \psi, \quad (1.36)$$

$$\psi' \sim \bar{N} \text{ означает, что } \delta\psi' = -i\omega^A T^A{}^* \psi', \quad (1.37)$$

где последнее свойство преобразования получено из требования, чтобы произведение  $\psi^\dagger \psi$  было инвариантом. Тензорная структура в группе  $SU(N)$  проще, чем в группе  $SO(N)$ : сопоставим нижний (верхний) индекс  $a$  величине, преобразующей по представлению  $N(N)$  группы  $SU(N)$ :  $\psi_a \sim N$ ,  $\psi^a \sim \bar{N}$ . Рассматривая эти представления как строительные блоки, можно путем образования тензорных произведений получить все представления группы  $SU(N)$ . Одним из интересных представлений является присоединенное представление  $M_b^a$ , где  $M$  — бесследовая эрмитова матрица, содержащая  $N^2 - 1$  — элементов; как указывают индексы, она построена как произведение представлений  $N$  и  $\bar{N}$ :  $N \times N = (N^2 - 1) + 1$ . Удобно записать это представление как матрицу  $M$ , преобразующуюся по правилу

$$M \rightarrow UMU^\dagger, \quad \text{или} \quad \delta M = i\omega^A [T^A, M]. \quad (1.38), (1.39)$$

Можно также рассматривать присоединенное представление как  $(N^2 - 1)$ -мерный действительный вектор, и в этом случае матрицы представления  $T^A$  будут  $(N^2 - 1)(N^2 - 1)$ -мерными.

Другие типы представлений можно построить в виде тензоров с произвольным числом верхних и нижних индексов. Чтобы образовать синглеты, можно свертывать верхние индексы с нижними, но не пару верхних или нижних индексов. Так, например, представление  $T_{ab}$  можно разложить на неприводимые компоненты просто по симметрии относительно индексов  $ab$ : на симметричные и антисимметричные. Так, в группе  $SU(5)$

$$T_{ab} = T_{(ab)} + T_{[ab]}.$$

$$5 \times 5 = 15 + 10.$$

Здесь круглые скобки означают полную симметрию, а квадратные — полную антисимметрию по индексам.

Рассмотрев кинетические члены фермионных и скалярных полей, мы убедились, что можно построить лагранжианы, инвариантные относительно унитарных и ортогональных преобразований. С помощью

кинетического члена оказывается возможным получить и инвариантность относительно симплектической группы. Заметим, что кинетический член грассманова майорановского поля, взятый в форме

$$\frac{1}{4} \bar{\Psi}_M \gamma_5 \gamma^\mu \vec{\partial}_\mu \Psi_M, \quad (1.40)$$

тождественно равен нулю, если имеется только одно майорановское поле. Рассмотрим, однако, случай четного числа майорановских полей  $\Psi_{Mi}$ ,  $i = 1, \dots, 2N$ , связанных с помощью антисимметричной числовой матрицы  $E_{ij} = -E_{ji}$ , элементы которой таковы:

$$E_{ij} = \begin{cases} +1, & i > j, \\ 0, & i = j, \\ -1, & i < j. \end{cases} \quad (1.41)$$

В этом случае можно образовать инвариантные выражения вида (1.40) и получить ненулевой результат, обеспечив антисимметризацию по бегущим индексам  $i$ . Таким способом мы получаем отличный от нуля кинетический член

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \bar{\Psi}_{Mi} E_{ij} \gamma_5 \gamma^\mu \vec{\partial}_\mu \Psi_{Mj}. \quad (1.42)$$

Он инвариантен относительно преобразований, оставляющих неизменным антисимметричное квадратичное выражение. Подобные преобразования составляют симплектическую группу  $Sp(2N)$ , а  $\Psi_{Mi}$  преобразуется как основное действительное  $2N$ -мерное представление. Как указывает наличие антисимметричного тензора  $E_{ij}$ , синглет группы  $Sp(2N)$  содержится в антисимметричном произведении двух  $2N$ -представлений. [Вследствие этого невозможно построить кинетический член для скалярного поля, преобразующийся по представлению  $2N$  группы  $Sp(2N)$ .] Действительно, неприводимые представления симплектических групп входят в симметризованные тензорные произведения, а приводимые — в антисимметризованные (для групп вращений все наоборот). В частности, присоединенное представление задается симметризованным произведением  $(2N \times 2N)_{\text{сим}}$  и поэтому содержит  $N(2N + 1)$  элементов. Интересный случай соответствует значению  $N = 1$ . Мы видим, что тогда лагранжиан (1.42) инвариантен по отношению к группе  $SU(2)$ , поскольку матрицу  $E$  можно отождествить с символом Леви-Чивиты  $\epsilon_{ij}$ . Это не случайно: алгебры Ли групп  $Sp(2)$ ,  $SU(2)$  и  $SU(3)$  одинаковы. Заметим, что в

действительности размерность группы  $Sp(2N)$  такая же, как и группы  $SO(2N + 1)$ . Сравнивая представления, находим, что можно отождествить группы  $SO(5)$  и  $Sp(4)$ , поскольку размерность представления **4** группы  $Sp(4)$  такая же, как и спинора группы  $SO(5)$ . Но  $SO(7)$  уже не совпадает с  $Sp(6)$ , так как в группе  $SO(7)$  нет шестимерного представления. (Более того, даже когда алгебры Ли находятся в соответствии, их глобальные свойства могут различаться.)

Итак, путем построения различных типов кинетических членов нам удалось получить лагранжианы, инвариантные относительно групп  $O(N)$ ,  $U(N)$  и  $Sp(2)$ . В наш список не вошли другие группы Ли, называемые исключительными, так как их нельзя определить на основе только квадратичных инвариантов, подобных кинетическому и массовому членам; для описания этих групп нужны инварианты более высокого порядка. Подобные инварианты могут входить в ту часть лагранжиана, которая связана с взаимодействием. Таким образом, исключительные симметрии — это симметрии взаимодействия. Мы не приводим здесь примеров лагранжианов, инвариантных по отношению к исключительным группам, а просто перечислим сами эти группы;  $G_2$  с 14 генераторами, рангом 2 и только действительными представлениями, порождаемыми фундаментальным семимерным представлением;  $F_4$  с 52 генераторами, рангом 4 и только действительными представлениями, порождаемыми фундаментальным 26-мерным представлением;  $E_6$  с 78 генераторами, рангом 6, имеющая действительные и комплексные представления, порождаемые фундаментальными представлениями **27** или  $\overline{27}$ ;  $E_7$  с 133 генераторами, рангом 7 и только действительными представлениями, порождаемыми представлением **56**; наконец  $E_8$  с 248 генераторами и тем уникальным свойством, что присоединенное 248-мерное представление этой группы является также и ее фундаментальным представлением.

### Задачи

А. Пусть задана алгебра Ли  $[T^A, T^B] = if^{ABC}T^C$ ,  $A, B, C = 1, \dots, K$ , где  $f^{ABC}$  — полностью антисимметричные действительные коэффициенты. Их можно рассматривать как  $K$  матриц  $(f^A)^{BC}$  размерности  $K \times K$ . Пользуясь тождеством Якоби, покажите, что эти  $K \times K$ -матрицы образуют ту же алгебру Ли, что и матрицы  $T^A$ , если только взят надлежащий множитель  $(-i)$ .

Б. Разложите комплексный тензор третьего ранга  $T_{abc}$ ,  $a, b, c = 1, \dots, 5$ , на  $SU(5)$ -неприводимые компоненты.

В. Пусть заданы  $N - 1$  разных полей  $T_a^1, T_a^2, \dots, T_a^{N-1}$ . Покажите, что всегда можно построить из их произведения поле, преобразующееся как представление  $\bar{N}$  группы  $SU(N)$  (т.е. как представление с одним верхним индексом).

Г. В группе  $SU(3)$  выразите произведение двух матриц Гелл-Манна через такие же матрицы.

Д. Докажите, что алгебры Ли групп  $SU(2)$  и  $SO(3)$ ,  $SU(4)$  и  $SO(6)$  изоморфны.

Е. Пусть задан лагранжиан  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi^T \partial^\mu \Phi$ , где  $\Phi$  — вектор-столбец из  $N$  действительных скалярных полей. Найдите нетеровские токи и заряды. Какие условия следует наложить на поля, чтобы нетеровские заряды образовали алгебру Ли группы  $SO(N)$ ?

Ж. Покажите в явной форме, что при  $N = 2$  лагранжиан, даваемый выражением (1.42),  $SU(2)$ -инвариантен.

## § 2. Построение локально симметричных лагранжианов

В предыдущем параграфе мы показали, как включить в лагранжиан локальную фазовую инвариантность. Теперь покажем, как сделать это в случае более сложных симметрий по отношению к неабелевым группам Ли, о которых мы только что говорили.

Для иллюстрации мы будем рассматривать лагранжиан комплексных двухкомпонентных спинорных полей. Но читатель должен помнить, что вследствие аномалий Адлера — Белла — Джекива "калибровка" унитарных симметрий в случае левых полей приводит к неперенормируемой теории. Поскольку на данной стадии нас интересуют только классические выводы, мы временно игнорируем эту тонкость. При желании читатель, чтобы чувствовать себя спокойнее, может проделать то же построение с  $N$  дираковскими четырехкомпонентными спинорами.

Как мы только что видели, лагранжиан

$$\mathcal{L} = \psi_L^\dagger \sigma^a \sigma^\mu \partial_\mu \psi_{La}, \quad (2.1)$$

где по  $a$  берется сумма от 1 до  $N$ , инвариантен по отношению к глобальным преобразованиям группы  $U(N)$

$$\psi_L(x) \rightarrow U \psi_L(x); \quad U^\dagger U = U U^\dagger = 1, \quad (2.2)$$

$$\text{где } U = e^{i\alpha} e^{i\omega^A T^A}, \quad (2.3)$$

а через  $T^A$  обозначены  $(N^2 - 1)$  бесследовых эрмитовых матриц, являющихся генераторами группы  $SU(N)$ . Теперь мы хотим обобщить выражение (2.1) так, чтобы включить инвариантность по отношению к локальным преобразованиям вида (2.2), т.е. преобразованиям

$$\Psi_L(x) \rightarrow U(x)\Psi_L(x), \quad (2.4)$$

где теперь

$$U = e^{i\alpha(x)} e^{i\omega^A(x) T^A}. \quad (2.5)$$

Заметим, что решение вопроса о том, какую часть глобальной симметрии желательно калибровать, в значительной степени зависит от нас самих. Например, мы могли бы калибровать только какую-нибудь подгруппу группы  $SU(N)$ . Здесь же мы калибруем всю группу! Когда  $U$  зависит от  $x$ , член с производной  $\partial_\mu \Psi_L$  уже не преобразуется должным образом; действительно,

$$\partial_\mu \Psi_L(x) \rightarrow \partial_\mu U(x)\Psi_L(x) = [\partial_\mu U(x)]\Psi_L(x) + U(x)\partial_\mu \Psi_L(x) \neq \quad (2.6)$$

$$\neq U\partial_\mu \Psi_L(x). \quad (2.7)$$

Таким образом, нам нужно обобщение производной, которое не нарушало бы инвариантности лагранжиана  $\mathcal{L}$ . Поэтому мы вводим *ковариантную производную*  $\mathcal{D}_\mu$ , требуя, чтобы выполнялось соотношение

$$\mathcal{D}_\mu \Psi_L(x) \rightarrow U(x)\mathcal{D}_\mu \Psi_L(x), \quad (2.8)$$

или, в операторной форме,

$$\mathcal{D}_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu' = U(x)\mathcal{D}_\mu U^\dagger(x). \quad (2.9)$$

Подчеркнем, что в данном случае оператор  $\mathcal{D}_\mu$  представляет собой  $N \times N$ -матрицу, так что, если мы хотим показать все индексы, соотношение (2.8) следует написать в виде

$$[\mathcal{D}_\mu \Psi_L(x)]_a \rightarrow [U(x)]_a^b (\mathcal{D}_\mu)_b^c \Psi_{Lc}(x). \quad (2.10)$$

Таким образом, если нам удастся найти подобный оператор  $\mathcal{D}_\mu$ , то новый лагранжиан

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} \Psi_L^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \Psi_L \quad (2.11)$$

будет локально инвариантным по отношению к группе  $U(N)$ . Поскольку оператор  $\mathcal{D}_\mu$  должен быть обобщением оператора  $\partial_\mu$ , будем искать его в виде

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iA_\mu(x), \quad (2.12)$$

где мы опустили индексы группы  $U(N)$ ;  $A_\mu(x)$  — эрмитова  $N \times N$ -матрица с векторными элементами, так как  $i\partial_\mu$  — эрмитов вектор:

$$A_\mu(x) = B_\mu(x)I + A_\mu^B(x)T^B, \quad (2.13)$$

где через  $T^B$  обозначены  $(N^2 - 1)$  эрмитовых генераторов группы  $SU(N)$ . Из закона преобразования (2.9) следует, что

$$\begin{aligned} \partial_\mu + iA_\mu^\wedge(x) &= U(x)[\partial_\mu + iA_\mu(x)]U^\dagger(x) = \\ &= \partial_\mu + U(x)[\partial_\mu U^\dagger(x)] + iU(x)A_\mu(x)U^\dagger(x), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\text{или } A_\mu^\wedge(x) = -iU(x)[\partial_\mu U^\dagger(x)] + U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x). \quad (2.15)$$

Легко показать, что поля  $B_\mu(x)$  и  $A_\mu^B(x)$  преобразуется отдельно. Действительно, взяв след выражения (2.15), находим

$$F_\mu^\wedge(x) = -\frac{i}{N} \text{Sp}(U(x)[\partial_\mu U^\dagger(x)]) + B_\mu(x). \quad (2.16)$$

С учетом равенства (см. задачу)

$$\text{Sp}(U(x)[\partial_\mu U^\dagger(x)]) = -iN\partial_\mu \alpha(x) \quad (2.17)$$

имеем

$$B_\mu^\wedge(x) = -\partial_\mu \alpha(x) + B_\mu(x), \quad (2.18)$$

т.е. полученное ранее преобразование. Умножив теперь (2.15) на  $T^C$  и взяв след, получим закон изменения  $N^2 - 1$  полей  $A_\mu^C$ , если воспользуемся свойствами следов  $T$ -матриц

$$\text{Sp}T^A = 0, \quad \text{Sp}(T^A T^B) = \frac{1}{2}\delta^{AB}, \quad (2.19)$$

записанными в обычной нормировке. Пожалуй, проще рассмотреть бесконечно малые "калибровочные преобразования" (2.15). Полагая

$$U(x) = 1 + i\omega^A T^A + \dots, \quad (2.20)$$

получаем

$$\delta A_\mu(x) = A_\mu^c(x) - A_\mu(x) = -T^B \partial_\mu \omega^B(x) + i \omega^B(x) [T^B, A_\mu(x)] + O(\omega^2). \quad (2.21)$$

Умножив на  $T^C$  и взяв след, с учетом формул (2.19) и (2.13) находим

$$\delta A_\mu^C(x) = -\partial_\mu \omega^C(x) + 2i \omega^B(x) \text{Sp}([T^B, A_\mu(x)] T^C) + O(\omega^2). \quad (2.22)$$

Так как для операторов  $T^A$  выполняются перестановочные соотношения алгебры Ли группы  $SU(N)$

$$[T^A, T^B] = if^{ABC} T^C, \quad (2.23)$$

мы в результате получаем

$$\delta A_\mu^C(x) = -\partial_\mu \omega^C(x) - \omega^B(x) A_\mu^D(x) f^{BDC} + O(\omega^2). \quad (2.24)$$

Примечательным в этом калибровочном преобразовании (2.24) является то, что, будучи записано в таком виде, оно не зависит от представления исходных фермионных полей.

Вариацию (2.21) можно очень изящно переписать, перейдя к ковариантной производной. При преобразованиях  $SU(N)$

$$\omega^A T^A \equiv \omega \rightarrow U \omega U^\dagger. \quad (2.25)$$

Следовательно, ковариантная производная величины  $\omega$  дается выражением (см. задачу)

$$D_\mu \omega = \partial_\mu \omega + i [A_\mu, \omega]. \quad (2.26)$$

Сравнивая с (2.21), получаем

$$\delta A_\mu(x) = -\mathcal{D}_\mu \omega, \quad (2.27)$$

откуда следует, что, даже если само поле  $A_\mu(x)$  не преобразуется ковариантно по отношению к  $SU(N)$  из-за члена  $U \partial_\mu U^\dagger$ , бесконечно малое изменение поля  $A_\mu(x)$  преобразуется ковариантно, так как его можно выразить через ковариантную производную.

Итак, мы расширили наш лагранжиан, чтобы обеспечить его локальную  $U(N)$ -симметрию. Мы добились этого ценой введения  $N^2$  векторных полей, необходимых для построения ковариантной производной. Чтобы поля могли существовать самостоятельно, мы должны включить их кинетические члены, не нарушив при этом исходной локальной симметрии.

Для поля  $B_{\mu}(x)$ , отвечающего общим фазовым преобразованиям, можно просто повторить действия предыдущего параграфа. Поэтому мы сосредоточим внимание на тех  $N^2 - 1$  полях, которые появились в связи с локальной  $SU(N)$ -инвариантностью. Прием, используемый при построении кинетического члена, инвариантного по отношению к преобразованию (2.15), заключается в том, чтобы при образовании различных выражений применять ковариантную производную  $\mathcal{D}_{\mu}$ .

Рассмотрим эрмитов оператор

$$F_{\mu\nu} \equiv -i [\mathcal{D}_{\mu}, \mathcal{D}_{\nu}]. \quad (2.28)$$

Он, конечно, преобразуется ковариантно, поскольку так преобразуется оператор  $\mathcal{D}_{\mu}$ , т.е.

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow U(x)F_{\mu\nu}(x)U^{\dagger}(x). \quad (2.29)$$

Подставляя выражение (2.12) для  $\mathcal{D}_{\mu}$  в фундаментальном представлении и опуская поле  $B_{\mu}$ , находим

$$F_{\mu\nu} = i [\partial_{\mu} + iA_{\mu}, \partial_{\nu} + iA_{\nu}] = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} + i [A_{\mu}, A_{\nu}]. \quad (2.30)$$

Так как  $F_{\mu\nu}(x)$  — эрмитова бесследовая  $N \times N$ -матрица, ее можно разложить по матрицам  $T^B$ :

$$F_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}^B(x)T^B, \quad (2.31)$$

$$\text{где } F_{\mu\nu}^B(x) = \partial_{\mu}A_{\nu}^B(x) - \partial_{\nu}A_{\mu}^B(x) - f^{BCD}A_{\mu}^C(x)A_{\nu}^D(x), \quad (2.32)$$

причем мы использовали формулу (2.13) с отброшенным  $B_{\mu}$  и формулу (2.23). Конечно, величины  $F_{\mu\nu}$  — это янг-миллсовское обобщение напряженностей поля в электромагнетизме. Не все они независимы, так как подчиняются тождествам Бьянки

$$\mathcal{D}_{\mu}F_{\rho\sigma} + \mathcal{D}_{\rho}F_{\sigma\mu} + \mathcal{D}_{\sigma}F_{\mu\rho} = 0, \quad (2.33)$$

в которых операторы  $\mathcal{D}_{\mu}$ , действующие на  $F_{\mu\nu}$ , следует понимать в смысле соотношения (2.26), так как величины  $F_{\mu\nu}$  преобразуются по присоединенному представлению группы  $SU(N)$ . Указанные тождества являются прямым следствием тождества Якоби для ковариантной производной

$$[\mathcal{D}_{\mu}, [\mathcal{D}_{\rho}, \mathcal{D}_{\sigma}]] + [\mathcal{D}_{\rho}, [\mathcal{D}_{\sigma}, \mathcal{D}_{\mu}]] + [\mathcal{D}_{\sigma}, [\mathcal{D}_{\mu}, \mathcal{D}_{\rho}]] = 0. \quad (2.34)$$



Они представляют собой просто кинематические ограничения, которым тривиальным образом удовлетворяют напряженности поля.

Теперь уже легко построить инвариантный кинетический член. Он имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{ЯМ}} = -\frac{1}{2g^2} \text{Sp}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (2.35)$$

при условии нормировки (2.19) для  $T$ -матриц; это выражение есть обобщение максвелловского лагранжиана и, как нетрудно видеть, имеет должную размерность (константа связи  $g$  безразмерна).

Заметим, что лагранжиан  $\mathcal{L}_{\text{ЯМ}}$  не зависит от конкретного представления фермионов и поэтому сам по себе описывает весьма нетривиальную теорию. Кроме того, выбирая структурные функции  $f^{ABC}$ , отвечающие другим группам Ли, мы можем получить соответствующие янг-милловские теории для этих групп Ли.

Вдумчивый читатель может задать вопрос, почему мы не рассмотрели другой инвариант

$$I = \text{Sp} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \quad (2.36)$$

в качестве возможного кинетического члена. Ведь он лоренц-инвариантен, калибровочно-инвариантен и имеет правильную размерность. Дело в том, что его можно представить в виде полной дивергенции. Действительно, напишем

$$I = 4\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{Sp}([\partial_\mu A_\nu + i A_\mu A_\nu][\partial_\rho A_\sigma + i A_\rho A_\sigma]) = \quad (2.37)$$

$$= 4\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{Sp}(\partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma + 2i A_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma), \quad (2.38)$$

где член с  $AAAA$  исключен в силу свойств цикличности следа. Далее

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{Sp}(A_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma) = \frac{1}{3} \partial_\rho \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{Sp}(A_\mu A_\nu A_\sigma), \quad (2.39)$$

так что, поскольку  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\mu A_\nu = 0$ ,

$$I = 4\partial_\rho \{ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{Sp}[A_\sigma \partial_\mu A_\nu + \frac{2i}{3} A_\sigma A_\mu A_\nu] \}. \quad (2.40)$$

Таким образом, получаем

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{Sp}(F_{\mu\nu} \bar{F}_{\rho\sigma}) = 4\partial_\rho W\rho, \quad (2.41)$$

$$\text{где } W^P = \epsilon^{\rho\sigma\mu\nu} \text{Sp} \left[ A_\sigma \partial_\mu A_\nu + \frac{2i}{3} A_\sigma A_\mu A_\nu \right]. \quad (2.42)$$

Это означает, что, взяв  $I$  в качестве кинетического члена в лагранжиане, мы не смогли бы получить какое-либо уравнение движения для  $A_\mu$ , так как этот член влиял бы на действие только в конечных точках. Однако этот член можно добавить к  $\mathcal{L}_{\text{ЯМ}}$ , что приведет к каноническому преобразованию поля  $A_\mu$ .

### Задачи

А. Пусть задано вейлевское поле, преобразующееся по представлению **6** группы  $SU(3)$ . Постройте с помощью матриц Гелл-Манна  $SU(3)$ -ковариантную производную, действующую на это поле.

Б. Покажите, что  $\text{Sp}[U^\dagger(x)\partial_\mu U(x)] = iN\partial_\mu \alpha(x)$ .

В. Покажите, что если функция  $\omega$  преобразуется по присоединенному представлению группы  $SU(N)$ , то ее ковариантная производная дается выражением  $\mathcal{D}_\mu \omega = \partial_\mu \omega + i[A_\mu, \omega]$ , где  $A_\mu$  — матрица калибровочных полей, и преобразуется так же, как  $\omega$ .

Г. Исходя из свойств калибровочного преобразования поля  $A_\mu$ , покажите, что напряженность поля  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu]$  действительно преобразуется по присоединенному представлению группы  $SU(N)$ .

Д. Взяв лагранжиан  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi^T \partial^\mu \Phi$ , где  $\Phi(x)$  — вектор-столбец из  $N$  действительных скалярных полей, обобщите его так, чтобы он стал локально инвариантным по отношению к группе  $SO(N)$ , повторив описанную в тексте процедуру. Сколько нужно ввести векторных полей? Покажите, что бесконечно малое изменение этих полей при преобразованиях группы  $SO(N)$  также можно выразить через ковариантную производную, действующую на калибровочные параметры.

### § 3. Чисто янг-миллсовская теория

В данном параграфе мы исследуем классические свойства янг-миллсовского действия, имеющего вид

$$S^{\text{ЯМ}} = - \frac{1}{2g^2} \int d^4x \text{Sp}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}), \quad (3.1)$$

$$\text{где } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu], \quad A_\mu(x) = A_\mu^B(x) T^B. \quad (3.2), (3.3)$$

Матрицы  $T^B$  представляют собой генераторы одной из алгебр Ли

$$[T^B, T^C] = if^{BCD}T^D, \quad (3.4)$$

причем индексы  $B, C, D$  принимают значения от 1 до  $K$ , где  $K$  — размерность алгебры Ли, определяемой полностью антисимметричными структурными константами  $f^{BCD}$ . В силу равенства (3.4) матрицы  $T^B$  имеют нулевой след; они нормированы так, чтобы выполнялось соотношение

$$\text{Sp}(T^B T^C) = \frac{1}{2} \delta^{BC}. \quad (3.5)$$

Возможные алгебры Ли были классифицированы в диссертации Картана; к ним относятся: классические алгебры  $SU(N)$  размерности  $N^2 - 1$ ,  $N \geq 2$ ;  $SO(N)$  размерности  $N(N - 1)/2$ ,  $N > 2$ ;  $Sp(2N)$  размерности  $N(2N + 1)$ ,  $N > 1$ , и исключительные алгебры Ли  $G_2(14)$ ,  $F_4(52)$ ,  $E_6(78)$ ,  $E_7(133)$  и  $E_8(248)$ , размерности которых указаны в скобках.

Можно также записать янг-миллсовское действие в виде, не зависящем от матриц  $T^B$ ,

$$S^{\text{ЯМ}} = - \frac{1}{4g^2} \int d^4x (F_{\mu\nu}^B F^{\mu\nu B}), \quad (3.6)$$

$$\text{где теперь } F_{\mu\nu}^R = \partial_\mu A_\nu^R - \partial_\nu A_\mu^R - f^{BCD} A_\mu^C A_\nu^D. \quad (3.7)$$

Отсюда следует, что

$$g^2 S^{\text{ЯМ}} = \int d^4x \left[ - \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu^B \partial^\mu A^{\nu B} + \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu^B \partial^\nu A^{\mu B} + \right. \\ \left. + gf^{BCD} A_\mu^C A_\nu^D \partial^\mu A^{\nu B} - \frac{g^2}{4} f^{BCD} f^{BEE} A_\mu^C A_\nu^D A^{\mu E} A^{\nu F} \right]. \quad (3.8)$$

Как нетрудно видеть, первые два члена — того же типа, что и в максвелловском лагранжиане (не считая суммирования). Однако два следующие члена указывают на то, что векторные поля обладают весьма нетривиальными кубическим и квартичным взаимодействиями друг с другом.

Вывод уравнений движения легче всего провести в матричной форме. Начнем с вариации действия

$$\delta S = - \frac{1}{g^2} \int d^4x \text{Sp} (F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu}), \quad (3.9)$$

$$\text{где } \delta F^{\mu\nu} = \partial^\mu \delta A^\nu + i \delta A^\mu A^\nu + i A^\mu \delta A^\nu - (\mu \leftrightarrow \nu). \quad (3.10)$$

С учетом антисимметрии поля  $F_{\mu\nu}$  имеем

$$\delta S = -\frac{2}{g^2} \int d^4x \operatorname{Sp} [F_{\mu\nu} (\partial^\mu \delta A^\nu + i \delta A^\mu A^\nu + i A^\mu \delta A^\nu)]. \quad (3.11)$$

Затем мы интегрируем первый член по частям, отбрасывая поверхностный член, поскольку вариации обращаются в нуль на границах. Учитывая свойства цикличности следа, приходим к выражению

$$\delta S = \frac{2}{g^2} \int d^4x \operatorname{Sp} [(\partial^\mu F_{\mu\nu} + i [A^\mu, F_{\mu\nu}]) \delta A^\nu], \quad (3.12)$$

откуда и получаются в матричной форме уравнения движения

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + i [A^\mu, F_{\mu\nu}] = 0. \quad (3.13)$$

Так как  $F_{\mu\nu}$  преобразуется по присоединенному представлению, это уравнение можно непосредственно записать через ковариантную производную в виде

$$\mathcal{D}^\mu F_{\mu\nu} = 0, \quad (3.14)$$

откуда видно, что само уравнение ковариантно. Вдобавок поля удовлетворяют кинематическим ограничениям (Бьянки) (как и поля  $F_{\mu\nu}$  в электромагнетизме)

$$\mathcal{D}_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0, \quad (3.15)$$

$$\text{где } \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \quad (3.16)$$

представляет собой тензор, дуальный тензору  $F_{\mu\nu}$ . Подчеркнем, что уравнение (3.15) не является уравнением движения, так как оно тривиально решается путем выражения  $F_{\mu\nu}$  через потенциалы.

Из уравнения движения (3.13) явствует, что можно ввести некий сохраняющийся ток  $j_\nu$ ; действительно, величина

$$j_\nu = -\partial^\mu F_{\mu\nu} = i [A^\mu, F_{\mu\nu}] \quad (3.17)$$

$$\text{удовлетворяет уравнению } \partial^\nu j_\nu = 0, \quad (3.18)$$

что приводит к сохраняющимся зарядам (записанным в матричной фор-

ме  $Q^A T^A$ )

$$Q \equiv \int d^3x j_0 = - \int d^3x \partial^i F_{i0} = - \oint d^2\sigma^i F_{i0}, \quad (3.19) - (3.21)$$

где последний интеграл берется по бесконечно удаленной пространственной поверхности. Хотя у тока  $j_\nu$  ужасные трансформационные свойства по отношению к калибровочным преобразованиям, заряды  $Q$ , как это видно из (3.21), преобразуются очень просто по отношению к весьма широкому классу калибровочных преобразований. Из формулы (3.21) получаем

$$Q \rightarrow Q' = - \oint d^2\sigma^i U F_{i0} U^\dagger, \quad (3.22)$$

где  $U$  — операторы, заданные на граничной поверхности на бесконечности. Следовательно, потребовав, чтобы операторы  $U$  были постоянны в пространстве на пространственной бесконечности, мы можем вынести их из-под знака интеграла по поверхности и получить ковариантное преобразование сохраняющихся зарядов. Добавим, что выписанный нами ток совпадает с нетеровским током, полученным каноническими методами.

Можно ввести взаимодействие в янг-миллсовскую систему, добавив к  $S^{\text{YM}}$  член вида

$$\frac{2}{g} \int d^4x \text{Sp} (A^\mu J_\mu), \quad (3.23)$$

где  $J_\mu(x)$  — внешний источник, записанный здесь в матричной форме

$$J_\mu(x) = J_\mu^B(x) T^B. \quad (3.24)$$

Тогда уравнение движения примет вид

$$\mathcal{D}^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu. \quad (3.25)$$

На основании этого уравнения мы можем для сохранения ковариантности уравнения движения требовать, чтобы источник  $J_\nu$  преобразовывался ковариантно:

$$J^\mu \rightarrow U J^\mu U^\dagger. \quad (3.26)$$

Более того, как нетрудно показать, источник  $J^\mu$  обязан ковариантно

сохраняться в силу уравнения движения (см. задачу)

$$\mathbb{D}^\mu J_\mu = \partial^\mu J_\mu + i[A^\mu, J_\mu] = 0. \quad (3.27)$$

Заметим, что нетеровским током является не  $J_\mu$ , а

$$j_\mu = -\partial^{\rho\mu} F_{\rho\mu} + J_\mu. \quad (3.28)$$

Теперь, если вернуться к рассмотрению дополнительного члена (3.23), мы увидим, что он не инвариантен по отношению к калибровочному преобразованию. Предполагая, что источник  $J^\mu$  преобразуется ковариантно, находим

$$\delta \int d^4x \operatorname{Sp}(A_\mu J^\mu) = - \int d^4x \operatorname{Sp}(J^\mu \delta_\mu \omega) = \int d^4x \operatorname{Sp}(\omega \partial^\mu J_\mu), \quad (3.29)$$

и это означает, что можно восстановить инвариантность, если внешний источник  $J^\mu$  сохраняется. В максвелловской теории в этом месте не возникает проблем, поскольку при изменении калибровки источник  $J^\mu$  не преобразуется. В янг-миллсовской же теории утверждение  $\partial_\mu J^\mu = 0$  не ковариантно. Иначе говоря, подобная связь с источниками разрушает калибровочную инвариантность. Это не должно вызывать удивления. В конце концов, если обратить наше предыдущее построение, то станет ясно, что способ калибровочно-инвариантного описания взаимодействия  $A_\mu$  заключается в добавлении кинетического члена для полей, из которых состоит источник  $J^\mu$ . Внешний нединамический источник для этого не годится.

Конечно, нельзя запретить исследовать решения классических уравнений (3.25) совместно с условием (3.27), но мы лишь заметим, что связывание янг-миллсовских полей с нединамическими внешними источниками представляется сомнительным занятием.

Вернемся к уравнениям движения (3.14) без источника. В пространстве Минковского существует много решений этого уравнения. Как и в электродинамике, имеются решения этого уравнения в виде плоских волн (см. задачу). У них бесконечная энергия (но конечная плотность энергии). Однако в противоположность максвелловской теории из-за нелинейного характера теории Янга-Миллса такие решения нельзя налагать друг на друга с тем, чтобы получить решения с конечной энергией, несмотря на то что плоские волны движутся в одном направлении.

Существует много других очень интересных решений этого уравнения с конечной энергией, но они содержат некоторые сингулярности и

потому требуют существования сингулярных источников (см. задачу).

Янг-миллсовское уравнение движения в евклидовом пространстве чрезвычайно содержательно. Евклидово пространство можно рассматривать как пространство Минковского с мнимым временем, а в квантовой механике процессы эволюции в мнимом времени формально соответствуют процессам тунеллирования, происходящим мгновенно в действительном времени. Поэтому Хофт назвал несингулярные решения янг-миллсовского уравнения без источника в евклидовом пространстве *инстантонами*. С другой стороны, мы уже видели ранее, что ФИТ может быть лучше определен в евклидовом пространстве. Поэтому изучение решений в евклидовом пространстве вдвойне интересно.

Следуя Белавину, Полякову, Шварцу и Тюпкину [3], остановимся на решениях в евклидовом пространстве, имеющих конечное действие. В евклидовом пространстве

$$\text{Sp}[(F_{\mu\nu} - \tilde{F}_{\mu\nu})(F_{\mu\nu} - \tilde{F}_{\mu\nu})] \geq 0, \quad (3.30)$$

поскольку это сумма квадратов. Следовательно,

$$\text{Sp}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}) \geq 2\text{Sp}(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}), \quad (3.31)$$

откуда в силу соотношения

$$\text{Sp}(\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}) = \text{Sp}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \quad (3.32)$$

приходим к неравенству

$$\text{Sp}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \geq \text{Sp}F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}, \quad (3.33)$$

которое после интегрирования устанавливает нижнюю границу значения янг-миллсовского евклидова действия. Ясно, что знак равенства достигается, когда

$$F_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu}, \quad (3.34)$$

что соответствует самодуальным решениям. Антисамодуальные решения также соответствуют нижней границе. Нетрудно показать, что самодуальным и антисамодуальным решениям соответствует равный нулю евклидов тензор энергии-импульса (см. задачу). Интеграл от правой части неравенства (3.33) можно переписать в виде интеграла от дивергенции [формула (2.41)]

$$\int d^4x \text{Sp}(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}) = 4 \int d^4x \partial_\mu W_\mu, \quad (3.35)$$

где

$$W_{\mu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Sp} [A_{\nu} \partial_{\rho} A_{\sigma} + \frac{2i}{3} A_{\nu} A_{\rho} A_{\sigma}], \quad (3.36)$$

так что

$$S_E^{\text{ЯМ}} = \frac{1}{2g^2} \int d^4x \text{Sp} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \geq \frac{2}{g^2} \oint d^3\sigma_{\mu} W_{\mu}, \quad (3.37)$$

где последний член проинтегрирован по граничной поверхности на евклидовой бесконечности. Следовательно, минимальное значение действия будет зависеть от свойств калибровочных полей на бесконечности.

Чтобы действие  $S^{\text{ЯМ}}$  было конечным, поля  $F_{\mu\nu}^B$  должны достаточно быстро убывать на евклидовой бесконечности:

$$F_{\mu\nu}^B(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0, \quad (3.38)$$

а это в общем случае означает, что  $A_{\mu}$  стремится к конфигурации

$$A_{\mu} = -iU \partial_{\mu} U^{\dagger} \quad \text{при} \quad x^2 \rightarrow \infty, \quad (3.39)$$

получающейся из  $A_{\mu} = 0$  в результате калибровочного преобразования; значит,  $F_{\mu\nu} = 0$ .

Напомним теперь, что действие  $S^{\text{ЯМ}}$  ограничено снизу величиной, полностью зависящей от поведения потенциалов на евклидовой бесконечности. Действительно, подставляя (3.39) в (3.36), мы видим, что на поверхности  $S$

$$W_{\mu} = \frac{1}{3} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Sp} [U \partial_{\nu} U^{\dagger} U \partial_{\rho} U^{\dagger} U \partial_{\sigma} U^{\dagger}], \quad (3.40)$$

причем мы учли антисимметрию по  $\rho$  и  $\sigma$  и условие  $UU^{\dagger} = 1$ . Следовательно,

$$S_E^{\text{ЯМ}} \geq \frac{2}{3g^2} \oint d^3\sigma_{\mu} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Sp} [U \partial_{\nu} U^{\dagger} U \partial_{\rho} U^{\dagger} U \partial_{\sigma} U^{\dagger}], \quad (3.41)$$

что полностью зависит от группового элемента  $U(x)$ ! Мы пришли к примечательному результату: минимальное значение евклидового действия зависит только от свойств оператора  $U(x)$ , а не от деталей полевой конфигурации при конечных  $x$ .

Рассмотрим конкретный случай группы  $SU(2)$ . Тогда групповые элементы  $U(x)$  зависят от трех параметров, которые мы обозначим



через  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , и которые сами зависят от  $x$ . Поверхность же интегрирования  $S$  — это сфера очень большого (бесконечного) радиуса. Следовательно, мы можем воспринимать  $U$  как отображение между тремя групповыми параметрами и тремя координатами, задающими нашу сферу, т.е. отображение трехмерной сферы в трехмерную сферу. Подобные отображения характеризуются своим *гомотопическим* классом. Грубо говоря, гомотопический класс соответствует тому, сколько раз одна сфера накрывает другую. Например, гомотопический класс, равный 1, означает, что сфера  $S_3^\infty$  на евклидовой бесконечности только один раз накрывает сферу  $S_3$  группового множества, помеченного углами  $\varphi_i$ . В общем случае гомотопический класс  $n$  означает, что  $n$  точек сферы  $S_3^\infty$  отображены в одну точку сферы  $S_3$  и т.д.

Если положить

$$\partial_\mu U^\dagger = \sum_{a=1}^3 \frac{\partial \varphi_a}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial \varphi_a} U^\dagger = \partial_\mu \varphi^a \partial_a U^\dagger, \quad (3.42)$$

то получим

$$S_E^{\text{ЯМ}} \geq \frac{2}{3g^2} \oint d^3\sigma_\mu \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu \varphi^a \partial_\rho \varphi^b \partial_\sigma \varphi^c \text{Sp} (U \partial_a U^\dagger U \partial_b U^\dagger U \partial_c U^\dagger), \quad (3.43)$$

или, с учетом антисимметрии символа  $\varepsilon$ ,

$$S_E^{\text{ЯМ}} \geq \frac{4}{g^2} \oint d^3\sigma_\mu \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu \varphi^1 \partial_\rho \varphi^2 \partial_\sigma \varphi^3 \text{Sp} (U \partial_1 U^\dagger U \partial_2 U^\dagger U \partial_3 U^\dagger). \quad (3.44)$$

При такой форме записи ясно виден якобиан преобразования между переменными, задающими поверхность  $S$ , и углами  $\varphi_\alpha$ . Но, как мы только что говорили, такое отображение характеризуется своим гомотопическим классом  $n$ , если сфера  $S_3^\infty$   $n$ -кратно отображается на групповое множество  $SU(2)$ . Параметризуя  $U$ , скажем, углами Эйлера, можно путем простых выкладок получить, что

$$S_E^{\text{ЯМ}} \geq \frac{8\pi^2}{g^2} n, \quad (3.45)$$

где  $n$  — целое число

$$n = \frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \text{Sp} (F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}), \quad (3.46)$$

называемое понтрягинским индексом.

Таким образом, евклидовы решения с конечным действием помечены своими гомотопическими классами, которые определяют нижнюю границу (евклидова) действия. Эта нижняя граница достигается в том случае, когда полевые конфигурации либо дуальны, либо антисамодуальны, т.е. когда

$$F_{\mu\nu} = \pm \tilde{F}_{\mu\nu}. \quad (3.47)$$

Рассмотрим в качестве примера первое из найденных инстантонных решений; в этом случае евклидов  $SU(2)$ -потенциал дается выражением

$$A_{\mu}(x) = \frac{-ix^2}{x^2 + \lambda^2} U \partial_{\mu} U^{\dagger}, \quad (3.48)$$

$$\text{где } U = \frac{1}{\sqrt{x^2}} (x_0 - i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (3.49)$$

причем  $\sigma$ -матрицы действуют в пространстве  $SU(2)$ , а

$$x^2 = x_0^2 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}. \quad (3.50)$$

Это решение удовлетворяет требованию (3.39) для конечного действия ( $\lambda^2$  — константа). Можно показать, что данное решение самодуально, а из вида оператора  $U$  следует, что понтрянгинский индекс равен +1.

Заметим, наконец, что в янг-миллсовских теориях те функции, которые преобразуются под действием калибровочных преобразований, вообще говоря, нельзя считать постоянными, поскольку им всегда можно путем калибровочного преобразования придать зависимость от  $x$ . Ближе всего к понятию постоянной функции понятие ковариантной постоянной, которая определяется как функция  $\varphi$ , удовлетворяющая условию

$$\mathbb{D}_{\mu} \varphi = (\partial_{\mu} + iA_{\mu}) \varphi = 0, \quad (3.51)$$

где опущены все групповые индексы. Решая это уравнение относительно  $\varphi$ , мы обнаружим очень интересный объект — упорядоченный интеграл по траекториям. В самом деле, заметим, что

$$\varphi(x + dx) = \varphi(x) + dx^{\mu} \partial_{\mu} \varphi + \dots, \quad (3.52)$$

где  $dx^{\mu}$  — произвольно малое смещение. Используя условие (3.51), получаем

$$\varphi(x + dx) = \varphi(x) - idx^{\mu} A_{\mu} \varphi(x) + \dots = e^{-idx^{\mu} A_{\mu}} \varphi(x) + O((dx)^2). \quad (3.53)$$

Так как при калибровочных преобразованиях

$$\varphi(x) \rightarrow U(x)\varphi(x), \quad (3.54)$$

из формулы (3.53) следует, что

$$e^{-id x^\mu A_\mu} \rightarrow U(x+dx)e^{-id x^\mu A_\mu(x)}U^\dagger(x). \quad (3.55)$$

Это и есть то фундаментальное соотношение, которое нам нужно. Теперь можно проинтегрировать уравнение (3.51), итерируя по смещениям:  $\varphi(y)$  можно получить из  $\varphi(x)$ , взяв малые смещения вдоль кривой, начинающейся в точке  $x$  и кончающейся в точке  $y$ , так что

$$\varphi(y) = (Pe^{-i \int_x^y dx \cdot A})\varphi(x), \quad (3.56)$$

где введено обозначение для "упорядоченной по траекториям экспоненты"

$$Pe^{-i \int dx \cdot A} \equiv \prod_k (e^{-i dx_k^c \cdot A(x_k)}), \quad (3.57)$$

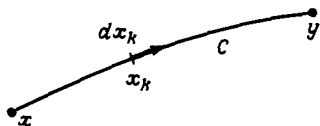
причем  $dx_k$  — смещение от точки  $x_k$  на кривой  $C$  (рис. 8). Из формулы (3.55) следует соотношение

$$Pe^{-i \int_x^y dx \cdot A} \rightarrow U(y)Pe^{-i \int_x^y dx \cdot A}U^\dagger(x). \quad (3.58)$$

В частности, упорядоченная по траекториям экспонента вдоль замкнутой траектории преобразуется как локальная ковариантная величина:

$$Pe^{-i \oint dx \cdot A} \rightarrow U(x)Pe^{-i \oint dx \cdot A}U^\dagger(x), \quad (3.59)$$

так что ее след калибровочно-инвариантен. Он представляет собой функционал от траектории. Заметим, что из условия (3.51) вытекает равенст-



Р и с. 8.

во нулю напряженностей поля. Однако ничто не мешает рассматривать упорядоченный по траекториям функционал для любого поля  $A_\mu$ .

Мы не касались многих других аспектов классической янг-миллсовской теории, например решений в виде монополей, обобщения инстантонных решений, меронных решений с бесконечным евклидовым действием (но конечным действием в пространстве Минковского и сингулярными источниками) и т.п. Увы, нам нужно двигаться вперед и подумать о том, как определить квантовую янг-миллсовскую теорию.

### Задачи

**А.** Покажите, что полевая конфигурация

$$A_1^B = A_2^B = 0, \quad A_0^B = A_3^B = x_1 F_1^B (x^0 + x^3) + x_2 F_2^B (x^0 + x^3),$$

где  $F_{1,2}^B$  — произвольные функции, является решением янг-миллсовских уравнений движения [4]. Сравните эти решения с решениями в виде плоских волн в максвелловской теории.

**\*Б.** Проанализируйте анзац Ву — Янга для  $SU(2)$ -инвариантной янг-миллсовской теории

$$A_0^C = x^C \frac{g(r)}{r^2}, \quad A_i^C = \epsilon_i^{Cj} x^j \frac{f(r)}{r^2},$$

где  $C$  — есть  $SU(2)$ -индекс,  $C = 1, 2, 3$ , а  $r$  — длина вектора положения  $x$ . (Напомним, что в группе  $SU(2)$  коэффициенты  $f^{ABC} = \epsilon^{ABC}$ , т.е. это тензор Леви-Чивиты.) Выведите уравнения, которым должны удовлетворять коэффициенты  $f$  и  $g$ . Покажите, что этим уравнениям удовлетворяют значения  $f = 1$ ,  $g = \text{const}$ . Найдите для такого решения потенциал и полевые конфигурации, вычислите плотность энергии и энергию.

**В.** Покажите, что в случае  $SU(2)$ -калибровочной теории из анзаца 'т Хофта — Корригэна — Фэрли — Вильчека для потенциалов, выраженных через одно скалярное поле  $\phi$ ,

$$A_0^C = -\frac{1}{\phi} \partial^C \phi, \quad A_i^C = \frac{1}{\phi} [\delta_i^C \partial_0 \phi - \epsilon_i^{Cj} \partial_j \phi]$$

вытекает, что  $\phi$  удовлетворяет уравнению движения теории  $\lambda\Phi^4$ , где  $\lambda$  — произвольная константа.

Г. Покажите что нетеровский тензор энергии-импульса для евклидовой янг-миллсовской теории может быть записан в виде

$$\theta_{\mu\nu} = \frac{1}{2g^2} (F_{\mu\rho}^B + \tilde{F}_{\mu\rho}^B)(F_{\nu\rho}^B - \tilde{F}_{\nu\rho}^B).$$

Д. Определите, как изменяется  $W_\mu$  при калибровочном преобразовании, и покажите, что производная  $\partial_\mu W_\mu$  калибровочно-инвариантна.

Е. Вычислите след упорядоченной по траекториям экспоненты вдоль замкнутой петли для инстантонного решения, о котором говорится в тексте. Выберите простую траекторию, которая вам покажется удобной.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Yang C.N., Mills R., Phys.Rev., **96**, 191 (1954).
2. Nöther E., Nachr. Kgl. Ges. Wiss., Göttingen, 235 (1918).
3. Belavin A., Polyakov A., Schwarz A., Tyupkin Yu., Phys. Lett., **59B**, 85 (1975).
4. Coleman S., Phys. Lett., **70B**, 59 (1977).

## Интеграл по траекториям в калибровочных теориях

Определение ФИТ для калибровочных теорий связано с трудностями особого рода. Как мы только что видели, в таких теориях действие инвариантно по отношению к преобразованиям, зависящим от пространственно-временных координат:  $S[A_\mu] = S[A'_\mu]$ . Поэтому бездумное интегрирование по всем полевым конфигурациям привело бы к чудовищному увеличению числа лишних бесконечных интегрирований и сделало бы интеграл по траекториям еще более бесконечным, чем обычно. В приложении А мы рассмотрим случай, когда подынтегральное выражение зависит не от всех переменных, по которым ведется интегрирование. Мы увидим, что в этом случае интеграл можно определить путем ловкого изменения меры; новая мера, сохраняя ковариантный вид, содержит ограничивающие множители, благодаря которым интегрирование производится только по существенным переменным. На применении подобного метода к ФИТ для калибровочных теорий основана процедура Фаддеева – Попова.

Но можно также потребовать, чтобы ФИТ имел реальный смысл только на уровне гамильтонова формализма в духе квантовомеханического соответствия гл. 2. Оказывается, что оба метода дают один и тот же результат. Тем не менее полезно рассмотреть и тот и другой методы.

### § 1. Гамильтонов формализм в калибровочных теориях, абелев случай

Для начала рассмотрим случай абелева поля (максвелловская теория). Лагранжиан имеет вид ( $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ )

$$\mathcal{L} = - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = - \frac{1}{4} [2F_{0i} F^{0i} + F_{ij} F^{ij}]. \quad (1.1), (1.2)$$

Определим канонические импульсы

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A^\mu)} \quad (1.3)$$

и постулируем следующие значения фундаментальных скобок Пуассона (СП) при совпадающих временах:

$$\{A_\mu(\mathbf{x}, t), \pi_\nu(\mathbf{y}, t)\}_{\text{СП}} = -g_{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (1.4)$$

а все остальные СП при совпадающих временах обращаются в нуль. Плотность гамильтониана дается выражением

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) = \pi^\mu \partial_0 A_\mu - \mathcal{L}. \quad (1.5)$$

Для любой функции  $f$  канонических переменных  $A_\mu$  и  $\pi_\mu$  уравнения движения имеют вид

$$\dot{f} = \{f, H\}_{\text{СП}}, \quad (1.6)$$

где  $H$  — энергия, определяемая как

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(\mathbf{x}, t). \quad (1.7)$$

Намеченная нами каноническая процедура легко проводится во многих случаях, например в скалярной теории поля. Но если мы применим ее к калибровочным теориям, то сразу же столкнемся с трудностями.

Действительно, подставив (1.2) в (1.3), найдем, что в абелевой теории

$$\pi_\mu = F_{0\mu}, \quad (1.8)$$

откуда в силу антисимметрии  $F_{\mu\nu}$  следует, что

$$\pi_0 = 0. \quad (1.9)$$

Это противоречит фундаментальным СП при  $\mu = \nu = 0$ . Поэтому, если мы хотим сохранить фундаментальные СП, нам следует подходить к равенству (1.9) как-то по-особому. Все же продолжим еще немного вычисления и найдем наивный гамильтониан, который мы обозначим через  $H_0$ . Из формул (1.5) и (1.7) путем интегрирования по частям получим

$$H_0 = \int d^3x \left[ \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} \pi_i \pi^i + A_0 \partial_i \pi^i \right], \quad (1.10)$$

и мы видим, что скорости исчезли из этого выражения; в этом и заключается весь смысл гамильтонова формализма. Но равенство

$\pi^0 = 0$  означает, что замена переменных, связанная с переходом от скоростей к импульсам  $\partial_0 A_\mu \rightarrow \pi_\mu$ , сингулярна (вы не можете отобразить четыре вещи в три, не заплатив за это). Следовательно, определение гамильтониана  $K$  неоднозначно: к нему можно добавить любую произвольную функцию, пропорциональную  $\pi_0$ . Запишем новый гамильтониан в виде

$$H = H_0 + \int d^3x F \pi_0, \quad (1.11)$$

где  $F$  — произвольная функция. Чтобы выяснить смысл функции  $F$ , воспользуемся уравнениями движения (1.6) при  $f = A_0$ . Тогда

$$\dot{A}_0 = \{A_0, H\}_{\text{СП}} = F, \quad (1.12), (1.13)$$

причем мы использовали фундаментальные СП (1.4). Если бы функция  $F$  зависела от канонических переменных, то в выражении (1.12) были бы дополнительные слагаемые, но они все равно умножились бы на  $\pi_0$  и в конце концов обращались бы в нуль. Поэтому без потери общности можно считать, что  $F$  не зависит от канонических переменных. Отсюда вытекает, что если в заданный момент времени  $t_0$  мы имеем некоторое определенное значение функции  $A_0$ , то в момент времени  $t_0 + \delta t$  ее значение будет определяться совершенно произвольной функцией. Что же это означает? Дополнительный член  $\int d^3x F \pi_0$  вызывает изменение переменной  $A_0$ , но оставляет неизменными  $A_i$ , что эквивалентно калибровочному преобразованию

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda, \quad (1.14)$$

в котором  $\lambda(\mathbf{x}, t_0) = 0$ , но  $\lambda(\mathbf{x}, t_0) \neq 0$ . Таким образом, дополнительный член в формуле (1.11) приводит к специальному типу калибровочного преобразования.

Но это еще не все. Посмотрим теперь, пользуясь формулами (1.4) и (1.10), как изменяется  $\pi^0$ :

$$\dot{\pi}_0 = \{\pi_0, H\}_{\text{СП}} = -\partial_i \pi^i(\mathbf{x}, t). \quad (1.15)$$

Но, согласно канонической процедуре,  $\pi_0 = 0$  во все моменты времени. Отсюда мы получаем другое ограничение

$$\partial_i \pi^i = 0, \quad (1.16)$$

в которое входят только канонические импульсы! Прервем на мгновение наши выкладки. Сначала, исходя из канонической процедуры, мы получили,



что  $\pi^0 = 0$ . Дирак называет такой тип ограничений первичной связью. Затем, пользуясь уравнениями движения, мы нашли другое ограничение на величины  $\pi$ . Этот тип ограничений Дирак называет вторичной связью [1]. Таким образом, у нас стало еще больше соотношений между величинами  $\pi$ . Создается впечатление, что мы отображаем четыре скорости на два независимых импульса  $\pi$ . Чтобы отразить этот дополнительный произвол, мы должны добавить еще один (дополнительный) член к гамильтониану  $H$ , имеющий вид

$$H_{\text{доп}} = \int d^3x G(\mathbf{x}, t) \partial_i \pi^i(\mathbf{x}, t). \quad (1.17)$$

Пользуясь уравнением (1.6) и соотношениями (1.4), можно увидеть, к какого типа изменениям приводит этот дополнительный член:

$$\delta A_0 = \{A_0, H_{\text{доп}}\}_{\text{СП}} = 0, \quad \delta A_j = \{A_j, H_{\text{доп}}\} = \partial_j G. \quad (1.18) \quad (1.19)$$

Следовательно, он осуществляет постоянное во времени калибровочное преобразование; функция  $G$  не должна зависеть от  $t$ . Таким образом, изменение канонического формализма привело к гамильтониану, который, определяя эволюцию системы во времени, производит при этом калибровочные преобразования. Включив  $A_0$  в  $G$ , можно переписать наш новый и окончательный гамильтониан в виде

$$H_{\text{нов}} = \int d^3x \left[ \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} \pi^i \pi_i + G \partial_i \pi^i \right]. \quad (1.20)$$

Заметим, что член с  $\pi^0$  выпал из выражения (1.20), поскольку  $H_{\text{нов}}$  уже более не зависит от  $A_0$ . Теперь мы в состоянии описать получившуюся в результате физическую систему. Пусть  $f$  — любая функция переменных  $A_i$  и  $\pi_i$ . Производная этой функции по времени определяется выражением

$$\dot{f} = \{f, H_{\text{нов}}\}_{\text{СП}} \quad (1.21)$$

и содержит произвольный вклад, связанный с членом  $\partial_i \pi^i$ . Это неприемлемо, так как изменение физической величины во времени не произвольно. Поэтому мы потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$\{f_{\text{физ}}, \partial_i \pi^i\} = 0, \quad (1.22)$$

которое означает, что функция  $f_{\text{физ}}$  не должна зависеть от переменной,

сопряженной с  $\partial_i \pi^i$ . Другими словами, физическая величина должна быть определена только на некоторой поверхности в плоскости  $(A_i, \pi_i)$ . Такую поверхность всегда можно описать уравнением

$$g(A_i, \pi_i) = 0, \quad (1.23)$$

подразумевая при этом, что замена переменных  $g \rightarrow z$ , где  $z$  — переменная, сопряженная к  $\partial_i \pi^i$ , несингулярна, т.е.

$$\det \left| \frac{\delta g}{\delta z} \right| = \det \left| \{g, \partial^i \pi_i\}_{\text{СП}} \right| \neq 0, \quad (1.24)$$

где использовано определение СП. Отметим, что  $z$  определяется формулой

$$\frac{\delta}{\delta z(y)} = \int d^2x \frac{\delta(\partial_i \pi^i)(y)}{\delta \pi_j(x)} \frac{\delta}{\delta A^j(x)} = \{ \quad, \partial_i \pi^i \}. \quad (1.25)$$

Физический смысл соотношения (1.25) ясен: производная  $\partial_i \pi^i$  порождает калибровочные преобразования, а функция  $g$  должна быть способна зафиксировать калибровку.

Предполагая, что условие (1.24) выполняется, можно произвести калибровочное преобразование

$$(A_i, \pi_i) \rightarrow (\tilde{A}_i, \tilde{\pi}_i),$$

в котором мы положили

$$g(A_i, \pi_i) = \tilde{A}_3. \quad (1.26)$$

Далее, так как  $\tilde{A}_i$  и  $\tilde{\pi}_i$  — сопряженные переменные,

$$\det \{g, \partial^i \pi_i\}_{\text{СП}} = \det \left\{ \frac{\delta g}{\delta \tilde{A}_j} \frac{\partial[\partial^i \pi_i]}{\partial \tilde{\pi}_j} - \frac{\delta g}{\delta \tilde{\pi}_j} \frac{\delta[\partial^i \pi_i]}{\delta \tilde{A}_j} \right\}_{\text{СП}} = \det \frac{\delta[\partial^i \pi_i]}{\delta \tilde{\pi}_3} \quad (1.27)$$

представляет собой просто якобиан преобразования  $\partial^i \pi_i \rightarrow \tilde{\pi}_3$ . Если он несингулярен, то можно разрешить уравнение  $\partial^i \pi_i = 0$  с целью выразить  $\pi_3$  через оставшиеся переменные. Заметим, что при таком преобразовании гамильтониан не меняется. Приведем примеры.

1. Кулоновская калибровка определяется условием

$$g = \partial^i A_i . \quad (1.28)$$

Образуем детерминант

$$\det \{ \partial^i A_i , \partial_j \pi^j \}_{\text{СП}} = \det [ \partial_x^i \partial_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ], \quad (1.29)$$

который следует понимать, как произведение собственных значений оператора Лапласа  $\partial_i \partial^i$ . Хорошо известно, что у этого оператора нет нулевых собственных значений, кроме постоянного решения, которое мы исключаем подходящим выбором граничных условий. Следовательно, кулоновская калибровка удовлетворяет нашему критерию хорошей калибровки. Это означает, что можно, пользуясь уравнением  $\partial^i \pi_i = 0$ , выразить сопряженную к (1.28) переменную через оставшиеся канонические переменные. Опуская тильду над буквами, напишем

$$\pi_i = \pi_i^L + \pi_i^T, \quad A_i = A_i^L + A_i^T, \quad (1.30) , (1.31)$$

где по построению дивергенция поперечных мод равна нулю:

$$\partial^i \pi_i^T = \partial^i A_i^T = 0. \quad (1.32)$$

Тогда кулоновская калибровка записывается как

$$A_i^L = 0, \quad (1.33)$$

а связь (1.16) принимает теперь вид

$$\partial^i \pi_i^L = \partial^i \partial_i \varphi = 0, \quad (1.34)$$

если выразить  $\pi_i^L$  через  $\varphi$ . Именно обратимость оператора Лапласа позволяет нам положить  $\varphi = 0$ . Таким образом, в этой калибровке у нас остаются канонические переменные  $\pi_i^T$  и  $A_i^T$  с равной нулю дивергенцией. Гамильтониан, выраженный через эти переменные, имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x} (B_i B_i + \pi_i^T \pi_i^T), \quad (1.35)$$

$$\text{где } B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_j A_k^T. \quad (1.36)$$

2. *Аксиальная калибровка Арновитта – Фиклера* определяется как

$$g = A_3 = 0. \quad (1.37)$$

В этом случае условие для детерминанта имеет вид

$$\det \left[ \frac{\partial}{\partial x_3} \delta(x - y) \right] \neq 0, \quad (1.38)$$

и оно выполняется, поскольку оператор  $\partial/\partial x_3$  обратим. Следовательно, можно найти  $\pi_3$  пользуясь уравнением (1.16). В результате имеем

$$\pi_3(x, y, z, t) = - \int_{-\infty}^z dz' (\partial^1 \pi_1 + \partial^2 \pi_2)(x, y, z', t), \quad (1.39)$$

где мы (произвольно) наложили граничное условие на  $\pi_3$ . Теперь система описывается каноническими переменными  $A_1, A_2, \pi_1, \pi_2$  и (нелокальным) гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x [B_3^2 + B_1^2 + B_2^2 + \pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2(\pi_1, \pi_2)], \quad (1.40)$$

в котором  $\pi_3$  определяется формулой (1.39), а

$$B_1 = -\partial_3 A_2, \quad B_2 = \partial_3 A_1, \quad B_3 = (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1). \quad (1.41)$$

Теперь уже легко записать ФИТ. Пусть  $\tilde{A}_1$  и  $\tilde{\pi}_1$  – независимые переменные. Тогда ФИТ имеет вид

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\tilde{A}_1 \mathcal{D}\tilde{\pi}_1 e^{i \int [\pi \cdot \tilde{A}_1 - \mathcal{H}(\tilde{A}_1, \tilde{\pi}_1)] d^4x =} \\ & = \int \mathcal{D}\tilde{A}_1 \mathcal{D}\tilde{\pi}_1 \mathcal{D}\tilde{A}_3 \delta[\tilde{A}_3] \mathcal{D}\tilde{\pi}_3 \delta[\tilde{\pi}_3 - \tilde{\pi}_3(\tilde{\pi}_1)] e^{i \int [\dots]}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

где  $\tilde{\pi}_3(\tilde{\pi}_1)$  – функция  $\pi_3$ , выраженная через поперечные переменные путем обращения соотношения (1.16). Теперь

$$\delta[\tilde{\pi}_3 - \tilde{\pi}_3(\tilde{\pi}_1)] = \delta[\partial^i \tilde{\pi}_i] \det | \{ \partial^i \tilde{\pi}_i, \tilde{A}_3 \}_{\text{СП}} |. \quad (1.44)$$

$$\delta[\partial^i \tilde{\pi}_i] = \int \mathcal{D}A_0 e^{i \int A_0 \partial^i \tilde{\pi}_i} \quad (1.45)$$

Это позволяет переписать (1.43) в виде

$$\int \mathcal{D}\tilde{A}_1 \mathcal{D}\tilde{A}_3 \mathcal{D}A_0 \mathcal{D}\tilde{\pi}_1 \mathcal{D}\tilde{\pi}_3 \delta[\tilde{A}_3] \det | \{ \partial^i \tilde{\pi}_i, \tilde{A}_3 \}_{\text{СП}} | \times \\ \times e^{i \int d^4x [ \tilde{\pi}_1 \dot{\tilde{A}}_1 + \tilde{\pi}_3 \dot{\tilde{A}}_3 - \mathcal{H}(\tilde{\pi}, \tilde{A}) + A_0 \partial_i \pi^i ]}. \quad (1.46)$$

Мы добавили (без всяких последствий из-за наличия  $\delta[\tilde{A}_3]$ ) член  $\tilde{\pi}_3 \dot{\tilde{A}}_3$  в показателе экспоненты, так что теперь гамильтониан

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\tilde{\pi}_1 \tilde{\pi}_1 + \tilde{\pi}_3 \tilde{\pi}_3 + \tilde{B}_i \tilde{B}_i) \quad (1.47)$$

содержит все компоненты  $B_i$ . Выполним обратное каноническое преобразование от переменных с тильдой к переменным без тильды. Единственно, что при этом произойдет (помимо отбрасывания тильды), это превращение  $A_3$  в калибровочную функцию  $g$ . После этого ФИТ примет вид

$$\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\pi_i \delta[g] \det | \{ \partial^i \pi_i, g \}_{\text{СП}} | e^{i \int d^4x [ \pi_i \dot{A}_i - \mathcal{H} + A_0 \partial^i \pi_i ]}. \quad (1.48)$$

Проинтегрируем, наконец, по  $\pi_i$ . Заметим, что, интегрируя по частям член  $A_0 \partial^i \pi_i$ , можно переписать показатель экспоненты в виде

$$\pi_i (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) - \frac{1}{2} \pi_i \pi_i - \frac{1}{2} B_i B_i. \quad (1.49)$$

Дополняя до полного квадрата, получаем

$$\int \mathcal{D}A_\mu e^{iS[A]} \int \mathcal{D}\pi_i \delta[g] \det | \{ \partial^i \pi_i, g \}_{\text{СП}} | e^{-\frac{1}{2} \int d^4x (\pi_i - \partial_0 A_i + \partial_i A_0)^2}, \quad (1.50)$$

где  $S[A]$  — максвелловское действие, выраженное через потенциалы. Полагаем теперь

$$\pi'_i = \pi_i - \partial_0 A_i + \partial_i A_0 \quad (1.51)$$

и производим замену переменных. Если  $g$  не зависит от  $\pi$ , то такая замена переменных не влияет на  $g$  и на скобки Пуассона. Следовательно, эти величины можно вынести из-под знака интеграла по  $\pi$ , сохранив при этом интерпретацию СП как бесконечно малого изменения функции  $g$  в результате калибровочных преобразований. Интегрирова-

ние по  $\pi'$  дает бесконечную постоянную, которую мы игнорируем. Окончательный результат имеет вид

$$\int \mathcal{D} A_\mu \delta [g] \det \left| \frac{\delta g}{\delta \omega} \right| e^{iS[A]}, \quad (1.52)$$

где  $S[A]$  – максвелловское действие,  $g$  – калибровочная функция, а  $\delta g / \delta \omega$  – ее изменение при бесконечно малых калибровочных преобразованиях. Применяя эту формулу к случаю кулоновской калибровки, получим

$$\int \mathcal{D} A_\mu \delta [\partial^i A_i] \det |\partial^2| e^{iS}, \quad (1.53)$$

и при этом видно, что детерминант не содержит какой-либо зависимости от  $A$ ; следовательно, его можно включить в нормировку. Заметим, что входящая линейно в  $S$  переменная  $A_0$  приводит после интегрирования к функциональной  $\delta$ -функции. Это показывает, что  $A_0$  не является динамической переменной, хотя часто можно встретить утверждение, что условие  $A_0 = 0$  представляет собой калибровочное условие (это не так!). Но если мы все-таки требуем выполнения условия  $A_0 = 0$ , то мы теряем ограничение  $\partial^i \pi_i = 0$  (теорема Гаусса), которое затем должно быть восстановлено.

В заключение заметим, что можно определить ковариантную калибровку

$$\partial^\mu A_\mu = 0, \quad (1.54)$$

которая действительно представляет собой калибровочное условие, так как содержит динамическую переменную  $A_i$ .

### Задачи

А. Рассматривая  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\chi$  как канонические поля, выполните каноническую процедуру применительно к действию

$$S = \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_1 \partial^\mu \varphi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_2 \partial^\mu \varphi_2 + m\chi (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \right]$$

и определите соответствующий интеграл по траекториям.

Б. Проанализируйте применимость равенства  $A_i A_i = m^2$  в качестве калибровочного условия и запишите соответствующий интеграл по траекториям для электродинамики в такой калибровке.

В. Повторите предыдущую задачу для калибровочного условия  $(\partial_i A_3) \partial^i A_3 = 0$ .

Г. Рассмотрите условие  $0 = \int_{-\infty}^{\infty} dz \cdot A(z, t)$ , где интеграл берется по некоторой кривой  $C$ . Можно ли использовать его в качестве калибровочного условия?

## § 2. Гамильтонов формализм для калибровочных теорий, неабелев случай

Исходя из янг-миллсовского лагранжиана, можно повторить все рассуждения предыдущего параграфа и прийти к очень похожему результату. Но мы начнем все же с формализма первого порядка, в котором  $F_{\mu\nu}$  и  $A_\mu$  считаются независимыми переменными, а действие  $S[F, A]$  берется таким, чтобы  $F_{\mu\nu}$  можно было выразить через  $A_\mu$  исходя из уравнения движения. Итак, возьмем действие в виде

$$S = - \frac{1}{g^2} \int d^4x \text{Sp} \left( \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - F^{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i [A_\mu, A_\nu]) \right). \quad (2.1)$$

Ясно, что вариация такого действия по  $F_{\mu\nu}$  приводит к уравнению (3.2) из гл. 6, но  $F_{\mu\nu}$  не имеет динамического смысла, так как не имеет производной по времени; это всего лишь вспомогательное поле. Однако при такой форме действия его легче переписать в виде, не содержащем квадратичных по временным производным членов. Введем "электрическое" и "магнитное" поля

$$E_i = F_{0i}, \quad B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}. \quad (2.2), (2.3)$$

или, альтернативно,

$$F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k. \quad (2.4)$$

Используя уравнение движения

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i + i [A_i, A_j], \quad (2.5)$$

можно переписать  $S$  в виде

$$\begin{aligned} S = & - \frac{1}{g^2} \int d^4x \text{Sp} [B_i B_i + E_i E_i - 2 E_i (\partial_0 A_i - \partial_i A_0 + \\ & + i [A_0, A_i])] = \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$= - \frac{1}{g^2} \int d^4x \operatorname{Sp} [B_i B_i + E_i E_i - 2E_i \dot{A}_i - 2A_0 (\partial_i E_i + i [A_i, E_i])], \quad (2.7)$$

использовав циклическое свойство следа и выполнив интегрирование по частям. Переписанное таким образом действие  $S$  легко преобразуется к гамильтоновой форме. Взяв след, получаем

$$S = \frac{1}{g^2} \int d^4x [E_i^B \dot{A}_i^B - \frac{1}{2} (E_i^A E_i^A + B_i^A B_i^A) + A_0^B (\mathcal{D}_i E_i)^B], \quad (2.8)$$

где  $E_i^B$  — канонический импульс, сопряженный с  $A_i$  (точка означает дифференцирование по времени),  $A_0^B$  играет роль лагранжева множителя, а

$$(\mathcal{D}_i E_i)^B = \partial_i E_i^B + f^{BCD} A_i^C E_i^D. \quad (2.9)$$

Динамическими переменными являются  $E_i^B$  и  $A_i^B$ , для которых мы постулируем следующие фундаментальные скобки Пуассона при совпадающих временах:

$$\{A_i^B(\mathbf{x}, t), E_j^C(\mathbf{y}, t)\}_{\text{СП}} = \delta^{BC} \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.10)$$

причем все остальные СП при совпадающих временах равны нулю. Не все из этих переменных независимы, так как они должны удовлетворять уравнению связи

$$(\mathcal{D}_i E_i)^B \equiv \partial_i E_i^B + f^{BCD} A_i^C E_i^D = 0, \quad (2.11)$$

получаемому варьированием по  $A_0^B$ . Уравнения движения имеют вид

$$\frac{df}{dt} = \{f, H_0\}_{\text{СП}} + \{f, \int d^3x A_0^B(\mathbf{x}, t) (\mathcal{D}_i E_i)^B(\mathbf{x}, t)\}_{\text{СП}}, \quad (2.12)$$

где

$$H_0 = \frac{1}{2} \int d^3x [E_i^A E_i^A + B_i^A B_i^A]. \quad (2.13)$$

Таким образом, как и в предыдущем параграфе, изменение во времени содержит дополнительный член, обязанный лагранжеву множителю.



Чтобы выяснить смысл этого члена, вычислим скобку Пуассона

$$\delta A_i^B(\mathbf{x}, t) = \{A_i^B(\mathbf{x}, t), \int d^3y A_0^C(\mathbf{y}, t)(\mathcal{D}_i E_i)^C(\mathbf{y}, t)\}_{\text{СП}}, \quad (2.14)$$

которую следует интерпретировать как изменение переменной  $A_i^B$  при бесконечно малом преобразовании, вызываемом дополнительным членом. Пользуясь соотношением (2.10), находим, что

$$\delta A_i^B(\mathbf{x}, t) = -\partial_i A_0^B(\mathbf{x}, t) - f^{BCD} A_i^C(\mathbf{x}, t) A_0^D(\mathbf{x}, t), \quad (2.15)$$

что представляет собой калибровочное преобразование. Следовательно, как и в абелевом случае, дополнительный член в гамильтониане  $H$  осуществляет калибровочное преобразование с калибровочным параметром  $A_0^B$ .

Нетрудно видеть, что производная по времени от связей (2.11) сама пропорциональна этим связям (см. задачу). Следовательно, никаких других связей быть не может.

Как и ранее, мы принимаем, что функции  $A_i^B$  и  $E_i^B$  являются физическими, если их изменение при бесконечно малой трансляции во времени не произвольно, т.е. если

$$\{f, (\mathcal{D}_i E_i)^B\}_{\text{СП}} = 0 \quad \text{при} \quad (\mathcal{D}_i E_i)^B = 0. \quad (2.16)$$

Далее, СП всегда можно рассматривать как интегральный оператор

$$\frac{\delta}{\delta z^B(\mathbf{x}, t)} = \left\{ \quad, (\mathcal{D}_i E_i)^B(\mathbf{x}, t) \right\}, \quad (2.17)$$

если выполняется условие интегрируемости

$$\frac{\delta}{\delta z^B(\mathbf{x}, t)} \frac{\delta}{\delta z^C(\mathbf{y}, t)} - \frac{\delta}{\delta z^C(\mathbf{y}, t)} \frac{\delta}{\delta z^B(\mathbf{x}, t)} = 0. \quad (2.18)$$

Пользуясь тождеством Якоби и СП между двумя величинами  $\mathcal{D}_i E_i$  (при равных временах), нетрудно показать, что это условие действительно выполняется (см. задачу). Таким образом, наше физическое подпространство может быть определено двумя условиями

$$(\mathcal{D}_i E_i)^B = 0, \quad \left\{ \quad, (\mathcal{D}_i E_i)^B \right\} = 0. \quad (2.19)$$

Эти условия соответствуют переходу от функционального пространства, покрываемого функциями  $A_i^B$  и  $E_i^B$  ( $i = 1, 2, 3$ ), к функциональ-

ному пространству, покрываемому функциями  $\tilde{A}_1^B$ ,  $\tilde{A}_2^B$  и  $\tilde{E}_1^B$ ,  $\tilde{E}_2^B$  в подходящим образом выбранном базисе.

Можно также описать это подпространство иначе, заменив неудобное условие с СП другим набором условий

$$g^B(A_i^C(x, t), E_i^C(x, t)) = 0, \quad (2.20)$$

которые мы называем калибровочными условиями. Такое измененное определение не должно включать какие бы то ни было сингулярные замены переменных, связанные с переходом от функций  $z^C$  к функциям  $q^C$ , т.е. (функционально)

$$\det \left| \frac{\delta g^C}{\delta z^B} \right| = \det \left\{ g^C, (\mathcal{D}_i E_i)^B \right\} \neq 0. \quad (2.21)$$

Это условие необходимо для того, чтобы функция  $g^B$  описывала желаемый выбор калибровки. В противном случае она не будет фиксировать калибровку. Предполагая, что условие (2.21) выполнено, поступим несколько умнее и ограничимся таким выбором калибровок, которые удовлетворяют (вновь при совпадающих временах) условию

$$\{g^B, g^C\}_{\text{СП}} = 0. \quad (2.22)$$

Тогда мы можем рассматривать  $g^B$  как каноническую переменную. Рассмотрим каноническое преобразование

$$(A_i^B, E_i^B) \rightarrow (\tilde{A}_j^B, \tilde{E}_j^B), \quad (2.23)$$

где индексы  $j$  используются просто как метки и не обязательно преобразуются как векторные индексы при вращении, а

$$\hat{A}_3^B = g^B(A_i, E_i). \quad (2.24)$$

Теперь условие (2.21) принимает вид

$$\det \left| \frac{\delta(\mathcal{D}_i \tilde{E}_i)}{\delta \hat{E}_3} \right| \neq 0 \quad (2.25)$$

так как переменные с тильдой сопряжены друг другу. Если мы теперь положим  $g^B = \hat{A}_3^B = 0$ , то уже невозможно придать смысл СП (2.10), включающей  $\tilde{E}_3^B$ . Это означает, что  $\tilde{E}_3^B$  нужно выразить через остающиеся переменные. Но именно это и позволяет сделать условие

(2.25): с его помощью можно разрешить уравнение связи (2.11), выразив  $\tilde{E}_3^B$  через остальные переменные. Таким образом, янг-миллсовская система определяется теперь в независимых переменных  $\tilde{A}_\perp^B = (\tilde{A}_1^B, \tilde{A}_2^B)$  и  $\tilde{E}_\perp^B = (\tilde{E}_1^B, \tilde{E}_2^B)$  плотностью гамильтониана

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} [ \tilde{E}_\perp^A \tilde{E}_\perp^A + [ \tilde{E}_3^A (\tilde{E}_\perp^A, \tilde{A}_\perp^A ) ]^2 + \tilde{B}_i^A \tilde{B}_i^A ], \quad (2.26)$$

где  $\tilde{E}_3^A(\tilde{E}_\perp^A, \tilde{A}_\perp^A)$  — функция, являющаяся решением уравнения связи (2.21), а  $\tilde{B}_i^A$  даются формулами (2.5) и (2.3). Не стоит и говорить, что теперь гамильтониан  $\mathcal{H}$  стал очень сложным, так как помимо того, что он нелокален, он еще содержит кубические и квадратичные члены взаимодействия.

Приведем теперь примеры часто встречающихся калибровочных условий.

1. *Кулоновская калибровка*, определяемая, как и в абелевом случае, условием

$$\partial^i A_i^B = 0. \quad (2.27)$$

Как нетрудно видеть, для того чтобы равенство (2.27) было хорошим калибровочным условием, оператор

$$\partial^i \frac{\delta A_i^B}{\delta \omega^C} = \partial^i (\partial_i \delta^{BC} - f^{BCD} A_i^D) \quad (2.28)$$

не должен иметь нетривиальных нулевых собственных значений.

Учитывая (2.27), перепишем (2.28) в виде

$$\partial^{BC} = \partial^i \partial_i \delta^{BC} + f^{BCD} A_i^D \partial^i. \quad (2.29)$$

Недавно Грибов [2] указал на то, что существуют нетривиальные решения уравнения

$$\partial^{BC} f^C = 0 \quad (2.30)$$

и потому кулоновская калибровка не является хорошо определенной для янг-миллсовских теорий в том смысле, что она не позволяет однозначно извлечь независимые канонические переменные. Но и в этом безумии есть свой порядок: совсем не просто прийти к потенциалам  $A_i^B$ , удовлетворяющим кулоновскому условию, для которых оператор (2.28) имеет нулевые собственные значения. В качестве примера,

иллюстрирующего эту проблему, рассмотрим потенциал (в матричных обозначениях)

$$A_i = -i U^\top \partial_i U; \quad \partial^i A_i = 0. \quad (2.31)$$

Если бы условие (2.27) было достаточным для фиксации калибровки, то мы должны были бы иметь возможность доказать, что единственным решением уравнения (2.31) является  $A_i = 0$ . Ограничимся случаем группы  $SU(2)$  и напишем

$$U = \cos \frac{\omega}{2} + i \sigma \cdot \mathbf{n} \sin \frac{\omega}{2}, \quad (2.32)$$

где  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$  и  $\omega$  зависит только от  $\mathbf{x}$ . Тогда путем прямых вычислений можно убедиться, что [ $a$  – индекс группы  $SU(2)$ ]

$$\begin{aligned} \partial^i A_i^a &= (1 + \cos \omega) (\partial_i \omega) \partial^i n^a + (1 - \cos \omega) \varepsilon^{abc} n^b \partial^i \partial_i n^c + \\ &+ \sin \omega \partial_i \omega \varepsilon^{abc} n^b \partial^i n^c + \sin \omega \partial^i \partial_i n^a + n^a \partial^i \partial_i \omega, \end{aligned} \quad (2.33)$$

Такое уравнение явно безнадежно, но мы его упростим: следуя Грибову, ограничимся сферически-симметричными решениями, для которых

$$n^a = \partial^a r = \frac{x^a}{r}. \quad (2.34)$$

Тогда находим, что  $\omega$  зависит только от  $r$  и как следствие кулоновского условия  $\omega(r)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{d\omega}{dt} - \sin 2\omega = 0, \quad (2.35)$$

где  $t = \ln r$ . Из требования несингулярности  $U$  следует, что

$$\omega(t = -\infty) = 0, 2\pi, 4\pi, \dots \quad (2.36)$$

Полученное уравнение представляет собой уравнение затухающих колебаний маятника в постоянном гравитационном поле. Граничное условие (2.36) требует, чтобы колебания начинались при  $\omega(t = -\infty)$  из положения неустойчивого равновесия. Затем, в зависимости от начальной скорости грузика, возможны три варианта: 1) либо он все время будет оставаться в положении  $\omega = 0$ ; 2) либо он начнет падать по часовой стрел-

ке и при  $t = +\infty$  достигнет положения устойчивого равновесия  $\omega = -\pi$ ; 3) либо он начнет падать против часовой стрелки и все кончится так же, как в предыдущем случае.

Вдобавок к этому маятник может много раз прокрутиться и только затем попасть в одну из трех категорий. Первое решение соответствует значению  $A_i = 0$ , что можно было сказать заранее, но два других типа решений соответствуют нетривиальным  $A_i$ . Существование таких  $A_i$  и приводит к неоднозначности Грибова. Если положить

$$A_i = -i e^{-i l \omega} \frac{\sigma \cdot x}{r} \partial_i e^{i l \omega} \frac{\sigma \cdot x}{r}, \quad (2.37)$$

где  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , то значение  $l = 0$  отвечает случаю 1, а значения  $l = \pm 1$  — двум другим случаям. При  $t \rightarrow +\infty$  имеем следующие граничные условия:

$$U \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \begin{cases} 1 & \text{при } l = 0, \\ \pm i \frac{\sigma \cdot x}{r} & \text{при } l = \pm 1. \end{cases} \quad (2.38)$$

Далее, если вычислить понтрягинский индекс для различных грибовских решений, то окажется, что

$$n = -\frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \varepsilon_{ijk} \text{Sp}(A_i A_j A_k) = \begin{cases} 0, & l = 0, \\ +\frac{1}{2}, & l = \pm 1. \end{cases} \quad (2.39)$$

Таким образом, нетривиальные решения Грибова имеют топологический заряд  $\pm 1/2$  (у инстантонов  $\pm 1$ ). Такие решения явно не соответствуют обычным конфигурациям потенциала!

Поэтому можно, вероятно, допустить, что оператор (2.28) имеет нулевые собственные значения только для  $A_i$  с нетривиальной топологической структурой, т.е. с  $n \neq 0$  (доказательство такого предположения мне не известно). Таким образом, если ограничиться возмущениями вблизи нулевых потенциалов, имеющих  $n = 0$ , то проблему можно игнорировать. Однако решение ее все еще является открытым вопросом в тех случаях, когда рассматриваются непертурбативные янг-миллсовские явления. По этому поводу можно сказать лишь то, что кулоновская калибровка требуемым образом ограничивает фазовое

пространство, но только с точностью до копий, соответствующих  $l = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Мы вернемся к данному вопросу после того, как рассмотрим аксиальную калибровку.

2. Аксиальная калибровка Арновитта – Фиклера характеризуется условиями

$$n^i A_i^B = 0, \quad n^i n_i = 1, \quad (2.40)$$

где  $n$  – постоянный вектор. В этом случае оператор

$$n^i \frac{\delta A_i^B}{\delta \omega^C} = n^i [\partial_i \delta^{BC} + f^{BCD} A_i^D] = n^i \partial_i \delta^{BC} \quad (2.41), \quad (2.42)$$

приводится к тому же виду, что и в абелевом случае, и, по-видимому, обратим, так что кажется, что в этой калибровке не должно возникать проблемы Грибова (подробнее об этом ниже). Таким образом, можно обратить уравнение связи (2.11) и, решив его относительно  $E_3^A$ , получить в результате ( $n_i = \delta_{i3}$ )

$$E_3^A(x, y, z, t) = - \int_{-\infty}^z dz' (\mathcal{D}_\perp E_\perp)^A(x, y, z', t), \quad (2.43)$$

причем единственная ненадежная вещь здесь – граничное условие при  $z = -\infty$  (самое слабое место этой калибровки). После этого непосредственно находится гамильтониан, представляющий собой столь устрашающее выражение, что приводить его здесь не стоит.

Вернемся теперь к проблеме Грибова. На первый взгляд, аксиальная калибровка не сопряжена с неоднозначностями, обнаруженными в кулоновской калибровке. Однако они могут скрываться в граничном условии для  $E_3$ , необходимом для обращения  $n^i \partial_i$ : Поэтому возможны два варианта: 1) либо проблема не специфична для теории Янга – Миллса и дело лишь в том, что кулоновская калибровка – неудачный выбор; 2) либо проблема коренится в самой теории, и тогда она должна проявиться и в аксиальной калибровке, а единственное место, где это может случиться, – пространственная бесконечность. Никто не знает ответа, но Сингер показал, что если определить интеграл по траекториям на сфере  $S_4$  в евклидовом пространстве, то грибовская проблема присуща самой теории и корни ее в том, что невозможно обойтись одним и тем же калибровочным условием во всем пространстве-времени. Так как нас главным образом интересуют вычисления янг-миллсовского интеграла по траекториям по теории возмущений, то мы просто будем игнорировать в дальнейшем грибовскую проблему.

ФИТ для янг-миллсовской теории можно теперь построить в точности так же, как и в абелевом случае, лишь с небольшим усложнением, связанным с индексами. Мы просто приведем результат:

$$\int \mathcal{D}A_{\mu}^B e^{iS^{\text{ЯМ}}[A]} \delta[g^A] \det \left| \frac{\delta g^A}{\delta \omega^B} \right|, \quad (2.44)$$

где  $g^A$  – калибровочная функция, а  $S^{\text{ЯМ}}[A]$  – янг-миллсовское действие, записанное только через потенциалы.

### Задачи

А. Вычислите скобки Пуассона

$$\{(\mathcal{D}_i E_i)^A(\mathbf{x}, t), H\} \text{ и } \{(\mathcal{D}_i E_i)^A(\mathbf{x}, t), (\mathcal{D}_i E_i)^B(\mathbf{y}, t)\}$$

и покажите, что если удовлетворяются уравнения связи, то изменение  $(\mathcal{D}_i E_i)^A$  во времени равно нулю.

Б. Пользуясь некоторыми результатами задачи А, покажите, что выполнены условия интегрируемости для функции  $z$ , определяемые как

$$\frac{\delta}{\delta z^A(\mathbf{x}, t)} = \{ \quad, (\mathcal{D}_i E_i)^A(\mathbf{x}, t) \}.$$

В. Выразите гамильтониан янг-миллсовской системы в кулоновской и аксиальной калибровке через соответствующие независимые канонические переменные.

Г. Выведите уравнение движения затухающего маятника в постоянном гравитационном поле и сравните с уравнением Грибова. Вычислите топологический заряд (2.39) для нетривиальных решений этого уравнения.

Д. Покажите, что в кулоновской калибровке возможность избавиться от продольных составляющих  $E_i$ , используя связь  $(\mathcal{D}_i E_i) = 0$ , зависит от обратимости оператора  $\partial^i \mathcal{D}_i$ .

### § 3. Непосредственное определение янг-миллсовского ФИТ, процедура Фаддеева – Попова

В двух предыдущих параграфах мы показали, как можно вывести янг-миллсовский ФИТ, пользуясь классическим гамильтоновым формализмом. Окончательный результат оказался сложным выражением,

что объясняется наличием в гамильтоновом формализме ограничений, обусловленных калибровочной инвариантностью исходного действия. Существует другой, более прямой способ получить это выражение — процедура, предложенная Фаддеевым и Поповым [3].

Янг-миллсовское действие по построению калибровочно-инвариантно, т.е.

$$S^{\text{ЯМ}} [A_\mu] = S^{\text{ЯМ}} [A_\mu^U], \quad (3.1)$$

где

$$A_\mu^U = UA_\mu U^\dagger - iU\partial_\mu U^\dagger, \quad U(x) = e^{i\omega(x) \cdot T}. \quad (3.2)$$

Это означает, что наивное выражение (в евклидовом пространстве)

$$\int \mathcal{D}A_\mu e^{-S}$$

не очень хорошо определено, если символом  $\mathcal{D}A_\mu$  обозначено суммирование по всем  $A_\mu$ , даже по тем, которые связаны калибровочным преобразованием. В приложении А мы покажем, как обойти эту трудность: нужно определить новую меру, которая не давала бы лишних вкладов, т.е. меру, в которой сумма берется только один раз по всему калибровочному семейству. Грубо говоря, мы должны отделаться от лишних интегрирований (задача, известная математикам как определение меры Хаара).

Рассмотрим величину

$$\Delta_g^{-1} [A_\mu] = \int \mathcal{D}U \delta[g^B(A_\mu^U)], \quad (3.3)$$

где  $A_\mu^U$  — функция, определенная в формуле (3.2). Символ  $\mathcal{D}U$  означает сумму по всем элементам группы, а  $g^B$  — функции, обращающиеся в нуль для некоторых  $A_\mu^U$ . Величина  $\Delta_g^{-1}$  инвариантна (мы пренебрегаем нетривиальными гомотопическими классами и проблемой Грибова). Действительно, так как

$$\Delta_g^{-1} [A_\mu^{U'}] = \int \mathcal{D}U \delta[g^B(A_\mu^{U'} U)], \quad (3.4)$$

изменим переменные интегрирования и перейдем от  $U$  к  $U''$ , где

$$U'' = U'U, \quad \mathcal{D}U'' = \mathcal{D}U. \quad (3.5)$$



В результате получим

$$\Delta_g^{-1}[A_\mu^{U'}] = \int \mathcal{D}U'' \delta[g^B(A_\mu^{U''})] = \Delta_g^{-1}[A_\mu], \quad (3.6)$$

поскольку  $U''$  – переменная интегрирования. Таким образом, путем хитроумного вставления 1 в наивную сумму по траекториям получаем

$$\int \mathcal{D}A_\mu e^{-S[A]} = \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_g[A] \int \mathcal{D}U \delta[g^B[A^U]] e^{-S[A]}. \quad (3.7)$$

Выполнив в подинтегральном выражении калибровочное преобразование от  $A_\mu^U$  к  $A_\mu$ , получим

$$\int \mathcal{D}A_\mu \Delta_g[A] \int \mathcal{D}U \delta[g^B[A_\mu]] e^{-S[A]}, \quad (3.8)$$

если воспользуемся формулами (3.1) и (3.6), а также учтем, что  $\mathcal{D}A_\mu$  и  $\mathcal{D}A_\mu^U$  одинаковы. Но теперь ничто уже в подинтегральном выражении не зависит от  $U$ , и можно убрать  $\mathcal{D}U$  вместе с мультипликативной бесконечностью, от которой мы и хотели избавиться в первую очередь. Следовательно, мы определяем правильный ФИТ для теории Янга – Миллса как

$$\int \mathcal{D}A_\mu \Delta_g[A_\mu] \delta[g(A_\mu)] e^{-S[A_\mu]}. \quad (3.9)$$

Остается вычислить  $\Delta_g[A]$ . Прием заключается в том, чтобы рассмотреть  $g^A(A^U)$  как функцию группового элемента  $U(x)$ . Тогда можно произвести замену переменных  $U(x) \rightarrow g^A$ . Символически записывая

$$\mathcal{D}U = \mathcal{D}g \det \left| \frac{\delta U}{\delta g} \right|, \quad (3.10)$$

$$\text{получаем } \Delta_g^{-1}[A] = \int \mathcal{D}g \det \left| \frac{\delta U}{\delta g} \right| \delta[g], \quad (3.11)$$

или

$$\Delta_g[A] = \det \left| \frac{\delta g}{\delta U} \right| \Big|_{g=0}. \quad (3.12)$$

Подобные манипуляции можно производить, если замена переменных  $U \rightarrow g$  хорошо определена и несингулярна: одному групповому элементу  $U(x)$  отвечает только одна функция  $g$  и наоборот. Как мы видели, в кулоновской калибровке это условие не выполняется (проблема Грибова).

Более того,  $U(x)$  определяется тем же числом параметров, что и  $g$ , но  $U(x)$  может иметь нетривиальные граничные условия и принадлежать к ненулевому гомотопическому классу. Мы игнорируем в последующем подобные проблемы до тех пор, пока будем иметь дело с вычислениями по теории возмущений в квантовой теории поля вдали от значения  $A_\mu = 0$ .

Если параметризовать  $U(x)$  функциями  $\omega^A(x)$ , то  $\Delta_g$  можно записать в виде

$$\Delta_g[A] = \det \left| \frac{\delta g^A(x)}{\delta \omega^B(y)} \right|. \quad (3.13)$$

Собирая все выражения, приходим к окончательному выражению для ФИТ в калибровочной теории (опустив индексы)

$$\int \mathcal{D} A_\mu \delta[g(A)] \det \left| \frac{\delta g}{\delta \omega} \right| e^{-S[A_\mu]}, \quad (3.14)$$

которое совпадает с выражением, полученным с помощью гамильтонова формализма. Это выражение калибровочно-инвариантно (см. приложение А и задачу).

### Задачи

А. Покажите, что величина  $\Delta_g[A] = \det |\delta g^A / \delta \omega^B|$  калибровочно-инвариантна.

Б. Покажите, что окончательное выражение

$$\int \mathcal{D} A_\mu \delta[g] \det \left| \frac{\delta g}{\delta \omega} \right| e^{-S \frac{\mathbb{P}M}{E}}$$

не зависит от выбора калибровки  $g$  (указания см. в приложении А).

**\*\*В.** При наличии неоднозначности Грибова величина  $\Delta_g^{-1}$  не существует. Попробуйте обобщить процедуру Фаддеева – Попова, т.е. определите заново величину  $\Delta_g^{-1}$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Dirac P.A.M., Can. Journ. Math., **2**, 129 (1950).
2. Gribov V.N., Nucl. Phys., **B 139**, 1 (1978).
3. Faddeev L.D., Popov V.N., Phys. Lett., **25B**, 29 (1967).

## Вычисления по теории возмущений в калибровочных теориях

### § 1. Фейнмановские правила для калибровочных теорий в евклидовом пространстве

Будем исходить из выведенного в предыдущей главе выражения для интеграла по траекториям для калибровочных теорий, к которому мы с целью получить функции Грина добавим члены с источниками. Таким образом, рассмотрим в евклидовом пространстве функционал

$$W[J_\mu^A] \sim \int \mathcal{D} A_\mu^A \delta\{g^A\} \det \left| \frac{\delta g^A}{\delta \omega^B} \right| e^{-S_E^{\text{FM}}[A] + \int d^4x J_\mu^A A_\mu^A}. \quad (1.1)$$

Чтобы вывести фейнмановские правила, нужно переписать дополнительные множители в мере. Прежде всего заметим, что выражение (1.1) не зависит от калибровочных функций  $g^A$ . Поэтому можно выбрать новую калибровочную функцию

$$g'^A = g^A - c^A, \quad (1.2)$$

где  $c^A$  — некоторая функция переменной  $x$ , не зависящая от  $A_\mu^A$ . Кроме того, можно провести в выражении (1.1) функциональное интегрирование по  $c^A$  с любым весом; это просто приведет к изменению нормировки функционала  $W[J]$ . Калибровочная функция обычно линейна по  $A_\mu^A$ , так что если мы хотим, чтобы калибровочная функция входила квадратично в показатель экспоненты, то рассмотрим

$$\int \mathcal{D} c^A e^{-\frac{1}{2\alpha} \int d^4x c^A c^A} \delta[g^A - c^A] = e^{-\frac{1}{2\alpha} \int d^4x g^A g^A}, \quad (1.3)$$

где  $\alpha$  — произвольный коэффициент. Тогда исходное выражение примет вид

$$W[J] = \int \mathcal{D} A_\mu^A \det \left| \frac{\delta g^A}{\delta \omega^B} \right| e^{-S_E^{\text{FM}} - \frac{1}{2\alpha} \langle g^A g^A \rangle + \langle J_\mu^A A_\mu^A \rangle}. \quad (1.4)$$

Далее нам нужно переписать детерминант в виде функционального интеграла. Поскольку детерминант входит в числитель, он соответствует интегралу по траекториям, взятому по грассмановым пере-

менным:

$$\det \left| \frac{\delta g^A(x)}{\delta \omega^B(y)} \right| = \int \mathcal{D} \eta^* D \eta e^{i \int d^4 x d^4 y \eta^{*A}(x) \frac{\delta g^A(x)}{\delta \omega^B(y)} \eta^B(y)} \quad (1.5)$$

Эти грассмановы поля — знаменитые поля-духи Фейнмана и Фаддеева — Попова, преобразующиеся как члены присоединенного представления группы. Теперь можно записать ФИТ в виде

$$\int \mathcal{D} \eta^* \mathcal{D} \eta \int \mathcal{D} A_\mu e^{-S_E^{\text{ФФ}}}, \quad (1.6)$$

где

$$S_E^{\text{ФФ}} = S_E^{\text{ЯМ}} + \frac{1}{2\alpha} \langle g^A g^A \rangle - i \langle \eta^{*A}(x) \frac{\delta g^A(x)}{\delta \omega^B(y)} \eta^B(y) \rangle + \langle J_\mu^A A_\mu^A \rangle. \quad (1.7)$$

Это выражение позволяет сформулировать фейнмановские правила, которые, очевидно, зависят от выбора калибровки. Заметим, что

$$\frac{\delta g^A(x)}{\delta \omega^B(y)} = \frac{\partial g^A(x)}{\partial A_\mu^C(x)} \frac{\delta A_\mu^C(x)}{\delta \omega^B(y)} = \frac{\partial g^A(x)}{\partial A_\mu^C(x)} (\mathcal{D}_\mu)^{CB} \delta(x-y), \quad (1.8)$$

и это приводит к локальному взаимодействию  $\eta$ -полей. Такое же выражение справедливо и в абелевом случае, с той только разницей, что в нем отсутствуют групповые индексы. Ниже мы будем рассматривать оба случая, абелев и неабелев. Прежде всего рассмотрим ковариантную калибровку

$$g^A = \partial_\mu A_\mu^A = 0. \quad (1.9)$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{\delta g^A(x)}{\delta \omega^B(y)} = \partial_\mu (\partial_\mu \delta^{AB} + f^{ABC} A_\mu^C) \delta(x-y) \quad (1.10)$$

в неабелевом случае и

$$\frac{\delta g(x)}{\delta \omega(y)} = \partial_\mu \partial_\mu \delta(x-y) \quad (1.11)$$

в абелевом. Сравнивая с выражением (1.7), мы заключаем, что в абелевом случае в такой калибровке духи не взаимодействуют с калибровочными полями. Поэтому от них можно избавиться путем интегриро-

вания в интеграле по траекториям: в ковариантной калибровке (1.9) для КЭД дұхи не являются необходимыми.

В неабелевом же случае выражение (1.10) указывает на наличие нетривиального члена взаимодействия. После интегрирования по частям, если учесть условие (1.9), часть действия, содержащая поля-дұхи, принимает вид

$$i \int d^4x \left[ \partial_\mu \eta^{*A}(x) \partial_\mu \eta^A(x) - \frac{1}{2} gf^{ABC} \partial \cdot A^C \eta^{*A} \eta^B - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} gf^{ABC} A^C_\rho \eta^{*A} \partial_\rho \eta^B \right]. \quad (1.12)$$

При такой форме записи  $\eta$ -поля можно интерпретировать как скалярно-подобные поля, взаимодействующие через свой ток с калибровочными полями. Но не следует забывать, что эти поля представляют собой грассманы числа и потому фейнмановские правила для них радикально отличаются от правил для скалярных полей: всякую замкнутую петлю, составленную из  $\eta$ -полей, нужно брать со знаком минус (гл. 5). Связь тока с дивергенцией калибровочного поля антиэрмитова, тогда как остальная часть лагранжиана дұхов эрмитова. Но можно пренебречь антиэрмитовой частью, так как детерминант должен вычисляться при условии  $\partial \cdot A = 0$ . Как мы увидим ниже, вытекающее отсюда изменение фейнмановских правил для духов оказывает влияние только на распространение продольной части калибровочного поля, которую всегда можно устранить путем перенормировки калибровочного параметра  $\alpha$ . Фейнмановские правила, учитывающие наличие полей-дұхов, таковы:

*пропагатор дұха*

$$\frac{A \quad B}{p \rightarrow} \leftrightarrow -i \frac{\delta^{AB}}{p^2}; \quad (1.13)$$

*вершина взаимодействия дұха с калибровочным полем*

$$\frac{\mu \quad C}{A \quad p \rightarrow} \leftrightarrow \frac{1}{2} gf^{ABC} (r_\mu + p_\mu - q_\mu) = -gf^{ABC} q_\mu, \quad (1.14)$$

где спиральная линия отвечает калибровочному полю  $A^C_\mu$ . Кроме того, мы для ясности восстановили множитель  $g$ . Импульсы  $p, q, r$  входят в вершину и, конечно, удовлетворяют уравнению закона сох-

ранения

$$(p + q + r)_\mu = 0. \quad (1.15)$$

Квадратичная часть эффективного действия для калибровочных полей имеет вид

$$\int d^4x \left[ \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^B - \partial_\nu A_\mu^B)(\partial_\mu A_\nu^B - \partial_\nu A_\mu^B) + \frac{1}{2\alpha} \partial_\mu A_\mu^B \partial_\rho A_\rho^B \right], \quad (1.16)$$

где мы произвели изменения в определениях  $A \rightarrow qA$ ,  $\alpha \rightarrow g^2\alpha$ ; далее,

$$\begin{aligned} \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu^B \partial_\mu A_\nu^B - \frac{1}{2} \partial_\nu A_\mu^B \partial_\mu A_\nu^B + \frac{1}{2\alpha} \partial_\mu A_\mu^B \partial_\rho A_\rho^B \right] = \\ = \frac{1}{2} \int d^4x A_\rho^B \left[ -\partial_\mu \partial_\mu \delta_{\rho\nu} + (1 - \frac{1}{\alpha}) \partial_\rho \partial_\nu \right] A_\nu^B, \end{aligned} \quad (1.17)$$

причем каждый член был проинтегрирован по частям. Пропагатор равен обратной величине оператора в квадратных скобках. (Заметим, что в отсутствие калибровочного члена выражение в квадратных скобках есть оператор проектирования и для него нет обратной величины; поэтому и требуется добавлять калибровочный член, что сделал еще Ферми для КЭД.) Мы можем без потери общности записать пропагатор в импульсном пространстве в виде  $X(p)\delta_{\mu\nu} + Y(p)p_\mu p_\nu$ . Тогда, потребовав, чтобы выполнялось условие

$$\delta_{\mu\rho} = [X(p)\delta_{\mu\nu} + Y(p)p_\mu p_\nu] [p^2 \delta_{\nu\rho} - (1 - \frac{1}{\alpha}) p_\nu p_\rho], \quad (1.18)$$

мы получаем для фейнмановского пропагатора, изображаемого графически спиралью, выражение

$$\begin{array}{c} A \\ \text{~~~~~} \\ \mu \quad p \rightarrow \nu \end{array} \quad B \quad \rightarrow \quad \frac{\delta^{AB}}{p^2} \left[ \delta_{\mu\nu} - (1 - \alpha) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right]. \quad (1.19)$$

До сих пор мы считали параметр  $\alpha$  произвольным. С точки зрения вычислений проще всего калибровка Фейнмана, в которой  $\alpha = 1$ :

$$\begin{array}{c} A \\ \text{~~~~~} \\ \mu \quad p \rightarrow \nu \end{array} \quad B \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{p^2} \delta^{AB} \delta_{\mu\nu} \quad (\text{Калибровка Фейнмана}). \quad (1.20)$$

Если положить  $\alpha = 0$ , то числитель пропагатора (1.19) превращается в проекционный оператор, необходимый для запрета распространения лишней моды. Такая калибровка называется калибровкой Ландау. Она не очень удобна для вычисления фейнмановских диаграмм, но полезна при проверке унитарности амплитуд в пространстве Минковского.

Далее, эффективное действие содержит член, кубичный по калибровочным полям,

$$-gf d^4x f^{ABC} A_\mu^A A_\nu^B \partial_\mu A_\nu^C. \quad (1.21)$$

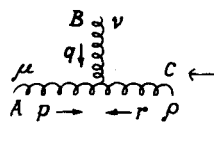
Чтобы получить соответствующее фейнмановское правило, мы должны переписать этот член в импульсном пространстве в виде

$$\frac{1}{3!} \tilde{A}_\mu^A(p) \tilde{A}_\nu^B(q) \tilde{A}_\rho^C(r) V_{\mu\nu\rho}^{ABC}(p, q, r). \quad (1.22)$$

Множителем  $-V$ , полностью симметричным относительно перестановки полей  $A$ , и определяется фейнмановское правило. В частности, нам уже известна структура индексов  $V$ , которая просто есть  $f^{ABC}$ . Следовательно, можно написать

$$V_{\mu\nu\rho}^{ABC}(p, q, r) = f^{ABC} V_{\mu\nu\rho}(p, q, r), \quad (1.23)$$

где функция  $V_{\mu\nu\rho}(p, q, r)$  должна быть антисимметричной относительно перестановки пар  $(\mu, p)$ ,  $(\nu, q)$ ,  $(\rho, r)$ , так как множители  $f^{ABC}$  сами полностью антисимметричны. Из выражения (1.21) следует, что в  $V_{\mu\nu\rho}$  должно входить произведение  $i r_\mu \delta_{\nu\rho}$ . Этого достаточно, чтобы из соображений симметрии выписать все остальные члены. Результат таков:



$$i r_\mu \delta_{\nu\rho} + (q_\rho - p_\rho) \delta_{\mu\nu} + (p_\nu - r_\nu) \delta_{\rho\mu}, \quad (1.24)$$

где, конечно  $(p + q + r)_\mu = 0$ .

Аналогично эффективное действие содержит квартичный член

$$\frac{1}{4} g^2 f^{ABE} f^{CDE} A_\mu^A A_\nu^B A_\mu^C A_\nu^D, \quad (1.25)$$

который следует переписать в виде

$$\frac{1}{4!} \tilde{A}_\mu^A(p) \tilde{A}_\nu^B(q) \tilde{A}_\rho^C(r) \tilde{A}_\sigma^D(s) V_{\mu\nu\rho\sigma}^{ABCD}(p, q, r, s), \quad (1.26)$$

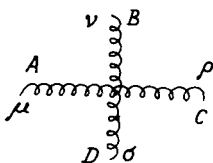
где множитель  $V$  полностью симметричен относительно перестановки троек  $(A, \mu, p)$ ,  $(B, \nu, q)$ ,  $(C, \rho, r)$  и  $(D, \sigma, s)$ . Из выражения (1.25) явствует, что этот член не содержит никаких импульсов и, следовательно, его структура такова:

$$\frac{1}{4} g^2 f^{ABE} f^{CDE} \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma}.$$

Исходя из этого выражения, мы должны построить выражение, симметричное относительно замен  $(A, \mu) \rightarrow (B, \nu)$  и  $(C, \rho) \rightarrow (D, \sigma)$ . Так как множители  $f$  антисимметричны, нам нужно по отдельности антисимметризовать выражение по отношению к заменам  $\mu \rightarrow \nu$  и  $\rho \rightarrow \sigma$ , т.е. положить

$$\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} \rightarrow \frac{1}{2} (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\rho} \delta_{\mu\sigma}),$$

чтобы учесть оба требования. Затем следует обеспечить еще две симметрии — относительно замен  $(A, \mu) \rightarrow (D, \rho)$  и  $(A, \mu) \rightarrow (D, \sigma)$ . Для этого добавим соответствующие члены и поделим результат на 3. Это даст нам последнее фейнмановское правило



$$\begin{aligned} & \leftrightarrow -g^2 [f^{ABE} f^{CDE} (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\rho} \delta_{\mu\sigma}) + \\ & + f^{CBE} f^{ADE} (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\mu} \delta_{\rho\sigma}) + \\ & + f^{DBE} f^{CAE} (\delta_{\sigma\rho} \delta_{\nu\mu} - \delta_{\nu\rho} \delta_{\mu\sigma})]. \quad (1.27) \end{aligned}$$

Два последних фейнмановских правила не зависят от калибровки и отсутствуют в абелевом случае. Все выписанные фейнмановские правила в ковариантной калибровке собраны в приложении В.



Рассмотрим теперь калибровку Арновитта – Фиклера, которую мы запишем в евклидовом пространстве в необычной форме

$$n_\mu A_\mu^B = 0, \quad n_\mu n_\mu = 1. \quad (1.28)$$

Легко видеть, что в этой калибровке выражение

$$\frac{\delta g^A(x)}{\delta \omega^B(y)} = n_\mu (\partial_\mu \delta^{AB} + f^{ABC} A_\mu^C) \delta(x-y) = \quad (1.29)$$

$$= \delta^{AB} n_\mu \partial_\mu \delta(x-y) \quad (1.30)$$

не зависит от  $A_\mu$ . Следовательно, как в абелевой, так и в неабелевой теории духи не связаны с калибровочными полями, а потому можно без них обойтись. Именно в калибровке такого типа структуры абелевой и неабелевой теорий наиболее близки друг другу. Нам остается только позаботиться о пропагаторе калибровочного поля. Квадратичный по  $A_\mu$  член имеет теперь вид

$$\int d^4x \left[ \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^B - \partial_\nu A_\mu^B) (\partial_\mu A_\nu^B - \partial_\nu A_\mu^B) - \frac{1}{2\alpha} n_\mu A_\mu^B n_\rho A_\rho^B \right],$$

или, после интегрирования по частям,

$$\frac{1}{2} \int d^4x A_\mu^B \left[ -\partial_\rho \partial_\rho \delta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu - \frac{1}{\alpha} n_\mu n_\nu \right] A_\nu^B. \quad (1.31)$$

Фейнмановский пропагатор равен обратной величине выражения в квадратных скобках. В импульсном пространстве (см. задачу) получаем

$$\frac{\delta^{AB}}{p^2} (\delta_{\mu\nu} - \frac{1}{n \cdot p} (n_\mu p_\nu + n_\nu p_\mu) - \frac{p_\mu p_\nu}{(n \cdot p)^2} (\alpha p^2 - n^2)). \quad (1.32)$$

Как нетрудно видеть, преимущества такой калибровки сомнительны: духов нет, но очень сложна структура пропагатора.

Заметим, что в выведенных нами фейнмановских правилах имеется некоторый произвол: знак пропагатора духа и вершины взаимодействия духа с калибровочным полем не существен, так как мы всегда будем иметь дело с четным числом линий духов.

В заключение выпишем дополнительные фейнмановские правила для связи калибровочных полей с фермионами. Хотя калибровочные поля можно связать независимо с левыми и правыми фермионными полями, мы остановимся на чисто векторной связи, в которой левые и правые фермионы связаны одинаково. В этом случае в дополнение к калибровочному лагранжиану нужно написать

$$\mathcal{L}f = \bar{\Psi}\gamma \cdot \mathcal{D}\Psi + im\Psi\Psi, \quad (1.33)$$

где  $\psi(x)$  – дираковское спинорное поле массы  $m$ , а  $\mathcal{D}_\mu$  – соответствующая ковариантная производная. Мы опустили все индексы. Дополнительные фейнмановские правила таковы:

*фермионная линия*

$$\frac{a}{b} \leftrightarrow \frac{-i\delta^{ab}}{\hat{p} + m}, \quad (1.34)$$

где  $\hat{p} = p_\mu\gamma_\mu$  и  $a, b$  – индексы фермионного представления;

*вершина взаимодействия фермиона с калибровочным полем*

$$\frac{\mu}{a} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} A \\ | \\ b \end{array} \leftrightarrow ig\gamma_\mu(T^A)_{ab}, \quad (1.35)$$

где  $(T^A)_{ab}$  – матричные элементы генераторов группы в соответствующем фермионном представлении. До тех пор пока мы имеем дело с дираковскими фермионами, нет существенной разницы между рассмотрением их в пространстве Минковского или Евклида, если не считать замены  $\bar{\psi}$  на  $\psi^\dagger$ . Ниже мы сохраним более уместную систему обозначений, отвечающую пространству Минковского, хотя и пишем фейнмановские правила в евклидовом пространстве.

### Задачи

А. Выведите выражение для пропагатора калибровочного поля в калибровке  $n_\mu A_\mu = 0$ ,  $n_\mu n_\mu = 1$ ,  $n_\mu$  фиксировано.

Б. Выведите фейнмановские правила для комплексного скалярного поля, взаимодействующего с янг-миллсовским полем. Для определенности рассмотрите локальную инвариантность относительно группы  $SU(N)$  и предположите, что поле преобразуется по  $N$ -мерному представлению.

**\*\*В.** Рассмотрите для  $SU(N)$ -калибровочных теорий калибровочное условие  $\partial_\mu A_\mu + a \{A_\mu, A_\mu\}$  (записанное здесь в матричной форме), где  $a$  – произвольный коэффициент. Выведите фейнмановские правила. Проанализируйте влияние калибровочных условий на вершины. Заметим, что это странное калибровочное условие возможно только в том случае, когда оператор  $\{A_\mu, A_\mu\}$  имеет те же групповые свойства, что и  $\partial \cdot A$ .

## § 2. КЭД, однопетлевая структура

Переходим к исследованию в рамках теории возмущений простейшей из калибровочных теорий, которая описывает взаимодействие фотона с заряженными частицами. Определяющий эту теорию классический лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{КЭД}} = & \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \bar{\Psi} \gamma_\mu \partial_\mu \Psi + im \bar{\Psi} \Psi + \\ & + ie A_\mu \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi + \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)(\partial_\rho A_\rho). \end{aligned} \quad (2.1)$$

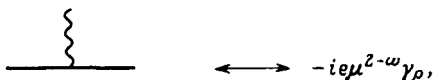
Здесь  $\Psi$  – четырехкомпонентное дираковское поле, а  $e$  – электрический заряд. В природе существует много заряженных полей: лептоны  $e^-, \mu^-, \tau^-$  с зарядом  $-e$ , "верхние" кварки  $u, c$  (и, возможно,  $t$ ) с зарядом  $2/3e$ , "нижние" кварки  $d, s, b$  с зарядом  $-1/3e$ , промежуточный векторный переносчик слабых взаимодействий  $W_\mu^\pm$  и, возможно, многие другие поля, еще не открытые. Мы ограничимся полем со спином  $1/2$ .

Так как мы собираемся проводить вычисления в пространстве  $2\omega$  измерений, заменим размерную константу связи  $e$  безразмерной:

$$e \rightarrow e\mu^2 - \omega, \quad (2.2)$$

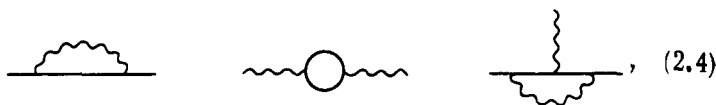
где  $\mu$  – традиционный массовый параметр в схеме размерной регуляризации. (Напомним, что в  $2\omega$  измерениях поля со спином  $1/2$  имеют размерность  $-\omega + 1/2$ , а поля со спином  $1$  имеют размерность  $-\omega + 1$ .) Таким образом, фейнмановские правила в евклидовом пространстве (в фейнмановской калибровке  $\alpha = 1$ ) имеют вид

$$\begin{aligned} \text{~~~~~} & \longleftrightarrow \frac{\delta_{\mu\nu}}{p^2}, \\ \text{-----} & \longleftrightarrow \frac{-i}{\hat{p} + m}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

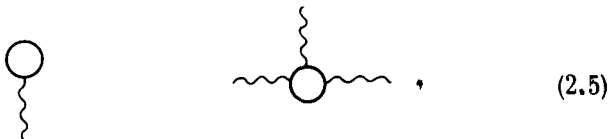


где мы опустили все спинорные индексы и, кроме того, каждой фермионной петле приписывается знак минус.

Руководствуясь этими правилами, приходим к однопетлевым диаграммам



которые дают поправки к фундаментальным параметрам теории и полям, и диаграммам



которые на первый взгляд порождают новые взаимодействия. Разберемся сначала с диаграммами (2.5).

Хорошо известно, что дираковский кинетический член инвариантен относительно операции зарядового сопряжения

$$\Psi \rightarrow \Psi^C = C\bar{\Psi}^T. \quad (2.6)$$

При таком дискретном преобразовании дираковские коварианты  $\bar{\Psi}\Psi$ ,  $\bar{\Psi}\gamma_5\Psi$  и  $\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_\mu\Psi$  четны, тогда как векторный  $\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi$  и тензорный  $\bar{\Psi}\sigma_{\mu\nu}\Psi$  коварианты нечетны. Отсюда следует, что лагранжиан (2.1) инвариантен относительно комбинации дискретных преобразований

$$\Psi \rightarrow \Psi^C, A_\mu \rightarrow -A_\mu. \quad (2.7)$$

Поэтому  $\mathcal{L}^{\text{КЭД}}$  не может порождать взаимодействий, для которых нечетно число фотонных линий (напомним, что в аналогичном случае теории  $\lambda\phi^4$ , которая симметрична относительно замены  $\phi \rightarrow -\phi$ , не могут существовать функции Грина с нечетным числом линий). Данное положение, называемое теоремой Фарри, избавляет нас от диаграмм (2.5).

Мы намеренно пренебрегли диаграммой



(2.8)

описывающей рассеяние света на свете. При простом подсчете степеней эта диаграмма логарифмически расходится (в четырех измерениях), поскольку каждый фермионный пропагатор ведет себя как  $(\hat{p})^{-1}$ . Но так как диаграмма содержит четыре фотонные линии и возникает в калибровочно-инвариантной теории, она должна быть пропорциональна  $(F_{\mu\nu})^4$  и иметь размерность восемь (при  $\omega = 2$ ). Таким образом, может показаться, что мы нашли диаграмму, которая расходится и не соответствует фундаментальным взаимодействиям, входящим в лагранжиан. Следует ли из этого, что КЭД неперенормируема? На первый взгляд, кажется невозможным устранить эту расходимость, переопределив входные параметры. Но вопреки простому подсчету степеней, ящичная диаграмма (2.8) — ультрафиолетово-сходящаяся, и тем самым вопрос снимается. Отсюда вытекает первый урок: в калибровочных теориях нельзя доверять простому подсчету степеней, поскольку расходящиеся диаграммы могут оказаться на самом деле конечными или по крайней мере не так сильно расходящимися.

После такого мудрого предостережения займемся вычислением однопетлевых диаграмм (2.4). Начнем с поправки к фермионной линии (опуская спинорные индексы)

$$\Sigma(p) = \frac{\text{Diagram with loop and arrow}}{p \rightarrow \quad p-l} = \tag{2.9}$$

$$= - (e\mu^2 - \omega)^2 \int \frac{d^2\omega}{(2\pi)^2 \omega} \gamma_\mu \frac{(-i)}{\hat{p} - \hat{l} + m} \gamma_\nu \frac{\delta_{\mu\nu}}{l^2} . \tag{2.10}$$

Используя свойства  $\gamma$ -матриц в евклидовом пространстве

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2 \delta_{\mu\nu}, \tag{2.11}$$

перепишем фермионный пропагатор в виде

$$\frac{-i}{\hat{q} + m} = i \frac{\hat{q} - m}{q^2 + m^2} . \tag{2.12}$$

Вводя интегрирование по фейнмановским параметрам, получим

$$\Sigma(p) = -i (e\mu^2 - \omega)^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^2\omega}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\gamma_\mu (\hat{p} - \hat{l} - m) \gamma_\mu}{[l^2(1-x) + (p-l)^2x + m^2x]^2}. \quad (2.13)$$

Перейдем к новой переменной интегрирования

$$l' = l - px; \quad (2.14)$$

имеем

$$\Sigma(p) = -ie^2\mu^{4-2\omega} \int_0^1 dx \int \frac{d^2\omega'}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\gamma_\mu [\hat{p}(1-x) - m - \hat{l}'] \gamma_\mu}{[l'^2 + m^2x + p^2x(1-x)]^2}. \quad (2.15)$$

Член с  $l'$  в числителе обращается при интегрировании в нуль, а два другие члена дают [в силу формулы (Б.16)]

$$\begin{aligned} \Sigma(p) = & -ie^2\mu^{4-2\omega} \int_0^1 dx \gamma_\mu [\hat{p}(1-x) - m] \gamma_\mu \frac{\Gamma(2-\omega)}{(4\pi)^\omega} \times \\ & \times [p^2x(1-x) + m^2x]^{\omega-2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Прежде чем проводить разложение вблизи  $\omega = 2$ , нужно использовать алгебру  $\gamma$ -матриц, которая теперь зависит от размерности. Действительно, из (2.11) находим

$$\gamma_\mu \gamma_\mu = -2\omega, \quad \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\mu = [2 - 2(2-\omega)] \gamma_\rho. \quad (2.17), (2.18)$$

Положив  $\epsilon = 2 - \omega$ , можно теперь написать

$$\begin{aligned} \Sigma(p) = & -2i \frac{e^2}{16\pi^2} \Gamma(\epsilon) \int_0^1 dx \left( \frac{p^2x(1-x) + m^2x}{4\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon} \times \\ & \times [\hat{p}(1-x) + 2m - \epsilon(\hat{p}(1-x) + m)]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

После разложения вблизи  $\epsilon = 0$  находим

$$\begin{aligned} \Sigma(p) = & -\frac{i}{\epsilon} - \frac{e^2}{16\pi^2} (\hat{p} + 4m) + i \frac{e^2}{8\pi^2} \left[ \frac{1}{2} \hat{p}(1+\gamma) + m(1+2\gamma) + \right. \\ & \left. + \int_0^1 dx [\hat{p}(1-x) + 2m] \ln \left( \frac{p^2x(1-x) + m^2x}{4\pi\mu^2} \right) \right] + O(\epsilon), \end{aligned} \quad (2.20)$$

где  $\gamma$  — постоянная Эйлера — Маскерони. Сохраним этот результат на будущее.

Рассмотрим теперь поправку к фотонной линии, называемую также диаграммой поляризации вакуума:

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = \frac{\mu}{p} \rightarrow \text{loop}(l, l+p) \rightarrow \nu = \quad (2.21)$$

$$= - (e\mu^2 - \omega)^2 \int \frac{2\omega l}{(2\pi)^2 \omega} \text{Sp} \left[ \gamma_\mu \frac{1}{\hat{l} + \hat{p} + m} \gamma_\nu \frac{1}{\hat{l} + m} \right], \quad (2.22)$$

где знак минус взят из-за фермионной петли, а след берется по спинорным индексам, т.е. от произведения  $\gamma$ -матриц. Это выражение переписывается в виде

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\mu\nu}(p) = & - (e\mu^2 - \omega)^2 \int \frac{d^2\omega l}{(2\pi)^2 \omega} \frac{1}{[l^2 + m^2][p+l]^2 + m^2} \times \\
 & \times \text{Sp}[\gamma_\mu(\hat{p} + \hat{l} - m)\gamma_\nu(\hat{l} - m)]. \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

Вводя фейнмановский параметр и новый импульс в петле

$$l' = l + px, \quad (2.24)$$

получаем

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\mu\nu}(p) = & - (e\mu^2 - \omega)^2 \int_0^1 dx \\
 & \int \frac{d^2\omega l'}{(2\pi)^2 \omega} \frac{\text{Sp}[\gamma_\mu(\hat{l}' + \hat{p}(1-x) - m)\gamma_\nu(\hat{l}' - \hat{p}x - m)]}{[l'^2 + m^2 + p^2x(1-x)]^2}. \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

Как обычно, члены, нечетные по  $l'$ , выпадают при интегрировании по петле. Если в  $2\omega$  измерениях рассматривать  $\gamma$ -матрицы как  $2^\omega \times 2^\omega$  мерные, то будем иметь следующие формулы для следов:

$$\text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = -2^\omega \delta_{\mu\nu}, \quad (2.26)$$

$$\text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma) = 2^\omega (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\rho\nu} - \delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma}). \quad (2.27)$$

Поэтому след, входящий в числитель выражения (2.25), мы переписываем в виде

$$[l'_\rho l'_\sigma - p_\rho p_\sigma x(1-x)] \text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma) + m^2 \text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu), \quad (2.28)$$

где мы воспользовались тем, что след нечетного числа матриц равен нулю. Пользуясь формулами (2.26) и (2.27), приходим к выражению для следа (2.28)

$$2\omega \{ 2l'_\mu l'_\nu - 2x(1-x)(p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu} p^2) - \delta_{\mu\nu} [l'^2 + m^2 + p^2 x(1-x)] \}, \quad (2.29)$$

причем мы добавили и вычли величину  $\delta_{\mu\nu} p^2 x(1-x)$ . Собирая все результаты, получаем

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(p) = & - (e_\mu^2 - \omega)^2 2\omega \int_0^1 dx \int \frac{d^2 \omega l}{(2\pi)^2 \omega} \left\{ \frac{2l'_\mu l'_\nu}{[l^2 + m^2 + p^2 x(1-x)]^2} - \right. \\ & \left. - \frac{\delta_{\mu\nu}}{[l^2 + m^2 + p^2 x(1-x)]} - \frac{2x(1-x)(p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu} p^2)}{[l^2 + m^2 + p^2 x(1-x)]^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Интегрирование по импульсу в петле с использованием формул (Б.16) и (Б.18) приводит к тому, что первые два члена взаимно уничтожаются, и мы получаем

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = \frac{e^2}{2\pi^2} \Gamma(\epsilon) (p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu} p^2) \int_0^1 dx x(1-x) \left( \frac{m^2 + p^2 x(1-x)}{2\pi\mu^2} \right)^{-\epsilon}. \quad (2.31)$$

После разложения вблизи  $\epsilon = 0$  приходим к выражению

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_{\mu\nu}(p) = & \frac{e^2}{2\pi^2} (p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu} p^2) \left[ \frac{1}{6\epsilon} - \frac{1}{6} \gamma - \int_0^1 dx x(1-x) \times \right. \\ & \left. \times \ln \left( \frac{m^2 + p^2 x(1-x)}{2\pi\mu^2} \right) \right] + O(\epsilon), \end{aligned} \quad (2.32)$$

причем мы использовали значение интеграла

$$\int_0^1 dx x(1-x) = \frac{1}{6}. \quad (2.33)$$



Последняя однопетлевая диаграмма представляет собой поправку к вершине

$$\Gamma_\rho(p, q) = \frac{p+l}{p} \overbrace{\quad}^{\rho} \frac{q+l}{q} = \quad (2.34)$$

$$= -i (e\mu^2 - \omega)^3 \int \frac{d^2 \omega}{(2\pi)^2 \omega} \gamma_\tau \frac{1}{\hat{p} + \hat{l} + m} \gamma_\rho \frac{1}{\hat{l} + \hat{q} + m} \gamma_\sigma \times \frac{\delta_{\tau\sigma}}{l^2} \quad (2.35)$$

Она сложнее двух предыдущих диаграмм. Введем два фейнмановских параметра и перепишем (2.35) в виде

$$\Gamma_\rho(p, q) = -2i (e\mu^2 - \omega)^3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^2 \omega}{(2\pi)^2 \omega} \times \gamma_\sigma (\hat{p} + \hat{l} - m) \gamma_\rho (\hat{l} + \hat{q} - m) \gamma_\sigma [l^2 + m^2(x+y) + 2l \cdot (px + qy) + p^2x + q^2y]^{-3} \quad (2.36)$$

После перехода к новой переменной интегрирования

$$l' = l + px + qy \quad (2.37)$$

выражение (2.36) принимает вид

$$\Gamma_\rho(p, q) = -2i (e\mu^2 - \omega)^3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^2 \omega}{(2\pi)^2 \omega} \times \frac{\gamma_\sigma [\hat{l}' - \hat{q}y + \hat{p}(1-x) - m] \gamma_\rho [\hat{l}' - \hat{p}x + \hat{q}(1-y) - m] \gamma_\sigma}{[l'^2 + m^2(x+y) + p^2x(1-x) + q^2y(1-y) - 2p \cdot qxy]^3} \quad (2.38)$$

Только квадратичная по  $l$  часть числителя приводит к расходящемуся интегрированию по петле. Если написать

$$\Gamma_\rho(p, q) = \Gamma_\rho^{(1)}(p, q) + \Gamma_\rho^{(2)}(p, q), \quad (2.39)$$

где  $\Gamma^{(1)}$  содержит только часть числителя, квадратичную по  $l$ , то, пользуясь формулой (Б.18), получим для расходящейся части

$$\Gamma_{\rho}^{(1)}(p, q) = -i \frac{(e\mu^2 - \omega)^3}{(4\pi)\omega} \Gamma(2 - \omega) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \times \\ \times \frac{1/2 \gamma_{\sigma} \gamma_{\tau} \gamma_{\rho} \gamma_{\tau} \gamma_{\sigma}}{[m^2(x+y) + p^2x(1-x) + q^2y(1-y) - 2p \cdot qxy]^{2-\omega}}, \quad (2.40)$$

а пользуясь формулой (Б.16), найдем

$$\Gamma_{\rho}^{(2)}(p, q) = -i \frac{(e\mu^2 - \omega)^3}{(4\pi)\omega} \Gamma(3 - \omega) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \times \\ \times \frac{\gamma_{\sigma} [\hat{p}(1-x) - \hat{q}y - m] \gamma_{\rho} [\hat{q}(1-y) - \hat{p}x - m] \gamma_{\sigma}}{[m^2(x+y) + p^2x(1-x) + q^2y(1-y) - 2p \cdot qxy]^{3-\omega}}. \quad (2.41)$$

В последнем выражении мы можем безбоязненно положить  $\omega = 2$ , так как интеграл сходится; в результате получим

$$\Gamma_{\rho}^{(2)}(p, q) = -i (e\mu^2 - \omega) \frac{e^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \times \\ \times \frac{\gamma_{\sigma} [\hat{p}(1-x) - \hat{q}y - m] \gamma_{\rho} [\hat{q}(1-y) - \hat{p}x - m] \gamma_{\sigma}}{m^2(x+y) + p^2x(1-x) + q^2y(1-y) - 2p \cdot qxy}. \quad (2.42)$$

К этому выражению мы вернемся позже. Полезное тождество

$$\gamma_{\sigma} \gamma_{\alpha} \gamma_{\rho} \gamma_{\beta} \gamma_{\sigma} = 2\gamma_{\beta} \gamma_{\rho} \gamma_{\alpha} - 2(2 - \omega) \gamma_{\alpha} \gamma_{\rho} \gamma_{\beta} \quad (2.43)$$

совместно с формулой (2.18) позволяет переписать (2.40) в виде

$$\Gamma^{(1)}(p, q) = -i e\mu^{\epsilon} \gamma_{\rho} \cdot \frac{e^2}{8\pi^2} \Gamma(\epsilon)(1-\epsilon)^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \times \\ \times \left( \frac{m^2(x+y) + p^2x(1-x) + q^2y(1-y) - 2p \cdot qxy}{4\pi\mu^3} \right)^{-\epsilon}$$

$$\begin{aligned}
&= -ie\mu^\epsilon \gamma_\rho \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ \frac{1}{\epsilon} - \gamma - 1 - 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \times \right. \\
&\times \ln \left[ \frac{m^2(x+y) + p^2x(1-x) + q^2y(1-y) - 2p \cdot qxy}{4\pi\mu^2} \right] \quad (2.45)
\end{aligned}$$

Мы еще вернемся к этим выражениям, так как они содержат много интересной физики. Чтобы должным образом их проанализировать, нам придется совершить продолжение в пространство Минковского и вычислить полученные выражения на фермионной массовой поверхности. Мы обнаружим, что они инфракрасно расходятся (все, кроме  $\Pi_{\mu\nu}$ ), и рассмотрим вопрос о том, как обойти эту трудность. Но пока что сосредоточимся на структуре теории поля. Вычисление однопетлевых диаграмм позволяет выяснить необходимую для перенормировки КЭД структуру контрчленов.

Можно показать, что число примитивно расходящихся диаграмм в КЭД конечно (гл. 5). Как мы уже отмечали, для перенормируемости необходимо, чтобы вклад диаграммы рассеяния света на свете был конечным в ультрафиолетовой области. Предположим, что это действительно так (см. задачу).

Исходный лагранжиан в фейнмановской калибровке имел вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{кп}} = & \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\mu)^2 + \bar{\Psi} \hat{\partial} \Psi + \\
& + im\bar{\Psi}\Psi + ie\mu^{2-\omega} \bar{\Psi} \hat{A} \Psi. \quad (2.46)
\end{aligned}$$

Попробуем записать лагранжиан контрчленов в виде

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{контр}} = & K_2 \bar{\Psi} \hat{\partial} \Psi + imK_m \bar{\Psi}\Psi + ie\mu^{2-\omega} K_1 \bar{\Psi} \hat{A} \Psi + \frac{1}{4} K_3 F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \\
& + (K_\alpha/2) (\partial_\mu A_\mu)^2. \quad (2.47)
\end{aligned}$$

Тогда перенормированный лагранжиан

$$\mathcal{L}_{\text{пер}} = \mathcal{L}_{\text{кп}} + \mathcal{L}_{\text{контр}} \quad (2.48)$$

можно выразить через голые величины

$$\Psi_0 = (1 + K_2)^{1/2} \Psi \equiv Z^{1/2} \Psi, \quad (2.49)$$

$$A_\mu^0 = (1 + K_3)^{1/2} A_\mu \equiv Z^{1/2} A_\mu, \quad (2.50)$$

$$e_0 = e\mu^{2-\omega} \frac{1 + K_1}{(1 + K_2)(1 + K_3)^{1/2}} \equiv e\mu^{2-\omega} \frac{Z_1}{Z_2 Z_3^{1/2}}, \quad (2.51)$$

$$m_0 = m(1 + K_m)/(1 + K_2) \equiv mZ_m/Z_2, \quad (2.52)$$

$$\alpha_0^{-1} = (1 + K_\alpha)/(1 + K_3) \equiv Z_\alpha/Z_3 \quad (2.53)$$

в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{пер}} = & \bar{\Psi}_0 \hat{\partial} \Psi_0 + im_0 \bar{\Psi}_0 \Psi_0 + e_0 \bar{\Psi}_0 \hat{A}_0 \Psi_0 + \frac{1}{4} (\partial_\mu A_{\nu 0} - \partial_\nu A_{\mu 0})^2 + \\ & + \frac{1}{2\alpha_0} (\partial \cdot A_0)^2 = Z_2 \bar{\Psi} \hat{\partial} \Psi + imZ_m \bar{\Psi} \Psi + eZ_1 \bar{\Psi} \hat{A} \Psi + \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$+ \frac{Z_3}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2} Z_\alpha (\partial \cdot A)^2, \quad (2.55)$$

где мы ввели дайсоновские множители  $Z$ . Такая форма записи показывает, что калибровочная инвариантность лагранжиана  $\mathcal{L}_{\text{кп}}$  сохранится и в  $\mathcal{L}^{\text{пер}}$ , если положить  $Z_1 = Z_2$ , с тем чтобы сохранить структуру ковариантной производной, которая, очевидно, имеет в  $\mathcal{L}^{\text{пер}}$  вид

$$\mathcal{D}_\mu^{\text{пер}} = \partial_\mu + ie \frac{Z_1}{Z_2} A_\mu. \quad (2.56)$$

Однако отсюда еще не следует, что  $Z_1 = Z_2$  (хотя так и окажется!), потому что мы нарушили калибровочную инвариантность нашего лагранжиана, включив член, фиксирующий калибровку, так что множители  $Z$  стали зависеть от калибровки.

Контрчлены можно найти путем однопетлевых вычислений. Во-первых, вычисление поправки к фермионной линии

$$\Sigma(p) = -i \frac{e^2}{16\pi^2} (p + 4m) \frac{1}{\epsilon} + \text{Конечные члены} \quad (2.57)$$

приводит к контрчленам

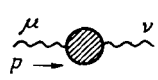
$$K_2 = -\frac{e^2}{16\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + F_2(\epsilon, m/\mu) \right), \quad (2.58)$$

$$K_m = -\frac{e^2}{4\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + F_m(\epsilon, m/\mu) \right). \quad (2.59)$$

где  $F_2$  и  $F_m$  — произвольные конечные части, аналитичные при  $\epsilon \rightarrow 0$  и зависящие только от  $m/\mu$ . Во-вторых, поправка к фотонной линии

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = (p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu} p^2) \left( \frac{e^2}{12\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \text{Конечная часть} \right), \quad (2.60)$$

приводит к новому пропагатору



$$= \frac{\delta_{\mu\nu}}{p^2} + \frac{\delta_{\mu\rho}}{p^2} \Pi_{\rho\sigma} \frac{\delta_{\sigma\nu}}{p^2} + \dots = \quad (2.61)$$

$$= \frac{\delta_{\mu\nu}}{p^2} \left( 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \right) + \frac{p_\mu p_\nu}{p^4} \frac{e^2}{12\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \dots, \quad (2.62)$$

так что

$$K_3 = - \frac{e^2}{12\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + F_3 \right), \quad (2.63)$$

где  $F_3$  — произвольная безразмерная функция. Продольная часть пропагатора дает

$$K_\alpha = \frac{e^2}{12\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + F_\alpha \right), \quad (2.64)$$

что, конечно, равносильно перенормировке величины  $\alpha$ . Заметим, что в калибровке Ландау, где  $\alpha = 0$ , поправка к пропагатору калибровочного поля содержит тот же самый оператор проектирования, что и в голом пропагаторе, и потому  $\alpha$  не изменяется из-за поправок, но это верно только в калибровке Ландау.

Наконец, поправка к вершине

$$\Gamma_\rho(p, q) = i e \mu^\epsilon \gamma_\rho \left( \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \text{Конечная часть} \right) \quad (2.65)$$

приводит к выражению

$$K_1 = - \frac{e^2}{16\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + F_1 \right), \quad (2.66)$$

где  $F_1$  — конечная часть контрчлена. Итак, суммируя все результаты, имеем

$$Z_1 = 1 - \frac{e^2}{16\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + F_1 \right) + O(e^4), \quad (2.67)$$

$$Z_2 = 1 - \frac{e^2}{16\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + F_2 \right) + \dots, \quad (2.68)$$

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + F_3 \right) + \dots, \quad (2.69)$$

$$Z_m = 1 - \frac{e^2}{4\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + F_m \right) + \dots, \quad (2.70)$$

$$Z_\alpha = 1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} + F_\alpha \right). \quad (2.71)$$

Мы видим, что предполагаемое соотношение  $Z_1 = Z_2$  в данном порядке теории возмущений выполняется с точностью до конечной части контрчленов. Поэтому на основании формулы (2.51) мы можем записать голый заряд в виде

$$e_0 = e\mu^\epsilon \left[ 1 + \frac{e^2}{24\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \text{Конечные части} + O(e^3) \right]. \quad (2.72)$$

Таким образом, если игнорировать конечную часть контрчленов, приняв независимый от масс рецепт перенормировки, то мы можем найти из этого соотношения, как изменяется калибровочная константа связи в зависимости от масштаба [гл. 3, формула (6.13)]:

$$\mu \frac{de}{d\mu} = \frac{e^3}{12\pi^2}. \quad (2.73)$$

Знак здесь такой же, как и в скалярной теории. Решение этого уравнения имеет вид

$$\frac{1}{e^2(\mu)} - \frac{1}{e^2(\mu_0)} = - \frac{1}{6\pi^2} \ln(\mu/\mu_0), \quad (2.74)$$

где  $\mu_0$  — произвольный масштаб. В иной форме, которая, пожалуй, более содержательна, она записывается так:

$$e^2(\mu) = \frac{e^2(\mu_0)}{1 - \frac{e^2(\mu_0)}{6\pi^2} \ln(\mu/\mu_0)}, \quad (2.75)$$

причем имеется сингулярность при

$$\mu = \mu_0 \exp[6\pi^2 e^{-2}(\mu_0)] \quad (2.76)$$

(знаменитая сингулярность Ландау). Но задолго до того, как мы достигнем столь больших масштабов, уравнение (2.74), выведенное в рамках теории возмущений, придется исправить с учетом эффектов высших порядков, которыми нельзя пренебрегать при больших масштабах масс из-за знака в правой части. Когда имеется много заряженных фермионов, каждый из них вносит вклад в (2.74) в соответствии со своим зарядом (см. задачу).

То, что электрический заряд становится все слабее и слабее на больших расстояниях (т.е. при малых масштабах), означает, что вполне оправдана интерпретация свободного лагранжиана ( $e = 0$ ) на основе представления о физических фотонах и, например, электронах. Правда, далекодействующий характер электромагнитного поля делает такую интерпретацию не совсем надежной, но факт остается фактом, что электроны и фотоны можно наблюдать в лаборатории в свободном состоянии.

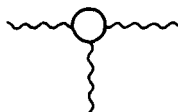
### Задачи

А. Покажите, что логарифмически расходящаяся, на первый взгляд, ящичная диаграмма рассеяния света на свете на самом деле сходится.



на

Б. Покажите прямым вычислением, что диаграммы



обращаются в нуль.

В. Найдите зависимость  $e$  от  $\mu$  в низшем порядке, если имеется  $3n_u$  кварков с зарядом  $2/3$ ,  $3n_d$  кварков с зарядом  $-1/3$  и  $n_l$  лептонов с зарядом  $-1$ . Предположите, что  $e^2(\mu_0)/4\pi = 1/137$  при  $\mu_0 =$

= 1 МэВ, и найдите положение сингулярности Ландау в случае, когда включены известные заряженные фермионы. Сколько сортов фермионов нужно для того, чтобы особая точка Ландау соответствовала планковской массе?

\*Г. Рассмотрите электродинамику (заряженного) скалярного поля. Выведите фейнмановские правила и вычислите поляризацию вакуума от скалярной петли. Сравните результат с тем, который уже получен для фермионной петли.

\*Д. Вычислите контрчлены  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_m, Z_\alpha$  в произвольной ковариантной калибровке, т.е. считайте при вычислениях величину  $\alpha$  произвольной. Покажите, что хотя контрчлены  $z$  зависят от калибровки (от  $\alpha$ ),  $\beta$ -функция от нее не зависит.

### § 3. КЭД. тождества Уорда

Вследствие локальной калибровочной инвариантности КЭД не все функции Грина, порождаемые функционалом

$$e^{-Z[J_\mu, \bar{\chi}, \chi]} = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S_{\text{эфф}} - \langle J_\mu A_\mu + i\bar{\chi}\psi + i\bar{\psi}\chi \rangle}, \quad (3.1)$$

независимы. В этом выражении

$$S_{\text{эфф}} = \int d^4x \left[ \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2\alpha} (\partial \cdot A)^2 + \bar{\Psi}(\partial + i\hat{e}\hat{A})\psi + im\bar{\psi}\psi \right] \quad (3.2)$$

и  $J_\mu, \chi, \bar{\chi}$  — источники, причем последние два — грассманы. Производящий функционал (3.1) не инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\delta A_\mu = \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda(x), \quad \delta \Psi = -i \Lambda(x) \Psi(x), \quad \delta \bar{\Psi} = i \Lambda(x) \bar{\Psi}(x), \quad (3.3)$$

где  $\Lambda(x)$  — произвольная функция. Это объясняется наличием в  $S_{\text{эфф}}$  члена, фиксирующего калибровку, и источников. Мы выведем в этом параграфе систему функциональных уравнений связи для  $Z$ , из которых получим соотношения между функциями Грина, называемые тождествами Уорда.

Метод, который мы намереваемся использовать, легко обобщается на более сложный случай янг-милловских теорий; он основан на работе Бекки, Руэ и Сторы (БРС) [1]. Первый шаг заключается в том, чтобы, пренебрегая на время источниками, восстановить определенный тип ин-



вариантности даже при наличии члена, фиксирующего калибровку. Это достигается восстановлением лагранжиана духов, что в данном абелевом случае равносильно всего лишь переопределению (бесконечной) постоянной нормировки  $N$ . Новое эффективное действие дается выражением

$$S'_{\text{эфф}} = \int d^4x \left[ \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \bar{\Psi}(\hat{\partial} + ie\hat{A})\Psi + im\bar{\Psi}\Psi + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\alpha} (\partial \cdot A)^2 + i\partial_\mu \eta^* \partial_\mu \eta \right], \quad (3.4)$$

где  $\eta$  и  $\eta^*$  — комплексные грассмановы поля. Теперь действие  $S'_{\text{эфф}}$  инвариантно относительно специального калибровочного преобразования

$$\delta A_\mu = \frac{1}{e} \partial_\mu (\zeta^* \eta + \zeta \eta^*), \quad (3.5)$$

$$\delta \Psi = -i(\zeta^* \eta + \zeta \eta^*) \Psi, \quad \delta \bar{\Psi} = i\bar{\Psi}(\zeta^* \eta + \zeta \eta^*), \quad (3.6)$$

$$\delta \eta = -\frac{i}{\alpha e} (\partial \cdot A) \zeta, \quad \delta \eta^* = \frac{i}{\alpha e} (\partial \cdot A) \zeta^*, \quad (3.7)$$

где  $\zeta$  и  $\zeta^*$  — комплексные грассмановы переменные, не зависящие от  $x$ . В результате таких преобразований мы получаем выражение

$$\delta S'_{\text{эфф}} = \frac{1}{e} \int d^4x \left[ \frac{1}{\alpha} (\partial \cdot A) \partial^2 (\zeta^* \eta + \zeta \eta^*) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\alpha} (\partial \cdot A) \partial^2 \zeta^* \eta - \frac{1}{\alpha} (\partial \cdot A) \partial^2 \zeta \eta^* \right], \quad (3.8)$$

если проинтегрировать по частям вариацию последнего члена в формуле (3.4). Выше мы использовали следующее правило для двух грассмановых чисел  $\omega$  и  $\chi$ :

$$(\omega \chi)^* = \omega^* \chi^*, \quad (3.9)$$

так что произведение  $\omega \chi$  действительно, если действительно  $\omega$  и  $\chi$ .

Будем исходить теперь из нового производящего функционала

$$e^{-Z[J_\mu, \chi, \bar{\chi}, \sigma, \sigma^*]} \equiv \\ \equiv N' \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\eta^* \mathcal{D}\eta e^{-S'_{\text{эфф}} - \langle J \cdot A + i\bar{\Psi}\chi + \bar{\chi}\Psi + \eta^*\sigma + \eta\sigma^* \rangle}, \quad (3.10)$$

где  $\sigma$  и  $\sigma^*$  — комплексные гассмановы источники для полей-духов. Сместим в этом выражении поля с помощью преобразования БРС (3.5) — (3.7): поскольку действие  $S'_{\text{эфф}}$  инвариантно относительно этого преобразования, а якобиан преобразования БРС равен единице (см. задачу), при этом изменятся только члены с источниками. Сравнивая два способа записи производящего функционала (3.10), легко находим, что

$$e^{\sigma Z} = N' \int \mathcal{D}A_\mu \dots \mathcal{D}\eta \times e^{-S'_{\text{эфф}}} + \langle J \cdot A + \dots \rangle - \langle J \cdot \delta A + i\chi\delta\psi + i\delta\psi\chi + \delta\eta^*\sigma + \delta\eta\sigma^* \rangle, \quad (3.11)$$

где вариации даются выражениями (3.5) — (3.7). Заметим, что если ограничиться преобразованиями БРС, для которых  $\zeta$  — действительная величина, т.е.

$$\zeta^* = \zeta, \quad (3.12)$$

то можно без труда разложить экспоненту, так как  $\zeta^2 = 0$ . В результате

$$0 = \int \mathcal{D}A_\mu \dots \mathcal{D}\eta e^{-S'_{\text{эфф}}} + \langle J \cdot A + \dots \rangle \left[ \langle J_\mu \partial_\mu \frac{(\eta + \eta^*)}{e} - \bar{\chi}(\eta + \eta^*)\Psi + \bar{\Psi}(\eta + \eta^*)\chi + \frac{i}{\alpha e} (\partial \cdot A)\sigma - \frac{i}{\alpha e} (\partial \cdot A)\sigma^* \rangle \right]. \quad (3.13)$$

Это и есть нужное нам соотношение, хотя оно и получено в несколько громоздкой форме. Но если мы введем производящий функционал для одночастично неприводимых диаграмм

$$\Gamma[A_{\mu\kappa\lambda}, \Psi_{\kappa\lambda}, \bar{\Psi}_{\kappa\lambda}, \eta_{\kappa\lambda}, \eta^*_{\kappa\lambda}] \equiv Z[J_\mu, \chi, \bar{\chi}, \sigma, \sigma^*] - \langle J \cdot A_{\kappa\lambda} + i\bar{\chi}\Psi_{\kappa\lambda} + i\bar{\Psi}_{\kappa\lambda}\chi + \eta^*_{\kappa\lambda}\sigma + \eta_{\kappa\lambda}\sigma^* \rangle, \quad (3.14)$$

где  $A_{\mu\kappa\lambda}$  и т.д. — классические источники, то

$$J_\mu = - \frac{\delta \Gamma}{\delta A_{\mu\kappa\lambda}} \quad \text{и т.д.} \quad (3.15)$$

Таким образом, если выразить все через  $\Gamma$ , то можно сразу же переписать (3.13) в виде

$$\begin{aligned}
& < - \frac{1}{e} \frac{\delta \Gamma}{\delta A_{\mu\kappa\lambda}} \partial_{\mu} (\eta_{\kappa\lambda} + \eta_{\kappa\lambda}^*) + i \frac{\delta \Gamma}{\delta \Psi_{\kappa\lambda}} (\eta_{\kappa\lambda} + \eta_{\kappa\lambda}^*) \Psi_{\kappa\lambda} - \\
& - i \bar{\Psi}_{\kappa\lambda} (\eta_{\kappa\lambda} + \eta_{\kappa\lambda}^*) \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\Psi}_{\kappa\lambda}} + \frac{i}{\alpha e} (\partial \cdot A_{\kappa\lambda}) \frac{\delta \Gamma}{\delta \Gamma_{\kappa\lambda}} - \\
& - \frac{i}{\alpha e} (\partial \cdot A_{\kappa\lambda}) \frac{\delta \Gamma}{\delta \eta_{\kappa\lambda}^*} > = 0.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Это самая простая для анализа форма тождеств Уорда в КЭД. Применим теперь эту формулу к простейшим случаям. Зависимость  $\Gamma$  от  $\eta_{\kappa\lambda}$  и  $\eta_{\kappa\lambda}^*$  очень проста, так как эти поля не взаимодействуют:

$$\Gamma = i \int d^4x d^4y \eta_{\kappa\lambda}^*(x) \Delta^{-1}(x-y) \eta_{\kappa\lambda}(y) + \Gamma' [A_{\mu\kappa\lambda}, \Psi_{\kappa\lambda}, \bar{\Psi}_{\kappa\lambda}], \tag{3.17}$$

где  $\Gamma'$  не зависит от  $\eta_{\kappa\lambda}$  и  $\eta_{\kappa\lambda}^*$ , а  $\Delta^{-1}$  — обратный свободный безмассовый пропагатор:

$$\Delta^{-1}(x-y) = -\partial^2 \delta(x-y). \tag{3.18}$$

Выражение для  $\Gamma'$  более сложно и начинается с членов

$$\begin{aligned}
\Gamma' = & \int d^4x d^4y \left[ \frac{1}{2} A_{\mu\kappa\lambda}(x) \Delta_{\mu\nu}^{-1} A_{\nu\kappa\lambda}(y) + \bar{\Psi}_{\kappa\lambda}(x) S^{-1}(x-y) \Psi_{\kappa\lambda}(y) \right] + \\
& + \int d^4x d^4y d^4z \bar{\Psi}_{\kappa\lambda}(x) A_{\rho\kappa\lambda}(y) \Gamma_{\rho}(x, y, z) \Psi_{\kappa\lambda}(z) + \dots,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

где  $\Delta_{\mu\nu}^{-1}$  — полный обратный фотонный пропагатор,  $S^{-1}$  — полный обратный фермионный пропагатор, а  $\Gamma_{\rho}$  — трехточечная функция. Конечно,  $\Gamma'$  содержит много других членов, которые соответствуют индуцированным взаимодействиям, отсутствующим в исходном лагранжиане.

Начнем с того, что применим соотношение (3.16) к (3.17) и (3.19), удерживая только члены, содержащие  $A_{\mu}$  и  $\eta + \eta^*$ . Результат (в импульсном пространстве) оказывается таким:

$$k_{\mu} \Delta_{\mu\nu}^{-1}(k) + \frac{1}{\alpha} k_{\mu} k^2 = 0. \tag{3.20}$$

Если написать

$$\Delta_{\mu\nu}^{-1} = A_{\mu\nu} + B k_{\mu} k_{\nu}, \tag{3.21}$$

то тождество Уорда (3.20) приводится к виду

$$A + Bk^2 + \frac{1}{\alpha} k^2 = 0. \quad (3.22)$$

Например, в фейнмановской калибровке  $\alpha = 1$  это тождество означает, что

$$\Delta_{\mu\nu}^{-1} = -\delta_{\mu\nu}k^2 + (\delta_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu)F(k^2), \quad (3.23)$$

где  $F(k^2)$  имеет порядок по крайней мере  $e^2$ . Мы уже проверили этот результат во втором порядке по  $e$ .

Далее, члены, содержащие  $\Psi$ ,  $\Psi$ ,  $\eta$  (или любое  $\eta^*$ ), приводят к другому тождеству

$$\frac{\partial}{\partial y_\mu} \Gamma_\mu(x, y, z) - iS^{-1}(x-z)(x-y) + iS^{-1}(x-z)\delta(x-y) = 0. \quad (3.24)$$

То же самое уравнение можно записать в импульсном пространстве:

$$(p-q)_\mu \tilde{\Gamma}_\mu(p, p-q, q) = S^{-1}(p) - S^{-1}(q). \quad (3.25)$$

Это первоначальная форма тождеств Уорда. Нетрудно проверить это соотношение в теории возмущений:

$$\Gamma_\mu = i\gamma_\mu + \dots, \quad (3.26)$$

$$S^{-1}(p) = i(\hat{p} + m) + \dots. \quad (3.27)$$

Более того, так как  $S^{-1}(p)$  мультипликативно перенормируется множителем  $Z_2$ , а  $\Gamma_\mu$  — множителем  $Z_1$ , из данного тождества Уорда следует, что

$$Z_1 = Z_2, \quad (3.28)$$

как мы и говорили ранее. Было бы глупо применять такую процедуру вычитаний, которая нарушала бы равенство (3.25). Поэтому конечные части  $Z_1$  и  $Z_2$  всегда выбираются равными — прямыми вычислениями мы убедились в том, что полюсные части равны. Заметим попутно, что если написать

$$\Gamma_\mu(p, p-q, q) = C_1 \gamma_\mu + C_2 \sigma_{\mu\nu}(p-q)_\nu, \quad (3.29)$$

то член магнитного момента  $C_2$  выпадает из (3.25) в силу антисимметрии.

Уже не раз отмечалось, что теории с безмассовыми частицами страдают инфракрасными расходимостями, и КЭД из-за безмассовости фотона не является исключением. Один из способов избежать этих расходимостей – ввести малую массу фотона. Заметим, что в случае КЭД это не нарушает тождеств Уорда, так как можно сохранить инвариантность БРС даже при наличии фотонного массового члена, если считать, что дух приобрел ту же массу. Дело в том, что массовый член меняется как

$$A_\mu A_\mu = \lambda A_\mu \partial_\mu (\zeta^* \eta + \zeta \eta^*), \quad (3.30)$$

$$\delta \frac{1}{2} A_\mu A_\mu = -\lambda \delta \cdot A (\zeta^* \eta + \zeta \eta^*) + \text{Поверхностный член}, \quad (3.31)$$

В фейнмановской калибровке  $\alpha = 1$  эта вариация оказывается равной

$$-\lambda (\delta \eta^* + \eta^* \delta \eta) = -\lambda \delta (\eta^* \eta). \quad (3.32)$$

Это означает, что БРС-инвариантность может быть сохранена ценой появления массивной духовной частицы, которая ни с чем не взаимодействует! Такое дополнительное преимущество, по-видимому, не обобщается на случай неабелевых теорий, о чем будет сказано ниже.

### Задачи

А. Покажите, что якобиан преобразования БРС равен единице.

Б. Пусть задан функционал

$$e^{-Z[J]} = \int \mathcal{D}\varphi \quad e^{-S[\varphi]} - \langle J\varphi \rangle.$$

Покажите, что

$$\int \mathcal{D}\varphi \quad e^{-S[\varphi]} - \langle J\varphi \rangle \langle J\varphi \rangle = -\langle \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi_{\text{кп}}} \varphi_{\text{кп}} \rangle,$$

где  $\Gamma[\varphi_{\text{кп}}] = Z[J] - \langle J\varphi_{\text{кп}} \rangle$ .

\*\*В. Выведите тождества Уорда для скалярной электродинамики (комплексное скалярное поле, взаимодействующее с фотоном) в фейнмановской калибровке.

\*Г. Выведите тождества Уорда для КЭД в аксиальной калибровке.

\*\*Д. Выведите тождества Уорда для КЭД в калибровке

$$\partial_\mu A_\mu + a A_\mu A_\mu = 0.$$

## § 4. КЭД, применения

Прежде чем переходить к практическому применению результатов, полученных нами для КЭД, мы должны продолжить функции Грина в пространство Минковского и выбрать рецепт перенормировки.

Фотонный пропагатор в евклидовом пространстве дается выражением (чтобы избежать путаницы, мы восстановили черту над евклидовыми импульсами)

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}(\bar{p}) = & \frac{\delta_{\mu\nu}}{\bar{p}^2} \left[ 1 + \frac{e^2}{2\pi^2} \left( -\frac{1}{6} \gamma - \int_0^1 dx \, x(1-x) \ln \frac{m^2 + \bar{p}^2 x(1-x)}{2\pi\mu^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{6} F_3 \right) \right] - \frac{\bar{p}_\mu \bar{p}_\nu}{\bar{p}^4} \frac{e^2}{2\pi^2} \left[ -\frac{1}{6} \gamma - \int_0^1 dx \, x(1-x) \ln \frac{m^2 + \bar{p}^2 x(1-x)}{2\pi\mu^2} \right. \\ & \left. - \frac{1}{6} F_\alpha \right] + O(e^4). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Конечные части контрчленов  $Z_3$  и  $Z_\alpha$  фиксируются требованием, чтобы пропагатор  $\Delta_{\mu\nu}$  при  $\bar{p}^2 \rightarrow 0$  выглядел так же, как исходный пропагатор:

$$\Delta_{\mu\nu}(\bar{p}) = -\frac{\delta_{\mu\nu}}{\bar{p}^2} \Big|_{\bar{p}^2=0} = 0, \quad (4.2)$$

$$\text{так что } F_3 = F_\alpha = -\gamma - \ln \frac{m^2}{2\pi\mu^2}. \quad (4.3)$$

Аналогично в порядке  $O(e^2)$  имеем

$$\begin{aligned} S^{-1}(p) = & ip \left[ 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} \left( \frac{1+\gamma}{2} + \int_0^1 dx (1-x) \ln \frac{\bar{p}^2 x(1-x) + m^2 x}{4\pi\mu^2} + \frac{1}{2} F_2 \right) \right] + \\ & + im \left[ 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} (1 + 2\gamma + 2 \int_0^1 dx \ln \frac{\bar{p}^2 x(1-x) + m^2 x}{4\pi\mu^2} - 2F_m) \right], \end{aligned} \quad (4.4)$$

и может показаться, что подходящая процедура вычитания будет заключаться в продолжении в пространство Минковского, т.е. в замене  $\hat{\bar{p}} \rightarrow -\hat{p}$  и  $\bar{p}^2 \rightarrow -p^2$ , и требовании

$$S^{-1}(p) = i(m_e - \hat{p}) \quad \text{при} \quad p^2 = m_e^2, \quad (4.5)$$

которое фиксирует конечные части

$$F_2 = -\gamma + 2 - \ln m^2/4\pi\mu^2, \quad (4.6)$$

$$F_m = \gamma - 1 + \frac{1}{2} \ln(m^2/4\pi\mu^2). \quad (4.7)$$

Однако такой выбор вычитательной процедуры неоднозначен. Дело в том, что наш рецепт предполагает, что разложение  $\Sigma(p)$  вблизи  $\hat{p} = m$  хорошо определено. Но простые рассуждения показывают, что это не так. Из требования (4.5) следует, что

$$\Sigma(p) = 0 \quad \text{при} \quad \hat{p} = m, \quad (4.8)$$

так что проведем разложение исходного выражения для  $\Sigma(p)$  вблизи  $\hat{p} = m$ . Это легче всего сделать, разложив фермионный пропагатор в (2.10) по степеням  $\hat{p} + m$ :

$$\frac{1}{\hat{p} - \hat{l} + m} = \frac{-1}{\hat{l}} \left[ 1 - \frac{1}{\hat{l}} (p + m) + \dots \right]. \quad (4.9)$$

Мы сразу же видим, что возникшие в этом разложении члены плохо определены. Например, член, линейный по  $\hat{p} + m$ , приводит к интегралу

$$(e\mu^2 - \omega)^2 \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{l^4}, \quad (4.10)$$

который расходится не только на верхнем пределе интегрирования при  $\omega = 2$ , но и на нижнем пределе. Подобного типа расходимость называется инфракрасной расходимостью, и ее надо рассматривать отдельно от ультрафиолетовых расходимостей, с которыми мы имели дело ранее.

Один из способов решить эту проблему заключается в том, чтобы приписать фотону фиктивную массу  $\lambda$  и удерживать ее в процессе вычислений. Тогда инфракрасной расходимости нет и все снова хорошо. Подобная процедура в КЭД дает еще и то преимущество, что она не влияет на калибровочную инвариантность вычислений. Отметим, что инфракрасные расходимости возникают на "массовой поверхности" внешних частиц; величина (4.10) равна  $\partial\Sigma/\partial\hat{p}$  на евклидовой массовой поверхности  $\hat{p} + m = 0$ .

То обстоятельство, что инфракрасные расходимости в КЭД могут быть устранены добавлением массы фотону и возникают на массовой поверхности внешних частиц, указывает на то, что эти расходимости

связаны с наличием дальнедействующих сил, делающих неоднозначным определение асимптотических состояний.

Другой способ устранения инфракрасных расходимостей заключается в использовании размерной регуляризации. В этом случае проводится интегрирование по параметрам в  $2\omega$ -мерном пространстве и затем разложение вблизи  $\omega = 2$ . Инфракрасные (так же как и ультрафиолетовые) расходимости будут возникать как полюса в плоскости размерности. Подробнее об этом ниже.

Остается зафиксировать вершинный контрчлен. Прежде чем сделать это, нам следует переписать вычисленное выше  $\Gamma_\rho(\bar{p}, \bar{q})$  в более подходящей форме. Мы собираемся использовать рецепт, при котором фермионы находятся на своих "массовых поверхностях". Это заставляет нас считать, что  $\Gamma_\rho(\bar{p}, \bar{q})$  помещается между спинорами, для которых справедливы (евклидовы) уравнения движения. Поэтому мы перепишем  $\Gamma_\rho$  в виде

$$\Gamma_\rho(\bar{p}, \bar{q}) = \tilde{\Gamma}_\rho(\bar{p}, \bar{q}) + (\hat{p} + m)A_\rho + B_\rho(\hat{q} + m), \quad (4.11)$$

где  $\tilde{\Gamma}_\rho$  и есть то, что мы ищем, так как члены с  $A$  и  $B$  в силу уравнений движения не будут давать вклада. В процессе сведения к такому виду оказываются полезными тождества Гордона

$$\gamma_\rho \hat{q} = -\bar{q}_\rho - 2i\sigma_{\rho\tau} \bar{q}_\tau = m\gamma_\rho + \gamma_\rho(\hat{q} + m), \quad (4.12)$$

$$\hat{p}\gamma_\rho = \bar{p}_\rho + 2i\sigma_{\rho\tau} \bar{p}_\tau = -m\gamma_\rho + (\hat{p} + m)\gamma_\rho, \quad (4.13)$$

$$\text{где } \sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4i} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]. \quad (4.14)$$

Они легко выводятся, если представить произведение двух  $\gamma$ -матриц в виде полусуммы коммутатора и антикоммутатора. Вооруженные таким образом, мы подготовлены к небольшой порции неприятной "диракологии".

Используя тождества (справедливые только для  $\Gamma_\rho$ )

$$\hat{q}\gamma_\rho \hat{p} = m^2\gamma_\rho - \bar{k}^2\gamma_\rho - 4im\sigma_{\rho\tau} \bar{k}_\tau; \quad \bar{k}_\tau = \bar{q}_\tau \bar{p}_\tau, \quad (4.15)$$

$$\hat{q}\gamma_\rho = -m\gamma_\rho + 4i\sigma_{\rho\tau} \bar{q}_\tau, \quad (4.16)$$

$$\gamma_\rho \hat{p} = -m\gamma_\rho - 4i\sigma_{\rho\tau} \bar{p}_\tau \quad (4.17)$$



и выражение (2.42), можно свести числитель подынтегрального выражения в  $\Gamma^{(2)}$  к виду

$$2m^2\gamma_\rho [(x+y)^2 - 2(1-x-y)] - 2\bar{k}^2(1-x)(1-y)\gamma_\rho + \\ + 8im\sigma_{\rho\tau}\bar{q}_\tau [x - y(y+x)] - 8im\sigma_{\rho\tau}\bar{p}_\tau [y - x(x+y)]. \quad (4.18)$$

Этот результат позволяет разбить вклад от  $\Gamma^{(2)}$  на две части, одна из которых пропорциональна  $\gamma_\rho$ , а другая —  $\sigma_{\rho\tau}$ . Займемся пока что частью, содержащей  $\gamma_\rho$ . Она имеет вид

$$\Gamma_\rho(\bar{p}, \bar{q}) = \Gamma_\rho^{(1)}(\bar{p}, \bar{q}) - ie\mu^\epsilon\gamma_\rho \frac{e^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \times \\ \times \frac{(x+y)^2 - 2(1-x-y) - 2\bar{k}^2(1-x)(1-y)}{m^2(x+y) + \bar{p}^2x(1-x) + \bar{q}^2y(1-y) - 2\bar{p} \cdot \bar{q}xy}. \quad (4.19)$$

Когда мы вычисляем это выражение на массовой поверхности

$$\bar{p}^2 = \bar{q}^2 = -m^2, \quad \bar{k}^2 = 0, \quad (4.20)$$

последний интеграл сводится к

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{[(x+y)^2 - 2(1-x-y)]}{(x-y)^2} \quad (4.21)$$

и мы с огорчением убеждаемся, что он расходится. Это наша старая приятельница — инфракрасная расходимость. Как уже отмечалось выше, можно избавиться от нее, придав фотону фиктивную массу  $\lambda$ , что сводится к замене  $m^2(x+y)$  величиной  $m^2(x+y) + \lambda(1-x-y)$  в знаменателе. Тогда интеграл (4.21) заменяется интегралом

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(x+y)^2 - 2(1-x-y)}{(x+y)^2 m^2 + \lambda(1-x-y)}, \quad (4.22)$$

который прекрасно сходится. Этой инфракрасной расходимости нет в членах, пропорциональных  $\sigma_{\mu\nu}$ , ни в  $\Gamma^{(2)}$ , ни в  $\Gamma^{(1)}$ . Все же она стоит на пути использования рецепта перенормировки на массовой поверхности, записанного здесь в пространстве Минковского,

$$\Gamma_\rho(p, q) = -e\mu^\epsilon\gamma_\rho \quad \text{при} \quad p^2 = q^2 = m^2, \quad (p-q)^2 = 0, \quad (4.23)$$

так как если мы не справимся с расходимостью в (4.21), то это будет означать, что  $F_1$  (инфракрасно) расходится. Заметим, что эту процедуру можно осуществить и в евклидовом пространстве с той разницей, что  $\bar{k}^2 = 0$  будет означать, что  $\bar{p} = \bar{q}$ . Из выражения (4.22) находим

$$F_1 = 1 + \gamma + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[ 2 \ln \frac{m^2(x+y)^2 + \lambda(1-x-y)}{4\pi\mu^2} - \frac{(x+y)^2 - 2(1-x-y)}{(x+y)^2 m^2 - \lambda(1-x-y)} \right]. \quad (4.24)$$

Вычислить эти интегралы представляем читателю.

Как уже отмечали, другой способ регуляризации инфракрасных расходимостей заключается в том, чтобы взять интегралы по параметру, прежде чем переходить к пределу при  $\omega \rightarrow 2$ . Начнем, например, с выражения (2.40) для  $\Gamma_\rho^{(2)}$ . Числитель вычисляется аналогично предыдущему, за исключением того, что в (4.18) появятся поправочные члены, стремящиеся к нулю как  $(\omega - 2)$ . Пренебрегая ими, найдем, что для всех частиц на массовой поверхности

$$\Gamma_\rho^{(2)}(\bar{p}, \bar{q}) = -i \frac{(e\mu^\epsilon)^3}{(4\pi)^\omega} \Gamma(3 - \omega) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \times \\ \times \frac{2m^2 \gamma_\rho [(x+y)^2 - 2(1-x-y)] + 8i m \sigma_{\rho\tau} (\bar{q} - \bar{p})_\tau [x - y(y+x)] + O(\epsilon)}{[m^2(x+y)^2]^{3-\omega}}, \quad (4.25)$$

причем мы использовали симметрию подынтегрального выражения относительно замены  $x \rightarrow y$ , чтобы переписать член с  $\sigma_{\mu\nu}$ . Поскольку нас интересует только бесконечная часть при  $\epsilon \rightarrow 0$ , рассмотрим внимательнее интеграл

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (x+y)^{2(\omega-3)} = \frac{1}{2\omega-5} \left( 1 - \frac{1}{2\omega-4} \right) \rightarrow -\frac{1}{2\epsilon} \quad \text{при } \epsilon \rightarrow 0. \quad (4.26)$$

Таким образом, мы в явной форме показали, что инфракрасная расходимость в  $\Gamma_\rho$  возникает теперь в виде полюса в плоскости размерности точно так же, как и ультрафиолетовая расходимость. Однако в отличие

от последней инфракрасная расходимость возникает только в случае, когда частицы находятся на своих массовых поверхностях и по крайней мере одна из них безмассовая. Далее окажется, что этот полюс, остающийся после регуляризации, в случае величин, представляющих физический интерес, взаимно уничтожится с вкладом других диаграмм, проинтегрированных по  $2\omega$ -мерному фазовому пространству. Однако изложенный нами прием представляет собой изящный расчетный метод и не влияет на калибровочные свойства теории.

Раз уж мы занимаемся вершинной функцией, вычислим вклад члена с  $\sigma_{\mu\nu}\bar{k}_\nu$  в  $\Gamma^{(2)}$ . Так как он и ультрафиолетово, и инфракрасно сходится, то незачем изодраться: положим  $\omega = 2$ . Тогда этот вклад равен

$$\Gamma_{\rho}^{(2)}(\bar{p}, \bar{q}) = \frac{e^3}{2m\pi^2} \sigma_{\rho\tau} (\bar{q} - \bar{p})_{\tau} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{x - y(x+y)}{(x+y)^2} = \quad (4.27)$$

$$= \frac{e^3}{8m\pi^2} \sigma_{\rho\tau} (\bar{q} - \bar{p})_{\tau}. \quad (4.28)$$

Физический смысл этого индуцированного взаимодействия между фотоном и фермионом очевиден, поскольку он вносит в эффективное действие член вида

$$\frac{e}{m} \frac{e^2}{8\pi^2} \bar{\Psi}(\bar{p}) \sigma_{\rho\tau} (\bar{q} - \bar{p})_{\tau} A_{\rho}(\bar{p} - \bar{q}) \Psi(\bar{q}), \quad (4.29)$$

или, в координатном пространстве,

$$\frac{ie}{2m} \frac{e^2}{8\pi^2} \int \bar{\Psi}(\bar{x}) \sigma_{\rho\tau} F_{\rho\tau}(\bar{x}) \Psi(\bar{x}) d^4x. \quad (4.30)$$

Он приводит к поправке к собственному магнитному моменту  $g$  фермиона (в единицах магнетона Бора)

$$g = 2\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right), \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}. \quad (4.31)$$

Мы видим теперь, каким образом теория поля приводит к поправке к дираковскому магнитному моменту фермиона. Отметим, что эта поправка конечна. Дело в том, что индуцированный член взаимодействия (4.30) отсутствует в исходном лагранжиане (его размерность равна 5) и, так как теория перенормируема, все контрчлены входят только в выражения для фундаментальных вершин, а не в индуциро-

ванные новые взаимодействия. Заметим, что мы не доказывали перенормируемости КЭД, но недоверчивый читатель может обратиться к одному из многих превосходных учебников на эту тему.

Оставшаяся часть функционала  $\Gamma_p$  дает также поправку к электромагнитным силам между двумя заряженными фермионами, соответствующую вкладу

$$i(e\mu^5)\bar{\Psi}(\bar{q})\gamma_\mu F[(\bar{q}-\bar{p})^2]A_\mu(\bar{q}-\bar{p})\Psi(\bar{q}). \quad (4.32)$$

Пользуясь нашим рецептом, нетрудно найти  $F(\bar{k}^2)$  с точностью  $O(e^2)$ . Результат в евклидовом пространстве имеет вид (см. задачу)

$$F(k^2) = 1 + \frac{2}{3} \frac{\bar{k}^2}{m^2} \frac{\alpha}{2\pi} \left[ \ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} \right] + O(\alpha^2), \quad k^2 \ll m^2. \quad (4.33)$$

Подчеркнем, что эта поправка зависит от способа, которым мы выбрали  $\alpha$ , т.е. от вычитания (4.23).

Такая конкретная вычитательная процедура была выбрана потому, что она позволяет провести прямое сравнение с экспериментом и найти таким путем численное значение заряда  $e$ . Например, можно сравнить значение  $e$ , определяемое условием (4.23), с нерелятивистским пределом сечения рассеяния электрона кулоновским полем. Это не совсем строго, так как обмениваемый фотон никогда в действительности не находится на своей массовой поверхности, но вследствие малости массы электрона разница невелика.

Поправка (4.33) к вершине снимает вырождение между состояниями  $2S_{1/2}$  и  $2P_{1/2}$  в (релятивистском) атоме водорода. Вычисления показывают, что эта поправка понижает уровень  $2P_{1/2}$  относительно уровня  $2S_{1/2}$  на величину 1010 МГц, тогда как экспериментальное значение лэмбовского сдвига равно 1057,77 МГц. Но, как и во всех правительственных теориях, положение спасают дополнительные поправки. Прежде всего, аномальный магнитный момент также снимает вырождение и вносит дополнительные 68 МГц. Теперь у нас слишком много, но модификация фотонного пропагатора, обязанная поляризации вакуума, вычитает целых 27 МГц, и мы получаем 1052 МГц, что вполне приемлемо при точности  $O(\alpha)$ . На самом деле расчеты с учетом поправок  $O(\alpha^2)$  приводят к идеальному согласию между теорией и экспериментом!

Мы не рассматривали всех приложений КЭД, но, наверное, уже ясно, что, несмотря на все промежуточные шаги, которые потребовались для ее регуляризации, это необычно успешная теория.

### Задачи

**А.** Вычислите часть функции  $\Gamma_\rho$ , пропорциональную  $\gamma_\rho$ , придав фотону малую массу, и найдите выражение для  $F_\nu$  в случае, когда для вершины используется рецепт перенормировки на массовой поверхности.

**Б.** Пользуясь результатами предыдущей задачи, вычислите вершинную поправку к лэмбовскому сдвигу в первом порядке теории возмущений, а затем вычислите вклад поляризации вакуума.

**В.** Вычислите вклад аномального магнитного момента в лэмбовский сдвиг.

### § 5. Янг-миллсовская теория, предварительные замечания

Наконец-то мы переходим к давно обещанным вычислениям по теории возмущений в янг-миллоовских теориях. В частности, мы изучим теорию янг-миллсовских полей во взаимодействии с дираковскими спинорами в евклидовом пространстве.

Эффективный лагранжиан в ковариантной калибровке  $\partial \cdot A^B = 0$  записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{эфф}} = & \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^B F_{\mu\nu}^B + \frac{\frac{1}{2}}{2\alpha} \partial \cdot A^B \partial \cdot A^B + i \partial_\mu \eta^{*B} \partial_\mu \eta^B \\ & - \frac{i}{2} g\mu^2 - \omega_f^{ABC} A_\mu^C \eta^{*A} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \eta^B - \frac{i}{2} g\mu^2 - \omega_f^{ABC} \eta^{*A} \eta^B \partial \cdot A^C + \\ & + \bar{\Psi}(\hat{\partial} + im)\Psi + ig\mu^2 - \omega_f^{AB} \bar{\Psi} \gamma_\mu T_f^B \Psi, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\text{где } F_{\mu\nu}^B = \partial_\mu A_\nu^B - \partial_\nu A_\mu^B - g\mu^2 - \omega_f^{BCD} A_\mu^C A_\nu^D \quad (5.2)$$

Мы опустили групповые индексы у фермионов и сохранили обозначения, соответствующие пространству Минковского (используя  $\bar{\psi}$  вместо  $\psi^\dagger$ ), хотя мы и рассматриваем евклидово пространство; как уже отмечалось выше, это не меняет функций Грина до тех пор, пока мы имеем дело с дираковскими спинорами. Спинорное поле  $\Psi$  преобразуется по  $d_f$ -мерно-

му неприводимому представлению группы  $G$ , а  $(d_f \times d_f)$ -мерные эрмитовы матрицы  $T_f^B$  (число их равно  $N$ ) образуют алгебру Ли группы  $G$ :

$$[T_f^B, T_f^C] = if^{BCD}T_f^D, \quad B, C, D = 1, \dots, N, \quad (5.3)$$

где  $f^{BCD}$  – структурные константы группы  $G$ , а  $N$  – ее размерность.

Принято считать, что если в качестве  $G$  рассматривается восьмимерная унитарная группа  $SU(3)$ , а каждый дираковский фермион преобразуется по ее трехмерному представлению, то такая теория описывает взаимодействие между составными частями ядерной материи – кварками. Фермионам сопоставляются кварки, а восемь обладающих самодействием векторных частиц, называемых глюонами, порождают межкварковые силы. Степени свободы каждого кварка, связанные с группой  $SU(3)$ , называются цветами ("красным", "белым" и "голубым"). В природе существует пять (а может быть, шесть) таких разновидностей кварков, называемых ароматами; они обозначаются символами  $u$  (up),  $d$  (down),  $s$  (strange),  $c$  (charm),  $b$  (bottom) и  $t$  (top) (предполагается, что кварк  $t$  существует, но он еще не открыт). Такая теория межкварковых взаимодействий называется квантовой хромодинамикой (КХД).

Ниже мы будем рассматривать все в общем виде. Фейнмановские правила для теории, описываемой лагранжианом (5.1), были выведены в § 1; они суммированы в приложении В. Отметим неоднозначность, содержащуюся в фейнмановских правилах для духовой части лагранжиана. Он содержит член вида

$$-\frac{1}{2}g_u^2 - \omega_f f^{ABC} \eta^* A^B \partial \cdot A^C, \quad (5.4)$$

пропорциональный калибровочной функции  $\partial \cdot A^C = 0$ . Этот член возникает из детерминанта Фаддеева – Попова, представляющего собой детерминант изменения калибровочного условия, вычисленный при заданном калибровочном условии, т.е. когда  $\partial \cdot A^C = 0$ . Следовательно, член (5.4) можно отбросить из эффективного лагранжиана, и это не повлияет на физические следствия, так как отбрасываемый член включает взаимодействие фиктивной продольной части калибровочного поля. Формальное преимущество такого отбрасывания заключается в том, что остающаяся часть лагранжиана, связанная с духами, становится действительной, поскольку член (5.4) чисто мнимый. Однако вычисления в явной форме (Т. Куго, частное сообщение) показывают, что элементы  $S$ -мат-

рицы при отбрасывании (5.4) меняются во всех случаях, кроме случая калибровки Ландау. Хотя мы этого и не будем использовать, отметим, что пренебрежение указанным членом приводит к новому фейнмановскому правилу для вершины дух — дух — калибровочное поле:

$$\begin{array}{c}
 \rho \\
 \uparrow \\
 \text{A} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{B} \\
 \leftarrow q \quad \leftarrow q \\
 \uparrow \\
 \text{C}
 \end{array}
 \leftrightarrow \frac{1}{2} g \mu^{2-\omega} f^{ABC} (p-q)_\rho$$

Измененное правило

(5.5)

Внимательный читатель, вероятно, уже обратил внимание на то, что безразмерная константа связи  $g$  входит во многие члены лагранжиана (5.1). Из-за калибровочной инвариантности лагранжиана в классической теории в нем содержалась только одна константа связи. Однако наш эффективный лагранжиан содержит члены, нарушающие калибровочную инвариантность, и создается впечатление, что мы не имеем права считать все эти разные константы связи равными друг другу, если только нет причины, по которой квантовые поправки не нарушали бы эквивалентности. Ниже мы увидим, что такая причина есть и она заключена в преобразовании БРС, которое мы уже анализировали для абелевого случая в § 3.

В качестве первого применения вычислим вклад низшего порядка в неабелеву комптоновскую амплитуду, что послужит нам проверкой знаков в фейнмановских правилах. Имеем следующие диаграммы:

(5.6)

Вклад первых двух диаграмм таков:

$$-g^2 \mu^{4-2\omega} (T_f^A T_f^B \gamma_\rho \frac{-i}{\hat{p} + \hat{q} + m} \gamma_\sigma + T_f^B T_f^A \gamma_\sigma \frac{-i}{\hat{p}' - \hat{q} + m} \gamma_\rho) =$$

(5.7)

$$= -i g^2 \mu^{4-2\omega} (T_f^A T_f^B \gamma_\rho \frac{\hat{p} + \hat{q} - m}{(p+q)^2 + m^2} \gamma_\sigma + T_f^B T_f^A \gamma_\sigma \frac{\hat{p}' - \hat{q} - m}{(p'-q)^2 + m^2} \gamma_\rho),$$

(5.8)

а третья диаграмма (в фейнмановской калибровке) дает вклад

$$-g^2 \mu^4 - 2\omega f^{ABC} T_f^C \gamma_\mu \frac{1}{(q+k)^2} [\delta_{\sigma\mu}(-q-2k)_\rho + \delta_{\rho\sigma}(k-q)_\mu + \delta_{\mu\rho}(2q+k)_\sigma]. \quad (5.9)$$

Сумма этих трех диаграмм должна удовлетворять требованию калибровочной инвариантности, которое означает, что в силу нашего калибровочного условия  $\partial \cdot A^B = 0$  продольная часть калибровочных частиц не должна давать вклада. Поэтому мы свертываем выражение с  $q_\rho$  и смотрим, что получится. Вклад в свертку от первых двух диаграмм равен

$$-ig^2 \mu^4 - 2\omega (T_f^A T_f^B \hat{q} \frac{\hat{p} + \hat{q} - m}{(p+q)^2 + m^2} \gamma_\sigma + T_f^B T_f^A \frac{\hat{p}' - \hat{q} - m}{(p' - q)^2 + m^2} \hat{q}) \gamma_\sigma. \quad (5.10)$$

Пользуясь соотношениями

$$\hat{q}\hat{q} = -q^2, \quad (5.11)$$

$$\hat{q}(\hat{p} - m) = -2q \cdot p + (\hat{p} + m)\hat{q}, \quad (5.12)$$

$$(\hat{p}' - m)\hat{q} = -2p' \cdot q - \hat{q}(\hat{p}' + m) \quad (5.13)$$

и условиями для фермионов на евклидовой массовой поверхности, согласно которым члены  $\hat{p} + m$  слева и  $\hat{p}' + m$  справа в амплитуде дают нулевой вклад, так как выражение (5.10) входит в обкладках из волновых функций внешних фермионов, а также соотношением

$$p^2 = p'^2 = -m^2, \quad (5.14)$$

перепишем (5.10) в виде

$$-ig^2 \mu^4 - 2\omega (T_f^A T_f^B \frac{-2q \cdot p - q^2}{2q \cdot p + q^2} \gamma_\sigma + T_f^B T_f^A \frac{-2p' \cdot q + q^2}{-2p' \cdot q + q^2} \gamma_\sigma) = \quad (5.15)$$

$$\cong ig^2 \mu^4 - 2\omega [T_f^A, T_f^B] \gamma_\sigma = -g^2 \mu^4 - 2\omega f^{ABC} T_f^C \gamma_\sigma. \quad (5.16)$$

В абелевом случае этих двух диаграмм достаточно и вклад продольных калибровочных частиц действительно равен нулю (так как  $f^{ABC} = 0$ ) даже при произвольных значениях  $q^2$  и  $k^2$ . В янг-миллсовской теории имеется



еще одна диаграмма, с которой нам надо справиться. Ее вклад в продольную часть равен

$$-g^2 \mu^4 - 2\omega_f ABC T_f^C \frac{1}{(q+k)^2} [\gamma_\sigma (-q^2 - 2k \cdot q) + q_\sigma (\hat{k} - \hat{q}) + \hat{q}(2q+k)_\sigma] = \quad (5.17)$$

$$= -g^2 \mu^4 - 2\omega_f ABC T_f^C \frac{1}{(q+k)^2} [-\gamma_\sigma (q^2 + 2k \cdot q) - \hat{k}k_\sigma]. \quad (5.18)$$

В последнем выражении мы использовали уравнение Дирака для фермионов, чтобы исключить член  $\hat{k} + \hat{q}$  и переписать  $\hat{q}k_\sigma$  как  $-\hat{k}k_\sigma$ . Окончательный результат получается, если сложить (5.16) и (5.18):

$$q_\rho T_{\rho\sigma} = -g^2 \mu^4 - 2\omega_f ABC T_f^C \frac{1}{(q+k)^2} \gamma_\mu (k^2 \delta_{\mu\sigma} - k_\mu k_\sigma), \quad (5.19)$$

и это выражение в противоположность аналогичному результату для КЭД не равно нулю! Но оно пропорционально проекционному оператору для второй калибровочной частицы. Следовательно, продольная комптоновская амплитуда, свернутая с вектором поляризации второго калибровочного поля, равна нулю, если считать, что калибровочное поле удовлетворяет уравнению движения (в противоположность этому, в КЭД не накладывается никаких ограничений на вторую фотонную линию). Различие обусловлено тем, что в янг-милловских теориях линии калибровочных полей несут заряд (в КЭД этого нет) и потому их источники должны иметь заряд (см. задачу) и взаимодействовать с другими линиями калибровочных полей, если только калибровочное поле не находится на массовой поверхности.

### Задачи

\*А. Вычислите комптоновскую амплитуду в древесном приближении в аксиальной калибровке  $n_\mu A_\mu = 0$  в евклидовом пространстве. Сверните одну из векторных линий амплитуды с  $n_\mu$ . Поясните результат.

\*Б. Придумайте такое новое фейнмановское правило для источника вне массовой поверхности, чтобы после добавления соответствующей диаграммы продольная комптоновская амплитуда (5.19) обратилась в нуль.

\*В. Повторите задачу Б в аксиальной калибровке.

## § 6. Янг-миллсовская теория, однопетлевая структура

В данном параграфе мы подробно исследуем однопетлевую структуру янг-миллсовских теорий. Так как теория очень сложна, нам необходимо ввести какой-то руководящий принцип, прежде чем что-то вычислять: предположим, что теория перенормируема (благодаря 'т Хофту мы знаем, что это верно). Это означает, что мы можем устранить все ультрафиолетовые расходимости, добавив к лагранжиану (5.1) контрчленный лагранжиан, который выглядит так же, как и исходный, но содержит неизвестные коэффициенты перед каждым членом, которые расходятся при  $\epsilon \rightarrow 0$ , где  $\epsilon = 2 - d/2$ . Запишем этот лагранжиан в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{контр}} = & \frac{1}{4} K_3 (\partial_\mu A_\nu^B - \partial_\nu A_\mu^B)^2 - K_4 g \mu^\epsilon f^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C \partial_\mu A_\nu^A + \\ & + \frac{1}{4} K_5 g^2 \mu^{2\epsilon} f^{ABC} f^{ADE} A_\mu^B A_\nu^C A_\mu^D A_\nu^E + \frac{1}{2\alpha} K_\alpha \partial \cdot A^B \partial \cdot A^B + \\ & + i K_6 \partial_\mu \eta^{*B} \partial_\mu \eta^B - \frac{i}{2} K_7 g \mu^\epsilon f^{ABC} A_\mu^C \eta^{*A} \partial_\mu \eta^B - \\ & - \frac{i}{2} K_8 g \mu^\epsilon f^{ABC} \eta^{*A} \eta^B \partial_\mu A_\mu^C + K_2 \widehat{\Psi} \hat{\Delta} \Psi + \\ & + i K_1 g \mu^\epsilon A_\mu^B \widehat{\Psi} \gamma_\mu T_f^B \Psi + i m K_m \widehat{\Psi} \Psi. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Перенормированный лагранжиан

$$\mathcal{L}^{\text{пер}} = \mathcal{L}_{\text{эфф}} + \mathcal{L}_{\text{контр}} \quad (6.2)$$

дает функции Грина, которые в пределе при  $\epsilon \rightarrow 0$  ультрафиолетово-конечны. В этом суть теории перенормировок. Теперь можно записать перенормированный лагранжиан, выразив его через голые поля и параметры, в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{пер}} = & \frac{1}{4} (\partial_\mu A_{\nu 0}^B - \partial_\nu A_{\mu 0}^B)^2 - g_0 f^{ABC} A_{\mu 0}^B A_{\nu 0}^C \partial_\mu A_{\nu 0}^A + \\ & + \frac{1}{4} g_0^2 f^{ABC} f^{ADE} A_{\mu 0}^B A_{\nu 0}^C A_{\mu 0}^D A_{\nu 0}^E + \frac{1}{2\alpha_0} \partial \cdot A_0^B \partial \cdot A_0^B + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + i\partial_\mu \eta_0^{*B} \partial_\mu \eta_0^B - \frac{i}{2} g_0^{\prime\prime\prime} f^{ABC} A_{\mu 0}^C \eta_0^{*A} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \eta_0^B - \\
& - \frac{i}{2} g_0^{\prime\prime\prime\prime} f^{ABC} \eta_0^{*A} \eta_0^B \partial_\mu A_0^C + \bar{\Psi}_0 \hat{\partial} \Psi_0 + i g_0 A_{\mu 0}^B \bar{\Psi}_0 \gamma_\mu T_f^B \Psi_0 + \\
& + i m_0 \bar{\Psi}_0 \Psi_0.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Голые поля, константы, связи и массы связаны со своими перенормированными (конечными) двойниками соотношениями

$$\Psi_0 = (1 + K_2)^{1/2} \Psi \equiv Z_2^{1/2} \Psi, \tag{6.4}$$

$$A_{\mu 0}^B = (1 + K_3)^{1/2} A_\mu^B \equiv Z_3^{1/2} A_\mu^B, \tag{6.5}$$

$$\eta_0^B = (1 + K_6)^{1/2} \eta^B \equiv Z_6^{1/2} \eta^B, \tag{6.6}$$

$$m_0 = m(1 + K_m)/(1 + K_2) \equiv m Z_m / Z_2, \tag{6.7}$$

$$\alpha_0^{-1} = \alpha^{-1}(1 + K_\alpha)/(1 + K_3) \equiv \alpha^{-1} Z_\alpha / Z_3, \tag{6.8}$$

$$g_0 = a \mu^\epsilon \frac{1 + K_1}{Z_2 Z_3^{1/2}} \equiv g \mu^\epsilon Z_1 / Z_2 Z_3^{1/2}, \tag{6.9}$$

$$g_0' = g \mu^\epsilon \frac{1 + K_4}{Z_3^{3/2}} \equiv g \mu^\epsilon Z_4 / Z_3^{3/2}, \tag{6.10}$$

$$g_0'' = g \mu^\epsilon \frac{(1 + K_5)^{1/2}}{Z_3} \equiv g \mu^\epsilon Z_5^{1/2} / Z_3, \tag{6.11}$$

$$g_0^{\prime\prime\prime} = g \mu^\epsilon \frac{1 + K_7}{Z_3^{1/2} Z_6} \equiv g \mu^\epsilon Z_7 / Z_3^{1/2} Z_6, \tag{6.12}$$

$$g_0^{\prime\prime\prime\prime} = g \mu^\epsilon \frac{1 + K_8}{Z_3^{1/2} Z_6} \equiv g \mu^\epsilon Z_8 / Z_3^{1/2} Z_6. \tag{6.13}$$

Этот список определений удлинился из-за того, что мы ввели пять независимых голых констант связи. Но все они окажутся равными вследствие тождеств Славнова – Тейлора, являющихся тождествами Уорда для янг-миллсовских теорий. Равенство констант требует выполнения следующих соотношений между константами перенормировки:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_4}{Z_3} = \frac{Z_5^{1/2}}{Z_3^{1/2}} = \frac{Z_7}{Z_6} = \frac{Z_8}{Z_6}. \quad (6.14)$$

Теперь мы вычислим эти константы перенормировки с точностью  $O(\hbar)$  в схеме размерной регуляризации.

Прежде всего запишем в диаграммном представлении однопетлевые вклады ( $O(\hbar)$ ) в фундаментальные взаимодействия янг-миллсовской теории:

$$\text{Diagram (6.15)} \quad (6.15)$$

$$\text{Diagram (6.16)} \quad (6.16)$$

$$\text{Diagram (6.17)} \quad (6.17)$$

$$\text{Diagram (6.18)} \quad (6.18)$$

$$\text{Diagram (6.19)} \quad (6.19)$$

$$\text{Diagram (6.20)} \quad (6.20)$$

$$\text{Diagram (6.21)} \quad (6.21)$$

Эти диаграммы вполне должны убедить читателя в сложности янг-миллсовских теорий и объяснить ему, почему для вычислений в высших порядках необходимы сложные программы для ЭВМ. Взаимодействие двух духов с калибровочным полем представлено только один раз – в диаграммах (6.20).

Начнем с вычисления однопетлевой поправки к поляризации вакуума. Как показано в формуле (6.15), эта поправка состоит из шести частей. Сначала вычислим

$$\Pi_{\mu\nu}^{(1)AB}(p) = \text{Diagram (6.22)} \quad (6.22)$$

В фейнмановской калибровке, не забыв фактор симметрии, получим

$$\Pi_{\mu\nu}^{(1)AB}(p) = -\frac{1}{2} g^2 \mu^{2\epsilon} f^{ACD} f^{BDC} \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{N_{\mu\nu}(l, p)}{l^2(l+p)^2}, \quad (6.23)$$

где  $N_{\mu\nu}(l, p) = [(2l+p)_\mu \delta_{\rho\sigma} - (l+2p)_\sigma \delta_{\mu\rho} + (p-l)_\rho \delta_{\tau\sigma}] \times$

$$\times [(2l+p)_\nu \delta_{\rho\sigma} - (2p+l)_\sigma \delta_{\rho\nu} + (p-l)_\rho \delta_{\sigma\nu}] =$$

$$\begin{aligned}
&= (8\omega - 6)l_\mu l_\nu + (4\omega - 3)(l_\mu p_\nu + l_\nu p_\mu) + (2\omega - 6)p_\mu p_\nu + [(p - l)^2 + \\
&\quad + (2p + l)^2]\delta_{\mu\nu} \quad (6.25)
\end{aligned}$$

и учтено, что  $\delta_{\mu\mu} = 2\omega$ . Это выражение содержит в четырех измерениях как инфракрасную, так и ультрафиолетовую расходимость. Заметим, что традиционное лекарство от инфракрасной расходимости, связанное с добавлением калибровочной частицы малой массы, приводит в данном случае к куче неприятностей, так как при этом не сохраняется калибровочная инвариантность. Поэтому ниже мы будем стараться находиться подальше от точки  $p^2 = 0$ , в которой и возникает инфракрасная расходимость. Когда же это окажется невозможным, мы обратимся к методу размерной регуляризации (§ 4).

Вводя фейнмановский параметр и производя замену переменной интегрирования в петле, получаем

$$\Pi_{\mu\nu}^{(1)AB}(p) = -\frac{1}{2}g^2\mu^{2\epsilon} f^{ACD} f^{BDC} \int_0^1 dx \int \frac{d^2\omega l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{N_{\mu\nu}(l - px, p)}{[l^2 + p^2x(1-x)]^2}. \quad (6.26)$$

После небольших алгебраических преобразований находим

$$\begin{aligned}
N_{\mu\nu}(l - px, p) &= (8\omega - 6)l_\mu l_\nu + [(8\omega - 6)x(x - 1) + 2\omega - 6]p_\mu p_\nu + \\
&\quad + [2l^2 + p^2(2x(x - 1) + 5)]\delta_{\mu\nu}, \quad (6.27)
\end{aligned}$$

где мы пренебрегли линейными по  $l$  членами, так как при интегрировании они все равно дадут нуль. Интегрирование по переменной в петле приводит к выражению

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}^{(1)AB}(p) &= -\frac{g^2\mu^{2\epsilon}}{2(4\pi)^\omega} f^{ACD} f^{BCD} \int_0^1 dx \left\{ \frac{(6\omega - 3)\delta_{\mu\nu}\Gamma(1 - \omega)}{[p^2x(1-x)]^{1-\omega}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Gamma(2 - \omega)}{[p^2x(1-x)]^2 - \omega} [\delta_{\mu\nu}p^2(5 - 2x(1-x)) + p_\mu p_\nu(2\omega - 6 - (8\omega - 6)x(1-x))] \right\}. \quad (6.28)
\end{aligned}$$

Оставим пока этот результат в том виде, как он получился, и вычислим вклад дуговой петли.

Этот вклад определяется диаграммой

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)AB}(p) = \text{Diagram} \quad (6.29)$$

Вспомнив про знак минус для дуговой петли, с помощью правил приложения В найдем

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)AB}(p) = g^2 \mu^{2\epsilon} f^{DCA} f^{CDB} \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{(l+p)_\mu l_\nu}{l^2(l+p)^2} \quad (6.30)$$

Это выражение также инфракрасно расходится. После введения фейнмановского параметра оно принимает вид

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)AB}(p) = -g^2 \mu^{2\epsilon} f^{ACD} f^{BCD} \int_0^1 dx \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{(l-px)_\nu (l+p(1-x))_\mu}{[l^2 + p^2x(1-x)]^2} = \quad (6.31)$$

$$= -\frac{g^2 \mu^{2\epsilon}}{(4\pi)^\omega} f^{ACD} f^{BCD} \int_0^1 dx \left\{ \frac{1}{2} \frac{\delta_{\mu\nu} \Gamma(1-\omega)}{[p^2x(1-x)]^{1-\omega}} - \frac{p_\mu p_\nu x(1-x) \Gamma(2-\omega)}{[p^2x(1-x)]^{2-\omega}} \right\} \quad (6.32)$$

Если бы мы использовали измененное правило (5.5) для вершины дуга, то пришлось бы изменить только член с  $p_\mu p_\nu$  (см. задачу).

Третья диаграмма имеет вид

$$\Pi_{\mu\nu}^{(3)AB}(p) = \text{Diagram} \quad (6.33)$$

Но эта диаграмма, так же как и две другие диаграммы-головастики в формуле (6.15), обращается в нуль при размерной регуляризации. Она имеет структуру диаграммы-головастика, и, так как в вершине не возникает зависимости от импульса, эта диаграмма может давать только поправку к массе калибровочной частицы. Но в силу калибровочной ин-

вариантности у калибровочных частиц отсутствует массовый член. Если же мы примем любую процедуру регуляризации, нарушающую калибровочную инвариантность, то диаграмма будет приводить к ненулевому массовому члену. Это было бы артефактом, а потому не могло бы повлиять ни на какой физический результат. Например, если добавить калибровочным частицам малую массу, чтобы регуляризовать инфракрасную расходимость, то диаграмма (6.33) будет вносить вклад в эту фиктивную массу. Это еще один пример мощи метода размерной регуляризации, который контролирует бесконечности, не нарушая калибровочной инвариантности.

Теперь извлечем из  $\Pi^{(1)}$  и  $\Pi^{(2)}$  полюсные части. После небольших алгебраических преобразований находим, что

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(1)AB}(p) = & \frac{g^2}{32\pi^2} f^{ACD} f^{BCD} \left\{ \left( \frac{19}{6} \delta_{\mu\nu} p^2 - \frac{11}{3} p_\mu p_\nu \right) \frac{1}{\epsilon} - \right. \\ & - \left( \frac{19}{6} \gamma + \frac{1}{2} \right) \delta_{\mu\nu} p^2 + \left( \frac{11}{3} \gamma - \frac{2}{3} \right) p_\mu p_\nu + \\ & + \int_0^1 dx \ln \left( \frac{p^2 x(1-x)}{4\pi\mu^2} \right) \left[ 2p_\mu p_\nu (1+5x(1-x)) - \right. \\ & \left. \left. - p^2 \delta_{\mu\nu} (5-11x(1-x)) \right] + O(\epsilon) \right\}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Отметим появление  $\ln p^2$ , указывающее на наличие инфракрасной расходимости на массовой поверхности при  $p^2 = 0$  (только в пространстве Минковского, так как в евклидовом пространстве из условия  $p^2 = 0$  следует, что и  $p_\mu = 0$ ). Кроме того,

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(2)AB}(p) = & \frac{g^2}{32\pi^2} f^{ACD} f^{BCD} \left\{ \left( \frac{1}{6} \delta_{\mu\nu} p^2 + \frac{1}{3} p_\mu p_\nu \right) \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{6} (\gamma - 1) \times \right. \\ & \times \delta_{\mu\nu} p^2 - \frac{1}{3} \gamma p_\mu p_\nu - \int_0^1 dx \ln \left( \frac{p^2 x(1-x)}{4\pi\mu^2} \right) \left[ \delta_{\mu\nu} p^2 x(1-x) + \right. \\ & \left. \left. + 2p_\mu p_\nu x(1-x) \right] + O(\epsilon) \right\}, \end{aligned} \quad (6.35)$$

Сумма  $\Pi^{(1)}$  и  $\Pi^{(2)}$  дает полный чисто янг-миллсовский вклад в поля-



ризацию вакуума

$$\Pi_{\mu\nu}^{AB}(p) = \frac{g^2}{32\pi^2} f^{ACD} f^{BCD} (\delta_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \left\{ \frac{10}{3} + \frac{1}{\epsilon} + \frac{62}{9} - \frac{10}{3} \gamma - \right. \\ \left. - \frac{10}{3} \ln \frac{p^2}{4\pi\mu^2} \right\}, \quad (6.36)$$

и мы вновь получаем магическую структуру проекционного оператора.

Конечная часть имеет аналогичную структуру и содержит множитель  $\ln p^2/4\pi\mu^2$ , который, как уже отмечено, инфракрасно расходится. Элементы матриц  $T^A$ , образующих алгебру Ли группы  $G$  в присоединенном представлении, можно отождествить со структурными константами

$$(T^A)^{BC} = -if^{ABC}. \quad (6.37)$$

Далее, для любого представления  $R$  группы  $G$  с матрицами представления  $T_R^A$  можно положить

$$S_F(T_R^A T_R^B) = C_R \delta^{AB}, \quad (6.38)$$

где след берется по индексам представления. Число  $C_R$  называется индексом Дынкина представления  $R$ ; оно равно квадратичному оператору Казимира, умноженному на размерность представления и деленному на размерность группы. Точное значение индекса Дынкина зависит от нормировки  $T$ -матриц, которая раз и навсегда фиксируется заданием структурных констант теории. Шкала структурных констант в свою очередь фиксируется определением констант  $g$ , так как они всегда входят в комбинации  $gf^{ABC}$ . Очень удобно переписать все наши выражения через индексы Дынкина. Тогда получим

$$\Pi_{\mu\nu}^{AB}(p) = \delta^{AB} \frac{g^2}{16\pi^2} C_{\text{прис}} (\delta_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \cdot \frac{5}{3} \frac{1}{\epsilon} + \dots \quad (6.39)$$

Заметим, что в структуре проекционного оператора нет ничего священного: ее можно изменить, если только мы примем измененное правило (5.5) для дуг.

Вклад фермионов в поляризацию вакуума

$$\Pi_{\mu\nu}^{fAB}(p) = \text{Diagram} \quad (6.40)$$

не нужно вычислять заново, так как структура его та же, что и в КЭД, не считая некоторых теоретико-групповых множителей. Действительно,

$$\Pi_{\mu\nu}^{fAB}(p) = \text{Sp}(T_f^A T_f^B) \Pi_{\mu\nu}^{\text{КЭД}}(p) = \quad (6.41)$$

$$= -C_f \delta^{AB} \frac{g^2}{16\pi^2} (\delta_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\epsilon} + \dots, \quad (6.42)$$

причем мы использовали формулы (6.38) и (2.32). Сравнив (6.42) с (6.39), можно видеть, что вычеты в полюсах имеют противоположные знаки (подробнее об этом ниже). Сумма выражений (6.42) и (6.39) дает полную однопетлевую поправку к поляризации вакуума.

Следующая поправка к фермионной линии (если игнорировать головастики) дается диаграммой

$$\Sigma(p) = \text{Diagram} \quad (6.43)$$

и является матрицей как в спинорном пространстве, так и в пространстве представления фермионов. Нетрудно видеть, что

$$\Sigma(p) = T_f^A T_f^A \Sigma^{\text{КЭД}}(p), \quad (6.44)$$

где  $\Sigma^{\text{КЭД}}$  определяется формулой (2.19). Кроме того, матрица размерности  $d_f \times d_f$  перед выражением (6.44) диагональна и равна

$$T^A T^A = \frac{N}{d_f} C_f, \quad (6.45)$$

где мы не указали индексы представления. Отсюда получаем

$$\Sigma(p) = -i \frac{N}{d_f} C_f \frac{g^2}{16\pi^2} (\hat{p} + 4m) \frac{1}{\epsilon} + \dots, \quad (6.46)$$

Однопетлевая поправка к фермионной вершине состоит, если пренебречь диаграммами-головастиками, из двух диаграмм. Первая из них

$$\Gamma_{1\rho}^A(p, q) = \text{Diagram} \quad (6.47)$$

имеет ту же структуру, что и в абелевом случае. В самом деле,

$$\Gamma_{1\rho}^A(p, q) = T_f^B T_f^A T_f^B \Gamma_{\rho}^{\text{КЭД}}(p, q). \quad (6.48)$$

Матрицу  $d_f \times d_f$  можно записать как

$$T_f^B T_f^A T_f^B = [T_f^B, T_f^A] T_f^B + T_f^A T_f^B T_f^B = \quad (6.49)$$

$$= if^{BAC} T_f^C T_f^B + \frac{N}{d_f} C_f T_f^A. \quad (6.50)$$

Теперь с учетом антисимметрии по  $C$  и  $B$  перепишем это в виде

$$T_f^B T_f^A T_f^B = \frac{1}{2} f^{BAC} f^{DCB} T_f^D + \frac{N}{d_f} T_f^A = \quad (6.51)$$

$$= \frac{1}{2} C_{\text{прис}} T_f^A + \frac{N}{d_f} C_f T_f^A, \quad (6.52)$$

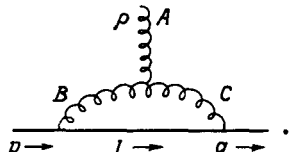
пользуясь формулами (6.37), (6.38) и (6.45). Вспоминая результаты § 2, получаем

$$\Gamma_{1\rho}^A(p, q) = -ig\mu^\epsilon T_f^A \gamma_\rho \left( \frac{1}{2} C_{\text{прис}} + C_f \frac{N}{d_f} \right) \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \dots \quad (6.53)$$

Мы замечаем, что вычет второго члена в точности такой же, как и в (6.46), поскольку в нем не отражается неабелевый характер теории и, стало быть, должно выполняться старое тождество Уорда КЭД. Если должны выполняться тождества Славнова – Тейлора, то отношения  $Z_1/Z_2$  и  $Z_8/Z_6$  должны быть равны. Но последнее отношение не содержит вклада фермионов на однопетлевом уровне, как это видно из (6.17) и (6.20): следовательно, перенормировка фермионной волно-

вой функции должна в точности сокращаться членом в  $Z_1$ . Именно так и происходит.

Второй вклад в вершину определенно неабелев по своей структуре:



$$\Gamma_{2\rho}^A(p, q) = \frac{\rho \text{ } A}{B \text{ } C} \frac{p \rightarrow \quad l \rightarrow \quad q \rightarrow}{\quad} . \quad (6.54)$$

По установленным правилам

$$\Gamma_{2\rho}^A(p, q) = -g^3 \mu^{3\epsilon} f^{ABC} T_f^B T_f^C f \frac{d^{2\omega} l}{(2\pi)^{2\omega}} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{l} + m} \gamma_\nu \times$$

$$\times \frac{[(l+p)_\mu \delta_{\nu\rho} + (q-2p-l)_\nu \delta_{\mu\rho} + (p+q-2l)_\rho \delta_{\mu\nu}]}{(p-l)^2 (l-q)^2} . \quad (6.55)$$

Теоретико-групповые множители легко преобразуются, так как с учетом формул (6.37) и (6.38)

$$f^{ABC} T_f^B T_f^C = \frac{i}{2} f^{ABC} f^{BCD} T_f^D = \frac{i}{2} C_{\text{прис}} T_f^A . \quad (6.56), (6.57)$$

Вводя фейнмановские параметры и соответствующим образом сдвигая переменную интегрирования в петле, получаем

$$\Gamma_{2\rho}^A(p, q) = -ig^3 \mu^{3\epsilon} C_{\text{прис}} T_f^A \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^{2\omega} l'}{(2\pi)^{2\omega}} \times$$

$$\times \frac{N_\rho(l', p, q)}{[l'^2 + m^2(1-x-y) + q^2x + p^2y - (qx - py)^2]^3} , \quad (6.58)$$

$$\text{где } N_\rho = 2l'_\rho \gamma_\nu \hat{l}' \gamma_\nu + \tilde{N}_\rho = 4l'_\rho \hat{l}' (1-\epsilon) + \tilde{N}_\rho , \quad (6.59), (6.60)$$

причем  $\tilde{N}_\rho$  содержит только члены, линейные по  $l'$  и выпадающие при интегрировании, а также члены, не содержащие  $l'$ . Последние приве-

дут к сходящемуся интегралу по петле. Таким образом, находим

$$\Gamma_{2\rho}^A(p, q) = -ig\mu^\epsilon T_f^A \frac{g^2 C_{\text{прис}}}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \times \\ \times \left\{ \gamma_\rho (1 - \epsilon) \Gamma(\epsilon) \left( \frac{4\pi\mu^2}{m^2(1-x-y) + q^2x + p^2y - (qx - py)^2} \right)^\epsilon + \right. \\ \left. + \frac{\mu^2}{2} \frac{\tilde{N}_\rho}{m^2(1-x-y) + q^2x + p^2y - (qx - py)^2} \right\}. \quad (6.61)$$

Эта формула очень сложна, но из нее легко извлекается полюсная часть

$$\Gamma_{2\rho}^A(p, q) = -ig\mu^\epsilon \gamma_\rho T_f^A \frac{g^2 C_{\text{прис}}}{32\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \dots, \quad (6.62)$$

так что полный полюсной вклад в фермионную вершинную функцию равен

$$\Gamma_\rho^A(p, q) = -ig\mu^\epsilon \gamma_\rho T_f^A \frac{g^2}{16\pi^2} (C_{\text{прис}} + C_f \frac{N}{d_f}) \frac{1}{\epsilon} + \dots, \quad (6.63)$$

Теперь, после того как мы вычислили полюсную структуру поправок низшего порядка к фермионному и калибровочному полям и к фермионной вершине, мы можем из формул (6.39), (6.42), (6.46) и (6.63) извлечь соответствующие перенормировочные константы. Они оказываются равными

$$Z_1 = 1 - \frac{\hbar^2}{16\pi^2} \left( [C_{\text{прис}} + C_f \frac{N}{d_f}] \frac{1}{\epsilon} + F_1 \right) + \dots, \quad (6.64)$$

$$Z_2 = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} \left( C_f \frac{N}{d_f} \frac{1}{\epsilon} + F_2 \right) + \dots, \quad (6.65)$$

$$Z_3 = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \left( \left( \frac{5}{3} C_{\text{прис}} - \frac{4}{3} C_f \right) \frac{1}{\epsilon} + F_3 \right) + \dots, \quad (6.66)$$

где  $F_1, F_2, F_3$  — произвольные конечные части контрчленов. Все эти выражения зависят от калибровки. (Например, в аксиальной калибровке эффективный лагранжиан не содержит духов и имеет ту же структу-

ру, что и в КЭД, откуда следует, что выполняется тождество  $Z_1 = Z_2$ , которое явно неверно в фейнмановской калибровке.) Заметим, что если тождества Славнова – Тейлора (6.14) должны выполняться, то фермионный вклад в четверное векторное самодействие должен расходиться, поскольку мы явно видим, что отношение  $Z_3^{1/2} Z_1/Z_2$  содержит вклад фермионов. Эта ситуация противоположна тому, что происходит с ящичной диаграммой в КЭД, которая конечна. Как же может быть, чтобы одни и те же диаграммы были конечны в одном случае (КЭД) и расходились в другом (КХД)? Дело очевидно, в том, что диаграммы не одинаковы: в КЭД расходимость ящичной диаграммы исчезает после симметризации по внешним фотонным линиям, отмеченным только их векторными индексами; в янг-миллсовском же случае симметризацию по внешним линиям можно осуществить двумя путями, либо симметризуя как по векторным, так и по групповым индексам, что, как и в КЭД, не приводит к расходимости, либо антисимметризуя по отдельности по векторным и групповым индексам. Именно этот новый вклад расходится (см. задачу). Такие же рассуждения можно провести и для вклада фермионов в тройную вершину (6.18).

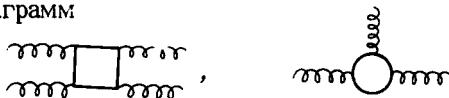
### Задачи

А. Вычислите вклад духов в поляризацию вакуума, используя измененное фейнмановское правило (5.5). Покажите в явной форме, что это влияет только на содержащую  $p_\mu p_\nu$  (продольную) часть  $\Pi_{\mu\nu}$ . Найдите  $Z_\alpha$  и сравните с тем значением, которое получается по обычным правилам приложения В.

Б. Вычислите интегралы по параметру в  $\Pi_{\mu\nu}$  в  $2\omega$  измерениях, исходя из выражений (6.28) и (6.32). Затем произведите разложение вблизи  $\omega = 2$ ; выясните смысл лишних полюсов по  $\epsilon$ .

\*В. Вычислите в фейнмановской калибровке в однопетлевом приближении константу перенормировки духового поля  $Z_6$ , а также константу перенормировки вершины дух – калибровочное поле  $Z_7$  и убедитесь, что  $Z_7/Z_6$  действительно равно  $Z_1/Z_2$ .

\*\*Г. В фейнмановской калибровке вычислите наиболее расходящиеся части диаграмм



и проверьте тождества Славнова – Тейлора для фермионной части.

### § 7. Янг-миллсовская теория, тождества Славнова — Тейлора

Мы видели, что эффективное действие, являющееся исходным пунктом квантовой теории янг-миллсовского поля, уже не является более калибровочно-инвариантным — из-за наличия члена, фиксирующего калибровку, и дѳухов (в ковариантной калибровке). Члены, нарушающие калибровочную инвариантность, имеют вид

$$\mathcal{L}_{\text{доп}} = \frac{1}{2\alpha} G^A G^A - i\eta^{*A} \frac{\delta G^A}{\delta A_\mu^B} (\mathcal{D}_\mu)^{BC} \eta^C, \quad (7.1)$$

где  $\eta^B$  и  $\eta^{*B}$  — доля дѳухов, а  $G^A$  — калибровочные условия. Оказывается, что удобнее использовать вместо комплексных действительные грассманы поля  $\omega^A$  и  $\rho^A$ ; они связаны со старыми полями соотношениями

$$\eta^A = \frac{1}{\sqrt{2}} (\omega^A + i\rho^A), \quad (7.2)$$

$$\eta^{*A} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\omega^A - i\rho^A). \quad (7.3)$$

Тогда с помощью  $\omega^A$  и  $\rho^A$  калибровочно-неинвариантные члены переписываются в виде

$$\mathcal{L}_{\text{доп}} = \frac{1}{2\alpha} G^A G^A + \omega^A \frac{\delta G^A}{\delta A_\mu^B} (\mathcal{D}_\mu)^{BC} \rho^C. \quad (7.4)$$

Рассмотрим теперь их поведение при калибровочном преобразовании

$$\delta A_\mu^B = \mathcal{D}_\mu^{BC} \Lambda^C, \quad (7.5)$$

где  $\Lambda^C$  — калибровочный параметр. Имеем

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_{\text{доп}} = \frac{1}{\alpha} G^A \frac{\delta G^A}{\delta A_\mu^B} (\mathcal{D}_\mu)^{BC} \Lambda^C + \delta \omega^A \frac{\delta G^A}{\delta A_\mu^B} (\mathcal{D}_\mu \rho)^B + \\ + \omega^A \frac{\delta G^A}{\delta A_\mu^B} \delta (\mathcal{D}_\mu \rho)^B, \end{aligned} \quad (7.6)$$

если считать, что калибровочное условие линейно по  $A_\mu$ . Тогда мы замечаем, что первый и второй члены могут взаимно уничтожиться, ес-

ли только мы выберем как надо калибровочный параметр. Действительно, взяв

$$\Lambda^C = \zeta \rho^C, \quad \delta \omega^A = -\frac{1}{\alpha} G^A \zeta, \quad (7.7),$$

(7.8)

убеждаемся, что два первых члена в вариации (7.6) взаимно уничтожаются. Более того, поскольку  $\rho^C$  — действительное грассманово поле, параметр  $\zeta$  сам должен быть действительным грассмановым числом с тем, чтобы  $\Lambda^C$  было обычным числом, т.е.

$$\zeta^2 = 0. \quad (7.9)$$

Таким образом, если можно добиться, чтобы выполнялось условие

$$\delta(\mathcal{D}_{\mu\rho})^B = 0, \quad (7.10)$$

то отсюда будет вытекать инвариантность полного эффективного действия, так как преобразование поля  $A_\mu$  имеет вид (зависящего от поля) калибровочного преобразования. В явном виде

$$\delta(\mathcal{D}_{\mu\rho})^B = \partial_\mu \delta_\rho^B + f^{BCE} (\mathcal{D}_\mu \zeta \rho)^E \rho^C + f^{BCE} A_\mu^E \delta \rho^C. \quad (7.11)$$

Члены, включающие одну производную, имеют вид

$$\partial_\mu [\delta_\rho^B + \frac{1}{2} \zeta f^{BCE} \rho^E \rho^C], \quad (7.12)$$

так что, если положить

$$\delta_\rho^B = \frac{1}{2} \zeta f^{BCE} \rho^C \rho^E, \quad (7.13)$$

у нас останется

$$\delta(\mathcal{D}_{\mu\rho})^B = \zeta f^{BCE} f^{EFG} A_\mu^G \rho^F \rho^C + \frac{1}{2} \zeta f^{BEG} A_\mu^G f^{EFC} \rho^F \rho^C \quad (7.14)$$

Если учесть, что

$$f^{ABC} = i(TA)BC, \quad (7.15)$$

то можно переписать выражение (7.14) в виде

$$\delta(\mathcal{D}_{\mu\rho})^B = -\zeta (T^F T^C)^{GB} A_\mu^G \rho^F \rho^C + \frac{i}{2} \zeta f^{FCE} (T^E)^{GB} A_\mu^G \rho^F \rho^C. \quad (7.16)$$



Теперь, пользуясь антисимметрией при перестановке  $F$  и  $C$  и соотношениями алгебры Ли для матриц  $T$ , мы можем убедиться, что при условии (7.13) это выражение обращается в нуль. Итак, эффективный лагранжиан (5.1) инвариантен относительно комбинации преобразований

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^B &= \frac{1}{g} \zeta (\mathcal{D}_\mu \rho)^B, & \delta \omega^A &= -\frac{1}{\alpha g} \partial_\mu f^A A^\mu \zeta, \\ \delta \rho^A &= \frac{1}{2} \zeta f^{ABC} \rho^B \rho^C, & \delta \Psi &= -i \zeta \rho^A T_f^A \Psi, \end{aligned} \quad (7.17)$$

причем мы явно указали зависимость от константы связи, положили  $G^A = \partial \cdot A^A$  и включили фермионы. Эффективное действие инвариантно относительно этих преобразований БРС только при условии, что все константы связи одинаковы. Так как преобразования БРС не меняются при изменении размерности пространства-времени, они останутся невредимыми при размерной регуляризации, а это означает, что как  $\mathcal{L}_{\text{эфф}}$ , так и  $\mathcal{L}_{\text{контр}}$  останутся инвариантными при таких преобразованиях. Отсюда вытекает первое следствие: все голые константы связи должны быть одинаковы. т.е. мы вправе теперь положить в (6.3)

$$g_0 = g'_0 = g''_0 = g'''_0 = g''''_0, \quad (7.18)$$

откуда вытекает, что выполняются соотношения (6.14) и, таким образом, помимо  $Z_\alpha$  и  $Z_m$ , имеются только четыре независимые константы перенормировки, например  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_6$ , причем три из них мы уже вычислили.

Как и в абелевом случае, можно на основании БРС-инвариантности вывести тождества для янг-миллсовских функций Грина. Чтобы предотвратить появление сложных нелинейных членов, удобно ввести такие источники, которые связаны с изменениями полей при преобразовании БРС, т.е. добавить к обычному набору источников  $J_\mu^B, \sigma^B, \zeta^B, \chi, \bar{\chi}$ , связь которых с фундаментальными полями имеет вид

$$- \langle J_\mu^B A_\mu^B + \omega^B \sigma^B + \rho^B \zeta^B + i \bar{\chi} \Psi + i \bar{\Psi} \chi \rangle, \quad (7.19)$$

другие источники  $\rho_\mu^A, u^A, \lambda, \lambda$ , связь которых с нелинейными изменениями полей в результате преобразования БРС имеет вид

$$- \langle \frac{1}{g} \pi_\mu^A (\mathcal{D}_\mu \rho)^A + \frac{1}{2} f^{ABC} u^A \rho^B \rho^C + \lambda \rho^A T_f^A \Psi - \Psi T_f^A \rho^A \lambda \rangle. \quad (7.20)$$

Мы будем исходить из производящего функционала

$$Z[ J_{\mu}^B, \sigma^B, \xi^B, \chi, \bar{\chi}; \tau_{\mu}^B, u^B, \lambda, \bar{\lambda} ], \quad (7.21)$$

определяемого соотношением

$$e^{-Z} = \int \mathcal{D}A_{\mu} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\omega \mathcal{D}\rho e^{-S'_{\text{эфф}}}, \quad (7.22)$$

где  $S'_{\text{эфф}}$  есть действие  $S_{\text{эфф}}$  из § 5 с добавленными источниками (7.19) и (7.20). Выполним преобразование БРС переменных интегрирования в (7.22). Такое изменение переменных не должно повлиять на  $Z$ . Поэтому всякое изменение подынтегрального выражения по сравнению с (7.22), связанное с таким изменением переменных, должно быть равно нулю, что и приводит к янг-милсовскому варианту тождеств Уорда.

Во-первых, можно показать, что мера интегрирования не меняется при преобразовании БРС (см. задачу). Во-вторых, мы только что показали, что действие  $S_{\text{эфф}}$  инвариантно относительно преобразований БРС, следовательно, меняться могут только члены с источниками. Линейные по полям члены приведут к дополнительным членам в показателе экспоненты

$$- \langle J_{\mu}^B \delta A_{\mu}^B + \delta \omega^B \sigma^B + \delta \rho^B \xi^B + i \bar{\chi} \delta \Psi + i \delta \bar{\Psi} \chi \rangle. \quad (7.23)$$

Члены выражения (7.20) не дают дополнительного вклада, так как преобразование БРС нильпотентно: два преобразования БРС дают нуль. Действительно,

$$\delta(f^B C^D \rho^C \rho^D) = 0, \quad (7.24)$$

$$\delta(\rho^A T_f^A \Psi) = 0 \quad (7.25)$$

и выполнено равенство (7.10). Это нетрудно доказать (см. задачу). Таким образом, единственный результат нашего преобразования заключается в добавлении в показателе экспоненты под интегралом членов (7.23). Они все линейны по грассмановой переменной  $\zeta$ , так что эта дополнительная экспонента легко разлагается — член, линейный по  $\zeta$ , должен равняться нулю, так как это единственное изменение подынтегрального выражения. Это приводит к тождествам

$$\int \mathcal{D}(\dots) \left\langle \frac{1}{g} J_{\mu}^B (\mathcal{D}_{\mu\rho})^B - \frac{1}{\alpha g} \partial \cdot A^{B\sigma}{}_{\sigma}{}^B + \frac{1}{2} f^{BCD} \rho^C \rho^D \xi^B + \right. \\ \left. + \bar{\chi} \rho^A T_f^A \Psi - \bar{\Psi} \rho^A T_f^A \chi \right\rangle e^{-S'_{\text{эфф}}} = 0. \quad (7.26)$$

Выписанное функциональное уравнение чрезвычайно нелинейно, и работать с ним ужасно трудно. Теперь ясно, зачем были нужны дополнительные источники — мы можем заменить все эти нелинейные члены функциональными производными, так как по построению

$$A_{\mu}^B = -\frac{\delta}{\delta J_{\mu}^B}, \quad (7.27)$$

$$\frac{1}{g} (\mathcal{D}_{\mu\rho})^B = \frac{\delta}{\delta \tau_{\mu}^B}, \quad (7.28)$$

$$\frac{1}{2} f^{ABC} \rho^B \rho^C = \frac{\delta}{\delta u^A}, \quad (7.29)$$

$$\rho^A T_f^A \Psi = \frac{\delta}{\delta \lambda}, \quad (7.30)$$

причем все эти равенства выполняются в применении к  $\exp \{ -S'_{\text{эфф}} \}$ . Поэтому можно теперь записать эти тождества в виде линейного функционального дифференциального уравнения

$$\left\langle J_{\mu}^B \frac{\delta}{\delta \tau_{\mu}^B} + \sigma^B \frac{1}{\alpha g} \partial_{\mu} \frac{\delta}{\delta J_{\mu}^B} + \xi^B \frac{\delta}{\delta u^B} + \chi \frac{\delta}{\delta \lambda} + \chi^T \frac{\delta}{\delta \lambda} \right\rangle e^{-Z} = 0. \quad (7.31)$$

Более целесообразно выписать эти тождества для эффективного квантового действия  $\Gamma$ , порождающего в теории собственные вершинные части. Для этого выполним функциональное преобразование Лежандра

$$J_{\mu}^B \rightarrow A_{\mu \text{кп}}^B, \quad (7.32)$$

$$\sigma^B \rightarrow \omega_{\text{кп}}^B, \quad (7.33)$$

$$\xi^A \rightarrow \rho_{\text{кп}}^A, \quad (7.34)$$

$$\chi \rightarrow \Psi_{\text{кп}}, \quad (7.35)$$

$$\bar{\chi} \rightarrow \bar{\Psi}_{\text{кп}}, \quad (7.36)$$

$$Z \rightarrow \Gamma, \quad (7.37)$$

где теперь  $A_{\mu \text{кп}}^B$ ,  $\omega_{\text{кп}}^B$ ,  $\rho_{\text{кп}}^B$ ,  $\Psi_{\text{кп}}$  и  $\bar{\Psi}_{\text{кп}}$  — новые источники, играющие роль полей в классическом приближении. В явном виде

$$\Gamma = Z - \langle J^B \cdot A_{\text{кп}}^B + i\bar{\chi}_{\text{кп}} \Psi_{\text{кп}} + i\bar{\Psi}_{\text{кп}} \chi + \sigma^B \omega_{\text{кп}}^B + \xi^B \rho_{\text{кп}}^B \rangle. \quad (7.38)$$

Мы не изменили нелинейные источники, так что действие  $\Gamma$  является также функционалом от  $\tau_{\mu}^A$ ,  $u^A$ ,  $\lambda$  и  $\lambda$ . Тогда

$$J_{\mu}^B = -\frac{\delta \Gamma}{\delta A_{\mu \text{кп}}^B}, \quad \chi = i \frac{\delta \Gamma}{\delta \Psi_{\text{кп}}} \quad \text{и т.д.}, \quad (7.39)$$

так что в результате тождества Славнова — Тейлора принимают вид

$$\begin{aligned} < \frac{\delta \Gamma}{\delta A_{\mu \text{кп}}^B} - \frac{\delta \Gamma}{\delta \tau_{\mu}^B} - \frac{1}{\alpha g} \partial_{\nu} \cdot A_{\mu \text{кп}}^B \frac{\delta \Gamma}{\delta \omega_{\text{кп}}^B} - \frac{\delta \Gamma}{\delta \rho_{\text{кп}}^B} \frac{\delta \Gamma}{\delta u^B} - \\ - i \frac{\delta \Gamma}{\delta \Psi_{\text{кп}}} \frac{\delta \Gamma}{\delta \lambda} + i \frac{\delta \Gamma}{\delta \lambda} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\Psi}_{\text{кп}}} > = 0. \end{aligned} \quad (7.40)$$

На эту формулу тоже страшно смотреть, но это (почти) лучшее, что можно придумать в столь сложной теории (см. задачу). Нелинейные члены с источниками просты только в классическом приближении, где можно положить

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \tau_{\mu}^B} = \frac{1}{g} (\mathcal{D}_{\mu}^{\text{кп}} \rho_{\text{кп}})^B + O(\hbar) \quad \text{и т.д.} \quad (7.41)$$

В абелевом случае мы включили в вариацию  $\Psi$  нелинейный член  $(\eta - \eta^*) \Psi$ , который в формуле (3.16) заменили классическими источниками  $(\eta_{\text{кп}} - \eta_{\text{кп}}^*) \Psi_{\text{кп}}$ ; так можно было сделать только потому, что в данном случае духовое поле не взаимодействует с фермионным полем. Теперь же дело обстоит иначе, что и приводит к значительно более сложной форме тождеств Уорда. Однако в аксиальной калибров-

ке, в которой отсутствуют дуби, янг-миллсовские тождества выглядят так же, как и в КЭД, и дают тот же результат  $Z_1 = Z_2$ .

Хотя полученные тождества и кажутся громоздкими, они очень существенны для доказательства перенормируемости теории. Они уменьшают число независимых ультрафиолетовых расходимостей, позволяя устранить их путем переопределения входных параметров. Но, как и ранее, мы не будем останавливаться на технических подробностях. В заключение заметим, что если у калибровочной частицы и у дубов имеется фиктивная масса, то преобразования БРС, по видимому, невозможно обобщить, так как это можно было сделать в КЭД. Поэтому инфракрасные расходимости в янг-миллсовском случае, вероятно, нужно также устранять методом размерной регуляризации (§ 4).

### Задачи

А. Выведите тождества Уорда в янг-миллсовской теории в аксиальной калибровке с учетом фермионов.

Б. Покажите, что янг-миллсовская функциональная мера левоинвариантна по отношению к преобразованию БРС.

В. Покажите, что преобразования БРС нильпотентны.

Г. Покажите, что  $\partial_\mu (\delta\Gamma / \delta\tau_\mu^A) = -(\delta\Gamma / \delta\omega_{\text{кл}}^A)$ .

\*Д. Выясните, как тождество Уорда КЭД, связывающее продольную часть вершины с обратным фермионным пропагатором, меняется в янг-миллсовском случае в ковариантной калибровке  $\partial \cdot A^B = 0$ .

### § 8. Янг-миллсовская теория, асимптотическая свобода

С помощью преобразования БРС мы показали, что янг-миллсовская теория содержит только одну константу связи  $g$ . Теперь можно, пользуясь любой из формул (6.9) – (6.13), связать голую константу  $g_0$  с перенормированной константой  $g$ . Поскольку мы вычислили  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$  в фейнмановской калибровке, начнем с соотношения (6.9)

$$g_0 = g\mu^\epsilon \frac{Z_1}{Z_2 Z_3^{1/2}}. \quad (8.1)$$

С учетом формул (6.64) – (6.66) можно записать это уравнение в виде

(разложив по  $g$  при фиксированном  $\epsilon$ )

$$g_0 = g \mu^\epsilon \left\{ 1 - \frac{1}{16\pi^2} \left[ \left( \frac{11}{6} C_{\text{прис}} - \frac{2}{3} C_f \right) \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} F_3 - F_1 + F_2 \right] \right\}. \quad (8.2)$$

Если принять независящий от масс рецепт перенормировки, согласно которому все конечные части контрчленов полагаются равными нулю, то мы немедленно находим, что

$$\mu \frac{\partial g}{\partial \mu} = (g \frac{\partial}{\partial g} - 1) \left( -\frac{g^3}{16\pi^2} \right) \left( \frac{11}{6} C_{\text{прис}} - \frac{2}{3} C_f \right), \quad (8.3)$$

$$\text{или } \mu(\partial g / \partial \mu) = \beta(g), \quad (8.4)$$

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2} \left( \frac{11}{6} C_{\text{прис}} - \frac{4}{3} C_f \right). \quad (8.5)$$

Таким образом, до тех пор пока

$$\frac{11}{6} C_{\text{прис}} - \frac{4}{3} C_f > 0, \quad (8.6)$$

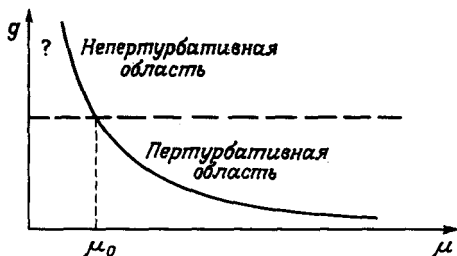
константа связи уменьшается с ростом  $\mu$ ! Такая ситуация называется *асимптотической свободой* (она независимо обнаружена авторами работ [2, 3]). Это открытие имеет колоссальное значение. Из него следует, что если на данном расстоянии  $\mu^{-1}$  константа связи мала и применима теория возмущений, то при уменьшении расстояния эта константа будет и дальше уменьшаться, благодаря чему при таких масштабах можно с еще большей уверенностью пользоваться теорией возмущений. При увеличении же расстояния константа связи растет и выходит из той области, где можно доверять теории возмущений (рис.9).

В пертурбативной области можно проинтегрировать уравнение (8.4), что дает

$$g^2(\mu) = g^2(\mu_0) \left[ 1 + \frac{g^2(\mu_0)}{8\pi^2} \left( \frac{11}{6} C_{\text{прис}} - \frac{4}{3} C_f \right) \ln \frac{\mu}{\mu_0} \right]^{-1}. \quad (8.7)$$

В этой формуле тоже можно произвести разложение, если

$$\frac{g^2(\mu_0)}{8\pi^2} \left( \frac{11}{6} C_{\text{прис}} - \frac{4}{3} C_f \right) \ln \frac{\mu}{\mu_0} \ll 1. \quad (8.8)$$



Р и с. 9.

Поэтому величину  $g^2(\mu)$  можно рассматривать как некую эффективную константу связи, равную в низшем порядке  $g^2(\mu_0)$  и содержащую поправку  $O(g^4(\mu_0))$ :

$$g^2(\mu) \approx g^2(\mu_0) - \frac{g^4(\mu_0)}{8\pi^2} \left( \frac{11}{3} C_{\text{прис}} - \frac{4}{3} C_f \right) \ln \frac{\mu}{\mu_0} + \dots \quad (8.9)$$

Такое поведение можно, конечно, воспроизвести диаграммами, дающими поправку к фундаментальной вершине, но полные поправки к вершине более сложны. Поправки, возникающие при интегрировании уравнений ренормгруппы, обычно содержат только главные логарифмы. Так, в следующем порядке формула (8.7) даст только член с  $\ln^2(\mu/\mu_0)$ .

При  $\mu < \mu_0$ , т.е. на больших расстояниях, вычислениям по теории возмущений доверять нельзя. Это означает, что состояния, с которыми мы имели дело, проводя вычисления по теории возмущений, имеют смысл только на малых расстояниях, где теория асимптотически свободна, но в области больших расстояний становятся сильносвязанными и не могут покинуть область взаимодействия и стать асимптотическими состояниями, если только по какой-то неведомой причине связь не ослабляется снова на еще больших расстояниях (поскольку в этой области еще не проводилось никаких вычислений, мы вольны в своих предположениях). В таком случае у пертурбативных состояний единственная возможность выжить и образовать асимптотические состояния — образовав сложные составные состояния, нейтральные по отношению к дальнедействующим калибровочным силам. Такие нейтральные, или синглетные, комбинации будут все же испытывать мультипольные взаимодействия, но последние короткодействующие и не ме-

няют характера составных состояний. Так мы приходим к гипотезе *конфайнмента* (инфракрасного пленения), согласно которой в асимптотически свободной теории асимптотическими состояниями могут являться только синглеты по отношению к калибровочным силам (в противном случае они не могут избежать влияния сильной связи).

Разберем эту гипотезу в рамках квантовой хромодинамики (КХД), которая, как считается, правильно объясняет физику сильных взаимодействий. Калибровочная группа в этом случае —  $SU(3)$ , а пертурбативные состояния — дираковские фермионы, преобразующиеся по фундаментальному представлению  $\mathbf{3}$  группы  $SU(3)$  и отождествляемые с кварками, и восемь векторных частиц, называемых глюонами. С помощью теории групп нетрудно найти, что

$$C_{\text{прис}} = 3 \text{ для } SU(3),$$

$$C_f = 1/2 \text{ для каждого дираковского фермиона } \sim \mathbf{3}.$$

Следовательно,

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2} \left( 11 - \frac{2}{3} n_f \right), \quad (8.10)$$

если учесть  $n_f$  ароматов кварков (экспериментально  $n_f = 5$ , но теоретически число  $n_f$  должно быть, вероятно, равно 6). Вывод: КХД асимптотически свободна. Поэтому в соответствии со сказанным выше асимптотическими состояниями в теории должны быть не кварки и глюоны, а *составные* частицы, состоящие из кварков, антикварков и глюонов, которые и должны отождествляться с сильновзаимодействующими частицами, известными в лаборатории, такими, как протоны, нейтроны,  $\pi$ -мезоны и т.д. Мы узнаем эти частицы, просто образуя синглеты по отношению к цветным силам! Имеются составные частицы с целым спином, состоящие из кварк-антикварковых пар ( $q\bar{q}$ ) и имеющие спи. 0 или 1 в низших состояниях, в которых спины выстроены параллельно или антипараллельно. На феретико-групповом языке это соответствует разложению

$$\mathbf{3} \times \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} + \mathbf{8}.$$

Фермионные асимптотические состояния можно образовать как

$$(\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3})_A = \mathbf{1} + \mathbf{8} + \mathbf{8}' + \mathbf{10},$$

что соответствует барионам ( $qqq$ ) и антибарионам ( $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$ ) с наименьшими спинами  $3/2$  и  $1/2$  в зависимости от того, как выстроены



спины кварков. Связанные системы  $q\bar{q}$ ,  $qqq$  и  $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$  очень хорошо согласуются с наблюдаемыми состояниями. Жуже обстоит дело с состояниями, составленными из глюонов. Так как

$$(\mathbf{8} \otimes \mathbf{8})_S = 1 + \dots,$$

должно быть асимптотическое состояние, составленное из двух глюонов. Такие состояния не найдены, возможно, из-за значения их массы и распадных параметров. Недостает также синглетных состояний типа  $(q\bar{q}$ -глюон), где  $(q\bar{q})$  образует состояние  $\mathbf{8}$ . Приемлема ли КХД в качестве теории сильных взаимодействий, это в конечном счете зависит от того, позволяет ли она рассчитать в рамках калибровочной теории процессы сильной связи. Однако природа дала нам в руки зонд для малых масштабов, а именно фотоны вне массовой поверхности, образованные либо во времениподобной моде в процессе  $\mu^+e^-$ -аннигиляции, либо в пространственно-подобной моде при излучении налетающим электроном. Эксперимент подтвердил, что по отношению к пространственно-подобному зонду протон выглядит так, будто он составлен из трех кварков (партоновая модель), что подтверждается знаменитыми свойствами скейлинга, обнаруженными в опытах по электророжению. Хотя сравнение теории с экспериментом обычно осложняется из-за трудностей, связанных с инфракрасной расходимостью, все же пространственно-подобные зонды непосредственно связаны с глубоко-евклидовой областью, где, как мы видели, структура теории поля проще всего. Недостатком же данной теории является отсутствие ясности в области сильной связи, затрудняющие принятие обычной физической идентификации калибровочной константы связи, в противовес КЭД, где заряд  $e$  почти непосредственно измерим. Таким аналогом идеальной идентификации в КХД была бы нормировка по отношению, например, к константе  $\pi NN$ - взаимодействия, но, к сожалению, мы просто не знаем, как увязать ее с кварк-кварковой константой связи. Поэтому были разработаны окольные (и очень хитроумные) способы сравнения с экспериментом, но мы здесь на этом не останавливаемся, так как они сами могут составить книгу!

В заключение заметим, что существует размерный параметр, который должен характеризовать рассматриваемую теорию, так как если, скажем, из сравнения с опытом, известна величина  $g^2$  при некотором масштабе  $\mu_1$ , то можно определить, при каком масштабе теория

возмущений теряет применимость. По традиции вводят масштабный параметр  $\Lambda$  в соответствии с равенством

$$g^2(\mu) = \frac{8\pi^2}{\left(\frac{11}{3} C_{\text{прис}} - \frac{4}{3} C_f\right) \ln(\mu/\Lambda)}. \quad (8.11)$$

Сравнение с формулой (8.7) приводит к выражению

$$\ln \Lambda = \ln \mu_0 - \frac{8\pi^2}{g^2(\mu_0) \left(\frac{11}{3} C_{\text{прис}} - \frac{4}{3} C_f\right)}. \quad (8.12)$$

В этом порядке, зная  $\mu_0$  и  $g^2(\mu_0)$ , мы можем найти масштаб  $\Lambda$ , но эта формула не определяет  $\Lambda$  однозначно, так как она получена интегрированием уравнения (8.5), а потому лишь приближенная.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Becchi C., Rouet A., Stora R.*, Phys. Lett., **52B**, 844 (1974).
2. *Politzer H.D.*, Phys. Rev. Lett., **26**, 1346 (1973).
3. *Gross D., Wilczek F.*, Phys. Rev. Lett., **26**, 1343 (1973).

# Приложения

Функциональные гауссовы интегралы будут пониматься как произведение большого числа обычных гауссовых интегралов. Простейший из них

$$G(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2}, \quad (\text{A.1})$$

если воспользоваться приемом Пуассона, заключающимся в том, чтобы возвести в квадрат этот интеграл и перейти в подынтегральном выражении к полярным координатам, оказывается равным

$$G(a) = \sqrt{\pi/a}. \quad (\text{A.2})$$

Можно обобщить это на случай  $N$  степеней свободы. Пусть

$$G(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 \dots dx_N e^{-x_i a_{ij} x_j}, \quad (\text{A.3})$$

где  $A$  — действительная симметричная  $N \times N$ -матрица с матричными элементами  $a_{ij}$ . Напишем

$$x_i a_{ij} x_j = X^T A X, \quad \text{где } A^T = A. \quad (\text{A.4})$$

Матрицу  $A$  можно диагонализировать путем поворота:

$$A = R^T D R, \quad R^T R = R R^T = 1, \quad (\text{A.5})$$

где  $D$  — диагональная матрица со значениями  $d_1, d_2, \dots, d_N$ . Тогда

$$G(A) = \int dx_1 \dots dx_N e^{-X^T R^T D R X} = \quad (\text{A.6})$$

$$= \int dy_1 \dots dy_N e^{-Y^T D Y}, \quad (\text{A.7})$$

где  $Y = R X$ . Якобиан равен единице (докажите это). В переменных  $y$

интеграл  $G(A)$  распадается на  $N$  множителей:

$$G_N(A) = G(d_1)G(d_2) \dots G(d_N) = \quad (A.8)$$

$$= \pi^{N/2} (d_1 d_2 \dots d_N)^{-1/2} = \quad (A.9)$$

$$= \pi^{N/2} (\det A)^{-1/2}, \quad (A.10)$$

если допустить, что все собственные значения матрицы  $A$  положительны. Аналогично можно доказать, что если  $Z_i$  — комплексные переменные (число их равно  $N$ ), то

$$\int \prod_i^N dz_i dz_i^* e^{-z^\dagger C z} = (2\pi)^N (\det C)^{-1}, \quad (A.11)$$

где  $C$  — эрмитова  $N \times N$ -матрица с положительными собственными значениями. Формально можно теперь определить гауссов интеграл по траекториям, перейдя к пределу при  $N \rightarrow \infty$ .

Эти формулы справедливы в случае, когда детерминант отличен от нуля. Если же он равен нулю, то, значит, некоторые  $d_i$  равны нулю, что приводит к бесконечности при интегрировании по бесконечному интервалу. Но нельзя ли получить осмысленный ответ даже в том случае, когда детерминант обращается в нуль? Было бы идеально, если бы удалось отделаться от этих гадких бесконечных интегралов. Можно ли найти такую процедуру? Предположим, что у симметричной  $N \times N$ -матрицы  $A$  имеется  $n$  нулевых собственных значений. В переменных  $y$  определим ограниченный гауссов интеграл

$$G_{\text{огр}}(A) = \int dy_1 \dots dy_{N-n} e^{-x^T(y)Ax(y)}, \quad (A.12)$$

где мы интегрируем только по тем переменным, которые соответствуют ненулевым собственным значениям матрицы  $A$ . Такая форма интеграла  $G_{\text{огр}}(A)$  неудобна, так как он зависит от правильной системы координат  $y$ . Чтобы избавиться от этого, введем новые переменные  $y_{N-n+1}, \dots, y_N$  и перепишем (A.12) в виде

$$G_{\text{огр}}(A) = \int dy_1 \dots dy_{N-n} dy_{(N-n+1)} \dots dy_N \delta(y_{\omega-n+1}) \dots \delta(y_N) e^{-x^T(y)Ax(y)}. \quad (A.13)$$

Затем перейдем от переменных  $y$  к переменным  $x$ , пользуясь формулой Якоби

$$dy_1 \dots dy_N = dx_1 \dots dx_N \det \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|, \quad (A.14)$$

и в результате приходим к окончательному выражению

$$G_{\text{огр}}(A) = \int \left( \prod_1^N dx_i \right) \det \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| \prod_{a=N-n+1}^N \delta(y_a) e^{-x^T A x}. \quad (\text{A.15})$$

Этот интеграл вполне определен. Здесь  $y_a$  — некоторые произвольные функции переменных  $x$ , а дополнительные множители  $\det |\partial y / \partial x| \prod \delta(y)$  в мере эффективно ограничивают интегрирование по  $N$ -мерному пространству интегрированием по  $(N-n)$ -мерному пространству. Как явствует из самого построения,  $G_{\text{огр}}(A)$  не зависит от конкретного вида функций  $y_a(x)$ ,  $a \geq N-n$ . Само собой разумеется, что необходимо правильно выбрать функции  $y_a(x)$ , чтобы они действительно ограничивали область интегрирования, так как иначе якобиан  $\det |\partial y / \partial x|$  будет сингулярным. (Такой метод изменения меры применен для интегралов по траекториям в калибровочных теориях. Это привело к знаменитым духам Фаддеева — Попова в ковариантной калибровке.)

В заключение докажем еще одно соотношение. Рассмотрим теперь,

$$F[A, \omega] \equiv \int \prod_1^N dx_i e^{-x^T A x + \omega^T x}. \quad (\text{A.16})$$

Перепишем показатель экспоненты, дополнив его до полного квадрата:

$$x^T A x - \omega^T x = \left(x - \frac{1}{2} A^{-1} \omega\right)^T A \left(x - \frac{1}{2} A^{-1} \omega\right) - \frac{1}{4} \omega^T A^{-1} \omega, \quad (\text{A.17})$$

при условии, что обратная матрица  $A^{-1}$  существует. Полагая

$$x^* = x - \frac{1}{2} A^{-1} \omega, \quad (\text{A.18})$$

так что  $dx_i^* = dx_i$ , находим

$$F[A, \omega] = e^{-\frac{1}{4} \omega^T A^{-1} \omega} \int \prod_{i=1}^N dx_i^* e^{-x^{*T} A x^*}. \quad (\text{A.19})$$

$$= \pi^{N/2} e^{-\frac{1}{4} \omega^T A^{-1} \omega} (\det A)^{-1/2}. \quad (\text{A.20})$$

И вновь результат для интеграла по траекториям формально получается переходом к пределу  $N \rightarrow \infty$ .

## Б. Интегрирование при произвольном числе измерений

Рассмотрим интеграл

$$I_N = \int d^N l F(l), \quad (\text{Б.1})$$

где  $F(l)$  — произвольная функция только длины  $l_\mu$  ( $\mu = 1, \dots, N$ ), а  $N$  — целое число. Введем полярные координаты в  $N$  измерениях

$$(l_1, \dots, l_N) \rightarrow (L, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{N-2}),$$

$$\text{где } L^2 = l_\mu l_\mu. \quad (\text{Б.2})$$

Тогда

$$d^N l = L^{N-1} dL d\varphi \sin \theta_1 d\theta_1 \sin^2 \theta_2 d\theta_2 \dots \sin^{N-2} \theta_{N-2} d\theta_{N-2}, \quad (\text{Б.3})$$

где считается, что переменные принимают значения в интервалах  $0 < L < \infty$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$ ;  $0 < \theta_i < \pi$ ,  $i = 1, \dots, N-2$ . (Б.4)

Нетрудно показать, что

$$I_N = 2\pi \prod_{k=1}^{N-2} \int_0^\pi \sin^k \theta_k d\theta_k \int_0^\infty L^{N-1} dL F(L). \quad (\text{Б.5})$$

Пользуясь хорошо известной формулой

$$\int_0^{\pi/2} (\sin t)^{2x-1} (\cos t)^{2y-1} dt = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \text{Re } x, \text{Re } y > 0, \quad (\text{Б.6})$$

причем  $\gamma = 1/2$ , получаем

$$\int_0^\pi \sin^k t dt = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^k t dt = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}. \quad (\text{Б.7})$$

Подставляя этот результат в (Б.5), приходим к формуле

$$I_N = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} \int_0^\infty dx x^{(N-2)/2} F(x), \quad (\text{Б.8})$$

в которой  $x = L^2$ .

В общем случае  $F(x)$  имеет вид

$$F(x) = (x + a^2)^{-A}, \quad A = 2, 3, \dots, \quad (\text{Б.9})$$

что приводит к формуле

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{(N-2)/2}}{(x + a^2)^A} = (a^2)^{-A + N/2} \int_0^\infty dy y^{(N-2)/2} (1 + y)^{-A}. \quad (\text{Б.10})$$

Сравнивая с выражением для бета-функции

$$\begin{aligned} B\left(\frac{N}{2}, A - \frac{N}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \Gamma\left(A - \frac{N}{2}\right)}{\Gamma(A)} = \\ &= \int_0^\infty dy y^{(N/2) - 1} (1 + y)^{-A}, \end{aligned} \quad (\text{Б.11})$$

справедливым при  $\text{Re}(N/2) > 0$  и  $\text{Re}[A - (N/2)] > 0$ , получаем окончательный результат

$$\int \frac{d^N l}{(l^2 + a^2)^A} = \pi^{N/2} \frac{\Gamma\left(A - \frac{N}{2}\right)}{\Gamma(A)} \frac{1}{(a^2)^{A - N/2}}. \quad (\text{Б.12})$$

Мы вывели это выражение в случае целого  $N$  при  $\text{Re}[A - (N/2)] > 0$ ,  $\text{Re}(N/2) > 0$ . Примем теперь, что при аналитическом продолжении выражение (Б.12) верно и в случае нецелых  $N$ .

Далее, полагая  $l = l' + p$  и вводя обозначение  $b^2 = a^2 + p^2$ , мы можем записать (Б.12) в виде

$$\int \frac{d^N l}{(l^2 + 2p \cdot l + b^2)^A} = \pi^{N/2} \frac{\Gamma(A - N/2)}{\Gamma(A)} \frac{1}{(b^2 - p^2)^{A - N/2}}. \quad (\text{Б.13})$$

Теперь, последовательно дифференцируя выражение (Б.13) по  $p_\mu$ , нетрудно получить формулы

$$\int d^N l \frac{l_\mu}{(l^2 + 2p \cdot l + a^2)^A} = \pi^{N/2} \frac{\Gamma(A - N/2)}{\Gamma(A)} \frac{(-p_\mu)}{(a^2 - p^2)^{A - N/2}}, \quad (\text{Б.14})$$

$$\int d^N l \frac{l_\mu l_\nu}{(l^2 + 2p \cdot l + a^2)^A} = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(A)(a^2 - p^2)^{A-N/2}} \times$$

$$\times \left[ \Gamma\left(A - \frac{N}{2}\right) p_\mu p_\nu + \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \Gamma\left(A - 1 - \frac{N}{2}\right) (a^2 - p^2) \right].$$

(Б.15)

Эти формулы выведены для евклидова пространства, и в каждом случае принимается, что правая часть является правильным продолжением левой части на нецелые значения  $N$ .

*Сводка формул размерной регуляризации*

$$\int \frac{d^{2\omega} l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(l^2 + M^2 + 2l \cdot p)^A} = \frac{\Gamma(A - \omega)}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \frac{1}{(M^2 - p^2)^{A - \omega}},$$

(Б.16)

$$\int \frac{d^{2\omega} l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{l_\mu}{(l^2 + M^2 + 2l \cdot p)^A} = - \frac{\Gamma(A - \omega)}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \frac{p_\mu}{(M^2 - p^2)^{A - \omega}},$$

(Б.17)

$$\int \frac{d^{2\omega} l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{l_\mu l_\nu}{(l^2 + M^2 + 2l \cdot p)^A} = \frac{1}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \times$$

$$\times \left[ p_\mu p_\nu \frac{\Gamma(A - \omega)}{(M^2 - p^2)^{A - \omega}} + \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \frac{\Gamma(A - 1 - \omega)}{(M^2 - p^2)^{A - 1 - \omega}} \right],$$

(Б.18)

$$\int \frac{d^{2\omega} l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{l_\mu l_\nu l_\rho}{(l^2 + M^2 + 2l \cdot p)^A} = \frac{-1}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \left[ p_\mu p_\nu p_\rho \frac{\Gamma(A - \omega)}{(M^2 - p^2)^{A - \omega}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} (\delta_{\mu\rho} p_\nu + \delta_{\nu\rho} p_\mu + \delta_{\mu\nu} p_\rho) \frac{\Gamma(A - 1 - \omega)}{(M^2 - p^2)^{A - 1 - \omega}} \right],$$

(Б.19)

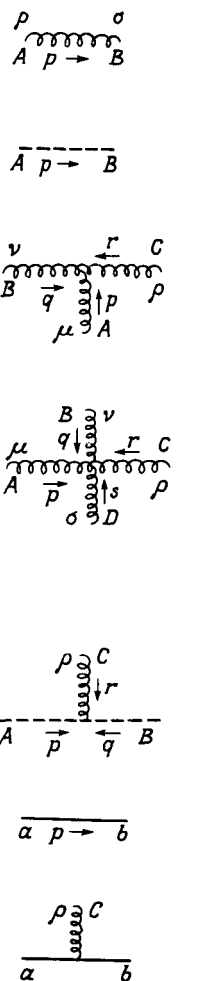
$$\int \frac{d^{2\omega} l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{l_\mu l_\nu l_\rho l_\sigma}{(l^2 + M^2 + 2l \cdot p)^A} = \frac{1}{(4\pi)^\omega \Gamma(A)} \times$$

$$\times \left\{ p_\mu p_\nu p_\rho p_\sigma \frac{\Gamma(A - \omega)}{(M^2 - p^2)^{A - \omega}} + \frac{1}{2} [\delta_{\mu\nu} p_\rho p_\sigma + \delta_{\nu\sigma} p_\mu p_\rho + \delta_{\rho\sigma} p_\mu p_\nu + \right.$$



$$\begin{aligned}
 & + \delta_{\mu\rho} p_\nu p_\sigma + \delta_{\nu\rho} p_\mu p_\sigma + \delta_{\mu\sigma} p_\rho p_\nu \} \frac{\Gamma(A-1-\omega)}{(M^2-p^2)^{A-1-\omega}} + \frac{1}{4} [\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} + \\
 & + \delta_{\nu\rho} \delta_{\mu\sigma} + \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma}] \times \frac{\Gamma(A-2-\omega)}{(M^2-p^2)^{A-2-\omega}} \} i \quad (B.20)
 \end{aligned}$$

**В. Фейнмановские правила в ковариантной калибровке  
в евклидовом пространстве (2ω измерений)**



The diagrams show various propagators and vertices:

- Photon propagator:** A wavy line between points A and B with momentum p. The corresponding rule is  $\frac{\delta^{AB}}{p^2} [\delta_{\rho\sigma} - (1-\alpha) \frac{p_\rho p_\sigma}{p^2}]$ .
- Ghost propagator:** A dashed line between points A and B with momentum p. The corresponding rule is  $-i \frac{\delta^{AB}}{p^2}$ .
- Three-gluon vertex:** Three wavy lines meeting at a point. Momenta are labeled r, q, p. The corresponding rule is  $-ig\mu^{2-\omega} f^{ABC} [(r-g)_\mu \delta_{\nu\rho} + (q-p)_\rho \delta_{\mu\nu} + (p-r)_\nu \delta_{\rho\mu}]$  with  $p+q+r=0$ .
- Four-gluon vertex:** Four wavy lines meeting at a point. Momenta are labeled q, r, p, s. The corresponding rule is  $-g^2 \mu^{4-2\omega} [f^{ABE} f^{CDE} (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\rho} \delta_{\mu\sigma}) + f^{CBE} f^{ADE} (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\mu} \delta_{\rho\sigma}) + f^{DBE} f^{CAE} \times (\delta_{\sigma\rho} \delta_{\nu\mu} - \delta_{\nu\rho} \delta_{\mu\sigma})]$ .
- Ghost-gluon vertex:** A wavy line and a dashed line meeting at a point. Momenta are labeled r, q. The corresponding rule is  $-g\mu^{2-\omega} f^{ABC} q_\rho$ .
- Feynman propagator:** A solid line between points a and b with momentum p. The corresponding rule is  $-i \frac{\delta^a_b}{\hat{p}+m}$ , labeled as "фермионная линия".
- Gluon-gluon vertex:** A wavy line and a solid line meeting at a point. Momenta are labeled p, c. The corresponding rule is  $-ig\mu^{2-\omega} \gamma_\rho (T_f^c)^a_b$ .

# Библиография

Цель этой аннотированной библиографии в том, чтобы несколько сгладить вводный характер основного текста книги, предложив читателю список литературы, в которой материал изложен значительно подробнее и глубже. Автор приносит извинения за возможные пропуски.

Существует много превосходных учебников по квантовой теории поля. Приводим здесь лишь некоторые из них в алфавитном порядке авторов.

*Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Пятаевский Л.П.* Релятивистская квантовая теория, ч. I. — М.: Наука, 1968.

*Боголюбов Н. Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука, 1976.

*Bjorken J.D., Drell S.D.* Relativistic Quantum Mechanics; Relativistic Quantum Fields. — N.Y.: McGraw-Hill, 1965. (Имеется перевод: *Бьеркен Дж. Д., Дрелл С.Д.* Релятивистская квантовая теория, т. I, II. — М.: Наука, 1978.)

*Лифшиц Е.М., Пятаевский Л.П.* Релятивистская квантовая теория, ч. II. — М.: Наука, 1971.

*Mandl F.* Introduction to Quantum Field Theory. — N.Y.: Wiley-Interscience, 1959.

*Nash C.* Relativistic Quantum Fields. — N.Y.: Academic Press, 1978.

*Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — М.: Наука, 1978.

*Taylor J.C.* Gauge Theory of Weak Interactions. — Cambridge: Cambridge University Press, 1976. (Имеется перевод: *Тейлор Дж.* Калибровочные теории слабых взаимодействий. — М.: Мир, 1978.)

*Schweber S.* An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory. — N.Y.: Harper and Row, 1961. (Имеется перевод: *Швебер С.* Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. — М.: ИЛ, 1961.)

*Jauch J.M., Rohrlich F.* The theory of Photons and Electrons. — Cambridge: Addison-Wesley, 1955.

Рекомендуем также замечательные лекции Коулмена, прочитанные им на Международной школе субъядерной физики "Эttore Майорана":

"Дилатации" (о нарушении конформной инвариантности квантовыми эффектами) (*Coleman S. Dilatations. In: Properties of Fundamental Interactions (Proc. of the 9. Course of "Ettore Majorana" Intern. School)/Ed. A. Zichichi. — N.Y.: Acad. Press, 1973.*)

"Перенормировка. Обзор для неспециалистов". (*Coleman S. Renormalization: a Review for Non-Specialists. In: "Properties of Fundamental Interactions" (Proc. of the 9. Course of "Ettore Majorana" Intern. School)/Ed. A. Zichichi. — N.Y., Acad. Press, 1973.*)

"Тайная симметрия" (о механизме Хиггса и калибровочных теориях). (*Coleman S. Secret Symmetry. In: Laws of Hadronic Matter (Proc. of the 11. Course of "Ettore Majorana" Intern. School)/Ed. A. Zichichi. — N.Y.; Acad. Press, 1975.*) (имеется перевод в сб.: Квантовая теория калибровочных полей. — М.: Мир, 1977.)

"Применения инстантонов". (*Coleman S. The Uses of Instantons. In: The Whys of Subnuclear Physics (Proc. of the 1977 Int. School of Subnuclear Physics, Erice, Italy)/Ed. A. Zichichi. — N.Y., Plenum, 1979.*)

Более подготовленные читатели получают удовольствие от чтения обзоров:

*Abers E.S., Lee B.W. Gauge Theories. — Physics Reports, 9C, 1, 1973.* (Имеется перевод в сб.: Квантовая теория калибровочных полей. — М.: Мир, 1977.)

*Balian R., Zinn-Justin J. In: Methods in Field Theory (Proc. of the 1975 Les Houches Summer School). — Amsterdam: North-Holland, 1976.*

Ниже мы приводим дополнительные ссылки по каждой главе основного текста.

## ГЛАВА 1

§ 1. Подробное исследование связи между инвариантностями лагранжиана и законами сохранения можно найти в статье:

*Hill E.L., Rev. Mod. Phys., 23, 253 (1951).*

§ 2, 3. Стандартные ссылки по поводу группы Лоренца: *Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения. — М.: Физматгиз, 1968.

*Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я.* Обобщенные функции, Т. 5. — М.: Физматгиз, 1962.

Много оригинальных работ по теории представлений групп Лоренца и Пуанкаре перепечатано в книге:

*Dyson F.J. Symmetry Groups in Nuclear and Particle Physics.* — N.Y., Benjamin, 1966.

Еще одно прекрасное изложение теории представлений содержится в конспектах лекций Ф.Гюрши по теории поля (1970 г.) (неопубликовано).

§ 4 – 7. Трансформационные свойства полей обсуждаются в работе:

*Kibble T.W., Journ. Math. Phys., 2, 212 (1961).*

§ 8. Суперсимметрия впервые появилась в работах, связанных с моделями струны:

*Ramond P., Phys. Rev., D3, 2415 (1971).*

*Neveu A., Schwarz J., Nucl. Phys., B31, 86 (1971).*

Она же возникла как обобщение группы Пуанкаре в работах:

*Гольфанд Ю.Ф., Лихтман Е.П. — Письма в ЖЭТФ, 1971, т. 13, с. 452.*

*Волков Д.В., Акулов В.П. — Письма в ЖЭТФ, 1972, т. 16, с. 621.*

*Wess J., Zumino B., Nucl. Phys., B70, 39 (1974).*

Подробный обзор суперсимметрии:

*Fayet P., Ferrara S., Phys. Reports, 32C, 249 (1977).*

## ГЛАВА 2

§ 1. Подробнее о канонических преобразованиях см. книги:

*Goldstein H. Classical Mechanics.* — Reading, Mass., 1950. (Имеется перевод: *Голдстейн Г. Классическая механика.* — М.: Наука, 1975.)

*Mukunda N., Sudarshan E.C.G. Classical Dynamics: A Modern Perspective.* — N.Y.: Wiley-Interscience, 1974.

§ 2, 3. Первые работы, посвященные интегралам по траекториям, можно найти в сборнике репринтов:

*Selected Papers on Quantum Electrodynamics/Ed. J. Schwinger.* — N.Y.: Dover, 1958.

Применения интеграла по траекториям детально освещены в книге:

*Feynman R.P., Hibbs A.R. Quantum Mechanics and Path Integrals.* — N.Y.: McGraw-Hill, 1965. (Имеется перевод: *Фейнман Р.П., Хибс А.Р.*

*Квантовая механика и интегралы по траекториям.* — М.: Мир, 1968.)

## ГЛАВА 3

§ 1 – 4. Наше изложение близко цитированной работе Аберса и Ли; см. также:

*Lurie D. Particles and Fields.* — N.Y.: Interscience, 1968.

§ 5, 6. По поводу вычисления детерминантов с помощью  $\zeta$ -функций см. работы:

*Ray D.B., Singer I.M., Adv. Math., 7, 145 (1971).*

*Dowker J.S., Critchley R., Phys. Rev., D13, 3224 (1976).*

*Corrigan E., Goddard P., Osborn H., Templeton S., Nucl. Phys., B 159, 469 (1979).*

## ГЛАВА 4

§ 3. Общепринятые ссылки по поводу размерной регуляризации (помимо тех, которые приведены в тексте):

*Bollini C.G., Giambiagi J.J., Nuovo Cimento, 12B, 20 (1972).*

*Ashmore J.F., Nuovo Cimento Lett., 4, 289 (1972).*

Обзор на эту тему:

*Leibbrandt G., Rev. Mod. Phys., 47, 849 (1975).*

§ 5. Понятное объяснение перенормировки можно найти в цитированных лекциях Коулмена. См. также:

*Collins J.C., Phys. Rev., D10, 1213 (1974).*

По поводу доказательства перенормируемости см.:

*Zimmermann W.* In: *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory/Eds. S.Deser, M.Grisaru, H.Pendleton.* – Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1970

и цитированную работу Аберса и Ли. Ренормгруппа обсуждается в работах:

*Stückeberg E.C.G., Petermann A., Helv. Physica Acta, 26, 499 (1953).*

*Gell-Mann M., Low F., Phys. Rev., 95, 1300 (1954).*

*Callan C.C.* In: *Methods in Field Theory, Amsterdam: North-Holland, 1975.*

Отличительные черты разных уравнений ренормгруппы обсуждаются в работе:

*Weinberg S., Phys. Rev., D8, 3497 (1973).*

§ 8, 9

*Eden R.J., Landshoff P.V., Olive D.I., Polkinghorne J.C.* *The Analytic S-Matrix.* – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1966 и цитированная книга Лифшица и Питаевского,

## ГЛАВА 5

Основная ссылка к материалу этой главы:

*Березин Ф.А.* *Метод вторичного квантования.* – М.: Наука, 1965.

Кроме этого, см., конечно, лекции Коулмена "Применения инстантонов", цитированные выше.

## ГЛАВА 6

§ 1, 2. В дополнение к цитированным работам Янга и Миллса и Киббла см.:

*Utiyama R., Phys. Rev., 101, 1597 (1956).*

*Gell-Mann M., Glashow S.L., Ann. Phys. (N.Y.), 15, 437 (1961).*

§ 3. По поводу инстантонов см. лекции Коулмена "Применения инстантонов" и цитированную книгу Тейлора. Упорядоченные по траекториям экспоненты впервые были введены в работе:

*Mandelstam S., Ann. Phys. (N.Y.), 19, 1 (1962).*

## ГЛАВА 7

§ 1. Прекрасное изложение теории гамильтоновых систем со связями содержится в лекциях Дирака:

*Dirac P.A.M. Lectures on Quantum Mechanics. — N.Y.: Yeshiva University, 1964.*

*Dirac P.A.M. Lectures on Quantum Field Theory. — N.Y.: Yeshiva University, 1965. (Имеется перевод в книге: Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. — М.: Наука, 1979.)*

§ 2. См. книгу Славнова и Фаддеева, а также лекции Фаддеева в книге "Методы теории поля" (Methods in Field Theory), цитированной выше.

## ГЛАВА 8

§ 1. Необходимость введения полей-духов в ковариантных калибровках впервые была отмечена в работах:

*Feynman R.P., Acta Physica Polonica, 24, 697 (1963).*

*De Witt B.S., Phys. Rev., 162, 1195 (1967).*

§ 2, 4. Квантовая электродинамика широко обсуждается во многих учебниках. В дополнение к уже цитированным укажем книги:

*Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика.*

Изд. 3-е. — М.: Наука, 1969.

*Feynman R.P., Quantum Electrodynamics. — N.Y.: Benjamin, 1961.*

(Имеется перевод: Фейнман Р.П. Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1964.)

*Källén G. Quantum Electrodynamics. — Berlin: Springer-Verlag, 1972.*

По поводу размерной регуляризации в КЭД см., например, работу:

*Collins J.C., McFarlane A.J., Phys. Rev., D10, 1201 (1973).*

§ 3

*Ward J.C., Phys. Rev., 78, 182 (1950).*

- *Takahashi Y., Nuovo Cimento, 6, 370 (1957).*

§ 4. Использованию размерной регуляризации для выявления инфракрасных расходимостей посвящены работы:

*Gastmans R., Mendermans R., Nucl. Phys., B63, 277 (1973).*

*Marciano W.J., Phys. Rev., D12, 3861 (1975).*

§ 5. Доказательство перенормируемости янг-миллсовских теорий

содержится в работе:

't Hooft G., Nucl. Phys., **В33**, 173 (1971).

См. также цитированную работу Аберса и Ли.

§ 7

Славнов А.А., ТМФ, 1972, т. 10, с. 153.

Taylor J.C., Nucl. Phys., **В33**, 436 (1971).

§ 8. Впервые явление асимптотической свободы было отмечено

'т Хофтом в 1972 г. на конференции по лагранжевой теории поля в Марселе; за бóльшими деталями и дополнительными ссылками мы отсылаем читателя к обзору:

Politzer H.D. "Asymptotic Freedom: An Approach to Strong Interactions", Phys. Reports, **14С**, 129 (1974).

Применения КХД изложены в лекциях Филда "Применения квантовой хромодинамики", прочитанных в 1978 г. (Field R.D. "Applications of Quantum Chromodynamics", Lectures given at the La Jolla Institute Summer Workshop, 1978).

### Литература, добавленная при переводе

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Квантовые поля. — М.: Наука, 1980.
2. Волошин М.Б., Гер-Мартиросян К.А. Теория калибровочных взаимодействий элементарных частиц. — М.: Энергоатомиздат, 1984.
3. Ицксон К., Зюбер Ж-Б. Квантовая теория поля. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1983.
4. Попов В.Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. — М.: Атомиздат, 1976.
5. Новожилов Ю.В. Введение в теорию элементарных частиц. — М.: Наука, 1972.

# Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА . . . . .	5
ПРЕДИСЛОВИЕ . . . . .	9
<i>Глава 1. Функционал действия . . . . .</i>	<i>11</i>
§ 1. Элементарные сведения . . . . .	11
§ 2. Группа Лоренца (беглый обзор) . . . . .	15
§ 3. Группа Пуанкаре . . . . .	21
§ 4. Локальные поля и преобразования группы Пуанкаре . . . . .	24
§ 5. Общие свойства действия . . . . .	36
§ 6. Действие для скалярных полей . . . . .	43
§ 7. Действие для спинорных полей . . . . .	47
§ 8. Действие со скалярными и спинорными полями и суперсимметрия . . . . .	53
<i>Глава 2. Функционал действия в квантовой механике: фейнмановский     интеграл по траекториям . . . . .</i>	<i>61</i>
§ 1. Канонические преобразования в классической и квантовой механике . . . . .	62
§ 2. Фейнмановский интеграл по траекториям . . . . .	67
§ 3. Интеграл по траекториям и гармонический осциллятор, находящийся под действием силы . . . . .	74
<i>Глава 3. Фейнмановский интеграл по траекториям в теории поля . . . . .</i>	<i>80</i>
§ 1. Производящий функционал . . . . .	80
§ 2. Фейнмановский пропагатор . . . . .	83
§ 3. Эффективное действие . . . . .	88
§ 4. Вычисление интеграла по траекториям методом перевала . . . . .	94
§ 5. Первые квантовые поправки. Вычисление детерминантов с помощью $\zeta$ -функции . . . . .	102
§ 6. Изменение масштаба детерминантов. Константа связи, зависящая от масштаба . . . . .	107
<i>Глава 4. Вычисление фейнмановского интеграла по траекториям методом     теории возмущений: теория <math>\phi^4</math> . . . . .</i>	<i>111</i>
§ 1. Фейнмановские правила для теории $\lambda\phi^4$ . . . . .	111
§ 2. Расходимости фейнмановских диаграмм . . . . .	120



§ 3. Размерная регуляризация фейнмановских интегралов . . . . .	127
§ 4. Вычисление фейнмановских интегралов . . . . .	132
§ 5. Перенормировка . . . . .	141
§ 6. Рецепты перенормировки . . . . .	152
§ 7. Зависимость коэффициентов ренормгруппы от рецепта . . . перенормировки . . . . .	164
§ 8. Продолжение в пространство Минковского, аналитичность . . . . .	166
§ 9. Сечения и унитарность . . . . .	172
<i>Глава 5. Интеграл по траекториям при наличии фермионов . . . . .</i>	<i>181</i>
§ 1. Интегрирование по грассмановым числам . . . . .	181
§ 2. Интеграл по траекториям для свободных ферми-полей . . . . .	185
§ 3. Фейнмановские правила для спинорных полей . . . . .	191
§ 4. Вычисление и масштабное преобразование фермионных детерминантов . . . . .	196
<i>Глава 6. Калибровочные симметрии, конструкция Янга – Миллса . . . . .</i>	<i>203</i>
§ 1. Глобальные и локальные симметрии . . . . .	203
§ 2. Построение локально симметричных лагранжианов . . . . .	214
§ 3. Чисто янг-миллсовская теория . . . . .	220
<i>Глава 7. Интеграл по траекториям в калибровочных теориях . . . . .</i>	<i>232</i>
§ 1. Гамильтонов формализм в калибровочных теориях, абелев случай . . . . .	232
§ 2. Гамильтонов формализм для калибровочных теорий, неабелев случай . . . . .	241
§ 3. Непосредственное определение янг-миллсовского ФИТ, процедура Фаддеева – Попова . . . . .	249
<i>Глава 8. Вычисления по теории возмущений в калибровочных теориях . . . . .</i>	<i>253</i>
§ 1. Фейнмановские правила для калибровочных теорий в евклидовом пространстве . . . . .	253
§ 2. КЭД, однопетлевая структура . . . . .	261
§ 3. КЭД, тождества Уорда . . . . .	274
§ 4. КЭД, применения . . . . .	280
§ 5. Янг-миллсовская теория, предварительные замечания . . . . .	287
§ 6. Янг-миллсовская теория, однопетлевая структура . . . . .	292
§ 7. Янг-миллсовская теория, тождества Славнова – Тейлора . . . . .	305
§ 8. Янг-миллсовская теория, асимптотическая свобода . . . . .	311

---

Приложения . . . . .	317
А. Гауссово интегрирование . . . . .	317
Б. Интегрирование при произвольном числе измерений . . . . .	320
В. Фейнмановские правила в ковариантной калибровке в евклидовом пространстве ( $2\omega$ измерений) . . . . .	323
БИБЛИОГРАФИЯ . . . . .	324