В.С.Пугачев, И.Н.Синицын

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ. АНАЛИЗ И ФИЛЬТРАЦИЯ

Дается систематическое изложение современной теории стохастических дифференциальных систем. В основу построения теории положены уравнения для конечномерных характеристических функций случайных процессов, определяемых стохастическими дифференциальными уравнениями. Излагаются необходимые сведения по теории дифференциальных систем и теории случайных функций, общая теория стохастических дифференциальных систем, точные методы статистического анализа линейных систем, приближенные методы анализа нелинейных систем, теория оптимальной фильтрации, методы субоптимальной нелинейной фильтрации и теория условно оптимальной фильтрации и экстраполяции случайных процессов, определяемых стохастическими дифференциальными уравнениями. Для облегчения усвоения излагаемых методов в книге дано свыше 300 примеров и задач.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Во втором издании книга подверглась существенной переработке. В нее внесены дополнения в соответствии с развитием излагаемой теории за годы, прошедшие с момента выхода в свет первого издания. В частности, включены все дополнения, вошедшие в английское издание книги, содержащие методы, необходимые для исследования систем, управляемых с помощью ЭВМ. *) Математические модели таких систем включают как стохастические дифференциальные уравнения, так и разностные уравнения. Распространение излагаемой в книге теории на такие непрерывно-дискретные системы дано в соответствующих разделах глав 1, 5, 6, 9. В частности, в главу 9 включен новый параграф (§ 9.5), посвященный новому перспективному направлению в теории фильтрации — условно оптимальной дискретной фильтрации и экстраполяции процессов в стохастических дифференциальных системах. Кроме теории стохастических непрерывно-дискретных систем, добавлены вошедшие в английское издание книги новые п. 6.6.7 и п. 8.2.6, содержащие методы сокращения числа уравнений для параметров распределений процессов в многомерных нелинейных стохастических дифференциальных системах.

В последние годы методы исследования стохастических дифференциальных систем были распространены на широкий класс систем, описываемых стохастическими интегро-дифференциальными уравнениями. Таким системам, которые авторы называли системами, приводимыми к дифференциальным системам, и методам их приведения к дифференциальным системам, посвящены новые параграфы (§ 1.5 и § 5.5).

Важную роль в современной теории стохастических систем играют системы со случайно изменяющейся структурой. Излагаемые в книге методы легко распространяются на такие системы. В связи с этим в книгу добавлены новые пп. 1.4.3 и 5.3.10, посвященные применению уравнений для конечномерных распре-

---

*) *Pugachev V. S., Sinitsyn I. N.* Stochastic Differential Systems. Analysis and Filtering.— Chichester: John Wiley & Sons, 1987.

делений вектора состояния к стохастическим дифференциальным системам со случайно изменяющейся структурой.

В связи с необходимостью широкого распространения методов теории стохастических систем и их применения во всех отраслях народного хозяйства большое значение приобретает проблема сокращения числа уравнений для параметров распределения вектора состояния системы и разработка соответствующих приближенных методов для исследования многомерных стохастических дифференциальных систем. Наиболее радикальное сокращение числа уравнений для параметров одномерного распределения дает разработанный в последнее время метод эллипсоидальной аппроксимации распределения. Этот метод изложен в новых § 6.7, п. 8.2.7 и приложении 2, написанных В. И. Синицыным по материалам его работ [116].

В соответствии с включением нового приложения 2 нумерация приложений в книге изменилась по сравнению с первым изданием: приложения 2—5 в первом издании получили номера 3—6 во втором издании.

Все опечатки и неточности, замеченные в первом издании и в английском издании, исправлены.

Современная теория стохастических систем располагает мощными методами для исследования процессов в стохастических системах, в частности методами исследования стохастических дифференциальных систем, изложенными в книге. Однако эти методы находят пока лишь ограниченное применение, так как они сложны и требуют очень громоздких вычислений, особенно в случае систем высокой размерности. А главное — составление необходимого для применения этих методов большого количества уравнений для вероятностных характеристик представляет собой сложную задачу, требующую больших затрат времени квалифицированного научного сотрудника. Впрочем, вопросы ограниченности практических применений относятся не только к теории стохастических систем, но и вообще ко всей математике. Современный прогресс в области вычислительной техники и информатики делает математические методы потенциально применимыми буквально во всех областях человеческой деятельности. Однако для практического применения математических методов необходимы глубокие знания в области математики, в частности для практического применения методов теории стохастических систем необходима достаточно хорошая подготовка в этой области. Такая подготовка, естественно, отсутствует у огромного большинства специалистов в различных областях науки и отраслях народного хозяйства, не связанных в своей практической деятельности с математикой. Предполагать, что какая-то часть этих специалистов может выучить соответствующие разделы математики (конечно отложив на время свою обычную работу), нельзя. Это совершенно невозможно.

Таким образом, единственный способ обеспечить широкое применение математических методов и, в частности, методов теории стохастических систем во всех областях науки и отраслях народного хозяйства — создание такого интеллектуализированного программного обеспечения для ЭВМ массового применения (в первую очередь для персональных ЭВМ), которое позволит специалистам в различных областях, не имеющим специальной математической подготовки и подготовки в области программирования, пользоваться математическими методами для решения задач, возникающих в их практической деятельности. Только создание такого программного обеспечения позволит широко внедрить математические методы, в частности методы теории стохастических систем в практику.

Работы по созданию такого интеллектуализированного программного обеспечения уже ведутся. Первые шаги в этом направлении были ориентированы на автоматизацию наиболее трудоемкой части исследования стохастических дифференциальных систем — вывод уравнений для параметров распределения из исходных стохастических уравнений.

После первых программ на языке Фортран-4, ориентированных на автоматизацию составления и решения уравнений для параметров распределений для систем невысокой размерности с полиномиальными нелинейностями [22], в Институте проблем информатики (ИПИ) АН СССР были разработаны программы, реализующие метод нормальной аппроксимации для нелинейных систем практически любой размерности [109, 110]. Применение этих программ освобождает исследователей, владеющих основами программирования, от очень трудоемкой работы по составлению уравнений для параметров распределений.

В последнее время в ИПИ АН СССР создан диалоговый интегрированный пакет прикладных программ «СтС-Анализ», предназначенный для решения методами теории стохастических систем разнообразных задач, для которых известна математическая модель в форме стохастических дифференциальных уравнений, а также для обучения в системе высшего образования по ряду разделов в курсах «Теория вероятностей и случайные процессы», «Теория управления», «Автоматизация научных исследований», «Стохастические системы» (лабораторные и курсовые работы) [106]. Версия 1.1 пакета «СтС-Анализ» реализует метод нормальной аппроксимации для статистического анализа многомерных стохастических дифференциальных систем следующих типов: линейные стационарные системы, линейные нестационарные системы, линейные системы со случайными параметрами, линейные системы с параметрическими шумами, нелинейные системы с полиномиальными нелинейностями.

В процессе исследования пакет «СтС-Анализ» выполняет следующие функции: ввод стохастических дифференциальных уравнений модели исследуемой системы в естественной математической форме с показом их на экране дисплея и с возможностью редактирования, хранения этих уравнений, просмотра и удаления; автоматическое составление обыкновенных дифференциальных уравнений для математического ожидания и ковариационной матрицы; решение этих уравнений; графическую визуализацию результатов расчетов в форме таблиц и графиков, как во время вычислительного эксперимента, так и после его завершения; вывод результатов расчетов в файл для получения твердых копий. Следующие версии пакета «СтС-Анализ» реализуют представленные в книге другие, более точные методы нахождения одномерных распределений процессов в стохастических дифференциальных системах, а также методы анализа систем, описываемых другими видами стохастических уравнений. Такое же математическое обеспечение создается для автоматизации проектирования условно оптимальных фильтров. Все это математическое обеспечение предназначено для специалистов в различных областях, не имеющих ни специальной математической подготовки, ни подготовки в области вычислительной техники и программирования, и ориентировано на использование персональных ЭВМ, совместимых с IBM PC-XT, AT.

Без такого интеллектуализированного математического обеспечения широкое применение математических методов во всех отраслях народного хозяйства невозможно.

Авторы благодарны И. В. Синицыной и В. И. Синицыну за активное участие в подготовке книги ко второму изданию и Н. Т. Ярославцевой за перепечатку всех вставок и дополнений.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Книга написана на основе курсов лекций, читавшихся В. С. Пугачевым студентам факультета прикладной математики Московского авиационного института им. С. Орджоникидзе и И. Н. Синицыным студентам и аспирантам Московского высшего технического училища им. Н. Э. Баумана.

Книга рассчитана на студентов и аспирантов факультетов прикладной математики университетов и высших технических учебных заведений. Она может быть полезной также для инженеров и научных работников в области теории управления, прикладной механики, а также в других областях науки и техники, изучающих системы, поведение которых описывается стохастическими дифференциальными уравнениями (стохастические дифференциальные системы). Книга может быть полезной также и для математиков, специализирующихся в области стохастических дифференциальных уравнений.

Книга ориентирована в первую очередь на прикладников. В ней изложены прикладные методы исследования стохастических дифференциальных систем, в частности методы нахождения конечномерных распределений вектора состояния и выходных сигналов таких систем, а также методы оценивания состояния и параметров дифференциальных систем по результатам наблюдений (теория фильтрации и экстраполяции).

За основу построения теории стохастических дифференциальных систем приняты уравнения для конечномерных характеристических функций процессов, определяемых стохастическими дифференциальными уравнениями, полученные В. С. Пугачевым [55, 62, 63]. При этом изучаются стохастические дифференциальные уравнения общего типа с произвольными процессами с независимыми приращениями. Уравнения с винеровскими процессами рассматриваются как частный случай.

В главе 1 излагаются основы теории дифференциальных систем. После определения основных понятий рассматриваются различные характеристики линейных дифференциальных систем и связи между ними, даются методы нахождения дифференциальных уравнений стационарных линейных систем по данным передаточным функциям, излагается общий метод приведения уравнения линейной системы к системе уравнений первого порядка в стандартной форме Коши, рассматривается общая форма дифференциальных уравнений нелинейных систем, изучаются особенности стохастических дифференциальных систем, уравнения которых содержат случайные функции.

Глава 2 содержит изложение основных понятий теории случайных функций. Изучаются конечномерные распределения случайных функций, их математические ожидания, ковариационные функции и моменты высших порядков. Особое внимание уделяется совместным приближенным представлениям конечномерных распределений, в частности, представлениям конечномерных плотностей отрезками согласованных разложений по полиномам Эрмита. На основе понятия средней квадратической сходимости изучаются линейные операции анализа над случайными функциями — дифференцирование, интегрирование, интегрирование линейных дифференциальных уравнений, содержащих случайные функции. Дается определение слабой средней квадратической сходимости и слабой средней квадратической дифференцируемости случайной функции. На основе этих понятий дается определение белого шума и его производных.

В первых трех параграфах главы 3 изучаются случайные процессы с некоррелированными приращениями, стохастические меры с некоррелированными значениями, стохастические интегралы от неслучайных функций и линейные стохастические дифференциальные уравнения. Показано, что общая формула для решения линейного дифференциального уравнения определяет также решение стохастического линейного дифференциального уравнения при произвольном процессе с некоррелированными приращениями в этом уравнении. Последние четыре параграфа главы 3 посвящены случайным процессам с независимыми приращениями, стохастическим интегралам от случайных функций, стохастическим дифференциалам и нелинейным стохастическим дифференциальным уравнениям. Кроме интегралов, дифференциалов и дифференциальных уравнений Ито здесь рассматриваются различные другие формы стохастических интегралов, дифференциалов и дифференциальных уравнений. Выводятся формулы дифференцирования сложной функции в случае винеровского, пуассоновского и общего процессов с независимыми приращениями. Для случая стохастического дифференциального уравнения с винеровским процессом дается общая формула приведения любого уравнения к уравнению Ито. Рассмотрены особенности численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений.

В главе 4 изучаются стационарные случайные функции. Рассматриваются различные виды стационарности, изучаются особенности ковариационных функций стационарных случайных функций. случайные функции, приводимые к стационарным, излагается спектральная теория стационарных случайных функций и теория преобразования их стационарными линейными системами.

В главе 5 даны общая теория стохастических дифференциальных систем и ее применение к линейным системам. В начале главы изложены методы приведения уравнений системы к стохастическим дифференциальным уравнениям. Рассмотрены два метода: метод непосредственной замены линейно входящего в уравнение широкополосного случайного процесса белым шумом, имеющий ограниченное применение, и более общий метод формирующих фильтров. Подробно изложены методы нахождения формирующих фильтров для стационарных процессов и процессов, приводимых к стационарным. Для линейных систем, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями с любым процессом с некоррелированными приращениями, выведены обыкновенные дифференциальные уравнения для моментов первого и второго порядков. Эти уравнения позволяют проводить статистические исследования линейных систем в рамках корреляционной теории без излишних допущений о стохастических диффенциальных уравнениях. Вся остальная часть главы посвящена системам, описываемым стохастическими дифференциальными уравнениями с процессами с независимыми приращениями. Для таких систем выведены уравнения, определяющие конечномерные распределения вектора состояния. Для частного случая линейных систем получены точное решение этих уравнений и явные формулы для конечномерных характеристических функций вектора состояния.

В главе 6 изложены методы исследования нелинейных стохастических дифференциальных систем. Сначала рассматривается случай систем без шумов со случайными начальными условиями, в котором уравнения для конечномерных распределений могут быть решены точно. Затем изучаются методы исследования нелинейных стохастических дифференциальных систем, основанные на приближенном решении уравнений для конечномерных распределений вектора состояния системы. После вывода вспомогательных формул для производных по времени моментов первого и второго порядков вектора состояния нелинейной стохастической дифференциальной системы рассматривается исторически первый приближенный метод решения уравнений для конечномерных распределений — метод нормальной аппроксимации распределений [55]. Устанавливается связь этого метода с методом статистической линеаризации. Далее изложены современные приближенные методы решения уравнений для конечномерных распределений, практически позволяющие получить решение с любой степенью точности: метод моментов, метод семиинвариантов, моментно-семиинвариантный метод и методы, основанные на ортогональных разложениях распределений, в частности метод квазимоментов.

Глава 7 посвящена теории оптимального оценивания состояния и параметров стохастических дифференциальных систем по результатам наблюдения (теория оптимальной фильтрации).

После постановки задач оценивания и экстраполяции выведены общая формула для оптимальной оценки вектора состояния, уравнения, определяющие одномерное апостериорное распределение вектора состояния системы, и формулы для стохастических дифференциалов апостериорных средних и моментов второго порядка, а также формулы для стохастических дифференциалов апостериорных вероятностей в задаче распознавания. Затем излагается точная теория оптимальной линейной фильтрации. В этом случае уравнения оптимальной фильтрации допускают точное решение. После изложения теории фильтров Калмана—Бьюси подробно изучается случай автокоррелированной помехи в наблюдениях, которая может быть представлена как результат преобразования белого шума линейным формирующим фильтром. Дается точное решение задачи оптимальной экстраполяции вектора состояния линейной системы. Затем рассматривается случай, когда уравнения системы и наблюдения линейны только относительно вектора состояния и нелинейны относительно наблюдаемого процесса. Глава заканчивается решением задачи распознавания сигналов в линейных системах.

В главе 8 изложены приближенные методы теории оптимальной нелинейной фильтрации (методы субоптимальной фильтрации). Рассмотрены две группы методов субоптимальной нелинейной фильтрации. К первой группе относятся методы, основанные на приближенном решении уравнений оптимальной нелинейной фильтрации: метод нормальной аппроксимации апостериорного распределения, метод моментов, метод семиинвариантов и методы, основанные на ортогональных разложениях апостериорных распределений, в частности метод квазимоментов. Все эти методы, кроме метода нормальной аппроксимации, принципиально позволяют получить решение задачи оптимальной фильтрации с любой степенью точности. Однако возможности практической реализации соответствующих фильтров сильно ограничены из-за сложности получающихся алгоритмов. Ко второй группе относятся методы, основанные на упрощении уравнений оптимальной нелинейной фильтрации. Фильтры, даваемые этими методами: обобщенный фильтр Калмана—Бьюси, фильтры второго порядка и гауссов фильтр, по сложности реализации равноценны фильтру метода нормальной аппроксимации. Однако ввиду произвольности допущений, лежащих в основе этих фильтров, вопрос о точности их приближения к оптимальному фильтру остается неясным. Глава заканчивается изложением метода априорного исследования точности субоптимальных фильтров.

Глава 9 посвящена теории условно оптимального оценивания и экстраполяции вектора состояния системы и условно оптимального оценивания параметров системы (теория условно оптимальной фильтрации и экстраполяции). Теория условно оптимальной фильтрации и экстраполяции позволяет строить фильтры минимальной сложности, сравнительно легко реализуемые в задачах практики. Кроме того, она дает возможность получать фильтры, равноценные по сложности любому данному субоптимальному фильтру, но обладающие более высокой точностью. В этом состоит существенное преимущество методов условно оптимальной фильтрации по сравнению с методами субоптимальной фильтрации.

После изложения основной идеи условно оптимальной фильтрации и экстраполяции, постановки соответствующих задач даются общие методы построения условно оптимальных фильтров и экстраполяторов. Рассматривается применение теории условно оптимальной фильтрации для решения задачи распознавания в случае линейного уравнения наблюдения. Затем эти методы распространяются на случай автокоррелированной помехи в наблюдениях, представимой в виде выходного сигнала формирующего фильтра, описываемого стохастическим дифференциальным уравнением (не обязательно линейным). В последнем параграфе главы дается применение теории условно оптимальной фильтрации и экстраполяции к линейным системам с параметрическими шумами.

В конце каждой главы даны задачи для упражнений.

В приложении 1 изложены необходимые сведения по теории полиномов Эрмита скалярных и векторных переменных. В приложении 2 дан метод интегрирования матричного уравнения Риккати путем сведения его к системе линейных уравнений удвоенного порядка. В приложении 3 выведены формулы для условных математического ожидания и ковариационной матрицы случайного вектора, образованного частью компонент нормально распределенного случайного вектора. В приложении 4 приведены таблицы формул, необходимых для практического применения метода статистической линеаризации, а следовательно, и метода нормальной аппроксимации. Приложение 5 содержит формулы для стохастических дифференциалов Ито типовых нелинейных функций.

В каждой главе книги принята своя нумерация формул и примеров. При ссылках на формулы и примеры в пределах одной главы указываются только их номера в этой главе. При ссылках на формулы и примеры из других глав перед номером формулы или примера ставится номер соответствующей главы, отделенный от номера формулы или примера точкой. Так, например, (15) и пример 3 означают ссылки на формулу (15) и пример 3 той же главы, в которой даны эти ссылки; (3.72) и пример 6.15 означают ссылки на формулу (72) главы 3 и пример 15 главы 6. Номер, поставленный у последней формулы группы формул, отделенных одна от другой запятыми, относится ко всей группе формул, а не только к последней из них.

Ссылки на литературу даны номерами соответствующих литературных источников в приложенном в конце книги списке, заключенными в квадратные скобки. Авторы ни в какой мере не претендуют на полноту приложенного списка литературы. В нем указаны только те источники, на которые даются ссылки в тексте.

Для удобства читателей формулировки всех основных результатов и предложений выделены курсивом. Начало и конец выводов, доказательств и рассуждений, приводящих к определенным результатам, отмечены зачерненными треугольными указателями ► и ◄.

Для чтения книги необходимо знание основ теории вероятностей и математической статистики в объеме глав 1—6 и 9 книги В. С. Пугачева «Теория вероятностей и математическая статистика», Наука, 1979 [60]. Ссылки на эту книгу даются буквами *ТВ* в скобках с указанием номера соответствующего параграфа, пункта или примера, например (*ТВ*, п. 4.5.3). Кроме того, предполагается, что читатель имеет математическую подготовку в объеме соответствующих курсов математических дисциплин высших технических учебных заведений. Для справок по математическим вопросам рекомендуем справочник Г. Корна и Т. Корн [41]. Дополнительные разъяснения для читателей, знакомых с элементами функционального анализа, даны в некоторых разделах книги петитом. Читатели, не имеющие такой подготовки, могут пропустить эти разъяснения без ущерба для понимания основного содержания книги.

Авторы выражают глубокую благодарность М. Л. Дашевскому, И. Д. Силуяновой и Н. М. Сотскому за ценные замечания, В. И. Шину, выполнившему численные расчеты на ЭВМ для приведенных в книге примеров и также сделавшему ряд ценных замечаний, а также рецензенту рукописи Б. Г. Доступову и редактору книги В. А. Лотоцкому, тщательная работа которых над рукописью дала возможность исправить ряд погрешностей и улучшить книгу. Авторы благодарны И. В. Синицыной, взявшей на себя труд неоднократной перекомпоновки рукописи и подготовки ее к печати, и Н. Т. Ярославцевой, напечатавшей различные варианты рукописи.

Авторы

ГЛАВА 1

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 1.1. Математические модели систем

1.1.1. Понятие системы. Современная наука изучает различные системы и методы управления ими.

Системой называется любая совокупность взаимодействующих предметов любой природы.

Примерами систем могут служить весь окружающий нас мир или любая его часть, человеческое общество, отрасль народного хозяйства, завод, летательный аппарат, корабль, вычислительная машина, организм человека или животного и т. д.

Чтобы применить математические методы для изучения функционирования какой-либо системы, необходимо построить математическую модель этой системы. Для этого необходимо прежде всего определить совокупность величин, которые могут служить количественными характеристиками функционирования системы, а затем установить соотношения между этими величинами, приближенно описывающие функционирование системы.

1.1.2. Взаимодействие системы с окружающей средой. Всякая система (кроме всего окружающего нас мира*)) взаимодействует с окружающей средой, что-то получает извне и после переработки что-то отдает в окружающую среду, в частности другим системам. В этом заключается функционирование — работа системы. Система может получать извне и выдавать в окружающую среду различные вещества, предметы, информацию, управляющие воздействия. Обычно говорят, что система получает на входе определенные данные и дает на выходе некоторые другие данные.

Так, например, завод получает на входе потоки сырья, материалов и различных материальных средств, плановые задания, директивы вышестоящих организаций, а на выходе дает выпускаемую им продукцию, отходы производства, материалы и средства, передаваемые другим системам, и выпускаемую им документацию. Управляемый летательный аппарат получает на входе (от летчика или автоматической системы управления) управляющие воздействия — положение его органов управления (рулей и дросселей двигательной установки) как функцию времени. В результате создаются соответствующие силы и моменты, действующие

*) Весь окружающий нас мир подвержен только внутренним взаимодействиям его частей.

на летательный аппарат, которые изменяют ориентацию его осей и направление полета. Вследствие этого на выходе летательного аппарата получается определенная траектория полета и закон изменения во времени ориентации его осей. Кроме положения органов управления, задаваемых летчиком или системой управления, на летательный аппарат, совершающий полет в атмосфере, действуют случайные изменения вектора скорости ветра вдоль траектории, вызываемые турбулентностью атмосферы. Это приводит к случайным беспорядочным колебаниям действующих на летательный аппарат аэродинамических сил и моментов, и в результате получаются беспорядочные колебания летательного аппарата, так называемая «болтанка». Таким образом, получая на входе случайные изменения аэродинамических сил и моментов, вызываемые турбулентностью атмосферы, летательный аппарат отвечает на них на выходе случайными колебаниями.

1.1.3. Входные и выходные сигналы и состояние системы. Первым шагом к построению математической модели системы является математическое описание того, что система получает на входе и выдает на выходе. Это описание состоит в установлении двух множеств величин, с помощью которых можно определить внешние воздействия на систему и то, что она дает на выходе в каждый данный момент времени.

Величины, определяющие внешние воздействия на систему, называются ее *входными сигналами*. Величины, определяющие действие системы на окружающую среду и, в частности, на другие системы, называются *выходными сигналами* системы.

Кроме входных и выходных сигналов, для построения математической модели системы часто приходится вводить еще некоторые вспомогательные величины, в число которых могут включаться величины, характеризующие действия различных частей системы друг на друга (внутренние взаимодействия частей системы). Все эти величины, характеризующие положение (состояние) системы в каждый данный момент времени, обычно называются *переменными состояния* системы.

В дальнейшем мы будем называть *входным сигналом* системы всю совокупность ее входных сигналов, *выходным сигналом* — всю совокупность ее выходных сигналов и *вектором состояния* — всю совокупность переменных состояния системы.

Множество всех возможных входных сигналов системы будем называть ее *пространством входных сигналов*, множество всех возможных выходных сигналов системы — ее *пространством выходных сигналов*, а множество всех возможных векторов состояния системы — ее *пространством состояний*.

Входной и выходной сигналы системы как определенные функции времени и изменение вектора состояния со временем характеризуют *функционирование* системы или, как часто говорят, ее *поведение*.

1.1.4. Математическая модель системы. После определения входного и выходного сигналов и вектора состояния системы для получения ее математической модели остается установить соотношения между этими величинами. Эти соотношения могут быть детерминированными или содержать некоторые элементы неопределенности. В последнем случае обычно пользуются статистическим подходом, приписывая случайный характер и соответствующие распределения всем неопределенным величинам.

Таким образом, мы приходим к строгому определению математической модели системы.

Математической моделью системы называется совокупность четырех элементов: 1) пространства состояний, 2) пространства входных сигналов, 3) пространства выходных сигналов и 4) соотношений, связывающих входной и выходной сигналы и вектор состояния системы.

Строго говоря, понятия входного и выходного сигналов и вектора состояния относятся не к самой системе, а к ее математической модели. В действительности состояние любой системы, все внешние воздействия на нее и все ее действия на окружающую среду и, в частности, на другие системы невозможно охарактеризовать никаким обозримым и тем более конечным множеством величин. Поэтому, говоря о входном и выходном сигналах и о состоянии системы, мы всегда имеем в виду входной и выходной сигналы и состояние принятой математической модели системы.

Пример 1. Математической моделью движения свободной материальной точки массы m служит второй закон Ньютона

$$m\ddot{y} = x(t).$$

Входным сигналом при этом служит действующая на точку сила $x(t)$, а выходным сигналом — вектор положения точки $y(t)$. Состояние точки в каждый момент определяется ее координатами и вектором скорости. Таким образом, вектором состояния точки является шестимерный вектор $z = \{y, \dot{y}\}$. Пространством входных сигналов служит множество всех трехмерных векторных функций времени. Пространство выходных сигналов представляет собой множество всех непрерывных трехмерных функций времени. Пространством состояний служит шестимерное евклидово пространство.

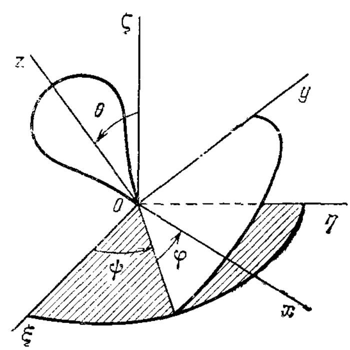

Рис. 1

Пример 2. Математической моделью движения твердого тела с одной неподвижной точкой относительно неподвижных осей $\xi\eta\zeta$ (рис. 1) служит система трех динамических уравнений Эйлера:

$$I_x\dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\,\omega_y\omega_z = M_x(t),$$
$$I_y\dot{\omega}_y + (I_x - I_z)\,\omega_z\omega_x = M_y(t),$$
$$I_z\dot{\omega}_z + (I_y - I_x)\,\omega_x\omega_y = M_z(t)$$

и трех кинематических уравнений Эйлера:

$$\omega_x = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi,$$
$$\omega_y = \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi,$$
$$\omega_z = \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi,$$

где I_x, I_y, I_z — моменты инерции тела относительно его главных осей инерции xyz, ω_x, ω_y, ω_z — проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции, $M_x(t)$, $M_y(t)$, $M_z(t)$ — моменты действующих на тело сил относительно главных осей инерции, ψ, θ, φ — углы, определяющие ориентацию главных осей инерции относительно неподвижных осей $\xi\eta\zeta$. Входными сигналами будут действующие на тело моменты $x_1 = M_x$, $x_2 = M_y$, $x_3 = M_z$, а выходными сигналами — три угла Эйлера $y_1 = \psi$, $y_2 = \theta$, $y_3 = \varphi$. Состояние тела в каждый момент времени определяется тремя эйлеровыми углами и тремя проекциями угловой скорости. Таким образом, вектором состояния является шестимерный вектор с составляющими $z_1 = \psi$, $z_2 = \theta$, $z_3 = \varphi$, $z_4 = \omega_x$, $z_5 = \omega_y$, $z_6 = \omega_z$. Пространства входных и выходных сигналов и пространство состояний — те же, что и в примере 1.

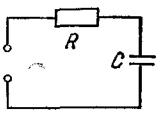

Рис. 2

Пример 3. Математической моделью электрической цепи, состоящей из резистора R и конденсатора C (рис. 2), является система уравнений, вытекающая из законов Ома и Кирхгофа:

$$u_1 = Ri, \qquad C\,du_2/dt = i, \qquad u_1 + u_2 = x,$$

где i — ток в цепи, u_1 — падение напряжения на резисторе, u_2 — напряжение на конденсаторе, x — входное напряжение. Так как величины u_1 и i могут быть выражены через u_2 и x из третьего и первого уравнений,

$$u_1 = x - u_2, \qquad i = u_1/R = (x - u_2)/R,$$

то состояние цепи можно характеризовать одной величиной $z = u_2$. Тогда получим дифференциальное уравнение, описывающее изменение состояния цепи со временем:

$$T\dot z + z = x, \quad T = RC.$$

Приняв за выходной сигнал цепи y напряжение на конденсаторе $u_2 = z$, будем иметь $y = z$. Пространствами входных сигналов и выходных сигналов служит множество всех скалярных функций времени, а пространством состояний — числовая ось.

Пример 4. Приняв за выходной сигнал электрической цепи предыдущего примера падение напряжения на резисторе u_1, будем иметь уравнение предыдущего примера для переменной состояния $z = u_2$ и формулу $y = x - z$ для выходного сигнала. Исключив из этой формулы и уравнения состояния переменную состояния z, получим уравнение, связывающее входной и выходной сигналы цепи:

$$T\dot y + y = T\dot x.$$

Пространства входных сигналов, выходных сигналов и состояний — те же, что и в примере 3.

Пример 5. Математической моделью колебательного контура (рис. 3) служит система уравнений

$$u_1 = Ri, \qquad C\,du_2/dt = i, \qquad L\,di/dt = u_3, \qquad u_1 + u_2 + u_3 = x,$$

где в дополнение к обозначениям примеров 3 и 4 u_3 — падение напряжения на индуктивности L.

Так как величины u_1 и u_3 могут быть выражены через i, u_2 и x из первого и четвертого уравнений,

$$u_1 = Ri, \qquad u_3 = x - Ri - u_2,$$

то состояние контура можно характеризовать двумя величинами $z_1 = i$, $z_2 = u_2$. Тогда получим дифференциальные уравнения состояния системы

$$L\dot{z}_1 = x - Rz_1 - z_2, \qquad C\dot{z}_2 = z_1.$$

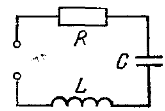

Рис. 3

Приняв за выходной сигнал контура y напряжение на конденсаторе $u_2 = z_2$, будем иметь $y = z_2$. Исключив переменные состояния z_1 и z_2, получим уравнение, связывающее входной и выходной сигналы контура:

$$T^2\ddot{y} + 2\zeta T\dot{y} + y = x, \qquad T = \sqrt{LC}, \qquad \zeta = R\sqrt{C/L}/2.$$

Пространствами входных и выходных сигналов служит множество всех скалярных функций времени, а пространством состояний — плоскость.

1.1.5. Виды математических моделей. Модель системы называется *детерминированной*, если каждой реализации ее входного сигнала соответствует одна определенная реализация выходного сигнала, т. е. если ее выходной сигнал получается как результат некоторого вполне определенного отображения пространства входных сигналов в пространство выходных сигналов. Все модели, рассмотренные в примерах 1—5, детерминированные.

Модель системы называется *стохастической*, если каждой реализации ее входного сигнала соответствует вполне определенное распределение ее выходного сигнала *).

Для одной и той же системы можно построить много различных моделей. В зависимости от степени детальности характеристики поведения системы и количества учитываемых факторов одни модели будут проще, другие — сложнее. Чем больше факторов учитывает модель, тем она сложнее, тем полнее и в принципе точнее она описывает поведение системы. Однако точность сложной модели может оказаться иллюзорной. Из-за ограниченности доступной информации, в частности из-за неточности исходных данных, используемых при применении модели, чрезмерно сложная модель может оказаться менее точной, чем более простая (см., например, *ТВ*, п. 9.4.3) **). Поэтому степень сложности принимаемой модели должна быть согласована с доступной информацией, которая может быть использована для построения модели и при ее применении.

Наоборот, одна и та же модель может описывать различные системы, например, линейное дифференциальное уравнение второго порядка с положительными постоянными коэффициентами

---

*) В соответствии с этим распределением модель генерирует одну случайную реализацию выходного сигнала, соответствующую данному входному сигналу.

**) Везде в этой книге буквами *ТВ* даются ссылки на книгу В. С. Пугачева «Теория вероятностей и математическая статистика» [60].

служит моделью электрического колебательного контура (пример 5) и в то же время моделью малых колебаний маятника в сопротивляющейся среде.

Для сложных систем характерно то, что, как правило, никакая модель не может с достаточной точностью воспроизвести все функции системы. Одни модели могут быть лучше по одним показателям, другие — по другим. Однако ни одна из них не может быть лучшей по всем показателям. Поэтому для сложных систем строят не одну, а несколько моделей и применяют для одних целей (для исследования одних функций системы) одну модель, а для других целей — другие. При этом одни модели могут быть детерминированными, а другие — стохастическими. Так, например, модель завода, учитывающая только среднее число рабочих, ежедневно участвующих в производственном процессе, и среднее количество получаемых за день материальных средств, является детерминированной. Модель того же завода, учитывающая случайные суточные колебания числа рабочих из-за невыхода на работу по различным причинам и случайные суточные колебания получаемых заводом материальных средств, является стохастической. Кроме того, для сложных систем, таких как завод, отрасль промышленности, экономика края или страны, характерно то, что они состоят из большого числа более простых систем (подсистем), вследствие чего управление ими невозможно без соответствующей организации внутри самой системы, без организации управления каждой отдельной подсистемой и без установления определенных взаимодействий между всеми подсистемами. В результате система управления такой системой получается, во-первых, иерархической, а во-вторых, распределенной по элементам системы, составляющей органическое целое с самой управляемой системой. Такие системы, для управления которыми необходимы их предварительная организация и введение элементов системы управления в каждый элемент системы с установлением соответствующей иерархии управления, мы будем называть *большими системами*. Таким образом, большая система отличается от простой не только высокой размерностью векторов состояния, входного и выходного сигналов, но и тем, что она требует качественно другой организации процесса управления. Вследствие этого для большой системы необходимо строить математические модели всех ее подсистем, а при исследовании функционирования всей системы с помощью моделей ее подсистем часто приходится включать людей для принятия решений на различных этапах функционирования системы, а также для выполнения других функций, которые не поддаются алгоритмизации (математическому описанию).

На первом этапе развития теории управления она изучала только такие системы, математические модели которых можно было построить на основе законов физики. Современная теория управления изучает процессы управления любыми системами, в том числе и такими, для которых нельзя построить математические модели на основе законов физики и других отраслей науки, пользующихся количественными закономерностями. Для таких систем математические модели обычно строят путем статистической обработки результатов наблюдения работы системы (пример такой модели дан в [12]).

Входной и выходной сигналы любой системы представляют собой функции времени. Если они определены для всех моментов времени, начиная с некоторого начального момента, то модель системы называется *непрерывной*. Соответственно и саму систему называют в этом случае *непрерывной*. Если реализации входного и выходного сигналов определены только на дискретных множествах моментов времени, то модель системы называется *дискретной*. В этом случае и саму систему обычно называют *дискретной*. Впрочем, дискретные модели часто применяются и для описания поведения непрерывных систем. В частности, для расчетов на цифровых ЭВМ всегда применяются дискретные модели, независимо от того, являются ли соответствующие системы непрерывными или дискретными.

Значения входного и выходного сигналов в каждый момент времени могут быть скалярными, конечномерными векторными или элементами некоторых функциональных пространств (т. е. функциями каких-либо переменных, например, координат точки пространства). В последнем случае система (точнее, ее модель) называется *распределенной* (или *системой с распределенными параметрами*). Если и входной и выходной сигналы в каждый момент времени являются скалярными величинами, то система (модель) называется *одномерной*. Если входной сигнал, или выходной сигнал, или оба они в каждый момент времени являются конечномерными векторами, то система (модель) называется *многомерной*.

Что касается вектора состояния, то его значение в данный момент тоже может быть скалярным, конечномерным векторным или функцией каких-либо переменных, даже у систем (моделей), у которых значения входного и выходного сигналов в каждый момент являются скалярными или конечномерными векторными.

В этой книге мы будем рассматривать в основном непрерывные модели с конечномерными векторами состояния, входного и выходного сигналов.

§ 1.2. Характеристики систем

1.2.1. Оператор системы. В дальнейшем мы всегда будем считать, что математическая модель изучаемой системы построена, и говорить о системе, подразумевая принятую модель этой системы. В частности, говоря о характеристиках системы, будем иметь в виду характеристики ее математической модели.

Основной характеристикой системы является ее *оператор*, определяющий механизм формирования выходного сигнала по данному входному сигналу.

Оператор детерминированной системы ставит в соответствие каждому входному сигналу один определенный выходной сигнал. Таким образом, оператор детерминированной системы отображает пространство входных сигналов в пространство выходных сигналов.

Оператор стохастической системы ставит в соответствие каждому входному сигналу определенное распределение выходного сигнала (конечно, зависящее от входного сигнала). Таким образом, оператор стохастической системы отображает пространство входных сигналов в пространство всех возможных распределений на пространстве выходных сигналов.

Входные и выходные сигналы непрерывной системы обычно представляют собой непрерывные ограниченные функции времени. Поэтому оператор детерминированной системы отображает пространство непрерывных функций в такое же пространство.

Пусть $x(t)$ — входной сигнал детерминированной системы, представляющий собой непрерывную n-мерную векторную функцию времени t, $y(t)$ — выходной сигнал, представляющий собой непрерывную m-мерную векторную функцию t. Обозначим буквой A оператор системы. Соотношение между входным и выходным сигналами детерминированной системы можно записать в виде

$$y(t) = Ax(t).$$

Эта краткая запись включает всю совокупность математических операций, которые надо выполнить над функцией $x(t)$, чтобы определить функцию $y(t)$.

Детерминированная система называется *физически возможной*, если значение ее выходного сигнала $y(t)$ в каждый момент t не зависит от значений входного сигнала $x(\tau)$ при $\tau > t$. Таким образом, значение выходного сигнала физически возможной системы $y(t)$ в каждый момент t является функционалом от входного сигнала $x(\tau)$, заданного в интервале $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$ *).

Стохастическая система называется *физически возможной*, если распределение значения ее выходного сигнала $Y(t)$ в любой момент t не зависит от значений входного сигнала $x(\tau)$ при $\tau > t$.

Детерминированная система называется *устойчивой в данном режиме*, если изменение $\Delta y(t)$ ее выходного сигнала $y(t)$ в этом режиме остается сколь угодно малым при любом достаточно малом изменении $\Delta x(t)$ входного сигнала $x(t)$. Иными словами,

*) Строго говоря, $y(t)$ представляет собой m-мерный вектор, компоненты которого являются функционалами от $x(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$. Для краткости мы называем векторную величину $y(t)$ функционалом, имея в виду m-мерный «векторный» функционал.

детерминированная система называется устойчивой в данном режиме, если при любом $\varepsilon > 0$ для данного режима существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $|\Delta y(t)| < \varepsilon$ при всех $t > t_0$, когда $|\Delta x(t)| < \delta$ при всех $t \geqslant t_0$ *).

Стохастическая система называется *устойчивой в данном режиме почти наверное* (*с вероятностью* 1), если изменение ее выходного сигнала $\Delta Y(t)$ в этом режиме сколь угодно мало с вероятностью 1 при любом достаточно малом изменении входного сигнала $\Delta x(t)$.

Стохастическая система называется *устойчивой в данном режиме по вероятности*, если при любом $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\lim_{t \to \infty} P\left(\sup_{t > t_0} |\Delta Y(t)| > \varepsilon\right) = 0$$

при всех $\Delta x(t)$, удовлетворяющих условию $\sup\limits_{t > t_0} |\Delta x(t)| < \delta$.

Стохастическая система называется *устойчивой в данном режиме в p-среднем*, $p > 0$, если математическое ожидание $M|\Delta Y(t)|^p$ в этом режиме остается сколь угодно малым при всех достаточно малых изменениях входного сигнала $\Delta x(t)$.

Из известного неравенства Чебышева (*ТВ*, п. 6.1.3)

$$P(|\Delta Y| \geqslant \varepsilon) < M|\Delta Y|^p/\varepsilon^p$$

следует, что *стохастическая система устойчива по вероятности, если она устойчива в p-среднем*. Точно так же *из устойчивости почти наверное вытекает устойчивость по вероятности. Из p-устойчивости при данном p следует p-устойчивость при всех меньших p.* Обратное в общем случае неверно.

Говоря об устойчивости системы, в задачах практики всегда имеют в виду устойчивость всех реализаций происходящих в ней процессов. С этой точки зрения наибольшее значение для приложений имеет понятие устойчивости почти наверное. Однако в задачах практики часто приходится ограничиваться устойчивостью *в среднем* ($p = 1$) или *в среднем квадратическом* ($p = 2$).

Класс систем, устойчивых в среднем квадратическом, и класс систем, устойчивых почти наверное, являются подклассами класса

---

*) В случае векторных x и y модуль понимается как модуль (евклидова норма) вектора, т. е.

$$|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}, \quad |y| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} y_k^2}.$$

Это определение устойчивости не совпадает с определением устойчивости решения дифференциального уравнения. Физически возможная дифференциальная система устойчива в данном режиме тогда и только тогда, когда соответствующее решение ее дифференциального уравнения *асимптотически устойчиво* по Ляпунову [52, 48].

систем, устойчивых по вероятности, причем оба эти подкласса имеют непустое пересечение.

1.2.2. Линейные и нелинейные системы. Детерминированная система называется *линейной*, если при любых числах $N, c_1, \ldots, c_N$ и при любых функциях $x_1(t), \ldots, x_N(t)$

$$A\left\{\sum_{\nu=1}^{N} c_\nu x_\nu(t)\right\} = \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu A x_\nu(t). \tag{1}$$

Это определяющее свойство линейных систем обычно называется *принципом суперпозиции*. Поэтому линейные системы можно определить как такие системы, для которых справедлив принцип суперпозиции.

Оператор A, обладающий свойством (1), называется *линейным*. Таким образом, детерминированная система линейна тогда и только тогда, когда ее оператор линеен.

Для того чтобы система была линейной, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

1) *при суммировании любых двух входных сигналов соответствующие выходные сигналы суммируются;*

2) *при любом усилении входного сигнала без изменения его формы выходной сигнал усиливается с тем же коэффициентом, тоже не изменяя своей формы.*

► Необходимость этих условий очевидна. Так как формула (1) справедлива для любого N и любых чисел $c_1, \ldots, c_N$, то, полагая $N=2$, $c_1=c_2=1$, получаем

$$A\{x_1(t)+x_2(t)\} = Ax_1(t)+Ax_2(t). \tag{2}$$

Полагая $N=1$, получим при произвольных c и $x(t)$

$$A\{cx(t)\} = cAx(t). \tag{3}$$

Для доказательства достаточности условий (2) и (3) заметим, что из этих условий вытекают формулы

$$A\{c_1x_1(t)+c_2x_2(t)\} = A\{c_1x_1(t)\}+A\{c_2x_2(t)\} = \\ = c_1Ax_1(t)+c_2Ax_2(t), \tag{4}$$

$$A\left\{\sum_{\nu=1}^{N} c_\nu x_\nu(t)\right\} = \\ = A\left\{\sum_{\nu=1}^{N-1} c_\nu x_\nu(t)+c_N x_N(t)\right\} = A\left\{\sum_{\nu=1}^{N-1} c_\nu x_\nu(t)\right\} + A\{c_N x_N(t)\} = \\ = A\left\{\sum_{\nu=1}^{N-1} c_\nu x_\nu(t)\right\} + c_N A x_N(t), \tag{5}$$

справедливые для любых чисел $N, c_1, \ldots, c_N$ и для любых функций $x_1(t), \ldots, x_N(t)$. Формула (4) показывает, что из условий (2) и (3) следует справедливость принципа суперпозиции для случая двух слагаемых. Формула (5) показывает, что принцип суперпозиции выполняется для N слагаемых, если он выполняется для $N-1$ слагаемых. Из этой формулы по индукции следует справедливость принципа суперпозиции при любом числе N слагаемых, поскольку он справедлив для случая двух слагаемых. Таким образом, принцип суперпозиции является следствием условий (2) и (3), что и доказывает достаточность этих условий. ◀

Подчеркнем, что для линейности системы необходимо, чтобы принцип суперпозиции соблюдался при любом числе слагаемых, при любом выборе постоянных c_ν и функций $x_\nu(t)$.

Система называется *нелинейной*, если принцип суперпозиции для нее не выполняется или выполняется только при некоторых вполне определенных N, $x_1(t)$, $\ldots$, $x_N(t)$, c_1, $\ldots$, c_N. Оператор детерминированной нелинейной системы всегда нелинеен.

Примерами линейных операторов могут служить оператор дифференцирования

$$y(t) = Dx(t) = \frac{d}{dt}x(t),$$

линейный интегральный оператор

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} g(t, \tau)\,x(\tau)\,d\tau$$

и более общий линейный интегро-дифференциальный оператор

$$y(t) = \sum_{p=0}^{N}\int_{t_0}^{t} g_p(t, \tau)\,x^{(p)}(\tau)\,d\tau.$$

К линейному интегральному оператору или к линейному интегро-дифференциальному оператору приводится оператор решения обыкновенного линейного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} a_n(t)\,y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\,y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)\,y'(t) + a_0(t)\,y(t) = \\ = b_m(t)\,x^{(m)}(t) + b_{m-1}(t)\,x^{(m-1)}(t) + \ldots + b_1(t)\,x'(t) + b_0(t)\,x(t). \end{aligned}$$

В качестве примеров нелинейных операторов можно привести нелинейный интегральный оператор

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi(x(\tau), \tau, t)\,d\tau,$$

где $\varphi(x, \tau, t)$ — данная функция, нелинейная относительно переменной x, и оператор решения нелинейного дифференциального уравнения

$$y''(t) + k\sin y(t) = x(t),$$

описывающего, в частности, колебания маятника.

Принцип суперпозиции значительно облегчает исследование линейных систем по сравнению с нелинейными. Благодаря принципу суперпозиции теория линейных дифференциальных уравнений разработана в самом общем виде для уравнений любого порядка, в то время как теория нелинейных дифференциальных уравнений развита значительно слабее.

Уравнения, описывающие поведение линейной системы, всегда линейны. И наоборот, если все уравнения, описывающие поведение системы, линейны, то данная система линейна. Если среди уравнений, описывающих поведение системы, есть хотя бы одно нелинейное, то система нелинейна.

1.2.3. Весовая функция одномерной линейной системы. Рассмотрим одномерную линейную систему. Ее входной сигнал как непрерывную функцию можно представить разложением на бесконечно малые мгновенные импульсы (*ТВ*, приложение 1)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau. \tag{6}$$

Отсюда на основании принципа суперпозиции получаем следующее выражение выходного сигнала:

$$y(t) = Ax(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,A_t\delta(t-\tau)\,d\tau, \tag{7}$$

где индекс t у оператора A под знаком интеграла показывает, что этот оператор действует на функцию $\delta(t-\tau)$, рассматриваемую как функция t при фиксированном значении τ. Формула (7) показывает, что для нахождения реакции линейной системы на произвольный входной сигнал $x(t)$ достаточно знать ее реакцию на единичный мгновенный импульс $\delta(t-\tau)$, действующий на нее в произвольный момент τ. Эта реакция зависит от переменных t и τ, т. е. от момента действия импульса τ и текущего момента t:

$$g(t,\ \tau) = A_t\delta(t-\tau).$$

Функция $g(t,\ \tau)$, определяемая этой формулой, является исчерпывающей характеристикой линейной системы и называется ее *весовой* или *импульсной переходной функцией*. Таким образом, весовая функция линейной системы представляет собой ее реакцию в момент t на единичный импульс, действующий в момент τ.

Пользуясь понятием весовой функции, можно записать зависимость (7) между входным и выходным сигналами в виде

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t,\ \tau)\,x(\tau)\,d\tau. \tag{8}$$

Таким образом, оператор любой линейной системы может быть представлен в форме линейного интегрального оператора.

Для устойчивости системы необходимо и достаточно выполнение условия ([57], § 6.1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t, \tau)|\, d\tau < \infty. \tag{9}$$

Для линейной системы говорят об устойчивости без указания режима ее работы, так как она либо устойчива во всех режимах, либо неустойчива во всех режимах.

Из общего условия устойчивости (9) выводятся частные критерии устойчивости для различных классов линейных систем ([57], § 6.2, 6.3).

Для читателей, знакомых с элементами функционального анализа, заметим, что формула (8) по существу вытекает из известной теоремы Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала на пространстве непрерывных функций [40, 51]. Значение выходного сигнала $y(t)$ при фиксированном t представляет собой линейный функционал от входного сигнала $x(t)$. Из определения устойчивости следует, что для устойчивой линейной системы этот функционал непрерывен. Поэтому на основании теоремы Рисса

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, d_\tau h(t, \tau),$$

где $h(t, \tau)$ — функция ограниченной вариации переменной τ при любом t, а индекс τ у знака дифференциала указывает, что интегрирование производится по функции $h(t, \tau)$, рассматриваемой как функция τ при фиксированном t. В задачах практики встречаются только такие системы, для которых $h(t, \tau)$ при любом t имеет производную по τ, возможно, содержащую линейную комбинацию δ-функций. Положив $g(t, \tau) = \partial h(t, \tau)/\partial\tau$, получаем (8). Условие ограниченности вариации $h(t, \tau)$ по τ дает необходимое и достаточное условие устойчивости системы (9). Если вариация $h(t, \tau)$ не ограничена, то система неустойчива.

Совершенно так же из теоремы Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала на пространстве непрерывных функций с непрерывными производными до порядка N включительно следует формула (8) для случая N раз непрерывно дифференцируемого входного сигнала, причем в этом случае $g(t, \tau)$ может содержать и линейную комбинацию производных δ-функций до порядка N включительно. Необходимое и достаточное условие устойчивости линейной системы (9) заменится условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\tau} (\tau-\sigma)^{N-1} g(t, \sigma)\, d\sigma \right| d\tau < \infty.$$

Пример 6. Чтобы найти весовую функцию электрической цепи примера 3, проинтегрируем последнее уравнение этого примера, считая, что входное напряжение прикладывается в момент t_0. Тогда получим при $t > t_0$

$$y(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T} \int_{t_0}^{t} e^{\tau/T} x(\tau)\, d\tau.$$

Сравнив эту формулу с (8) и приняв во внимание, что $x(\tau)=0$ при $\tau<t_0$, находим

$$g(t,\ \tau)=\frac{1}{T}e^{-(t-\tau)/T}\,1(t-\tau),$$

где $1(s)$ — единичная ступенчатая функция, равная 1 при $s>0$ и 0 при $s<0$.

Пример 7. Для цепи примера 4, считая, что $x(\tau)=0$ при $\tau\leqslant t_0$, получаем

$$y(t)=e^{-t/T}\int\limits_{t_0}^{t}e^{\tau/T}\dot{x}(\tau)\,d\tau=$$

$$=x(t)-\frac{1}{T}e^{-t/T}\int\limits_{t_0}^{t}e^{\tau/T}x(\tau)\,d\tau=\int\limits_{t_0}^{t}\left[\delta(t-\tau)-\frac{1}{T}e^{-(t-\tau)/T}\right]x(\tau)\,d\tau.$$

Сравнив эту формулу с (8), находим

$$g(t,\ \tau)=\delta(t-\tau)-\frac{1}{T}e^{-(t-\tau)/T}\,1(t-\tau).$$

Пример 8. Для колебательного контура примера 5

$$y(t)=\frac{1}{\omega_0T^2}\int\limits_{t_0}^{t}e^{-\zeta(t-\tau)/T}\sin\omega_0(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau,$$

где $\omega_0=\sqrt{1-\zeta^2}/T$. Отсюда находим

$$g(t,\ \tau)=\frac{1}{\omega_0T^2}e^{-\zeta(t-\tau)/T}\sin\omega_0(t-\tau)\,1(t-\tau).$$

1.2.4. Весовая функция многомерной линейной системы. Рассмотрим линейную систему с n входами и m выходами.

На основании принципа суперпозиции действие каждого входного сигнала на многомерную линейную систему можно рассматривать отдельно, а затем результаты действия отдельных входных сигналов на каждом выходе просуммировать.

Для нахождения реакции на k-м выходе линейной системы на сигнал, действующий на одном только h-м входе, можно рассматривать эту систему как систему с одним входом и одним выходом. Тогда для вычисления реакции на k-м выходе системы на любой сигнал, действующий на h-м входе, при отсутствии сигналов на остальных входах, достаточно будет знать соответствующую весовую функцию $g_{kh}(t,\ \tau)$. Эта весовая функция представляет собой реакцию на k-м выходе системы на единичный импульс, действующий на h-м входе в момент τ, при отсутствии сигналов на остальных входах. Совокупность весовых функций $g_{kh}(t,\tau)$ $(k=1,\ \ldots,\ m;\ h=1,\ \ldots,\ n)$, соответствующих всем входам и всем выходам, является исчерпывающей характеристикой многомерной линейной системы.

Зная весовые функции многомерной линейной системы, соответствующие всем входам и выходам, можно для вычисления ее реакции на каждом выходе на сигнал, действующий только на каком-нибудь одном входе, применить формулу (8). Суммируя полученные результаты для каждого отдельного выхода по всем входам, найдем все выходные сигналы рассматриваемой линейной системы, соответствующие одновременному действию всех входных сигналов.

Таким образом, выходные сигналы $y_1(t), \ldots, y_m(t)$ линейной системы с n входами и m выходами выражаются через ее входные сигналы $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ формулой

$$y_k(t) = \sum_{h=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} g_{kh}(t, \tau) x_h(\tau) \, d\tau \qquad (k=1, \ldots, m).$$

Вводя матрицу

$$g(t, \tau) = \begin{bmatrix} g_{11}(t, \tau) & g_{12}(t, \tau) & \ldots & g_{1n}(t, \tau) \\ g_{21}(t, \tau) & g_{22}(t, \tau) & \ldots & g_{2n}(t, \tau) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{m1}(t, \tau) & g_{m2}(t, \tau) & \ldots & g_{mn}(t, \tau) \end{bmatrix}, \tag{10}$$

можно записать предыдущую формулу в виде

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \tau) x(\tau) \, d\tau, \tag{11}$$

где $x(t) = [x_1(t) \ \ldots \ x_n(t)]^{\mathrm{T}}$, $y(t) = [y_1(t) \ \ldots \ y_m(t)]^{\mathrm{T}}$ — векторные входной и выходной сигналы, представленные в виде матриц-столбцов.

Матричная функция $g(t, \tau)$, определяемая формулой (10), называется *весовой функцией* линейной системы с n входами и m выходами.

Из сказанного в п. 1.2.3 следует, что для устойчивости многомерной линейной системы необходимо и достаточно, чтобы все элементы матрицы $g(t, \tau)$ удовлетворяли условию (9):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_{kh}(t, \tau)| \, d\tau < \infty \qquad (k=1, \ldots, m; \ h=1, \ldots, n). \tag{12}$$

Для физически возможной линейной системы согласно определению

$$g(t, \tau) = 0 \quad \text{при} \quad \tau > t \tag{13}$$

и формула (11) принимает вид

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} g(t, \tau) x(\tau) \, d\tau, \tag{14}$$

где t_0 — момент начала работы системы.

Ясно, что линейные системы примеров 6—8 физически возможны, поскольку они представляют собой реальные электрические цепи. Поэтому они удовлетворяют условию (13).

Пример 9. Если выходными сигналами колебательного контура примера 5 считать напряжение на конденсаторе y_1 и ток в цепи y_2, то к уравнениям примера 5 добавится соотношение $y_2 = z_1$ или $y_2 = C\dot{y}_1$. Отсюда ясно, что одной компонентой весовой функции рассматриваемой системы с одним входом и двумя выходами служит весовая функция, найденная в примере 8, а для нахождения другой компоненты следует продифференцировать полученное в примере 8 выражение первого выходного сигнала

$$y_1(t) = \frac{1}{\omega_0 T^2} \int_{t_0}^{t} e^{-\zeta(t-\tau)/T} \sin \omega_0 (t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

и результат умножить на C. Тогда, имея в виду, что $T^2 = LC$, получим

$$y_2(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t} e^{-\zeta(t-\tau)/T} \left[\cos \omega_0 (t-\tau) - \frac{\zeta}{\omega_0 T} \sin \omega_0 (t-\tau) \right] x(\tau)\, d\tau.$$

Таким образом, весовая функция рассматриваемой системы представляет собой матрицу-столбец

$$g(t, \tau) = \begin{bmatrix} g_{11}(t, \tau) \\ g_{21}(t, \tau) \end{bmatrix},$$

где

$$g_{11}(t, \tau) = \frac{1}{\omega_0 T^2} e^{-\zeta(t-\tau)/T} \sin \omega_0 (t-\tau)\, 1(t-\tau),$$

$$g_{21}(t, \tau) = \frac{1}{L} e^{-\zeta(t-\tau)/T} \left[\cos \omega_0 (t-\tau) - \frac{\zeta}{\omega_0 T} \sin \omega_0 (t-\tau) \right] 1(t-\tau).$$

1.2.5. Типовая структура технических систем. В задачах практики обычно удается представить модель любой технической системы с конечномерными векторами входного сигнала, выходного сигнала и состояния в виде соединения конечного числа линейных систем и безынерционных нелинейных звеньев. Мы говорим о безынерционных нелинейных звеньях, имея в виду, что практически любая нелинейность в технической системе дает на выходе определенную функцию текущего значения ее входного сигнала. А именно значение выходного сигнала нелинейного звена в любой момент t представляет собой определенную функцию значения его входного сигнала в тот же момент t и не зависит от значений входного сигнала до момента t:

$$\eta(t) = \varphi(\xi(t)),$$

где через $\xi(t)$ и $\eta(t)$ обозначены входной и выходной сигналы нелинейного звена. Функция φ полностью характеризует безынерционное нелинейное звено и поэтому принимается за его характеристику ([57], § 8.2).

Входной сигнал нелинейного звена в общем случае представляет собой вектор, компонентами которого служат некоторые переменные состояния системы и, может быть, некоторые входные сигналы системы.

1.2.6. Дифференциальные системы. Большую часть линейных систем, встречающихся в технике, составляют системы, поведение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, вытекающими из законов физики. При этом обычно всегда эти уравнения можно представить в стандартной форме Коши, т. е. путем ввода, в случае необходимости, дополнительных переменных состояния представить их в виде системы уравнений первого порядка, решенных относительно производных. Добавив к уравнениям всех линейных частей системы зависимости между входными и выходными сигналами всех нелинейных звеньев, получим систему нелинейных дифференциальных уравнений в форме Коши, описывающую нелинейную систему.

Обозначим через $z(t)=[z_1(t)\ \dots\ z_p(t)]^{\mathrm{T}}$ вектор состояния системы, через $x(t)=[x_1(t)\ \dots\ x_n(t)]^{\mathrm{T}}$ — векторный входной сигнал, а через $y(t)=[y_1(t)\ \dots\ y_m(t)]^{\mathrm{T}}$ — векторный выходной сигнал. Тогда дифференциальные уравнения, описывающие поведение системы, в общем случае запишутся в виде *)

$$\dot{z}=f(z,\ x,\ t),\qquad y=g(z,\ t),\tag{15}$$

где f — p-мерная векторная функция векторов z, x и времени t, а g — m-мерная векторная функция вектора z и времени t.

Систему с конечномерными вектором состояния и значениями входного и выходного сигналов, описываемую обыкновенным дифференциальным уравнением и формулой для выходного сигнала вида (15), будем для краткости называть *дифференциальной системой*.

При данном начальном состоянии системы $z_0=z(t_0)$ уравнения (15) полностью и однозначно определяют оператор системы. Заметим, что от начальных условий всегда можно избавиться, включив их в вектор входного сигнала. В самом деле, уравнения (15) с начальным условием $z(t_0)=z_0$ можно написать в виде

$$\dot{z}=f(z,\ x,\ t)+z_0\delta(t-t_0),\quad y=g(z,\ t)\tag{16}$$

и интегрировать их при нулевых начальных условиях $z=0$ при $t=t_0+\varepsilon$ при сколь угодно малом $\varepsilon>0$. Приняв z_0 за дополнительную компоненту вектора входных сигналов, т. е. приняв за входной сигнал $(n+p)$-мерный вектор $x(t)=[z_0^{\mathrm{T}}x_1(t)\ \dots\ x_n(t)]^{\mathrm{T}}$, можем утверждать, что уравнения (16) с нулевыми начальными условиями полностью определяют оператор системы. В дальнейшем мы не будем включать начальные условия в состав входного сигнала. Это удобно делать для линейных систем, когда за их характеристики принимаются весовые функции. Мы же

*) Выходной сигнал обычно представляет собой известную функцию вектора состояния системы и времени.

будем пользоваться для описания поведения систем дифференциальными уравнениями. Тогда естественно дополнять их соответствующими начальными условиями и не вводить в них δ-функции.

Заметим, что функция $g(z, t)$ в формуле (15) для выходного сигнала не зависит явно от входного сигнала x. Однако в некоторых случаях приходится заменять функцию $g(z, t)$ функцией $g(z, x, t)$, явно зависящей от входного сигнала x.

В частном случае выходные сигналы системы могут совпадать с некоторыми из переменных состояния. В таком случае без потери общности можно считать, что выходными сигналами являются первые m координат вектора z, и написать второе уравнение (15) или (16) в виде

$$y = [I_m \ 0]\, z, \tag{17}$$

где I_m — единичная матрица порядка m, а через 0 обозначена $m \times (p-m)$-матрица с нулевыми элементами.

Применение моделей систем, описываемых дифференциальными уравнениями, дает возможность использовать для исследования систем хорошо развитый аппарат теории дифференциальных уравнений. Благодаря этому применение моделей, описываемых дифференциальными уравнениями, целесообразно не только для технических систем, но и для многих других классов систем, изучаемых в теории управления. Разработка методов построения таких моделей для любых систем представляет собой одну из наиболее актуальных проблем современной теории управления.

1.2.7. Уравнения дифференциальной системы при автоматическом управлении. При автоматическом управлении системой, описываемой уравнениями (15), обычно вводится обратная связь по отклонению от требуемого режима работы системы и в соответствии с этим отклонением (*сигналом ошибки*) соответствующими преобразующими и исполнительными устройствами вырабатывается входной сигнал x. Отклонение от требуемого режима в общем случае характеризуется некоторой функцией $h(y, t) = h(g(z, t), t)$ выходного сигнала $y = g(z, t)$. Это отклонение (*сигнал ошибки* или *параметр управления*) образуется соответствующими устройствами, формирующими требуемый входной сигнал x^*, который отрабатывается исполнительными устройствами, обеспечивающими условие $x \to x^*$. Все эти устройства обычно описываются дифференциальными уравнениями, которые в общем случае могут быть записаны в виде

$$\dot{x} = \varphi(x, u, t), \qquad \dot{u} = \psi(x, z, u, t), \tag{18}$$

где вектор u состоит из требуемого сигнала x^* и вспомогательных переменных, необходимых для того, чтобы привести систему уравнений, описывающих работу формирующих и исполнительных устройств, к форме Коши. Добавив эти уравнения к уравнениям (15), получим для z, x, u систему уравнений

$$\dot{z}=f(z, x, t), \quad \dot{x}=\varphi(x, u, t), \quad \dot{u}=\psi(x, z, u, t).$$

Наконец, вводя расширенный вектор состояния системы $z'=[z^{\mathrm{T}}x^{\mathrm{T}}u^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, представим эти уравнения в виде одного векторного уравнения

$$\dot{z}'=f_1(z', t),$$

где $f_1(z', t)=[f(z, x, t)^{\mathrm{T}}\varphi(x, u, t)^{\mathrm{T}}\psi(x, z, u, t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$. Таким образом, при автоматическом управлении системой ее уравнения (15), (16) совместно с уравнениями, описывающими работу системы управления, приводятся к виду

$$\dot{z}=f(z, t), \quad y=g(z, t). \tag{19}$$

Итак, если входной сигнал системы x вырабатывается в соответствии с сигналом обратной связи с помощью формирующих и исполнительных устройств, то, вводя дополнительные переменные состояния, можно формально избавиться в уравнениях (15) от входного сигнала и привести их к виду (19).

Если используется система управления с ЭВМ, то некоторые величины в математической модели системы управления будут дискретными и для описания функционирования соответствующей части системы управления подходящим математическим инструментом будут разностные уравнения. Расширенный вектор состояния системы z должен быть разложен в этом случае на на два подвектора z', z'', $z=[z'^{\mathrm{T}}z''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, один из которых ($z'$) представляет собой непрерывно меняющуюся величину, а другой (z'') является дискретной величиной, меняющейся скачками в определенные моменты времени $t^{(k)}$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$. Вводя функцию

$$z''(t)=\sum_{k=0}^{\infty} z''_k \mathbf{1}_{A_k}(t),$$

где $\mathbf{1}_{A_k}(t)$ — индикатор интервала $A_k=[t^{(k)}, t^{(k+1)})$, т. е. функция t, равная 1, если $t\in[t^{(k)}, t^{(k+1)})$, и 0, если $t\notin[t^{(k)}, t^{(k+1)})$, мы заменяем в этом случае первое уравнение (19) системой уравнений

$$\dot{z}'=f(z, t), \qquad z''_{k+1}=\varphi_k(z_k), \tag{19a}$$

где $z_k=[z_k'^{\mathrm{T}}z_k''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}=z(t^{(k)})$, а φ_k — некоторые функции значения вектора состояния $z=[z'^{\mathrm{T}}z''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ при $t=t^{(k)}$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$. В данном случае вся система является непрерывно-дискретной.

Пример 10. Движение самолета в вертикальной плоскости в режиме прямолинейного горизонтального полета при малых отклонениях от этого режима описывается уравнениями

$$\ddot{\alpha}+c_1\dot{\alpha}+c_2\alpha=c_0-c_3\delta, \quad \dot{\theta}=a(\alpha-\alpha_0), \quad \dot{\eta}=v\theta,$$

где α — угол атаки самолета (рис. 4), θ — малый угол наклона его вектора скорости к горизонту, v — скорость полета, η — отклонение высоты полета от заданной, δ — угол отклонения руля высоты, α_0 — угол атаки, необходимый для поддержания постоянной высоты полета (т. е. для уравновешивания веса самолета подъемной силой), при котором $\dot{\theta}=0$, $\theta=0$, $\dot{\eta}=0$, c_0, c_1, c_2, c_3, a — коэффициенты, пропорциональные соответствующим аэродинамическим коэффициентам самолета и зависящие от плотности воздуха и скорости полета. Входным сигналом самолета служит отклонение руля высоты $x=\delta$, выходным сигналом — отклонение высоты полета от заданной $y=\eta$. За переменные состояния можно принять $z_1=\alpha$, $z_2=\dot{\alpha}$, $z_3=\theta$, $z_4=\eta$. Тогда уравнения движения самолета примут вид

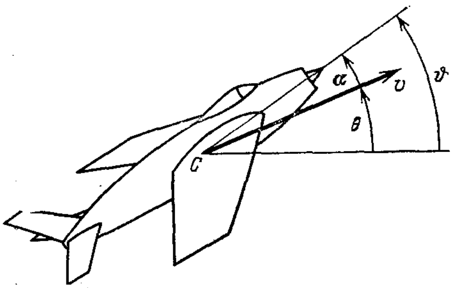

Рис. 4

$$\dot{z}_1=z_2,\quad \dot{z}_2=c_0-c_2z_1-c_1z_2-c_3x,$$
$$\dot{z}_3=a(z_1-\alpha_0),\quad \dot{z}_4=vz_3,\quad y=z_4.$$

Если управление полетом производится автопилотом, стабилизирующим угол тангажа $\vartheta=\theta+\alpha$ около требуемого значения α_0, то за выходной сигнал следует принять также угол тангажа ϑ. Тогда выходной сигнал будет двумерным вектором с компонентами $y_1=\vartheta$, $y_2=\eta$. В этом случае автопилот вырабатывает требуемое отклонение руля δ^*, близкое к линейной комбинации угла $\vartheta-\alpha_0$ и его производной $\dot{\vartheta}$. Для этого применяется дифференцирующая цепочка, работающая в соответствии с дифференциальным уравнением

$$T_1\dot{\delta}^*+\delta^*=k(T_2\dot{\vartheta}+\vartheta-\alpha_0).$$

Истинное отклонение руля высоты δ даже при идеальном быстродействии рулевой машины будет следить за δ^* только до тех пор, пока руль не

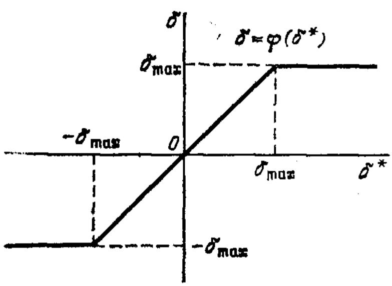

Рис. 5

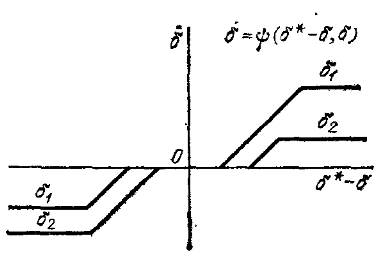

Рис. 6

ляжет на один из упоров. Поэтому зависимость δ от δ^* нелинейна и изображается графически ломаной, представленной на рис. 5 (характеристика ограничителя). Обозначив эту функцию через φ, будем иметь $\delta=\varphi(\delta^*)$.

Приняв за переменные состояния, кроме $z_1=\alpha$, $z_2=\dot{\alpha}$, $z_3=\theta$, $z_4=y$, величину $z_5=\delta^*$, получим уравнения движения самолета в виде

$$\dot{z}_1=z_2,\quad \dot{z}_2=c_0-c_2z_1-c_1z_2-c_3\varphi(z_5),$$
$$\dot{z}_3=a(z_1-\alpha_0),\quad \dot{z}_4=vz_3,$$
$$\dot{z}_5=[k(T_2a+1)/T_1](z_1-\alpha_0)+(kT_2/T_1)z_2+(\delta_0+kz_3-z_5)/T_1,$$
$$y_1=z_1+z_3,\quad y_2=z_4.$$

Эти уравнения справедливы при мгновенном отрабатывании отклонения руля в диапазоне его возможных значений.

Если учесть динамику рулевой машины, то отклонение руля δ уже не будет определенной функцией требуемого отклонения руля $\delta^* = z_5$, а будет определяться уравнением

$$\dot{\delta} = \psi(\delta^* - \delta, \ \delta),$$

где $\psi(\delta^* - \delta, \delta)$ — функция $\delta^* - \delta$ при $\delta_{min} < \delta < \delta_{max}$, при $\delta = \delta_{min}$, $\delta^* - \delta > 0$ и при $\delta = \delta_{max}$, $\delta^* - \delta < 0$ и $\psi(\delta^* - \delta, \delta) = 0$ при $\delta = \delta_{min}$, $\delta^* - \delta < 0$ и при $\delta = \delta_{max}$, $\delta^* - \delta > 0$ (рис. 6). Вводя в этом случае дополнительную переменную состояния $z_6 = \delta$, получаем уравнения движения самолета с автопилотом в виде

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = c_0 - c_2 z_1 - c_1 z_2 - c_3 z_5,$$
$$\dot{z}_3 = a(z_1 - \alpha_0), \quad \dot{z}_4 = v z_3,$$
$$\dot{z}_5 = (k(T_2 a + 1)/T_1)(z_1 - \alpha_0) + (kT_2/T_1) z_2 + (z_3 - z_5)/T_1 - kT_2 g/T_1 v,$$
$$\dot{z}_6 = \psi(z_5 - z_6, \ z_6), \quad y_1 = z_1 + z_3, \quad y_2 = z_4.$$

Предыдущие уравнения выведены в предположении, что самолет представляет собой абсолютно твердое тело. Если приближенно учесть его упругие деформации в полете и движение жидких масс в его баках, то получим более сложные модели движения, описываемые системами дифференциальных уравнений более высоких порядков.

1.2.8. Стационарные системы. *Стационарной* называется такая система, у которой при любом сдвиге входного сигнала во времени без изменения его формы (т. е. при замене $x(t)$ на $x(t-T)$ при любом T) выходной сигнал претерпевает тот же сдвиг во времени, тоже не изменяя своей формы (т. е. $y(t)$ заменяется на $y(t-T)$).

Легко видеть, что система, описываемая дифференциальными уравнениями (15) или (16), стационарна тогда и только тогда, когда правые части этих уравнений, т. е. функции $f(z, x, t)$ и $g(z, t)$, не зависят явно от времени, $f(z, x, t) = f(z, x)$, $g(z, t) = g(z)$.

1.2.9. Передаточная функция стационарной линейной системы. Из определения стационарной системы следует, что весовая функция стационарной линейной системы зависит только от разности ее аргументов. Действительно, согласно определению реакция стационарной линейной системы в момент t на единичный импульс, действующий в момент τ, совпадает с ее реакцией в момент $t-\tau$ на единичный импульс, действующий в нулевой момент, т. е. $g(t, \tau) = g(t-\tau, 0)$ при всех t, τ. Положив $g(t-\tau, 0) = w(t-\tau)$, будем иметь $g(t, \tau) = w(t-\tau)$.

Основной особенностью физически возможных стационарных линейных систем является то, что любая устойчивая стационарная линейная система усиливает неограниченно долго действующий входной сигнал, представляющий собой показательную функцию e^{st}, без изменения его формы. Действительно, положив в (14) в случае одномерной системы $x(\tau) = e^{s\tau}$, $g(t, \tau) = w(t-\tau)$, $t_0 =$

$= -\infty$, получаем

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} w(t-\tau)\, e^{s\tau}\, d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{t} w(t-\tau)\, e^{-s(t-\tau)} d\tau = e^{st} \int_{0}^{\infty} w(\sigma)\, e^{-s\sigma} d\sigma.$$

Обозначив коэффициент усиления показательного входа сигнала через

$$\Phi(s) = \int_{0}^{\infty} w(\sigma)\, e^{-s\sigma}\, d\sigma, \tag{20}$$

получим $y(t) = \Phi(s)\, e^{st}$. Это формула доказывает наше утверждение и показывает, что коэффициент усиления $\Phi(s)$ показательной функции зависит от параметра s. Этот коэффициент называется *передаточной функцией* стационарной линейной системы.

Высказанное утверждение верно и для комплексного параметра s, действительная часть которого больше некоторого отрицательного числа. Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить, что на основании принципа суперпозиции реакция линейной системы на комплексный входной сигнал представляет собой комплексную функцию времени, действительная и мнимая части которой равны реакциям системы на действительную и мнимую части входного сигнала соответственно. Конечно, при отличной от нуля мнимой части параметра s функция $\Phi(s)$ имеет комплексное значение. Это означает, что стационарная линейная система сохраняет форму гармонических колебаний с амплитудой, изменяющейся по показательному закону, усиливая их амплитуду и сдвигая фазу. При этом коэффициент усиления амплитуды равен $|\Phi(s)|$, а сдвиг фазы равен $-\arg \Phi(s)$.

Формула (20), выведенная для одномерных систем, определяет передаточную функцию стационарной линейной системы с n входами и m выходами. Чтобы убедиться в этом, достаточно применить формулу (20) по отдельности к любой паре вход-выход и записать полученные nm соотношений в матричной форме. При этом передаточная функция многомерной системы определится как $m \times n$-матрица, элементами которой служат передаточные функции от всех входов ко всем выходам, рассматриваемым по отдельности.

Пример 11. Формулы примеров 3—5 показывают, что рассмотренные в этих примерах электрические цепи представляют собой стационарные линейные системы. В соответствии с этим найденные в примерах 6—9 весовые функции этих цепей зависят только от $t-\tau$.

Пример 12. Чтобы найти передаточную функцию цепи примера 3, подставим найденное в примере 6 выражение ее весовой функции в (20). Выполнив интегрирование, получим

$$\Phi(s) = \frac{1}{T} \int_{0}^{\infty} e^{-\sigma/T - s\sigma}\, d\sigma = \frac{1}{Ts+1}.$$

Строго говоря, эта формула определяет $\Phi(s)$ только при $\operatorname{Re}\{s\} > -1/T$. Однако последняя часть этой формулы представляет собой функцию комплексной переменной s, определенную при всех s, с полюсом в точке $s=-1/T$. Таким образом, последняя часть полученной формулы дает аналитическое продолжение передаточной функции, определяемой формулой (20) только при тех s, при которых интеграл сходится, на всю комплексную плоскость.

Пример 13. Подставив выражение весовой функции цепи примера 4, полученное в примере 7, в (20), найдем передаточную функцию этой цепи

$$\Phi(s)=\int_0^\infty \left[\delta(\sigma)-\frac{1}{T}e^{-\sigma/T}\right]e^{-s\sigma}d\sigma=1-\frac{1}{Ts+1}=\frac{Ts}{Ts+1}.$$

Пример 14. Подставив выражение весовой функции колебательного контура примера 5, полученное в примере 8, в (20), найдем передаточную функцию контура

$$\Phi(s)=\frac{1}{\omega_0 T^2}\int_0^\infty e^{-\zeta\sigma/T-s\sigma}\sin\omega_0\sigma\, d\sigma=\frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}.$$

Пример 15. Подставив в (20) выражение весовой функции колебательного контура, рассматриваемого как система с двумя выходами, полученное в примере 9, найдем передаточную функцию контура

$$\Phi(s)=[\Phi_{11}(s)\ \ \Phi_{21}(s)]^T,$$

где

$$\Phi_{11}(s)=\frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1},\qquad \Phi_{21}(s)=\frac{Cs}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}.$$

1.2.10. Частотная характеристика стационарной линейной системы. Ограничиваясь чисто мнимыми значениями параметра s, $s=i\omega$, получаем передаточную функцию одномерной системы $\Phi(i\omega)$ как функцию круговой частоты гармонических колебаний $e^{i\omega t}$, действующих на входе системы. В этом случае $\Phi(i\omega)$ определяет коэффициент усиления амплитуды входных гармонических колебаний $|\Phi(i\omega)|$ и сдвиг фазы $\arg\Phi(i\omega)$ выходных колебаний по сравнению со входными как функции частоты ω. Совершенно так же в случае многомерной системы элементы матрицы $\Phi(i\omega)$ определяют коэффициенты усиления амплитуд и сдвиги фаз при прохождении гармонических колебаний от каждого входа к каждому выходу системы. Поэтому передаточная функция системы, рассматриваемая как функция чисто мнимого параметра $s=i\omega$ (т. е. суженная на мнимую ось комплексной плоскости), называется *частотной характеристикой* стационарной линейной системы.

Свойство стационарных линейных систем пропускать гармонические колебания без изменения их формы, только умножая амплитуду на $|\Phi(i\omega)|$ и сдвигая фазу на $-\arg\Phi(i\omega)$, дающее возможность исследовать их чисто алгебраическими методами, лежит в основе *метода частотных характеристик*, который долго служил в качестве наиболее удобного и часто применявшегося метода исследования любых стационарных линейных систем ([57], гл. 2 и 4). Лишь благодаря широкому распространению вычислительной техники метод частотных характеристик как расчетный метод для синтеза стационарных линейных систем отошел сейчас на второй план, уступив место современным вычислительным методам *).

С помощью частотной характеристики устойчивой системы легко вычисляется ее установившаяся реакция на любой входной сигнал, который можно разложить на элементарные гармонические колебания (т. е. представить рядом или интегралом Фурье).

Предположим, что входной сигнал x устойчивой стационарной линейной системы может быть представлен интегралом Фурье

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} c(i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega.$$

Тогда на основании принципа суперпозиции установившийся выходной сигнал y (при бесконечно долгом действии входного сигнала x) определится формулой

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(i\omega)\, c(i\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega.$$

В частности, представив δ-функцию $\delta(t-\tau)$ интегралом Фурье (*ТВ*, приложение 1),

$$\delta(t-\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\tau)}\, d\omega,$$

выразим реакцию системы на входной сигнал $I\delta(t-\tau)$, т. е. ее весовую функцию, через частотную характеристику

$$g(t,\ \tau)=w(t-\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(i\omega)\, e^{i\omega(t-\tau)}\, d\omega$$

или

$$w(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(i\omega)\, e^{i\omega u}\, d\omega.$$

Так как любой ограниченный непрерывный входной сигнал, действующий на конечном интервале времени (а только такие сигналы приходится рассматривать в задачах практики), можно представить интегралом Фурье, то с помощью частотных харак-

*) Метод частотных характеристик по-прежнему широко применяется для экспериментального определения динамических характеристик различных физических систем.

теристик можно вычислять установившиеся выходные сигналы устойчивых стационарных линейных систем практически при любых входных сигналах.

Метод частотных характеристик включает также частотные критерии устойчивости стационарных линейных систем ([57], § 6.3).

§ 1.3. Линейные дифференциальные системы

1.3.1. Уравнения линейной системы. В случае линейной системы уравнения (15), естественно, линейны и, следовательно, имеют вид

$$\dot{z} = az + a_1 x + a_0, \quad y = bz + b_0, \tag{21}$$

где a — квадратная матрица порядка p, a_1 — $p \times n$-матрица, a_0 — вектор размерности p, b — $m \times p$-матрица, b_0 — вектор размерности m. В общем случае a, a_1, a_0, b и b_0 могут зависеть от времени t. В частном случае стационарной линейной системы a, a_1, a_0, b и b_0 постоянны.

В некоторых случаях вектор состояния можно исключить из уравнений системы (21). В этом случае получится линейное дифференциальное уравнение выше первого порядка, связывающее выходной сигнал y со входным сигналом x. При этом поведение системы можно изучать, не интересуясь ее состоянием. Так раньше часто и поступали ([57], § 4.4, 4.5). Однако для исследования систем с помощью ЭВМ всегда удобно представлять описывающие их дифференциальные уравнения в форме Коши. Для этого приходится приводить эти уравнения к системе уравнений первого порядка путем ввода дополнительных переменных. Эти дополнительные переменные обычно и принимаются за переменные состояния системы.

Пример 16. Уравнения движения самолета в примере 10 будут линейными, если сделать допущение, что углы атаки и скольжения достаточно малы для того, чтобы можно было считать все аэродинамические коэффициенты не зависящими от этих углов, что рули не доходят до упоров и что рулевые машины мгновенно отслеживают требуемые отклонения рулей. При больших углах атаки и скольжения аэродинамические коэффициенты самолета зависят от этих углов, что приводит к нелинейности уравнений движения. Другим источником нелинейности является ограничение отклонений рулей. Наконец, учет динамики рулевых машин всегда приводит к нелинейности уравнений движения из-за существенной нелинейности характеристики рулевой машины $\psi(\delta^* - \delta, \delta)$.

1.3.2. Весовая функция. Для нахождения весовой функции линейной системы, описываемой дифференциальными уравнениями, проинтегрируем уравнения (21).

▶ Пусть $u(t, t_0)$ — решение однородного уравнения

$$\dot{u} = au \tag{22}$$

при начальном условии $u(t_0, t_0)=I$, т. е. фундаментальная матрица решений уравнения (22). Заменой переменных $z = u(t, t_0)v$ первое уравнение (21) приводится к виду

$$\dot{u}v+u\dot{v}=auv+a_1x+a_0$$

или, в силу (22),

$$u\dot{v}=a_1x+a_0.$$

Отсюда, имея в виду, что матрица u всегда обратима *), получаем

$$\dot{v}=u^{-1}(a_1x+a_0).$$

Интегрируя это уравнение при начальном условии $v(t_0) = u(t_0, t_0)^{-1}z(t_0)=z_0$, находим

$$v(t)=z_0+\int_{t_0}^{t} u(\tau, t_0)^{-1}[a_1(\tau)x(\tau)+a_0(\tau)]\,d\tau$$

и

$$z(t)=u(t, t_0)v(t)= \\ =u(t, t_0)z_0+u(t, t_0)\int_{t_0}^{t} u(\tau, t_0)^{-1}[a_1(\tau)x(\tau)+a_0(\tau)]\,d\tau.$$

Заметим теперь, что при любых t_0, τ, t, $t_0\leqslant\tau\leqslant t$,

$$u(t, t_0)=u(t, \tau)u(\tau, t_0). \tag{23}$$

Действительно, $u(t, t_0)$ по определению представляет собой решение уравнения (22) при начальном условии $u(t_0, t_0)=I$. Значение этого решения при $t=\tau$ равно $u(\tau, t_0)$. Следовательно, $u(t, t_0)$ можно рассматривать как решение того же уравнения (22) при начальном условии $u=u_0=u(\tau, t_0)$ при $t=\tau$. С другой стороны, решение уравнения (22), равное u_0 при $t=\tau$, определяется формулой $u=u(t, \tau)u_0$. Таким образом, в силу единственности решения уравнения (22) при данном начальном условии $u(t, t_0)=$

---

*) Из теории дифференциальных уравнений известно, что определитель матрицы $u(t, t_0)$ выражается формулой

$$\Delta=|u(t, t_0)|=\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr} a(\tau)\,d\tau\right\}, \tag{$*$}$$

где $\operatorname{tr} a(\tau)$ — след матрицы $a(\tau)$. Для вывода этой формулы достаточно заметить, что согласно правилу дифференцирования определителя и свойствам определителей $\dot{\Delta}=\Delta\operatorname{tr} a(t)$. Решение этого уравнения при начальном условии $\Delta(t_0)=|u(t_0, t_0)|=1$ определяется формулой ($*$). Из этой формулы следует, что (так как показательная функция нигде в нуль не обращается) $\Delta\neq 0$ (само собой разумеется, что интеграл в ($*$) предполагается конечным при всех t, t_0).

$=u(t, \tau)u_0=u(t, \tau)u(\tau, t_0)$, что и доказывает (23). На основании (23)

$$u(t, t_0)u(\tau, t_0)^{-1}=u(t, \tau)$$

и формула для $z(t)$ принимает вид

$$z(t)=u(t, t_0)z_0+\int_{t_0}^{t} u(t, \tau)[a_1(\tau)x(\tau)+a_0(\tau)]\,d\tau. \qquad (24)$$

Наконец, подставив это выражение во второе уравнение (21), находим

$$y(t)=b(t)u(t, t_0)z_0+\int_{t_0}^{t} b(t)u(t, \tau)a_1(\tau)x(\tau)\,d\tau+$$
$$+b(t)\int_{t_0}^{t} u(t, \tau)a_0(\tau)\,d\tau+b_0(t). \qquad (25)$$

Отсюда видно, что рассматриваемая система представляет собой линейную систему с аддитивным дополнительным выходным сигналом

$$y_0(t)=b(t)u(t, t_0)z_0+b(t)\int_{t_0}^{t} u(t, \tau)a_0(\tau)\,d\tau+b_0(t),$$

и с весовой функцией

$$g(t, \tau)=b(t)u(t, \tau)a_1(\tau)\,1(t-\tau), \qquad (26)$$

где $1(s)$ — единичная ступенчатая функция, равная 1 при $s>0$ и 0 при $s<0$. Формула (26) показывает, что весовая функция линейной дифференциальной системы легко находится, если известна фундаментальная матрица решений соответствующего однородного уравнения (22). ◀

Пример 17. В случае стационарной линейной системы все коэффициенты уравнений (21) и (22) постоянны и матрица фундаментальных решений $u(t, \tau)$ определяется известной формулой

$$u(t, \tau)=\begin{bmatrix} \alpha_{11}e^{s_1(t-\tau)} & \alpha_{12}e^{s_2(t-\tau)} & \ldots & \alpha_{1p}e^{s_p(t-\tau)} \\ \alpha_{21}e^{s_1(t-\tau)} & \alpha_{22}e^{s_2(t-\tau)} & \ldots & \alpha_{2p}e^{s_p(t-\tau)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{p1}e^{s_1(t-\tau)} & \alpha_{p2}e^{s_2(t-\tau)} & \ldots & \alpha_{pp}e^{s_p(t-\tau)} \end{bmatrix}\alpha^{-1},$$

где $s_1, \ldots, s_p$ — корни характеристического уравнения

$$|a-sI|=0$$

(через $|A|$ обозначаем определитель матрицы A), а элементы матрицы α определяются системами линейных алгебраических уравнений

$$(a-s_kI)[\alpha_{1k} \ldots \alpha_{pk}]^{\mathrm{T}}=0 \qquad (k=1, \ldots, p)\,^{*}).$$

*) Этой формулой $u(t, \tau)$ определяется в случае различных корней характеристического уравнения $s_1, \ldots, s_p$. Формулы для $u(t, \tau)$ в случае кратных корней читатель может найти, например, в [13].

Формула (26) в этом случае дает

$$g(t, \tau)=w(t-\tau)=b\begin{bmatrix}\alpha_{11}e^{s_1(t-\tau)} & \dots & \alpha_{1p}e^{s_p(t-\tau)}\\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot\\ \alpha_{p1}e^{s_1(t-\tau)} & \dots & \alpha_{pp}e^{s_p(t-\tau)}\end{bmatrix}\alpha^{-1}1(t-\tau)$$

при $t>\tau$.

1.3.3. Определение весовой функции методом сопряженных систем. Уравнение (22) при начальном условии $u=I$ при $t=\tau$ определяет фундаментальную матрицу решений $u(t, \tau)$ как функцию t при фиксированном τ. Однако формула (25) показывает, что для вычисления выходного сигнала системы в момент t необходимо найти $u(t, \tau)$ как функцию τ при фиксированном t. Для решения этой задачи обычно применяется *метод сопряженных систем.*

▶ Положив $u=u(t, t_0)$,

$$v=v(t, t_0)=u(t, t_0)^{-1\,\mathrm{T}}, \tag{27}$$

будем иметь при любых t_0 и $t>t_0$

$$uv^{\mathrm{T}}=I.$$

Дифференцируя эту формулу, получим

$$\dot{u}_t v^{\mathrm{T}}+u\dot{v}_t^{\mathrm{T}}=0,$$

откуда на основании (22) и (27) находим

$$u\dot{v}_t^{\mathrm{T}}=-auv^{\mathrm{T}}=-a \quad \text{или} \quad \dot{v}_t^{\mathrm{T}}=-u^{-1}a.$$

Отсюда в силу (27) вытекает дифференциальное уравнение для v:

$$\dot{v}_t^{\mathrm{T}}=-v^{\mathrm{T}}a. \tag{28}$$

Теперь заметим, что согласно (23) и (27)

$$u(t, \tau)=u(t, t_0)v(\tau, t_0)^{\mathrm{T}}.$$

Дифференцируя эту формулу по τ и принимая во внимание, что согласно (28)

$$\dot{v}_\tau(\tau, t_0)^{\mathrm{T}}=-v(\tau, t_0)^{\mathrm{T}}a(\tau),$$

находим

$$\dot{u}_\tau(t, \tau)=u(t, t_0)\dot{v}_\tau(\tau, t_0)^{\mathrm{T}}=-u(t, t_0)v(\tau, t_0)^{\mathrm{T}}a(\tau)=-u(t, \tau)a(\tau).$$

Таким образом, $u(t, \tau)$ как функция τ при фиксированном t определяется при $\tau<t$ уравнением

$$\dot{u}_\tau(t, \tau)=-u(t, \tau)a(\tau) \tag{29}$$

с начальным условием $u(t, t)=I$. ◀

Транспонируя уравнение (29), получим

$$\dot{u}_\tau(t, \tau)^{\mathrm{T}}=-a(\tau)^{\mathrm{T}}u(t, \tau)^{\mathrm{T}}. \tag{30}$$

Это уравнение является сопряженным с (20) ([56], § 85). Поэтому $u(t, \tau)^{\mathrm{T}}$ как функция τ при фиксированном t определяется при $\tau < t$ уравнением (30), сопряженным с (22), при конечном условии $u(t, t)^{\mathrm{T}} = I$. Это позволяет находить $u(t, \tau)$ интегрированием сопряженного уравнения (30) в обратном времени при начальном условии $u(t, t) = I$.

Более подробно метод сопряженных систем изложен в [57] (§ 4.3—4.5) и в [56] (§ 83—85).

1.3.4. Приведение уравнений линейной системы к форме Коши. Простейшие линейные системы (звенья), входящие в состав сложных систем, обычно бывают одномерными, т. е. имеют скалярные входной и выходной сигналы. При этом, если дифференциальное уравнение всей системы выше первого порядка, то оно часто содержит не только производные выходного сигнала, но и производные входного сигнала. Поэтому важно уметь приводить уравнения линейных систем к системам уравнений первого порядка, не содержащим производных входного сигнала. Сейчас мы покажем, как это делается.

Рассмотрим физически возможную систему, поведение которой описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} b_k x^{(k)}, \tag{31}$$

где коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m$ в общем случае зависят от времени t, а $m \leqslant n$ *). Очевидно, что достаточно рассмотреть случай $m = n$. Случай $m < n$ получится как частный случай при $b_n = \ldots = b_{m+1} = 0$.

▶ Введем новые переменные

$$z_1 = y - q_0 x, \quad z_{k+1} = \dot{z}_k - q_k x \qquad (k = 1, \ldots, n-1), \tag{32}$$

где $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ — некоторые функции t, которые мы определим из условия, чтобы полученные уравнения первого порядка не содержали производных входного сигнала x. Из (32), пользуясь известной формулой для производных произведения двух функций,

$$(uv)^{(r)} = \sum_{p=0}^{r} C_r^p u^{(p)} v^{(r-p)},$$

находим

$$y = z_1 + q_0 x, \tag{33}$$

$$y^{(s)} = z_{s+1} + \sum_{r=0}^{s} (q_{s-r} x)^{(r)} = z_{s+1} + \sum_{r=0}^{s} \sum_{p=0}^{r} C_r^p q_{s-r}^{(r-p)} x^{(p)} \qquad (s = 1, \ldots, n-1). \tag{34}$$

---

*) Случай $m > n$ приводится к случаю $m < n$ (п. 1.3.5).

Изменив порядок суммирования, получим

$$y^{(s)} = z_{s+1} + \sum_{p=0}^{s} x^{(p)} \sum_{r=p}^{s} C_r^p q_{s-r}^{(r-p)} \quad (s = 1, \ldots, n-1). \tag{35}$$

Дифференцируя формулу (34), соответствующую $s = n-1$, будем иметь

$$y^{(n)} = \dot{z}_n + \sum_{r=0}^{n-1} (q_{n-r-1}x)^{(r+1)} = \dot{z}_n + \sum_{r=1}^{n} (q_{n-r}x)^{(r)} =$$

$$= \dot{z}_n + x \sum_{l=1}^{n} q_{n-l}^{(l)} + \sum_{p=1}^{n} x^{(p)} \sum_{r=p}^{n} C_r^p q_{n-r}^{(r-p)}. \tag{36}$$

Подставив выражения (33), (35) и (36) в уравнение (31), получим

$$a_n \dot{z}_n + \sum_{l=1}^{n} a_{l-1} z_l + x \left\{ a_n \sum_{l=1}^{n} q_{n-l}^{(l)} + \sum_{s=0}^{n-1} a_s \sum_{l=0}^{s} q_{s-l}^{(l)} \right\} +$$

$$+ \sum_{p=1}^{n} x^{(p)} \sum_{s=p}^{n} \sum_{r=p}^{s} C_r^p a_s q_{s-r}^{(r-p)} = \sum_{p=0}^{n} b_p x^{(p)}. \tag{37}$$

Сравнив коэффициенты при соответствующих производных входного сигнала x в правой и левой частях уравнения (37), получим уравнения для определения функций q_k:

$$\sum_{s=p}^{n} \sum_{r=p}^{s} C_r^p a_s q_{s-r}^{(r-p)} = b_p \quad (p = 1, \ldots, n). \tag{38}$$

Последнее из этих уравнений, соответствующее $p = n$, дает

$$q_0 = a_n^{-1} b_n. \tag{39}$$

Для решения остальных уравнений (38) заметим, что

$$\sum_{s=p}^{n} \sum_{r=p}^{s} C_r^p a_s q_{s-r}^{(r-p)} = \sum_{s=p}^{n} \sum_{l=0}^{s-p} C_{p+l}^p a_s q_{s-p-l}^{(l)} =$$

$$= \sum_{l=0}^{n-p} \sum_{s=p+l}^{n} C_{p+l}^p a_s q_{s-p-l}^{(l)} = \sum_{l=0}^{n-p} \sum_{h=0}^{n-p-l} C_{p+l}^p a_{p+l+h} q_h^{(l)} =$$

$$= \sum_{h=0}^{n-p} \sum_{l=0}^{n-p-h} C_{p+l}^p a_{p+l+h} q_h^{(l)} = a_n q_{n-p} + \sum_{h=0}^{n-p-1} \sum_{l=0}^{n-p-h} C_{p+l}^p a_{p+l+h} q_h^{(l)}.$$

Подставив это выражение в (38) и положив $n-p=k$, получим

$$a_n q_k + \sum_{h=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{k-h} C_{n-k+l}^{n-k} a_{n-k+h+l} q_h^{(l)} = b_{n-k} \qquad (k = 1, \ldots, n-1).$$

Отсюда получаем рекуррентную формулу для определения функций $q_1, \ldots, q_{n-1}$:

$$q_k = a_n^{-1} \left[b_{n-k} - \sum_{h=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{k-h} C_{n-k+l}^{n-k} a_{n-k+h+l} q_h^{(l)} \right] \quad (k = 1, \ldots, n-1). \tag{40}$$

Определив таким образом функции $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$, приведем уравнение (37) к виду

$$a_n\dot{z}_n + \sum_{l=1}^{n} a_{l-1}z_l = \left\{b_0 - a_n \sum_{l=1}^{n} q_{n-l}^{(l)} + \sum_{s=0}^{n-1} a_s \sum_{l=0}^{s} q_{s-l}^{(l)}\right\} x.$$

Решив это уравнение относительно $\dot{z}_n$ и присоединив к нему уравнения (32), соответствующие $k=1, \ldots, n-1$, получим систему уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{z}_k &= z_{k+1} + q_k x \qquad (k=1, \ldots, n-1), \\ \dot{z}_n &= -\sum_{l=1}^{n} a_n^{-1} a_{l-1} z_l + q_n x, \end{aligned} \tag{41}$$

где

$$\begin{aligned} q_n &= a_n^{-1}\left[b_0 - a_n \sum_{l=1}^{n} q_{n-l}^{(l)} - \sum_{s=0}^{n-1} a_s \sum_{l=0}^{s} q_{s-l}^{(l)}\right] = \\ &= a_n^{-1}\left[b_0 - \sum_{h=0}^{n-1} a_h q_h - \sum_{s=1}^{n} a_s \sum_{l=1}^{s} q_{s-l}^{(l)}\right]. \end{aligned}$$

Заметив, что

$$\sum_{s=1}^{n} a_s \sum_{l=1}^{s} q_{s-l}^{(l)} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{s=l}^{n} a_s q_{s-l}^{(l)} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{h=0}^{n-l} a_{h+l} q_h^{(l)} = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-h} a_{h+l} q_h^{(l)},$$

преобразуем формулу для q_n к виду

$$q_n = a_n^{-1}\left[b_0 - \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-h} a_{h+l} q_h^{(l)}\right].$$

Очевидно, что эта формула совпадает с (40) при $k=n$. Таким образом, все функции $q_1, \ldots, q_n$ определяются формулой (40).

Случай $m < n$ можно рассматривать как частный случай, когда $b_n = \ldots = b_{m+1} = 0$. В этом случае формулы (39) и (40) дают

$$\begin{gathered} q_0 = q_1 = \ldots = q_{n-m-1} = 0, \quad q_{n-m} = a_n^{-1} b_m, \\ q_k = a_n^{-1}\left[b_{n-k} - \sum_{h=n-m}^{k-1} \sum_{l=0}^{k-h} C_{n-k+l}^{n-k} a_{n-k+h+l} q_h^{(l)}\right] \\ (k=n-m+1, \ldots, n). \blacktriangleleft \end{gathered} \tag{42}$$

Таким образом, мы привели уравнение (31) к системе уравнений первого порядка (41), не содержащих производных входного сигнала x. Компоненты векторов $z_1, \ldots, z_n$ в (41) представляют собой переменные состояния рассматриваемой системы. Выходной сигнал системы y находится из первого уравнения (32):

$$y = z_1 + q_0 x. \tag{43}$$

Очевидно, что уравнения (41) и (43) представляют собой частный случай уравнений (21) при $a_0=0$, $b_0=0$,

$$a=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n^{-1}a_0 & -a_n^{-1}a_1 & -a_n^{-1}a_2 & \dots & a_n^{-1}a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad a_1=\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix}, \tag{44}$$

$$b=[1\ 0\ \dots\ 0], \qquad b_1=q_0. \tag{45}$$

В данном случае выходной сигнал y явно зависит от входного сигнала x. Однако это редкий случай, так как обычно всегда бывает $m<n$, вследствие чего $q_0=0$ и выходной сигнал y не содержит x.

В частном случае стационарной системы все коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n$ постоянны, вследствие чего и величины $q_0, q_1, \dots, q_n$, определяемые последовательно формулами (39) и (40), постоянны. Поэтому $q_h^{(l)}=0$ $(h=0, 1, \dots, n;\ l=1, 2, \dots)$ и формулы (40) значительно упрощаются:

$$q_0=a_n^{-1}b_n,\ q_k=a_n^{-1}\left(b_{n-k}-\sum_{h=0}^{k-1}a_{n-k+h}q_h\right) \qquad (k=1, \dots, n). \tag{46}$$

Формулы (42) принимают вид

$$q_0=q_1=\dots=q_{n-m-1}=0, \qquad q_{n-m}=a_n^{-1}b_m,$$
$$q_k=a_n^{-1}\left(b_{n-k}-\sum_{h=n-m}^{k-1}a_{n-k+h}q_h\right) \quad (k=n-m+1, \dots, n). \tag{47}$$

Заметим, что все предыдущие выкладки, и следовательно, и формулы (40), (42), (46) и (47) для $q_0, q_1, \dots, q_n$ справедливы как в случае скалярных, так и в случае векторных входных и выходных сигналов x и y. В последнем случае $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n, q_0, q_1, \dots, q_n$ представляют собой матрицы соответствующих размеров.

Пример 18. Для приведения уравнения

$$a_3\dddot{y}+a_2\ddot{y}+a_1\dot{y}+a_0y=b_2\ddot{x}+b_1\dot{x}+b_0$$

к системе уравнений первого порядка в соответствии с (32) и (42) полагаем

$$y=z_1, \quad z_2=\dot{z}_1-q_1x, \quad z_3=\dot{z}_2-q_2x.$$

Тогда по формулам (42) найдем

$$q_0=0, \quad q_1=a_3^{-1}b_2, \quad q_2=a_3^{-1}(b_1-a_0q_1-2a_1\dot{q}_1),$$
$$q_3=a_3^{-1}(b_0-a_1q_1-a_2\dot{q}_1-a_3\ddot{q}_1-a_2q_2-a_3\dot{q}_2).$$

В результате получим систему уравнений первого порядка (41), которая в этом случае имеет вид

$$\dot{z}_1=z_2+q_1x, \quad \dot{z}_2=z_3+q_2x,$$
$$\dot{z}_3=-a_3^{-1}(a_0z_1+a_1z_2+a_2z_3)+q_3x, \qquad y=z_1.$$

1.3.5. Обратные системы. Системой, *обратной* по отношению к данной системе, называется такая система, которая, получая на входе выходной сигнал данной системы, дает на выходе ее входной сигнал (при соответствующих начальных условиях). Таким образом, обратная система производит преобразования сигналов, обратные тем, которые производит данная система. Очевидно, что если система B обратна системе A, то система A обратна системе B. Иными словами, A и B являются *взаимно обратными* системами. Примерами взаимно обратных систем могут служить усилитель с коэффициентом усиления k и усилитель с коэффициентом усиления $1/k$, дифференциатор и интегратор.

Если данная система с входным сигналом x и выходным сигналом y описывается линейным дифференциальным уравнением (31),

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} b_k x^{(k)}, \tag{31}$$

то обратная система описывается тем же дифференциальным уравнением, но ее входным сигналом служит y, а выходным — x.

Если $m=n$, то описываемые этим дифференциальным уравнением взаимно обратные системы имеют один и тот же тип. После приведения уравнения к системе уравнений первого порядка, как мы видели в п. 1.3.4, выходной сигнал каждой из них будет содержать входной сигнал с некоторым коэффициентом, а оставшаяся часть выходного сигнала будет определяться соответствующей системой дифференциальных уравнений первого порядка.

Если $m=0$, то выходной сигнал обратной системы определяется формулой

$$x = b_0^{-1} \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}.$$

Само собой разумеется, для существования обратной системы в этом случае необходимы выполнение неравенства $b_0 \neq 0$ при всех t в случае одномерной системы и обратимость матрицы b_0 при всех t в случае многомерной системы. При этом условии обратная система выполняет линейную дифференциальную операцию

$$L = b_0^{-1} \sum_{k=0}^{n} a_k D^k, \quad D = d/dt,$$

над входным сигналом.

► При $0 < m < n$ операции, выполняемые обратной системой, будут, очевидно, включать $(n-m)$-кратное дифференцирование входного сигнала. В результате выходной сигнал обратной системы будет содержать линейную комбинацию входного сигнала и его производных до порядка $n-m$ включительно. Для нахождения обратной системы в этом случае необходимо найти эту часть ее выходного сигнала. Поэтому положим

$$x = z + z_1 = z + \sum_{l=0}^{n-m} c_l y^{(l)} \tag{48}$$

и определим коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_{n-m}$ так, чтобы величина z не содержала линейной комбинации входного сигнала y и его производных.

Пользуясь известной формулой для производных произведения двух функций,

$$(uv)^{(s)} = \sum_{r=0}^{s} C_s^r u^{(r)} v^{(s-r)},$$

из (48) находим

$$x^{(s)} = z^{(s)} + \sum_{l=0}^{n-m} \sum_{r=0}^{s} C_s^r c_l^{(s-r)} y^{(l+r)} =$$
$$= z^{(s)} + \sum_{r=0}^{s} \sum_{l=0}^{n-m} C_s^r c_l^{(s-r)} y^{(l+r)} =$$
$$= z^{(s)} + \sum_{r=0}^{s} \sum_{k=r}^{n-m+r} C_s^r c_{k-r}^{(s-r)} y^{(k)}.$$

После этого очевидного преобразования двойной суммы выгодно опять изменить порядок суммирования, чтобы выделить в явном виде коэффициент при $y^{(k)}$. Для определения пределов внутренней суммы по r заметим, что

$$0 \leqslant r \leqslant k \leqslant n - m + r,$$

откуда следует, что $r \leqslant k$ и $r \geqslant k - n + m$. С другой стороны, $r \leqslant s$ и $r \geqslant 0$. Учитывая, что возможны неравенства $k > s$ и $k - n + m < 0$, приходим к выводу, что пределами суммы по r будут

$$\max(0, k - n + m) \quad \text{и} \quad \min(k, s).$$

В результате получим

$$x^{(s)} = z^{(s)} + \sum_{k=0}^{n-m+s} \sum_{r=\max(0,\, k-n+m)}^{\min(k,\, s)} C_s^r c_{k-r}^{(s-r)} y^{(k)},$$

$$\sum_{s=0}^{m} b_s x^{(s)} = \sum_{s=0}^{m} b_s z^{(s)} + \sum_{s=0}^{m} b_s \sum_{k=0}^{n-m+s} \sum_{r=\max(0,\, k-n+m)}^{\min(k,\, s)} C_s^r c_{k-r}^{(s-r)} y^{(k)}.$$

Изменив порядок суммирования по s и k с учетом того, что из $k \leqslant n - m + s$ следует $s \geqslant k - n + m$ и что $s \geqslant 0$, получаем

$$\sum_{s=0}^{m} b_s x^{(s)} = \sum_{k=0}^{m} b_k z^{(k)} + \sum_{s=\max(0,\, k-n+m)}^{m} \sum_{r=\max(0,\, k-n+m)}^{\min(k,\, s)} C_s^r b_s c_{k-r}^{(s-r)} y^{(k)}.$$

Подставим это выражение в (31) и сравним коэффициенты при $y^{(m)}, \ldots, y^{(n)}$ в левой и правой частях полученного равенства. Тогда, учитывая, что $\min(k, s) = s$ при $s \leqslant m$, $k \geqslant m$, получим

$$\sum_{s=\max(0,\, k-n+m)}^{m} \sum_{r=\max(0,\, k-n+m)}^{s} C_s^r b_s c_{k-r}^{(s-r)} = a_k \qquad (k = m, \ldots, n).$$

Чтобы решить эти уравнения относительно $c_0, c_1, \ldots, c_{n-m}$, изменим порядок суммирования по r и s. Учитывая, что $r \leqslant s$, получим

$$\sum_{r=\max(0,\, k-n+m)}^{m} \sum_{s=r}^{m} C_s^r b_s c_{k-r}^{(s-r)} = a_k \qquad (k = m, \ldots, n)$$

или, положив $s = r + h$,

$$\sum_{r=\max(0,\, k-n+m)}^{m} \sum_{h=0}^{m-r} C_{r+h}^r b_{r+h} c_{k-r}^{(h)} = a_k \qquad (k = m, \ldots, n).$$

При $k = n$ в сумме содержится только одно слагаемое, соответствующее $r = m$, $h = 0$. Поэтому при $k = n$ имеем

$$b_m c_{n-m} = a_n,$$

откуда находим

$$c_{n-m} = b_m^{-1} a_n. \tag{49}$$

Выделив в сумме в остальных уравнениях слагаемое, соответствующее $r = m$, и учитывая, что при $r = m$ h имеет только одно значение $h = 0$, приведем эти уравнения к виду

$$b_m c_{k-m} + \sum_{r=\max(0,\, k-n+m)}^{m-1} \sum_{h=0}^{m-r} C_{r+h}^r b_{r+h} c_{k-r}^{(h)} = a_k \qquad (k = m, \ldots, n-1).$$

Так как сумма здесь содержит только величины c_l с номерами l, большими, чем $k - m$ ($k - r > k - m$ для всех слагаемых, поскольку $r < m$), то эти уравнения можно решить относительно c_{k-m}. В результате получим

$$c_{k-m} = b_m^{-1} \left[a_k - \sum_{r=\max(0,\, k-n+m)}^{m-1} \sum_{h=0}^{m-r} C_{r+h}^r b_{r+h} c_{k-r}^{(h)} \right] \quad (k = m, \ldots, n-1). \tag{50}$$

Определив по формуле (49) c_{n-m}, можно найти по формуле (50) последовательно $c_{n-m-1}, \ldots, c_1, c_0$. Само собой разумеется, что для этого необходимы неравенство $b_m \neq 0$ при всех t в случае одномерной системы и обратимость матрицы b_m при всех t в случае многомерной системы.

После определения коэффициентов $c_0, c_1, \ldots, c_{n-m}$ в (48) слагаемые, содержащие $y^{(m)}, \ldots, y^{(n)}$ в левой и правой частях уравнения (31), при подстановке в него выражения (48) сократятся, и мы получим дифференциальное уравнение для z:

$$\sum_{k=0}^{m} b_k z^{(k)} = \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{a}_k y^{(k)}, \tag{51}$$

где

$$\tilde{a}_k = a_k - \sum_{s=\max(0,\,k-n+m)}^{m} \; \sum_{r=\max(0,\,k-n+m)}^{\min(k,\,s)} C_s^r b_s c_{k-r}^{(s-r)} \; (k=0,\,1,\,\ldots,\,m-1).$$

Изменив здесь порядок суммирования и учитывая, что $\max\limits_s \min(k, s) = k$ при $k \leqslant m-1$, $s \leqslant m$ и что $r \leqslant s$, получим

$$\tilde{a}_k = a_k - \sum_{r=\max(0,\,k-n+m)}^{k} \; \sum_{s=r}^{m} C_s^r b_s c_{k-r}^{(s-r)},$$

или

$$\tilde{a}_k = a_k - \sum_{r=\max(0,\,k-n+m)}^{k} \; \sum_{h=0}^{m-r} C_{r+h}^r b_{r+h} c_{k-r}^{(h)} \quad (k=0,\,1,\ldots,\,n-m). \tag{52}$$

Формула (48) показывает, что система, обратная системе, описываемой уравнением (31) при $0 < m < n$, представляет собой параллельное соединение системы, выполняющей дифференциальную операцию

$$L = \sum_{k=0}^{n-m} c_k D^k, \qquad D = d/dt,$$

над входным сигналом, и системы, описываемой дифференциальным уравнением (51) (рис. 7, на котором буквой K отмечена система, описываемая уравнением (51)). ◀

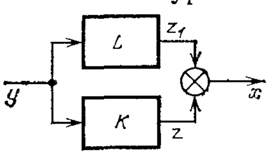

Рис. 7

Формулы (49) и (50) показывают, что обратная система может существовать только у такой системы, у которой входной и выходной сигналы имеют одинаковую размерность.

В частном случае стационарной системы формулы (50) и (52) принимают вид

$$c_{k-m} = b_m^{-1}\left[a_k - \sum_{r=\max(0,\,k-n+m)}^{m-1} b_r c_{k-r}\right] \quad (k=m,\,\ldots,\,n-1), \tag{53}$$

$$\tilde{a}_k = a_k - \sum_{r=\max(0,\,k-n+m)}^{k} b_r c_{k-r} \quad (k=0,\,1,\,\ldots,\,m-1). \tag{54}$$

Пример 19. Для системы, описываемой уравнением примера 18,

$$a_3\dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_2\ddot{x} + b_1\dot{x} + b_0 x,$$

обратная система представляет собой параллельное соединение системы, выполняющей дифференциальную операцию

$$L = c_0 + c_1 D,$$

и системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$b_2\ddot{z} + b_1\dot{z} + b_0 z = \tilde{a}_1\dot{y} + \tilde{a}_0 y,$$

где

$$c_1 = b_2^{-1}a_3,\quad c_0 = b_2^{-1}(a_2 - b_1c_1 - 2b_2\dot{c}_1),$$
$$\tilde{a}_0 = a_0 - b_0c_0 - b_1\dot{c}_0 - b_2\ddot{c}_0,$$
$$\tilde{a}_1 = a_1 - b_0c_1 - b_1\dot{c}_0 - b_2\ddot{c}_0 - b_1c_1 - 2b_2\dot{c}_1.$$

1.3.6. Передаточная функция стационарной линейной системы. Для нахождения передаточной функции стационарной линейной системы, описываемой уравнениями (21), необходимо положить $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ и вместо каждой компоненты входного сигнала x_h по очереди подставить в (21) показательную функцию e^{st}, а вместо выходного сигнала y — функцию $\Phi_h(s)e^{st}$, где $\Phi_h(s)$ — h-й столбец матричной передаточной функции системы $\Phi(s)$ ($h = 1, \ldots, n$). При этом следует положить $z = \Psi_h(s)e^{st}$. Сократив полученные уравнения на e^{st}, найдем $\Psi_h(s)$ и $\Phi_h(s)$. Вместо этого можно прямо найти $\Psi(s)$ и $\Phi(s)$, положив в (21) $x = Ie^{st}$, $y = \Phi(s)e^{st}$, $z = \Psi(s)e^{st}$. В результате получим после сокращения на e^{st}

$$s\Psi(s) = a\Psi(s) + a_1,\qquad \Phi(s) = b\Psi(s).$$

Решив эти уравнения относительно $\Psi(s)$ и $\Phi(s)$, получим

$$\Psi(s) = -(a - sI)^{-1}a_1,\qquad \Phi(s) = -b(a - sI)^{-1}a_1. \tag{55}$$

Отсюда видно, что передаточная функция стационарной линейной системы, описываемой дифференциальными уравнениями (конечно, линейными с постоянными коэффициентами), представляет собой рациональную функцию комплексной переменной s.

В частном случае одномерной системы, описываемой уравнением (31) с постоянными коэффициентами при $m \leqslant n$, пользуясь формулами (44) и (45) для матриц a, a_1, b, находим после несложных вычислений

$$\Phi(s) = \frac{b_m s^n + b_{m-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}. \tag{56}$$

Однако эту формулу можно вывести значительно проще. Положим в уравнении (31) $x = e^{st}$, $y = \Phi(s)e^{st}$. Тогда, имея в виду, что

$$\frac{d^k}{dt^k}e^{st} = s^k e^{st}\qquad (k = 1, \ldots, n),$$

получим

$$(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0)\,\Phi(s)\,e^{st} =$$
$$= (b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0)\,e^{st}.$$

Сократив это уравнение на показательную функцию и решив относительно $\Phi(s)$, получим формулу (56).

В дальнейшем нам будет удобно записывать дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами сокращенно в операторной форме. Для этого введем полиномы

$$\begin{aligned} F(s) &= a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k s^k, \\ H(s) &= b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0 = \sum_{k=0}^{m} b_k s^k. \end{aligned} \tag{57}$$

Тогда дифференциальное уравнение (31) запишется коротко в операторной форме:

$$F(D)\,y = H(D)\,x. \tag{58}$$

Формула (56) для передаточной функции одномерной системы примет вид

$$\Phi(s) = H(s)/F(s). \tag{59}$$

Вторая формула (55) определяет передаточную функцию стационарной линейной системы, описываемой дифференциальными уравнениями (21), при всех значениях s, кроме совпадающих с корнями характеристического уравнения

$$|a - sI| = 0. \tag{60}$$

Однако физически эта передаточная функция существует не при всех значениях s. Действительно, формула

$$y(t) = \Phi_h(s)\,e^{st} \tag{61}$$

определяет установившуюся реакцию системы на показательное возмущение, действующее на одном h-м входе, не при всех значениях s. Реакция системы на показательное возмущение, действующее на одном h-м входе, в общем случае представляет собой общее решение уравнений (21), а не частное. Для получения общего решения уравнений (21) следует к найденному частному решению (61) добавить общее решение соответствующих однородных уравнений

$$\dot{z} = az, \quad y = bz.$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что если корни характеристического уравнения (60) $s_1, \ldots, s_p$ все различны, то общее решение уравнений (21) представляет собой линейную комбинацию показательных функций $\gamma_1 e^{s_1 t}, \ldots, \gamma_p e^{s_p t}$ с произвольными коэффициентами, где $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ — m-мерные векторы, определяемые матрицами α, a_1, b в выражении весовой функции, полученном в п. 1.3.2. Таким образом, в случае, когда характеристическое уравнение не имеет кратных корней, общее решение уравнений (21) при действии сигнала e^{st} на одном h-м входе определяется формулой

$$y=\Phi_h(s)\,e^{st}+c_1\gamma_1 e^{s_1 t}+\ldots+c_p\gamma_p e^{s_p t}, \tag{62}$$

где $c_1, \ldots, c_p$ — произвольные постоянные. Отсюда следует, что установившаяся реакция рассматриваемой системы на показательный сигнал e^{st} на h-м входе, независимая от начальных условий, существует только в том случае, когда все корни характеристического уравнения $s_1, \ldots, s_p$ имеют отрицательные действительные части, а действительная часть параметра s отрицательна или равна нулю. Если эти условия не выполнены, то реакция системы на сигнал e^{st} неограниченно возрастает. Однако и в этом случае можно говорить об установившейся реакции системы на сигнал e^{st}, если первое слагаемое в правой части (62) растет при $t\to\infty$ быстрее, чем все остальные слагаемые. В этом случае при достаточно длительном времени работы системы t реакция ее на сигнал e^{st} будет практически выражаться одним первым слагаемым в правой части формулы (62).

Для определения передаточной функции от h-го входа ко всем выходам системы разделим формулу (62) на e^{st}:

$$y/e^{st}=\Phi_h(s)+c_1\gamma_1 e^{(s_1-s)t}+\ldots+c_p\gamma_p e^{(s_p-s)t}. \tag{63}$$

Если действительные части всех разностей $s_1-s, \ldots, s_p-s$ отрицательны, то все показательные функции в (63) стремятся к нулю при $t\to\infty$. В этом случае передаточная функция системы, представляющая собой отношение реакции этой системы на бесконечно долго действующий на ее h-м входе сигнал e^{st} к e^{st}, определяется одним первым слагаемым в формуле (63), т. е. равна $\Phi_h(s)$. Если хотя бы одно из чисел $s_1-s, \ldots, s_p-s$ имеет положительную действительную часть, то соответствующая показательная функция в (63) неограниченно возрастает при $t\to\infty$ и, следовательно, передаточная функция системы не существует.

Таким образом, передаточная функция стационарной линейной системы, поведение которой описывается дифференциальными уравнениями, существует только в области значений s, действительные части которых больше действительных частей всех корней характеристического уравнения $s_1, \ldots, s_p$. Иными словами, передаточная функция этой системы существует только в полуплоскости комплексного параметра s, расположенной справа от вертикальной прямой, проходящей через корень характеристического уравнения с наибольшей действительной частью (эта полуплоскость заштрихована на рис. 8). Левее этой прямой и на самой прямой передаточная функция не существует, несмотря на то, что вторая формула (55) формально определяет ее при всех значениях s, кроме точек $s_1, \ldots, s_p$. Этот вывод справедлив и в случае кратных корней характеристического уравнения, так как при любом $r>0$ произведение $t^r e^{(s_k-s)t}$ стремится к нулю при $t \to \infty$, если действительная часть параметра s больше действительной части корня s_k характеристического уравнения, и неограниченно возрастает, если действительная часть параметра s меньше или равна действительной части корня s_k.

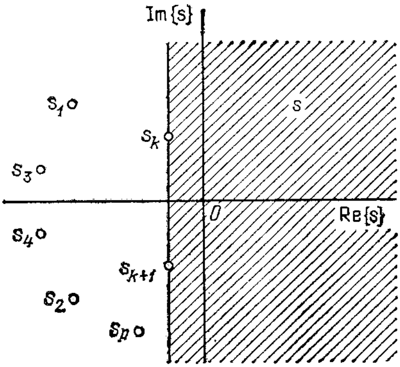

Рис. 8

Из условия устойчивости линейной системы (9) следует, что для устойчивости стационарной линейной дифференциальной системы необходимо и достаточно, чтобы действительные части всех корней характеристического уравнения (60) были отрицательными. Отсюда выводятся критерии устойчивости стационарных линейных дифференциальных систем, основанные на знании только коэффициентов характеристического уравнения (60) ([57], § 6.2). Передаточная функция $\Phi(s)$ устойчивой системы существует при чисто мнимых значениях s, т. е. существует частотная характеристика системы. Для неустойчивой системы частотная характеристика не существует и может использоваться только в формальных выкладках как рациональная функция комплексной переменной s, существующая при всех s, не совпадающих с ее полюсами $s_1, \ldots, s_p$.

Пример 20. Из дифференциальных уравнений примеров 3—5 по формуле (56) непосредственно получаются формулы для передаточных функций, выведенные в примерах 12—14.

1.3.7. Нахождение дифференциального уравнения по данной передаточной функции. Из предыдущего следует, что передаточная функция стационарной линейной системы, описываемой дифференциальными уравнениями, является рациональной функцией комплексной переменной s (в случае многомерной системы все элементы матричной передаточной функции — рациональные функции s). Справедливо и обратное утверждение: любой стационарной линейной системе с рациональной передаточной функцией соответствует дифференциальное уравнение (линейное с постоянными коэффициентами), связывающее входной и выходной сигналы.

Если передаточная функция $\Phi(s)$ одномерной системы рациональна, то ее можно представить в виде отношения двух полиномов $\Phi(s) = H(s)/F(s)$. Из (58) и (59) следует, что в этом случае входной и выходной сигналы системы x и y связаны дифференциальным уравнением (58). Таким образом, чтобы по данной рациональной передаточной функции одномерной системы получить ее дифференциальное уравнение, следует заменить в числителе и знаменателе передаточной функции переменную s оператором дифференцирования по времени $D=d/dt$. Полученные в результате дифференциальные операторы образуют соответственно правую (со входным сигналом) и левую (с выходным сигналом) части дифференциального уравнения.

Легко видеть, что для того чтобы все коэффициенты уравнения (58) (или, что то же, (31)) были действительными, необходимо и достаточно, чтобы все чисто мнимые и комплексные корни полиномов $F(s)$ и $H(s)$ были попарно сопряженными.

Если передаточная функция $\Phi(s)$ многомерной системы рациональна, то все элементы $\Phi_{pq}(s)$ p-й строки матрицы $\Phi(s)$ путем приведения к общему знаменателю можно представить в виде $H_{pq}(s)/F_p(s)$ $(p=1, \ldots, m;\ q=1, \ldots, n)$, где $H_{pq}(s)$ и $F_p(s)$ — полиномы. Вводя матрицу $H(s)$ с элементами $H_{pq}(s)$ и диагональную матрицу $F(s)$ с элементами $F_1(s), \ldots, F_m(s)$, представим передаточную функцию системы в виде $\Phi(s)=F(s)^{-1}H(s)$. Тогда дифференциальное уравнение, связывающее входной и выходной сигналы x и y, будет иметь вид (58). При этом коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ в выражении (57) полинома $F(s)$ будут диагональными матрицами m-го порядка.

Пример 21. Передаточная функция системы с двумя входами и двумя выходами определяется формулой

$$\Phi(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{k_{11}}{s+\alpha_1} & \dfrac{k_{12}}{s+\alpha_1} \\ \dfrac{k_{21}}{s+\alpha_2} & \dfrac{k_{22}}{s+\alpha_2} \end{bmatrix}.$$

Здесь все элементы каждой строки матрицы имеют общий знаменатель, и, следовательно, согласно изложенному методу

$$F(s)=\begin{bmatrix} s+\alpha_1 & 0 \\ 0 & s+\alpha_2 \end{bmatrix}, \qquad H(s)=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

и дифференциальные уравнения системы имеют вид

$$\dot{y}_1+\alpha_1 y_1=k_{11}x_1+k_{12}x_2,$$
$$\dot{y}_2+\alpha_2 y_2=k_{21}x_1+k_{22}x_2.$$

Дифференциальное уравнение стационарной линейной системы можно также найти по заданной частотной характеристике, если она представляет собой рациональную функцию частоты ω. Для этого достаточно вспомнить, что частотная характеристика представляет собой передаточную функцию при $s=i\omega$. Тогда будет ясно, что для нахождения дифференциального уравнения системы необходимо представить ее частотную характеристику в виде отношения двух полиномов относительно $i\omega$, $\Phi(i\omega)=F(i\omega)^{-1}H(i\omega)$. После этого дифференциальное уравнение системы получится так же, как в случае заданной передаточной функции.

Чтобы получить модель системы, описываемую линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, по частотной характеристике, найденной экспериментально, следует сначала аппроксимировать частотную характеристику рациональной функцией. После этого дифференциальное уравнение модели найдется изложенным методом.

Ясно, что и в случае многомерной системы все коэффициенты описывающих ее дифференциальных уравнений действительны тогда и только тогда, когда все мнимые и комплексные корни полиномов $F_k(s)$, $H_{kh}(s)$ $(k=1, \ldots, m;\ h=1, \ldots, n)$ являются попарно сопряженными числами.

Изложенный метод получения дифференциального уравнения многомерной системы дает одну из простейших форм этого уравнения, поскольку в каждое из уравнений полученной системы уравнений входит только одна компонента выходного сигнала. Вообще же задача нахождения дифференциального уравнения многомерной системы по ее передаточной функции не имеет однозначного решения. Одной и той же многомерной системе соответствует бесчисленное множество различных дифференциальных уравнений, связывающих входной и выходной сигналы. Чтобы понять это, достаточно заметить, что в случае многомерной системы с m выходами любое уравнение, полученное умножением уравнения (31) слева на произвольную неособенную $m \times m$-матрицу, описывает поведение той же системы.

Задача приведения дифференциального уравнения многомерной системы к одной из простейших возможных форм имеет большое практическое значение.

§ 1.4. Стохастические дифференциальные системы

1.4.1. Общая форма уравнений стохастических дифференциальных систем. Стохастические модели систем учитывают действие различных случайных факторов. При применении моделей, описываемых дифференциальными уравнениями, учет случайных факторов приводит к уравнениям, содержащим случайные функции, т. е. такие функции, значения которых при данных значениях аргументов являются случайными величинами (п. 2.1.1).

Дифференциальные уравнения (15) для стохастической системы (точнее, для стохастической модели системы) должны быть заменены в общем случае уравнениями

$$\dot{Z}=F(Z,\ x,\ t), \qquad Y=G(Z,\ t), \tag{64}$$

где $F(z, x, t)$ и $G(z, t)$ — случайные функции p-мерного вектора z, n-мерного вектора x и времени t (при этом, как правило, G от x не зависит). Вследствие случайности правых частей уравнений (64) и, возможно, также начального значения вектора состояния $Z_0=Z(t_0)$ вектор состояния системы Z и выходной сигнал Y

в каждый данный момент t представляют собой случайные величины. Поэтому мы обозначаем их, так же как и случайные функции в правых частях уравнений (64), большими буквами (*ТВ*, п. 1.2.1). Рассматриваемые как функции времени t, вектор состояния системы $Z(t)$ и ее выходной сигнал $Y(t)$ представляют собой случайные функции времени t (в общем случае векторные). В каждом конкретном опыте случайные функции $F(z, x, t)$ и $G(z, t)$ реализуются в виде некоторых конкретных функций $f(z, x, t)$ и $g(z, t)$ и этим их реализациям соответствуют вполне определенные реализации $z(t)$, $y(t)$ вектора состояния $Z(t)$ и выходного сигнала $Y(t)$, которые, очевидно, определяются дифференциальными уравнениями (реализациями уравнений (64))

$$\dot{z}=f(z, x, t), \qquad y=g(z, t).$$

Таким образом, мы приходим к необходимости изучать дифференциальные уравнения со случайными функциями в правых частях.

В задачах практики случайность правых частей дифференциальных уравнений обычно выражается в том, что они представляют собой некоторые вполне определенные функции, но в число их аргументов входят не вполне определенные величины, которые считаются случайными величинами (если они не изменяются со временем, представляют собой параметры) или случайными функциями (если они изменяются со временем и, может быть, в зависимости от состояния и входного сигнала системы). Однако, если правые части уравнений системы содержат случайные функции вектора состояния Z и выходного сигнала Y системы, то их обычно заменяют случайными функциями времени, которые получаются, если их аргументы Z и Y считать известными функциями времени, соответствующими номинальному режиму работы системы. В задачах практики такой прием обычно обеспечивает достаточную точность. Системы, описываемые дифференциальными уравнениями со случайными функциями вектора состояния, можно также приближенно изучать непосредственно, не прибегая к этому приему. Подходящим математическим аппаратом для этого является метод канонических разложений случайных функций [56] (§ 102), [119], [102] (вып. 12).

В этой книге мы ограничимся случаем, когда все неопределенные величины в правых частях уравнений можно считать случайными функциями времени. Тогда уравнения (64) запишутся в виде

$$\dot{Z}=f(Z, x, N_1(t), t), \qquad Y=g(Z, N_2(t), t), \tag{65}$$

где f и g — вполне определенные функции, в число аргументов которых входят случайные функции времени $N_1(t)$ и $N_2(t)$. Начальный вектор состояния системы Z_0 в задачах практики всегда является случайной величиной, независимой от случайных функций $N_1(t)$ и $N_2(t)$ (от действующих на систему случайных возмущений). Каждой реализации $[n_1(t)^{\text{т}} n_2(t)^{\text{т}}]^{\text{т}}$ случайной функции $[N_1(t)^{\text{т}} N_2(t)^{\text{т}}]^{\text{т}}$ соответствуют определенные реализации $f(z, x, n_1(t), t)$, $g(z, n_2(t), t)$ функций $f(z, x, N_1(t), t)$, $g(z, N_2(t), t)$, и в соответствии с этим уравнения (65) дают определенные реализации $z(t)$ и $y(t)$ вектора состояния системы $Z(t)$ и ее выходного сигнала $Y(t)$.

1.4.2. Уравнения стохастической дифференциальной системы при автоматическом управлении. При автоматическом управлении системой, описываемой уравнениями (65), функция $h(y, t)$, определяющая цель управления, измеряется со случайными ошибками, а в преобразующих устройствах, формирующих требуемый входной сигнал x^*, всегда действуют шумы и помехи. Вследствие этого уравнения формирования требуемого входного сигнала и действительного входного сигнала с учетом дополнительных переменных, необходимых для приведения этих уравнений к уравнениям первого порядка, запишутся в виде

$$\dot{X}=\varphi(X, U, t), \qquad \dot{U}=\psi(X, Z, U, N_3(t), t), \tag{66}$$

где U — вектор, составленный из требуемого входного сигнала и вспомогательных переменных, а $N_3(t)$ — некоторая случайная функция времени t (в общем случае векторная). Записывая эти уравнения, мы учли, что вследствие действия шумов, описываемых случайной функцией $N_3(t)$, вектор U и входной сигнал X будут случайными функциями времени, и в соответствии с этим обозначили их большими буквами. Добавив эти уравнения к первому уравнению (65), получим уравнения

$$\dot{Z}=f(Z, X, N_1(t), t) \qquad \dot{X}=\varphi(X, U, t),$$
$$\dot{U}=\psi(X, Z, U, N_3(t), t).$$

Эти уравнения могут быть записаны в виде одного уравнения, определяющего расширенный вектор состояния системы $Z_1 = [Z^{\text{т}} X^{\text{т}} U^{\text{т}}]^{\text{т}}$:

$$\dot{Z}_1=f_1(Z_1, N_4(t), t),$$

где $N_4(t)=[N_1(t)^{\text{т}} N_3(t)^{\text{т}}]^{\text{т}}$, а

$$f_1(Z_1, N_4, t)=[f(Z, X, N_1, t)^{\text{т}} \varphi(X, U, t)^{\text{т}} \psi(X, Z, U, N_3, t)^{\text{т}}]^{\text{т}}.$$

В результате, отбрасывая индексы у Z_1 и f_1, заменим систему уравнений (65) и (66) уравнениями

$$\dot{Z}=f(Z, N_4(t), t), \quad Y=g(Z, N_2(t), t).$$

В задачах практики случайные функции $N_1(t)$ и $N_2(t)$ почти всегда независимы. Однако случайная функция $N_3(t)$ зависит от $N_1(t)$ и $N_2(t)$ вследствие того, что в уравнения (66) входит функция $h(Y, t)=h(g(Z, N_2(t), t), t)$ и ее полная производная по времени t. Поэтому случайные функции $N_2(t)$ и $N_4(t)$ зависимы. Вводя составную векторную случайную функцию $N(t)=[N_1(t)^{\mathrm{T}}\times\times N_2(t)^{\mathrm{T}}\,N_3(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, перепишем полученные уравнения в виде

$$\dot{Z}=f(Z,\,N(t),\,t),\qquad Y=g(Z,\,N(t),\,t). \tag{67}$$

Таким образом, при автоматическом управлении системой, описываемой уравнениями (65), добавив к уравнениям (65) уравнения формирования требуемого и фактического входных сигналов, мы включаем эти сигналы в вектор состояния системы и приходим к уравнениям вида (67), содержащим случайную функцию $N(t)$.

Если система управления содержит ЭВМ, то, как и в п. 1.2.7, разложим расширенный вектор состояния системы Z на два подвектора Z', Z'', $Z=[Z'^{\mathrm{T}}\,Z''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, один из которых Z' представляет собой непрерывно изменяющуюся случайную функцию, а другой Z'' является ступенчатой случайной функцией, изменяющейся скачками в определенные моменты времени $t^{(k)}$ $(k=0,\,1,\,2,\,\ldots)$. Тогда, вводя случайную функцию

$$Z''(t)=\sum_{k=0}^{\infty} Z''_k 1_{A_k}(t)$$

и полагая $Z_k=Z(t^{(k)})$ $(k=0,\,1,\,2,\,\ldots)$, получим уравнения, описывающие эволюцию расширенного вектора состояния стохастической системы при автоматическом управлении с ЭВМ:

$$\dot{Z}'=f(Z,\,N(t),\,t),\qquad Z''_{k+1}=\varphi_k(Z_k,\,N_k), \tag{67a}$$

где $N(t)$ — некоторая случайная функция, а N_k $(k=0,\,1,\,2,\,\ldots)$ — некоторые случайные величины.

Пример 22. Уравнения движения в примерах 1, 2 описывают стохастические модели движения различных механических систем, если силы и моменты в правых частях уравнений представляют собой случайные функции.

Пример 23. Уравнения продольного движения самолета в турбулентной атмосфере в режиме прямолинейного горизонтального полета имеют вид

$$\ddot{\alpha}+c_1\dot{\alpha}+c_2\alpha=c_0-c_3\delta-N_{11}(t),$$
$$\dot{\theta}=a(\alpha-\alpha_0)+N_{12}(t),\qquad \dot{\eta}=v\theta,$$

где в дополнение к обозначениям примера 10 $N_{11}(t)$ и $N_{12}(t)$ — случайные функции времени, определяемые формулами

$$N_{11}(t)=c_4W_y+c_5\dot{W}_y,\qquad N_{12}(t)=a_1W_y,$$

в которых W_y — вертикальная составляющая вектора скорости ветра, представляющая собой случайную функцию координат точки пространства, а $\dot{W}_y$ — ее полная производная по времени с учетом того, что номинальные координаты самолета в неподвижной системе $\xi\eta\zeta$ определяются формулами $\xi=\xi_0+vt$, $\eta=\zeta=0$ (предполагается, что ось абсцисс направлена по горизонтальной прямой, представляющей собой заданную траекторию полета).

Вводя, как и в примере 10, вектор состояния Z с компонентами $Z_1=\alpha$, $Z_2=\dot{\alpha}$, $Z_3=\theta$, $Z_4=\eta$ и входной сигнал $x=\delta$, получим уравнения движения самолета вида (65):

$$\dot{Z}_1=Z_2,\quad \dot{Z}_2=-c_0-c_2Z_1-c_1Z_2-c_3x-N_{11}(t),$$
$$\dot{Z}_3=a(Z_1-\alpha_0)+N_{12}(t),\quad \dot{Z}_4=vZ_3,\quad Y=Z_4.$$

Остается определить входной сигнал x. Предполагая, что летчик задает отклонение руля высоты от положения, необходимого для поддержания заданной высоты полета, приблизительно как линейную комбинацию отклонения угла тангажа $\vartheta=\theta+\alpha=Z_1+Z_3$ от заданного значения α_0 и его производной со случайными колебаниями, можем написать

$$x=\delta_0+k_0(Z_1+Z_3-\alpha_0)+k_1(\dot{Z}_1+\dot{Z}_3)+N_3(t),$$

где $\delta_0=(c_0-c_2\alpha_0)/c_3$ — угол отклонения руля высоты, необходимый для поддержания заданного значения α_0 угла атаки α, при котором $\dot{\theta}=0$, $\theta=0$, $\dot{y}=0$, k_0 и k_1 — некоторые коэффициенты, $N_3(t)$ — случайные колебания руля высоты, совершаемые летчиком. Подставив в полученное уравнение выражения производных $\dot{Z}_1$ и $\dot{Z}_3$ из предыдущих уравнений, получим

$$x=\delta_0+(k_0+k_1a)Z_1+k_1Z_2+k_0Z_3-(k_0+k_1a)\alpha_0+k_1N_{12}(t)+N_3(t).$$

Тогда уравнения продольного движения самолета в турбулентной атмосфере примут вид

$$\dot{Z}_1=Z_2,$$
$$\dot{Z}_2=-[c_2+c_3(k_0+k_1a)](Z_1-\alpha_0)-(c_1+c_3k_1)Z_2-c_3k_0Z_3-N_4(t),$$
$$\dot{Z}_3=a(Z_1-\alpha_0)+N_{12}(t),\qquad \dot{Z}_4=vZ_3,\qquad Y=Z_4,$$

где

$$N_4(t)=N_{11}(t)+c_3k_1N_{12}(t)+c_3N_3(t).$$

При автоматическом управлении полетом с помощью автопилота, стабилизирующего оси самолета, угол отклонения руля высоты $x=\delta$ определяется теми же уравнениями, что и в примере 10, поскольку ошибками измерения угла тангажа с помощью гироскопической системы и ошибками рулевой машины можно пренебречь. Однако при подстановке в уравнение формирования требуемого отклонения руля высоты δ^*, производных $\dot{Z}_1$ и $\dot{Z}_3$ в это уравнение войдет дополнительное случайное слагаемое $kT_2N_{12}(t)$. В результате получим уравнения движения самолета при допущении о мгновенном срабатывании рулевой машины

$$\dot{Z}_1=Z_2,\qquad \dot{Z}_2=c_0-c_2Z_1-c_1Z_2-c_3\varphi(Z_5)-N_{11}(t),$$
$$\dot{Z}_3=a(Z_1-\alpha_0)+N_{12}(t),\qquad \dot{Z}_4=vZ_3,$$
$$\dot{Z}_5=[k(T_2a+1)/T_1](Z_1-\alpha_0)+(kT_2/T_1)Z_2+(\delta_0+kZ_3-Z_5)/T_1+(kT_2/T_1)N_{12}(t),$$
$$Y_1=Z_1+Z_3,\qquad Y_2=Z_4.$$

Если учесть еще динамику рулевой машины и ввести дополнительную переменную состояния $Z_6=x=\delta$, то к написанным уравнениям добавится уравнение динамики рулевой машины

$$\dot{Z}_6=\psi(Z_5-Z_6,\ Z_6),$$

а второе уравнение заменится уравнением

$$\dot{Z}_2=c_0-c_2Z_1-c_1Z_2-c_3Z_6-N_{11}(t).$$

1.4.3. Системы со случайно изменяющейся структурой. В частном случае, когда одна из компонент, скажем, $N_1(t)$, векторной случайной функции $N(t)$ в (67) представляет собой ступенчатую случайную функцию с одним и тем же при всех t конечным множеством возможных значений $\{s_1, \ldots, s_n\}$, уравнения (67) описывают поведение системы со случайно изменяющейся структурой. Каждому фиксированному значению s_k случайной функции $N_1(t)$ соответствует определенная структура системы, которая описывается уравнениями

$$\dot{Z}=f(Z,\ s_k,\ N_2(t),\ t), \qquad Y=g(Z,\ s_k,\ N_2(t),\ t),$$

где $N_2(t)$ — векторная случайная функция, образованная всеми компонентами $N(t)$, кроме $N_1(t)$. При переходе $N_1(t)$ в случайный момент времени от одного значения к другому структура системы изменяется. При этом вектор состояния системы Z может претерпевать скачкообразное случайное изменение.

В общем случае размерности вектора состояния могут быть разными в разных структурах. Однако этот случай легко приводится к случаю неизменной размерности вектора состояния одной и той же для всех структур. Для этого достаточно принять максимальную из всех размерностей вектора состояния в различных структурах и считать отличными от тождественного нуля лишь те компоненты векторной функции $f(Z,\ s_k,\ N_2(t),\ t)$, которые соответствуют компонентам вектора состояния Z в k-й структуре.

Задачи исследования таких систем возникают при изучении управляемых систем в условиях, когда отдельные устройства системы управления могут выходить из строя, вследствие чего уравнения, описывающие работу системы управления, изменяются.

Другим типом систем со случайно изменяющейся структурой являются стохастические системы, которые описываются разными уравнениями в разных областях пространства состояний. К изучению таких систем сводятся задачи потери управления (срыва слежения) вследствие ограниченности диапазонов изменения переменных состояния, в которых система управления может функционировать. Изучение таких систем сводится к уравнениям того же типа (67). Допустим, что пространство состояний системы разбивается на n попарно непересекающихся частей $A_1, \ldots, A_n$ так, что при переходе из одной части в другую структура системы изменяется. В этом случае уравнения стохастической системы имеют вид

$$\dot{Z}=f(Z,\ S,\ N(t),\ t), \qquad Y=g(Z,\ S,\ N(t),\ t),$$

где

$$S=\sum_{k=1}^{n} s_k 1_{A_k}(Z),$$

а $1_{A_k}(z)$ — индикатор множества A_k, т. е. функция z, равная 1 при $z \in A_k$ и 0 при $z \notin A_k$. Ясно, что эти уравнения принципиально не отличаются от уравнений (67).

1.4.4. Линейные стохастические дифференциальные системы. Дифференциальные уравнения линейной стохастической системы отличаются от уравнений детерминированной линейной системы (21) дополнительными случайными слагаемыми:

$$\dot{Z} = aZ + a_1 x + a_0 + a_2 N_1(t), \qquad Y = bZ + b_0 + b_1 N_2(t). \tag{68}$$

В этих уравнениях $N_1(t)$ и $N_2(t)$ — случайные функции времени, в общем случае векторные.

Вводя составную векторную случайную функцию $N(t) = [N_1(t)^{\mathrm{T}}\ N_2(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ и блочные матрицы $a_2' = [a_2\ 0]$, $b_1' = [0\ b_1]$, где 0 означает матрицу, все элементы которой равны нулю, представим случайные слагаемые в (68) в виде $a_2 N_1(t) = a_2' N(t)$, $b_1 N_2(t) = b_2' N(t)$. Поэтому без потери общности можно отбросить индексы у случайных функций и записать (68) в виде

$$\dot{Z} = aZ + a_1 x + a_0 + a_2 N(t), \qquad Y = bZ + b_0 + b_1 N(t). \tag{69}$$

При автоматическом управлении линейной системой с применением линейных формирующих и исполнительных устройств к уравнениям (69) добавятся линейные уравнения, определяющие требуемый и фактический входные сигналы X^* и X. В эти уравнения также могут войти случайные функции времени, особенно в тех случаях, когда отклонение системы от требуемого режима измеряется со случайными ошибками, которыми нельзя пренебречь. В таких случаях, включив в состав вектора состояния системы Z все дополнительные переменные, которые придется ввести, добавляя к (69) уравнения формирующих и исполнительных устройств, включая все компоненты вектора входного сигнала X, а в состав векторной случайной функции $N(t)$ все случайные функции, входящие в уравнения формирующих и исполнительных устройств, приведем систему уравнений, описывающих поведение автоматически управляемой линейной системы, к виду

$$\dot{Z} = aZ + a_1 N(t) + a_0, \qquad Y = bZ + b_1 N(t) + b_0. \tag{70}$$

При этом, само собой разумеется, матрицы a, a_1, b, b_1 в уравнениях (70) не совпадают с такими же матрицами в (69) (речь здесь идет не о конкретных уравнениях (69) и (70), а об их общем виде).

В задачах практики отклонения нелинейной системы от требуемого режима иногда можно считать достаточно малыми. В этом случае уравнения системы часто можно линеаризовать относительно случайных отклонений от требуемого режима и относительно действующих на систему случайных возмущений. В таких случаях нелинейные уравнения, описывающие поведение системы, заменяются приближенными линейными уравнениями в отклонениях. Это дает возможность исследовать номинальный режим работы системы с помощью детерминированной модели (15) или (19), а затем изучать случайные отклонения от номинального режима с помощью более простой линейной стохастической модели (69) или соответственно (70).

1.4.5. Линейные системы с параметрическими шумами. В задачах практики иногда приходится встречаться с линейными системами, в которых шумы зависят линейно от вектора состояния системы. В таких случаях приходится пользоваться для описания поведения системы линейными дифференциальными уравнениями с флуктуирующими коэффициентами. Флуктуации коэффициентов уравнений линейной системы обычно называются *параметрическими шумами*. Для таких систем матрицы a_2 и b_1 в уравнениях (69) и матрицы a_1 и b_1 в уравнениях (70) зависят не только от времени, но являются также линейными функциями вектора состояния системы.

Таким образом, уравнения (69) в случае параметрических шумов заменяются уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= aZ + a_1 x + a_0 + \left(a_{20} + \sum_{k=1}^{p} a_{2k} Z_k\right) N(t), \\ Y &= bZ + b_0 + \left(b_{10} + \sum_{k=1}^{p} b_{1k} Z_k\right) N(t). \end{aligned} \tag{71}$$

Аналогично, при автоматическом управлении уравнения (70) для расширенного вектора состояния Z запишутся в виде

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= aZ + a_0 + \left(a_{10} + \sum_{k=1}^{p} a_{1k} Z_k\right) N(t), \\ Y &= bZ + b_0 + \left(b_{10} + \sum_{k=1}^{p} b_{1k} Z_k\right) N(t). \end{aligned} \tag{72}$$

Заметим, что уравнения (71) и (72), будучи линейными относительно вектора состояния Z и выходного сигнала Y, являются нелинейными относительно Z и $N(t)$.

Пример 24. Движение физического маятника с колеблющейся точкой подвеса описывается уравнением [126]:

$$A\ddot{\varphi} + B\dot{\varphi} + mgl(1 + N_2)\sin\varphi + mglN_1\cos\varphi = 0, \tag{I}$$

где φ — угол отклонения маятника от вертикали, A — момент инерции, B — коэффициент момента сил вязкого трения, mgl — статический момент, $gN_1 = gN_1(t)$ и $gN_2 = gN_2(t)$ — горизонтальная и вертикальная компоненты вектора ускорения точки подвеса, представляющие собой случайные функции времени.

При малых углах φ, положив в (I) $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$ и приняв $\varphi = Z_1$, $\dot{\varphi} = Z_2$ за переменные состояния, получаем линейную стохастическую дифференциальную систему с аддитивным и параметрическим шумами, уравнение которой имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} + \omega_0^2 \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} Z_1 \right) \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}, \tag{II}$$

где $\omega_0^2 = mgl/A$, $2\varepsilon = B/A$.

§ 1.5. Системы, приводимые к дифференциальным системам

1.5.1. Системы, описываемые функционально-дифференциальными уравнениями. Многие задачи практики приводят к функционально-дифференциальным уравнениям вида

$$\dot{z}=f(z_{t_0}^t,\ t). \tag{73}$$

Здесь в отличие от первого уравнения (19) компоненты векторной функции f при каждом t зависят от закона изменения вектора состояния $z_\tau=z(\tau)$ на интервале времени $[t_0,\ t)$, т. е. представляют собой функционалы $z_{t_0}^t=\{z_\tau\colon\ t_0\leqslant\tau<t\}$. При этом t_0 представляет собой момент начала работы системы, описываемой уравнением (73). Зависимость функции f только от значений z_τ при $\tau<t$ отражает свойство физической возможности системы, математической моделью которой служат уравнения (73).

Подобные уравнения встречаются, например, в задачах динамики популяций, эредитарной (наследственной) механики и физики, когда учитывается зависимость компонент смещений в виде функционалов от компонент напряжений силового и электромагнитного полей, в динамике полета при нестационарном движении летательного аппарата, сопровождающемся сходом с него аэродинамического следа, содержащего сведения о предыстории движения, в задачах синтеза управления в виде функционалов от всех измеряемых предшествующих значений координат и скоростей. Существует обширная литература, в которой изучаются функционально-дифференциальные уравнения [81, 82, 90]. Однако эффективных общих методов изучения систем, для которых подходящей моделью служит уравнение (73) пока не существует.

Важным частным случаем является уравнение (73) при

$$f(z_{t_0}^t,\ t)=f(z,\ u,\ t), \tag{74}$$

где вектор u определяется интегральным уравнением

$$u(t)=\int_{t_0}^{t}F(t,\ \tau,\ z(\tau),\ u(\tau))\,d\tau. \tag{75}$$

Здесь $F(t,\ \tau,\ z,\ u)$ — некоторая векторная функция указанных аргументов. Обычно в приложениях подынтегральная функция F при любых фиксированных τ, z, u обладает свойством затухания, $F(t,\ \tau,\ z,\ u)\to 0$ при $t\to\infty$.

На практике встречаются более общие, чем (75), интегральные уравнения для вектора u

$$u(t)=\int_{t-T_0}^{t}F(t,\ \tau,\ z(\tau),\ u(\tau))\,d\tau, \tag{76}$$

где T_0 — интервал времени, на протяжении которого прошлые значения $z(\tau)$, $u(\tau)$ влияют на текущее значение $u(t)$. Уравнение (76) соответствует ситуации, когда t_0 не является моментом начала работы системы, а представляет собой некоторый момент времени, принятый за начальный. В силу затухания подынтегральной функции F для моментов времени, достаточно удаленных от t_0 $(t-t_0>T_0)$, интегральное уравнение (76) практически совпадает с интегральным уравнением (75). Поэтому для моментов времени t, достаточно удаленных от t_0, при изучении поведения системы, описываемой интегро-дифференциальными уравнениями (73), (74), (76), в силу свойства затухания функции F могут быть применены те же методы, что и для изучения системы, описываемой интегро-дифференциальными уравнениями (73) — (75).

Назовем системы, описываемые интегро-дифференциальными уравнениями (73) — (75) (или (73), (74), (76)), *интегро-дифференциальными системами.*

Если в число аргументов функций f и F входит еще значение некоторой случайной функции $N(t)$ при данном t, то интегро-дифференциальные уравнения (73) — (75) (или (73), (74), (76)) служат моделью *стохастической интегро-дифференциальной системы.*

Во многих практически важных случаях уравнения интегро-дифференциальных систем приводятся к дифференциальным. Назовем такие интегро-дифференциальные системы *приводимыми к дифференциальным* [118]. Только эти случаи будут рассматриваться дальше в книге.

1.5.2. Приведение интегро-дифференциальных систем к дифференциальным. Во многих задачах практики подынтегральная функция F в уравнении (75) допускает представление

$$F(t, \tau, z, u)=w(t, \tau)\varphi(z, u, \tau). \tag{77}$$

Входящая сюда матричная функция $w(t, \tau)$ называется *ядром* интегрального уравнения (75). Через $\varphi(z, u, \tau)$ обозначена векторная функция указанных аргументов, в общем случае нелинейная.

В силу того, что функция F является затухающей функцией t при фиксированном τ, и ядро $w(t, \tau)$ будет затухающей функцией, $w(t, \tau)\to 0$ при $t\to\infty$. Если $w(t, \tau)$ представляет собой весовую функцию устойчивой физически возможной линейной системы, то согласно п. 1.2.4 $w(t, \tau)$ удовлетворяет условиям (13) и (12):

$$w(t, \tau)=0 \quad \text{при} \quad t>\tau,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |w_{kh}(t, \tau)|\,d\tau<\infty \qquad (k=1, \ldots, m;\ h=1, \ldots, n). \tag{78}$$

Здесь m — размерность вектора u, а n — размерность векторной функции φ. Если, кроме того, $w(t, \tau)$ является весовой функцией линейной дифференциальной системы

$$\dot{\zeta} = \alpha\zeta + \alpha_1\xi, \qquad \eta = \beta\zeta, \tag{79}$$

где α, β, α_1 — некоторые матрицы, в общем случае зависящие от времени, то u определится уравнениями

$$\dot{z}' = \alpha z' + \alpha_1\varphi(z, u, t), \qquad u = \beta z' \tag{80}$$

при начальном условии $z'(t_0) = 0$, вытекающем из (75). В результате интегро-дифференциальная система (73) — (75) будет приведена к дифференциальной системе

$$\begin{gathered} \dot{z} = f(z, \beta z', t), \quad \dot{z}' = \alpha z' + \alpha_1\varphi(z, \beta z', t), \\ z(t_0) = z_0, \quad z'(t_0) = 0. \end{gathered} \tag{81}$$

В частном случае, когда ядро $w(t, \tau)$ является весовой функцией системы, описываемой линейным дифференциальным уравнением n-го порядка (31), это уравнение стандартным приемом п. 1.3.4 приводится к уравнениям (79) при $\beta = I$.

Заметим, что на практике часто встречаются стационарные ядра, зависящие от разности аргументов, $w(t, \tau) = w_0(t - \tau)$. В этом случае, если функция $w_0(t - \tau)$ является весовой функцией стационарной линейной дифференциальной системы, то передаточная функция $\Phi_0(s)$, соответствующая $w_0(t - \tau)$, будет рациональной функцией параметра s и при известной передаточной функции $\Phi_0(s)$ дифференциальные уравнения (79) получаются стандартным приемом п. 1.3.7.

Другим широко используемым на практике типом подынтегральных функций F в (75) служат функции вида

$$F(t, \tau, z, u) = \psi(t)\varphi(z, u, \tau), \tag{82}$$

где $\psi(t)$ — известная матричная функция времени, $\varphi(z, u, \tau)$ — известная векторная функция указанных аргументов, в общем случае нелинейная. В этом случае u определяется уравнениями

$$u = \psi(t) z', \quad \dot{z}' = \varphi(z, u, t), \quad z'(t_0) = 0. \tag{83}$$

В результате сведем интегро-дифференциальную систему (73) — (75) к дифференциальной системе

$$\begin{gathered} \dot{z} = f(z, \psi(t) z', t), \qquad \dot{z}' = \varphi(z, \psi(t) z', t), \\ z(t_0) = z_0, \qquad z'(t_0) = 0. \end{gathered} \tag{84}$$

Заметим, что на основании формулы (26) и формулы, следующей за (28), ядро $w(t, \tau)$ всегда представимо в виде

$$w(t, \tau) = w^+(t)\, w^-(\tau). \tag{85}$$

Поэтому первый метод приведения интегро-дифференциальной системы (73)—(75) к дифференциальной в сущности равноценен второму. Однако практически первый метод оказывается иногда более удобным.

Случаи, когда подынтегральная функция F в (75) определяется формулой

$$F(t,\ \tau,\ z,\ u)=\sum_{k=1}^{N} w_k(t,\ \tau)\,\varphi_k(z,\ u,\ \tau) \tag{86}$$

или

$$F(t,\ \tau,\ z,\ u)=\sum_{k=1}^{N} \psi_k(t)\,\varphi_k(z,\ u,\ \tau), \tag{87}$$

путем ввода блочных матриц

$$\begin{aligned} w(t,\ \tau)&=[w_1(t,\ \tau)\ \dots\ w_N(t,\ \tau)],\\ \psi(t)&=[\psi_1(t)\ \dots\ \psi_N(t)],\\ \varphi(z,\ u,\ \tau)&=[\varphi_1(z,\ u,\ \tau)^T\ \dots\ \varphi_N(z,\ u,\ \tau)^T]^T \end{aligned}$$

приводятся к предыдущим [118].

В задачах практики часто подынтегральная функция F в (75) известна неточно и обычно определяется экспериментально. Поэтому функцию F можно аппроксимировать функциями вида (77), (83) ((86), (87)) или их линейной комбинацией. В таких задачах интегро-дифференциальную систему всегда можно привести к дифференциальной.

Пример 25. В динамике популяций для описания колебаний численности совместно живущих популяций двух видов используются следующие уравнения:

$$\dot z_1=\mu_1 z_1,\qquad \dot z_2=\mu_2 z_2,\qquad z_1(t_0)=z_{10},\qquad z_2(t_0)=z_{20}, \tag{I}$$

где z_1 и z_2 — численности популяций первого и второго вида, μ_1 и μ_2 — коэффициенты прироста их численности. Если $\mu_1=\text{const}=\varepsilon_1>0$ и $\mu_2=\text{const}=-\varepsilon_2<0$, то численность первого вида возрастает, а второго убывает. Однако если первый вид служит пищей для второго, то коэффициент μ_2 будет переменным. Обычно принимается, что коэффициент μ_2 зависит не только от количества пищи z_1, которую находит второй вид в данный момент t, но также и от ранее имевшейся пищи, т. е. от предшествующих значений z_1. Учитывая эти факты, определим μ_2 формулой

$$\mu_2=-\varepsilon_2+\gamma_2 z_1+\int_{t-T_0}^{t}\Phi_2(t-\tau)\,z_1(\tau)\,d\tau. \tag{II}$$

Здесь T_0 — длительность интервала времени, на котором влияние предшествующих значений численности популяции первого вида $z_1(\tau)$ существенно, ядро $\Phi_2(t-\tau)$ учитывает влияние $z_1(\tau)$ на коэффициент прироста численности популяции второго вида. Коэффициент прироста численности популяции первого вида μ_1 выражается аналогичной формулой

$$\mu_1=\varepsilon_1-\gamma_1 z_2-\int_{t-T_0}^{t}\Phi_1(t-\tau)\,z_2(\tau)\,d\tau. \tag{III}$$

Уравнения (I)—(III) представляют собой систему линейных интегро-дифференциальных уравнений и известны как уравнения Вольтерра [82].

Обозначим через $N_1(t)$ и $N_2(t)$ случайные функции времени, учитывающие случайные флуктуации коэффициентов прироста μ_1 и μ_2, а через $N_3(t)$ и $N_4(t)$—случайные флуктуации скоростей прироста численности популяций. Тогда придем к следующей стохастической интегро-дифференциальной системе:

$$\dot{Z}_1 = Z_1\left[\varepsilon_1 - \gamma_1 Z_2 - \int\limits_{t-T_0}^{t} \Phi_1(t-\tau) Z_2(\tau)\,d\tau + N_1(t)\right] + N_3(t),$$

$$\dot{Z}_2 = Z_2\left[-\varepsilon_2 + \gamma_2 Z_1 + \int\limits_{t-T_0}^{t} \Phi_2(t-\tau) Z_1(\tau)\,d\tau + N_2(t)\right] + N_4(t). \tag{IV}$$

Рассмотрим случай, когда ядра $\Phi_1(t, \tau)$ и $\Phi_2(t, \tau)$ изменяются по экспоненциальному закону

$$\Phi_1(t-\tau) = \gamma_1' e^{-\lambda_1(t-\tau)}, \quad \Phi_2(t-\tau) = \gamma_2' e^{-\lambda_2(t-\tau)} \tag{V}$$

и равны нулю для $t \leqslant \tau$. Так как величина T_0 обычно невелика, то, пренебрегая при $t < t_0 + T_0$ влиянием значений $Z_1(\tau)$ и $Z_2(\tau)$ при $\tau \in (t-T_0, t_0)$, можно заменить нижний предел интегралов в (IV) $t-T_0$ на t_0. Тогда, принимая во внимание, что $\lambda_1 e^{-\lambda_1(t-\tau)}$ и $\lambda_2 e^{-\lambda_2(t-\tau)}$ являются весовыми функциями апериодических звеньев с постоянными времени $T_1 = 1/\lambda_1$ и $T_2 = 1/\lambda_2$ (пример 6), приведем интегро-дифференциальные уравнения (IV) к дифференциальным уравнениям

$$\begin{gathered}
\dot{Z}_1 = Z_1\left[\varepsilon_1 - \gamma_1 Z_2 - (\gamma_1'/\lambda_1) Z_4 + N_1(t)\right] + N_3(t),\\
\dot{Z}_2 = Z_2\left[-\varepsilon_2 + \gamma_2 Z_1 + (\gamma_2'/\lambda_2) Z_3 + N_2(t)\right] + N_4(t),\\
\dot{Z}_3 = \lambda_1(Z_1 - Z_3), \quad \dot{Z}_4 = \lambda_2(Z_2 - Z_4),\\
Z_1(t_0) = Z_{10}, \quad Z_2(t_0) = Z_{20}, \quad Z_3(t_0) = Z_4(t_0) = 0.
\end{gathered} \tag{VI}$$

В частном случае при $N_1(t) = 0, \ldots, N_4(t) = 0$ уравнения (VI) описывают дифференциальную систему, к которой приводится интегро-дифференциальная система Вольтерра (I)—(III).

Пример 26. Уравнения движения системы с одной степенью свободы под действием переменной силы $x(t)$ в среде, подчиняющейся закону наследственной вязкоупругости, имеют вид

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = -cz_1 - \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)\,\varphi(z_1(\tau), \tau)\,d\tau + x(t),$$
$$z_1(t_0) = z_{10}, \quad z_2(t_0) = z_{20}.$$

Здесь z_1—обобщенная координата, z_2—обобщенная скорость, c—коэффициент упругости, $\Phi(t-\tau)$—функция влияния наследственной вязкоупругости среды, $\varphi(z_1, \tau)$—зависимость силы от обобщенной координаты z_1, в общем случае нелинейная.

При экспоненциальной функции влияния $\Phi(t-\tau) = be^{-\lambda(t-\tau)}$ исходная интегро-дифференциальная система приводится к следующей трехмерной дифференциальной системе:

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = -cz_1 - (b/\lambda) z_3 + x(t), \quad \dot{z}_3 = \lambda(z_1 - z_3),$$
$$z_1(t_0) = z_{10}, \quad z_2(t_0) = z_{20}, \quad z_3(t_0) = 0.$$

Пример 27. Уравнения движения самолета, маневрирующего в вертикальной плоскости, с учетом зависимости подъемной силы и момента аэродинамических сил от закона изменения угла атаки α до данного момента t имеют вид

$$\ddot{\alpha}+c_1\dot{\alpha}+c_2\alpha+\int_{t_0}^{t} w_\alpha(t,\ \tau)\,\alpha(\tau)\,d\tau=c_0+c_3\delta,$$

$$\dot{\theta}=a_0+\int_{t_0}^{t} w_\theta(t,\ \tau)\,\alpha(\tau)\,d\tau,\qquad \dot{\eta}=v\sin\theta.$$

Здесь, в дополнение к обозначениям примеров 10 и 23, t_0 — момент начала маневра, a_0 — некоторая функция времени, $w_\alpha(t,\ \tau)$ и $w_\theta(t,\ \tau)$ — функции влияния, характеризующие зависимость подъемной силы и аэродинамического момента от прошлых значений угла атаки α. Эти функции практически всегда можно аппроксимировать с достаточной точностью весовыми функциями некоторых линейных систем. Тогда система уравнений движения маневрирующего самолета приведется к системе дифференциальных уравнений. В частности, для экспоненциальных функций влияния $w_\alpha(t,\tau)=k_1e^{-\lambda_1(t-\tau)}$, $w_\theta(t,\ \tau)=k_2e^{-\lambda_2(t-\tau)}$, вводя новые переменные

$$u_1=\int_{t_0}^{t} k_1e^{-\lambda_1(t-\tau)}\alpha(\tau)\,d\tau,\qquad u_2=\int_{t_0}^{t} k_2e^{-\lambda_2(t-\tau)}\alpha(\tau)\,d\tau$$

и пользуясь результатами примера 6, получим дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned}&\dot{z}_1=z_2, && \dot{z}_2=c_0-c_2z_1-c_1z_2-u_1+c_0+c_3x,\\ &\dot{z}_3=a_0+u_2, && \dot{z}_4=v\sin z_3,\\ &\dot{u}_1=k_1z_1-\lambda_1u_1, && \dot{u}_2=k_2z_1-\lambda_2u_2,\end{aligned}$$

где, как и в примере 10, $z_1=\alpha$, $z_2=\dot{\alpha}$, $z_3=\theta$, $z_4=\eta$.

ЗАДАЧИ

1.1. Показать, что для устойчивой стационарной линейной системы

$$\dot{z}=az+bx,\qquad y=z,\qquad z=[z_1z_2]^{\mathrm{T}},\qquad x=[x_1x_2]^{\mathrm{T}},$$

где a, b — постоянные квадратные матрицы, y — выходной сигнал, матрица передаточных функций имеет вид

$$\Phi(s)=-(a-sI)^{-1}b=\frac{1}{\Delta(s)}\begin{bmatrix}-(a_{22}-s) & a_{12}\\ a_{21} & -(a_{11}-s)\end{bmatrix}b,$$

$$\Delta(s)=s^2-(a_{11}+a_{22})s+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

1.2. Показать, что для устойчивой стационарной системы задачи 1.1 при $a_{11}=a_{22}=-\varepsilon$, $a_{12}=-a_{21}=\omega$ $(\varepsilon,\ \omega>0)$ матрица фундаментальных решений $u(t,\ \tau)$ и матрица передаточных функций $\Phi(s)$ определяются формулами

$$u(t,\ \tau)=e^{-\varepsilon(t-\tau)}\begin{bmatrix}\cos\omega(t-\tau) & \sin\omega(t-\tau)\\ -\sin\omega(t-\tau) & \cos\omega(t-\tau)\end{bmatrix},$$

$$\Phi(s)=\frac{b}{(s+\varepsilon)^2+\omega^2}\begin{bmatrix}s+\varepsilon & \omega\\ -\omega & s+\varepsilon\end{bmatrix}.$$

1.3. Показать, что для стационарной линейной механической системы с одной степенью свободы [80]:

$$\begin{bmatrix}\dot{q}\\ \dot{p}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1/A\\ -C & -B/A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q\\ p\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ Q\end{bmatrix},$$

где обобщенная координата $q=z_1$ и обобщенный импульс $p=A\dot{q}=z_2$ — компоненты вектора состояния $z=[z_1 z_2]^{\mathrm{T}}$, $x=[0\ Q]^{\mathrm{T}}$ — входной сигнал, $y=z$ — выходной сигнал системы, A $(A>0)$, B, C — постоянные коэффициенты, определяющие инерционную, диссипативную и позиционную силы, матрица фундаментальных решений $u(t,\tau)$ и матрица передаточных функций $\Phi(s)$ имеют вид

$$u(t,\tau)=$$
$$=e^{-\varepsilon(t-\tau)}\begin{bmatrix} \cos\omega_c(t-\tau)+\dfrac{\varepsilon}{\omega_c}\sin\omega_c(t-\tau) & \dfrac{1}{A\omega_c}\sin\omega_c(t-\tau) \\ -\dfrac{A\omega_0^2}{\omega_c^2}\sin\omega_c(t-\tau) & \cos\omega_c(t-\tau)-\dfrac{\varepsilon}{\omega_c}\sin\omega_c(t-\tau) \end{bmatrix},$$

$$\Phi(s)=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{As^2+Bs+C} \\ 0 & \dfrac{As}{As^2+Bs+C} \end{bmatrix} \quad \left(2\varepsilon=B/A,\ \omega_c^2=\omega_0^2-\varepsilon^2,\ \omega_0^2=C/A\right).$$

1.4. Показать, что для линейной нестационарной системы

$$\dot{z}_1=z_2, \qquad \dot{z}_2=-ct^{-2}z_1+x, \qquad t>0,$$

элементы матрицы фундаментальных решений $u(t,\tau)$ при $2\gamma=\sqrt{|1-4c|}$, $c<1/4$ определяются формулами

$$u_{11}(t,\tau)=\frac{1}{4\gamma}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2}\left[(1+2\gamma)\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\gamma}-(1-2\gamma)\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\gamma}\right],$$

$$u_{12}(t,\tau)=\frac{(\tau t)^{1/2}}{2\gamma}\left[\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\gamma}-\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\gamma}\right],$$

$$u_{21}(t,\tau)=\frac{1-4\gamma^2}{8\gamma(t\tau)^{1/2}}\left[\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\gamma}-\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\gamma}\right],$$

$$u_{22}(t,\tau)=\frac{1}{4\gamma}\left(\frac{\tau}{t}\right)^{1/2}\left[(1+2\gamma)\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\gamma}-(1-2\gamma)\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\gamma}\right].$$

Найти $u(t,\tau)$ при $c>1/4$ [71].

1.5. Доказать, что для нестационарной линейной системы

$$\dot{z}_1=z_2, \quad \dot{z}_2=-t^{-2}z_1-t^{-1}z_2+x, \quad t>0,$$

матрица фундаментальных решений $u(t,\tau)$ равна

$$u(t,\tau)=\begin{bmatrix} \cos\ln\dfrac{t}{\tau} & \tau\sin\ln\dfrac{t}{\tau} \\ -\dfrac{1}{t}\sin\ln\dfrac{t}{\tau} & \cos\ln\dfrac{t}{\tau} \end{bmatrix}.$$

1.6. Доказать, что весовая функция $g(t,\tau)$ нестационарной линейной механической системы

$$\ddot{z}+t^{-1}\dot{z}+(1-n^2t^{-2})z=x, \quad y=z$$

имеет вид

$$g(t,\tau)=\frac{\pi}{2}\left[J_n(\tau)N_n(t)-N_n(\tau)J_n(t)\right]\tau,$$

где $J_n(\tau)$ и $N_n(t)$ — функции Бесселя первого и второго рода соответственно [41].

1.7. Показать, что для стационарной линейной системы

$$\dot{z}=az+bx, \quad y=z, \quad z=[z_1 z_2 z_3]^{\mathrm{T}}, \quad x=[x_1 x_2 x_3]^{\mathrm{T}},$$

где a, b — постоянные квадратные матрицы, y — выходной сигнал, элементы матрицы передаточных функций $\Phi(s) = -(a - sI)^{-1} b$ определяются формулами

$$\begin{aligned}
&\Phi_{11}(s) = -b/\Delta(s)\,[s^2 - s(a_{22} + a_{33}) + a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}],\\
&\Phi_{12}(s) = b/\Delta(s)\,(-sa_{12} + a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}),\\
&\Phi_{13}(s) = -b/\Delta(s)\,(sa_{13} + a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}),\\
&\Phi_{21}(s) = b/\Delta(s)\,(-sa_{21} + a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}),\\
&\Phi_{22}(s) = -b/\Delta(s)\,[s^2 - s(a_{11} + a_{33}) + a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}],\\
&\Phi_{23}(s) = b/\Delta(s)\,(-sa_{23} + a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}),\\
&\Phi_{31}(s) = -b/\Delta(s)\,(sa_{31} + a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}),\\
&\Phi_{32}(s) = b/\Delta(s)\,(-sa_{32} + a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}),\\
&\Phi_{33}(s) = -b/\Delta(s)\,[s^2 - s(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}],\\
&\quad \Delta(s) = |a - sI|.
\end{aligned}$$

1.8. Показать, что для стационарной системы задачи 1.7 при $a_{11} = a_{31} = a_{13} = a_{32} = 0$, $a_{12} = a_{23} = 1$, $a_{21} = -\omega_0^2$, $a_{22} = -2\varepsilon$, $a_{33} = -\alpha$ элементы матрицы передаточных функций определяются формулами

$$\begin{aligned}
&\Phi_{11}(s) = -b/\Delta(s)\,[s^2 + (2\varepsilon + \alpha)s + 2\alpha\varepsilon],\\
&\Phi_{12}(s) = -b(s+\alpha)/\Delta(s),\quad \Phi_{13}(s) = -b/\Delta(s),\\
&\Phi_{21}(s) = b\omega_0^2(s+\alpha)/\Delta(s),\quad \Phi_{22}(s) = -bs(s+\alpha)/\Delta(s),\\
&\Phi_{23}(s) = -bs/\Delta(s),\quad \Phi_{31} = \Phi_{32} = 0,\\
&\Phi_{33}(s) = -b\left(s^2 + 2\varepsilon s + \omega_0^2\right)/\Delta(s),\\
&\quad \Delta(s) = -(s+\alpha)\left[\omega_0^2 + (2\varepsilon + s)s\right].
\end{aligned}$$

Проверить, что элементы матрицы $u(t, \tau)$ фундаментальных решений равны

$$\begin{gathered}
u_{13}(t, \tau) = \left(-1/\omega_c^2\right)[u_{11}(t, \tau) + \alpha/\omega_0\, u_{21}(t, \tau) - u_{33}(t, \tau)],\\
u_{31} = u_{32} = 0,\quad u_{33}(t, \tau) = \exp\{-\alpha(t - \tau)\},\\
u_{23}(t, \tau) = \left(-1/\omega_c^2\right)\left\{u_{21}(t, \tau)\left(1 - 2\varepsilon\alpha/\omega_0^2\right) - \alpha\,[u_{11}(t, \tau) - u_{33}(t, \tau)]\right\},
\end{gathered}$$

а функции u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22} определены в задаче 1.3.

1.9. Показать, что для стационарной линейной механической системы с n степенями свободы дифференциальные уравнения движения имеют следующий вид [80]:

а) в лагранжевых переменных

$$A\ddot{q} + (B + B')\dot{q} + (C + C')q = Q,$$

где $q = [q_1 \ldots q_n]^{\mathrm{T}}$ — вектор обобщенных координат, $Q = [Q_1 \ldots Q_n]^{\mathrm{T}}$ — вектор обобщенных сил; в данном случае вектор $y = q$ представляет собой выходной сигнал, а вектор $x = Q$ — входной сигнал, A — симметричная матрица инерционных коэффициентов, B — симметричная матрица диссипативных или ускоряющих сил, B' — антисимметричная матрица гироскопических сил, C — симметричная матрица позиционно консервативных сил, C' — антисимметричная матрица позиционно неконсервативных сил;

б) в канонических переменных

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A^{-1} \\ -(C + C') & -(B + B')A^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Q \end{bmatrix},$$

где q и $p = A\dot{q}$ — вектор обобщенных координат и вектор импульсов; в данном случае при тех же входном и выходном сигналах $[q^{\mathrm{T}} p^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = z$ — вектор состояния системы.

1.10. Показать, что для устойчивой стационарной механической системы задачи 1.9 при $n=2$:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B'_{12} \\ -B'_{12} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} +$$
$$+ \left(\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & C'_{12} \\ -C'_{12} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

элементы матрицы передаточных функций $\Phi(s)$ определяются формулами

$$\Phi_{11}(s) = 1/\Delta(s) \left\{ A_{11}^{-} \left(|C| + C_{12}'^{2} \right) - s \left[C_{11}(C_{22}+s) - (B_{12}+B'_{12})(C_{12}-C'_{12}) \right] \right\},$$
$$\Phi_{12}(s) = -1/\Delta(s) \left\{ A_{12}^{-} \left(|C| + C_{12}'^{2} \right) - s \left[C_{11}(B_{12}-B'_{12}) - (B_{11}+s)(C_{12}-C'_{12}) \right] \right\},$$
$$\Phi_{21}(s) = -1/\Delta(s) \left\{ -A_{12}^{-} \left(|C| + C_{12}'^{2} \right) + s \left[(C_{12}+C'_{12})(B_{22}+s) - C_{22}(B_{12}+B'_{12}) \right] \right\},$$
$$\Phi_{22}(s) = 1/\Delta(s) \left\{ A_{22}^{-} \left(|C| + C_{12}'^{2} \right) + s \left[(C_{12}-C'_{12})(B_{12}-B'_{12}) - C_{22}(B_{11}+s) \right] \right\},$$

где

$$\Delta(s) = s^4 + r_1 s^3 + r_2 s^2 + r_3 s + r_4,$$
$$r_1 = B_{11}A_{22}^{-} + B_{22}A_{11}^{-} - 2B_{12}A_{12}^{-},$$
$$r_2 = \left[B_{11}A_{22}^{-} - (B_{12}+B'_{12})A_{12}^{-} \right] \left[B_{22}A_{11}^{-} - (B_{12}-B'_{12})A_{12}^{-} \right] +$$
$$+ \left(C_{11}A_{22}^{-} + C_{22}A_{11}^{-} - 2C_{12}A_{12}^{-} \right),$$
$$r_3 = \left[B_{11}A_{12}^{-} - (B_{12}+B'_{12})A_{11}^{-} \right] \left[(B_{12}-B'_{12})A_{22}^{-} - B_{22}A_{12}^{-} \right] +$$
$$+ \left[B_{22}A_{11}^{-} - (B_{12}-B'_{12})A_{12}^{-} \right] \left[C_{11}A_{22}^{-} - (C_{12}+C'_{12})A_{12}^{-} \right] +$$
$$+ \left[(B_{12}-B'_{12})A_{22}^{-} - B_{22}A_{12}^{-} \right] \left[C_{11}A_{12}^{-} - (C_{12}+C'_{12})A_{11}^{-} \right] +$$
$$+ \left\{ \left[B_{11}A_{22}^{-} + (B_{12}+B'_{12})A_{12}^{-} \right] + \left[(B_{12}+B'_{12})A_{11}^{-} - B_{11}A_{22}^{-} \right] \right\} \times$$
$$\times \left[C_{22}A_{22}^{-} - (C_{12}-C'_{12})A_{22}^{-} \right],$$
$$r_4 = \left(|C| + C_{12}'^{2} \right) / |A|,$$
$$|A| = A_{11}A_{22} - A_{12}^2, \quad |C| = C_{11}C_{22} - C_{12}^2,$$
$$A_{ij}^{-} = A_{ij}/|A| \qquad (i,\ j = 1,\ 2).$$

1.11. Показать, что в условиях задачи 1.9, если матрицы $A^{-1}B$ и $A^{-1}C$ коммутативны, $B'=0$, $C'=0$, то всегда существует линейное преобразование выходного сигнала $y=q$, $y=L\zeta$, удовлетворяющее условиям

$$L^{-1}AL = I, \quad L^{\mathrm{T}}BL = \mathrm{diag}(2\varepsilon_1, \ldots, 2\varepsilon_n),$$
$$L^{\mathrm{T}}CL = \mathrm{diag}(\omega_1^2, \ldots, \omega_n^2),$$

при котором уравнения движения распадаются на n независимых линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{\zeta}_h + 2\varepsilon_h \dot{\zeta}_h + \omega_h^2 \zeta_h = u_h \qquad (h = 1, \ldots, n),$$

где $u_h = u_h(t)$ — h-й элемент матрицы-столбца $L^{\mathrm{T}}Q$ [13]. Выписать соответствующие уравнения при $B = 2\varepsilon A$, $B = \eta C$.

1.12. Рассмотрим линейную электрическую цепь, состоящую из n индуктивно связанных замкнутых контуров с общими ветвями (рис. 9, где $n=2$)*). Приняв полную э. д. с. в k-м контуре за k-ю компоненту входного сигнала x, а полный заряд всех емкостей в h-м контуре за h-ю компоненту выходного сигнала y, показать, что уравнения процессов в цепи совпадают

*) Ток в общей ветви нескольких контуров, конечно, представляет собой алгебраическую сумму токов всех этих контуров.

с уравнениями задачи 1.9 с $A=[L_{kl}]$, $B=[R_{kl}]$, $B'=0$, $C=[1/C_{kl}]$, $C'=0$, где R_{kk}, C_{kk}, L_{kk} представляют собой омическое сопротивление, емкость и индуктивность k-го контура соответственно, а L_{kl}, R_{kl}, C_{kl} $(l\neq k)$ — индуктивность общей ветви k-го и l-го контуров вместе с их взаимной индукцией, омическое сопротивление и емкость общей ветви k-го и l-го контуров соответственно [80].

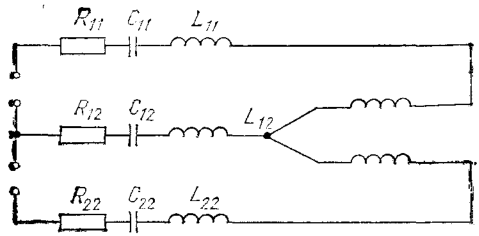

Рис. 9

1.13. Показать, что механическая система с n степенями свободы, описываемая уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=Q,$$

где $q=[q_1\ \dots\ q_n]^{\mathrm{T}}$ — вектор обобщенных координат, $L=T-\Pi$ — функция Лагранжа, $T=T(q,\ \dot q,\ t)$ — кинетическая энергия, $\Pi=\Pi(q)$ — потенциальная энергия, $Q=[Q_1\dots Q_n]^{\mathrm{T}}$, $Q=Q(q,\ \dot q,\ t)$ — вектор обобщенных неконсервативных сил, приводится к системе уравнений Гамильтона для канонических переменных q и $p=\partial T/\partial \dot q$ [80]:

$$\dot q=\frac{\partial H}{\partial p},\qquad \dot p=-\frac{\partial H}{\partial q}+Q,$$

где $H=H(q,\ p,\ t)$ — функция Гамильтона, $H=p^{\mathrm{T}}\dot q-T$. Чтобы выразить H и Q как функции канонических переменных и времени, следует решить уравнение $p=\partial T/\partial \dot q$ относительно $\dot q$ и подставить найденное таким путем $\dot q$ в формулы для функций H и Q.

1.14. Вертикальные колебания кузова автомобиля при движении по неровной дороге описываются уравнением [126]

$$M\ddot z+2\psi(\dot z-\dot q)+2\varphi(z-q)=0,$$

где M — масса автомобиля, $\psi(\dot z-\dot q)$ и $\varphi(z-q)$ — нелинейные функции, определяющие демпфирующие и восстанавливающие силы, $q=q(\sigma)$ — функция, характеризующая микропрофиль дороги в вертикальной плоскости под каждой парой колес, $\sigma=vt$, v — скорость автомобиля *). Найти передаточную функцию автомобиля при $\psi(\dot z-\dot q)=b(\dot z-\dot q)$ и $\varphi(z-q)=c(z-q)$, где b и c — постоянные коэффициенты.

1.15. Уравнения движения объекта с одной степенью свободы, оснащенного нелинейным динамическим гасителем колебаний, имеют вид [126]:

$$\mu\ddot x+b\dot x+cx+\psi_{\text{г}}(\dot x-\dot x_{\text{г}})+\varphi_{\text{г}}(x-x_{\text{г}})=F(t),$$
$$\mu_{\text{г}}\ddot x_{\text{г}}-\psi_{\text{г}}(\dot x-\dot x_{\text{г}})-\varphi_{\text{г}}(x-x_{\text{г}})=0,$$

где x и $x_{\text{г}}$ — перемещения объекта и гасителя, μ и $\mu_{\text{г}}$ — массы объекта и гасителя, b и c — коэффициенты сил вязкого трения и восстановления, $\psi_{\text{г}}(\dot x-\dot x_{\text{г}})$ и $\varphi_{\text{г}}(x-x_{\text{г}})$ — функции, характеризующие силы вязкого трения и силы восстановления, $F(t)$ — возмущающая сила. В частном случае, когда $\psi_{\text{г}}(\dot x-\dot x_{\text{г}})=b_{\text{г}}(\dot x-\dot x_{\text{г}})$ и $\varphi_{\text{г}}(x-x_{\text{г}})=c_{\text{г}}(x-x_{\text{г}})$, где $b_{\text{г}}$, $c_{\text{г}}$ — постоянные коэффициенты,

*) Предполагается, что обе пары колес автомобиля в каждый момент времени испытывают одинаковые вертикальные смещения вследствие неровности дороги (т. е. профиль дороги в вертикальной плоскости имеет очень большой интервал корреляции).

найти передаточную функцию системы, рассматривая силу $F(t)$ как входной сигнал.

1.16. Уравнения поперечного движения самолета (т. е. движения по горизонтальной поперечной оси и вращения вокруг продольной оси) в режиме прямолинейного равномерного горизонтального полета (номинальный режим) имеют вид

$$\ddot{\beta}+c_{11}\dot{\beta}+c_{12}\beta+c_{13}\dot{\gamma}=-c_{14}\delta_1-c_{15}\delta_2+c_{16}\dot{W}_z+c_{17}W_z-c_{18}\frac{\partial W_y}{\partial z},$$

$$\ddot{\gamma}+c_{21}\dot{\gamma}+c_{22}\dot{\beta}+c_{23}\beta=-c_{24}\delta_1-c_{25}\delta_2-c_{26}\dot{W}_z-c_{27}\frac{\partial W_y}{\partial z},$$

$$\dot{\varphi}=b_1\beta-b_2\gamma-b_3W_z,$$

где β — угол отклонения оси самолета от вектора скорости в горизонтальной плоскости (угол скольжения), γ — угол крена, δ_1, δ_2 — углы отклонения руля направления и элеронов соответственно, φ — угол отклонения вектора скорости от заданного направления полета, W_y, W_z — вертикальная и горизонтальная поперечная компоненты вектора скорости ветра в турбулентной атмосфере, $\partial W_y/\partial z$ — производная вертикальной компоненты вектора скорости ветра по направлению горизонтальной поперечной оси, $c_{11}, \ldots$ $\ldots, c_{18}, c_{21}, \ldots, c_{27}, b_1, b_2, b_3$ — некоторые коэффициенты.

Составить уравнения поперечного движения самолета, управляемого автопилотом, стабилизирующим направления осей самолета в пространстве:

а) предполагая, что рулевые машины мгновенно устанавливают требуемые отклонения руля направления и элеронов;

б) с учетом динамики рулевых машин (см. примеры 1.10 и 1.23).

1.17. Показать, что нелинейное уравнение

$$y^{(n)}+\sum_{k=n-m}^{n-1}a_k(y, y', \ldots, y^{(n-m-1)}, t)\,y^{(k)}+$$
$$+\varphi(y, y', \ldots, y^{(n-m-1)}, t)=\sum_{h=0}^{m}b_h(y, y', \ldots, y^{(n-m-1)}, t)\,x^{(h)} \quad (m<n)$$

заменой переменных

$$z_1=y,\ z_{k+1}=z_k' \quad (k=1, \ldots, n-m-1),$$
$$z_{k+1}=z_k'-q_k(z_1, \ldots, z_{n-m}, t)\,x \quad (k=n-m, \ldots, n-1)$$

приводится к системе уравнений

$$z_k'=z_{k+1} \quad (k=1, \ldots, n-m-1),$$
$$z_k'=z_{k+1}+q_k(z_1, \ldots, z_{n-m}, t)\,x \quad (k=n-m, \ldots, n-1),$$
$$z_n'=-\sum_{l=n-m-1}^{n}a_{l-1}(z_1, \ldots, z_{n-m}, t)\,z_l-\varphi(z_1, \ldots, z_{n-m}, t)+$$
$$+q_n(z_1, \ldots, z_{n-m}, t)\,x,$$

где функции $q_{n-m}, \ldots, q_n$ определяются формулами (42) при $a_n=I$.

ГЛАВА 2

СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 2.1. Случайные функции и их характеристики

2.1.1. Определение случайной функции. Из сказанного в § 1.4 следует, что основным математическим аппаратом для изучения стохастических систем и, в частности, стохастических дифференциальных систем служит теория случайных функций. Поэтому мы дадим здесь краткое изложение основных положений теории случайных функций, на которые будем опираться в этой книге.

Случайной функцией называется такая функция, значение которой при каждом данном значении аргумента является случайной величиной. Из этого определения следует, что случайная функция представляет собой множество случайных величин, соответствующих всем значениям аргумента из области его изменения (области определения случайной функции).

В результате опыта случайная функция при каждом значении аргумента принимает некоторое конкретное возможное значение. Совокупность этих значений, соответствующих всем значениям аргумента, представляет собой некоторую конкретную функцию. Таким образом, при наблюдении случайной функции в каждом опыте получается некоторая функция. В разных опытах получаются разные функции.

Каждая функция, которая может быть получена в результате наблюдения случайной функции, называется *реализацией* этой случайной функции. Каждая реализация случайной функции представляет собой конкретную функцию того же аргумента.

Как уже было сказано в § 1.4, случайные функции будем обозначать большими буквами, преимущественно из конца латинского алфавита, а их возможные реализации — соответствующими малыми буквами. Рассматривая значение случайной функции $X(t)$ при данном значении t как случайную величину, будем обозначать эту случайную величину через X_t, а ее возможные реализации (значения) — через x_t.

В качестве примеров случайных функций времени приведем результат измерения и ошибку измерения любой величины, изменяющейся во время опыта. Случайными функциями времени являются также координаты частицы, взвешенной в жидкости, совершающей брауновское движение *), случайные колебания тока

*) В последнее время это движение чаще называют броуновским. Однако это неправильно, так как фамилия открывшего это движение шотландского ботаника произносится Браун (см. [77]).

и напряжения в радиоприемных устройствах при приеме радиосигналов с помехами. Поверхность волнующегося моря в данный момент времени может служить примером случайной функции двух переменных — географических координат точки земной поверхности. Вектор скорости ветра в турбулентной атмосфере представляет собой трехмерную векторную случайную функцию четырех переменных — координат точки пространства и времени. Вектор ускорения центра массы и вектор угловой скорости самолета при полете в турбулентной атмосфере (в болтанку) представляют собой векторные случайные функции времени.

Мы будем изучать здесь преимущественно скалярные и конечномерные векторные случайные функции скалярной независимой переменной. Такие случайные функции обычно называются *случайными процессами*. Это название объясняется тем, что скалярный аргумент случайной функции в задачах практики, как правило, представляет собой время, вследствие чего случайная функция скалярной переменной обычно описывает процесс изменения некоторой величины во времени. Однако все то, что изложено в этой главе, в § 3.2, 4.1, 4.2, относится в равной мере как к случайным функциям скалярной переменной, так и к случайным функциям конечномерной векторной переменной. Последние часто называются *случайными полями*. Это объясняется тем, что в приложениях векторный аргумент обычно представляет собой радиус-вектор точки пространства, а функции точки пространства в физике принято называть полями.

2.1.2. Конечномерные распределения случайной функции. В задачах практики приходится рассматривать как действительные, так и комплексные случайные функции. Любую скалярную комплексную случайную функцию можно, конечно, рассматривать как пару действительных случайных функций. Соответственно, n-мерную векторную комплексную случайную функцию можно рассматривать как $2n$-мерную действительную векторную случайную функцию *). Однако в некоторых случаях удобно рассматривать комплексные случайные функции, не сводя их к действительным. Говоря о распределениях случайных величин, всегда удобно рассматривать действительные случайные величины. Поэтому мы будем рассматривать только распределения действительных случайных функций.

Пусть $X(t)$, $t \in T$,— действительная случайная функция, скалярная или конечномерная векторная **). Распределение значения X_t случайной функции $X(t)$, зависящее от параметра $t \in T$, называется *одномерным распределением* случайной функции $X(t)$. Совместное распределение значений X_{t_1} и X_{t_2}, зависящее от пара-

---

*) Комплексной векторной величиной мы называем вектор с комплексными координатами.

**) Через T обозначена область определения случайной функции.

метров $t_1, t_2 \in T$, называется *двумерным распределением* случайной функции $X(t)$. И вообще совместное распределение значений $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ случайной функции $X(t)$, зависящее от параметров $t_1, \ldots, t_n \in T$, называется *n-мерным распределением* случайной функции $X(t)$. Таким образом, случайную функцию можно характеризовать последовательностью ее конечномерных распределений, т. е. распределений ее значений при любых конечных наборах значений аргумента t.

n-мерное распределение скалярной случайной функции представляет собой распределение вероятностей в n-мерном пространстве, т. е. является фактически n-мерным. n-мерное распределение m-мерной векторной случайной функции представляет собой распределение в nm-мерном пространстве.

В задачах практики встречаются только такие случайные величины, которые имеют плотность, возможно, содержащую линейные комбинации δ-функций. В соответствии с этим будем считать, что все конечномерные распределения случайной функции $X(t)$ определяются соответствующими плотностями, которые будем обозначать $f_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$. Впрочем, часто бывает удобнее определять конечномерные распределения характеристическими функциями $g_{t_1, \ldots, t_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$ (*ТВ*, § 4.5). Можно также характеризовать конечномерные распределения соответствующими функциями распределения $F_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Распределение любого конечного множества случайных величин однозначно определяет и распределения всех подмножеств этих случайных величин (*ТВ*, п. 4.1.3). Следовательно, n-мерное распределение случайной функции однозначно определяет и все ее распределения меньших размерностей. Зная n-мерную плотность случайной функции, можно определить все ее плотности меньших размерностей по формуле

$$f_m(x_1, \ldots, x_m; t_1, \ldots, t_m) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)\, dx_{m+1} \ldots dx_n \quad (m=1, \ldots, n-1). \tag{1}$$

При любой перестановке значений $t_1, \ldots, t_n$ аргумента t совместное распределение случайных величин $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ не изменяется. Поэтому для любой перестановки $t_{p_1}, \ldots, t_{p_n}$ переменных $t_1, \ldots, t_n$ и соответствующей перестановки $x_{p_1}, \ldots, x_{p_n}$ величин $x_1, \ldots, x_n$ имеет место равенство

$$f_n(x_{p_1}, \ldots, x_{p_n}; t_{p_1}, \ldots, t_{p_n}) = f_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n). \tag{2}$$

Условия (1) и (2) называются *условиями согласованности* конечномерных распределений. Любое семейство конечномерных распределений, удовлетворяющих условиям (1) и (2), называется *согласованным семейством* конечномерных распределений.

Таким образом, конечномерные распределения случайной функции всегда удовлетворяют условиям согласованности (1) и (2).

Пример 1. Конечномерные функции распределения случайной функции $X(t)=\varphi(t, U)$, где $\varphi(t, U)$ — данная функция переменной t и конечномерной случайной величины U, определяются формулой (*ТВ*, п. 5.2.2)

$$F_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)=\int\limits_{A_n} f(u)\,du \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

где $f(u)$ — плотность случайной величины U, а

$$A_n=\{u\colon \varphi(t_1, u) < x_1, \ldots, \varphi(t_n, u) < x_n\}\ ^{*)}.$$

Пример 2. Найти конечномерные распределения случайной функции $X(t)$, представляющей собой флуктуации напряжения на выходе цепи электронного устройства (так называемый *дробовой эффект*).

Поток заряженных частиц, вызывающих флуктуации напряжения, с достаточной точностью можно считать пуассоновским потоком (*ТВ*, п. 1.9.1). Будем считать интенсивность потока частиц (среднее число частиц в единицу времени) известной функцией времени $\mu(t)$. Электрические импульсы, получаемые цепью от разных частиц, будем считать независимыми одинаково распределенными случайными величинами, независимыми от случайных моментов действия частиц. Обозначим через $w(t, \tau)$ весовую функцию цепи (предполагаемой линейной), т. е. напряжение на выходе рассматриваемой цепи в момент t под действием единичного электрического импульса в момент τ. Тогда случайное напряжение на выходе цепи в момент t определится формулой

$$X(t)=\sum_{k=1}^{N} A_k w(t, T_k), \tag{3}$$

где N — случайное число импульсов, действующих на цепь в интервале времени (t_0, t), $T_1, \ldots, T_N$ — случайные моменты действия импульсов, $A_1, \ldots$ $\ldots, A_N$ — случайные величины импульсов на входе цепи.

Чтобы найти n-мерное распределение случайной функции $X(t)$, проще всего вычислить совместную характеристическую функцию ее значений в моменты $t_1, \ldots, t_n$. Обозначив через t наибольшее из значений $t_1, \ldots, t_n$, $t=\max(t_1, \ldots, t_n)$, и имея в виду, что $w(t, T_k)=0$ при $t < T_k$ (цепь физически возможна), вследствие чего значения $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ можно вычислить по формуле (3) при одном и том же N, представляющем собой число импульсов в интервале (t_0, t), получим

$$g_{t_1, \ldots, t_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)=M\exp\left\{i\sum_{p=1}^{n}\lambda_p X(t_p)\right\}=$$

$$=M\exp\left\{i\sum_{k=1}^{N} A_k \sum_{p=1}^{n}\lambda_p w(t_p, T_k)\right\}. \tag{4}$$

Для вычисления математического ожидания в этой формуле применим формулу полного математического ожидания (*ТВ*, п. 4.3.3), вычислив сначала условное математическое ожидание при данном значении m случайного числа импульсов N, а затем взяв математическое ожидание найденного

---

*) Через $\{u\colon S\}$ обозначено, как обычно, множество значений u, для которых выполнено условие S.

условного математического ожидания с учетом случайности числа импульсов. Обозначим через σ математическое ожидание числа импульсов, действующих на цепь в интервале времени (t_0, t), а через E_m — событие, заключающееся в том, что в течение интервала времени (t_0, t) на цепь действует ровно m импульсов ($m=0, 1, 2, \ldots$). Тогда вероятности событий E_m выразятся формулой (*ТВ*, п. 1.9.4)

$$P(E_m)=\frac{\sigma^m}{m!}e^{-\sigma}, \quad \sigma=\int\limits_{t_0}^{t}\mu(\tau)\,d\tau \qquad (m=0, 1, 2, \ldots).$$

Для вычисления условного математического ожидания относительно события E_m в (4) снова применим формулу полного математического ожидания, взяв условное математическое ожидание относительно величин $T_1, \ldots, T_m$. Тогда, учитывая независимость случайных величин $A_1, \ldots, A_m$ как между собой, так и от величин $T_1, \ldots, T_m$, получим

$$M\left[\exp\left\{i\sum_{k=1}^{N}A_k\sum_{p=1}^{n}\lambda_p w(t_p, T_k)\right\}\Big|\,E_m\right]=$$
$$=M\exp\left\{i\sum_{k=1}^{m}A_k\sum_{p=1}^{n}\lambda_p w(t_p, T_k)\right\}=$$
$$=M\left[M\left[\exp\left\{i\sum_{k=1}^{m}A_k\sum_{p=1}^{n}\lambda_p w(t_p, T_k)\right\}\Big|\,T_1, \ldots, T_m\right]\right]=$$
$$=M\prod_{k=1}^{m}g_a\left(\sum_{p=1}^{n}\lambda_p w(t_p, T_k)\right), \qquad (5)$$

где $g_a(\lambda)$ — характеристическая функция случайной величины A_k ($k=1, 2, \ldots$). Для вычисления последнего математического ожидания найдем совместное условное распределение моментов импульсов $T_1, \ldots, T_m$ относительно события E_m. Возьмем произвольные моменты времени $\tau_1, \ldots, \tau_m$, $\tau_1 < \ldots < \tau_m$, в интервале (t_0, t). Для вычисления функции распределения $F(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ при данном значении m числа импульсов N в интервале времени (t_0, t) достаточно вычислить сумму вероятностей всех возможных распределений импульсов $T_1, \ldots, T_m$, $T_1 \leqslant T_2 \leqslant \ldots \leqslant T_m$, по интервалам (t_0, τ_1), (τ_1, τ_2), ..., (τ_{m-1}, τ_m), удовлетворяющих условиям $T_1 < \tau_1, \ldots, T_m < \tau_m$, при непопадании ни одного импульса в интервал (τ_m, t) и разделить эту вероятность на вероятность попадания m импульсов в интервал (t_0, t), т. е. на вероятность события E_m. Взяв смешанную производную найденной таким путем условной функции распределения $F(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ по $\tau_1, \ldots, \tau_m$, найдем условную плотность $f(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ случайных моментов импульсов $T_1, \ldots, T_m$ при попадании m импульсов в интервал (t_0, t). При этом отличный от нуля результат даст только одно слагаемое, зависящее от всех переменных $\tau_1, \ldots, \tau_m$, пропорциональное вероятности попадания по одному импульсу в каждый из интервалов (t_0, τ_1), (τ_1, τ_2), ..., (τ_{m-1}, τ_m):

$$\frac{m!}{\sigma^m}\int\limits_{t_0}^{\tau_1}\mu(\tau)\,d\tau\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\mu(\tau)\,d\tau\ldots\int\limits_{\tau_{m-1}}^{\tau_m}\mu(\tau)\,d\tau.$$

В результате получаем

$$f(\tau_1, \ldots, \tau_m)=\frac{m!}{\sigma^m}\mu(\tau_1)\ldots\mu(\tau_m) \quad \text{при} \quad t_0<\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant\ldots\leqslant\tau_m<t$$

и

$$f(\tau_1, \ldots, \tau_m)=0 \text{ при невыполнении условия } t_0<\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant\ldots\leqslant\tau_m<t.$$

Определив условную плотность моментов импульсов $T_1, \ldots, T_m$, находим математическое ожидание в (5):

$$M\left[\exp\left\{i\sum_{k=1}^{N} A_k \sum_{p=1}^{n} \lambda_p w(t_p, T_k)\right\} \mid E_m\right] = \\ = \frac{m!}{\sigma^m}\int_{t_0}^{t}\mu(\tau_m)\,d\tau_m \int_{t_0}^{\tau_m}\mu(\tau_{m-1})\,d\tau_{m-1}\ldots \\ \ldots\int_{t_0}^{\tau_2}\prod_{k=1}^{m} g_a\left(\sum_{p=1}^{n}\lambda_p w(t_p, \tau_k)\right)\mu(\tau_1)\,d\tau_1. \quad (6)$$

Подынтегральная функция здесь симметрична относительно переменных $\tau_1, \ldots, \tau_m$. Следовательно, интеграл в (6) не изменится при любой перестановке переменных $\tau_1, \ldots, \tau_m$. Поэтому вместо того, чтобы брать один интеграл в (6), умноженный на $m!$, можно взять сумму $m!$ интегралов, полученных путем всех возможных перестановок переменных $\tau_1, \ldots, \tau_m$. Но сумма всех таких интегралов равна интегралу по m-мерному кубу со стороной (t_0, t). Следовательно,

$$M\left[\exp\left\{i\sum_{k=1}^{N} A_k \sum_{p=1}^{n} \lambda_p w(t_p, T_k)\right\} \mid E_m\right] = \\ = \frac{1}{\sigma^m}\int_{t_0}^{t}\ldots\int_{t_0}^{t}\prod_{k=1}^{m}\left\{g_a\left(\sum_{p=1}^{n}\lambda_p w(t_p, \tau_k)\right)\mu(\tau_k)\right\}d\tau_1\ldots d\tau_m = \\ = \frac{1}{\sigma^m}\left[\int_{t_0}^{t} g_a\left(\sum_{p=1}^{n}\lambda_p w(t_p, \tau)\right)\mu(\tau)\,d\tau\right]^m.$$

Для вычисления математического ожидания в (4) теперь достаточно умножить полученное выражение на вероятность события E_m и просуммировать по всем возможным значениям m от 0 до ∞. В результате получим

$$g_{t_1, \ldots, t_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left[\int_{t_0}^{t} g_a\left(\sum_{p=1}^{n}\lambda_p w(t_p, \tau)\right)\mu(\tau)\,d\tau\right]^m e^{-\sigma} = \\ = \exp\left\{\int_{t_0}^{t}\left[g_a\left(\sum_{p=1}^{n}\lambda_p w(t_p, \tau)\right) - 1\right]\mu(\tau)\,d\tau\right\}.$$

Таким образом, конечномерные характеристические функции случайной функции $X(t)$ определяются формулой

$$g_{t_1, \ldots, t_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \exp\left\{\int_{t_0}^{\max(t_1, \ldots, t_n)}\left[g_a\left(\sum_{p=1}^{n}\lambda_p w(t_p, \tau)\right) - 1\right]\mu(\tau)\,d\tau\right\} \\ (n = 1, 2, \ldots). \quad (7)$$

2.1.3. Марковские случайные процессы. Мы видели, что любое конечномерное распределение случайной функции однозначно определяет и все конечномерные распределения меньших размерностей. Но в общем случае ни одно из конечномерных распределений случайной функции не определяет ее конечномерные распределения высших размерностей. Однако существуют случайные функции, для которых какое-нибудь из конечномерных распределений определяет всю последовательность ее конечномерных распределений.

Так, например, для случайной функции $X(t)$ с независимыми значениями случайные величины $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ независимы при любых $t_1, \ldots, t_n \in T$ и при любом натуральном n. Поэтому для случайной функции $X(t)$ с независимыми значениями

$$f_n(x_1, \ldots, x_n;\ t_1, \ldots, t_n) = f_1(x_1;\ t_1) f_1(x_2;\ t_2) \ldots f_1(x_n;\ t_n)$$
$$(n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Таким образом, все конечномерные распределения случайной функции с независимыми значениями однозначно определяются ее одномерным распределением.

Другим примером случайных функций, у которых все конечномерные распределения определяются одним из них, являются марковские случайные процессы. Прежде чем давать определение марковского случайного процесса, дадим сначала определение марковской последовательности случайных величин.

Последовательность случайных величин $\{X_p\}$ называется *марковской случайной последовательностью*, если при любых натуральных $p_1 < \ldots < p_n$ условное распределение величины X_{p_n} относительно $X_{p_1}, \ldots, X_{p_{n-1}}$ зависит только от $X_{p_{n-1}}$, т. е. совпадает с условным распределением величины X_{p_n} относительно $X_{p_{n-1}}$.

Случайная функция $X(t)$ непрерывно изменяющейся скалярной переменной t называется *марковским случайным процессом*, если при любом выборе последовательности значений аргумента $\{t_p\}$, $t_{p-1} < t_p$, последовательность случайных величин $\{X_{t_p}\}$ является марковской.

Марковский случайный процесс $X(t)$ обладает тем свойством, что при данном его значении x в какой-нибудь момент τ, $X(\tau) = x$, распределение его значения X_t в любой последующий момент $t > \tau$ однозначно определяется его значением x в момент τ и совершенно не зависит от его реализации до момента τ. Иными словами, всем реализациям марковского процесса $X(t)$, принимающим одно и то же значение x в данный момент τ, $X(\tau) = x$, соответствует одно и то же условное распределение $X(t)$ в любой момент $t > \tau$, не зависящее от хода реализации до момента τ.

Пусть $X(t)$ — марковский случайный процесс. Его n-мерная плотность согласно общей теореме умножения плотностей определяется формулой (*ТВ*, п. 4.2.2)

$$f_n(x_1, \ldots, x_n;\ t_1, \ldots, t_n) = f_1(x_1;\ t_1) f_2(x_2;\ t_2 \mid x_1;\ t_1) \times$$
$$\times f_3(x_3;\ t_3 \mid x_1, x_2;\ t_1, t_2) \ldots f_n(x_n;\ t_n \mid x_1, \ldots, x_{n-1};\ t_1, \ldots, t_{n-1}),$$

где $f_k(x_k;\ t_k \mid x_1, \ldots, x_{k-1};\ t_1, \ldots, t_{k-1})$ — условная плотность значения X_{t_k} процесса $X(t)$ при данных его значениях $x_1, \ldots, x_{k-1}$

при $t=t_1, \ldots, t_{k-1}$ $(k=2, 3, \ldots)$. Но для марковского случайного процесса $X(t)$ согласно определению

$$f_k(x_k;\ t_k \mid x_1, \ldots, x_{k-1};\ t_1, \ldots, t_{k-1}) = f_2(x_k;\ t_k \mid x_{k-1};\ t_{k-1}).$$

Следовательно, n-мерная плотность марковского случайного процесса $X(t)$ определяется формулой

$$f_n(x_1, \ldots, x_n;\ t_1, \ldots, t_n) = \\ = f_1(x_1;\ t_1) f_2(x_2;\ t_2 \mid x_1;\ t_1) \ldots f_2(x_n;\ t_n \mid x_{n-1};\ t_{n-1}).$$

Положив здесь $n=2$ и выразив условную плотность $f_2(x_2;\ t_2 \mid x_1;\ t_1)$ через одномерную и двумерную плотности, получим

$$f_n(x_1, \ldots, x_n;\ t_1, \ldots, t_n) = \\ = \frac{f_2(x_1, x_2;\ t_1, t_2) f_2(x_2, x_3;\ t_2, t_3) \ldots f_2(x_{n-1}, x_n;\ t_{n-1}, t_n)}{f_1(x_2;\ t_2) f_1(x_3;\ t_3) \ldots f_1(x_{n-1};\ t_{n-1})} \\ (n=3, 4, \ldots).$$

Эта формула показывает, что все конечномерные распределения марковского процесса однозначно определяются его двумерным распределением.

2.1.4. Вероятности событий, связанных со случайными функциями. Конечномерные распределения случайной функции определяют вероятности событий, связанных со значениями случайной функции в конечном множестве точек. А именно вероятность того, что значения $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ случайной функции $X(t)$ при $t=t_1, \ldots, t_n$ будут удовлетворять условию $\{X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}\} \in B$, определяется формулой

$$P(\{X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}\} \in B) = \int \underset{B}{\ldots} \int f_n(x_1, \ldots, x_n;\ t_1, \ldots, t_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \tag{8}$$

Эта формула определяет вероятность появления в результате опыта одной из множества функций $\{x(t): \{x(t_1), \ldots, x(t_n)\} \in B\}$. Такое множество функций называется *цилиндрическим множеством с n-мерным основанием B* *). Таким образом, конечномерные распределения случайной функции определяют вероятность для всех цилиндрических множеств.

Естественно возникает вопрос, нельзя ли с помощью конечномерных распределений случайной функции определить вероятности для более широкого класса событий. Положительный ответ на этот вопрос дает теорема А. Н. Колмогорова, которая устанавливает, что конечномерные распределения случайной функции однозначно определяют вероятности не только для цилиндриче-

*) Это название объясняется тем, что значения функций, входящих в такое множество, ограничиваются только при $t=t_1, \ldots, t_n$, а при остальных значениях t остаются произвольными, по аналогии с тем, что множество точек $\{\{x_1, x_2, x_3\}: \{x_1, x_2\} \in B\}$ трехмерного пространства представляет собой цилиндр с основанием B в плоскости x_1x_2 и образующей, параллельной оси x_3.

ских множеств, но и для значительно более широкого класса множеств функций, а также устанавливает существование случайной функции с любой данной согласованной последовательностью конечномерных распределений [37]. Мы не будем здесь давать точную формулировку этой теоремы. Отметим лишь, что согласно этой теореме конечномерные распределения однозначно определяют вероятности только таких событий, связанных с данной случайной функцией, которые накладывают ограничения на значения случайной функции не более чем в счетном множестве точек. Поэтому конечномерные распределения случайной функции $X(t)$ в общем случае не определяют вероятности некоторых событий, которые приходится вычислять в задачах практики, например вероятность отсутствия выхода случайной функции из данной области в данном интервале (t_1, t_2), т. е. вероятности таких событий, как $\{a < X(t) < b, \forall t \in (t_1, t_2)\}$, $\{X(t) \in A, \forall t \in T\}$ *).

Чтобы конечномерные распределения случайной функции при несчетном T определяли вероятности всех событий, которые приходится рассматривать в задачах практики, необходимо наложить некоторые ограничения на реализации случайной функции. А именно необходимо потребовать, чтобы каждая реализация случайной функции (за исключением, может быть, некоторого множества реализаций, имеющего нулевую вероятность) однозначно определялась ее значениями в некотором счетном множестве точек. Этому условию удовлетворяют, например, случайные функции с непрерывными реализациями. А так как практически все случайные функции, встречающиеся в приложениях, имеют непрерывные (и даже равномерно непрерывные) реализации, то конечномерные распределения случайной функции практически определяют вероятности всех событий, которыми приходится интересоваться в приложениях.

Для читателей, знакомых с элементами теории меры, заметим, что конечномерные распределения случайной функции определяют вероятность на σ-алгебре, порожденной цилиндрическими множествами, т. е. на минимальной σ-алгебре, содержащей все цилиндрические множества. Любое множество этой σ-алгебры накладывает ограничения на реализации случайной функции не более, чем в счетном множестве точек [91], [102] (вып. 7).

§ 2.2. Моменты случайной функции

2.2.1. Математическое ожидание. Рассмотрим случайную функцию $X(t)$, $t \in T$. Предположим, что при любом значении аргумента $t \in T$ значение X_t случайной функции $X(t)$ имеет конечное

*) Через $\forall$ обозначен *квантор общности*. Запись $\forall t \in T$ означает «все значения t, принадлежащие T». Таким образом, событие $X(t) \in A$, $\forall t \in T$, заключается в том, что значения случайной функции $X(t)$ принадлежат множеству A при всех $t \in T$.

математическое ожидание MX_t. Множество математических ожиданий величин X_t, соответствующих всем $t < T$, образует функцию $m_x(t)$. Эта функция называется *математическим ожиданием* случайной функции $X(t)$. Таким образом, математическое ожидание случайной функции $X(t)$ представляет собой функцию $m_x(t)$, значение которой при каждом данном $t \in T$ представляет собой математическое ожидание значения случайной функции $X(t)$ при этом t, $MX(t) = m_x(t)$.

Математическое ожидание действительной случайной функции $X(t)$ выражается через ее одномерную плотность формулой (*ТВ*, п. 3.1.2)

$$m_x(t) = MX(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x;\ t)\, dx. \tag{9}$$

2.2.2. Ковариационная функция скалярной случайной функции. В качестве меры рассеивания и взаимной зависимости значений случайной функции обычно применяют ее ковариационную функцию.

Ковариационной функцией $K_x(t_1, t_2)$ скалярной случайной функции $X(t)$ называется ковариация ее значений X_{t_1}, X_{t_2} при двух значениях t_1, t_2 аргумента t, рассматриваемая как функция $t_1, t_2 \in T$ (*ТВ*, п. 3.2.2) *):

$$K_x(t_1, t_2) = MX^0(t_1)\overline{X^0(t_2)}, \tag{10}$$

где через $X^0(t)$ обозначена *центрированная* случайная функция, $X^0(t) = X(t) - m_x(t)$.

При $t_1 = t_2 = t$ ковариационная функция равна дисперсии значения X_t случайной функции $X(t)$ при данном t:

$$D_x(t) = M|X^0(t)|^2 = K_x(t, t).$$

Таким образом, *дисперсия* случайной функции $X(t)$ представляет собой функцию $D_x(t)$, $t \in T$, значение которой при каждом $t \in T$ равно дисперсии значения X_t случайной функции $X(t)$ при этом t.

При $t_1 \neq t_2$ ковариационная функция характеризует в некотором смысле зависимость (а именно корреляцию) значений X_{t_1}, X_{t_2} случайной функции $X(t)$.

Ковариационная функция действительной случайной функции выражается через ее двумерную плотность формулой

$$K_x(t_1, t_2) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_x(t_1)][x_2 - m_x(t_2)] f_2(x_1, x_2;\ t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2. \tag{11}$$

*) Эта функция иногда называется *корреляционной*. Однако в последнее время чаще применяется термин *ковариационная* функция.

При $t_1 = t_2 = t$ значения X_{t_1}, X_{t_2} случайной функции $X(t)$ совпадают: $X_{t_1} = X_{t_2} = X_t$. Поэтому при $t_1 = t_2$ двумерное распределение случайной функции $X(t)$ сосредоточено на прямой $x_2 = x_1$ плоскости x_1x_2, т. е. является вырожденным. Вследствие этого двумерная плотность случайной функции выражается через ее одномерную плотность формулой (*ТВ*, п. 2.3.4)

$$f_2(x_1, x_2; \ t, t) = f_1(x_1; \ t)\,\delta(x_2 - x_1).$$

Подставив это выражение в (11) при $t_1 = t_2 = t$, получаем формулу для дисперсии действительной случайной функции $X(t)$:

$$D_x(t) = K_x(t, \ t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)]^2 f_1(x; \ t)\,dx. \tag{12}$$

Пример 3. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию случайной функции $X(t) = \varphi(t, \ U)$ примера 1.

Применяя формулы для моментов функций случайных величин (*ТВ*, п. 5.1.1), получим

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, \ u)\,f(u)\,du,$$

$$K_x(t_1, \ t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(t_1, \ u) - m_x(t_1)]\,[\overline{\varphi(t_2, \ u)} - \overline{m_x(t_2)}]\,f(u)\,du.$$

Если функция φ линейна относительно параметра U,

$$X(t) = \sum_{r=1}^{N} U_r \varphi_r(t),$$

то для определения математического ожидания и ковариационной функции случайной функции $X(t)$ нет надобности знать распределение величины U, а достаточно знать ее математическое ожидание, компоненты которого мы обозначим через $m_1, \ldots, m_N$, и ковариационную матрицу (дисперсию, если величина U — скалярная), элементы которой мы обозначим через k_{pq}. В этом случае, применяя формулы для моментов линейных функций случайных величин (*ТВ*, п. 3.3.5), получим

$$m_x(t) = \sum_{r=1}^{N} m_r \varphi_r(t),$$

$$K_x(t_1, \ t_2) = \sum_{p, q=1}^{N} k_{pq}\,\varphi_p(t_1)\,\overline{\varphi_q(t_2)}.$$

Пример 4. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию флуктуаций напряжения на выходе электрической цепи с электронным устройством (дробового эффекта).

Математическое ожидание и ковариационная функция могут быть в данном случае вычислены совершенно так же, как было вычислено математическое ожидание в формуле (4). Однако эта задача решается значительно проще, если воспользоваться выведенной в примере 2 формулой (7) для n-мерной характеристической функции. Полагая в (7) $n = 2$ и определив коэффициенты при $i\lambda_1$ и $-\lambda_1\lambda_2$ в разложении логарифма двумерной характеристической функции $g_{t_1t_2}(\lambda_1, \lambda_2)$ в ряд Маклорена, получим (*ТВ*, п. 4.5.3)

$$m_x(t) = \alpha_1 \int_{t_0}^{t} \mu(\tau)\, w(t, \tau)\, d\tau,$$

$$K_x(t_1, t_2) = \alpha_2 \int_{t_0}^{\min(t_1, t_2)} \mu(\tau)\, w(t_1, \tau)\, w(t_2, \tau)\, d\tau,$$

где $\alpha_r = -i^r g_a^{(r)}(0)$ — момент порядка r случайной величины импульса.

В частном случае, когда рассматриваемая электрическая цепь представляет собой цепочку RC, средняя плотность импульсов μ постоянна, а $t_0 = -\infty$, $w(t, \tau) = (1/T)\, e^{-(t-\tau)/T}\, 1(t-\tau)$ (пример 1.6), и предыдущие формулы принимают вид

$$m_x(t) = \frac{\alpha_1\mu}{T} \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)/T}\, d\tau = \alpha_1\mu,$$

$$K_x(t_1, t_2) = \frac{\alpha_2\mu}{T} \int_{-\infty}^{\min(t_1, t_2)} e^{-(t_1-\tau+t_2-\tau)/T}\, d\tau = \frac{\alpha_2\mu}{2T}\, e^{-|t_1-t_2|/T}. \qquad (I)$$

Пример 5. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию действительной ступенчатой случайной функции времени $X(t)$, которая скачком изменяет свое значение в случайные моменты времени, образующие пуассоновский поток интенсивности α, а в промежутках между этими моментами времени сохраняет неизменные значения, представляющие собой независимые случайные величины, имеющие равные нулю математические ожидания и одну и ту же дисперсию D.

Очевидно, что в данном случае $m_x(t) \equiv 0$ и поэтому $K_x(t_1, t_2) = MX(t_1)\, X(t_2)$. Для вычисления математического ожидания в этой формуле введем вспомогательную случайную величину Y, принимающую значение 0, если в интервале времени (t_1, t_2) случайная функция $X(t)$ постоянна, и значение 1, если в интервале (t_1, t_2) есть хотя бы одна точка изменения значения случайной функции $X(t)$. Число точек изменения значения случайной функции $X(t)$, попадающих в интервал (t_1, t_2), распределено по закону Пуассона. Поэтому вероятности значений 0 и 1 случайной величины Y равны

$$P(Y=0) = e^{-\alpha|t_1-t_2|}, \qquad P(Y=1) = 1 - e^{-\alpha|t_1-t_2|}.$$

Следовательно, плотность случайной величины Y определяется формулой (*ТВ*, п. 2.3.1)

$$f(y) = e^{-\alpha|t_1-t_2|}\, \delta(y) + \left(1 - e^{-\alpha|t_1-t_2|}\right) \delta(y-1).$$

Применяя для вычисления математического ожидания формулу полного математического ожидания, получим

$$K_x(t_1, t_2) = MX(t_1)\, X(t_2) = M[M[X(t_1)\, X(t_2) \mid Y]] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} M[X(t_1)\, X(t_2) \mid y]\, f(y)\, dy =$$

$$= M[X(t_1)\, X(t_2) \mid 0]\, e^{-\alpha|t_1-t_2|} + M[X(t_1)\, X(t_2) \mid 1]\left(1 - e^{-\alpha|t_1-t_2|}\right). \qquad (II)$$

Остается вычислить входящие в эту формулу условные математические ожидания. Значения $X(t_1)$ и $X(t_2)$ случайной функции $X(t)$ совпадают в том случае, когда случайная величина Y принимает значение 0, и являются независимыми случайными величинами в том случае, когда случайная величина Y принимает значение 1. Следовательно,

$$M[X(t_1)X(t_2)\,|\,0] = M[X^2(t_1)] = D,$$
$$M[X(t_1)X(t_2)\,|\,1] = M[X(t_1)]\,M[X(t_2)] = 0.$$

Подставляя эти значения в (II), получим

$$K_x(t_1,\ t_2) = De^{-\alpha|t_1-t_2|}. \tag{III}$$

Пример 6. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию случайной функции $X(t) = Ue^{i\Lambda t}$, где U и Λ — независимые случайные величины, $MU = 0$, $DU = D$, а Λ распределена по закону Коши с плотностью

$$f(\lambda) = \frac{\alpha}{\pi}\,\frac{1}{\alpha^2+\lambda^2}.$$

Очевидно, что $m_x(t) = 0$ и, следовательно, ввиду независимости U и Λ

$$K_x(t_1,\ t_2) = MX(t_1)\overline{X(t_2)} = M|U|^2 Me^{i\Lambda(t_1-t_2)} =$$
$$= DMe^{i\Lambda(t_1-t_2)} = \frac{D\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda(t_1-t_2)}}{\alpha^2+\lambda^2}\,d\lambda = De^{-\alpha|t_1-t_2|}. \tag{IV}$$

Сравнивая формулы (I), (III) и (IV), видим, что одну и ту же ковариационную функцию могут иметь совершенно различные случайные функции с различным характером возможных реализаций. Действительно, формула (3) показывает, что реализация случайной функции примера 4, хотя и имеют разрывы в моменты действия импульсов, но ни в каком промежутке времени не сохраняют постоянное значение, в то время как реализации случайной функции примера 5 являются ступенчатыми функциями, сохраняющими постоянное значение между двумя последовательными моментами разрыва. Реализации же случайной функции примера 6 непрерывны (представляют собой гармонические колебания со случайными амплитудой, частотой и фазой). Далее, быстрота убывания показательной функции в (I) определяется исключительно постоянной времени цепочки RC и совершенно не зависит от средней частоты импульсов. В формуле (III) быстрота убывания показательной функции полностью определяется средней частотой импульсов. Наконец, в формуле (IV) быстрота убывания показательной функции зависит только от параметра α распределения Коши случайной частоты колебаний. Это сравнение показывает, что ковариационная функция является весьма неполной характеристикой случайной функции.

2.2.3. Взаимная ковариационная функция скалярных случайных функций. Пусть $X(t)$, $Y(t)$, $t \in T$, — скалярные случайные функции. Для характеристики их зависимости пользуются их взаимной ковариационной функцией.

Взаимной ковариационной функцией $K_{xy}(t_1,\ t_2)$ случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ называется ковариация их значений X_{t_1}, Y_{t_2} при значениях t_1, t_2 аргумента t, рассматриваемая как функция $t_1,\ t_2 \in T$:

$$K_{xy}(t_1,\ t_2) = MX^0(t_1)\overline{Y^0(t_2)}. \tag{13}$$

Случайные функции $X(t)$, $Y(t)$ называются *некоррелированными*, если $K_{xy}(t_1,\ t_2) \equiv 0$. Случайные функции $X(t)$, $Y(t)$ называются *коррелированными*, если $K_{xy}(t_1,\ t_2) \neq 0$ при некоторых $t_1,\ t_2 \in T$.

Пример 7. Найти взаимную ковариационную функцию случайных функций $X(t)=\varphi(t, U)$, $Y(t)=\psi(t, U)$, где $\varphi(t, U)$ и $\psi(t, U)$ — скалярные функции t и случайной величины U (скалярной или векторной).

Пользуясь формулами для моментов функций случайной величины (*ТВ*, п. 5.1.1), находим

$$K_{xy}(t_1, t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(t_1, u)-m_x(t_1)][\overline{\psi(t_2, u)}-\overline{m_y(t_2)}]f(u)\,du,$$

$$m_x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t, u)f(u)\,du, \quad m_y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t, u)f(u)\,du.$$

2.2.4. Ковариационная функция векторной случайной функции. Пусть $X(t)$, $t\in T$, — n-мерная векторная случайная функция, компонентами которой служат скалярные случайные функции $X_1(t), \ldots, X_n(t)$.

Ковариационной функцией $K_x(t_1, t_2)$ векторной случайной функции $X(t)$ называется матрица, элементами которой служат ковариационные и взаимные ковариационные функции ее компонент:

$$K_x(t_1, t_2)=\begin{bmatrix} K_{11}(t_1, t_2) & K_{12}(t_1, t_2) & \ldots & K_{1n}(t_1, t_2) \\ K_{21}(t_1, t_2) & K_{22}(t_1, t_2) & \ldots & K_{2n}(t_1, t_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n1}(t_1, t_2) & K_{n2}(t_1, t_2) & \ldots & K_{nn}(t_1, t_2) \end{bmatrix}, \qquad (14)$$

где

$$K_{hl}(t_1, t_2)=MX_h^0(t_1)\overline{X_l^0(t_2)} \qquad (h, l=1, \ldots, n), \qquad (15)$$

а $X_k^0(t)=X_k(t)-m_k(t)$, $m_k(t)=MX_k(t)$ $(k=1, \ldots, n)$.

Представив векторную случайную функцию $X(t)$ в виде матрицы-столбца, $X(t)=[X_1(t)\ldots X_n(t)]^{\text{т}}$, можем переписать определение (14), (15) ковариационной функции в виде

$$K_x(t_1, t_2)=MX^0(t_1)X^0(t_2)^*, \qquad (16)$$

где звездочка означает транспонирование матрицы с заменой всех ее комплексных элементов соответствующими сопряженными величинами. В частном случае действительной случайной функции $X(t)$ формула (16) принимает вид

$$K_x(t_1, t_2)=MX^0(t_1)X^0(t_2)^{\text{т}}. \qquad (17)$$

Таким образом, ковариационная функция векторной случайной функции $X(t)$ представляет собой взаимную ковариационную матрицу ее значений X_{t_1}, X_{t_2} при значениях t_1, t_2 аргумента t, рассматриваемую как функция $t_1, t_2\in T$ (*ТВ*, п. 3.3.2).

2.2.5. Белый шум. Большое значение для приложений имеет особый вид случайных функций, у которых ковариационная функция содержит множителем δ-функцию.

Случайная функция $X(t)$ с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией, содержащей множителем

δ-функцию,

$$m_x(t)=0, \quad K_x(t_1, t_2)=\nu(t_1)\,\delta(t_1-t_2),$$

называется *белым шумом* *). Множитель $\nu(t)$ при δ-функции называется *интенсивностью* белого шума $X(t)$.

Интенсивность скалярного белого шума существенно положительна. Интенсивность векторного белого шума представляет собой неотрицательно определенную симметричную матрицу (п. 2.4.8).

Очевидно, что дисперсия белого шума бесконечна, а его значения в двух сколь угодно близких точках не коррелированы.

В основе понятия белого шума лежат физические представления, связанные с быстро изменяющимися величинами, значения которых, разделенные очень малыми промежутками времени, практически независимы. Мы увидим в п. 4.2.6, что при разложении таких случайных функций на элементарные гармонические колебания гармоники всех частот оказываются одинаковыми по интенсивности. Эта аналогия с белым светом и послужила причиной того, что такие случайные функции называются белыми шумами.

Белый шум в чистом виде не может существовать физически. Для его реализации необходима бесконечная мощность, так как изменение такой случайной функции на сколь угодно малом промежутке времени может быть как угодно большим. Поэтому понятие белого шума является математической абстракцией, удобной для построения теории. Практически же можно говорить лишь о большей или меньшей степени приближения к белому шуму, о том, что минимальный промежуток времени, разделяющий значения случайной функции, которые можно считать практически некоррелированными, достаточно мал для того, чтобы его можно было не учитывать.

Для решения практических задач часто целесообразно заменять случайную функцию белым шумом. На основании сказанного это можно сделать только в том случае, когда наименьший интервал между значениями аргумента, при котором значения случайной функции практически не коррелированы, называемый обычно *интервалом корреляции*, достаточно мал. Если величину $|K_x(t_1, t_2)|/K_x(t_1, t_1)$ для скалярной случайной функции $X(t)$ можно считать практически равной нулю при $|t_1-t_2|>\tau_к$ и величина $\tau_к$ достаточно мала, то случайную функцию $X(t)$ можно считать белым шумом интенсивности

$$\nu(t)=\int_{-\infty}^{\infty} K_x(t, t+\tau)\,d\tau.$$

---

*) Ввиду того что $\delta(t_1-t_2)=0$ при $t_1\neq t_2$, множитель $\nu(t_1)$ может быть заменен множителем $\nu(t_2)$ или симметричным множителем $\sqrt{\nu(t_1)\nu(t_2)}$.

Ясно, что понятие интервала корреляции не является точным математическим. Это чисто практическая мера близости случайной функции к белому шуму. Практически для скалярной случайной функции $X(t)$ интервал корреляции определяется формулой

$$\tau_к = \frac{1}{2} \max_t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_x(t,\ t+\tau)}{K_x(t,\ t)}\, d\tau.$$

Чем меньше интервал корреляции, тем с большим основанием можно считать случайную функцию белым шумом. Векторную случайную функцию можно считать белым шумом, если все ее компоненты допустимо принять за белые шумы. При этом интенсивность $\nu(t)$ векторного белого шума определяется той же формулой, что и для скалярной случайной функции.

Пример 8. Рассмотрим флуктуации напряжения на входе цепи примеров 2 и 4. На основании формулы (1.6) весовая функция для входного сигнала (для передачи от входа к тому же входу) представляет собой δ-функцию $\delta(t-\tau)$. Положив в формулах для $m_x(t)$ и $K_x(t_1,\ t_2)$ примера 4 $w(t,\ \tau)=\delta(t-\tau)$, получим

$$m_x(t)=\alpha_1\mu(t),\quad K_x(t_1,\ t_2)=\alpha_2\mu(t)\,\delta(t_1-t_2).$$

Мы видим, что центрированная случайная функция на входе цепи представляет собой белый шум с переменной интенсивностью $\nu(t)=\alpha_2\mu(t)$.

Если в формуле (I) перейти к пределу при $T\to 0$, то получим в правой части с точностью до постоянного множителя δ-функцию. Таким образом, центрированная случайная функция $X(t)$ на выходе RC-цепочки стремится в пределе к белому шуму, если постоянная времени T стремится к нулю. В данном случае белый шум представляет собой пуассоновский поток δ-импульсов случайной величины.

Пример 9. Положив в формуле (III) примера 5 $D=k\alpha$, рассмотрим предельный случай $\alpha\to\infty$. В результате, поскольку $\alpha e^{-\alpha|t_1-t_2|}\to 2\delta(t_1-t_2)$, получнм белый шум как предел бесконечно плотной последовательности бесконечно малых импульсов. Практически случайную функцию примера 5 можно считать белым шумом при достаточно большом α.

Пример 10. Найдем ковариационную функцию случайной функции

$$V(t)=U(\alpha+i\Lambda)\,e^{i\Lambda t},$$

где U и Λ — независимые случайные величины, $m_u=0$, $D_u=D$, а Λ распределена по закону Коши

$$f(\lambda)=\frac{\alpha}{\pi}\,\frac{1}{\alpha^2+\lambda^2}.$$

Математическое ожидание случайной функции $V(t)$ равно нулю. Поэтому по теореме умножения математических ожиданий

$$K_v(t_1,\ t_2)=M\,|U|^2(\alpha^2+\Lambda^2)\,e^{i\Lambda(t_1-t_2)}=$$

$$=DM(\alpha^2+\Lambda^2)\,e^{i\Lambda(t_1-t_2)}=\frac{D\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t_1-t_2)}\,d\lambda=2D\alpha\delta(t_1-t_2),$$

так как (TB, приложение 1)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\,d\lambda=\delta(x).$$

Таким образом, рассматриваемая случайная функция представляет собой белый шум интенсивности $2D\alpha$. Этот белый шум — обычная случайная функция, все реализации которой представляют собой гармонические колебания.

Приведенные примеры показывают, что понятию белого шума соответствуют совершенно различные математические и физические модели. В примере 8 белый шум представляет собой пуассоновскую последовательность δ-функций, т. е. является *обобщенной случайной функцией* *). В примере 9 белый шум представляет собой случайную функцию, значения которой при сколь угодно близких значениях аргумента независимы. Реализации такой случайной функции невозможно себе представить. Они могут совершать сколь угодно большое число как угодно больших колебаний на сколь угодно малом интервале. По существу эти реализации не имеют определенных значений ни при каком значении аргумента. Поэтому случайная функция примера 9 тоже относится к обобщенным случайным функциям (п. 2.4.9). Белый шум примера 10 представляет собой обычную случайную функцию с непрерывными реализациями.

2.2.6. Взаимная ковариационная функция векторных случайных функций. Пусть $X(t)$ и $Y(t)$ — векторные случайные функции (которые могут иметь разные размерности).

Взаимной ковариационной функцией случайных функций $X(t)$ *и* $Y(t)$ называется взаимная ковариационная матрица их значений X_{t_1}, Y_{t_2} при значениях t_1, t_2 аргумента t, рассматриваемая как функция t_1, $t_2 \in T$:

$$K_{xy}(t_1, t_2) = MX^0(t_1)\,Y^0(t_2)^*. \tag{18}$$

Для действительных случайных функций $X(t)$, $Y(t)$ эта формула имеет вид

$$K_{xy}(t_1, t_2) = MX^0(t_1)\,Y^0(t_2)^{\mathrm{T}}. \tag{19}$$

2.2.7. Корреляционные функции. Так же как для конечномерных случайных векторов наряду с ковариационными матрицами вводят корреляционные матрицы, для случайных функций, кроме ковариационных функций, вводят корреляционные функции.

Корреляционной функцией скалярной случайной функции $X(t)$ называется коэффициент корреляции ее значений X_{t_1}, X_{t_2} при двух значениях t_1, t_2 аргумента t, рассматриваемый как функция t_1, $t_2 \in T$.

На основании определения коэффициента корреляции (*ТВ*, п. 3.2.2) и формулы (16) корреляционная функция $R_x(t_1, t_2)$ случайной функции $X(t)$ выражается через ее ковариационную

---

*) Все ее реализации являются обобщенными функциями (*ТВ*, приложение 1).

функцию $K_x(t_1, t_2)$ формулой

$$R_x(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sqrt{D_x(t_1) D_x(t_2)}} = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sqrt{K_x(t_1, t_1) K_x(t_2, t_2)}}.$$

Взаимной корреляционной функцией случайных функций $X(t)$ *и* $Y(t)$ называется коэффициент корреляции их значений X_{t_1}, Y_{t_2} при значениях t_1, t_2 аргумента t, рассматриваемый как функция $t_1, t_2 \in T$:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \frac{K_{xy}(t_1, t_2)}{\sqrt{D_x(t_1) D_y(t_2)}} = \frac{K_{xy}(t_1, t_2)}{\sqrt{K_x(t_1, t_1) K_y(t_2, t_2)}}.$$

Корреляционной функцией n-мерной векторной случайной функции $X(t) = [X_1(t) \ldots X_n(t)]^{\mathrm{T}}$ называется матрица, элементами которой служат корреляционные и взаимные корреляционные функции компонент $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ случайной функции $X(t)$:

$$R_x(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} R_{11}(t_1, t_2) & R_{12}(t_1, t_2) & \ldots & R_{1n}(t_1, t_2) \\ R_{21}(t_1, t_2) & R_{22}(t_1, t_2) & \ldots & R_{2n}(t_1, t_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_{n1}(t_1, t_2) & R_{n2}(t_1, t_2) & \ldots & R_{nn}(t_1, t_2) \end{bmatrix},$$

где $R_{pp}(t_1, t_2)$ — корреляционная функция случайной функции $X_p(t)$, а $R_{pq}(t_1, t_2)$ — взаимная корреляционная функция случайных функций $X_p(t)$ и $X_q(t)$ $(p, q = 1, \ldots, n)$.

Корреляционная функция векторной случайной функции $X(t)$ выражается через ее ковариационную функцию формулой

$$R_x(t_1, t_2) = \sigma_x(t_1)^{-1} K_x(t_1, t_2) \sigma_x(t_2)^{-1},$$

где $\sigma_x(t)$ — диагональная матрица, элементами которой служат средние квадратические отклонения $\sigma_p(t)$ компонент случайной функции $X(t)$, $\sigma_p(t) = \sqrt{D_p(t)} = \sqrt{K_{pp}(t, t)}$ $(p = 1, \ldots, n)$.

Взаимной корреляционной функцией n-мерной векторной случайной функции $X(t)$ *и m-мерной векторной случайной функции* $Y(t)$ называется матрица, элементами которой служат взаимные корреляционные функции всех их компонент:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} R_{11}^{xy}(t_1, t_2) & \ldots & R_{1m}^{xy}(t_1, t_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ R_{n1}^{xy}(t_1, t_2) & \ldots & R_{nm}^{xy}(t_1, t_2) \end{bmatrix},$$

где $R_{pq}^{xy}(t_1, t_2)$ — взаимная корреляционная функция случайных функций $X_p(t)$ и $Y_q(t)$ $(p = 1, \ldots, n;\ q = 1, \ldots, m)$.

Взаимная корреляционная функция случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ выражается через их ковариационные и взаимную ковариационную функции формулой

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \sigma_x(t_1)^{-1} K_{xy}(t_1, t_2) \sigma_y(t_2)^{-1},$$

где $\sigma_x(t)$ и $\sigma_y(t)$ — диагональные матрицы, элементами которых служат средние квадратические отклонения $\sigma_p^x(t)$ и $\sigma_q^y(t)$ компонент случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ соответственно, $\sigma_p^x(t) = \sqrt{D_p^x(t)} = \sqrt{K_{pp}^x(t, t)}$, $\sigma_q^y(t) = \sqrt{D_q^y(t)} = \sqrt{K_{qq}^y(t, t)}$ $(p = 1, \ldots, n;\ q = 1, \ldots, m)$ *).

2.2.8. Нормально распределенные случайные функции. Как уже было сказано в п. 2.1.4, конечномерные распределения случайной функции однозначно определяют распределение случайной функции в соответствующем пространстве функций (функциональном пространстве). Естественно считать это распределение нормальным, если все порождающие его конечномерные распределения нормальны. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Случайная функция называется *нормально распределенной*, если все ее конечномерные распределения нормальны.

В общем случае нормальное распределение удобно определять характеристической функцией. Вспомнив формулу для характеристической функции нормального распределения (*ТВ*, п. 4.5.1), получим для конечномерных распределений нормально распределенной случайной функции $X(t)$ формулу

$$g_{t_1, \ldots, t_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \exp\left\{i\lambda^{\mathrm{T}} m_n - \frac{1}{2}\lambda^{\mathrm{T}} K_n \lambda\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{20}$$

где

$$\lambda = [\lambda_1^{\mathrm{T}} \lambda_2^{\mathrm{T}} \ldots \lambda_n^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \quad m_n = [m_x(t_1)^{\mathrm{T}}\, m_x(t_2)^{\mathrm{T}} \ldots m_x(t_n)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

$$K_n = \begin{bmatrix} K_x(t_1, t_1) & K_x(t_1, t_2) & \ldots & K_x(t_1, t_n) \\ K_x(t_2, t_1) & K_x(t_2, t_2) & \ldots & K_x(t_2, t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_x(t_n, t_1) & K_x(t_n, t_2) & \ldots & K_x(t_n, t_n) \end{bmatrix}.$$

Формула (20) верна как для скалярной, так и для векторной случайной функции $X(t)$. В последнем случае матрицы-столбцы λ и m_n и матрицу K_n следует понимать как блочные матрицы.

Если все матрицы K_n — невырожденные, то можно также определить нормальное распределение случайной функции с помощью конечномерных плотностей (*ТВ*, п. 4.4.3)

$$f_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = \\ = [(2\pi)^n |K_n|]^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(u_n^{\mathrm{T}} - m_n^{\mathrm{T}}) K_n^{-1} (u_n - m_n)\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{21}$$

где в дополнение к предыдущим обозначениям $u_n = [x_1^{\mathrm{T}} x_2^{\mathrm{T}} \ldots x_n^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$.

---

*) В случае когда функции $K_x(t_1, t_2)$ и $K_{xy}(t_1, t_2)$ называются корреляционными, функции $R_x(t_1, t_2)$ и $R_{xy}(t_1, t_2)$ называются нормированной корреляционной функцией случайной функции $X(t)$ и нормированной взаимной корреляционной функцией случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$.

Пример 11. Рассмотрим предельный случай задачи примера 2, когда существуют все моменты импульсов $\alpha_r = MA_k^r$ $(r=1, 2, \ldots)$, плотность импульсов $\mu(t)$ неограниченно возрастает, а интенсивность каждого отдельного импульса стремится к нулю, но так, что при этом произведение $\alpha_2\mu(t)$ остается неизменным. При этом будем считать, что математическое ожидание величины каждого импульса A_k равно нулю, $\alpha_1=0$, а распределение величины каждого импульса остается неизменным. На основании центральной предельной теоремы распределение случайной функции $X(t)$ будет при этом стремиться к нормальному. Этот же результат следует из формулы (7). Чтобы доказать это, предположим, что распределение импульсов характеризуется плотностью

$$f(a) = h\psi(ha), \qquad \alpha_2\mu(t) = \nu(t).$$

Тогда получим

$$\alpha_r = \int_{-\infty}^{\infty} a^r f(a)\,da = h\int_{-\infty}^{\infty} a^r\psi(ha)\,da = \frac{1}{h^r}\int_{-\infty}^{\infty} \xi^r\psi(\xi)\,d\xi = \frac{\gamma_r}{h^r}$$

и

$$\alpha_r\mu(t) = \frac{\gamma_r}{h^{r-2}\gamma_2}\nu(t) \qquad (r=3, 4, \ldots).$$

При $h\to\infty$ все моменты случайной величины импульсов будут стремиться к нулю, а их средняя плотность $\mu(t)$ будет возрастать пропорционально h^2. При этом распределение величины импульсов (т. е. форма кривой распределения) будет оставаться неизменным.

Разложив в формуле (7) характеристическую функцию величины импульса $g_a(\lambda)$ в ряд Маклорена с учетом того, что $-i^r g_a^{(r)}(0) = \alpha_r$, получим

$$\ln g_{t_1, \ldots, t_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{i^r\alpha_r}{r!} \int_{t_0}^{\max(t_1, \ldots, t_n)} \left[\sum_{p=1}^{n} \lambda_p w(t_p, \tau)\right]^r \mu(\tau)\,d\tau.$$

Подставив сюда полученное выражение величины $\alpha_r\mu(\tau)$ и учитывая, что $\alpha_2\mu(\tau) = \nu(\tau)$, $\alpha_r\mu(\tau)\to 0$ при $h\to\infty$, получим в пределе

$$\ln g_{t_1, \ldots, t_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = -\frac{1}{2}\sum_{p, q=1}^{n} \lambda_p\lambda_q \int_{t_0}^{\min(t_p, t_q)} \nu(\tau) w(t_p, \tau) w(t_q, \tau)\,d\tau.$$

Сравнив эту формулу с (20), видим, что случайная функция $X(t)$ в рассматриваемом предельном случае распределена нормально.

Рассмотренная задача дает пример теоретического определения распределения случайной функции на основании анализа соответствующего физического явления.

2.2.9. Начальные моменты второго порядка.

Ковариационная функция представляет собой *центральный момент второго порядка* случайной функции.

Начальным моментом второго порядка $\Gamma_x(t_1, t_2)$ случайной функции $X(t)$ называется взаимный начальный момент второго порядка ее значений X_{t_1}, X_{t_2} при произвольных t_1, t_2, рассматриваемый как функция $t_1, t_2 \in T$:

$$\Gamma_x(t_1, t_2) = MX(t_1)\,X(t_2)^*. \tag{22}$$

Подставив в (22) выражение $X(t_1)=m_x(t_1)+X^0(t_1)$ и имея в виду, что

$$MX^0(t_1)X(t_2)^* = MX^0(t_1)[m_x(t_2)^*+X^0(t_2)^*] = \\ = MX^0(t_1)X^0(t_2)^* = K_x(t_1,\ t_2),$$

получим

$$\Gamma_x(t_1,\ t_2)=K_x(t_1,\ t_2)+m_x(t_1)\,m_x(t_2)^*. \tag{23}$$

Аналогично определяется взаимный момент второго порядка двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$:

$$\Gamma_{xy}(t_1,\ t_2)=MX(t_1)\,Y(t_2)^* \tag{24}$$

и выводится формула

$$\Gamma_{xy}(t_1,\ t_2)=K_{xy}(t_1,\ t_2)+m_x(t_1)\,m_y(t_2)^*. \tag{25}$$

2.2.10. Операторы моментов второго порядка. *Оператором момента второго порядка* случайной функции $X(t)$ называется интегральный оператор, ядром которого служит ее момент второго порядка:

$$\Gamma_x\varphi=\int_T \Gamma_x(s,\ t)\,\overline{\varphi(t)}\,dt,$$

где T — область определения случайной функции $X(t)$.

Ковариационным оператором случайной функции $X(t)$ называется оператор момента второго порядка соответствующей центрированной случайной функции $X^0(t)=X(t)-m_x(t)$. Иными словами, ковариационным оператором случайной функции $X(t)$ называется интегральный оператор, ядром которого служит ее ковариационная функция:

$$K_x\varphi=\int_T K_x(s,\ t)\,\overline{\varphi(t)}\,dt.$$

Оператор момента второго порядка и, в частности, ковариационный оператор r-мерной векторной случайной функции $X(t)$ ставят в соответствие любой r-мерной векторной функции $\varphi(t)$ с той же областью определения T r-мерную векторную функцию $\psi(s)=\Gamma_x\varphi$ $(\psi(s)=K_x\varphi)$, $s\in T$.

Совершенно так же определяются *взаимный оператор момента второго порядка* и *взаимный ковариационный оператор* двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$.

2.2.11. Свойства моментов второго порядка. Из определения момента второго порядка (22) следует, что при перестановке аргументов t_1, t_2 момент второго порядка переходит в транспонированную матрицу с сопряженными комплексными элементами (в эрмитовски сопряженную матрицу):

$$\Gamma_x(t_2,\ t_1)=\Gamma_x(t_1,\ t_2)^*. \tag{26}$$

Действительно,

$$\Gamma_x(t_2, t_1) = MX(t_2)\overline{X(t_1)}^{\mathrm{T}} = [M\overline{X(t_1)}\,X(t_2)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} =$$
$$= [\overline{MX(t_1)\overline{X(t_2)}^{\mathrm{T}}}]^{\mathrm{T}} = \overline{\Gamma_x(t_1, t_2)}^{\mathrm{T}} = \Gamma_x(t_1, t_2)^*.$$

В частности, для действительной случайной функции $X(t)$ при перестановке аргументов t_1, t_2 момент второго порядка переходит в транспонированную матрицу

$$\Gamma_x(t_2, t_1) = \Gamma_x(t_1, t_2)^{\mathrm{T}}. \tag{27}$$

В частном случае скалярной случайной функции момент второго порядка при перестановке аргументов переходит в комплексную сопряженную величину, $\Gamma_x(t_2, t_1) = \overline{\Gamma_x(t_1, t_2)}$. Для скалярной действительной случайной функции момент второго порядка не изменяется при перестановке аргументов, т. е. представляет собой симметричную функцию двух переменных, $\Gamma_x(t_2, t_1) = \Gamma_x(t_1, t_2)$.

Второе характерное свойство момента второго порядка случайной функции состоит в том, что для любого конечного набора значений аргумента $t_1, \ldots, t_N \in T$ и комплексных векторов $u_1, \ldots, u_N$ той же размерности, что и случайная функция $X(t)$,

$$\sum_{p,\,q=1}^{N} u_p^{\mathrm{T}}\Gamma_x(t_p, t_q)\,\overline{u}_q \geqslant 0. \tag{28}$$

Действительно,

$$\sum_{p,\,q=1}^{N} u_p^{\mathrm{T}}\Gamma_x(t_p, t_q)\,\overline{u}_q = M\sum_{p,\,q=1}^{N} u_p^{\mathrm{T}}X(t_p)\overline{X(t_q)}^{\mathrm{T}}\,\overline{u}_q =$$
$$= M\sum_{p=1}^{N} u_p^{\mathrm{T}}X(t_p)\cdot\sum_{q=1}^{N}\overline{u_q^{\mathrm{T}}X(t_q)} = M\left|\sum_{p=1}^{N} u_p^{\mathrm{T}}X(t_p)\right|^2 \geqslant 0 \text{ *)}.$$

Функции двух переменных, обладающие свойством (28), называются *неотрицательно определенными*. Таким образом, момент второго порядка случайной функции является неотрицательно определенной функцией.

Ковариационная функция как момент второго порядка центрированной случайной функции обладает всеми свойствами моментов второго порядка. Таким образом, ковариационная функция случайной функции представляет собой неотрицательно определенную функцию двух переменных, которая переходит при перестановке аргументов в эрмитовски сопряженную матричную функцию (т. е. транспонируется с заменой всех комплексных элементов сопряженными).

Можно доказать, что всякая функция двух переменных, обладающая этими двумя свойствами, может быть ковариационной

*) Для любых матриц-столбцов a, b в одной и той же размерности n $a^{\mathrm{T}}b = b^{\mathrm{T}}a = \sum a_k b_k$.

функцией, а следовательно, и моментом второго порядка некоторой случайной функции.

Взаимный момент второго порядка случайных функций при перестановке аргументов с одновременным изменением порядка этих случайных функций переходит в эрмитовски сопряженную матричную функцию:

$$\Gamma_{yx}(t_2,\ t_1) = \Gamma_{xy}(t_1,\ t_2)^*. \tag{29}$$

2.2.12. Моменты высших порядков. Комплексные случайные величины и функции удобны, только когда рассматриваются их моменты первого и второго порядков. Во всех остальных задачах целесообразно изучать только действительные случайные величины и функции. В соответствии с этим моменты выше второго порядка обычно определяются только для действительных случайных величин и функций.

Момент порядка n скалярной случайной функции $X(t)$ определяется формулой

$$\alpha_n(t_1,\ \ldots,\ t_n) = MX(t_1)\ \ldots\ X(t_n). \tag{30}$$

Центральный момент порядка n случайной функции $X(t)$ определяется формулой

$$\mu_n(t_1,\ \ldots,\ t_n) = MX^0(t_1)\ \ldots\ X^0(t_n). \tag{31}$$

Момент n-го порядка случайной функции $X(t)$ выражается через ее n-мерную плотность формулой

$$\alpha_n(t_1, \ldots, t_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \ldots x_n \times \\ \times f_n(x_1,\ \ldots,\ x_n;\ t_1,\ \ldots,\ t_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \tag{32}$$

Аналогичной формулой определяется центральный момент порядка n случайной функции $X(t)$:

$$\mu_n(t_1,\ \ldots,\ t_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_x(t_1)] \ldots [x_n - m_x(t_n)] \times \\ \times f_n(x_1,\ \ldots,\ x_n;\ t_1,\ \ldots,\ t_n)\, dx_1\ \ldots\ dx_n. \tag{33}$$

Если задано n-мерное распределение случайной функции $X(t)$, то, как мы видели в п. 2.1.2, тем самым определены все ее распределения меньших размерностей, а следовательно, определены и все моменты случайной функции до n-го порядка включительно. Таким образом, задание n-мерного распределения случайной функции достаточно для определения всех ее моментов до порядка n включительно.

Совершенно так же определяются смешанные моменты нескольких случайных функций. *Смешанный момент порядка*

$r_1 + \ldots + r_n$ случайных функций $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ определяется формулой

$$\alpha_{r_1, \ldots, r_n}(t_1^{(1)}, \ldots, t_{r_1}^{(1)}, \ldots, t_1^{(n)}, \ldots, t_{r_n}^{(n)}) = \\ = M\left[X_1(t_1^{(1)}) \ldots X_1(t_{r_1}^{(1)}) \ldots X_n(t_1^{(n)}) \ldots X(t_{r_n}^{(n)})\right]. \quad (34)$$

Аналогичной формулой определяются *смешанные центральные моменты* нескольких случайных функций.

Из формул (30), (31) и (34) легко выводятся соотношения между начальными и центральными моментами случайных функций.

Аналогично определяются *семиинварианты* случайной функции как семиинварианты ее конечномерных распределений (TB, п. 4.5.4).

§ 2.3. Ортогональные разложения конечномерных плотностей случайной функции

2.3.1. Ортогональное разложение плотности. Пусть $w(x)$ — некоторая плотность в r-мерном пространстве R^r, для которой существуют все моменты. Система пар полиномов $p_\nu(x)$, $q_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ называется *биортонормальной с весом* $w(x)$, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\, p_\nu(x)\, q_\mu(x)\, dx = \delta_{\nu\mu} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \mu \neq \nu, \\ 1 & \text{при} \quad \mu = \nu. \end{cases} \quad (35)$$

Система пар полиномов $p_\nu(x)$, $q_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ называется *биортогональной*, если условие (35) выполнено только при $\mu \neq \nu$. Всякая биортогональная система пар полиномов $\{p_\nu(x), q_\nu(x)\}$ может быть сделана биортонормальной путем деления полиномов $p_\nu(x)$, $q_\nu(x)$ соответственно на множители α_ν, β_ν, произведение которых равно интегралу (35) при соответствующем ν и $\mu = \nu$. Очевидно, что при каждом ν один из множителей α_ν, β_ν может быть выбран произвольно.

В частном случае, когда $q_\nu(x) \equiv p_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, условие (35) принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\, p_\nu(x)\, p_\mu'(x)\, dx = \delta_{\nu\mu}. \quad (36)$$

В этом случае система полиномов $\{p_\nu(x)\}$ *ортонормальна*, если она удовлетворяет условию (36) при всех ν, μ, и *ортогональна*, если она удовлетворяет условию (36) только при $\mu \neq \nu$. Всякая ортогональная система полиномов $\{p_\nu(x)\}$ может быть нормирована путем деления $p_\nu(x)$ на корень квадратный из интеграла (36) при соответствующем ν и $\mu = \nu$.

Очевидно, что существование всех моментов для плотности $w(x)$ необходимо и достаточно для существования всех интегралов (35) и (36).

Для удобства целесообразно пользоваться векторной нумерацией полиномов $p_\nu(x)$, $q_\nu(x)$ так, чтобы сумма координат $|\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_r$ векторного индекса $\nu = [\nu_1 \ \ldots \ \nu_r]^T$ была равна степени полиномов $p_\nu(x)$ и $q_\nu(x)$. Тогда число линейно независимых полиномов данной степени $m = |\nu|$ будет равно числу независимых одночленов степени m, т. е. $C^m_{r+m-1} = (r+m-1)!/[m!(r-1)!]$. Очевидно, что векторная нумерация всегда может быть заменена обычной *).

▶ Пусть $f(x)$ — плотность некоторого r-мерного случайного вектора X, для которого существуют моменты всех порядков. Попытаемся представить плотность $f(x)$ разложением

$$f(x) = w(x) \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_r = 0}^{\infty} c_\nu p_\nu(x). \tag{37}$$

Для определения коэффициентов c_ν разложения (37) умножим (37) почленно на $q_\mu(x)$ и проинтегрируем по всему r-мерному пространству R^r. В результате, учитывая (35), будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, q_\mu(x)\, dx = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_r = 0}^{\infty} c_\nu \int_{-\infty}^{\infty} w(x)\, p_\nu(x)\, q_\mu(x)\, dx = c_\mu.$$

Следовательно,

$$c_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, q_\nu(x)\, dx = Mq_\nu(X) = q_\nu(\alpha), \tag{38}$$

где $q_\nu(\alpha)$ представляет собой линейную комбинацию моментов случайной величины X, полученную из $q_\nu(x)$ заменой всех одночленов $x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r}$ соответствующими моментами $\alpha_{k_1, \ldots, k_r}$. Таким образом, все коэффициенты c_ν разложения (37) выражаются через моменты случайного вектора X. При этом в силу того, что вследствие (35) $p_0(x)$ и $q_0(x)$ — взаимно обратные постоянные (полиномы нулевой степени), всегда $c_0 p_0(x) = 1$.

Плотность $w(x)$ для построения разложения (37) удобно выбирать так, чтобы ее моменты первого и второго порядков совпадали с соответствующими моментами плотности $f(x)$ (случайного вектора X). Тогда для всех полиномов $q_\nu(x)$ первой и

*) В случае векторных индексов ν и μ величина $\delta_{\nu\mu}$ в (35) представляет собой единицу при $\mu = \nu$ и нуль, если хотя бы одна из координат векторного индекса μ не совпадает с соответствующей координатой векторного индекса ν.

второй степеней ($|\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_r = 1,\ 2$) будем иметь в силу (35)

$$c_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, q_\nu(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} w(x)\, q_\nu(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{p_0(x)} \int_{-\infty}^{\infty} w(x)\, p_0(x)\, q_\nu(x)\, dx = 0.$$

Вследствие этого разложение (37) примет вид

$$f(x) = w(x) \left[1 + \sum_{k=3}^{\infty} \sum_{|\nu|=k} c_\nu p_\nu(x) \right]. \tag{39}$$

В некоторых случаях удобно выразить коэффициенты c_ν в (39) не через моменты случайного вектора X, как в (38), а через его характеристическую функцию. Имея в виду, что любой момент вектора X получается дифференцированием его характеристической функции $g(\lambda)$ по соответствующим координатам вектора $i\lambda$ и последующим приравниванием λ нулю (*ТВ*, п. 4.5.3), можем представить формулу (38) в виде

$$c_\nu = [q_\nu(\partial / i\, \partial\lambda)\, g(\lambda)]_{\lambda=0}. \blacktriangleleft \tag{40}$$

Формула (39), как и (37), дает разложение функции $f(x)/\sqrt{w(x)}$ по единичным векторам $\{\sqrt{w(x)}\, p_\nu(x)\}$ функционального пространства $L_2(R^r)$, образующим вместе с векторами $\{\sqrt{w(x)}\, q_\nu(x)\}$ биортонормальную систему векторов. На основании общих теорем функционального анализа разложение (37) функции $f(x)/\sqrt{w(x)}$ сходится в среднем квадратическом к $f(x)/\sqrt{w(x)}$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{f(x)}{\sqrt{w(x)}} - \sqrt{w(x)} \left[1 + \sum_{k=3}^{n} \sum_{|\nu|=k} c_\nu p_\nu(x) \right] \right\}^2 dx \longrightarrow 0$$

при $n \longrightarrow \infty$, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^2(x)}{w(x)}\, dx < \infty$$

и последовательность функций $\{\sqrt{w(x)}\, p_\nu(x)\}$ полна в $L_2(R^r)$ [3]. В этом случае

$$\int_A w(x) \left[1 + \sum_{k=3}^{n} \sum_{|\nu|=k} c_\nu p_\nu(x) \right] dx \longrightarrow \int_A f(x)\, dx$$

равномерно относительно A при $n \longrightarrow \infty$, поскольку в силу неравенства Коши — Буняковского

$$\left| \int_A \left\{ w(x) \left[1 + \sum_{k=3}^{n} \sum_{|\nu|=k} c_\nu p_\nu(x) \right] - f(x) \right\} dx \right|^2 =$$

$$= \left| \int_A \sqrt{w(x)} \left\{ \sqrt{w(x)} \left[1 + \sum_{k=3}^{n} \sum_{|\nu|=k} c_\nu p_\nu(x) \right] - \frac{f(x)}{\sqrt{w(x)}} \right\} dx \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_A w(x)\, dx \int_A \left\{ \sqrt{w(x)} \left[1 + \sum_{k=3}^{n} \sum_{|\nu|=k} c_\nu p_\nu(x) \right] - \frac{f(x)}{\sqrt{w(x)}} \right\}^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sqrt{w(x)} \left[1 + \sum_{k=3}^{n} \sum_{|\nu|=k} c_\nu p_\nu(x) \right] - \frac{f(x)}{\sqrt{w(x)}} \right\}^2 dx \longrightarrow 0.$$

Таким образом, частичные суммы ряда (39) дают аппроксимацию распределения, определяемого плотностью $f(x)$, с любой степенью точности.

Примерами полных последовательностей функций в соответствующих пространствах $L_2(R^r)$ могут служить последовательности функций Эрмита (приложение 1).

Формула (39) определяет ортогональное разложение плотности $f(x)$. Конечным отрезком этого разложения можно практически пользоваться для приближенного представления $f(x)$ даже в тех случаях, когда $f(x)$ не имеет моментов выше некоторого порядка. В этом случае достаточно заменить распределение $f(x)$ усеченным распределением

$$f_D(x) = f(x)\, 1_D(x) \Big/ \int_D f(x)\, dx,$$

аппроксимирующим $f(x)$ с достаточной точностью, и затем аппроксимировать $f_D(x)$ отрезком ряда (39). При этом конечный отрезок ряда (39) может быть функцией, принимающей малые отрицательные значения при некоторых x, и тем не менее дающей хорошее приближение к $f(x)$.

Ограничиваясь в (39) полиномами не выше N-й степени, получим приближенную формулу для плотности $f(x)$:

$$f(x) \approx f^*(x) = w(x) \left[1 + \sum_{k=3}^{N} \sum_{|\nu|=k} c_\nu p_\nu(x) \right]. \tag{41}$$

Функция $f^*(x)$, аппроксимирующая плотность $f(x)$, в силу (38) полностью определяется моментами случайной величины до N-го порядка включительно. При этом моменты функции $f^*(x)$ до N-го порядка включительно совпадают с соответствующими моментами величины X. Действительно, умножив последнее равенство (41) на $q_\mu(x)$ и принимая во внимание (35) и (38), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\, q_\mu(x)\, dx = c_\mu = q_\mu(\alpha)$$

при $|\mu| \leqslant N$. Таким образом, математические ожидания всех полиномов $q_\nu(X)$ не выше N-й степени, вычисленные с помощью аппроксимирующей функции $f^*(x)$, совпадают с математическими ожиданиями соответствующих полиномов $q_\nu(X)$, вычисленными с помощью истинной плотности $f(x)$. А так как полиномы $q_\nu(x)$ любой данной степени k линейно независимы и число их совпадает с числом моментов k-го порядка, то из совпадения математических ожиданий полиномов $q_\nu(X)$ следует и совпадение моментов функции $f^*(x)$ и плотности $f(x)$ до N-го порядка включительно. Обозначив моменты аппроксимирующей функции $f^*(x)$ через $\overset{*}{\alpha}_{k_1, \ldots, k_r}$ и $\overset{*}{\mu}_{k_1, \ldots, k_r}$, можем записать полученный результат в виде

$$\overset{*}{\alpha}_{k_1, \ldots, k_r} = \alpha_{k_1, \ldots, k_r}, \quad \overset{*}{\mu}_{k_1, \ldots, k_r} = \mu_{k_1, \ldots, k_r} \text{ при } k_1 + \ldots + k_r \leqslant N\ ^{*}).$$

Что касается моментов высших порядков аппроксимирующей функции $f^*(x)$, то они выражаются через моменты до N-го порядка включительно из уравнений

$$q_\mu(\alpha^*) = 0 \quad \text{при} \quad |\mu| > N.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что в силу (41), (38) и (35)

$$q_\mu(\alpha^*) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\, q_\mu(x)\, dx = 0, \qquad |\mu| > N.$$

Для дальнейшего нам понадобятся еще формулы, выражающие моменты случайной величины X до N-го порядка через коэффициенты приближенного выражения (41) ее плотности.

► Умножив (41) на $x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r}$, интегрируя по $x_1, \ldots, x_r$ и учитывая, что по доказанному моменты аппроксимирующей функции $f^*(x)$ до N-го порядка совпадают с соответствующими моментами величины X, получаем

$$\alpha_{k_1, \ldots, k_r} = \overset{w}{\alpha}_{k_1, \ldots, k_r} + \sum_{k=3}^{N} \sum_{|\nu| = k} c_\nu p_{\nu, k_1, \ldots, k_r}(\alpha^w)$$

$$(k_1, \ldots, k_r = 0, 1, \ldots, N;\ k_1 + \ldots + k_r = 3, \ldots, N), \tag{42}$$

где индексом w отмечены моменты плотности $w(x)$,

$$p_{\nu, k_1, \ldots, k_r}(x) = x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r} p_\nu(x),$$

а $p_{\nu, k_1, \ldots, k_r}(\alpha^w)$ получается из $p_{\nu, k_1, \ldots, k_r}(x)$, так же как $q_\nu(\alpha)$ из $q_\nu(x)$ в (38) (т. е. заменой всех одночленов $x_1^{h_1} \ldots x_r^{h_r}$ соответствующими моментами $\overset{w}{\alpha}_{h_1, \ldots, h_r}$ плотности $w(x)$). ◄

*) Из совпадения начальных моментов $f^*(x)$ и $f(x)$ до N-го порядка в силу известных соотношений между начальными и центральными моментами (TB, п.3.5.1) следует и совпадение центральных моментов до N-го порядка.

Формула (42) дает выражения моментов величины X до N-го порядка включительно через моменты плотности $w(x)$ и коэффициенты приближенного представления $f^*(x)$ плотности $f(x)$ величины X.

Заметим, что $p_\nu(x)$ и $q_\nu(x)$ не обязательно должны быть полиномами. Они могут быть любыми функциями, удовлетворяющими условию биортонормальности (35) и условию существования всех интегралов (38). Все сказанное о разложении (39) справедливо и в этом более общем случае. Однако если функции $q_\nu(x)$ не являются полиномами, то, несмотря на совпадение моментов первого и второго порядков распределений $w(x)$ и $f(x)$, коэффициенты c_ν не будут равны нулю при $|\nu|=1$ и 2, вследствие чего суммирование по k в (39) будет начинаться с $k=1$.

В приложениях иногда применяется разложение по производным некоторой плотности $w(x)$, имеющей производные и моменты всех порядков:

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu w^{(\nu)}(x).$$

Здесь в случае n-мерного векторного $x=[x_1\ldots x_n]^{\mathrm{T}}$ ν представляет собой вектор той же размерности $\nu=[\nu_1\ldots\nu_n]^{\mathrm{T}}$, производная $w^{(\nu)}(x)$ понимается как частная производная $\partial^{|\nu|}w(x)/\partial x_1^{\nu_1}\ldots\partial x_n^{\nu_n}$, а суммирование производится по всем координатам вектора ν от 0 до ∞. В этом случае

$$p_\nu(x)=w^{(\nu)}(x)/w(x),$$

а функции $q_\nu(x)$ представляют собой полиномы. Эти полиномы в случае скалярного x определяются рекуррентной формулой

$$q_\nu(x)=(-1)^\nu\frac{x^\nu}{\nu!}-\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(-1)^{\nu-\mu}\frac{\alpha_{\nu-\mu}^{w}q_\mu(x)}{(\nu-\mu)!},$$

где

$$\alpha_\lambda^{w}=\int_{-\infty}^{\infty}x^\lambda w(x)\,dx \qquad (\lambda=1,\ 2,\ \ldots)$$

— моменты плотности $w(x)$.

▶ Для доказательства заметим, что $p_0(x)=1$ и, следовательно, можно принять $q_0(x)=1$. Далее, интегрированием по частям доказываются формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^\lambda w^{(\nu)}(x)\,dx=0 \quad \text{при} \quad \lambda<\nu, \qquad \int_{-\infty}^{\infty}x^\nu w^{(\nu)}(x)\,dx=(-1)^\nu\,\nu!,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^\lambda w^{(\nu)}(x)\,dx=(-1)^\nu\frac{\lambda!}{(\nu-\lambda)}\alpha_{\lambda-\nu}^{w} \quad \text{при} \quad \lambda>\nu.$$

Эти формулы справедливы при условии, что все производные $w^{(\nu)}(x)$ убывают при $|x| \to \infty$ настолько быстро, что при любом $\lambda > 0$

$$\lim_{|x| \to \infty} x^{\lambda} w^{(\nu)}(x) = 0.$$

На основании первой из этих формул любой полином степени μ ортогонален (с весом $w(x)$) ко всем функциям $p_\nu(x)$ при $\nu > \mu$. Поэтому при любом ν достаточно построить полином $q_\nu(x)$, ортогональный к функциям $p_0(x) = 1$, $p_1(x)$, ..., $p_{\nu-1}(x)$. Положив $q_1(x) = c_1 x + b_{10}$, на основании приведенных формул и условия биортонормальности получаем из (35) при μ, $\nu = 0$, 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\, p_0(x)\, q_1(x)\, dx = c_1 \alpha_1^w + b_{10} = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\, p_1(x)\, q_1(x)\, dx = -c_1 = 1.$$

Отсюда находим $c_1 = -1$, $b_{10} = \alpha_1^w$. После этого положим

$$q_2(x) = c_2 x^2 + b_{20} + b_{21} q_1(x)$$

и найдем с помощью приведенных формул c_2, b_{20} и b_{21} из условий биортонормальности (35) при ν, $\mu = 0$, 1, 2: $c_2 = 1/2!$, $b_{20} = -\alpha_2^w/2!$, $b_{21} = \alpha_1^w$. Предположим, что, продолжая таким образом, мы нашли полиномы $q_1(x)$, ..., $q_{\nu-1}(x)$, удовлетворяющие вместе с функциями $p_\mu(x)$ условию биортонормальности (35). Положив

$$q_\nu(x) = c_\nu x^\nu + \sum_{\mu=0}^{\nu-1} b_{\nu\mu} q_\mu(x),$$

из условий ортогональности $q_\nu(x)$ к $p_0(x) = 1$, ..., $p_{\nu-1}(x)$ и из условия (35) при $\mu = \nu$ находим $c_\nu = (-1)^\nu/\nu!$, $b_{\nu\mu} = (-1)^{\nu-\mu-1} \times \alpha_{\nu-\mu}^w/(\nu-\mu)!$ $(\mu = 0, 1, \ldots, \nu-1)$. ◀

Совершенно так же из степенных одночленов $x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ $(k_1, \ldots, k_n = 0, 1, \ldots)$, можно получить полиномы $q_\nu(x)$, удовлетворяющие вместе с функциями $p_\nu(x) = w^{(\nu)}(x)/w(x)$ условию биортонормальности (35), в случае n-мерной векторной переменной x.

2.3.2. Разложение плотности по полиномам Эрмита. Биортогональной системой полиномов, построенной с помощью нормального распределения с нулевым математическим ожиданием, является система полиномов Эрмита $\{H_\nu(x), G_\nu(x)\}$ (см. приложение 1). Чтобы получить биортонормальную систему полиномов, соответствующую нормальной плотности с математическим ожиданием m и ковариационной матрицей K, можно на основании формулы (6) приложения 1 принять

$$p_\nu(x) = \frac{1}{\nu_1! \ldots \nu_r!} H_\nu(x-m), \qquad q_\nu(x) = G_\nu(x-m).$$

Тогда формула (41), приближенно выражающая плотность случайной величины X с теми же математическим ожиданием m и ковариационной матрицей K, примет вид

$$f(x) \approx f^*(x) = w_N(x)\left[1 + \sum_{k=3}^{N} \sum_{|\nu|=k} \frac{c_\nu H_\nu(x-m)}{\nu_1! \ldots \nu_r!}\right].$$

Формула (38), определяющая коэффициенты этого разложения, принимает вид

$$c_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) G_\nu(x-m)\, dx = MG_\nu(X-m) = G_\nu(\mu), \tag{43}$$

где $G_\nu(\mu)$ — линейная комбинация центральных моментов X, полученная в результате замены каждого одночлена вида $(X_1-m_1)^{h_1} \ldots \ldots (X_r-m_r)^{h_r}$ соответствующим моментом $\mu_{h_1, \ldots, h_r}$.

По доказанному в п. 2.3.1 все моменты (как начальные, так и центральные) функции $f^*(x)$, аппроксимирующей плотность $f(x)$, до порядка N включительно совпадают с соответствующими моментами плотности $f(x)$, а моменты высших порядков функции $f^*(x)$ выражаются через моменты до порядка N из соотношений

$$G_\nu(\mu^*) = 0 \quad \text{при} \quad |\nu| > N,$$

где звездочкой отмечены моменты функции $f^*(x)$.

Коэффициенты c_ν при $H_\nu(x-m)/(\nu_1! \ldots \nu_r!)$ в разложении плотности $f(x)$ по полиномам Эрмита называются *квазимоментами* случайной величины X. Число $|\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_r$ называется *порядком* квазимомента c_ν. Согласно (43) квазимомент порядка k представляет собой линейную комбинацию центральных моментов до порядка k включительно.

2.3.3. Связь между квазимоментами и семиинвариантами. Чтобы выразить квазимоменты случайной величины через ее семиинварианты, можно, конечно, подставить в формулу (43) выражения центральных моментов через семиинварианты (*ТВ*, п. 4.5.4). Однако это ведет к цели по пути очень сложных и громоздких выкладок. Поэтому мы попытаемся непосредственно выразить квазимоменты c_ν через семиинварианты.

► Пусть X — r-мерный случайный вектор с математическим ожиданием m, ковариационной матрицей K и плотностью $f(x)$. Положим в формуле (2) приложения 1 для производящей функции полиномов Эрмита $G_\nu(x)$, соответствующих этому случайному вектору, $u=i\lambda$ и заменим x величиной $x-m$. Тогда, учитывая, что $(u^{\mathrm{T}}-m^{\mathrm{T}})\lambda=\lambda^{\mathrm{T}}(x-m)$, будем иметь

$$\exp\left\{i\lambda^{\mathrm{T}}(x-m)+\frac{1}{2}\lambda^{\mathrm{T}}K\lambda\right\}=\sum\frac{(i\lambda_1)^{\nu_1}\ldots(i\lambda_r)^{\nu_r}}{\nu_1!\ldots\nu_r!}G_\nu(x-m),$$

где суммирование производится по всем неотрицательным значениям $\nu_1, \ldots, \nu_r$, а $\nu=[\nu_1\ldots\nu_r]^{\mathrm{T}}$. Умножив это равенство на плотность $f(x)$ случайного вектора X и проинтегрировав по x, на основании (43) получим

$$e^{-i\lambda^{\mathrm{T}}m+\lambda^{\mathrm{T}}K\lambda/2}g(\lambda)=1+\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{|\nu|=k}\frac{(i\lambda_1)^{\nu_1}\ldots(i\lambda_r)^{\nu_r}}{\nu_1!\ldots\nu_r!}c_\nu, \tag{44}$$

где $g(\lambda)$ — характеристическая функция величины X. Таким образом, $e^{-i\lambda^{\mathrm{T}}m+\lambda^{\mathrm{T}}K\lambda/2}g(\lambda)$ как функция $i\lambda$ служит производящей функцией для квазимоментов, совершенно так же как $g(\lambda)$ служит производящей функцией для начальных моментов, $e^{-i\lambda^{\mathrm{T}}m}g(\lambda)$ — производящей функцией для центральных моментов, а $\ln g(\lambda)$ — производящей функцией для семиинвариантов (*ТВ*, пп. 4.5.3, 4.5.4). Подставив в (44) выражение $g(\lambda)$ через семиинварианты,

$$g(\lambda)=e^{\ln g(\lambda)}=\exp\left\{\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{|s|=h}\frac{(i\lambda_1)^{s_1}\ldots(i\lambda_r)^{s_r}}{s_1!\ldots s_r!}\varkappa_s\right\},$$

и учитывая, что семиинварианты первого и второго порядков совпадают соответственно с математическими ожиданиями и элементами ковариационной матрицы величины X, можем написать

$$\exp\left\{\sum_{h=3}^{\infty}\sum_{|s|=h}\frac{(i\lambda_1)^{s_1}\ldots(i\lambda_r)^{s_r}}{s_1!\ldots s_r!}\varkappa_s\right\}=1+\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{|\nu|=k}\frac{(i\lambda_1)^{\nu_1}\ldots(i\lambda_r)^{\nu_r}}{\nu_1!\ldots\nu_r!}c_\nu$$

или

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}\left[\sum_{h=3}^{\infty}\sum_{|s|=h}\frac{(i\lambda_1)^{s_1}\ldots(i\lambda_r)^{s_r}}{s_1!\ldots s_r!}\varkappa_s\right]^p=\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{|\nu|=k}\frac{(i\lambda_1)^{\nu_1}\ldots(i\lambda_r)^{\nu_r}}{\nu_1!\ldots\nu_r!}c_\nu.$$

Отсюда непосредственно видно, что квазимоменты c_ν третьего, четвертого и пятого порядков совпадают с соответствующими семиинвариантами,

$$c_\nu=\varkappa_\nu \qquad (|\nu|=3,\ 4,\ 5).$$

Это следует из того, что разложение в квадратных скобках в левой части начинается с членов третьей степени, вследствие чего только слагаемое первой степени $p=1$ в левой части может дать члены третьей, четвертой и пятой степеней. Что же касается членов шестой и более высоких степеней в левой части, для которых $|\nu|\geqslant 6$, то они присутствуют в слагаемых, соответствующих $p \leqslant [|\nu|/3]$. Поэтому, выполнив возведение выражения в квадратных скобках в соответствующие степени и собрав члены одинаковых степеней, получим

$$\frac{c_\nu}{\nu_1! \ldots \nu_r!} = \sum_{p=1}^{[|\nu|/3]} \frac{1}{p!} \sum_{q_1+\ldots+q_p=\nu} \frac{\varkappa_{q_1} \ldots \varkappa_{q_p}}{q_{11}! \ldots q_{pr}!} \quad (|\nu| = 6,\ 7,\ \ldots), \quad (45)$$

где $q_1 = [q_{11} \ldots q_{1r}]^T$, ..., $q_p = [q_{p1} \ldots q_{pr}]^T$, так же как и $\nu = [\nu_1 \ldots \nu_r]^T$ — r-мерные векторные индексы и внутренняя сумма, распространяется на все значения $q_1, \ldots, q_p$, $|q_1|, \ldots, |q_p| \geqslant 3$, дающие в сумме вектор $\nu = [\nu_1 \ldots \nu_r]^T$. Первый член в правой части формулы (45), соответствующий $p = 1$, равен $\varkappa_\nu$. ◀

Совершенно так же, прологарифмировав равенство (44) и разложив логарифм в правой части в ряд Маклорена, получим выражение семиинвариантов через квазимоменты.

2.3.4. Ряд Эджуорта. Слагаемые в формуле (45), соответствующие различным p, часто оказываются различными по величине, причем наибольшее значение имеют слагаемые, содержащие наибольшее число множителей, т. е. соответствующие $p = [|\nu|/3]$, а наименьшее значение имеет первое слагаемое $\varkappa_\nu$. Чтобы понять это, рассмотрим случай, когда величина X представляет собой сумму большого числа n независимых случайных величин. В этом случае все семиинварианты имеют порядок n (семиинварианты суммы независимых величин равны суммам соответствующих семиинвариантов слагаемых — *ТВ*, п. 4.5.4). Поэтому первое слагаемое $\varkappa_\nu$ в выражении (45) квазимомента c_ν имеет порядок n, в то время как p-е слагаемое имеет порядок n^p. Это дает возможность приближенно вычислять квазимоменты c_ν, пренебрегая семиинвариантами высших порядков, в отличие от формулы (43), которая требует знания момента μ_ν (а следовательно, и семиинварианта $\varkappa_\nu$) для вычисления c_ν. В связи с этим возникает мысль перегруппировать слагаемые в разложении $f(x)$ по полиномам Эрмита так, чтобы собрать вместе члены одного порядка относительно n.

▶ Подставив выражение (45) квазимоментов c_ν в разложение $f(x)$ по полиномам Эрмита, получим

$$f(x) = w_N(x) \left[1 + \sum_{k=3}^{\infty} \sum_{|\nu|=k} \sum_{p=1}^{[k/3]} \frac{1}{p!} \sum_{q_1+\ldots+q_p=\nu} \frac{\varkappa_{q_1} \ldots \varkappa_{q_p}}{q_{11}! \ldots q_{pr}!} H_\nu(x-m) \right].$$

Оценим порядок полинома $H_\nu(x-m)$. Для этого заметим, что каждое дифференцирование в формуле (4) приложения 1 вызывает появление соответствующей компоненты вектора $K^{-1}x$ в качестве множителя. Но все элементы матрицы K имеют порядок n, а средние квадратические отклонения компонент случайного вектора X имеют порядок $n^{1/2}$. Поэтому $K^{-1}(x-m)$ имеет порядок $n^{-1/2}$, вследствие чего $H_\nu(x-m)$ имеет порядок $n^{-(\nu_1+\ldots+\nu_r)/2} =$

$=n^{-|\nu|/2}$. Таким образом, величина $\varkappa_{q_1}\ldots\varkappa_{q_p}H_\nu(x-m)$ имеет порядок $n^{p-k/2}$. Вследствие этого все слагаемые с одним и тем же значением $p-k/2$ имеют один и тот же порядок. Чтобы собрать вместе все члены одного порядка, рассмотрим отдельно четные и нечетные значения k и обозначим через S_1 сумму всех слагаемых с нечетными k, а через S_2 — сумму всех слагаемых с четными k. Тогда будем иметь

$$S_1=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{[(2l+1)/3]}\frac{1}{p!}L_{2l+1,\,p},\qquad S_2=\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{p=1}^{[2l/3]}\frac{1}{p!}L_{2l,\,p},$$

где для краткости положено

$$L_{k,\,p}=\sum_{|\nu|=k}\ \sum_{q_1+\ldots+q_p=\nu}\frac{\varkappa_{q_1}\ldots\varkappa_{q_p}}{q_{11}!\ldots q_{pr}!}H_\nu(x-m).$$

Величина $L_{2l+1,\,p}$ имеет порядок $n^{-l-1/2+p}$, а величина $L_{2l,\,p}$ имеет порядок n^{-l+p}. Поэтому все слагаемые с одним и тем же значением $s=l-p$ имеют один и тот же порядок. Чтобы собрать вместе все такие слагаемые, перейдем от индекса суммирования p к новому индексу $s=l-p$. В результате будем иметь

$$S_1=\sum_{l=1}^{\infty}\ \sum_{s=l-[(2l+1)/3]}^{l-1}\frac{1}{(l-s)!}L_{2l+1,\,l-s},$$
$$S_2=\sum_{l=2}^{\infty}\ \sum_{s=l-[2l/3]}^{l-1}\frac{1}{(l-s)!}L_{2l,\,l-s}.$$

Изменим порядок суммирования в этих двойных суммах. Имея в виду, что в силу неравенств $l-[(2l+1)/3]\leqslant s\leqslant l-1$ (или $l-[2l/3]\leqslant s\leqslant l-1$) при фиксированном целом s для l справедливы неравенства $s+1\leqslant l\leqslant 3s+1$ (соответственно $s+1\leqslant\leqslant l\leqslant 3s$) и что наименьшее значение s в S_1 равно $1-[(2\cdot 1+1)/3]=0$, а в S_2 — $1-[2\cdot 1/3]=1$, получим

$$S_1=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{l=s+1}^{3s+1}\frac{1}{(l-s)!}L_{2l+1,\,l-s},\qquad S_2=\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{l=s+1}^{3s}\frac{1}{(l-s)!}L_{2l,\,l-s}.$$

Наконец, заменив индекс суммирования l индексом $p=l-s$, перепишем полученные равенства в виде

$$S_1=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{2s+1}\frac{1}{p!}L_{2s+2p+1,\,p},\qquad S_2=\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{2s}\frac{1}{p!}L_{2s+2p,\,p}.$$

Здесь все слагаемые внутренней суммы при данном s имеют один и тот же порядок $n^{-s-1/2}$ в S_1 и n^{-s} в S_2. Подставив полученные выражения в формулу для $f(x)$, получим

$$f(x)=$$
$$=w_N(x)\left[1+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{2s+1}\frac{1}{p!}\sum_{|\nu|=2s+2p+1}\ \sum_{q_1+\ldots+q_p=\nu}\frac{\varkappa_{q_1}\ldots\varkappa_{q_p}}{q_{11}!\ldots q_{pr}!}H_\nu(x-m)+\right.$$
$$\left.+\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{2s}\frac{1}{p!}\sum_{|\nu|=2s+2p}\ \sum_{q_1+\ldots+q_p=\nu}\frac{\varkappa_{q_1}\ldots\varkappa_{q_p}}{q_{11}!\ldots q_{pr}!}H_\nu(x-m)\right]. \qquad (46)$$

В этой формуле каждый член первой суммы по s представляет собой сумму всех слагаемых порядка $n^{-s-1/2}$, а каждый член второй суммы по s — сумму всех слагаемых порядка n^{-s}. ◀

Разложение (46) называется *рядом Эджуорта*, по имени ученого, впервые получившего это разложение для скалярной случайной величины [76].

Ряд Эджуорта (46) представляет собой асимптотическое разложение плотности $f(x)$ относительно n^{-1}. Крамер показал, что в случае скалярной величины X погрешность конечного отрезка ряда (46) имеет порядок первого отброшенного члена существующей суммы по s [43].

Применение ряда Эджуорта позволяет включить в отрезок разложения значительно больше полиномов Эрмита при учете моментов до данного порядка, чем обычное ортогональное разложение. А именно, учитывая моменты (или семиинварианты) до N-го порядка включительно, получим в отрезке ряда Эджуорта полиномы Эрмита до степени $3N-6$ включительно. В результате повышается точность приближения к истинному распределению. Поэтому рядом Эджуорта часто пользуются на практике. Это тем более обоснованно, что большая часть случайных величин, встречающихся в приложениях, относится к классу величин, которые можно считать суммами большого числа независимых слагаемых.

Так же, как в случае ортогонального разложения, при аппроксимации плотности $f(x)$ отрезком $f^*(x)$ ряда Эджуорта с учетом моментов до N-го порядка, моменты аппроксимирующей функции $f^*(x)$ до N-го порядка включительно совпадают с соответствующими моментами плотности $f(x)$, а моменты порядка выше $3N-6$ определяются из соотношений $G_\nu(\mu^*)=0$. Моменты же порядков от $N+1$ до $3N-6$ получаются из уравнений $G_\nu(\mu^*)=\gamma_\nu$, где γ_ν — сумма всех коэффициентов при $H_\nu(x-m)/(\nu_1!\ \ldots\ \nu_r!)$ в отрезке ряда Эджуорта (46). Чтобы убедиться в этом, достаточно умножить отрезок ряда (46) на $G_\tau(x-m)$ и проинтегрировать по x. Тогда слева получим $G_\tau(\mu^*)$, а справа в силу (35) получим γ_τ, причем $\gamma_\tau=c_\tau$ при $|\nu|\leqslant N$, $\gamma_\nu=0$ при $|\nu|>3N-6$, а при $N<|\nu|\leqslant 3N-6$ γ_ν содержит лишь часть слагаемых выражения (45) квазимомента c_ν.

2.3.5. Согласованные биортогональные системы полиномов. Для одновременного приближенного представления всех конечномерных распределений случайной функции целесообразно пользоваться в известном смысле согласованными биортогональными системами полиномов.

Пусть $\{w_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)\}$ — согласованная последовательность конечномерных плотностей (п. 2.1.2), где $x_1, \ldots, x_n$ — r-мерные векторные переменные. С каждой плотностью w_n свяжем биортонормальную систему полиномов (относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$)

$$\{p_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n), \quad q_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)\}\ ^{*)}.$$

Эти полиномы, естественно, будут зависеть от переменных $t_1, t_2, \ldots$ как от параметров, что и отражено в наших обозначениях.

Биортонормальные системы полиномов $\{p_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n), q_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ будем называть *согласованными*, если они удовлетворяют условиям:

$$1)\ \int_{-\infty}^{\infty} w_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)\, p_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)\, dx_n = w_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}; t_1, \ldots, t_{n-1}) \times \\ \times p_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-1}; t_1, \ldots, t_{n-1})\, \delta_{0, \nu_n},$$

где $\delta_{0,0} = 1$, $\delta_{0, \nu_n} = 0$ при $\nu_n \neq 0$;

$$2)\ q_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}, 0}(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = \\ = q_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-1}; t_1, \ldots, t_{n-1});$$

$$3)\ \sum_{k=0}^{\nu_{n-1}} p_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}-k, k}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n-1}; t_1, \ldots, t_{n-1}, t_{n-1}) = \\ = p_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-1}; t_1, \ldots, t_{n-1});$$

$$4)\ q_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}, \nu_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n-1}; t_1, \ldots, t_{n-1}, t_{n-1}) = \\ = q_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}+\nu_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}; t_1, \ldots, t_{n-1}).$$

Примечание. Так как полиномы p_ν и q_ν определены только с точностью до взаимно обратных постоянных множителей, то, умножив $p_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$ на произвольный множитель $\gamma_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$ и разделив $q_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$ на тот же множитель, можно заменить условия 3) и 4) условиями:

$$3')\ \sum_{k=0}^{\nu_{n-1}} p_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}-k, k}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n-1}; t_1, \ldots, t_{n-1}, t_{n-1}) \times \\ \times \gamma^{-1}_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}-k, k} = p_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-1}; t_1, \ldots, t_{n-1})\, \gamma^{-1}_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}};$$

$$4')\ \gamma_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}, \nu_n} q_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}, \nu_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n-1}; t_1, \ldots, t_{n-1}, t_{n-1}) = \\ = \gamma_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}+\nu_n} q_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}+\nu_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}; t_1, \ldots, t_{n-1}).$$

*) Конечно, предполагается, что для каждой плотности w_n существуют все моменты.

Согласованные в этом смысле биортонормальные системы полиномов существуют. Примером таких систем могут служить системы полиномов

$$p_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = \\ = H_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x_1 - m(t_1), \ldots, x_n - m(t_n))/(\nu_{11}! \ldots \nu_{nr}!),$$

$$q_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = \\ = G_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x_1 - m(t_1), \ldots, x_n - m(t_n)),$$

где $H_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x_1, \ldots, x_n)$, $G_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x_1, \ldots, x_n)$ — полиномы Эрмита ($n = 1, 2, \ldots$) (приложение 1). Согласованной последовательностью плотностей w_n в этом случае служит последовательность конечномерных нормальных плотностей

$$w_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = \\ = [(2\pi)^{rn} |K_n|]^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x^{(n)\,\mathrm{T}} - m_n^{\mathrm{T}}) K_n^{-1} (x^{(n)} - m_n)\right\},$$

$$x^{(n)} = [x_1^{\mathrm{T}} \ldots x_n^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \quad m_n = [m(t_1)^{\mathrm{T}} \ldots m(t_n)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

где

$$K_n = \begin{bmatrix} K(t_1, t_1) & K(t_1, t_2) & \ldots & K(t_1, t_n) \\ K(t_1, t_2)^{\mathrm{T}} & K(t_2, t_2) & \ldots & K(t_2, t_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ K(t_1, t_n)^{\mathrm{T}} & K(t_2, t_n)^{\mathrm{T}} & \ldots & K(t_n, t_n) \end{bmatrix},$$

а $m(t)$ и $K(t, t')$ — математическое ожидание и ковариационная функция некоторой случайной функции. Условия согласованности 1), 2) и 4) в данном случае удовлетворяются при $r = 1$ в силу теорем 1, 2 и 4 приложения 1. Чтобы убедиться в том, что условие 3) также удовлетворяется при $r = 1$, перепишем равенство (16) приложения 1 в виде

$$\sum_{k=0}^{\nu_{n-1}} \frac{1}{\nu_1! \ldots (\nu_{n-1} - k)!\, k!} H_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}-k,\, k}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n-1}) = \\ = \frac{1}{\nu_1! \ldots \nu_{n-1}!} H_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Но это и есть условие 3) при $r = 1$. Последовательно применяя соотношения условий 1) — 4) r раз, убеждаемся в том, что условия 1) — 4) удовлетворяются и в случае r-мерных векторных переменных $x_1, x_2, \ldots$ и индексов $\nu_1, \nu_2, \ldots$.

Полиномы $H_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x_1, \ldots, x_n)$, $G_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x_1, \ldots, x_n)$ в данном случае зависят от $t_1, \ldots, t_n$, поскольку порождающая их матрица K_n зависит от $t_1, \ldots, t_n$.

2.3.6. Согласованные ортогональные разложения конечномерных плотностей. Пусть $\{f_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)\}$ — согласованная последовательность конечномерных плотностей r-мерной векторной случайной функции $X(t)$, имеющей моменты всех порядков,

$\{p_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n), q_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ — согласованные биортонормальные системы полиномов, соответствующие согласованным конечномерным плотностям $w_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)$, имеющим те же моменты первого и второго порядков, что и случайная функция $X(t)$. Представив каждую конечномерную плотность $f_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)$ случайной функции $X(t)$ ортогональным разложением (39) по полиномам $p_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)$, получим *согласованные ортогональные разложения* всех ее конечномерных плотностей:

$$f_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = w_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) \times \\ \times \left[1 + \sum_{k=3}^{\infty} \sum_{|\nu_1| + \ldots + |\nu_n| = k} c_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(t_1, \ldots, t_n) \times \right. \\ \left. \times p_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)\right], \quad (47)$$

где коэффициенты $c_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(t_1, \ldots, t_n)$ определяются на основании (38) и (40) формулой

$$c_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(t_1, \ldots, t_n) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) \times \\ \times q_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \\ = [q_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(\partial/i\,\partial\lambda_1, \ldots, \partial/i\,\partial\lambda_n; t_1, \ldots, t_n) \times \\ \times g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n)]_{\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0}. \quad (48)$$

Здесь $g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n)$ — n-мерная характеристическая функция случайной функции $X(t)$.

Из условия 2) согласованности систем полиномов

$$\{p_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n), q_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)\} \\ (n = 1, 2, \ldots)$$

и из условия 1) согласованности плотностей f_n следует, что

$$c_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}, 0}(t_1, \ldots, t_n) = c_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}}(t_1, \ldots, t_{n-1}) \quad (49)$$

при всех $\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}$. После этого из условия 1) согласованности систем полиномов следует, что интегрированием разложения (47) для плотности f_n по x_n получается разложение (47) для плотности f_{n-1}. Отсюда по индукции следует, что разложения (47) согласованы в том смысле, что интегрированием разложения (47) для f_n по $x_{m+1}, \ldots, x_n$ при любом m получается разложение (47) для f_m.

Из условия 4) согласованности систем полиномов и из равенства *)

$$f_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_{n-1}, t_{n-1}) = f_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}; t_1, \ldots \\ \ldots, t_{n-1})\, \delta(x_n - x_{n-1}) \quad (50)$$

вытекает, что

$$c_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}, \nu_n}(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_{n-1}) = c_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}+\nu_n}(t_1, \ldots, t_{n-1}). \quad (51)$$

После этого из условия 3) и из справедливости формулы (50) для плотностей w_n и w_{n-1} следует, что при $t_n = t_{n-1}$ формула (47) дает выражение (50) для плотности f_n, где f_{n-1} представлена соответствующим разложением (47). Таким образом, разложения (47) конечномерных плотностей случайной функции согласованы и в том смысле, что для них справедлива формула (50), которую также можно рассматривать как одно из условий согласованности конечномерных распределений.

Ограничиваясь в (47) полиномами не выше N-й степени, получим согласованное приближенное представление всех конечномерных распределений случайной функции $X(t)$. Этим приближенным представлением можно практически пользоваться, если случайная функция $X(t)$ имеет конечные моменты до N-го порядка включительно, независимо от того, существуют или не существуют ее моменты высших порядков.

2.3.7. Согласованные разложения конечномерных плотностей по полиномам Эрмита. Взяв в качестве плотностей w_n нормальные конечномерные плотности, определяемые математическим ожиданием $m(t)$ и ковариационной функцией $K(t, t')$ случайной функции $X(t)$, получим согласованные разложения конечномерных плотностей случайной функции $X(t)$ по полиномам Эрмита

$$f_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = \\ = [(2\pi)^{rn} |K_n|]^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x^{(n)\mathrm{T}} - m_n^{\mathrm{T}}) K_n^{-1} (x^{(n)} - m_n)\right\} \times \\ \times \left\{1 + \sum_{k=3}^{\infty} \sum_{|\nu_1+\ldots+\nu_n|=k} \frac{c_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(t_1, \ldots, t_n)}{\nu_{11}! \ldots \nu_{nr}!} H_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x_1 - m(t_1), \ldots \right. \\ \left. \ldots, x_n - m(t_n))\right\}$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

*) При $t_n = t_{n-1}$ $X(t_n) = X(t_{n-1})$ и, следовательно, условная плотность случайной величины X_{t_n} при $X_{t_{n-1}} = x_{n-1}$ равна $\delta(x_n - x_{n-1})$, и из теоремы умножения плотностей вытекает (50) (*ТВ*, п. 4.2.2).

Формула (48) для коэффициентов $c_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(t_1, \ldots, t_n)$ принимает при этом вид

$$c_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) G_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x_1 - m(t_1), \ldots$$

$$\ldots, x_n - m(t_n))\, dx_1 \ldots dx_n = [G_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(\partial/i\,\partial\lambda_1 - m(t_1), \ldots, \partial/i\,\partial\lambda_n -$$

$$- m(t_n))\, g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n)]_{\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0} =$$

$$= [G_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(\partial/i\,\partial\lambda_1, \ldots, \partial/i\,\partial\lambda_n)\, g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n) \times$$

$$\times \exp\{-i\lambda_1^T m(t_1) - \ldots - i\lambda_n^T m(t_n)\}]_{\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0}.$$

§ 2.4. Операции анализа над случайными функциями

2.4.1. Вводные замечания. Все операции математического анализа опираются на понятия сходимости и предела. Определяя операции анализа над случайными функциями, мы неизбежно сталкиваемся с пределами последовательностей случайных величин. Следовательно, необходимо опираться на понятия вероятностной сходимости и вероятностного предела. А так как существует много видов вероятностной сходимости (*ТВ*, п. 6.1.2), то соответственно получатся различные определения операций анализа. Каким же видом вероятностной сходимости следует пользоваться в теории случайных функций? Прежде чем ответить на этот вопрос, взглянем на него с практической точки зрения. Из сказанного в п. 1.4.1 ясно, что с практической точки зрения нас интересуют только реализации случайной функции, так как только с ними мы встречаемся на практике, только они наблюдаются в результате опытов и регистрируются приборами. Поэтому, говоря о непрерывности случайной функции, мы, естественно, подразумеваем непрерывность всех ее реализаций. Говоря о дифференцировании и интегрировании случайной функции, мы имеем в виду дифференцирование и интегрирование всех ее реализаций, и т. д. Но ни понятие сходимости в p-среднем, в частности в среднем квадратическом, ни понятие сходимости по вероятности, ни даже понятие сходимости почти наверное не дают возможности определить непрерывность и дифференцируемость случайной функции как непрерывность и соответственно дифференцируемость всех ее реализаций, так как они дают возможность делать высказывания вероятностного характера относительно поведения случайной функции в данной точке или в каждой точке данной области, но не дают возможности делать какие бы то ни было выводы относительно поведения реализаций случайной функции.

Конечно, можно определить непрерывную случайную функцию как случайную функцию с непрерывными реализациями. Производную случайной функции $X(t)$ можно определить как случайную функцию, возможными реализациями которой служат производные всех реализаций случайной функции $X(t)$. Интеграл от случайной функции $X(t)$ можно определить как случайную величину, возможными значениями которой служат интегралы от всех реализаций случайной функции $X(t)$. Однако при этом мы встретимся с большими трудностями математического характера, в частности при вычислении даже самых элементарных характеристик, таких как математические ожидания и моменты второго порядка производных и интегралов. Преодолеть эти трудности можно только с помощью очень тонких математических исследований, в результате чего получится очень сложная теория *). Поэтому по крайней мере в прикладной теории случайных функций обычно ограничиваются определениями операций математического анализа над случайными функциями, основанными на понятии средней квадратической сходимости. Такие определения позволяют построить совершенно элементарную теорию дифференцирования и интегрирования случайных функций, дающую удобные практические методы исследования случайных функций. Эта теория обычно называется *корреляционной теорией* случайных функций.

Опыт применения корреляционной теории дифференцирования и интегрирования случайных функций убеждает нас в том, что эта теория является мощным инструментом исследования, позволяющим эффективно решать различные практические задачи, связанные со случайными функциями.

2.4.2. Средняя квадратическая сходимость. В соответствии с нашим общим условием, изучая свойства случайных функций, связанные с моментами первого и второго порядков, будем считать все случайные величины и функции в общем случае комплексными.

Последовательность скалярных случайных величин $\{X_n\}$ с конечными моментами второго порядка называется *сходящейся в среднем квадратическом* или, короче, *с. к. сходящейся* к случайной величине X, $X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X$, если $M|X_n - X|^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Случайная величина X называется *средним квадратическим* или, короче, *с. к. пределом* X_n, что записывается в виде $X = \text{l.i.m.}\, X_n$ **).

Аналогично, в случае любого однопараметрического семейства случайных величин $\{X_\alpha\}$ с конечными моментами второго порядка говорят, что X_α с. к. сходится к X при $\alpha \to \alpha_0$, $X_\alpha \xrightarrow{\text{с.к.}} X$, если $M|X_\alpha - X|^2 \to 0$ при $\alpha \to \alpha_0$.

В дальнейшем, говоря о с. к. сходимости, всегда будем рассматривать случайные величины с конечными моментами второго порядка.

---

*) См., например, [99] (§ III.5), [91] (§ 4.2—4.4), [102] (вып. 8).
**) Сокращение от английского limit in mean.

► Пусть $\{X_\alpha\}$ и $\{Y_\beta\}$—два семейства случайных величин, X_α с. к. сходится к X при $\alpha \to \alpha_0$, а Y_β с. к. сходится к Y при $\beta \to \beta_0$. Тогда

$$MX_\alpha \overline{Y}_\beta - MX\overline{Y} = MX_\alpha(\overline{Y}_\beta - \overline{Y}) + M(X_\alpha - X)\overline{Y}.$$

Применим к каждому слагаемому в правой части известное неравенство для моментов второго порядка (TB, п. 3.3.4):

$$|MX_\alpha(\overline{Y}_\beta - \overline{Y})| \leqslant \sqrt{M|X_\alpha|^2 M|Y_\beta - Y|^2},$$
$$|M(X_\alpha - X)\overline{Y}| \leqslant \sqrt{M|X_\alpha - X|^2 M|Y|^2}.$$

Из с. к. сходимости X_α к X и Y_β к Y следует, что правые части этих неравенств стремятся к нулю при $\alpha \to \alpha_0$, $\beta \to \beta_0$ *). Следовательно,

$$MX_\alpha\overline{Y}_\beta \to MX\overline{Y} \text{ при } \alpha \to \alpha_0,\ \beta \to \beta_0$$

независимо от того, как точка (α, β) стремится к (α_0, β_0) (в частности, можно принять $\alpha \to \alpha_0$ при фиксированном β, а потом $\beta \to \beta_0$). В этом состоит содержание леммы Лоэва. ◄

Следствие 1. Если $X_\alpha \xrightarrow{\text{с.к.}} X$, то $MX_\alpha\overline{X}_\beta \to M|X|^2$ независимо от того, как $\alpha, \beta \to \alpha_0$. Для доказательства достаточно применить лемму к случаю, когда $Y_\beta = X_\beta$.

Следствие 2. Если $X_\alpha \xrightarrow{\text{с.к.}} X$, то для любой случайной величины Y $MX_\alpha\overline{Y} \to MX\overline{Y}$. Для доказательства достаточно применить лемму к случаю, когда $Y_\beta = Y$ при всех β.

Следствие 3. Если $X_\alpha \xrightarrow{\text{с.к.}} X$ при $\alpha \to \alpha_0$, то $MX_\alpha \to MX$ и $MX^0_\alpha\overline{X}^0_\beta \to M|X^0|$ независимо от того, как $\alpha, \beta \to \alpha_0$. Для доказательства достаточно воспользоваться равенством

$$M|X_\alpha - X|^2 = |MX_\alpha - MX|^2 + M|X^0_\alpha - X^0|^2,$$

согласно которому с. к. сходимость X_α к X влечет сходимость MX_α к MX и с. к. сходимость X^0_α к X^0, и применить следствие 1.

Можно доказать также обратное предложение: если существует предел $\lim\limits_{\alpha, \beta \to \alpha_0} MX_\alpha\overline{X}_\beta$, независимый от того, как $\alpha, \beta \to \alpha_0$, то существует такая случайная величина X, к которой с. к. сходится X_α, $M|X_\alpha - X|^2 \to 0$ при $\alpha \to \alpha_0$ **).

---

*) Величина $M|X_\alpha|^2$ остается ограниченной при $\alpha \to \alpha_0$, так как $M|X_\alpha|^2 \leqslant 2M|X|^2 + 2M|X_\alpha - X|^2$.

**) Доказательство здесь не приводится, так как оно требует применения элементов функционального анализа, а именно оно основано на рассмотрении случайных величин с конечными моментами второго порядка как элементов гильбертова пространства со скалярным произведением $(X, Y) = MX\overline{Y}$ и на свойстве полноты гильбертова пространства [3, 40].

Из леммы Лоэва и последнего предложения вытекает общая теорема о с. к. сходимости: *для с. к. сходимости случайной величины* X_α *к некоторой величине* X *при* $\alpha \to \alpha_0$ *необходима и достаточна сходимость* $MX_\alpha \overline{X}_\beta$ *к (неотрицательному) пределу, не зависящему от того, как* α, $\beta \to \alpha_0$.

На основании следствия 3 эту теорему можно сформулировать иначе: *для с. к. сходимости случайной величины* X_α *к некоторой случайной величине* X *необходима и достаточна сходимость математического ожидания* MX_α *к некоторому пределу и сходимость центрального момента* $M\overset{0}{X}_\alpha \overline{\overset{0}{X}}_\beta$ *к пределу, не зависящему от того, как* α, $\beta \to \alpha_0$.

2.4.3. Средняя квадратическая непрерывность случайной функции. Скалярная случайная функция $X(t)$ называется *непрерывной в среднем квадратическом* или, короче, *с. к. непрерывной в точке* t, если при любом $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$M\,|X(t') - X(t)|^2 < \varepsilon \quad \text{при всех} \quad t', \ |t' - t| < \delta.$$

Случайная функция $X(t)$ называется *с. к. непрерывной в области* T, если она с. к. непрерывна при всех $t \in T$.

Из этого определения следует, что случайная функция $X(t)$ с. к. непрерывна в точке t (в области T), если $X(t')$ с. к. сходится к $X(t)$ при $t' \to t$ при данном t (при всех $t \in T$).

► Для того чтобы найти необходимое и достаточное условие с. к. непрерывности случайной функции $X(t)$, применим общую теорему о с. к. сходимости, установленную в п. 2.4.2. Согласно этой теореме $X(t') \xrightarrow{\text{с.к.}} X(t)$ при $t' \to t$ тогда и только тогда, когда $MX(t')\overline{X(t'')}$ сходится к некоторому пределу независимо от того, как t', $t'' \to t$. Но $MX(t')\overline{X(t'')} = \Gamma_x(t', t'')$ и стремление $\Gamma_x(t', t'')$ к определенному пределу, независимому от того, как t', $t'' \to t$, означает непрерывность $\Gamma_x(t_1, t_2)$ в точке $t_1 = t$, $t_2 = t$. ◄

Таким образом, *для с. к. непрерывности случайной функции* $X(t)$ *в точке* t (*в области* T) *необходима и достаточна непрерывность ее момента второго порядка* $\Gamma_x(t_1, t_2)$ *в точке* (t, t) (*во всех точках* (t, t), $t \in T$).

► Если случайная функция $X(t)$ с. к. непрерывна в области T, то при любых t_1 и t_2 $X(t') \xrightarrow{\text{с.к.}} X(t_1)$, $X(t'') \xrightarrow{\text{с.к.}} X(t_2)$ при $t' \to t_1$, $t'' \to t_2$. Согласно лемме п. 2.4.2 в этом случае $MX(t')\overline{X(t'')} \to MX(t_1)\overline{X(t_2)}$, т. е. $\Gamma_x(t', t'') \to \Gamma_x(t_1, t_2)$ независимо от того, как точка (t', t'') стремится к (t_1, t_2). ◄

Таким образом, *случайная функция* $X(t)$ *непрерывна в области* T *тогда и только тогда, когда ее момент второго порядка* $\Gamma_x(t_1, t_2)$ *непрерывен в области* $t_1 \in T$, $t_2 \in T$.

Из второй формы теоремы о с. к. сходимости вытекает теорема: *случайная функция* $X(t)$ *с. к. непрерывна в точке* t (*в области* T)

тогда и только тогда, когда ее математическое ожидание $m_x(t)$ непрерывно в точке t (в области T), а ее ковариационная функция $K_x(t_1, t_2)$ непрерывна в точке (t, t) (в области $t_1 \in T$, $t_2 \in T$).

Векторная случайная функция называется *с.к. непрерывной*, если с.к. непрерывны все ее компоненты. Выведенные условия с.к. непрерывности случайной функции распространяются и на векторные случайные функции.

Пример 12. Случайные функции примеров 5 и 6 с.к. непрерывны. Однако все реализации случайной функции примера 5 разрывны, в то время как все реализации случайной функции примера 6 непрерывны. Случайная функция примера 10 не с.к. непрерывна из-за множителя $\delta(t_1 - t_2)$ в выражении ковариационной функции. Однако все ее реализации непрерывны. Таким образом, понятие с.к. непрерывности случайной функции никак не связано с непрерывностью ее реализаций.

2.4.4. Дифференцирование случайных функций. Скалярная случайная функция $X(t)$ называется *с.к. дифференцируемой* (в области T), если существует такая случайная функция $X'(t)$, к которой с.к. сходится при всех $t \in T$ случайная функция $[X(t+h) - X(t)]/h$ при $h \to 0$. Случайная функция $X'(t)$ называется *средней квадратической (с.к.) производной* случайной функции $X(t)$.

▶ Для нахождения необходимых и достаточных условий с.к. дифференцируемости случайной функции $X(t)$ применим теорему о с.к. сходимости п. 2.4.2. Согласно этой теореме с.к. предел случайной функции

$$X_h(t) = [X(t+h) - X(t)]/h$$

при $h \to 0$ существует тогда и только тогда, когда существует предел момента второго порядка $MX_h(t)\overline{X_l(t)}$, независимый от того, как $h, l \to 0$. Но

$$MX_h(t)\overline{X_l(t)} = \frac{1}{hl} M[X(t+h) - X(t)][\overline{X(t+l)} - \overline{X(t)}] =$$
$$= \frac{1}{hl}[\Gamma_x(t+h, t+l) - \Gamma_x(t, t+l) - \Gamma_x(t+h, t) + \Gamma_x(t, t)]$$

и предел правой части при $h, l \to 0$, если он существует, представляет собой значение второй производной $\partial^2\Gamma_x(t_1, t_2)/\partial t_1 \partial t_2$ в точке $t_1 = t_2 = t$. ◀

Таким образом, *случайная функция $X(t)$ с. к. дифференцируема тогда и только тогда, когда ее момент второго порядка $\Gamma_x(t_1, t_2)$ имеет непрерывную производную $\partial^2\Gamma_x(t_1, t_2)/\partial t_1 \partial t_2$ при всех $t_1 = t_2 = t \in T$.* При этом $\partial^2\Gamma_x(t_1, t_2)/\partial t_1 \partial t_2$ согласно лемме п. 2.4.2 существует при всех $t_1, t_2 \in T$ и представляет собой момент второго порядка с.к. производной $X'(t)$:

$$\Gamma_{x'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2\Gamma_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}, \tag{52}$$

а производная $\partial\Gamma_x(t_1, t_2)/\partial t_1$ согласно следствию 2 п. 2.4.2 представляет собой взаимный момент второго порядка случайных функций $X'(t)$ и $X(t)$:

$$\Gamma_{x'x}(t_1, t_2) = \frac{\partial\Gamma_x(t_1, t_2)}{\partial t_1} \tag{53}$$

и, аналогично,

$$\Gamma_{xx'}(t_1, t_2) = \frac{\partial\Gamma_x(t_1, t_2)}{\partial t_2}. \tag{54}$$

Из второй формы теоремы о с. к. сходимости следует вторая форма необходимых и достаточных условий с. к. дифференцируемости случайной функции: *случайная функция $X(t)$ с. к. дифференцируема тогда и только тогда, когда существуют непрерывная производная ее математического ожидания $m_x(t)$ и непрерывная смешанная вторая производная ее ковариационной функции $K_x(t_1, t_2)$.* При этом математическое ожидание с. к. производной $X'(t)$, ее ковариационная функция и взаимные ковариационные функции с $X(t)$ определяются формулами

$$m_{x'}(t) = MX'(t) = m'_x(t), \tag{55}$$

$$K_{x'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2}, \tag{56}$$

$$K_{x'x}(t_1, t_2) = \frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1}, \qquad K_{xx'}(t_1, t_2) = \frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_2}. \tag{57}$$

С. к. производные случайной функции высших порядков определяются, как обычно. *С. к. производной порядка p* случайной функции $X(t)$ называется с. к. производная ее с. к. производной порядка $p-1$ $(p=2, 3, \ldots)$. Необходимые и достаточные условия p-кратной с. к. дифференцируемости случайной функции вытекают из выведенных условий по индукции.

Из формул (52)—(57) по индукции вытекают следующие формулы для математических ожиданий, ковариационных и взаимных ковариационных функций, моментов и взаимных моментов второго порядка с. к. производных случайной функции $X(t)$:

$$m_{x^{(p)}}(t) = MX^{(p)}(t) = m_x^{(p)}(t), \tag{58}$$

$$K_{x^{(p)}x^{(q)}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^{p+q} K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1^p\,\partial t_2^q}, \tag{59}$$

$$\Gamma_{x^{(p)}x^{(q)}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^{p+q}\Gamma_x(t_1, t_2)}{\partial t_1^p\,\partial t_2^q}. \tag{60}$$

Векторная случайная функция называется *с. к. дифференцируемой*, если с. к. дифференцируемы все ее компоненты. Из выведенных условий с. к. дифференцируемости случайной функции и леммы Лоэва вытекает, что эти условия необходимы и достаточны также для с. к. дифференцируемости векторной случайной функции $X(t)$ и что формулы (52)—(60) справедливы также и для векторной случайной функции $X(t)$.

Пример 13. Ни одна из случайных функций примеров 5, 6 и 10 не с.к. дифференцируема. У случайных функций примеров 5 и 6 $\partial^2 K_x(t_1, t_2)/\partial t_1 \partial t_2$ не существует при $t_1 = t_2 = t$. У случайной функции $V(t)$ примера 10 ковариационная функция является обобщенной функцией и поэтому недифференцируема в обычном смысле. Однако все реализации случайной функции $X(t)$ примера 6 и случайной функции $V(t)$ примера 10 неограниченно дифференцируемы. Следовательно, $X'(t)$ и $V'(t)$ существуют как раз в том смысле, в каком они нужны для приложений. Мало того, легко видеть, что случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ примеров 6 и 10 связаны соотношением

$$X'(t) + \alpha X(t) = Y(t).$$

Таким образом, случайная функция $X(t)$ представляет собой интеграл дифференциального уравнения с белым шумом в правой части, причем именно в том смысле, в каком это нужно с точки зрения приложений. С точки же зрения корреляционной теории это дифференциальное уравнение не имеет смысла, так как случайная функция $X(t)$ не имеет с.к. производной. Тем не менее дифференциальным уравнениям с белым шумом в правых частях можно придать строгий математический смысл и в рамках корреляционной теории. Подобные уравнения, называемые *стохастическими дифференциальными уравнениями*, играют большую роль в теории случайных функций и ее приложениях. Такие дифференциальные уравнения будут рассмотрены в § 3.3, 3.6.

Пример 14. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию производной случайной функции $X(t)$, если

$$m_x(t) = c \sin \omega_0 t,$$

$$K_x(t_1, t_2) = De^{-a|t_1 - t_2|} \left\{ \cos \omega_0 (t_1 - t_2) + \frac{a}{\omega_0} \sin \omega_0 |t_1 - t_2| \right\}.$$

Применяя формулу (55), находим математическое ожидание производной X':

$$m_{y_1}(t) = m'_x(t) = c\omega_0 \cos \omega_0 t.$$

Дифференцируя $K_x(t_1, t_2)$ по t_2, находим на основании (57) взаимную ковариационную функцию случайной функции $X(t)$ и ее с.к. производной $X'(t)$:

$$K_{xx'}(t_1, t_2) = \frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_2} = D\frac{a^2 + \omega_0^2}{\omega_0} e^{-a|t_1 - t_2|} \sin \omega_0 (t_1 - t_2).$$

Ковариационная функция с.к. производной $X'(t)$ на основании (56) равна

$$K_{x'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = D(a^2 + \omega_0^2) e^{-a|t_1 - t_2|} \left\{ \cos \omega_0 (t_1 - t_2) - \frac{a}{\omega_0} \sin \omega_0 |t_1 - t_2| \right\}.$$

Эта функция непрерывна при всех t_1, t_2. Поэтому рассматриваемая случайная функция с.к. дифференцируема. Что касается ее реализаций, то они могут быть дифференцируемыми, а могут быть и недифференцируемыми.

Пример 15. Найти ковариационную функцию производной случайной функции $X(t)$, обладающей нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией

$$K_x(t_1, t_2) = De^{\mu(t_1 + t_2) - \alpha|t_1 - t_2|}(1 + \alpha|t_1 - t_2|).$$

Имеем

$$K_{xx'}(t_1, t_2) = \frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_2} = D\alpha^2 (t_1 - t_2) e^{\mu(t_1 + t_2) - \alpha|t_1 - t_2|} + \mu K_x(t_1, t_2),$$

$$K_{x'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = D\alpha^2 e^{\mu(t_1 + t_2) - \alpha|t_1 - t_2|}(1 - \alpha|t_1 - t_2|) + \mu^2 K_x(t_1, t_2) + 2D\alpha\mu e^{\mu(t_1 + t_2) - \alpha|t_1 - t_2|}|t_1 - t_2|.$$

Эта функция непрерывна при всех $t_1=t_2=t$, поэтому $X(t)$ с.к. дифференцируема. Реализации функции $X(t)$ могут быть как дифференцируемыми, так и недифференцируемыми.

Приведенные примеры показывают, что с.к. дифференцируемость случайной функции ничего не говорит о дифференцируемости ее реализаций, и наоборот.

Определение с.к. производной относится также и к частным с.к. производным случайной функции векторного аргумента. При этом формулы (55)—(60) распространяются с очевидными несущественными изменениями на с.к. частные производные.

2.4.5. Интегрирование случайных функций. Пусть $X(t)$ — случайная скалярная функция, определенная в области T изменения аргумента t, $g(t, \tau)$ — функция двух переменных $t, \tau \in T$. Возьмем последовательность разбиений $\{P_n\}$ области T:

$$T = \bigcup_{k=1}^{N_n} A_k^n, \quad A_h^n A_k^n = \varnothing \quad \text{при} \quad h \neq k,$$

такую, что

$$\Delta_n = \max_k \sup_{t,\, t' \in A_k^n} |t' - t| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Образуем последовательность интегральных сумм Римана

$$Y_n(t) = \sum_{k=1}^{N_n} g(t, \tau_k^{(n)}) X(\tau_k^{(n)}) \Delta t_k^{(n)}, \tag{61}$$

где $\tau_k^{(n)}$ — произвольная точка области A_k^n, $\Delta t_k^{(n)}$ — объем области A_k^n $(k=1, \ldots, N_n)$.

Средним квадратическим или, короче, *с.к. интегралом* от случайной функции $g(t, \tau) X(\tau)$ по области T называется с.к. предел последовательности интегральных сумм $\{Y_n(t)\}$, если он существует:

$$Y(t) = \int_T g(t, \tau) X(\tau)\, d\tau = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \sum_{k=1}^{N_n} g(t, \tau_k^{(n)}) X(\tau_k^{(n)}) \Delta t_k^{(n)}. \tag{62}$$

► Чтобы найти необходимое и достаточное условие существования с.к. интеграла (62), применим теорему о с.к. сходимости п. 2.4.2. Из (61) находим

$$MY_n(t)\overline{Y_m(t)} =$$
$$= \sum_{k=1}^{N_n} \sum_{l=1}^{N_m} g(t, \tau_k^{(n)}) \overline{g(t, \tau_l^{(m)})}\, MX(\tau_k^{(n)}) X(\tau_l^{(m)}) \Delta t_k^{(n)} \Delta t_l^{(m)} =$$
$$= \sum_{k=1}^{N_n} \sum_{l=1}^{N_m} g(t, \tau_k^{(n)}) \overline{g(t, \tau_l^{(m)})}\, \Gamma_x(\tau_k^{(n)}, \tau_l^{(m)}) \Delta t_k^{(n)} \Delta t_l^{(m)}.$$

Последняя часть здесь имеет предел при $n, m \to \infty$ тогда и только тогда, когда существует интеграл

$$\int_T \int_T g(t, \tau_1) \overline{g(t, \tau_2)} \Gamma_x(\tau_1, \tau_2) \, d\tau_1 \, d\tau_2. \blacktriangleleft \tag{63}$$

Таким образом, из теоремы о с. к. сходимости следует, что *с.к. интеграл* (62) *существует тогда и только тогда, когда существует интеграл* (63). При этом интеграл (63) представляет собой момент второго порядка интеграла (62).

Определив с.к. интеграл по ограниченной области T, можно обычным путем распространить это определение на бесконечные области, пользуясь понятием с. к. предела вместо обычного. При этом необходимым и достаточным условием существования с. к. интеграла (62) будет по-прежнему существование интеграла (63).

Если интеграл (62) существует при всех $t \in T$, то он представляет собой случайную функцию $Y(t)$, $t \in T$. Согласно лемме п. 2.4.2 и ее следствиям 2 и 3 в этом случае существуют также пределы последовательностей $\{MY_n(t)\}$, $\{MY_n^0(t_1)\overline{Y_m^0(t_2)}\}$, $\{MY_n(t_1)\overline{Y_m(t_2)}\}$, $\{MY_n^0(t_1)\overline{X^0(t_2)}\}$, $\{MX^0(t_1)\overline{Y_n^0(t_2)}\}$, $\{MY_n(t_1)\overline{X(t_2)}\}$, $\{MX(t_1)\overline{Y_n(t_2)}\}$, представляющие собой соответственно математическое ожидание, ковариационную функцию, момент второго порядка случайной функции $Y(t)$ и ее взаимные ковариационные функции и взаимные моменты второго порядка со случайной функцией $X(t)$:

$$m_y(t) = \int_T g(t, \tau) m_x(\tau) \, d\tau, \tag{64}$$

$$K_y(t_1, t_2) = \int_T \int_T g(t_1, \tau_1) \overline{g(t_2, \tau_2)} K_x(\tau_1, \tau_2) \, d\tau_1 \, d\tau_2, \tag{65}$$

$$K_{yx}(t_1, t_2) = \int_T g(t_1, \tau) K_x(\tau, t_2) \, d\tau, \tag{66}$$

$$K_{xy}(t_1, t_2) = \int_T \overline{g(t_2, \tau)} K_x(t_1, \tau) \, d\tau. \tag{67}$$

Заменив в (65) и (66) букву K везде буквой Γ, получим аналогичные формулы для начальных моментов второго порядка.

В частном случае, когда $g(t, \tau)$ не зависит от t, $g(t, \tau) = \varphi(\tau)$, с. к. интеграл (62) представляет собой случайную величину

$$Y = \int_T \varphi(\tau) X(\tau) \, d\tau. \tag{68}$$

В этом случае формулы (64) и (65) определяют математическое ожидание и дисперсию случайной величины

$$m_y = \int_T \varphi(\tau) m_x(\tau) \, d\tau, \quad D_y = \int_T \int_T \varphi(\tau_1) \overline{\varphi(\tau_2)} K_x(\tau_1, \tau_2) \, d\tau_1 \, d\tau_2. \tag{69}$$

Пусть теперь $X(t)$ — n-мерная векторная случайная функция, $g(t, \tau)$ — $m\times n$-матрица. Формула (62) определяет в этом случае m-мерный векторный с. к. интеграл. Условием его существования является существование всех скалярных интегралов в выражении компонент вектора $Y(t)$. Из выведенного необходимого и достаточного условия существования скалярного с. к. интеграла и из леммы и следствий п. 2.4.2 вытекает, что математическое ожидание случайной функции $Y(t)$, представляющей собой векторный с. к. интеграл (62), определяется формулой (64), а ее ковариационная функция — формулой

$$K_y(t_1, t_2)=\int\limits_T\int\limits_T g(t_1, \tau_1)K_x(\tau_1, \tau_2)g(t_2, \tau_2)^* d\tau_1 d\tau_2. \qquad (70)$$

Формула (65) представляет собой частный случай формулы (70), когда функции $g(t, \tau)$ и $K_x(t_1, t_2)$ — скалярные. Формула (66) для взаимной ковариационной функции $Y(t)$ и $X(t)$ справедлива и в случае векторного с. к. интеграла (62), а формула (67) заменяется формулой

$$K_{xy}(t_1, t_2)=\int\limits_T K_x(t_1, \tau)g(t_2, \tau)^* d\tau. \qquad (71)$$

Заменив в (70), (66) и (71) букву K везде буквой Γ, получим аналогичные формулы для моментов второго порядка.

Если рассматривать скалярные с. к. интегралы

$$Y=\int\limits_T \varphi(\tau)X(\tau)d\tau, \quad Z=\int\limits_T \psi(\tau)X(\tau)d\tau \qquad (72)$$

как компоненты двумерного векторного с. к. интеграла ($m=2$, $n=1$), то формулы (64) и (70) дадут, кроме формул (69) и аналогичных формул для математического ожидания и дисперсии случайной величины Z, еще следующую формулу для ковариации величин Y и Z:

$$k_{yz}=\int\limits_T\int\limits_T \varphi(\tau_1)\overline{\psi(\tau_2)}K_x(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2. \qquad (73)$$

Формулы (69) и (73) обобщаются на случай векторных величин $X(t)$, Y и Z совершенно так же, как (65).

Пользуясь понятием с. к. интеграла, можно определить оператор момента второго порядка и ковариационный оператор случайной функции $X(t)$ формулами

$$\Gamma_x\varphi=MX(s)\int\limits_T X(t)^*\overline{\varphi(t)}\,dt,$$

$$K_x\varphi=MX^0(s)\int\limits_T X^0(t)^*\overline{\varphi(t)}\,dt.$$

Аналогичными формулами можно определить взаимный оператор момента второго порядка и взаимный ковариационный оператор двух случайных функций.

Пример 16. Найти ковариационную функцию интеграла от случайной функции

$$Y(t)=\int_0^t X(\tau)\,d\tau,$$

если $X(t)$ имеет показательную ковариационную функцию $K_x(t_1, t_2) = De^{-\alpha|t_1-t_2|}$. Применяя формулу (65), находим

$$K_y(t_1, t_2)=D\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} e^{-\alpha|\tau_1-\tau_2|}\,d\tau_1\,d\tau_2.$$

При $t_1 < t_2$ эта формула дает

$$K_y(t_1, t_2)=D\int_0^{t_1}\left\{\int_0^{\tau_1} e^{-\alpha(\tau_1-\tau_2)}\,d\tau_2+\int_{\tau_1}^{t_2} e^{-\alpha(\tau_2-\tau_1)}\,d\tau_2\right\}d\tau_1=$$
$$=\frac{2D}{\alpha}t_1+\frac{D}{\alpha^2}\left[e^{-\alpha t_1}+e^{-\alpha t_2}-e^{-\alpha(t_2-t_1)}-1\right].$$

При $t_1 > t_2$ вследствие симметрии ковариационной функции переменные t и t_2 меняются местами. В результате получим

$$K_y(t_1, t_2)=\frac{2D}{\alpha}\min\{t_1, t_2\}+\frac{D^2}{\alpha}\left[e^{-\alpha t_1}+e^{-\alpha t_2}-e^{-\alpha|t_1-t_2|}-1\right].$$

В случае действительных функций $g(t, \tau)$ и случайной функции $X(t)$ в (62) аналогично выводятся формулы для моментов высших порядков случайной функции $Y(t)$. Ограничиваясь для простоты случаем скалярных $g(t, \tau)$ и $X(t)$, приведем формулу для момента r-го порядка с.к. интеграла (62):

$$\alpha_r^y(t_1, \ldots, t_r)=\int_T\ldots\int_T g(t_1, \tau_1)\ldots g(t_r, \tau_r)\,\alpha_r^x(\tau_1, \ldots, \tau_r)\,d\tau_1\ldots d\tau_r.$$

Эта формула справедлива не только для начальных моментов α, но и для центральных моментов μ и для соответствующих семиинвариантов. Для существования момента $\alpha_r^y(t_1, \ldots, t_r)$ случайной функции $Y(t)$ необходимо и достаточно, чтобы существовал такой же момент $\alpha_r^x(t_1, \ldots, t_r)$ случайной функции $X(t)$ и интеграл в правой части приведенной формулы сходился.

2.4.6. Средние квадратические интегралы с переменными пределами. Рассмотрим случайную функцию

$$Y(t)=\int_a^t \varphi(\tau)\,X(\tau)\,d\tau,$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная функция, $X(t)$ — с.к. непрерывная случайная функция. В общем случае $X(t)$ и $Y(t)$ — векторные случайные функции разных размерностей, $\varphi(\tau)$ — прямоугольная матрица. Докажем, что случайная функция $Y(t)$ имеет с. к. производную, равную $\varphi(t)X(t)$. Для этого достаточно доказать, что

$$M\,|\Delta Y/\Delta t-\varphi(t)X(t)|^2\to 0 \quad \text{при} \quad \Delta t\to 0,$$

где

$$\Delta Y=Y(t+\Delta t)-Y(t)=\int\limits_t^{t+\Delta t}\varphi(\tau)X(\tau)\,d\tau.$$

► На основании (70) и (71) моменты второго порядка случайных функций $\Delta Y(t)/\Delta t$ и $\varphi(t)X(t)$ определяются формулами

$$M\,\Delta Y\,X(t)^*\varphi(t)^*/\Delta t=\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\varphi(\tau)\Gamma_x(\tau,\ t)\varphi(t)^*\,d\tau=$$
$$=\varphi(\sigma_1)\Gamma_x(\sigma_1,\ t)\varphi(t)^*,$$
$$M\varphi(t)X(t)\,\Delta Y^*/\Delta t=\varphi(t)\Gamma_x(t,\ \sigma_2)\varphi(\sigma_2)^*,$$
$$M\,\Delta Y\,\Delta Y^*/\Delta t^2=\frac{1}{\Delta t^2}\int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\varphi(\tau_1)\Gamma_x(\tau_1,\ \tau_2)\varphi(\tau_2)^*\,d\tau_1\,d\tau_2=$$
$$=\varphi(\sigma_3)\Gamma_x(\sigma_3,\ \sigma_4)\varphi(\sigma_4)^*,$$

где σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 — некоторые средние точки интервала $(t,\ t+\Delta t)$. При выводе этих формул мы применили интегральную теорему о среднем, имея в виду непрерывность функции $\varphi(t)$ и $\Gamma_x(t_1,\ t_2)$. На основании этих формул

$$M\,|\Delta Y/\Delta t-\varphi(t)X(t)|^2=\operatorname{tr}\{M\,\Delta Y\,\Delta Y^*/\Delta t^2-M\,\Delta Y\,X(t)^*\varphi(t)^*/\Delta t-$$
$$-M\varphi(t)X(t)\,\Delta Y^*/\Delta t+M\varphi(t)X(t)X(t)^*\varphi(t)^*\}=$$
$$=\operatorname{tr}\{\varphi(\sigma_3)\Gamma_x(\sigma_3,\ \sigma_4)\varphi(\sigma_4)^*-\varphi(\sigma_1)\Gamma_x(\sigma_1,\ t)\varphi(t)^*-$$
$$-\varphi(t)\Gamma_x(t,\ \sigma_2)\varphi(\sigma_2)^*+\varphi(t)\Gamma_x(t,\ t)\varphi(t)^*\}\to 0$$

при $\Delta t\to 0$, так как $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\to t$ и функции $\varphi(t)$ и $\Gamma_x(t_1,\ t_2)$ непрерывны. ◄

Таким образом, *с. к. производная интеграла от с. к. непрерывной случайной функции по верхнему пределу равна значению подынтегральной функции при этом верхнем пределе.* Иными словами, обычное правило дифференцирования интеграла по верхнему пределу распространяется и на с. к. интегралы от случайных функций.

2.4.7. Формула интегрирования по частям. Пусть $\varphi(t)$ — непрерывная вместе со своей первой производной функция, $Z(t)$ — с. к. непрерывная случайная функция, имеющая непрерывную с. к. производную. Рассмотрим с. к. интеграл

$$\int\limits_{t_0}^{t}\varphi'(\tau)Z(\tau)\,d\tau.$$

Случайная функция $Z(t)$ в общем случае может быть векторной и соответственно $\varphi(t)$ может быть матричной функцией.

► Разобьем интервал (t_0, t) на n равных частей длины $(t-t_0)/n$ и обозначим точки деления $t_1, \ldots, t_n = t$, $\Delta t = (t-t_0)/n$. Тогда согласно определению с. к. интеграла можем написать

$$\int_{t_0}^{t} \varphi'(\tau) Z(\tau)\, d\tau = \underset{n\to\infty}{\text{l. i. m.}} \sum_{k=1}^{n} \varphi'(t_{k-1}) Z(t_{k-1}) \Delta t.$$

Но в силу непрерывности функции $\varphi'(t)$ с точностью до бесконечно малых имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi'(t_{k-1}) Z(t_{k-1}) \Delta t_k = \sum_{k=1}^{n} [\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})] Z(t_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \varphi(t_k) Z(t_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} \varphi(t_{k-1}) Z(t_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \varphi(t_k) Z(t_{k-1}) - \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(t_k) Z(t_k) =$$

$$= \varphi(t) Z(t_{n-1}) - \varphi(t_0) Z(t_0) - \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(t_k) [Z(t_k) - Z(t_{k-1})] =$$

$$= \varphi(t) Z(t - (t-t_0)/n) - \varphi(t_0) Z(t_0) - \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(t_k) Z'(t_k) \Delta t.$$

Переходя к с. к. пределу при $n \to \infty$, $\Delta t \to 0$, получаем в силу с. к. непрерывности $Z(t)$

$$\int_{t_0}^{t} \varphi'(\tau) Z(\tau)\, d\tau = \varphi(t) Z(t) - \varphi(t_0) Z(t_0) - \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) Z'(\tau)\, d\tau. \blacktriangleleft \quad (74)$$

Таким образом, *формула интегрирования по частям справедлива и для с. к. интегралов.*

Из (74) в силу результата п. 2.4.6 получаем формулу для с. к. производной произведения

$$\frac{d}{dt} \varphi(t) Z(t) = \varphi'(t) Z(t) + \varphi(t) Z'(t).$$

2.4.8. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений, содержащих случайные функции. Рассмотрим линейную систему, описываемую дифференциальным уравнением:

$$\dot{Z} = aZ + a_1 X(t) + a_0, \quad Y = bZ + b_0$$

при случайном начальном условии $Z(t_0) = Z_0$, где $X(t)$ — случайная функция, а Z_0 — независимая от нее случайная величина с конечным моментом второго порядка. Пользуясь формулой (1.25) для выходного сигнала такой системы, выразим случайную функцию Y как интеграл от случайной функции $X(t)$:

$$Y(t) = b(t)\,u(t,\ t_0)\,Z_0 + \int_{t_0}^{t} b(t)\,u(t,\ \tau)\,a_1(\tau) X(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t} b(t)\,u(t,\ \tau)\,a_0(\tau)\,d\tau + b_0(t),$$

где $u(t,\ \tau)$ — решение однородного уравнения $\dot{u} = au$ при начальном условии $u(\tau, \tau) = I$. Положив $g(t,\ \tau) = b(t)\,u(t,\ \tau)\,a_1(t)$ при $\tau < t$ (весовая функция системы) и $g(t,\ \tau) = 0$ при $\tau > t$, получим с. к. интеграл вида (62) с дополнительным случайным слагаемым, которое будет некоррелированным со случайной функцией $X(t)$. Согласно формулам (64) и (70) и свойствам математических ожиданий математическое ожидание и ковариационная функция выходного сигнала системы $Y(t)$ определяются формулами

$$m_y(t) = b(t)\,u(t,\ t_0)\,m_{z_0} + \int_{t_0}^{t} b(t)\,u(t,\ \tau)\,a_1(\tau)\,m_x(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t} b(t)\,u(t,\ \tau)\,a_0(\tau)\,d\tau + b_0(t), \qquad (75)$$

$$K_y(t_1,\ t_2) = b(t_1)\,u(t_1,\ t_0)\,K_{z_0}\,u(t_2,\ t_0)^{\mathrm{T}}\,b(t_2)^{\mathrm{T}} + \int_{t_0}^{t_1} d\tau_1 \int_{t_0}^{t_2} b(t_1)\,u(t_1,\ \tau_1)\,a_1(\tau_1)\,K_x(\tau_1,\ \tau_2)\,a_1(\tau_2)^{\mathrm{T}}\,u(t_2,\ \tau_2)^{\mathrm{T}}\,b(t_2)^{\mathrm{T}}\,d\tau_2, \qquad (76)$$

где m_{z_0} и K_{z_0} — математическое ожидание и ковариационная матрица случайного вектора Z_0.

Пример 17. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию выходного сигнала следящей системы, представляющей собой интегратор с усилителем, обладающий коэффициентом усиления β, и с отрицательной обратной связью (рис. 10). Легко видеть, что входной сигнал интегратора равен $\dot{Y} = \beta(X - Y)$. Следовательно, рассматриваемая следящая система описывается дифференциальным уравнением

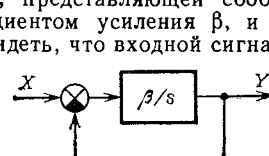

Рис. 10

$$\dot{Y} = \beta(X - Y),$$

или

$$\dot{Y} + \beta Y = \beta X(t).$$

Предположим, что входной сигнал $X(t)$ представляет собой случайную функцию с математическим ожиданием $m_x(t) = a + bt$ и ковариационной функцией $K_x(t_1,\ t_2) = De^{-\alpha|t_1 - t_2|}$ и что начальное значение выходного сигнала Y_0 представляет собой случайную величину, независимую от $X(t)$.

В данном случае интеграл однородного уравнения $\dot{u} = -\beta u$ при начальном условии $u = 1$ при $t = \tau$ определяется формулой

$$u(t,\ \tau) = e^{-\beta(t-\tau)}.$$

Учитывая, что $b=1$, $a_1=\beta$, $a_0=b_0=0$, по формулам (75) и (76) находим

$$m_y(t)=(m_{y_0}-a-bt_0+b/\beta)\,e^{-\beta(t-t_0)}+a-b/\beta+bt,$$

$$K_y(t_1,\ t_2)=$$

$$=D_{y_0}e^{-\beta(t_1+t_2-2t_0)}+\beta^2 D\int\limits_{t_0}^{t_1}d\tau_1\int\limits_{t_0}^{t_2}e^{-\beta(t_1-\tau_1+t_2-\tau_2)-\alpha|\tau_1-\tau_2|}d\tau_2=$$

$$=D_{y_0}e^{-\beta(t_1+t_2-2t_0)}+\frac{\beta^2 D}{\beta^2-\alpha^2}\Big[e^{-\alpha|t_1-t_2|}-\frac{\alpha}{\beta}e^{-\beta|t_1-t_2|}-e^{-\alpha(t_1-t_0)-\beta(t_2-t_0)}-$$

$$-e^{-\alpha(t_2-t_0)-\beta(t_1-t_0)}+\frac{\alpha+\beta}{\beta}e^{-\beta(t_1+t_2-2t_0)}\Big].$$

В частном случае при $\beta=\alpha$

$$m_y(t)=(m_{y_0}-a-bt_0+b/\alpha)\,e^{-\alpha(t-t_0)}+a-b/\alpha+bt,$$

$$K_y(t_1,\ t_2)=D_{y_0}e^{-\alpha(t_1+t_2-2t_0)}+$$

$$+\frac{D}{2}\left\{e^{-\alpha|t_1-t_2|}(1+\alpha|t_1-t_2|)-e^{-\alpha(t_1+t_2-2t_0)}[1-\alpha(t_1+t_2-2t_0)]\right\}.$$

2.4.9. Слабая средняя квадратическая сходимость и обобщенные случайные функции. Изучая с. к. дифференцирование и с. к. интегрирование случайных функций на основе понятия с. к. сходимости последовательности случайных величин, мы пришли к понятию с. к. сходимости последовательности случайных функций. Поэтому естественно дать следующее общее определение.

Последовательность случайных функций $\{X_n(t)\}$, $t\in T$, называется *сходящейся в среднем квадратическом (с. к. сходящейся)* к случайной функции $X(t)$, если последовательность значений $\{X_{nt}\}$ этих случайных функций с. к. сходится к соответствующему значению X_t случайной функции $X(t)$ при всех $t\in T$. Случайная функция $X(t)$ называется *пределом в среднем квадратическом (с. к. пределом)* последовательности $\{X_n(t)\}$.

Так, например, с. к. производная $X'(t)$ случайной функции $X(t)$ представляет собой с. к. предел последовательности случайных функций $\{[X(t+h_n)-X(t)]/h_n\}$, если $h_n\to 0$ при $n\to\infty$. Точно так же с. к. интеграл

$$\int\limits_T g(t,\ \tau)\,X(\tau)\,d\tau$$

является с. к. пределом последовательности случайных функций переменной t, представляющих собой соответствующие интегральные суммы.

Однако во многих случаях приходится рассматривать случайные функции как пределы последовательностей случайных функций, когда с. к. пределы этих последовательностей не существуют, но существуют с. к. пределы последовательностей интегралов от произведений этих случайных функций на любые неслучайные функции некоторого класса *). Поэтому необходимо расширить понятие с. к. сходимости последовательностей случайных функций.

Пусть Φ — некоторый класс ограниченных функций переменной t, каждая из которых отлична от нуля только в некоторой конечной области (это существенно только для случая бесконечной области определения T рассматриваемых случайных функций) **). Последовательность случайных функций $\{X_n(t)\}$, $t \in T$, называется *слабо сходящейся в среднем квадратическом (слабо с. к. сходящейся)* к случайной функции $X(t)$ (по отношению к Φ), если

$$\int_T \varphi(\tau) X_n(\tau)\, d\tau \xrightarrow{\text{с. к.}} \int_T \varphi(\tau) X(\tau)\, d\tau, \qquad \forall \varphi(t) \in \Phi.$$

Случайная функция $X(t)$ называется в этом случае *слабым с. к. пределом* последовательности $\{X_n(t)\}$. Говоря о слабой с. к. сходимости, класс функций Φ обычно не указывается, так как он всегда естественно определяется условиями задачи. Чаще всего это класс непрерывных функций, или непрерывных со своими производными до определенного порядка, или бесконечно дифференцируемых функций.

Пример 18. Рассмотрим последовательность случайных функций $\{X_n(t)\}$ с нулевыми математическими ожиданиями, ковариационные и взаимные ковариационные функции которых определяются формулой

$$K_{mn}(t_1, t_2) = \begin{cases} \dfrac{mn}{m+n} e^{-m(t_1-t_2)} & \text{при} \quad t_1 > t_2, \\ \dfrac{mn}{m+n} e^{-n(t_2-t_1)} & \text{при} \quad t_1 < t_2. \end{cases}$$

Очевидно, что $K_{mn}(t_1, t_2) \to 0$ при $t_1 \neq t_2$, $K_{mn}(t, t) \to \infty$ при $m, n \to \infty$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{mn}(t+\tau, t)\, d\tau = \frac{mn}{m+n}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{n\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-m\tau} d\tau\right] = 1, \quad \forall m, n.$$

Следовательно, $K_{mn}(t_1, t_2) \to \delta(t_1 - t_2)$ при $n, m \to \infty$. Поэтому естественно считать с. к. пределом последовательности $\{X_n(t)\}$ белый шум единичной интенсивности. Однако последовательность $\{X_n(t)\}$ не имеет с. к. предела, поскольку $K_{mn}(t, t) \to \infty$ $\forall t$. Рассмотрим последовательность

$$Y_n = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) X_n(\tau)\, d\tau,$$

*) Совершенно так же, как δ-функция, и ее производные могут рассматриваться как пределы соответствующих последовательностей обычных функций, хотя эти пределы в обычном смысле не существуют, а существуют только как слабые пределы в том смысле, что последовательности интегралов от произведений соответствующих функций на любые функции определенного класса существуют (*ТВ*, приложение 1).

**) Такие функции называются *финитными*.

где $\varphi(t)$ — любая непрерывная финитная функция. Имеем

$$MY_mY_n = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_{mn}(\tau_1, \tau_2)\varphi(\tau_1)\varphi(\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2 =$$

$$= \frac{mn}{m+n}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau_1)\,d\tau_1\left[\int_{-\infty}^{\tau_1} e^{-m(\tau_1-\tau_2)}\varphi(\tau_2)\,d\tau_2 + \int_{\tau_1}^{\infty} e^{-n(\tau_2-\tau_1)}\varphi(\tau_2)\,d\tau_2\right] =$$

$$= \frac{mn}{m+n}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau_1)\,d\tau_1\left(\frac{1}{m}\varphi(\tau_1') + \frac{1}{n}\varphi(\tau_1'')\right),$$

где $\tau_1' \in (-\infty, \tau_1)$, $\tau_1'' \in (\tau_1, \infty)$. Так как

$$e^{-m(\tau_1-\tau_2)},\quad e^{-n(\tau_2-\tau_1)} \to 0 \qquad \forall \tau_2 \neq \tau_1,$$

то τ_1', $\tau_1'' \to \tau_1$ при $m, n \to \infty$ и в силу непрерывности функции $\varphi(t)$

$$\varphi(\tau_1'),\ \varphi(\tau_1'') \to \varphi(\tau_1).$$

Поэтому

$$MY_mY_n \to \int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(\tau)\,d\tau \quad \text{при} \quad m, n \to \infty.$$

Следовательно, последовательность интегралов $\{Y_n\}$ с. к. сходится. По определению последовательность $\{X_n(t)\}$ в этом случае слабо с. к. сходится. Значит, белый шум единичной интенсивности представляет собой слабый с. к. предел данной последовательности случайных функций $\{X_n(t)\}$.

Приведенный пример показывает, что слабый с. к. предел последовательности случайных функций может не быть случайной функцией в обычном смысле. Это вызывает необходимость расширить понятие случайной функции.

Слабый с. к. предел последовательности случайных функций называется *обобщенной случайной функцией*.

Белый шум примера 18 относится к классу обобщенных случайных функций.

Легко видеть, что любая с. к. сходящаяся последовательность случайных функций слабо с. к. сходится к той же предельной случайной функции. Но предел с. к. сходящейся последовательности случайных функций представляет собой обычную случайную функцию с конечным моментом второго порядка. Следовательно, класс обобщенных случайных функций содержит и некоторые обычные случайные функции.

Приведенное определение обобщенной случайной функции вполне аналогично определению δ-функции и ее производных (*ТВ*, приложение 1).

Понятие слабой с. к. сходимости дает возможность расширить определение производной случайной функции.

Случайная функция $X'(t)$ скалярной переменной t называется *слабой с. к. производной* случайной функции $X(t)$, если для любой сходящейся к нулю последовательности положительных чисел $\{h_n\}$ последовательность случайных функций

$$X_n(t) = [X(t+h_n) - X(t)]/h_n$$

слабо с. к. сходится к случайной функции $X'(t)$.

На основе понятия слабой с. к. сходимости и слабой с. к. дифференцируемости случайной функции можно дать строгое определение белого шума и его производных (п. 3.1.6).

Для читателей, знакомых с основами функционального анализа, приведем строгое определение обобщенной случайной функции.

Пусть Φ_∞ — пространство всех непрерывных вместе со своими производными всех порядков (т. е. бесконечно дифференцируемых) финитных функций скалярной или конечномерной векторной переменной t (в случае ограниченной области определения T функций требование финитности заменяется требованием равенства всех функций нулю на границе области T). Это линейное пространство называется *пространством основных функций*. Определим в Φ_∞ топологию окрестностями нуля $\{\varphi(t)\colon \varphi(t) \in \Phi_\infty, |\varphi(t)| < \varepsilon_0(t), \ |\varphi'(t)| < \varepsilon_1(t), \ \ldots, \ |\varphi^{(p)}(t)| < \varepsilon_p(t), \ \forall t \in T\}$, соответствующими всем натуральным p и всем непрерывным положительным функциям $\varepsilon_0(t), \varepsilon_1(t), \ldots, \varepsilon_p(t)$. Тем самым в Φ_∞ определена сходимость: последовательность элементов $\{\varphi_n\}$ пространства Φ_∞ сходится к $\varphi \in \Phi_\infty$, если все последовательности функций $\{\varphi_n^{(q)}(t)\}$ $(q = 0, 1, 2, \ldots)$ равномерно сходятся к соответствующим функциям $\varphi^{(q)}(t)$.

Пусть $\mathscr{X}$ — пространство непрерывных линейных функционалов на Φ_∞, т. е. таких функционалов $x\varphi$, $\varphi \in \Phi_\infty$, для которых $x\varphi_n \to x\varphi$ при φ_n, $\varphi \in \Phi_\infty$, $\varphi_n \to \varphi$.

Обобщенной случайной функцией переменной t называется случайная величина со значениями в $\mathscr{X}$, т. е. случайный непрерывный линейный функционал на пространстве основных функций Φ_∞. Согласно этому определению обобщенная случайная функция $X(t)$ ставит в соответствие каждой основной функции $\varphi \in \Phi_\infty$ скалярную случайную величину $X_\varphi = X(t)\varphi$.

В соответствии с общим определением математического ожидания [92] (вып. 9) *математическим ожиданием* обобщенной случайной функции $X(t)$ называется непрерывный линейный функционал $m_x(t)$ на пространстве основных функций Φ_∞, который каждой функции $\varphi \in \Phi_\infty$ ставит в соответствие математическое ожидание соответствующей случайной величины $X_\varphi = X(t)\varphi$:

$$m_x\varphi = MX_\varphi = MX(t)\varphi.$$

Ковариационный оператор обобщенной случайной функции определяется формулой [102] (вып. 9)

$$K_x\varphi = MX^0(s)\overline{X_\varphi^0} = MX^0(s)\overline{X^0(t)\varphi}.$$

Этот оператор отображает пространство Φ_∞ в $\mathscr{X}$. Аналогично определяются *оператор момента второго порядка* обобщенной случайной функции и *взаимные оператор момента второго порядка* и *ковариационный оператор* двух обобщенных случайных функций.

Если Φ_∞ — пространство скалярных основных функций, то обобщенные случайные функции на Φ_∞ называются *скалярными*. Если Φ_∞ — пространство r-мерных векторных основных функций, то обобщенные случайные функции на Φ_∞ называются *r-мерными векторными*.

В соответствии с определением с. к. интеграла каждая с. к. непрерывная случайная функция $X(t)$ определяет случайный линейный функционал

$$X(t)\varphi = \int_T X(\tau)^T \varphi(\tau)\,d\tau, \qquad \varphi \in \Phi_\infty.$$

Таким образом, *каждая с. к. непрерывная случайная функция определяет обобщенную случайную функцию*. Математическое ожидание и ковариационный оператор этой обобщенной случайной функции определяются так:

$$m_x\varphi = MX(t)\,\varphi = \int_T m_x(t)^{\mathrm{T}}\,\varphi(t)\,dt,$$

$$K_x\varphi = MX^0(s)\,\overline{X^0(t)\,\varphi} = \int_T K_x(s,\ t)\,\overline{\varphi(t)}\,dt,$$

где $m_x(t)$ и $K_x(s,\ t)$ — математическое ожидание и ковариационная функция случайной функции $X(t)$. Это соответствие между с. к. непрерывными и определяемыми ими обобщенными случайными функциями дает основание записывать все обобщенные случайные функции как обычные случайные функции с указанием аргумента в скобках (хотя они могут и не иметь значения ни при каком значении аргумента t), а случайные непрерывные линейные функционалы записывать в виде интегралов

$$X(t)\,\varphi = \int_T X(t)^{\mathrm{T}}\,\varphi(t)\,dt.$$

В соответствии с приведенным определением обобщенной случайной функции белый шум интенсивности $\nu(t)$ представляет собой обобщенную случайную функцию, математическое ожидание которой равно нулю, а ковариационным оператором служит оператор умножения сопряженной функции φ на неотрицательную функцию $\nu(t)$ (неотрицательную скалярную функцию в случае скалярного белого шума и неотрицательно определенную при каждом t матричную функцию в случае векторного белого шума):

$$K_x\varphi = \nu(s)\,\overline{\varphi(s)}.$$

Правую часть этой формулы можно рассматривать как интегральный оператор с ядром $\nu(s)\,\delta(s-t)$ в полном соответствии с определением ковариационной функции белого шума в п. 2.2.5.

Так как результат действия ковариационного оператора на любую функцию $\varphi \in \Phi_\infty$ представляет собой непрерывный линейный функционал на Φ_∞, $K_x\varphi \in \mathscr{X}$, то, применив этот функционал к функции $\psi \in \Phi_\infty$, получим

$$(K_x\varphi)\,\psi = M\,(X^0(s)\,\psi)\,(\overline{X^0(t)\,\varphi}).$$

Это выражение симметрично относительно функций φ и ψ; при данной функции φ оно представляет собой результат действия непрерывного линейного функционала (т. е. обобщенной неслучайной функции) на функцию ψ, а при данной функции ψ — результат действия непрерывного линейного функционала на функцию $\overline{\varphi}$ (напомним, что ковариационный оператор сопряженно линеен [100] (вып. 9)). Это дает основание определить ковариационную функцию $K_x(s,\ t)$ обобщенной случайной функции $X(t)$ как обобщенную функцию двух переменных, определив ее равенством

$$K_x(s,\ t)\,\psi_s\overline{\varphi}_t = M\,(X^0(s)\,\psi_s)\,(\overline{X^0(t)\,\varphi_t}),$$

где индексы s и t у функций ψ и φ показывают, что $K_x(s,\ t)$ действует на функцию $\psi \in \Phi_\infty$, рассматриваемую как функция переменной s, и на функцию $\overline{\varphi} \in \Phi_\infty$, рассматриваемую как функция переменной t. Таким образом, ковариационная функция обобщенной случайной функции представляет собой (неслучайную) обобщенную функцию двух переменных, которая при каждом фиксированном значении одной из переменных является обобщенной функцией другой. В частности, ковариационная функция $K_x(s,\ t) = \nu(s)\,\delta(s-t)$ белого шума $X(t)$ представляет собой обобщенную функцию s и t, которая является обобщенной функцией s при фиксированном t и обобщенной функцией t при фиксированном s.

2.4.10. Интегралы, содержащие белый шум. Пример 18 показывает, что существуют белые шумы, которые можно определить как слабые с. к. пределы последовательностей обычных с. к. непрерывных случайных функций. При этом для каждой такой последовательности случайных функций $\{X_n(t)\}$ существует с. к. предел последовательности с. к. интегралов

$$\int_T \varphi(\tau) X_n(\tau)\, d\tau \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

для любой функции $\varphi(t)$ выбранного класса Φ. Естественно принять этот с. к. предел за интеграл от того белого шума $V(t)$, к которому слабо с. к. сходится последовательность $\{X_n(t)\}$:

$$\int_T \varphi(\tau) V(\tau)\, d\tau = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_T \varphi(\tau) X_n(\tau)\, d\tau. \tag{77}$$

Таким образом, мы приходим к точному определению интеграла от белого шума: *интегралом от белого шума* $V(t)$, который можно рассматривать как слабый с. к. предел последовательности с. к. интегрируемых случайных функций $\{X_n(t)\}$, называется с. к. предел (77) интегралов от случайных функций $X_n(t)$. Это определение вполне аналогично определению интеграла от δ-функции как предела последовательности соответствующих интегралов, содержащих вместо δ-функции единичный импульс конечной отличной от нуля длительности (*ТВ*, приложение 1). Таким образом, понятие белого шума в теории случайных функций в некотором смысле аналогично понятию δ-функций в математическом анализе. Другая трактовка интегралов, содержащих белый шум, будет дана в п. 3.1.7.

Для интегралов, содержащих белый шум, справедлива формула (70), определяющая ковариационную функцию интеграла. Чтобы убедиться в этом, достаточно найти предел последовательности интегралов (70) для случайных функций последовательности $\{X_n(t)\}$, слабо с. к. сходящихся к этому белому шуму (такой предельный переход рассмотрен в примере 18). Результат получится, конечно, тот же, что и при непосредственной подстановке в формулу (70) ковариационной функции белого шума $K_v(t_1, t_2) = \nu(t_1)\delta(t_1 - t_2)$. Действительно, применив формулу (70) к интегралу от белого шума V:

$$Y(t) = \int_T g(t,\ \tau) V(\tau)\, d\tau,$$

получим

$$K_y(t_1,\ t_2) = \int_T \int_T g(t_1,\ \tau_1)\nu(\tau_1)\delta(\tau_1 - \tau_2) g(t_2,\ \tau_2)^* d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= \int_T g(t_1,\ \tau)\nu(\tau) g(t_2,\ \tau)^* d\tau.$$

Теперь мы можем установить основное свойство интенсивности белого шума.

Из неотрицательности дисперсии скалярной случайной величины и неотрицательной определенности ковариационной матрицы случайного вектора следует неотрицательность интенсивности скалярного белого шума и неотрицательная определенность матрицы интенсивности векторного белого шума. Действительно, если это условие не выполняется в некотором интервале изменения t, то, взяв в предыдущей формуле при $t_1 = t_2 = t$ функцию $g(t, \tau) = \varphi(\tau)$ отличной от нуля только на этом интервале, получим отрицательную дисперсию или соответственно отрицательно определенную ковариационную матрицу случайной величины

$$Y(t) = \int_T \varphi(\tau) V(\tau)\, d\tau.$$

Таким образом, *интенсивность белого шума неотрицательна* (представляет собой неотрицательно определенную матрицу в случае векторного белого шума).

Пример 19. Найти ковариационную функцию интеграла от белого шума $V(t)$ с ковариационной функцией $K_v(t_1, t_2) = \delta(t_1 - t_2)$:

$$Y(t) = \int_{t_0}^{t} V(\tau)\, d\tau.$$

По формуле (65) находим

$$K_y(t_1; t_2) = \int_{t}^{t_1} d\tau_1 \int_{t_0}^{t_2} \delta(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_2 = \min(t_1, t_2).$$

2.4.11. Производные белого шума. Если пользоваться обобщенными функциями, то, как известно, практически любая функция и, в частности, δ-функция неограниченно дифференцируемы (*ТВ*, приложение 1). Поэтому ковариационная функция белого шума имеет производные всех порядков как обобщенные функции. Это дает основание считать, что белый шум имеет производные всех порядков, представляющие собой в общем случае обобщенные случайные функции.

Пусть $V(t)$ — белый шум постоянной интенсивности ν. Его ковариационная функция определяется формулой $K_v(t_1, t_2) = \nu\delta(t_1 - t_2)$. Из (59) следует, что ковариационная функция p-й производной $V^{(p)}(t)$ белого шума $V(t)$ определяется формулой

$$K_{v^{(p)}}(t_1, t_2) = (-1)^p \nu\delta^{(2p)}(t_1 - t_2).$$

Точно так же из (59) следует, что взаимная ковариационная функция производных $V^{(p)}(t)$ и $V^{(q)}(t)$ белого шума $V(t)$ определяется формулой

$$K_{v^{(p)} v^{(q)}}(t_1, t_2) = (-1)^q \nu\delta^{(p+q)}(t_1 - t_2).$$

Для читателей, знакомых с элементами функционального анализа, приведем строгое определение производных обобщенной случайной функции. В соответствии с общим определением производной в теории обобщенных функций определим *производную порядка p обобщенной случайной функции* $X(t)$ формулой (см. [40], [102] (вып. 11) и п. 2.4.9)

$$X^{(p)}(t)\varphi=(-1)^p X(t)\varphi^{(p)}, \qquad \varphi\in\Phi_\infty.$$

Согласно этому определению любая обобщенная (в частности, обычная с. к. непрерывная) случайная функция имеет производные всех порядков, представляющие собой обобщенные случайные функции, так как $\varphi^{(p)}\in\Phi_\infty$ при любом натуральном p по определению.

Все выведенные в п. 2.4.4. формулы для математических ожиданий, ковариационных функций и моментов второго порядка с. к. производных случайных функций распространяются и на производные обобщенных случайных функций.

Согласно определению математического ожидания обобщенной случайной функции в п. 2.4.9 математическое ожидание p-й производной обобщенной случайной функции $X(t)$ определяется формулой

$$m_{x^{(p)}}\varphi=MX^{(p)}(t)\varphi=(-1)^p MX(t)\varphi^{(p)}=(-1)^p m_x\varphi^{(p)}.$$

Но согласно определению p-й производной неслучайной обобщенной функции [40]

$$(-1)^p m_x\varphi^{(p)}=m_x^{(p)}\varphi.$$

Следовательно,

$$m_{x^{(p)}}(t)=m_x^{(p)}(t).$$

Точно так же ковариационная функция p-й производной обобщенной случайной функции $X(t)$ определяется формулой (п. 2.4.9)

$$K_{x^{(p)}}(s,\ t)\psi_s\overline{\varphi}_t=M\left(X^{0(p)}(s)\psi_s\right)\left(\overline{X^{0(p)}(t)\varphi_t}\right)=$$
$$=M\left(X^0(s)\psi_s^{(p)}\right)\left(\overline{X^0(t)\varphi_t^{(p)}}\right)=K_x(s,\ t)\psi_s^{(p)}\overline{\varphi}_t^{(p)}.$$

Но согласно определению p-й производной неслучайной обобщенной функции

$$K_x(s,\ t)\psi_s^{(p)}=(-1)^p\frac{\partial^p K_x(s,\ t)}{\partial s^p}\psi_s,$$
$$K_x(s,\ t)\psi_s^{(p)}\overline{\varphi}_t^{(p)}=(-1)^p\frac{\partial^p K_x(s,\ t)}{\partial s^p}\psi_s\overline{\varphi_t^{(p)}}=\frac{\partial^{2p}K_x(s,\ t)}{\partial s^p\,\partial t^p}\psi_s\overline{\varphi}_t.$$

Следовательно,

$$K_{x^{(p)}}(s,\ t)=\frac{\partial^{2p}K_x(s,\ t)}{\partial s^p\,\partial t^p}.$$

Аналогично выводится формула для взаимной ковариационной функции p-й и q-й производных обобщенной случайной функции $X(t)$:

$$K_{x^{(p)}x^{(q)}}(s,\ t)=\frac{\partial^{p+q}K_x(s,\ t)}{\partial s^p\,\partial t^q}.$$

Из выведенных формул вытекают, в частности, приведенные формулы для ковариационных функций производных белого шума постоянной интенсивности.

ЗАДАЧИ

2.1. В условиях примера 1.1 найти дисперсию и ковариационную функцию выходного сигнала, приняв начальные условия нулевыми, в случае, когда входной сигнал представляет собой белый шум постоянной интенсивности.

2.2. Показать, что в условиях примера 1.3 для входного сигнала в виде белого шума постоянной интенсивности ν и нулевых начальных условиях ковариационная функция выходного сигнала определяется формулой

$$K(t_1,\ t_2)=\frac{\nu}{2T}\left(e^{-\frac{|t_1-t_2|}{T}}-e^{-\frac{t_1+t_2}{T}}\right).$$

2.3. Доказать, что в условиях примера 1.5 при входном сигнале X в виде белого шума постоянной интенсивности ν и нулевых начальных условиях ковариационная функция выходного сигнала определяется формулой

$$K(t_1,\ t_2)=\frac{\nu}{4T\zeta}\left\{\frac{1}{1-\zeta^2}\left[e^{-\frac{\zeta|t_1-t_2|}{T}}-e^{-\frac{\zeta(t_1+t_2)}{T}}\right]\cos\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}(t_1-t_2)+\right.$$
$$+e^{-\frac{\zeta(t_1+t_2)}{T}}\left[\frac{\zeta^2}{1-\zeta^2}\cos\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}(t_1+t_2)-\right.$$
$$\left.-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}(t_1+t_2)\right]-e^{-\frac{\zeta(t_1+t_2)}{T}}\times$$
$$\left.\times\left[\frac{\zeta^2}{1-\zeta^2}\cos\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}(t_1-t_2)-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}|t_1-t_2|\right]\right\}.$$

2.4. Найти выражение для ковариационной функции векторного процесса системы примера 1.9 при входном сигнале в виде белого шума постоянной интенсивности.

2.5. Показать, что для системы примера 1.5 при $\zeta=0$, нулевых начальных условиях и входном сигнале в виде белого шума интенсивности ν ковариационная функция выходного сигнала определяется формулой

$$K(t_1,\ t_2)=\frac{\nu}{2T}\left[\frac{\min(t_1,\ t_2)}{T}\cos\frac{t_1-t_2}{T}-\sin\frac{\min(t_1,\ t_2)}{T}\cos\frac{\max(t_1,\ t_2)}{T}\right].$$

2.6. Найти ковариационную функцию и дисперсию обобщенной координаты линейной системы с одной степенью свободы задачи 1.3 при нулевых начальных условиях и обобщенной силе в виде белого шума постоянной интенсивности.

2.7. Показать, что дисперсия переменной состояния Z_1 нестационарной системы задачи 1.4 при входном сигнале в виде белого шума постоянной интенсивности ν и нулевых начальных условиях определяется формулой

$$D_1=\frac{\nu t}{4\gamma^2}\left\{\frac{3t^2}{4(1-\gamma^2)}-t_0^2\left[\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2\gamma}\frac{1}{2(1-\gamma)}+\left(\frac{t_0}{t}\right)^{2\gamma}\frac{1}{2(1+\gamma)}-1\right]\right\}.$$

Найти также дисперсию переменной состояния Z_2 и ковариацию значений Z_1 и Z_2 в один и тот же момент времени.

2.8. Показать, что дисперсии и ковариация значений Z_1 и Z_2 в один и тот же момент времени в нестационарной системе задачи 1.5 при нулевых начальных условиях и входном сигнале в виде белого шума постоянной интенсивности ν определяются формулами

$$k_{11}=\nu\int_{t_0}^{t}\tau^2\sin^2\ln\frac{t}{\tau}\,d\tau,$$

$$k_{12}=\frac{\nu}{2}\int_{t_0}^{t}\tau\sin 2\ln\frac{t}{\tau}\,d\tau,$$

$$k_{22}=\nu\int_{t_0}^{t}\cos^2\ln\frac{t}{\tau}\,d\tau.$$

2.9. Найти дисперсию выходного сигнала нестационарной системы задачи 1.6 при нулевых начальных условиях и входном сигнале в виде белого шума постоянной интенсивности.

2.10. Доказать, что ковариационная функция случайного процесса X, связанного с белым шумом V единичной интенсивности линейным дифференциальным уравнением

$$a_1(t)\dot{X}+a_0(t)X=V,\quad X(t_0)=0, \tag{I}$$

определяется формулой [56]

$$K(t_1,\ t_2)=\begin{cases} q_1(t_2)\,q_2(t_1) & \text{при}\quad t_1<t_2,\\ q_1(t_1)\,q_2(t_2) & \text{при}\quad t_1>t_2,\end{cases} \tag{II}$$

где

$$q_1(t)=\exp\left\{-\int_{t_0}^{t}\frac{a_0(\tau)}{a_1(\tau)}\,d\tau\right\},\quad q_2(t)=q_1(t)\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{a_1^2(\tau)\,q_1^2(\tau)}.$$

Доказать, что любую случайную функцию, ковариационная функция которой выражается формулой вида (II), можно представить как случайную функцию, связанную с некоторым белым шумом линейным дифференциальным уравнением (I). Формула (II) определяет общий вид ковариационной функции нормально распределенного скалярного марковского процесса. Рассмотреть частный случай $a_0^2=\alpha/2D$, $a_1^2=1/2\alpha D$, $t_0=-\infty$.

2.11. Случайная функция $Y(t)$ представляет собой результат преобразования скалярной случайной функции $X(t)$ случайным линейным интегральным оператором с весовой функцией $Q(t,\ \tau)$:

$$Y(t)=\int_T Q(t,\ \tau)\,X(\tau)\,d\tau.$$

Случайные функции $X(t)$ и $Q(t,\ \tau)$ независимы, $m_x(t)$, $m_Q(t,\ \tau)$ и $K_x(t_1,\ t_2)$, $K_Q(t_1,\ \tau_1,\ t_2,\ \tau_2)$ — их математические ожидания и ковариационные функции. Доказать справедливость следующих формул для математического ожидания и ковариационной функции $Y(t)$ [56]:

$$m_y(t)=\int_T m_Q(t,\ \tau)\,m_x(\tau)\,d\tau,$$

$$K_y(t_1,\ t_2)=\int_T\int_T\{m_Q(t_1,\ \tau_1)\,\overline{m_Q(t_2,\ \tau_2)}\,K_x(\tau_1,\ \tau_2)+$$

$$+K_Q(t_1,\ \tau_1,\ t_2,\ \tau_2)\,[m_x(\tau_1)\,\overline{m_x(\tau_2)}+K_x(\tau_1,\ \tau_2)]\}\,d\tau_1\,d\tau_2.$$

Для действительных скалярных случайных функций $X(t)$ и $Q(t,\ \tau)$ вывести аналогичные формулы для моментов и семиинвариантов $Y(t)$.

2.12. Показать, что моменты первого и второго порядков случайного процесса $Y(t)$ в системе

$$\dot{Y}+UY=X,$$

где U — случайная величина с плотностью

$$f(u)=\frac{\theta 1(u)}{\sqrt{2\pi D}}\exp\left\{-\frac{(u-m)^2}{2D}\right\}\left(\frac{1}{\theta}=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{m}{\sqrt{D}}\right)\right),$$

$X=X(t)$ — случайный процесс с математическим ожиданием $m_x(t)$ и вторым моментом $\Gamma_x(t_1, t_2)$, определяются формулами [56]

$$m_y(t)=\int_{t_0}^{t} e^{-m(t-\tau)+\frac{D}{2}(t-\tau)^2}\left[\frac{1}{2}-\Phi\left(\sqrt{D}\,(t-\tau)-\frac{m}{\sqrt{D}}\right)\right]m_x(\tau)\,d\tau,$$

$$\Gamma_y(t_1, t_2)=\theta\int_{t_0}^{t_1}d\tau_1\int_{t_0}^{t_2}e^{-m(t_1+t_2-\tau_1-\tau_2)+\frac{D}{2}(t_1+t_2-\tau_1-\tau_2)^2}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2}-\Phi\left(\sqrt{D}\,(t_1+t_2-\tau_1-\tau_2)-\frac{m}{\sqrt{D}}\right)\right]\Gamma_x(\tau_1, \tau_2)\,d\tau_2.$$

Рассмотреть случай, когда $X(t)$ является белым шумом постоянной интенсивности ν, а $t_0=-\infty$. У к а з а н и е. Воспользоваться формулами задачи 2.11.

2.13. Дано нелинейное интегральное преобразование действительной случайной функции $X(t)$ (в общем случае векторной):

$$Y(t)=\int_T \varphi(X(\tau), \tau, t)\,d\tau,$$

где $\varphi(x, \tau, t)$ — в общем случае комплексная векторная функция. Показать, что моменты первого и второго порядков случайной функции $Y(t)$ определяются формулами [85, 56]

$$m_y(t)=\int_T d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x, \tau, t)\,f_1(x; \tau)\,dx,$$

$$\Gamma_y(t_1, t_2)=\int_T\int_T d\tau_1\,d\tau_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_1, \tau_1, t_1)\,\varphi(x_2, \tau_2, t_2)^*\,f_2(x_1, x_2; \tau_1, \tau_2)\,dx_1\,dx_2,$$

где $f_1(x; \tau)$ и $f_2(x_1, x_2; \tau_1, \tau_2)$ — одномерная и двумерная плотности случайной функции $X(t)$. Выписать выражения для моментов и семиинвариантов высших порядков.

2.14. Нелинейное преобразование действительной (скалярной или векторной) случайной функции $X(t)$,

$$Y(t)=\int_T\ldots\int_T\varphi(t, X(\tau_1), \ldots, X(\tau_r), \tau_1, \ldots, \tau_r)\,d\tau_1\ldots d\tau_r,$$

называется приводимым к линейному, так как функция $Y(t)$ представляет собой результат линейного преобразования случайной функции $U(t, \tau_1, \ldots$ $\ldots, \tau_r)=\varphi(t, X(\tau_1), \ldots, X(\tau_r), \tau_1, \ldots, \tau_r)$. Преобразование в задаче 2.13 является частным случаем преобразования, приводимого к линейному. Показать, что математическое ожидание и начальный момент второго порядка случайной функции $Y(t)$ определяются формулами [56]:

$$m_y(t) = \int_T m_u(t, \tau_1, \ldots, \tau_r)\, d\tau_1 \ldots d\tau_r,$$

$$\Gamma_y(t_1, t_2) = \int_T \int_T \ldots \int_T \int_T \Gamma_u(t_1, t_2, \tau_1, \ldots, \tau_r, \tau_1', \ldots, \tau_r')\, d\tau_1 \ldots d\tau_r\, d\tau_1' \ldots d\tau_r',$$

где

$$m_u(t, \tau_1, \ldots, \tau_r) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, x_1, \ldots, x_r, \tau_1, \ldots, \tau_r)\, f_r(x_1, \ldots, x_r; \tau_1, \ldots, \tau_r)\, dx_1 \ldots dx_r,$$

$$\Gamma_u(t_1, t_2, \tau_1, \ldots, \tau_r, \tau_1', \ldots, \tau_r') = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_1, x_1, \ldots, x_r, \tau_1, \ldots, \tau_r) \times$$

$$\times \varphi(t_2, x_1', \ldots, x_r', \tau_1', \ldots, \tau_r')^* f_{2r}(x_1, \ldots, x_r, x_1', \ldots, x_r'; \tau_1, \ldots, \tau_r, \tau_1', \ldots, \tau_r')\, dx_1 \ldots dx_r\, dx_1' \ldots dx_r',$$

а f_n — n-мерная плотность случайной функции $X(t)$, $n = r$, $2r$.

2.15. Доказать, что математическое ожидание и ковариационная функция случайной функции

$$Y(t) = \int_T \int_T g(t, \tau_1, \tau_2)\, X(\tau_1)\, X(\tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2,$$

где $g(t, \tau_1, \tau_2)$ — данная функция, $X(t)$ — действительная нормально распределенная случайная функция с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией $K_x(t_1, t_2)$, определяются следующими формулами [56]:

$$m_y(t) = \int_T \int_T g(t, \tau_1, \tau_2)\, K_x(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2,$$

$$K_y(t_1, t_2) = \int_T \int_T \int_T \int_T g(t_1, \tau_1', \tau_2')\, g(t_2, \tau_1'', \tau_2'')^* \left[K_x(\tau_1', \tau_1'')\, K_x(\tau_2', \tau_2'') + \right.$$

$$\left. + K_x(\tau_1', \tau_2'')\, K_x(\tau_1'', \tau_2')\right] d\tau_1'\, d\tau_1''\, d\tau_2'\, d\tau_2''.$$

Дать обобщение на случай

$$Y(t) = \int_T \int_T X(\tau_1)^{\mathrm{T}}\, g(t, \tau_1, \tau_2)\, X(\tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2,$$

где $g(t, \tau_1, \tau_2)$ — $n \times n$-матрица, $X(t)$ — n-мерная векторная действительная нормально распределенная случайная функция.

2.16. Показать, что в условиях задачи 2.13 при $\varphi(x, \tau, t) = e^x$, $T = (0, t)$ для случайной нормально распределенной функции $X(t)$ с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией $K_x(t_1, t_2)$ справедливы формулы

$$m_y(t) = \int_0^t e^{\frac{1}{2} K_x(\tau_1, \tau_1)}\, d\tau_1,$$

$$K_y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{\frac{1}{2}[K_x(\tau_1, \tau_1) + K_x(\tau_2, \tau_2)]} \left\{e^{K_x(\tau_1, \tau_2)} - 1\right\} d\tau_1\, d\tau_2.$$

Дать обобщение на случай $\varphi(x, \tau, t) = e^{a^{\mathrm{T}} x}$, a и x — n-мерные векторы.

2.17. Показать, что в условиях задачи 2.13 при $\varphi(x, \tau, t) = \operatorname{sgn} x$, $T = (0, t)$ для нормально распределенного скалярного случайного процесса $X(t)$, обладающего нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $r(\tau)$, $\tau = t_1 - t_2$, имеет место следующая формула для дисперсии [114]:

$$D_y(t) = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^t (t-\tau)\arcsin r(\tau)\,d\tau.$$

2.18. Показать, что математическое ожидание и второй начальный момент случайной функции

$$Y(t) = \int\limits_0^t \sum_{h,\ l=1}^n a_{hl} X_h(\tau)\, X_l(\tau)\,d\tau,$$

где $X(t) = [X_1(t) \ldots X_n(t)]^T$ — нормально распределенный случайный процесс, компоненты которого имеют математические ожидания $m_l(t)$, ковариационные и взаимные функции $K_{hl}(t_1, t_2)$, определяются формулами

$$m_y(t) = \int\limits_0^t \sum_{h,\ l=1}^n a_{hl}\,[m_h(\tau)\, m_l(\tau) + K_{hl}(\tau, \tau)]\,d\tau,$$

$$\begin{aligned}\Gamma_y(t_1, t_2) = \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} \sum_{h,\ l,\ p,\ q=1}^n a_{hl}a_{pq}\,[&K_{hl}(\tau_1, \tau_1)\, K_{pq}(\tau_2, \tau_2) + \\ &+ K_{hp}(\tau_1, \tau_2)\, K_{lq}(\tau_1, \tau_2) + K_{hq}(\tau_1, \tau_2)\, K_{lp}(\tau_1, \tau_2) + \\ &+ K_{hl}(\tau_1, \tau_1)\, m_p(\tau_1)\, m_q(\tau_2) + K_{hp}(\tau_1, \tau_2)\, m_l(\tau_1)\, m_q(\tau_2) + \\ &+ K_{hq}(\tau_1, \tau_2)\, m_l(\tau_1)\, m_p(\tau_2) + K_{lp}(\tau_1, \tau_2)\, m_h(\tau_1)\, m_q(\tau_2) + \\ &+ K_{lq}(\tau_1, \tau_2)\, m_h(\tau_1)\, m_p(\tau_2) + K_{pq}(\tau_2, \tau_2)\, m_h(\tau_1)\, m_l(\tau_1)]\,d\tau_1\,d\tau_2.\end{aligned}$$

Указание. Воспользоваться формулами задачи 2.14.

2.19. Показать, что относительное время, в течение которого случайный процесс $X(t)$ превосходит данную функцию $a(t)$ на интервале времени (t_0, t), выражается формулой

$$Y(t) = \frac{1}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^t \mathbf{1}\,[X(\tau) - a(\tau)]\,d\tau.$$

Пользуясь формулами задачи 2.13, доказать, что математическое ожидание и дисперсия случайной функции $Y(t)$ определяются формулами [56, 96]

$$m_y(t) = \frac{1}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^t d\tau \int\limits_{a(\tau)}^\infty f_1(x; \tau)\,dx,$$

$$D_y(t) = \frac{1}{(t-t_0)^2}\int\limits_{t_0}^t\int\limits_{t_0}^t d\tau_1\,d\tau_2 \int\limits_{a(\tau_1)}^\infty\int\limits_{a(\tau_2)}^\infty [f_2(x_1, x_2; \tau_1, \tau_2) - f_1(x_1; \tau_1)\, f_1(x_1; \tau_2)] \times dx_1\,dx_2,$$

где $f_1(x; \tau)$ и $f_2(x_1, x_2; \tau_1, \tau_2)$ — одномерная и двумерная плотности случайного процесса $X(t)$.

2.20. Показать, что число пересечений процессом $X(t)$ данной кривой $a(t)$ на интервале времени (t_0, t) определяется формулой

$$Z(t) = \int\limits_{t_0}^t |\dot{X}(\tau) - \dot{a}(\tau)|\,\delta(X(\tau) - a(\tau))\,d\tau. \qquad \text{(I)}$$

Доказать, что момент α_r $(r=0, 1, 2, \ldots)$ числа пересечений $Z(t)$ определяется формулой [101]

$$\alpha_r = \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \ldots \int_{t_0}^{t} d\tau_r \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty y_1 \ldots y_r f_r(a, y_1, \ldots, a, y_r; \tau_1, \ldots, \tau_r)\, dy_1 \ldots dy_r, \tag{II}$$

где $f_r(x_1, y_1, \ldots, x_r, y_r; \tau_1, \ldots, \tau_r)$ — r-мерная плотность векторной случайной функции $[X(\tau)\ Y(\tau)]^T$, $Y(\tau)=\dot X(\tau)$.

При вычислении интеграла (II) необходимо учитывать δ-функции $\delta(\tau_p-\tau_q)$ в выражении подынтегральной функции интеграла по переменным $\tau_1, \ldots, \tau_r$ [101].

Примечание. Формулы (I) и (II) справедливы лишь в том случае, когда почти все реализации случайного процесса $X(t)$ непрерывны и имеют непрерывные первые производные. Для непрерывности почти всех реализаций случайного процесса $X(t)$ достаточно, чтобы его двумерная плотность при $h=|t_1-t_2|<1/2$ удовлетворяла условию [102] (вып. 8)

$$\iint\limits_{|x_2-x_1|\geqslant \varepsilon(h)} f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2 < \delta(h), \tag{III}$$

где $\varepsilon(t)$ и $\delta(t)$ — такие непрерывные в нуле положительные функции, что

$$\sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon(2^{-p}) < \infty, \quad \sum_{p=1}^{\infty} 2^p \delta(2^{-p}) < \infty. \tag{IV}$$

Для дифференцируемости почти всех реализаций случайного процесса $X(t)$ достаточно, чтобы было выполнено условие (III) и, кроме того, чтобы его трехмерная плотность при $h=|t_1-t_2|=|t_2-t_3|<1/2$ удовлетворяла условию [102] (вып. 8)

$$\iiint\limits_{|x_3-2x_2+x_1|\geqslant \varepsilon_1(h)} f_3(x_1, x_2, x_3; t_1, t_2, t_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 < \delta_1(h), \tag{V}$$

где $\varepsilon_1(t)$ и $\delta_1(t)$ — такие непрерывные в нуле положительные функции, для которых справедливо второе неравенство (IV).

Для нормально распределенного случайного процесса $X(t)$ из (III) и (IV) вытекают следующие достаточные условия, которым должна удовлетворять его ковариационная функция [102] (вып. 8):

1) для непрерывности почти всех реализаций

$$K_x(t+\tau, t+\tau) - 2K_x(t+\tau, t) + K_x(t, t) < c|\tau|^\nu$$

при некоторых c, $\nu > 0$;

2) для дифференцируемости почти всех реализаций $X(t)$

$$K_x(t+2\tau, t+2\tau) - 4K_x(t+2\tau, t+\tau) + 4K_x(t+\tau, t+\tau) + $$
$$+ 2K_x(t+2\tau, t) - 4K_x(t+\tau, t) + K_x(t, t) < c_1|\tau|^{2+\mu}$$

при некоторых c_1, $\mu > 0$.

Первое из этих неравенств достаточно и в более общем случае, когда двумерное распределение процесса $X(t)$ нормально, а второе достаточно, когда трехмерное распределение процесса $X(t)$ нормально (напомним, что из нормальности n-мерного распределения вытекает и нормальность m-мерного распределения при любом $m < n$ (*ТВ*, § 4.4), однако n-мерное распределение может быть нормальным, в то время как m-мерное распределение не является нормальным ни при каком $m > n$ (*ТВ*, пример 4.23)).

2.21. Показать, что число стационарных точек процесса $X(t)$ в интервале (t_0, t) определяется формулой

$$Y_1(t)=\int_{t_0}^{t}\delta(\dot{X}(\tau))\,|\ddot{X}(\tau)|\,d\tau.$$

Вывести формулу для момента α_r $(r=0, 1, 2, \ldots)$ числа стационарных точек. Дать обобщение на случай векторного процесса [91].

2.22. Показать, что число превышений процессом $X(t)$ кривой $a(t)$ на интервале времени (t_0, t) определяется формулой

$$Y(t)=\int_{t_0}^{t}|\dot{X}(\tau)-\dot{a}(\tau)|\,1(\dot{X}(\tau)-\dot{a}(\tau))\,\delta(X(\tau)-a(\tau))\,d\tau.$$

Доказать, что математическое ожидание и дисперсия случайной функции $Y(t)$ вычисляются по формулам [56]

$$m_y(t)=\int_{t_0}^{t}d\tau\int_{0}^{\infty}\eta f_1(a(\tau),\ \dot{a}(\tau)+\eta;\ \tau)\,d\eta,$$

$$D_y(t)=\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}d\tau_1\,d\tau_2\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\eta_1\eta_2\,[f_2(a(\tau_1),\ \dot{a}(\tau_1)+\eta_1,\ a(\tau_2),\ \dot{a}(\tau_2)+\eta_2;\ \tau_1,\ \tau_2)-$$
$$-f_1(a(\tau_1),\ \dot{a}(\tau_1)+\eta_1;\ \tau_1)\,f_1(a(\tau_2),\ \dot{a}(\tau_2)+\eta_2;\ \tau_2)]\,d\eta_1\,d\eta_2,$$

где $f_1(x,\ \dot{x};\ \tau_1,\ \tau_2)$ и $f_2(x_1,\ \dot{x}_1,\ x_2,\ \dot{x}_2;\ \tau_1,\ \tau_2)$ — одномерная и двумерная плотности векторного процесса $[X(t)\ \dot{X}(t)]^{\mathrm{T}}$. Дать обобщение формул на случай векторного процесса $X(t)$ [101].

ГЛАВА 3

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 3.1. Стохастические интегралы от неслучайных функций

3.1.1. Процессы с некоррелированными приращениями. Случайный процесс $X(t)$ называется *процессом с некоррелированными приращениями*, если его приращения $X_{t_2}-X_{t_1}$ и $X_{t_4}-X_{t_3}$ на любых непересекающихся интервалах, $[t_1, t_2)\cap[t_3, t_4)=\varnothing$ (т. е. $t_1<t_2\leqslant t_3<t_4$), не коррелированы.

Из этого определения следует, что приращения процесса с некоррелированными приращениями на любых конечных интервалах имеют конечные моменты второго (а следовательно, и первого) порядка. При этом сам процесс $X(t)$ может и не иметь конечных математического ожидания и момента второго порядка.

Однако, если в некоторый момент t_0 значение процесса с некоррелированными приращениями $X(t)$ почти наверное равно нулю, $X_{t_0}\overset{\text{п. н.}}{=}0$, то процесс $X(t)$ имеет конечные математическое ожидание и момент второго порядка, так как его значение в любой момент X_t совпадает с его приращением на интервале $[t_0, t)$ при $t>t_0$ и с его приращением на интервале $[t, t_0)$, взятым с обратным знаком, при $t<t_0$. В дальнейшем будем рассматривать только такие процессы с некоррелированными приращениями. Любой процесс с некоррелированными приращениями $X(t)$ приводится к такому процессу. Действительно, случайный процесс $Y(t)=X(t)-X_{t_0}$ представляет собой процесс с некоррелированными приращениями, обладающий требуемым свойством $Y_{t_0}=0$.

Пусть $X(t)$ — процесс с некоррелированными приращениями и $X_{t_0}\overset{\text{п. н.}}{=}0$. Докажем, что значение X_t процесса $X(t)$ в любой момент t не коррелировано с его будущими приращениями на интервалах, следующих за моментом t_0, и с его прошлыми приращениями на интервалах, предшествующих моменту t_0:

$$MX_t^0\,(X_{t_2}^{0*}-X_{t_1}^{0*})=0$$

при $t\leqslant t_1<t_2$, $t_1\geqslant t_0$ и при $t_1<t_2\leqslant t$, $t_2\leqslant t_0$.

► Это следует непосредственно из определения процесса с некоррелированными приращениями и из того факта, что $X_t\overset{\text{п. н.}}{=}X_t-X_{t_0}$ есть приращение процесса $X(t)$ на интервале $[t_0, t)$, не пересекающемся с $[t_1, t_2)$, при $t>t_0$ и взятое с обратным знаком приращение процесса $X(t)$ на интервале $[t, t_0)$, не пересекающемся с $[t_1, t_2)$, при $t < t_0$. ◀

Введем функцию

$$k(t) = \begin{cases} MX_t^0 X_t^{0*} & \text{при} \quad t > t_0, \\ 0 & \text{при} \quad t = t_0, \\ -MX_t^0 X_t^{0*} & \text{при} \quad t < t_0. \end{cases}$$

Докажем, что ковариационная матрица приращения $X_{t_2} - X_{t_1}$ процесса $X(t)$ на любом интервале и ковариационная функция процесса $X(t)$ определяются формулами

$$M\left(X_{t_2}^0 - X_{t_1}^0\right)\left(X_{t_2}^{0*} - X_{t_1}^{0*}\right) = k(t_2) - k(t_1),$$

$$K_x(t_1, t_2) = \begin{cases} k(\min(t_1, t_2)) & \text{при} \quad t_1, t_2 > t_0, \\ 0 & \text{при} \quad t_1 \leqslant t_0 \leqslant t_2 \text{ и } t_2 \leqslant t_0 \leqslant t_1, \\ -k(\max(t_1, t_2)) & \text{при} \quad t_1, t_2 < t_0. \end{cases} \quad (1)$$

Сначала докажем справедливость второй формулы (1).

▶ По определению имеем при $t_0 < t_1 < t_2$

$$K_x(t_1, t_2) = MX_{t_1}^0 X_{t_2}^{0*} = MX_{t_1}^0 X_{t_1}^{0*} + MX_{t_1}^0\left(X_{t_2}^{0*} - X_{t_1}^{0*}\right) = k(t_1),$$

так как по доказанной теореме $MX_{t_1}^0\left(X_{t_2}^{0*} - X_{t_1}^{0*}\right) = 0$ при $t_0 < t_1 < t_2$. При $t_1 < t_0 < t_2$ $-X_{t_1}$ и X_{t_2} представляют собой приращения процесса $X(t)$ на непересекающихся интервалах $[t_1, t_0)$ и $[t_0, t_2)$. При $t_1 = t_0$ или $t_2 = t_0$ $X_{t_1} = X_{t_0} \overset{\text{п. н.}}{=} 0$ или $X_{t_2} = X_{t_0} \overset{\text{п. н.}}{=} 0$. Следовательно, при $t_1 \leqslant t_0 \leqslant t_2$

$$K_x(t_1, t_2) = MX_{t_1}^0 X_{t_2}^{0*} = 0$$

по определению процесса с некоррелированными приращениями или вследствие равенства нулю почти наверное X_{t_1} или X_{t_2}. Наконец, при $t_1 < t_2 < t_0$

$$K_x(t_1, t_2) = MX_{t_1}^0 X_{t_2}^{0*} = MX_{t_2}^0 X_{t_2}^{0*} - M\left(X_{t_2}^0 - X_{t_1}^0\right) X_{t_2}^{0*} = -k(t_2),$$

так как по доказанной теореме $M\left(X_{t_2}^0 - X_{t_1}^0\right) X_{t_2}^{0*} = 0$ при $t_1 < t_2 < t_0$. При $t_1 > t_2$ величины t_1 и t_2 во всех предыдущих формулах меняются местами. Этим завершается доказательство второй формулы (1).

Переходим к доказательству справедливости первой формулы (1). На основании второй формулы (1)

$$\begin{aligned} &M\left(X_{t_2}^0 - X_{t_1}^0\right)\left(X_{t_2}^{0*} - X_{t_1}^{0*}\right) = \\ &= K_x(t_2, t_2) - K_x(t_1, t_2) - K_x(t_2, t_1) + K_x(t_1, t_1) = \\ &= k(t_2) - k(t_1) - k(t_1) + k(t_1) = k(t_2) - k(t_1) \quad \text{при} \quad t_0 < t_1 < t_2, \\ &= k(t_2) - 0 - 0 - k(t_1) = k(t_2) - k(t_1) \quad \text{при} \quad t_1 \leqslant t_0 \leqslant t_2, \\ &= -k(t_2) + k(t_2) + k(t_2) - k(t_1) = k(t_2) - k(t_1) \quad \text{при} \quad t_1 < t_2 < t_0. \end{aligned}$$ ◀

Изучим свойства функции $k(t)$. Из определения функции $k(t)$ следует, что при $t > t_0$ она представляет собой ковариационную матрицу (дисперсию в случае скалярного процесса $X(t)$) значения процесса $X(t)$ в момент t, а при $t < t_0$ — взятую с обратным знаком ковариационную матрицу (дисперсию) значения процесса $X(t)$ в момент t. Из первой формулы (1) следует, что приращение функции $k(t)$ на любом интервале представляет собой ковариационную матрицу (дисперсию) приращения процесса $X(t)$ на этом интервале. Из этих фактов следует, что $k(t)$ представляет собой неубывающую функцию, неотрицательную при $t > t_0$, неположительную при $t < t_0$ и равную нулю при $t = t_0$ *).

Докажем теперь, что если ковариационная функция случайного процесса $X(t)$ определяется второй формулой (1), где $k(t)$ — неубывающая функция, неотрицательная при $t > t_0$, неположительная при $t < t_0$ и равная нулю при $t = t_0$, то $X(t)$ представляет собой процесс с некоррелированными приращениями, значение которого в момент t_0 равно нулю почти наверное.

▶ На основании второй формулы (1)

$$
\begin{aligned}
&M(X^0_{t_2} - X^0_{t_1})(X^{0*}_{t_4} - X^{0*}_{t_3}) = \\
&\quad = K_x(t_2, t_4) - K_x(t_1, t_4) - K_x(t_2, t_3) + K_x(t_1, t_3) = \\
&\quad = k(t_2) - k(t_1) - k(t_2) + k(t_1) = 0 \text{ при } t_0 < t_1 < t_2 \leqslant t_3 < t_4, \\
&\quad = k(t_2) - 0 - k(t_2) + 0 = 0 \text{ при } t_1 \leqslant t_0 < t_2 \leqslant t_3 < t_4, \\
&\quad = 0 - 0 - 0 + 0 = 0 \text{ при } t_1 < t_2 \leqslant t_0 \leqslant t_3 < t_4, \\
&\quad = 0 - 0 + k(t_3) - k(t_3) = 0 \text{ при } t_1 < t_2 \leqslant t_3 < t_0 < t_4.
\end{aligned}
$$

Следовательно, приращения процесса $X(t)$ на любых непересекающихся интервалах не коррелированы. Из того, что $K_x(t_0, t_0) = 0$, следует, что значение X_{t_0} процесса $X(t)$ при $t = t_0$ равно нулю почти наверное. ◀

Таким образом, *для того чтобы случайный процесс $X(t)$ был процессом с некоррелированными приращениями и его значение при $t = t_0$ было равно нулю почти наверное, необходимо и достаточно, чтобы его ковариационная функция определялась второй формулой* (1), *где $k(t)$ — неубывающая функция, неотрицательная при $t > t_0$, неположительная при $t < t_0$ и равная нулю при $t = t_0$.*

Из теоремы п. 2.4.3 следует, что *случайный процесс с некоррелированными приращениями с. к. непрерывен тогда и только тогда, когда функция $k(t)$ непрерывна.* Мы будем считать в дальнейшем, что $k(t)$ не только непрерывна, но и дифференцируема. В этом случае формула (1) может быть написана при $t_1, t_2 > t_0$ в виде

$$K_x(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{\min(t_1, t_2)} \nu(\tau)\, d\tau, \tag{2}$$

*) В случае векторного процесса $X(t)$ неубывание $k(t)$ и неотрицательность $k(t)$ при $t > t_0$ и $-k(t)$ при $t < t_0$ понимаются как неотрицательная определенность матриц $k(t_2) - k(t_1)$, $k(t)$ при $t > t_0$ и $-k(t)$ при $t < t_0$.

где $\nu(t)$ — неотрицательная функция, называемая *интенсивностью* процесса с некоррелированными приращениями $X(t)$ *).

Пример 1. Случайный процесс $W(t)$ с конечномерными плотностями

$$f_1(w;\ t)=(2\pi t)^{-1/2}\exp\{-w^2/2t\},$$

$$f_n(w_1, \ldots, w_n;\ t_1, \ldots, t_n)=$$
$$=[(2\pi)^n t_1(t_2-t_1)\ldots(t_n-t_{n-1})]^{-1/2}\exp\{-w_1^2/2t_1-(w_2-w_1)^2/2(t_2-t_1)-\ldots$$
$$\ldots-(w_n-w_{n-1})^2/2(t_n-t_{n-1})\}\qquad (n=2,\ 3,\ \ldots)$$

при $t_1<t_2<\ldots<t_n$ и с непрерывными реализациями называется *стандартным винеровским процессом*. Очевидно, что этот процесс является процессом с независимыми приращениями, так как при любых $t_1<t_2<\ldots<t_n$ совместная плотность случайных величин $Y_1=W_{t_1}$, $Y_2=W_{t_2}-W_{t_1}$, ..., $Y_n=W_{t_n}-W_{t_{n-1}}$ определяется формулой (*ТВ*, п. 5.3.1)

$$p(y_1, \ldots, y_n)=[(2\pi)^n t_1(t_2-t_1)\ldots(t_n-t_{n-1})]^{-1/2}\exp\{-y_1^2/2t_1-$$
$$-y_2^2/2(t_2-t_1)-\ldots-y_n^2/2(t_n-t_{n-1})\},$$

т. е. представляет собой произведение плотностей величин Y_1, ..., Y_n (*ТВ*, п. 4.2.3). Но независимые случайные величины с конечными моментами второго порядка не коррелированы (*ТВ*, п. 4.2.4). Следовательно, стандартный винеровский процесс является процессом с некоррелированными приращениями. Чтобы найти его ковариационную функцию, рассмотрим его двумерную плотность при $t_2>t_1$:

$$f_2(w_1,\ w_2;\ t_1,\ t_2)=\left(2\pi\sqrt{t_1(t_2-t_1)}\right)^{-1}\exp\{-w_1^2/2t_1-(w_2-w_1)^2/2(t_2-t_1)\}=$$
$$=\left(2\pi\sqrt{t_1(t_2-t_1)}\right)^{-1}\exp\{-(t_2w_1^2-2t_1w_1w_2+t_1w_2^2)/2t_1(t_2-t_1)\}.$$

Отсюда видно (*ТВ*, пример 4.1), что $K_w(t_1,\ t_2)=t_1$ при $t_1<t_2$. По симметрии $K_w(t_1,\ t_2)=t_2$ при $t_1>t_2$. Таким образом, ковариационная функция стандартного винеровского процесса определяется формулой

$$K_w(t_1,\ t_2)=\min(t_1,\ t_2),$$

а его интенсивность тождественно равна 1.

Пример 2. Ступенчатый случайный процесс $P(t)$, скачком возрастающий на единицу в случайные моменты, образующие пуассоновский поток, называется *пуассоновским процессом*. Так как числа скачков пуассоновского процесса в неперекрывающихся интервалах времени по определению являются независимыми случайными величинами (*ТВ*, п. 1.9.1), то пуассоновский процесс является процессом с независимыми приращениями. Чтобы доказать, что он является и процессом с некоррелированными приращениями, достаточно показать, что он имеет конечную дисперсию. Обозначим $\nu(t)$ в общем случае переменную интенсивность пуассоновского потока скачков процесса $P(t)$. Считая, что $P(t_0)=0$, находим математическое ожидание числа скачков процесса $P(t)$ в интервале $(t_0,\ t)$ (*ТВ*, пример 3.2), которое, очевидно, представляет собой математическое ожидание значения процесса $P(t)$ в момент t:

$$\mu=MP(t)=\int_{t_0}^{t}\nu(\tau)\,d\tau.$$

Но, как известно, дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, совпадает с ее математическим ожиданием (*ТВ*, пример 3.2). Сле-

---

*) В случае векторного процесса неотрицательность $\nu(t)$ понимается как неотрицательная определенность матрицы.

довательно, в данном случае

$$D_p(t) = k(t) = \int_{t_0}^{t} \nu(\tau)\, d\tau = \mu.$$

Ковариационная функция процесса $P(t)$ определяется формулой (2) при $k(t_0)=0$, а его интенсивность совпадает с интенсивностью потока скачков.

Пример 3. Скалярный или векторный ступенчатый случайный процесс $X(t)$ с независимыми одинаково распределенными скачками, происходящими в случайные моменты времени, образующие пуассоновский поток, называется *общим пуассоновским процессом*. Так как суммы независимых случайных величин, не содержащие одинаковых слагаемых, независимы (*ТВ*, пример 5.36), то общий пуассоновский процесс представляет собой процесс с независимыми приращениями. Если скачки имеют конечные математическое ожидание m_0 и ковариационную матрицу (дисперсию в случае скалярного процесса $X(t)$) K_0, то он является также процессом с некоррелированными приращениями. Действительно, считая, что $X(t_0)=0$, приходим к выводу, что условные математическое ожидание и ковариационная матрица процесса $X(t)$ в момент t при m скачках в интервале времени (t_0, t) равны соответственно mm_0 и mK_0 и, следовательно, его условный момент второго порядка равен $m(K_0 + m_0 m_0^{\mathrm{T}})$. Принимая во внимание, что число скачков в интервале времени (t_0, t) представляет собой случайную величину, распределенную по закону Пуассона, находим вероятность того, что в интервале (t_0, t) будет m скачков (*ТВ*, п. 1.9.4)

$$p_m = \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu}, \qquad \mu = \int_{t_0}^{t} \nu_0(\tau)\, d\tau,$$

где $\nu_0(t)$ — интенсивность потока скачков. После этого по формуле полного математического ожидания (*ТВ*, п. 4.3.3) находим безусловные математическое ожидание и момент второго порядка процесса $X(t)$ в момент t:

$$m_x(t) = MX(t) = m_0 \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu} = m_0 \mu,$$

$$\Gamma_x(t) = (K_0 + m_0 m_0^{\mathrm{T}}) \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu} = (K_0 + m_0 m_0^{\mathrm{T}})\, \mu.$$

Следовательно, ковариационная матрица значения процесса в момент t определяется формулой

$$k(t) = \Gamma_x(t) - m_x(t)\, m_x(t)^{\mathrm{T}} = K_0 \mu = K_0 \int_{t_0}^{t} \nu_0(\tau)\, d\tau.$$

Таким образом, процесс $X(t)$ имеет конечный момент второго порядка и, следовательно, является процессом с некоррелированными приращениями. Ковариационная функция общего пуассоновского процесса определяется формулой (2) при интенсивности $\nu(t) = K_0 \nu_0(t)$.

3.1.2. Стохастический интеграл. Пусть $\varphi(t)$ — непрерывная скалярная функция скалярной переменной t, $X(t)$ — скалярный процесс с некоррелированными приращениями, математическое ожидание и ковариационная функция которого определяются формулами

$$m(t) = m(t_0) + \int_{t_0}^{t} m'(\tau)\,d\tau, \quad k(t) = k(t_0) + \int_{t_0}^{t} \nu(\tau)\,d\tau, \tag{3}$$

где $m'(t)$ и $\nu(t)$ — непрерывные функции. Возьмем последовательность разбиений $\{P_n\}$ интервала $[a, b]$ точками $t_0^{(n)} = a < t_1^{(n)} < \ldots$ $\ldots < t_{N_n}^{(n)} = b$ такую, что

$$\Delta_n = \max_p (t_p^{(n)} - t_{p-1}^{(n)}) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Образуем последовательность сумм

$$Y_n = \sum_{p=1}^{N_n} \varphi(\tau_p^{(n)}) [X(t_p^{(n)}) - X(t_{p-1}^{(n)})] \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

где $\tau_p^{(n)}$ — произвольные точки интервалов $[t_{p-1}^{(n)}, t_p^{(n)}]$, $\tau_p^{(n)} \in [t_{p-1}^{(n)}, t_p^{(n)}]$.

Стохастическим интегралом от функции $\varphi(t)$ по процессу $X(t)$, распространенным на интервал (a, b), называется с. к. предел последовательности сумм $\{Y_n\}$, если он существует:

$$Y = \int_a^b \varphi(t)\,dX(t) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{p=1}^{N_n} \varphi(\tau_p^{(n)}) [X(t_p^{(n)}) - X(t_{p-1}^{(n)})]. \tag{5}$$

► Чтобы установить необходимое и достаточное условие существования стохастического интеграла (5), применим теорему о с. к. сходимости п. 2.4.2. Согласно этой теореме необходимым и достаточным условием существования с. к. предела последовательности сумм $\{Y_n\}$ является существование пределов последовательностей математических ожиданий $\{MY_n\}$ и ковариаций $\{MY_n^0 \overline{Y}_m^0\}$ при $n, m \to \infty$ (независимо от того, как $n, m \to \infty$).

Из (4) и (3) следует, что

$$MY_n = \sum_{p=1}^{N_n} \varphi(\tau_p^{(n)}) [MX(t_p^{(n)}) - MX(t_{p-1}^{(n)})] =$$

$$= \sum_{p=1}^{N_n} \varphi(\tau_p^{(n)}) \int_{t_{p-1}^{(n)}}^{t_p^{(n)}} m'(\tau)\,d\tau = \sum_{p=1}^{N_n} \varphi(\tau_p^{(n)})\, m'(\sigma_p^{(n)})\, \Delta t_p^{(n)},$$

где $\sigma_p^{(n)}$ — некоторая средняя точка интервала $(t_{p-1}^{(n)}, t_p^{(n)})$, а $\Delta t_p^{(n)} = t_p^{(n)} - t_{p-1}^{(n)}$ $(p = 1, \ldots, N_n)$. В силу непрерывности функции $m'(t)$ можно с точностью до бесконечно малых высших порядков заменить $m'(\sigma_p^{(n)})$ величиной $m'(\tau_p^{(n)})$. Тогда получим

$$\lim_{n\to\infty} MY_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{N_n} \varphi(\tau_p^{(n)})\, m'(\tau_p^{(n)})\, \Delta t_p^{(n)} = \int_a^b \varphi(\tau)\, m'(\tau)\,d\tau. \tag{6}$$

Для вычисления ковариации $MY_n^0\overline{Y_m^0}$ рассмотрим объединение разбиений P_n и P_m интервала (a, b). Пусть $a=t_0<t_1<\ldots<t_Q=b$ — полученное в результате этого объединения разбиение. Тогда можно написать

$$Y_n=\sum_{h=1}^{Q}\varphi(\tau_h')\,[X(t_h)-X(t_{h-1})],\qquad Y_m=\sum_{l=1}^{Q}\varphi(\tau_l'')\,[X(t_l)-X(t_{l-1})],$$

где $\tau_h'=\tau_p^{(n)}$ при $[t_{h-1},\ t_h]\subset[t_{p-1}^{(n)},\ t_p^{(n)}]$, $\tau_l''=\tau_q^{(m)}$ при $[t_{l-1},\ t_l]\subset\subset[t_{q-1}^{(m)},\ t_q^{(m)}]$, и

$$MY_n^0\overline{Y_m^0}=\sum_{h,\ l=1}^{Q}\varphi(\tau_h')\,\overline{\varphi(\tau_l'')}\,M\,[X^0(t_h)-X^0(t_{h-1})]\,[\overline{X^0(t_l)}-\overline{X^0(t_{l-1})}].$$

Отсюда, принимая во внимание, что $X(t_h)-X(t_{h-1})$ и $X(t_l)-X(t_{l-1})$ не коррелированы при $l\neq h$ и что

$$M\,|X^0(t_h)-X^0(t_{h-1})|^2=k(t_h)-k(t_{h-1})=\int_{t_{h-1}}^{t_h}\nu(\tau)\,d\tau,$$

находим

$$MY_n^0\overline{Y_m^0}=\sum_{h=1}^{Q}\varphi(\tau_h')\,\overline{\varphi(\tau_h'')}\int_{t_{h-1}}^{t_h}\nu(\tau)\,d\tau=\sum_{h=1}^{Q}\varphi(\tau_h')\,\overline{\varphi(\tau_h'')}\,\nu(\sigma_h)\,\Delta t_h,$$

где σ_h — некоторая средняя точка интервала $(t_{h-1},\ t_h)$, а $\Delta t_h=t_h-t_{h-1}$ $(h=1,\ \ldots,\ Q)$. Вследствие непрерывности функций $\varphi(t)$ и $\nu(t)$, учитывая, что $|\tau_h'-\tau_h''|\to 0$, $|\sigma_h-\tau_h'|\to 0$ при $n, m\to\infty$, можем с точностью до бесконечно малых высших порядков заменить значения $\varphi(\tau_h'')$ и $\nu(\sigma_h)$ функций $\varphi(t)$ и $\nu(t)$ их значениями $\varphi(\tau_h')$ и $\nu(\tau_h')$. Тогда получим

$$MY_n^0\overline{Y_m^0}=\sum_{h=1}^{Q}|\varphi(\tau_h')|^2\,\nu(\tau_h')\,\Delta t_h$$

и

$$\lim_{n,\ m\to\infty} MY_n^0\overline{Y_m^0}=\int_a^b|\varphi(\tau)|^2\,\nu(\tau)\,d\tau. \blacktriangleleft \tag{7}$$

Таким образом, *для существования стохастического интеграла* (5) *необходимо и достаточно существование интегралов* (6) *и* (7). *При этом в силу следствия* 3 *п.* 2.4.2 *математическое ожидание и дисперсия стохастического интеграла* (5) *определяются формулами*

$$m_y=\int_a^b\varphi(\tau)\,m'(\tau)\,d\tau, \tag{8}$$

$$D_y=\int_a^b|\varphi(\tau)|^2\,\nu(\tau)\,d\tau. \tag{9}$$

Установив необходимое и достаточное условие существования стохастического интеграла для ограниченного интервала (a, b) и непрерывных функций $\varphi(t)$ и $\nu(t)$, можем распространить это условие на бесконечные интервалы $(-\infty, b)$, (a, ∞), $(-\infty, \infty)$ и кусочно непрерывные функции $\varphi(t)$ и $\nu(t)$ обычным путем, как это делается в анализе при определении несобственных интегралов. Только обычные пределы придется заменить с. к. пределами.

В силу леммы п. 2.4.2 и ее следствия 2 ковариация стохастических интегралов

$$Y = \int_a^b \varphi(\tau)\, dX(\tau), \quad Z = \int_a^b \psi(\tau)\, dX(\tau), \tag{10}$$

если они существуют, определяется формулой

$$k_{yz} = \int_a^b \varphi(\tau)\, \overline{\psi(\tau)}\, \nu(\tau)\, d\tau. \tag{11}$$

Точно так же ковариация двух стохастических интегралов

$$Y = \int_a^b \varphi(\tau)\, dX_p(\tau), \quad Z = \int_a^b \psi(\tau)\, dX_q(\tau), \tag{12}$$

где $X_p(t)$ и $X_q(t)$ — компоненты векторного процесса с некоррелированными приращениями и с ковариационной функцией, определяемой второй формулой (3), выражается формулой

$$k_{yz} = \int_a^b \varphi(\tau)\, \overline{\psi(\tau)}\, \nu_{pq}(\tau)\, d\tau, \tag{13}$$

где $\nu_{pq}(t)$ — соответствующий элемент матрицы $\nu(t)$.

Пример 4. Найти математическое ожидание и дисперсию стохастического интеграла

$$Y = \int_0^\infty e^{-\alpha\tau}\, dW(\tau),$$

где $W(t)$ — стандартный винеровский процесс примера 1.

Так как математическое ожидание стандартного винеровского процесса тождественно равно нулю, а его ковариационная функция равна $\min(t_1, t_2)$ и, следовательно, $k(t) = t$, то формулы (8) и (9) дают $m_y = 0$,

$$D_y = \int_0^\infty e^{-2\alpha\tau}\, d\tau = 1/2\alpha.$$

Пример 5. Найти математическое ожидание и дисперсию стохастического интеграла

$$Y = \int_0^\infty \frac{1}{1+\tau^2}\, dP(\tau),$$

где $P(t)$ — пуассоновский процесс постоянной интенсивности ν.

Согласно результатам примера 2 в данном случае $m_p = \nu t$. Поэтому формулы (8) и (9) дают

$$m_y = \int_0^\infty \frac{\nu\, d\tau}{1+\tau^2} = \frac{\nu\pi}{2},$$

$$D_y = \int_0^\infty \frac{\nu\, d\tau}{(1+\tau^2)^2} = \frac{\nu\pi}{4}.$$

3.1.3. Векторный стохастический интеграл. Определение (5) стохастического интеграла от неслучайной функции легко распространяется на случай векторного процесса с некоррелированными приращениями $X(t)$ и матричной функции $\varphi(t)$. Для существования стохастического интеграла (5) в этом случае необходимо и достаточно, чтобы существовали все скалярные стохастические интегралы, входящие в выражение (5) случайного вектора Y. При этом математическое ожидание стохастического интеграла (5) определяется формулой (8), а его ковариационная матрица — формулой

$$K_y = \int_a^b \varphi(\tau)\, \nu(\tau)\, \varphi(\tau)^*\, d\tau, \tag{14}$$

которая следует непосредственно из формул (9) и (13) для дисперсий и ковариаций скалярных стохастических интегралов, входящих в выражение (5) векторного стохастического интеграла.

Совершенно так же выводится формула для взаимной ковариационной матрицы двух векторных стохастических интегралов вида (10):

$$K_{yz} = \int_a^b \varphi(\tau)\, \nu(\tau)\, \psi(\tau)^*\, d\tau. \tag{15}$$

3.1.4. Интегрирование по частям. Пусть $\varphi(t)$ — функция, непрерывная вместе со своей первой производной, $X(t)$ — процесс с некоррелированными приращениями с математическим ожиданием и ковариационной функцией, определяемыми формулами (3). Покажем, что для стохастического интеграла

$$\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, dX(\tau)$$

справедлива формула интегрирования по частям. Процесс $X(t)$ в общем случае может быть векторным и соответственно функция $\varphi(t)$ — матричной.

▶ Разобьем интервал (t_0, t) на n равных частей длины $\Delta t = (t - t_0)/n$. Точки деления обозначим $t_1, \ldots, t_{n-1}$, $t_n = t$. Тогда по определению стохастического интеграла

$$\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, dX(\tau) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=1}^{n} \varphi(t_{k-1})\left[X(t_k) - X(t_{k-1})\right].$$

Но в силу непрерывности и дифференцируемости функции $\varphi(t)$ с точностью до бесконечно малых имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi(t_{k-1})\left[X(t_k) - X(t_{k-1})\right] = \sum_{k=1}^{n} \varphi(t_{k-1}) X(t_k) -$$
$$- \sum_{k=1}^{n} \varphi(t_{k-1}) X(t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(t_{k-1}) X(t_k) - \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(t_k) X(t_k) =$$
$$= \varphi(t_{n-1}) X(t) - \varphi(t_0) X(t_0) - \sum_{k=1}^{n-1} \left[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\right] X(t_k) =$$
$$= \varphi(t) X(t) - \varphi(t_0) X(t_0) - \sum_{k=1}^{n-1} \varphi'(t_k) X(t_k)\, \Delta t.$$

Отсюда, переходя к с. к. пределу при $n\to\infty$ и, следовательно, $\Delta t\to 0$, на основании определения с. к. интеграла получаем формулу интегрирования по частям

$$\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, dX(\tau) = \varphi(t) X(t) - \varphi(t_0) X(t_0) - \int_{t_0}^{t} \varphi'(\tau) X(\tau)\, d\tau. \tag{16}$$

Эта формула выражает стохастический интеграл через обычный с. к. интеграл. Вследствие этого она может быть принята за определение стохастического интеграла от неслучайной функции. ◀

Покажем еще, что формула с. к. интегрирования по частям (2.74) справедлива и в том случае, когда $Z(t)$ представляет собой стохастический интеграл,

$$Z(t) = \int_{t_0}^{t} \psi(\tau)\, dX(\tau), \tag{17}$$

и, следовательно, не имеет с. к. производной. Функцию $\psi(\tau)$ будем предполагать непрерывной.

▶ Как и в п. 2.4.7, разобьем интервал (t_0, t) на n равных частей длины $\Delta t = (t - t_0)/n$. Точки деления обозначим $t_1, \ldots$ $\ldots, t_{n-1}, t_n = t$. По определению с. к. интеграла

$$\int_{t_0}^{t} \varphi'(\tau)\, d\tau \int_{t_0}^{\tau} \psi(\sigma)\, dX(\sigma) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=1}^{n} \varphi'(t_{k-1})\, \Delta t \int_{t_0}^{t_{k-1}} \psi(\sigma)\, dX(\sigma).$$

Но в силу непрерывности функций $\varphi'(t)$ и $\psi(t)$ имеем с точностью до бесконечно малых

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi'(t_{k-1})\,\Delta t \int_{t_0}^{t_{k-1}} \psi(\tau)\,dX(\tau) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})] \int_{t_0}^{t_{k-1}} \psi(\tau)\,dX(\tau) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \varphi(t_k) \int_{t_0}^{t_{k-1}} \psi(t)\,dX(\tau) - \sum_{k=1}^{n} \varphi(t_{k-1}) \int_{t_0}^{t_{k-1}} \psi(\tau)\,dX(\tau) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \varphi(t_k) \int_{t_0}^{t_{k-1}} \psi(\tau)\,dX(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(t_k) \int_{t_0}^{t_k} \psi(\tau)\,dX(\tau) =$$

$$= \varphi(t) \int_{t_0}^{t_{n-1}} \psi(\tau)\,dX(\tau) - \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(t_k) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \psi(\tau)\,dX(\tau) =$$

$$= \varphi(t) \int_{t_0}^{t} \psi(\tau)\,dX(\tau) - \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(t_k)\,\psi(t_k)\,[X(t_k) - X(t_{k-1})].$$

Переходя к с. к. пределу при $n \to \infty$ и, следовательно, $\Delta t \to 0$, получаем

$$\int_{t_0}^{t} \varphi'(\tau)\,d\tau \int_{t_0}^{\tau} \psi(\sigma)\,dX(\sigma) = \varphi(t) \int_{t_0}^{t} \psi(\tau)\,dX(\tau) - \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,\psi(\tau)\,dX(\tau). \quad (18)$$

Это и есть формула (2.74) для случая, когда случайная функция $Z(t)$ представляет собой стохастический интеграл (17). ◀

3.1.5. Аппроксимация стохастического интеграла. Известно, какое большое значение для методов численного интегрирования имеет интегральная теорема о среднем значении. Эта теорема утверждает, что для любой непрерывной функции $\varphi(t)$ и любой неотрицательной функции $\psi(t)$

$$\int_{a}^{b} \varphi(\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau = \varphi(t_*) \int_{a}^{b} \psi(\tau)\,d\tau,$$

где $t_* \in [a, b]$. Вводя функцию

$$\Psi(t) = \int_{t_0}^{t} \psi(\tau)\,d\tau, \quad t_0 < a,$$

можем переписать предыдущую формулу в виде

$$\int_{a}^{b} \varphi(\tau)\,d\Psi(\tau) = \varphi(t_*)\,[\Psi(b) - \Psi(a)], \quad t_* \in [a, b].$$

Приведенная теорема неверна для стохастических интегралов.

► Действительно, предположив, что она верна, будем иметь

$$\int_a^b \varphi(\tau)\,dX(\tau) = \varphi_*[X(b)-X(a)],$$

где φ_* — некоторое число. Чтобы убедиться в том, что это равенство невозможно ни при каком φ_*, вычислим дисперсию разности левой и правой частей этого равенства:

$$U = \int_a^b \varphi(\tau)\,dX(\tau) - \varphi_*[X(b)-X(a)] = \int_a^b [\varphi(\tau)-\varphi_*]\,dX.$$

По формуле (9) находим

$$D_u = \int_a^b |\varphi(\tau)-\varphi_*|^2 \nu(\tau)\,d\tau.$$

Ясно, что эта величина не может быть равной нулю ни при каком φ_*, если не считать тривиального случая постоянной функции $\varphi(t)$. ◄

Несмотря на неприменимость теоремы о среднем к стохастическим интегралам, вопрос о приближенном вычислении стохастического интеграла требует определенного ответа. Поэтому поставим задачу: найти такое число φ_*, чтобы дисперсия ошибки

$$U = \int_a^b \varphi(\tau)\,dX(\tau) - \varphi_*[X(b)-X(a)]$$

была минимальной.

► Предположим, что дисперсия ошибки U минимальна при $\varphi_* = \varphi_*^0$. Тогда для любого φ_* можем написать

$$D_u = \int_a^b |\varphi(\tau)-\varphi_*|^2 \nu(\tau)\,d\tau = \int_a^b |\varphi(\tau)-\varphi_*^0+\varphi_*^0-\varphi_*|^2 \nu(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_a^b |\varphi(\tau)-\varphi_*^0|^2 \nu(\tau)\,d\tau + |\varphi_*^0-\varphi_*|^2 \int_a^b \nu(\tau)\,d\tau +$$

$$+ (\overline{\varphi_*^0}-\overline{\varphi}_*) \int_a^b [\varphi(\tau)-\varphi_*^0]\,\nu(\tau)\,d\tau + (\varphi_*^0-\varphi_*) \int_a^b [\overline{\varphi(\tau)}-\overline{\varphi_*^0}]\,\nu(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда видно, что минимум D_u достигается при $\varphi_* = \varphi_*^0$, если выбрать φ_*^0 из условия

$$\int_a^b [\varphi(\tau)-\varphi_*^0]\,\nu(\tau)\,d\tau = 0.$$

Действительно, при таком φ_*^0 дисперсия ошибки при любом φ_* будет равна

$$D_u = \int_a^b |\varphi(\tau) - \varphi_*^0|^2 \nu(\tau)\,d\tau + |\varphi_*^0 - \varphi_*|^2 \int_a^b \nu(\tau)\,d\tau.$$

Второе слагаемое равно нулю только при $\varphi_* = \varphi_*^0$. При любом другом значении φ_* это слагаемое положительно.

Если функция $\varphi(t)$ непрерывна на интервале $[a, b]$, то, переписав условие, определяющее φ_*^0, в виде

$$\int_a^b \varphi(\tau)\,\nu(\tau)\,d\tau = \varphi_*^0 \int_a^b \nu(\tau)\,d\tau,$$

убеждаемся в том, что на основании теоремы о среднем $\varphi_*^0 = \varphi(t_*)$, где t_* — некоторая точка интервала $[a, b]$. ◄

Таким образом, мы доказали теорему: *если функция* $\varphi(t)$ *непрерывна на интервале* $[a, b]$, *то существует такое* $t_* \in [a, b]$, *что дисперсия разности*

$$U = \int_a^b \varphi(\tau)\,dX(\tau) - \varphi_*[X(b) - X(a)]$$

минимальна при $\varphi_* = \varphi(t_*)$.

Этот аналог интегральной теоремы о среднем значении может служить основанием для распространения методов численного интегрирования на стохастические интегралы и стохастические дифференциальные уравнения (п. 3.6.6).

3.1.6. Белый шум как производная процесса с некоррелированными приращениями. Процесс с некоррелированными приращениями не может быть с. к. дифференцируемым в обычном смысле. Действительно, пусть $X(t)$ — процесс с некоррелированными приращениями с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией, определяемой формулой (2). Рассмотрим сначала ковариационную функцию $K_x(t_1, t_2)$ как функцию t_2 при фиксированном t_1. Из формулы (2) ясно, что

$$K_x(t_1, t_2) = \begin{cases} \int_{t_0}^{t_2} \nu(\tau)\,d\tau & \text{при} \quad t_2 < t_1, \\ \int_{t_0}^{t_1} \nu(\tau)\,d\tau & \text{при} \quad t_2 > t_1. \end{cases}$$

Дифференцируя эту формулу по t_2, находим

$$\frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_2} = \begin{cases} \nu(t_2) & \text{при} \quad t_2 < t_1, \\ 0 & \text{при} \quad t_2 > t_1. \end{cases}$$

Таким образом, производная $\partial K_x(t_1, t_2)/\partial t_2$ терпит разрыв со скачком $-\nu(t_1)$ при $t_2=t_1$. Вводя единичную ступенчатую функцию, перепишем предыдущую формулу в виде

$$\frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_2} = \nu(t_2)\, 1\,(t_1-t_2).$$

Дифференцируя эту формулу по t_1, находим

$$\frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2} = \nu(t_2)\,\delta(t_1-t_2) = \nu(t_1)\,\delta(t_1-t_2).$$

Таким образом, $[\partial^2 K_x(t_1, t_2)/\partial t_1\,\partial t_2]_{t_2=t_1}=\infty$ и условие существования с. к. производной не выполнено. Следовательно, процесс с некоррелированными приращениями не имеет с. к. производной. Но полученное выражение $\partial^2 K_x(t_1, t_2)/\partial t_1\,\partial t_2$ представляет собой ковариационную функцию белого шума. Поэтому целесообразно считать, что процесс с некоррелированными приращениями имеет производную, представляющую собой белый шум. Для обоснования этого достаточно доказать, что *любой процесс с некоррелированными приращениями имеет слабую с. к. производную, представляющую собой белый шум интенсивности* $\nu(t)$.

► Пусть $X(t)$ — скалярный процесс с некоррелированными приращениями, с нулевым математическим ожиданием,

$$k(t) = \int_{t_0}^{t} \nu(\tau)\,d\tau$$

— функция, определяющая ковариационную функцию процесса $X(t)$. Определим случайную функцию

$$V_\tau(t) = [X(t+\tau) - X(t)]/\tau.$$

Докажем, что эта случайная функция имеет слабый с. к. предел при $\tau \to 0$, представляющий собой белый шум $V(t)$ интенсивности $\nu(t)$. Для этого введем случайные величины

$$Y_\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,V_\tau(t)\,dt.$$

Согласно общей теореме о с. к. сходимости (п. 2.4.2) достаточно показать, что для любой непрерывной функции $\varphi(t)$, отличной от нуля только на некотором конечном интервале (п. 2.4.9) величина $MY_\tau\overline{Y_\sigma}$ имеет неотрицательный предел при $\tau, \sigma \to 0$, не зависящий от того, как $\tau, \sigma \to 0$. По формуле (2.70)

$$MY_\tau\overline{Y_\sigma} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,\overline{\varphi(s)}\,K_{v_\tau v_\sigma}(t, s)\,dt\,ds,$$

где $K_{v_\tau v_\sigma}(t, s)$ — взаимная ковариационная функция случайных функций $V_\tau(t)$ и $V_\sigma(t)$, которая определяется формулой

$$K_{v_\tau v_\sigma}(t, s) = \frac{1}{\sigma\tau} M [X(t+\tau) - X(t)] [\overline{X(s+\sigma)} - \overline{X(s)}].$$

А так как $X(t)$ — процесс с некоррелированными приращениями, то при $\tau > \sigma$

$$K_{v_\tau v_\sigma}(t, s) = \begin{cases} 0 & \text{при } s < t-\sigma \text{ и при } s > t+\tau, \\ [k(s+\sigma) - k(t)]/\tau\sigma & \text{при } t-\sigma < s < t, \\ [k(s+\sigma) - k(s)]/\tau\sigma & \text{при } t < s < t+\tau-\sigma, \\ [k(t+\tau) - k(s)]/\tau\sigma & \text{при } t+\tau-\sigma < s < t+\tau. \end{cases}$$

Эти формулы являются следствием того, что при $\tau > \sigma$ интервалы $[t, t+\tau)$ и $[s, s+\sigma)$ не пересекаются, если $s < t-\sigma$ или $s > t+\tau$, а их пересечением является интервал $[t, s+\sigma)$, если $t-\sigma < s < t$, интервал $[s, s+\sigma)$, если $t < s < t+\tau-\sigma$, и интервал $[s, t+\tau)$, если $t+\tau-\sigma < s < t+\tau$. Следовательно,

$$MY_\tau \overline{Y_\sigma} = \frac{1}{\tau\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \left\{ \int_{t-\sigma}^{t} \overline{\varphi}(s) [k(s+\sigma) - k(t)] \, ds + \int_{t}^{t+\tau-\sigma} \overline{\varphi(s)} [k(s+\sigma) - k(s)] \, ds + \int_{t+\tau-\sigma}^{t+\tau} \overline{\varphi(s)} [k(t+\tau) - k(s)] \, ds \right\} dt.$$

Предполагая, что интенсивность $\nu(t)$ процесса $X(t)$ является непрерывной функцией, и применив интегральную теорему о среднем значении, можем написать для любого интервала $[\alpha, \beta)$

$$k(\beta) - k(\alpha) = \nu(\theta)(\beta - \alpha), \quad \theta \in (\alpha, \beta).$$

На основании этой формулы предыдущая формула принимает вид

$$MY_\tau \overline{Y_\sigma} = \frac{1}{\tau\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \left\{ \int_{t-\sigma}^{t} \overline{\varphi(s)} \nu(s_1)(s+\sigma-t) \, ds + \int_{t}^{t+\tau-\sigma} \overline{\varphi(s)} \nu(s_2) \sigma \, ds + \int_{t+\tau-\sigma}^{t+\tau} \overline{\varphi(s)} \nu(s_3)(t+\tau-s) \, ds \right\} dt,$$

где $s_1 \in (t-\sigma, t)$, $s_2 \in (t, t+\tau-\sigma)$, $s_3 \in (t+\tau-\sigma, t+\tau)$. Отсюда, имея в виду, что все интервалы интегрирования по s являются бесконечно малыми порядка $O(\tau)$, что функции $\nu(t)$ и $\varphi(t)$

непрерывны, вследствие чего

$$\varphi(s)=\varphi(t)+o(\tau),$$
$$\nu(s_1),\quad \nu(s_2),\quad \nu(s_3)=\nu(t)+o(\tau),$$

и что величины $s+\sigma-t$ и $t+\tau-s$ под знаками первого и третьего интегралов по s положительны, получаем

$$MY_\tau\overline{Y_\sigma}=\frac{1}{\tau\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\left[\overline{\varphi(t)}\,\nu(t)+o(\tau)\right]\left[\frac{\sigma^2}{2}+\sigma(\tau-\sigma)+\frac{\sigma^2}{2}\right]dt=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\left[\overline{\varphi(t)}\,\nu(t)+o(\tau)\right]dt.$$

Наконец, в силу того что $\varphi(t)$ отлична от нуля только на некотором конечном интервале, можем написать

$$MY_\tau\overline{Y_\sigma}=\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|^2\nu(t)\,dt+o(\tau).$$

Таким образом, при любых τ, σ

$$MY_\tau\overline{Y_\sigma}=\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|^2\nu(t)\,dt+o(\max(\tau,\ \sigma)).$$

Отсюда видно, что величина $MY_\tau\overline{Y_\sigma}$ имеет предел при $\tau,\ \sigma\to 0$, не зависящий от того, как $\tau,\ \sigma\to 0$. На основании общей теоремы о с. к. сходимости и следствия 1 п. 2.4.2 существует такая случайная величина Y, к которой с. к. сходится Y_τ при $\tau\to 0$ и $\lim\limits_{\tau,\ \sigma\to 0} MY_\tau\overline{Y_\sigma}=M|Y|^2=DY$. Отсюда и из предыдущей формулы следует

$$DY=\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|^2\nu(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\overline{\varphi(s)}\,\nu(t)\,\delta(t-s)\,dt\,ds.$$

Сравнив эту формулу со второй формулой (2.69), приходим к выводу, что слабая с. к. производная $V(t)$ процесса с некоррелированными приращениями $X(t)$ имеет ковариационную функцию

$$K_v(t,\ s)=\nu(t)\,\delta(t-s),$$

т. е. является белым шумом интенсивности $\nu(t)$. ◄

Из справедливости доказанной теоремы для скалярного процесса с некоррелированными приращениями немедленно следует ее справедливость для любого векторного процесса с некоррелированными приращениями, интенсивность которого представляет собой непрерывную функцию.

Пример 6. Производная стандартного винеровского процесса примера 1 представляет собой белый шум единичной интенсивности. Этот белый шум представляет собой частный случай обобщенного случайного процесса, рассмотренного в примере 2.9, когда $k=1/2$ и импульсы распределены нормально.

Пример 7. Производная общего пуассоновского процесса примера 3 представляет собой белый шум (в общем случае векторный) интенсивности $K_0\nu_0(t)$. Этот белый шум представляет собой пуассоновскую последовательность δ-импульсов, величины которых являются независимыми случайными величинами. С примером такого белого шума мы уже встречались в примере 2.8 (входной сигнал электрической цепи примеров 2.2 и 2.4).

В частном случае простого пуассоновского процесса его производная — белый шум представляет собой пуассоновскую последовательность мгновенных единичных импульсов.

3.1.7. Стохастические интегралы как интегралы, содержащие белый шум. На основании результатов п. 3.1.6 стохастический интеграл (5) можно формально представить как интеграл, содержащий белый шум:

$$\int_a^b \varphi(\tau)\,dX(\tau) = \int_a^b \varphi(\tau)\,V(\tau)\,d\tau.$$

Эта формула дает точное и вполне строгое определение интеграла, содержащего белый шум, а именно интеграл, содержащий белый шум, представляет собой другую форму записи стохастического интеграла.

Положив $\varphi(\tau)=1(t-\tau)$, $a=t_0$, получим

$$X(t)-X(t_0)=\int_{t_0}^t V(\tau)\,d\tau,$$

отсюда находим

$$X(t)=X(t_0)+\int_{t_0}^t V(\tau)\,d\tau.$$

Таким образом, любой *с. к. непрерывный процесс с некоррелированными приращениями можно представить в виде интеграла от белого шума той же интенсивности.*

В приложениях всегда записывают стохастические интегралы в виде интегралов от белого шума. Это очень удобно для приложений, так как позволяет обращаться со стохастическими интегралами как с обычными с. к. интегралами. В частности, как было показано в п. 2.4.10, для ковариационной функции интеграла от белого шума справедлива формула (2.70).

§ 3.2. Стохастические интегралы от неслучайных функций векторного аргумента

3.2.1. Стохастические меры. Чтобы распространить определение стохастического интеграла на функции векторных переменных, необходимо ввести понятие стохастической меры.

Аргументом случайной функции согласно п. 2.1.1 может служить переменная любой природы. В частности, аргументом случайной функции может быть множество точек любого пространства, принадлежащее некоторому классу множеств, который представляет собой область определения случайной функции. Так, например, формула

$$Z([a,\ b)) = X(b) - X(a),$$

где $X(t)$ — случайный процесс, представляет собой случайную функцию интервала $[a, b)$. Областью определения этой случайной функции служит множество всех полуоткрытых справа интервалов числовой оси. Если $X(t)$ — процесс с некоррелированными приращениями, то случайная функция $Z([a, b))$ имеет некоррелированные значения на непересекающихся интервалах. Так определенная случайная функция интервала $Z([a, b))$, очевидно, обладает тем свойством, что ее значение на любом интервале, представляющем собой конечное или счетное объединение интервалов, равно сумме ее значений на этих интервалах. Функции, обладающие таким свойством, обычно называются *мерами*.

Вторым примером случайной функции множества может служить с. к. интеграл

$$Z(A) = \int_A X(\tau)\, d\tau,$$

где $X(t)$ — случайная функция векторной переменной, а A — произвольная область соответствующего пространства. Областью определения случайной функции $Z(A)$ служит множество всех областей A, для которых существует определяющий ее с. к. интеграл. В этом примере случайная функция $Z(A)$ также обладает тем свойством, что ее значение на любом множестве, представляющем собой конечное или счетное объединение множеств, на которых она определена, равно сумме ее значений на этих множествах.

Приведенные примеры приводят к следующему общему определению.

Случайная функция $Z(A)$ множества A точек N-мерного пространства R^N называется *стохастической мерой*, определенной на некотором классе множеств $\mathcal{A}$, если она равна нулю на пустом множестве, $Z(\varnothing) = 0$, случайные величины $Z_A = Z(A)$ и $Z_B = Z(B)$ не коррелированы для любых непересекающихся множеств A, $B \in \mathcal{A}$ и для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $\{A_n\}$, $A_n \in \mathcal{A}$, $A_n A_m = \varnothing$ при $m \neq n$, $\bigcup A_n \in \mathcal{A}$,

$$Z\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} Z(A_n).$$

Это равенство выражает свойство *счетной аддитивности* или, короче, *σ-аддитивности* стохастической меры.

Пример 8. Пусть $W_1(t), \ldots, W_N(t)$ — независимые скалярные процессы с некоррелированными приращениями. Формула

$$Z\left(\prod_{r=1}^{N} [a_r, b_r)\right) = \prod_{r=1}^{N} [W_r(b_r) - W_r(a_r)]$$

определяет стохастическую меру на множестве всех полуоткрытых прямоугольников (параллелепипедов) пространства R^N. Действительно, σ-аддитивность случайной функции $Z(A)$ является прямым следствием σ-аддитивности приращений процессов $W_1, \ldots, W_N$. Кроме того, в силу независимости процессов $W_1, \ldots, W_N$ для любых непересекающихся прямоугольников $\prod [a_r, b_r)$ и $\prod [c_r, d_r)$ имеем

$$MZ^0\left(\prod [a_r, b_r)\right) \overline{Z^0\left(\prod [c_r, d_r)\right)} =$$
$$= \prod_{r=1}^{N} M\left[W_r^0(b_r) - W_r^0(a_r)\right]\left[\overline{W_r^0(d_r)} - \overline{W_r^0(c_r)}\right] = 0,$$

так как из того, что прямоугольники $\prod [a_r, b_r)$ и $\prod [c_r, d_r)$ не пересекаются, следует, что по крайней мере для одного r интервалы $[a_r, b_r)$ и $[c_r, d_r)$ не пересекаются, вследствие чего приращения $W_r^0(b_r) - W_r^0(a_r)$ и $W_r^0(d_r) - W_r^0(c_r)$ не коррелированы, т. е.

$$M\left[W_r^0(b_r) - W_r^0(a_r)\right]\left[W_r^0(d_r) - W_r^0(c_r)\right] = 0 \text{ для этого } r.$$

Докажем, что *σ-аддитивная случайная функция множества $Z(A)$ с конечным моментом второго порядка, $Z(\varnothing) = 0$, является стохастической мерой тогда и только тогда, когда ее ковариационная функция $K_z(A, B)$ представляет собой функцию пересечения AB,*

$$K_z(A, B) = k(AB),$$

где $k(C)$ — неотрицательная неубывающая функция, $0 \leqslant k(C_1) \leqslant k(C_2)$ при $C_1 \subset C_2$, $k(\varnothing) = 0$ *).

► Если $Z(A)$ — стохастическая мера, то, разбив множества A и B на непересекающиеся части,

$$A = AB + A\bar{B}, \quad B = AB + \bar{A}B,$$

*) В случае векторной Z $k(C)$ представляет собой матрицу и неотрицательность $k(C)$ понимается как неотрицательная определенность, а неубывание — как неотрицательная определенность $k(C_2) - k(C_1)$ при $C_1 \subset C_2$.

будем иметь

$$K_z(A, B) = MZ^0(A)Z^0(B)^* = \\ = M[Z^0(AB)+Z^0(A\bar{B})][Z^0(AB)^*+Z^0(\bar{A}B)^*] = \\ = MZ^0(AB)Z^0(AB)^* = K_z(AB, AB).$$

Положив $k(C) = K_z(C, C)$, замечаем, что $k(C)$ представляет собой ковариационную матрицу случайного вектора $Z_C = Z(C)$. Следовательно, $k(C)$ неотрицательна (*ТВ*, п. 3.3.4) и $k(\varnothing) = 0$. Далее, из определения стохастической меры следует, что для любых непересекающихся A и B, A, $B \in \mathcal{A}$,

$$Z(A \cup B) = Z(A) + Z(B),$$

причем $Z(A)$ и $Z(B)$ не коррелированы. Следовательно, ковариационная матрица случайной величины $Z(A \cup B)$ равна сумме ковариационных матриц величин $Z(A)$ и $Z(B)$:

$$k(A \cup B) = k(A) + k(B).$$

Следовательно, для любых множеств C_1 и C_2, $C_1 \subset C_2$, $C_2 = C_1 \cup C_2\bar{C}_1$ и

$$k(C_2) = k(C_1) + k(C_2\bar{C}_1).$$

Отсюда следует, что $k(C)$ — неубывающая функция. Таким образом, необходимость условия доказана.

Для доказательства достаточности условия заметим, что из этого условия следует для любых непересекающихся множеств A, $B \in \mathcal{A}$

$$K_z(A, B) = MZ^0(A)Z^0(B)^* = k(AB) = k(\varnothing) = 0.$$

В соединении с σ-аддитивностью и условием $Z(\varnothing) = 0$ это доказывает, что $Z(A)$ — стохастическая мера. Таким образом, достаточность условия также доказана. ◀

3.2.2. Стохастический интеграл. Пусть $\varphi(t)$ — кусочно непрерывная функция вектора t, $t \in T \subset R^N$, со счетным множеством разрывов и $Z(A)$ — стохастическая мера, определенная на всех областях пространства R^N (т. е. на всех множествах, имеющих N-мерный объем). Предположим, что математическое ожидание $m(A)$ и ковариационная функция $k(A)$ меры $Z(A)$ представимы интегралами

$$m(A) = \int_A m'(\tau)\,d\tau, \qquad k(A) = \int_A \nu(\tau)\,d\tau, \tag{19}$$

где $m'(t)$ — некоторая функция, а $\nu(t)$ — некоторая неотрицательная функция. Пусть

$$T = \bigcup_{p=1}^{N_n} A_p^{(n)} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

— последовательность разбиений $\{P_n\}$ области T, такая, что

$$\Delta_n = \max_p \sup_{t, t' \in A_p^{(n)}} |t' - t| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда совершенно так же, как в п. 3.1.2, определяем последовательность интегральных сумм $\{Y_n\}$,

$$Y_n = \sum_{p=1}^{N_n} \varphi(\tau_p^{(n)}) Z(A_p^{(n)}) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $\tau_p^{(n)}$ — любая точка области $A_p^{(n)}$ ($p = 1, \ldots, N_n$; $n = 1, 2, \ldots$), и определяем стохастический интеграл функции $\varphi(t)$ по мере Z, распространенный на область T,

$$Y = \int_T \varphi(\tau) Z(d\tau) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{p=1}^{N_n} \varphi(\tau_p^{(n)}) Z(A_p^{(n)}). \tag{20}$$

Совершенно так же, как в пп. 3.1.2 и 3.1.3, доказывается, что *стохастический интеграл Y существует тогда и только тогда, когда существуют интегралы*

$$m = \int_T \varphi(\tau) m'(\tau) d\tau, \qquad K = \int_T \varphi(\tau) \nu(\tau) \varphi(\tau)^* d\tau. \tag{21}$$

Если они существуют, то первый из них равен математическому ожиданию стохастического интеграла Y, а второй — его ковариационной матрице, $m = m_y$, $K = K_y$.

Формула (15) для взаимной ковариационной матрицы двух стохастических интегралов

$$U = \int_T \varphi(\tau) Z(d\tau) \quad \text{и} \quad V = \int_T \psi(\tau) Z(d\tau)$$

также обобщается на функции векторных переменных

$$K_{uv} = \int_T \varphi(\tau) \nu(\tau) \psi(\tau)^* d\tau. \tag{22}$$

Пример 9. В случае стохастической меры примера 8 стохастический интеграл скалярной функции N-мерного вектора представляет собой кратный интеграл

$$Y = \int_T \varphi(\tau) Z(d\tau) = \int_T \cdots \int \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_N) dW_1(\tau_1) \ldots dW_N(\tau_N).$$

Формулы для математического ожидания и ковариационной матрицы стохастического интеграла принимают в этом случае вид

$$m_y = \int_T \cdots \int \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_N) m_1'(\tau_1) \ldots m_N'(\tau_N) d\tau_1 \ldots d\tau_N,$$

$$K_y = \int_T \cdots \int |\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_N)|^2 \nu_1(\tau_1) \ldots \nu_N(\tau_N) d\tau_1 \ldots d\tau_N,$$

где

$$\int_a^b m_r'(\tau)\,d\tau, \qquad \int_a^b \nu_r(\tau)\,d\tau \qquad (r=1,\ \ldots,\ n)$$

— математические ожидания и дисперсии приращений $W_r(b)-W_r(a)$ процессов $W_1(t),\ \ldots,\ W_N(t)$.

Введенный в пп. 3.1.2 и 3.1.3 стохастический интеграл от функции скалярной переменной представляет собой стохастический интеграл по мере

$$Z([a,\ b)) = X(b) - X(a),$$

порожденной процессом с некоррелированными приращениями $X(t)$.

Стохастические интегралы от функций векторных переменных в приложениях также принято записывать в виде интегралов, содержащих белый шум:

$$\int_T \varphi(\tau)\,Z(d\tau) = \int_T \varphi(\tau)\,V(\tau)\,d\tau.$$

В этом случае белый шум $V(t)$ векторного аргумента определяется как случайная функция с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией

$$K_v(t_1,\ t_2) = \nu(t_1)\,\delta(t_1 - t_2),$$

где δ-функция векторного аргумента может быть определена, например, как произведение δ-функций всех компонент этого векторного аргумента.

Легко видеть, что представление стохастического интеграла в виде интеграла от белого шума дает возможность обращаться со стохастическими интегралами как с обычными с. к. интегралами. В частности, формулы (2.64) и (2.70) для математического ожидания и вторых моментов с. к. интегралов в этом случае совпадают с формулами (21) при $g(t,\ \tau) = \varphi(t)$.

3.2.3. Интегральные канонические представления случайных функций. Пусть $g(t,\ \tau)$ — неслучайная функция двух переменных (скалярных или векторных), $Z(A)$ — стохастическая мера в пространстве переменной τ с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией $k(A)$, представимой в виде второго интеграла (19). Стохастический интеграл

$$X^0(t) = \int_T g(t,\ \tau)\,Z(d\tau)$$

представляет собой случайную функцию переменной t, математическое ожидание которой равно нулю, что и отмечено знаком центрирования, а ковариационная функция на основании (22) при $\varphi(\tau)=g(t_1, \tau)$, $\psi(\tau)=g(t_2, \tau)$ определяется формулой

$$K_x(t_1, t_2)=\int_T g(t_1, \tau)\,\nu(\tau)\,g(t_2, \tau)^*\,d\tau. \tag{23}$$

Представление случайной функции $X(t)$ в виде суммы ее математического ожидания и стохастического интеграла по мере с нулевым математическим ожиданием,

$$X(t)=m_x(t)+\int_T g(t, \tau)\,Z(d\tau), \tag{24}$$

называется *интегральным каноническим представлением* этой случайной функции. Интегральному каноническому представлению (24) случайной функции соответствует интегральное каноническое представление (23) ее ковариационной функции.

Стохастическая мера $Z(A)$ в предыдущих формулах может быть в общем случае векторной. Соответственно, $g(t, \tau)$ может быть в общем случае прямоугольной (в частном случае квадратной) матрицей.

В соответствии с принятым в приложениях правилом записывать стохастические интегралы как интегралы от белого шума интегральное каноническое представление (24) случайной функции в приложениях обычно записывают в виде

$$X(t)=m_x(t)+\int_T g(t, \tau)\,V(\tau)\,d\tau, \tag{25}$$

где $V(t)$ — белый шум интенсивности $\nu(t)$. В соответствии с этим интегральное каноническое представление случайной функции определяют как представление соответствующей центрированной случайной функции в виде результата линейного преобразования белого шума.

Проблема нахождения интегрального канонического представления случайной функции имеет большое значение для приложений.

В некоторых случаях интегральное каноническое представление случайной функции скалярной переменной удается получить, выразив ее как выходной сигнал линейной системы при подаче на ее вход белого шума. Такую систему обычно называют *формирующим фильтром*. Задача нахождения интегрального канонического представления случайной функции сводится в этом случае к построению формирующего фильтра для данной случайной функции. С этой задачей и с некоторыми методами ее решения мы встретимся в гл. 5.

Общие подходы к проблеме нахождения интегральных канонических представлений читатель может найти в [102] (вып. 12).

§ 3.3. Линейные стохастические дифференциальные уравнения

3.3.1. Определение. Линейное уравнение

$$\frac{dX}{dt} = aX + a_0 + bV \tag{26}$$

называется *линейным стохастическим дифференциальным уравнением*, если случайная функция $V(t)$ представляет собой белый шум. Пусть X_0 — случайная величина той же размерности, что и случайная функция $X(t)$ в (26), не коррелированная с белым шумом $V(s)$ при $t < s$. Уравнение (26) с начальным условием $X(t_0) = X_0$ определяет случайный процесс $X(t)$ при $t > t_0$.

Чтобы придать уравнению (26) с начальным условием $X(t_0) = X_0$ точный смысл, проинтегрируем его формально в пределах от t_0 до t:

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} [a(\tau) X(\tau) + a_0(\tau)]\, d\tau + \int_{t_0}^{t} b(\tau) V(\tau)\, d\tau.$$

Первый интеграл здесь следует понимать как с. к. интеграл, а второй согласно сказанному в п. 3.1.7 — как стохастический интеграл по процессу с некоррелированными приращениями $W(t)$, слабой с. к. производной которого служит белый шум $V(t)$. Таким образом, мы приходим к уравнению

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} [a(\tau) X(\tau) + a_0(\tau)]\, d\tau + \int_{t_0}^{t} b(\tau)\, dW(\tau), \tag{27}$$

определяющему случайный процесс $X(t)$. Следовательно, уравнению (26) с начальным условием $X(t_0) = X_0$ соответствует *линейное стохастическое интегральное уравнение* (27).

Уравнение (27) имеет точный смысл. Стохастическое дифференциальное уравнение (26) и равноценное ему уравнение

$$dX = (aX + a_0)\, dt + b\, dW$$

с начальным условием $X(t_0) = X_0$ следует понимать как сокращенную запись стохастического интегрального уравнения (27).

Случайный процесс $X(t)$, удовлетворяющий уравнению (27), называется *средним квадратическим решением* или, короче, *с. к. решением* уравнения (27) и соответствующего стохастического дифференциального уравнения при начальном условии $X(t_0) = X_0$, если интегралы в (27) представляют собой с. к. пределы соответствующих интегральных сумм.

Случайный процесс $X(t)$ называется *решением в реализациях* уравнения (27) и соответствующего стохастического дифференциального уравнения при начальном условии $X(t_0) = X_0$, если интегралы в (27) и производная в (26) существуют для каждой реализации процессов $X(t)$ и $W(t)$ и равенства (27) и (26) справедливы для каждой реализации этих процессов. С решением линейного стохастического дифференциального уравнения в реализациях мы встречались в примере 2.13. Однако в большей части задач приходится ограничиваться с. к. решениями.

3.3.2. Решение линейного уравнения. Пусть, как и в п. 1.3.2, $u(t, \tau)$ — решение однородного уравнения

$$\frac{du}{dt} = au$$

при начальном условии $u(\tau, \tau) = I$. Положим $X(t) = u(t, t_0) Y(t)$. Тогда в силу обратимости матрицы $u(t, t_0)$ при всех t и t_0 (п. 1.3.2) $Y(t) = u(t, t_0)^{-1} X(t)$. Подставив сюда выражение $X(t)$ из (27), будем иметь

$$Y(t) = u(t, t_0)^{-1} X_0 + \\ + u(t, t_0)^{-1} \int_{t_0}^{t} [a(\tau) X(\tau) + a_0(\tau)]\, d\tau + u(t, t_0)^{-1} \int_{t_0}^{t} b(\tau)\, dW(\tau). \quad (28)$$

▶ Применим теперь к первому интегралу формулу интегрирования по частям (2.74), положив

$$\varphi(t) = u(t, t_0)^{-1}, \quad Z(t) = \int_{t_0}^{t} [a(\tau) X(\tau) + a_0(\tau)]\, d\tau.$$

Тогда, приняв во внимание, что по доказанному в п. 2.4.6 с. к. производная с. к. интеграла по верхнему пределу равна значению подынтегральной функции при этом пределе, получим

$$u(t, t_0)^{-1} \int_{t_0}^{t} [a(\tau) X(\tau) + a_0(\tau)]\, d\tau = \\ = \int_{t_0}^{t} u(\tau, t_0)^{-1} [a(\tau) X(\tau) + a_0(\tau)]\, d\tau + \\ + \int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau} u(\tau, t_0)^{-1}\, d\tau \int_{t_0}^{\tau} [a(\sigma) X(\sigma) + a_0(\sigma)]\, d\sigma.$$

Но по доказанному в п. 1.3.3

$$\frac{d}{dt} u(t, t_0)^{-1} = -u(t, t_0)^{-1} a(t).$$

Следовательно,

$$u(t,\ t_0)^{-1}\int_{t_0}^{t}[a(\tau)X(\tau)+a_0(\tau)]\,d\tau=$$

$$=\int_{t_0}^{t}u(\tau,\ t_0)^{-1}[a(\tau)X(\tau)+a_0(\tau)]\,d\tau-$$

$$-\int_{t_0}^{t}u(\tau,\ t_0)^{-1}a(\tau)\,d\tau\int_{t_0}^{\tau}[a(\sigma)X(\sigma)+a_0(\sigma)]\,d\sigma. \qquad (29)$$

Точно так же применим ко второму интегралу в (28) формулу интегрирования по частям (18), положив

$$\varphi(t)=u(t,\ t_0)^{-1},\quad \psi(t)=b(t).$$

Тогда получим

$$u(t,\ t_0)^{-1}\int_{t_0}^{t}b(\tau)\,dW(\tau)=\int_{t_0}^{t}u(\tau,\ t_0)^{-1}b(\tau)\,dW(\tau)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\frac{d}{d\tau}u(\tau,\ t_0)^{-1}d\tau\int_{t_0}^{\tau}b(\sigma)\,dW(\sigma)=$$

$$=\int_{t_0}^{t}u(\tau,\ t_0)^{-1}b(\tau)\,dW(\tau)-\int_{t_0}^{t}u(\tau,\ t_0)^{-1}a(\tau)\,d\tau\int_{t_0}^{\tau}b(\sigma)\,dW(\sigma). \qquad (30)$$

Наконец, первое слагаемое в правой части формулы (28) представим в виде

$$u(t,\ t_0)^{-1}X_0=$$

$$=X_0+\int_{t_0}^{t}\frac{d}{d\tau}u(\tau,\ t_0)^{-1}d\tau\cdot X_0=X_0-\int_{t_0}^{t}u(\tau,\ t_0)^{-1}a(\tau)X_0\,d\tau. \qquad (31)$$

Подставив выражения (29)—(31) в (28), получим

$$Y(t)=X_0+$$

$$+\int_{t_0}^{t}u(\tau,\ t_0)^{-1}[a(\tau)X(\tau)+a_0(\tau)]\,d\tau+\int_{t_0}^{t}u(\tau,\ t_0)^{-1}b(\tau)\,dW(\tau)-$$

$$-\int_{t_0}^{t}u(\tau,\ t_0)^{-1}a(\tau)\left\{X_0+\int_{t_0}^{\tau}[a(\sigma)X(\sigma)+a_0(\sigma)]\,d\sigma+\int_{t_0}^{\tau}b(\sigma)\,dW(\sigma)\right\}d\tau.$$

Но согласно (27)

$$X_0+\int_{t_0}^{\tau}[a(\sigma)X(\sigma)+a_0(\sigma)]\,d\sigma+\int_{t_0}^{\tau}b(\sigma)\,dW(\sigma)=X(\tau).$$

Следовательно,

$$Y(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} u(\tau, t_0)^{-1} [a(\tau) X(\tau) + a_0(\tau)] d\tau +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} u(\tau, t_0)^{-1} b(\tau) dW(\tau) - \int_{t_0}^{t} u(\tau, t_0)^{-1} a(\tau) X(\tau) d\tau =$$
$$= X_0 + \int_{t_0}^{t} u(\tau, t_0)^{-1} a_0(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t} u(\tau, t_0)^{-1} b(\tau) dW(\tau).$$

Таким образом,

$$Y(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} u(\tau, t_0)^{-1} a_0(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t} u(\tau, t_0)^{-1} b(\tau) dW(\tau)$$

и

$$X(t) = u(t, t_0) Y(t) = u(t, t_0) X_0 +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} u(t, t_0) u(\tau, t_0)^{-1} a_0(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t} u(t, t_0) u(\tau, t_0)^{-1} b(\tau) dW(\tau).$$

Заметим, наконец, что согласно формуле (1.23) $u(t, t_0) = u(t, \tau) u(\tau, t_0)$. Подставив это выражение в предыдущую формулу, получим

$$X(t) = u(t, t_0) X_0 + \int_{t_0}^{t} u(t, \tau) a_0(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t} u(t, \tau) b(\tau) dW(\tau). \blacktriangleleft \quad (32)$$

Эта формула определяет с. к. решение уравнения (27) или, что то же, стохастического дифференциального уравнения (26) при начальном условии $X(t_0) = X_0$. Принимая во внимание формальное равенство $dW(\tau) = V(\tau) d\tau$, убеждаемся в том, что *обычная формула для интеграла неоднородного линейного дифференциального уравнения*, полученная в п. 1.3.2 для вектора состояния линейной системы $z(t)$, *применима и к стохастическим линейным дифференциальным уравнениям.*

3.3.3. Линейные уравнения высших порядков. В приложениях часто рассматривают наряду с дифференциальными уравнениями первого порядка линейные стохастические дифференциальные уравнения высших порядков.

Дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t) \frac{d^kY}{dt^k} = \sum_{k=0}^{m} b_k(t) \frac{d^kV}{dt^k}$$

называется *стохастическим дифференциальным уравнением n-го порядка*, если $m < n$ и случайная функция $V(t)$ представляет собой белый шум. Чтобы придать этому уравнению точный смысл, заменим его формально эквивалентной системой уравнений первого порядка, не содержащей производных белого шума (п. 1.3.4):

$$dX_k/dt = X_{k+1} + q_k V \qquad (k=1, \ldots, n-1),$$

$$dX_n/dt = -\sum_{k=1}^{n} a_n^{-1} a_{k-1} X_k + q_n V,$$

где $X_1 = Y$,

$$q_1 = \ldots = q_{n-m-1} = 0, \quad q_{n-m} = a_n^{-1} b_m,$$

$$q_k = a_n^{-1} \left[b_{n-k} - \sum_{h=n-m}^{k-l} \sum_{l=0}^{k-h} C_{n-k+l}^{n-k} a_{n-k+l+h} q_n^{(l)} \right]$$

$$(k = n-m+1, \ldots, n).$$

Вводя составной векторный процесс $X(t) = [X_1(t)^\mathrm{T} \ldots X_n(t)^\mathrm{T}]^\mathrm{T} = [Y(t)^\mathrm{T} X_2(t)^\mathrm{T} \ldots X_n(t)^\mathrm{T}]^\mathrm{T}$ и матрицы

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_n^{-1}a_0 & -a_n^{-1}a_1 & -a_n^{-1}a_2 & \ldots & -a_n^{-1}a_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \ldots \\ q_n \end{bmatrix},$$

приведем полученную систему стохастических дифференциальных уравнений к виду

$$\frac{dX}{dt} = aX + bV.$$

Таким образом, линейное стохастическое дифференциальное уравнение n-го порядка следует понимать как эквивалентную в смысле п. 1.3.4 систему стохастических дифференциальных уравнений первого порядка, которую, как мы видели, можно записать в виде одного уравнения первого порядка (26) с $a_0 = 0$ для соответствующего составного векторного случайного процесса.

В соответствии с этим решение линейного стохастического дифференциального уравнения n-го порядка следует понимать как первый блок (первую компоненту в случае скалярного уравнения n-го порядка) составного векторного случайного процесса $X(t)$, представляющего собой решение соответствующего стохастического дифференциального уравнения первого порядка, $Y(t) = X_1(t)$.

§ 3.4. Стохастические интегралы от случайных функций

3.4.1. Процессы с независимыми приращениями. Случайный процесс $X(t)$ называется *процессом с независимыми приращениями*, если при любых N, $t_0 < t_1 < \ldots < t_N$ случайные величины X_{t_0}, $X_{t_1} - X_{t_0}$, $\ldots$, $X_{t_N} - X_{t_{N-1}}$ независимы.

Изучим конечномерные распределения процесса $X(t)$ с независимыми приращениями. При этом, как всегда, за пределами теории, основанной на моментах первого и второго порядков, будем считать процесс $X(t)$ действительным (скалярным или конечномерным векторным).

► Так как для любых $t_1 < t_2$

$$X(t_2) = X(t_1) + [X(t_2) - X(t_1)],$$

то значение процесса с независимыми приращениями при любом t_2 представляет собой сумму двух независимых случайных величин — его значения при любом $t_1 < t_2$ и его приращения на интервале (t_1, t_2). Обозначим через $g_1(\lambda; t)$ одномерную характеристическую функцию процесса $X(t)$, а через $g(\lambda; t, s)$ — характеристическую функцию его приращения на интервале (t, s). Как известно, характеристическая функция суммы независимых величин равна произведению характеристических функций слагаемых (*ТВ*, п. 4.5.1). Но характеристические функции величин $X(t_2)$, $X(t_1)$, $X(t_2) - X(t_1)$ представляют собой соответственно $g_1(\lambda; t_2)$, $g_1(\lambda; t_1)$, $g(\lambda; t_1, t_2)$. Следовательно,

$$g_1(\lambda; t_2) = g_1(\lambda; t_1)\, g(\lambda; t_1, t_2)$$

при любых $t_1 < t_2$. Отсюда находим

$$g(\lambda; t_1, t_2) = \frac{g_1(\lambda; t_2)}{g_1(\lambda; t_1)}, \quad \forall t_1 < t_2. \blacktriangleleft \tag{33}$$

Таким образом, *характеристическая функция приращения процесса с независимыми приращениями полностью определяется его одномерной характеристической функцией, т. е. его одномерным распределением.*

► Далее, при любых $t_1 < \ldots < t_n$

$$X(t_k) = X(t_1) + [X(t_2) - X(t_1)] + \ldots + [X(t_k) - X(t_{k-1})] \quad (k = 2, \ldots, n)$$

и

$$\begin{aligned} g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n) &= M \exp\{i\lambda_1^{\mathrm{T}} X(t_1) + \ldots + i\lambda_n^{\mathrm{T}} X(t_n)\} = \\ &= M \exp\{i(\lambda_1^{\mathrm{T}} + \ldots + \lambda_n^{\mathrm{T}}) X(t_1) + \\ &+ i(\lambda_2^{\mathrm{T}} + \ldots + \lambda_n^{\mathrm{T}})[X(t_2) - X(t_1)] + \ldots + i\lambda_n^{\mathrm{T}}[X(t_n) - X(t_{n-1})]\}. \end{aligned}$$

В силу теоремы умножения математических ожиданий (*ТВ*, п. 4.2.6) это равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n) &= M \exp\{i(\lambda_1^{\mathrm{T}} + \ldots + \lambda_n^{\mathrm{T}}) X(t_1)\} \times \\ &\times M \exp\{i(\lambda_2^{\mathrm{T}} + \ldots + \lambda_n^{\mathrm{T}})[X(t_2) - X(t_1)]\} \times \ldots \\ &\ldots \times M \exp\{i\lambda_n^{\mathrm{T}}[X(t_n) - X(t_{n-1})]\}. \end{aligned}$$

Но

$$M \exp\{i(\lambda_1^T + \ldots + \lambda_n^T) X(t_1)\} = g_1(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n;\ t_1),$$
$$M \exp\{i(\lambda_p^T + \ldots + \lambda_n^T)[X(t_p) - X(t_{p-1})\} = g(\lambda_p + \ldots + \lambda_n;\ t_{p-1},\ t_p)$$
$$(p = 2,\ \ldots,\ n).$$

Подставив эти выражения в предыдущее равенство, находим

$$g_n(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n;\ t_1,\ \ldots,\ t_n) =$$
$$= g_1(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n;\ t_1)\, g(\lambda_2 + \ldots + \lambda_n;\ t_1,\ t_2) \ldots g(\lambda_n;\ t_{n-1},\ t_n)$$
$$(n = 2,\ 3,\ \ldots).$$

Наконец, подставив сюда выражение $g(\lambda_p + \ldots + \lambda_n;\ t_{p-1},\ t_p)$ из (33), получаем

$$g_n(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n;\ t_1,\ \ldots,\ t_n) =$$
$$= \frac{g_1(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n;\ t_1)\, g_1(\lambda_2 + \ldots + \lambda_n;\ t_2) \ldots g_1(\lambda_n;\ t_n)}{g_1(\lambda_2 + \ldots + \lambda_n;\ t_1)\, g_1(\lambda_3 + \ldots + \lambda_n;\ t_2) \ldots g_1(\lambda_n;\ t_{n-1})}$$
$$(n = 2,\ 3,\ \ldots). \blacktriangleleft \tag{34}$$

Итак, мы доказали, что *все конечномерные распределения процесса с независимыми приращениями однозначно определяются его одномерным распределением.*

Таким образом, процессы с независимыми приращениями относятся к классу случайных функций, все конечномерные распределения которых полностью определяются одним из них. Однако, в отличие от случайных функций с независимыми значениями и марковских процессов, для которых любое одномерное или, соответственно, двумерное распределение однозначно определяет все конечномерные распределения, для процессов с независимыми приращениями одномерное распределение не может быть произвольно задано. Формула (33) показывает, что *характеристическая функция $g_1(\lambda;\ t)$ может быть одномерной характеристической функцией процесса с независимыми приращениями только в том случае, когда при любых $t < s$ отношение $g_1(\lambda;\ s)/g_1(\lambda;\ t)$ тоже является характеристической функцией, т. е. непрерывной неотрицательно определенной функцией, равной* 1 *при* $\lambda = 0$ (*ТВ*, п. 4.5.1).

Если процесс с независимыми приращениями $X(t)$ имеет конечный момент второго порядка, то он является процессом с некоррелированными приращениями (*ТВ*, п. 4.2.4). Следовательно, ковариационная функция процесса $X(t)$ с независимыми приращениями определяется формулой (1):

$$K_x(t_1,\ t_2) = k(\min(t_1,\ t_2)),$$

где $k(t)$ — неубывающая неотрицательная функция, представляющая собой ковариационную матрицу (дисперсию в случае скалярного процесса $X(t)$) значения процесса $X(t)$ при данном t. Мы будем в дальнейшем считать, что функция $k(t)$ непрерывна и дифференцируема, вследствие чего ковариационная функция процесса $X(t)$ определяется формулой, обобщающей формулу (2):

$$K_x(t_1, t_2) = k(t_0) + \int\limits_{t_0}^{\min(t_1, t_2)} \nu(\tau)\, d\tau.$$

Нетрудно понять, что любой процесс с независимыми приращениями представляет собой марковский случайный процесс. Доказательство этого здесь не приводится.

Пример 10. Одномерная характеристическая функция стандартного винеровского процесса примера 1 определяется формулой $g_1(\lambda; t) = e^{-t\lambda^2/2}$ (*ТВ*, пример 4.28). Формула (34) в этом случае дает

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n) = \\ = \frac{\exp\{-t_1(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)^2/2 - t_2(\lambda_2 + \ldots + \lambda_n)^2/2 - \ldots - t_n\lambda_n^2/2\}}{\exp\{-t_1(\lambda_2 + \ldots + \lambda_n)^2/2 - t_2(\lambda_3 + \ldots + \lambda_n)^2/2 - \ldots - t_{n-1}\lambda_n^2/2\}} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}[\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n] \begin{bmatrix} t_1 & t_1 & \ldots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{bmatrix}\right\} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Эта формула показывает, что *стандартный винеровский процесс является нормально распределенной случайной функцией с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией* $\min(t_1, t_2)$.

Пример 11. Пуассоновский процесс примера 2 $P(t)$ имеет одномерную характеристическую функцию (*ТВ*, пример 4.26)

$$g_1(\lambda; t) = \exp\left\{(e^{i\lambda} - 1)\int\limits_0^t \nu(\tau)\, d\tau\right\}.$$

По формуле (34) находим все конечномерные распределения пуассоновского процесса:

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n) = \exp\left\{e^{i(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)}\int\limits_0^{t_1} \nu(\tau)\, d\tau + \right.$$

$$\left. + e^{i(\lambda_2 + \ldots + \lambda_n)}\int\limits_{t_1}^{t_2} \nu(\tau)\, d\tau + \ldots + e^{i\lambda_n}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} \nu(\tau)\, d\tau - \int\limits_0^{t_n} \nu(\tau)\, d\tau\right\}$$

$$(n = 2, 3, \ldots).$$

Пример 12. Чтобы найти одномерную характеристическую функцию общего пуассоновского процесса $X(t)$ примера 3,

$$X(t) = \sum_{k=1}^{P(t)} X_k,$$

где $\{X_k\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных скачков $X_1, X_2, \ldots$ процесса $X(t)$, а $P(t)$ — простой пуассоновский процесс интенсивности $\nu_0(t)$, обозначим через $g(\lambda)$ характеристическую функцию скачков $X_1, X_2, \ldots$ Тогда, учитывая, что характеристическая функция суммы независимых величин равна произведению характеристических функций слагаемых (*ТВ*, п. 4.5.1), находим условную характеристическую функцию процесса $X(t)$ при $P(t)=m$:

$$g_{P(t)=m}(\lambda;\ t)=M\exp\left\{i\lambda^{\mathrm{T}}\sum_{k=1}^{m}X_k\right\}=g^m(\lambda).$$

После этого по формуле полного математического ожидания (*ТВ*, п. 4.3.3) находим

$$g_1(\lambda;\ t)=\sum_{m=0}^{\infty}g^m(\lambda)\frac{\mu^m}{m!}e^{-\mu}=e^{\mu g(\lambda)-\mu}=e^{\mu[g(\lambda)-1]},$$

где

$$\mu=\int_{t_0}^{t}\nu_0(\tau)\,d\tau.$$

Определив одномерную характеристическую функцию общего пуассоновского процесса $X(t)$, находим по формуле (34) все его конечномерные характеристические функции

$$g_n(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n;\ t_1,\ \ldots,\ t_n)=\exp\left\{g(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)\int_0^{t_1}\nu_0(\tau)\,d\tau+\right.$$
$$\left.+g(\lambda_2+\ldots+\lambda_n)\int_{t_1}^{t_2}\nu_0(\tau)\,d\tau+\ldots+g(\lambda_n)\int_{t_{n-1}}^{t_n}\nu_0(\tau)\,d\tau-\int_0^{t_n}\nu_0(\tau)\,d\tau\right\}$$
$$(n=2,\ 3,\ \ldots).$$

Иногда приходится рассматривать общий пуассоновский процесс $X(t)$, распределение независимых скачкообразных изменений которого зависит от моментов времени, в которые эти изменения происходят. В этом случае найти конечномерные распределения процесса $X(t)$ трудно. Однако легко находится распределение приращения процесса $X(t)$ на бесконечно малом интервале времени $(t,\ s]$. Для этого достаточно заметить, что при бесконечно малом $s-t$ вероятность того, что число скачков в интервале $(t,\ s]$ будет больше 1, имеет порядок $o(s-t)$. Тогда, имея в виду, что при отсутствии скачков в интервале $(t,\ s]$ условная характеристическая функция приращения равна единице, а при одном скачке равна характеристической функции $g(\lambda;\ t)$ величины скачка, будем иметь

$$g(\lambda;\ t,\ s)=1\cdot e^{-\nu_0(t)(s-t)}+g(\lambda;\ t)\,\nu_0(t)(s-t)+o(s-t)=$$
$$=1+[g(\lambda;\ t)-1]\,\nu_0(t)(s-t)+o(s-t).$$

Таким образом, характеристическая функция приращения на бесконечно малом интервале времени $(t,\ s]$ общего пуассоновского процесса с переменным распределением скачков определяется формулой

$$g(\lambda;\ t,\ s)=1+[g(\lambda;\ t)-1]\,\nu_0(t)(s-t)+o(s-t).$$

Найдем еще совместную характеристическую функцию приращений общего пуассоновского процесса $X(t)$ и порождающего его простого пуассоновского процесса на бесконечно малом интервале времени $(t,\ s]$. Согласно определению имеем

$$g(\lambda_1,\ \lambda_2;\ t,\ s)=M\exp\left\{i\lambda_1^{\mathrm{T}}\Delta X+i\lambda_2\Delta P\right\}=$$
$$=e^{-\nu_0(t)(s-t)}+e^{i\lambda_2}g(\lambda_1;\ t)\,\nu_0(t)(s-t)+o(s-t)=$$
$$=1+\left[e^{i\lambda_2}g(\lambda_1;\ t)-1\right]\nu_0(t)(s-t)+o(s-t).$$

Таким образом, совместная характеристическая функция приращений на бесконечно малом интервале $(t,\ s]$ общего пуассоновского процесса с переменным распределением скачков и порождающего его простого пуассоновского процесса определяется формулой

$$g(\lambda_1,\ \lambda_2;\ t,\ s)=1+\left[e^{i\lambda_2}g(\lambda_1;\ t)-1\right]\nu_0(t)(s-t)+o(s-t).$$

Во всех приведенных примерах процесс с некоррелированными приращениями является в то же время и процессом с независимыми приращениями. Следующие примеры показывают, что процесс с независимыми приращениями может не быть процессом с некоррелированными приращениями, а процесс с некоррелированными приращениями может не быть процессом с независимыми приращениями.

Пример 13. Распределение Коши может служить одномерным распределением процесса с независимыми приращениями, так как характеристическая функция $g_1(\lambda;\ t)=e^{-\alpha t|\lambda|}$ распределения Коши с плотностью

$$f_1(x;\ t)=\frac{\alpha t}{\pi(\alpha^2t^2+x^2)}$$

удовлетворяет условию (33):

$$\frac{g_1(\lambda;\ t_2)}{g_1(\lambda;\ t_1)}=e^{-\alpha(t_2-t_1)|\lambda|}\quad\text{при}\quad t_2>t_1.$$

Однако такой процесс с одномерным распределением Коши не имеет ни математического ожидания, ни момента второго порядка и, следовательно, не может быть процессом с некоррелированными приращениями.

Пример 14. Примером процесса с некоррелированными, но с зависимыми приращениями может служить случайный процесс

$$X(t)=\left(\frac{\alpha}{\Lambda}Z+U\right)\sin\Lambda t+\left(\frac{\alpha}{\Lambda}U-Z\right)(1-\cos\Lambda t),$$

где Z, U, Λ — независимые случайные величины, причем Z и U распределены нормально, имеют нулевые математические ожидания и одинаковую дисперсию D, а Λ распределена по закону Коши с плотностью

$$f(\lambda)=\frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{\alpha^2+\lambda^2}.$$

Для доказательства того, что процесс $X(t)$ является процессом с некоррелированными приращениями, найдем его ковариационную функцию. Для этого сначала вычислим условную ковариационную функцию процесса $X(t)$ при $\Lambda=\lambda$:

$$K_x(t_1,\ t_2\,|\,\lambda)=D\frac{\alpha^2+\lambda^2}{\lambda^2}\left[1+\cos\lambda(t_1-t_2)-\cos\lambda t_1-\cos\lambda t_2\right].$$

После этого по формуле полного математического ожидания (*ТВ*, п. 4.3.3) находим ковариационную функцию процесса $X(t)$:

$$K_x(t_1,\ t_2)=\int_0^\infty K_x(t_1,\ t_2\,|\,\lambda)f_1(\lambda)\,d\lambda=$$

$$=\frac{2D\alpha}{\pi}\left[\int_0^\infty\frac{1-\cos\lambda t_1}{\lambda^2}d\lambda+\int_0^\infty\frac{1-\cos\lambda t_2}{\lambda^2}d\lambda-\int_0^\infty\frac{1-\cos\lambda(t_1-t_2)}{\lambda^2}d\lambda\right].$$

Пользуясь формулой

$$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos \beta\lambda}{\lambda^2}\, d\lambda = \frac{\pi}{2}\,|\beta|,$$

получаем

$$K_x(t_1,\ t_2) = 2D\alpha \min(t_1,\ t_2).$$

Отсюда видно, что $X(t)$ представляет собой процесс с некоррелированными приращениями.

Интуитивно ясно, что $X(t)$ не является процессом с независимыми приращениями. Чтобы доказать это, найдем совместное распределение случайных величин

$$X = X(t) = \left(\frac{\alpha}{\Lambda} Z + U\right) \sin \Lambda t + \left(\frac{\alpha}{\Lambda} U - Z\right)(1-\cos \Lambda t),$$

$$Y = X(s) - X(t) = \left(\frac{\alpha}{\Lambda} Z + U\right)(\sin \Lambda s - \sin \Lambda t) + \left(\frac{\alpha}{\Lambda} U - Z\right)(\cos \Lambda t - \cos \Lambda s).$$

Уравнения

$$x = \left(\frac{\alpha}{\lambda} z + u\right) \sin \lambda t + \left(\frac{\alpha}{\lambda} u - z\right)(1-\cos \lambda t),$$

$$y = \left(\frac{\alpha}{\lambda} z + u\right)(\sin \lambda s - \sin \lambda t) + \left(\frac{\alpha}{\lambda} u - z\right)(\cos \lambda t - \cos \lambda s)$$

имеют однозначное решение относительно z и u при $\lambda \neq 0$. Пользуясь известной формулой для плотности функции случайных величин для этого случая (TB, формула (5.34)), находим совместную плотность величин X и Y:

$$f(x,\ y) = \frac{\alpha}{2\pi^2 D} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\lambda^2 \{[1-\cos \lambda(s-t)]\, x^2 + \\ + [1-\cos \lambda(s-t) + \cos \lambda s - \cos \lambda t]\, xy + (1-\cos \lambda t)\, y^2\} \times \\ \times D^{-1} (\alpha^2+\lambda^2)^{-1} [\sin \lambda(s-t) - \sin \lambda s + \sin \lambda t]^{-2}\} \times \\ \times \frac{\lambda^2\, d\lambda}{(\alpha^2+\lambda^2)^2\, |\sin \lambda(s-t) - \sin \lambda s + \sin \lambda t\,|}.$$

Отсюда видно, что совместная плотность величин X и Y не может быть представлена в виде произведения их плотностей. Следовательно, X и Y зависимы, что и доказывает наше утверждение.

3.4.2. Белый шум в строгом смысле. В п. 3.1.6 было показано, что любой процесс с некоррелированными приращениями с дифференцируемой ковариационной функцией имеет слабую с. к. производную, представляющую собой белый шум. В частности, любой процесс с независимыми приращениями, обладающий дифференцируемой ковариационной функцией, имеет слабую с. к. производную, которая представляет собой белый шум.

Белый шум, полученный дифференцированием процесса с независимыми приращениями, называется *белым шумом в строгом смысле*.

Как показывают примеры п. 2.2.5, белый шум может быть обычной случайной функцией, значение которой при каждом значении аргумента представляет собой случайную величину, а может быть и обобщенной случайной функцией, реализации которой не имеют определенного значения ни при каком значении аргумента. Однако обычными случайными функциями могут быть только белые шумы, полученные дифференцированием процессов с некоррелированными, но зависимыми приращениями (белый шум примера 2.10 и производная процесса $X(t)$ примера 14). Белые шумы в строгом смысле всегда являются обобщенными случайными функциями (примеры 6 и 7).

3.4.3. Винеровские процессы. Скалярный или векторный действительный случайный процесс с независимыми приращениями $W(t)$, $t > 0$, называется *винеровским процессом*, если он удовлетворяет условиям:

1) все реализации $w(t)$ процесса $W(t)$ непрерывны и $w(0) = 0$;

2) одномерное распределение процесса $W(t)$ нормально;

3) математическое ожидание процесса $W(t)$ тождественно равно нулю, а его ковариационная функция определяется формулой

$$K_w(t_1, t_2) = \int\limits_0^{\min(t_1, t_2)} \nu(\tau)\, d\tau,$$

где $\nu(t)$ — неотрицательная функция — интенсивность винеровского процесса $W(t)$ *).

Непосредственно из этого определения следует, что *любой винеровский процесс представляет собой нормально распределенную случайную функцию.*

► Действительно, из определения следует, что одномерная характеристическая функция винеровского процесса определяется формулой (*ТВ*, пример 4.32)

$$g_1(\lambda;\ t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda^{\mathrm{T}} k(t)\, \lambda\right\},$$

где

$$k(t) = \int\limits_0^t \nu(\tau)\, d\tau.$$

Подставив это выражение в (34), после довольно громоздких, но несложных выкладок находим все конечномерные характеристические функции винеровского процесса

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ t_1, \ldots, t_n) = \\ = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\lambda_1^{\mathrm{T}}\,\lambda_2^{\mathrm{T}} \ldots \lambda_n^{\mathrm{T}}\right] \begin{bmatrix} k(t_1) & k(t_1) & \ldots & k(t_1) \\ k(t_1) & k(t_2) & \ldots & k(t_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k(t_1) & k(t_2) & \ldots & k(t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{bmatrix}\right\}.$$

*) См. сноску на стр. 150.

Эта формула показывает, что все конечномерные распределения винеровского процесса нормальны. ◀

Очевидно, что стандартный винеровский процесс примеров 1 и 10 представляет собой скалярный винеровский процесс единичной интенсивности $\nu(t) \equiv 1$.

Белый шум, представляющий собой производную винеровского процесса, называется *нормально распределенным белым шумом*. Это определение распространяет нормальное распределение на белые шумы, представляющие собой обобщенные случайные функции. Непосредственное определение нормально распределенного случайного процесса, данное в п. 2.2.8, очевидно, неприменимо к белым шумам.

3.4.4. Интегральное представление общего пуассоновского процесса. Достаточно общей для приложений формой случайного процесса с независимыми приращениями является линейная комбинация независимых винеровского и общих пуассоновских процессов.

Рассмотрим общий пуассоновский процесс $P(t)$, скачки которого представляют собой независимые случайные q-мерные векторы с плотностью $f(x)$. Выделим из потока скачков процесса $P(t)$ поток скачков, принадлежащих множеству A q-мерного пространства R^q (иными словами, будем считать те скачки процесса $P(t)$, которые попадают в область A). Докажем, что этот поток скачков процесса $P(t)$ представляет собой пуассоновский поток интенсивности

$$\nu_P(t,\ A) = \nu_0(t) \int_A f(x)\, dx. \tag{35}$$

► Во-первых, вероятность появления скачка, принадлежащего множеству A, в интервале времени $(t,\ t+\Delta t)$ равна произведению вероятности того, что в этом интервале произойдет скачок, $\nu_0(t)\Delta t + o(\Delta t)$, и вероятности того, что этот скачок попадет в область A, $\int_A f(x)\, dx$, т. е.

$$\nu_0(t)\,\Delta t \int_A f(x)\, dx + o(\Delta t),$$

где $\nu_0(t)$ — интенсивность скачков процесса $P(t)$. Множитель при Δt здесь представляет собой интенсивность скачков, принадлежащих множеству A. Во-вторых, вероятность появления больше одного скачка в интервале времени $(t,\ t+\Delta t)$ есть величина высшего порядка малости $o(\Delta t)$. В-третьих, в силу независимости скачков процесса $P(t)$ и в силу того, что $P(t)$ — пуассоновский процесс, числа скачков процесса $P(t)$, принадлежащих множеству A, в непересекающихся интервалах времени представляют собой независимые случайные величины. Из этих трех фактов и следует, что поток скачков процесса $P(t)$, попадающих на множество A,—

пуассоновский с интенсивностью, определяемой формулой (35) (*ТВ*, § 1.9). ◀

Обозначим через $P(t, A)$ простой пуассоновский процесс, представляющий собой число скачков процесса $P(t)$ в интервале $[0, t)$, попадающих на множество A. Посмотрим, что представляет собой $P(t, A)$ при фиксированном t.

▶ Прежде всего очевидно, что при любом фиксированном t $P(t, A)$ представляет собой случайную функцию множества A, равную 0 на пустом множестве, $P(t, \varnothing) \equiv 0$. Далее ясно, что для любых пересекающихся множеств A и B $P(t, A)$ и $P(t, B)$ представляют собой независимые случайные величины в силу независимости скачков исходного процесса $P(t)$ (процессы $P(t, A)$ и $P(t, B)$ порождаются разными точками разрыва $P(t)$). А так как простой пуассоновский процесс имеет конечный момент второго порядка, то $P(t, A)$ и $P(t, B)$ не коррелированы для любых непересекающихся $A, B \subset R^q$. Наконец, ясно, что для любого множества A, представимого в виде конечного или счетного объединения попарно непересекающихся множеств, $A = \cup A_k$, $A_k A_h = \varnothing$ при $h \neq k$,

$$P(t, A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(t, A_k),$$

т. е. $P(t, A)$ σ-аддитивна как функция множества A при любом t. Таким образом, при любом фиксированном t $P(t, A)$ представляет собой стохастическую меру (п. 3.2.1) с независимыми значениями на непересекающихся множествах. ◀

Так как распределение меры $P(t, A)$ при любых фиксированных t и A представляет собой распределение Пуассона, то стохастическая мера $P(t, A)$ обычно называется *пуассоновской мерой*.

▶ Рассмотрим теперь последовательность разбиений пространства R^q,

$$R^q = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(n)} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

такую, что

$$\Delta_n = \sup_k \sup_{x, x' \in A_k^{(n)}} |x' - x| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

В каждой области $A_k^{(n)}$ возьмем произвольно точку $\xi_k^{(n)}$. Считая все скачки процесса $P(t)$, попадающие в область $A_k^{(n)}$, равными $\xi_k^{(n)}$, можно приближенно представить исходный процесс $P(t)$ в виде суммы

$$P(t) \approx \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(n)} P(t, A_k^{(n)}). \tag{36}$$

Действительно, $\xi_k^{(n)} P(t, A_k^{(n)})$ представляет собой q-мерный общий пуассоновский процесс, все скачки которого равны $\xi_k^{(n)}$. Сумма всех таких процессов представляет собой общий пуассоновский процесс, все скачки которого равны одной из величин $\xi_k^{(n)}$ ($k = 1, 2, \ldots$). Вероятность каждого конкретного скачка при условии, что скачок произошел в данный момент t, равна

$$p_k^{(n)} = P(\xi_k^{(n)}) = \int\limits_{A_k^{(n)}} f(x)\,dx \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, сумма в правой части формулы (36) есть общий пуассоновский процесс со скачками, представляющими собой независимые дискретные случайные векторы с возможными значениями $\xi_k^{(n)}$ и вероятностями этих значений $p_k^{(n)}$ (т. е. с дискретизированным распределением, определяемым плотностью $f(x)$). Ясно, что чем меньше Δ_n, тем точнее формула (36) представляет процесс $P(t)$. В пределе (среднем квадратическом) при $\Delta_n \to 0$ это равенство будет точным. При этом правая часть его согласно определению (20) будет представлять собой стохастический интеграл по пуассоновской мере $P(t, A)$ (при каждом фиксированном t):

$$P(t) = \int\limits_{R^q} xP(t, dx). \quad ◀ \tag{37}$$

Формула (37) дает *интегральное представление* общего пуассоновского процесса, т. е. его разложение на независимые элементарные пуассоновские процессы, каждый из которых имеет скачки вполне определенной величины. Так как нулевые скачки не являются скачками, то ни одна из областей $A_k^{(n)}$ в предыдущих рассуждениях не может содержать начало координат. Поэто́му интеграл в (37), а также интегралы в формулах (38)—(43), (45)—(47) распространены на пространство R^q с выколотым началом координат.

Выведем соответствующее интегральное представление для одномерной характеристической функции $g_1(\lambda; t)$ процесса $P(t)$.

▶ Для этого заметим, что характеристическая функция $g_{A_k^{(n)}}(\lambda; t)$ процесса $\xi_k^{(n)} P(t, A_k^{(n)})$ определяется формулой (*ТВ*, п. 4.5.1; см. также пример 11 этой главы)

$$\ln g_{A_k^{(n)}}(\lambda; t) = \left(e^{i\lambda^T \xi_k^{(n)}} - 1\right) \int\limits_0^t \nu_P(\tau, A_k^{(n)})\,d\tau.$$

Подставив сюда выражение $\nu_P(\tau, A_k^{(n)})$ из (35), получим

$$\ln g_{A_k^{(n)}}(\lambda; t) = \left(e^{i\lambda^T \xi_k^{(n)}} - 1\right) \int\limits_{A_k^{(n)}} f(x)\,dx \int\limits_0^t \nu_0(\tau)\,d\tau.$$

При $\Delta_n \to 0$ интеграл по x в этой формуле в случае непрерывной плотности $f(x)$ можно заменить соответствующим элементом вероятности $f(\xi_k^{(n)})\,\Delta x_k^{(n)}$, где $\Delta x_k^{(n)}$ — бесконечно малый объем (длина при $q=1$, площадь при $q=2$) области $A_k^{(n)}$ (TB, п. 2.2.3). Тогда получим

$$\ln g_{A_k^{(n)}}(\lambda;\ t) = \left(e^{i\lambda^{\mathrm{T}}\xi_k^{(n)}} - 1\right) f(\xi_k^{(n)})\,\Delta x_k^{(n)} \int_0^t \nu_0(\tau)\,d\tau.$$

Теперь вспомним, что характеристическая функция суммы независимых величин равна произведению характеристических функций слагаемых (TB, п. 4.5.1). Следовательно, одномерная характеристическая функция $g_1(\lambda;\ t)$ процесса $P(t)$ может быть приближенно представлена формулой

$$\ln g_1(\lambda;\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{i\lambda^{\mathrm{T}}\xi_k^{(n)}} - 1\right) f(\xi_k^{(n)})\,\Delta x_k^{(n)} \int_0^t \nu_0(\tau)\,d\tau.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем точное равенство

$$\ln g_1(\lambda;\ t) = \int_{R^q} \left(e^{i\lambda^{\mathrm{T}}x} - 1\right) f(x)\,dx \int_0^t \nu_0(\tau)\,d\tau. \blacktriangleleft \tag{38}$$

Ясно, что формула (38) по существу совпадает с формулой, полученной в примере 12.

Заметим теперь, что для любой бесконечно малой области Δx величина

$$\mu(t,\ x)\,\Delta x = f(x)\,\Delta x \int_0^t \nu_0(\tau)\,d\tau = \int_0^t \nu_P(\tau,\ \Delta x)\,d\tau$$

на основании (35) представляет собой с точностью до бесконечно малых высших порядков математическое ожидание пуассоновского процесса $P(t,\ \Delta x)$. Поэтому формулу (38) можно переписать в виде

$$\ln g_1(\lambda;\ t) = \int_{R^q} \left(e^{i\lambda^{\mathrm{T}}x} - 1\right) \mu(t,\ x)\,dx. \tag{39}$$

Формула (37) дает при этом следующее выражение для математического ожидания процесса $P(t)$:

$$MP(t) = \int_{R^q} x\mu(t,\ x)\,dx. \tag{40}$$

Из (39) и (40) вытекает интегральное представление одномерной характеристической функции $g_1^0(\lambda;\ t)$ центрированного общего пуассоновского процесса $P^0(t) = P(t) - MP(t)$:

$$\ln g_1^0(\lambda;\ t) = \ln g_1(\lambda;\ t) - i\lambda^{\mathrm{T}} MP(t) =$$
$$= \int_{R^q} \left(e^{i\lambda^{\mathrm{T}}x} - 1 - i\lambda^{\mathrm{T}}x\right) \mu(t,\ x)\,dx. \tag{41}$$

3.4.5. Общая форма процесса с независимыми приращениями. На основании (37) любая линейная комбинация независимых общих пуассоновских процессов определяется формулой

$$\sum_{k=1}^{N} c_k P_k(t) = \int_{R^q} \sum_{k=1}^{N} c_k x P_k(t,\ dx).$$

Это дает основание принять за общую форму процесса с независимыми приращениями $X(t)$ выражение

$$X(t) = W(t) + \int_{R^q} c(x)\, P(t,\ dx), \tag{42}$$

где $W(t)$ — винеровский процесс, $P(t, A)$ — пуассоновский процесс как функция t и пуассоновская стохастическая мера как функция множества A, а $c(x)$ — векторная функция, отображающая R^q в пространство значений процесса $X(t)$ при каждом t.

Совершенно так же, как была получена формула (39), выводится формула для одномерной характеристической функции $g_1(\lambda;\ t)$ процесса $X(t)$, определяемого формулой (42):

$$\ln g_1(\lambda;\ t) = -\frac{1}{2}\lambda^{\tau} k(t)\,\lambda + \int_{R^q} \left[e^{i\lambda^{\tau} c(x)} - 1\right] \mu(t,\ x)\, dx, \tag{43}$$

где $\mu(t, x)$ определяется формулой

$$\int_{A} \mu(t,\ x)\, dx = MP(t,\ A). \tag{44}$$

Из формул (42) и (44), имея в виду, что математическое ожидание винеровского процесса равно нулю (п. 3.4.3), получаем

$$MX(t) = \int_{R^q} c(x)\, \mu(t,\ x)\, dx. \tag{45}$$

При этом характеристическая функция $g_1^0(\lambda;\ t)$ центрированного процесса

$$X^0(t) = X(t) - MX(t) = W(t) + \int_{R^q} c(x)\, P^0(t,\ dx) \tag{46}$$

определится формулой

$$\ln g_1^0(\lambda;\ t) = -\frac{1}{2}\lambda^{\tau} k(t)\,\lambda + \int_{R^q} \left[e^{i\lambda^{\tau} c(x)} - 1 - i\lambda^{\tau} c(x)\right] \mu(t,\ x)\, dx\,^{*}). \tag{47}$$

---

*) Формулы (43), (45) и (47), конечно, преобразуются к (39)—(41) заменой переменных $y = c(x)$. Однако в приложениях это нецелесообразно.

Приращение процесса с независимыми приращениями на любом интервале обладает тем свойством, что его можно представить в виде суммы любого числа независимых случайных величин. Для этого достаточно разбить данный интервал на соответствующее число частей и представить приращение процесса на этом интервале в виде суммы его приращений на выбранных частных интервалах. Это значит, что распределение приращения процесса с независимыми приращениями должно быть *безгранично делимым* [14]. Из теории безгранично делимых распределений известно, что всякое безгранично делимое распределение можно представить в виде композиции нормального и пуассоновских распределений, точнее, логарифм характеристической функции безгранично делимого распределения можно представить в виде суммы логарифма характеристической функции нормального распределения и интегралов вида (39) и (41). Однако в общем случае математическое ожидание процесса $X(t)$ может не существовать. При этом интеграл в (40) или (45) может расходиться как из-за слишком быстрого роста функции $\mu(t, x)$ при $x \to 0$, так и из-за слишком медленного убывания ее при $x \to \infty$. Однако во всех случаях интеграл

$$\int \frac{|x|^2 \mu(t, x)\, dx}{1+|x|^2},$$

распространенный на все пространство R^q с выколотым началом координат, сходится. Поэтому, если разбить пространство R^q на две области $0<|x| \leqslant 1$ и $|x|>1$, то в формуле (39) будет сходящимся интеграл по области $|x|>1$, а в формуле (41) — интеграл по области $0<|x| \leqslant 1$. Поэтому любой с. к. непрерывный процесс с независимыми приращениями $X(t)$ в общем случае может быть представлен формулой

$$X(t)=W(t)+\int\limits_{0<|x| \leqslant 1} x P^0(t, dx)+\int\limits_{|x|>1} x P(t, dx),$$

где $W(t)$ — процесс с непрерывными реализациями с нормально распределенными приращениями, $P(t, A)$ — пуассоновский процесс по t и пуассоновская стохастическая мера по A с независимыми значениями на непересекающихся множествах, $P^0(t, A)=P(t, A)-MP(t, A)$ — центрированная пуассоновская мера. Соответственно, одномерная характеристическая функция процесса с независимыми приращениями в общем случае выражается формулой

$$\ln g_1(\lambda;\ t)=\ln g_0(\lambda)+i\lambda^{\mathrm{T}} m(t)-\frac{1}{2} \lambda^{\mathrm{T}} k(t) \lambda+$$
$$+\int\limits_{0<|x| \leqslant 1}\left(e^{i\lambda^{\mathrm{T}} x}-1-i\lambda^{\mathrm{T}} x\right) \mu(t, x)\, dx+\int\limits_{|x|>1}\left(e^{i\lambda^{\mathrm{T}} x}-1\right) \mu(t, x)\, dx,$$

где $g_0(\lambda)$ — произвольная характеристическая функция, не зависящая от t.

Пример 15. Для процесса Коши (пример 13), пользуясь формулами

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \lambda x-1}{x^2}\, dx=-|\lambda|,$$

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sin \lambda x-\lambda x}{x^2}\, dx=0, \qquad \int\limits_{|x|>1} \frac{\sin \lambda x}{x^2}\, dx=0,$$

получаем

$$\ln g_1(\lambda;\ t)=-\alpha t|\lambda|=\frac{\alpha t}{\pi} \int\limits_{-1}^{1}\left(e^{i\lambda x}-1-i\lambda x\right) \frac{dx}{x^2}+\frac{\alpha t}{\pi} \int\limits_{|x|>1}\left(e^{i\lambda x}-1\right) \frac{dx}{x^2}.$$

Следовательно, процесс Коши представим в виде

$$X(t)=\int_{-1}^{1} xP^0(t,\ dx)+\int_{|x|>1} xP(t,\ dx),$$

и $\mu(t,\ x)=\alpha t/\pi x^2$.

Примечание. Мы изложили некоторые результаты теории процессов с независимыми приращениями, предполагая для простоты, что математическое ожидание пуассоновской меры $P(t,\ A)$ представимо интегралом (44) с функцией $\mu(t,\ x)$, возможно, содержащей линейную комбинацию δ-функций переменной x. Однако в теории процессов с независимыми приращениями обычно рассматривают более общий случай, когда $m_P(t,\ A)=$ $=MP(t,\ A)$ непредставимо интегралом (44). В этом случае римановы интегралы по x во всех предыдущих формулах заменяются интегралами Лебега по мере $m_P(t,\ A)$.

3.4.6. Интеграл Ито. Пусть $W(t)$ — действительный скалярный случайный процесс с независимыми приращениями с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией

$$K_w(t_1,\ t_2)=k(t_0)+\int_{t_0}^{\min(t_1,\ t_2)} \nu(\tau)\,d\tau,$$

где $\nu(t)$ — непрерывная неотрицательная функция, $X(t)$ — с. к. непрерывная скалярная случайная функция с конечным моментом второго порядка, такая, что случайный вектор с компонентами $X(t_1),\ \ldots,\ X(t_N),\ W(s_1),\ \ldots,\ W(s_M)$ не зависит от $W(s)-W(t)$ при любых $N,\ M,\ t_1<\ \ldots\ <t_N\leqslant t,\ s_1<\ \ldots\ <s_M\leqslant t<s$, $a=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\ \ldots\ <t_{N_n}^{(n)}=b\quad(n=1,\ 2,\ \ldots)$ — последовательность разбиений $\{P_n\}$ интервала $(a,\ b)$, такая, что

$$\Delta_n=\max_p\,(t_p^{(n)}-t_{p-1}^{(n)})\to 0\quad \text{при}\ n\to\infty.$$

Образуем последовательность сумм

$$Y_n=\sum_{p=1}^{N_n} X(t_{p-1}^{(n)})\,[W(t_p^{(n)})-W(t_{p-1}^{(n)})]\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Стохастическим интегралом Ито от случайной функции $X(t)$ по процессу $W(t)$, распространенным на интервал $(a,\ b)$, называется с. к. предел последовательности сумм [28]:

$$Y=\int_a^b X(\tau)\,dW(\tau)=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{p=1}^{N_n} X(t_{p-1}^{(n)})\,[W(t_p^{(n)})-W(t_{p-1}^{(n)})].\quad (48)$$

Обратим внимание на то, что значение случайной функции $X(t)$ для каждого интервала $[t_{p-1}^{(n)},\ t_p^{(n)})$ берется в левом конце этого интервала и это существенно, так как предел в (48) изменится, если заменить $X(t_{p-1}^{(n)})$ значением $X(t)$ в какой-нибудь другой точке интервала $[t_{p-1}^{(n)},\ t_p^{(n)}]$. Этим стохастические интегралы от случайных функций отличаются от обычных с. к. интегралов и от стохастических интегралов от неслучайных функций.

► Для установления условий существования интеграла Ито воспользуемся теоремой о с. к. сходимости п. 2.4.2. Согласно этой теореме для существования интеграла (48) необходимо и достаточно существование предела $\lim MY_n\bar{Y}_m$, независимо от того, как $n, m \to \infty$. Для вычисления $\lim MY_n\overline{Y}_m$ возьмем объединение двух разбиений P_n и P_m интервала (a, b). Пусть $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_Q = b$ — объединенное разбиение. Тогда можем написать

$$Y_n = \sum_{k=1}^{Q} X(\tau'_k)\,[W(t_k) - W(t_{k-1})],$$

$$Y_m = \sum_{l=1}^{Q} X(\tau''_l)\,[W(t_l) - W(t_{l-1})],$$

где $\tau'_k = t^{(n)}_{p-1}$ для всех интервалов $[t_{h-1}, t_h)$, принадлежащих интервалу $[t^{(n)}_{p-1}, t^{(n)}_p)$, $\tau''_l = t^{(m)}_{q-1}$ для всех интервалов $[t_{l-1}, t_l)$, принадлежащих интервалу $[t^{(m)}_{q-1}, t^{(m)}_q)$. Пользуясь этими формулами, находим

$$MY_n\overline{Y}_m = \sum_{k,\,l=1}^{Q} MX(\tau'_k)\,\overline{X(\tau''_l)}\,[W(t_k) - W(t_{k-1})]\,[W(t_l) - W(t_{l-1})].$$

Рассмотрим слагаемое этой суммы, для которого $l > k$. Для любого такого слагаемого случайные величины $X(\tau'_k)\,X(\tau''_l)\times[W(t_k) - W(t_{k-1})]$ и $W(t_l) - W(t_{l-1})$ независимы, так как $\tau'_k < t_{l-1}$, $\tau''_l \leqslant t_{l-1}$, $t_k \leqslant t_{l-1}$. Следовательно,

$$MX(\tau'_k)\,\overline{X(\tau''_l)}\,[W(t_k) - W(t_{k-1})]\,[W(t_l) - W(t_{l-1})] = \\ = MX(\tau'_k)\,\overline{X(\tau''_l)}\,[W(t_k) - W(t_{k-1})] \cdot M\,[W(t_l) - W(t_{l-1})] = 0.$$

Точно так же это математическое ожидание равно нулю при любых $l < k$. Таким образом, отличными от нуля в двойной сумме будут только слагаемые, для которых $l = k$. Для этих слагаемых $X(\tau'_k)\,\overline{X(\tau''_k)}$ и $W(t_k) - W(t_{k-1})$ независимы, так как $\tau'_k, \tau''_k \leqslant t_{k-1}$ и, следовательно,

$$MY_n\overline{Y}_m = \sum_{k=1}^{Q} MX(\tau'_k)\,\overline{X(\tau''_k)} \cdot M\,|W(t_k) - W(t_{k-1})|^2 = \\ = \sum_{k=1}^{Q} MX(\tau'_k)\,\overline{X(\tau''_k)} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \nu(\tau)\,d\tau. \tag{49}$$

Если предел этой суммы существует и не зависит от того, каким образом $n, m \to \infty$, то он равен интегралу

$$\int\limits_a^b M\,|X(\tau)|^2\,\nu(\tau)\,d\tau.$$

Действительно, полагая $m=n\to\infty$, получим $Q=N_n$, $t_{k-1}=\tau'_k=\tau''_k=t^{(n)}_{p-1}$ и (49) примет вид

$$\lim_{n\to\infty} MY_n\overline{Y}_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{p=1}^{N_n} M\,|\,X(t^{(n)}_{p-1})\,|^2\int\limits_{t^{(n)}_{p-1}}^{t^{(n)}_p}\nu(\tau)\,d\tau=\int\limits_a^b M\,|\,X(\tau)\,|^2\,\nu(\tau)\,d\tau.$$

И наоборот, если этот интеграл существует, то предел суммы (49) существует и не зависит от того, каким образом n, $m\to\infty$. ◀

Таким образом, *для существования интеграла Ит* (48) *необходимо и достаточно существование интеграла* (49), *который согласно лемме п.* 2.4.2 *равен дисперсии интеграла* (48):

$$D_y=\int\limits_a^b M\,|\,X(\tau)\,|^2\nu(\tau)\,d\tau. \tag{50}$$

Что же касается математического ожидания интеграла (48), то оно, очевидно, равно нулю в силу того, что $MY_n=0$ при любом n.

Доказав эту теорему для конечного интервала (a, b) и непрерывной функции $\nu(t)$, можно распространить ее на бесконечные интервалы $(-\infty, b)$, (a, ∞), $(-\infty, \infty)$ обычным для определения несобственных интегралов путем.

Пример 16. Найти дисперсию стохастического интеграла

$$Y=\int\limits_0^T X(\tau)\,dW(\tau),$$

где $X(t)$ — случайная функция с математическим ожиданием $m_x(t)=ct$ и ковариационной функцией $K_x(t_1, t_2)=De^{\mu(t_1+t_2)-\alpha|t_1-t_2|}$, а $W(t)$ — стандартный винеровский процесс.

По формуле (50), учитывая, что $\nu(t)=1$ и

$$M\,|\,X(t)\,|^2=|\,m_x(t)\,|^2+D_x(t)=c^2t^2+De^{2\mu t},$$

находим

$$D_y=c^2\int\limits_0^T\tau^2\,d\tau+D\int\limits_0^T e^{2\mu\tau}\,d\tau=c^2T^3/3+D\,(e^{2\mu T}-1)/2\mu.$$

На основании леммы п. 2.4.2 ковариация двух интегралов Ито

$$Y=\int\limits_a^b X_1(\tau)\,dW(\tau),\qquad Z=\int\limits_a^b X_2(\tau)\,dW(\tau)$$

определяется формулой

$$k_{yz}=\int\limits_a^b MX_1(\tau)\,\overline{X_2(\tau)}\,\nu(\tau)\,d\tau. \tag{51}$$

Точно так же ковариация интегралов Ито

$$Y=\int_a^b X_1(\tau)\,dW_p(\tau),\quad Z=\int_a^b X_2(\tau)\,dW_q(\tau),$$

где $W_p(t)$ и $W_q(t)$ — компоненты векторного процесса $W(t)$ с независимыми приращениями, определяется формулой

$$k_{yz}=\int_a^b MX_1(\tau)\overline{X_2(\tau)}\,\nu_{pq}(\tau)\,d\tau, \tag{52}$$

где $\nu_{pq}(t)$ — соответствующий элемент матрицы $\nu(t)$.

3.4.7. Векторный интеграл Ито. Определение стохастического интеграла Ито (48) распространяется на случай n-мерного векторного процесса с независимыми приращениями $W(t)$ и матричной случайной функции $X(t)$ размера $m\times n$. Необходимым и достаточным условием существования интеграла Ито является в этом случае существование всех скалярных стохастических интегралов, входящих в выражения компонент векторного интеграла (48). В этом случае согласно (50) и (52) элементы ковариационной матрицы интеграла Y определяются формулой

$$k_{pq}=MY_p\overline{Y}_q=\sum_{r,\,s=1}^{n}\int_a^b MX_{pr}(\tau)\overline{X_{qs}(\tau)}\,\nu_{rs}(\tau)\,d\tau$$
$$(p,\ q=1,\ \ldots,\ n).$$

Отсюда вытекает следующая формула для ковариационной матрицы интеграла Y:

$$K_y=MYY^*=\int_a^b MX(\tau)\,\nu(\tau)\,X(\tau)^*\,d\tau. \tag{53}$$

Порядок множителей в этой формуле в общем случае не может быть изменен.

3.4.8. Другие виды стохастических интегралов. Построив интегральные суммы Y_n при других выборах точек, в которых берутся значения случайной функции $X(t)$, в интервалах $[t_{p-1}^{(n)},\ t_p^{(n)}]$, получим другие определения стохастического интеграла. Взяв, в частности, значения $X(t)$ в правых концах интервалов $[t_{p-1}^{(n)},\ t_p^{(n)}]$, определим стохастический интеграл

$$Y_1=\int_a^b X(\tau)\,d_1W(\tau)=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{p=1}^{N_n}X(t_p^{(n)})\,[W(t_p^{(n)})-W(t_{p-1}^{(n)})].$$

После этого для любого $\theta\in[0, 1]$ можно определить стохастический θ-интеграл

$$Y_\theta=\int_a^b X(\tau)\,d_\theta W(\tau)=(1-\theta)\,Y+\theta Y_1=$$
$$=\operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty}\sum_{p=1}^{N_n}\left[(1-\theta)\,X(t_{p-1}^{(n)})+\theta X(t_p^{(n)})\right]\left[W(t_p^{(n)})-W(t_{p-1}^{(n)})\right]. \quad (54)$$

Очевидно, что интеграл Ито представляет собой θ-интеграл при $\theta=0$, а интеграл Y_1 — θ-интеграл при $\theta=1$. При $\theta=1/2$ стохастический интеграл (54) представляет собой *симметризованный стохастический интеграл Стратоновича* [72, 73].

Интеграл Ито обладает большим преимуществом перед другими видами стохастических интегралов. Это преимущество заключается в простоте вычисления моментов интеграла. Для интеграла Ито математическое ожидание и дисперсия (ковариационная матрица в векторном случае) вычисляются, как мы видели, совершенно элементарно. Вычислить же математическое ожидание θ-интеграла при $\theta\neq0$ в общем случае очень трудно вследствие зависимости $X(t_p^{(n)})$ от $W(t_p^{(n)})-W(t_{p-1}^{(n)})$.

Пример 17. Для иллюстрации зависимости стохастического интеграла от выбора точек в интервалах $[t_{p-1}^{(n)}, t_p^{(n)}]$, в которых берутся значения $X(t)$, рассмотрим θ-интегралы

$$Y_{\theta_1}=\int_0^T W(\tau)\,d_{\theta_1}W(\tau),\quad Y_{\theta_2}=\int_0^T W(\tau)\,d_{\theta_2}W(\tau),$$

соответствующие двум различным значениям θ_1 и θ_2 параметра θ, где $W(t)$ — стандартный винеровский процесс. В силу определения (54), взяв $t_p^{(n)}=pT/n$ $(p=0, 1, \ldots, n)$, получаем

$$\Delta Y=Y_{\theta_2}-Y_{\theta_1}=(\theta_2-\theta_1)\operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty}\sum_{p=1}^{n}\left[W\left(\frac{pT}{n}\right)-W\left(\frac{(p-1)\,T}{n}\right)\right]^2.$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины ΔY. Так как величина $W(pT/n)-W((p-1)\,T/n)$ распределена нормально, ее математическое ожидание равно нулю, а дисперсия равна T/n (пример 1), то

$$M\Delta Y=(\theta_2-\theta_1)\lim_{n\to\infty}\sum_{p=1}^{n}\frac{T}{n}=(\theta_2-\theta_1)\,T$$

и

$$M(\Delta Y)^2=(\theta_2-\theta_1)^2\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{p=1}^{n}M\left[W(pT/n)-W((p-1)\,T/n)\right]^4+\right.$$
$$\left.+\sum_{p\neq q}M\left[W(pT/n)-W((p-1)\,T/n)\right]^2\left[W(qT/n)-W((q-1)\,T/n)\right]^2\right\},$$

где вторая сумма распространяется на все p, q, $p\neq q$. Но центральный момент четвертого порядка нормально распределенной случайной величины равен утроенному квадрату ее дисперсии (*ТВ*, п. 3.6.1). Следовательно, $M[W(pT/n)-W((p-1)T/n)]^4=3(T/n)^2$ и

$$M(\Delta Y)^2=(\theta_2-\theta_1)^2 \lim_{n\to\infty}\left\{3\sum_{p=1}^{n}\frac{T^2}{n^2}+\sum_{p\neq q}\frac{T^2}{n^2}\right\}=$$

$$=(\theta_2-\theta_1)^2 \lim_{n\to\infty}\left\{2\sum_{p=1}^{n}\frac{T^2}{n^2}+\sum_{p,\,q=1}^{n}\frac{T^2}{n^2}\right\}=$$

$$=(\theta_2-\theta_1)^2 \lim_{n\to\infty}\left(2\frac{T^2}{n}+T^2\right)=(\theta_2-\theta_1)^2 T^2.$$

Теперь можно найти дисперсию случайной величины ΔY (*ТВ*, п. 3.2.4):

$$D\,\Delta Y=M(\Delta Y)^2-(M\,\Delta Y)^2=0.$$

Таким образом, величина ΔY не случайна и, следовательно, совпадает со своим математическим ожиданием, $\Delta Y=(\theta_2-\theta_1)T$. Это и доказывает, что стохастические интегралы, соответствующие разным значениям параметра θ, различны.

3.4.9. Стохастические интегралы как интегралы, содержащие белый шум. Как и в случае стохастических интегралов от неслучайных функций, стохастические интегралы от случайных функций можно рассматривать как интегралы, подынтегральные функции которых содержат множителем белый шум (в строгом смысле). Имея в виду формальное соотношение $dW(t)/dt=V(t)$, можно записать стохастический интеграл Ито (48) в виде

$$\int_a^b X(\tau)\,dW(\tau)=\int_a^b X(\tau)\,V(\tau)\,d\tau.$$

В аналогичной форме можно записать и стохастические θ-интегралы. В дальнейшем все интегралы от произведения случайной функции на белый шум в строгом смысле будем понимать как стохастические интегралы Ито.

3.4.10. Общий интеграл Ито. Пусть $Y(t)$ — случайный процесс, определяемый формулой

$$Y(t)=Y(t_0)+\int_{t_0}^{t} X_1(\tau)\,d\tau+\int_{t_0}^{t} X_2(\tau)\,dW(\tau), \tag{55}$$

где первый интеграл представляет собой с. к. интеграл от случайной функции $X_1(t)$, а второй — интеграл Ито от случайной функции $X_2(t)$ по процессу с независимыми приращениями $W(t)$. Случайные функции $X_1(t)$ и $X_2(t)$ предполагаются удовлетворяющими условиям, при которых оба интеграла существуют при любом t в некотором интервале T. Пусть $X(t)$ — случайная функция.

Интегралом Ито от случайной функции $X(t)$ *по процессу* $Y(t)$ *в пределах интервала* (a, b) называется сумма интегралов

$$\int_a^b X(\tau)\,dY(\tau) = \int_a^b X(\tau)\,X_1(\tau)\,d\tau + \int_a^b X(\tau)\,X_2(\tau)\,dW(\tau), \tag{56}$$

где первый интеграл представляет собой с. к. интеграл, а второй — интеграл Ито. При этом, конечно, случайные функции $X(t)\,X_1(t)$ и $X(t)\,X_2(t)$ должны удовлетворять условиям, при которых оба интеграла в правой части формулы (56) существуют.

§ 3.5. Стохастические дифференциалы

3.5.1. Дифференциал Ито. Рассмотрим случайный процесс

$$Z(t) = Z(t_0) + \int_{t_0}^{t} X(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t} Y(\tau)\,dW(\tau), \tag{57}$$

где первый интеграл представляет собой с. к. интеграл, а второй — стохастический интеграл Ито по процессу с независимыми приращениями $W(t)$. Предполагается, что случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ удовлетворяют условиям, при которых оба интеграла в (57) существуют. В этом случае принято говорить, что случайный процесс $Z(t)$ имеет *стохастический дифференциал Ито*

$$dZ = X\,dt + Y\,dW. \tag{58}$$

Эта формула представляет собой сокращенную запись интегрального соотношения (57).

Так как процесс $W(t)$ не имеет с. к. производной в обычном смысле, то dW, а следовательно и dZ, не является дифференциалом в привычном смысле. Тем не менее равенство (58) имеет вполне определенный смысл. В самом деле, на основании определения с. к. интеграла в п. 2.4.5 и определения стохастического интеграла Ито в п. 3.4.6 приращение случайной функции $Z(t)$ на малом интервале Δt изменения аргумента t приближенно равно

$$\Delta Z = Z(t + \Delta t) - Z(t) = X(t)\,\Delta t + Y(t)\,\Delta W, \tag{59}$$

где $\Delta W = W(t + \Delta t) - W(t)$. Чтобы оценить порядок малости слагаемых в последней части, возьмем условное математическое ожидание величины ΔZ при данных значениях x, y величин $X(t)$, $Y(t)$. Принимая во внимание, что величина ΔW не зависит от $Y(t)$, вследствие чего условное математическое ожидание величины ΔW при $Y(t) = y$ равно $M[W(t + \Delta t) - W(t)] = 0$, получаем

$$M[\Delta Z \mid x,\ y] = x\,\Delta t.$$

Таким образом, условное математическое ожидание приращения ΔZ при $X(t)=x$, $Y(t)=y$ имеет тот же порядок малости, что и Δt. Условная ковариационная матрица (дисперсия в случае скалярного процесса $Z(t)$) величины ΔZ при $X(t)=x$, $Y(t)=y$ имеет тот же порядок, что и ковариационная матрица величины $\Delta W(t)$, которая на основании формулы (2) приближенно равна $\nu(t)\Delta t$, т. е. тоже имеет порядок малости Δt. Следовательно, средние квадратические значения компонент вектора ΔZ имеют порядок малости $\sqrt{\Delta t}$. Таким образом, в отличие от обычного дифференциала функции и с. к. дифференциала случайной функции, которые всегда имеют порядок $\Delta t=dt$, стохастический дифференциал состоит из двух случайных слагаемых, одно из которых имеет порядок Δt, а второе — $\sqrt{\Delta t}$. И несмотря на это различие в порядке малости слагаемых, первым слагаемым, имеющим более высокий порядок малости, чем второе, пренебрегать нельзя. Оба слагаемых играют одинаковую роль в формировании процесса $Z(t)$, как это показывает формула (57).

3.5.2. Дифференцирование сложной функции в случае винеровского процесса. Рассмотрим случай, когда $W(t)$ в (57) представляет собой винеровский процесс, а случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ действительны *). Пусть $\varphi(z, t)$ — действительная скалярная функция, непрерывная вместе со своими первыми и вторыми производными по всем компонентам вектора z и первой производной по t. Найдем стохастический дифференциал Ито случайного процесса

$$U(t)=\varphi(Z(t),\ t).$$

► Для этого представим формулой Тейлора приращение $\Delta U=U(t+\Delta t)-U(t)$ с точностью до членов порядка Δt. При этом, учитывая, что ΔZ является величиной порядка $\sqrt{\Delta t}$, мы должны будем учесть и члены второго порядка относительно ΔZ. Тогда получим

$$\begin{aligned}\Delta U &= \varphi(Z(t+\Delta t),\ t+\Delta t)-\varphi(Z(t),\ t)=\\ &=\varphi_t(Z(t),\ t)\Delta t+\varphi_z(Z(t),\ t)^{\mathrm{T}}\Delta Z+\frac{1}{2}\Delta Z^{\mathrm{T}}\varphi_{zz}(Z(t),\ t)\Delta Z=\\ &=[\varphi_t(Z(t),\ t)+\varphi_z(Z(t),\ t)^{\mathrm{T}}X(t)]\Delta t+\\ &+\varphi_z(Z(t),\ t)^{\mathrm{T}}Y(t)\Delta W+\frac{1}{2}\Delta W^{\mathrm{T}}Y(t)^{\mathrm{T}}\varphi_{zz}(Z(t),\ t)Y(t)\Delta W,\end{aligned}$$

где $\varphi_t(z,\ t)=\partial\varphi(z,\ t)/\partial t$, $\varphi_z(z,\ t)=(\partial/\partial z)\varphi(z,\ t)$ — матрица-столбец, элементами которой служат производные функции $\varphi(z,\ t)$ по компонентам вектора z, а $\varphi_{zz}(z,\ t)=(\partial/\partial z)(\partial/\partial z)^{\mathrm{T}}\varphi(z,\ t)$ — матрица вторых производных $\varphi(z,\ t)$ по компонентам вектора z.

---

*) Напомним, что в общем случае $X(t)$ — векторная случайная функция, а $Y(t)$ — прямоугольная матричная случайная функция.

В последней части равенства мы отбросили слагаемые с произведениями $\Delta W\,\Delta t$ и Δt^2, так как эти слагаемые имеют порядок малости выше, чем Δt. Принимая во внимание, что для любого вектора (матрицы-столбца) a и любой квадратной матрицы B $a^{\mathrm{T}}Ba = \mathrm{tr}\,(Baa^{\mathrm{T}})$, перепишем полученное равенство в виде

$$\Delta U = [\varphi_t(Z(t),\ t) + \varphi_z(Z(t),\ t)^{\mathrm{T}}X(t)]\,\Delta t +$$
$$+ \varphi_z(Z(t),\ t)^{\mathrm{T}}Y(t)\Delta W + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,[\varphi_{zz}(Z(t),\ t)\,Y(t)\,\Delta W\,\Delta W^{\mathrm{T}}Y(t)^{\mathrm{T}}]. \quad (60)$$

В силу независимости $Z(t)$, $Y(t)$ от $\Delta W = W(t+\Delta t) - W(t)$ условное математическое ожидание последнего слагаемого в правой части (60) при $Y(t) = y$, $Z(t) = z$ равно

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,[\varphi_{zz}(z,\ t)\,y\nu(t)\,y^{\mathrm{T}}]\,\Delta t,$$

т. е. является малой величиной порядка Δt. Условный момент второго порядка этого слагаемого представляет собой сумму, каждый член которой содержит множителем центральный момент четвертого порядка случайной величины ΔW. Но для нормально распределенных величин центральные моменты четвертого порядка выражаются через попарные произведения центральных моментов второго порядка (*ТВ*, пример 4.34), которые имеют порядок Δt. Таким образом, центральные моменты четвертого порядка величины ΔW имеют порядок малости Δt^2, а среднее квадратическое значение последнего слагаемого правой части (60) имеет порядок Δt. Поэтому случайная часть последнего слагаемого правой части (60) имеет порядок Δt, т. е., является величиной высшего порядка малости по сравнению с величиной $\varphi_z(Z(t),\ t)^{\mathrm{T}}Y(t)\,\Delta W$, которая имеет порядок малости $\sqrt{\Delta t}$. Следовательно, мы должны учесть только математическое ожидание последнего слагаемого правой части (60). В результате получим

$$\Delta U = \Big\{\varphi_t(Z(t),\ t) + \varphi_z(Z(t),\ t)^{\mathrm{T}}X(t) +$$
$$+ \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,[\varphi_{zz}(Z(t),\ t)\,Y(t)\,\nu(t)\,Y(t)^{\mathrm{T}}]\Big\}\,\Delta t + \varphi_z(Z(t),\ t)^{\mathrm{T}}Y(t)\,\Delta W.$$

Переходя от бесконечно малых приращений к дифференциалам, находим стохастический дифференциал Ито случайного процесса $U(t) = \varphi(Z(t),\ t)$:

$$dU = \Big\{\varphi_t(Z,\ t) + \varphi_z(Z,\ t)^{\mathrm{T}}X + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,[\varphi_{zz}(Z,\ t)\,Y\nu Y^{\mathrm{T}}]\Big\}\,dt +$$
$$+ \varphi_z(Z,\ t)^{\mathrm{T}}Y\,dW. \blacktriangleleft \quad (61)$$

Эта формула, называемая *формулой Ито*, в общем случае отличается от обычной формулы дифференцирования сложной функции последним слагаемым в фигурных скобках [29].

В частном случае, когда функция $\varphi(z, t)$ представляет собой произведение двух первых компонент вектора z, $U(t)=Z_1(t)Z_2(t)$, из (61) вытекает формула для стохастического дифференциала произведения двух процессов, определяемых формулой вида (57):

$$d(Z_1Z_2)=Z_1\,dZ_2+Z_2\,dZ_1+\frac{1}{2}(Y_1\nu Y_2^{\mathrm{T}}+Y_2\nu Y_1^{\mathrm{T}})\,dt,$$

где Y_1 и Y_2 — первая и вторая строки матрицы Y соответственно. Но для любых матриц-строк одинаковой размерности a и b и любой квадратной матрицы c $acb^{\mathrm{T}}=bca^{\mathrm{T}}$. Следовательно, $Y_2\nu Y_1^{\mathrm{T}}=Y_1^{\mathrm{T}}\nu Y_2$, и мы получаем окончательную формулу для дифференциала Ито произведения двух случайных процессов:

$$d(Z_1Z_2)=Z_1\,dZ_2+Z_2\,dZ_1+Y_1\nu Y_2^{\mathrm{T}}\,dt. \tag{62}$$

Формулу (61) можно записать и для векторной функции $\varphi(z, t)=[\varphi_1(z, t)\ \dots\ \varphi_n(z, t)]^{\mathrm{T}}$. С этой целью обозначим через $\varphi_{zz}:A$ матрицу-столбец, элементами которой служат следы произведений матриц вторых производных соответствующих элементов $\varphi_p(z, t)$ матрицы-столбца $\varphi(z, t)$ по компонентам вектора z на матрицу A:

$$\varphi_{zz}:A=[\mathrm{tr}(\varphi_{1zz}A)\ \dots\ \mathrm{tr}(\varphi_{nzz}A)]^{\mathrm{T}}. \tag{63}$$

Пользуясь этим обозначением, из (61) получаем следующую формулу для стохастического дифференциала векторной случайной функции $U(t)=\varphi(z(t), t)$:

$$dU=\left\{\varphi_t(Z, t)+\varphi_z(Z, t)^{\mathrm{T}}X+\frac{1}{2}\varphi_{zz}(Z, t):Y\nu Y^{\mathrm{T}}\right\}dt+ \\ +\varphi_z(Z, t)^{\mathrm{T}}Y\,dW, \tag{64}$$

где $\varphi_z(z, t)=(\partial/\partial z)\,\varphi(z, t)^{\mathrm{T}}$.

В частном случае линейной функции $\varphi(z, t)$, $\varphi(z, t)=a(t)z$, формула (64) дает

$$dU=(\dot{a}Z+aX)\,dt+aY\,dW=\dot{a}Z\,dt+a\,dZ.$$

Таким образом, для линейной функции формула (64) совпадает с обычной формулой дифференцирования сложной функции.

Стохастические дифференциалы Ито типовых нелинейных функций стандартного винеровского процесса и многомерного винеровского процесса приведены в приложении 6.

Пример 18. Стохастический дифференциал Ито квадрата стандартного винеровского процесса $W^2(t)$ согласно (61) равен

$$dW^2(t)=dt+2W(t)\,dW(t),$$

так как в этом случае $X(t)=0$, $Y(t)=1$, $Z(t)=W(t)$, $\varphi(Z, t)=W^2$. Интегрируя эту формулу в пределах от 0 до T и учитывая, что $W(0)=0$, находим

$$W^2(T)=T+2\int_0^T W(t)\,dW(t),$$

откуда

$$\int_0^T W(\tau)\,dW(\tau)=\frac{1}{2}\,[W^2(T)-T].$$

Таким образом, интеграл Ито от стандартного винеровского процесса по этому процессу нельзя вычислять по обычной формуле интегрирования степенной функции.

На основании результата примера 17 стохастический θ-интеграл при любом θ отличается от интеграла Ито на величину θT:

$$\int_0^T W(\tau)\,d_\theta W(\tau)=\frac{1}{2}\,W^2(T)+\left(\theta-\frac{1}{2}\right)T.$$

Пример 19. Стохастический дифференциал Ито показательной функции стандартного винеровского процесса согласно (61) равен

$$de^{W(t)}=\frac{1}{2}\,e^{W(t)}\,dt+e^{W(t)}\,dW(t).$$

Таким образом, обычная формула для дифференциала показательной функции здесь неприменима.

3.5.3. Дифференцирование сложной функции в случае пуассоновского процесса. Рассмотрим теперь случай, когда $W(t)$ в (57) представляет собой центрированный пуассоновский процесс. Пусть $\varphi(z,t)$ — непрерывная скалярная функция с непрерывными производными $\varphi_t(z,t)=\partial\varphi(z,t)/\partial t$, $\varphi_z(z,t)=\partial\varphi(z,t)/\partial z$. Найдем стохастический дифференциал случайного процесса $U(t)=\varphi(Z(t),t)$.

► Для этого вычислим приращение процесса $U(t)$ при бесконечно малом приращении Δt аргумента t:

$$\begin{aligned}\Delta U=\varphi(Z(t+\Delta t),\,t+\Delta t)-\varphi(Z,t)=\\ =\varphi(Z(t+\Delta t),\,t+\Delta t)-\varphi(Z(t+\Delta t),\,t)+\\ +\varphi(Z(t+\Delta t),\,t)-\varphi(Z(t),\,t).\end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь формулой Тейлора, находим с точностью до малых высших порядков

$$\Delta U=\varphi_t(Z(t+\Delta t),\,t)\,\Delta t+\varphi(Z(t)+\Delta Z,\,t)-\varphi(Z(t),\,t). \qquad (65)$$

Но $\Delta Z=X(t)\,\Delta t+Y(t)\,\Delta W$, где $W(t)$ — центрированный пуассоновский процесс $W(t)=P(t)-MP(t)$. Обозначим через $\nu(t)$ интенсивность потока скачков процесса $P(t)$. Тогда, считая, что $P(0)=0$, будем иметь (TB, п.1.9.4 и пример 3.2)

$$MP(t)=\mu=\int_0^t \nu(\tau)\,d\tau$$

и

$$\Delta W=\Delta P-\nu(t)\,\Delta t.$$

Следовательно,

$$\Delta Z=[X(t)-Y(t)\,\nu(t)]\,\Delta t+Y(t)\,\Delta P.$$

Подставив это выражение в (65) и снова пользуясь формулой Тейлора, получаем

$$\Delta U = \varphi_t(Z(t+\Delta t),\, t)\,\Delta t + \varphi(Z(t) + [X(t) - Y(t)\,\nu(t)]\,\Delta t + Y(t)\,\Delta P,\, t) - \varphi(Z(t),\, t) =$$
$$= \varphi_t(Z(t+\Delta t),\, t)\,\Delta t + \varphi(Z(t) + [X(t) - Y(t)\,\nu(t)]\,\Delta t + Y(t)\,\Delta P,\, t) - \varphi(Z(t) + Y(t)\,\Delta P,\, t) + \varphi(Z(t) + Y(t)\,\Delta P,\, t) - \varphi(Z(t),\, t) =$$
$$= \{\varphi_t(Z(t+\Delta t),\, t) + \varphi_z(Z(t) + Y(t)\,\Delta P,\, t)^{\mathrm{T}}\,[X(t) - Y(t)\,\nu(t)]\}\,\Delta t + \varphi(Z(t) + Y(t)\,\Delta P,\, t) - \varphi(Z(t),\, t).$$

Сравним теперь две случайные величины

$$V_1 = \varphi(Z(t) + Y(t)\,\Delta P,\, t) - \varphi(Z(t),\, t)$$

и

$$V_2 = [\varphi(Z(t) + Y(t),\, t) - \varphi(Z(t),\, t)]\,\Delta P.$$

Величина ΔP распределена по закону Пуассона и ее математическое ожидание равно $\nu(t)\,\Delta t$. Следовательно, она принимает значение 0 с вероятностью $e^{-\nu(t)\,\Delta t}$, значение 1 с вероятностью $e^{-\nu(t)\,\Delta t}\nu(t)\,\Delta t$ и значение >1 с суммарной вероятностью порядка Δt^2. При этом величины V_1 и V_2 обе принимают значение 0 с вероятностью $e^{-\nu(t)\,\Delta t}$, значение $\varphi(Z(t) + Y(t),\, t) - \varphi(Z(t),\, t)$ с вероятностью $e^{-\nu(t)\,\Delta t}\nu(t)\,\Delta t$ и другие значения с суммарной вероятностью порядка Δt^2. Таким образом, для бесконечно малых Δt величины V_1 и V_2 распределены одинаково, вследствие чего величину V_1 в выражении ΔU можно заменить величиной V_2. Тогда получим с точностью до малых высших порядков

$$\Delta U = \{\varphi_t(Z(t),\, t) + \varphi_z(Z(t),\, t)^{\mathrm{T}}\,[X(t) - Y(t)\,\nu(t)]\}\,\Delta t + [\varphi(Z(t) + Y(t),\, t) - \varphi(Z(t),\, t)]\,\Delta P =$$
$$= \{\varphi_t(Z(t),\, t) + \varphi_z(Z(t),\, t)^{\mathrm{T}}\,[X(t) - Y(t)\,\nu(t)] + [\varphi(Z(t) + Y(t),\, t) - \varphi(Z(t),\, t)]\,\nu(t)\}\,\Delta t + [\varphi(Z(t) + Y(t),\, t) - \varphi(Z(t),\, t)]\,\Delta W.$$

Отсюда, переходя к дифференциалам и опуская аргумент t функций $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$, $\nu(t)$, получаем

$$dU = \{\varphi_t(Z,\ t) + \varphi_z(Z,\ t)^{\mathrm{T}}(X - Y\nu) + [\varphi(Z + Y,\ t) - \varphi(Z,\ t)]\,\nu\}\,dt + [\varphi(Z + Y,\ t) - \varphi(Z,\ t)]\,dW. \blacktriangleleft \tag{66}$$

Эта формула дифференцирования сложной функции совсем не похожа на обычную формулу математического анализа. И лишь в случае линейной относительно z функции $\varphi(z,\ t)$ она совпадает с обычной формулой. Действительно, если $\varphi(z,\ t) = a(t)\,z$, то формула (66) принимает вид

$$dU = \{\dot{a}Z + a(X - Y\nu) + [a(Z+Y) - aZ]\,\nu\}\,dt + aY\,dW =$$
$$= (\dot{a}Z + aX)\,dt + aY\,dW = \dot{a}Z\,dt + a\,dZ.$$

Легко видеть, что формула (66) справедлива и для векторного процесса $U(t) = \varphi(Z(t), t)$.

Пример 20. Стохастический дифференциал Ито от квадрата пуассоновского процесса $U(t) = P^2(t)$ согласно (66) определяется формулой

$$dU = [(P+1)^2 - P^2](\nu\,dt + dW) = (2P+1)\,dP,$$

так как в данном случае $Z(t) = P(t)$, $\varphi(z, t) = z^2$, $dZ = dP = \nu\,dt + dW$ и, следовательно, $X(t) = \nu(t)$, $Y(t) = 1$. Таким образом, и в случае центрированного пуассоновского процесса $W(t)$ обычная формула для дифференциала степенной функции неприменима.

Пример 21. Дифференциал Ито от показательной функции пуассоновского процесса $U(t) = e^{P(t)}$ в соответствии с (66) определяется формулой

$$dU = (e^{P(t)+1} - e^{P(t)})(\nu\,dt + dW) = (e-1)\,e^{P(t)}\,dP(t),$$

так как в данном случае $Z(t) = P(t)$, $\varphi(z, t) = e^z$, $dZ = dP = \nu\,dt + dW$ и, следовательно, $X(t) = \nu(t)$, $Y(t) = 1$. Таким образом, и в этом случае обычная формула дифференцирования показательной функции неприменима.

Аналогично выводится формула дифференцирования сложной функции, когда $W(t)$ в (34) представляет собой линейную комбинацию независимых винеровского и пуассоновского процессов.

3.5.4. Дифференцирование сложной функции в общем случае. Перейдем теперь к общему случаю, когда процесс с независимыми приращениями $W(t)$ в (57) определяется формулой (42):

$$W(t) = W_0(t) + \int_{R^q} c(x)\,P^0(t, dx).$$

Подставив это выражение в (59), представим приращение процесса $Z(t)$ в виде

$$\Delta Z = X(t)\,\Delta t + Y(t)\left[\Delta W_0 + \int_{R^q} c(x)\,\Delta P^0(t, dx)\right],$$

где $W_0(t)$ — винеровский процесс, а $P^0(t, A)$ — центрированная пуассоновская мера (п. 3.4.4). Заменив здесь приращение центрированного пуассоновского процесса $P^0(t, dx)$ его выражением

$$\Delta P^0(t, A) = \Delta P(t, A) - \int_A \Delta\mu(t, x)\,dx = \Delta P(t, A) - \int_A \nu_P(t, x)\,dx\,\Delta t,$$

где $\nu_P(t, x)$ — производная функции $\mu(t, x)$ по t, получим

$$\Delta Z = \left[X(t) - Y(t)\int_{R^q} c(x)\,\nu_P(t, x)\,dx\right]\Delta t +$$
$$+ Y(t)\,\Delta W_0 + Y(t)\int_{R^q} c(x)\,\Delta P(t, dx). \qquad (67)$$

Пусть $\varphi(z, t)$ — непрерывная скалярная функция с непрерывными первыми производными по компонентам вектора z и по t и непрерывными вторыми производными по компонентам вектора z. Найдем стохастический дифференциал случайного процесса

$$U(t) = \varphi(Z(t), t).$$

► Представим приращение процесса $U(t)$, опуская для краткости аргументы функций под знаком функции, в виде

$$\Delta U = \varphi(Z + \Delta Z, t + \Delta t) - \varphi(Z, t) = \varphi(Z + \Delta_1 Z, t + \Delta t) - \varphi(Z, t) + \\ + \varphi(Z + \Delta_1 Z + \Delta_2 Z, t + \Delta t) - \varphi(Z + \Delta_1 Z, t + \Delta t), \tag{68}$$

где

$$\Delta_1 Z = \left[X - Y\int_{R^q} c\nu_P\, dx\right]\Delta t + Y\Delta W_0,$$

$$\Delta_2 Z = Y\int_{R^q} c\Delta P(t, dx).$$

Преобразуя первую разность в правой части формулы (68) совершенно так же, как в п. 3.5.2, получим

$$\varphi(Z + \Delta_1 Z, t + \Delta t) - \varphi(Z, t) = \\ = \left\{\varphi_t(Z, t) + \varphi_z(Z, t)^{\mathrm{T}}\left(X - Y\int c\nu_P\, dx\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\varphi_{zz}(Z, t)Y\nu_0 Y^{\mathrm{T}}\right]\right\}\Delta t + \varphi_z(Z, t)^{\mathrm{T}} Y\Delta W_0, \tag{69}$$

где ν_0 — интенсивность винеровского процесса $W_0(t)$. Займемся второй разностью в правой части формулы (68). Рассмотрим случайные величины

$$V_1 = \varphi\left(z + Y\int c\Delta P(t, dx), \tau\right) - \varphi(z, \tau),$$

$$V_2 = \int [\varphi(z + Yc, \tau) - \varphi(z, \tau)]\,\Delta P(t, dx).$$

Сравним их распределения. Для этого вычислим их характеристические функции $g_1(\lambda)$ и $g_2(\lambda)$. Учитывая, что V_2 представляет собой приращение процесса с независимыми приращениями

$$W_2(t) = \int_{R^q} [\varphi(z + Yc(x), \tau) - \varphi(z, \tau)]\,P(t, dx),$$

по формулам (33) и (43), учитывая, что

$$\mu(t + \Delta t, x) - \mu(t, x) = \nu_P(t, x)\Delta t + o(\Delta t),$$

получаем

$$\ln g_2(\lambda) = \int_{R^q} \left\{e^{i\lambda[\varphi(z + Yc, \tau) - \varphi(z, \tau)]} - 1\right\}\nu_P(t, x)\, dx\,\Delta t + o(\Delta t). \tag{70}$$

Чтобы вычислить характеристическую функцию $g_1(\lambda)$ величины V_1, заметим, что V_1 при данных z, τ, t и Y представляет собой функцию векторной случайной величины

$$S = Y \int_{R^q} c\Delta P(t, dx),$$

которая в свою очередь представляет собой приращение процесса с независимыми приращениями

$$W_3(t) = Y \int_{R^q} c(x) P(t, dx).$$

Учитывая это, находим по формулам (33) и (43) характеристическую функцию $h(\mu)$ величины S,

$$\ln h(\mu) = \int_{R^q} \left(e^{i\mu^{\mathrm{T}} Yc} - 1\right) \nu_P(t, x)\, dx\, \Delta t + o(\Delta t).$$

Так как правая часть здесь — бесконечно малая порядка Δt, то

$$h(\mu) = 1 + \ln h(\mu) + o(\Delta t) =$$
$$= 1 + \int_{R^q} \left(e^{i\mu^{\mathrm{T}} Yc} - 1\right) \nu_P(t, x)\, dx\, \Delta t + o(\Delta t). \tag{71}$$

Определив характеристическую функцию величины S, можно найти ее плотность (TB, п. 4.5.2)

$$f(s) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} e^{-i\mu^{\mathrm{T}} s} h(\mu)\, d\mu, \tag{72}$$

где n — размерность векторов Z и S. После этого характеристическая функция величины V_1 определится формулой

$$g_1(\lambda) = \int_{R^n} e^{i\lambda[\varphi(z+s,\, \tau) - \varphi(z,\, \tau)]} f(s)\, ds.$$

Подставим сюда выражение (72) плотности $f(s)$ и заменим характеристическую функцию $h(\mu)$ величины s ее выражением (71). Тогда будем иметь

$$g_1(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n}\int_{R^n} e^{i\lambda[\varphi(z+s,\, \tau) - \varphi(z,\, \tau)] - i\mu^{\mathrm{T}} s}\, d\mu\, ds +$$
$$+ \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^q} \int_{R^n}\int_{R^n} e^{i\lambda[\varphi(z+s,\, \tau) - \varphi(z,\, \tau)]} \left\{e^{i\mu^{\mathrm{T}}(Yc - s)} - e^{-i\mu^{\mathrm{T}} s}\right\} \times$$
$$\times \nu_P(t, x)\, d\mu\, ds\, dx\, \Delta t + o(\Delta t).$$

Но (*ТВ*, приложение 1)

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{R^n} e^{i\mu^{\mathrm{T}}(Yc-s)}\,d\mu = \delta(Yc-s) = \delta(s-Yc).$$

Следовательно,

$$g_1(\lambda) = \int\limits_{R^n} e^{i\lambda[\varphi(z+s,\,\tau)-\varphi(z,\,\tau)]}\,\delta(s)\,ds +$$
$$+ \int\limits_{R^q}\int\limits_{R^n} e^{i\lambda[\varphi(z+s,\,\tau)-\varphi(z,\,\tau)]}\,\{\delta(Yc-s)-\delta(s)\}\,\nu_P(t,\,x)\,ds\,dx.$$

Отсюда, вспомнив, что интеграл от произведения δ-функции на любую непрерывную функцию равен значению этой функции при значении переменной интегрирования, обращающем аргумент δ-функции в нуль (*ТВ*, приложение 1), получаем

$$g_1(\lambda) = 1 + \int\limits_{R^q}\{e^{i[\varphi(z+Yc,\,\tau)-\varphi(z,\,\tau)]}-1\}\,\nu_P(t,\,x)\,dx\,\Delta t + o(\Delta t).$$

Правая часть этого равенства отличается от 1 на бесконечно малую величину порядка Δt. Следовательно,

$$\ln g_1(\lambda_1) = g_1(\lambda) - 1 + o(\Delta t) =$$
$$= \int\limits_{R^q}\{e^{i[\varphi(z+Yc,\,\tau)-\varphi(z,\,\tau)]}-1\}\,\nu_P(t,\,x)\,dx\,\Delta t + o(\Delta t).$$

Сравнив эту формулу с (70), видим, что характеристические функции величин V_1 и V_2 отличаются одна от другой на бесконечно малую величину высшего порядка по сравнению с Δt. Поэтому при $\Delta t \to 0$ можно принять $V_1 = V_2$, т. е.

$$\varphi\left(z + Y\int\limits_{R^q} c(x)\,\Delta P(t,\,dx),\ \tau\right) - \varphi(z,\,\tau) =$$
$$= \int\limits_{R^q}[\varphi(z+Yc(x),\,\tau)-\varphi(z,\,\tau)]\,\Delta P(t,\,dx).$$

Следовательно, вторую разность в (68) можно выразить формулой

$$\varphi(Z+\Delta_1 Z+\Delta_2 Z,\ t+\Delta t) - \varphi(Z+\Delta_1 Z,\ t+\Delta t) =$$
$$= \int\limits_{R^q}[\varphi(Z+\Delta_1 Z + Yc(x),\ \ t+\Delta t) - \varphi(Z+\Delta_1 Z,\ \ t+\Delta t)]\,\Delta P(t,\ dx),$$

или, с точностью до бесконечно малых высших порядков,

$$\varphi(Z+\Delta_1 Z+\Delta_2 Z,\ t+\Delta t) - \varphi(Z+\Delta_1 Z,\ t+\Delta t) =$$
$$= \int\limits_{R^q}[\varphi(Z+Y(t)\,c(x),\ t) - \varphi(Z,\ t)]\,\Delta P(t,\ dx). \tag{73}$$

Подставив выражения (69) и (73) в (68) и заменив приращения дифференциалами, получим следующую формулу для стохастического дифференциала процесса $U(t)=\varphi(Z(t),\ t)$:

$$dU=\Big\{\varphi_t(Z,\ t)+\varphi_z(Z,\ t)^{\mathrm{T}}\Big[X(t)-Y(t)\int\limits_{R^q}c(x)\,\nu_p(t,\ x)\,dx\Big]+\\ +\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\varphi_{zz}(Z,\ t)\,Y(t)\,\nu_0(t)\,Y(t)^{\mathrm{T}}\right]\Big\}\,dt+\\ +\varphi_z(Z,\ t)^{\mathrm{T}}Y(t)\,dW_0+\int\limits_{R^q}\left[\varphi(Z+Y(t)\,c(x),\ t)-\varphi(Z,\ t)\right]dP(t,\ dx). \tag{74}$$

Наконец, возвращаясь к центрированной пуассоновской мере, заменим $dP(t,\ dx)$ выражением $\nu_p(t,\ x)\,dx\,dt+dP^0(t,\ dx)$. Тогда получим окончательную общую формулу дифференцирования сложной функции

$$dU=\{\varphi_t(Z,\ t)+\varphi_z(Z,\ t)^{\mathrm{T}}X(t)+\\ +\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\varphi_{zz}(Z,\ t)\,Y(t)\,\nu_0(t)\,Y(t)^{\mathrm{T}}\right]+\\ +\int\limits_{R^q}\left[\varphi(Z+Y(t)\,c(x),\ t)-\varphi(Z,\ t)-\right.\\ \left.-\varphi_z(Z,\ t)^{\mathrm{T}}Y(t)\,c(x)\right]\nu_p(t,\ x)\,dx\}\,dt+\varphi_z(Z,\ t)^{\mathrm{T}}Y(t)\,dW_0+\\ +\int\limits_{R^q}\left[\varphi(Z+Y(t)\,c(x),\ t)-\varphi(Z,\ t)\right]dP^0(t,\ dx).\ \blacktriangleleft \tag{75}$$

Формула (75) называется *обобщенной формулой Ито.*

Пользуясь обозначением (63), получаем из (75) соответствующую формулу для стохастического дифференциала векторного случайного процесса $U(t)=\varphi(Z(t),\ t)$:

$$dU=\{\varphi_t(Z,\ t)+\varphi_z(Z,\ t)^{\mathrm{T}}X(t)+\\ +\frac{1}{2}\varphi_{zz}(Z,\ t):\ Y(t)\,\nu_0(t)\,Y(t)^{\mathrm{T}}+\\ +\int\limits_{R^q}\left[\varphi(Z+Y(t)\,c(x),\ t)-\varphi(Z,\ t)-\right.\\ \left.-\varphi_z(Z,\ t)^{\mathrm{T}}Y(t)\,c(x)\right]\nu_p(t,\ x)\,dx\}\,dt+\varphi_z(Z,\ t)^{\mathrm{T}}Y(t)\,dW_0+\\ +\int\limits_{R^q}\left[\varphi(Z+Y(t)\,c(x),\ t)-\varphi(Z,\ t)\right]dP^0(t,\ dx). \tag{76}$$

В частном случае линейной функции $\varphi(z,\ t)=az+a_0$

$$\varphi_z(z,\ t)=a^{\mathrm{T}},\quad \varphi_{zz}=0,$$
$$\varphi(Z+Y(t)\,c(x),\ t)-\varphi(Z,\ t)=aY(t)\,c(x)$$

и формула (76) дает

$$dU = (\dot{a}Z + \dot{a}_0)\,dt + a\left[X(t)\,dt + Y(t)\,dW_0 + \right.$$
$$\left. + Y(t)\int\limits_{R^q} c(x)\,dP^0(t,\ dx)\right] = (\dot{a}Z + \dot{a}_0)\,dt + a\,dZ.$$

Таким образом, и в общем случае линейную функцию можно дифференцировать по обычному правилу дифференцирования сложной функции.

3.5.5. Другие виды стохастических дифференциалов. В зависимости от того, как понимается стохастический интеграл в (57), можно ввести разные виды стохастических дифференциалов. Так, если стохастический интеграл в (57) представляет собой θ-интеграл, то формула, аналогичная (58),

$$d_\theta Z = X\,dt + Y\,d_\theta W$$

определяет стохастический θ-дифференциал.

Если один и тот же случайный процесс $Z(t)$ может быть определен формулой (57) при двух различных толкованиях стохастического интеграла,

$$Z(t) = Z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} X_{\theta_1}(\tau)\,d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} Y_{\theta_1}(\tau)\,d_{\theta_1}W(\tau) =$$
$$= Z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} X_{\theta_2}(\tau)\,d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} Y_{\theta_2}(\tau)\,d_{\theta_2}W(\tau),$$

то соответствующие стохастические дифференциалы $d_{\theta_1}Z$ и $d_{\theta_2}Z$ будут равны один другому, $d_{\theta_1}Z = d_{\theta_2}Z$, или

$$X_{\theta_1}dt + Y_{\theta_1}d_{\theta_1}W = X_{\theta_2}dt + Y_{\theta_2}d_{\theta_2}W.$$

Таким образом, разные стохастические дифференциалы одного и того же случайного процесса различаются лишь по форме представления этого процесса в виде (57).

Выведенная в п. 3.5.2 формула Ито (61) позволяет установить соотношения между различными видами стохастических дифференциалов, а следовательно, и стохастических интегралов в частном случае, когда скалярный случайный процесс $U(t)$ представляет собой определенную функцию винеровского процесса $U(t) = \varphi(W(t),\ t)$. В этом случае согласно (61)

$$dU = \left\{\varphi_t(W,\ t) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[\varphi_{ww}(W,\ t)\,\nu(t)\right]\right\}dt + \varphi_w(W,\ t)^{\mathrm{T}}\,dW.$$

► Чтобы преобразовать dU к виду θ-дифференциала, перепишем эту формулу в соответствии с определением θ-интеграла в п. 3.4.8 в виде

$$dU = \left\{\varphi_t(W,\ t) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}[\varphi_{ww}(W,\ t)\,\nu(t)]\right\} dt + \\ + [(1-\theta)\,\varphi_w(W(t),\ t)^{\mathrm{T}} + \theta\varphi_w(W(t+dt),\ t+dt)^{\mathrm{T}}]\,dW - \\ - \theta\,[\varphi_w(W(t+dt),\ t+dt)^{\mathrm{T}} - \varphi_w(W(t),\ t)^{\mathrm{T}}]\,dW.$$

Остается выразить в последнем слагаемом компоненты разности $\varphi_w(W(t+dt),\ t+dt) - \varphi_w(W(t),\ t)$ по формуле (61). При этом придется учесть только слагаемое, содержащее dW, так как остальные слагаемые дадут бесконечно малые высших порядков в выражении dU. В результате компоненты разности $d\varphi_w(W,\ t) = \varphi_w(W(t+dt),\ t+dt) - \varphi_w(W(t),\ t)$ выразятся формулой

$$\frac{\partial}{\partial W_k}\varphi(W(t+dt),\ t+dt) - \frac{\partial}{\partial W_k}\varphi(W(t),\ t) = \\ = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial W_k\,\partial W_h}\varphi(W(t),\ t)\,dW_h.$$

Следовательно,

$$[\varphi_w(W(t+dt),\ t+dt)^{\mathrm{T}} - \varphi_w(W(t),\ t)^{\mathrm{T}}]\,dW = \\ = \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial}{\partial W_k}\varphi(W(t+dt),\ t+dt) - \frac{\partial}{\partial W_k}\varphi(W(t),\ t)\right] dW_k = \\ = \sum_{k,\,h=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial W_k\,\partial W_h}\varphi(W(t),\ t)\,dW_k\,dW_h = \operatorname{tr}[\varphi_{ww}(W,\ t)\,dW\,dW^{\mathrm{T}}].$$

Дальше так же, как в п. 3.5.2, убеждаемся в том, что следует учесть только математическое ожидание величины $dW\,dW^{\mathrm{T}}$, так как среднее квадратическое значение случайной части $dW\,dW^{\mathrm{T}}$ является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с dW. Математическое же ожидание $dW\,dW^{\mathrm{T}}$ (т. е. ковариационная матрица вектора dW) равно $\nu(t)\,dt$. В результате формула для dU примет вид

$$dU = \left\{\varphi_t(W,\ t) + \left(\frac{1}{2} - \theta\right)\operatorname{tr}[\varphi_{ww}(W,\ t)\,\nu(t)]\right\} dt + \\ + [(1-\theta)\,\varphi_w(W(t),\ t)^{\mathrm{T}} + \theta\varphi_w(W(t+dt),\ t+dt)^{\mathrm{T}}]\,dW$$

или

$$d_\theta U = \left\{\varphi_t(W,\ t) + \left(\frac{1}{2} - \theta\right)\operatorname{tr}[\varphi_{ww}(W,\ t)\,\nu(t)]\right\} dt + \\ + \varphi_w(W,\ t)^{\mathrm{T}}\,d_\theta W. \blacktriangleleft$$

Эта формула определяет θ-дифференциал процесса $U(t) = \varphi(W(t),\ t)$ в случае винеровского процесса $W(t)$. В частном случае при $\theta = 1/2$ получаем стохастический дифференциал Стратоновича

$$d_{1/2}U = \varphi_t(W,\ t)\,dt + \varphi_w(W,\ t)^{\mathrm{T}}\,d_{1/2}W.$$

Таким образом, для дифференциалов Стратоновича функций винеровского процесса справедлива обычная формула дифференцирования сложной функции. В этом состоит некоторое преимущество симметризованных стохастических интегралов и соответствующих дифференциалов Стратоновича перед другими видами стохастических интегралов и дифференциалов.

Однако для функций более сложных процессов и, в частности, для функций пуассоновского процесса формулу для θ-дифференциала вывести не удается, в то время как для дифференциала Ито это не представляет, как мы видели, никаких трудностей. В этом состоит одно из многочисленных преимуществ стохастических интегралов и дифференциалов Ито. В дальнейшем мы встретимся и с другими, значительно более существенными их преимуществами.

Из формулы для θ-дифференциала функции $\varphi(W, t)$ вытекает следующая формула:

$$\varphi(W, t) = \varphi(W(t_0), t_0) + \int_{t_0}^{t} \left\{\varphi_t(W_\tau, \tau) + \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \operatorname{tr}[\varphi_{ww}(W_\tau, \tau)\nu(\tau)]\right\} d\tau + \int_{t_0}^{t} \varphi_w(W_\tau, \tau)^{\mathrm{T}} d_\theta W(\tau).$$

Сравнив эту формулу с соответствующей формулой с интегралом Ито,

$$\varphi(W, t) = \varphi(W(t_0), t_0) + \int_{t_0}^{t} \left\{\varphi_t(W_\tau, \tau) + \frac{1}{2} \operatorname{tr}[\varphi_{ww}(W_\tau, \tau)\nu(\tau)]\right\} d\tau + \int_{t_0}^{t} \varphi_w(W_\tau, \tau)^{\mathrm{T}} dW(\tau),$$

получаем соотношение между θ-интегралом функции $\varphi_w(W_\tau, \tau)^{\mathrm{T}}$ и интегралом Ито

$$\int_{t_0}^{t} \varphi_w(W_\tau, \tau)^{\mathrm{T}} d_\theta W(\tau) = \int_{t_0}^{t} \varphi_w(W_\tau, \tau)^{\mathrm{T}} dW(\tau) + \theta \int_{t_0}^{t} \operatorname{tr}[\varphi_{ww}(W_\tau, \tau)\nu(\tau)]\, d\tau.$$

Так как $\varphi_w(w, t)$ может быть любой функцией, удовлетворяющей условиям существования обоих интегралов в правой части этой формулы, то $\varphi_w(w, t)$ в ней можно заменить любой дифференцируемой функцией $\psi(w, t)$, удовлетворяющей этим условиям.

Таким образом, для любой матрицы-строки $\psi(w,\ t)$

$$\int_{t_0}^{t} \psi(W_\tau,\ \tau)\, d_\theta W(\tau) = \int_{t_0}^{t} \psi(W_\tau,\ \tau)\, dW(\tau) + \theta \int_{t_0}^{t} \operatorname{tr}\left[\frac{\partial \psi(W_\tau,\ \tau)}{\partial w}\nu(\tau)\right] d\tau.$$

Пример 22. Для функции $\psi(W, t) = e^W$ стандартного винеровского процесса $W(t)$ полученная формула дает

$$\int_0^t e^{W(\tau)} d_\theta W(\tau) = \int_0^t e^{W(\tau)} dW(\tau) + \theta \int_0^t e^{W(\tau)} d\tau.$$

Но согласно результату примера 19

$$\int_0^t e^{W(\tau)} dW(\tau) = e^{W(t)} - 1 - \frac{1}{2}\int_0^t e^{W(\tau)} d\tau.$$

Следовательно,

$$\int_0^t e^{W(\tau)} d_\theta W(\tau) = e^{W(t)} - 1 + \left(\theta - \frac{1}{2}\right)\int_0^t e^{W(\tau)} d\tau.$$

В частном случае при $\theta = 1/2$ эта формула совпадает с обычной формулой для интеграла от показательной функции.

Пример 23. Для функции $\psi(W, t) = W^n$ стандартного винеровского процесса $W(t)$ получаем

$$\int_0^t W^n(\tau)\, d_\theta W(\tau) = \int_0^t W^n(\tau)\, dW(\tau) + \theta n \int_0^t W^{n-1}(\tau)\, d\tau.$$

Но из формулы для дифференциала Ито функции $W^{n+1}(t)$,

$$dW^{n+1}(t) = \frac{1}{2}(n+1)\, n W^{n-1}(t)\, dt + (n+1)\, W^n(t)\, dW(t),$$

следует, что

$$\int_0^t W^n(\tau)\, dW(\tau) = \frac{W^{n+1}(t)}{n+1} - \frac{1}{2} n \int_0^t W^{n-1}(\tau)\, d\tau$$

(напомним, что $W(0) = 0$). Подставив это выражение в предыдущую формулу, получаем

$$\int_0^t W^n(\tau)\, d_\theta W(\tau) = \frac{W^{(n+1)}(t)}{n+1} + \left(\theta - \frac{1}{2}\right) n \int_0^t W^{n-1}(\tau)\, d\tau.$$

При $\theta = 1/2$ эта формула совпадает с обычной формулой интегрирования степенной функции.

Пример 24. Вообще, для любой функции $\psi(W)$ скалярного винеровского процесса $W(t)$, имеющей первообразную $\varphi(W)$, имеем

$$\varphi'(W) = \psi(W), \quad \varphi''(W) = \psi'(W),$$

и формула Ито (61) дает

$$d\varphi(W) = \frac{1}{2}\psi'(W)\,\nu(t)\,dt + \psi(W)\,dW,$$

где $\nu(t)$ — интенсивность процесса $W(t)$. Отсюда вытекает формула для интеграла Ито от функции $\psi(W)$:

$$\int_0^t \psi(W(\tau))\,dW(\tau) = \varphi(W(t)) - \varphi(0) - \frac{1}{2}\int_0^t \psi'(W(\tau))\,\nu(\tau)\,d\tau.$$

После этого находим θ-интеграл от функции $\psi(W)$:

$$\int_0^t \psi(W(\tau))\,d_\theta W(\tau) = \int_0^t \psi(W(\tau))\,dW(\tau) + \theta\int_0^t \psi'(W(\tau))\,\nu(\tau)\,d\tau =$$

$$= \varphi(W(t)) - \varphi(0) + \left(\theta - \frac{1}{2}\right)\int_0^t \psi'(W(\tau))\,\nu(\tau)\,d\tau.$$

При $\theta = 1/2$ эта формула совпадает с обычной формулой Ньютона—Лейбница. Таким образом, для любых функций винеровского процесса, для которых известны первообразные, интегралы Стратоновича можно вычислять по обычной формуле Ньютона—Лейбница.

§ 3.6. Нелинейные стохастические дифференциальные уравнения

3.6.1. Уравнение Ито. Дифференциальное уравнение

$$\frac{dX}{dt} = a(X, t) + b(X, t)\,V \tag{77}$$

называется *стохастическим дифференциальным уравнением*, если случайная функция (обобщенная) $V(t)$ представляет собой белый шум в строгом смысле (п. 3.4.2). Пусть X_0 — случайный вектор той же размерности, что и случайная функция $X(t)$. Уравнение (77) с начальным условием $X(t_0) = X_0$ определяет случайный процесс $X(t)$.

Чтобы придать уравнению (77) и высказанному утверждению точный смысл, проинтегрируем формально уравнение (77) в пределах от t_0 до t при начальном условии $X(t_0) = X_0$. В результате получим

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t a(X(\tau), \tau)\,d\tau + \int_{t_0}^t b(X(\tau), \tau)\,V(\tau)\,d\tau,$$

где первый интеграл представляет собой с. к. интеграл, а второй — стохастический интеграл. Вводя процесс с независимыми приращениями $W(t)$, производной которого служит белый шум $V(t)$, перепишем предыдущее уравнение в виде

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t a(X(\tau), \tau)\,d\tau + \int_{t_0}^t b(X(\tau), \tau)\,dW(\tau). \tag{78}$$

Это уравнение имеет точный смысл. Стохастическое дифференциальное уравнение (77) или эквивалентное уравнение

$$dX = a(X, t)\,dt + b(X, t)\,dW \tag{79}$$

представляет собой сокращенную запись уравнения (78).

Уравнение (78), в котором второй интеграл представляет собой стохастический интеграл Ито, называется *стохастическим интегральным уравнением Ито*, а соответствующее дифференциальное уравнение (77) или (79) — *стохастическим дифференциальным уравнением Ито.*

Случайный процесс $X(t)$, удовлетворяющий уравнению (78), в котором интегралы представляют собой с. к. пределы соответствующих интегральных сумм, называется *средним квадратическим* или, короче, *с. к. решением* стохастического интегрального уравнения (78) и соответствующего стохастического дифференциального уравнения (77) или (79) при начальном условии $X(t_0) = X_0$.

Если интегралы в (78) существуют для каждой реализации процессов $W(t)$ и $X(t)$ и равенство (78) справедливо для каждой реализации, то случайный процесс $X(t)$ называется *решением в реализациях* уравнения (78) и соответствующего стохастического дифференциального уравнения (77) или (79) при начальном условии $X(t_0) = X_0$.

Конечно, приведенные определения охватывают как частный случай линейные стохастические дифференциальные уравнения, когда функция $a(x, t)$ линейна относительно x, а $b(x, t)$ не зависит от x. Однако в § 3.3 мы рассматривали более общие линейные стохастические дифференциальные уравнения, не требуя, чтобы белый шум $V(t)$ был белым шумом в строгом смысле, и, следовательно, допуская, чтобы процесс $W(t)$ был процессом с некоррелированными, но, возможно, с зависимыми приращениями. Для нелинейных стохастических дифференциальных уравнений приходится ограничиваться случаем белого шума в строгом смысле $V(t)$, когда процесс $W(t)$ является процессом с независимыми приращениями.

К уравнению (79) приводится и более общее стохастическое дифференциальное уравнение Ито, в котором функции a и b зависят от процесса W:

$$dX = a(X, W, t)\,dt + b(X, W, t)\,dW.$$

В этом случае, положив $X'(t) = W(t)$, приведем уравнение к системе двух уравнений

$$dX = a(X, X', t)\,dt + b(X, X', t)\,dW,$$
$$dX' = dW.$$

Вводя составной векторный процесс $[X(t)^{\mathrm{T}}\, X'(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, получим стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида (79):

$$d\begin{bmatrix} X \\ X' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(X, X', t) \\ 0 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} b(X, X', t) \\ I \end{bmatrix} dW.$$

Это уравнение с начальными условиями $X(t_0) = X_0$, $X'(t_0) = X'_0$, где X'_0 — случайная величина, независимая от X_0, распределением которой служит одномерное распределение процесса $W(t)$ при $t = t_0$, эквивалентно исходному стохастическому дифференциальному уравнению с начальным условием $X(t_0) = X_0$.

3.6.2. Уравнение Ито определяет марковский процесс. Стохастическое дифференциальное уравнение Ито (77) и (79) при начальном условии $X(t_0) = X_0$, где X_0 — случайная величина, независимая от будущих значений белого шума $V(s)$, $s > t_0$ (будущих приращений $W(s) - W(t)$, $s > t \geqslant t_0$, процесса W), определяет марковский случайный процесс. Чтобы понять это, достаточно заметить, что значение процесса $X(t)$, определяемого уравнением (77), полностью и однозначно определяется его значением $X(\tau)$ в какой-либо момент $\tau \in [t_0, t)$ и значениями белого шума V в интервале $[\tau, t)$. Вследствие этого и вследствие независимости начального значения $X(t_0) = X_0$ от будущих значений белого шума V совокупность случайных величин $X_{\tau_1}, \ldots, X_{\tau_N}, X_\tau$ при любых N, $\tau_1 < \ldots < \tau_N < \tau$, $\tau_1 \geqslant t_0$ независима от совокупности значений белого шума V в интервале $[\tau, t)$ (точнее, от совокупности приращений процесса W на любых подынтервалах интервала $[\tau, t)$). Вследствие этого условное распределение значения процесса $X(t)$ в любой момент $t > \tau$ относительно его значений $X_{\tau_1}, \ldots, X_{\tau_N}, X_\tau$ в моменты $\tau_1, \ldots, \tau_N, \tau$ зависит только от значения X_τ и не зависит от $X_{\tau_1}, \ldots, X_{\tau_N}$. А это и значит, что $X(t)$ является марковским случайным процессом (п. 2.1.3).

3.6.3. Замена переменных в уравнении Ито. При решении задач, связанных со стохастическими дифференциальными уравнениями, так же как и в задачах с обычными дифференциальными уравнениями, часто целесообразно предварительно упростить дифференциальные уравнения подходящей заменой переменных. Однако замена переменных в стохастических дифференциальных уравнениях в общем случае отличается от обычной замены переменных в дифференциальных уравнениях тем, что требует применения формулы Ито или обобщенной формулы Ито вместо обычной формулы дифференцирования сложной функции.

Предположим, что в стохастическом дифференциальном уравнении (77) необходимо выполнить замену переменных $Y = \varphi(X, t)$. Чтобы сделать это, необходимо в общем случае нелинейной функции φ найти по формулам (64), (65) или (76) (в зависимости от характера процесса $W(t)$) стохастический дифференциал Ито процесса $Y(t)$ и заменить в полученной формуле X его выражением из уравнения $Y = \varphi(X, t)$. Конечно, это уравнение должно иметь единственное решение $X = \varphi^{-1}(Y, t)$. Иначе замена переменных ничего не даст. В результате получится стохастическое дифференциальное уравнение для процесса $Y(t)$.

В частном случае линейной замены переменных, когда функция φ линейна относительно вектора X, замену переменных в уравнении Ито можно производить так же, как и в обычных дифференциальных уравнениях. В самом деле, в пп. 3.5.2 и 3.5.4 было показано, что линейные функции случайных процессов можно дифференцировать по обычной формуле дифференцирования сложной функции.

Пример 25. Чтобы проинтегрировать линейное стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX=(aX+a_0)\,dt+b\,dW,$$

сделаем замену переменных $X=u(t, t_0)Y$, где $u(t, t_0)$ — решение однородного уравнения $\dot{u}=au$, удовлетворяющее начальному условию $u(t_0, t_0)=I$. Так как матрица $u(t, t_0)$ обратима (п. 1.2.3), то из $X=u(t, t_0)Y$ следует $Y=u(t, t_0)^{-1}X$. Дифференцируя эту формулу, получаем

$$dY=du(t, t_0)^{-1}X+u(t, t_0)^{-1}\,dX,$$

или, принимая во внимание, что $du(t, t_0)^{-1}=-u(t, t_0)^{-1}a\,dt$ (п. 1.3.3),

$$dY=-u(t, t_0)^{-1}aX\,dt+u(t, t_0)^{-1}(aX+a_0)\,dt+u(t, t_0)^{-1}b\,dW=$$
$$=u(t, t_0)^{-1}a_0\,dt+u(t, t_0)^{-1}b\,dW.$$

Здесь правая часть не зависит от Y. Поэтому, интегрируя полученное уравнение, находим

$$Y=Y_0+\int_{t_0}^{t}u(\tau, t_0)^{-1}a_0(\tau)\,d\tau+\int_{t_0}^{t}u(\tau, t_0)^{-1}b(\tau)\,dW(\tau).$$

Это та же самая формула, которая была получена в п. 3.3.2. Таким образом, мы снова приходим к формуле (32) для решения линейного стохастического уравнения, которая была получена в п. 3.3.2 для случая процесса с некоррелированными приращениями $W(t)$. Однако мы не просто повторили здесь результат п. 3.3.2, а распространили формулу (32) на любые процессы с независимыми приращениями $W(t)$, в том числе и на такие, которые не имеют моментов второго порядка, например на процесс Коши.

Пример 26. Рассмотрим скалярное уравнение

$$dX=(aX+a_0)\,dt+(bX+b_0)\,dW,$$

где $W(t)$ — скалярный винеровский процесс. Сделаем в этом уравнении замену переменных $Y=Xe^{-Z}$, где

$$Z(t)=\int_{t_0}^{t}\left[a(\tau)-\frac{\nu}{2}b^2(\tau)\right]d\tau+\int_{t_0}^{t}b(\tau)\,dW(\tau).$$

В этом случае $Y=\varphi(X, Z)=Xe^{-Z}$ и, следовательно,

$$\varphi_t(X, Z)=0,\quad \varphi_x(X, Z)=e^{-Z},\quad \varphi_z(X, Z)=-Xe^{-Z},$$
$$\varphi_{xx}(X, Z)=0,\quad \varphi_{xz}(X, Z)=-e^{-Z},\quad \varphi_{zz}(X, Z)=Xe^{-Z}.$$

Пользуясь формулой Ито (61), находим

$$dY=\left\{e^{-Z}(aX+a_0)-Xe^{-Z}\left(a-\frac{\nu}{2}b^2\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0 & -e^{-Z}\\ -e^{-Z} & Xe^{-Z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}bX+b_0\\ b\end{bmatrix}\nu\,[bX+b_0\;\; b]\right\}dt+$$

$$+e^{-Z}(bX+b_0)\,dW - Xe^{-Z}b\,dW =$$
$$=\left\{e^{-Z}\left(a_0+\frac{\nu}{2}b^2X\right)-\frac{1}{2}e^{-Z}b^2\nu X - e^{-Z}bb_0\nu\right\}dt +$$
$$+e^{-Z}b_0\,dW = e^{-Z}\left[(a_0-\nu bb_0)\,dt + b_0\,dW\right].$$

Правая часть этого уравнения не содержит Y. Поэтому, интегрируя это уравнение, получаем

$$Y = Y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-Z(\tau)}\left[a_0(\tau)-\nu(\tau)\,b(\tau)\,b_0(\tau)\right]d\tau + \int_{t_0}^{t} e^{-Z(\tau)}\,b_0(\tau)\,dW(\tau)$$

и

$$X(t) = X_0e^{Z(t)} + \int_{t_0}^{t} e^{Z(t)-Z(\tau)}\left[a_0(\tau)-\nu(\tau)\,b(\tau)\,b_0(\tau)\right]d\tau +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} e^{Z(t)-Z(\tau)}\,b_0(\tau)\,dW(\tau).$$

3.6.4. Другие виды стохастических дифференциальных уравнений. Если второй интеграл в (78) понимать как стохастический θ-интеграл, то уравнение (77) или (79) будет стохастическим дифференциальным уравнением другого вида. В этом случае будем называть уравнение (77) или (79) *стохастическим дифференциальным уравнением с θ-дифференциалом.* Так как в приложениях стохастические дифференциальные уравнения иногда понимаются как уравнения с θ-дифференциалом, обычно с $1/2$-интегралом Стратоновича, то нам придется иногда рассматривать и такие уравнения.

Стохастическое дифференциальное уравнение с θ-дифференциалом, соответствующее случаю, когда второй интеграл в (78) представляет собой θ-интеграл, будем записывать в виде

$$\frac{d_\theta X}{dt} = a(X,\,t) + b(X,\,t)\,V \tag{80}$$

или

$$d_\theta X = a(X,\,t)\,dt + b(X,\,t)\,d_\theta W. \tag{81}$$

При $\theta = 1/2$ уравнения (80) и (81) представляют собой уравнения Стратоновича.

Заметим, что в силу несовпадения стохастических интегралов разных видов уравнение (77) и уравнение (80) при разных θ и при одних и тех же функциях $a(x,\,t)$ и $b(x,\,t)$ определяют различные случайные процессы. Это необходимо всегда помнить и соответственно всегда указывать, в каком смысле понимается стохастическое дифференциальное уравнение. В дальнейшем мы почти всегда будем пользоваться уравнениями Ито, не оговаривая этого специально. И только в тех редких случаях, когда нам придется рассматривать стохастические дифференциальные уравнения других видов, будем указывать, в каком смысле они понимаются.

3.6.5. Приведение стохастического дифференциального уравнения к уравнению Ито. Чтобы пользоваться методами статистического исследования стохастических дифференциальных систем, которые будут изложены в гл. 5 и 6, приходится заменять стохастическое дифференциальное уравнение с θ-дифференциалом, определяющее данный случайный процесс, уравнением Ито, определяющим тот же процесс (но, конечно, с другой функцией $a(x, t)$; функция $b(x, t)$, как мы увидим, при этом не изменяется).

Эту задачу мы будем решать только для случая винеровского процесса $W(t)$ (нормально распределенного белого шума $V(t)$). Для других случайных процессов $W(t)$ эту задачу решить не удается.

▶ Чтобы найти способ преобразования уравнения с θ-дифференциалом к уравнению Ито, решим сначала обратную задачу нахождения уравнения с θ-дифференциалом по данному уравнению Ито. Предположим, что процесс $X(t)$ определяется уравнением Ито (79):

$$dX = a(X, t)\,dt + b(X, t)\,dW.$$

Это уравнение определяет дифференциал Ито процесса $X(t)$. Чтобы преобразовать его к виду θ-дифференциала, вспомнив определение θ-интеграла, перепишем это уравнение в виде

$$dX = a(X, t)\,dt + [(1-\theta)\,b(X(t), t) + \theta b(X(t+dt), t+dt)]\,dW - \\ - \theta\,[b(X(t+dt, t+dt) - b(X(t), t)]\,dW,$$

или, с точностью до бесконечно малых высших порядков,

$$dX = a(X, t)\,dt + [(1-\theta)\,b(X(t), t) + \\ + \theta b(X(t+dt), t+dt)]\,dW - \theta\,db(X, t)\,dW, \qquad (82)$$

где $db(X, t)$ — дифференциал Ито процесса $U(t) = b(X(t), t)$. Дифференциалы Ито элементов матрицы $U(t)$ определяются формулой (61). При этом роль процесса $Z(t)$ играет $X(t)$, а роль случайных функций $X(t)$ и $Y(t) - a(X, t)$ и $b(X, t)$ соответственно. При подстановке в (82) выражений стохастических дифференциалов элементов матрицы $U(t)$, полученных по формуле (61), придется учесть только члены с $dW(t)$, которые дадут в (82) слагаемые порядка dt. Остальные же члены дадут слагаемые высших порядков малости. В результате получим для компонент вектора $db(X, t)\,dW$:

$$(db(X, t)\,dW)_r = \\ = \sum_{s=1}^{q} db_{rs}(X, t)\,dW_s = \sum_{s=1}^{q}\sum_{h=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} \frac{\partial b_{rs}(X, t)}{\partial X_h}\,b_{hl}(X, t)\,dW_l\,dW_s.$$

Легко видеть, что правая часть этого равенства представляет собой r-й элемент матрицы-столбца

$$[(\partial/\partial\xi)^{\mathrm{T}}\,b(X, t)\,dW\,dW^{\mathrm{T}}\,b(\xi, t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}_{\xi=X}.$$

Следовательно,

$$db(X, t)\,dW = [(\partial/\partial\xi)^{\mathrm{T}}\, b(X, t)\, dW\, dW^{\mathrm{T}}\, b(\xi, t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}_{\xi=X}.$$

Как и при выводе формулы (61), убеждаемся в том, что достаточно учесть только математическое ожидание $db(X, t)\,dW$, которое имеет порядок dt. Случайная же часть этой величины, имеющая тоже порядок dt, является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с dW. В результате формула (82) примет вид

$$dX = \{a(X, t) - \theta\,[(\partial/\partial\xi)^{\mathrm{T}}\, b(X, t)\, \nu(t)\, b(\xi, t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}_{\xi=X}\}\, dt + \\ + [(1-\theta)\, b(X(t), t) + \theta b(X(t+dt), t+dt)]\, dW$$

или

$$d_\theta X = \{a(X, t) - \theta\,[(\partial/\partial\xi)^{\mathrm{T}}\, b(X, t)\, \nu(t)\, b(\xi, t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}_{\xi=X}\}\, dt + b(X, t)\, d_\theta W\ ^{*)}. \tag{83}$$

Итак, стохастическое дифференциальное уравнение с θ-дифференциалом, определяющее тот же случайный процесс, что и уравнение Ито (79), имеет вид (83).

Из полученного результата следует, что если случайный процесс $X(t)$ определяется стохастическим дифференциальным уравнением с θ-дифференциалом

$$d_\theta X = a_1(X, t)\, dt + b(X, t)\, d_\theta W, \tag{84}$$

то уравнение Ито, определяющее тот же процесс $X(t)$, имеет вид (79), где

$$a(x, t) = a_1(x, t) + \theta\,[(\partial/\partial\xi)^{\mathrm{T}}\, b(x, t)\, \nu(t)\, b(\xi, t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}_{\xi=x}. \blacktriangleleft \tag{85}$$

Доказанные утверждения относятся и к уравнениям (77) и соответствующему (84) уравнению вида (80):

$$\frac{d_\theta X}{dt} = a_1(X, t) + b(X, t)\, V. \tag{86}$$

А именно, уравнению Ито (77), определяющему процесс $X(t)$, соответствует уравнение с θ-дифференциалом (86), определяющее тот же процесс, и наоборот, где функции $a(x, t)$ и $a_1(x, t)$ связаны соотношением (85).

Обратим внимание на то, что если функция $b(x, t)$ не зависит от x, то второе слагаемое в (85) равно нулю и $a(x, t) = a_1(x, t)$. Поэтому в случае, когда коэффициент при белом шуме не зависит от неизвестной функции, все виды стохастических дифференциальных уравнений с винеровским процессом $W(t)$ (нормально распределенным белым шумом $V(t)$), определяющие один и тот же процесс $X(t)$, совпадают.

---

*) Вспомним, что для любого процесса $X(t)$ $d_\theta X = dX$. Дифференциалы $d_\theta X$ и dX различаются только формой представления. Если в интегральном уравнении, соответствующем dX, стохастический интеграл представляет собой интеграл Ито, то в уравнении, соответствующем $d_\theta X$, стохастический интеграл является θ-интегралом.

Легко видеть, что преобразование уравнения с θ-дифференциалом в уравнение Ито и наоборот возможно только в случае дифференцируемой по x функции $b(x, t)$. Если функция $b(x, t)$ не имеет первых производных по компонентам вектора x (хотя бы разрывных), то уравнения Ито, определяющего тот же процесс, что и данное уравнение с θ-дифференциалом, не существует.

Пример 27. Привести уравнение с θ-дифференциалом

$$\frac{d_\theta X}{dt} = -X^3 + XV$$

к уравнению Ито, если $V(t)$ — нормально распределенный белый шум единичной интенсивности (производная стандартного винеровского процесса).

В данном случае $a_1(x, t) = -x^3$, $b(x, t) = x$ и формула (85) дает $a(x, t) = -x^3 + \theta x$. Соответствующее уравнение Ито (определяющее тот же случайный процесс $X(t)$) имеет вид

$$\frac{dX}{dt} = -X^3 + \theta X + XV.$$

Пример 28. Уравнение Ито, соответствующее уравнению с θ-дифференциалом

$$\frac{d_\theta X}{dt} = e^{-X} + \sin X \cdot V,$$

где $V(t)$ — нормально распределенный белый шум постоянной интенсивности ν, имеет вид

$$\frac{dX}{dt} = e^{-X} + \frac{\theta\nu}{2}\sin 2X + \sin X \cdot V.$$

3.6.6. О численном интегрировании стохастических дифференциальных уравнений. При исследовании сложных систем, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями, широко применяется метод статистического моделирования (*ТВ*, § 8.4). Моделирование таких систем на цифровых ЭВМ включает численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. В соответствии с определением стохастического дифференциального уравнения (77) или (79) как сокращенной формы записи соответствующего интегрального уравнения (78) численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений имеет некоторые особенности. Дело в том, что все численные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, кроме простейшего метода Эйлера, основаны на вычислении приращений искомых функций на каждом шаге путем применения интегральной теоремы о среднем значении. В соответствии с этим правые части уравнений (производные искомых функций) берутся в средних точках интервалов. Различные методы численного интегрирования отличаются один от другого по существу только способом приближенного нахождения средних значений правых частей уравнений. К стохастическим интегралам теорема о среднем значении неприменима. Однако для стохастических интегралов от неслучайных функций справедлив некоторый аналог теоремы о среднем, показывающий, что наилучшую аппроксимацию стохастического интеграла от непрерывной неслучайной функции дает произведение значения этой функции в некоторой средней точке интервала интегрирования на приращении процесса, по которому производится интегрирование на этом интервале (п. 3.1.5). На основании этой теоремы все методы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений можно применять к стохастическим дифференциальным уравнениям, у которых коэффициент при белом шуме (или, что одно и то же, перед dW) является детерминированной функцией времени t, т. е. не зависит от X,

$$\dot{X} = a(X, t) + b(t) V. \tag{87}$$

Если же функция $b(X, t)$ в (77) зависит от X, то второй интеграл в (78) представляет собой стохастический интеграл от случайной функции. Поэтому метод численного интегрирования таких уравнений должен выбираться в зависимости от того, в каком смысле понимается стохастический интеграл. В случае уравнения Ито (77) или (79) приращение процесса $X(t)$ на интервале $[t, t+\Delta t)$ должно определяться по формуле (59):

$$\Delta X = a(X_t, t)\Delta t + b(X_t, t)\Delta W, \tag{88}$$

что соответствует методу численного интегрирования Эйлера. Таким образом, уравнения Ито можно интегрировать методом Эйлера. Однако для повышения точности вычисления первого слагаемого можно взять значение функции $a(X_t, t)$ в некоторой средней точке интервала интегрирования $[t, t+\Delta t)$. При этом можно использовать любой метод численного интегрирования, например широко применяемые методы Адамса и Рунге—Кутта. Но значение функции $b(X_t, t)$ всегда приходится брать в начальной точке интервала интегрирования. В случае уравнения в θ-дифференциалах следует брать значение функции $b(X_t, t)$ в точке $t+\theta\Delta t$. Однако для приближенного нахождения значения функции $b(X_t, t)$ в этой точке пришлось бы изобретать новые методы численного интегрирования.

При моделировании стохастических дифференциальных уравнений с помощью аналоговых вычислительных устройств в случае функции $b(X, t)$, зависящей от X, необходимо предварительно привести уравнения к форме Стратоновича. Объясняется это тем, что при таком моделировании белый шум приходится заменять процессом с малым, но все же отличным от нуля интервалом корреляции, так как белый шум физически нереализуем (п. 2.2.5). А в этом случае, как будет показано в п. 5.1.2, моделируемый процесс будет близким к решению стохастического дифференциального уравнения только в том случае, когда это уравнение понимается как уравнение Стратоновича.

Само собой разумеется, что при моделировании процессов, определяемых стохастическими дифференциальными уравнениями, необходимо моделировать случайные величины или случайные процессы. При численном интегрировании стохастических дифференциальных уравнений на ЭВМ необходимо на каждом шаге моделировать приращение ΔW случайного процесса $W(t)$.

При моделировании с помощью аналоговых устройств необходимо генерировать широкополосные случайные процессы (т. е. процессы с малыми интервалами корреляции) *).

В последнее время созданы новые специальные методы численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений, более эффективные, чем обычные методы численного интегрирования **).

Само собой разумеется, в результате численного интегрирования стохастического дифференциального уравнения, так же как и при его моделировании с помощью аналоговых устройств, всегда получается приближенно реализация решения, соответствующая использованной при интегрировании реализации процесса $W(t)$ с независимыми приращениями или широкополосного процесса, моделирующего белый шум $V(t)$.

В задачах практики обычно интересуются поведением не реализаций решений стохастических дифференциальных уравнений, а некоторых их статистических характеристик, например моментов, семиинвариантов или квазимоментов. Уравнения для этих характеристик будут выведены в гл. 5 и 6. Они представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения, которые можно интегрировать любым стандартным методом численного интегрирования. Именно это направление в прикладной теории стохастических дифференциальных уравнений изучается в этой книге. Поэтому мы не будем изучать вопросы моделирования процессов, определяемых стохастическими дифференциальными уравнениями, и численного интегрирования таких уравнений.

ЗАДАЧИ

3.1. Вывести формулы для стохастических дифференциалов Ито функций стандартного винеровского процесса, приведенных в табл. 1 приложения 6. Получить аналогичные формулы для стохастических θ-дифференциалов.

3.2. Вывести формулы для стохастических дифференциалов Ито функций векторного винеровского процесса, приведенных в табл. 2 приложе-

*) Для того чтобы стационарный процесс имел малый интервал корреляции, необходимо, чтобы его спектральная плотность была приблизительно постоянной в достаточно большом диапазоне (в достаточно широкой полосе) частот (п. 4.2.7).

**) См., например, Р. Микулевичус, Э. Платен (R. Mikulevičus, E. Platen). Time discrete Taylor approximation for Itô processes with jump component // Math. Nachr.— 1988.— V. 138.— S. 93—104.

ния 6. Получить аналогичные формулы для стохастических θ-дифференциалов.

3.3. Доказать, что стохастический дифференциал Ито скалярной функции $U=\varphi(P)$ пуассоновского процесса P определяется формулой

$$dU=[\varphi(P+1)-\varphi(P)]\,dP.$$

Вычислить по этой формуле стохастические дифференциалы функций, приведенных в табл. 1 приложения 6.

3.4. Показать, что скалярные стохастические дифференциальные уравнения с θ-дифференциалом первого порядка:

1) $\dot{Z}=-\varepsilon(1+V_2)Z+kV_1$,

2) $\dot{Z}=(1+V_2)\varphi(Z)+kV_1$,

3) $\dot{Z}=\varphi_0(Z,t)+\sum\limits_{l=1}^{n}\varphi_l(Z,t)V_l$

приводятся к следующим уравнениям Ито:

1) $\dot{Z}=-\varepsilon(1-2\theta\varepsilon\nu_{22}+V_2)Z+k(-2\theta\varepsilon\nu_{21}+V_1)$,

2) $\dot{Z}=[1+2\theta\nu_{22}\varphi'(Z)+V_2]\varphi(Z)+k[2\theta\nu_{12}\varphi'(Z)+V_1]$,

3) $\dot{Z}=\varphi_0(Z,t)+\theta\sum\limits_{p,\,q=1}^{n}\nu_{pq}\varphi_p(Z,t)\varphi'_q(Z,t)+\sum\limits_{l=1}^{n}\varphi_l(Z,t)V_l$,

где $\varphi'=\partial\varphi/\partial z$, $V=[V_1\ldots V_n]^{\mathrm{T}}$ — нормально распределенный белый шум интенсивности ν. При каких условиях уравнения Ито совпадают с исходными уравнениями?

3.5. Пусть $Z(t)$ — такой $n-1$ раз с. к. дифференцируемый случайный процесс, что его $(n-1)$-я с. к. производная имеет дифференциал Ито

$$dZ^{(n-1)}=\varphi(Z,\dot{Z},\ldots,Z^{(n-1)},t)\,dt+\psi(Z,\dot{Z},\ldots,Z^{(n-1)},t)\,dW.$$

Это соотношение называется стохастическим дифференциальным уравнением Ито n-го порядка относительно процесса $Z(t)$. Это уравнение можно также записать в виде

$$Z^{(n)}=\varphi(Z,\dot{Z},\ldots,Z^{(n-1)},t)+\psi(Z,\dot{Z},\ldots,Z^{(n-1)},t)\,V,$$

где $V=dW/dt$ — белый шум в строгом смысле. Доказать, что это уравнение приводится к стандартной форме стохастического дифференциального уравнения Ито (77) или (79) для некоторого n-мерного векторного процесса. Более общее стохастическое дифференциальное уравнение n-го порядка

$$Z^{(n)}+\sum_{k=n-m}^{n-1}a_k(Z,Z',\ldots,Z^{(n-m-1)},t)\,Z^{(k)}+\varphi(Z,Z',\ldots,Z^{(n-m-1)},t)=$$
$$=\sum_{h=1}^{m}b_h(Z,Z',\ldots,Z^{(n-m-1)},t)\,V^{(h)}$$

при $0<m<n$ понимается как эквивалентная в смысле задачи 1.17 система стохастических дифференциальных уравнений первого порядка.

В случае винеровского процесса $W(t)$ вывести формулы перехода от уравнения Ито n-го порядка к уравнению в θ-дифференциалах n-го порядка и наоборот.

3.6. Показать, что скалярным стохастическим дифференциальным уравнениям второго порядка с θ-дифференциалом:

1) $\ddot{Z}+2\zeta\omega_0(1+V_3)\dot{Z}+\omega_0^2(1+V_2)Z=kV_1$,

2) $\ddot{Z}+(1+V_3)\psi(\dot{Z})+(1+V_2)\varphi(Z)=kV_1$,

$$3)\ \ddot{Z}=\varphi_0(Z,\ \dot{Z},\ t)+\sum_{l=1}^{n}\varphi_l(Z,\ \dot{Z},\ t)\,V_l$$

соответствуют следующие уравнения Ито:

$$1)\ \ddot{Z}+2\zeta\omega_0(1-2\theta\nu_{33}\zeta\omega_0+V_3)\,\dot{Z}+\omega_0^2(1-2\theta\nu_{23}\zeta\omega_0+V_2)\,Z=\\=k(-2\theta\zeta\nu_{13}\omega_0+V_1),$$

$$2)\ \ddot{Z}+[1-\theta\nu_{33}\psi'(\dot{Z})+V_3]\,\psi(\dot{Z})+[1-\theta\nu_{23}\psi'(\dot{Z})+V_2]\,\varphi(Z)=\\=k[-\theta\nu_{13}\psi'(\dot{Z})+V_1],$$

$$3)\ \ddot{Z}=\varphi_0(Z,\ \dot{Z},\ t)+\theta\sum_{l,\,h=1}^{n}\nu_{lh}\varphi_h'(Z,\ \dot{Z},\ t)\,\varphi_l(Z,\ \dot{Z},\ t)+\sum_{l=1}^{n}\varphi_l(Z,\ \dot{Z},\ t)\,V_l,$$

где $\varphi_h'(Z,\ \dot{Z},\ t)=\partial\varphi_h(Z,\ \dot{Z},\ t)/\partial\dot{Z}$, $V=[V_1\ \ldots\ V_n]^{\mathrm{T}}$ — нормально распределенный белый шум интенсивности ν. Найти условия, при которых уравнения Ито совпадают с исходными уравнениями.

3.7. Показать, что стохастической системе в θ-дифференциалах

$$\dot{Z}_1=-\varepsilon_0(1+V_3)\,Z_1+\omega_0(1+V_4)\,Z_2+k_1V_1,$$
$$\dot{Z}_2=\omega_0(1+V_4)\,Z_1-\varepsilon_0(1+V_3)\,Z_2+k_2V_2$$

при независимых нормально распределенных белых шумах $V_1,\ \ldots,\ V_4$ соответствует следующая система уравнений Ито:

$$\dot{Z}_1=-\varepsilon_0(1-\theta\alpha^2+V_3)\,Z_1+\omega_0(1+V_4)\,Z_2+k_1V_1,$$
$$\dot{Z}_2=\omega_0(1+V_4)\,Z_1-\varepsilon_0(1-\theta\alpha^2+V_3)\,Z_2+k_2V_2$$
$$(\varepsilon_0\alpha^2=\varepsilon_0^2\nu_{33}+\omega_0^2\nu_{44}).$$

Дать обобщение на случай зависимых белых шумов.

3.8. Для линейной системы (1.72) *с параметрическими шумами, понимаемой* как система в θ-дифференциалах, выписать соответствующие уравнения Ито, считая белый шум нормально распределенным.

3.9. Показать, что линейной системе задачи 1.9, если дополнительно ввести параметрические шумы

$$A\ddot{q}+(1+V_3)(B+B')\,\dot{q}+(1+V_2)(C+C')\,q=(1+V_1)\,Q_*,$$

где $q=[q_1\ \ldots\ q_n]^{\mathrm{T}}$ и $Q_*=[Q_1^*\ \ldots\ Q_n^*]^{\mathrm{T}}$ — n-мерные векторы, A, B, C и B', C' — симметричные и антисимметричные $n\times n$-матрицы, $V=[V_1V_2V_3]^{\mathrm{T}}$ — нормально распределенный трехмерный белый шум интенсивности ν, соответствует уравнение Ито

$$A\ddot{q}+(1+V_3)(B+B')\,\dot{q}+(1+V_2)(C+C')\,q=\\=(1+V_1)\,Q_*+\theta[-\nu_{13}Q_*A^{-1}(B-B')+\\+\nu_{23}(C+C')\,qA^{-1}(B-B')+\nu_{33}(B+B')\,\dot{q}A^{-1}(B-B')].$$

3.10. Рассматривая уравнения нелинейной системы задачи 1.13 *при* $\Pi=\psi V$, $Q=\varphi V$, где $\psi=\psi(q,\ t)$, $\varphi=\varphi(q,\ \dot{q},\ t)$ — матричные функции указанных переменных, V — нормально распределенный векторный белый шум интенсивности ν, как уравнения с θ-дифференциалом, привести их к уравнениям Ито для канонических переменных.

ГЛАВА 4

СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 4.1. Характеристики стационарных случайных функций

4.1.1. Определение стационарной случайной функции. *Стационарными* обычно называются такие явления, некоторые характеристики которых не изменяются с течением времени, т. е. инвариантны относительно сдвигов во времени. В соответствии с этим общим понятием стационарности случайная функция называется *стационарной*, если некоторые ее характеристики не зависят от ее аргумента (инвариантны относительно сдвигов в пространстве значений аргумента). В зависимости от того, какие характеристики случайной функции не зависят от ее аргумента, можно рассматривать различные виды стационарности.

Если математическое ожидание случайной функции постоянно, а ее ковариационная функция зависит только от разности аргументов (инвариантна относительно сдвигов аргумента случайной функции):

$$m_x(t) = \mathrm{const}, \quad K_x(t_1, t_2) = k_x(\tau), \quad \tau = t_1 - t_2,$$

то случайная функция называется *стационарной в широком смысле*.

Если нас интересуют не только математические ожидания и ковариационные функции, но и другие характеристики случайных функций, то приведенного определения стационарности случайной функции недостаточно. Оно накладывает ограничения только на ее математическое ожидание и ковариационную функцию. Наиболее жесткие условия стационарности получатся, если наложить ограничения на все конечномерные распределения случайной функции. Это даст следующее определение стационарности случайной функции.

Случайная функция $X(t)$ называется *стационарной в узком смысле*, если все ее конечномерные распределения зависят только от разностей аргументов $t_1, \ldots, t_n$. На основании этого определения конечномерные плотности (функции распределения, характеристические функции) стационарной в узком смысле случайной функции $X(t)$ удовлетворяют условиям

$$f_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = h_n(x_1, \ldots, x_n; t_1 - t_2, \ldots, t_1 - t_n)$$
$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, что класс случайных функций с конечными моментами первого и второго порядков, стационарных в узком смысле, представляет собой лишь часть класса случайных функций, стационарных в широком смысле.

Согласно нашему определению стационарной случайной функции случайная функция, математическое ожидание которой зависит от аргумента t, а ковариационная функция зависит только от разности аргументов t_1-t_2, является нестационарной. Однако такая нестационарность несущественна, так как соответствующая центрированная случайная функция стационарна. Иными словами, нестационарность случайной функции, вызванная непостоянством ее математического ожидания, несущественна и всегда может быть устранена центрированием случайной функции. В связи с этим введем еще одно определение стационарности случайной функции.

Случайная функция $X(t)$ называется *ковариационно стационарной*, если ее ковариационная функция зависит только от разности аргументов:

$$K_x(t_1, t_2)=k_x(\tau), \qquad \tau=t_1-t_2.$$

Очевидно, что всякая стационарная в широком смысле случайная функция ковариационно стационарна. Так как в приложениях обычно интересуются только ковариационными функциями (математическое ожидание является неслучайной функцией), то мы будем дальше рассматривать только ковариационно стационарные случайные функции и для краткости называть их просто стационарными.

В соответствии со сказанным в конце п. 2.1.1 стационарные случайные функции скалярной переменной обычно называют *стационарными случайными процессами*, а стационарные случайные функции векторной переменной часто называют *однородными случайными полями*.

4.1.2. Свойства стационарных случайных функций. *Ковариационная матрица значения стационарной случайной функции $X(t)$ при данном t (дисперсия в случае скалярной случайной функции) постоянна:*

$$D_x(t)=K_x(t, t)=k_x(0)=\text{const}.$$

Второе свойство стационарных случайных функций вытекает из первого свойства (2.26) ковариационной функции. Согласно этому свойству при перестановке аргументов значение ковариационной функции заменяется эрмитовски сопряженной матрицей (комплексно сопряженной величиной в случае скалярной случайной функции). Следовательно,

$$k_x(\tau)=k_x(-\tau)^*.$$

В частности, *ковариационная функция действительной скалярной стационарной случайной функции не изменяется при изменении знака аргумента, т. е. является четной функцией:*

$$k_x(\tau) = k_x(-\tau).$$

Так как дисперсия стационарной скалярной случайной функции постоянна, то третье свойство ковариационной функции для стационарных случайных функций принимает вид

$$|k_x(\tau)| \leqslant D_x = k_x(0).$$

Иными словами, *ковариационная функция скалярной стационарной случайной функции не может быть по модулю больше ее значения в начале координат.*

Пример 1. Случайные функции, определяющие флуктуации напряжения при $t_0 = -\infty$ в примере 2.4, а также случайные функции в примерах 2.5 и 2.6 стационарны в широком смысле.

Пример 2. Рассмотрим случайную функцию

$$X(t) = U\cos\omega t + V\sin\omega t, \tag{I}$$

где U и V — некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями m_u и m_v и с одинаковыми дисперсиями, равными D. Очевидно, что $m_x = m_u \cos\omega t + m_v \sin\omega t$. Для определения ее ковариационной функции заметим, что случайная функция $X(t)$ является суммой двух некоррелированных случайных величин и, следовательно,

$$K_x(t_1, t_2) = D\cos\omega t_1 \cos\omega t_2 + D\sin\omega t_1 \sin\omega t_2 = D\cos\omega(t_1 - t_2).$$

Отсюда видно, что случайная функция $X(t)$ ковариационно стационарна. Если $m_u = m_v = 0$, то $X(t)$ стационарна в широком смысле.

Для того чтобы определить, является ли случайная функция $X(t)$ стационарной в узком смысле, необходимо задать распределение случайных величин U и V. Пусть $f(u, v)$ — совместная плотность случайных величин U, V. Для определения двумерной плотности случайной функции $X(t)$ воспользуемся формулой для плотности функции случайного аргумента (*ТВ*, п. 5.3.1). Формула (I) определяет $X(t_1)$ и $X(t_2)$ как линейные функции случайных величин U, V. Следовательно, решив уравнения

$$x_1 = u\cos\omega t_1 + v\sin\omega t_1, \quad x_2 = u\cos\omega t_2 + v\sin\omega t_2$$

относительно u, v:

$$u = \frac{x_1\sin\omega t_2 - x_2\sin\omega t_1}{\sin\omega(t_2 - t_1)}, \quad v = \frac{-x_1\cos\omega t_2 + x_2\cos\omega t_1}{\sin\omega(t_2 - t_1)},$$

получим для двумерной плотности случайной функции $X(t)$ формулу

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{f\left(\dfrac{x_1\sin\omega t_2 - x_2\sin\omega t_1}{\sin\omega(t_2 - t_1)}, \dfrac{-x_1\cos\omega t_2 + x_2\cos\omega t_1}{\sin\omega(t_2 - t_1)}\right)}{|\sin\omega(t_2 - t_1)|}.$$

Эта формула показывает, что в общем случае двумерная плотность случайной функции $X(t)$ зависит от обоих аргументов t_1 и t_2, и поэтому случайная функция $X(t)$ не является стационарной в узком смысле. Таким образом, мы имеем пример случайной функции, стационарной в широком смысле и нестационарной в узком смысле. В частных случаях случайная функция $X(t)$ может быть стационарной и в узком смысле. Так, например, если плотность случайных величин U, V зависит только от $u^2 + v^2$:

$$f(u, v) = h(u^2 + v^2), \tag{II}$$

то случайная функция $X(t)$ стационарна в узком смысле. В этом случае ее двумерная плотность зависит только от разности t_1-t_2. Для того чтобы убедиться в том, что n-мерное распределение случайной функции $X(t)$ при любом n зависит только от интервалов t_1-t_ν, найдем ее n-мерную характеристическую функцию. Имеем

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ t_1, \ldots, t_n) = M\exp\left\{i\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu X(t_\nu)\right\} =$$

$$= M\exp\left\{i\left(U\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu\cos\omega t_\nu + V\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu\sin\omega t_\nu\right)\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{i\left(u\sum_{\nu=}^{n}\lambda_\nu\cos\omega t_\nu + v\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu\sin\omega t_\nu\right)\right\}h(u^2+v^2)\,du\,dv.$$

Отсюда после замены переменных

$$u=\xi\cos\omega t_1-\eta\sin\omega t_1,\quad v=\xi\sin\omega t_1+\eta\cos\omega t_1$$

получаем

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{i\left[\xi\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu\cos\omega(t_1-t_\nu)-\eta\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu\sin\omega(t_1-t_\nu)\right]\right\}\times$$

$$\times h(\xi^2+\eta^2)\,d\xi\,d\eta.$$

Таким образом, при любом n характеристическая функция g_n, а следовательно и n-мерное распределение случайной функции $X(t)$, зависит только от разностей t_1-t_ν $(\nu=2, \ldots, n)$, что и доказывает стационарность в узком смысле случайной функции $X(t)$. Можно доказать, что условие (II) является не только достаточным, но и необходимым условием стационарности в узком смысле случайной функции $X(t)$. Если потребовать, чтобы случайные величины U, V были не только не коррелированы, но и независимы, то необходимым и достаточным условием стационарности в узком смысле случайной функции $X(t)$ является нормальность распределения случайных величин U, V.

Пример 3. Случайная функция

$$X(t) = \sum_{\nu=1}^{n}(U_\nu\cos\omega_\nu t + V_\nu\sin\omega_\nu t)$$

ковариационно стационарна, если $U_1, V_1, \ldots, U_n, V_n$ — некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями m_ν^u и m_ν^v и попарно одинаковыми дисперсиями $DU_\nu=DV_\nu=D_\nu$. Ковариационная функция случайной функции $X(t)$ в этом случае определяется формулой

$$k_x(t_1-t_2)=\sum_{\nu=1}^{n}D_\nu\cos\omega_\nu\tau,\qquad \tau=t_1-t_2.$$

Можно показать, что если случайные величины U_ν и V_ν распределены нормально, то случайная функция $X(t)$ будет стационарна в узком смысле. Если распределение U_ν и V_ν отлично от нормального, то случайная функция $X(t)$ не обязательно стационарна в узком смысле. Этот пример имеет практический интерес, поскольку каждую ковариационно стационарную случайную функцию с конечной дисперсией можно аппроксимировать линейными комбинациями гармоник со случайными коэффициентами.

4.1.3. Стационарно связанные случайные функции. Случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ называются *стационарно связанными*, если их взаимная ковариационная функция зависит только от разности аргументов:

$$K_{xy}(t_1, t_2) = k_{xy}(\tau), \quad \tau = t_1 - t_2.$$

Стационарно связанными могут быть как стационарные, так и нестационарные случайные функции. Стационарные случайные функции могут быть как стационарно связанными, так и нестационарно связанными.

Из свойства (2.29) взаимных ковариационных функций следует, что *взаимные ковариационные функции* $k_{xy}(\tau)$ *и* $k_{yx}(\tau)$ *двух стационарно связанных случайных функций* $X(t)$ *и* $Y(t)$ *связаны соотношением*

$$k_{xy}(\tau) = k_{yx}(-\tau)^*.$$

В частном случае для действительных скалярных случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ это соотношение принимает вид

$$k_{xy}(\tau) = k_{yx}(-\tau).$$

Очевидно, что *векторная случайная функция стационарна тогда и только тогда, когда все ее компоненты являются стационарными и стационарно связанными случайными функциями.*

Пример 4. Случайные функции

$$X(t) = Z \sin \omega t + U \cos \omega t, \; Y(t) = Z \cos \omega t - U \sin \omega t$$

стационарны и стационарно связаны, если случайные величины Z и U не коррелированы и имеют одинаковые дисперсии D, так как в этом случае их ковариационные функции и взаимная ковариационная функция

$$k_x(\tau) = k_y(\tau) = D \cos \omega\tau, \qquad k_{xy}(\tau) = D \sin \omega\tau$$

зависят только от разности аргументов.

Пример 5. Пусть Z, U и V — некоррелированные случайные величины с одинаковыми дисперсиями D. Очевидно, что случайные функции

$$X(t) = Z \sin \omega t + U \cos \omega t, \qquad Y(t) = Z \sin \omega t + V \cos \omega t$$

стационарны, так как их ковариационные функции определяются формулой примера 2. Однако эти случайные функции нестационарно связаны, так как их взаимная ковариационная функция, равная

$$K_{xy}(t_1, t_2) = D \sin \omega t_1 \sin \omega t_2,$$

зависит от аргументов t_1 и t_2 по отдельности.

Пример 6. Пусть теперь $X(t)$ — произвольная стационарная случайная функция. Случайные функции

$$Y(t) = e^{\mu t} X(t), \quad Z(t) = e^{-\mu t} X(t)$$

нестационарны, так как их ковариационные функции

$$K_y(t_1, t_2) = e^{\mu(t_1+t_2)} k_x(t_1 - t_2),$$
$$K_z(t_1, t_2) = e^{-\mu(t_1+t_2)} k_x(t_1 - t_2)$$

не являются функциями разности аргументов t_1 и t_2. Однако эти случайные функции стационарно связаны, так как их взаимная ковариационная функция

$$K_{yz}(t_1,\ t_2) = e^{\mu\tau} k_x(\tau), \quad \tau = t_1 - t_2,$$

зависит только от разности аргументов.

4.1.4. Дифференцирование стационарных случайных функций. Из общих формул п. 2.4.4 для математических ожиданий и ковариационных функций производных случайной функции вытекают соответствующие формулы для стационарных случайных функций. Пользуясь формулой (2.56), находим ковариационную функцию первой производной $X'(t)$ стационарной случайной функции $X(t)$:

$$K_{x'}(t_1,\ t_2) = \frac{\partial^2 K_x(t_1,\ t_2)}{\partial t_1\, \partial t_2} = -k''_x(\tau), \quad \tau = t_1 - t_2.$$

Отсюда видно, что производная стационарной случайной функции также стационарна. Аналогично, по формуле (2.59) при $q = p$ находим ковариационную функцию производной $X^{(p)}(t)$ порядка p стационарной случайной функции:

$$K_{x^{(p)}}(t_1,\ t_2) = \frac{\partial^{2p} K_x(t_1,\ t_2)}{\partial t_1^p\, \partial t_2^p} = (-1)^p k_x^{(2p)}(\tau) \qquad (p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Таким образом, *все производные стационарной случайной функции являются стационарными случайными функциями, причем ковариационные функции производных определяются формулой*

$$k_{x^{(p)}}(\tau) = (-1)^p k_x^{(2p)}(\tau) \quad (p = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{1}$$

Таким образом, *для существования производной порядка p стационарной случайной функции необходимо и достаточно существование производной порядка $2p$ ее ковариационной функции.*

Пользуясь формулой (2.59), можно определить взаимные ковариационные функции производных различных порядков стационарной случайной функции:

$$K_{x^{(p)}x^{(q)}}(t_1,\ t_2) = \frac{\partial^{p+q} K_x(t_1,\ t_2)}{\partial t_1^p\, \partial t_2^q} = (-1)^q k_x^{(p+q)}(\tau) \quad (p,\ q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Таким образом, *производные стационарной случайной функции являются стационарными и стационарно связанными случайными функциями, причем их взаимные ковариационные функции определяются формулой*

$$k_{x^{(p)}x^{(q)}}(\tau) = (-1)^q k_x^{(p+q)}(\tau) \quad (p,\ q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{2}$$

В частности, взаимная ковариационная функция стационарной случайной функции $X(t)$ и ее первой производной определяется формулой

$$k_{xx'}(\tau) = -k'_x(\tau).$$

Если ковариационная функция $k_x(\tau)$ стационарной случайной функции $X(t)$ имеет непрерывную первую производную, то $k_x'(0)=0$, так как $k_x(\tau)$ имеет максимум при $\tau=0$. Таким образом, для любой с. к. дифференцируемой стационарной случайной функции

$$k_{xx'}(0)=-k_x'(0)=0.$$

Это значит, что *значения любой стационарной случайной функции и ее первой производной в одной и той же точке не коррелированы*. Если стационарная случайная функция распределена нормально, то ее значение в любой точке и значение ее производной в той же точке независимы. Ясно, что из этого никак не следует, что стационарная случайная функция и ее производная вообще не коррелированы. Так как производная ковариационной функции всегда отлична от тождественного нуля, то стационарная случайная функция и ее производные всегда коррелированы и тем более зависимы.

Пример 7. Найти ковариационную функцию производной случайной функции $X(t)$, если

$$k_x(\tau)=De^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|).$$

Найти также взаимные ковариационные функции случайных функций $X(t)$ и $X'(t)$. По формулам (1) и (2) находим

$$k_{xx'}(\tau)=-k_x'(\tau)=\alpha^2 D\tau e^{-\alpha|\tau|}=-k_{x'x}(\tau),$$
$$k_{x'}(\tau)=-k_x''(\tau)=\alpha^2 De^{-\alpha|\tau|}(1-\alpha|\tau|).$$

Пример 8. Найти ковариационные функции первой и второй производных случайной функции $X(t)$ при

$$k_x(\tau)=De^{-\alpha|\tau|}\left(1+\alpha|\tau|+\frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right).$$

По формулам (1) и (2) находим

$$k_{xx'}(\tau)=-k_x'(\tau)=\frac{\alpha^2}{3}D\tau e^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|)=-k_{x'x}(\tau),$$
$$k_{x'}(\tau)=-k_x''(\tau)=\frac{\alpha^2}{3}De^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|-\alpha^2\tau^2)=-k_{xx''}(\tau),$$
$$k_{x'x''}(\tau)=-k_x'''(\tau)=-\alpha^4 D\tau e^{-\alpha|\tau|}\left(1-\frac{1}{3}\alpha|\tau|\right),$$
$$k_{x''}(\tau)=k_x^{\mathrm{IV}}(\tau)=\alpha^4 De^{-\alpha|\tau|}\left(1-\alpha|\tau|+\frac{\alpha^2}{3}\tau^2\right).$$

4.1.5. Некоторые типовые ковариационные функции. В приложениях часто встречаются стационарные случайные функции с *показательной* (*экспоненциальной*) ковариационной функцией

$$k_x(\tau)=De^{-\alpha|\tau|}. \tag{3}$$

Мы встречались с этой ковариационной функцией в примерах 2.4—2.6.

Другим часто встречающимся видом ковариационной функции стационарной случайной функции является *показательно-косинусная* (*экспоненциально-косинусная*) ковариационная функция

$$k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}\cos\omega_0\tau. \qquad (4)$$

Кривые, изображающие показательную и показательно-косинусную ковариационную функцию, имеют в начале координат угловую точку. Иными словами, их первая производная имеет

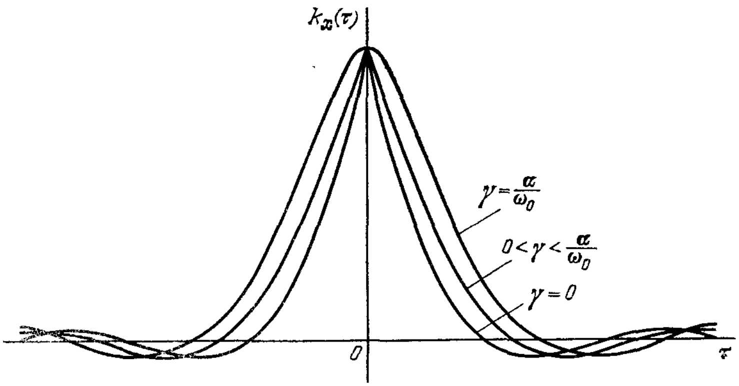

Рис. 11

разрыв в начале координат. Следовательно, вторая производная такой ковариационной функции в начале координат не существует. Это означает, что случайные функции с показательной или показательно-косинусной ковариационной функцией не с. к. дифференцируемы.

Третьей часто встречающейся ковариационной функцией стационарной случайной функции является ковариационная функция вида

$$k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}(\cos\omega_0\tau + \gamma\sin\omega_0|\tau|). \qquad (5)$$

Параметр γ в этой формуле может иметь любое значение, не превосходящее по модулю α/ω_0. На рис. 11 показаны графики ковариационной функции (5) при различных значениях параметра γ. При предельном значении параметра γ, $\gamma=\alpha/\omega_0$, кривая, изображающая ковариационную функцию, не имеет угловой точки в начале координат и касательная к ней при $\tau=0$ параллельна оси абсцисс. Вследствие этого такая случайная функция при $\gamma=\alpha/\omega_0$ с. к. дифференцируема. Интересно отметить, что ковариационная функция примера 7 может быть получена предельным переходом из (5) при $\omega_0 \to 0$.

Приведенные три вида ковариационных функций стационарных случайных функций имеют большое значение для практики еще и потому, что ковариационная функция любой стационарной случайной функции может быть с любой степенью точности представлена в виде линейной комбинации конечного числа ковариационных функций этих трех типов, конечно, с различными значениями параметров α, ω_0 и γ.

4.1.6. Случайные функции, приводимые к стационарным. В приложениях часто встречаются случайные функции, которые сравнительно просто в конечном виде выражаются через стационарные случайные функции. Такие случайные функции называются *приводимыми к стационарным*.

Приведение случайной функции к стационарной можно осуществить или преобразованием самой случайной функции, или преобразованием аргумента, или комбинацией этих преобразований.

Случайные функции, приводимые к стационарным преобразованием самой случайной функции, определяются в общем случае формулой $Y(t)=\psi(X(t),\ t)$, где $\psi(X,\ t)$ — некоторая функция, $X(t)$ — стационарная случайная функция.

Случайные функции, приводимые к стационарным заменой аргумента, определяются в общем случае формулой $Y(t)=X(\varphi(t))$, где $\varphi(t)$ — некоторая функция, $X(s)$ — стационарная случайная функция переменной $s=\varphi(t)$.

В общем виде случайная функция, приводимая к стационарной, определяется формулой $Y(t)=\psi(X(\varphi(t)),\ t)$, где $\varphi(t)$ и $\psi(X,\ t)$ имеют прежние значения, а $X(s)$ — стационарная случайная функция переменной $s=\varphi(t)$.

Простейшие случайные функции, приводимые к стационарным, получаются линейным преобразованием стационарной случайной функции (с заменой аргумента или без замены аргумента).

Найдем условие приводимости случайной функции к стационарной линейным преобразованием, ограничиваясь для простоты скалярными действительными случайными функциями.

► Предположим, что случайная функция $Y(t)$ связана со стационарной случайной функцией $X(t)$ формулой

$$Y(t)=b_0(t)+b_1(t)X(t), \tag{6}$$

где $b_0(t)$ и $b_1(t)$ — некоторые действительные функции, причем $b_1(t)$ сохраняет знак при всех t. Ковариационная функция и дисперсия случайной функции $Y(t)$ выражаются через ковариационную функцию стационарной случайной функции $X(t)$ формулами

$$\begin{gathered} K_y(t_1,\ t_2)=b_1(t_1)\,b_1(t_2)\,k_x(t_1-t_2), \\ D_y(t)=K_y(t,\ t)=b_1^2(t)\,k_x(0). \end{gathered} \tag{7}$$

На основании этих формул корреляционная функция $Y(t)$ равна

$$R_y(t_1, t_2) = \frac{K_y(t_1, t_2)}{\sqrt{D_y(t_1) D_y(t_2)}} = \frac{k_x(t_1 - t_2)}{k_x(0)} = r_x(t_1 - t_2), \tag{8}$$

т. е. совпадает с корреляционной функцией стационарной случайной функции $X(t)$. Таким образом, необходимым условием приводимости случайной функции к стационарной линейным преобразованием является зависимость ее корреляционной функции от разности аргументов $t_1 - t_2$. Для доказательства достаточности этого условия найдем ковариационную функцию случайной функции $X(t) = Y(t)/\sqrt{D_y(t)}$, предполагая это условие выполненным:

$$K_x(t_1, t_2) = \frac{K_y(t_1, t_2)}{\sqrt{D_y(t_1) D_y(t_2)}} = r_y(t_1 - t_2).$$

Отсюда видно, что ковариационная функция случайной функции $X(t)$ зависит только от разности аргументов, что и доказывает стационарность случайной функции $X(t)$. ◀

Таким образом, *для приводимости случайной функции к стационарной линейным преобразованием случайной функции необходимо и достаточно, чтобы ее корреляционная функция зависела только от разности аргументов.*

Найдем условия приводимости случайной функции к стационарной заменой аргумента.

▶ Предположим, что случайная функция $Y(t)$ выражается через стационарную случайную функцию $X(s)$ формулой

$$Y(t) = b_0(t) + b_1(t) X(\varphi(t)). \tag{9}$$

Совершенно так же, как в предыдущем случае, находим корреляционную функцию

$$R_y(t_1, t_2) = \frac{K_y(t_1, t_2)}{\sqrt{D_y(t_1) D_y(t_2)}} = r_x(\varphi(t_1) - \varphi(t_2)). \tag{10}$$

Отсюда видно, что семейства кривых $R_y(t_1, t_2) = c$ и $\varphi(t_1) - \varphi(t_2) = c'$ должны совпадать. Дифференцируя уравнения этих кривых, получим, с одной стороны,

$$\frac{\partial R_y(t_1, t_2)}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial R_y(t_1, t_2)}{\partial t_2} dt_2 = 0,$$

а с другой стороны,

$$\varphi'(t_1)\, dt_1 + \varphi'(t_2)\, dt_2 = 0.$$

Эти дифференциальные уравнения должны быть равноценными. Отсюда вытекает необходимое условие

$$\frac{\dfrac{\partial R_y(t_1,\ t_2)}{\partial t_1}}{\dfrac{\partial R_y(t_1,\ t_2)}{\partial t_2}} = -\frac{\varphi'(t_1)}{\varphi'(t_2)}. \blacktriangleleft \tag{11}$$

Таким образом, *для приводимости случайной функции к стационарной линейным преобразованием с одновременной заменой*

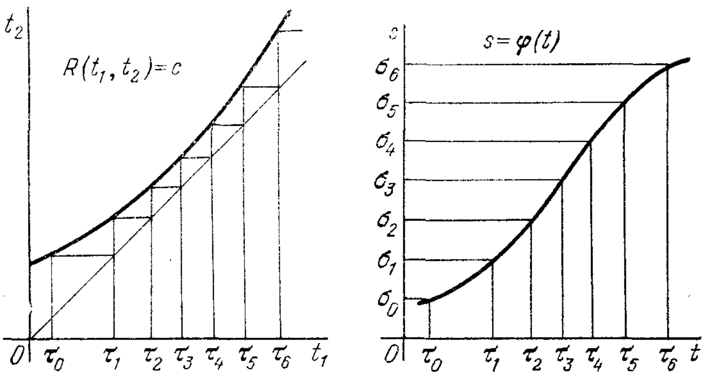

Рис. 12

аргумента необходимо и достаточно, чтобы отношение частных производных ее корреляционной функции могло быть выражено в виде взятого с обратным знаком отношения значений некоторой функции φ' *при значениях аргумента, равных* t_1 *и* t_2 *соответственно. Функция* φ *при этом определяется как интеграл от* φ'.

Для определения функции φ может быть использован следующий приближенный прием, предложенный Е. В. Золотовым. Построив биссектрису координатного угла и какую-нибудь кривую семейства $R_y(t_1,\ t_2)=c$ в координатах t_1, t_2, проводим ломаную, составленную из отрезков, параллельных осям координат, имеющих концы на биссектрисе координатного угла и на выбранной кривой семейства $R_y(t_1,\ t_2)=c$. Сопоставив значениям t_1, соответствующим вершинам построенной ломаной линии (рис. 12), равноотстоящие значения переменной s_1, получим кривую, приближенно определяющую функцию φ. Ясно, что построенная таким способом кривая не должна зависеть от выбора кривой семейства $R_y(t_1,\ t_2)=c$ и начальной точки ломаной t_0. Практически это условие не может выполняться точно вследствие приближенности самого построения. Кроме того, функция, определяемая формулой

$$X(s)=\frac{Y(t)-m_y(t)}{b_1(t)}, \qquad s=\varphi(t),$$

может быть не точно стационарной, а лишь приблизительно стационарной. Поэтому практически за кривую функции φ обычно приходится выбирать кривую, полученную в результате осреднения нескольких кривых, построенных изложенным способом для нескольких кривых семейства $R_y(t_1,\ t_2)=c$ и для нескольких начальных точек ломаной. Критерием приводимости рассматриваемой функции к стационарной с помощью замены аргумента при этом будет служить достаточная близость всех кривых $s=\varphi(t)$, полученных для различных кривых семейства $R_y(t_1,\ t_2)=c$ при различных начальных точках.

Пример 9. Случайная функция $Y(t)$ примера 6 приводима к стационарной случайной функции $X(t)$ посредством преобразования $X(t)=e^{-\mu t}Y(t)$.

Пример 10. Случайная функция $Y(t)$ с ковариационной функцией $K_y(t_1,\ t_2)=De^{\mu(t_1+t_2)-\alpha\left|t_1^2-t_2^2\right|}$ приводится к стационарной преобразованием

$$X(s)=e^{-\mu t}Y(t), \qquad s=t^2,$$

где $X(s)$ — стационарная случайная функция с экспоненциальной ковариационной функцией $k_x(\sigma)=De^{-\alpha|\sigma|}$, $\sigma=s_2-s_1$.

§ 4.2. Спектральная теория стационарных случайных функций

4.2.1. Стационарные случайные функции с дискретным спектром. Рассмотрим сначала все стационарные случайные функции, которые можно составить из гармонических колебаний различных частот со случайными амплитудами и фазами. Такие случайные функции выражаются формулой

$$X(t)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}^{0}\, V_\nu e^{i\omega_\nu t}, \tag{12}$$

где $\{\omega_\nu\}$ — последовательность частот, $\{V_\nu\}$ — последовательность некоррелированных случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и конечными дисперсиями $DV_\nu=D_\nu$ ($\nu=\pm 1$, $\pm 2,\ \ldots$), а нулик сверху у суммы означает, что слагаемое, соответствующее $\nu=0$, в сумме отсутствует.

Ковариационная функция случайной функции $X(t)$ как ковариация двух линейных функций некоррелированных случайных величин V_ν выражается формулой (*ТВ*, п. 3.3.5)

$$K_x(t_1,\ t_2)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}^{0}\, D_\nu e^{i\omega_\nu t_1}\cdot\overline{e^{i\omega_\nu t_2}}=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}^{0}\, D_\nu e^{i\omega_\nu(t_1-t_2)}$$

или

$$k_x(\tau)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}^{0} D_\nu e^{i\omega_\nu\tau}, \quad \tau=t_1-t_2. \tag{13}$$

Полагая в (13) $\tau=0$, получим формулу для дисперсии случайной функции $X(t)$:

$$D_x=k_x(0)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}^{0} D_\nu. \tag{14}$$

Отсюда видно, что дисперсия стационарной случайной функции $X(t)$ конечна тогда и только тогда, когда ряд, составленный из дисперсий D_ν величин V_ν, сходится.

В случае бесконечной последовательности частот $\{\omega_\nu\}$, кратных основной частоте ω_1, соответствующей некоторому периоду $2T$, $\omega_1=\pi/T$, формула (13) представляет собой разложение ковариационной функции в ряд Фурье. Поэтому для определения дисперсий D_ν величин V_ν по данной ковариационной функции случайной функции $X(t)$ можно воспользоваться известной формулой теории рядов Фурье:

$$D_\nu=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} k_x(\tau)\,e^{-i\omega_\nu\tau}\,d\tau \quad (\nu=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Таким образом, все случайные функции, которые можно составить из некоррелированных гармоник различных частот со случайными амплитудами и фазами, являются стационарными случайными функциями *). Последовательность частот $\{\omega_\nu\}$ представляет собой *спектр частот* случайной функции $X(t)$. Формула (14) определяет распределение дисперсии случайной функции $X(t)$ по спектру частот.

4.2.2. Стационарные случайные функции с непрерывным спектром. Чтобы подойти к случаю непрерывного спектра частот, представим результаты п. 4.2.1 в другом виде. Введем случайную функцию частоты

$$W(\omega)=\begin{cases} \sum\limits_{0<\omega_\nu\leqslant\omega} V_\nu & \text{при} \quad \omega>0, \\ 0 & \text{при} \quad \omega=0, \\ -\sum\limits_{\omega<\omega_\nu<0} V_\nu & \text{при} \quad \omega<0. \end{cases}$$

Очевидно, что $W(\omega)$ представляет собой ступенчатую случайную функцию переменной ω с некоррелированными скачками V_ν

*) Легко видеть, что некоррелированность коэффициентов V_ν (случайных комплексных амплитуд) в формуле (12) необходима для того, чтобы случайная функция $X(t)$ была стационарной.

в фиксированных точках ω_ν, т. е. случайную функцию частоты ω с некоррелированными приращениями (п. 3.1.1)*). Обозначим через $S_x(\omega)$ функцию, соответствующую функции $k(t)$ п. 3.1.1. Эта функция определяется формулой

$$S_x(\omega)=\begin{cases} M\,|W(\omega)|^2=\sum\limits_{0<\omega_\nu<\omega} D_\nu & \text{при}\quad \omega>0,\\ 0 & \text{при}\quad \omega=0,\\ -M\,|W(\omega)|^2=-\sum\limits_{\omega<\omega_\nu<0} D_\nu & \text{при}\quad \omega<0. \end{cases}$$

Ясно, что $S_x(\omega)$ представляет собой ступенчатую функцию с положительными скачками D_ν в точках ω_ν. Ее производная представляет собой линейную комбинацию δ-функций с положительными коэффициентами D_ν:

$$s_x(\omega)=S_x'(\omega)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}^{0} D_\nu\delta(\omega-\omega_\nu).$$

С помощью случайной функции с некоррелированными приращениями $W(\omega)$ и функции $s_x(\omega)$ формулы (12) и (13) можно переписать в виде

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,dW(\omega), \tag{15}$$

$$k_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega)\,e^{i\omega\tau}\,d\omega. \tag{16}$$

Таким образом, *стационарная случайная функция с нулевым математическим ожиданием и дискретным спектром представляется стохастическим интегралом по ступенчатой случайной функции с некоррелированными приращениями* $W(\omega)$.

Выразив δ-функции интегралом Фурье (*ТВ*, приложение 1),

$$\delta(\omega-\omega_\nu)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_\nu-\omega)\tau}\,d\tau,$$

можем представить формулу для $s_x(\omega)$ в виде

$$s_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}^{0} D_\nu e^{i\omega_\nu\tau}\cdot e^{-i\omega\tau}\,d\tau.$$

---

*) Несмотря на то, что $W(\omega)$ является случайной функцией скалярной переменной ω, мы не называем ее случайным процессом, так как ее аргумент имеет вполне определенный физический смысл круговой частоты колебаний, а не времени.

Отсюда на основании (13) получаем

$$s_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau. \tag{17}$$

Рассмотрим теперь случайную функцию $X(t)$, определяемую стохастическим интегралом (15) при произвольной случайной функции $W(\omega)$ с некоррелированными приращениями, имеющей нулевое математическое ожидание и нулевое значение при $\omega=0$. Такая случайная функция имеет конечный момент второго порядка при любом значении ω (п. 3.1.1). Определим соответствующую функцию

$$S_x(\omega)=\begin{cases} M\,|W(\omega)|^2 & \text{при} \quad \omega>0,\\ 0 & \text{при} \quad \omega=0,\\ -M\,|W(\omega)|^2 & \text{при} \quad \omega<0.\end{cases}$$

Если эта функция имеет производную $s_x(\omega)$, возможно, содержащую линейную комбинацию δ-функций, то ее можно представить формулой

$$S_x(\omega)=\int_0^{\omega} s_x(\mu)\,d\mu. \tag{18}$$

В этом случае ковариационная функция случайной функции $X(t)$ на основании (3.11) определяется формулой

$$K_x(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t_1}\cdot e^{-i\omega t_2}s_x(\omega)\,d\omega=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t_1-t_2)}s_x(\omega)\,d\omega$$

(в данном случае $\varphi(\omega)=e^{i\omega t_1}$, $\psi(\omega)=e^{i\omega t_2}$, $\nu(\omega)=s_x(\omega)$). Отсюда видно, что случайная функция $X(t)$ стационарна, и ее ковариационная функция определяется формулой (16). В частности, при $\tau=0$ из (16) вытекает формула для дисперсии случайной функции $X(t)$:

$$D_x=\int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega)\,d\omega.$$

Эта формула показывает, что дисперсия случайной функции $X(t)$, определяемой формулой (15), конечна тогда и только тогда, когда функция $s_x(\omega)$ интегрируема (напомним, что согласно определению в п. 3.1.1 функция $s_x(\omega)$ неотрицательна). Но это условие необходимо также для существования стохастического интеграла (15) (п. 3.1.2).

Из интегрируемости функции $s_x(\omega)$ следует возможность ее представления интегралом Фурье:

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\mu)\, e^{i(\mu-\omega)\tau}\, d\mu.$$

Отсюда в силу (16) вытекает формула

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} k_x(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau.$$

Эту формулу обычно записывают в виде (17), понимая интеграл как главное значение интеграла в смысле Коши [41]. Если ковариационная функция $k_x(\tau)$ абсолютно интегрируема, то интеграл в (17) можно понимать в обычном смысле.

Из интегрируемости функции $s_x(\omega)$ и формулы (16) следует, что ковариационная функция $k_x(\tau)$ стационарной случайной функции $X(t)$, представимой стохастическим интегралом (15), непрерывна. Это значит, что случайная функция $X(t)$ с. к. непрерывна (п. 2.4.3).

Таким образом, *все стационарные случайные функции, представимые стохастическим интегралом* (15), *с. к. непрерывны.*

Если $s_x(\omega)$ представляет собой обычную функцию, не содержащую линейной комбинации δ-функций, то случайную функцию $X(t)$, определяемую формулой (15), можно рассматривать как составленную из некоррелированных гармонических колебаний всех частот ω с бесконечно малыми случайными комплексными амплитудами $dW(\omega)$, имеющими дисперсии, соответственно равные $s_x(\omega)\,d\omega$, т. е. как стационарную случайную функцию с непрерывным спектром. Если $s_x(\omega)$ содержит линейную комбинацию δ-функций, то случайная функция $X(t)$ представляет собой стационарную случайную функцию с непрерывно-дискретным спектром.

Формула (15) определяет широкий класс с. к. непрерывных стационарных случайных функций, которые можно составить из некоррелированных гармонических колебаний различных частот. Естественно возникает вопрос: насколько широк этот класс? Ответ на этот вопрос будет дан в п. 4.2.4. Оказывается, что этот класс совпадает с множеством всех с. к. непрерывных стационарных случайных функций: *любая с. к. непрерывная стационарная случайная функция с нулевым математическим ожиданием может быть представлена стохастическим интегралом* (15). Это представление в соответствии с его физическим смыслом называется *спектральным разложением* стационарной случайной функции.

4.2.3. Спектральная функция и спектральная плотность. Из формулы для дисперсии стационарной случайной функции $X(t)$, вытекающей из (16) при $\tau = 0$, и формулы (18) следует, что функции $s_x(\omega)$ и $S_x(\omega)$ характеризуют распределение дисперсии случайной функции $X(t)$ по спектру частот. Вследствие этого функция $S_x(\omega)$ называется *спектральной функцией*, а ее производная $s_x(\omega)$ — *спектральной плотностью* стационарной случайной функции $X(t)$.

Формулы (16) и (17) показывают, что ковариационная функция и спектральная плотность стационарной случайной функции связаны взаимно обратными преобразованиями Фурье.

На практике иногда частоту измеряют в герцах и обозначают ее буквой f. Принимая во внимание соотношение между частотой ω, измеренной в $с^{-1}$, и частотой f, измеренной в Гц, $\omega=2\pi f$, формулу (16) для ковариационной функции стационарной случайной функции $X(t)$ можно переписать в виде

$$k_x(\tau)=2\pi\int_{-\infty}^{\infty} s_x(2\pi f)\,e^{2\pi i f\tau}\,df.$$

В этом случае спектральной плотностью стационарной случайной функции $X(t)$ называют функцию $\sigma_x(f)=2\pi s_x(2\pi f)$. При этом предыдущая формула принимает вид

$$k_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x(f)\,e^{2\pi i f\tau}\,df,$$

а формула (17) дает

$$\sigma_x(f)=\int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)\,e^{-2\pi i f\tau}\,d\tau.$$

Очевидно, что произведенное преобразование спектральной плотности представляет собой не что иное, как переход к другой единице измерения частоты. Действительно, если $s_x(\omega)$ постоянна в некотором диапазоне частот, то $s_x(\omega)$ представляет собой суммарную дисперсию всех гармоник, приходящихся на полосу частот шириной 1 $с^{-1}$, а $\sigma_x(f)$ — суммарную дисперсию всех гармоник, приходящихся на полосу частот шириной 1 Гц $=2\pi$ $с^{-1}$. При этом величина $s_x(\omega)\,d\omega=\sigma_x(f)\,df$ равна дисперсии случайной величины $dW(\omega)$.

Вследствие того, что ковариационная функция и спектральная плотность стационарной случайной функции связаны взаимно однозначной зависимостью (16) и (17), за характеристику стационарной случайной функции часто принимают ее спектральную плотность вместо ковариационной функции. Это особенно удобно при применении частотных методов исследования стационарных систем.

4.2.4. Спектральное разложение. Доказать сформулированную в конце п. 4.2.2 теорему о возможности представления любой с. к. непрерывной стационарной случайной функции спектральным разложением элементарно, не выходя за рамки применяемого в этой книге математического аппарата, мы не можем.

Приведем доказательство теоремы о спектральном разложении для читателей, знакомых с основами теории меры и интегрирования.

Пусть $X(t)$ — с. к. непрерывная стационарная n-мерная векторная случайная функция N-мерного векторного аргумента t, $k_x(\tau)$ — ее ковариационная функция, представляющая собой матрицу, элементами которой $k_{pq}(\tau)$ служат ковариационные и взаимные ковариационные функции компонент векторной случайной функции $X(t)$ (п. 2.2.4). По известной теореме Бохнера ковариационная функция $k_{pp}(\tau)$ компоненты $X_p(t)$ векторной случайной функции $X(t)$ как непрерывная неотрицательно определенная функция (пп. 2.4.3 и 2.2.11) может быть представлена интегралом

$$k_{pp}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega^T\tau}\sigma_{pp}(d\omega),$$

где $\sigma_{pp}(C)$ — неотрицательная конечная мера. Мера σ_{pp} в этом представлении единственна и определяется формулой обращения

$$\sigma_{pp}(C)=\frac{1}{(2\pi)^N}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} k_{pp}(\tau)\int_C e^{-i\omega^T\tau}\,d\omega\,d\tau$$

на алгебре всех множеств $C\in R^N$, для которых существует интеграл Римана

$$\int_C e^{-i\omega^T\tau}\,d\omega \quad [102] \text{ (вып. 10)}.$$

Определенная таким путем мера σ_{pp} однозначно продолжается на σ-алгебру борелевских множеств пространства R^N.

Определим в пространстве R^N случайную функцию множества

$$Z_p(A)=\frac{1}{(2\pi)^N}\underset{T\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_{-T}^{T} X_p^0(t)\int_A e^{-i\mu^T t}\,d\mu\,dt.$$

С. к. предел и с. к. интеграл в этой формуле существуют тогда и только тогда, когда существует предел интеграла

$$K_{pp}(A,\ B)=\frac{1}{(2\pi)^{2N}}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} k_{pp}(t-s)\int_A e^{-i\mu^T t}\,d\mu\int_B e^{i\nu^T s}\,d\nu\,dt\,ds,$$

который представляет собой ковариационную функцию случайной функции $Z_p(A)$ (п. 2.4.5).

▶ Чтобы доказать существование предела интеграла в предыдущей формуле, подставим в нее выражение $k_{pp}(t-s)$, даваемое теоремой Бохнера:

$$K_{pp}(A,\ B)=\frac{1}{(2\pi)^{2N}}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} dt\,ds\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_{pp}(d\omega)\times$$

$$\times\int_A e^{i(\omega^T-\mu^T)t}\,d\mu\int_B e^{-i(\omega^T-\nu^T)s}\,d\nu.$$

Так как функция переменных t, s, ω,

$$f(t,\ s,\ \omega)=\int\limits_A e^{i(\omega^{\mathrm{T}}-\mu^{\mathrm{T}})t}\,d\mu\int\limits_B e^{-i(\omega^{\mathrm{T}}-\nu^{\mathrm{T}})s}\,d\nu,$$

для любых множеств A и B конечной меры ограничена:

$$|f(t,\ s,\ \omega)|\leqslant l(A)\,l(B)$$

(через $l(C)$ обозначена лебегова мера множества $C\in R^N$) и вследствие этого интегрируема по t, s, ω по множеству $(-T,\ T)^{2N}\times R^N$, то по теореме Фубини [40] порядок интегрирования по t, s и по ω можно изменить. В результате получим

$$K_{pp}(A,\ B)=\lim_{T\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma_{pp}(d\omega)\frac{1}{(2\pi)^N}\int\limits_{-T}^{T}dt\int\limits_A e^{i(\omega^{\mathrm{T}}-\mu^{\mathrm{T}})t}\,d\mu\times$$

$$\times\frac{1}{(2\pi)^N}\int\limits_{-T}^{T}ds\int\limits_B e^{-i(\omega^{\mathrm{T}}-\nu^{\mathrm{T}})s}\,d\nu.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi_T(\omega)=\frac{1}{(2\pi)^N}\int\limits_{-T}^{T}dt\int\limits_A e^{i(\omega^{\mathrm{T}}-\mu^{\mathrm{T}})t}\,d\mu\cdot\frac{1}{(2\pi)^N}\int\limits_{-T}^{T}ds\int\limits_B e^{-i(\omega^{\mathrm{T}}-\nu^{\mathrm{T}})s}\,d\nu.$$

Так как

$$\frac{1}{(2\pi)^N}\int\limits_{-T}^{T}dt\int\limits_A e^{i(\omega^{\mathrm{T}}-\mu^{\mathrm{T}})t}\,d\mu=\int\limits_A\prod_{r=1}^{N}\frac{\sin(\mu_r-\omega_r)T}{\pi(\mu_r-\omega_r)}\,d\mu,$$

$$\frac{1}{(2\pi)^N}\int\limits_{-T}^{T}ds\int\limits_B e^{-i(\omega^{\mathrm{T}}-\nu^{\mathrm{T}})s}\,d\nu=\int\limits_B\prod_{r=1}^{N}\frac{\sin(\nu_r-\omega_r)T}{\pi(\nu_r-\omega_r)}\,d\nu$$

и

$$\left|\int\limits_a^b\frac{\sin\alpha x}{\pi x}\,dx\right|\leqslant\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin z}{\pi z}\,dz<2,\quad\forall a,\ b,\ \alpha,$$

то $|\varphi_T(\omega)|<2^{2N}$, $\forall T>0$. Далее, по известной интегральной формуле Фурье

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^N}\int\limits_{-T}^{T}dt\int\limits_A e^{i(\omega^{\mathrm{T}}-\mu^{\mathrm{T}})t}\,d\mu=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^N}\lim_{T\to\infty}\int\limits_{-T}^{T}dt\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{1}_A(\mu)\,e^{i(\omega^{\mathrm{T}}-\mu^{\mathrm{T}})t}\,d\mu=\mathbf{1}_A(\omega),$$

где $\mathbf{1}_A(\omega)$ — индикатор множества A. А так как индикатор любого множества представляет собой действительную функцию, то

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^N}\int\limits_{-T}^{T}ds\int\limits_B e^{-i(\omega^{\mathrm{T}}-\nu^{\mathrm{T}})s}\,d\nu=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^N}\int\limits_{-T}^{T}ds\int\limits_B e^{i(\omega^{\mathrm{T}}-\nu^{\mathrm{T}})s}\,d\nu=\mathbf{1}_B(\omega).$$

Следовательно, существует предельная функция

$$\varphi(\omega)=\lim_{T\to\infty}\varphi_T(\omega)=1_A(\omega)\,1_B(\omega)=1_{AB}(\omega).$$

Таким образом, при любом T функция $\varphi_T(\omega)$ мажорируется по модулю σ_{pp}-интегрируемой функцией $\psi(\omega)=2^{2N}$ и $\varphi_T(\omega)\longrightarrow\varphi(\omega)=1_{AB}(\omega)$ при $T\longrightarrow\infty$. Следовательно, по теореме Лебега [40] предел интеграла в формуле для $K_{pp}(A,\ B)$ существует и равен интегралу от предельной функции:

$$K_{pp}(A,\ B)=\int_{-\infty}^{\infty}1_{AB}(\omega)\,\sigma_{pp}(d\omega)=\sigma_{pp}(AB).$$

Эта формула, выведенная для ограниченных множеств A и B, в силу непрерывности и конечности меры σ_{pp} распространяется на любые борелевские множества $A,\ B\in R^N$. ◀

Таким образом, *случайная функция множества $Z_p(A)$ представляет собой стохастическую меру* (ее σ-аддитивность и равенство нулю на пустом множестве $\varnothing$ следуют непосредственно из ее определения), *и ее ковариационной функцией служит мера σ_{pp}, через которую ковариационная функция $k_{pp}(\tau)$ выражается по теореме Бохнера* (п. 3.2.1).

Рассмотрим теперь стохастический интеграл (п. 3.2.2)

$$Y_p(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega^{\mathrm{T}}t}Z_p(d\omega).$$

Докажем, что он совпадает (с вероятностью единица) с центрированной случайной функцией $X_p^0(t)=X_p(t)-m_p(t)$.

▶ Для доказательства вычислим

$$M\,|\,Y_p(t)-X_p^0(t)\,|^2=M\,|\,Y_p(t)\,|^2-MY_p(t)\,\overline{X_p^0(t)}-$$
$$-MX_p^0(t)\,\overline{Y_p(t)}+M\,|\,X_p^0(t)\,|^2.$$

Найдем каждое слагаемое в правой части по отдельности.

Обобщая рассуждение п. 3.2.2 и имея в виду, что в данном случае $\varphi(t)=e^{i\omega^{\mathrm{T}}t}$, получаем

$$M\,|\,Y_p(t)\,|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{i\omega^{\mathrm{T}}t}\right|^2\sigma_{pp}(d\omega)=k_{pp}(0)=M\,|\,X_p^0(t)\,|^2.$$

Для вычисления $MY_p(t)\,\overline{X_p^0(t)}$ найдем сначала $MZ_p(A)\,\overline{X_p^0(t)}$:

$$MZ_p(A)\,\overline{X_p^0(t)}=\frac{1}{(2\pi)^N}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}MX_p^0(s)\,\overline{X_p^0(t)}\int_A e^{-i\mu^{\mathrm{T}}s}\,d\mu\,ds=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^N}\lim\int_{-T}^{T}k_{pp}(s-t)\int_A e^{-i\mu^{\mathrm{T}}s}\,d\mu\,ds.$$

Интеграл в этой формуле вычисляется совершенно так же, как интеграл в формуле для $K_{pp}(A, B)$. В результате получим

$$MZ_p(A)\overline{X_p^0(t)} = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} ds \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{pp}(d\omega) \frac{e^{-i\omega^{\mathrm{T}}t}}{(2\pi)^N} \int_A e^{i(\omega^{\mathrm{T}}-\mu^{\mathrm{T}})s} d\mu =$$

$$= e^{-i\omega^{\mathrm{T}}t} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{pp}(d\omega) \lim_{T\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-T}^{T} ds \int_A e^{i(\omega^{\mathrm{T}}-\mu^{\mathrm{T}})s} d\mu =$$

$$= e^{-i\omega^{\mathrm{T}}t} \int_{-\infty}^{\infty} 1_A(\omega)\, \sigma_{pp}(d\omega) = e^{-i\omega^{\mathrm{T}}t} \sigma_{pp}(A)$$

и

$$MY_p(t)\overline{X_p^0(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega^{\mathrm{T}}t} MZ_p(d\omega)\overline{X_p^0(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega^{\mathrm{T}}t}\cdot e^{-i\omega^{\mathrm{T}}t} \sigma_{pp}(d\omega) = k_{pp}(0).$$

А так как эта величина действительная (положительная), то

$$MX_p^0(t)\overline{Y_p(t)} = k_{pp}(0).$$

Таким образом,

$$M\,|\,Y_p(t) - X_p^0(t)\,|^2 = k_{pp}(0) - k_{pp}(0) - k_{pp}(0) + k_{pp}(0) = 0.$$

Следовательно, $Y_p(t) \overset{\text{п. н.}}{=\!=} X_p^0(t)$, и мы получаем спектральное разложение случайной функции $X_p(t)$:

$$X_p(t) = m_p(t) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega^{\mathrm{T}}t} Z_p(d\omega). \blacktriangleleft$$

Вводя векторную стохастическую меру $Z(A) = [Z_1(A)\ldots Z_n(A)]^{\mathrm{T}}$, получаем *спектральное разложение с. к. непрерывной стационарной векторной случайной функции* $X(t)$:

$$X(t) = m_x(t) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega^{\mathrm{T}}t} Z(d\omega).$$

Обобщая рассуждения п. 3.2.2 и принимая во внимание, что в данном случае $\varphi(t) = Ie^{i\omega^{\mathrm{T}}t}$, где I — единичная матрица порядка n, находим спектральное разложение ковариационной функции случайной функции $X(t)$:

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega^{\mathrm{T}}\tau} \sigma_x(d\omega), \tag{16*}$$

где $\sigma_x(AB)$ — ковариационная функция стохастической меры $Z(A)$,

$$\sigma_x(AB) = \frac{1}{(2\pi)^{2N}} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} k_x(t-s) \int_A e^{-i\mu^{\mathrm{T}}t} d\mu \int_B e^{i\nu^{\mathrm{T}}s} d\nu\, dt\, ds.$$

Из доказанного выше существования диагональных элементов матрицы σ_x вытекает и существование всех ее элементов (п. 2.4.5).

Матричная функция множества $\sigma_x(C)$ называется *спектральной мерой* случайной функции $X(t)$. Ее диагональные элементы $\sigma_{pp}(C)$ представляют собой спектральные меры компонент векторной случайной функции $X(t)$.

Недиагональный элемент $\sigma_{pq}(C)$ матричной функции $\sigma_x(C)$ называется *взаимной спектральной мерой* случайных функций $X_p(t)$ и $X_q(t)$.

Если спектральная мера $\sigma_x(C)$ стационарной случайной функции $X(t)$ может быть представлена в виде интеграла

$$\sigma_x(C) = \int_C s_x(\omega)\, d\omega,$$

то формулы, связывающие $k_x(\tau)$ и $\sigma_x(C)$, дают

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega)\, e^{i\omega^T \tau}\, d\omega,$$

$$s_x(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^N} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} k_x(\tau)\, e^{-i\omega^T\tau}\, d\tau.$$

Эти формулы представляют собой обобщение формул (16) и (17) на стационарные векторные случайные функции векторного аргумента. Функция $s_x(\omega)$ представляет собой спектральную плотность стационарной случайной функции $X(t)$.

В задачах практики всегда существует спектральная плотность стационарной случайной функции, возможно содержащая линейную комбинацию δ-функций.

Таким образом, *любая с. к. непрерывная стационарная случайная функция $X(t)$ (скалярная или векторная, скалярного или векторного аргумента t) может быть представлена спектральным разложением*

$$X(t) = m_x(t) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega^T t} Z(d\omega), \tag{19}$$

а ее ковариационная функция $k_x(\tau)$ и спектральная плотность $s_x(\omega)$ связаны взаимно обратными преобразованиями Фурье (16) и (17), в которых в случае N-мерного векторного аргумента t (и соответственно N-мерного векторного аргумента ω) произведение $\omega\tau$ заменяется скалярным произведением $\omega^T\tau$, а множитель $1/2\pi$ заменяется множителем $1/(2\pi)^N$.

Диагональные элементы $s_{pp}(\omega)$ спектральной плотности $s_x(\omega)$ векторной случайной функции $X(t)$ представляют собой спектральные плотности ее компонент $X_p(t)$, а недиагональный элемент $s_{pq}(\omega)$ называется *взаимной спектральной плотностью компонент* $X_p(t)$ и $X_q(t)$ векторной случайной функции $X(t)$.

Спектральное разложение (16) (точнее, более общее разложение (16*)) ковариационной функции стационарной случайной функции было впервые получено Н. Винером [11] и А. Я. Хинчиным [75]. Поэтому формулы (16) и (17) обычно называются *формулами Винера—Хинчина*. Спектральное разложение стационарной случайной функции впервые получено Г. Крамером [42] и А. Н. Колмогоровым [39].

Очевидно, что спектральное разложение (19) стационарной случайной функции представляет собой ее интегральное каноническое представление (п. 3.2.3). В этом случае параметр τ в формуле (3.24) имеет смысл частоты колебаний (или вектора частот колебаний) и в соответствии с этим обозначается ω, $g(t, \omega) = Ie^{i\omega^T t}$, где I — единичная матрица, а $\nu(\omega) = s_x(\omega)$.

В случае скалярного аргумента t стохастическая мера $Z(C)$ определяет процесс с некоррелированными приращениями

$$W(\omega) = \begin{cases} Z([0, \omega)) & \text{при} \quad \omega > 0, \\ 0 & \text{при} \quad \omega = 0, \\ -Z([\omega, 0)) & \text{при} \quad \omega < 0, \end{cases}$$

и интегрирование по мере $Z(C)$ в (19) равноценно интегрированию по процессу $W(\omega)$:

$$X(t) = m_x(t) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, dW(\omega). \tag{20}$$

Формула (20), так же как и (19) при $N = 1$, определяет *спектральное разложение стационарного случайного процесса*, а формула (19) при $N > 1$ — *спектральное разложение однородного случайного поля*.

В технической литературе, следуя обычаю представлять стохастические интегралы как интегралы, содержащие белый шум, формулы (19) и (20) записывают в виде

$$X(t) = m_x(t) + \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega)\, e^{i\omega^T t}\, d\omega.$$

При этом спектральная плотность $s_x(\omega)$ представляет собой интенсивность белого шума $V(\omega)$.

Пример 11. Для стационарной случайной функции с показательной ковариационной функцией $k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}$ формула (17) дает следующее выражение для спектральной плотности:

$$s_x(\omega) = \frac{D}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau| - i\omega\tau}\, d\tau = \frac{D}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - i\omega)\tau}\, d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + i\omega)\tau}\, d\tau\right] =$$
$$= \frac{D}{2\pi}\left[\frac{1}{\alpha - i\omega} + \frac{1}{\alpha + i\omega}\right] = \frac{D}{\pi}\, \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Таким образом, показательной ковариационной функции $k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}$ соответствует спектральная плотность

$$s_x(\omega) = \frac{D}{\pi}\, \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Пример 12. Спектральная плотность, соответствующая ковариационной функции примера 7, на основании (17) определяется формулой

$$s_x(\omega) = \frac{D}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau| - i\omega\tau}\, (1 + \alpha|\tau|)\, d\tau.$$

Для вычисления этого интеграла положим

$$I(\alpha)=\frac{D}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|-i\omega\tau}\,d\tau.$$

Дифференцируя эту формулу по параметру α, получим

$$I'(\alpha)=-\frac{D}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\tau|\,e^{-\alpha|\tau|-i\omega\tau}\,d\tau.$$

На основании этих формул

$$s_x(\omega)=I(\alpha)-\alpha I'(\alpha).$$

Подставив сюда выражение $I(\alpha)$, полученное в предыдущем примере,

$$I(\alpha)=\frac{D}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|-i\omega\tau}\,d\tau=\frac{D}{\pi}\,\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2},$$

находим

$$s_x(\omega)=\frac{2D}{\pi}\,\frac{\alpha^3}{(\alpha^2+\omega^2)^2}.$$

Пример 13. Аналогично вычисляется спектральная плотность, соответствующая ковариационной функции примера 8:

$$s_x(\omega)=\frac{D}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|-i\omega\tau}\left(1+\alpha|\tau|+\frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right)d\tau=I(\alpha)-\alpha I'(\alpha)+\frac{1}{3}\alpha^2 I''(\alpha).$$

Подставив сюда выражение $I(\alpha)$, полученное в примере 12, находим

$$s_x(\omega)=\frac{8D}{3\pi}\,\frac{\alpha^5}{(\alpha^2+\omega^2)^3}.$$

Пример 14. Для показательно-косинусной ковариационной функции $k_x(\tau)=De^{-\alpha|\tau|}\cos\omega_0\tau$ по формуле (17) находим

$$s_x(\omega)=\frac{D}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|-i\omega\tau}\cos\omega_0\tau\,d\tau=$$

$$=\frac{D}{4\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-i\omega+i\omega_0)\tau}\,d\tau+\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-i\omega-i\omega_0)\tau}\,d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega-i\omega_0)\tau}\,d\tau+\int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega+i\omega_0)\tau}\,d\tau\right].$$

Отсюда после вычисления интегралов получаем

$$s_x(\omega)=\frac{D\alpha}{\pi}\,\frac{\beta^2+\omega^2}{\beta^4+2(\alpha^2-\omega_0^2)\,\omega^2+\omega^4},\quad \beta^2=\alpha^2+\omega_0^2.$$

Пример 15. Для более общей ковариационной функции (5) совершенно аналогично находим

$$s_x(\omega)=\frac{D}{\pi}\,\frac{(\alpha+\gamma\omega_0)\,\beta^2+(\alpha-\gamma\omega_0)\,\omega^2}{\beta^4+2(\alpha^2-\omega_0^2)\,\omega^2+\omega^4}.$$

Очевидно, что формула предыдущего примера является частным случаем этой формулы при $\gamma=0$. В другом частном случае, когда $\gamma=\alpha/\omega_0$, имеем

$$s_x(\omega)=\frac{2D\alpha}{\pi}\,\frac{\beta^2}{\beta^4+2(\alpha^2-\omega_0^2)\,\omega^2+\omega^4}, \quad \beta^2=\alpha^2+\omega_0^2.$$

Этот частный случай имеет особое практическое значение, так как он соответствует с. к. дифференцируемой случайной функции $X(t)$. На рис. 13

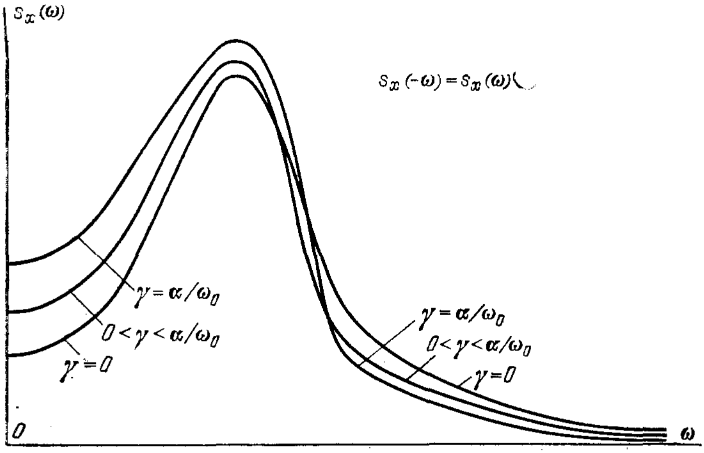

Рис. 13

показаны графики полученной спектральной плотности при различных значениях γ.

Решим теперь обратную задачу: считая заданной спектральную плотность, найдем по формуле (16) ковариационную функцию

$$k_x(\tau)=\frac{D}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha-\gamma(\omega-\omega_0)}{\alpha^2+(\omega-\omega_0)^2}\,e^{i\omega\tau}\,d\omega+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha+\gamma(\omega+\omega_0)}{\alpha^2+(\omega+\omega_0)^2}\,e^{i\omega\tau}\,d\omega\right].$$

Заменой переменных $\omega=\mu+\omega_0$ в первом интеграле и $\omega=\mu-\omega_0$ во втором интеграле полученная формула приводится к виду

$$k_x(\tau)=\frac{D}{\pi}\left[\alpha\cos\omega_0\tau\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\mu\tau}\,d\mu}{\alpha^2+\mu^2}-i\gamma\sin\omega_0\tau\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu e^{i\mu\tau}\,d\mu}{\alpha^2+\mu^2}\right].$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\mu\tau}\,d\mu}{\alpha^2+\mu^2}=\frac{\pi}{\alpha}\,e^{-\alpha|\tau|}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu e^{i\mu\tau}\,d\mu}{\alpha^2+\mu^2}=\begin{cases} i\pi e^{-\alpha|\tau|} & \text{при } \tau>0,\\ -i\pi e^{-\alpha|\tau|} & \text{при } \tau<0,\end{cases}$$

получим, как и следовало ожидать, формулу (5).

Пример 16. Найти взаимную спектральную плотность стационарных и стационарно связанных случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$, взаимная ковариационная функция которых определяется формулой

$$k_{xy}(\tau)=Ce^{-\alpha|\tau|}\sin\omega_0\tau.$$

Согласно (17) взаимная спектральная плотность компонент $X(t)$ и $Y(t)$ стационарной векторной случайной функции $[X(t)\,Y(t)]^{\mathrm{T}}$ выражается через их взаимную ковариационную функцию формулой

$$s_{xy}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k_{xy}(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau=\frac{C}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha|\tau|-i\omega\tau}\sin\omega_0\tau\,d\tau=$$

$$=\frac{C}{4\pi i}\left[\int_{-\infty}^{0}e^{\alpha\tau+i\omega_0\tau-i\omega\tau}\,d\tau+\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha\tau+i\omega_0\tau-i\omega\tau}\,d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{0}e^{\alpha\tau-i\omega_0\tau-i\omega\tau}\,d\tau-\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha\tau-i\omega_0\tau-i\omega\tau}\,d\tau\right].$$

Выполнив интегрирование, получим

$$s_{xy}(\omega)=-\frac{2C}{\pi}\,\frac{i\alpha\omega\omega_0}{\beta^4+2(\alpha^2-\omega_0^2)\,\omega^2+\omega^4},\qquad \beta^2=\alpha^2+\omega_0^2.$$

Эта формула показывает, что взаимная спектральная плотность действительных случайных функций может быть комплексной.

Пример 17. Найти взаимную ковариационную функцию случайных функций

$$Y(t)=X(t)+X_1(t),\quad Z(t)=X(t)+X_2(t),$$

где $X(t)$, $X_1(t)$ и $X_2(t)$ — некоррелированные стационарные случайные функции с известными ковариационными функциями. Показать, что случайные функции $Y(t)$ и $Z(t)$ стационарно связаны, и найти их взаимную спектральную плотность.

По определению взаимной ковариационной функции имеем

$$K_{yz}(t_1,\ t_2)=MY^0(t_1)\,Z^0(t_2)^*=MX^0(t_1)\,X^0(t_2)^*+$$

$$+MX_1^0(t_1)\,X^0(t_2)^*+MX^0(t_1)\,X_2^0(t_2)^*+MX_1^0(t_1)\,X_2^0(t_2)^*,$$

или, так как случайные функции $X(t)$, $X_1(t)$ и $X_2(t)$ не коррелированы,

$$K_{yz}(t_1,\ t_2)=MX^0(t_1)\,X^0(t_2)^*=k_x(t_1-t_2).$$

Отсюда видно, что случайные функции $Y(t)$ и $Z(t)$ стационарно связаны и их взаимная ковариационная функция совпадает с ковариационной функцией случайной функции $X(t)$. Следовательно, и взаимная спектральная плотность случайных функций $Y(t)$ и $Z(t)$ совпадает со спектральной плотностью случайной функции

$$s_{yz}(\omega)=s_x(\omega).$$

4.2.5. Свойства спектральной плотности. В соответствии с общими свойствами интенсивности процесса с некоррелированными приращениями и соответствующего белого шума *спектральная плотность* $s_x(\omega)$ *стационарной случайной функции* $X(t)$ *неотрицательна в случае скалярной* $X(t)$ *и представляет собой неотрицательно определенную матрицу в случае векторной* $X(t)$.

Второе и третье свойства спектральной плотности действительной стационарной случайной функции вытекают из второго свойства ковариационной функции

$$k_x(-\tau)=k_x(\tau)^{\mathrm{T}}.$$

► На основании формулы (17) и этого свойства

$$s_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k_x(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k_x(-\tau)^{\mathrm{T}}\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k_x(\sigma)^{\mathrm{T}}\,e^{i\omega\sigma}\,d\sigma.$$

Но на основании той же формулы (17)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k_x(\sigma)^{\mathrm{T}}\,e^{i\omega\sigma}\,d\sigma=\overline{\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k_x(\sigma)\,e^{-i\omega\sigma}\,d\sigma\right]^{\mathrm{T}}}=s_x(\omega)^*. \blacktriangleleft$$

Таким образом, *спектральная плотность действительной стационарной векторной случайной функции обладает эрмитовской симметрией (представляет собой эрмитовскую матрицу)*:

$$s_x(\omega)=s_x(\omega)^*.$$

► На основании формулы (17) и того же свойства ковариационной функции

$$s_x(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k_x(\tau)\,e^{i\omega\tau}\,d\tau=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k_x(-\tau)^{\mathrm{T}}\,e^{i\omega\tau}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k_x(\sigma)^{\mathrm{T}}\,e^{-i\omega\sigma}\,d\sigma=s_x(\omega)^{\mathrm{T}}. \blacktriangleleft$$

Таким образом, *при изменении знака* ω *спектральная плотность действительной векторной стационарной случайной функции переходит в транспонированную матрицу*:

$$s_x(-\omega)=s_x(\omega)^{\mathrm{T}}.$$

В частном случае *спектральная плотность действительной стационарной случайной функции представляет собой четную функцию*:

$$s_x(-\omega)=s_x(\omega).$$

Из выведенных второго и третьего свойств спектральной плотности действительной стационарной векторной случайной функции вытекают следующие свойства взаимных спектральных плотностей действительных стационарных случайных функций:

$$s_{qp}^x(\omega)=\overline{s_{pq}^x(\omega)},\qquad s_{qp}^x(-\omega)=s_{pq}^x(\omega)=\overline{s_{qp}^x(\omega)}.$$

Вся изложенная теория стационарных случайных функций относится также к стационарным случайным функциям векторного аргумента t. В этом случае ω представляет собой вектор (матрицу-столбец) той же размерности n, что и вектор t, а произведение ωt или $\omega\tau$ следует понимать как скалярное произведение соответствующих векторов $\omega^T t$ или $\omega^T\tau$ соответственно. При этом множитель 2π во всех формулах заменится множителем $(2\pi)^n$.

4.2.6. Стационарный белый шум. Хотя спектральные разложения стационарных случайных функций применимы только к с. к. непрерывным случайным функциям, их часто формально применяют и к обобщенным случайным функциям — белым шумам.

Предположим, что $X(t)$ — белый шум постоянной интенсивности ν. Его ковариационная функция определяется формулой

$$K_x(t_1,\ t_2) = \nu\delta(t_1 - t_2).$$

Эта формула показывает, что в случае постоянной интенсивности ковариационная функция белого шума зависит только от разности аргументов $\tau = t_1 - t_2$. Вследствие этого белый шум постоянной интенсивности называется *стационарным белым шумом*.

Найдем спектральную плотность стационарного белого шума $X(t)$. По формуле (17) получаем

$$s_x(\omega) = \frac{\nu}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau = \frac{\nu}{2\pi}.$$

Таким образом, *спектральная плотность стационарного белого шума $X(t)$ постоянна и равна* $s_0 = \nu/2\pi$. Именно вследствие этого случайные функции такого рода называются белыми шумами по аналогии с белым светом, все спектральные компоненты которого имеют одну и ту же интенсивность.

Подчеркнем, что спектральная плотность s_0 стационарного белого шума и его интенсивность ν связаны соотношениями

$$s_0 = \nu/2\pi, \qquad \nu = 2\pi s_0. \tag{21}$$

При измерении частоты в Гц спектральная плотность стационарного белого шума $\sigma_0 = 2\pi s_0$ совпадает с его интенсивностью ν.

4.2.7. Интервал корреляции стационарной случайной функции. В соответствии с определением п. 2.2.5 интервал корреляции стационарной случайной функции $X(t)$ и интенсивность аппроксимирующего его белого шума вычисляются по формулам

$$\tau_к = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_x(\tau)}{D_x}\,d\tau, \qquad \nu = \int_{-\infty}^{\infty}k_x(\tau)\,d\tau = 2\tau_к D_x.$$

Интересно отметить связь между интервалом корреляции и спектром стационарной случайной функции. Оказывается, что чем шире полоса частот, в которой спектральная плотность заметно отличается от нуля, тем меньше интервал корреляции, тем ближе случайная функция к белому шуму. Это легко объясняется тем, что белый шум имеет постоянную спектральную плотность в бесконечной полосе частот.

Пример 18. В примере 2.18 было показано, что белый шум можно получить как слабый с. к. предел случайной функции с показательной ковариационной функцией. Из результатов этого примера следует, что стационарная случайная функция с ковариационной функцией $(\nu\alpha/2)\,e^{-\alpha|\tau|}$ слабо с. к. сходится к белому шуму интенсивности ν при $\alpha\to\infty$. Спектральная плотность этой случайной функции определяется формулой примера 11 при $D=\nu\alpha/2$:

$$s_x(\omega)=\frac{\nu}{2\pi}\,\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}.$$

Отсюда видно, что при $\alpha\to\infty$ спектральная плотность $s_x(\omega)$ стремится к постоянной величине $s_0=\nu/2\pi$.

Согласно приведенным формулам интервал корреляции случайного процесса с показательной ковариационной функцией (3) и интенсивность аппроксимирующего его белого шума определяются формулами $\tau_к=1/\alpha$, $\nu=2D/\alpha$. Для ковариационной функции (5), $k_x(\tau)=De^{-\alpha|\tau|}(\cos\omega_0\tau+\gamma\sin\omega_0|\tau|)$, имеем

$$\tau_k=(\gamma\omega_0+\alpha)/\beta^2,\quad \nu=2D(\gamma\omega_0+\alpha)/\beta^2,\quad \beta^2=\omega_0^2+\alpha^2.$$

Отсюда, в частности, при $\gamma=0$, $\tau_k=\alpha/\beta^2$, $\nu=2D\alpha/\beta^2$ для показательно-косинусной ковариационной функции (4). Для ковариационной функции (5) при $\gamma=\alpha/\omega_0$ имеем $\tau_к=2\alpha/\beta^2$, $\nu=4D\alpha/\beta^2$.

Пример 19. Предыдущий пример иллюстрирует отмеченную закономерность — уменьшение интервала корреляции при расширении полосы частот, в которой спектральная плотность заметно отлична от нуля. Интересно вывести зависимость между этими двумя величинами. С этой целью рассмотрим случайные процессы с полосовыми спектрами. Так обычно называются стационарные случайные процессы, у которых спектральная плотность постоянна в ограниченной полосе частот и равна нулю вне этой полосы. Предположим, что спектральная плотность действительной стационарной случайной функции постоянна и равна s_0 в интервале частот $(\omega_1,\ \omega_2)$ и соответственно в интервале $(-\omega_2,\ -\omega_1)$ и равна нулю вне этого интервала:

$$s_x(\omega)=\begin{cases} s_0 & \text{при}\quad \omega_1<\omega<\omega_2\ \text{и}\ -\omega_2<\omega<-\omega_1,\\ 0 & \text{при}\quad \omega<\omega_1\ \text{и}\ \omega>\omega_2.\end{cases}$$

Подставив это выражение в (16), находим

$$k_x(\tau)=s_0\left[\int\limits_{-\omega_2}^{-\omega_1}e^{i\omega\tau}d\omega+\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2}e^{i\omega\tau}d\omega\right]=2s_0\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2}\cos\omega\tau\,d\omega=$$

$$=\frac{2s_0}{\tau}(\sin\omega_2\tau-\sin\omega_1\tau)=\frac{4s_0}{\tau}\sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\tau\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\tau.$$

В частном случае, когда $\omega_1=0$, $\omega_2=\Omega$, полученная формула принимает вид

$$k_x(\tau)=\frac{2s_0}{\tau}\sin\Omega\tau.$$

Вычислим интервал корреляции процесса с полосовым спектром и интенсивность аппроксимирующего его белого шума:

$$\tau_к=2\pi/\Omega,\qquad \nu=2\pi s_0.$$

Таким образом, первая из этих формул показывает, что интервал корреляции процесса с полосовым спектром обратно пропорционален ширине полосы частот.

§ 4.3. Линейные операции над стационарными случайными функциями

4.3.1. Спектральные плотности производных. В п. 4.1.4 было показано, что производная с. к. дифференцируемой стационарной случайной функции стационарна. Найдем спектральную плотность с. к. производной порядка p стационарной случайной функции $X(t)$. Согласно (1) ковариационная функция производной $X^{(p)}(t)$ определяется формулой

$$k_{x^{(p)}}(\tau) = (-1)^p k_x^{(2p)}(\tau).$$

► Продифференцировав формулу (16) по τ $2p$ раз, находим

$$k_x^{(2p)}(\tau) = i^{2p} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2p} s_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = (-1)^p \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2p} s_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Подставив это выражение в предыдущую формулу, будем иметь

$$k_{x^{(p)}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2p} s_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

С другой стороны, ковариационная функция производной $X^{(p)}(t)$ выражается через ее спектральную плотность $s_{x^{(p)}}(\omega)$ формулой (16). Следовательно,

$$k_{x^{(p)}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{x^{(p)}}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Сравнив эту формулу с предыдущей, находим

$$s_{x^{(p)}}(\omega) = \omega^{2p} s_x(\omega). \blacktriangleleft \tag{22}$$

Таким образом, *дифференцирование стационарной случайной функции приводит к умножению ее спектральной плотности на* ω^2.

Пример 20. Спектральная плотность с. к. производной случайной функции примера 12 согласно (22) определяется формулой

$$s_{x'}(\omega) = \omega^2 s_x(\omega) = \frac{2D}{\pi} \frac{\alpha^3\omega^2}{(\alpha^2+\omega^2)^2}.$$

Пример 21. Спектральная плотность с. к. производной случайной функции примера 15 в соответствии с (22) определяется формулой

$$s_{x'}(\omega) = \omega^2 s_x(\omega) = \frac{2D}{\pi} \frac{\alpha\beta^2\omega^2}{\beta^4 + 2(\alpha^2 - \omega_0^2)\omega^2 + \omega^4}, \quad \beta^2 = \alpha^2 + \omega_0^2.$$

Пример 22. Спектральная плотность второй с. к. производной случайной функции примера 13 определяется формулой

$$s_{x''}(\omega) = \omega^4 s_x(\omega) = \frac{8D}{3\pi} \frac{\alpha^5\omega^4}{(\alpha^2+\omega^2)^3}.$$

Легко понять, что признаком существования с. к. производной порядка p стационарной случайной функции $X(t)$ служит интегрируемость произведения ее спектральной плотности $s_x(\omega)$ на ω^{2p}. В случае рациональной спектральной плотности $s_x(\omega)$ *с. к. производная* $X^{(p)}(t)$ *существует тогда и только тогда, когда степень знаменателя* $s_x(\omega)$ *превышает степень числителя не меньше, чем на* $2p+2$.

4.3.2. Стационарные линейные системы со случайными входными сигналами. Рассмотрим устойчивую стационарную линейную систему с передаточной функцией $\Phi(s)$, входным сигналом которой служит стационарный случайный процесс $X(t)$ со спектральной плотностью $s_x(\omega)$. Докажем, что выходной сигнал $Y(t)$ этой системы в установившемся режиме, т. е. при бесконечно долгом (практически достаточно долгом) действии входного сигнала, представляет собой стационарную случайную функцию, и найдем его спектральную плотность.

▶ Представим случайный процесс $X(t)$ спектральным разложением (19):

$$X(t)=m_x(t)+\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,dW(\omega).$$

На основании принципа суперпозиции этому спектральному разложению соответствует спектральное разложение выходного сигнала

$$Y(t)=m_y(t)+\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,\Phi(i\omega)\,dW(\omega).$$

По формуле (3.15) находим ковариационную функцию случайной функции $Y(t)$:

$$\begin{aligned} K_y(t_1,\ t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t_1}\overline{e^{i\omega t_2}}\,\Phi(i\omega)\,s_x(\omega)\,\Phi(i\omega)^*\,d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t_1-t_2)}\,\Phi(i\omega)\,s_x(\omega)\,\Phi(i\omega)^*\,d\omega \end{aligned} \tag{23}$$

(в этом случае $\varphi(\omega)=e^{i\omega t_1}\Phi(i\omega)$, $\psi(\omega)=e^{i\omega t_2}\Phi(i\omega)$, $\nu(\omega)=s_x(\omega)$). Отсюда видно, что выходной сигнал рассматриваемой системы в установившемся режиме представляет собой стационарную случайную функцию времени.

Сравнив полученную формулу с (16), приходим к заключению, что спектральная плотность выходного сигнала системы $Y(t)$ определяется формулой

$$s_y(\omega)=\Phi(i\omega)\,s_x(\omega)\,\Phi(i\omega)^*. \blacktriangleleft \tag{24}$$

В частном случае одномерной системы формула (24) принимает вид
$$s_y(\omega) = |\Phi(i\omega)|^2 s_x(\omega). \tag{25}$$

Легко видеть, что полученная в п. 4.3.1 формула (22) для спектральных плотностей производных стационарной случайной функции представляет собой частный случай формулы (25) при $\Phi(i\omega) = (i\omega)^p$. Это вполне понятно, так как производную $X^{(p)}(t)$ можно рассматривать как выходной сигнал системы, осуществляющей p-кратное дифференцирование входного сигнала $X(t)$. В соответствии с результатами пп. 1.2.9 и 1.3.6 такая система стационарна и ее передаточная функция равна $\Phi(s) = s^p$.

Найдем теперь взаимную ковариационную функцию входного и выходного сигналов системы. По той же формуле (3.15) находим
$$K_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t_1 - t_2)} s_x(\omega)\Phi(i\omega)^* d\omega$$

(в данном случае $\varphi(\omega) = e^{i\omega t_1}$, $\psi(\omega) = e^{i\omega t_2}\Phi(i\omega)$, $\nu(\omega) = s_x(\omega)$). Отсюда видно, что входной и выходной сигналы в установившемся режиме стационарно связаны. Из (16) следует, что взаимная спектральная плотность входного и выходного сигналов системы определяется формулой *)
$$s_{xy}(\omega) = s_x(\omega)\Phi(i\omega)^*. \tag{26}$$

Формулы (24)—(26) справедливы только для устойчивых стационарных систем, работающих в установившемся режиме, т. е. при бесконечно долго действующем стационарном входном сигнале. Практически формулы (24)—(26) применимы, когда время действия входного сигнала превышает время переходного процесса. Следует заметить, что если система описывается дифференциальным уравнением и, следовательно, ее передаточная функция рациональна, то выходной сигнал может быть стационарной случайной функцией и при любом времени работы системы при специальных начальных условиях. А именно, случайное начальное значение $Y(t_0) = Y_0$ следует выбрать так, чтобы ковариационная матрица случайного вектора $Z(t) = [X(t)^T Y(t)^T]^T$ не зависела от t. Для этого достаточно взять случайное начальное значение Y_0, ковариационная матрица которого равна
$$K_{y_0} = k_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(i\omega) s_x(\omega)\Phi(i\omega)^* d\omega,$$

*) Чтобы применить формулу (16) для вычисления взаимной спектральной плотности, следует рассмотреть составную векторную случайную функцию $Z(t) = [X(t)^T Y(t)^T]^T$ и написать формулу (16) для соответствующих блочных матричных функций $k_z(\tau)$ и $s_z(\omega)$.

а взаимная ковариационная матрица которого с начальным значением входного сигнала $X(t_0)=X_0$ равна

$$K_{x_0y_0}=k_{xy}(0)=\int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega)\,\Phi(i\omega)^*\,d\omega.$$

Однако вероятность осуществления этих начальных условий в реальных системах практически равна нулю.

Пример 23. Найти спектральную плотность выходного сигнала Y стационарной линейной системы с одним выходом и двумя входными сигналами X_1 и X_2, представляющими собой стационарные и стационарно связанные случайные функции. Найти также взаимные спектральные плотности выходного сигнала со входными сигналами.

Пользуясь формулой (24), находим спектральную плотность случайной функции Y на выходе системы:

$$s_y(\omega)=[\Phi_{11}(i\omega)\;\;\Phi_{12}(i\omega)]\,s_x(\omega)\,[\overline{\Phi_{11}(i\omega)}\;\;\overline{\Phi_{12}(i\omega)}]^{\mathrm{T}}=$$
$$=s_{11}^x(\omega)\,|\Phi_{11}(i\omega)|^2+s_{12}^x(\omega)\,\Phi_{11}(i\omega)\,\overline{\Phi_{12}(i\omega)}+$$
$$+s_{21}^x(\omega)\,\Phi_{12}(i\omega)\,\overline{\Phi_{11}(i\omega)}+s_{22}^x(\omega)\,|\Phi_{12}(i\omega)|^2,$$

где $s_{11}^x(\omega)$, $s_{22}^x(\omega)$ — спектральные плотности входных сигналов X_1 и X_2, $s_{12}^x(\omega)$ и $s_{21}^x(\omega)=\overline{s_{12}^x(\omega)}$ — их взаимные спектральные плотности. Для определения взаимных спектральных плотностей входных сигналов с выходным воспользуемся формулой (26):

$$s_{xy}(\omega)=[s_{x_1y}(\omega)\;s_{x_2y}(\omega)]^{\mathrm{T}}=s_x(\omega)\,[\overline{\Phi_{11}(i\omega)}\;\;\overline{\Phi_{12}(i\omega)}]^{\mathrm{T}},$$

или, в скалярной форме,

$$s_{x_1y}(\omega)=s_{11}^x(\omega)\,\overline{\Phi_{11}(i\omega)}+s_{12}^x(\omega)\,\overline{\Phi_{12}(i\omega)},$$
$$s_{x_2y}(\omega)=s_{21}^x(\omega)\,\overline{\Phi_{11}(i\omega)}+s_{22}^x(\omega)\,\overline{\Phi_{12}(i\omega)}.$$

В частном случае, когда входные сигналы X_1 и X_2 не коррелированы $s_{12}^x(\omega)=s_{21}^x(\omega)=0$ и полученные формулы принимают вид

$$s_y(\omega)=s_{11}^x(\omega)\,|\Phi_{11}(i\omega)|^2+s_{22}^x(\omega)\,|\Phi_{12}(i\omega)|^2,$$
$$s_{x_1y}(\omega)=s_{11}^x(\omega)\,\overline{\Phi_{11}(i\omega)},\quad s_{x_2y}(\omega)=s_{22}^x(\omega)\,\overline{\Phi_{12}(i\omega)}.$$

4.3.3. Вычисление дисперсий и ковариаций компонент сигналов. В задачах практики часто можно ограничиться первыми и вторыми моментами значений компонент выходного сигнала системы в каждый данный момент времени t. Для вычисления дисперсий и ковариаций компонент выходного сигнала устойчивой стационарной системы, работающей в установившемся режиме под действием стационарного входного сигнала (практически при достаточно долгом действии входного сигнала), в каждый данный момент времени t достаточно положить в формуле (23), определяющей ковариационную функцию выходного сигнала $t_1=t_2=t$. Тогда получим следующую формулу для ковариационной матрицы значения выходного сигнала в момент t:

$$k_y(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(i\omega)\,s_x(\omega)\,\Phi(i\omega)^*\,d\omega. \tag{27}$$

Для нахождения дисперсий и ковариаций компонент выходного сигнала по формуле (27) в задачах практики приходится вычислять интегралы от рациональных функций. Для вычисления таких интегралов удобно пользоваться формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_0 (i\omega)^{2n-2}+b_1 (i\omega)^{2n-3}+\ldots+b_{2n-1} (i\omega)+b_{2n-2}}{|a_0 (i\omega)^n+a_1 (i\omega)^{n-1}+\ldots+a_{n-1} (i\omega)+a_n|^2} d\omega=(-1)^{n+1} \frac{\pi}{a_0} \frac{D_n}{\Delta_n}, \tag{28}$$

где

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_n=\begin{vmatrix} b_0 & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ b_2 & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{2n-2} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

$$c_{pq}=a_{2p-q} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant 2p-q \leqslant n,$$
$$c_{pq}=0 \quad \text{при} \quad 2p-q<0 \quad \text{или} \quad 2p-q>n.$$

Для применения формулы (28) необходимо представить числитель в (27) в виде полинома относительно $i\omega$, а знаменатель выразить как квадрат модуля полинома относительно $i\omega$ с положительными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Формулой (28) можно также пользоваться и для вычисления ковариаций компонент входного сигнала с компонентами выходного сигнала по формуле

$$k_{xy}(0)=\int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) \Phi(i\omega)^* d\omega. \tag{29}$$

Пример 24. Найти дисперсию случайной функции, спектральная плотность которой определяется формулой примера 11. По формуле (27) находим

$$D_x=\frac{D\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\alpha^2+\omega^2}=\frac{D\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{|i\omega+\alpha|^2}.$$

В данном случае $n=1$, $a_0=1$, $a_1=\alpha$, $b_0=1$, $c_{11}=a_1=\alpha$, $\Delta_1=c_{11}=\alpha$, $D_1=b_0=1$ и формула (28) дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{|i\omega+\alpha|^2}=\frac{\pi}{\alpha}.$$

Подставив это выражение в предыдущую формулу, получаем, как и следовало ожидать, $D_x=D$.

Пример 25. Вычислить дисперсию случайной функции, спектральная плотность которой определяется формулой примера 15.

Имея в виду, что

$$\begin{aligned}\beta^4+2(\alpha^2-\omega_0^2)\omega^2+\omega^4&=[\alpha^2+(\omega-\omega_0)^2][\alpha^2+(\omega+\omega_0)^2]= \\ &=|\alpha+i(\omega-\omega_0)|^2|\alpha+i(\omega+\omega_0)|^2=|\alpha^2+i\alpha(\omega+\omega_0)+ \\ &+i\alpha(\omega-\omega_0)+i^2(\omega-\omega_0)(\omega+\omega_0)|^2=|\alpha^2+2\alpha(i\omega)+ \\ &+i^2(\omega^2-\omega_0^2)|^2=|(i\omega)^2+2\alpha(i\omega)+\alpha^2+\omega_0^2|^2=|(i\omega)^2+2\alpha(i\omega)+\beta^2|^2,\end{aligned}$$
$$(\alpha+\gamma\omega_0)\beta^2+(\alpha-\gamma\omega_0)\omega^2=(\alpha+\gamma\omega_0)\beta^2-(\alpha-\gamma\omega_0)(i\omega)^2,$$

находим

$$D_x=\frac{D}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(\alpha+\gamma\omega_0)\beta^2+(\alpha-\gamma\omega_0)\omega^2}{\beta^4+2(\alpha^2-\omega_0^2)\omega^2+\omega^4}\,d\omega=$$

$$=\frac{D}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{-(\alpha-\gamma\omega_0)(i\omega_0)^2+(\alpha+\gamma\omega_0)\beta^2}{|(i\omega)^2+2\alpha(i\omega)+\beta^2|^2}\,d\omega.$$

В данном случае $n=2$, $a_0=1$, $a_1=\alpha$, $a_2=\beta^2$, $b_0=-\alpha+\gamma\omega_0$, $b_1=(\alpha+\gamma\omega_0)\beta^2$, $c_{11}=a_1=2\alpha$, $c_{12}=a_0=1$, $c_{21}=0$, $c_{22}=a_2=\beta^2$,

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2\alpha & 1\\ 0 & \beta^2\end{vmatrix}=2\alpha\beta^2,\qquad D_2=\begin{vmatrix}-\alpha+\gamma\omega_0 & 1\\ (\alpha+\gamma\omega_0)\beta^2 & \beta^2\end{vmatrix}=-2\alpha\beta^2.$$

Следовательно, согласно (28)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{-(\alpha-\gamma\omega_0)(i\omega)^2+(\alpha+\gamma\omega_0)\beta^2}{|(i\omega)^2+2\alpha(i\omega)+\beta^2|^2}\,d\omega=\frac{-\pi}{1}\cdot\frac{-2\alpha\beta^2}{2\alpha\beta^2}=\pi.$$

Подставив это выражение в формулу для D_x, получаем, как и следовало ожидать, $D_x=D$.

Пример 26. Ковариация значений стационарных и стационарно связанных действительных случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ примера 16 в данный момент t равна нулю, так как в этом случае $n=2$, $b_0=b_2=0$ и, следовательно,

$$D_2=\begin{vmatrix}b_0 & c_{12}\\ b_2 & c_{22}\end{vmatrix}=0.$$

ЗАДАЧИ

4.1. Показать, что для стационарных случайных процессов с ковариационными функциями

$$De^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|)\quad\text{и}\quad De^{-\alpha|\tau|}\left(1+\alpha|\tau|+\frac{\alpha^2}{3}\tau^2\right)$$

интенсивности эквивалентного белого шума соответственно равны $4D/\alpha$ и $16D/3\alpha$. Вычислить интервалы корреляции.

4.2. Показать, что для процесса, приводимого к стационарному и определяемого формулой (6), интенсивность эквивалентного белого шума и время корреляции равны

$$\nu(t)=b_1(t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}b_1(t+\tau)\,k_x(\tau)\,d\tau,\qquad \tau_{\text{к}}=\frac{1}{2}\max_t\frac{\nu(t)}{b_1^2(t)\,k_x(0)}.$$

Вычислить $\nu(t)$ и $\tau_{\text{к}}$ для процесса, определяемого формулой (9).

4.3. Показать, что для процесса в примере 4.10 интенсивность эквивалентного белого шума и время корреляции равны

$$\nu(t)=\frac{4D\alpha t}{4\alpha^2t^2-\mu^2}\,e^{2\mu t},\qquad \tau_{\text{к}}=\max_t\frac{2\alpha t}{4\alpha^2t^2-\mu^2}\qquad (t>\mu/2\alpha).$$

4.4. В условиях примеров 1.3—1.5, 1.12—1.14 найти спектральную плотность $s_z(\omega)$, взаимную спектральную плотность $s_{xz}(\omega)$, дисперсию D_z и ковариацию K_{xz}, предполагая, что входной сигнал представляет собой стационарный случайный процесс с одной из типовых ковариационных функций (п. 4.1.5).

4.5. Показать, что для двумерной стационарной системы задачи 1.1 при некоррелированных входных сигналах $X_1(t)$ и $X_2(t)$ со спектральными плотностями $s_1(\omega)$ и $s_2(\omega)$ элементы спектральной матрицы $s_z(\omega)$ процесса $Z(t)=[Z_1(t)\ Z_2(t)]^{\text{т}}$ определяются формулами

$$\begin{aligned}
s_{11}(\omega)&=s_1(\omega)\,|\Phi_{11}(i\omega)|^2+s_2(\omega)\,|\Phi_{12}(i\omega)|^2,\\
s_{12}(\omega)&=s_1(\omega)\,\Phi_{11}(i\omega)\,\overline{\Phi_{21}(i\omega)}+s_2(\omega)\,\Phi_{12}(i\omega)\,\overline{\Phi_{22}(i\omega)},\\
s_{21}(\omega)&=s_1(\omega)\,\overline{\Phi_{11}(i\omega)}\,\Phi_{21}(\omega)+s_2(\omega)\,\overline{\Phi_{12}(\omega)}\,\Phi_{22}(i\omega),\\
s_{22}(\omega)&=s_1(\omega)\,|\Phi_{21}(i\omega)|^2+s_2(\omega)\,|\Phi_{22}(i\omega)|^2.
\end{aligned}$$

Найти взаимную спектральную плотность процессов $X(t)=[X_1(t)\ X_2(t)]^{\text{т}}$ и $Z(t)$.

4.6. Проверить, что для двумерной стационарной системы задачи 1.2 при стационарном входном сигнале $X(t)=[X_1(t)\ X_2(t)]^{\text{т}}$ со спектральной плотностью $s(\omega)$ элементы матриц $s_z(\omega)$ и $s_{xz}(\omega)$ определяются формулами

$$\begin{aligned}
s_{z_1z_1}(\omega)&=s_{11}(\omega)\,|\psi_1(\omega)|^2+s_{22}(\omega)\,|\psi_2(\omega)|^2+\\
&\qquad+s_{12}(\omega)\,[\psi_1(\omega)\,\overline{\psi_2(\omega)}+\psi_2(\omega)\,\overline{\psi_1(\omega)}],\\
s_{z_1z_2}(\omega)&=-s_{11}(\omega)\,\psi_1(\omega)\,\overline{\psi_2(\omega)}+s_{22}(\omega)\,\psi_2(\omega)\,\overline{\psi_1(\omega)}+\\
&\qquad+s_{12}(\omega)\,(|\psi_1(\omega)|^2-|\psi_2(\omega)|^2),\\
s_{z_2z_1}(\omega)&=-s_{11}(\omega)\,\psi_2(\omega)\,\overline{\psi_1(\omega)}+s_{12}(\omega)\,(|\psi_1(\omega)|^2-|\psi_2(\omega)|^2),\\
s_{z_2z_2}(\omega)&=s_{11}(\omega)\,|\psi_2(\omega)|^2+s_{22}(\omega)\,|\psi_1(\omega)|^2-s_{12}(\omega)\,[\overline{\psi_1(\omega)}\,\psi_2(\omega)+\psi_1(\omega)\,\overline{\psi_2(\omega)}],\\
s_{x_1z_1}(\omega)&=s_{11}(\omega)\,\overline{\psi_1(\omega)}+s_{12}(\omega)\,\overline{\psi_2(\omega)},\\
s_{x_1z_2}(\omega)&=-s_{11}(\omega)\,\overline{\psi_2(\omega)}+s_{12}(\omega)\,\overline{\psi_1(\omega)},\\
s_{x_2z_1}(\omega)&=s_{12}(\omega)\,\overline{\psi_1(\omega)}+s_{22}(\omega)\,\overline{\psi_2(\omega)},\\
s_{x_2z_2}(\omega)&=-s_{12}(\omega)\,\overline{\psi_2(\omega)}+s_{22}(\omega)\,\overline{\psi_1(\omega)},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\psi_1(\omega)&=\left[\varepsilon_0\left(\omega_0^2+\varepsilon_0^2+\omega^2\right)+i\omega\left(\omega_0^2-\varepsilon_0^2-\omega^2\right)\right]c^2(\omega),\\
\psi_2(\omega)&=\left[\left(\omega_0^2+\varepsilon_0^2-\omega^2\right)-2\varepsilon_0 i\omega\right]c^2(\omega)\,\omega_0,\\
c^{-2}(\omega)&=\left(\omega_0^2+\varepsilon_0^2-\omega^2\right)^2+4\varepsilon_0^2\omega^2.
\end{aligned}$$

4.7. Показать, что для системы третьего порядка задачи 1.7 при $a=-2\varepsilon I$, $b=I$, $s_x(\omega)=sI$, где I — 3×3-единичная матрица, спектральная плотность выходного сигнала равна

$$s_z(\omega)=sI/(\omega^2+4\varepsilon^2).$$

4.8. Показать, что в условиях задачи 1.8 при $X=\left[0\ 0\ \sqrt{2D\alpha}\right]^{\text{т}}V$, где V — белый шум единичной интенсивности, спектральная плотность выходного сигнала равна

$$s_z(\omega)=\frac{2D\alpha}{(2\pi)^3}\begin{bmatrix}|\Phi_{13}(i\omega)|^2 & \Phi_{13}(i\omega)\,\overline{\Phi_{23}(i\omega)} & \Phi_{13}(i\omega)\,\overline{\Phi_{33}(i\omega)}\\ \Phi_{23}(i\omega)\,\overline{\Phi_{13}(i\omega)} & |\Phi_{23}(i\omega)|^2 & \Phi_{23}(i\omega)\,\overline{\Phi_{33}(i\omega)}\\ \Phi_{33}(i\omega)\,\overline{\Phi_{13}(i\omega)} & \Phi_{33}(i\omega)\,\overline{\Phi_{23}(i\omega)} & |\Phi_{33}(i\omega)|^2\end{bmatrix}.$$

4.9 Для системы с двумя степенями свободы задачи 1.10 при векторе обобщенных сил, взятом в виде стационарного процесса со спектральной плотностью $s_Q(\omega)$, показать, что элементы матриц $s_q(\omega)$ и $s_{Qq}(\omega)$ определяются формулами

$$s_{q_h q_l}(\omega)=s_{11}(\omega)\Phi_{h1}(i\omega)\overline{\Phi_{l1}(i\omega)}+s_{22}(\omega)\Phi_{h2}(i\omega)\overline{\Phi_{l2}(i\omega)}+$$
$$+s_{12}(\omega)\left[\Phi_{h1}(i\omega)\overline{\Phi_{l2}(i\omega)}+\Phi_{h2}(i\omega)\overline{\Phi_{l1}(i\omega)}\right]\quad (h,\ l=1,\ 2).$$
$$s_{Q_1 q_h}(\omega)=s_{11}(\omega)\overline{\Phi_{h1}(i\omega)}+s_{12}(\omega)\overline{\Phi_{h2}(i\omega)},$$
$$s_{Q_2 q_h}(\omega)=s_{12}(\omega)\overline{\Phi_{h1}(i\omega)}+s_{22}(\omega)\overline{\Phi_{h2}(i\omega)}\quad (h=1,\ 2).$$

4.10. Найти спектральную плотность $s_z(\omega)$ и ковариационную матрицу K_z векторного стационарного процесса $Z(t)$ в стационарной системе

$$\begin{bmatrix}\dot Z_1\\ \dot Z_2\\ \dot Z_3\\ \dot Z_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -\omega_0^2 & -2\varepsilon & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -\omega_1^2 & -2\varepsilon_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z_1\\ Z_2\\ Z_3\\ Z_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ q_1\\ q_2\end{bmatrix}V,$$

где V — белый шум единичной интенсивности, q_1, q_2, ω_0, ω_1, ε, ε_1 ($\varepsilon,\ \varepsilon_1>0$) — некоторые постоянные коэффициенты.

4.11. Найти спектральную плотность $s_z(\omega)$ и дисперсию D_z вертикальных колебаний кузова автомобиля в линейном приближении в задаче 1.14 при известной спектральной плотности микропрофиля дороги $s_l(\omega)=s(\rho)/v$, $\rho=2\pi/\sigma$ [126].

4.12. Найти спектральную плотность $s_x(\omega)$ и дисперсию D_x стационарных случайных колебаний объекта с динамическим гасителем колебаний в задаче 1.15 под действием возмущающей силы со спектральной плотностью $s_F(\omega)$.

4.13. Для стационарной линейной системы задачи 1.9 с тремя степенями свободы при $A=I$, $C=\omega_0^2 I$, $B=2\varepsilon I$, $B'=C'=0$, $s_Q(\omega)=(2\pi)^3 sI$ (I — единичная 3×3-матрица) вывести формулы для спектральной плотности $s_z(\omega)$ стационарного процесса

$$Z(t)=[q_1(t)\ q_2(t)\ q_3(t)\ \dot q_1(t)\ \dot q_2(t)\ \dot q_3(t)]^{\mathrm T}.$$

Найти также ковариационную матрицу K_z.

4.14. Вывести формулы для спектральных и взаимных спектральных плотностей $s_z(\omega)$ и $s_{xz}(\omega)$ в системе задачи 1.11 при $B=2\varepsilon A$ и $B=\eta C$, считая известной спектральную плотность $s_x(\omega)$ входного сигнала.

4.15. Показать, что для линейной стационарной системы с передаточной функцией

$$\Phi(s)=\frac{d_1 s+d_0}{c_3 s^3+c_2 s^2+c_1 s+c_0}$$

в случае входного сигнала в виде белого шума с интенсивностью ν дисперсия выходного сигнала равна

$$D_y=\nu\frac{c_0 d_1^2+c_2 d_0^2}{2c_0(c_1 c_2-c_0 c_3)}.$$

Вычислить также ковариацию k_{xy}.

4.16. Показать, что ковариационная функция $k_y(\tau)$ и спектральная плотность $s_y(\omega)$ случайной функции

$$Y(t)=X_1(t)\,X_2(t),$$

где $X_1(t)$ и $X_2(t)$ — компоненты двумерного действительного нормально распределенного случайного процесса с известной ковариационной функцией и спектральной плотностью, вычисляются по формулам

$$k_y(\tau)=k_1(\tau)\,k_2(\tau)+k_{12}(\tau)\,k_{21}(\tau)+m_1^2\,k_2(\tau)+m_2^2\,k_1(\tau),$$

$$s_y(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} s_1(\omega-\zeta)\,s_2(\zeta)\,d\zeta+\int\limits_{-\infty}^{\infty} s_{12}(\omega-\zeta)\,s_{21}(\zeta)\,d\zeta+m_1^2 s_2(\omega)+m_2^2\,s_1(\omega).$$

Дать обобщение на случай $Y(t)=X_1^{\mathrm{T}}(t)\,X_2(t)$, где $X_1(t)$ и $X_2(t)$ — n-мерные векторы.

4.17. Найти ковариационную функцию и спектральную плотность процесса $Y(t)$ в задаче 2.17 для случая нормально распределенного стационарного случайного процесса $X(t)$ с известной ковариационной функцией и спектральной плотностью.

4.18. Вывести формулы Райса [112, 114] для математического ожидания числа пересечений постоянного уровня a и числа стационарных точек за время T для случайного стационарного нормально распределенного процесса $X(t)$ с математическим ожиданием m_x и ковариационной функцией $k_x(\tau)$:

$$m_y=\frac{T}{\pi}\sqrt{-\frac{k_x''(0)}{k_x(0)}}\,e^{-\frac{(m_x-a)^2}{k_x(0)}},\qquad m_{y_1}=\frac{T}{\pi}\sqrt{-\frac{k_x^{\mathrm{IV}}(0)}{k_x''(0)}}.$$

У к а з а н и е. Воспользоваться формулами задач 2.20 и 2.21.

ГЛАВА 5

ТЕОРИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 5.1. Приведение уравнений системы к стохастическим уравнениям

5.1.1. О принципиальной возможности замены случайной функции в дифференциальном уравнении белым шумом. Из сказанного в пп. 1.4.1 и 2.2.5 и из дальнейших рассуждений о белом шуме ясно, что белый шум не может входить ни в какое уравнение, полученное из практической задачи. Все случайные функции в уравнениях, описывающих реальные явления, отличаются от белого шума. Тем не менее весьма заманчиво попытаться применить хорошо развитые методы исследования случайных процессов, определяемых стохастическими дифференциальными уравнениями, для изучения различных технических и физических систем. Иными словами, целесообразно пользоваться стохастическими дифференциальными уравнениями для построения подходящих математических моделей реальных систем.

Ясно, что о непосредственной замене случайной функции в дифференциальном уравнении белым шумом можно говорить только в том случае, когда эта случайная функция входит в уравнение линейно. Поэтому рассмотрим сначала систему, состояние которой, характеризуемое вектором Z, описывается уравнением

$$\dot{Z} = a(Z, t) + b(Z, t) X, \tag{1}$$

где $a(z, t)$ и $b(z, t)$ — известные функции вектора z и времени t. Функция $a(z, t)$ представляет собой вектор той же размерности p, что и вектор состояния системы Z, а $b(Z, t)$ является $p \times q$-матрицей, где q — размерность векторной случайной функции $X(t)$. Если интервал корреляции случайной функции $X(t)$ достаточно мал, то ее можно считать практически белым шумом (п. 2.2.5). Возникает вопрос: в каком смысле следует понимать стохастическое дифференциальное уравнение, полученное путем формальной замены случайной функции $X(t)$ белым шумом? Ясно, что это уравнение в общем случае нельзя считать уравнением Ито. Чтобы понять это, заметим, что на основании определений интеграла Ито и уравнения Ито значение коэффициента при белом шуме в уравнении Ито в данный момент времени t не зависит от значения белого шума в тот же момент (точнее, случайные величины

$b(Z(t), t)$ и $dW(t)$ при данном t независимы). Следовательно,

$$Mb(Z(t), t)V(t) = Mb(Z(t), t)MV(t) = 0.$$

В то же время, если случайная функция $X(t)$ в (1) не является белым шумом, то в общем случае $Mb(Z(t), t)X(t) \neq 0$. Значит, приняв полученное уравнение за уравнение Ито, мы неизбежно вводим во все расчеты ошибку. Из интуитивных соображений можно прийти к выводу, что стохастическое дифференциальное уравнение, полученное заменой случайной функции $X(t)$ в (1) белым шумом, следует понимать как уравнение Стратоновича (т. е. уравнение с 1/2-дифференциалом согласно определению в п. 3.6.4). Приведем эти соображения. При данном t все значения $X(\tau)$ случайного процесса $X(t)$, соответствующие $\tau < t$, участвуют в формировании состояния системы $Z(t)$ в момент t, а все значения $X(\tau)$, соответствующие $\tau > t$, не могут участвовать в формировании значения $Z(t)$ в момент t (как бы «половина» корреляции случайной функции $X(t)$ с ее значениями при других t относится к прошлому и, следовательно, приводит к зависимости $Z(t)$ от $X(t)$, а другая «половина» относится к будущему). Отсюда можно сделать вывод, что при замене $X(t)$ белым шумом $V(t)$ одна «половина» белого шума, которую можно обозначить $V(t-0)/2$, должна участвовать в формировании $Z(t)$, а другая «половина» $V(t+0)/2$ не должна участвовать в формировании $Z(t)$. Иными словами, $X(t)$ должна быть заменена в (1) величиной $[V(t-0)+V(t+0)]/2$. А это соответствует уравнению Стратоновича. При этом

$$Mb(Z(t), t)V(t) = \frac{1}{2}Mb(Z(t), t)V(t-0),$$

и той ошибки, которая возникает, если считать полученное стохастическое уравнение уравнением Ито, не будет. Однако это чисто математическое рассуждение не увязано с тем фактом, что любое уравнение служит только моделью системы, а не описывает реальный процесс. Если учесть другие допущения, принятые при построении модели, то этот вывод может оказаться неверным. В этом мы убедимся в п. 5.1.3.

5.1.2. Уравнение Ито, соответствующее данному уравнению. Попытаемся вывести уравнение Ито, которым следует заменить уравнение (1) при замене случайной функции $X(t)$ белым шумом. При этом ограничимся случаем скалярного уравнения (1) и скалярной случайной функции $X(t)$.

▶ Пусть $W(t)$ — скалярный винеровский процесс интенсивности $\nu(t)$. Разобьем интервал $(0, \infty)$ точками $t_0 = 0$, $t_1 < t_2 < \ldots$, на равные отрезки длины $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Образуем ступенчатый случайный процесс

$$X_\Delta(t) = [W(t_k) - W(t_{k-1})]/\Delta t \quad \text{при} \quad t \in (t_{k-1}, t_k]. \qquad (2)$$

С. к. интеграл от этого процесса по интервалу $(0, t]$ определяется очевидной формулой:

$$W_\Delta(t) = \int_0^t X_\Delta(\tau)\,d\tau = W(t_{k-1}) + [W(t_k) - W(t_{k-1})](t - t_{k-1})/\Delta t$$
$$\text{при } t \in (t_{k-1}, t_k] \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Ясно, что $W_\Delta(t_k) = W(t_k)$ при всех t_k $(k = 1, 2, \ldots)$ и, следовательно, приращения процесса $W_\Delta(t)$ на интервалах $(t_{k-1}, t_k]$ $(k = 1, 2, \ldots)$ независимы. Однако приращения $W_\Delta(t)$ на любых интервалах, пересекающихся с одним и тем же интервалом $(t_{k-1}, t_k]$, зависимы.

Математическое ожидание случайного процесса $X_\Delta(t)$, очевидно, равно нулю, а его ковариационная функция определяется формулой

$$K_\Delta(t, t') = DX_\Delta(t) = MX_\Delta^2(t) = M[W(t_k) - W(t_{k-1})]^2/\Delta t^2 =$$
$$= \frac{1}{\Delta t^2}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \nu(\tau)\,d\tau \approx \nu(t_{k-1})/\Delta t \quad \text{при} \quad t, t' \in (t_{k-1}, t_k]$$

и равна нулю, если точки t и t' принадлежат разным интервалам, $t \in (t_{k-1}, t_k]$, $t' \in (t_{l-1}, t_l]$, $k \neq l$. Таким образом,

$$K_\Delta(t, t') = \begin{cases} \nu(t_{k-1})/\Delta t & \text{при} \quad t, t' \in (t_{k-1}, t_k], \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

При этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_\Delta(t, t')\,dt' = \nu(t_{k-1}) \quad \text{при} \quad t \in (t_{k-1}, t_k],$$

и интервал корреляции случайного процесса $X_\Delta(t)$ равен

$$\tau_k = \frac{1}{2}\max_t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_\Delta(t, t')}{K_\Delta(t, t)}\,dt' = \frac{1}{2}\Delta t \qquad (\text{п. } 2.2.5).$$

Ясно, что при $\Delta t \to 0$ $W_\Delta(t) \to W(t)$, а $X_\Delta(t)$ стремится к белому шуму интенсивности $\nu(t)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (1) с $X(t) = X_\Delta(t)$:

$$\dot{U} = a(U, t) + b(U, t)X_\Delta(t). \tag{3}$$

Найдем с.к. предел определяемого этим уравнением процесса $U(t)$ при $\Delta t \to 0$. Для этого найдем приращение процесса, определяемого уравнением (3), на интервале $(t_{k-1}, t_k]$:

$$U(t_k) - U(t_{k-1}) =$$
$$= \int_{t_{k-1}}^{t_k} a(U_\tau, \tau)\,d\tau + \int_{t_{k-1}}^{t_k} b(U_\tau, \tau)\,d\tau\,[W(t_k) - W(t_{k-1})]/\Delta t. \tag{4}$$

Чтобы выделить из второго интеграла элемент интегральной суммы Ито, представим $b(U_\tau, \tau)$ в окрестности t_{k-1} формулой Тейлора, удержав в ней только малые первого порядка. Тогда будем иметь

$$b(U_\tau, \tau)=b(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})+b_\tau(U_{k-1}, t_{k-1})(\tau-t_{k-1})+ \\ +b_U(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})[U(\tau)-U(t_{k-1})].$$

Но на основании (3)

$$U(\tau)-U(t_{k-1})=a(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})(\tau-t_{k-1})+ \\ +b(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})[W(t_k)-W(t_{k-1})](\tau-t_{k-1})/\Delta t$$

с точностью до малых высших порядков. Следовательно,

$$b(U_\tau, \tau)=b(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})+[b_t(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})+ \\ +b_U(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})a(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})](\tau-t_{k-1})+ \\ +b_U(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})b(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})[W(t_k)-W(t_{k-1})](\tau-t_{k-1})/\Delta t.$$

Подставив это выражение в (4) и выполнив интегрирование, получим

$$U(t_k)-U(t_{k-1})= \\ =a(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})\Delta t+b(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})[W(t_k)-W(t_{k-1})]+ \\ +[b_t(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})+b_U(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})a(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})]\times \\ \times[W(t_k)-W(t_{k-1})]\frac{1}{\Delta t}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(\tau-t_{k-1})\,d\tau+ \\ +b_U(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})b(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})[W(t_k)-W(t_{k-1})]^2\times \\ \times\frac{1}{\Delta t^2}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(\tau-t_k)\,d\tau=a(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})\Delta t+ \\ +b(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})[W(t_k)-W(t_{k-1})]+ \\ +\frac{1}{2}[b_t(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})+b_U(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})a(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})][W(t_k)- \\ -W(t_{k-1})]\Delta t+\frac{1}{2}b_U(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})b(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})[W(t_k)-W(t_{k-1})]^2.$$

Дальше, так же как при выводе формулы Ито для дифференциала сложной функции в п. 3.5.2, приходим к выводу, что нужно учесть только математическое ожидание последнего слагаемого. Принимая во внимание, что

$$M[W(t_k)-W(t_{k-1})]^2=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\nu(\tau)\,d\tau\approx\nu(t_{k-1})\Delta t,$$

и отбрасывая слагаемые высшего порядка малости с $[W(t_k)-W(t_{k-1})]\Delta t$, получим окончательно

$$U(t_k)-U(t_{k-1})=\Big[a(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})+\frac{1}{2}b_U(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})\,b(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})\,\nu(t_{k-1})\Big]\Delta t+b(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})\,[W(t_k)-W(t_{k-1})].$$

Суммируя по k от 1 до N, положив $t=t_N$ и вспомнив, что $t_0=0$, найдем $U(t)=U(t_N)$:

$$U(t)=U(0)+\sum_{k=1}^{N}\Big[a(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})+\frac{1}{2}b_U(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})\,b(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})\,\nu(t_{k-1})\Big]\Delta t+\sum_{k=1}^{N}b(U_{t_{k-1}}, t_{k-1})\,[W(t_k)-W(t_{k-1})].$$

Отсюда на основании определения с. к. интеграла (п. 2.4.5) и интеграла Ито (п. 3.4.6), положив $Z(t)=\mathrm{l.i.m.}\,U(t)$, получаем при $\Delta t\to 0$

$$Z(t)=Z(0)+\int_0^t\Big[a(Z_\tau, \tau)+\frac{1}{2}b_z(Z_\tau, \tau)\times b(Z_\tau, \tau)\,\nu(\tau)\Big]d\tau+\int_0^t b(Z_\tau, \tau)\,dW(\tau), \qquad (5)$$

где второй интеграл представляет собой интеграл Ито.

Итак, при $\Delta t\to 0$ случайный процесс $U(t)$, определяемый дифференциальным уравнением (3), имеет с. к. пределом случайный процесс $Z(t)$, определяемый стохастическим интегральным уравнением Ито (5), или, что то же, стохастическим дифференциальным уравнением Ито:

$$\dot Z=a'(Z, t)+\frac{1}{2}b_z(Z, t)\,b(Z, t)\,\nu(t)+b(Z, t)\,V. \blacktriangleleft \qquad (6)$$

Этому уравнению Ито согласно формулам (3.84) и (3.85) соответствует уравнение Стратоновича

$$\dot Z=a(Z, t)+b(Z, t)\,V. \qquad (7)$$

Таким образом, мы доказали справедливость утверждения, к которому пришли эвристическим путем в п. 5.1.1.

Заметим, что как соображения п. 5.1.1, так и приведенное доказательство относятся только к случаю, когда функция $b(z, t)$ зависит от z. Если $b(z, t)$ не зависит от z, то, как было показано в п. 3.6.5, вопрос о том, в каком смысле следует понимать уравнение (7), не возникает. Все виды стохастических дифференциальных уравнений в этом случае совпадают и определяют один и тот же случайный процесс. В частности, все виды линейных стохастических дифференциальных уравнений совпадают и определяют один и тот же процесс.

Приведенные выводы легко распространяются на случай векторного уравнения (1).

5.1.3. О практической возможности замены случайной функции в дифференциальном уравнении белым шумом. Приведенный вывод, как уже было сказано в конце п. 5.1.1, чисто формален и получен без учета всех допущений, принятых при построении математической модели системы в виде дифференциального уравнения (1). А к построению математической модели любой системы всегда следует подходить комплексно, с одновременным учетом всех принимаемых допущений. При таком системном подходе приведенный вывод часто оказывается неверным. При замене случайной функции $X_\Delta(t)$ в (3) белым шумом во многих задачах практики полученное уравнение необходимо понимать не как уравнение Стратоновича, а как уравнение Ито, а иногда и как уравнение с θ-дифференциалом при каком-нибудь другом значении θ [54].

Пример 1. Если коэффициент $b(Z,\ t)$ при случайной функции $X_\Delta(t)$ в (3) формируется не безынерционно, а с помощью, например, апериодического звена с малой постоянной времени T, то модель (3) получается путем пренебрежения постоянной времени T из более точной модели, описываемой системой двух уравнений

$$\dot{Z}=a(Z,\ t)+Z_1X_\Delta,\quad T\dot{Z}_1=b(Z,\ t)-Z_1.$$

Повторив для этой системы уравнений предыдущие выкладки, получим вместо слагаемого

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} b(Z_\tau,\ \tau)\,d\tau\,[W(t_k)-W(t_{k-1})]/\Delta t$$

в (4) слагаемое

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} Z_1(\tau)\,d\tau\,[W(t_k)-W(t_{k-1})]/\Delta t=Z_1(t_{k-1})\,[W(t_k)-W(t_{k-1})]+$$

$$+\frac{1}{T}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left[b\left(Z_{t_{k-1}},\ t_{k-1}\right)-Z_1(t_{k-1})\right](\tau-t_{k-1})\,d\tau\times$$

$$\times[W(t_k)-W(t_{k-1})]/\Delta t=Z_1(t_{k-1})\,[W(t_k)-W(t_{k-1})]+$$

$$+\frac{1}{2T}\left[b\left(Z_{t_{k-1}},\ t_{k-1}\right)-Z_1(t_{k-1})\right][W(t_k)-W(t_{k-1})]\,\Delta t=$$

$$=Z_1(t_{k-1})\,[W(t_k)-W(t_{k-1})]+o(\Delta t).$$

В результате вместо (6) получим уравнения Ито

$$\dot{Z}=a(Z,\ t)+Z_1V,\quad T\dot{Z}_1=b(Z,\ t)-Z_1.$$

Если теперь пренебречь постоянной времени T, то получится уравнение Ито

$$\dot{Z} = a(Z, t) + b(Z, t) V.$$

Это уравнение совпадает с (7). Однако оно является на этот раз уравнением Ито, а не уравнением Стратоновича.

Таким образом, если сначала пренебречь постоянной времени T, а потом заменить в полученном уравнении (3) случайную функцию $X_\Delta(t)$ белым шумом, то уравнение (7) следует понимать как уравнение Стратоновича. Если же сначала заменить случайную функцию $X_\Delta(t)$ белым шумом, а после этого пренебречь постоянной времени T, то уравнение (7) следует понимать как уравнение Ито. Иными словами, устремив к нулю сначала постоянную времени T, а потом интервал корреляции случайной функции $X_\Delta(t)$, придем к уравнению Стратоновича. Устремив к нулю сначала интервал корреляции, а потом постоянную времени T, придем к тому же уравнению, которое на этот раз будет уравнением Ито.

Тот же результат получится в случае, когда $b(Z, t)$ зависит не от текущего состояния системы, а от прошлого состояния, получаемого с чистым запаздыванием T. В этом случае уравнение (3) заменяется уравнением

$$\dot{Z}_t = a(Z_t, t) + b(Z_{t-T}, t-T) X_\Delta.$$

Так как при любом $\Delta t \leqslant T$ случайные величины $b(Z_{\tau-T}, \tau-T)$, $\tau \in [t_{k-1}, t_k]$ и $W(t_k) - W(t_{k-1})$ независимы, то в пределе при $\Delta t \to 0$ уравнение (7) будет уравнением Ито. И это будет не только, когда сначала $\Delta t \longrightarrow 0$, а потом $T \longrightarrow 0$, но и при одновременном стремлении Δt и T к нулю, если $\lim T/\Delta t = \varkappa \geqslant 1$. При $\varkappa < 1$ в этом случае получится уравнение с θ-дифференциалом при $\theta = (1-\varkappa)^2/2$. Таким образом, вопрос о том, как следует понимать стохастическое дифференциальное уравнение (7) при замене случайной функции $X_\Delta(t)$ в (3) белым шумом, следует решать, учитывая соотношение между временем запаздывания и временем корреляции случайной функции $X_\Delta(t)$. Если время корреляции не превосходит времени запаздывания, то уравнение (7) следует считать уравнением Ито. Если время запаздывания в $1/\varkappa$ раз меньше времени корреляции, то (7) следует считать уравнением с θ-дифференциалом при $\theta = (1-\varkappa)^2/2$. Если, в частности, время запаздывания очень мало по сравнению с интервалом корреляции, то (7) следует считать уравнением Стратоновича.

Приведенный пример показывает, что вопрос о том, в каком смысле следует понимать стохастическое дифференциальное уравнение (7), полученное заменой в (3) случайной функции $X_\Delta(t)$ белым шумом, в задачах практики можно решать только одновременно с построением математической модели системы с учетом всех принимаемых допущений. А так как при построении модели системы часто бывает невозможно даже просто перечислить все неучитываемые запаздывания, не говоря уже об оценке их величин, то легко прийти к выводу, что простая замена случайной функции в дифференциальном уравнении белым шумом не может быть рекомендована. Поэтому для приведения дифференциальных уравнений системы к стохастическим дифференциальным уравнениям следует применять другой способ, о котором мы сейчас расскажем.

5.1.4. Метод формирующих фильтров. Другой метод приведения дифференциальных уравнений, описывающих состояние системы, к стохастическим дифференциальным уравнениям состоит в замене случайной функции (в общем случае векторной), входящей в дифференциальное уравнение, некоторой другой случайной функцией, которую можно представить как результат безынерционного преобразования решения стохастического дифференциального уравнения. Этот метод применим и в тех случаях, когда случайная функция входит в дифференциальное уравнение системы нелинейно. Поэтому рассмотрим дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию состояния системы, в общей форме

$$\dot{Z} = f(Z, X, t), \quad Z(t_0) = Z_0, \tag{8}$$

где $X = X(t)$ — случайная функция. Если случайную функцию $X(t)$ можно представить в виде $X(t) = \omega(U(t), t)$, где $\omega(u, t)$ — некоторая функция вектора u и времени t, а $U(t)$ — случайный процесс, определяемый стохастическим дифференциальным уравнением

$$\dot{U} = \varphi(U, t) + \psi(U, t) V \tag{9}$$

при начальном условии $U(t_0) = U_0$, то составной векторный случайный процесс $Z_1(t) = [Z(t)^{\mathrm{T}} U(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ будет решением системы стохастических дифференциальных уравнений

$$\dot{Z} = f(Z, \omega(U, t), t), \quad \dot{U} = \varphi(U, t) + \psi(U, t) V$$

при начальном условии $Z(t_0) = Z_0$, $U(t_0) = U_0$. Эту систему уравнений можно записать в виде одного уравнения

$$\dot{Z}_1 = a(Z_1, t) + b(Z_1, t) V,$$

где

$$Z_1 = \begin{bmatrix} Z \\ U \end{bmatrix}, \quad a(Z_1, t) = \begin{bmatrix} f(Z, \omega(U, t), t) \\ \varphi(U, t) \end{bmatrix}, \quad b(Z_1, t) = \begin{bmatrix} \psi(U, t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Это стохастическое дифференциальное уравнение всегда понимается в том же смысле, что и уравнение (9), определяющее процесс $U(t)$. В частности, если уравнение (9) представляет собой уравнение Ито, то и уравнение для составного процесса $Z_1(t) = [Z(t)^{\mathrm{T}} U(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ будет уравнением Ито.

Уравнения $X(t) = \omega(U(t), t)$ и (9) можно рассматривать как модель некоторой системы, формирующей случайную функцию $X(t)$ из белого шума V, т. е. как систему, дающую на выходе случайную функцию $X(t)$, получая на входе белый шум V. Такая система называется *формирующим фильтром* для случайной функции $X(t)$ (п. 3.2.3). Вследствие этого изложенный метод приведения уравнения системы к стохастическому дифференциальному уравнению называется *методом формирующих фильтров*.

Так как характеристики случайных функций, входящих в дифференциальные уравнения различных систем, всегда получаются из опыта путем статистического оценивания, то в принципе любая такая случайная функция с достаточной точностью может рассматриваться как результат некоторого линейного преобразования решения стохастического дифференциального уравнения, в частном случае как вектор, образованный частью компонент решения стохастического дифференциального уравнения. Однако в общем случае методы нахождения подходящих стохастического дифференциального уравнения (9) и функции $\omega(u, t)$ по найденным экспериментально характеристикам случайной функции $X(t)$ пока еще не разработаны. И лишь для стационарных и приводимых к стационарным случайных функций существуют достаточно хорошо разработанные методы нахождения формирующих фильтров.

5.1.5. Формирующий фильтр для стационарного случайного процесса. Покажем, как можно найти формирующий фильтр для скалярной стационарной случайной функции $X(t)$ с рациональной спектральной плотностью.

▶ Предположим, что спектральная плотность действительной скалярной стационарной случайной функции $X(t)$ с нулевым математическим ожиданием определяется формулой

$$s_x(\omega) = P(\omega)/Q(\omega),$$

где $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ — *полиномы. Так как* $s_x(\omega)$ — *четная функция*, то $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ содержат только четные степени ω. При этом в задачах практики степень $2m$ числителя $P(\omega)$ всегда меньше степени $2n$ знаменателя $Q(\omega)$, так как только в этом случае дисперсия случайной функции $X(t)$, равная интегралу от спектральной плотности, будет конечной. Кроме того, для сходимости интеграла от спектральной плотности необходимо, чтобы знаменатель $Q(\omega)$ в выражении спектральной плотности не обращался в нуль ни при каком действительном значении ω. Наконец, вследствие того, что спектральная плотность существенно положительна при всех (действительных) значениях частоты ω, все коэффициенты полиномов $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ действительны. Из этих свойств полиномов $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ следует, что корни каждого из них являются попарно сопряженными комплексными числами и каждому корню соответствует корень того же полинома противоположного знака. Иными словами, корни полиномов $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ расположены на плоскости комплексной переменной ω симметрично относительно действительной и мнимой осей.

Разложим полиномы $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ на множители и отберем в полученных разложениях множители, соответствующие корням, расположенным в верхней полуплоскости комплексной переменной ω. Если $P(\omega)$ имеет действительные корни, то все эти корни являются кратными корнями четной кратности, так как кривая, изображающая спектральную плотность, в этом случае касается оси абсцисс, будучи расположенной целиком выше нее. Половину множителей, соответствующих каждому такому корню, следует отнести к верхней полуплоскости, а другую половину — к нижней. Добавив ко всем множителям в разложении полинома $P(\omega)$, отнесенным к верхней полуплоскости, арифметический квадратный корень из коэффициента p_{2m} при ω^{2m} в этом полиноме и множитель i^m, получим полином степени m относительно ω, все корни которого расположены в верхней полуплоскости и на действительной оси. Обозначим этот полином $H(i\omega)$. Легко видеть, что все коэффициенты полинома $H(i\omega)$, рассматриваемого как полином относительно $i\omega$, положительны. Действительно, возьмем какой-нибудь один корень полинома $H(i\omega)$. Пусть этот корень будет $\alpha+i\beta$, $\beta\geqslant 0$. Если $\alpha\neq 0$, то по доказанному выше свойству полиномов $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ полином $H(i\omega)$ имеет также корень $-\alpha+i\beta$. Следовательно, полином $H(i\omega)$ представляет собой произведение положительного числа $\sqrt{p_{2m}}$ на множители вида $i(\omega-\alpha-i\beta)\,i(\omega+\alpha-i\beta)$ и $i(\omega-i\beta)$, где $\beta\geqslant 0$. Но

$$i(\omega-\alpha-i\beta)\,i(\omega+\alpha-i\beta)=(i\omega)^2+2\beta(i\omega)+\alpha^2+\beta^2,$$
$$i(\omega-i\beta)=i\omega+\beta,$$

вследствие чего произведение любого числа таких множителей представляет собой полином относительно $i\omega$ с положительными коэффициентами.

Оставшиеся m множителей в разложении полинома $P(\omega)$, соответствующие корням, расположенным в нижней полуплоскости, умноженные на $\sqrt{p_{2m}}$ и на $(-i)^m$, образуют полином, который получается из $H(i\omega)$ изменением знака у $i\omega$, т. е. $H(-i\omega)$. Действительно, каждому корню $\alpha+i\beta$ полинома $P(\omega)$, расположенному в верхней полуплоскости, соответствует корень $\alpha-i\beta$, расположенный в нижней полуплоскости. Поэтому каждому множителю вида

$$i(\omega-\alpha-i\beta)\,i(\omega+\alpha-i\beta)=(i\omega)^2+2\beta(i\omega)+\alpha^2+\beta^2$$

или

$$i(\omega-i\beta)=i\omega+\beta$$

полинома $H(i\omega)$ соответствует оставшийся множитель вида

$$-i(\omega-\alpha+i\beta)(-i)(\omega+\alpha+i\beta)=(-i\omega)^2+2\beta^2(-i\omega)+\alpha^2+\beta^2$$

или, соответственно,

$$-i(\omega+i\beta)=-i\omega+\beta,$$

что и доказывает наше утверждение.

Таким образом, отобрав в разложении полинома $P(\omega)$ множители, соответствующие корням, расположенным в верхней полуплоскости, и добавив множитель $i^m\sqrt{p_{2m}}$, представим полином $P(\omega)$ в виде

$$P(\omega)=H(i\omega)\,H(-i\omega)=|H(i\omega)|^2,$$

где $H(i\omega)$ — полином относительно $i\omega$ с положительными коэффициентами.

Совершенно так же, отобрав в разложении полинома $Q(\omega)$ множители, соответствующие корням, расположенным в верхней полуплоскости, добавив к ним множитель $i^n\sqrt{q_{2n}}$, где q_{2n} — коэффициент при старшей степени ω, т. е. при ω^{2n} в полиноме $Q(\omega)$, и обозначив образованный этими множителями полином через $F(i\omega)$, представим $Q(\omega)$ в виде

$$Q(\omega) = F(i\omega)F(-i\omega) = |F(i\omega)|^2,$$

где $F(i\omega)$ — полином относительно $(i\omega)$ с положительными коэффициентами.

Представив числитель и знаменатель спектральной плотности $s_x(\omega)$ такими разложениями, получим следующее выражение для спектральной плотности $s_x(\omega)$:

$$s_x(\omega) = |H(i\omega)/F(i\omega)|^2. \tag{10}$$

Заметим теперь, что функция

$$\Phi(s) = H(s)/F(s) \tag{11}$$

представляет собой передаточную функцию некоторой стационарной линейной системы. Так как умножение комплексного числа на мнимую единицу представляет собой поворот вектора, изображающего это число, на угол $\pi/2$ против часовой стрелки, то верхней полуплоскости комплексной переменной ω соответствует левая полуплоскость комплексной переменной $s = i\omega$. Следовательно, все корни полиномов $H(s)$ и $F(s)$ лежат в левой полуплоскости переменной s, и функция $\Phi(s)$, определяемая формулой (11), представляет собой передаточную функцию устойчивой стационарной линейной системы.

Сравним теперь формулу (10) с (4.25). Вспомнив, что стационарная случайная функция с постоянной спектральной плотностью s_0 представляет собой белый шум интенсивности $2\pi s_0$ (п. 4.2.6), приходим к заключению, что стационарную случайную функцию $X(t)$ с рациональной спектральной плотностью $s_x(\omega)$ можно рассматривать как результат прохождения белого шума с единичной спектральной плотностью через устойчивую стационарную линейную систему с передаточной функцией $\Phi(s)$, определяемой формулой (11). Следовательно, система с передаточной функцией $\Phi(s) = H(s)/F(s)$ представляет собой формирующий фильтр для случайной функции $X(t)$.

На основании результатов п. 1.3.6 стационарная линейная система с передаточной функцией $\Phi(s) = H(s)/F(s)$ описывается линейным дифференциальным уравнением с оператором $F(D)$, $D = d/dt$, в левой части (применяемым к выходному сигналу) и оператором $H(D)$ в правой части (применяемым ко входному сигналу). Принимая во внимание, что входным сигналом формирующего фильтра служит белый шум $V(t)$ с единичной спектральной плотностью, интенсивность которого равна 2π, а его выходным сигналом является интересующая нас случайная функция $X(t)$, получаем дифференциальное уравнение формирующего фильтра

$$F(D)\,X = H(D)\,V$$

или, обозначив коэффициент при s^k в полиноме $F(s)$ через a_k ($k=0, 1, \ldots, n$), а коэффициент при s^k в полиноме $H(s)$ — через b_k ($k=0, 1, \ldots, m$),

$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} b_k V^{(k)}.$$

Таким образом, формирующий фильтр для случайной функции $X(t)$ представляет собой систему, описываемую линейным стохастическим дифференциальным уравнением n-го порядка. Заменив это уравнение соответствующей системой дифференциальных уравнений первого порядка (пп. 1.3.4 и 3.3.3), получим уравнения формирующего фильтра в виде

$$\begin{aligned} &\dot{X}_{1k} = X_{1,\,k+1} \qquad (k=1, \ldots, n-m-1), \\ &\dot{X}_{1k} = X_{1,\,k+1} + q_k V \qquad (k=n-m, \ldots, n-1), \\ &\dot{X}_{1n} = -a_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} X_{1k} + q_n V, \end{aligned} \tag{12}$$

и $X(t) = \omega(X_1(t), t) = X_{11}(t)$, $X_1(t) = [X_{11}(t) \ldots X_{1n}(t)]^{\mathrm{T}}$, где $q_{n-m}, \ldots, q_n$ — постоянные коэффициенты, определяемые формулами (1.46):

$$q_{n-m} = a_n^{-1} b_m,$$

$$q_k = a_n^{-1}\left(b_{n-k} - \sum_{h=n-m}^{k-1} a_{n-k+h} q_h\right) \quad (k=n-m+1, \ldots, n). \blacktriangleleft \tag{13}$$

В некоторых случаях желательно сформировать случайную функцию $X(t)$ из белого шума $V(t)$ единичной интенсивности. Спектральная плотность такого белого шума равна $1/2\pi$. Следовательно, представляя спектральную плотность $s_x(\omega)$ случайной функции $X(t)$ в виде (10), необходимо в таких случаях выделить из $|H(i\omega)/F(i\omega)|^2$ множитель $1/2\pi$. Этого можно достичь, включив в полином $H(i\omega)$ дополнительный множитель $\sqrt{2\pi}$ или в полином $F(i\omega)$ дополнительный множитель $1/\sqrt{2\pi}$. В результате вместо (10) получим

$$s_x(\omega) = |H(i\omega)/F(i\omega)|^2 (1/2\pi). \tag{14}$$

Изложенный метод представления спектральной плотности $s_x(\omega)$ в виде (10) обеспечивает первое условие применимости формулы (4.25) — асимптотическую устойчивость формирующего фильтра. Второе условие применимости формулы (4.25), обеспечивающее стационарность случайного процесса на выходе формирующего фильтра, состоит в том, что белый шум V должен действовать на входе формирующего фильтра бесконечно долго (на практике достаточно долго). И лишь при специальном выборе случайных начальных условий для уравнений (12) можно обеспечить стационарность процесса на выходе формирующего фильтра при любом заданном t_0. Поскольку в данном случае речь идет не об исследовании реального фильтра, а лишь о применении его как инструмента теоретического исследования для приведения дифференциальных уравнений к стохастическим уравнениям, мы имеем полную свободу в выборе начальных условий. Поэтому их можно выбрать так, чтобы обеспечить стационарность процесса на выходе формирующего фильтра при заданном начальном моменте времени t_0. Покажем, как это можно сделать.

► Как известно, стационарный случайный процесс имеет постоянную ковариационную матрицу (дисперсию в случае скалярного процесса). Иными словами, ковариационная матрица значения стационарного случайного процесса $X_1(t)$ в любой момент времени t не зависит от t и равна значению ковариационной функции $k_{x_1}(\tau)$ этого процесса при $\tau = 0$, $k_{x_1}(0)$ (п. 4.1.2). Но согласно формуле (4.16)

$$k_{x_1}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{x_1}(\omega)\, d\omega. \tag{15}$$

Поэтому для обеспечения стационарности процесса $X_1(t)$ на выходе формирующего фильтра следует взять случайное начальное значение $X_1(t_0) = X_{10}$ в момент t_0 с ковариационной матрицей $k_{x_1}(0)$, определяемой формулой (15). Остается найти спектральную плотность $s_{x_1}(\omega)$ процесса $X_1(t)$, определяемого уравнениями (12).

Пользуясь формулой (4.24), находим

$$s_{x_1}(\omega) = \Phi_1(i\omega)\, \Phi_1(-i\omega)^{\mathrm{T}} s_0, \tag{16}$$

где s_0 — спектральная плотность белого шума V, равная 1, если $s_x(\omega)$ представляется формулой (10), или $1/2\pi$, если $s_x(\omega)$ представляется формулой (14). Для определения передаточной функции $\Phi_1(s)$ той части формирующего фильтра, которая дает на выходе векторный случайный процесс $X_1(t) = [X_{11}(t) \ldots X_{1n}(t)]^{\mathrm{T}}$, воспользуемся тем, что передаточная функция всего формирующего фильтра, выходным сигналом которого служит процесс $X(t) = X_{11}(t)$, была найдена раньше. Она определяется формулой (11), $\Phi_{11}(s) = \Phi(s) = H(s)/F(s)$. Поэтому остальные элементы матрицы-столбца $\Phi_1(s)$ можно найти из первых $n-1$ уравнений

(12), заменив в них V функцией e^{st}, X_{1k} — функцией $\Phi_{1k}(s)e^{st}$ $(k=1, \ldots, n)$, а оператор d/dt — множителем s (п. 1.3.6). В результате получим уравнения

$$s\Phi_{1k}(s)=\Phi_{1,\,k+1}(s) \quad (k=1, \ldots, n-m-1),$$
$$s\Phi_{1k}(s)=\Phi_{1,\,k+1}(s)+q_k \quad (k=n-m, \ldots, n-1).$$

Решая эти уравнения по очереди и положив в первом из них $\Phi_{11}(s)=\Phi(s)=H(s)/F(s)$, находим элементы матрицы-столбца $\Phi_1(s)$:

$$\Phi_{1k}(s)=s^{k-1}\Phi(s)=s^{k-1}H(s)/F(s) \qquad (k=1, \ldots, n-m),$$
$$\Phi_{1k}(s)=s^{k-1}\Phi(s)-\sum_{l=0}^{k-1-n+m} q_{k-l-1}s^l=$$
$$=s^{k-1}H(s)/F(s)-\sum_{l=0}^{k-1-n+m} q_{k-l-1}s^l \quad (k=n-m+1, \ldots, n).$$

Приводя выражения $\Phi_{1k}(s)$ $(k=n-m+1, \ldots, n)$ к общему знаменателю и пользуясь формулой (13), после несложных, но довольно громоздких выкладок получим

$$\Phi_{11}(s)=H(s)/F(s), \quad \Phi_{1k}(s)=H_k(s)/F(s) \quad (k=2, \ldots, n), \tag{17}$$

где

$$H_k(s)=s^{k-1}H(s) \qquad (k=2, \ldots, n-m),$$
$$H_k(s)=\sum_{r=0}^{n-1} c_{kr}s^r \qquad (k=n-m+1, \ldots, n),$$
$$c_{kr}=-\sum_{l=k-1-r}^{k-1} a_{l-k+r+1}q_l \qquad (r=0, \ldots, m-n+k-1),$$
$$c_{kr}=-\sum_{l=n-m}^{k-1} a_{l-k+r+1}q_l \qquad (r=m-n+k, \ldots, k-2)$$

(только если $n-m\geqslant 2$),

$$c_{kr}=\sum_{l=k}^{k-1+n-r} a_{l-k+r+1}q_l \qquad (r=k-1, \ldots, n-1).$$

Для вычисления элементов матрицы $k_{x_1}(0)$, определяемой формулой (15), можно пользоваться формулой (4.28). ◀

Пример 2. Найти формирующий фильтр для стационарной случайной функции $X(t)$ со спектральной плотностью

$$s_x(\omega)=\frac{D}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}.$$

В данном случае числитель $P(\omega)$ представляет собой постоянную величину, а знаменатель имеет два чисто мнимых корня $\pm i\alpha$. Следовательно, можно принять

$$H(i\omega)=\sqrt{D\alpha/\pi}, \qquad F(i\omega)=i\omega+\alpha.$$

Тогда получим

$$s_x(\omega)=|\Phi(i\omega)|^2, \qquad \Phi(s)=\sqrt{\frac{D\alpha}{\pi}}\,\frac{1}{s+\alpha}.$$

Таким образом, формирующий фильтр в данном случае представляет собой апериодическое звено с постоянной времени $T=1/\alpha$ и коэффициентом усиления $k=\sqrt{D/\pi\alpha}$. Дифференциальное уравнение этого формирующего фильтра имеет вид

$$\dot{X}+\alpha X=\sqrt{D\alpha/\pi}\,V,$$

где V — белый шум интенсивности $\nu=2\pi$.

Положив

$$H(i\omega)=\sqrt{2D\alpha}, \qquad F(i\omega)=i\omega+\alpha,$$

будем иметь

$$s_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\,|\Phi(i\omega)|^2, \quad \Phi(s)=\frac{\sqrt{2D\alpha}}{s+\alpha}.$$

Дифференциальное уравнение формирующего фильтра в этом случае будет иметь вид

$$\dot{X}+\alpha X=\sqrt{2D\alpha}\,V,$$

где V — белый шум единичной интенсивности.

Взяв в обоих случаях случайное начальное значение $X_0=X(t_0)$ с дисперсией

$$D_{x_0}=\int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega)\,d\omega=\frac{D\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\alpha^2+\omega^2}=D,$$

получим на выходе формирующего фильтра стационарный случайный процесс $X(t)$ с заданной спектральной плотностью $s_x(\omega)$.

Пример 3. Найти формирующий фильтр для стационарной случайной функции со спектральной плотностью

$$s_x(\omega)=\frac{D}{\pi}\,\frac{(a+\gamma\omega_0)\,b^2+(a-\gamma\omega_0)\,\omega^2}{b^4+2\left(a^2-\omega_0^2\right)\omega^2+\omega^4}, \quad \omega_0^2=b^2-a^2.$$

В данном случае числитель $P(\omega)$ имеет два корня $\omega=\pm ib_1$, $b_1^2=b^2(a+\gamma\omega_0)(a-\gamma\omega_0)^{-1}$, а знаменатель $Q(\omega)$ — четыре корня $\pm(\omega_0\pm ia)$. Отобрав из этих корней расположенные в верхней полуплоскости, согласно изложенному методу полагаем

$$H(i\omega)=\sqrt{2D(a-\gamma\omega_0)}\;i(\omega-ib_1)=\sqrt{2D(a-\gamma\omega_0)}\,(i\omega+b_1),$$
$$F(i\omega)=i(\omega-\omega_0-ia)\,i(\omega+\omega_0-ia)=(i\omega)^2+2a(i\omega)+b^2.$$

Тогда будем иметь

$$s_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\,|\Phi(i\omega)|^2, \quad \Phi(s)=\frac{H(s)}{F(s)}=\frac{\sqrt{2D(a-\gamma\omega_0)}\,(s+b_1)}{s^2+2as+b^2}.$$

Дифференциальное уравнение этого формирующего фильтра имеет вид

$$\ddot{X}+2a\dot{X}+b^2X=\sqrt{2D(a-\gamma\omega_0)}\,(\dot{V}+b_1V),$$

где V — белый шум единичной интенсивности. Этому уравнению соответствует система двух уравнений первого порядка (12) для векторной случайной функции $X_1(t) = [X(t)\ \dot{X}(t) - q_1 V(t)]^{\mathrm{T}}$:

$$\dot{X}_{11} = X_{12} + q_1 V,$$
$$\dot{X}_{12} = -b^2 X_{11} - 2aX_{12} + q_2 V,$$

где согласно формулам (13) $q_1 = \sqrt{2D(a-\gamma\omega_0)}$, $q_2 = \sqrt{2D(a-\gamma\omega_0)}\,(b_1 - 2a)$.

Для определения ковариационной матрицы начального значения $X_{10} = X_1(t_0)$ находим по формуле (17) элементы матрицы-столбца $\Phi_1(s)$:

$$\Phi_{11}(s) = \Phi(s) = \frac{q_1(s+b_1)}{s^2+2as+b^2}, \quad \Phi_{12}(s) = \frac{q_2 s - q_1 b^2}{s^2+2as+b^2}.$$

После этого по формулам (16), (15) и (4.28) находим

$$k_{x_{11}}(0) = \frac{q_1^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-(i\omega)^2 + b_1^2}{|(i\omega)^2 + 2a(i\omega) + b^2|^2}\,d\omega = D,$$

$$k_{x_{11}x_{12}}(0) = -\frac{q_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(i\omega+b_1)(q_2 i\omega + b^2 q_1)}{|(i\omega)^2 + 2ai\omega + b^2|^2}\,d\omega = -D(a-\gamma\omega_0),$$

$$k_{x_{12}}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-q_2^2(i\omega)^2 + b^4 q_1^2}{|i\omega^2 + 2ai\omega + b^2|^2}\,d\omega = D\left[b^2 - b\sqrt{a^2-\gamma^2\omega_0^2} + 2a(a-\gamma\omega_0)\right].$$

Взяв случайное начальное значение $X_{10} = X_1(t_0)$ с ковариационной матрицей, элементы которой определяются выведенными формулами, получим на первом выходе формирующего фильтра стационарную случайную функцию $X(t)$ с заданной спектральной плотностью $s_x(\omega)$.

5.1.6. Формирующий фильтр для стационарного векторного процесса. Аналогично решается задача нахождения формирующего фильтра для стационарной векторной случайной функции $X(t)$ с рациональной спектральной плотностью $s_x(\omega)$. В этом случае все элементы матрицы $s_x(\omega)$ представляют собой отношения полиномов относительно ω. На основании (4.24) для нахождения формирующего фильтра для $X(t)$ достаточно представить спектральную плотность $s_x(\omega)$ формулой

$$s_x(\omega) = F(i\omega)^{-1} H(i\omega) H(i\omega)^* F(i\omega)^{-1*},$$

где $F(s)$ и $H(s)$ — матрицы, все элементы которых являются полиномами относительно s, причем все корни определителей этих матриц $F(s)$ и $H(s)$ лежат в левой полуплоскости комплексной переменной s. Представление матрицы спектральных и взаимных спектральных плотностей $s_x(\omega)$ компонент векторной стационарной случайной функции в таком виде называется *факторизацией* матрицы $s_x(\omega)$. После факторизации спектральной плотности $s_x(\omega)$ можно написать дифференциальное уравнение для формирующего фильтра, привести его к системе дифференциальных уравнений первого порядка (12) и найти начальное условие для него, обеспечивающее стационарность процесса на выходе фильтра совершенно так же, как в п. 5.1.5.

Пример 4. Спектральная плотность двумерной стационарной векторной случайной функции $X(t)$ определяется формулой

$$s_x(\omega)=\begin{bmatrix}\dfrac{k_1^2}{\alpha_1^2+\omega^2} & \dfrac{k_1k_2}{\alpha_1\alpha_2-(\alpha_1-\alpha_2)\,i\omega+\omega^2}\\ \dfrac{k_1k_2}{\alpha_1\alpha_2+(\alpha_1-\alpha_2)\,i\omega+\omega^2} & \dfrac{k_2^2}{\alpha_2^2+\omega^2}\end{bmatrix}.$$

Найти формирующий фильтр для $X(t)$.

В данном случае

$$s_x(\omega)=\begin{bmatrix}(\alpha_1+i\omega)^{-1} & 0\\ 0 & (\alpha_2+i\omega)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\end{bmatrix}[k_1k_2]\begin{bmatrix}(\alpha_1-i\omega)^{-1} & 0\\ 0 & (\alpha_2-i\omega)^{-1}\end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$F(s)=\begin{bmatrix}\alpha_1+s & 0\\ 0 & \alpha_2+s\end{bmatrix},\quad H(s)=\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\end{bmatrix}$$

и система дифференциальных уравнений формирующего фильтра имеет вид

$$\dot X_1+\alpha_1X_1=k_1V,\quad \dot X_2+\alpha_2X_2=k_2V,$$

где V — белый шум интенсивности 2π.

Взяв случайное начальное значение вектора $X_0=X(t_0)$ с ковариационной матрицей

$$k_x(0)=\int_{-\infty}^{\infty}s_x(\omega)\,d\omega=\begin{bmatrix}\pi k_1^2/\alpha_1 & 2\pi k_1k_2/(\alpha_1+\alpha_2)\\ 2\pi k_1k_2/(\alpha_1+\alpha_2) & \pi k_2^2/\alpha_2\end{bmatrix},$$

получим на выходе фильтра двумерный стационарный векторный случайный процесс с заданной спектральной плотностью $s_x(\omega)$.

5.1.7. Формирующий фильтр для процесса, приводимого к стационарному. Изложенный в пп. 5.1.4—5.1.6 метод позволяет также находить формирующие фильтры для случайных процессов, приводимых к стационарным. Случай процесса, приводимого к стационарному преобразованием самого процесса, тривиален. Если $X(t)=\psi(X_1(t),\ t)$, где $X_1(t)$ — стационарная случайная функция, то, подставив это выражение в дифференциальное уравнение (8), получим уравнение со стационарной случайной функцией в правой части. Поэтому остается рассмотреть случай процесса $X(t)$, приводимого к стационарному преобразованием аргумента.

► Пусть $X(t)=\psi(X_1(\varphi(t)),\ t)$, где $X_1(s)$ — стационарная случайная функция с рациональной спектральной плотностью, а $\varphi(t)$ — монотонно возрастающая дифференцируемая функция. Построив формирующий фильтр для случайной функции $X_1(s)$, напишем дифференциальное уравнение этого фильтра и соответствующее начальное условие в виде

$$dX_1=aX_1\,ds+b\,dW_1,\qquad X_1(\varphi(t_0))=X_0, \tag{18}$$

где a и b — постоянные матрицы соответствующих размеров, а $W_1(s)$ — процесс с некоррелированными приращениями с ковариационной функцией

$$K_{w_1}(s_1, s_2) = k_1(\min(s_1, s_2)), \quad k_1(s) = k_1(s_0) + \nu_1(s - s_0),$$

где ν_1 — постоянная интенсивность стационарного белого шума $V_1(s) = \dot{W}_1(s)$, а $s_0 = \varphi(t_0)$. Рассмотрим случайный процесс $W(t) = W_1(\varphi(t))$. Очевидно, что $W(t)$ — процесс с некоррелированными приращениями, так как монотонно возрастающая функция $s = \varphi(t)$ отображает любые непересекающиеся интервалы на оси s на непересекающиеся интервалы на оси t. Ковариационная функция процесса $W(t)$ определяется очевидной формулой

$$K_w(t_1, t_2) = K_{w_1}(\varphi(t_1), \varphi(t_2)) = k(\min(\varphi(t_1), \varphi(t_2))),$$

где

$$k(t) = k_1(\varphi(t)) = k_1(\varphi(t_0)) + \nu_1[\varphi(t) - \varphi(t_0)] = k(t_0) + \int_{t_0}^{t} \nu_1 \dot{\varphi}(\tau)\, d\tau.$$

Отсюда видно, что интенсивность белого шума $V(t) = \dot{W}(t)$ равна $\nu(t) = \nu_1 \dot{\varphi}(t)$. Переходя в уравнении (18) к переменной t, получим

$$dX_1(\varphi(t)) = a\dot{\varphi}(t)\, X_1(\varphi(t))\, dt + b\, dW, \quad X_1(\varphi(t_0)) = X_0.$$

Вводя случайный процесс $X_2(t) = X_1(\varphi(t))$, представим это уравнение в виде

$$dX_2 = a\dot{\varphi}(t)\, X_2\, dt + b\, dW, \quad X_2(t_0) = X_0$$

или

$$\dot{X}_2 = a\dot{\varphi}(t)\, X_2 + bV, \quad X_2(t_0) = X_0. \tag{19}$$

Таким образом, формирующий фильтр в данном случае описывается уравнением (19) и формулой $X(t) = \psi(X_2(t), t)$. ◀

Обратим внимание на то, что, написав уравнение формирующего фильтра для случайной функции $X_1(s)$ в форме обычного дифференциального уравнения с белым шумом в правой части и сделав в этом уравнении замену переменных $s = \varphi(t)$, получим в уравнении (19) в коэффициенте перед белым шумом множитель $\dot{\varphi}(t)$. Однако такой вывод уравнения (19) ошибочен. Это иллюстрирует тот факт, что обычные правила замены независимой переменной неприменимы, когда в дифференциальном уравнении присутствует белый шум. Это необходимо всегда помнить, имея дело со стохастическими дифференциальными уравнениями.

Ковариационная функция начального значения процесса $X_1(s)$, $X_0 = X_1(\varphi(t_0))$, определяется формулами (15)—(17).

Пример 5. Случайная функция $X(t)$ с математическим ожиданием и ковариационной функцией

$$m_x(t) = c_0 + c_1 t, \quad K_x(t_1, t_2) = De^{\mu(t_1+t_2) - \alpha\, |t_1^2 - t_2^2|}$$

приводится к стационарной преобразованиями

$$X(t)=c_0+c_1t+e^{\mu t}X_1(s),\quad s=t^2 \text{ (пример 4.10).}$$

Здесь $X_1(s)$ — стационарная случайная функция с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией $k_{x_1}(\sigma)=De^{-\alpha|\sigma|}$, $\sigma=s_1-s_2$. Этой ковариационной функции соответствует спектральная плотность $s_{x_1}(\omega)=$ $=D\alpha/\pi(\alpha^2+\omega^2)$ (пример 2). Пользуясь методом п. 5.1.5, находим дифференциальное уравнение для случайной функции $X_1(s)$:

$$dX_1/ds=-\alpha X_1+\sqrt{2D\alpha}\,V_1,$$

где V_1 — белый шум единичной интенсивности. Переходя к переменной t, заменим это уравнение уравнением (19) для случайной функции $X_2(t)=$ $=X_1(t^2)$, которое в данном случае имеет вид

$$\dot{X}_2=-2\alpha tX_2+\sqrt{2D\alpha}\,V,$$

где $V(t)$ — белый шум интенсивности $2t$. Начальное условие для этого уравнения в соответствии с (19) имеет вид $X_2(t_0)=X_0$, где X_0 — случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$D_{x_0}=\int_{-\infty}^{\infty}s_{x_1}(\omega)\,d\omega=\frac{D\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\alpha^2+\omega^2}=D.$$

5.1.8. Об уравнениях, получаемых при практическом применении метода формирующих фильтров. Только что изложенные практические методы нахождения формирующих фильтров определяют формирующие фильтры с помощью линейных стохастических дифференциальных уравнений. Поэтому получаемые путем применения этих методов стохастические дифференциальные уравнения можно понимать в любом смысле. Определяемый полученными уравнениями случайный процесс не зависит от того, в каком смысле они понимаются. Тем не менее в дальнейшем мы будем всегда понимать все стохастические дифференциальные уравнения как уравнения Ито, так как развиваемые дальше методы исследования систем, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями, применимы только к уравнениям Ито.

5.1.9. Стохастические уравнения системы. В дальнейшем всегда будем предполагать, что эволюция состояния системы (вектора состояния Z) описывается стохастическим дифференциальным уравнением, т. е. что уравнения, описывающие систему, приведены к стохастическому дифференциальному уравнению. При этом вектор состояния системы будем понимать как расширенный вектор состояния, включающий все переменные, входящие в первоначальное дифференциальное уравнение системы, и все другие случайные функции, которые приходится вводить, чтобы привести дифференциальные уравнения к системе стохастических дифференциальных уравнений первого порядка. Тогда стохастическое дифференциальное уравнение, определяющее вектор состояния системы Z, и формула для выходного сигнала системы примут вид

$$\dot{Z}=a(Z,t)+b(Z,t)V,\quad Y=g(Z,t). \tag{20}$$

Так как значение выходного сигнала системы Y в каждый момент времени t зависит только от состояния системы в тот же момент t (т. е. представляет собой результат безынерционного преобразования вектора состояния Z), то все вероятностные характеристики выходного сигнала выражаются через соответствующие характеристики вектора состояния элементарными формулами теории вероятностей (*ТВ*, п. 3.3.5 и гл. 5). Поэтому в дальнейшем мы будем определять только вероятностные характеристики вектора состояния системы.

Белый шум в дифференциальном уравнении (20) будем понимать как белый шум в строгом смысле (п. 3.4.2).

Начальное значение $Z(t_0)=Z_0$ вектора состояния всегда будем считать независимым от белого шума $V(t)$ при $t>t_0$ (точнее, от приращений $W(s)-W(t)$ процесса с независимыми приращениями, производной которого служит белый шум V при $s>t\geqslant t_0$).

В случае стохастической системы, для которой вектор состояния определяется уравнениями вида (1.67а) при сведении дифференциального уравнения системы (1.67а) к стохастическому дифференциальному уравнению целесообразно свести разностное уравнение системы (1.67а) к стохастическому разностному уравнению с независимыми случайными величинами. С этой целью предположим, что случайные величины N_k в (1.67а) определяются формулой $N_k=\psi_k(U_k)$ и разностным уравнением

$$U_{k+1}=\omega_k(U_k,\ V_k),$$

где ω_k — некоторые функции указанных аргументов, а $\{V_k\}$ — последовательность независимых случайных величин. Тогда, расширяя вектор Z''_k путем объединения его с вектором U_k, получим для расширенного вектора состояния $Z=[Z_k'^{\mathrm{T}}Z_k''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ систему уравнений

$$\dot Z'=a(Z,\ t)+b(Z,\ t)V,\ Z''_{k+1}=\omega_k(Z_k,\ V_k),$$

где

$$Z_k=[Z_k'^{\mathrm{T}}Z_k''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}=Z(t^{(k)}),$$

$$Z''(t)=\sum_{k=0}^{\infty}Z''_k\mathbf{1}_{A_k}(t).$$

Обычно случайные возмущения в дискретных элементах систем автоматического управления всегда независимы от возмущений, действующих на объект управления, поэтому случайные величины N_k в (1.67а) не зависят от $N(t)$. Вот почему обычно принимают белый шум $V(t)$ и последовательность $\{V_k\}$ независимыми.

§ 5.2. Моменты вектора состояния линейной системы

5.2.1. Формула для вектора состояния. Рассмотрим линейную систему. В этом случае уравнение (20) имеет вид

$$\dot{Z} = aZ + a_0 + bV, \tag{21}$$

где a, a_0 и b в общем случае могут быть функциями времени t, а V — белый шум, интенсивность которого ν тоже в общем случае может быть функцией времени t.

Для нахождения моментов первого и второго порядков случайного процесса $Z(t)$, определяемого линейным дифференциальным уравнением (21), нет необходимости в том, чтобы белый шум V был белым шумом в строгом смысле, т. е. производной процесса с независимыми приращениями; достаточно, чтобы он был просто белым шумом (т. е. производной процесса с некоррелированными приращениями), так же как и в теории § 3.3. Поэтому везде в этом параграфе будем считать V произвольным белым шумом. В остальных параграфах, изучая конечномерные распределения процесса $Z(t)$, будем всегда считать V белым шумом в строгом смысле.

Пользуясь формулой (3.32) для решения линейного стохастического уравнения, выразим вектор состояния системы Z формулой

$$Z(t) = u(t, t_0) Z_0 + \int_{t_0}^{t} u(t, \tau) b(\tau) V(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t} u(t, \tau) a_0(\tau) d\tau, \tag{22}$$

где $u(t, \tau)$ — матрица, определяемая как функция t однородным дифференциальным уравнением $du/dt = a(t) u$ и начальным условием $u(\tau, \tau) = I$.

5.2.2. Формулы для моментов первого и второго порядков. Так как математическое ожидание белого шума равно нулю, то в силу (2.64) и (22) математическое ожидание вектора состояния системы $Z(t)$ определяется формулой

$$m(t) = u(t, t_0) m_0 + \int_{t_0}^{t} u(t, \tau) a_0(\tau) d\tau, \tag{23}$$

где m_0 — математическое ожидание начального значения Z_0 вектора состояния Z. Ковариационная функция вектора состояния Z в соответствии с (2.70) определяется формулой

$$K(t_1, t_2) = u(t_1, t_0) K_0 u(t_2, t_0)^* + \\ + \int_{t_0}^{\min(t_1, t_2)} u(t_1, \tau) b(\tau) \nu(\tau) b(\tau)^{\mathrm{T}} u(t_2, \tau)^* d\tau, \tag{24}$$

где K_0 — ковариационная матрица начального значения Z_0 вектора состояния Z. При выводе этой формулы мы учли, что начальное состояние системы Z_0 не зависит от белого шума $V(t)$ при $t > t_0$ и что $u(t, \tau) = 0$ при $\tau > t$. Последним обстоятельством объясняется то, что верхний предел интегрирования равен $\min(t_1, t_2)$. Кроме того, мы учли, что коэффициенты уравнений реальных систем всегда действительны, в то время как элементы матрицы $u(t, \tau)$ могут быть комплексными даже в этом случае.

Определив математическое ожидание и ковариационную функцию вектора состояния Z, можно найти его момент второго порядка по формуле (2.23), которая в данном случае, когда функции $m(t)$ и $K(t_1, t_2)$ действительны, дает

$$\Gamma(t_1, t_2) = K(t_1, t_2) + m(t_1)\, m(t_2)^{\mathrm{T}}. \tag{25}$$

5.2.3. Дифференциальное уравнение для математического ожидания. В задачах практики обычно достаточно находить вероятностные характеристики вектора состояния системы Z в каждый данный момент t (определяемые одномерным распределением), т. е. только значения $K(t, t) = K(t)$ и $\Gamma(t, t) = \Gamma(t)$ ковариационной функции и момента второго порядка. Иными словами, достаточно найти математическое ожидание, ковариационную матрицу и момент второго порядка вектора состояния Z в каждый момент времени t. Само собой разумеется, все эти величины для линейной системы можно определить по формулам (23), (24) и (25) при $t_1 = t_2 = t$. Однако в случае линейной системы их можно вычислить значительно проще, а именно интегрированием соответствующих линейных дифференциальных уравнений.

► Чтобы вывести дифференциальное уравнение для математического ожидания вектора Z, продифференцируем формулу (23):

$$\dot m(t) = u_t(t, t_0)\, m_0 + \int_{t_0}^{t} u_t(t, \tau)\, a_0(\tau)\, d\tau + a_0(t) =$$

$$= a(t)\left[u(t, t_0)\, m_0 + \int_{t_0}^{t} u(t, \tau)\, a_0(\tau)\, d\tau\right] + a_0(t).$$

Но выражение в квадратных скобках равно $m(t)$ в силу (23). Следовательно,

$$\dot m(t) = a(t)\, m(t) + a_0(t),$$

или

$$\dot m = am + a_0. \blacktriangleleft \tag{26}$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение для математического ожидания вектора Z. Интегрируя это уравнение при начальном условии $m(t_0) = m_0$, можно вычислить математическое ожидание случайного вектора Z.

5.2.4. Дифференциальное уравнение для ковариационной матрицы. Чтобы вывести уравнение для ковариационной матрицы $K(t)$ вектора Z, положим в (24) $t_1 = t_2 = t$:

$$K(t) = K(t, t) = u(t, t_0) K_0 u(t, t_0)^* + \int_{t_0}^{t} u(t, \tau) b(\tau) \nu(\tau) b(\tau)^{\mathrm{T}} u(t, \tau)^* d\tau. \quad (27)$$

▶ Дифференцируя эту формулу по t, получаем

$$\dot{K}(t) = u_t(t, t_0) K_0 u(t, t_0)^* + \int_{t_0}^{t} u_t(t, \tau) b(\tau) \nu(\tau) b(\tau)^{\mathrm{T}} u(t, \tau)^* d\tau + u(t, t_0) K_0 u_t(t, t_0)^* + \int_{t_0}^{t} u(t, \tau) b(\tau) \nu(\tau) b(\tau)^{\mathrm{T}} u_t(t, \tau) d\tau + b(t) \nu(t) b(t)^{\mathrm{T}},$$

или, так как $u_t(t, \tau) = a(t) u(t, \tau)$, $u_t(t, \tau)^* = u(t, \tau)^* a(t)^{\mathrm{T}}$,

$$\dot{K}(t) = a(t)\left[u(t, t_0) K_0 u(t, t_0)^* + \int_{t_0}^{t} u(t, \tau) b(\tau) \nu(\tau) b(\tau)^{\mathrm{T}} u(t, \tau)^* d\tau\right] + \left[u(t, t_0) K_0 u(t, t_0)^* + \int_{t_0}^{t} u(t, \tau) b(\tau) \nu(\tau) b(\tau)^{\mathrm{T}} u(t, \tau)^* d\tau\right] a(t)^{\mathrm{T}} + b(t) \nu(t) b(t)^{\mathrm{T}}.$$

Но выражение в квадратных скобках в силу (27) равно $K(t)$. Следовательно,

$$\dot{K}(t) = a(t) K(t) + K(t) a(t)^{\mathrm{T}} + b(t) \nu(t) b(t)^{\mathrm{T}},$$

или

$$\dot{K} = aK + Ka^{\mathrm{T}} + b\nu b^{\mathrm{T}}. \text{ ◀} \quad (28)$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение для ковариационной матрицы значения случайного вектора Z при данном t. Интегрируя это уравнение при начальном условии $K(t_0) = K_0$, можно вычислить ковариационную матрицу случайного вектора Z.

5.2.5. Дифференциальное уравнение для момента второго порядка. Чтобы вывести дифференциальное уравнение для начального момента второго порядка $\Gamma(t)$ вектора Z, положим в (25) $t_1 = t_2 = t$. Тогда будем иметь

$$\Gamma(t) = K(t) + m(t) m(t)^{\mathrm{T}},$$

или, опуская аргумент t,

$$\Gamma = K + mm^{\mathrm{T}}. \tag{29}$$

▶ Дифференцируя эту формулу, находим

$$\dot{\Gamma} = \dot{K} + \dot{m}m^{\mathrm{T}} + m\dot{m}^{\mathrm{T}}.$$

Подставив сюда выражения $\dot{m}$ и $\dot{K}$ из уравнений (26) и (28), получаем

$$\dot{\Gamma} = aK + Ka^{\mathrm{T}} + b\nu b^{\mathrm{T}} + amm^{\mathrm{T}} + a_0 m^{\mathrm{T}} + mm^{\mathrm{T}}a^{\mathrm{T}} + ma_0^{\mathrm{T}},$$

или, пользуясь формулой (29),

$$\dot{\Gamma} = a\Gamma + \Gamma a^{\mathrm{T}} + b\nu b^{\mathrm{T}} + a_0 m^{\mathrm{T}} + ma_0^{\mathrm{T}}. \blacktriangleleft \tag{30}$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение после уравнения (26), определяющего m, при начальном условии $\Gamma(t_0) = \Gamma_0 = K_0 + m_0 m_0^{\mathrm{T}}$, можно вычислить начальный момент второго порядка случайного вектора Z.

Очевидно, что непосредственное численное интегрирование уравнений (26) и (28) или (26) и (30) несравненно проще, чем определение m и K или m и Γ по формулам (23), (24) и (25) с предварительным многократным интегрированием однородного уравнения $\dot{u} = au$ с начальным условием $u(\tau, \tau) = I$ при различных τ, необходимым для нахождения $u(t, \tau)$ как функции двух переменных.

Дифференциальные уравнения (26) и (30) для моментов первого и второго порядков решения линейного стохастического дифференциального уравнения и более общие уравнения для любых моментов решений линейных и нелинейных стохастических дифференциальных уравнений были впервые выведены одним из авторов в [55]. Значительно позже уравнения (26) и (28) были получены независимо от автора американским ученым Дунканом [27].

Заметим, что уравнения (26), (28) и (30) справедливы для любого белого шума в уравнении (21), а не только для белого шума в строгом смысле. Это следует непосредственно из результатов п. 3.3.2, где было показано, что формула (22) для решения уравнения (21) справедлива для любого белого шума V.

Так как нахождение одномерных моментов первого и второго порядков достаточно для многих задач практики, то изложенная в этом параграфе статистическая теория линейных систем, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями, основанная на моментах первого и второго порядков, достаточна для многих приложений.

5.2.6. Дифференциальное уравнение для ковариационной функции. Основываясь на формуле (24), выведем уравнение для ковариационной функции $K(t_1, t_2)$ случайного процесса $Z(t)$, рассматриваемой как функция t_2 при любом фиксированном t_1. Для этого перепишем формулу (24) для случая $t_1 < t_2$:

$$K(t_1, t_2) = u(t_1, t_0) K_0 u(t_2, t_0)^* + \int_{t_0}^{t_1} u(t_1, \tau) b(\tau) \nu(\tau) b^{\mathrm{T}}(\tau) u(t_2, \tau)^* d\tau.$$

▶ Дифференцируя эту формулу по t_2, найдем

$$\frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_2} = u(t_1, t_0) K_0 u_{t_2}(t_2, t_0)^* + \int_{t_0}^{t_1} u(t_1, \tau) b(\tau) \nu(\tau) b(\tau)^{\mathrm{T}} u_{t_2}(t_2, \tau)^* d\tau =$$
$$= u(t_1, t_0) K_0 u(t_2, t_0)^* a^{\mathrm{T}}(t_2) +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} u(t_1, \tau) b(\tau) \nu(\tau) b(\tau)^{\mathrm{T}} u(t_2, \tau)^* a^{\mathrm{T}}(t_2) d\tau,$$

или

$$\frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_2} = K(t_1, t_2) a(t_2)^{\mathrm{T}}. \tag{31}$$

Начальное условие для этого уравнения имеет вид $K(t_1, t_1) = K(t_1)$. ◀

Интегрируя уравнение (31) при различных значениях t_1, получим ряд сечений ковариационной функции $K(t_1, t_2)$ при $t_2 > t_1$. После этого $K(t_1, t_2)$ при $t_2 < t_1$ определяется формулой (2.27):

$$K(t_1, t_2) = K(t_2, t_1)^{\mathrm{T}}.$$

Уравнения (26), (28) и (31) полностью определяют математическое ожидание и ковариационную функцию процесса $Z(t)$.

Пример 6. Для случайного процесса $X(t)$, определяемого уравнением примера 2,

$$\dot{X} + \alpha X = \sqrt{2D\alpha} V,$$

где V — белый шум единичной интенсивности, уравнения (26), (28) — (30) и (31) имеют вид

$$\dot{m}_x + \alpha m_x = 0, \quad \dot{D}_x = -2\alpha D_x + 2D\alpha, \quad K_x = D_x,$$
$$\dot{\Gamma}_x = -2\alpha\Gamma_x + 2D\alpha, \quad \frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_2} = -\alpha K_x(t_1, t_2).$$

Начальным условием для последнего уравнения будет условие $K_x(t_1, t_1) = D_x(t_1)$.

Пример 7. Для векторного процесса, определяемого дифференциальными уравнениями примера 3,

$$\dot{X}_1 = X_2 + q_1 V, \quad \dot{X}_2 = -b^2 X_1 - 2aX_2 + q_2 V,$$

где V — белый шум единичной интенсивности, уравнения (26), (28), (30) и (31) имеют вид

$$\dot{m}_1 = m_2, \quad \dot{m}_2 = -b^2 m_1 - 2am_2,$$
$$\dot{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b^2 & -2a \end{bmatrix} K + K \begin{bmatrix} 0 & -b^2 \\ 1 & -2a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} [q_1 q_2],$$

$$\dot{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b^2 & -2a \end{bmatrix} \Gamma + \Gamma \begin{bmatrix} 0 & -b^2 \\ 1 & -2a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} [q_1 q_2],$$

$$\frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_2} = K(t_1, t_2) \begin{bmatrix} 0 & -b^2 \\ 1 & -2a \end{bmatrix}.$$

Пример 8. Для случайного процесса $X(t)$, определяемого уравнением

$$\dot{X} = (\mu + 2at) X - (\mu + 2at)(a + bt) + b + be^{\mu t} V,$$

где V — белый шум интенсивности $\nu = 2t$, уравнения (26), (28), (30) и (31) имеют вид

$$\dot{m}_x = (\mu + 2at) m_x - (\mu + 2at)(a + bt) + b,$$

$$\dot{D}_x = 2(\mu + 2at) D_x + 2b^2 t e^{2\mu t}, \quad K_x = D_x,$$

$$\dot{\Gamma}_x = 2(\mu + 2at) \Gamma_x + 2b^2 t e^{2\mu t} - 2(\mu + 2at)(a + bt) m_x + 2bm_x,$$

$$\partial K_x(t_1, t_2)/\partial t_2 = (\mu + 2at) K_x(t_1, t_2).$$

5.2.7. Стационарные процессы в стационарных линейных системах. Рассмотрим устойчивую стационарную линейную систему (21) под действием стационарного белого шума с постоянной интенсивностью ν. В этом случае a, a_0, b постоянны, функция $u(t, \tau)$ зависит только от разности аргументов, $u(t, \tau) = w(t - \tau)$ (пример 1.17), и формулы (23), (27) и (24) при $t_0 = -\infty$ принимают вид

$$m = \int_0^\infty w(\xi) a_0 \, d\xi,$$

$$K = \int_0^\infty w(\xi) b\nu b^T w(\xi)^T \, d\xi,$$

$$k(\tau) = \int_0^\infty w(\xi + \tau) b\nu b^T w(\xi)^T \, d\xi.$$

Из этих формул видно, что с течением времени в устойчивой стационарной линейной дифференциальной системе под действием стационарного белого шума устанавливается стационарный в широком смысле процесс (п. 4.1.1). Из этих же формул с учетом (1.9) видно, что условие устойчивости системы не только достаточно, но и необходимо для существования стационарного процесса.

Так как m и K в стационарном режиме постоянны, то, полагая в уравнениях (26) и (28) $\dot{m} = 0$, $\dot{K} = 0$, получим линейные алгебраические уравнения для m и K:

$$am + a_0 = 0, \qquad aK + Ka^T + b\nu b^T = 0.$$

Если начальные значения m_0 и K_0 удовлетворяют этим уравнениям, то уравнения (26) и (28) имеют очевидное решение $m = m_0$, $K = K_0$. В этом случае при любом t_0 процесс $Z(t)$ будет стационарным в широком смысле. Это обстоятельство было использовано при построении формирующих фильтров в § 5.1.

Чтобы найти ковариационную функцию $k(\tau)$ стационарного процесса $Z(t)$ в линейной системе, транспонируем уравнение (31), предварительно поменяв в нем t_1 и t_2 местами. Тогда, учитывая, что матрица $a(t)=a$ постоянна и что $K(t_2, t_1)^{\mathrm{T}}=K(t_1, t_2)$ (п. 2.2.11), будем иметь при $t_1>t_2$

$$\frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_1}=aK(t_1, t_2).$$

Положив здесь $K(t_1, t_2)=k(\tau)$, $\nu=t_1-t_2$, $t_2=t$ и сделав замену переменных $t_1=t+\tau$, получим при фиксированном t уравнение

$$\frac{dk(\tau)}{d\tau}=ak(\tau).$$

Это обыкновенное линейное дифференциальное уравнение при начальном условии $k(0)=K$ определяет $k(\tau)$ при $\tau>0$. При $\tau<0$ согласно второму свойству ковариационной функции стационарного случайного процесса (п. 4.1.2) $k(\tau)$ определяется формулой $k(\tau)=k(-\tau)^{\mathrm{T}}$.

Решение линейного дифференциального уравнения для ковариационной функции $k(\tau)$ для устойчивой системы представляет собой линейную комбинацию функций, содержащих затухающие экспоненты. Каждой такой функции соответствует рациональная спектральная плотность. Таким образом, стационарный процесс в стационарной линейной системе (21) обладает рациональной спектральной плотностью. К этому выводу можно также прийти, если воспользоваться формулой (4.24), положив $\Phi(i\omega)=$ $=-(a-i\omega I)^{-1}b$.

Пример 9. В условиях примера 6 дисперсия D_x и ковариационная функция $k_x(\tau)$ стационарного процесса $X(t)$ определяются уравнениями

$$-\alpha D_x+\alpha D=0,$$
$$\frac{dk_x(\tau)}{d\tau}=-\alpha k_x(\tau), \qquad k_x(0)=D.$$

Для существования стационарного процесса в системе необходимо и достаточно условие $\alpha>0$.

Пример 10. Для примера 7 ковариационная матрица K и ковариационная функция $k(\tau)$ стационарного процесса при $a>0$ существуют и определяются уравнениями

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b^2 & -2a \end{bmatrix} K+K\begin{bmatrix} 0 & -b^2 \\ 1 & -2a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}[q_1 \ q_2]=0.$$
$$\frac{dk(\tau)}{d\tau}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b^2 & -2a \end{bmatrix} k(\tau), \quad \tau>0, \quad k(0)=K.$$

Заметим, что полученные результаты легко распространяются на нестационарные линейные системы (21) при постоянных a, b и ν и произвольной функции времени $a_0(t)$. В этом случае полученные уравнения для K и $k(\tau)$ остаются справедливыми, а m представляет собой функцию времени, определяемую уравнением

(26). Процесс $Z(t)$ в системе, для которого m определяется уравнением (26) при любом начальном условии, а K и $k(\tau)$ находятся изложенным здесь способом, будет ковариационно стационарным (п. 4.1.1).

§ 5.3. Конечномерные распределения вектора состояния. Общая теория

5.3.1. Одномерная характеристическая функция. Рассмотрим систему, состояние которой (в общем случае расширенный вектор состояния) описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито *)

$$\dot{Z} = a(Z,\ t) + b(Z,\ t)V, \tag{32}$$

где V — белый шум в строгом смысле (п. 3.4.2). Поставим задачу: найти все конечномерные распределения вектора состояния системы $Z(t)$, предполагая известным одномерное распределение (а следовательно, и все конечномерные распределения, п. 3.4.1) процесса с независимыми приращениями

$$W(t) = W(t_0) + \int_{t_0}^{t} V(\tau)\,d\tau. \tag{33}$$

► Для нахождения одномерной характеристической функции случайного процесса $Z(t)$ рассмотрим два близких момента времени t и $t+\Delta t$. По определению характеристической функции (*ТВ*, п. 4.5.1) значения одномерной характеристической функции $g_1(\lambda;\ t)$ процесса $Z(t)$ в моменты t и $t+\Delta t$ выражаются формулами

$$g_1(\lambda;\ t) = Me^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z(t)},$$
$$g_1(\lambda;\ t+\Delta t) = Me^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z(t+\Delta t)}.$$

Вычитая первую формулу почленно из второй, будем иметь

$$g_1(\lambda;\ t+\Delta t) - g_1(\lambda;\ t) = M\left[e^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z(t+\Delta t)} - e^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z(t)}\right] =$$
$$= M\left[e^{i\lambda^{\mathrm{T}}\Delta Z(t)} - 1\right]e^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z(t)}. \tag{34}$$

Но из (32) и (33) следует, что с точностью до бесконечно малых высших порядков

$$\Delta Z(t) = Z(t+\Delta t) - Z(t) = a(Z(t),\ t)\,\Delta t + b(Z(t),\ t)\,\Delta W,$$

или, опуская аргумент t функции $Z(t)$,

$$\Delta Z = a(Z,\ t)\,\Delta t + b(Z,\ t)\,\Delta W, \quad \Delta W = W(t+\Delta t) - W(t).$$

*) В дальнейшем будем без особых оговорок понимать все стохастические интегралы, дифференциалы и дифференциальные уравнения в смысле Ито.

Подставив это выражение в (34), найдем

$$g_1(\lambda;\ t+\Delta t)-g_1(\lambda;\ t)=M\left\{e^{i\lambda^{\mathrm{T}}[a(Z,t)\Delta t+b(Z,t)\Delta W]}-1\right\}e^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z}=$$
$$=M\left\{e^{i\lambda^{\mathrm{T}}[a(Z,t)\Delta t+b(Z,t)\Delta W]}-e^{i\lambda^{\mathrm{T}}b(Z,t)\Delta W}+e^{i\lambda^{\mathrm{T}}b(Z,t)\Delta W}-1\right\}e^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z(t)},$$

или, с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно Δt,

$$g_1(\lambda;\ t+\Delta t)-g_1(\lambda;\ t)=M\left\{e^{i\lambda^{\mathrm{T}}b(Z,t)\Delta W}\left(e^{i\lambda^{\mathrm{T}}a(Z,t)\Delta t}-1\right)+\right.$$
$$\left.+e^{i\lambda^{\mathrm{T}}b(Z,t)\Delta W}-1\right\}e^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z}=M\left\{e^{i\lambda^{\mathrm{T}}b(Z,t)\Delta W}\,i\lambda^{\mathrm{T}}a(Z,\ t)\,\Delta t+\right.$$
$$\left.+e^{i\lambda^{\mathrm{T}}b(Z,t)\Delta W}-1\right\}e^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z}. \qquad (35)$$

Здесь читатель может поставить вопрос: почему, приняв

$$e^{i\lambda^{\mathrm{T}}a(Z,t)\Delta t}-1\approx i\lambda^{\mathrm{T}}a(Z,\ t)\,\Delta t,$$

мы не сделали то же самое в отношении величины

$$e^{i\lambda^{\mathrm{T}}b(Z,t)\Delta W}-1?$$

Чтобы ответить на этот вопрос, вспомним, что ΔW является бесконечно малой порядка $\sqrt{\Delta t}$ (п. 3.5.1). Поэтому, ограничиваясь линейным членом разложения этой величины в ряд Маклорена, можно потерять бесконечно малые порядка Δt (так же как при дифференцировании сложной функции в § 3.5).

Применим теперь вычисления математического ожидания в (35) формулу полного математического ожидания (*ТВ*, п. 4.3.3), взяв сначала условное математическое ожидание при фиксированном значении z случайной величины Z, а потом взяв математическое ожидание с учетом случайности Z. Так как в уравнении Ито (32) случайные величины $Z=Z(t)$ и $\Delta W=W(t+\Delta t)-W(t)$ независимы, то условное математическое ожидание любой функции величины ΔW при данном z не зависит от Z и равно безусловному математическому ожиданию этой функции. Следовательно,

$$Me^{i\lambda^{\mathrm{T}}b(Z,t)\Delta W}\,i\lambda^{\mathrm{T}}a(Z,\ t)\,e^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z}=MM\left[e^{i\lambda^{\mathrm{T}}b(Z,t)\Delta W}\,i\lambda^{\mathrm{T}}a(Z,t)\,e^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z}\,|\,Z\right]=$$
$$=M\left\{i\lambda^{\mathrm{T}}a(Z,\ t)\,e^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z}M\left[e^{i\lambda^{\mathrm{T}}b(Z,t)\Delta W}\,|\,Z\right]\right\}=$$
$$=M\left[i\lambda^{\mathrm{T}}a(Z,\ t)\,e^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z}Me^{i\lambda^{\mathrm{T}}b(Z,t)\Delta W}\right]$$

и, аналогично,

$$Me^{i\lambda^{\mathrm{T}}b(Z,t)\Delta W+i\lambda^{\mathrm{T}}Z}=M\left[e^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z}Me^{i\lambda^{\mathrm{T}}b(Z,t)\Delta W}\right].$$

Но $Me^{i\mu^{\mathrm{T}}\Delta W}$ представляет собой характеристическую функцию приращения ΔW процесса $W(t)$, которую мы обозначим $h(\mu;\ t,\ t+\Delta t)$:

$$Me^{i\mu^{\mathrm{T}}\Delta W}=h(\mu;\ t,\ t+\Delta t).$$

Поэтому

$$Me^{i\lambda^{T}b(Z,t)\Delta W}=h(b(Z,t)^{T}\lambda;\ t,\ t+\Delta t)$$

и предыдущие формулы принимают вид

$$Me^{i\lambda^{T}b(Z,t)\Delta W}\,i\lambda^{T}a(Z,t)\,e^{i\lambda^{T}Z}=Mi\lambda^{T}a(Z,t)\,h(b(Z,t)^{T}\lambda;\ t,\ t+\Delta t)\,e^{i\lambda^{T}Z},$$

$$Me^{i\lambda^{T}b(Z,t)\Delta W+i\lambda^{T}Z}=Mh(b(Z,t)^{T}\lambda;\ t,\ t+\Delta t)\,e^{i\lambda^{T}Z}.$$

Подставив эти выражения в (34), получим

$$g_1(\lambda;\ t+\Delta t)-g_1(\lambda;\ t)=M\{i\lambda^{T}a(Z,t)\,h(b(Z,t)^{T}\lambda;\ t,\ t+\Delta t)\,\Delta t+$$
$$+h(b(Z,t)^{T}\lambda;\ t,\ t+\Delta t)-1\}\,e^{i\lambda^{T}Z}. \qquad (36)$$

Воспользуемся теперь формулой (3.33), выражающей характеристическую функцию приращения процесса с независимыми приращениями через его одномерную характеристическую функцию. Тогда, обозначив через $h_1(\mu;\ t)$ одномерную характеристическую функцию процесса $W(t)$, будем иметь

$$h(\mu;t,\ t+\Delta t)-1=\frac{h_1(\mu;\ t+\Delta t)}{h_1(\mu;\ t)}-1=\frac{h_1(\mu;\ t+\Delta t)-h_1(\mu;\ t)}{h_1(\mu;\ t)}.$$

Предполагая, что $h_1(\mu;\ t)$ имеет непрерывную производную по t, по формуле конечных приращений Лагранжа находим

$$h_1(\mu;\ t+\Delta t)-h_1(\mu;\ t)=\frac{\partial h_1(\mu;\ \tau)}{\partial t}\Delta t,$$

где $\tau\in(t,\ t+\Delta t)$. Следовательно,

$$h(\mu;\ t,\ t+\Delta t)-1=\frac{1}{h_1(\mu;\ t)}\,\frac{\partial h_1(\mu;\ \tau)}{\partial t}\Delta t,$$

или, с точностью до бесконечно малых высших порядков относительно Δt,

$$h(\mu;\ t,\ t+\Delta t)-1=\frac{1}{h_1(\mu;\ t)}\,\frac{\partial h_1(\mu;\ t)}{\partial t}\Delta t.$$

Положив

$$\chi(\mu;\ t)=\frac{1}{h_1(\mu;\ t)}\,\frac{\partial h_1(\mu;\ t)}{\partial t}, \qquad (37)$$

найдем

$$h(\mu;\ t,\ t+\Delta t)-1=\chi(\mu;\ t)\,\Delta t.$$

Подставив отсюда выражение $h(\mu;\ t,\ t+\Delta t)$ в (36), получим с точностью до бесконечно малых высших порядков относительно Δt

$$g_1(\lambda;\ t+\Delta t)-g_1(\lambda;\ t)=M\{i\lambda^{T}a(Z,t)+\chi(b(Z,t)^{T}\lambda;\ t)\}\,e^{i\lambda^{T}Z}\Delta t.$$

Наконец, разделив обе части этой формулы на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим уравнение, определяющее одномерную характеристическую функцию $g_1(\lambda;\ t)$ вектора состояния системы $Z=Z(t)$:

$$\frac{\partial g_1(\lambda;\, t)}{\partial t}=M\{i\lambda^{\mathrm{T}}a(Z,\, t)+\chi(b(Z,\, t)^{\mathrm{T}}\lambda;\, t)\}\, e^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z}. \blacktriangleleft \tag{38}$$

Разъясним теперь, почему эта формула представляет собой уравнение относительно $g_1(\lambda;\, t)$. Математическое ожидание в правой части определяется одномерным распределением процесса $Z(t)$, которое в свою очередь полностью определяется его одномерной характеристической функцией $g_1(\lambda;\, t)$. Следовательно, правая часть формулы (38) при данном t представляет собой функционал от характеристической функции $g_1(\lambda;\, t)$. Поэтому (38) представляет собой уравнение относительно $g_1(\lambda;\, t)$.

Пусть $Z_0=Z(t_0)$ — начальное значение вектора состояния системы в момент t_0, представляющее собой случайную величину, независимую от значений белого шума $V(t)$ при $t\geqslant t_0$ (от будущих приращений $W(s)-W(t)$ процесса $W(t)$, $s>t\geqslant t_0$)*). Обозначим через $g_0(\lambda)$ характеристическую функцию величины Z_0. Тогда начальное условие для уравнения (38) будет иметь вид

$$g_1(\lambda;\, t_0)=g_0(\lambda). \tag{39}$$

Уравнение (38) и начальное условие (39) полностью и однозначно определяют одномерную характеристическую функцию $g_1(\lambda;\, t)$ вектора состояния системы в любой момент времени $t\geqslant t_0$.

Само собой разумеется, уравнение (38) справедливо только в том случае, когда математическое ожидание в правой части существует. В этом случае, как это следует из нашего вывода уравнения (38), $g_1(\lambda;\, t)$ дифференцируема по t и удовлетворяет уравнению (38).

Подчеркнем, что уравнение (38) справедливо только при условии, что уравнение (31) является уравнением Ито. Только при этом условии текущее значение вектора состояния системы $Z(t)$ независимо от приращения $\Delta W=W(t+\Delta t)-W(t)$ процесса $W(t)$, и условное математическое ожидание величины $e^{i\mu^{\mathrm{T}}\Delta W}$ относительно Z совпадает с безусловным. А этим мы воспользовались при выводе формулы (36).

Уравнение (38) было впервые получено в начале сороковых годов одним из авторов [55], который, по-видимому, первым изучал стохастические дифференциальные уравнения с произвольным процессом с независимыми приращениями $W(t)$. В более ранних работах С. Н. Бернштейна [5, 6] и в более поздней работе Ито [30] изучались только стохастические дифференциальные уравнения с винеровским процессом $W(t)$.

Уравнение (38) можно также вывести, пользуясь формулой Ито (3.61) (в случае винеровского процесса $W(t)$) или обобщенной

*) Независимость Z_0 от $V(t)$ при $t\geqslant t_0$ необходима для того, чтобы состояние системы в любой момент было независимым от будущих приращений процесса $W(t)$.

формулой Ито (3.75) (в случае произвольного процесса с независимыми приращениями $W(t)$). Для этого достаточно найти по формуле (3.61) или (3.75) стохастический дифференциал функции $e^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z(t)}$ процесса $Z(t)$ и взять его математическое ожидание. В результате получится уравнение (38) с функцией $\chi(\mu;\, t)$, определяемой соответствующей формулой п. 5.3.5.

Функцию $\chi(\mu;\, t)$ можно трактовать иначе. Положив $s=t+\Delta t$ и заметив, что величина $Me^{i\mu^{\mathrm{T}}\Delta W}=Me^{i\mu^{\mathrm{T}}[W(s)-W(t)]}$ представляет собой характеристическую функцию приращения процесса $W(t)$ на интервале $(t,\, s)$,

$$Me^{i\mu^{\mathrm{T}}\Delta W}=h(\mu;\, t,\, s),$$

приходим к выводу, что

$$\chi(\mu;\, t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(\mu;\, t,\, t+\Delta t)-1}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(\mu;\, t,\, t+\Delta t)-h(\mu;\, t,\, t)}{\Delta t}=$$
$$=\left[\frac{\partial h(\mu;\, t,\, s)}{\partial s}\right]_{s=t}.$$

Таким образом,

$$\chi(\mu;\, t)=[\partial h(\mu;\, t,\, s)/\partial s]_{s=t}. \tag{37a}$$

Ясно, что эта формула эквивалентна формуле (37). Чтобы убедиться в этом, достаточно подставить в (37а) выражение $h(\mu;\, t,\, s)=h_1(\mu;\, s)/h_1(\mu;\, t)$, вытекающее из (3.33), выполнить дифференцирование по s и положить $s=t$.

Теперь рассмотрим случай непрерывно-дискретной системы, вектор состояния которой $Z=[Z'^{\mathrm{T}}Z''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ (в общем случае расширенный) определяется системой уравнений

$$\dot{Z}'=a(Z,\, t)+b(Z,\, t)V,$$
$$Z''=\sum_{k=0}^{\infty}Z''_k\mathbf{1}_{A_k}(t),\quad Z''_{k+1}=\omega_k(Z_k,\, V_k), \tag{32a}$$

где Z_k — значение $Z(t)$ при $t=t^{(k)}$, $Z_k=[Z_k'^{\mathrm{T}}\; Z_k''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}=Z(t^{(k)})$ $(k=0,\, 1,\, 2,\, \ldots)$, a, b, ω_k — функции указанных аргументов, $\mathbf{1}_{A_k}(t)$ — индикатор интервала $A_k=[t^{(k)},\, t^{(k+1)})$ $(k=0,\, 1,\, 2\ldots)$, V — белый шум в строгом смысле, $\{V_k\}$ — последовательность независимых случайных величин, независимая от белого шума V. Одномерную характеристическую функцию $h_1(\mu;\, t)$ процесса с независимыми приращениями $W(t)$, слабая с. к. производная которого является белым шумом V, и распределения случайных величин V_k будем считать известными.

Вводя случайные процессы

$$Z'''(t)=\sum_{k=0}^{\infty}Z'_k\mathbf{1}_{A_k}(t),\quad \overline{Z}(t)=[Z'(t)^{\mathrm{T}}Z''(t)^{\mathrm{T}}Z'''(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

выведем так же, как и раньше, уравнение для одномерной характеристической функции

$$g_1(\lambda;\ t) = Me^{i\lambda^{\mathrm{T}}\overline{Z}(t)} = M\exp\{i\lambda'^{\mathrm{T}}Z'(t) + i\lambda''^{\mathrm{T}}Z''(t) + i\lambda'''^{\mathrm{T}}Z'''(t)\} = \\ = M\exp\{i\lambda'^{\mathrm{T}}Z'(t) + i\lambda''^{\mathrm{T}}Z''_k + i\lambda'''^{\mathrm{T}}Z'_k\}$$

процесса $\overline{Z}(t)$:

$$\frac{\partial g_1(\lambda;\ t)}{\partial t} = M\{i\lambda'^{\mathrm{T}}a(Z,\ t) + \chi(b(Z,\ t)^{\mathrm{T}}\lambda';\ t)\}\,e^{i\lambda^{\mathrm{T}}\overline{Z}}. \tag{38а}$$

Принимая начальный момент $t_0 = t^{(0)}$, получим начальное условие для уравнения (38а):

$$g_1(\lambda;\ t_0) = M\exp\{i(\lambda'^{\mathrm{T}} + \lambda'''^{\mathrm{T}})Z'_0 + i\lambda''^{\mathrm{T}}Z''_0\} = g_0([\lambda'^{\mathrm{T}} + \lambda'''^{\mathrm{T}}\lambda''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}), \tag{39а}$$

где $g_0(\rho)$ — характеристическая функция начального значения $Z_0 = Z(t_0)$ процесса $Z(t)$.

В момент $t^{(k)}$ значение $g_1(\lambda;\ t)$, очевидно, равно

$$M\exp\{i(\lambda'^{\mathrm{T}} + \lambda'''^{\mathrm{T}})Z'_k + i\lambda''^{\mathrm{T}}Z''_k\},$$

т. е. равно значению $g_k([\lambda'^{\mathrm{T}} + \lambda'''^{\mathrm{T}}\lambda''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}})$ характеристической функции $g_k(\rho)$ случайной величины $Z_k = [Z_k'^{\mathrm{T}}\ Z_k''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$. Если функция $\chi(\mu;\ t)$ является непрерывной функцией t при любом μ, то $g_1(\lambda;\ t)$ стремится к

$$M\exp\{i\lambda'^{\mathrm{T}}Z'_{k+1} + i\lambda''^{\mathrm{T}}Z''_k + i\lambda'''^{\mathrm{T}}Z'_k\}$$

при $t \to t^{(k+1)}$, т. е. к совместной характеристической функции $g'_k(\lambda',\ \lambda'',\ \lambda''')$ случайных величин $Z'_{k+1},\ Z''_k,\ Z'_k$,

$$g_1(\lambda;\ t^{(k+1)} - 0) = \lim_{t \to t^{(k+1)}} g_1(\lambda;\ t) = g'_k(\lambda',\ \lambda'',\ \lambda''').$$

В момент $t^{(k+1)}$ функция $g_1(\lambda;\ t)$ меняет свое значение скачком и становится равной

$$M\exp\{i(\lambda'^{\mathrm{T}} + \lambda'''^{\mathrm{T}})Z'_{k+1} + i\lambda''^{\mathrm{T}}Z''_{k+1}\} = g_{k+1}([\lambda'^{\mathrm{T}} + \lambda'''^{\mathrm{T}}\lambda''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}).$$

Для вычисления этого значения подставим сюда выражение для Z''_{k+1} из последнего уравнения (32а). Тогда получим

$$g_1(\lambda;\ t^{(k+1)}) = M\exp\{i(\lambda'^{\mathrm{T}} + \lambda'''^{\mathrm{T}})Z'_{k+1} + i\lambda''^{\mathrm{T}}\omega_k(Z_k,\ V_k)\}. \tag{38б}$$

Вследствие независимости последовательности случайных величин $\{V_k\}$ от белого шума V и независимости V_k от $V_0,\ V_1,\ \ldots,\ V_{k-1}$ случайные величины Z_k и Z'_{k+1} не зависят от V_k. Следовательно, математическое ожидание в правой части уравнения (38б) полностью определяется известным распределением случайной величины V_k и совместной характеристической функцией $g'_k(\lambda',\ \lambda'',\ \lambda''')$ случайных величин $Z'_{k+1},\ Z''_k,\ Z'_k$, т. е. функцией $g_1(\lambda;\ t^{(k+1)} - 0)$. Таким образом, уравнение (38а) с начальным условием (39а) и формула (38б) определяют эволюцию одномерной характетеристической функции $g_1(\lambda; t)$ процесса $\bar{Z}(t)=[Z'(t)^{\mathrm{T}}\, Z''(t)^{\mathrm{T}}\, Z'''(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ и ее скачкообразные приращения в моменты $t^{(k)}$ $(k=1, 2, \ldots)$.

5.3.2. Конечномерные характеристические функции. Совершенно так же выводятся уравнения, определяющие другие конечномерные характеристические функции состояния системы [62, 63].

▶ Пусть

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n) = M \exp\{i\lambda_1^{\mathrm{T}} Z(t_1) + \ldots + i\lambda_n^{\mathrm{T}} Z(t_n)\} \tag{40}$$

— n-мерная характеристическая функция вектора состояния системы Z. Дав последнему аргументу t_n при $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ приращение Δt и повторив почти дословно рассуждения предыдущего пункта, получим следующее уравнение для n-мерной характеристической функции процесса $Z(t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t_n} g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n) = M\{i\lambda_n^{\mathrm{T}} a(Z(t_n), t_n) + \chi(b(Z(t_n), t_n)^{\mathrm{T}}\lambda_n; t_n)\} \exp\{i\lambda_1^{\mathrm{T}} Z(t_1) + \ldots + i\lambda_n^{\mathrm{T}} Z(t_n)\} \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{41}$$

Правая часть этого равенства определяется n-мерным распределением процесса $Z(t)$, т. е. зависит от $g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n)$. Следовательно, (41) представляет собой уравнение относительно $g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n)$.

Чтобы найти начальное условие для уравнения (41), положим в (40) $t_n = t_{n-1}$:

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_{n-1}, t_{n-1}) = M \exp\{i\lambda_1^{\mathrm{T}} Z(t_1) + \ldots + i(\lambda_{n-1}^{\mathrm{T}} + \lambda_n^{\mathrm{T}}) Z(t_{n-1})\}.$$

Правая часть этого равенства представляет собой $(n-1)$-мерную характеристическую функцию процесса $Z(t)$ с λ_{n-1}, замененным суммой $\lambda_{n-1}+\lambda_n$. Следовательно,

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_{n-1}, t_{n-1}) = g_{n-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}, \lambda_{n-1}+\lambda_n; t_1, \ldots, t_{n-1}). \tag{42}$$

Это равенство и служит начальным условием для уравнения (41) при $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n$.

Чтобы найти $g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n)$ при любых $t_1, \ldots, t_n$, предположим, что для некоторой перестановки $(p_1, \ldots, p_n)$ чисел $(1, \ldots, n)$ $t_{p_1} < t_{p_2} < \ldots < t_{p_{n-1}} < t_{p_n}$ (такая перестановка всегда существует). Тогда в силу второго условия согласованности конечномерных распределений (п. 2.1.2)

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n) = g_n(\lambda_{p_1}, \ldots, \lambda_{p_n}; t_{p_1}, \ldots, t_{p_n}). \tag{43}$$

Это равенство выражает $g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n)$ при всех $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; $t_1, \ldots, t_n$, если эта функция известна для любого упорядоченного набора n моментов времени. ◀

Таким образом, уравнение (38) с начальным условием (39), уравнение (41) с начальным условием (42) и условие согласованности конечномерных распределений (43) при $n=2, 3, \ldots$ последовательно определяют все конечномерные распределения вектора состояния системы $Z(t)$. По теореме А. Н. Колмогорова (п. 2.1.2) конечномерные распределения случайной функции однозначно определяют ее распределение в соответствующем функциональном пространстве. Следовательно, уравнения (38) и (41) с начальными условиями (39) и (42) полностью определяют распределение состояния системы в соответствующем функциональном пространстве. В прикладных задачах это пространство в случае нормально распределенного белого шума V (винеровского процесса $W(t)$, п. 3.4.3) всегда будет пространством непрерывных функций на любом конечном интервале $[t_0, T]$, а в случае наличия в $W(t)$ пуассоновских компонент — пространством ограниченных кусочно-непрерывных функций с не более чем счетным множеством разрывов первого рода.

Уравнение (41) может быть также выведено путем нахождения математического ожидания стохастического дифференциала функции $\exp\{i\lambda_1^{\mathrm{T}}Z_{t_1}+\ldots+i\lambda_{n-1}^{\mathrm{T}}Z_{t_{n-1}}+i\lambda_n^{\mathrm{T}}Z(t_n)\}$ процесса $Z(t_n)$ при фиксированных $t_1, \ldots, t_{n-1}$, вычисленного по формуле дифференцирования сложной функции (3.61) или (3.75).

В случае непрерывно-дискретной системы, вектор состояния которой (в общем случае расширенный) определяется уравнениями (32а), таким же путем получаем уравнение для n-мерной характеристической функции $g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n)$ случайного процесса $Z(t)=[Z'(t)^{\mathrm{T}}\ Z''(t)^{\mathrm{T}}\ Z'''(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$:

$$\partial g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n)/\partial t_n = \\ = M\{i\lambda_n'^{\mathrm{T}}a(Z(t_n), t_n)+\chi(b(Z(t_n), t_n)^{\mathrm{T}}\lambda_n'; t_n)\}\times \\ \times\exp\{i\lambda_1^{\mathrm{T}}\overline{Z}(t_1)+\ldots+i\lambda_n^{\mathrm{T}}\overline{Z}(t_n)\}, \tag{41а}$$

и формулу для значения $g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n)$ при $t_n=t^{(k+1)}\geqslant \geqslant t_{n-1}>\ldots>t_1$:

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_{n-1}, t^{(k+1)})=M\exp\{i\lambda_1^{\mathrm{T}}\overline{Z}(t_1)+\ldots \\ \ldots+i\lambda_{n-1}^{\mathrm{T}}\overline{Z}(t_{n-1})+i(\lambda_n'^{\mathrm{T}}+\lambda_n'''^{\mathrm{T}})Z_{k+1}'+i\lambda_n''^{\mathrm{T}}\omega_k(Z_k, V_k)\}. \tag{41б}$$

В точке $t_n=t^{(k+1)}$ $g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n)$ скачкообразно изменяется от

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_{n-1}, t^{(k-1)}-0)= \\ =M\exp\{i\lambda_1^{\mathrm{T}}\overline{Z}(t_1)+\ldots+i\lambda_{n-1}^{\mathrm{T}}\overline{Z}(t_{n-1})+ \\ +i\lambda_n'^{\mathrm{T}}Z_{k+1}'+i\lambda_n''^{\mathrm{T}}Z_k''+i\lambda_n'''^{\mathrm{T}}Z_k'\}$$

до значения $g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_{n-1}, t^{(k+1)})$, определяемого формулой (41б).

Правая часть (41б) полностью определяется известным распределением случайной величины V_k и совместной характеристической функцией $g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_{n-1}, t^{(k+1)}-0)$ случайных величин $\bar{Z}(t_1), \ldots, \bar{Z}(t_{n-1}), Z'_{k+1}, Z''_k, Z'_k$. Таким образом, уравнение (41а) с начальным условием (42) и формула (41б) определяют эволюцию и скачкообразные приращения $g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n)$ в точках $t^{(k+1)}$ при возрастании t_n, начиная со значения t_{n-1}.

5.3.3. Конкретная форма уравнений для характеристических функций. Предположим, что существует одномерная плотность $f_1(z; t)$ вектора состояния системы Z. Тогда математическое ожидание в (38) легко вычисляется и уравнение (38) принимает вид

$$\frac{\partial g_1(\lambda; t)}{\partial t} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [i\lambda^{\mathrm{T}} a(z, t) + \chi(b(z, t)^{\mathrm{T}} \lambda; t)] e^{i\lambda^{\mathrm{T}} z} f_1(z; t)\, dz. \tag{44}$$

С другой стороны, плотность $f_1(z; t)$ выражается через характеристическую функцию $g_1(\lambda; t)$ формулой (*ТВ*, п. 4.5.2)

$$f_1(z; t) = \frac{1}{(2\pi)^p} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu^{\mathrm{T}} z} g_1(\mu; t)\, d\mu, \tag{45}$$

где p — размерность вектора состояния Z, а интеграл по каждой компоненте p-мерного вектора μ понимается как главное значение интеграла в смысле Коши [41] в случае, когда $g_1(\mu; t)$ не абсолютно интегрируема.

Уравнения (44) и (45) представляют собой систему двух уравнений относительно $g_1(\lambda; t)$ и $f_1(z; t)$. Исключив из этих уравнений $f_1(z; t)$ путем подстановки выражения (45) в (44), получим одно уравнение для $g_1(\lambda; t)$:

$$\frac{\partial g_1(\lambda; t)}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^p} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [i\lambda^{\mathrm{T}} a(z, t) + \chi(b(z, t)^{\mathrm{T}} \lambda; t)] \times \\ \times e^{i(\lambda^{\mathrm{T}} - \mu^{\mathrm{T}})} g_1(\mu; t)\, d\mu\, dz. \tag{46}$$

Это линейное интегро-дифференциальное уравнение относительно $g_1(\lambda; t)$. Оно было впервые получено в [55].

Совершенно так же, предположив, что существуют все конечномерные плотности процесса $Z(t)$, приведем уравнение (41) к виду

$$\frac{\partial}{\partial t_n} g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{np}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} [i\lambda_n^{\mathrm{T}} a(z_n, t_n) + \chi(b(z_n, t_n)^{\mathrm{T}} \lambda_n; t_n)] \times \\ \times \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^{\mathrm{T}} - \mu_k^{\mathrm{T}}) z_k \right\} g_n(\mu_1, \ldots, \mu_n; t_1, \ldots, t_n)\, d\mu_1 \ldots d\mu_n\, dz_1 \ldots dz_n. \tag{47}$$

Это линейное интегро-дифференциальное уравнение относительно $g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n)$ *).

5.3.4. Уравнения для конечномерных плотностей. Аналогично, заменив в уравнении (44) переменную интегрирования z на ζ, умножив это уравнение на $(2\pi)^{-p} e^{-i\lambda^{\mathrm{T}} z}$ и интегрируя по λ, получим интегро-дифференциальное уравнение для одномерной плотности $f_1(z; t)$:

$$\frac{\partial f_1(z; t)}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^p} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [i\lambda^{\mathrm{T}} a(\zeta, t) + \chi(b(\zeta, t)^{\mathrm{T}} \lambda; t)]\, e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(\zeta - z)} f_1(\zeta, t)\, d\zeta\, d\lambda. \tag{48}$$

Совершенно так же из уравнения (41), в котором математическое ожидание выражено через n-мерную плотность $f_n(z_1, \ldots, z_n; t_1, \ldots, t_n)$, получается интегро-дифференциальное уравнение для n-мерной плотности:

$$\frac{\partial}{\partial t_n} f_n(z_1, \ldots, z_n; t_1, \ldots, t_n) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{np}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} [i\lambda_n^{\mathrm{T}} a(\zeta_n, t_n) + \chi(b(\zeta_n, t_n)^{\mathrm{T}} \lambda_n; t)] \times \\ \times \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{\mathrm{T}} (\zeta_k - z_k) \right\} f_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_n; t_1, \ldots, t_n) \times \\ \times d\zeta_1 \ldots d\zeta_n\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_n. \tag{49}$$

Начальное условие для уравнения (48) имеет вид

$$f_1(z; t_0) = f_0(z), \tag{50}$$

где $f_0(z)$ — плотность начального значения Z_0 вектора состояния. Начальное условие для уравнения (49) имеет вид

$$f_n(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n; t_1, \ldots, t_{n-1}, t_{n-1}) = \\ = f_{n-1}(z_1, \ldots, z_{n-1}; t_1, \ldots, t_{n-1})\, \delta(z_n - z_{n-1}) \tag{51}$$

(δ-функция в правой части объясняется тем, что при $t_n = t_{n-1}$ величина $Z(t_n)$ с вероятностью 1 совпадает с $Z(t_{n-1})$).

5.3.5. Формулы для функции χ. Конкретный вид функции $\chi(\mu; t)$ в полученных уравнениях определяется характером процесса с независимыми приращениями $W(t)$.

---

*) Для читателей, знакомых с теорией дифференциальных уравнений в абстрактных пространствах, заметим, что уравнения (38) и (41) в общем случае представляют собой обыкновенные линейные однородные дифференциальные уравнения с неограниченными операторами в банаховых пространствах непрерывных ограниченных функций переменных λ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ соответственно [17, 47].

Если $W(t)$ — винеровский процесс, то его одномерная характеристическая функция $h_1(\mu;\ t)$ в соответствии с п. 3.4.3 определяется формулой

$$h_1(\mu;\ t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\mu^{\mathrm{T}}\int_0^t \nu(\tau)\,d\tau\,\mu\right\}.$$

Согласно (37) функция $\chi(\mu;\ t)$ представляет собой логарифмическую производную характеристической функции $h_1(\mu;\ t)$ по t,

$$\chi(\mu;\ t) = \frac{\partial}{\partial t}\ln h_1(\mu;\ t).$$

Подставив сюда выражение функции $h_1(\mu;\ t)$, находим

$$\chi(\mu;\ t) = -\frac{1}{2}\mu^{\mathrm{T}}\nu(t)\,\mu. \tag{52}$$

Если $W(t)$ представляет собой общий пуассоновский процесс, то согласно результату примера 3.3

$$h_1(\mu;\ t) = \exp\left\{[g(\mu)-1]\int_0^t \nu(\tau)\,d\tau\right\},$$

где $g(\mu)$ — характеристическая функция скачков, а $\nu(t)$ — интенсивность потока скачков процесса $W(t)$. Взяв логарифмическую производную функции $h_1(\mu;\ t)$, находим функцию $\chi(\mu;\ t)$ для пуассоновского процесса:

$$\chi(\mu;\ t) = [g(\mu)-1]\,\nu(t). \tag{53}$$

В частном случае простого пуассоновского процесса с единичными скачками $g(\mu) = e^{i\mu}$.

Если процесс $W(t)$ представляет собой линейную комбинацию независимых винеровского и пуассоновских процессов,

$$W(t) = W_0(t) + \sum_{k=1}^{N} c_k P_k(t),$$

то функция $\chi(\mu;\ t)$ определяется формулой

$$\chi(\mu;\ t) = -\frac{1}{2}\mu^{\mathrm{T}}\nu_0(t)\,\mu + \sum_{k=1}^{N}[g_k(c_k^{\mathrm{T}}\mu)-1]\,\nu_k(t), \tag{54}$$

где $\nu_0(t)$ — интенсивность винеровского процесса $W_0(t)$, $g_k(\lambda)$ — характеристическая функция скачков общего пуассоновского процесса $P_k(t)$, а $\nu_k(t)$ — интенсивность потока его скачков.

Если процесс $W(t)$ состоит из N независимых блоков, $W(t) = [W_1(t)^{\mathrm{T}} \ldots W_N(t)^{\mathrm{T}}]$, то, разделив μ на соответствующие блоки, $\mu = [\mu_1^{\mathrm{T}} \ldots \mu_N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, будем иметь

$$h_1(\mu;\ t) = [h_{11}(\mu_1;\ t) \ldots h_{1N}(\mu_N;\ t)]$$

и, следовательно,

$$\chi(\mu;\ t)=\sum_{k=1}^{N}\chi_k(\mu_k;\ t),$$

где $h_{1k}(\mu_k;\ t)$ и $\chi_k(\mu_k;\ t)$ — одномерная характеристическая функция процесса $W_k(t)$ и соответствующая функция χ. Отсюда, разделив матрицу $b(z,\ t)$ в уравнении (32) на соответствующие блоки, $b(z,\ t)=[b_1(z,\ t)\ \ldots\ b_N(z,\ t)]$, находим

$$\chi(b(z,\ t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)=\sum_{k=1}^{N}\chi_k(b_k(z,\ t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t).$$

Пуассоновские процессы, особенно простые, играют большую роль в теории массового обслуживания и связанной с ней теории надежности технических систем. При приближенном описании процессов обслуживания и восстановления отказавших элементов с помощью стохастических дифференциальных уравнений следует пользоваться формулой (53) для функции $\chi(\mu;\ t)$ или формулой (54) при $\nu_0=0$. При этом, как правило, будет $g(\mu)=$ $=g_k(\mu)=e^{i\mu}$.

В общем случае, когда процесс $W(t)$ определяется формулой (3.42),

$$W(t)=W_0(t)+\int_{R^q}c(x)\,P(t,\ dx),$$

где $W_0(t)$ — винеровский процесс, а $P(t,\ B)$ — независимая от $W_0(t)$ пуассоновская мера (п. 3.4.5), дифференцируя формулу (3.47) для одномерной характеристической функции процесса $W(t)$ по t и учитывая, что математическое ожидание пуассоновского процесса равно интегралу от его интенсивности, и формулу для ковариационной функции винеровского процесса (п. 3.4.3), получим

$$\chi(\rho;\ t)=-\frac{1}{2}\rho^{\mathrm{T}}\nu_0(t)\,\rho+\int_{R^q}[e^{i\rho^{\mathrm{T}}c(x)}-1-i\rho^{\mathrm{T}}c(x)]\,\nu_P(t,\ x)\,dx,$$

где $\nu_0(t)$ — интенсивность винеровского процесса $W_0(t)$, а $\nu_P(t,x)\,dx=[\partial\mu(t,x)/\partial t]\,dx$ — интенсивность пуассоновского потока скачков процесса $W(t)$, равных $c(x)$ (пп. 3.4.4 и 3.4.5).

5.3.6. Уравнения для конечномерных плотностей в случае винеровского процесса. Рассмотрим теперь частный случай винеровского процесса $W(t)$. В этом случае в соответствии с (52)

$$\chi(b(\zeta,\ t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)=-\frac{1}{2}\lambda^{\mathrm{T}}b(\zeta,\ t)\,\nu(t)\,b(\zeta,\ t)^{\mathrm{T}}\lambda$$

и уравнение (48) принимает вид

$$\frac{\partial f_1(z;\ t)}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^p} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[i\lambda^{\mathrm{T}} a(\zeta,\ t) - \frac{1}{2} \lambda^{\mathrm{T}} b(\zeta, t)\, \nu(t)\, b(\zeta,\ t)^{\mathrm{T}} \lambda \right] \times$$
$$\times e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(\zeta - z)} f_1(\zeta;\ t)\, d\zeta\, d\lambda,$$

или, принимая во внимание, что для любого вектора u и любой квадратной матрицы A $u^{\mathrm{T}}Au = \mathrm{tr}\,(uu^{\mathrm{T}}A)$,

$$\frac{\partial f_1(z;\ t)}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^p} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ i\lambda^{\mathrm{T}} a(\zeta, t) - \frac{1}{2} \mathrm{tr}\,[\lambda\lambda^{\mathrm{T}} b(\zeta,\ t)\, \nu(t)\, b(\zeta,\ t)^{\mathrm{T}}] \right\} \times$$
$$\times e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(\zeta - z)} f_1(z;\ t)\, d\zeta\, d\lambda. \qquad (55)$$

► Теперь воспользуемся формулой (*ТВ*, приложение 1)

$$\frac{1}{(2\pi)^p} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(\zeta - z)}\, d\lambda = \delta(\zeta - z).$$

Дифференцируя эту формулу по ζ, получаем

$$\frac{1}{(2\pi)^p} \int\limits_{-\infty}^{\infty} i\lambda e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(\zeta - z)}\, d\lambda = \frac{\partial}{\partial \zeta} \delta(\zeta - z) = \delta'(\zeta - z),$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^p} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\lambda^{\mathrm{T}} e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(\zeta - z)}\, d\lambda = \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial \zeta} \delta(\zeta - z) = \delta''(\zeta - z).$$

Здесь λ и ζ — p-мерные векторы и в соответствии с этим $\partial/\partial\zeta = [\partial/\partial\zeta_1 \ \ldots \ \partial/\partial\zeta_p]^{\mathrm{T}}$ — вектор градиента в p-мерном пространстве, а $(\partial/\partial\zeta)(\partial^{\mathrm{T}}/\partial\zeta)$ — квадратная матрица операторов двойного дифференцирования по компонентам вектора ζ. Иными словами, $\delta'(\zeta - z)$ представляет собой матрицу-столбец, элементами которой служат частные производные δ-функции по компонентам векторного аргумента, а $\delta''(\zeta - z)$ — квадратную матрицу, элементами которой служат все вторые производные δ-функции по компонентам векторного аргумента. На основании полученных формул

$$\frac{1}{(2\pi)^p} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} i\lambda^{\mathrm{T}} a(\zeta,\ t)\, e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(\zeta - z)} f_1(\zeta;\ t)\, d\zeta\, d\lambda =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta'(\zeta - z)^{\mathrm{T}} a(\zeta,\ t)\, f_1(\zeta;\ t)\, d\zeta = -\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial z} [a(z,\ t)\, f_1(z;\ t)],$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^p} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\lambda^{\mathrm{T}} b(\zeta,\ t)\, \nu(t)\, b(\zeta,\ t)^{\mathrm{T}} e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(\zeta - z)} f_1(\zeta;\ t)\, d\zeta\, d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta''(\zeta - z) b(\zeta, t) \nu(t) b(\zeta, t)^{\mathrm{T}} f_1(\zeta; t) d\zeta =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial z} [b(z, t) \nu(t) b(z, t)^{\mathrm{T}} f_1(z; t)].$$

Пользуясь этими формулами, представим уравнение (48) в виде

$$\frac{\partial f_1(z; t)}{\partial t} = -\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial z} [a(z, t) f_1(z; t)] +$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial z} [b(z, t) \nu(t) b(z, t)^{\mathrm{T}} f_1(z; t)] \right\}. \blacktriangleleft \qquad (56)$$

Таким образом, мы получили параболическое линейное однородное уравнение в частных производных второго порядка. Это уравнение сначала в различных частных случаях скалярного Z, а потом и для векторного Z было получено в начале нашего века физиками Фоккером, Планком, Эйнштейном, Смолуховским и другими при изучении броуновского движения и диффузии (см., например, [77]). Поэтому уравнение (56) обычно называется *уравнением Фоккера—Планка.* Первый строгий с точки зрения математики вывод уравнения (56) был дан в конце двадцатых — начале тридцатых годов А. Н. Колмогоровым [38]. Поэтому к именам Фоккера и Планка в названии уравнения (56) иногда присоединяют имя А. Н. Колмогорова.

Первое приложение для исследования динамических систем уравнение (56) получило в работе А. А. Андронова, А. А. Витта и Л. С. Понтрягина, в которой была поставлена задача изучения флуктуаций фазового портрета (по терминологии А. А. Андронова) системы с одной степенью свободы и найдено установившееся распределение изображающей точки на фазовой плоскости для стационарной системы с одной степенью свободы [2].

Уравнение (56) справедливо и для n-мерной плотности $f_n(z_1, \ldots, z_n; t_1, \ldots, t_n)$, если дифференцирование по t и z понимать как дифференцирование по t_n и z_n. Чтобы убедиться в этом, достаточно повторить предыдущие выкладки применительно к уравнению (49) с функцией $\chi(\mu; t)$, определяемой формулой (52).

Пример 11. Пользуясь формулой дифференцирования сложной функции винеровского процесса (3.61), убеждаемся в том, что уравнение

$$\dot{Z} = 1 + 2\sqrt{Z} V,$$

где V — нормально распределенный белый шум единичной интенсивности, т. е. производная стандартного винеровского процесса $W(t)$, имеет решение

$$Z(t) = W^2(t), \quad W(t) = \int_0^t V(\tau) d\tau.$$

Поскольку одномерное распределение стандартного винеровского процесса нормально с нулевым математическим ожиданием и дисперсией t, одномерные характеристическая функция и плотность процесса Z определяются формулами *)

$$g_1(\lambda;\ t)=(1-2i\lambda t)^{-1/2},\quad f_1(z;\ t)=(2\pi tz)^{-1/2}e^{-z/2t}\,1(z).$$

Уравнения (38) и (56) имеют в данном случае вид

$$\frac{\partial g_1(\lambda;t)}{\partial t}=i\lambda g_1(\lambda;\ t)-2\lambda^2 MZe^{i\lambda Z}$$

и

$$\frac{\partial f_1(z;\ t)}{\partial t}=-\frac{\partial f_1(z;\ t)}{\partial z}+2\frac{\partial^2}{\partial z^2}[zf_1(z;\ t)].$$

Легко видеть, что найденные функции $g_1(\lambda;\ t)$ и $f_1(z;t)$ удовлетворяют этим уравнениям и математическое ожидание $MZe^{i\lambda Z}$ в первом уравнении существует, так как $MZ=MW^2=DW=t$.

Пример 12. Пользуясь формулой дифференцирования сложной функции винеровского процесса (3.61), убеждаемся в том, что уравнение

$$\dot{Z}=Z^3-Z^2V,$$

где V — нормально распределенный белый шум единичной интенсивности, имеет решение

$$Z(t)=1/W(t),\qquad W(t)=\int_0^t V(\tau)\,d\tau.$$

Одномерная плотность и одномерная характеристическая функция процесса $Z(t)$ определяются формулами

$$f_1(z;\ t)=\frac{1}{z^2\sqrt{2\pi t}}\,e^{-1/2tz^2},$$

$$g_1(\lambda;\ t)=Me^{i\lambda Z}=Me^{i\lambda/W}=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda/w-w^2/2t}\,dw.$$

Уравнения (38) и (56) имеют в данном случае вид

$$\frac{\partial g_1(\lambda;\ t)}{\partial t}=M\left[i\lambda Z^3-\frac{1}{2}\lambda^2 Z^4\right]e^{i\lambda Z},$$

$$\frac{\partial f_1(z;\ t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial z}[z^3 f_1(z;\ t)]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}[z^4 f_1(z;\ t)].$$

Функция $f_1(z;\ t)$ удовлетворяет второму из этих уравнений, а функция $g_1(\lambda;\ t)$ не может удовлетворять первому уравнению, так как, несмотря на то что производная

$$\frac{\partial g_1(\lambda;\ t)}{\partial t}=-\frac{1}{2\sqrt{2\pi t^3}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda/w-w^2/2t}\,dw+\frac{1}{2\sqrt{2\pi t^5}}\int_{-\infty}^{\infty}w^2e^{i\lambda/w-w^2/2t}\,dw$$

существует вследствие того, что оба интеграла абсолютно сходятся, математическое ожидание в правой части первого уравнения не существует, так

---

*) Для получения первой формулы достаточно воспользоваться формулой (1) приложения 2 в книге *ТВ*; для получения второй достаточно воспользоваться формулой для плотности степенной функции случайной величины (*ТВ*, пример 5.21).

как при любом натуральном n

$$MZ^n e^{i\lambda Z} = MW^{-n} e^{i\lambda/W} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{w^n} e^{i\lambda/w - w^2/2t}\, dw,$$

а этот интеграл расходится.

5.3.7. Уравнение для переходной плотности в случае винеровского процесса. В частности, написав уравнение (56) для двумерной плотности $f_2(z_1, z_2;\ t_1, t_2)$ и заменив в нем $f_2(z_1, z_2;\ t_1, t_2)$ ее выражением через одномерную плотность и плотность перехода (п. 2.1.3),

$$f_2(z_1, z_2;\ t_1, t_2) = f_1(z_1;\ t_1)\, f(z_2;\ t_2 \mid z_1;\ t_1),$$

получим после сокращения на $f_1(z_1;\ t_1)$

$$\frac{\partial f(z_2;\ t_2 \mid z_1;\ t_1)}{\partial t_2} = -\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial z_2}\left[a(z_2, t_2)\, f(z_2;\ t_2 \mid z_1;\ t_1)\right] + \\ + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial z_2}\left[b(z_2, t_2)\,\nu(t_2)\, b(z_2, t_2)^{\mathrm{T}} f(z_2;\ t_2 \mid z_1;\ t_1)\right]\right\}.$$

Это уравнение совпадает с (56). Таким образом, плотность перехода марковского процесса, определяемого стохастическим дифференциальным уравнением (32) $f(z;\ t \mid \zeta;\ \tau)$, рассматриваемая как функция двух первых аргументов $t > \tau$ и z, определяется уравнением (56). Начальное условие для переходной плотности, очевидно, имеет вид

$$f(z;\ \tau \mid \zeta;\ \tau) = \delta(z - \zeta).$$

Мы получили уравнение (56) как частный случай уравнения (48), когда $W(t)$ — винеровский процесс. Уравнение (48) и уравнение (38), из которого оно было выведено, справедливо в более общих ситуациях, для любого процесса с независимыми приращениями $W(t)$. Однако уравнение (56) оказывается справедливым в некоторых случаях, когда уравнение (38) не имеет места вследствие того, что математическое ожидание в его правой части не существует.

Определив одномерную плотность $f_1(z;\ t)$ и переходную плотность $f(z;\ t \mid \zeta;\ \tau)$ марковского процесса $Z(t)$ путем интегрирования уравнения (56) при соответствующих начальных условиях, можно найти все конечномерные плотности процесса $Z(t)$ по формуле (п. 2.1.3)

$$f_n(z_1, \ldots, z_n;\ t_1, \ldots, t_n) = f_1(z_1;\ t_1)\, f(z_2;\ t_2 \mid z_1;\ t_1) \ldots \\ \ldots f(z_n;\ t_n \mid z_{n-1};\ t_{n-1}) \quad \text{при} \quad t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n.$$

Если $t_{p_1} \leqslant t_{p_2} \leqslant \ldots \leqslant t_{p_n}$ для перестановки $(p_1, \ldots, p_n)$ чисел $(1, \ldots, p)$, то n-мерная плотность $f_n(z_1, \ldots, z_n;\ t_1, \ldots, t_n)$ выражается той же формулой с заменой всех индексов $1, \ldots, n$ соответствующими индексами $p_1, \ldots, p_n$.

5.3.8. Случай полиномиальной правой части и независимого от состояния системы коэффициента при белом шуме. Если функция $a(z, t)$ в уравнении (32) представляет собой полином относительно z, а коэффициент при белом шуме $b(z, t)$ не зависит от z, $b(z, t)=b(t)$, то уравнения (38) и (41) сводятся к одному и тому же линейному уравнению в частных производных, порядок которого равен степени полинома $a(z, t)$.

▶ Чтобы доказать это, заметим сначала, что если $b(z, t)=b(t)$ не зависит от z, то уравнения (38) и (41) могут быть переписаны в виде

$$\frac{\partial g_1(\lambda;\ t)}{\partial t}=Mi\lambda^{\mathrm{T}}a(Z,\ t)\,e^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z}+\chi(b(t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)\,g_1(\lambda;\ t), \tag{57}$$

$$\frac{\partial g_n(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n;\ t_1,\ \ldots,\ t_n)}{\partial t_n}=Mi\lambda_n^{\mathrm{T}}a(Z_{t_n},\ t_n)\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{\mathrm{T}}Z(t_k)\right\}+$$
$$+\chi(b(t_n)^{\mathrm{T}}\lambda_n;\ t_n)\,g_n(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n;\ t_1,\ \ldots,\ t_n).$$

Теперь обратим внимание на то, что дифференцирование характеристической функции

$$g_1(\lambda;\ t)=Me^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z(t)}$$

по λ приводит к появлению множителя $iZ(t)$ под знаком математического ожидания:

$$\frac{\partial g_1(\lambda;\ t)}{\partial\lambda}=iMZ(t)\,e^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z(t)},$$

где $\partial/\partial\lambda=[\partial/\partial\lambda_1\ldots\partial/\partial\lambda_p]^{\mathrm{T}}$ — оператор градиента в p-мерном пространстве. Иными словами, дифференцирование функции $g_1(\lambda;\ t)$ по координате λ_k вектора λ приводит к появлению множителя iZ_k под знаком математического ожидания. Отсюда следует, что

$$MZ_1^{k_1}\ldots Z_p^{k_p}e^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z}=\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_p}}{\partial(i\lambda_1)^{k_1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{k_p}}Me^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z}=\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_p}g_1(\lambda;\ t)}{\partial(i\lambda_1)^{k_1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{k_p}}$$

при любых $k_1,\ \ldots,\ k_p\geqslant 0$. Таким образом, каждому члену полинома относительно компонент вектора Z под знаком математического ожидания в (57) соответствует точно такой же член с компонентами вектора градиента $\partial/\partial(i\lambda)$. Отсюда следует, что если функция $a(z, t)$ представляет собой полином относительно z, то вектор Z в уравнении (57) под знаком математического ожидания можно заменить вектором $\partial/\partial(i\lambda)$ вне знака математического ожидания. Тогда, учитывая, что $Me^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z}=g_1(\lambda;\ t)$, можно переписать уравнение (57) в виде

$$\frac{\partial g_1(\lambda;\ t)}{\partial t}=\left[i\lambda^{\mathrm{T}}a\left(\frac{\partial}{i\,\partial\lambda},\ t\right)+\chi(b(t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)\right]g_1(\lambda;\ t). \tag{58}$$

Это уравнение в частных производных записано в операторной форме. Чтобы привести его к явной форме уравнения в частных производных, необходимо заменить вектор z в полиноме $a(z, t)$ оператором дифференцирования $\partial/i\,\partial\lambda$ и полученный в результате линейный дифференциальный оператор применить к функции $g_1(\lambda; t)$, рассматриваемой как функция λ. Иными словами, каждый одночлен $z_1^{k_1}\ldots z_p^{k_p}$ полинома $a(z, t)$ следует заменить соответствующим оператором $(\partial/i\,\partial\lambda_1)^{k_1}\ldots(\partial/i\,\partial\lambda_p)^{k_p}$. ◄

Ясно, что (58) представляет собой линейное однородное уравнение в частных производных относительно g_1, порядок которого равен степени полинома $a(z, t)$.

Совершенно так же уравнение для n-мерной характеристической функции перепишется в этом случае в виде

$$\frac{\partial g_n}{\partial t_n} = \left[i\lambda_n^{\mathrm{T}} a\left(\frac{\partial}{i\,\partial\lambda_n}, t_n\right) + \chi\left(b(t_n)^{\mathrm{T}}\lambda_n;\ t_n\right)\right] g_n.$$

Это уравнение отличается от (58) только обозначениями.

5.3.9. Случай полиномиальной правой части и нормального белого шума. Уравнения (38) и (41), определяющие конечномерные характеристические функции процесса $Z(t)$, приводятся к линейному уравнению в частных производных и в том случае, когда функции $a(z, t)$ и $b(z, t)$ в стохастическом дифференциальном уравнении (32) обе представляют собой полиномы относительно z, если белый шум V распределен нормально (т. е. является производной винеровского процесса). В этом случае уравнение (38) на основании формулы (52) для функции $\chi(\mu; t)$ имеет вид

$$\frac{\partial g_1(\lambda;\ t)}{\partial t} = M\left\{i\lambda^{\mathrm{T}} a(Z,\ t) - \frac{1}{2}\lambda^{\mathrm{T}} b(Z,\ t)\,\nu(t)\,b(Z,\ t)^{\mathrm{T}}\lambda\right\} e^{i\lambda^{\mathrm{T}} Z}.$$

Если $a(z, t)$ и $b(z, t)$ — полиномы относительно z, то, как было показано в п. 5.3.8, вектор Z под знаком математического ожидания можно заменить оператором $\partial/\partial(i\lambda)$ вне знака математического ожидания. В результате получим уравнение

$$\frac{\partial g_1(\lambda;\ t)}{\partial t} = \left[i\lambda^{\mathrm{T}} a\left(\frac{\partial}{i\,\partial\lambda}, t\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\lambda^{\mathrm{T}} b\left(\frac{\partial}{i\,\partial\lambda}, t\right)\nu(t)\,b\left(\frac{\partial}{i\,\partial\lambda}, t\right)^{\mathrm{T}}\lambda\right] g_1(\lambda;\ t). \quad (59)$$

К этому же уравнению приводится в этом случае и уравнение (41) для n-мерной характеристической функции g_n с заменой g_1, λ и t соответственно на g_n, λ_n и t_n.

Ясно, что (59) представляет собой линейное однородное уравнение в частных производных порядка $\max(P, 2Q)$, где P — степень полинома $a(z, t)$, Q — степень полинома $b(z, t)$.

Пример 13. В случае уравнения

$$\dot{Z} = -Z^3 + ZV$$

уравнение (59) имеет вид

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^3 g_1}{\partial \lambda^3} + \frac{1}{2} \lambda^2 \nu \frac{\partial^2 g_1}{\partial \lambda^2}.$$

Пример 14. Для уравнений

$$\dot{Z}_1 = -Z_1^2 Z_2, \qquad \dot{Z}_2 = Z_1 Z_2 + Z_1 V$$

уравнение (59) имеет вид

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^3 g_1}{\partial \lambda_1^2 \, \partial \lambda_2} - i\lambda_2 \frac{\partial^2 g_1}{\partial \lambda_1 \, \partial \lambda_2} + \frac{1}{2} \lambda_2^2 \nu \frac{\partial^2 g_1}{\partial \lambda_1^2}.$$

Интегрирование уравнения в частных производных (58) или (59) в общем случае представляет собой сложную задачу. Практически ее приходится решать в основном приближенными методами численного интегрирования. И лишь в частном случае линейного уравнения (32) уравнение (58) представляет собой уравнение в частных производных первого порядка, которое легко интегрируется стандартным методом.

Заметим еще, что уравнения (38) и (41) в случае нормально распределенного белого шума сводятся к линейному уравнению в частных производных (59) и в том случае, когда функция $a(z, t)$ является полиномом относительно z, а $b(z, t)$ не является полиномом, если функция $b(z, t)\nu b(z, t)^{\mathrm{T}}$ представляет собой полином относительно z.

Пример 15. Рассмотрим RC-цепочку (рис. 2), находящуюся под действием входного напряжения, представляющего собой нормально распределенный белый шум V (например, дробовой эффект; см. пример 2.8). В примере 1.3 было получено дифференциальное уравнение этой цепи:

$$T\dot{U} + U = V, \quad T = RC,$$

связывающее выходное напряжение U со входным V. Примем за переменную состояния цепи Z ее выходную мощность, т. е. мощность в цепи нагрузки, сопротивление которой $R_{\text{н}}$ очень велико по сравнению с R (см. [57], § 4.1), $Z = U^2/R_{\text{н}}$. Чтобы получить стохастическое дифференциальное уравнение, определяющее мощность выходного шума Z, применим формулу Ито (3.61). В результате получим

$$dZ = 2U\,dU/R_{\text{н}} + \nu\,dt = (2U/R_{\text{н}})\,(dW - U\,dt)/T + dt =$$
$$= (-2U^2/R_{\text{н}}T + 1)\,dt + (2U/R_{\text{н}}T)\,dW$$

или

$$\dot{Z} = aZ + a_0 + b\sqrt{Z}\,V,$$

где $a = -2/T$, $a_0 = 1$, $b = 2/T\sqrt{R_{\text{н}}}$ *).

*) Выходное напряжение цепи U может быть как положительным, так и отрицательным. Однако вследствие того, что белые шумы V и $-V$ имеют одни и те же вероятностные характеристики, замена U на $|U|$ не приводит к изменению конечномерных распределений решения стохастического дифференциального уравнения.

В данном случае $a(z, t) = az + a_0$, $b(z, t) = b\sqrt{z}$ и уравнение (59) имеет вид [68]

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} = \lambda\left(a + \frac{1}{2} ib^2 \nu\lambda\right)\frac{\partial g_1}{\partial \lambda} + ia_0\lambda g_1.$$

Это линейное уравнение в частных производных первого порядка легко интегрируется стандартным методом (см. п. 5.4.2).

5.3.10. Системы со случайно изменяющейся структурой. Рассмотрим систему со случайно изменяющейся структурой, которая в каждой структуре описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито

$$\dot{Z} = a(Z, s_k, t) + b(Z, s_k, t)V \qquad (k = 1, \ldots, N),$$

где $s_1, \ldots, s_N$ — возможные значения ступенчатого случайного процесса $S(t)$, описывающего случайные изменения структуры системы. Сначала рассмотрим случай, когда переходы системы от одной структуры к другой образуют пуассоновские потоки событий. Обозначим пуассоновский процесс переходов в k-ю структуру через $P_k(t)$, а его интенсивность через $\nu_k(Z, S, t)$, имея в виду, что она зависит от случайного значения процесса S, от которого он переходит к значению s_k, и может зависеть также от состояния системы в момент перехода.

Легко видеть, что процесс $S(t)$ определяется стохастическим дифференциальным уравнением Ито

$$dS = \sum_{k=1}^{N} (s_k - S)\,dP_k.$$

Предполагая, что при изменении структуры системы ее вектор состояния может скачком получать случайное приращение, напишем стохастическое дифференциальное уравнение системы со случайно изменяющейся структурой в виде

$$dZ = a(Z, S, t)\,dt + b(Z, S, t)\,dW + \sum_{k=1}^{N} dQ_k,$$

где $Q_k(t)$ — общий пуассоновский процесс с переменным распределением скачков, порождаемый простым пуассоновским процессом $P_k(t)$ $(k = 1, \ldots, N)$. Распределение каждого скачка процесса $Q_k(t)$ может зависеть не только от времени, но и от вектора состояния системы Z и ее структуры в момент перехода в k-ю структуру. Таким образом, добавив к вектору состояния системы Z значение процесса S, определяющего ее структуру, мы получили систему стохастических дифференциальных уравнений Ито, описывающую поведение системы со случайно изменяющейся структурой. Ее вектором состояния естественно будет вектор $\bar{Z} = [S\ Z^T]^T$.

Рассмотрим теперь случай, когда изменения структуры процесса представляют собой эрланговские потоки событий. Эрланговский поток событий получается из пуассоновского потока путем пропуска подряд $n-1$ событий и отбора каждого события, имеющего номер, кратный данному числу n. Натуральное число n будем называть параметром эрланговского потока. Ясно, что в случае эрланговских потоков изменений структуры системы следует ввести перед дифференциалами dP_k и dQ_k в стохастических дифференциальных уравнениях системы множитель $\varphi_k(P_k, S)$, представляющий собой периодическую функцию P_k с периодом, равным параметру $n_k(S)$ соответствующего эрланговского потока, равную 1 при $P_k = ns$ $(s = 1, 2, \ldots)$ и 0 при всех остальных (целочисленных) P_k. В результате стохастические дифференциальные уравнения системы примут вид

$$dS = \sum_{k=1}^{N} (s_k - S)\,\varphi_k(P_k, S)\,dP_k,$$

$$dZ = a(Z, S, t)\,dt + b(Z, S, t)\,dW + \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(P_k, S)\,dQ_k.$$

Описание систем со случайно изменяющейся структурой с помощью стохастических дифференциальных уравнений было предложено в [103].

Уравнения системы со случайно изменяющейся структурой при пуассоновских потоках изменений структуры можно записать в общей форме уравнений Ито (3.79):

$$d\bar{Z} = \bar{a}(\bar{Z}, t)\,dt + \bar{b}(\bar{Z}, t)\,d\bar{W},$$

где $\bar{Z} = [S\,Z^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ — вектор состояния системы, $\bar{W}(t)$ — процесс с независимыми приращениями, состоящий из $N+1$ независимых блоков $W(t)$, $[P_1\,Q_1^{\mathrm{T}}]^{T}, \ldots, [P_N\,Q_N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $\bar{a}(\bar{z}, t)$, $\bar{b}(\bar{z}, t)$ — блочные матрицы

$$\bar{a}(\bar{z}, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ a(z, s, t) \end{bmatrix}, \qquad \bar{b}(\bar{z}, t) = \left[\begin{array}{c|cc|c|cc} 0 & s_1 - s & 0 & \ldots & s_N - s & 0 \\ b(z, s, t) & 0 & I & & 0 & I \end{array}\right].$$

Аналогично можно привести к общей форме уравнения Ито (3.79) уравнения системы со случайно изменяющейся структурой при эрланговских потоках изменений структуры. Однако в этом случае коэффициенты при dP_k и dQ_k зависят от P_k. Поэтому в соответствии с замечанием в конце п. 3.6.1 вектор состояния системы следует расширить добавлением к нему вектора Z' с компонентами $Z_1' = P_1, \ldots, Z_N' = P_N$, определяемыми уравнениями $dZ_1' = dP_1, \ldots, dZ_N' = dP_N$.

Напишем уравнение (38) для одномерной характеристической функции вектора состояния системы со случайно изменяющейся структурой. Для этого найдем сначала функцию $\bar{\chi}(\bar{\mu}; t)$, соответствующую процессу $\bar{W}(t)$, $\bar{\mu} = [\mu\,\mu_1 \ldots \mu_N]^{\mathrm{T}}$. В соответствии со сказанным в п. 5.3.5 функция $\bar{\chi}(\bar{\mu};\ t)$ в этом случае представляет собой сумму функций χ, соответствующих независимым блокам $W(t)$, $[P_1(t)\, Q_1(t)^T]^T, \ldots, [P_N(t)\, Q_N(t)^T]^T$, составляющим процесс $\overline{W}(t)$:

$$\bar{\chi}(\bar{\mu};\ Z,\ S,\ t) = \chi(\mu;\ t) + \sum_{k=1}^{N} \chi_k(\bar{\mu}_k;\ Z,\ S,\ t),$$

где $\chi(\mu;\ t)$, $\chi_k(\bar{\mu}_k; Z, S, t)$ — функции χ процессов $W(t)$, $[P_k(t)\, Q_k(t)^T]^T$, соответственно $(k=1, \ldots, N)$, $\bar{\mu} = [\mu^T\ \bar{\mu}_1^T \ldots \bar{\mu}_N^T]^T$ — разложение вектора $\bar{\mu}$ на блоки, соответствующие независимым блокам, из которых состоит процесс $\overline{W}(t)$, а $\bar{\mu}_k = [\mu_{k0}\, \mu_k^T]^T$ — разложение вектора $\bar{\mu}_k$ на блоки, соответствующие процессам $P_k(t)$ и $Q_k(t)$. Здесь мы учли, что интенсивность потоков скачков процессов $P_k(t)$ и распределения скачков процессов $Q_k(t)$ могут зависеть от вектора состояния системы $\bar{Z} = [S\ Z^T]^T$. Пользуясь формулой (37а) п. 5.3.1 для функции χ и формулой для характеристической функции приращений пуассоновского процесса и порождаемого им общего пуассоновского процесса на бесконечно малом интервале $(t, s]$, согласно которой (пример 3.12)

$$h_k(\bar{\mu}_k;\ Z,\ S,\ t,\ s) = \\ = 1 + [e^{i\mu_{k0}} g_k(\mu_k;\ Z,\ S,\ t) - 1]\, \nu_k(Z,\ S,\ t)(s-t) + o(s-t),$$

находим

$$\chi_k(\bar{\mu}_k;\ Z,\ S,\ t) = [e^{i\mu_{k0}} g_k(\mu_k;\ Z,\ S,\ t) - 1]\, \nu_k(Z,\ S,\ t).$$

где $g_k(\mu_k;\ Z,\ S,\ t)$ — характеристическая функция скачка процесса $Q_k(t)$ в момент t, зависящая также от $Z(t)$, $S(t)$. Таким образом,

$$\bar{\chi}(\bar{\mu};\ Z,\ S,\ t) = \chi(\mu;\ t) + \sum_{k=1}^{N} [e^{i\mu_{k0}} g_k(\mu_k;\ Z,\ S,\ t) - 1]\, \nu_k(Z,\ S,\ t)$$

и соответственно

$$\bar{\chi}(\bar{b}(Z,\ S,\ t)^T \bar{\lambda};\ Z,\ S,\ t) = \chi(b(Z,\ S,\ t)^T \lambda;\ t) + \\ + \sum_{k=1}^{N} [e^{i(s_k - S)\lambda_0} g_k(\lambda;\ Z,\ S,\ t) - 1]\, \nu_k(Z,\ S,\ t),$$

где $\bar{\lambda} = [\lambda_0\ \lambda^T]^T$ — разложение вектора $\bar{\lambda}$ на блоки, соответствующие блокам S, Z вектора состояния системы $\bar{Z}$. Подставив это выражение в (38), получим уравнение для одномерной характеристической функции процесса в системе со случайными изменениями структуры:

$$\frac{\partial g_1(\bar{\lambda};\ t)}{\partial t} = M \left\{ i\lambda^T a(Z,\ S,\ t) + \chi(b(Z,\ S,\ t)^T \lambda;\ t) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{N} [e^{i(s_k - S)\lambda_0} g_k(\lambda;\ Z,\ S,\ t) - 1]\, \nu_k(Z,\ S,\ t) \right\} e^{i\lambda_0 S + i\lambda^T Z}.$$

Совершенно так же записывается уравнение (41) для остальных конечномерных распределений.

Из уравнения для одномерной характеристической функции легко выводятся уравнения для условных характеристических функций в различных структурах и для вероятностей структур. Имея в виду, что при каждом t $S(t)=S_t$ — дискретная случайная величина с возможными значениями $s_1, \ldots, s_N$ и вероятностями этих значений $p_1(t), \ldots, p_N(t)$, по формуле полного математического ожидания (TB, п. 4.3.3) находим

$$g_1(\overline{\lambda};\ t)=Me^{i\lambda_0 S(t)+i\lambda^T Z(t)}=\sum_{l=1}^{N} p_l e^{i\lambda_0 s_l} g_1(\lambda;\ t\,|\,s_l),$$

где $g_1(\lambda;\ t\,|\,s_l)$ — условная характеристическая функция вектора состояния системы Z в l-й структуре. Аналогично вычисляется по формуле полного математического ожидания математическое ожидание в правой части уравнения для $g_1(\overline{\lambda};\ t)$. В результате это уравнение примет вид

$$\sum_{l=1}^{N} e^{i\lambda_0 s_l}\frac{\partial p_l g_1(\lambda;\ t\,|\,s_l)}{\partial t}=$$

$$=\sum_{l=1}^{N} p_l e^{i\lambda_0 s_l} M\left[\{i\lambda^T a(Z,\ s_l,\ t)+\chi(b(Z,\ s_l,\ t)^T\lambda;\ t)\}\, e^{i\lambda^T Z}\,|\,s_l\right]+$$

$$+\sum_{l=1}^{N} p_l e^{i\lambda_0 s_l}\sum_{k=1}^{N}{}' \left[e^{i\lambda_0(s_k-s_l)}\, Mg_k(\lambda;\ Z,\ s_l,\ t)\,\nu_k(Z,\ s_l,\ t)\, e^{i\lambda^T Z}\,|\,s_l\right]-$$

$$-\sum_{l=1}^{N} p_l e^{i\lambda_0 s_l} M\left[\sum_{k=1}^{N}{}' \nu_k(Z,\ s_l,\ t)\, e^{i\lambda^T Z}\,|\,s_l\right].$$

Здесь индекс l у сумм по k указывает, что слагаемое, соответствующее $k=l$, в сумму не входит. Это объясняется тем, что при отсутствии изменения структуры процессы $P_l(t)$ и $Q_l(t)$ сохраняют постоянные значения, вследствие чего $g_l(\lambda;\ Z,\ s_l,\ t)=1$. Изменив порядок суммирования в первой двойной сумме, приведем ее к виду

$$\sum_{k=1}^{N} e^{i\lambda_0 s_k}\sum_{l=1}^{N}{}^{k} p_l M\left[g_k(\lambda;\ Z,\ s_l,\ t)\,\nu_k(Z,\ s_l,\ t)\, e^{i\lambda^T Z}\,|\,s_l\right].$$

Поменяв местами индексы k и l (от этого двойная сумма не изменится) и подставив полученное выражение в предыдущее уравнение, будем иметь

$$\sum_{l=1}^{N} e^{i\lambda_0 s_l}\frac{\partial p_l g_1(\lambda;\ t\,|\,s_l)}{\partial t}=$$

$$=\sum_{l=1}^{N} p_l e^{i\lambda_0 s_l} M\left[\{i\lambda^T a(Z,\ s_l,\ t)+\chi(b(Z,\ s_l,\ t)^T\lambda;\ t)\}\, e^{i\lambda^T Z}\,|\,s_l\right]+$$

$$+\sum_{l=1}^{N} e^{i\lambda_0 s_l} \sum_{k=1}^{N}{}' p_k M\left[g_l(\lambda;\ Z,\ s_k,\ t)\, \nu_l(Z,\ s_k,\ t)\, e^{i\lambda^{\mathrm{T}} Z} \mid s_k\right] - \\ - \sum_{l=1}^{N} p_l e^{i\lambda_0 s_l} M\left[\nu_l(Z,\ t)\, e^{i\lambda^{\mathrm{T}} Z} \mid s_l\right],$$

где для краткости положено

$$\nu_l(Z,\ t) = \sum_{k=1}^{N}{}' \nu_l(Z,\ s_k,\ t).$$

Сравнив коэффициенты при одинаковых показательных функциях и обозначив через $f_1(z;\ t \mid s_l)$ условную одномерную плотность процесса $Z(t)$ в l-й структуре, получим систему уравнений

$$\frac{\partial p_l g_1(\lambda;\ t \mid s_l)}{\partial t} = p_l \int_{-\infty}^{\infty} \{i\lambda^{\mathrm{T}} a(z,\ s_l,\ t) + \\ + \chi(b(z,\ s_l,\ t)^{\mathrm{T}} \lambda;\ t)\}\, e^{i\lambda^{\mathrm{T}} z}\} f_1(z;\ t \mid s_l)\, dz + \\ + \sum_{k=1}^{N}{}' p_k \int_{-\infty}^{\infty} g_l(\lambda;\ z,\ s_k,\ t)\, \nu_l(z,\ s_k,\ t)\, e^{i\lambda^{\mathrm{T}} z} f_1(z;\ t \mid s_k)\, dz - \\ - p_l \int_{-\infty}^{\infty} \nu_l(z,\ t)\, e^{i\lambda^{\mathrm{T}} z} f_1(z;\ t \mid s_l)\, dz \quad (l = 1,\ \ldots,\ N).$$

Положив здесь $\lambda = 0$ и имея в виду, что $g_1(0;\ t \mid s_l) = 1$, $\chi(0;\ t) = 0$, получим уравнения для вероятностей структур системы в момент t:

$$\dot{p}_l = \sum_{k=1}^{N}{}' p_k \int_{-\infty}^{\infty} \nu_l(z,\ s_k,\ t)\, f_1(z;\ t \mid s_k)\, dz - \\ - p_l \int_{-\infty}^{\infty} \nu_l(z,\ t)\, f_1(z;\ t \mid s_l)\, dz \qquad (l = 1,\ \ldots,\ N).$$

Выведенная здесь система уравнений для функций $\gamma_l(\lambda;\ t) = p_l g_1(\lambda;\ t \mid s_l)$ была получена в [86] для частного случая винеровского процесса $W(t)$. Уравнения для вероятностей структур были получены в [87].

Совершенно так же, как в п. 5.3.6, из уравнений для условных характеристических функций в случае винеровского процесса $W(t)$ можно вывести уравнения для условных плотностей. Для этого изменим обозначение переменной интегрирования z на ζ, умножим уравнение для $p_l g_1(\lambda;\ t \mid s_l)$ на $e^{-i\lambda^{\mathrm{T}} z}/(2\pi)^p$ и проинтегрируем по λ. При этом первый интеграл преобразуется абсолютно так же, как в п. 5.3.6, и дает в результате слагаемое, аналогичное правой части уравнения (56). Второй интеграл, вследствие формулы

$$\frac{1}{(2\pi)^p}\int_{-\infty}^{\infty} g_l(\lambda;\ \zeta,\ s_k,\ t)\, e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(\zeta-z)}\, d\lambda = q_l(z-\zeta;\ \zeta,\ s_k,\ t),$$

где $q_l(y;\ \zeta,\ s_k,\ t)$ — плотность скачка процесса $Q_k(t)$ при данных ζ, s_k и t, преобразуется к виду

$$\int_{-\infty}^{\infty} q_l(z-\zeta;\ \zeta,\ s_k,\ t)\, \nu_l(\zeta,\ s_k,\ t)\, f_1(\zeta;\ t\,|\,s_k)\, d\zeta.$$

Третий интеграл вследствие формулы (TB, приложение 1)

$$\frac{1}{(2\pi)^p}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(z-\zeta)}\, d\lambda = \delta(z-\zeta)$$

принимает вид

$$\nu_l(z,\ t)\, f_1(z;\ t\,|\,s_l).$$

В результате получаются уравнения

$$\frac{\partial p_l f_1(z;\ t\,|\,s_l)}{\partial t} = -p_l \frac{\partial^T}{\partial z}\left[a(z,\ s_l,\ t)\, f_1(z;\ t\,|\,s_l)\right] + \frac{p_l}{2}\operatorname{tr}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial z}\left[b(z,\ s_l,\ t)\,\nu(t)\, b(z,\ s_l,\ t)^{\mathrm{T}} f_1(z;\ t\,|\,s_l)\right]\right\} + \sum_{k=1}^{N}{}' p_k \int_{-\infty}^{\infty} q_l(z-\zeta;\ \zeta,\ s_k,\ t)\,\nu_l(\zeta,\ s_k,\ t)\, f_1(\zeta;\ t\,|\,s_k)\, d\zeta - p_l \nu_l(z;\ t)\, f_1(z;\ t\,|\,s_l) \qquad (l=1,\ \ldots,\ N).$$

Эти уравнения для функций $\omega_l(z;\ t) = p_l f_1(z;\ t\,|\,s_l)$ были получены в [86, 87].

В важном частном случае, когда при переходе от одной структуры к другой вектор состояния системы Z не получает случайного приращения, слагаемые с dQ_k в уравнении для Z отсутствуют ($Q_k(t) \equiv 0$). В этом случае в уравнении для одномерной характеристической функции $g_1(\lambda;\ t)$ и в уравнениях для условных одномерных характеристических функций $g_1(\lambda;\ t\,|\,s_l)$ при разных структурах $g_l(\lambda;\ z,\ s_k,\ t) \equiv 1$. Соответственно в уравнениях для условных одномерных плотностей $f_1(z;\ t\,|\,s_l)$ при разных структурах $q_l(z-\zeta;\ \zeta,\ s_k,\ t) = \delta(z-\zeta)$ и уравнения для $f_1(z;\ t\,|\,s_l)$ $(l=1,\ \ldots,\ N)$ принимают вид

$$\frac{\partial p_l f_1(z;\ t\,|\,s_l)}{\partial t} = -p_l \frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial z}\left[a(z,\ s_l,\ t)\, f_1(z;\ t\,|\,s_l)\right] + \frac{p_l}{2}\operatorname{tr}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial z}\left[b(z,\ s_l,\ t)\,\nu(t)\, b(z,\ s_l,\ t)^{\mathrm{T}} f_1(z;\ t\,|\,s_l)\right]\right\} + \sum_{k=1}^{N}{}' \nu_l(z,\ s_k,\ t)\left[p_k f_1(z;\ t\,|\,s_k) - p_l f_1(z;\ t\,|\,s_l)\right]$$

$$(l=1,\ \ldots,\ N).$$

Для систем со структурой, изменяющейся при переходе из одной области пространства состояний в другую, случайный процесс $S(t)$ изменения структуры представляет собой функцию вектора состояния $Z(t)$,

$$S(t)=\sum_{k=1}^{N} s_k 1_{A_k}(Z(t)),$$

где $A_1, \ldots, A_N$ — попарно непересекающиеся области, на которые разбито пространство состояний (п. 1.4.3). Вследствие этого стохастическое дифференциальное уравнение системы представляет собой уравнение вида (32).

Если при попадании на границу одной из областей, скажем A_N, процесс останавливается (поглощается), то функции a и b в этой области следует принять тождественно равными нулю (соответственно вектору, все компоненты которого тождественно равны нулю, и матрице, все элементы которой тождественно равны нулю) $a(z, s_N, t)\equiv 0$, $b(z, s_N, t)\equiv 0$.

5.3.11. Стационарные процессы в стохастических дифференциальных системах. Решение уравнений (38) и (41) в каждой конкретной задаче зависит от начальной одномерной характеристической функции $g_0(\lambda)$. При произвольных t_0 и $g_0(\lambda)$ процесс в системе (32) в общем случае будет нестационарным.

Большое значение для приложений имеет вопрос о существовании стационарных режимов в стационарных дифференциальных системах, когда процесс $Z(t)$ в системе стационарен в том или ином смысле (п. 4.1.1). Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим стационарную дифференциальную систему (32) под действием стационарного белого шума V. В этом случае функции $a(z, t)$, $b(z, t)$, $\chi(\mu; t)$ не зависят явно от времени, $a(z, t)=a(z)$, $b(z, t)=b(z)$, $\chi(\mu; t)=\chi(\mu)$. Если процесс $Z(t)$ в такой системе стационарен по отношению к одномерному распределению, то его одномерная характеристическая функция $g_1(\lambda; t)$ тоже не зависит от времени, $g_1(\lambda; t)=g_1(\lambda)$, $\partial g_1(\lambda)/\partial t=0$, и уравнение (38) принимает вид

$$M\{i\lambda^{\mathrm{T}}a(Z)+\chi(b(Z)^{\mathrm{T}}\lambda)\}e^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z}=0.$$

В случае, когда это уравнение имеет нетривиальное решение $g_1(\lambda)\not\equiv 0$, $g_1(0)=1$, в системе возможен стационарный по отношению к одномерному распределению процесс $Z(t)$. Докажем, что этот процесс стационарен в узком смысле.

▶ Предположим, что процесс $Z(t)$ стационарен по отношению к $(n-1)$-мерному распределению. В этом случае

$$g_{n-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}; t_1, \ldots, t_{n-1})=g_{n-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}; \tau_1, \ldots, \tau_{n-2}),$$

где $\tau_1=t_2-t_1, \ldots, \tau_{n-2}=t_{n-1}-t_1$. Рассмотрим уравнение (41) для $g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n)$. Заменой переменных $t_n=t_1+\tau_{n-1}$

приводим это уравнение к виду

$$\partial g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ t_1, \ldots, t_{n-1}, t_1+\tau_{n-1})/\partial\tau_{n-1} = \\ = M\{i\lambda_n^{\mathrm{T}} a(Z_{t_n}) + \chi(b(Z_{t_n})^{\mathrm{T}}\lambda_n)\}\exp\{i\lambda_1^{\mathrm{T}} Z_{t_1} + \ldots + i\lambda_n^{\mathrm{T}} Z_{t_n}\}.$$

Начальное условие (42) для этого уравнения имеет вид

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ t_1, \ldots, t_{n-1}, t_{n-1}) = \\ = g_{n-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}+\lambda_n;\ \tau_1, \ldots, \tau_{n-2}).$$

Так как правые части уравнения и начального условия не зависят явно от $t_1, \ldots, t_n$, то и решение уравнения зависит только от $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$:

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ t_1, \ldots, t_1+\tau_{n-1}) = g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}).$$

Следовательно, процесс $Z(t)$ стационарен и по отношению к n-мерному распределению. А так как процесс $Z(t)$ стационарен по отношению к одномерному распределению, то он стационарен по отношению ко всем конечномерным распределениям. ◀

Таким образом, *если в стационарной стохастической дифференциальной системе существует стационарный процесс, то этот процесс стационарен в узком смысле.* Конечномерные распределения этого процесса определяются уравнениями (41), (42) при $g_1(\lambda;\ t) = g_1(\lambda)$, где $g_1(\lambda)$ определяется уравнением (38) при $\partial g_1/\partial t = 0$.

Если уравнение, определяющее одномерную характеристическую функцию $g_1(\lambda)$ стационарного процесса $Z(t)$ в системе, имеет несколько решений, то каждое из решений определяет возможный стационарный режим в системе.

В случае нормально распределенного белого шума одномерное распределение стационарного процесса в стационарной системе можно найти интегрированием уравнения (56), положив в нем $\partial f_1/\partial t = 0$:

$$-\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial z}[a(z) f_1(z)] + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial z}[b(z)\nu b(z)^{\mathrm{T}} f_1(z)]\right\} = 0.$$

Анализ известных стационарных распределений в таких системах дан в [97].

Пример 16. Найдем одномерное распределение стационарного процесса в нелинейной механической системе с n степенями свободы, поведение которой описывается уравнениями в канонических переменных

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} - 2\varepsilon p + A(q)^{1/2} V,$$

где $q = [q_1 \ldots q_n]^{\mathrm{T}}$ — вектор обобщенных координат, $p = A(q)\dot{q} = [p_1 \ldots p_n]^{\mathrm{T}}$ — вектор обобщенных импульсов, $A(q)$ — обобщенная масса, которая представляет собой симметричную положительно определенную матрицу, в общем случае зависящую от q, H — функция Гамильтона (полная энергия системы), определяемая формулой

$$H = H(q, p) = p^{\mathrm{T}} A(q)^{-1} p/2 + \Pi(q), \tag{I}$$

$\Pi(q)$ — потенциальная энергия системы, 2ε — удельный коэффициент вязкого трения, $V=[V_1 \ \dots \ V_n]^{\mathrm{T}}$ — вектор обобщенных сил, компоненты которого представляют собой независимые нормально распределенные стационарные белые шумы одной и той же интенсивности ν *).

Вектор $a(Z)$, $Z=[q^{\mathrm{T}}p^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, и матрица $b(Z)$ имеют в этом случае блочную структуру:

$$a(Z)=\begin{bmatrix} \partial H/\partial p \\ -\partial H/\partial q - 2\varepsilon p \end{bmatrix}, \quad b(Z)=\begin{bmatrix} 0 \\ A\ (q)^{1/2} \end{bmatrix}.$$

Уравнение (38), определяющее независимую от t одномерную характеристическую функцию $g_1(\mu, \lambda)$ стационарного в узком смысле процесса в системе, имеет вид

$$M\left\{ i\mu^{\mathrm{T}} \frac{\partial H}{\partial p} - i\lambda^{\mathrm{T}} \frac{\partial H}{\partial q} - 2\varepsilon i\lambda^{\mathrm{T}} p - \frac{1}{2} \nu\lambda^{\mathrm{T}} A(q)\lambda \right\} e^{i\mu^{\mathrm{T}}q + i\lambda^{\mathrm{T}}p} = 0$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial q} e^{i\mu^{\mathrm{T}}q} \frac{\partial H}{\partial q} e^{i\lambda^{\mathrm{T}}p} - \frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial p} e^{i\lambda^{\mathrm{T}}p} \frac{\partial H}{\partial q} e^{i\mu^{\mathrm{T}}q} \right\} f_1(q,\ p)\, dq\, dp -$$

$$-\lambda^{\mathrm{T}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2\varepsilon i p + \frac{1}{2} \nu A(q)\lambda \right\} e^{i\mu^{\mathrm{T}}q + i\lambda^{\mathrm{T}}p} f_1(q,\ p)\, dq\, dp = 0, \qquad \text{(II)}$$

где $f_1(q,\ p)$ — одномерная плотность стационарного процесса в системе. Чтобы решить уравнение (II), преобразуем каждый из интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial q_k} e^{i\mu_k q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} f_1(q,\ p)\, dq_k, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial p_k} e^{i\lambda_k p_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} f_1(q,\ p)\, dp_k$$

интегрированием по частям. Тогда получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial q_k} e^{i\mu_k q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} f_1(q,\ p)\, dq_k =$$

$$= e^{i\mu_k q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} f_1(q,\ p) \Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu_k q_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \left[\frac{\partial H}{\partial p_k} f_1(q,\ p) \right] dq_k.$$

Первое слагаемое здесь равно нулю, так как интегралы в (II) могут сходиться только при достаточно быстром убывании функции $(\partial H/\partial p_k) f_1(q,\ p)$ при $q_k \longrightarrow \infty$. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial q_k} e^{i\mu_k q_k} \frac{\partial H}{p\partial_k} f_1(q,\ p)\, dq_k = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu_k q_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \left[\frac{\partial H}{\partial p_k} f_1(q,\ p) \right] dq_k.$$

Аналогично находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial p_k} e^{i\lambda_k p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} f_1(q,\ p)\, dp_k = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_k p_k} \frac{\partial}{\partial p_k} \left[\frac{\partial H}{\partial q_k} f_1(q,\ p) \right] dp_k.$$

---

*) Матрица $A(q)^k$ определяется, как обычно, путем приведения матрицы $A(q)$ к диагональной форме ортогональным преобразованием S, $A(q)=S\Lambda(q)S^{\mathrm{T}}$, $\Lambda(q)=\mathrm{diag}\,\{\lambda_1(q),\ \dots,\ \lambda_n(q)\}$, и возведения всех собственных значений $\lambda_1(q),\ \dots,\ \lambda_n(q)$ в k-ю степень: $A(q)^k=S\Lambda(q)^k S^{\mathrm{T}}$, $\Lambda(q)^k = \mathrm{diag}\,\{\lambda_1^k(q),\ \dots,\ \lambda_n^k(q)\}$.

Подставив найденные выражения в (II), получим после сокращений

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^{\mathrm{T}} f_1}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}-\frac{\partial^{\mathrm{T}} f_1}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}\right)e^{i\mu^{\mathrm{T}}q+i\lambda^{\mathrm{T}}p}\,dq\,dp-$$

$$-\lambda^{\mathrm{T}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{2\varepsilon ip+\frac{1}{2}\nu A(q)\lambda\right\}e^{i\mu^{\mathrm{T}}q+i\lambda^{\mathrm{T}}p}f_1(q,\ p)\,dq\,dp=0. \qquad \text{(III)}$$

Отсюда видно, что первый интеграл в этом уравнении обратится в нуль, если принять $f_1(q,\ p)$ произвольной функцией полной энергии системы, $f_1(q,\ p)=\varphi(H)$ (конечно, функция $\varphi(H(q,\ p))$ должна обладать свойствами плотности). Тогда уравнение (III) примет вид

$$-\lambda^{\mathrm{T}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{2\varepsilon ip+\frac{1}{2}\nu A(q)\lambda\right\}e^{i\mu^{\mathrm{T}}q+i\lambda^{\mathrm{T}}p}\varphi(H)\,dq\,dp=0. \qquad \text{(IV)}$$

Во втором слагаемом преобразуем каждое выражение $\lambda_k\int e^{i\lambda^{\mathrm{T}}p}\varphi(H)\,dp$, выполнив интегрирование по частям по соответствующей компоненте вектора p. Тогда будем иметь

$$i\lambda_k\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda^{\mathrm{T}}p}\varphi(H)\,dp_k=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial p_k}e^{i\lambda^{\mathrm{T}}p}\varphi(H)\,dp_k=-\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda^{\mathrm{T}}p}\varphi'(H)\frac{\partial H}{\partial p_k}\,dp_k$$

и

$$\lambda\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda^{\mathrm{T}}p}\varphi(H)\,dp=i\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda^{\mathrm{T}}p}\varphi'(H)\frac{\partial H}{\partial p}\,dp=iA(q)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}pe^{i\lambda^{\mathrm{T}}p}\varphi'(H)\,dp. \qquad \text{(V)}$$

Подставив это выражение в (IV), получим

$$-i\lambda^{\mathrm{T}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{2\varepsilon\varphi(H)+\frac{1}{2}\nu\varphi'(H)\right\}pe^{i\mu^{\mathrm{T}}q+i\lambda^{\mathrm{T}}p}\,dq\,dp=0.$$

Это уравнение будет удовлетворено, если определить функцию $\varphi(H)$ уравнением

$$2\varepsilon\varphi(H)+\frac{1}{2}\nu\varphi'(H)=0. \qquad \text{(VI)}$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\varphi(H)=ce^{-\alpha H},\quad \alpha=4\varepsilon/\nu,$$

где c — произвольная постоянная, которая определяется из условия нормировки

$$c^{-1}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha H(q,\ p)}\,dq\,dp. \qquad \text{(VII)}$$

Таким образом, одномерная плотность $f_1(q,\ p)$ стационарного в узком смысле процесса в рассматриваемой системе определяется формулой

$$f_1(q,\ p)=ce^{-\alpha H(q,\ p)},\quad \alpha=4\varepsilon/\nu, \qquad \text{(VIII)}$$

где c вычисляется по формуле (VII). Распределение, определяемое этой плотностью, известно в статистической механике как каноническое распределение Гиббса [83].

Чтобы найти другие конечномерные распределения стационарного процесса в системе, следует по найденной одномерной плотности определить одномерную характеристическую функцию

$$g_1(\mu, \lambda) = c \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\mu^{\mathrm{T}} q + i\lambda^{\mathrm{T}} p - \alpha H(q, p)\}\, dq\, dp \tag{IX}$$

и последовательно проинтегрировать уравнения, полученные из (41) и (42) в этом пункте, при $n = 2, 3, \ldots$ В общем случае для этого придется применить приближенные методы гл. 6. В частном случае линейной системы, когда потенциальная энергия $\Pi(q)$ представляет собой квадратичную форму относительно q, стационарный процесс в системе распределен нормально и его конечномерные распределения определяются формулами п. 5.4.5.

Формулу (VIII) можно также вывести из уравнения (56) при $\partial f_1/\partial t = 0$.

§ 5.4. Конечномерные распределения вектора состояния линейной системы

5.4.1. Уравнения для характеристических функций в случае линейной системы. В случае линейной системы $a(z, t)$ в (32) является линейной функцией z, а $b(z, t)$ не зависит от z,

$$a(z, t) = a(t)z + a_0(t), \qquad b(z, t) = b(t),$$

и уравнение (32) принимает вид

$$\dot{Z} = aZ + a_0 + bV, \tag{60}$$

где аргумент t функций a, a_0 и b не указан. В этом случае

$$a\left(\frac{\partial}{i\partial\lambda}, t\right) = -ia(t)\frac{\partial}{\partial\lambda} + a_0(t)$$

и уравнение (58) принимает вид

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} = \lambda^{\mathrm{T}} a \frac{\partial g_1}{\partial\lambda} + [i\lambda^{\mathrm{T}} a_0 + \chi(b^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)]\, g_1. \tag{61}$$

Такому же уравнению удовлетворяет n-мерная характеристическая функция процесса $Z(t)$:

$$\frac{\partial g_n}{\partial t_n} = \lambda_n^{\mathrm{T}} a(t_n) \frac{\partial g_n}{\partial\lambda_n} + [i\lambda_n^{\mathrm{T}} a_0(t_n) + \chi(b(t_n)^{\mathrm{T}}\lambda_n;\ t_n)]\, g_n.$$

Таким образом, проинтегрировав уравнение (61), при соответствующих начальных условиях мы найдем все конечномерные характеристические функции процесса $Z(t)$.

5.4.2. Интегрирование уравнений для характеристических функций. Для интегрирования уравнения (61) перепишем первое слагаемое в его правой части в скалярной форме, опуская индекс 1:

$$\frac{\partial g}{\partial t} - \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{p} a_{lk}\lambda_l\right)\frac{\partial g}{\partial\lambda_k} = [i\lambda^{\mathrm{T}} a_0 + \chi(b^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)]\, g.$$

Стандартный алгоритм интегрирования уравнений в частных производных первого порядка, линейных относительно производных, состоит в выполнении следующих действий [71]:

1. Интегрирование соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая в данном случае имеет вид

$$\frac{dt}{1}=\frac{d\lambda_1}{-\sum\limits_{l=1}^{p} a_{l1}\lambda_l}=\ldots=\frac{d\lambda_p}{-\sum\limits_{l=1}^{p} a_{lp}\lambda_l}=\frac{dg}{[i\lambda^{\mathrm{T}}a_0+\chi(b^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)]\,g}. \tag{62}$$

Эта система уравнений получается из исходного уравнения в частных производных следующим образом: дифференциал каждой из переменных $t, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ делится на коэффициент при производной функции g по этой переменной, а дифференциал функции g делится на правую часть уравнения и полученные отношения приравниваются.

2. Общее решение уравнений (62) представляется в виде

$$\varphi_k(t,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_p,\ g)=c_k \qquad (k=1,\ \ldots,\ p+1),$$

где $c_1, \ldots, c_p, c_{p+1}$ — произвольные постоянные (т. е. в форме $p+1$ независимых первых интегралов этих уравнений).

3. Берется произвольная функция $f(x_1, \ldots, x_p)$ p переменных и пишется уравнение

$$\varphi_{p+1}(t,\lambda_1,\ldots,\lambda_p,g)=f(\varphi_1(t,\lambda_1,\ldots,\lambda_p,g),\ \ldots,\varphi_p(t,\lambda_1,\ldots,\lambda_p,g)) \tag{63}$$

Решение этого уравнения относительно g, зависящее от произвольной функции f, представляет собой полный интеграл уравнения в частных производных.

Этот алгоритм дает решение уравнения в частных производных первого порядка, линейного относительно производных, и в том случае, когда коэффициенты при производных и правая часть уравнения зависят нелинейно от неизвестной функции.

▶ Применим этот алгоритм для решения уравнения (61). В нашем случае коэффициенты при производных являются линейными функциями переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ и не зависят от неизвестной функции, а правая часть уравнения линейна относительно g.

Переписав систему уравнений (62) в форме Коши, будем иметь

$$\begin{aligned}
&\frac{d\lambda_k}{dt}=-\sum_{l=1}^{p} a_{lk}\lambda_l \quad (k=1,\ \ldots,\ p),\\
&\frac{dg}{dt}=[i\lambda^{\mathrm{T}}a_0+\chi(b^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)]\,g.
\end{aligned} \tag{64}$$

Первые p из этих уравнений образуют систему линейных однородных уравнений относительно $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, матрица коэффициентов которой представляет собой транспонированную матрицу коэффициентов исходного уравнения (60) с обратным знаком. В матричной форме эта система уравнений имеет вид

$$\frac{d\lambda}{dt} = -a^{\mathrm{T}}\lambda. \tag{65}$$

Чтобы найти общее решение этого уравнения, обозначим через $u(t, \tau)$ решение уравнения $du/dt = au$ при начальном условии $u(\tau, \tau) = I$, $t \geqslant \tau \geqslant t_0$. Тогда решение $v(t, \tau)$ сопряженного уравнения $dv/dt = -a^{\mathrm{T}}v$ при начальном условии $v(\tau, \tau) = I$ определяется формулой (п. 1.3.3) $v(t, \tau) = u(t, \tau)^{-1\mathrm{T}}$. Следовательно, общее решение уравнения (65) определится формулой

$$\lambda = u(t, \alpha)^{-1\mathrm{T}} c, \tag{66}$$

где c — произвольный постоянный p-мерный вектор, $c = [c_1 \ldots c_p]^{\mathrm{T}}$, а α — произвольный момент времени в интервале $[t_0, t)$. Подставив выражение (66) в уравнение (64), приведем его к виду

$$\frac{dg}{dt} = [ic^{\mathrm{T}}u(t, \alpha)^{-1} a_0(t) + \chi(b(t)^{\mathrm{T}} u(t, \alpha)^{-1\mathrm{T}} c;\ t)]\, g.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$g = c_{p+1} \exp\left\{\int_{\alpha}^{t} [ic^{\mathrm{T}}u(\tau, \alpha)^{-1} a_0(\tau) + \chi(b(\tau)^{\mathrm{T}} u(\tau, \alpha)^{-1\mathrm{T}} c;\ \tau)]\, d\tau\right\},$$

где c_{p+1} — произвольная скалярная постоянная. Подставив сюда выражение c из (66),

$$c = u(t, \alpha)^{\mathrm{T}} \lambda,$$

и решив полученное уравнение относительно c_{p+1}, будем иметь

$$c_{p+1} = g \exp\left\{-\int_{\alpha}^{t} [i\lambda^{\mathrm{T}}u(t, \alpha)\, u(\tau, \alpha)^{-1} a_0(\tau) + \right.$$

$$\left. + \chi(b(\tau)^{\mathrm{T}} u(\tau, \alpha)^{-1\mathrm{T}} u(t, \alpha)^{\mathrm{T}} \lambda;\ \tau)]\, d\tau\right\}.$$

Но согласно формуле (1.24) для любых $\alpha < \tau < t$

$$u(t, \alpha) = u(t, \tau)\, u(\tau, \alpha). \tag{67}$$

Пользуясь этой формулой, приведем предыдущую формулу к виду

$$c_{p+1} = g \exp\left\{-i\lambda^{\mathrm{T}} \int_{\alpha}^{t} u(t, \tau)\, a_0(\tau)\, d\tau - \int_{\alpha}^{t} \chi(b(\tau)^{\mathrm{T}} u(t, \tau)^{\mathrm{T}} \lambda;\ \tau)\, d\tau\right\}.$$

Правая часть этой формулы и компоненты вектора $u(t, \alpha)^{\mathrm{T}}\lambda$ представляют собой соответственно функции $\varphi_{p+1}, \varphi_1, \ldots, \varphi_p$ пункта 3) алгоритма. Следовательно, взяв произвольную функцию p-мерного вектора $f(x)$, получаем уравнение (63) для данного случая:

$$g \exp\left\{-i\lambda^{\mathrm{T}} \int_{\alpha}^{t} u(t, \tau)\, a_0(\tau)\, d\tau - \int_{\alpha}^{t} \chi(b(\tau)^{\mathrm{T}} u(t, \tau)^{\mathrm{T}} \lambda;\ \tau)\, d\tau\right\} = f(u(t, \alpha)^{\mathrm{T}} \lambda).$$

Решив это уравнение относительно g, находим полный интеграл уравнения в частных производных (61):

$$g(\lambda;\ t) = f(u(t, \alpha)^{\mathrm{T}} \lambda) \exp\left\{i\lambda^{\mathrm{T}} \int_{\alpha}^{t} u(t, \tau)\, a_0(\tau)\, d\tau + \int_{\alpha}^{t} \chi(b(\tau)^{\mathrm{T}} u(t, \tau)^{\mathrm{T}} \lambda;\ \tau)\, d\tau\right\}. \blacktriangleleft \qquad (68)$$

Произвольная функция $f(x)$ в этой формуле определяется из соответствующего начального условия при $t=\alpha$. Поэтому по формуле (68) можно определить последовательно все конечномерные характеристические функции процесса $Z(t)$, пользуясь начальными условиями (39) и (42).

При выводе формулы (68) мы ввели дополнительную произвольную постоянную α. Однако эта постоянная несущественна и введена только для удобства пользования начальными условиями. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что замена α любым другим моментом времени β приведет к появлению в (68) дополнительного постоянного слагаемого в аргументе показательной функции и дополнительного постоянного множителя $u(\beta, \alpha)^{\mathrm{T}}$ при $\beta > \alpha$ или $u(\alpha, \beta)^{-1\mathrm{T}}$ при $\beta < \alpha$ в аргументе произвольной функции $f(x)$. Оба множителя, полученные при этом, можно включить в состав функции $f(x)$ ввиду ее произвольности. Поэтому введение произвольного момента времени $\alpha \in [t_0, t)$ по существу не вносит никакого дополнительного произвола.

5.4.3. Явные формулы для конечномерных характеристических функций. Применим теперь формулу (68) для вывода явных выражений для всех конечномерных характеристических функций вектора состояния линейной системы.

▶ Положив в (68) $\alpha = t_0$, $g(\lambda;\ t) = g_1(\lambda;\ t)$ и пользуясь начальным условием (39):

$$g_1(\lambda;\ t_0) = g_0(\lambda),$$

получаем $f(u(t_0, t_0)^{\mathrm{T}}\lambda) = g_0(\lambda)$ или, так как при любом τ $u(\tau, \tau) = I$, $f(\lambda) = g_0(\lambda)$. Эта формула полностью определяет функцию $f(x)$ в (68) для случая одномерной характеристической функции $g_1(\lambda;\ t)$. Таким образом, одномерная характеристическая функция $g_1(\lambda;\ t)$ процесса $Z(t)$ определяется формулой

$$g_1(\lambda;\ t) = g_0(u(t,\ t_0)^{\mathrm{T}}\lambda)\exp\left\{i\lambda^{\mathrm{T}}\int_{t_0}^{t} u(t,\ \tau)\, a_0(\tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} \chi(b(\tau)^{\mathrm{T}} u(t,\ \tau)^{\mathrm{T}}\lambda;\ \tau)\, d\tau\right\}. \tag{69}$$

Для определения двумерной характеристической функции $g_2(\lambda_1,\ \lambda_2;\ t_1,\ t_2)$ при $t_1 < t_2$ положим в (68) в соответствии с начальным условием (42) при $n = 2$, $\alpha = t_1$, $\lambda = \lambda_2$, $t = t_2$, $g(\lambda;\ t) = g_2(\lambda_1,\ \lambda_2;\ t_1,\ t_2)$. Тогда получим

$$g_2(\lambda_1,\ \lambda_2;\ t_1,\ t_2) = f(u(t_2,\ t_1)^{\mathrm{T}}\lambda_2)\times$$
$$\times\exp\left\{i\lambda_2^{\mathrm{T}}\int_{t_1}^{t_2} u(t_2,\ \tau)\, a_0(\tau)\, d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \chi(b(\tau)^{\mathrm{T}} u(t_2,\ \tau)^{\mathrm{T}}\lambda_2;\ \tau)\, d\tau\right\}. \tag{70}$$

Для определения функции f воспользуемся начальным условием (42). Положив $t_2 = t_1$, получим на основании (42) и (69)

$$f(\lambda_2) = g_1(\lambda_1 + \lambda_2;\ t_1) =$$
$$= g_0(u(t_1,\ t_0)^{\mathrm{T}}(\lambda_1 + \lambda_2))\exp\left\{i(\lambda_1^{\mathrm{T}} + \lambda_2^{\mathrm{T}})\int_{t_0}^{t_1} u(t_1,\ \tau)\, a_0(\tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{t_1} \chi(b(\tau)^{\mathrm{T}} u(t_1,\ \tau)^{\mathrm{T}}(\lambda_1 + \lambda_2);\ \tau)\, d\tau\right\}.$$

Следовательно,

$$f(u(t_2,\ t_1)^{\mathrm{T}}\lambda_2) = g_0(u(t_1,\ t_0)^{\mathrm{T}}\lambda_1 + u(t_1,\ t_0)^{\mathrm{T}} u(t_2,\ t_1)^{\mathrm{T}}\lambda_2)\times$$
$$\times\exp\left\{i[\lambda_1^{\mathrm{T}} + \lambda_2^{\mathrm{T}} u(t_2, t_1)]\int_{t_0}^{t_1} u(t_1,\ \tau)\, a_0(\tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{t_1} \chi(b(\tau)^{\mathrm{T}}[u(t_1,\ \tau)^{\mathrm{T}}\lambda_1 + u(t_1,\ \tau)^{\mathrm{T}} u(t_2,\ t_1)^{\mathrm{T}}\lambda_2];\ \tau)\, d\tau\right\}.$$

Но на основании формулы (67)

$$u(t_2,\ t_1)\, u(t_1,\ \tau) = u(t_2,\ \tau),$$
$$u(t_1,\ t_0)^{\mathrm{T}} u(t_2,\ t_1)^{\mathrm{T}} = u(t_2,\ t_0)^{\mathrm{T}},$$
$$u(t_1,\ \tau)^{\mathrm{T}} u(t_2,\ t_1)^{\mathrm{T}} = u(t_2,\ \tau)^{\mathrm{T}}$$

и предыдущая формула принимает вид

$$f(u(t_2, t_1)^{\mathrm{T}}\lambda_2) = g_0(u(t_1, t_0)^{\mathrm{T}}\lambda_1 + u(t_2, t_0)^{\mathrm{T}}\lambda_2)\times$$
$$\times\exp\left\{i\lambda_1^{\mathrm{T}}\int_{t_0}^{t_1} u(t_1, \tau)\,a_0(\tau)\,d\tau + i\lambda_2^{\mathrm{T}}\int_{t_0}^{t_1} u(t_2, \tau)\,a_0(\tau)\,d\tau +\right.$$
$$\left.+\int_{t_0}^{t_1}\chi(b(\tau)^{\mathrm{T}}[u(t_1, \tau)^{\mathrm{T}}\lambda_1 + u(t_2, \tau)^{\mathrm{T}}\lambda_2];\ \tau)\,d\tau\right\}.$$

Подставив это выражение $f(u(t_2, t_1)^{\mathrm{T}}\lambda_2)$ в (70), найдем двумерную характеристическую функцию $g_2(\lambda_1, \lambda_2;\ t_1, t_2)$:

$$g_2(\lambda_1, \lambda_2;\ t_1, t_2) = g_0(u(t_1, t_0)^{\mathrm{T}}\lambda_1 + u(t_2, t_0)^{\mathrm{T}}\lambda_2)\times$$
$$\times\exp\left\{i\lambda_1^{\mathrm{T}}\int_{t_0}^{t_1} u(t_1, \tau)\,a_0(\tau)\,d\tau + i\lambda_2^{\mathrm{T}}\int_{t_0}^{t_2} u(t_2, \tau)\,a_0(\tau)\,d\tau +\right.$$
$$+\int_{t_0}^{t_2}\chi(b(\tau)^{\mathrm{T}}[u(t_1, \tau)^{\mathrm{T}}\lambda_1 + u(t_2, \tau)^{\mathrm{T}}\lambda_2];\ \tau)\,d\tau +$$
$$\left.+\int_{t_1}^{t_2}\chi(b(\tau)^{\mathrm{T}}u(t_2, \tau)^{\mathrm{T}}\lambda_2;\ \tau)\,d\tau\right\}. \qquad (71)$$

Для нахождения остальных характеристических функций проще всего применить метод индукции. Подметив закономерности в переходе от формулы для $g_1(\lambda_1;\ t_1)$ к формуле для $g_2(\lambda_1, \lambda_2;\ t_1, t_2)$, можно написать следующую формулу для n-мерной характеристической функции $g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ t_1, \ldots, t_n)$ при любом n и при $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$:

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ t_1, \ldots, t_n) =$$
$$= g_0\left(\sum_{k=1}^{n} u(t_k, t_0)^{\mathrm{T}}\lambda_k\right)\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{\mathrm{T}}\int_{t_0}^{t_k} u(t_k, \tau)\,a_0(\tau)\,d\tau +\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\chi(b(\tau)^{\mathrm{T}}\sum_{l=k}^{n} u(t_l, \tau)^{\mathrm{T}}\lambda_l;\ \tau)\,d\tau\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (72)$$

Предположив, что формула (72) верна при каком-нибудь n, и пользуясь формулой (68) и начальным условием (42), совершенно так же, как была выведена формула (71), убедимся в том, что формула (72) верна и при n, на единицу большем. А так как она верна при $n = 1$ и при $n = 2$, то она верна и при любом n. ◀

Формула (72) дает явные выражения всех конечномерных характеристических функций случайного процесса $Z(t)$, определяемого линейным стохастическим дифференциальным уравнением (60). Пользуясь этой формулой, можно найти все конечномерные распределения вектора состояния линейной системы. Если Z представляет собой расширенный вектор состояния системы, включающий все дополнительные переменные, векторы состояния и выходные сигналы всех формирующих фильтров, введенных в систему для приведения ее уравнений к стохастическим дифференциальным уравнениям, то для нахождения конечномерных характеристических функций вектора состояния системы следует положить в (72) равными нулю компоненты всех векторов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, соответствующие не интересующим нас компонентам вектора Z. После этого можно найти и все конечномерные распределения выходного сигнала системы по формуле преобразования характеристической функции при линейном преобразовании случайной величины (TB, п. 4.5.1). Таким образом, формула (72) дает полное решение задачи определения распределения вектора состояния и выходного сигнала любой линейной системы, поведение которой описывается стохастическим дифференциальным уравнением.

Пример 17. Выходной сигнал Z формирующего фильтра примера 2 определяется уравнением

$$\dot{Z}+\alpha Z=\gamma V,$$

где $\gamma=\sqrt{2D\alpha}$, а V — белый шум единичной интенсивности.

В данном случае $a=-\alpha$, $a_0=0$, $b=\gamma$, $u(t,\tau)=e^{-\alpha(t-\tau)}$ и формула (72) дает при $t_0=0$, $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n$

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ t_1, \ldots, t_n)=$$
$$=g_0\left(\sum_{k=1}^{n} e^{-\alpha t_k}\lambda_k\right)\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\chi\left(\gamma\sum_{l=k}^{n} e^{-\alpha(t_l-\tau)}\lambda_l;\ \tau\right)d\tau\right\}.$$

В частности, при нормально распределенном белом шуме $V(t)$ функция $\chi(\mu;\ t)$ определяется формулой (52), и полученная формула принимает вид

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ t_1, \ldots, t_n)=g_0\left(\sum_{k=1}^{n} e^{-\alpha t_k}\lambda_k\right)\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma^2\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sum_{h,\,l=k}^{n} e^{-\alpha(t_h+t_l-2\tau)}\lambda_h\lambda_l\,d\tau\right\}=$$
$$=g_0\left(\sum_{k=1}^{n} e^{-\alpha t_k}\lambda_k\right)\exp\left\{-\frac{\gamma^2}{4\alpha}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{2\alpha t_k}-e^{2\alpha t_{k-1}}\right)\sum_{h,\,l=k}^{n} e^{-\alpha(t_h+t_l)}\lambda_h\lambda_l\right\}.$$

Изменив порядок суммирования и учитывая, что во всех слагаемых $k \leqslant \min(h,\ l)$, получим

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ t_1, \ldots, t_n)=$$
$$=g_0\left(\sum_{k=1}^{n} e^{-\alpha t_k}\lambda_k\right)\exp\left\{-\frac{\gamma^2}{4\alpha}\sum_{h,\,l=1}^{n} e^{-\alpha(t_h+t_l)}\left(e^{2\alpha\min(t_h,\,t_l)}-1\right)\lambda_h\lambda_l\right\},$$

или

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n) = g_0\left(\sum_{k=1}^{n} e^{-\alpha t_k}\lambda_k\right)\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{D}{2}\sum_{h,\,l=1}^{n}\left(e^{-\alpha|t_h-t_l|}-e^{-\alpha(t_h+t_l)}\right)\lambda_h\lambda_l\right\} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Так как эта формула симметрична относительно пар $(\lambda_1, t_1), \ldots, (\lambda_n, t_n)$, то она справедлива при всех $t_1, \ldots, t_n$.

Если V — слабая с. к. производная пуассоновского процесса (пуассоновский поток δ-функций с независимыми одинаково распределенными случайными коэффициентами), то согласно (53) $\chi(\mu; t) = [g(\mu)-1]\,\nu$, где $g(\mu)$ — характеристическая функция скачков общего пуассоновского процесса, а ν — интенсивность потока скачков. При этом полученная формула принимает вид

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n) =$$
$$= g_0\left(\sum_{k=1}^{n} e^{-\alpha t_k}\lambda_k\right)\exp\left\{\nu\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[g\left(\gamma\sum_{l=k}^{n} e^{-\alpha(t_l-\tau)}\lambda_l\right)-1\right]d\tau\right\}.$$

Пример 18. Рассмотрим следящую систему примера 2.17, состоящую из интегратора и усилителя с жесткой отрицательной обратной связью. Дифференциальное уравнение этой системы имеет вид

$$\dot{Z} + \beta Z = \beta X(t),$$

где $X(t)$ — стационарная случайная функция с математическим ожиданием $m_x(t) = a + bt$ и ковариационной функцией $k_x(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}$. Формирующий фильтр для центрированной случайной функции $X^0(t)$ описывается дифференциальным уравнением примера 2,

$$\dot{X}^0 + \alpha X^0 = \sqrt{2D\alpha}\,V,$$

где V — белый шум единичной интенсивности. Таким образом, рассматриваемая следящая система описывается линейными стохастическими дифференциальными уравнениями

$$\dot{Z} = -\beta Z + \beta Z_1 + \beta(a + bt),$$
$$\dot{Z}_1 = -\alpha Z_1 + \sqrt{2D\alpha}\,V, \quad Z_1 = X^0(t).$$

В матричной форме эти уравнения имеют вид

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} Z \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta & \beta \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta(a+bt) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2D\alpha} \end{bmatrix} V_1.$$

Таким образом, в данном случае

$$\lambda_k = \begin{bmatrix} \lambda_k' \\ \lambda_k'' \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} -\beta & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad a_0 = \begin{bmatrix} \beta(a+bt) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2D\alpha} \end{bmatrix},$$

$$u(t, \tau) = \begin{bmatrix} e^{-\beta(t-\tau)} & \dfrac{\beta}{\beta-\alpha}\left\{e^{-\alpha(t-\tau)} - e^{-\beta(t-\tau)}\right\} \\ 0 & e^{-\alpha(t-\tau)} \end{bmatrix}.$$

Предположим, что белый шум V распределен нормально. В этом случае, приняв во внимание, что $\nu = 1$, по формуле (52) находим

$$\chi(\mu; t) = -\frac{1}{2}\mu^2.$$

Подставив выражения λ, a, a_0, b, $u(t, \tau)$ и $\chi(\mu;\, t)$ в формулу (72) при $t_0=0$, после элементарных, но довольно громоздких выкладок находим конечномерные характеристические функции векторной случайной функции $[Z(t)\ \ Z_1(t)]^{\mathrm{T}}$:

$$g_n(\lambda_1', \lambda_1'', \ldots, \lambda_n', \lambda_n'';\, t_1, \ldots, t_n)=$$
$$=g_0\left(\sum_{k=1}^{n} e^{-\beta t_k}\lambda_k',\ \ \frac{\beta}{\beta-\alpha}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(e^{-\alpha t_k}-e^{-\beta t_k}\right)\lambda_k'+e^{-\alpha t_k}\lambda_k''\right]\right)\times$$
$$\times\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\left[a+b\left(t_k-\frac{1}{\beta}\right)-\left(a-\frac{b}{\beta}\right)e^{-\beta t_k}\right]-\right.$$
$$-\frac{D\beta}{2(\alpha-\beta)^2}\sum_{l,\,h=1}^{n}\left\{\beta\left[e^{-\alpha|t_l-t_h|}-e^{-\alpha(t_l+t_h)}\right]+\right.$$
$$+\alpha\left[e^{-\beta|t_l-t_h|}-e^{-\beta(t_l+t_h)}\right]-\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\left(e^{-\alpha|t_l-t_h|}+\right.$$
$$\left.\left.+e^{-\beta|t_l-t_h|}-2e^{-\alpha t_l-\beta t_h}\right)\right\}\lambda_l'\lambda_h'+\frac{D\beta}{\alpha-\beta}\sum_{l,\,h=1}^{n}\left\{e^{-\alpha|t_l-t_h|}-e^{-\alpha(t_l+t_h)}-\right.$$
$$\left.-\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}\left(e^{-\beta|t_l-t_h|}-e^{-\alpha t_l-\beta t_h}\right)\right\}\lambda_h'\lambda_l''-$$
$$\left.-\frac{D}{2}\sum_{l,\,h=1}^{n}\left[e^{-\alpha|t_l-t_h|}-e^{-\alpha(t_l+t_h)}\right]\lambda_l''\lambda_h''\right\}\qquad(n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Так как эта формула симметрична относительно троек $(\lambda_1', \lambda_1'', t_1), \ldots$ $\ldots, (\lambda_n', \lambda_n'', t_n)$, то она справедлива при всех $t_1, \ldots, t_n$, несмотря на то, что формула (72) справедлива в общем случае только при $t_1\leqslant t_2\leqslant\ldots\leqslant$ $\leqslant t_n$.

Для определения конечномерных распределений выходного сигнала системы $Y=Z$ достаточно положить в полученной формуле $\lambda_k'=\lambda_k$, $\lambda_k''=0$ $(k=1, \ldots, n)$. Тогда конечномерные характеристические функции $k_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\, t_1, \ldots, t_n)$ выходного сигнала системы $Y(t)$ определятся формулой

$$k_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\, t_1, \ldots, t_n)=g_0\left(\sum_{k=1}^{n} e^{-\beta t_k}\lambda_k,\ \ \sum_{k=1}^{n}\left(e^{-\alpha t_k}-e^{-\beta t_k}\right)\lambda_k\right)\times$$
$$\times\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\left[a+b\left(t_k-\frac{1}{\beta}\right)-\left(a-\frac{b}{\beta}\right)e^{-\beta t_k}\right]-\right.$$
$$-\frac{D\beta}{2(\alpha-\beta)^2}\sum_{l,\,h=1}^{n}\left\{\beta\left[e^{-\alpha|t_l-t_h|}-e^{-\alpha(t_l+t_h)}\right]+\right.$$
$$+\alpha\left[e^{-\beta|t_l-t_h|}-e^{-\beta(t_l+t_h)}\right]-$$
$$\left.\left.-\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\left(e^{-\alpha|t_l-t_h|}+e^{-\beta|t_l-t_h|}-2e^{-\alpha t_l-\beta t_h}\right)\right\}\lambda_l\lambda_h\right\}\qquad(n=1,\ 2,\ \ldots).$$

5.4.4. Случай нормального распределения состояния системы. В частном случае нормально распределенного белого шума V в уравнении (60) функция $\chi(\mu;\ t)$ определяется формулой (52):

$$\chi(\mu;\ t) = -\frac{1}{2}\mu^{\mathrm{T}}\nu(t)\mu.$$

Поэтому

$$\chi\left(b(\tau)^{\mathrm{T}}\sum_{l=k}^{n}u(t_l,\ \tau)^{\mathrm{T}}\lambda_l;\ \tau\right) = \\ = -\frac{1}{2}\sum_{l,\ h=k}^{n}\lambda_l^{\mathrm{T}}u(t_l,\ \tau)\,b(\tau)\,\nu(\tau)\,b(\tau)^{\mathrm{T}}u(t_h,\ \tau)^{\mathrm{T}}\lambda_h$$

и формула (72) принимает вид

$$g_n(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n;\ t_1,\ \ldots,\ t_n) = \\ = g_0\left(\sum_{k=1}^{n}u(t_k,\ t_0)^{\mathrm{T}}\lambda_k\right)\exp\left\{i\sum_{k=1}^{l}\lambda_k^{\mathrm{T}}\int_{t_0}^{t_k}u(t_k,\ \tau)\,a_0(\tau)\,d\tau - \right. \\ \left. -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l,\ h=k}^{n}\lambda_l^{\mathrm{T}}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u(t_l,\ \tau)\,b(\tau)\,\nu(\tau)\,b(\tau)^{\mathrm{T}}u(t_h,\ \tau)^{\mathrm{T}}\,d\tau\,\lambda_h\right\} \\ (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Изменим в последней сумме порядок суммирования — сначала будем суммировать по k, а потом по l и h. Имея в виду, что $1 \leqslant k \leqslant l,\ h$, получим при $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n$

$$g_n(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n;\ t_1,\ \ldots,\ t_n) = \\ = g_0\left(\sum_{k=1}^{n}u(t_k,\ t_0)^{\mathrm{T}}\lambda_k\right)\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{\mathrm{T}}\int_{t_0}^{t_k}u(t,\ \tau)\,a_0(\tau)\,d\tau - \right. \\ \left. -\frac{1}{2}\sum_{l,\ h=1}^{n}\lambda_l^{\mathrm{T}}\sum_{k=1}^{\min(l,\ h)}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u(t_l,\ \tau)\,b(\tau)\,\nu(\tau)\,b(\tau)^{\mathrm{T}}\,u(t_h,\ \tau)^{\mathrm{T}}\,d\tau\,\lambda_h\right\} \\ (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Но

$$\sum_{k=1}^{\min(l,\ h)}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u(t_l,\ \tau)\,b(\tau)\,\nu(\tau)\,b(\tau)^{\mathrm{T}}\,u(t_h,\ \tau)^{\mathrm{T}}\,d\tau = \\ = \int_{t_0}^{\min(t_l,\ t_h)}u(t_l,\ \tau)\,b(\tau)\,\nu(\tau)\,b(\tau)^{\mathrm{T}}\,u(t_h,\ \tau)^{\mathrm{T}}\,d\tau.$$

Следовательно,

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ t_1, \ldots, t_n) = g_0\left(\sum_{k=1}^{n} u(t_k, t_0)^{\mathrm{T}}\lambda_k\right)\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{\mathrm{T}}\int_{t_0}^{t_k} u(t_k, \tau)\,a_0(\tau)\,d\tau - \frac{1}{2}\sum_{l,h=1}^{n}\lambda_l^{\mathrm{T}}\int_{t_0}^{\min(t_l, t_h)} u(t_l, \tau)\,b(\tau)\,\nu(\tau)\,b(\tau)^{\mathrm{T}}u(t_h, \tau)^{\mathrm{T}}\,d\tau\,\lambda_h\right\}$$

$$(n = 1, 2, \ldots). \tag{73}$$

Эта формула симметрична относительно пар $(\lambda_1, t_1), \ldots, (\lambda_n, t_n)$. Поэтому она справедлива при всех $t_1, \ldots, t_n$, несмотря на то, что была выведена для $t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$.

Если начальное распределение нормально, то (*ТВ*, пример 4.32)

$$g_0(\lambda) = \exp\left\{i\lambda^{\mathrm{T}}m_0 - \frac{1}{2}\lambda^{\mathrm{T}}K_0\lambda\right\}$$

и формула (73) принимает вид

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ t_1, \ldots, t_n) = \exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{\mathrm{T}}\left[u(t_k, t_0)\,m_0 + \int_{t_0}^{t_k} u(t_k, \tau)\,a_0(\tau)\,d\tau\right] - \frac{1}{2}\sum_{l,h=1}^{n}\lambda_l^{\mathrm{T}}\left[u(t_l, t_0)\,K_0 u(t_h, t_0)^{\mathrm{T}} + \int_{t_0}^{\min(t_l, t_h)} u(t_l, \tau)\,b(\tau)\,\nu(\tau)\,b(\tau)^{\mathrm{T}}u(t_h, \tau)^{\mathrm{T}}\,d\tau\right]\lambda_h\right\}$$

$$(n = 1, 2, \ldots). \tag{74}$$

Формула (74) показывает, что в рассматриваемом случае все конечномерные распределения случайного процесса $Z(t)$ нормальны. Следовательно, процесс $Z(t)$ представляет собой нормально распределенную случайную функцию (п. 2.2.8) с математическим ожиданием

$$m(t) = u(t, t_0)\,m + \int_{t_0}^{t} u(t, \tau)\,a_0(\tau)\,d\tau$$

и ковариационной функцией

$$K(t_1, t_2) = u(t_1, t_0)\,K_0 u(t_2, t_0)^* + \int_{t_0}^{\min(t_1, t_2)} u(t_1, \tau)\,b(\tau)\,\nu(\tau)\,b(\tau)^{\mathrm{T}}u(t_2, \tau)^*\,d\tau$$

в полном соответствии с формулами (23) и (24). Однако формулы (23) и (24) были получены в п. 5.2.2 для значительно более общего случая любого распределения начального состояния и любого белого шума V.

Таким образом, *при нормальном распределении начального состояния системы* Z_0 *и нормально распределенном белом шуме* V *в* (60) *состояние системы, рассматриваемое как функция времени, представляет собой нормально распределенный случайный процесс.*

Так как для устойчивой системы $u(t, t_0) \to 0$ при $t \to \infty$ при любом t_0, то

$$g_0\left(\sum_{k=1}^{n} u(t_k, t_0)^{\tau} \lambda_k\right) \to g_0(0) = 1$$

при $\min(t_1, \ldots, t_n) \to \infty$. Из формулы (73) следует, что в этом случае все конечномерные распределения процесса $Z(t)$ стремятся к соответствующим нормальным распределениям при $\min(t_1, \ldots, t_n) \to \infty$ независимо от начального распределения $g_0(\lambda)$. Таким образом, *для устойчивой линейной системы распределение процесса* $Z(t)$ *асимптотически нормально, если белый шум* V *в* (60) *распределен нормально.*

5.4.5. Стационарные в узком смысле процессы в стационарных линейных системах. Рассмотрим устойчивую стационарную линейную систему (21) под действием стационарного в строгом смысле белого шума. В этом случае a, a_0 и b постоянны, функция $u(t, \tau)$ зависит только от разности аргументов, $u(t, \tau) = w(t-\tau)$ (пример 1.17), а функция χ не зависит от времени, $\chi(\mu; t) = \chi(\mu)$.

Положив в формуле (69) $t_0 = -\infty$, $u(t, \tau) = w(\sigma)$, $\sigma = t-\tau$, $u(t, t_0) = w(\infty) = 0$ и учитывая известное свойство характеристической функции (*ТВ*, п. 4.5.1), придем к следующей явной формуле для одномерной характеристической функции процесса $Z(t)$:

$$g_1(\lambda) = \exp\left\{i\lambda^{\tau} \int_0^{\infty} w(\sigma)\, a_0\, d\sigma + \int_0^{\infty} \chi(b^{\tau} w(\sigma)^{\tau} \lambda)\, d\sigma\right\}. \tag{75}$$

Отсюда видно, что одномерная характеристическая функция вектора состояния стационарной линейной дифференциальной системы при $t_0 = -\infty$ не зависит от времени t (именно вследствие этого мы ее обозначили просто $g_1(\lambda)$). Следовательно, при неограниченном времени работы такой системы в ней устанавливается стационарный по отношению к одномерному распределению процесс (п. 4.1.1). Одномерная характеристическая функция этого процесса, конечно, удовлетворяет уравнению (61) при $\partial g_1/\partial t = 0$. Формула (75) показывает, что в случае нормально распределенного белого шума, когда $\chi(\mu) = -\mu^{\tau}\nu\mu/2$ (п. 5.3.5), одномерное распределение стационарного процесса в системе нормально, причем математическое ожидание m и ковариационная матрица K

значения процесса $Z(t)$ при любом t определяются формулами п. 5.2.7.

Полагая в (72) $t_0 = -\infty$, $u(t, \tau) = w(\sigma)$, $\sigma = t - \tau$, находим при $t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{\mathrm{T}} \int_0^{\infty} w(\sigma)\, a_0\, d\sigma + \int_0^{\infty} \chi\left(b^{\mathrm{T}} \sum_{l=1}^{n} w(t_l - t_1 + \sigma)^{\mathrm{T}} \lambda_l \right) d\sigma + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=2}^{n} \int_0^{t_k - t_{k-1}} \chi\left(b^{\mathrm{T}} \sum_{l=k}^{n} w(t_l - t_k + \sigma)^{\mathrm{T}} \lambda_l \right) d\sigma \right\} \qquad (n = 2, 3, \ldots). \quad (76)$$

Формулы (75) и (76) показывают, что с течением времени в устойчивой стационарной линейной дифференциальной системе под действием стационарного белого шума устанавливается стационарный в узком смысле случайный процесс (п. 4.1.1).

При произвольном начальном моменте t_0 процесс в системе будет стационарным в узком смысле, если его начальное распределение определить характеристической функцией

$$g_0(\lambda) = \exp\left\{ i\lambda^{\mathrm{T}} \int_0^{\infty} w(\sigma)\, a_0\, d\sigma + \int_0^{\infty} \chi\left(b^{\mathrm{T}} w(\sigma)^{\mathrm{T}} \lambda\right) d\sigma \right\}.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно подставить это выражение в (72) при $u(t, \tau) = w(t - \tau)$, заменив λ суммой

$$\sum_{k=1}^{n} w(t_k - t_0)^{\mathrm{T}} \lambda_k,$$

и вспомнить, что согласно свойству (1.24) функции $u(t, \tau)$

$$w(t_k - t_0)\, w(\sigma) = w(t_k - t_0 + \sigma)$$

при всех t_k, t_0 и σ. Для нормально распределенного белого шума V и нормально распределенного начального значения процесса $Z(t)$ это ясно непосредственно из результатов п. 5.2.7 и формулы (2.20). В этом случае конечномерные характеристические функции стационарного в узком смысле процесса определяются вытекающей из (73) формулой

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ t_1, \ldots, t_n) = \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{\mathrm{T}} \int_0^{\infty} w(\sigma)\, a_0\, d\sigma - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sum_{k,\, l=1}^{n} \lambda_k^{\mathrm{T}} \int_0^{\infty} w(t_l - t_k + \sigma)\, b v b^{\mathrm{T}} w(\sigma)^{\mathrm{T}}\, d\sigma\, \lambda_l \right\} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Пример 19. В условиях примера 17 конечномерные распределения стационарного в узком смысле процесса $Z(t)$ при нормально распределенном белом шуме V определяются формулой

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ t_1, \ldots, t_n) = \exp\left\{-\frac{D}{2}\sum_{k,\,l=1}^{n} e^{-\alpha|t_k-t_l|}\lambda_k\lambda_l\right\} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Пример 20. В условиях примера 18 конечномерные характеристические функции стационарного в узком смысле выходного сигнала $Y(t)$ определяются формулой

$$k_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ t_1, \ldots, t_n) = \\ = \exp\left\{-\frac{D\beta}{2(\beta^2-\alpha^2)}\sum_{h,\,l=1}^{n}\left(\beta e^{-\alpha|t_h-t_l|} - \alpha e^{-\beta|t_h-t_l|}\right)\lambda_h\lambda_l\right\} \\ (n=1, 2, \ldots).$$

§ 5.5. Системы, приводимые к стохастическим дифференциальным системам

5.5.1. Стохастические интегро-дифференциальные системы. Так же как и в случае детерминированных уравнений (п. 1.5.1), в теории стохастических дифференциальных уравнений рассматриваются стохастические уравнения Ито более общего вида:

$$\dot{Z} = a(Z_{t_0}^t,\ t) + b(Z_{t_0}^t,\ t)V, \qquad Z(t_0) = Z_0. \tag{77}$$

Здесь, в отличие от уравнения (32), функции a и b при каждом данном t зависят не от текущего значения процесса $Z(t)$, а от всех его значений $Z(\tau)$ в интервале $[t_0, t)$, т. е. компоненты вектора a и элементы матрицы b являются функционалами от процесса $Z(\tau)$, $\tau \in [t_0, t)$.

Важным частным случаем уравнения (77) является случай, когда функции a и b определяются формулами [118]

$$a(Z_{t_0}^t,\ t) = a(Z(t),\ U(t),\ t), \qquad b(Z_{t_0}^t,\ t) = b(Z(t),\ U(t),\ t), \tag{78}$$

где $U(t)$ — векторный случайный процесс, определяемый стохастическим интегральным уравнением Ито

$$U(t) = \int_{t_0}^{t} [A(t,\ \tau,\ Z(\tau),\ U(\tau)) + B(t,\ \tau,\ Z(\tau),\ U(\tau))V(\tau)]\,d\tau. \tag{79}$$

Здесь $A(t, \tau, z, u)$ и $B(t, \tau, z, u)$ — соответственно векторная и матричная функции указанных аргументов, а интеграл от произведения B на белый шум в строгом смысле V в соответствии с п. 3.4.9 понимается как стохастический интеграл Ито.

Так же как и интегро-дифференциальные системы п. 1.5.1, стохастические интегро-дифференциальные системы (77)—(79) часто приводятся к стохастическим дифференциальным системам (32). В дальнейшем ограничимся изучением только таких стохастических интегро-дифференциальных систем.

5.5.2. Приведение стохастических интегро-дифференциальных уравнений к стохастическим дифференциальным уравнениям. Рассмотрим случай, когда подынтегральные функции A и B в (79) допускают представление

$$\begin{aligned} A &= A(t, \tau, z, u) = w'(t, \tau)\varphi'(z, u, \tau), \\ B &= B(t, \tau, z, u) = w''(t, \tau)\varphi''(z, u, \tau), \end{aligned} \tag{80}$$

где $\varphi'(z, u, t)$ и $\varphi''(z, u, t)$ — некоторые функции указанных аргументов, в общем случае нелинейные, а матричная функция $[w'(t\ \tau)\ w''(t, \tau)]$ представляет собой весовую функцию некоторой линейной дифференциальной системы, описываемой уравнениями

$$\dot{\zeta} = \alpha\zeta + \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2, \qquad \eta = \beta\zeta. \tag{81}$$

Векторные входные сигналы этой системы ξ_1 и ξ_2 имеют ту же размерность, что и векторы $\varphi'(z, u, t)$ и $\varphi''(z, u, t)V$ соответственно. Коэффициенты α, α_1, α_2, β в общем случае могут быть функциями времени t. В этом случае, положив

$$U(t) = \beta Z'(t)$$

и определив Z' уравнением

$$\dot{Z}' = \alpha Z' + \alpha_1\varphi'(Z, U, t) + \alpha_2\varphi''(Z, U, t)V,$$

приведем стохастические интегро-дифференциальные уравнения (77)—(79) к стохастическим дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= a(Z, \beta Z', t) + b(Z, \beta Z', t)V, \\ \dot{Z}' &= \alpha Z' + \alpha_1\varphi'(Z, \beta Z', t) + \alpha_2\varphi''(Z, \beta Z', t)V, \\ Z(t_0) &= Z_0,\ Z'(t_0) = 0. \end{aligned} \tag{82}$$

Если функции $w'(t, \tau)$ и $w''(t, \tau)$ служат весовыми функциями линейных дифференциальных систем, описываемых дифференциальными уравнениями вида (1.31), то, так же как и в п. 1.5.2, соответствующие уравнения стандартным приемом п. 1.3.4 приводятся к уравнениям (81).

Другим широко распространенным типом функций A и B, входящих в (79), являются функции, допускающие представление

$$\begin{aligned} A &= A(t, \tau, z(\tau), u(\tau)) = \psi'(t)\varphi'(z, u, \tau), \\ B &= B(t, \tau, z(\tau), u(\tau)) = \psi''(t)\varphi''(z, u, \tau), \end{aligned} \tag{83}$$

где $\psi'(t)$ и $\psi''(t)$ — некоторые функции времени t. В этом случае, положив

$$U(t) = \psi'(t)Z'(t) + \psi''(t)Z''(t)$$

и определив Z' и Z'' уравнениями

$$\dot{Z}' = \varphi'(Z, U, t), \qquad \dot{Z}'' = \varphi''(Z, U, t)V,$$

приведем стохастические интегро-дифференциальные уравнения (77)—(79) к стохастическим дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= a(Z,\ \psi'Z'+\psi''Z'',\ t)+b(Z,\ \psi'Z'+\psi''Z'',\ t)V,\\ \dot{Z}' &= \varphi'(Z,\ \psi'Z'+\psi''Z'',\ t),\\ \dot{Z}'' &= \varphi''(Z,\ \psi'Z'+\psi''Z'',\ t)V,\\ Z(t_0) &= Z_0,\ Z'(t_0)=0,\ Z''(t_0)=0.\end{aligned} \tag{84}$$

Так же как и для детерминированных интегро-дифференциальных систем (п. 1.5.2), случаи

$$\begin{aligned}A(t,\ \tau,\ z,\ u) &= \sum_{k=1}^{N} w_k'(t,\ \tau)\varphi_k'(z,\ u,\ \tau),\\ B(t,\ \tau,\ z,\ u) &= \sum_{k=1}^{N} w_k''(t,\ \tau)\varphi_k''(z,\ u,\ \tau)\end{aligned} \tag{85}$$

и

$$\begin{aligned}A(t,\ \tau,\ z,\ u) &= \sum_{k=1}^{N} \psi_k'(t)\varphi_k'(z,\ u,\ \tau),\\ B(t,\ \tau,\ z,\ u) &= \sum_{k=1}^{N} \psi_k''(t)\varphi_k''(z,\ u,\ \tau)\end{aligned} \tag{86}$$

путем ввода блочных матриц

$$\begin{aligned}w'(t,\ \tau) &= [w_1'(t,\ \tau)\ \dots\ w_N'(t,\ \tau)],\\ w''(t,\ \tau) &= [w_1''(t,\ \tau)\ \dots\ w_N''(t,\ \tau)],\\ \varphi'(z,\ u,\ \tau) &= [\varphi_1'^{\mathrm{T}}(z,\ u,\ \tau)\ \dots\ \varphi_N'^{\mathrm{T}}(z,\ u,\ \tau)]^{\mathrm{T}},\\ \varphi''(z,\ u,\ \tau) &= [\varphi_1''^{\mathrm{T}}(z,\ u,\ \tau)\ \dots\ \varphi_N''^{\mathrm{T}}(z,\ u,\ \tau)]^{\mathrm{T}},\\ \psi''(t) &= [\psi_1'(t)\ \dots\ \psi_N'(t)],\\ \psi''(t) &= [\psi_1''(t)\ \dots\ \psi_N''(t)]\end{aligned}$$

приводятся к предыдущим [111, 118].

Пример 21. Рассмотрим одномерную интегро-дифференциальную систему, описываемую уравнением

$$\dot{Z} = a(Z,\ t)+b(Z,\ t)V+\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}a'(Z(\tau),\ \tau)\,d\tau+ \\ +\int_0^t e^{-\mu(t-\tau)}b'(Z(\tau),\ \tau)V(\tau)\,d\tau,$$

где a, a', b, b' — некоторые известные функции, а V — белый шум. Так как функции $\lambda e^{-\lambda(t-\tau)}$ и $\mu e^{-\mu(t-\tau)}$ являются весовыми функциями апериодических звеньев с постоянными времени $T_1=\lambda^{-1}$, $T_2=\mu^{-1}$ (пример 1.6), то наша система приводится к трехмерной стохастической дифференциальной системе вида (82):

$$\dot Z = a(Z,\ t) + \lambda^{-1} Z' + \mu^{-1} Z'' + b(Z,\ t) V,$$
$$\dot Z' = \lambda [a'(Z,\ t) - Z'], \qquad \dot Z'' = \mu [b'(Z,\ t) V - Z''] \tag{I}$$

с нулевыми начальными значениями Z' и Z''.

В данном случае подынтегральные функции в уравнении выражаются также формулой (83) с функциями $\psi'(t) = e^{-\lambda t}$, $\psi''(t) = e^{-\mu t}$. Поэтому исходная интегро-дифференциальная система приводится к трехмерной стохастической дифференциальной системе вида (84):

$$\dot Z = a(Z,\ t) + e^{-\lambda t} Z' + e^{-\mu t} Z'' + b(Z,\ t) V,$$
$$\dot Z' = e^{\lambda t} a'(Z,\ t), \qquad \dot Z'' = e^{\mu t} b'(Z,\ t) V \tag{II}$$

при нулевых начальных значениях Z' и Z''. Нетрудно видеть, что уравнения (I) более удобны, чем (II) для исследования.

ЗАДАЧИ

5.1. Найти формирующие фильтры для стационарных случайных функций $X(t)$ со спектральными плотностями:

а) $s_x(\omega) = \dfrac{D_1\alpha_1}{\pi(\alpha_1^2 + \omega^2)} + \dfrac{D_2\alpha_2}{\pi(\alpha_2^2 + \omega^2)}$;

б) $s_x(\omega) = \dfrac{D_1\alpha_1}{\pi(\alpha_1^2 + \omega^2)} + \dfrac{D_2\alpha_2(\beta_2^2 + \omega^2)}{\pi\left[\beta_2^4 + 2(\alpha_2^2 - \omega_0^2)\omega^2 + \omega^4\right]}$;

в) $s_x(\omega) = \dfrac{D_1\alpha_1\beta_1^2}{\pi\left[\beta_1^4 + 2(\alpha_1^2 - \omega_0^2)\omega^2 + \omega^4\right]} + \dfrac{D_2\alpha_2(\beta_2^2 + \omega^2)}{\pi\left[\beta_2^4 + 2(\alpha_2^2 - \omega_0^2)\omega^2 + \omega^4\right]}$

$(\beta_1^2 = \alpha_1^2 + \omega_0^2, \quad \beta_2^2 = \alpha_2^2 + \omega_0^2)$.

5.2. Показать, что для системы

$$\dot Z_1 = Z_2, \qquad \dot Z_2 = a_0 + V,$$

где a_0 — постоянная, V — белый шум постоянной интенсивности ν, математические ожидания, дисперсии, ковариация, ковариационные и взаимные ковариационные функции процессов $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ при нулевых начальных условиях определяются формулами

$$m_1 = a_0 t^2/2, \qquad m_2 = a_0 t,$$
$$k_{11} = \nu t^3/3, \qquad k_{12} = \nu t^2/2, \qquad k_{22} = \nu t,$$
$$K_{11}(t_1,\ t_2) = \nu t_1 t_2 \min(t_1,\ t_2),$$
$$K_{12}(t_1,\ t_2) = \nu t_1/2 \min(t_1,\ t_2),$$
$$K_{21}(t_1,\ t_2) = \nu t_2/2 \min(t_1,\ t_2),$$
$$K_{22}(t_1,\ t_2) = \nu \min(t_1,\ t_2).$$

5.3. Доказать, что для уравнений Ланжевена

$$\dot Z_1 = Z_2, \quad \dot Z_2 = -2\varepsilon Z_2 + V,$$

где $\varepsilon > 0$ — постоянная, V — белый шум постоянной интенсивности ν, дисперсии и ковариация процессов $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ при нулевых начальных условиях определяются формулами [125]

$$k_{11} = \frac{\nu}{16\varepsilon^3}(4\varepsilon t - 3 + 4e^{-2\varepsilon t} - e^{-4\varepsilon t}),$$
$$k_{12} = \frac{\nu}{8\varepsilon^3}(1 - 2e^{-2\varepsilon t} + e^{-4\varepsilon t}), \qquad k_{22} = \frac{\nu}{4\varepsilon}(1 - e^{-4\varepsilon t}).$$

5.4. Показать, что в условиях задачи 1.3 при обобщенной силе Q в виде белого шума интенсивности ν уравнения (28) и (31) имеют вид

$$\dot{k}_{11}=2k_{12}/A,$$
$$\dot{k}_{12}=-Ck_{11}-(B/A)\,k_{12}+(1/A)\,k_{22},$$
$$\dot{k}_{22}=-2Ck_{12}-(2B/A)\,k_{22}+\nu;$$
$$\frac{\partial K_{11}(t_1,\ t_2)}{\partial t_2}=\frac{1}{A}K_{12}(t_1,\ t_2),$$
$$\frac{\partial K_{12}(t_1,\ t_2)}{\partial t_2}=-CK_{11}(t_1,\ t_2)-\frac{B}{A}K_{12}(t_1,\ t_2),$$
$$\frac{\partial K_{21}(t_1,\ t_2)}{\partial t_2}=\frac{1}{A}K_{22}(t_1,\ t_2),$$
$$\frac{\partial K_{22}(t_1,\ t_2)}{\partial t_2}=-CK_{21}(t_1,\ t_2)-\frac{B}{A}K_{22}(t_1,\ t_2).$$

Выписать явные формулы для решения этих уравнений.

5.5. Доказать, что ковариационные и взаимные ковариационные функции стационарных и стационарно связанных процессов $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ примера 1.9 при входном сигнале $X(t)$ в виде стационарного белого шума интенсивности ν определяются формулами

$$k_{11}(\tau)=\frac{\nu}{4\zeta\omega_0^3}e^{-\zeta\omega_0|\tau|}(\cos\omega_c\tau+\gamma\sin\omega_c|\tau|),$$
$$k_{12}(\tau)=-\frac{\nu}{4\zeta\omega_c\omega_0}e^{-\zeta\omega_0|\tau|}\sin\omega_c|\tau|,$$
$$k_{22}(\tau)=\frac{\nu}{\nu\zeta\omega_0}e^{-\zeta\omega_0|\tau|}(\cos\omega_c\tau-\gamma\sin\omega_c|\tau|)$$
$$(\gamma=\zeta/\sqrt{1-\zeta^2},\quad \omega_c=\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}).$$

5.6. Показать, что в условиях задачи 5.4 дисперсии и ковариация координаты и импульса в режиме стационарных случайных колебаний, т. е. когда колебания представляют собой двумерный стационарный случайный процесс, определяются формулами

$$k_{11}=\nu/2BC,\quad k_{12}=0,\quad k_{22}=A\nu/2B.$$

Доказать, что при наличии сильного демпфирования, $B^2>4AC$, процесс установления стационарных колебаний происходит в две стадии: сначала устанавливаются колебания импульса, а после этого медленнее происходит установление колебаний координаты [125].

5.7. Показать, что уравнения (28) для системы задачи 1.1 при

$$x_h=\sum_{l=1}^{n}b_{hl}V_l\quad(h=1,\ 2),$$

где $V=[V_1\ \ldots\ V_n]^T$ — белый шум интенсивности ν, b_{hl} — коэффициенты, зависящие от времени, имеют вид

$$\dot{k}_{11}=2(a_{11}k_{11}+a_{12}k_{12})+\sum_{r,\ h=1}^{n}\nu_{rh}b_{1r}b_{1h},$$
$$\dot{k}_{12}=a_{21}k_{11}+(a_{11}+a_{22})\,k_{12}+a_{12}k_{22}+\sum_{r,\ h=1}^{n}\nu_{rh}b_{1r}b_{2h},$$
$$\dot{k}_{22}=2(a_{21}k_{12}+a_{22}k_{22})+\sum_{r,\ h=1}^{n}\nu_{rh}b_{2r}b_{2h}.$$

Получить отсюда соответствующие уравнения для системы задачи 1.2 при $X_1=V_1$, $X_2=V_2$. Найти стационарные решения при постоянной интенсивности ν. Рассмотреть вопрос установления стационарного решения.

5.8. Показать, что для линейной системы с одной степенью свободы задачи 1.3 при обобщенной силе Q, представляющей собой стационарный случайный процесс со спектральной плотностью $s(\omega)=D\alpha/\pi(\alpha^2+\omega^2)$, уравнения (28) для компонент $Z_1=q$, $Z_2=p$, $Z_3=Q/A$ вектора состояния имеют вид

$$\begin{gathered}\dot{k}_{11}=2k_{12},\quad \dot{k}_{13}=k_{23}-\alpha k_{13},\\ \dot{k}_{12}=k_{22}-\omega_0^2k_{11}-2\varepsilon k_{12}+k_{13},\\ \dot{k}_{22}=-2\left(\omega_0^2k_{12}+2\varepsilon k_{22}-k_{23}\right),\\ \dot{k}_{23}=-\omega_0^2k_{13}-(\alpha+2\varepsilon)k_{23}+k_{33},\\ \dot{k}_{33}=-2\alpha(k_{33}-D)\\ \left(\omega_0^2=C/A,\quad 2\varepsilon=B/A\right).\end{gathered}$$

Рассмотреть стационарные режимы в случаях: а) α, $\varepsilon\ll\omega_0$; б) $\varepsilon>\alpha$, ω_0; в) $\omega_0=0$, ε, $\alpha>0$.

5.9. Показать, что в условиях задачи 1.14 при движении автомобиля со скоростью v для экспоненциальной ковариационной функции профиля дороги $k_q(\sigma)=De^{-\alpha|\sigma|}$ переменные состояния $Z_1=Z$, $Z_2=\dot{Z}$, $Z_3=q$ удовлетворяют уравнениям (21) при

$$a=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -\omega_0^2 & -2\varepsilon & \omega_1^2\\ 0 & 0 & -\alpha v\end{bmatrix},\quad a_0=0,\quad b=\begin{bmatrix}0\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix},$$

$$\begin{gathered}\omega_0^2=2c/M,\quad 2\varepsilon=2b/M,\quad b_2=2\varepsilon\sqrt{2D\alpha v},\\ \omega_1^2=\omega_0^2-2\varepsilon\alpha v,\quad b_3=\sqrt{2D\alpha v}\end{gathered}$$

и белом шуме с единичной интенсивностью. Проверить справедливость следующих формул для дисперсий и коварияций в стационарном режиме:

$$\begin{gathered}k_{11}=\frac{D}{\omega_0^2}\left[2\varepsilon\alpha v+\left(1+\frac{\alpha v}{2\varepsilon}\right)\frac{\omega_1^2\mu}{\varepsilon}\right],\quad k_{12}=0,\\ k_{22}=2D\alpha v\left(\varepsilon+\frac{\mu\omega_1^2}{4\varepsilon}\right),\quad k_{33}=D,\\ k_{13}=\mu D,\quad k_{23}=\alpha v k_{13}=\alpha v\mu D\\ \left(\mu=\frac{\omega_0^2+2\varepsilon\alpha v}{\omega_0^2+2\varepsilon\alpha v+\alpha^2v^2}\right).\end{gathered}$$

5.10. Показать, что для системы с двумя степенями свободы задачи 1.10 при $Q=V=[V_1V_2]^T$, где V — белый шум интенсивности ν, уравнения (28) имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{k}_{11}&=2\left(A_{22}^{-}k_{13}-A_{12}^{-}k_{14}\right),\\ \dot{k}_{12}&=-A_{12}^{-}k_{13}+A_{11}^{-}k_{14}+A_{22}^{-}k_{23}-A_{12}^{-}k_{24},\\ \dot{k}_{13}&=-C_{11}k_{11}-(C_{12}+C_{12}')k_{12}-\left[B_{11}A_{22}^{-}-(B_{12}+B_{12}')A_{12}^{-}\right]k_{13}-\\ &\quad-\left[(B_{12}+B_{12}')A_{11}^{-}-B_{11}A_{12}^{-}\right]k_{14}+A_{22}^{-}k_{33}-A_{12}^{-}k_{34},\\ \dot{k}_{14}&=-(C_{12}-C_{12}')k_{11}-C_{22}k_{12}-\left[(B_{12}-B_{12}')A_{22}^{-}-B_{22}A_{12}^{-}\right]k_{13}-\\ &\quad-\left[B_{22}A_{11}^{-}-(B_{12}-B_{12}')A_{12}^{-}\right]k_{14}+A_{22}^{-}k_{34}-A_{12}^{-}k_{44},\\ \dot{k}_{22}&=2\left(-A_{12}^{-}k_{23}+A_{11}^{-}k_{24}\right),\end{aligned}$$

$$\dot{k}_{23} = -C_{11}k_{12} - (C_{12} + C'_{12})\,k_{22} - [B_{11}A_{22}^{-} - (B_{12} + B'_{12})\,A_{12}^{-}]\,k_{23} -$$
$$- [(B_{12} + B'_{12})\,A_{11}^{-} - B_{11}A_{12}^{-}]\,k_{24} - A_{12}^{-}k_{33} + A_{11}^{-}k_{34},$$
$$\dot{k}_{24} = -(C_{12} - C'_{12})\,k_{12} - C_{22}k_{22} - [(B_{12} - B'_{12})\,A_{22}^{-} - B_{22}A_{12}^{-}]\,k_{23} -$$
$$- [B_{22}A_{11}^{-} - (B_{12} - B'_{12})\,A_{12}^{-}]\,k_{24} - A_{12}^{-}k_{34} + A_{11}^{-}k_{44},$$
$$\dot{k}_{33} = -2C_{11}k_{13} - 2\,(C_{12} + C'_{12})\,k_{23} - 2\,[B_{11}A_{22}^{-} - (B_{12} + B'_{12})\,A_{12}^{-}]\,k_{33} -$$
$$- 2\,[(B_{12} + B'_{12})\,A_{11}^{-} - B_{11}A_{12}^{-}]\,k_{34} + \nu_{11},$$
$$\dot{k}_{34} = -C_{11}k_{14} - (C_{12} - C'_{12})\,k_{13} - C_{22}k_{23} - (C_{12} + C'_{12})\,k_{24} -$$
$$- [B_{11}A_{22}^{-} + B_{22}A_{11}^{-} - 2B_{12}A_{12}^{-}]\,k_{34} - [(B_{12} + B'_{12})\,A_{11}^{-} - B_{11}A_{12}^{-}]\,k_{44} -$$
$$- [(B_{12} - B'_{12})\,A_{22}^{-} - B_{22}A_{12}^{-}]\,k_{33} + \nu_{12},$$
$$\dot{k}_{44} = -2\,(C_{12} - C'_{12})\,k_{14} - 2C_{22}k_{24} - 2\,[(B_{12} - B'_{12})\,A_{22}^{-} - B_{22}A_{12}^{-}]\,k_{34} +$$
$$+ 2\,[B_{22}A_{11}^{-} - (B_{12} - B'_{12})\,A_{12}^{-}]\,k_{44} + \nu_{22}.$$

5.11. Написать уравнения для дисперсий и ковариаций координат линейного динамического гасителя колебаний задачи 1.15, пользуясь уравнениями задачи 5.10. Показать, что при $b = 0$ для демпфера колебаний ($c_\text{г} = 0$) дисперсия процесса $X(t)$ в режиме случайных стационарных колебаний определяется формулой [126]

$$D_x = \nu\,\frac{\mu_\text{г}^2 c + (\mu_\text{г} + \mu)\,b_\text{г}^2}{2c^2 b_\text{г}\mu_\text{г}^2}.$$

5.12. Пользуясь уравнениями задачи 5.10, написать уравнения для дисперсий и ковариаций процессов $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ при $A_{11} = A_{22} = A$, $A_{12} = 0$, $B_{11} = B_{22} = B$, $B_{12} = 0$, $B'_{12} = H$, $\nu_{11} = \nu_{22} = \nu$, $\nu_{12} = 0$. Проверить, что решения этих уравнений при нулевых начальных условиях определяются формулами:

а) при $C_{11} = C_{12} = C_{22} = C'_{12} = 0$

$$k_{11} = k_{22} = \Lambda t, \quad k_{13} = k_{24} = \Lambda/2, \; k_{12} = k_{34} = 0,$$
$$k_{14} = -k_{23} = H\Lambda/2B, \quad k_{33} = k_{44} = \nu/2AB,$$
$$\Lambda = \nu/(H^2 + B^2);$$

б) при $C_{12} = C'_{12} = 0$, $C_{11} = C_{22} = P\rho$

$$k_{11} = k_{22} = \nu/2BP\rho, \quad k_{33} = k_{44} = \nu/2AB, \quad k_{ij} = 0 \quad (i \neq j);$$

в) при $C_{11} = C_{12} = C_{22} = 0$, $C'_{12} = K\ (BH > AK)$

$$k_{11} = k_{22} = B\varkappa/2K, \quad k_{33} = k_{44} = \varkappa H/A,$$
$$k_{12} = k_{13} = k_{24} = k_{34} = 0, \quad k_{14} = -k_{23} = \varkappa/2,$$
$$\varkappa = \nu/(BH - AK).$$

5.13. Показать, что уравнения (28) для стационарной линейной системы задачи 1.9 при $Q = lV$, где l — постоянная $m \times n$-матрица, V — n-мерный белый шум интенсивности ν, имеют вид

$$\dot{K}_{11} = A^{-1}K_{21} + K_{21}A^{-1},$$
$$\dot{K}_{12} = A^{-1}K_{22} - K_{11}\,(C - C') - K_{12}A^{-1}\,(B - B'),$$
$$\dot{K}_{21} = K_{22}A^{-1} - (C + C')\,K_{11} - (B + B')\,A^{-1}K_{21},$$
$$\dot{K}_{22} = -(C + C')\,K_{12} - K_{21}\,(C - C') - (B + B')\,A^{-1}K_{22} - K_{22}A^{-1}\,(B - B') + l\nu l^{\mathrm{T}},$$

где K_{11} и K_{22} — ковариационные матрицы векторов канонических переменных $Z_1 = q$, $Z_2 = p$, а блоки K_{12} и K_{21} — взаимные ковариационные матрицы Z_1 и Z_2. Рассмотреть частные случаи: а) $C = C' = 0$, $B = 2\varepsilon A$; б) $C = C' = 0$, $B = \eta C$; в) $|C| < 0$, $B = 2\varepsilon A$.

5.14. Основываясь на уравнениях задачи 5.13, показать, что для стационарных тепловых флуктуаций в линейной электрической пассивной цепи задачи 1.12 при $l=I$, $\nu=2kBT$ (T — абсолютная температура, k — постоянная Больцмана), $C'=0$ справедливы формулы [92]

$$K_{11}=kTC^{-1}, \quad K_{12}=K_{21}=0, \quad K_{22}=kTA.$$

5.15. Написать уравнения (31) для блоков ковариационных и взаимных ковариационных функций канонических переменных системы задачи 5.13 в условиях стационарных случайных колебаний.

5.16. Пользуясь формулой Ито (3.61), вычислить математическое ожидание полной производной по времени от энергии системы $H=(p^{T}A^{-1}p+q^{T}Cq)/2$ в задаче 5.12. Показать, что при стационарных случайных колебаниях мощность, сообщаемая стационарными случайными силами, в среднем затрачивается на преодоление диссипативных сил и позиционно неконсервативных сил.

5.17. Написать стохастические уравнения Ито для функций винеровского процесса, приведенных в таблицах 1 и 2 приложения 5, а также уравнения (38) и (56) для одномерных характеристических функций и плотностей.

5.18. Для стохастических дифференциальных уравнений задач 3.4 и 3.6 написать уравнения (38) и (56).

5.19. Показать, что одномерная плотность стационарного в узком смысле случайного процесса в стационарной линейной системе с параметрическими шумами

$$\dot{Z}=a_0+a_1Z+(b_0+b_1Z)\,V,$$

где Z — скалярная переменная состояния, V — стационарный нормально распределенный m-мерный белый шум интенсивности ν и соответственно a_0, a_1 — скаляры, b_0, b_1 — матрицы-строки $1\times m$, определяется уравнением

$$\frac{df_1(z)}{dz}=\frac{c_0+c_1z}{c_2+c_3z+c_4z^2}\,f_1(z).$$

Здесь $c_0=a_0-b_0\nu b_1^{T}$, $c_1=a_1-b_1\nu b_1^{T}$, $c_2=b_0\nu b_0^{T}/2$, $c_3=b_0\nu b_1^{T}$, $c_4=b_1\nu b_1^{T}/2$. Таким образом, стационарный в узком смысле случайный процесс в рассматриваемой системе существует и его одномерная плотность описывается одной из кривых Пирсона [38], (*ТВ*, п. 8.2.1).

5.20. Показать, что одномерная плотность стационарного в узком смысле случайного процесса в стационарной нелинейной системе

$$\dot{Z}=a(Z)+b(Z)\,V,$$

где Z — скалярная переменная состояния, V — стационарный нормально распределенный m-мерный белый шум интенсивности ν и соответственно $a(Z)$ — скалярная функция, $b(Z)$ — матрица-строка $1\times m$, определяется формулой

$$f_1(z)=\frac{c}{\sigma(z)}\exp\left\{2\int_0^z\frac{a(\zeta)}{\sigma(\zeta)}\,d\zeta\right\}, \quad \sigma(z)=b(z)\,\nu b(z)^{T},$$

$$c^{-1}=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{2\int_0^z\frac{a(\zeta)}{\sigma(\zeta)}\,d\zeta\right\}\frac{dz}{\sigma(z)}. \tag{I}$$

Само собой разумеется, что стационарный в узком смысле случайный процесс в системе существует только в том случае, когда интеграл (I) сходится. Для скалярного белого шума это одномерное распределение найдено в [2]. Найти формулу для одномерной плотности стационарного в узком смысле процесса, рассматривая исходное стохастическое уравнение как уравнение с θ-дифференциалом, в частности, при $\theta=1/2$ [121].

5.21. Найти формулы для одномерной плотности стационарного в узком смысле процесса в системе задачи 5.20 при

а) $a(Z)=-a\,\mathrm{sgn}\,Z,\quad b(Z)=1$ [100];

б) $a(Z)=-aZ^3,\quad b(Z)=1$;

в) $a(Z)=-a_1Z+a_2Z^{-1},\quad b(Z)=1$ [121].

5.22. Показать, что одномерная плотность стационарного в узком смысле процесса в системе

$$\frac{d_{1/2}Z}{dt}=-aZ^{3-2n}+bZ^{1-n}V,\qquad Z>0,\qquad n\geq 1,$$

выражается формулой Накагами [122] через χ-распределение.

5.23. Проверить, что для нелинейной системы второго порядка

$$\ddot{Z}+2\varepsilon\dot{Z}+\varphi_z'(Z)=V\qquad(\varepsilon>0),$$

где V — стационарный нормально распределенный белый шум интенсивности ν, $\varphi'(z)$ — нелинейная функция, одномерная плотность и характеристическая функция стационарного в узком смысле процесса определяются формулами

$$f_1(z,\ \dot{z})=c\exp\{-h^2[\varphi(z)+\dot{z}^2/2]\}\qquad(h^2=2\varepsilon/\nu),$$

$$g_1(\lambda',\ \lambda'')=\frac{\sqrt{2\pi}}{h}ce^{-\frac{\lambda''^2}{2h^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda' z-h^2\varphi(z)}\,dz,$$

где c — нормирующая постоянная. Рассмотреть частные случаи: а) $\varphi'(z)=a_1z+a_3z^3$; б) $\varphi'(z)=a\,\mathrm{sgn}\,z$; в) $\varphi'(z)=a\sin z$.

5.24. Показать, что одномерная плотность стационарного в узком смысле процесса в нелинейной системе

$$\dot{Z}=\psi(Z)-2\varepsilon aZ+bV,\qquad \varepsilon>0,$$

где $Z=[Z_1\ \ldots\ Z_n]^{\mathrm{T}}$, $\psi(z)=[\psi_1(z)\ \ldots\ \psi_n(z)]^{\mathrm{T}}$, $\partial\psi_k(z)/\partial z_k=0\quad(k=1,\ \ldots,\ n)$, $z^{\mathrm{T}}\psi(z)=\sum\limits_{k=1}^{n}z_k\psi_k(z)=0$, $V=[V_1\ \ldots\ V_m]^{\mathrm{T}}$ — нормально распределенный стационарный белый шум с независимыми компонентами одной и той же интенсивности ν, b — постоянная $n\times m$-матрица, a — постоянная $n\times n$-матрица, удовлетворяющая условию $a+a^{\mathrm{T}}=2bb^{\mathrm{T}}$, определяется формулой

$$f_1(z)=\sqrt{\alpha^n/\pi^n}\,e^{-\alpha z^{\mathrm{T}}z},\qquad \alpha=4\varepsilon/\nu.$$

Для случая единичных матриц a и b эта формула получена в [84].

5.25. Показать, что одномерная плотность стационарного в узком смысле процесса в системе

$$\dot{Z}=a\varphi'(Z)+bV,$$

где $\varphi(z)$ — нелинейная функция, b — постоянная прямоугольная (в общем случае) матрица, a — постоянная матрица, удовлетворяющая условию $a+a^{\mathrm{T}}=2bb^{\mathrm{T}}$, а V — стационарный нормально распределенный белый шум с независимыми компонентами одной и той же интенсивности ν, определяется формулой

$$f_1(z)=ce^{2\varphi(z)/\nu},\qquad c^{-1}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{2\varphi(z)/\nu}\,dz$$

(само собой разумеется, функция $\exp\{2\varphi(z)/\nu\}$ должна быть интегрируемой).

Указание. Написать уравнение (38) при $\partial g_1/\partial t=0$ и применить интегрирование по частям к одному из двух интегралов так же, как в примере 16. В результате получим уравнение

$$\lambda^{\mathrm{T}} b b^{\mathrm{T}} \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} f_1(z)-\frac{\nu}{2} \frac{\partial f_1(z)}{\partial z}\right\} e^{i \lambda^{\mathrm{T}} z} d z+\lambda^{\mathrm{T}} \frac{a-a^{\mathrm{T}}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} f_1(z) e^{i \lambda^{\mathrm{T}} z} d z=0.$$

Первый интеграл обратится в нуль, если принять $f_1(z)=c \exp\{2\varphi(z)/\nu\}$. Интегрирование по частям показывает, что при этом и второе слагаемое будет равно нулю в силу равенства $\lambda^{\mathrm{T}} a \lambda=\lambda^{\mathrm{T}} a^{\mathrm{T}} \lambda$.

5.26. Показать, что формула (VIII) примера 16 при любой зависимости функции $H(q, p)$ от q и p определяет одномерное распределение стационарного в узком смысле процесса в системе

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}-2 \varepsilon a(q) \frac{\partial H}{\partial p}+b(q) V,$$

где в дополнение к обозначениям примера 16 $b(q)$ — произвольная прямоугольная матрица, а $a(q)$ — произвольная матрица, удовлетворяющая условию $a(q)+a(q)^{\mathrm{T}}=2 b(q) b(q)^{\mathrm{T}}$.

Показать, что в случае зависящего от энергии коэффициента трения ε, $\varepsilon=\varepsilon(H)$, вместо (VIII) получается более общая формула

$$f_1(q, p)=c e^{-\beta \psi(H)}, \quad \beta=4/\nu, \quad \psi(H)=\int_0^H \varepsilon(\eta)\, d\eta.$$

Для случая единичных матриц a и b и $H=A p^{\mathrm{T}} p/2+\Pi(q)$ при постоянной скалярной величине A эта формула была получена в [89].

В качестве частного случая рассмотреть уравнение Ван-дер-Поля с нормально распределенным стационарным белым шумом

$$\ddot{q}+b(q^2-1)\dot{q}+\omega^2 q=\sqrt{q^2-1}\, V,$$

где b и ω — постоянные.

5.27. Показать, что одномерное распределение стационарного в узком смысле процесса $Z(t)=[Z_1(t) \quad Z_2(t)]^{\mathrm{T}}$ в нелинейной стохастической системе

$$\dot{Z}_1=\alpha \operatorname{sgn}(Z_2-\beta Z_1), \quad \dot{Z}_2=-Z_1+V,$$

где V — стационарный нормально распределенный белый шум интенсивности ν, определяется формулой Фуллера [79]:

$$f_1(z_1, z_2)=c \exp\left\{-\beta\left(z_1^2+2\alpha\left|z_2-\beta z_1\right|\right)/\nu\right\},$$

где c — нормирующая константа. Найти соответствующую характеристическую функцию.

5.28. Показать, что в условиях задачи 5.2 при известной функции $\chi(\mu; t)$ одномерная характеристическая функция процесса $Z(t)=[Z_1(t) \quad Z_2(t)]^{\mathrm{T}}$ определяется формулой

$$g_1(\lambda', \lambda''; t)=g_0(\lambda', \lambda'') \exp\left\{i a_0 t(\lambda''+\lambda' t/2)+\int_0^t \chi((t-\tau)\lambda'+\lambda''; \tau)\, d\tau\right\}.$$

5.29. Показать, что в условиях задачи 5.3 для стационарного белого шума с любой функцией $\chi(\mu)$ одномерное стационарное распределение процесса $Z_2(t)$ определяется характеристической функцией

$$g_1(\lambda)=\exp\left\{\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^\lambda \frac{\chi(\mu)}{\mu}\, d\mu\right\}.$$

Рассмотреть случай $\chi(\mu)=-\mu^2 \nu/2$.

5.30. В условиях задачи 5.8 написать формулу для одномерной характеристической функции стационарного в узком смысле процесса $Z_1(t)$ при произвольной функции $\chi(\mu)$. Рассмотреть также случай $\chi(\mu) = -\mu^T \nu \mu/2$.

5.31. Трехмерное броуново движение частицы под действием случайной возмущающей силы, представляющей собой стационарный белый шум, описывается векторным уравнением Ланжевена

$$\ddot{Z} + 2\varepsilon \dot{Z} = V,$$

где Z — вектор состояния частицы, V — стационарный белый шум с известной функцией $\chi(\mu)$. Показать, что одномерная характеристическая функция вектора скорости $U = \dot{Z}$ частицы в стационарном режиме определяется формулой

$$g_1(\lambda'') = \exp\left\{\int_0^\infty \chi(e^{-2\varepsilon\tau}\lambda'')\,d\tau\right\} \qquad (\lambda'' = [\lambda_x'' \lambda_y'' \lambda_z'']).$$

5.32. Пользуясь формулой (53), показать, что в случае общего пуассоновского процесса $W(t)$ и единичной матрицы $b(z, t)$ уравнение (48) приводится к виду

$$\frac{\partial f_1(z; t)}{\partial t} = -\frac{\partial^T}{\partial z}[a(z, t) f_1(z; t)] + \nu(t)[(f * f_1)(z; t) - f_1(z; t)], \tag{I}$$

где $(f * f_1)$ — композиция плотности $f(z)$ величины скачка пуассоновского процесса и плотности $f_1(z; t)$ (*ТВ*, пример 5.30):

$$(f * f_1)(z; t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-\zeta) f_1(\zeta; t)\,d\zeta.$$

Написать аналогичное уравнение для $f_n(z_1, \ldots, z_n; t_1, \ldots, t_n)$. Получить из (I) соответствующее уравнение для случая, когда $W(t)$ представляет собой произведение постоянной h на простой пуассоновский процесс.

5.33. Показать, что в случае, когда функция χ определяется формулой (54), уравнение (48) приводится к виду

$$\frac{\partial f_1(z; t)}{\partial t} = -\frac{\partial^T}{\partial z}[a(z, t) f_1(z; t)] + \\ + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^T}{\partial z}[b(z, t)\nu_0(t) b(z, t)^T f_1(z; t)]\right\} + \\ + \sum_{k=1}^{N} \nu_k(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(z-\zeta; \zeta, t) f_1(\zeta; t)\,d\zeta - f_1(z; t)\right],$$

где $\varphi_k(y; z, t)$ — плотность, соответствующая характеристической функции $g_k(c_k^T b(z, t)^T \lambda)$, т. е. плотность случайного вектора, представляющего собой произведение матрицы $b(z, t) c_k$ на случайный вектор Y_k — скачок общего пуассоновского процесса $P_k(t)$.

5.34. Показать, что в случае, когда

$$\chi(\mu; t) = -\mu^T \nu_0 \mu/2 + \int_{R^q} \left[e^{i\mu^T c(x)} - 1 - i\mu^T c(x)\right] \nu_P(t, x)\,dx$$

(п. 5.3.5) уравнение (48) приводится к виду

$$\frac{\partial f_1(z;\ t)}{\partial t} = -\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial z}[a(z,\ t) f_1(z;\ t)] + \\ +\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial z}[b(z,\ t)\nu_0(t) b(z,\ t)^{\mathrm{T}} f_1(z;\ t)]\right\} + \\ +\int\limits_{R^q}\left\{f_1(z-b(z,\ t)c(x);\ t)-f_1(z;\ t)+\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial z}[b(z,\ t)c(x) f_1(z;\ t)]\right\}\nu_P(t,\ x)\,dx.$$

5.35. Показать, что конечномерные распределения случайного процесса $Z(t)$, определяемого дифференциальным уравнением

$$\dot{Z} = a_0 + aZ + bX(t),$$

где $X(t)$ — случайная функция, представляющая собой решение стохастического дифференциального уравнения

$$\dot{X} = \alpha_0 + \alpha X + \beta V$$

при независимых начальных значениях Z_0 и X_0, определяются формулой

$$g_n^z(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ t_1, \ldots, t_n) = g_0^z\left(\sum_{k=1}^{n} u_{11}(t_k,\ t_0)^{\mathrm{T}}\lambda\right) g_0^x\left(\sum_{k=1}^{n} u_{12}(t_k,\ t_0)^{\mathrm{T}}\lambda\right)\times \\ \times\exp\left\{-i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{\mathrm{T}}\left[\int\limits_{t_0}^{t_k} u_{11}(t_k,\ \tau)\,a_0(\tau)\,d\tau + \int\limits_{t_0}^{t_k} u_{12}(t_k,\ \tau)\,\alpha_0(\tau)\,d\tau\right] + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\chi\left(\beta(\tau)^{\mathrm{T}}\sum_{l=k}^{n} u_{12}(t_l,\ \tau)^{\mathrm{T}}\lambda_l;\ \tau\right)d\tau\right\}, \qquad (\mathrm{I})$$

где $g_0^z(\rho)$, $g_0^x(\sigma)$ — характеристические функции начальных значений Z_0, X_0 процессов $Z(t)$, $X(t)$, $u_{11}(t,\ \tau)$ — фундаментальная матрица решений уравнения $du_{11}/dt = au_{11}$, $u_{11}(t,\ \tau) = I_p$, $u_{12}(t,\ \tau)$ — решение уравнения $du_{12}/dt = au_{12} + bu_{22}$ при нулевом начальном условии, $u_{12}(\tau,\ \tau) = 0$, $u_{22}(t,\ \tau)$ — фундаментальная матрица решений уравнения $du_{22}/dt = \alpha u_{22}$, $u_{22}(\tau,\ \tau) = I_s$ (I_q — единичная матрица порядка q). Вывести из (I) при $Z_0 = 0$ формулы (2.64) и (2.70) для случая скалярного аргумента t. Указание. Воспользоваться формулами, выражающими моменты через характеристическую функцию (*ТВ*, п. 4.5.2), формулой (1.24) для решения линейного дифференциального уравнения, формулами (23) и (24) для математического ожидания и ковариационной функции процесса, определяемого стохастическим дифференциальным уравнением, и формулой (37) для функции χ.

5.36. Показать, что для любых векторов q, p и любых векторных функций $Q(q,\ p)$, $P(q,\ p)$ той же размерности, что и векторы q и p соответственно, при условии существования функции $N(q)$ одного только вектора q, удовлетворяющей уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial q}[N(q)\,Q(q,\ p)] + N(q)\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial p}P(q,\ p) = 0,$$

одномерное распределение стационарного процесса в системе

$$\dot{q} = Q(q,\ p),$$
$$\dot{p} = P(q,\ p) - 2\varepsilon(H)\,a(q)\frac{\partial H}{\partial p} + b(q)\,V, \qquad (\mathrm{I})$$

где $b(q)$ — произвольная прямоугольная матрица, $a(q)$ — произвольная квадратная матрица, удовлетворяющая условию $a(q)+a(q)^{\mathrm{T}}=2b(q)\,b(q)^{\mathrm{T}}$, $H=H(q,\ p)$ — первый интеграл уравнений (I) при $a(q)=b(q)=0$, $2\varepsilon(H)$ — коэффициент вязкого трения, $V=V(t)$ — нормально распределенный векторный белый шум с независимыми компонентами одной и той же интенсивности ν, определяется формулой

$$f_1(q,\ p)=cN(q)\,e^{-\beta\psi(H)},\qquad \psi(H)=\int\limits_0^H \varepsilon(\eta)\,d\eta,\quad \beta=4/\nu. \tag{II}$$

В частном случае одинаковой размерности векторов q и p при $Q(q,\ p)=$ $=\partial H(q,\ p)/\partial p$, $P(q,\ p)=-\partial H(q,\ p)/\partial q$, $N(q)\equiv 1$ и из формулы (II) следует последняя формула задачи 5.26. При $\varepsilon=\mathrm{const}$ формула (II) принимает вид [98]

$$f_1(q,\ p)=cN(q)\,e^{-\alpha H(q,\ p)},\qquad \alpha=4\varepsilon/\nu.$$

НЕЛИНЕЙНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 6.1. Системы без шумов со случайными начальными условиями

6.1.1. Непосредственное определение конечномерных характеристических функций. В случае отсутствия шумов в системе коэффициент $b(Z, t)$ в уравнении (5.32) равен нулю и уравнение (5.32) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{Z} = a(Z, t) \tag{1}$$

со случайным начальным условием $Z(t_0) = Z_0$. Решение уравнения (1) представляет собой однозначную функцию времени t и начального значения Z_0 переменной Z, $Z(t) = \varphi(t, Z_0)$ (если, конечно, никакое возможное значение случайной величины Z_0 не является особой точкой уравнения (17), что обычно и бывает в задачах практики). Поэтому все конечномерные распределения процесса $Z(t)$ можно найти обычными методами определения распределений функций случайных величин (*ТВ*, гл. 5). В данном случае целесообразно применить метод характеристических функций (*ТВ*, п. 5.3.4).

► Пусть $f_0(z)$ — плотность начального значения Z_0 процесса $Z(t)$. Тогда одномерная характеристическая функция процесса $Z(t)$ в любой момент времени t определится формулой

$$g_1(\lambda;\ t) = Me^{i\lambda^{\mathrm{T}} Z(t)} = Me^{i\lambda^{\mathrm{T}} \varphi(t,\ Z_0)},$$

или

$$g_1(\lambda;\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^{\mathrm{T}} \varphi(t,\ \zeta)} f_0(\zeta)\, d\zeta. \tag{2}$$

Точно так же n-мерная характеристическая функция процесса $Z(t)$ выразится формулой

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ t_1, \ldots, t_n) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_1^{\mathrm{T}} \varphi(t_1,\ \zeta) + \ldots + i\lambda_n^{\mathrm{T}} \varphi(t_n,\ \zeta)} f_0(\zeta)\, d\zeta \quad (n = 1, 2, \ldots). \ ◄ \tag{3}$$

Легко проверить непосредственной подстановкой с учетом того, что функция $\varphi(t, \zeta)$ удовлетворяет уравнению (1) при любом ζ, и с использованием интеграла Фурье, что функция $g_1(\lambda;\ t)$, определяемая формулой (2), удовлетворяет интегродифференциальному уравнению (5.46), а функция $g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n)$, определяемая формулой (3), удовлетворяет уравнению (5.47).

6.1.2. Решение уравнений для характеристических функций. К формулам (2) и (3) нетрудно прийти и непосредственным решением уравнений (5.46) и (5.47). Для этого достаточно вспомнить, что согласно (5.37)

$$\chi(0;\ t) = \frac{\partial}{\partial t} \ln h_1(0;\ t) \equiv 0$$

($h_1(0;\ t) \equiv 1$ в силу известного свойства характеристических функций, *ТВ*, п. 4.5.1), и искать решение уравнения (5.46) при $b(Z, t) \equiv 0$ в форме интеграла [55]

$$g_1(\lambda;\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\zeta)\, e^{i\lambda^{\mathrm{T}}\omega(t, \zeta)}\, d\zeta$$

с неопределенными функциями $\alpha(\zeta)$ и $\omega(t, \zeta)$. Определив $\omega(t, \zeta)$ так, чтобы удовлетворялось уравнение (5.46), а $\alpha(\zeta)$ из начального условия (5.39), получим $\omega(t, \zeta) = \varphi(t, \zeta)$, $\alpha(\zeta) = f_0(\zeta)$. В результате получится формула (2) для $g_1(\lambda;\ t)$. Точно так же, отыскивая решение уравнения (5.47) при $b(Z, t) \equiv 0$ в форме интеграла

$$g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n;\ t_1, \ldots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\zeta)\, e^{i\lambda_1^{\mathrm{T}}\omega(t_1, \zeta) + \ldots + i\lambda_n^{\mathrm{T}}\omega(t_n, \zeta)}\, d\zeta,$$

найдем из уравнения (5.47) $\omega(t, \zeta) = \varphi(t, \zeta)$, а из начального условия (5.42) $\alpha(\zeta) = f_0(\zeta)$. В результате получится формула (3).

6.1.3. Определение одномерной плотности. Определив по формулам (2) и (3) характеристические функции, можно по обычной формуле обращения (*ТВ*, п. 4.5.2) найти конечномерные плотности процесса $Z(t)$. Впрочем, конечномерные плотности процесса $Z(t)$ можно найти и непосредственным применением формул для плотности функций случайных величин (*ТВ*, § 5.3).

► Чтобы найти одномерную плотность $f_1(z;\ t)$ процесса $Z(t)$, заметим, что значение решения дифференциального уравнения связано с его начальным значением взаимно однозначной зависимостью. Для того чтобы убедиться в этом, напишем уравнение и начальное условие, определяющие функцию $\varphi(t, \zeta)$:

$$\frac{d}{dt}\varphi(t, \zeta) = a(\varphi(t, \zeta), t), \quad \varphi(t_0, \zeta) = \zeta.$$

Дифференцируя это уравнение и начальное условие по параметру ζ, будем иметь

$$\frac{d}{dt}\varphi_\zeta(t, \zeta) = a_\varphi(\varphi(t, \zeta), t)\,\varphi_\zeta(t, \zeta), \quad \varphi_\zeta(t_0, \zeta) = I, \tag{4}$$

где

$$\varphi_\zeta(t, \zeta) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\zeta_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\zeta_p} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial\varphi_p}{\partial\zeta_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_p}{\partial\zeta_p} \end{bmatrix}, \qquad a_\varphi(\varphi, t) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial\varphi_1} & \cdots & \dfrac{\partial a_1}{\partial\varphi_p} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial a_p}{\partial\varphi_1} & \cdots & \dfrac{\partial a_p}{\partial\varphi_p} \end{bmatrix}$$

— матрицы первых производных компонент векторных функций $\varphi(t, \zeta)$ и $a(\varphi, t)$ по компонентам векторов ζ и φ соответственно.

Соотношения (4) показывают, что матрица производных решения $\varphi(t, \zeta)$ уравнения (1) по компонентам его начального значения ζ представляет собой матрицу фундаментальных решений однородного уравнения $\dot{u} = a_\varphi(\varphi, t)\,u$. Но определитель матрицы фундаментальных решений линейного дифференциального уравнения существенно положителен (п. 1.3.2) *). Это и доказывает, что формула $z = \varphi(t, \zeta)$ определяет взаимно однозначную зависимость между векторами z и ζ. Отсюда следует, что уравнение $z = \varphi(t, \zeta)$ имеет однозначное решение относительно ζ, $\zeta = \varphi^{-1}(t, z)$.

Таким образом, значение случайного процесса Z, определяемого уравнением (1), в любой момент времени t связано с его начальным значением Z_0 взаимно однозначной зависимостью

$$Z = \varphi(t, Z_0), \quad Z_0 = \varphi^{-1}(t, Z).$$

Согласно известной формуле теории вероятностей (*ТВ*, п. 5.3.1) одномерная плотность процесса $Z(t)$ в любой момент времени t выражается через плотность его начального значения Z_0 формулой

$$f_1(z;\ t) = f_0(\varphi^{-1}(t, z))\,|\,\varphi_z^{-1}(t, z)\,|, \tag{5}$$

где $|\,\varphi_z^{-1}(t, z)\,|$ — якобиан компонент вектора $\varphi^{-1}(t, z)$ по компонентам вектора z, который выражается через определитель матрицы фундаментальных решений уравнения (4) известной формулой

$$|\,\varphi_z^{-1}(t, z)\,| = 1/|\,\varphi_\zeta(t, \varphi^{-1}(t, z))\,|. \blacktriangleleft$$

6.1.4. Определение многомерных плотностей.

► Чтобы найти n-мерное распределение процесса $Z(t)$, необходимо найти совместное распределение случайных величин

$$Z_1 = \varphi(t_1, Z_0),\ Z_2 = \varphi(t_2, Z_0),\ \ldots,\ Z_n = \varphi(t_n, Z_0).$$

Но на основании предыдущих рассуждений величины Z_1 и Z_0 связаны взаимно однозначной зависимостью, и, следовательно, $Z_0 = \varphi^{-1}(t_1, Z_1)$. Подставив это выражение в формулы для

---

*) Мы считаем, что интегральная кривая $z = \varphi(t, \zeta)$ не проходит через особые точки уравнений (1) ни при каком ζ.

$Z_2, \ldots, Z_n$, будем иметь

$$Z_2 = \varphi(t_2, \varphi^{-1}(t_1, Z_1)), \ \ldots, \ Z_n = \varphi(t_n, \varphi^{-1}(t_1, Z_1)).$$

Отсюда следует, что n-мерная плотность процесса $Z(t)$ выражается через его одномерную плотность формулой (*ТВ*, п. 5.3.2)

$$f_n(z_1, \ldots, z_n;\ t_1, \ldots, t_n) = \\ = f_1(z_1;\ t_1)\,\delta(z_2 - \varphi(t_2, \varphi^{-1}(t_1, z_1))) \ldots \delta(z_n - \varphi(t_n, \varphi^{-1}(t_1, z_1))).$$

Подставив сюда выражение (5) одномерной плотности, получим

$$f_n(z_1, \ldots, z_n;\ t_1, \ldots, t_n) = \\ = f_0(\varphi^{-1}(t_1, z_1))\,|\varphi_z^{-1}(t_1, z_1)|\,\delta(z_2 - \varphi(t_2, \varphi^{-1}(t_1, z_1)))\ldots \\ \ldots \delta(z_n - \varphi(t_n, \varphi^{-1}(t_1, z_1))) \quad (n = 2, 3, \ldots). \blacktriangleleft \quad (6)$$

Пример 1. Найти конечномерные распределения случайного процесса $Z(t)$, определяемого уравнением

$$\dot{Z} = -Z^3,$$

со случайным начальным условием $Z(0) = Z_0$, если плотность величины Z_0 есть $f_0(z)$.

Интегрируя предыдущее уравнение и учитывая начальное условие, находим

$$\varphi(t, z_0) = \frac{z_0}{\sqrt{1 + 2z_0^2 t}}.$$

Обратная функция и ее производная определяются формулами

$$\varphi^{-1}(t, z) = \frac{z}{\sqrt{1 - 2z^2 t}}, \quad \varphi_z^{-1}(t, z) = \frac{1}{(1 - 2z^2 t)^{3/2}} \quad \text{при} \quad |z| < \frac{1}{\sqrt{2t}}.$$

Вне интервала $(-(2t)^{-1/2}, (2t)^{-1/2})$ обратная функция не определена. Поэтому (5) и (6) дают

$$f_1(z;\ t) = f_0\left(\frac{z}{\sqrt{1 - 2z^2 t}}\right)\frac{1}{(1 - 2z^2 t)^{3/2}} \quad \text{при} \quad |z| < \frac{1}{\sqrt{2t}},$$

$$f_n(z_1, \ldots, z_n;\ t_1, \ldots, t_n) = \\ = f_0\left(\frac{z_1}{\sqrt{1 - 2z_1^2 t_1}}\right)\frac{1}{(1 - 2z_1^2 t_1)^{3/2}}\,\delta\left(z_2 - \frac{z_1}{\sqrt{1 + 2z_1^2(t_2 - t_1)}}\right)\ldots \\ \ldots \delta\left(z_n - \frac{z_1}{\sqrt{1 + 2z_1^2(t_n - t_1)}}\right)$$

$$\text{при } t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n,\ |z_1| < \frac{1}{\sqrt{2t_1}}, \ \ldots, \ |z_n| < \frac{1}{\sqrt{2t_n}} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Вне указанных областей

$$f_1(z;\ t) = 0, \ f_n(z_1, \ldots, z_n;\ t_1, \ldots, t_n) = 0.$$

Заметим, что если удается найти какие-либо первые интегралы системы уравнений (1), то распределения этих первых интегралов определяются по данному начальному распределению вектора состояния системы методами нахождения распределений функций случайных величин (*ТВ*, гл. 5).

§ 6.2. Моменты вектора состояния нелинейной системы

6.2.1. Формула для производной математического ожидания. ► Чтобы получить формулу для производной по времени математического ожидания вектора состояния системы, проще всего перейти к математическим ожиданиям непосредственно в стохастическом дифференциальном уравнении

$$\dot{Z} = a(Z, t) + b(Z, t)V. \tag{7}$$

Тогда, имея в виду, что в уравнении Ито значение процесса $Z(t)$ при любом t не зависит от значения белого шума V в тот же момент (точнее, $Z(t)$ и $\Delta W = W(t+\Delta t) - W(t)$ независимы при любом t), получим следующую формулу для производной по времени математического ожидания $m(t) = MZ(t)$ процесса $Z(t)$ *):

$$\dot{m} = Ma(Z, t). \blacktriangleleft \tag{8}$$

Эта формула не является замкнутым уравнением, определяющим математическое ожидание процесса $Z(t)$, так как математическое ожидание в правой части зависит от неизвестного одномерного распределения процесса $Z(t)$.

В следующем пункте при выводе формулы для производной по времени момента второго порядка вектора состояния системы мы попутно получим формулу (8) другим путем.

6.2.2. Формула для производной момента второго порядка. Из уравнения (5.38) для одномерной характеристической функции можно вывести формулы для производных по времени моментов различных порядков вектора состояния системы в любой момент времени t. Чтобы вывести эти формулы, перепишем уравнение (5.38) в скалярной форме:

$$\frac{\partial g_1(\lambda;\ t)}{\partial t} = M\left\{i\sum_{h=1}^{p}\lambda_h a_h(Z, t) + \chi(\mu;\ t)\right\}\exp\left\{i\sum_{h=1}^{p}\lambda_h Z_h\right\}, \tag{9}$$

где μ — вектор с компонентами

$$\mu_r = \sum_{s=1}^{p} b_{sr}(Z, t)\lambda_s \qquad (r = 1, \ldots, q).$$

---

*) Везде в гл. 6 для простоты будем считать, что $MW(t) = m_w(t) = 0$. Это практически не ограничивает общности, так как для дифференцируемой функции $m_w(t)$ величину $b(Z,\ t)\,dm_w(t) = b(Z,\ t)\,\dot{m}_w(t)\,dt$ можно включать в $a(Z,\ t)\,dt$.

▶ Дифференцируя уравнение (9) по $i\lambda_k$, а потом по $i\lambda_l$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial g_1}{\partial (i\lambda_k)} = M\left\{a_k(Z,\ t) + \sum_{r=1}^{q} \frac{\partial \chi}{\partial (i\mu_r)} b_{kr}(Z,\ t) + i\sum_{h=1}^{p} \lambda_h a_h(Z,\ t) Z_k + \right.$$
$$\left. + \chi(\mu;\ t) Z_k\right\} \exp\left\{i\sum_{h=1}^{p} \lambda_h Z_h\right\}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 g_1}{\partial (i\lambda_k)\,\partial (i\lambda_l)} = M\left\{\sum_{r,\ s=1}^{q} \frac{\partial^2 \chi}{\partial (i\mu_r)\,\partial (i\mu_s)} b_{kr}(Z,\ t)\, b_{ls}(Z,\ t) + \right.$$
$$+ a_l(Z,\ t) Z_k + \sum_{r=1}^{q} \frac{\partial \chi}{\partial (i\mu_r)} b_{lr}(Z,\ t) Z_k + a_k(Z,\ t) Z_l +$$
$$+ \sum_{r=1}^{q} \frac{\partial \chi}{\partial (i\mu_r)} b_{kr}(Z,\ t) Z_l + i\sum_{h=1}^{p} \lambda_h a_h(Z,\ t) Z_k Z_l +$$
$$\left. + \chi(\mu;\ t) Z_k Z_l\right\} \exp\left\{i\sum_{h=1}^{p} \lambda_h Z_h\right\}. \quad (11)$$

Для нахождения входящих в эти формулы производных функции χ продифференцируем сначала по $i\mu_r$, а потом по $i\mu_s$ формулу (5.37):

$$\chi(\mu;\ t) = \frac{\partial}{\partial t} \ln h_1(\mu;\ t),$$

где $h_1(\mu;\ t)$ — одномерная характеристическая функция процесса $W(t) = \int\limits_0^t V_\tau\, d\tau$. В результате получим

$$\frac{\partial \chi(\mu;\ t)}{\partial (i\mu_r)} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{h_1(\mu;\ t)} \frac{\partial h_1(\mu;\ t)}{\partial (i\mu_r)},$$
$$\frac{\partial^2 \chi(\mu;\ t)}{\partial (i\mu_r)\,\partial (i\mu_s)} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{h_1(\mu;\ t)} \frac{\partial^2 h_1(\mu;\ t)}{\partial (i\mu_r)\,\partial (i\mu_s)} - 2\,\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{h_1^2(\mu;\ t)} \frac{\partial h_1(\mu;\ t)}{\partial (i\mu_r)} \frac{\partial h_1(\mu;\ t)}{\partial (i\mu_s)}.$$

Положив $\mu = 0$ и вспомнив, что $h_1(0;\ t) = 1$, а величины

$$\left[\frac{\partial h_1(\mu;\ t)}{\partial (i\mu_r)}\right]_{\mu=0}, \quad \left[\frac{\partial^2 h_1(\mu;\ t)}{\partial (i\mu_r)\,\partial (i\mu_s)}\right]_{\mu=0}$$

представляют собой соответственно математическое ожидание компоненты $W_r(t)$ и взаимный начальный момент второго порядка компонент $W_r(t)$ и $W_s(t)$ процесса $W(t)$ в данный момент t (*ТВ*, п. 4.5.1 и 4.5.3), будем иметь

$$\left[\frac{\partial \chi(\mu;\ t)}{\partial (i\mu_r)}\right]_{\mu=0} = \frac{d}{dt} MW_r(t) = 0,$$
$$\left[\frac{\partial^2 \chi(\mu;\ t)}{\partial (i\mu_r)\,\partial (i\mu_s)}\right]_{\mu=0} = \frac{d}{dt} MW_r(t)\, W_s(t) = \dot{k}_{rs}^{w}(t).$$

Наконец, учитывая, что

$$k_{rs}^{w}(t)=k_{rs}^{w}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\nu_{rs}(\tau)\,d\tau,$$

находим

$$\left[\frac{\partial^2\chi(\mu;\ t)}{\partial(i\mu_r)\,\partial(i\mu_s)}\right]_{\mu=0}=\nu_{rs}(t).$$

Положив в (10) и (11) $\lambda=0$ и, следовательно, $\mu=0$, пользуясь найденными выражениями $\partial\chi/\partial(i\mu_r)$ и $\partial^2\chi/\partial(i\mu_r)\,\partial(i\mu_s)$ при $\mu=0$ и учитывая, что $\chi(0;\ t)\equiv 0$, получим следующие выражения для производных по времени математического ожидания $m_k(t)$ компоненты $Z_k(t)$ и взаимного начального момента второго порядка $\gamma_{kl}(t)$ компонент $Z_k(t)$ и $Z_l(t)$ процесса $Z(t)$:

$$\dot m_k=Ma_k(Z,\ t)\qquad (k=1,\ \ldots,\ p),$$

$$\dot\gamma_{kl}=M\left\{a_l(Z,\ t)Z_k+a_k(Z,\ t)Z_l+\right.$$

$$\left.+\sum_{r,\,s=1}^{q}\nu_{rs}(t)\,b_{kr}(Z,\ t)\,b_{ls}(Z,\ t)\right\}\qquad (k,\ l=1,\ \ldots,\ p).$$

Переписав эти формулы в матричной форме, получим формулу (8) для производной по времени вектора математического ожидания $m(t)$ и формулу для производной по времени начального момента второго порядка $\Gamma(t)$ процесса $Z(t)$:

$$\dot\Gamma=M\left\{a(Z,\ t)Z^{\mathrm{T}}+Za(Z,\ t)^{\mathrm{T}}+b(Z,\ t)\,\nu(t)\,b(Z,\ t)^{\mathrm{T}}\right\}.\ \blacktriangleleft \qquad (12)$$

Формулы (8) и (12) в общем случае не являются замкнутыми уравнениями для m и Γ, так как правые части их зависят от одномерного распределения процесса $Z(t)$, а не только от m и Γ. И лишь в некоторых частных случаях правые части формул (8) и (12) могут оказаться функциями m и Γ, не зависящими от других характеристик одномерного распределения процесса $Z(t)$. В таких случаях (8) и (12) будут обыкновенными дифференциальными уравнениями, определяющими моменты m и Γ. Так, например, в случае линейной относительно z функции $a(z,\ t)$ и не зависящей от z функции $b(z,\ t)$,

$$a(z,\ t)=a(t)\,z+a_0(t),\qquad b(z,\ t)=b(t),$$

(8) и (12) представляют собой уравнения, определяющие по отдельности математическое ожидание m и момент второго порядка Γ процесса $Z(t)$. Эти уравнения, конечно, совпадают с уравнениями (5.26) и (5.30), полученными для более общего случая, когда $W(t)$ представляет собой процесс с некоррелированными (не обязательно независимыми) приращениями.

6.2.3. Формула для производной ковариационной матрицы. Из формул (10) и (12) легко выводится формула для производной по времени ковариационной матрицы K вектора Z.

▶ Чтобы получить эту формулу, достаточно продифференцировать по t соотношение (TB, п. 3.3.1)

$$K = \Gamma - mm^{\mathrm{T}}$$

и подставить в полученную формулу выражения $\dot{m}$ и $\dot{\Gamma}$ из (8) и (12). В результате получим

$$\dot{K} = M\{a(Z, t)(Z^{\mathrm{T}} - m^{\mathrm{T}}) + (Z - m)a(Z, t)^{\mathrm{T}} + b(Z, t)\nu(t)b(Z, t)^{\mathrm{T}}\}. \blacktriangleleft \quad (13)$$

Пример 2. Для системы, описываемой уравнением

$$\dot{Z} = -Z^3 + ZV,$$

формулы (8), (12) и (13) имеют вид

$$\dot{m} = -MZ^3, \quad \dot{\alpha}_2 = -2MZ^4 + \nu\alpha_2,$$
$$\dot{D} = -2MZ^4 + 2mMZ^3 + \nu(m^2 + D)$$

(в данном случае процесс $Z(t)$ — скалярный и, следовательно, Γ и K представляют собой соответственно начальный момент второго порядка $\alpha_2(t)$ и дисперсию $D(t)$ значения процесса $Z(t)$ в момент t). Правые части этих формул зависят от моментов третьего и четвертого порядков процесса $Z(t)$, и, следовательно, эти формулы не являются уравнениями, определяющими m, α_2 и D. Попытки замкнуть эти уравнения добавлением уравнений для моментов третьего и четвертого порядков приведут к появлению моментов пятого и шестого порядков и т. д. Следовательно, подобные попытки не приведут к замкнутой системе конечного числа уравнений.

Пример 3. Для рассмотренной в примере 5.15 системы, описываемой уравнением

$$\dot{Z} = aZ + a_0 + b\sqrt{Z}\,V,$$

формулы (8), (12) и (13) дают

$$\dot{m} = am + a_0, \quad \dot{\alpha}_2 = 2(a\alpha_2 + a_0 m) + b^2\nu m, \quad \dot{D} = 2aD + b^2\nu m.$$

Это обыкновенные дифференциальные уравнения, определяющие последовательно моменты m, α_2 и D при данных начальных условиях $m(t_0) = m_0$, $\alpha_2(t_0) = \alpha_{20}$, $D(t_0) = D_0 = \alpha_{20} - m_0^2$.

6.2.4. Формулы для производных момента второго порядка и ковариационной функции. Для дальнейшего нам понадобятся еще формулы для производных момента второго порядка $\Gamma(t_1, t_2)$ и ковариационной функции $K(t_1, t_2)$ процесса $Z(t)$ по второму аргументу t_2 при $t_1 < t_2$. Их, конечно, можно вывести таким же путем, дифференцируя уравнение (5.41) при $n = 2$ по векторам $i\lambda_1$ и $i\lambda_2$ и полагая после этого $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Однако гораздо проще вывести их непосредственно из стохастического дифференциального уравнения (7).

▶ Заменив в (7) переменную t переменной t_2, получим

$$\dot{Z}_{t_2} = a(Z_{t_2}, t_2) + b(Z_{t_2}, t_2)V_{t_2}.$$

Транспонируя это уравнение, будем иметь

$$\dot{Z}_{t_2}^{\mathrm{T}} = a(Z_{t_2}, t_2)^{\mathrm{T}} + V_{t_2}^{\mathrm{T}} b(Z_{t_2}, t_2)^{\mathrm{T}}. \tag{14}$$

Умножим это уравнение слева на Z_{t_1} и возьмем математические ожидания обеих частей полученного равенства. Тогда, учитывая, что при $t_1 < t_2$ составной случайный вектор $[Z_{t_1}^{\mathrm{T}} Z_{t_2}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ и значение V_{t_2} белого шума V в момент t_2 независимы, придем к формуле

$$\frac{\partial}{\partial t_2} MZ_{t_1} Z_{t_2}^{\mathrm{T}} = MZ_{t_1} a(Z_{t_2}, t_2)^{\mathrm{T}}$$

или

$$\partial \Gamma(t_1, t_2)/\partial t_2 = MZ_{t_1} a(Z_{t_2}, t_2)^{\mathrm{T}}. \tag{15}$$

Совершенно так же, умножив (14) слева на $Z_{t_1} - m_{t_1}$ и приняв во внимание, что

$$M(Z_{t_1} - m_{t_1}) Z_{t_2}^{\mathrm{T}} = M(Z_{t_1} - m_{t_1})(Z_{t_2}^{\mathrm{T}} - m_{t_2}^{\mathrm{T}}) = K(t_1, t_2),$$

придем при $t_1 < t_2$ к формуле

$$\partial K(t_1, t_2)/\partial t_2 = M(Z_{t_1} - m_{t_1}) a(Z_{t_2}, t_2)^{\mathrm{T}}. \blacktriangleleft \tag{16}$$

Пример 4. Для системы примера 2 формулы (15) и (16) имеют вид

$$\partial \Gamma(t_1, t_2)/\partial t_2 = -MZ_{t_1} Z_{t_2}^3, \qquad \partial K(t_1, t_2)/\partial t_2 = -M(Z_{t_1} - m_{t_1}) Z_{t_2}^3.$$

Пример 5. Для системы примера 3 формулы (15) и (16) имеют вид

$$\partial \Gamma(t_1, t_2)/\partial t_2 = a(t_2)\Gamma(t_1, t_2), \qquad \partial K(t_1, t_2)/\partial t_2 = a(t_2) K(t_1, t_2).$$

Эти формулы представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения при любом фиксированном t_1. Вместе с начальными условиями $\Gamma(t_1, t_1) = \alpha_2(t_1)$, $K(t_1, t_1) = D(t_1)$ они вполне определяют момент второго порядка $\Gamma(t_1, t_2)$ и ковариационную функцию $K(t_1, t_2)$ процесса $Z(t)$ при $t_1 < t_2$:

$$\Gamma(t_1, t_2) = \alpha_2(t_1) \exp\left\{\int_{t_1}^{t_2} a(\tau)\, d\tau\right\},$$

$$K(t_1, t_2) = D(t_1) \exp\left\{\int_{t_1}^{t_2} a(\tau)\, d\tau\right\}.$$

6.2.5. Бесконечная система уравнений для моментов. В случае пп. 5.3.8 и 5.3.9, в которых уравнения для характеристических функций сводятся к линейным уравнениям в частных производных, можно получить бесконечную систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, определяющую все моменты одномерного распределения вектора состояния системы.

▶ Предположим, что функция $a(z, t)$ в уравнении (7) представляет собой полином относительно z, а функция $b(z, t) = b(t)$ не зависит от z. В этом случае, как было показано в п. 5.3.8, одномерная характеристическая функция процесса $Z(t)$ определяется уравнением в частных производных (5.58). Представив компоненты вектора $a(z, t)$ в явной форме полиномов

$$a_r(z, t) = \sum_{h_1, \ldots, h_p = 0}^{N} a_{r, h_1, \ldots, h_p} z_1^{h_1} \ldots z_p^{h_p} \qquad (r = 1, \ldots, p)$$

с коэффициентами, в общем случае зависящими от времени t, и включив функцию $b(t)$ в состав белого шума V *), перепишем уравнение (5.58) в виде

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} = \sum_{r=1}^{p} i\lambda_r \sum_{h_1, \ldots, h_p = 0}^{N} a_{r, h_1, \ldots, h_p} \frac{\partial^{h_1 + \ldots + h_p} g_1}{\partial (i\lambda_1)^{h_1} \ldots \partial (i\lambda_p)^{h_p}} + \chi(\lambda; t) g_1.$$

Дифференцируя это уравнение k_1 раз по $i\lambda_1$, k_2 раз по $i\lambda_2, \ldots, \ldots, k_p$ раз по $i\lambda_p$ и положив после этого $\lambda = 0$, получим

$$\dot{\alpha}_{k_1, \ldots, k_p} = \sum_{r=1}^{p} k_r \sum_{h_1, \ldots, h_p = 0}^{N} a_{r, h_1, \ldots, h_p} \alpha_{h_1 + k_1, \ldots, h_r + k_r - 1, \ldots, h_p + k_p} + \sum_{h_1 = 0}^{k_1} \ldots \sum_{h_p = 0}^{k_p} C_{k_1}^{h_1} \ldots C_{k_p}^{h_p} \chi_{h_1, \ldots, h_p} \alpha_{k_1 - h_1, \ldots, k_p - h_p}$$

$$(k_1, \ldots, k_p = 0, 1, 2, \ldots; \ k_1 + \ldots + k_p = 1, 2, \ldots),$$

где

$$\chi_{h_1, \ldots, h_p} = \left[\frac{\partial^{h_1 + \ldots + h_p} \chi(\lambda; t)}{\partial (i\lambda_1)^{h_1} \ldots \partial (i\lambda_p)^{h_p}} \right]_{\lambda = 0}.$$

Полученные уравнения можно записать компактнее, пользуясь векторными индексами $k = [k_1 \ldots k_p]^{\mathrm{T}}$, $h = [h_1 \ldots h_p]^{\mathrm{T}}$:

$$\dot{\alpha}_k = \sum_{r=1}^{p} k_r \sum_{h_1, \ldots, h_p = 0}^{N} a_{r, h} \alpha_{h + k - e_r} + \sum_{h_1 = 0}^{k_1} \ldots \sum_{h_p = 0}^{k_p} C_{k_1}^{h_1} \ldots C_{k_p}^{h_p} \chi_h \alpha_{k - h} \tag{17}$$

$$(k_1, \ldots, k_p = 0, 1, 2, \ldots; \ |k| = k_1 + \ldots + k_p = 1, 2, \ldots),$$

где e_r — вектор, все компоненты которого равны нулю, кроме r-й, равной единице:

$$e_r = [0 \ldots 0 \underset{r}{1} 0 \ldots 0]^{\mathrm{T}},$$

$$\alpha_k = \alpha_{k_1, \ldots, k_p}, \quad a_{r, h} = a_{r, h_1, \ldots, h_p}, \quad \chi_h = \chi_{h_1, \ldots, h_p}.$$

В п. 6.2.2 было показано, что $\chi_h = 0$ при $|h| = h_1 + \ldots + h_p < 2$, $\chi_h = \nu_{rs}$ при $h = e_r + e_s$ **). В уравнениях (17) величина α_s равна нулю, если хотя бы одна компонента векторного индекса s отри-

*) Это не ведет к потере общности, так как произведение $b(t)V$ представляет собой белый шум, интенсивность которого $\nu_1(t)$ выражается через интенсивность $\nu(t)$ белого шума V формулой $\nu_1(t) = b(t)\nu(t)b(t)^{\mathrm{T}}$.

**) Если в белый шум в (7) включен множитель $b(t)$, то интенсивность ν заменяется произведением $\nu_1 = b\nu b^{\mathrm{T}}$ и величины χ_h при $h = e_r + e_s$ равны соответствующим элементам матрицы $\nu_1 = b\nu b^{\mathrm{T}}$.

цательна, и равна **единице**, если все компоненты векторного индекса s равны нулю, $\alpha_0 = 1$.

При выводе уравнений (17), дифференцируя произведения, мы воспользовались известной формулой

$$\frac{\partial^k}{\partial (i\lambda)^k} uv = \sum_{h=0}^{k} C_k^h u^{(h)} v^{(k-h)}. \blacktriangleleft$$

Уравнения (17) были впервые получены в [55]. В частном случае линейного уравнения (7) $a_{r, h_1, \ldots, h_p} = 0$ при $h_1 + \ldots + h_p > 1$ и уравнения (17) при $k_1 + \ldots + k_p = 1, 2$ совпадают с уравнениями для моментов первого и второго порядков, вытекающими из уравнений § 5.2, выведенных при более общих предположениях о белом шуме V.

Совершенно так же выводится бесконечная система уравнений для моментов в случае п. 5.3.9, когда функции $a(z, t)$ и $b(z, t)\nu(t)b(z, t)^T$ представляют собой полиномы относительно z, а белый шум V распределен нормально.

$\blacktriangleright$ Представив координаты вектора $a(z, t)$ и элементы матрицы $\sigma(z, t) = b(z, t)\nu(t)b(z, t)^T$ в явной форме полиномов

$$a_r(z, t) = \sum_{h_1, \ldots, h_p = 0}^{N} a_{r, h_1, \ldots, h_p} z_1^{h_1} \ldots z_p^{h_p} \qquad (r = 1, \ldots, p),$$

$$\sigma_{rs}(z, t) = \sum_{h_1, \ldots, h_p = 0}^{N} \sigma_{rs, h_1, \ldots, h_p} z_1^{h_1} \ldots z_p^{h_p} \qquad (r, s = 1, \ldots, p)$$

с коэффициентами, в общем случае зависящими от времени t, перепишем уравнение в частных производных (5.59) в виде

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} = \sum_{r=1}^{p} i\lambda_r \sum_{h_1, \ldots, h_p = 0}^{N} a_{r, h_1, \ldots, h_p} \frac{\partial^{h_1 + \ldots + h_p} g_1}{\partial (i\lambda_1)^{h_1} \ldots \partial (i\lambda_p)^{h_p}} +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{r, s=1}^{p} (i\lambda_r)(i\lambda_p) \sum_{h_1, \ldots, h_p = 1}^{N} \sigma_{rs, h_1, \ldots, h_p} \frac{\partial^{h_1 + \ldots + h_p} g_1}{\partial (i\lambda_1)^{h_1} \ldots \partial (i\lambda_p)^{h_p}}.$$

Дифференцируя это уравнение k_1 раз по $i\lambda_1$, k_2 раз по $i\lambda_2, \ldots$ $\ldots, k_p$ раз по $i\lambda_p$ и положив после этого $\lambda = 0$, получим

$$\dot{\alpha}_{k_1, \ldots, k_p} = \sum_{r=1}^{p} k_r \sum_{h_1, \ldots, h_p = 0}^{N} a_{r, h_1, \ldots, h_p} \alpha_{h_1 + k_1, \ldots, h_r + k_r - 1, \ldots, h_p + k_p} +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{p} k_r(k_r - 1) \sum_{h_1, \ldots, h_p = 0}^{N} \sigma_{rr, h_1, \ldots, h_p} \alpha_{h_1 + k_1, \ldots, h_r + k_r - 2, \ldots, h_p + k_p} +$$
$$+ \sum_{r=1}^{p} \sum_{s=1}^{r-1} k_r k_s \sum_{h_1, \ldots, h_p = 0}^{N} \sigma_{rs, h_1, \ldots, h_p} \times$$
$$\times \alpha_{h_1 + k_1, \ldots, h_s + k_s - 1, \ldots, h_r + k_r - 1, \ldots, h_p + k_p}$$
$$(k_1, \ldots, k_p = 0, 1, 2, \ldots; \; k_1 + \ldots + k_p = 1, 2, \ldots).$$

Эти уравнения также можно переписать в компактной форме, пользуясь векторными индексами:

$$\dot{\alpha}_k = \sum_{r=1}^{p} k_r \sum_{h_1, \ldots, h_p = 0}^{N} a_{r,h} \alpha_{h+k-e_r} +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{p} k_r (k_r - 1) \sum_{h_1, \ldots, h_p = 0}^{N} \sigma_{rr,h} \alpha_{h+k-2e_r} +$$
$$+ \sum_{r=1}^{p} \sum_{s=1}^{r-1} k_r k_s \sum_{h_1, \ldots, h_p = 0}^{N} \sigma_{rs,h} \alpha_{h+k-e_r-e_s}$$
$$(k_1, \ldots, k_p = 0, 1, 2, \ldots; \ |k| = 1, 2, \ldots). \tag{18}$$

В этих уравнениях, так же как в (17), величина α_s равна нулю, если хотя бы одна компонента векторного индекса s отрицательна, и равна единице, если все компоненты векторного индекса s равны нулю, $\alpha_0 = 1$.

П р и м е р 6. Для системы примера 2,

$$\dot{Z} = -Z^3 + ZV,$$

уравнения (18) имеют вид

$$\dot{\alpha}_k = -k\alpha_{k+2} + \frac{\nu}{2} k(k-1)\alpha_k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

П р и м е р 7. Для системы

$$\dot{Z}_1 = -Z_1 Z_2, \quad Z_2 = -\alpha Z_2 + kV$$

уравнения (17) имеют вид

$$\dot{\alpha}_{rs} = -r\alpha_{r,s+1} - s\alpha\alpha_{rs} + k^2 \nu s(s-1)\alpha_{r,s-2}/2 \quad (r, s = 0, 1, 2, \ldots).$$

6.2.6. Линейные системы с параметрическими шумами. Вектор состояния линейной системы с параметрическими белыми шумами определяется уравнением (п. 1.4.4)

$$\dot{Z} = aZ + a_0 + \left(b_0 + \sum_{h=1}^{p} b_h Z_h\right) V. \tag{19}$$

Таким образом, функции $a(z, t)$ и $b(z, t)$ в (7) определяются в этом случае формулами

$$a(z, t) = a(t) z + a_0(t),$$
$$b(z, t) = b_0(t) + \sum_{h=1}^{p} b_h(t) z_h.$$

▶ Уравнение (8) в этом случае имеет вид

$$\dot{m} = am + a_0. \tag{20}$$

Это уравнение совпадает с уравнением (5.26) для линейного относительно Z, V уравнения. Оно полностью определяет математическое ожидание вектора Z при соответствующем начальном условии $m(t_0)=m_0$.

Уравнение (12) в этом случае имеет вид

$$\dot{\Gamma}=aMZZ^{\tau}+a_0MZ^{\tau}+MZZ^{\tau}a^{\tau}+\\ +MZa_0^{\tau}+M\left(b_0+\sum_{h=1}^{p}b_hZ_h\right)\nu\left(b_0^{\tau}+\sum_{h=1}^{p}b_h^{\tau}Z_h\right).$$

Раскрыв скобки, получим

$$\dot{\Gamma}=a\Gamma+\Gamma a^{\tau}+a_0m^{\tau}+ma_0^{\tau}+b_0\nu b_0^{\tau}+\\ +\sum_{h=1}^{p}(b_h\nu b_0^{\tau}+b_0\nu b_h^{\tau})MZ_h+\sum_{h,\,l=1}^{p}b_h\nu b_l^{\tau}MZ_hZ_l,$$

или

$$\dot{\Gamma}=a\Gamma+\Gamma a^{\tau}+a_0m^{\tau}-ma_0^{\tau}+b_0\nu b_0^{\tau}+\\ +\sum_{h=1}^{p}(b_h\nu b_0^{\tau}+b_0\nu b_h^{\tau})m_h+\sum_{h,\,l=1}^{p}b_h\nu b_l^{\tau}\gamma_{hl}. \quad (21)$$

Это уравнение не содержит никаких характеристик случайного вектора Z, кроме его математического ожидания и вторых моментов (элементов матрицы Γ). Следовательно, после интегрирования уравнения (20), определяющего математическое ожидание m вектора Z, уравнение (21) при начальном условии $\Gamma(t_0)=\Gamma_0$ (и, следовательно, $\gamma_{hl}(t_0)=\gamma_{hl}^0$) полностью определяет момент второго порядка $\Gamma(t)$ вектора $Z(t)$.

Совершенно так же приводим уравнение (13) к виду

$$\dot{K}=aK+Ka^{\tau}+b_0\nu b_0^{\tau}+\sum_{h=1}^{p}(b_h\nu b_0^{\tau}+b_0\nu b_h^{\tau})m_h+\\ +\sum_{h,\,l=1}^{p}b_h\nu b_l^{\tau}(m_hm_l+k_{hl}), \quad (22)$$

где k_{hl} — ковариация компонент Z_h и Z_l вектора Z $(h, l=1, \ldots, p)$. Уравнение (22) при начальном условии $K(t_0)=K_0$ $(k_{pq}(t_0)=k_{pq}^0)$ полностью определяет ковариационную матрицу $K(t)$ вектора $Z(t)$ в любой момент времени t после нахождения его математического ожидания m. ◀

Таким образом, если при исследовании точности линейной системы с параметрическими шумами можно ограничиться моментами первого и второго порядков вектора состояния и выходного сигнала, то эти моменты можно точно определить последовательным интегрированием уравнений (20) и (21) или (20) и (22) совершенно так же, как в случае линейной системы.

Формула (16) дает для линейной системы с параметрическими шумами уравнение (5.31) для ковариационной функции процесса

$Z(t)$ при $t_2 > t_1$:

$$\frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_2} = K(t_1, t_2)\, a(t_2)^{\mathrm{T}}.$$

Начальное условие для этого уравнения имеет вид $K(t_1, t_1) = K(t_1)$

В случае нормально распределенного белого шума V в (19) моменты вектора состояния Z системы определяются бесконечной системой уравнений (18), которая в этом случае разделяется на независимые системы уравнений для моментов каждого данного порядка:

$$\dot{\alpha}_k = \sum_{r=1}^{p} k_r \left(a_{r,0} \alpha_{k-e_r} + \sum_{q=1}^{p} a_{r,e_q} \alpha_{k+e_q-e_r} \right) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{p} k_r (k_r - 1) \left(\sigma_{rr,0} \alpha_{k-2e_r} + \sum_{q=1}^{p} \sigma_{rr,e_q} \alpha_{k+e_q-2e_r} + \right. \\ \left. + \sum_{q,u=1}^{p} \sigma_{rr,e_q+e_u} \alpha_{k+e_q+e_u-2e_r} \right) + \sum_{r=2}^{p} \sum_{s=1}^{p-1} k_r k_s \left(\sigma_{rs,0} \alpha_{k-e_r-e_s} + \right. \\ \left. + \sum_{q=1}^{p} \sigma_{rs,e_q} \alpha_{k+e_q-e_r-e_s} + \sum_{q,u=1}^{p} \sigma_{rs,e_q+e_u} \alpha_{k+e_q+e_u-e_r-e_s} \right)$$

$$(k_1, \ldots, k_p = 0, 1, 2, \ldots; \quad |k| = 1, 2, \ldots).$$

Здесь, как и в (17) и (18), величина α_s равна нулю, если хотя бы одна компонента векторного индекса s отрицательна, и равна единице, если все компоненты векторного индекса s равны нулю.

Что касается уравнения (5.38), определяющего одномерную характеристическую функцию процесса $Z(t)$, то согласно результатам п. 5.3.9 оно представляет собой в случае нормального белого шума V линейное уравнение в частных производных второго порядка, которое невозможно точно проинтегрировать в общем случае. Поэтому распределения вектора состояния и выходного сигнала линейной системы с параметрическими шумами можно найти практически только путем приближенного решения уравнения (5.38), как и для других классов нелинейных систем.

Пример 8. В случае скалярных Z и V уравнение (19) имеет вид

$$\dot{Z} = aZ + a_0 + (b_0 + b_1 Z) V.$$

При этом уравнение (20) имеет тот же вид, что и в случае векторных Z-V, а уравнения (21) и (22) для второго начального момента $\alpha_2 = \Gamma$ и дисперсии $D = K$ процесса Z принимают вид

$$\dot{\alpha}_2 = (2a + b_1^2 \nu)\, \alpha_2 + 2(a_0 + b_0 b_1 \nu)\, m + b_0^2 \nu,$$

$$\dot{D} = (2a + b_1^2 \nu)\, D + 2 b_0 b_1 \nu m + b_1^2 \nu m^2 + b_0^2 \nu.$$

При нормально распределенном белом шуме V можно получить также точные уравнения для моментов высших порядков. Эти уравнения имеют вид

$$\dot{\alpha}_k = k \left[a + \frac{1}{2}(k-1)\, b_1^2 \nu \right] \alpha_k + k\, [a_0 + (k-1)\, b_0 b_1 \nu]\, \alpha_{k-1} + \\ + \frac{1}{2} k (k-1)\, b_0^2 \nu \alpha_{k-2} \quad (k = 3, 4, \ldots).$$

6.2.7. Стационарные процессы в линейных системах с параметрическими шумами. Рассмотрим стационарную линейную систему (19) со стационарными параметрическими шумами. В этом случае a, a_0, b_0, b_h и ν постоянны. Поэтому, положив в (20) и (22) $\dot{m}=0$, $\dot{K}=0$, получим алгебраические уравнения для математического ожидания и элементов ковариационной матрицы значения стационарного процесса в системе в любой момент t:

$$am+a_0=0,$$

$$aK+Ka^{\mathrm{T}}+b_0\nu b_0^{\mathrm{T}}+\sum_{h=1}^{p}(b_h\nu b_0^{\mathrm{T}}+b_0\nu b_h^{\mathrm{T}})m_h+\sum_{h,\,l=1}^{p}b_h\nu b_l^{\mathrm{T}}(m_hm_l+k_{hl})=0.$$

Для нахождения ковариационной функции стационарного процесса $k(\tau)$, $\tau=t_1-t_2$, напишем общее уравнение для ковариационной функции

$$\frac{\partial K(t_1,\ t_2)}{\partial t_2}=K(t_1,\ t_2)\,a^{\mathrm{T}}\quad\text{при}\quad t_2>t_1.$$

Отсюда, пользуясь свойством ковариационной функции $K(t_1,\ t_2)=K(t_2,\ t_1)^{\mathrm{T}}$ и транспонируя полученное уравнение, будем иметь

$$\frac{\partial K(t_2,\ t_1)}{\partial t_2}=aK(t_2,\ t_1)\quad\text{при}\quad t_1<t_2.$$

Поменяв в этом уравнении t_1 и t_2 местами, положив после этого $t_2=t$, $t_1=t+\tau$ и фиксируя t, придем к уравнению для ковариационной функции стационарного процесса в системе:

$$\frac{dk(\tau)}{d\tau}=ak(\tau).$$

Это уравнение при начальном условии $k(0)=K$ определяет ковариационную функцию стационарного процесса в системе при $\tau>0$. При $\tau<0$ ковариационная функция определяется формулой $k(\tau)=k(-\tau)^{\mathrm{T}}$ (п. 4.1.2).

В случае нормально распределенного белого шума V можно также определить моменты высших порядков одномерного распределения стационарного процесса в системе. Для этого следует положить в уравнениях п. 6.2.6 для моментов вектора состояния

$$\dot{\alpha}_k=0\qquad(k_1,\ \ldots,\ k_p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ |k|=1,\ 2,\ \ldots).$$

Конечномерные распределения стационарного в узком смысле процесса в системе можно найти общим методом п. 5.3.10.

Следует заметить, что стационарный в широком смысле процесс в линейной системе с параметрическими шумами физически может существовать только тогда, когда системы, описываемые детерминированными уравнениями (20) и (22), устойчивы. Однако это условие в общем случае недостаточно для существования стационарного в узком смысле процесса в системе.

§ 6.3. Нормальная аппроксимация конечномерных распределений вектора состояния

6.3.1. Одномерное распределение. В общем случае точное решение уравнений § 5.3, определяющих конечномерные распределения вектора состояния системы, невозможно. Простейшим приближенным методом нахождения конечномерных распределений вектора состояния нелинейной системы является метод аппроксимации распределения состояния системы нормальным распределением. Этот метод был предложен впервые в [55].

Ясно, что чем ближе система к линейной, тем точнее будут расчеты методом нормальной аппроксимации. Однако, как показывает опыт практического применения этого метода, он может давать хорошие результаты и для существенно нелинейных систем.

► Аппроксимируя одномерное распределение процесса $Z(t)$ нормальным, будем иметь

$$g_1(\lambda;\ t) \approx \exp\left\{i\lambda^{\mathrm{T}} m - \frac{1}{2}\lambda^{\mathrm{T}} K\lambda\right\},$$

$$f_1(z;\ t) \approx [(2\pi)^p |K|]^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(z^{\mathrm{T}} - m^{\mathrm{T}}) K^{-1}(z-m)\right\},$$

где m и K — неизвестные математическое ожидание и ковариационная матрица вектора состояния системы Z.

Вычислив математические ожидания в (8) и (13) для нормального распределения $N(m,\ K)$ *), получим обыкновенные дифференциальные уравнения, приближенно определяющие m и K:

$$\dot{m} = \varphi_1(m,\ K,\ t), \qquad \dot{K} = \varphi_2(m,\ K,\ t), \tag{23}$$

где

$$\varphi_1(m,\ K,\ t) = M_N a(Z,\ t) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |K|}} \int_{-\infty}^{\infty} a(z,\ t) \exp\left\{-\frac{1}{2}(z^{\mathrm{T}} - m^{\mathrm{T}}) K^{-1}(z-m)\right\} dz, \tag{24}$$

$$\varphi_2(m,\ K,\ t) = \varphi_{21}(m,\ K,\ t) + \varphi_{21}(m,\ K,\ t)^{\mathrm{T}} + \varphi_{22}(m,\ K,\ t), \tag{25}$$

$$\varphi_{21}(m,\ K,\ t) = M_N a(Z,\ t)(Z^{\mathrm{T}} - m^{\mathrm{T}}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |K|}} \int_{-\infty}^{\infty} a(z,\ t)(z^{\mathrm{T}} - m^{\mathrm{T}}) \exp\left\{-\frac{1}{2}(z^{\mathrm{T}} - m^{\mathrm{T}}) K^{-1}(z-m)\right\} dz, \tag{26}$$

*) Через $N(m,\ K)$ обозначается нормальное распределение с математическим ожиданием m и ковариационной матрицей K (*ТВ*, п. 4.4.3).

$$\varphi_{22}(m,\ K,\ t) = M_N b(Z,\ t)\,\nu(t)\,b(Z,\ t)^{\mathrm{T}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p\,|K|}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} b(z,\ t)\,\nu(t)\,b(z,\ t)^{\mathrm{T}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}(z^{\mathrm{T}} - m^{\mathrm{T}})\,K^{-1}(z-m)\right\} dz, \qquad (27)$$

а индекс N у знака математического ожидания означает, что оно вычисляется для нормального распределения $N(m,\ K)$ величины Z. ◀

В частном случае единичной матрицы $b(z,\ t)$, $b(z,\ t) = I$, $\varphi_{22}(m,\ K,\ t) = \nu(t)$. В этом случае изложенный метод приближенного определения моментов m и K дает те же уравнения, что и метод статистической линеаризации И. Е. Казакова [31—33, 70]. Действительно, метод статистической линеаризации основан на приближенной формуле

$$a(z,\ t) \approx \varphi_0 + k_1(z-m), \qquad (28)$$

где φ_0 и k_1, определяемые из условия минимума средней квадратической ошибки при допущении о нормальности распределения Z, даются формулами $\varphi_0 = \varphi_1(m,\ K,\ t)$ и $k_1 = \varphi_{21}(m,\ K,\ t)\,K^{-1}$ (см. *ТВ*, пример 9.2). Заменив функцию $a(z,\ t)$ полученной линейной функцией z, приведем уравнение (7) в случае $b(z,\ t) = I$ к линейному стохастическому дифференциальному уравнению

$$\dot{Z} = \varphi_0 + k_1(Z-m) + V.$$

Уравнения (5.26) и (5.28) дадут в этом случае следующие приближенные уравнения для m и K:

$$\dot{m} = \varphi_0, \quad \dot{K} = k_1K + Kk_1^{\mathrm{T}} + \nu.$$

Подставив сюда найденные значения φ_0 и k_1, убеждаемся в том, что эти уравнения совпадают с (23) при $\varphi_{22}(m,\ K,\ t) = \nu$.

Для практического применения метода статистической линеаризации составлены таблицы формул для φ_0 и $k_1 = [(\partial/\partial m)\,\varphi_0^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ для типовых скалярных и векторных нелинейных функций [33, 53]. В приложении 5 приведены формулы для φ_0 для некоторых характеристических нелинейных функций. Этими формулами можно пользоваться непосредственно для определения функций

$$\varphi_1(m,\ K,\ t) = \varphi_0, \quad \varphi_{21}(m,\ K,\ t) = k_1K = [(\partial/\partial m)\,\varphi_0^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\,K$$

при составлении уравнений (23) метода нормальной аппроксимации. Этими формулами можно пользоваться и для определения функции $\varphi_{22}(m,\ K,\ t)$, так как согласно (27) она представляет собой одно первое слагаемое в формуле вида (28) для статистически линеаризованной функции $b(Z,\ t)\,\nu(t)\,b(Z,\ t)^{\mathrm{T}}$.

Пример 9. Рассмотрим систему, описываемую стохастическим дифференциальным уравнением

$$\dot{Z} = -Z^3 + ZV.$$

В данном случае $a(z, t) = -z^3$, $b(z, t) = z$ и формулы (24)—(27) дают

$$\varphi_1(m, D, t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \int_{-\infty}^{\infty} z^3 e^{-(z-m)^2/2D}\, dz,$$

$$\varphi_{21}(m, D, t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \int_{-\infty}^{\infty} z^3 (z-m) e^{-(z-m)^2/2D}\, dz,$$

$$\varphi_{22}(m, D, t) = \frac{\nu}{\sqrt{2\pi D}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-(z-m)^2/2D}\, dz.$$

Выполнив интегрирование с учетом того, что

$$z^2 = m^2 + 2m(z-m) + (z-m)^2,$$
$$z^3 = m^3 + 3m^2(z-m) + 3m(z-m)^2 + (z-m)^3$$

и что центральные моменты нечетных порядков для нормального распределения равны нулю, а центральный момент четвертого порядка для одномерного нормального распределения равен $3D^2$, получим

$$\varphi_1(m, D, t) = -m(m^2 + 3D),$$
$$\varphi_{21}(m, D, t) = -3D(m^2 + D),$$
$$\varphi_{22}(m, D, t) = \nu(m^2 + D),$$
$$\varphi_2(m, D, t) = -6D(m^2 + D) + \nu(m^2 + D) = (\nu - 6D)(m^2 + D).$$

Следовательно, уравнения (23) имеют в данном случае вид

$$\dot{m} = -m(m^2 + 3D), \quad \dot{D} = (\nu - 6D)(m^2 + D).$$

Проинтегрировав эти уравнения при начальных условиях $m(t_0) = m_0$, $D(t_0) = D_0$, полностью определим приближенное нормальное одномерное распределение процесса $Z(t)$. Полученные уравнения можно также вывести из первых двух уравнений примера 6 путем замыкания их при помощи формул, выражающих третий и четвертый моменты через моменты первого и второго порядков для нормального распределения, и перехода к центральным моментам.

Пример 10. Для системы, описываемой уравнением

$$\dot{Z} = -\varphi(Z) + V,$$

где $\varphi(z)$ — нелинейная характеристика ограничителя, представленная на рис. 6, формулы (24)—(27) дают

$$\varphi_1(m, D, t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \left[-l \int_{-\infty}^{-l} e^{-(z-m)^2/2D}\, dz + \right.$$
$$\left. + \int_{-l}^{l} z e^{-(z-m)^2/2D}\, dz + l \int_{l}^{\infty} e^{-(z-m)^2/2D} dz \right],$$

$$\varphi_{21}(m,\ D,\ t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi D}}\left[-l\int_{-\infty}^{-l}(z-m)\,e^{-(z-m)^2/2D}\,dz + \right.$$

$$\left. + \int_{-l}^{l} z(z-m)\,e^{-(z-m)^2/2D}\,dz + l\int_{l}^{\infty}(z-m)\,e^{-(z-m)^2/2D}\,dz\right],$$

$\varphi_{22}(m,\ D,\ t) = \nu.$

Для выполнения интегрирования заметим, что интегралы от нормальной плотности, представляющие собой вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в соответствующие интервалы, выражаются через функцию Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-u^2/2}\,du$$

формулой (*ТВ*, п. 3.6.2)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi D}}\int_\alpha^\beta e^{-(z-m)^2/2D}\,dz = \Phi\left(\frac{\beta-m}{\sqrt{D}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sqrt{D}}\right).$$

Остальные интегралы приводятся к интегралам

$$\int_\alpha^\beta ue^{-u^2/2}\,du = -\left(e^{-\beta^2/2} - e^{-\alpha^2/2}\right)$$

и

$$\int_\alpha^\beta u^2e^{-u^2/2}\,du = -\int_\alpha^\beta u\,de^{-u^2/2} = -\left(\beta e^{-\beta^2/2} - \alpha e^{-\alpha^2/2}\right) + \int_\alpha^\beta e^{-u^2/2}\,du =$$

$$= -\left(\beta e^{-\beta^2/2} - \alpha e^{-\alpha^2/2}\right) + \sqrt{2\pi}\,[\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)].$$

Пользуясь приведенными формулами и принимая во внимание, что $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, $\Phi(\infty) = 1/2$ (*ТВ*, п. 3.6.2), находим

$$\varphi_1(m,\ D,\ t) = -\left[(l+m)\,\Phi\left(\frac{l+m}{\sqrt{D}}\right) - (l-m)\,\Phi\left(\frac{l-m}{\sqrt{D}}\right)\right] +$$

$$+\sqrt{\frac{D}{2\pi}}\left[\exp\left\{-\frac{(l-m)^2}{2D}\right\} - \exp\left\{-\frac{(l+m)^2}{2D}\right\}\right],$$

$$\varphi_{21}(m,\ D,\ t) = -D\left[\Phi\left(\frac{l+m}{\sqrt{D}}\right) + \Phi\left(\frac{l-m}{\sqrt{D}}\right)\right].$$

Уравнения (23) в этом случае имеют вид

$$\dot{m} = -\left[(l+m)\,\Phi\left(\frac{l+m}{\sqrt{D}}\right) - (l-m)\,\Phi\left(\frac{l-m}{\sqrt{D}}\right)\right] +$$

$$+\sqrt{\frac{D}{2\pi}}\left[\exp\left\{-\frac{(l-m)^2}{2D}\right\} - \exp\left\{-\frac{(l+m)^2}{2D}\right\}\right],$$

$$\dot{D} = -2D\left[\Phi\left(\frac{l+m}{\sqrt{D}}\right) + \Phi\left(\frac{l-m}{\sqrt{D}}\right)\right] + \nu.$$

Пример 11. Для системы с двумерным пространством состояний, описываемой уравнениями

$$\dot{Z}_1 = -Z_1 Z_2, \quad \dot{Z}_2 = -\alpha Z_2 + kV,$$

матрицы $a(z, t)$ и $b(z, t)$ определяются формулами

$$a(z, t) = -\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ \alpha & z_2 \end{bmatrix}, \quad b(z, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix},$$

и формулы (24)—(27) дают

$$\varphi_1(m, K, t) = -M_N \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ \alpha & Z_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} m_1 m_2 + k_{12} \\ \alpha m_2 \end{bmatrix},$$

$$\varphi_{21}(m, K, t) = -M_N \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ \alpha & Z_2 \end{bmatrix} [Z_1 - m_1 \quad Z_2 - m_2] =$$

$$= -M_N \begin{bmatrix} Z_1 Z_2 Z_1^0 & Z_1 Z_2 Z_2^0 \\ \alpha Z_2 Z_1^0 & \alpha Z_2 Z_2^0 \end{bmatrix},$$

$$\varphi_{22}(m, K, t) = M_N \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} \nu [0 \quad k] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \nu k^2 \end{bmatrix}.$$

Имея в виду, что все центральные моменты нечетных порядков для нормального распределения равны нулю, находим

$$M_N Z_1 Z_2 Z_1^0 = M_N \{m_1 m_2 Z_1^0 + m_1 Z_2^0 Z_1^0 + m_2 Z_1^{02} + Z_1^{02} Z_2^0\} = m_1 k_{12} + m_2 k_{11},$$

$$M_N Z_1 Z_2 Z_2^0 = m_1 k_{22} + m_2 k_{12},$$

$$M_N Z_2 Z_1^0 = k_{12},$$

$$M_N Z_2 Z_2^0 = k_{22}$$

и, следовательно,

$$\varphi_{21}(m, K, t) = -\begin{bmatrix} m_2 k_{11} + m_1 k_{12} & m_2 k_{12} + m_1 k_{22} \\ \alpha k_{12} & \alpha k_{22} \end{bmatrix}$$

и

$$\varphi_2(m, K, t) = \varphi_{21}(m, K, t) + \varphi_{21}(m, K, t)^T + \varphi_{22}(m, K, t) =$$

$$= \begin{bmatrix} -2(m_2 k_{11} + m_1 k_{12}) & -(m_2 + \alpha) k_{12} - m_1 k_{22} \\ -(m_2 + \alpha) k_{12} - m_1 k_{22} & \nu k^2 - 2\alpha k_{22} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, уравнения (23) имеют в данном случае вид

$$\dot{m}_1 = -m_1 m_2 - k_{12}, \qquad \dot{m}_2 = -\alpha m_2,$$

$$\dot{k}_{11} = -2(m_2 k_{11} + m_1 k_{12}), \qquad \dot{k}_{12} = -(m_2 + \alpha) k_{12} - m_1 k_{22},$$

$$\dot{k}_{22} = \nu k^2 - 2\alpha k_{22}.$$

6.3.2. Многомерные распределения. Совершенно так же находятся нормальные аппроксимации всех остальных конечномерных распределений процесса $Z(t)$. Так как нормальное распределение полностью определяется моментами первого и второго порядков (п. 2.2.8), а последние определяются двумерным распределением, то достаточно найти нормальное приближение двумерной характеристической функции $g_2(\lambda_1, \lambda_2; t_1, t_2)$. Для этого достаточно в свою очередь найти ковариационную функцию $K(t_1, t_2)$ процесса $Z(t)$ (математическое ожидание и ковариационная матрица его значения при любом t определяются уравнениями (23)).

▶ Чтобы получить уравнение для $K(t_1, t_2)$, достаточно приближенно вычислить математическое ожидание в (29), заменив неизвестное двумерное распределение процесса $Z(t)$ нормальным. В результате получим

$$\partial K(t_1, t_2)/\partial t_2 = M_N [Z_{t_1} - m(t_1)] a(Z_{t_2}, t_2)^{\mathrm{T}}, \tag{29}$$

где индекс N у математического ожидания означает, что оно вычисляется для нормального совместного распределения величин Z_{t_1} и Z_{t_2}. Для вычисления этого математического ожидания применим формулу полного математического ожидания — сначала вычислим условное математическое ожидание относительно Z_{t_2}, а потом вычислим математическое ожидание полученной функции величины Z_{t_2} (*ТВ*, п. 4.3.3). Тогда, пользуясь известной формулой для условного математического ожидания части компонент случайного вектора относительно остальных компонент (формула (2) приложения 3), получим

$$M_N [Z_{t_1} - m(t_1)] a(Z_{t_2}, t_2)^{\mathrm{T}} = M_N \{M_N [Z_{t_1} \mid Z_{t_2}] - m(t_1)\} a(Z_{t_2}, t_2)^{\mathrm{T}} =$$
$$= K(t_1, t_2) K(t_2)^{-1} M_N [Z_{t_2} - m(t_2)] a(Z_{t_2}, t_2)^{\mathrm{T}}.$$

Но на основании (26)

$$M_N [Z_{t_2} - m(t_2)] a(Z_{t_2}, t_2)^{\mathrm{T}} = \varphi_{21}(m(t_2), K(t_2), t_2)^{\mathrm{T}}.$$

Следовательно,

$$M_N [Z_{t_1} - m(t_1)] a(Z_{t_2}, t_2)^{\mathrm{T}} = K(t_1, t_2) K^{-1}(t_2) \varphi_{21}(m(t_2), K(t_2), t_2)^{\mathrm{T}}.$$

Подставив это выражение в (29), получим приближенное уравнение для ковариационной функции процесса $Z(t)$:

$$\partial K(t_1, t_2)/\partial t_2 = K(t_1, t_2) K(t_2)^{-1} \varphi_{21}(m(t_2), K(t_2), t_2)^{\mathrm{T}}. \blacktriangleleft \tag{30}$$

Это уравнение при любом фиксированном t_1 представляет собой обыкновенное линейное дифференциальное уравнение, определяющее $K(t_1, t_2)$ как функцию t_2, $t_1 < t_2$, при начальном условии $K(t_1, t_1) = K(t_1)$.

Уравнения (23) и (30) определяют последовательно математическое ожидание $m(t)$, функцию $K(t, t) = K(t)$ и ковариационную функцию $K(t_1, t_2)$ процесса $Z(t)$. После этого можно определить все конечномерные распределения (приближенно нормальные) процесса $Z(t)$ по формуле (2.20) или (2.21).

Пример 12. В условиях примера 9 уравнение (30) имеет вид

$$\partial K(t_1, t_2)/\partial t_2 = -3 [m^2(t_2) + D(t_2)] K(t_1, t_2).$$

Решение этого уравнения при начальном условии $K(t_1, t_1) = D(t_1)$ выражается формулой

$$K(t_1, t_2) = D(t_1) \exp\left\{-3 \int_{t_1}^{t_2} [m^2(\tau) + D(\tau)]\, d\tau\right\}.$$

По этой формуле можно вычислить ковариационную функцию процесса $Z(t)$ после интегрирования уравнений, определяющих его математическое ожидание $m(t)$ и дисперсию $D(t)$.

Пример 13. В условиях примера 10 уравнение (30) имеет вид

$$\frac{\partial K(t_1,\ t_2)}{\partial t_2} = -\left[\Phi\left(\frac{l+m(t_2)}{\sqrt{D(t_2)}}\right)+\Phi\left(\frac{l-m(t_2)}{\sqrt{D(t_2)}}\right)\right]K(t_1,\ t_2).$$

Решение этого уравнения при начальном условии $K(t_1,\ t_1)=D(t_1)$ выражается формулой

$$K(t_1,\ t_2)=D(t_1)\exp\left\{-\int_{t_1}^{t_2}\left[\Phi\left(\frac{l+m(\tau)}{\sqrt{D(\tau)}}\right)+\Phi\left(\frac{l-m(\tau)}{\sqrt{D(\tau)}}\right)\right]d\tau\right\}.$$

Пример 14. Чтобы получить уравнение для ковариационной функции

$$K(t_1,\ t_2)=\begin{bmatrix} K_{11}(t_1,\ t_2) & K_{12}(t_1,\ t_2) \\ K_{21}(t_1,\ t_2) & K_{22}(t_1,\ t_2)\end{bmatrix}$$

процесса $Z(t)=[Z_1(t)\ Z_2(t)]^{\text{т}}$ в условиях примера 11, представим формулу для $\varphi_{21}(m,\ K,\ t)$, полученную в примере 11, в виде

$$\varphi_{21}(m,\ K,\ t)=-\begin{bmatrix} m_2 & m_1 \\ 0 & \alpha\end{bmatrix}K.$$

Подставив это выражение при $t=t_2$ в уравнение (30), получим

$$\frac{\partial K(t_1,t_2)}{\partial t_2}=-K(t_1,t_2)\begin{bmatrix} m_2(t_2) & 0 \\ m_1(t_2) & \alpha\end{bmatrix}$$

или, в скалярной форме

$$\begin{aligned}
&\partial K_{11}(t_1,t_2)/\partial t_2=-m_2(t_2)K_{11}(t_1,t_2)-m_1(t_2)K_{12}(t_1,t_2),\\
&\partial K_{12}(t_1,t_2)/\partial t_2=-\alpha K_{12}(t_1,t_2),\\
&\partial K_{21}(t_1,t_2)/\partial t_2=-m_2(t_2)K_{21}(t_1,t_2)-m_1(t_2)K_{22}(t_1,t_2),\\
&\partial K_{22}(t_1,t_2)/\partial t_2=-\alpha K_{22}(t_1,t_2).
\end{aligned}$$

Начальные условия для этих уравнений имеют вид $K_{hl}(t_1,t_1)=k_{hl}(t_1)$ ($h,\ l=1,\ 2$). Второе и четвертое уравнения легко интегрируются. Их решения выражаются формулами

$$\begin{aligned}
&K_{12}(t_1,t_2)=k_{12}(t_1)e^{-\alpha(t_2-t_1)}, \quad t_2>t_1,\\
&K_{22}(t_1,t_2)=k_{22}(t_1)e^{-\alpha(t_2-t_1)}, \quad t_2>t_1.
\end{aligned}$$

Подставив эти выражения соответственно в первое и третье уравнения, найдем $K_{11}(t_1,t_2)$ и $K_{21}(t_1,t_2)$. Впрочем, практически удобнее непосредственно решать дифференциальные уравнения на ЭВМ, вместо того чтобы производить вычисления по формулам, определяющим их решения.

Само собой разумеется, метод нормальной аппроксимации, так же как и более точные методы § 6.4—6.7, можно применять для приближенного нахождения конечномерных распределений и в случае детерминированных систем со случайными начальными условиями. При этом во всех предыдущих формулах $b(z,\ t)=0$. Несмотря на то, что в этом случае известны точные решения уравнений (5.38) и (5.41) (см. § 6.1), этими точными решениями, как правило, невозможно пользоваться в задачах практики. Поэтому приходится пользоваться приближенными методами этой главы.

6.3.3. Приближенное определение стационарных процессов в нелинейных системах. Для приближенного определения характеристик стационарного в узком смысле процесса в нелинейной стохастической дифференциальной системе (7) при стационарном белом шуме V также можно применить метод нормальной аппроксимации. В этом случае $a(z, t) = a(z)$, $b(z, t) = b(z)$, $\nu(t) = \nu$ не зависят от времени t, вследствие чего функции φ_1 и φ_2, определяемые формулами (24) и (25), также не зависят от t.

Для нахождения математического ожидания и ковариационной матрицы значения стационарного процесса при любом t следует в уравнениях (23) положить $\dot{m} = 0$, $\dot{K} = 0$. В результате получим уравнения

$$\varphi_1(m, K) = 0, \qquad \varphi_2(m, K) = 0.$$

Если существуют постоянные вектор m и неотрицательно определенная матрица K, удовлетворяющие этим уравнениям, и это частное решение уравнений (23) устойчиво по Ляпунову [52, 48], то можно предположить, что это решение характеризует стационарный процесс в системе.

В этом случае для определения ковариационной функции $k(\tau)$ стационарного процесса следует применить тот же прием, что и в п. 6.2.7. В результате получим уравнение

$$\frac{dk(\tau)}{d\tau} = \varphi_{21}(m, K)\, K^{-1} k(\tau).$$

Это уравнение при начальном условии $k(0) = K$ определяет ковариационную функцию стационарного процесса в системе при $\tau > 0$. При $\tau < 0$ $k(\tau) = k(-\tau)^{\mathrm{T}}$ (п. 4.1.2).

После нахождения m, K, $k(\tau)$ все приближенно нормальные конечномерные распределения стационарного в узком смысле процесса в системе определяются формулами (2.20) или (2.21).

Следует, однако, иметь в виду, что уравнения (23) приближенные, вследствие чего уравнения, полученные из (23) при $\dot{m} = 0$, $\dot{K} = 0$, могут иметь требуемые решения и в том случае, когда стационарного в узком смысле процесса в системе не существует. Поэтому, применяя метод нормальной аппроксимации для нахождения стационарных процессов в нелинейных стохастических дифференциальных системах, следует соблюдать осторожность и каждое полученное стационарное решение проверять, учитывая моменты высших порядков, методами § 6.4—6.6. Примером ситуации такого рода может служить нелинейная система примера 9. Нетрудно проверить, что метод нормальной аппроксимации дает в этом случае два стационарных режима: $m = 0$, $D = 0$ и $m = 0$, $D = \nu/6$. Однако, применив метод моментов с учетом моментов до четвертого порядка, убеждаемся в том, что второй стационарный режим не существует и лишь первое решение соответствует стационарному в узком смысле процессу в системе.

6.3.4. Параметризация распределений. Обобщением только что изложенного метода нормальной аппроксимации распределений являются различные приближенные методы, основанные на параметризации распределений. Чтобы пояснить общую идею этих методов, заметим, что нормальная аппроксимация одномерного распределения по существу представляет собой приближенное представление характеристической функции $g_1(\lambda; t)$ и соответствующей плотности $f_1(z; t)$ нормальными характеристической функцией и плотностью, зависящими от конечного множества параметров — математических ожиданий, дисперсий и ковариаций компонент вектора состояния системы. Эти параметры, естественно, зависят от времени t, и метод нормальной аппроксимации дает обыкновенные дифференциальные уравнения для этих параметров. Нормальная аппроксимация n-мерного распределения представляет собой замену соответствующих характеристической функции и плотности нормальными. Множество параметров, от которых зависит это нормальное распределение, состоит из математических ожиданий, дисперсий и ковариаций компонент вектора состояния в данные моменты времени $t_1, \ldots, t_n$, найденных при определении одномерного распределения, и, кроме того, из взаимных ковариаций компонент векторов состояния в различные моменты времени. Каждая из этих ковариаций зависит от двух моментов времени и, следовательно, определяется двумерным распределением. В соответствии с этим метод нормальной аппроксимации дает обыкновенное дифференциальное уравнение для ковариационной функции вектора состояния, рассматриваемой как функция момента времени t_2 при фиксированном моменте $t_1 < t_2$. Таким образом, метод нормальной аппроксимации основан на замене неизвестных распределений известными (а именно нормальными), зависящими от конечного множества неизвестных параметров, и выводе для этих параметров соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений. Обобщая эту идею, естественно поставить задачу аппроксимации неизвестных характеристических функций и плотностей известными функциями, зависящими от конечного числа неизвестных параметров.

Аппроксимируя одномерную характеристическую функцию $g_1(\lambda; t)$ и соответствующую плотность $f_1(z; t)$ известными функциями $g_1^*(\lambda; \theta)$, $f_1^*(z; \theta)$, зависящими от конечномерного векторного параметра θ, мы сводим задачу приближенного определения одномерного распределения к выводу из уравнения (5.38) обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих θ как функцию времени t [26]. Это относится и к остальным конечномерным распределениям. При аппроксимации конечномерных распределений целесообразно выбирать последовательности функций $\{g_n^*(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; \theta_n)\}$ и $\{f_n^*(z_1, \ldots, z_n; \theta_n)\}$, каждая пара которых зависит от конечномерного векторного параметра θ_n так, чтобы при любом n множество параметров, образующих вектор θ_n, включало в качестве подмножества множество параметров, образующих вектор θ_{n-1}. Тогда при аппроксимации n-мерного распределения придется определять только те координаты вектора θ_n, которые не были определены ранее при аппроксимации функций $g_1, f_1, \ldots, g_{n-1}, f_{n-1}$.

Заметим, что в общем случае функции $g_n^*(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; \theta_n)$ и $f_n^*(z_1, \ldots, z_n; \theta_n)$, аппроксимирующие функции $g_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n)$ и $f_n(z_1, \ldots, z_n; t_1, \ldots, t_n)$, не обязательно сами должны быть характеристическими функциями и соответствующими плотностями. Они могут давать хорошее приближение $g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n)$ и $f_n(z_1, \ldots, z_n; t_1, \ldots, t_n)$ и не будучи характеристическими функциями и плотностями. Так, например, можно получить хорошее приближение плотностей $f_n(z_1, \ldots, z_n; t_1, \ldots, t_n)$ конечными отрезками ортогональных разложений, которые сами е являются плотностями (п. 2.3.1). Соответствующие отрезки разложений для характеристических функций $g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n)$ при этом не будут характеристическими функциями.

В зависимости от того, что представляют собой параметры, от которых зависят функции $f_n^*(z_1, \ldots, z_n; \theta_n)$ и $g_n^*(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; \theta_n)$, аппроксимирующие неизвестные конечномерные плотности $f_n(z_1, \ldots, z_n; t_1, \ldots, t_n)$ и характеристические функции $g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n)$, получаются различные приближенные методы решения уравнений § 5.3, определяющих конечномерные распределения вектора состояния системы $Z(t)$.

Все излагаемые дальше приближенные методы применимы и к системам со случайно изменяющейся структурой, поскольку, как было показано в п. 5.3.10, математической моделью таких систем служит стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида (7). Все эти методы применимы также для решения уравнений, определяющих условные конечномерные распределения такой системы в различных структурах, выведенных в п. 5.3.10.

§ 6.4. Метод моментов

6.4.1. Одномерное распределение. Начальные моменты. Предположим, что параметр θ, от которого зависят функции $g_1^*(\lambda; \theta)$, $f_1^*(z; \theta)$, аппроксимирующие одномерную характеристическую функцию $g_1(\lambda; t)$ и соответствующую плотность $f_1(z; t)$, представляет собой совокупность моментов вектора Z до определенного порядка N включительно.

► Для того чтобы вывести обыкновенные дифференциальные уравнения, приближенно определяющие эти моменты, вспомним, что момент $\alpha_{r_1, \ldots, r_p} = MZ_1^{r_1}(t) \ldots Z_p^{r_p}(t)$ выражается через характеристическую функцию $g_1(\lambda; t)$ вектора $Z(t)$ формулой (*ТВ*, п. 4.5.3)

$$\alpha_r = \alpha_{r_1, \ldots, r_p} = \left[\frac{\partial^{|r|} g_1(\lambda; t)}{\partial (i\lambda_1)^{r_1} \ldots \partial (i\lambda_p)^{r_p}} \right]_{\lambda=0},$$

где $r=[r_1\ldots r_p]^{\mathrm{T}}$ — векторный индекс, а $|r|=r_1+\ldots+r_p$. Из этой формулы следует, что

$$\dot{\alpha}_r=\left[\frac{\partial^{|r|}}{\partial(i\lambda_1)^{r_1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{r_p}}\,\frac{\partial g_1(\lambda;\,t)}{\partial t}\right]_{\lambda=0}.$$

Подставив сюда выражение $\partial g_1(\lambda;\,t)/\partial t$ из уравнения (5.44),

$$\frac{\partial g_1(\lambda;\,t)}{\partial t}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[i\lambda^{\mathrm{T}}a(z,\,t)+\chi(b(z,\,t)^{\mathrm{T}}\lambda;\,t)\right]e^{i\lambda^{\mathrm{T}}z}f_1(z;\,t)\,dz, \tag{31}$$

и заменив неизвестную плотность $f_1(z;\,t)$ аппроксимирующей ее функцией $f_1^*(z;\,\theta)$, получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для моментов:

$$\dot{\alpha}_r=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\partial^{|r|}}{\partial(i\lambda_1)^{r_1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{r_p}}\left[i\lambda^{\mathrm{T}}a(z,\,t)+\chi(b(z,\,t)^{\mathrm{T}}\lambda;\,t)\right]e^{i\lambda^{\mathrm{T}}z}\right\}_{\lambda=0}f_1^*(z;\theta)\,dz$$
$$(r_1,\,\ldots,\,r_p=0,\,1,\,\ldots,\,N;\;|r|=1,\,\ldots,\,N). \blacktriangleleft \tag{32}$$

Интегрируя систему уравнений (32) при начальных условиях

$$\alpha_r(t_0)=\alpha_r^0 \qquad (r_1,\,\ldots,\,r_p=0,\,1,\,\ldots,\,N;\,|r|=1,\,\ldots,\,N),$$

найдем все координаты вектора θ как функции времени t (α_r^0 — моменты начального значения Z_0 вектора $Z(t)$ при $t=t_0$).

Само собой разумеется, что при $|r|=1$ и $|r|=2$ уравнения (32) для моментов первого и второго порядков совпадают с уравнениями, полученными из (8) и (12) путем замены плотности $f_1(z;\,t)$ в выражениях математических ожиданий аппроксимирующей ее функцией $f_1^*(z;\,\theta)$.

Уравнения (32) можно также вывести, дифференцируя случайную функцию $Z_1^{r_1}(t)\ldots Z_p^{r_p}(t)$ *по правилу дифференцирования* сложной функции случайного процесса $Z(t)$ с учетом характера процесса $W(t)$ (пп. 3.5.2—3.5.4), взяв математические ожидания обеих частей полученного равенства и вычислив математическое ожидание в правой части для аппроксимирующей неизвестную плотность $f_1(z;\,t)$ функции $f_1^*(z;\,\theta)$. Этот способ во многих задачах практики оказывается простейшим способом вывода уравнений (32).

В случае непрерывно-дискретной системы, вектор состояния (расширенный) которой $Z=[Z_1\ldots Z_p]^{\mathrm{T}}$ состоит из двух блоков: $Z'=[Z_1\ldots Z_\pi]^{\mathrm{T}}$ (непрерывная часть) и $Z''=[Z_{\pi+1}\ldots Z_p]^{\mathrm{T}}$ (дискретная часть), и определяется уравнениями

$$\dot{Z}'=a(Z,\,t)+b(Z,\,t)V,\quad Z''_{k+1}=\omega_k(Z_k,\,V_k),$$
$$Z=[Z'^{\mathrm{T}}\,Z''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\quad Z''=\sum_{k=0}^{\infty}Z''_k 1_{A_k}(t), \tag{7a}$$

где $A_k = [t^{(k)}, t^{(k+1)})$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, выводим из (5.38а) и (5.38б) п. 5.3.1 уравнения для моментов одномерного распределения случайного процесса $\bar{Z}(t) = [Z'(t)^{\mathrm{T}}\, Z''(t)^{\mathrm{T}}\, Z'''(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, где

$$Z'''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k' \mathbf{1}_{A_k}(t)$$

— процесс, совпадающий с $Z'(t)$ в точках $t^{(k)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$\dot{\alpha}_r = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^{r_1 + \ldots + r_\pi}}{\partial (i\lambda_1)^{r_1} \ldots \partial (i\lambda_\pi)^{r_\pi}} [i\lambda'^{\mathrm{T}} a(z, t) + \chi(b(z, t)^{\mathrm{T}} \lambda'; t)] e^{i\lambda'^{\mathrm{T}} z'} \right\}_{\lambda' = 0} \times$$

$$\times z_{\pi+1}^{r_{\pi+1}} \ldots z_{p+\pi}^{r_{p+\pi}} f_1^*(\bar{z}; \theta)\, d\bar{z}, \qquad (32а)$$

$$\alpha_r(t^{(k+1)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z_1^{r_1 + r_{p+1}} \ldots z_\pi^{r_\pi + r_{p+\pi}} \omega_{k1}^{r_{\pi+1}}(\bar{z}', v) \ldots \omega_{k,\, p-\pi}^{r_p}(\bar{z}', v) \times$$

$$\times \eta_k(v) f_1^*(\bar{z}; \theta(t^{(k+1)} - 0))\, dv\, d\bar{z}$$

$$(r_1, \ldots, r_{p+\pi} = 0, 1, \ldots, N;\ |r| = r_1 + \ldots + r_{p+\pi} = 1, \ldots, N;$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (32б)$$

где

$$\lambda = [\lambda'^{\mathrm{T}} \lambda''^{\mathrm{T}} \lambda'''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = [\lambda_1 \ldots \lambda_{p+\pi}]^{\mathrm{T}}, \quad \lambda' = [\lambda_1 \ldots \lambda_\pi]^{\mathrm{T}},$$
$$\lambda'' = [\lambda_{\pi+1} \ldots \lambda_p]^{\mathrm{T}}, \quad \lambda''' = [\lambda_{p+1} \ldots \lambda_{p+\pi}]^{\mathrm{T}},$$
$$\bar{z} = [z'^{\mathrm{T}}\, z''^{\mathrm{T}}\, z'''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = [z_1 \ldots z_{p+\pi}]^{\mathrm{T}},$$
$$\bar{z}' = [z_{p+1} \ldots z_{p+\pi}\, z_{\pi+1} \ldots z_p]^{\mathrm{T}},$$

а $\eta_k(v)$ представляет собой плотность случайной величины V_k [104, 107].

Уравнения (32а) и (32б) с начальными условиями

$$\alpha_r(t_0) = \alpha_{r_1, \ldots, r_{p+\pi}}(t_0) = \alpha^0_{r_1 + r_{p+1}, \ldots, r_\pi + r_{p+\pi}, r_{\pi+1}, \ldots, r_p}$$
$$(r_1, \ldots, r_{p+\pi} = 0, 1, \ldots, N;\ |r| = r_1 + \ldots + r_{p+\pi} = 1, \ldots, N),$$

вытекающими из (5.39а) п. 5.3.1 приближенно определяют моменты α_r $(|r| = 1, \ldots, N)$, как функции времени t в случае непрерывно-дискретной системы.

В частном случае при $N = 2$ и нормальной $f_1^*(\bar{z}; \theta)$ уравнения (32а) и (32б) представляют собой уравнения метода нормальной аппроксимации для непрерывно-дискретных систем.

В качестве аппроксимирующей плотность $f_1(z; t)$ функции $f_1^*(z; \theta)$ удобно взять конечный отрезок ее ортогонального разложения вида (2.41):

$$f_1(z; t) \approx f_1^*(z; \theta) = w_1(z) \left[1 + \sum_{k=3}^{N} \sum_{|\nu| = k} c_\nu p_\nu(z) \right]. \qquad (33)$$

Коэффициенты c_ν здесь представляют собой в соответствии с (2.38) линейные комбинации моментов случайного вектора $Z(t)$ до порядка N включительно:

$$c_\nu = q_\nu(\alpha) \qquad (\nu_1, \ldots, \nu_p = 0, 1, \ldots, N; \ |\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_p = 3, \ldots, N) \tag{34}$$

(напомним, что $q_\nu(\alpha)$ представляет собой результат замены всех одночленов $z_1^{r_1} \ldots z_p^{r_p}$ в выражении полинома $q_\nu(z)$ соответствующими моментами $\alpha_{r_1, \ldots, r_p}$). Коэффициенты полиномов $p_\nu(z)$ и $q_\nu(z)$ в общем случае зависят от моментов первого и второго порядков вектора $Z(t)$, поскольку плотность $w_1(z)$ в (33) имеет те же моменты первого и второго порядков, что и $f_1(z; t)$.

Подставив выражение (33) в (32) и приняв во внимание (34), получим следующую систему уравнений для моментов:

$$\dot{\alpha}_r = \varphi_{0,r} + \sum_{k=3}^{N} \sum_{|\nu|=k} \varphi_{\nu,r} q_\nu(\alpha) \tag{35}$$
$$(r_1, \ldots, r_p = 0, 1, \ldots, N; \ |\nu| = 1, \ldots, N),$$

где

$$\varphi_{0,r} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^{|r|}}{\partial (i\lambda_1)^{r_1} \ldots \partial (i\lambda_p)^{r_p}} [i\lambda^{\mathrm{T}} a(z,t) + \chi(b(z,t)^{\mathrm{T}}\lambda; t)] e^{i\lambda^{\mathrm{T}} z} \right\}_{\lambda=0} w_1(z) dz, \tag{36}$$

$$\varphi_{\nu,r} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^{|r|}}{\partial (i\lambda_1)^{r_1} \ldots \partial (i\lambda_p)^{r_p}} [i\lambda^{\mathrm{T}} a(z,t) + \chi(b(z,t)^{\mathrm{T}}\lambda; t)] e^{i\lambda^{\mathrm{T}} z} \right\}_{\lambda=0} \times$$
$$\times p_\nu(z) w_1(z) dz. \tag{37}$$

Уравнения (35), очевидно, линейны относительно моментов α_r выше второго порядка, $|r| = 3, \ldots, N$, и нелинейны относительно моментов первого и второго порядков, поскольку плотность $w_1(x)$ и коэффициенты полиномов $p_\nu(z)$ и $q_\nu(z)$ зависят от моментов первого и второго порядков, вследствие чего и коэффициенты $\varphi_{0,r}$, $\varphi_{\nu,r}$ уравнений (35) зависят от моментов первого и второго порядков.

При составлении уравнений (35) в конкретных задачах полезно иметь в виду, что число N_q^r моментов r-го порядка q-мерного случайного вектора определяется формулой

$$N_q^r = C_{q+r-1}^r = \frac{(q+r-1)!}{r!\,(q-1)!},$$

а полное число моментов порядков, не превосходящих N, q-мерного случайного вектора равно

$$P_q^N = \sum_{r=1}^{N} N_q^r = C_{N+q}^N - 1 = \frac{(N+q)!}{N!\,q!} - 1.$$

Разложение (33) может быть, в частности, разложением $f_1(z; t)$ по полиномам Эрмита. Можно также пользоваться для аппроксимации $f_1(z; t)$ отрезком ряда Эджуорта (п. 2.3.4). В этом случае число слагаемых в сумме (33) при учете моментов до N-го порядка возрастает до $3N-6$, вследствие чего можно рассчитывать на большую точность аппроксимации.

6.4.2. Одномерное распределение. Центральные моменты. Так как начальные и центральные моменты случайной величины связаны взаимно однозначной зависимостью (*ТВ*, п. 3.5.1), то можно пользоваться уравнениями для центральных моментов, а не для начальных.

► Чтобы вывести эти уравнения, вспомним, что центральный момент $\mu_{r_1, \ldots, r_p} = M(Z_1^0(t))^{r_1} \ldots (Z_p^0(t))^{r_p}$ вектора $Z(t)$ выражается через его характеристическую функцию $g_1(\lambda; t)$ формулой (*ТВ*, п. 4.5.3)

$$\mu_r = \mu_{r_1, \ldots, r_p} = \left[\frac{\partial^{|r|}}{\partial (i\lambda_1)^{r_1} \ldots \partial (i\lambda_p)^{r_p}} e^{-i\lambda^{\mathrm{T}} m} g_1(\lambda; t) \right]_{\lambda=0},$$

где $m = m(t)$ — математическое ожидание вектора $Z(t)$. Из этой формулы следует, что

$$\dot{\mu}_r = \left[\frac{\partial^{|r|}}{\partial (i\lambda_1)^{r_1} \ldots \partial (i\lambda_p)^{r_p}} e^{-i\lambda^{\mathrm{T}} m} \frac{\partial g_1(\lambda; t)}{\partial t} \right]_{\lambda=0} - \\ - i \left[\frac{\partial^{|r|}}{\partial (i\lambda_1)^{r_1} \ldots \partial (i\lambda_p)^{r_p}} \lambda^{\mathrm{T}} e^{-i\lambda^{\mathrm{T}} m} g_1(\lambda; t) \right]_{\lambda=0} \dot{m}. \quad (38)$$

Вычислим второе слагаемое в правой части. Положив для краткости $\tilde{g}_1(\lambda; t) = e^{-i\lambda^{\mathrm{T}} m} g_1(\lambda; t)$, получим

$$i \left[\frac{\partial^{|r|}}{\partial (i\lambda_1)^{r_1} \ldots \partial (i\lambda_p)^{r_p}} \lambda^{\mathrm{T}} e^{-i\lambda^{\mathrm{T}} m} g_1(\lambda; t) \dot{m} \right]_{\lambda=0} = \\ = \sum_{h=1}^{p} \left[\frac{\partial^{|r|}}{\partial (i\lambda_1)^{r_1} \ldots \partial (i\lambda_p)^{r_p}} i\lambda_h \tilde{g}_1(\lambda; t) \right]_{\lambda=0} \dot{m}_h.$$

Дифференцируя произведение $i\lambda_h \tilde{g}_1(\lambda; t)$ r_h раз по $i\lambda_h$ по формуле для производной произведения,

$$\frac{d^r}{dx^r} u(x) v(x) = \sum_{l=0}^{r} C_r^l u^{(r-l)}(x) v^{(l)}(x), \quad (39)$$

получим

$$\frac{\partial^{r_h}}{\partial (i\lambda_h)^{r_h}} i\lambda_h \tilde{g}_1(\lambda; t) = i\lambda_h \frac{\partial^{r_h} \tilde{g}_1(\lambda; t)}{\partial (i\lambda_h)^{r_h}} + r_h \frac{\partial^{r_h - 1} \tilde{g}(\lambda; t)}{\partial (i\lambda_h)^{r_h - 1}}.$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial^{|r|}}{\partial (i\lambda_1)^{r_1} \dots \partial (i\lambda_p)^{r_p}} i\lambda_h \tilde{g}_1(\lambda;\ t) = i\lambda_h \frac{\partial^{|r|} \tilde{g}_1(\lambda; t)}{\partial (i\lambda_1)^{r_1} \dots \partial (i\lambda_p)^{r_p}} + \\ + r_h \frac{\partial^{|r|-1} \tilde{g}_1(\lambda;\ t)}{\partial (i\lambda_1)^{r_1} \dots \partial (i\lambda_h)^{r_h - 1} \dots \partial (i\lambda_p)^{r_p}}.$$

Положив здесь $\lambda = 0$ и приняв во внимание, что

$$\left[\frac{\partial^{|r|-1} \tilde{g}_1(\lambda; t)}{\partial (i\lambda_1)^{r_1} \dots \partial (i\lambda_h)^{r_h - 1} \dots \partial (i\lambda_p)^{r_p}} \right]_{\lambda = 0} = \mu_{r - e_h},$$

где e_h — вектор, все компоненты которого равны нулю, кроме одной h-й, равной единице, получим

$$\left[\frac{\partial^{|r|}}{\partial (i\lambda_1)^{r_1} \dots \partial (i\lambda_p)^{r_p}} i\lambda_h \tilde{g}_1(\lambda;\ t) \right] = r_h \mu_{r - e_h}.$$

Следовательно,

$$i \left[\frac{\partial^{|r|}}{\partial (i\lambda_1)^{r_1} \dots \partial (i\lambda_p)^{r_p}} \lambda^{\mathrm{T}} e^{-i\lambda^{\mathrm{T}} m} g_1(\lambda;\ t) \right]_{\lambda = 0} \dot{m} = \sum_{h=1}^{r} r_h \mu_{r - e_h} \dot{m}_h. \tag{40}$$

Подставив выражения (31) и (40) в (38), приняв во внимание, что все центральные моменты первого порядка равны нулю, и заменив $f_1(z;\ t)$ в (38) аппроксимирующей функцией $f_1^*(z;\ \theta)$, получим

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} a_h(z,\ t) f_1^*(z;\ \theta)\, dz - \dot{m}_h \qquad (h = 1,\ \dots,\ p),$$

$$\dot{\mu}_r = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^{|r|}}{\partial (i\lambda_1)^{r_1} \dots \partial (i\lambda_p)^{r_p}} [i\lambda^{\mathrm{T}} a(z,\ t) + \chi(b(z,\ t)^{\mathrm{T}} \lambda;\ t)]\, e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(z - m)} \right\}_{\lambda = 0} \times \\ \times f_1^*(z; \theta) dz - \sum_{h=1}^{p} r_h \mu_{r - e_h} \dot{m}_h \ (r_1,\ \dots,\ r_p = 0,\ 1,\ \dots,\ N;\ |r| = 2,\ \dots,\ N).$$

Отсюда получаем следующую систему уравнений для математического ожидания и центральных моментов вектора $Z(t)$:

$$\dot{m}_h = \int_{-\infty}^{\infty} a_h(z;\ t) f_1^*(z;\ \theta)\, dz \qquad (h = 1,\ \dots,\ p), \tag{41}$$

$$\dot{\mu}_r = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^{|r|}}{\partial (i\lambda_1)^{r_1} \dots \partial (i\lambda_p)^{r_p}} [i\lambda^{\mathrm{T}} a(z,\ t) + \chi(b(z,\ t)^{\mathrm{T}} \lambda;\ t)]\, e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(z - m)} \right\}_{\lambda = 0} \times \\ \times f_1^*(z;\ \theta)\, dz - \sum_{h=1}^{p} r_h \mu_{r - e_h} \int_{-\infty}^{\infty} a_h(z,\ t) f_1^*(z; \theta)\, dz \\ (r_1,\ \dots,\ r_p = 0,\ 1,\ \dots,\ N;\ |r| = 2,\ \dots,\ N). \blacktriangleleft \tag{42}$$

Интегрируя уравнения (41) и (42) при соответствующих начальных условиях $m(t_0)=m_0$, $\mu_r(t_0)=\mu_r^0$ $(r_1, \ldots, r_p=0, 1, \ldots, N;$ $|r|=2, \ldots, N)$, найдем все координаты вектора θ как функции времени t.

Ясно, что уравнения (41) совпадают с уравнениями, полученными из (8) заменой плотности $f_1(z; t)$ аппроксимирующей ее функцией $f_1^*(z; \theta)$, а уравнения (42) для моментов второго порядка, $|r|=2$,— с уравнениями, полученными таким же путем из (13).

Уравнения (41) и (42) можно также вывести, дифференцируя случайную функцию $[Z_1(t)-m_1(t)]^{r_1} \ldots [Z_p(t)-m_p(t)]^{r_p}$ по правилу дифференцирования сложной функции случайного процесса $Z(t)$ с учетом характера процесса $W(t)$, взяв математические ожидания обеих частей полученного равенства и вычислив математическое ожидание в правой части для аппроксимирующей неизвестную плотность $f_1(z; t)$ функции $f_1^*(z; \theta)$. Этот способ во многих задачах практики оказывается простейшим способом вывода уравнений (41) и (42).

В случае непрерывно-дискретной системы, вектор состояния (расширенный) которой определяется уравнениями (7а) п. 6.4.1, мы получаем из (5.38а) и (5.38б) п. 5.3.1 вместо (41) и (42) следующие уравнения:

$$\dot{m}_h = \int_{-\infty}^{\infty} a_h(z, t) f_1^*(\bar{z}; \theta)\, d\bar{z} \quad (h=1, \ldots, \pi),$$

$$m_h = \sum_{k=0}^{\infty} m_h^{(k)} \mathbf{1}_{A_k}(t) \qquad (h=\pi+1, \ldots, p+\pi),$$

$$m_h^{(k+1)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \omega_k(z, v)\, \eta_k(v)\, f_1^*(\bar{z}; \theta)\, dv\, d\bar{z}$$

$$(h=\pi+1, \ldots, p;\ k=0, 1, 2, \ldots),$$

$$m_h^{(k+1)} = m_{h-p}(t^{(k+1)}) \quad (h=p+1, \ldots, p+\pi;\ k=0, 1, 2, \ldots), \tag{41а}$$

$$\dot{\mu}_r = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^{r_1+\ldots+r_\pi}}{\partial (i\lambda_1)^{r_1} \ldots \partial (i\lambda_\pi)^{r_\pi}} \left[i\lambda'^{\mathrm{T}} a(z, t) + \chi(b(z, t)^{\mathrm{T}} \lambda'; t) \right] e^{i\lambda'^{\mathrm{T}} z'} \right\}_{\lambda=0} \times$$
$$\times (z_{\pi+1}-m_{\pi+1})^{r_{\pi+1}} \ldots (z_{p+\pi}-m_{p+\pi})^{r_{p+\pi}} f_1^*(\bar{z}; \theta)\, d\bar{z} -$$
$$- \sum_{h=1}^{\pi} r_h \mu_{r-e_h} \int_{-\infty}^{\infty} a_h(z, t) f_1^*(\bar{z}; \theta)\, d\bar{z},$$

$$\mu_r(t^{(k+1)}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (z_1-m_1)^{r_1+r_{p+1}} \ldots (z_\pi-m_\pi)^{r_\pi+r_{p+\pi}} \times$$
$$\times [\omega_{k,1}(\bar{z}', v)-m_{\pi+1}]^{r_{\pi+1}} \ldots [\omega_{k,p-\pi}(\bar{z}', v)-m_p]^{r_p} \times$$
$$\times \eta_k(v) f_1^*(\bar{z}; \theta(t^{(k+1)}-0))\, dv\, d\bar{z}$$

$$(r_1, \ldots, r_p=0, 1, \ldots, N;\ |r|=2, \ldots, N;\ k=0, 1, 2, \ldots), \tag{42а}$$

где

$$\overline{z}' = [z_{p+1} \ldots z_{p+\pi}\, z_{\pi+1} \ldots z_p]^{\mathrm{T}} \quad [104,\ 107].$$

Уравнения (41a) и (42a) с соответствующими начальными условиями приближенно определяют моменты m, μ_r ($|r| = 2, \ldots, N$) как функции времени t в случае непрерывно-дискретной системы.

В частном случае при $N = 2$ и нормальной $f_1^*(z; \theta)$ уравнения (41a) и (42a) представляют собой уравнения метода нормальной аппроксимации для непрерывно-дискретной системы.

Взяв в качестве функции $f_1^*(z; \theta)$, аппроксимирующей плотность $f_1(z; t)$, отрезок ее ортогонального разложения (33), приведем уравнения (41) и (42) к виду

$$\dot{m}_h = \varphi_{0h} + \sum_{k=3}^{N} \sum_{|\nu|=k} \varphi_{\nu h} q_\nu(\alpha) \qquad (h = 1, \ldots, p), \tag{43}$$

$$\dot{\mu}_r = \varphi_{0,r} - \sum_{h=1}^{p} r_h \varphi_{0h} \mu_{r-e_h} + \sum_{k=3}^{N} \sum_{|\nu|=k} \left[\varphi_{\nu,r} - \sum_{h=1}^{p} r_h \varphi_{\nu h} \mu_{r-e_h} \right] q_\nu(\alpha)$$
$$(r_1, \ldots, r_p = 0, 1, \ldots, N;\ |r| = 2, \ldots, N), \tag{44}$$

где

$$\varphi_{0h} = \int_{-\infty}^{\infty} a_h(z, t)\, w_1(z)\, dz, \tag{45}$$

$$\varphi_{\nu h} = \int_{-\infty}^{\infty} a_h(z, t)\, p_\nu(z)\, w_1(z)\, dz, \tag{46}$$

$$\varphi_{0,r} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^{|r|}}{\partial(i\lambda_1)^{r_1} \ldots \partial(i\lambda_p)^{r_p}} [i\lambda^{\mathrm{T}} a(z, t) + \right.$$
$$\left. + \chi(b(z, t)^{\mathrm{T}} \lambda; t)]\, e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(z-m)} \right\}_{\lambda=0} w_1(z)\, dz, \tag{47}$$

$$\varphi_{\nu,r} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^{|r|}}{\partial(i\lambda_1)^{r_1} \ldots \partial(i\lambda_p)^{r_p}} [i\lambda^{\mathrm{T}} a(z, t) + \right.$$
$$\left. + \chi(b(z, t)^{\mathrm{T}} \lambda; t)]\, e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(z-m)} \right\}_{\lambda=0} p_\nu(z)\, w_1(z)\, dz, \tag{48}$$

а начальные моменты в $q_\nu(\alpha)$ должны быть выражены через центральные.

Очевидно, что уравнения (43) и (44) всегда нелинейны из-за наличия слагаемых вида $\mu_{r-e_h} q_\nu(\alpha)$.

Заметим, что при применении ортогональных разложений по полиномам Эрмита $q_\nu(\alpha) = G_\nu(\mu)$ в силу формулы (2.43) и, следовательно, $q_\nu(\alpha)$ автоматически получаются как линейные комбинации центральных моментов. При аппроксимации $f_1(z; t)$ отрезком ряда Эджуорта (2.46) следует в коэффициентах ряда Эджуорта заменить семиинварианты их выражениями через центральные моменты.

6.4.3. Вычисление подынтегральных функций в уравнениях. ▶ Для вычисления подынтегральных функций в уравнениях (32), (42), (32a), (42a) и формулах (36), (37), (47) и (48) заметим, что вследствие известных выражений семиинвариантов через характеристическую функцию (*ТВ*, п. 4.4.4), формула (5.37) дает

$$\varkappa_{s_1, \ldots, s_q}(t) = \left[\frac{\partial^{|s|}\chi(\mu;\, t)}{\partial (i\mu_1)^{s_1} \ldots \partial (i\mu_q)^{s_q}} \right]_{\mu=0} = \varkappa^{w}_{s_1, \ldots, s_q}(t),$$

где $\varkappa^{w}_{s_1, \ldots, s_q}(t)$ $(s_1, \ldots, s_q = 0, 1, \ldots, N;\ |s| = 2, \ldots, N)$ — семиинварианты процесса $W(t)$ $(\varkappa^{w}_{s_1, \ldots, s_q} = 0$ при $|s| = 1$, так как эти семиинварианты представляют собой математические ожидания компонент процесса $W(t)$, которые все равны нулю). По формуле Тейлора

$$\chi(\mu;\, t) = \sum_{k=2}^{N} \sum_{|s|=k} \frac{(i\mu_1)^{s_1} \ldots (i\mu_q)^{s_q}}{s_1! \ldots s_q!} \chi_{s_1, \ldots, s_q}(t) + \rho_N,$$

где ρ_N — остаточный член. Подставив сюда выражение $\mu = b(z, t)^{\mathrm{T}}\lambda$ и собрав члены одинаковых степеней относительно $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, получим

$$\chi(b(z, t)^{\mathrm{T}}\lambda;\, t) = \sum_{k=2}^{N} \sum_{|h|=k} \frac{(i\lambda_1)^{h_1} \ldots (i\lambda_p)^{h_p}}{h_1! \ldots h_p!} \omega_{h_1, \ldots, h_p}(z, t) + \rho_N,$$

где

$$\omega_{h_1, \ldots, h_p}(z, t) =$$

$$= h_1! \ldots h_p! \sum_{\rho_{11} + \ldots + \rho_{q1} = h_1} \ldots \sum_{\rho_{1p} + \ldots + \rho_{qp} = h_p} \frac{\varkappa_{\rho_{11} + \ldots + \rho_{1p}, \ldots, \rho_{q1} + \ldots + \rho_{qp}}(t)}{\rho_{11}! \ldots \rho_{1p}! \ldots \rho_{q1}! \ldots \rho_{qp}!} \times$$

$$\times b_{11}^{\rho_{11}}(z, t) \ldots b_{pq}^{\rho_{qp}}(z, t)$$

$$(h_1, \ldots, h_p = 0, 1, \ldots, N;\ |h| = 2, \ldots, N).$$

В частности, если $h_r = h_s = 1$, $h_u = 0$ при $u \neq r, s$, $r < s$ или $h_r = 2$, $h_u = 0$ при $u \neq r$, то

$$\omega_{0, \ldots, \underset{r}{1}, 0, \ldots, 0, \underset{s}{1}, 0, \ldots, 0}(z, t) = \sum_{m,\, n=1}^{p} b_{mr}(z, t)\, b_{ns}(z, t)\, \nu_{mn}(t)$$

$$\omega_{0, \ldots, 0, \underset{r}{2}, 0, \ldots, 0}(z, t) = \sum_{m,\, n=1}^{p} b_{mr}(z, t)\, b_{nr}(z, t)\, \nu_{mn}(t)$$

представляют собой элементы $\sigma_{rs}(z, t)$ $(r, s = 1, \ldots, q)$ матрицы $\sigma(z, t) = b(z, t)\, \nu(t)\, b(z, t)^{\mathrm{T}}$, так как семиинварианты второго порядка случайного вектора $\dot{W}(t)$ при данном t являются элементами его ковариационной матрицы

$$k(t)=k(t_0)+\int_{t_0}^{t}\nu(\tau)\,d\tau.$$

Пользуясь формулой (39) для производной произведения двух функций и полученной формулой для $\chi(b(z, t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)$, находим

$$\left\{\frac{\partial^{|r|}}{\partial(i\lambda_1)^{r_1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{r_p}}\left[i\lambda^{\mathrm{T}}a(z, t)+\chi(b(z, t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)\right]e^{i\lambda^{\mathrm{T}}z}\right\}_{\lambda=0}=$$
$$=\sum_{s=1}^{p}r_s a_s(z, t)\,z_1^{r_1}\ldots z_s^{r_s-1}\ldots z_p^{r_p}+$$
$$+\sum_{k=2}^{|r|}\sum_{|h|=k}\sum_{h_1=0}^{r_1}\ldots\sum_{h_p=0}^{r_p}C_{r_1}^{h_1}\ldots C_{r_p}^{h_p}\omega_{h_1,\ldots,h_p}(z, t)\,z_1^{r_1-h_1}\ldots z_p^{r_p-h_p}, \tag{49}$$

$$\left\{\frac{\partial^{|r|}}{\partial(i\lambda_1)^{r_1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{r_p}}\left[i\lambda^{\mathrm{T}}a(z, t)+\chi(b(z, t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)\right]e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(z-m)}\right\}_{\lambda=0}=$$
$$=\sum_{s=1}^{p}r_s a_s(z, t)(z_1-m_1)^{r_1}\ldots(z_s-m_s)^{r_s-1}\ldots(z_p-m_p)^{r_p}+$$
$$+\sum_{k=2}^{|r|}\sum_{|h|=k}\sum_{h_1=0}^{r_1}\ldots\sum_{h_p=0}^{r_p}C_{r_1}^{h_1}\ldots C_{r_p}^{h_p}\times$$
$$\times\omega_{h_1,\ldots,h_p}(z, t)(z_1-m_1)^{r_1-h_1}\ldots(z_p-m_p)^{r_p-h_p}. \blacktriangleleft \tag{50}$$

В случае нормального белого шума $V(t)$ (винеровского процесса $W(t)$) $\varkappa^{w}_{s_1,\ldots,s_q}(t)=0$ при $|s|>2$ и, следовательно, $\omega_{h_1,\ldots,h_p}(z, t)=0$ при $|h|>2$. Принимая во внимание, что $\omega_{h_1,\ldots,h_p}(z, t)$ представляют собой элементы матрицы $\sigma(z, t)=b(z, t)\,\nu(t)\,b(z, t)^{\mathrm{T}}$ при $|h|=2$, представим формулы (49) и (50) в виде

$$\left\{\frac{\partial^{|r|}}{\partial(i\lambda_1)^{r_1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{r_p}}\left[i\lambda^{\mathrm{T}}a(z, t)+\chi(b(z, t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)\right]e^{i\lambda^{\mathrm{T}}z}\right\}_{\lambda=0}=$$
$$=\sum_{s=1}^{p}r_s a_s(z, t)\,z_1^{r_1}\ldots z_s^{r_s-1}\ldots z_p^{r_p}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{p}r_s(r_s-1)\,\sigma_{ss}(z, t)\,z_1^{r_1}\ldots z_s^{r_s-2}\ldots z_p^{r_p}+$$
$$+\sum_{q=2}^{p}\sum_{s=1}^{q-1}r_s r_q\sigma_{sq}(z, t)\,z_1^{r_1}\ldots z_s^{r_s-1}\ldots z_q^{r_q-1}\ldots z_p^{r_p}, \tag{51}$$

$$\left\{\frac{\partial^{|r|}}{\partial (i\lambda_1)^{r_1} \dots \partial (i\lambda_p)^{r_p}} \left[i\lambda^{\mathrm{T}} a(z,t) + \chi(b(z,t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)\right] e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(z-m)}\right\}_{\lambda=0} =$$

$$= \sum_{s=1}^{p} r_s a_s(z,t)(z_1-m_1)^{r_1}\dots(z_s-m_s)^{r_s-1}\dots(z_p-m_p)^{r_p} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{p} r_s(r_s-1)\sigma_{ss}(z,t)(z_1-m_1)^{r_1}\dots(z_s-m_s)^{r_s-2}\dots(z_p-m_p)^{r_p}+$$

$$+\sum_{q=2}^{p}\sum_{s=1}^{q-1} r_s r_q \sigma_{sq}(z,t)(z_1-m_1)^{r_1}\dots(z_s-m_s)^{r_s-1}\dots$$

$$\dots(z_q-m_q)^{r_q-1}\dots(z_p-m_p)^{r_p}. \quad (52)$$

Пример 15. В условиях примеров 9 и 12,

$$\dot{Z} = -Z^3 + ZV,$$

найдем аппроксимацию одномерного распределения процесса $Z(t)$ отрезком разложения плотности $f_1(z;\,t)$ по полиномам Эрмита

$$f_1(z;\,t) \approx f_1^*(z;\,\theta) = (2\pi D)^{-1/2} e^{-(z-m)^2/2D}\{1 + c_3 H_3(z-m)/3! + c_4 H_4(z-m)/4!\}.$$

Согласно (2.43) квазимоменты $c_3 = G_3(\mu)$ и $c_4 = G_4(\mu)$ представляют собой линейные функции центральных моментов μ_3 и μ_4 соответственно, зависящие также от математического ожидания m и дисперсии D процесса $Z(t)$. Таким образом, вектор θ представляет собой четырехмерный вектор с компонентами m, D, μ_3 и μ_4.

На основании формул (4) и (5) приложения 1 полиномы $H_\nu(x)$ и $G_\nu(x)$ определяются в данном случае формулами

$$H_\nu(x) = (-1)^\nu e^{x^2/2D} \frac{d^\nu}{dx^\nu} e^{-x^2/2D}, \quad G_\nu(x) = (-1)^\nu e^{x^2/2D}\left[\frac{d^\nu}{dy^\nu} e^{-Dy^2/2}\right]_{y=x/D}.$$

Эти формулы дают

$$\begin{gathered} H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = x/D, \quad H_2(x) = (x^2 - D)/D^2, \\ H_3(x) = (x^3 - 3Dx)/D^3, \\ H_4(x) = (x^4 - 6Dx^2 + 3D^2)/D^4, \\ H_5(x) = (x^5 - 10Dx^3 + 15D^2x)/D^5, \\ H_6(x) = (x^6 - 15Dx^4 + 45D^2x^2 - 15D^3)/D^6, \\ G_0(x) = 1, \quad G_1(x) = x, \quad G_2(x) = x^2 - D, \\ G_3(x) = x^3 - 3Dx, \quad G_4(x) = x^4 - 6Dx^2 + 3D^2, \\ G_5(x) = x^5 - 10Dx^3 + 15D^2x, \\ G_6(x) = x^6 - 15Dx^4 + 45D^2x^2 - 15D^3. \end{gathered}$$

Уравнения (35) имеют в данном случае вид

$$\begin{gathered} \dot{\alpha}_1 = -\alpha_3, \quad \dot{\alpha}_2 = \nu\alpha_2 - 2\alpha_4, \\ \dot{\alpha}_3 = 3\nu\alpha_3 - 30(\alpha_2 - 2\alpha_1^2)\alpha_3 - 15\alpha_1\alpha_4 + 90\alpha_1\alpha_2^2 - 180\alpha_1^3\alpha_2 + 72\alpha_1^5, \\ \dot{\alpha}_4 = 160\alpha_1^3\alpha_3 + 6\nu\alpha_4 - 60\alpha_2\alpha_4 + 120\alpha_2^3 - 480\alpha_1^4\alpha_2 + 256\alpha_1^6. \end{gathered}$$

Эти уравнения проще всего получаются из первых четырех уравнений бесконечной системы примера 6 подстановкой в них выражения α_5 и α_6 из уравнений

$$q_5(\alpha) = G_5(\mu) = \mu_5 - 10D\mu_3 = 0,$$
$$q_6(\alpha) = G_6(\mu) = \mu_6 - 15D\mu_4 + 30D^3 = 0,$$

выведенных в п. 2.3.1 для моментов отрезка ортогонального разложения плотности.

Уравнения (43) и (44) для математического ожидания и центральных моментов третьего и четвертого порядков имеют в данном случае вид

$$\begin{aligned}
&\dot m = -(m^2+3D)\,m-\mu_3,\\
&\dot D = \nu\,(m^2+D)-6m^2D-6m\mu_3-2\mu_4,\\
&\dot\mu_3 = 3mD\,(2\nu+3D)+3\,(\nu-3m^2-9D)\,\mu_3-9m\mu_4,\\
&\dot\mu_4 = 6D\,(\nu m^2+20D^2)+12\,(\nu-9D)\,m\mu_3+4\mu_3^2+6\,(\nu-2m^2-10D)\,\mu_4.
\end{aligned}$$

Пример 16. В задаче примеров 10 и 13,

$$\dot Z = -\varphi(Z)+V,$$

уравнения (43) и (44) при $N=4$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&\dot m = \psi_{10}(m,\,D)+\psi_{11}(m,\,D)\,\mu_3+\psi_{12}(m,\,D)\,\mu_4,\\
&\dot D = \psi_{20}(m,\,D)+\psi_{21}(m,\,D)\,\mu_3+\psi_{22}(m,\,D)\,\mu_4,\\
&\dot\mu_3 = \psi_{30}(m,\,D)+\psi_{31}(m,\,D)\,\mu_3+\psi_{32}(m,\,D)\,\mu_4,\\
&\dot\mu_4 = \psi_{40}(m,\,D)+\psi_{41}(m,\,D)\,\mu_3+\psi_{42}(m,\,D)\,\mu_4-4\psi_{11}(m,\,D)\,\mu_3^2-4\psi_{12}(m,\,D)\,\mu_3\mu_4,
\end{aligned}$$

где коэффициенты $\psi_{pq}(m,\,D)$ выражаются через интегралы

$$\psi_p=\psi_p(m,\,D)=\frac{1}{\sqrt{2\pi D}}\int_{-\infty}^{\infty}(z-m)^p\,\varphi(z)\,e^{-(z-m)^2/2D}\,dz$$

формулами

$$\begin{aligned}
&\psi_{10}(m,\,D)=-\frac{1}{8D^2}\,(5D^2\psi_0+6D\psi_2-\psi_4),\\
&\psi_{11}(m,\,D)=\frac{1}{6D^3}\,(3D\psi_1-\psi_3),\\
&\psi_{12}(m,\,D)=-\frac{1}{24D^4}\,(3D^2\psi_0-6D\psi_2+\psi_4),\\
&\psi_{20}(m,\,D)=\nu-\frac{1}{4D^2}\,(5D^2\psi_1+6D\psi_3-\psi_5),\\
&\psi_{21}(m,\,D)=\frac{1}{3D^3}\,(3D\psi_2-\psi_4),\\
&\psi_{22}(m,\,D)=-\frac{1}{12D^4}\,(3D^2\psi_1-6D\psi_3+\psi_5),\\
&\psi_{30}(m,\,D)=-\frac{3}{8D^2}\,(5D^2\psi_2+6D\psi_4-\psi_6)-3D\psi_{10}(m,\,D),\\
&\psi_{31}(m,\,D)=\frac{1}{2D^3}\,(3D\psi_3-\psi_5)-3D\psi_{11}(m,\,D),\\
&\psi_{32}(m,\,D)=-\frac{1}{8D^4}\,(3D^2\psi_2-6D\psi_4+\psi_6)-3D\psi_{12}(m,\,D),\\
&\psi_{40}(m,\,D)=6\nu D-\frac{1}{2D^2}\,(5D^2\psi_3+6D\psi_5-\psi_7),\\
&\psi_{41}(m,\,D)=\frac{2}{3D^3}\,(3D\psi_4-\psi_6)-4\psi_{10}(m,\,D),\\
&\psi_{42}(m,\,D)=-\frac{1}{6D^4}\,(3D\psi_3-6D\psi_5+\psi_7).
\end{aligned}$$

Интегралы ψ_p вычисляются по рекуррентным формулам

$$\psi_p=(p-1)D\psi_{p-2}+\psi'_{p-1} \quad (p=1,\ 2,\ \ldots),$$

$$\psi'_p=\sqrt{\frac{D}{2\pi}}\int_{-l}^{l}(z-m)^p e^{-(z-m)^2/2D}\,dz=(p-1)D\psi'_{p-2}-$$

$$-\frac{D^{3/2}}{\sqrt{2\pi}}\left[(l-m)^{p-1}e^{-(l-m)^2/2D}+(-1)^p(l+m)^{p-1}e^{-(l+m)^2/2D}\right] \quad (p=1,\ 2,\ldots),$$

$$\psi_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi D}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(z)\,e^{-(z-m)^2/2D}\,dz=(l+m)\,\Phi\left(\frac{l+m}{\sqrt{D}}\right)-(l-m)\,\Phi\left(\frac{l-m}{\sqrt{D}}\right)+$$

$$+\sqrt{\frac{D}{2\pi}}\left[e^{-(l-m)^2/2D}-e^{-(l+m)^2/2D}\right],$$

$$\psi_1=\psi'_0=\sqrt{\frac{D}{2\pi}}\int_{-l}^{l}e^{-(z-m)^2/2D}\,dz=D\left[\Phi\left(\frac{l+m}{\sqrt{D}}\right)+\Phi\left(\frac{l-m}{\sqrt{D}}\right)\right].$$

П р и м е р 17. Найдем аппроксимацию одномерной плотности двумерного процесса $[Z_1(t)\ Z_2(t)]^{\mathrm{T}}$ примеров 11 и 14,

$$\dot Z_1=-Z_1Z_2, \qquad \dot Z_2=-\alpha Z_2+kV,$$

отрезком разложения по полиномам Эрмита с учетом моментов до четвертого порядка,

$$f_1(z;\ t)\approx f_1^*(z;\ \theta)=$$
$$=\left[(2\pi)^2\left(k_{11}k_{22}-k_{12}^2\right)\right]^{-1/2}\exp\left\{-\left[k_{22}(z_1-m_1)^2-2k_{12}(z_1-m_1)(z_2-m_2)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+k_{11}(z_2-m_2)^2\right]/2\left(k_{11}k_{22}-k_{12}^2\right)\right\}\left\{1+\sum_{k=3}^{4}\ \sum_{\nu_1+\nu_2=k}\frac{c_{\nu_1\nu_2}}{\nu_1!\nu_2!}H_{\nu_1\nu_2}(z-m)\right\},$$

где в соответствии с (2.43) $c_{\nu_1\nu_2}=G_{\nu_1\nu_2}(\mu)$ $(\nu_1,\ \nu_2=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4;\ \nu_1+\nu_2=3,\ 4)$.

Полиномы Эрмита $H_{pq}(x)$ и $G_{pq}(x)$ определяются формулами (4) и (5) приложения 1, которые имеют в данном случае вид

$$H_{p,q}(x)=(-1)^{p+q}e^{\left(c_{11}x_1^2+2c_{12}x_1x_2+c_{22}x_2^2\right)/2}\frac{\partial^{p+q}}{\partial x_1^p\,\partial x_2^q}e^{-\left(c_{11}x_1^2+2c_{12}x_1x_2+c_{22}x_2^2\right)/2},$$

$$G_{p,q}(x)=(-1)^{p+q}e^{\left(c_{11}x_1^2+2c_{12}x_1x_2+c_{22}x_2^2\right)/2}\times$$
$$\times\left[\frac{\partial^{p+q}}{\partial y_1^p\,\partial y_2^q}e^{\left(k_{11}y_1^2+2k_{12}y_1y_2+k_{22}y_2^2\right)/2}\right]_{y=Cx},$$

где

$$K=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{12} & k_{22}\end{bmatrix}, \qquad K^{-1}=C=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{12} & c_{22}\end{bmatrix}.$$

Эти формулы дают

$$H_{0,0}(x)=1, \qquad H_{1,0}(x)=c_{11}x_1+c_{12}x_2,$$

$$H_{0,1}(x)=c_{12}x_1+c_{22}x_2,$$
$$H_{2,0}(x)=(c_{11}x_1+c_{12}x_2)^2-c_{11}.$$

$$H_{1,1}(x)=(c_{11}x_1+c_{12}x_2)(c_{12}x_1+c_{22}x_2)-c_{12},$$
$$H_{0,2}(x)=(c_{12}x_1+c_{22}x_2)^2-c_{22},$$
$$H_{3,0}(x)=(c_{11}x_1+c_{12}x_2)^3-3c_{11}(c_{11}x_1+c_{12}x_2),$$
$$H_{2,1}(x)=(c_{11}x_1+c_{12}x_2)^2(c_{12}x_1+c_{22}x_2)-2c_{12}(c_{11}x_1+c_{12}x_2)-c_{11}(c_{12}x_1+c_{22}x_2),$$
$$H_{1,2}(x)=(c_{11}x_1+c_{12}x_2)(c_{12}x_1+c_{22}x_2)^2-c_{22}(c_{11}x_1+c_{12}x_2)-2c_{12}(c_{12}x_1+c_{22}x_2),$$
$$H_{0,3}(x)=(c_{12}x_1+c_{22}x_2)^3-3c_{22}(c_{12}x_1+c_{22}x_2),$$
$$H_{4,0}(x)=(c_{11}x_1+c_{12}x_2)^4-6c_{11}(c_{11}x_1+c_{12}x_2)+3c_{11}^2.$$
$$H_{3,1}(x)=(c_{11}x_1+c_{12}x_2)^3(c_{12}x_1+c_{22}x_2)-3c_{12}(c_{11}x_1+c_{12}x_2)^2-\\-3(c_{11}x_1+c_{12}x_2)(c_{12}x_1+c_{22}x_2)+3c_{11}c_{12},$$
$$H_{2,2}(x)=(c_{11}x_1+c_{12}x_2)^2(c_{12}x_1+c_{22}x_2)^2-c_{22}(c_{11}x_1+c_{12}x_2)^2-\\-4c_{12}(c_{11}x_1+c_{12}x_2)(c_{12}x_1+c_{22}x_2)-c_{11}(c_{12}x_1+c_{22}x_2)^2+c_{11}c_{22}+2c_{12}^2,$$
$$H_{1,3}(x)=(c_{11}x_1+c_{12}x_2)(c_{12}x_1+c_{22}x_2)^3-3c_{22}(c_{11}x_1+c_{12}x_2)(c_{12}x_1+c_{22}x_2)-\\-3c_{12}(c_{12}x_1+c_{22}x_2)^2+3c_{12}c_{22},$$
$$H_{0,4}(x)=(c_{12}x_1+c_{22}x_2)^4-6c_{22}(c_{12}x_1+c_{22}x_2)^2+3c_{22}^2,$$
$$G_{0,0}(x)=1,\quad G_{1,0}(x)=x_1,\quad G_{0,1}(x)=x_2,$$
$$G_{2,0}(x)=x_1^2-k_{11},\quad G_{1,1}(x)=x_1x_2-k_{12},$$
$$G_{0,2}(x)=x_2^2-k_{22},\quad G_{3,0}(x)=x_1^3-3k_{11}x_1,$$
$$G_{2,1}(x)=x_1x_2-2k_{12}x_1-k_{11}x_2,$$
$$G_{1,2}(x)=x_1x_2^2-k_{22}x_1-2k_{12}x_2,\quad G_{0,3}(x)=x_2^3-3k_{22}x_2,$$
$$G_{4,0}(x)=x_1^4-6k_{11}x_1^2+3k_{11}^2,$$
$$G_{3,1}(x)=x_1^3x_2-3k_{12}x_1^2-3k_{11}x_1x_2+3k_{11}k_{12},$$
$$G_{2,2}(x)=x_1^2x_2^2-k_{22}x_1^2-4k_{12}x_1x_2-k_{11}x_2^2+k_{11}k_{22}+2k_{12}^2,$$
$$G_{1,3}(x)=x_1x_2^3-3k_{22}x_1x_2-3k_{12}x_2^2+3k_{12}k_{22},$$
$$G_{0,4}(x)=x_2^4-6k_{22}x_2^2+3k_{22}^2,$$
$$G_{5,0}(x)=x_1^5-10k_{11}x_1^3+15k_{11}^2x_1,$$
$$G_{4,1}(x)=x_1^4x_2-4k_{12}x_1^3-6k_{11}x_1^2x_2+12k_{11}k_{12}x_1+3k_{11}^2x_2,$$
$$G_{3,2}(x)=x_1^3x_2^2-k_{22}x_1^2-6k_{12}x_1^2x_2-3k_{11}x_1x_2^2+3(k_{11}k_{22}+2k_{12}^2)x_1+6k_{11}k_{12}x_2,$$
$$G_{2,3}(x)=x_1^2x_2^3-3k_{22}x_1^2x_2-6k_{12}x_1x_2^2-k_{11}x_2^3+6k_{12}k_{22}x_1+3(k_{11}k_{22}+2k_{12}^2)x_2,$$
$$G_{1,4}(x)=x_1x_2^4-6k_{22}x_1x_2^2-4k_{12}x_2^3+3k_{22}^2x_1+12k_{12}k_{22}x_2,$$
$$G_{0,5}(x)=x_2^5-10k_{22}x_2^3+15k_{22}^2x_2.$$

Уравнения (35) имеют в данном случае вид

$$\dot\alpha_{10}=-\alpha_{11},\quad \dot\alpha_{01}=-\alpha\alpha_{01},\quad \dot\alpha_{20}=-2\alpha_{21},$$
$$\dot\alpha_{11}=-\alpha_{12}-\alpha\alpha_{11},\quad \dot\alpha_{02}=-2\alpha\alpha_{02}+k^2\nu,$$
$$\dot\alpha_{30}=-3\alpha_{31},\quad \dot\alpha_{21}=-2\alpha_{22}-\alpha\alpha_{21},$$
$$\dot\alpha_{12}=-\alpha_{13}-2\alpha\alpha_{12}+k^2\nu\alpha_{10},\quad \dot\alpha_{03}=-3\alpha\alpha_{03}+3k^2\nu\alpha_{01},$$
$$\dot\alpha_{40}=-4[\alpha_{01}\alpha_{40}+4\alpha_{10}\alpha_{31}+4(\alpha_{11}-2\alpha_{10}\alpha_{01})(\alpha_{30}-3\alpha_{10}\alpha_{20})+\\+6(\alpha_{20}-2\alpha_{10}^2)(\alpha_{21}-\alpha_{01}\alpha_{20}-2\alpha_{10}\alpha_{11})-24\alpha_{10}^4\alpha_{01}],$$
$$\dot\alpha_{31}=-3[2\alpha_{01}\alpha_{31}+3\alpha_{10}\alpha_{22}+(\alpha_{02}-2\alpha_{01}^2)(\alpha_{30}-3\alpha_{10}\alpha_{20})+\\+6(\alpha_{11}-2\alpha_{10}\alpha_{01})(\alpha_{21}-\alpha_{20}\alpha_{01}-2\alpha_{10}\alpha_{11})+\\+3(\alpha_{20}-2\alpha_{10}^2)(\alpha_{12}-\alpha_{10}\alpha_{02}-2\alpha_{01}\alpha_{11})-24\alpha_{10}^3\alpha_{01}^2]-\alpha\alpha_{31},$$

$$\dot{\alpha}_{22} = -2\left[3\alpha_{01}\alpha_{22} + 2\alpha_{10}\alpha_{13} + 3\left(\alpha_{02} - 2\alpha_{01}^2\right)\left(\alpha_{21} - \alpha_{01}\alpha_{20} - 2\alpha_{10}\alpha_{11}\right) + \right.$$
$$+ 6\left(\alpha_{11} - 2\alpha_{10}\alpha_{01}\right)\left(\alpha_{12} - \alpha_{10}\alpha_{02} - 2\alpha_{01}\alpha_{11}\right) + \left(\alpha_{20} - 2\alpha_{10}^2\right)\left(\alpha_{03} - 3\alpha_{01}\alpha_{02}\right) -$$
$$\left. - 24\alpha_{10}^2\alpha_{01}^3\right] - 2\alpha\alpha_{22},$$
$$\dot{\alpha}_{13} = -\left[4\alpha_{01}\alpha_{13} + \alpha_{10}\alpha_{04} + 6\left(\alpha_{02} - 2\alpha_{01}^2\right)\left(\alpha_{12} - \alpha_{10}\alpha_{02} - 2\alpha_{01}\alpha_{11}\right) + \right.$$
$$\left. + 4\left(\alpha_{11} - 2\alpha_{10}\alpha_{01}\right)\left(\alpha_{03} - 3\alpha_{01}\alpha_{02}\right) - 24\alpha_{10}\alpha_{01}^4\right] - 3\alpha\alpha_{13} + 3k^2\nu\alpha_{11},$$
$$\dot{\alpha}_{04} = -4\alpha\alpha_{04} + 6k^2\nu\alpha_{02}.$$

Эти уравнения проще всего выводятся замыканием первых 14 уравнений бесконечной системы примера 7 (соответствующих $r_1 + r_2 = 1, 2, 3, 4$) соотношениями

$$G_{4,1}(\mu) = G_{3,2}(\mu) = G_{2,3}(\mu) = G_{1,4}(\mu) = 0,$$

выражающими моменты пятого порядка аппроксимирующей плотность $f_1(z;\ t)$ функции $f_1^*(z,\ \theta)$ через моменты низших порядков (п. 2.3.1). В данном случае эти соотношения имеют вид

$$\begin{gathered}
\mu_{41} - 4\mu_{30}k_{12} - 6k_{11}\mu_{21} = 0, \\
\mu_{32} - k_{22}\mu_{30} - 6k_{12}\mu_{21} - 3k_{11}\mu_{12} = 0, \\
\mu_{23} - 3k_{22}\mu_{21} - 6k_{12}\mu_{12} - k_{11}\mu_{03} = 0, \\
\mu_{14} - 6k_{22}\mu_{12} - 4k_{12}\mu_{03} = 0.
\end{gathered} \tag{I}$$

Выразив здесь центральные моменты через начальные, решив эти уравнения относительно α_{41}, α_{32}, α_{23} и α_{14} и подставив полученные выражения в уравнения примера 7, соответствующие $r_1 = 4$, $r_2 = 1$; $r_1 = 3$, $r_2 = 2$; $r_1 = 2$, $r_2 = 3$; $r_1 = 1$, $r_2 = 4$, получим приведенные выше уравнения.

Уравнения (43) и (44) для математических ожиданий и центральных моментов имеют в данном случае вид

$$\dot{m}_1 = -m_1m_2 - k_{12}, \qquad \dot{m}_2 = -\alpha m_2,$$
$$\dot{k}_{11} = -2\left(m_2k_{11} + m_1k_{12} + \mu_{21}\right), \qquad \dot{k}_{12} = -\left(m_2 + \alpha\right)k_{12} - m_1k_{22} - \mu_{12},$$
$$\dot{k}_{22} = -2\alpha k_{22} + k^2\nu,$$
$$\dot{\mu}_{30} = 3\left(k_{11}k_{12} - m_2\mu_{30} - m_1\mu_{21} - \mu_{31}\right),$$
$$\dot{\mu}_{21} = 2\left[k_{12}^2 - \left(m_2 + \alpha/2\right)\mu_{21} - m_1\mu_2 - \mu_{22}\right],$$
$$\dot{\mu}_{12} = k_{12}k_{22} - \left(m_2 + 2\alpha\right)\mu_{12} - m_1\mu_{03} - \mu_{13},$$
$$\dot{\mu}_{03} = -3\alpha\mu_{03},$$
$$\dot{\mu}_{40} = -4\left(3k_{12}\mu_{30} + 6k_{11}\mu_{21} + m_2\mu_{40} + m_1\mu_{31}\right),$$
$$\dot{\mu}_{31} = -3\left(k_{22}\mu_{30} + 5k_{12}\mu_{21} + 3k_{11}\mu_{12}\right) - \left(3m_2 + \alpha\right)\mu_{31} - 3m_1\mu_{22},$$
$$\dot{\mu}_{22} = -2\left[3k_{22}\mu_{21} + 5k_{12}\mu_{12} + k_{11}\mu_{03} + \left(m_2 + \alpha\right)\mu_{22} + m_1\mu_{13}\right] + k^2\nu k_{11},$$
$$\dot{\mu}_{04} = -4\alpha\mu_{04} + 6k^2\nu k_{22},$$
$$\dot{\mu}_{13} = -3\left(2k_{22}\mu_{12} + k_{12}\mu_{03}\right) - \left(m_2 + 3\alpha\right)\mu_{13} - m_1\mu_{04} + 3k^2\nu k_{12}.$$

Эти уравнения проще всего получаются дифференцированием случайных функций $[Z_1(t) - m_1(t)]^r\,[Z_2(t) - m_2(t)]^s$ ($r,\ s = 1, 2, 3, 4$; $r + s = 1, 2, 3, 4$) по формуле Ито (3.61) с последующим переходом к математическим ожиданиям и заменой моментов μ_{41}, μ_{32}, μ_{23}, μ_{14} их выражениями из уравнений (I).

6.4.4. Многомерные распределения. Начальные моменты. Совершенно так же выводятся приближенные уравнения для моментов многомерных распределений в случае, когда параметрами этих распределений служат моменты.

► Имея в виду, что момент n-мерного распределения случайного процесса $Z(t)$,

$$\alpha_{r_{11},\ldots,r_{1p},\ldots,r_{n1},\ldots,r_{np}}(t_1, \ldots, t_n) = MZ_1^{r_{11}}(t_1)\ldots Z_p^{r_{1p}}(t_1)\ldots Z_1^{r_{n1}}(t_n)\ldots Z_p^{r_{np}}(t_n),$$

определяется формулой

$$\alpha_{r_1,\ldots,r_n}(t_1, \ldots, t_n) = \alpha_{r_{11}+\ldots+r_{1p}+\ldots+r_{n1}+\ldots+r_{np}}(t_1, \ldots, t_n) = \left[\frac{\partial^{|r_1|+\ldots+|r_n|} g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n)}{\partial(i\lambda_{11})^{r_{11}}\ldots\partial(i\lambda_{1p})^{r_{1p}}\ldots\partial(i\lambda_{n1})^{r_{n1}}\ldots\partial(i\lambda_{np})^{r_{np}}}\right]_{\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0},$$

где $\lambda_{k1}, \ldots, \lambda_{kp}$ — компоненты вектора $\lambda_k = [\lambda_{k1}\ldots\lambda_{kp}]^{\mathrm{T}}$, $r_k = [r_{k1}\ldots r_{kp}]^{\mathrm{T}}$ — векторные индексы, $|r_k| = r_{k1}+\ldots+r_{kp}$ $(k = 1, \ldots, n)$, находим

$$\partial\alpha_{r_1\ldots r_n}(t_1, \ldots, t_n)/\partial t_n = \left[\frac{\partial^{|r_1|+\ldots+|r_n|}}{\partial(i\lambda_{11})^{r_{11}}\ldots\partial(i\lambda_{1p})^{r_{1p}}\ldots\partial(i\lambda_{n1})^{r_{n1}}\ldots\partial(i\lambda_{np})^{r_{np}}}\frac{\partial g_n}{\partial t_n}\right]_{\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0}.$$

Подставив сюда выражение $\partial g_n/\partial t_n$ из (5.41),

$$\partial g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n)/\partial t_n = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}[i\lambda_n^{\mathrm{T}}a(z_n, t_n) + \chi(b(z_n, t_n)^{\mathrm{T}}\lambda_n; t_n)]\exp\{i\lambda_1^{\mathrm{T}}z_1 + \ldots + i\lambda_n^{\mathrm{T}}z_n\}f_n(z_1, \ldots, z_n; t_1, \ldots, t_n)\,dz_1\ldots dz_n, \quad (53)$$

и заменив плотность $f_n(z_1, \ldots, z_n; t_1, \ldots, t_n)$ аппроксимирующей ее функцией $f_n^*(z_1, \ldots, z_n; \theta_n)$, где θ_n — совокупность моментов n-мерного распределения до порядка N включительно, получим следующую систему уравнений для моментов при $t_1 < \ldots < t_n$:

$$\partial\alpha_{r_1,\ldots,r_n}(t_1, \ldots, t_n)/\partial t_n = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\partial^{|r_n|}}{\partial(i\lambda_{n1})^{r_{n1}}\ldots\partial(i\lambda_{np})^{r_{np}}}[i\lambda_n^{\mathrm{T}}a(z_n, t_n) + \chi(b(z_n, t_n)^{\mathrm{T}}\lambda_n; t_n)]\times e^{i\lambda_n^{\mathrm{T}}z_n}\right\}_{\lambda_n=0} z_{11}^{r_{11}}\ldots z_{1p}^{r_{1p}}\ldots z_{n-1,1}^{r_{n-1,1}}\ldots z_{n-1,p}^{r_{n-1,p}}f_n^*(z_1, \ldots, z_n; \theta_n)\,dz_1\ldots dz_n$$

$$(r_{11}, \ldots, r_{np} = 0, 1, \ldots, N;\ |r_1|, \ldots, |r_n| = 1, \ldots, N-n+1;\ |r_1|+\ldots+|r_n| = n, \ldots, N). \quad (54)$$

Начальные условия для этих уравнений имеют вид

$$\alpha_{r_1,\ldots,r_n}(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_{n-1}) = \alpha_{r_1,\ldots,r_{n-1}+r_n}(t_1, \ldots, t_{n-1}),$$

так как

$$MZ_1^{r_{11}}(t_1)\ldots Z_p^{r_{1p}}(t_1)\ldots Z_1^{r_{n-1,1}}(t_{n-1})\ldots Z_p^{r_{n-1,p}}(t_{n-1})Z_1^{r_{n1}}(t_{n-1})\ldots Z_p^{r_{np}}(t_{n-1}) = MZ_1^{r_{11}}(t_1)\ldots Z_p^{r_{1p}}(t_1)\ldots Z_1^{r_{n-1,1}+r_{n1}}(t_{n-1})\ldots Z_p^{r_{n-1,p}+r_{np}}(t_{n-1}).$$ ◄

Заметим, что при составлении уравнений для моментов n-мерного распределения следует ограничиться только теми моментами, которые зависят от всех n переменных $t_1, \ldots, t_n$, т. е. для которых ни одна из сумм $|r_1|, \ldots, |r_n|$ не равна нулю, так как моменты, зависящие только от части переменных $t_1, \ldots, t_n$, например от $t_{k+1}, \ldots, t_n$, представляют собой моменты $(n-k)$-мерного распределения и, следовательно, определены раньше при аппроксимации $(n-k)$-мерного распределения. Естественно, что уравнения (54) при $|r_1| = \ldots = |r_k| = 0$ совпадают с соответствующими уравнениями для моментов $(n-k)$-мерного распределения.

Если при всех n аппроксимирующая функция $f_n^*(z_1, \ldots, z_n; \theta_n)$ зависит от моментов не выше N-го порядка, то при $n = N$ придется составлять уравнения (54) только для моментов, соответствующих $|r_1| = \ldots = |r_N| = 1$, и после определения N-мерного распределения все остальные конечномерные распределения будут определены однозначно.

В частности, при аппроксимации всех конечномерных плотностей ортогональными разложениями вида (33) (например, согласованными ортогональными разложениями п. 2.3.6) с учетом моментов не выше N-го порядка все конечномерные распределения процесса $Z(t)$ будут однозначно определены после нахождения моментов N-мерного распределения.

В случае непрерывно-дискретной системы с вектором состояния (расширенным), определяемым уравнениями (7а) п. 6.4.1, уравнения (54) заменяются следующими уравнениями:

$$
\begin{aligned}
&\partial\alpha_{r_1, \ldots, r_n}(t_1, \ldots, t_n)/\partial t_n = \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^{r_{n1} + \ldots + r_{n\pi}}}{\partial (i\lambda_{n1})^{r_{n1}} \ldots \partial (i\lambda_{n\pi})^{r_{n\pi}}} \left[i\lambda_n'^{\mathrm{T}} a(z_n, t_n) + \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \chi(b(z_n, t_n)^{\mathrm{T}} \lambda_n'; t_n) \right] e^{i\lambda_n'^{\mathrm{T}} z_n'} \right\}_{\lambda_n' = 0} z_{11}^{r_{11}} \ldots z_{1, p+\pi}^{r_{1, p+\pi}} \ldots \times \\
&\qquad \times \ldots z_{n-1, 1}^{r_{n-1, 1}} \ldots z_{n-1, p+\pi}^{r_{n-1, p+\pi}} z_{n, \pi+1}^{r_{n, \pi+1}} \ldots z_{n, p+\pi}^{r_{n, p+\pi}} \times \\
&\qquad\qquad \times f_n^*(\bar z_1, \ldots, \bar z_n; \theta_n)\, d\bar z_1 \ldots d\bar z_n,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{r_1, \ldots, r_n}(t_1, \ldots, t_{n-1}, t^{(k+1)}) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} z_{11}^{r_{11}} \ldots z_{1, p+\pi}^{r_{1, p+\pi}} \ldots z_{n-1, 1}^{r_{n-1, 1}} \ldots z_{n-1, p+\pi}^{r_{n-1, p+\pi}} z_{n_1}^{r_{n1} + r_{n, p+1}} \ldots \times \\
&\qquad \times z_{n\pi}^{r_{n\pi} + r_{n, p+\pi}} \omega_{k1}^{r_{n, \pi+1}}(\bar z_n', v) \ldots \omega_{k, p-\pi}^{r_{nv}}(\bar z_n', v) \times \\
&\qquad\qquad \times \eta_k(v) f_1^*(\bar z_1, \ldots, \bar z_n; \theta_n(t^{(k+1)} - 0))\, dv\, d\bar z_1 \ldots d\bar z_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
(r_{11}, \ldots, r_{n, p+\pi} = 0, 1, \ldots, N;\ |r_1|, \ldots, |r_n| = 1, \ldots, N - n + 1; \\
|r_1| + \ldots + |r_n| = n, \ldots, N;\ k = l, l+1, \ldots;\ t_{n-1} \in [t^{(l)}, t^{(l+1)})),
\end{gathered} \tag{54a}
$$

где

$$\lambda_n = [\lambda_n'^{\mathrm{T}} \lambda_n''^{\mathrm{T}} \lambda_n'''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \qquad \lambda_n' = [\lambda_{n1} \ldots \lambda_{n\pi}]^{\mathrm{T}},$$
$$\lambda_n'' = [\lambda_{n,\,\pi+1} \ldots \lambda_{np}]^{\mathrm{T}}, \qquad \lambda_n''' = [\lambda_{n,\,p+1} \ldots \lambda_{n,\,p+\pi}]^{\mathrm{T}},$$
$$\bar{z}_h = [z_h'^{\mathrm{T}} z_h''^{\mathrm{T}} z_h'''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = [z_{h1} \ldots z_{h,\,p+\pi}]^{\mathrm{T}} \qquad (h = 1, \ldots, n),$$
$$\bar{z}_n' = [z_{n,\,p+1} \ldots z_{n,\,p+\pi} z_{n,\,\pi+1} \ldots z_{np}]^{\mathrm{T}}.$$

6.4.5. Многомерные распределения. Центральные моменты. Совершенно так же, как в п. 6.4.2 были получены уравнения (42) для центральных моментов одномерного распределения, выводятся приближенные уравнения для центральных моментов n-мерного распределения случайного процесса $Z(t)$ при $t_1 < \ldots < t_n$:

$$\partial\mu_{r_1,\ldots,r_n}(t_1, \ldots, t_n)/\partial t_n =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^{|r_n|}}{\partial (i\lambda_{n1})^{r_{n1}} \ldots \partial (i\lambda_{np})^{r_{np}}} [i\lambda_n^{\mathrm{T}} a(z_n, t_n) + \right.$$
$$\left. + \chi(b(z_n, t_n)^{\mathrm{T}} \lambda_n; t_n)] \exp\{i\lambda_n^{\mathrm{T}} [z_n - m(t_n)]\} \right\}_{\lambda_n = 0} [z_{11} - m_1(t_1)]^{r_{11}} \ldots \times$$
$$\times [z_{1p} - m_p(t_1)]^{r_{1p}} \ldots [z_{n-1,1} - m_1(t_{n-1})]^{r_{n-1,1}} \ldots \times$$
$$\times [z_{n-1,p} - m_p(t_{n-1})]^{r_{n-1,p}} f_n^*(z_1, \ldots, z_n; \theta_n)\, dz_1 \ldots dz_n -$$
$$- \sum_{h=1}^{p} r_{nh} \mu_{r_1,\ldots,r_n - e_h} \dot{m}_h(t_n),$$
$$(r_{11}, \ldots, r_{np} = 0, 1, \ldots, N; \quad |r_1|, \ldots, |r_n| = 1, \ldots, N - n + 1;$$
$$|r_1| + \ldots + |r_n| = n, \ldots, N), \qquad (55)$$

и начальные условия для них:

$$\mu_{r_1,\ldots,r_n}(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_{n-1}) = \mu_{r_1,\ldots,r_{n-1}+r_n}(t_1, \ldots, t_{n-1}).$$

Все сказанное в п. 6.4.4 об уравнениях (54) для начальных моментов полностью относится и к уравнениям (55) для центральных моментов.

Пример 18. Для системы примеров 9, 12 и 15,

$$\dot{Z} = -Z^3 + ZV,$$

двумерное распределение приближенно определяется формулой

$$f_2(z_1, z_2; t_1, t_2) \approx \left[2\pi\sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}\right]^{-1} \exp\{-[k_{22}(z_1 - m_1)^2 -$$
$$-2k_{12}(z_1 - m_1)(z_2 - m_2) + k_{11}(z_2 - m_2)^2]/2(k_{11}k_{22} - k_{12}^2)\} \times$$
$$\times \left[1 + \sum_{k=3}^{4} \sum_{\nu_1+\nu_2=k} \frac{c_{\nu_1\nu_2}}{\nu_1!\nu_2!} H_{\nu_1\nu_2}(z_1 - m_1, z_2 - m_2)\right], \qquad (\mathrm{I})$$

где $m_1 = m(t_1)$, $m_2 = m(t_2)$, $k_{11} = D(t_1)$, $k_{22} = D(t_2)$, $c_{\nu_1\nu_2} = G_{\nu_1\nu_2}(\mu)$, $\mu_{30} = \mu_3(t_1)$, $\mu_{03} = \mu_3(t_2)$, $\mu_{40} = \mu_4(t_1)$, $\mu_{04} = \mu_4(t_2)$, а моменты $k_{12} = K(t_1, t_2)$, $\mu_{21} = \mu_{21}(t_1, t_2)$, $\mu_{12} = \mu_{12}(t_1, t_2)$, $\mu_{31} = \mu_{31}(t_1, t_2)$, $\mu_{22} = \mu_{22}(t_1, t_2)$ и $\mu_{13} =$

$=\mu_{13}(t_1, t_2)$ определяются уравнениями (55), которые в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned}
&\partial K(t_1, t_2)/\partial t_2 = -3m^2(t_2) K(t_1, t_2) - 3m(t_2)\mu_{12}(t_1, t_2) - \mu_{13}(t_1, t_2),\\
&\partial \mu_{21}(t_1, t_2)/\partial t_2 = -3[m^2(t_2)+D(t_2)]\mu_{21}(t_1, t_2) -\\
&\qquad -6K(t_1, t_2)\mu_{12}(t_1, t_2) - 3m(t_2)\mu_{22}(t_1, t_2) + 3m(t_2)D(t_1)D(t_2),\\
&\partial \mu_{12}(t_1, t_2)/\partial t_2 = 2[\nu m(t_2) + m(t_2)D(t_2) - 6\mu_3(t_2)]K(t_1, t_2) +\\
&\qquad + [\nu - 6m^2(t_2) - 12D(t_2)]\mu_{12}(t_1, t_2) - 6m(t_2)\mu_{13}(t_1, t_2),\\
&\partial \mu_{31}(t_1, t_2)/\partial t_2 = 6[3D(t_1)D(t_2) + 2K^2(t_1, t_2)]K(t_1, t_2) -\\
&\qquad -18m(t_2)K(t_1, t_2)\mu_{21}(t_1, t_2) - 9m(t_2)D(t_1)\mu_{12}(t_1, t_2) -\\
&\qquad -3[m^2(t_2)+D(t_2)]\mu_{31}(t_1, t_2) - 9K(t_1, t_2)\mu_{22}(t_1, t_2) -\\
&\qquad -3D(t_1)\mu_{13}(t_1, t_2) + \mu_3(t_1)\mu_3(t_2),\\
&\partial \mu_{22}(t_1, t_2)/\partial t_2 = 12D(t_2)[D(t_1)D(t_2) + 2K^2(t_1, t_2)] +\\
&\qquad + 2[\nu m(t_2) - 8m(t_2)D(t_2) + \mu_3(t_2)]\mu_{21}(t_1, t_2) - 36m(t_2)K(t_1, t_2)\mu_{12}(t_1, t_2) +\\
&\qquad + [\nu - 6m^2(t_2) - 12D(t_2)]\mu_{22}(t_1, t_2) - 16K(t_1, t_2)\mu_{13}(t_1, t_2) +\\
&\qquad + D(t_1)[\nu m^2(t_2) - 6m(t_2)\mu_3(t_2) - 2\mu_4(t_2)],\\
&\partial \mu_{13}(t_1, t_2)/\partial t_2 =\\
&\qquad = 3[\nu m^2(t_2) + 30D^2(t_2) - 12m(t_2)\mu_3(t_2) - 5\mu_4(t_2)]K(t_1, t_2) +\\
&\qquad + 3[2\nu m(t_2) - 15m(t_2)D(t_2) + \mu_3(t_2)]\mu_{12}(t_1, t_2) +\\
&\qquad + 3[\nu - 3m^2(t_2) - 10D(t_2)]\mu_{13}(t_1, t_2).
\end{aligned}$$

Эти уравнения проще всего выводятся дифференцированием случайных функций $[Z(t_1) - m(t_1)]^p [Z(t_2) - m(t_2)]^q$ по t_2 по правилу дифференцирования сложной функции процесса, определяемого стохастическим дифференциальным уравнением в случае винеровского процесса $W(t)$ (п. 3.5.2), переходом к математическим ожиданиям и подстановкой в полученные уравнения выражений пятых и шестых моментов через моменты низших порядков из уравнений

$$G_{2,3}(\mu) = G_{1,4}(\mu) = G_{3,2}(\mu) = G_{3,3}(\mu) = G_{2,4}(\mu) = G_{1,5}(\mu) = 0,$$

которые в данном случае дают

$$\begin{aligned}
&\mu_{23}(t_1, t_2) = D(t_1)\mu_3(t_2) + 3D(t_2)\mu_{21}(t_1, t_2) + 6K(t_1, t_2)\mu_{12}(t_1, t_2),\\
&\mu_{14}(t_1, t_2) = 4\mu_3(t_2)K(t_1, t_2) + 6D(t_2)\mu_{12}(t_1, t_2),\\
&\mu_{32}(t_1, t_2) = D(t_2)\mu_3(t_1) + 3D(t_1)\mu_{12}(t_1, t_2) + 6K(t_1, t_2)\mu_{21}(t_1, t_2),\\
&\mu_{33}(t_1, t_2) = 3D(t_2)\mu_{31}(t_1, t_2) + 9K(t_1, t_2)\mu_{22}(t_1, t_2) +\\
&\qquad + 3D(t_1)\mu_{13}(t_1, t_2) - 6[3D(t_1)D(t_2) + 2K^2(t_1, t_2)]K(t_1, t_2),\\
&\mu_{24}(t_1, t_2) = 6D(t_2)\mu_{22}(t_1, t_2) + 8K(t_1, t_2)\mu_{13}(t_1, t_2) -\\
&\qquad -24D(t_2)K^2(t_1, t_2) + D(t_1)[\mu_4(t_2) - 6D^2(t_2)],\\
&\mu_{15}(t_1, t_2) = 5\mu_4(t_2)K(t_1, t_2) + 10D(t_2)\mu_{13}(t_1, t_2).
\end{aligned}$$

Интегрируя полученные обыкновенные (при фиксированном t_1) дифференциальные уравнения при начальных условиях

$$K(t_1, t_1) = D(t_1), \quad \mu_{21}(t_1, t_1) = \mu_{12}(t_1, t_1) = \mu_3(t_1),$$
$$\mu_{31}(t_1, t_1) = \mu_{22}(t_1, t_1) = \mu_{13}(t_1, t_1) = \mu_4(t_1),$$

найдем все моменты двумерного распределения процесса $Z(t)$ до четвертого порядка.

Остальные конечномерные распределения процесса $Z(t)$ определяются приближенной формулой

$$f_n(z_1, \ldots, z_n;\ t_1, \ldots, t_n) \approx$$
$$\approx [(2\pi)^n |K|]^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(z^{\mathrm{T}} - m^{\mathrm{T}}) K^{-1}(z-m)\right\} \times$$
$$\times\left[1 + \sum_{k=3}^{4} \sum_{|\nu|=k} \frac{c_\nu}{\nu_1! \ldots \nu_n!} H_\nu(z-m)\right],$$
$$c_\nu = G_\nu(\mu), \qquad (\mathrm{II})$$

где $z = [z_1 \ldots z_n]^{\mathrm{T}}$, $m = [m(t_1) \ldots m(t_n)]^{\mathrm{T}}$,

$$K = \begin{bmatrix} D(t_1) & K(t_1, t_2) & \ldots & K(t_1, t_n) \\ K(t_1, t_2) & D(t_2) & \ldots & K(t_2, t_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K(t_1, t_n) & K(t_2, t_n) & \ldots & D(t_n) \end{bmatrix}.$$

При этом моменты $\mu_{\nu_1, \ldots, \nu_n} = \mu_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(t_1, \ldots, t_n)$, у которых некоторые из индексов $\nu_1, \ldots, \nu_n$ равны нулю, совпадают с моментами распределений меньшей размерности, которые получаются путем вычеркивания всех нулевых индексов и соответствующих аргументов, например $\mu_{004} = \mu_4(t_3)$, $\mu_{0112} = \mu_{112}(t_2, t_3, t_4)$, $\mu_{01030} = \mu_{13}(t_2, t_4)$.

Моменты $\mu_{111}(t_1, t_2, t_3)$, $\mu_{211}(t_1, t_2, t_3)$, $\mu_{121}(t_1, t_2, t_3)$ и $\mu_{112}(t_1, t_2, t_3)$ трехмерного распределения, зависящие от всех трех аргументов t_1, t_2, t_3, определяются соответствующими уравнениями (55):

$$\partial\mu_{111}(t_1, t_2, t_3)/\partial t_3 = -3[m^2(t_3) + D(t_3)]\mu_{111}(t_1, t_2, t_3) -$$
$$- 3m(t_3)\mu_{112}(t_1, t_2, t_3) + 3m(t_3)D(t_3)K(t_1, t_2) -$$
$$- 3K(t_1, t_3)\mu_{12}(t_2, t_3) - 3K(t_2, t_3)\mu_{12}(t_1, t_3),$$
$$\partial\mu_{211}(t_1, t_2, t_3)/\partial t_3 = -12m(t_3)K(t_1, t_3)\mu_{111}(t_1, t_2, t_3) -$$
$$- 3[m^2(t_3) + D(t_3)]\mu_{211}(t_1, t_2, t_3) - 6K(t_1, t_3)\mu_{112}(t_1, t_2, t_3) +$$
$$+ 6D(t_1)D(t_3)K(t_2, t_3) + 12K(t_1, t_3)[K(t_1, t_3)K(t_2, t_3) + D(t_3)K(t_1, t_2)] +$$
$$+ \mu_3(t_3)\mu_{21}(t_1, t_2) - 6m(t_3)K(t_2, t_3)\mu_{21}(t_1, t_3) -$$
$$- 3m(t_3)[D(t_1)\mu_{12}(t_2, t_3) + 2K(t_1, t_2)\mu_{12}(t_1, t_3)] -$$
$$- 3K(t_2, t_3)\mu_{22}(t_1, t_3) - 2K(t_1, t_2)\mu_{13}(t_1, t_3) - D(t_1)\mu_{13}(t_2, t_3),$$
$$\partial\mu_{121}(t_1, t_2, t_3)/\partial t_3 = -12m(t_3)K(t_2, t_3)\mu_{111}(t_1, t_2, t_3) -$$
$$- 3[m^2(t_3) + D(t_3)]\mu_{121}(t_1, t_2, t_3) - 6K(t_2, t_3)\mu_{112}(t_1, t_2, t_3) +$$
$$+ 6D(t_3)[D(t_2)K(t_1, t_3) + 2K(t_1, t_2)K(t_2, t_3)] + 12K(t_1, t_3)K^2(t_2, t_3) -$$
$$- 6m(t_3)K(t_1, t_3)\mu_{21}(t_2, t_3) + \mu_3(t_2)\mu_{12}(t_1, t_2) - 3m(t_3)D(t_2)\mu_{12}(t_1, t_3) -$$
$$- 6m(t_3)K(t_1, t_2)\mu_{12}(t_2, t_3) - 3K(t_1, t_3)\mu_{22}(t_2, t_3) -$$
$$- D(t_2)\mu_{13}(t_1, t_3) - 2K(t_1, t_2)\mu_{13}(t_2, t_3).$$
$$\partial\mu_{112}(t_1, t_2, t_3)/\partial t_3 = 2[\nu m(t_3) - 6m(t_3)D(t_3) + \mu_3(t_3)]\mu_{111}(t_1, t_2, t_3) +$$
$$+ [\nu - 6m^2(t_3) - 12D(t_3)]\mu_{112}(t_1, t_2, t_3) + \nu m^2(t_3)K(t_1, t_2) +$$
$$+ 12[K(t_1, t_2)D(t_3) + 4K(t_1, t_3)K(t_2, t_3)]D(t_3) - 2K(t_1, t_2)\mu_4(t_3) -$$
$$- 6m(t_3)[3K(t_2, t_3)\mu_{12}(t_1, t_3) + 3K(t_1, t_3)\mu_{12}(t_2, t_3) +$$
$$+ K(t_1, t_2)\mu_3(t_3)] - 8[K(t_1, t_3)\mu_{13}(t_2, t_3) + K(t_2, t_3)\mu_{13}(t_1, t_3)]$$

и начальными условиями

$$\mu_{111}(t_1, t_2, t_2) = \mu_{12}(t_1, t_2), \qquad \mu_{211}(t_1, t_2, t_2) = \mu_{22}(t_1, t_2),$$
$$\mu_{121}(t_1, t_2, t_2) = \mu_{112}(t_1, t_2, t_2) = \mu_{13}(t_1, t_2).$$

Единственный момент четвертого порядка, зависящий от четырех переменных t_1, t_2, t_3, t_4, определяется соответствующим уравнением (55):

$$\begin{aligned}\partial\mu_{1111}(t_1, t_2, t_3, t_4)/\partial t_4 = &-3\,[m^2(t_4)+D(t_4)]\,\mu_{1111}(t_1, t_2, t_3, t_4)+\\ &+6\,[K(t_1, t_2)K(t_3, t_4)+K(t_1, t_3)K(t_2, t_4)+K(t_1, t_4)K(t_2, t_3)]\,D(t_4)+\\ &+12K(t_1, t_4)K(t_2, t_4)K(t_3, t_4)-3m(t_4)\,[K(t_1, t_2)\mu_{12}(t_3, t_4)+\\ &+K(t_1, t_3)\mu_{12}(t_2, t_4)+K(t_2, t_3)\mu_{12}(t_1, t_4)]-K(t_1, t_2)\mu_{13}(t_3, t_4)-\\ &-K(t_1, t_3)\mu_{13}(t_2, t_4)-K(t_2, t_3)\mu_{13}(t_1, t_4)+\mu_3(t_4)\mu_{111}(t_1, t_2, t_3)-\\ &-6m(t_4)\,[K(t_3, t_4)\mu_{111}(t_1, t_2, t_4)+K(t_2, t_4)\mu_{111}(t_1, t_3, t_4)+\\ &+K(t_1, t_4)\mu_{111}(t_2, t_3, t_4)]-3\,[K(t_3, t_4)\mu_{112}(t_1, t_2, t_4)+\\ &+K(t_2, t_4)\mu_{112}(t_1, t_3, t_4)+K(t_1, t_4)\mu_{112}(t_2, t_3, t_4)]\end{aligned}$$

и начальным условием

$$\mu_{1111}(t_1, t_2, t_3, t_3) = \mu_{112}(t_1, t_2, t_3).$$

Так как моменты не выше четвертого порядка не могут зависеть больше чем от четырех из аргументов $t_1, \ldots, t_n$, то после интегрирования последнего уравнения, определяющего μ_{1111}, приближенная формула (II) определит все конечномерные распределения процесса $Z(t)$.

Приведенные уравнения для моментов трехмерного и четырехмерного распределения выводятся совершенно так же, как уравнения для моментов двумерного распределения.

Пример 19. Для системы примеров 10, 13 и 16,

$$\dot{Z} = -\varphi(Z) + V,$$

многомерные распределения определяются с учетом моментов до четвертого порядка приближенными формулами (I) и (II) предыдущего примера. При этом входящие в формулы (I) и (II) центральные моменты определяются приближенными уравнениями (55), которые в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned}\partial\mu_{qr}(t_1, t_2)/\partial t_2 = &-r\psi_{00}^{(q, r-1)}(m, K, t_1, t_2)-\\ &-r\sum_{k=3}^{4}\sum_{\nu_1+\nu_2=k} G_{\nu_1\nu_2}(\mu)\,\psi_{\nu_1\nu_2}^{(q, r-1)}(m, K, t_1, t_2)+\\ &+r\mu_{q, r-1}(t_1, t_2)\,[\psi_{10}(m_{t_2}, D_{t_2})+\psi_{11}(m_{t_2}, D_{t_2})\mu_3(t_2)+\psi_{12}(m_{t_2}, D_{t_2})\mu_4(t_2)]+\\ &+\nu r(r-1)\,\mu_{q, r-2}(t_1, t_2)/2,\end{aligned}$$

$$q=r=1;\quad q=2,\quad r=1;\quad q=1,\quad r=2;\quad q=3,\quad r=1;$$
$$q=r=2;\quad q=1,\ r=3;$$
$$\mu_{11}(t_1, t_2) = K(t_1, t_2),\quad \mu_{r0}(t_1, t_2) = \mu_r(t_1);$$

$$\begin{aligned}\partial\mu_{qrs}(t_1, t_2, t_3)/\partial t_3 = &-s\psi_{000}^{(q, r, s-1)}(m, K, t_1, t_2, t_3)-\\ &-s\sum_{k=3}^{4}\sum_{\nu_1+\nu_2+\nu_3=k} G_{\nu_1\nu_2\nu_3}(\mu)\,\psi_{\nu_1\nu_2\nu_3}^{(q, r, s-1)}(m, K, t_1, t_2, t_3)+\\ &+s\mu_{q, r, s-1}(t_1, t_2, t_3)\,[\psi_{10}(m_{t_3}, D_{t_3})+\psi_{11}(m_{t_3}, D_{t_3})\mu_3(t_3)+\\ &+\psi_{12}(m_{t_3}, D_{t_3})\mu_4(t_3)]+\nu s(s-1)\,\mu_{q, r, s-2}(t_1, t_2, t_3)/2,\end{aligned}$$

$$q=r=s=1;\quad q=2,\quad r=s=1;\quad r=2,\quad q=s=1;\quad s=2,\quad q=r=1;$$
$$\mu_{q, r, 0}(t_1, t_2, t_3) = \mu_{qr}(t_1, t_2);$$

$$\begin{aligned}\partial\mu_{1111}(t_1, t_2, t_3, t_4)/\partial t_4 = &-\psi_{0000}^{(1, 1, 1, 0)}(m, K, t_1, t_2, t_3, t_4)-\\ &-\sum_{k=3}^{4}\sum_{\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=k} G_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}(\mu)\,\psi_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^{(1, 1, 1, 0)}(m, K, t_1, t_2, t_3, t_4)+\\ &+\mu_{111}(t_1, t_2, t_3)\,[\psi_{10}(m_{t_4}, D_{t_4})+\psi_{11}(m_{t_4}, D_{t_4})\mu_3(t_4)+\psi_{12}(m_{t_4}, D_{t_4})\mu_4(t_4)],\end{aligned}$$

где

$$\psi_{\nu_1, \ldots, \nu_k}^{(s_1, \ldots, s_k)}(m, K, t_1, \ldots, t_k) =$$

$$= \frac{1}{\nu_1! \ldots \nu_k!} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} (z_1 - m_{t_1})^{s_1} \ldots (z_k - m_{t_k})^{s_k} \varphi(z_k) H_{\nu_1, \ldots, \nu_k}(z - m) \times$$

$$\times w_k(z_1, \ldots, z_k; m, K)\, dz_1 \ldots dz_k \quad (k = 2, 3, \ldots),$$

$H_{\nu_1, \ldots, \nu_k}(z)$ — полином Эрмита k-мерного вектора z, а $w_k(z_1, \ldots, z_k; m, K)$ — k-мерная плотность нормально распределенного процесса с математическим ожиданием $m(t)$ и ковариационной функцией $K(t_1, t_2)$. Ясно, что $\psi_{\nu_1, \ldots, \nu_k}^{(s_1, \ldots, s_k)}$ является функцией величин $m_{t_1} = m(t_1), \ldots, m_{t_k} = m(t_k)$, $K(t_r, t_s)$ $(r, s = 1, \ldots, k)$ и вследствие этого зависит от $t_1, \ldots, t_k$, что и отражено в обозначениях. Все кратные интегралы $\psi_{\nu_1, \ldots, \nu_k}^{(s_1, \ldots, s_k)}$ выражаются через интегралы ψ_p примера 16. Действительно, в результате интегрирования по $z_1, \ldots, z_{k-1}$ получаются условные моменты компонент $Z_1, \ldots, Z_{k-1}$ случайного вектора $Z = [Z_1 \ldots Z_k]^{\mathrm{T}}$ с нормальным распределением $w_k(z_1, \ldots, z_k; m, K)$, которые выражаются через условные математические ожидания и ковариации величин $Z_1, \ldots, Z_{k-1}$ при $Z_k = z_k$. Но условные математические ожидания при нормальном распределении линейно зависят от z_k, а условные ковариации не зависят от z_k (приложение 4), поэтому интеграл по z_k будет линейной комбинацией интегралов ψ_p примера 16.

В случае непрерывно-дискретной системы с вектором состояния (расширенным), определяемым уравнениями (7а) п. 6.4.1, уравнения (55) заменяются следующими уравнениями:

$$\partial \mu_{r_1, \ldots, r_n}(t_1, \ldots, t_n)/\partial t_n =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^{r_{n1} + \ldots + r_{n\pi}}}{\partial (i\lambda_{n1})^{r_{n1}} \ldots \partial (i\lambda_{n\pi})^{r_{n\pi}}} [i\lambda_n'^{\mathrm{T}} a(z_n, t_n) + \right.$$

$$\left. + \chi(b(z_n, t_n)^{\mathrm{T}} \lambda_n'; t_n)] \exp\{i\lambda_n'^{\mathrm{T}} [z_n' - m'(t_n)]\} \right\}_{\lambda_n' = 0} \times$$

$$\times [z_{11} - m_1(t_1)]^{r_{11}} \ldots [z_{1, p+\pi} - m_{p+\pi}(t_1)]^{r_{1, p+\pi}} \ldots [z_{n-1, 1} -$$

$$- m_1(t_{n-1})]^{r_{n-1, 1}} \ldots [z_{n-1, p+\pi} - m_{p+\pi}(t_{n-1})]^{r_{n-1, p+\pi}} [z_{n, \pi+1} -$$

$$- m_{\pi+1}(t_n)]^{r_{n, \pi+1}} \ldots [z_{n, p+\pi} - m_{p+\pi}(t_n)]^{r_{n, p+\pi}} \times$$

$$\times f_n^*(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n; \theta_n)\, d\bar{z}_1 \ldots d\bar{z}_n - \sum_{h=1}^{\pi} r_{nh} \mu_{r_1, \ldots, r_n - e_h} \dot{m}_h(t_n),$$

$$\mu_{r_1, \ldots, r_n}(t_1, \ldots, t_{n-1}, t^{(k+1)}) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} [z_{11} - m_1(t_1)]^{r_{11}} \ldots [z_{1, p+\pi} - m_{p+\pi}(t_1)]^{r_{1, p+\pi}} \ldots \times$$

$$\times [z_{n-1, 1} - m_1(t_{n-1})]^{r_{n-1, 1}} \ldots [z_{n-1, p+\pi} - m_{p+\pi}(t_{n-1})]^{r_{n-1, p+\pi}} \times$$

$$\times [z_{n1} - m_1(t_n)]^{r_{n1} + r_{n, p+1}} \ldots [z_{n\pi} - m_\pi(t_n)]^{r_{n\pi} + r_{n, p+\pi}} \times$$

$$\times [\omega_{k, 1}(\bar{z}_n', v) - m_{\pi+1}(t_n)]^{r_{n, \pi+1}} \ldots [\omega_{k, p-\pi}(\bar{z}_n', v) -$$

$$- m_p(t_n)]^{r_{np}} \eta_k(v) f_n^*(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n; \theta_n(t^{(k+1)} - 0))\, dv\, d\bar{z}_1 \ldots d\bar{z}_n$$

$$(r_{11},\ \ldots,\ r_{n,\,p+\pi}=0,\ 1,\ \ldots,\ N;\quad |r_1|,\ \ldots,\ |r_n|=1,\ \ldots,\ N-n+1;$$
$$|r_1|+\ldots+|r_n|=n,\ \ldots,\ N;\quad k=l,\ l+1,\ \ldots;\quad t_{n-1}\in[t^{(l)},\ t^{(l+1)})). \tag{55a}$$

В частном случае при $n=N=2$ и нормальной $f_2^*(\bar{z}_1,\ \bar{z}_2;\ \theta_2)$ уравнения (55а) представляют собой уравнения метода нормальной аппроксимации для элементов $k_{rs}(t_1,\ t_2)=\mu_{e_r,e_s}(t_1,\ t_2)$ $(r,\ s=1,\ \ldots,\ p)$ матрицы $K(t_1,\ t_2)$.

6.4.6. Приближенное определение стационарных процессов в нелинейных системах. Для приближенного определения одномерного распределения стационарного в узком смысле процесса в стационарной нелинейной стохастической дифференциальной системе методом моментов следует положить в уравнениях (32) $\dot{\alpha}_r=0$ или в уравнениях (42) $\dot{\mu}_r=0$. Если полученные таким путем уравнения имеют решение, которое может служить множеством моментов некоторой случайной величины, то можно предположить, что стационарный в узком смысле процесс в системе существует. В этом случае для определения других конечномерных распределений этого стационарного процесса следует заменить в уравнениях (54) или (55) производные по t_n производными по $\tau_{n-1}=t_n-t_1$, а начальные условия записать в виде

$$\alpha_{r_1,\ \ldots,\ r_n}(\tau_1,\ \ldots,\ \tau_{n-2},\ \tau_{n-2})=\alpha_{r_1,\ \ldots,\ r_{n-1}+r_n}(\tau_1,\ \ldots,\ \tau_{n-2})$$

или, соответственно, в виде

$$\mu_{r_1,\ \ldots,\ r_n}(\tau_1,\ \ldots,\ \tau_{n-2},\ \tau_{n-2})=\mu_{r_1,\ \ldots,\ r_{n-1}+r_n}(\tau_1,\ \ldots,\ \tau_{n-2}).$$

Следует, однако, иметь в виду замечание в конце п. 6.3.3 о возможности появления «лишних» решений полученных уравнений вследствие приближенности исходных уравнений.

§ 6.5. Семиинвариантные методы

6.5.1. Метод семиинвариантов. Одномерное распределение. Иногда за параметры распределений принимают семиинварианты вместо моментов [18, 19]. Объясняется это тем, что в противоположность моментам семиинварианты не растут с увеличением порядка. Так, например, для нормального распределения все семиинварнанты выше второго порядка равны нулю. Поэтому для распределений, близких к нормальному, семиинварианты третьего, четвертого и более высоких порядков будут малыми. Это дает возможность аппроксимировать распределения, пренебрегая семиинвариантами выше заданного порядка.

► Чтобы вывести дифференциальные уравнения для семиинвариантов одномерного распределения процесса $Z(t)$, вспомним, что по определению семиинварианты $\varkappa_{r_1,\ \ldots,\ r_p}$ выражаются через характеристическую функцию $g_1(\lambda;\ t)$ формулой (TB, п. 4.5.4)

$$\varkappa_r = \varkappa_{r_1,\ \ldots,\ r_p} = \left[\frac{\partial^{|r|} \ln g_1(\lambda;\ t)}{\partial(i\lambda_1)^{r_1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{r_p}}\right]_{\lambda=0}.$$

Дифференцируя эту формулу по времени t, подставив в полученную формулу выражение $\partial g_1(\lambda;\ t)/\partial t$ из (31) и заменив неизвестную плотность $f_1(z;\ t)$ аппроксимирующей ее функцией $f_1^*(z;\ \theta)$, будем иметь

$$\dot{\varkappa}_r = \int_{-\infty}^{\infty}\Big[\frac{\partial^{|r|}}{\partial(i\lambda_1)^{r_1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{r_p}}\{i\lambda^{\mathrm{T}}a(z,\ t)+\chi(b(z,\ t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)\}\times$$
$$\times\exp\{i\lambda^{\mathrm{T}}z-\ln g_1(\lambda;\ t)\}\Big]_{\lambda=0}\ f_1^*(z;\ \theta)\,dz \tag{56}$$
$$(r_1,\ \ldots,\ r_p=0,\ 1,\ \ldots,\ N;\quad |r|=1,\ \ldots,\ N),$$

где θ — вектор, компонентами которого служат семиинварианты $\varkappa_r$ до порядка N включительно. В качестве начальных значений семиинвариантов $\varkappa_r$ при $t=t_0$ следует взять соответствующие семиинварианты величины $Z_0=Z(t_0)$.

Чтобы облегчить вычисление производных по $i\lambda_1,\ \ldots,\ i\lambda_p$ под знаком интеграла, применим формулу дифференцирования произведения двух функций (39) для дифференцирования по каждой из переменных $i\lambda_1,\ \ldots,\ i\lambda_p$. В результате получим

$$\frac{\partial^{|r|}}{\partial(i\lambda_1)^{r_1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{r_p}}[i\lambda^{\mathrm{T}}a(z,\ t)+\chi(b(z,\ t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)]\times$$
$$\times e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(z-m)}e^{i\lambda^{\mathrm{T}}m-\ln g_1(\lambda;\ t)}=$$
$$=\sum_{h_1=0}^{r_1}\ldots\sum_{h_p=0}^{r_p}C_{r_1}^{h_1}\ldots C_{r_p}^{h_p}\frac{\partial^{|h|}}{\partial(i\lambda_1)^{h_1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{h_p}}\times$$
$$\times[i\lambda^{\mathrm{T}}a(z,\ t)+\chi(b(z,\ t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)]\times$$
$$\times e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(z-m)}\frac{\partial^{|r|-|h|}}{\partial(i\lambda_1)^{r_1-h_1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{r_p-h_p}}e^{i\lambda^{\mathrm{T}}m-\ln g_1(\lambda;\ t)}. \tag{57}$$

Но (TB, п. 4.5.4)

$$e^{i\lambda^{\mathrm{T}}m-\ln g_1(\lambda;\ t)}=\exp\left\{-\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{|\nu|=k}\frac{(i\lambda_1)^{\nu_1}\ldots(i\lambda_p)^{\nu_p}}{\nu_1!\ldots\nu_p!}\varkappa_\nu\right\}=$$
$$=1+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!}\left[\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{|\nu|=k}\frac{(i\lambda_1)^{\nu_1}\ldots(i\lambda_p)^{\nu_p}}{\nu_1!\ldots\nu_p!}\varkappa_\nu\right]^s=$$
$$=1+\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{|\nu|=k}(i\lambda_1)^{\nu_1}\ldots(i\lambda_p)^{\nu_p}\times$$
$$\times\sum_{s=1}^{[k/2]}\frac{(-1)^s}{s!}\sum_{q_1+\ldots+q_s=\nu}\frac{\varkappa_{q_1}\ldots\varkappa_{q_s}}{q_{11}!\ldots q_{1p}!\ldots q_{s1}!\ldots q_{sp}!},$$

где $\nu=[\nu_1 \ldots \nu_p]^{\mathrm{T}}$, $q_1=[q_{11} \ldots q_{1p}]^{\mathrm{T}}, \ldots, q_s=[q_{s1} \ldots q_{sp}]^{\mathrm{T}}$ — векторные индексы. Дифференцируя эту формулу h_1 раз по $i\lambda_1, \ldots, h_p$ раз по $i\lambda_p$, положив после этого $\lambda_1=\ldots=\lambda_p=0$ и вводя векторный индекс $h=[h_1 \ldots h_p]^{\mathrm{T}}$, получим при $|h| \geqslant 2$

$$\left\{\frac{\partial^{|h|}}{\partial (i\lambda_1)^{h_1} \ldots \partial (i\lambda_p)^{h_p}} e^{i\lambda^{\mathrm{T}} m - \ln g_1(\lambda;\, t)}\right\}_{\lambda=0} = h_1! \ldots h_p! \sum_{s=1}^{[|h|/2]} \frac{(-1)^s}{s!} \sum_{q_1+\ldots+q_s=h} \frac{\varkappa_{q_1} \ldots \varkappa_{q_s}}{q_{11}! \ldots q_{1p}! \ldots q_{s1}! \ldots q_{sp}!}. \quad (58)$$

Все первые производные, соответствующие $|h|=1$, равны нулю. Подставив выражение (58) в (57), будем иметь

$$\begin{gathered}\left\{\frac{\partial^{|r|}}{\partial (i\lambda_1)^{r_1} \ldots \partial (i\lambda_p)^{r_p}} [i\lambda^{\mathrm{T}} a(z,t) + \chi(b(z,t)^{\mathrm{T}} \lambda;\, t)]\, e^{i\lambda^{\mathrm{T}} z - \ln g_1(\lambda;\, t)}\right\}_{\lambda=0} = \\ = \left\{\frac{\partial^{|r|}}{\partial (i\lambda_1)^{r_1} \ldots \partial (i\lambda_p)^{r_p}} [i\lambda^{\mathrm{T}} a(z,t) + \chi(b(z,t)^{\mathrm{T}} \lambda;\, t)]\, e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(z-m)}\right\}_{\lambda=0} + \\ + \sum_{h_1=0}^{r_1} \ldots \sum_{h_p=0}^{r_p} \sum_{|h|=2}^{|r|-1} \frac{r_1! \ldots r_p!}{(r_1-h_1)! \ldots (r_p-h_p)!} \sum_{s=1}^{[|h|/2]} \frac{(-1)^s}{s!} \times \\ \times \sum_{q_1+\ldots+q_s=h} \frac{\varkappa_{q_1} \ldots \varkappa_{q_s}}{q_{11}! \ldots q_{1p}! \ldots q_{s1}! \ldots q_{sp}!} \times \\ \times \left\{\frac{\partial^{|r|-|h|}}{\partial (i\lambda_1)^{r_1-h_1} \ldots \partial (i\lambda_p)^{r_p-h_p}} [i\lambda^{\mathrm{T}} a(z,t) + \chi(b(z,t)^{\mathrm{T}} \lambda;\, t)]\, e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(z-m)}\right\}_{\lambda=0}.\end{gathered}$$

Подставив это выражение в (56), получим дифференциальные уравнения для семиинвариантов в виде

$$\begin{gathered}\dot{\varkappa}_r = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{\partial^{|r|}}{\partial (i\lambda_1)^{r_1} \ldots \partial (i\lambda_p)^{r_p}} [i\lambda^{\mathrm{T}} a(z,t) + \chi(b(z,t)^{\mathrm{T}} \lambda;\, t)]\, e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(z-m)}\right\}_{\lambda=0} \times \\ \times f_1^*(z;\, \theta)\, dz + \sum_{h_1=0}^{r_1} \ldots \sum_{h_p=0}^{r_p} \sum_{|h|=2}^{|r|-1} \frac{r_1! \ldots r_p!}{(r_1-h_1)! \ldots (r_p-h_p)!} \times \\ \times \sum_{s=1}^{[|h|/2]} \frac{(-1)^s}{s!} \sum_{q_1+\ldots+q_s=h} \frac{\varkappa_{q_1} \ldots \varkappa_{q_s}}{q_{11}! \ldots q_{1p}! \ldots q_{s1}! \ldots q_{sp}!} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{\partial^{|r|-|h|}}{\partial (i\lambda_1)^{r_1-h_1} \ldots \partial (i\lambda_p)^{r_p-h_p}} [i\lambda^{\mathrm{T}} a(z,t) + \right. \\ \left. + \chi(b(z,t)^{\mathrm{T}} \lambda;\, t)]\, e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(z-m)}\right\}_{\lambda=0} f_1^*(z;\, \theta)\, dz \\ (r_1, \ldots, r_p = 0, 1, \ldots, N;\ |r| = 3, \ldots, N). \blacktriangleleft \qquad (59)\end{gathered}$$

Подынтегральные выражения в уравнениях (59) могут быть вычислены по формуле (50). В частном случае нормально распределенного белого шума V в (7) производные по $i\lambda_1, \ldots, i\lambda_p$ под знаками интегралов в (59) выражаются формулой (52).

Как известно, семиинварианты первого порядка представляют собой математические ожидания компонент случайного вектора, семиинварианты второго и третьего порядков совпадают с соответствующими центральными моментами, а семиинварианты высших порядков связаны с центральными моментами взаимно однозначными зависимостями (*ТВ*, п. 4.5.4). Поэтому при данной аппроксимации распределения $f_1(z;\ t)$ уравнения (59) вполне эквивалентны уравнениям (42) для центральных моментов и уравнениям (32) для начальных моментов и могут быть из них получены соответствующей заменой переменных.

Заметим, что уравнения (59) для семиинвариантов значительно сложнее уравнений (32) или (42) для моментов. Поэтому метод семиинвариантов может быть полезным только в сравнительно простых задачах.

В случае непрерывно-дискретной системы дифференциальные уравнения для $\varkappa_r$ могут быть получены тем же способом. Но значения $\varkappa_r$ в моменты времени $t^{(k+1)}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ могут быть найдены только по формулам, выражающим их через моменты α_r или μ_r. Это обстоятельство и сложность уравнений (59) делают семиинвариантные методы непригодными для непрерывно-дискретных систем.

Пример 20. Для системы примеров 15 и 18,

$$\dot{Z} = -Z^3 + ZV,$$

при аппроксимации $f_1(z;\ t)$ отрезком разложения по полиномам Эрмита с учетом моментов до четвертого порядка уравнения (59) имеют вид ($m=\varkappa_1$, $D=\varkappa_2$)

$$\begin{aligned}
\dot{m} &= -m(m^2+3D)-\varkappa_3,\\
\dot{D} &= (\nu-6D)(m^2+D)-6m\varkappa_3-2\varkappa_4,\\
\dot{\varkappa}_3 &= 6(\nu-3D)mD+3(\nu-3m^2-9D)\varkappa_3-9m\varkappa_4,\\
\dot{\varkappa}_4 &= 6(\nu+2m^2)D^2+36D^3+12(\nu-6D)m\varkappa_3+4\varkappa_3^2+6(\nu-2m^2-8D)\varkappa_4.
\end{aligned}$$

При аппроксимации $f_1(z;\ t)$ отрезком ряда Эджуорта с учетом семиинвариантов до четвертого порядка в правой части последнего уравнения добавится слагаемое $10\varkappa_3^2$.

Пример 21. Для системы примеров 16 и 19,

$$\dot{Z} = -\varphi(Z)+V,$$

уравнения (59) при той же аппроксимации $f_1(z;\ t)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
\dot{m} &= \psi_{10}'(m,\ D)+\psi_{11}(m,\ D)\varkappa_3+\psi_{12}(m,\ D)\varkappa_4,\\
\dot{D} &= \psi_{20}'(m,\ D)+\psi_{21}(m,\ D)\varkappa_3+\psi_{22}(m,\ D)\varkappa_4,\\
\dot{\varkappa}_3 &= \psi_{30}'(m,\ D)+\psi_{31}(m,\ D)\varkappa_3+\psi_{32}(m,\ D)\varkappa_4,\\
\dot{\varkappa}_4 &= \psi_{40}'(m,\ D)+\psi_{41}'(m,\ D)\varkappa_3+\psi_{42}'(m,\ D)\varkappa_4-\\
&\qquad -4[\psi_{11}(m,\ D)\varkappa_3+\psi_{12}(m,\ D)\varkappa_4]\varkappa_3,
\end{aligned}$$

где в дополнение к обозначениям примера 16

$$\psi'_{k0}(m, D) = \psi_{k0}(m, D) + 3D^2\psi_{k2}(m, D) \qquad (k = 1, 2, 3),$$
$$\psi'_{40}(m, D) = \psi_{40}(m, D) + 3D^2\psi_{12}(m, D) - 6D\psi'_{20}(m, D),$$
$$\psi'_{41}(m, D) = \psi_{41}(m, D) - 12D^2\psi_{12}(m, D) - 6D\psi_{21}(m, D),$$
$$\psi'_{42}(m, D) = \psi_{42}(m, D) - 6D\psi_{22}(m, D).$$

6.5.2. Метод семиинвариантов. Многомерные распределения. Совершенно так же из уравнения (5.41) для n-мерной характеристической функции $g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n)$ процесса $Z(t)$ выводятся обыкновенные дифференциальные уравнения для семиинвариантов n-мерного распределения процесса $Z(t)$ при $t_1 < \ldots < t_n$:

$$\partial\varkappa_{r_1, \ldots, r_n}(t_1, \ldots, t_n)/\partial t_n =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^{|r_1| + \ldots + |r_n|}}{\partial(i\lambda_{11})^{r_{11}} \ldots \partial(i\lambda_{np})^{r_{np}}} [i\lambda_n^{\mathrm{T}} a(z_n, t_n) + \right.$$
$$+ \chi(b(z_n, t_n)^{\mathrm{T}} \lambda_n; t_n)] \exp\{i\lambda_1^{\mathrm{T}} z_1 + \ldots + i\lambda_n^{\mathrm{T}} z_n -$$
$$\left. - \ln g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n)\} \right\}_{\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0} \times$$
$$\times f_n^*(z_1, \ldots, z_n; \theta_n)\, dz_1 \ldots dz_n$$
$$(r_{11}, \ldots, r_{np} = 0, 1, \ldots, N;\ |r_1|, \ldots, |r_n| = 1, \ldots$$
$$\ldots, N - n + 1;\ |r_1| + \ldots + |r_n| = n, \ldots, N). \qquad (60)$$

Начальные условия для этих уравнений, так же как и для уравнений (42) для центральных моментов, имеют вид

$$\varkappa_{r_1, \ldots, r_n}(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_{n-1}) = \varkappa_{r_1, \ldots, r_{n-1} + r_n}(t_1, \ldots, t_{n-1}).$$

Уравнения (60) могут быть преобразованы так же, как в п. 6.5.1 были преобразованы уравнения (56). После этого подынтегральные выражения могут быть определены по формуле (50) (в частном случае нормального белого шума V следует пользоваться формулой (52) вместо (50)). Однако мы не будем здесь делать это преобразование ввиду того, что, как уже было сказано, метод семиинвариантов может быть рекомендован для практического применения только в сравнительно простых задачах.

6.5.3. Моментно-семиинвариантный метод. Практическое составление дифференциальных уравнений для семиинвариантов значительно сложнее, чем составление уравнений для моментов, особенно в случае полиномиальных функций $a(z, t)$ и $b(z, t)$ и винеровского процесса $W(t)$. В этом случае для составления уравнений для моментов достаточно найти стохастические дифференциалы произведений $Z_1^{r_1}(t) \ldots Z_p^{r_p}(t)$ или $[Z_1(t) - m_1(t)]^{r_1} \ldots [Z_p(t) - m_p(t)]^{r_p}$ по формуле дифференцирования сложной функции (3.61), взять математические ожидания и выразить в полученных равенствах моменты выше N-го порядка через моменты до порядка N в соответствии с принятой аппроксимацией плотности $f_1(z; t)$. И совершенно так же составляются уравнения для моментов многомерных распределений. Составить же уравнения для семиинвариантов даже в этом простейшем случае очень сложно. Это привело к мысли применить комбинированный метод, основанный на составлении уравнений для моментов и замыкании их с помощью соотношений, полученных приравниванием нулю семиинвариантов выше данного порядка N [21]. Приравняв нулю семиинварианты выше N-го порядка и выразив их через центральные моменты, получим соотношения, из которых можно выразить моменты выше N-го порядка, входящие в полученные уравнения, через моменты до N-го порядка (*ТВ*, п. 4.5.4):

$$\mu_{r_1, \ldots, r_s} = \sum_{h=2}^{[(r_1+\ldots+r_s)/2]} \frac{(-1)^h}{h} r_1! \ldots r_s! \times$$
$$\times \sum_{\rho_{11}+\ldots+\rho_{1h}=r_1} \ldots \sum_{\rho_{s1}+\ldots+\rho_{sh}=r_s} \prod_{l=1}^{h} \frac{\mu_{\rho_{1l}, \ldots, \rho_{sl}}}{\rho_{1l}! \ldots \rho_{sl}!}, \tag{61}$$

где суммирование по $\rho_{11}, \ldots, \rho_{1h}, \ldots, \rho_{s1}, \ldots, \rho_{sh}$ распространяется на все $\rho_{11}, \ldots, \rho_{1h}, \ldots, \rho_{s1}, \ldots, \rho_{sh}$, для которых $2 \leqslant \rho_{1l}+\ldots+\rho_{sl} < |r|$ $(l=1, \ldots, h)$, а $s=np$ для n-мерного распределения.

Моментно-семиинвариантный метод составления уравнений для моментов основан на аппроксимации логарифма характеристической функции полиномом N-й степени:

$$\ln g_1(\lambda;\ t) \approx \ln g_1^*(\lambda;\ \theta) = i\lambda^{\mathrm{T}} m + \sum_{k=2}^{N} \sum_{|r|=k} \frac{(i\lambda_1)^{r_1} \ldots (i\lambda_p)^{r_p}}{r_1! \ldots r_p!} \varkappa_r. \tag{62}$$

Очевидно, что такая аппроксимация распределения в общем случае отлична от аппроксимации плотности конечным отрезком ортогонального разложения или ряда Эджуорта. Естественно, и полученные моментно-семиинвариантным методом уравнения для моментов в общем случае не совпадают с уравнениями, которые дает аппроксимация плотности отрезком ортогонального разложения или ряда Эджуорта.

Аппроксимация (62) распределения практически неприменима, так как не дает возможности приближенно находить плотность $f_1(z;\ t)$ и связанные с ней вероятности событий. Поэтому приходится, определив моментно-семиинвариантным методом необходимые моменты, пользоваться для нахождения $f_1(z;\ t)$ отрезком ортогонального разложения или ряда Эджуорта.

Моментно-семиинвариантный алгоритм составления уравнений для моментов в случае полиномиальных функций $a(z,\ t)$, $b(z,\ t)$ и винеровского процесса $W(t)$ в уравнении (7) был положен в основу программы автоматического составления и решения уравнений для моментов на ЭВМ [22].

Пример 22. В условиях примера 15,

$$\dot{Z} = -Z^3 + ZV,$$

приравнивая нулю семиинварианты пятого и шестого порядков, получаем соотношения (*ТВ*, п. 4.5.4)

$$\varkappa_5 = \mu_5 - 10D\mu_3 = 0, \quad \varkappa_6 = \mu_6 - 15D\mu_4 - 10\mu_3^2 + 30D^3 = 0,$$

откуда находим

$$\mu_5 = 10D\mu_3, \quad \mu_6 = 15D\mu_4 + 10\mu_3^2 - 30D^3.$$

Первое из этих равенств совпадает с равенством примера 15, полученным из условия $G_5(\mu) = 0$, а второе отличается от равенства, полученного в примере 15 из соотношения $G_6(\mu) = 0$, дополнительным слагаемым $10\mu_3^2$ в правой части. Вследствие этого первые три уравнения примера 15 для центральных

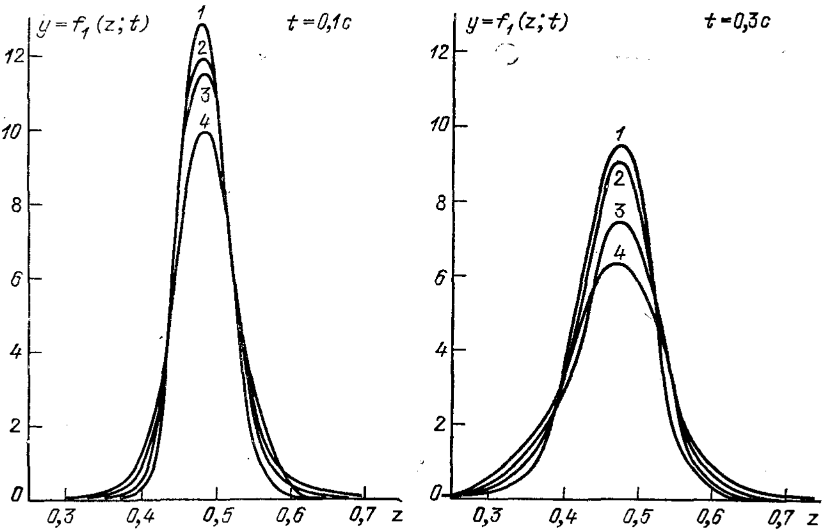

Рис. 14

моментов будут справедливы и в этом случае, а в правой части четвертого уравнения добавится слагаемое $-40\mu_3^2$ совершенно так же, как и при аппроксимации плотности отрезком ряда Эджуорта с учетом моментов до четвертого порядка. Это совпадение объясняется тем, что равенство $G_6(\mu) = 10\varkappa_3^2$, получаемое при применении ряда Эджуорта, равноценно равенству $G_6(\mu) = 10\mu_3^2$, полученному приравниванием нулю $\varkappa_6$.

Пример 23. В условиях примеров 14 и 17,

$$\dot{Z}_1 = -Z_1 Z_2, \quad \dot{Z}_2 = -\alpha Z_2 + kV,$$

уравнения для центральных моментов, даваемые моментно-семиинвариантным методом с учетом семиинвариантов до четвертого порядка, совпадают с уравнениями, полученными в примере 17 путем аппроксимации плотности $f_1(z; t)$ отрезком разложения по полиномам Эрмита или отрезком ряда Эджуорта с учетом моментов до четвертого порядка. Это объясняется тем, что в уравнения для моментов четвертого порядка в данном случае входят моменты не выше пятого порядка, а семиинварианты пятого порядка $\varkappa_{pq}$, $p+q=5$, совпадают с соответствующими квазимоментами $c_{pq}=G_{pq}(\mu)$ (п. 2.3.3). Поэтому равенства $\varkappa_{pq}=0$ и $G_{pq}(\mu)=0$ при $p+q=5$ эквивалентны. Это, конечно, не значит, что рассматриваемые аппроксимации равноценны. Чтобы убедиться в этом, достаточно учесть, что в силу (2.45) $\varkappa_{pq} \neq G_{pq}(\mu)$ при $p+q \geqslant 6$, вследствие чего рассмотренные аппроксимации распределения дадут разные уравнения для моментов выше четвертого порядка.

Таблица 1

Моменты Z_1	t				
	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
$m_1=\alpha_1$	0,4823	0,4690	0,4661	0,4662	0,4675
$D_1=\alpha_2-\alpha_1^2$	0,0951	0,0966	0,1002	0,1039	0,1074
α_4	0,2181	0,2215	0,2369	0,2536	0,2709
α_6	0,2100	0,2439	0,2961	0,3505	0,4089
α_8	0,2640	0,3814	0,5591	0,7653	1,0115
$m_1=\alpha_1$	0,4823	0,4690	0,4660	0,4661	0,4674
$D_1=\alpha_2-\alpha_1^2$	0,0939	0,0916	0,0923	0,0937	0,0954
α_4	0,2116	0,1944	0,1930	0,1958	0,2000
α_6	0,1935	0,1716	0,1706	0,1749	0,1811
α_8	0,2252	0,1932	0,1924	0,1995	0,2096
$m_1=\alpha_1$	0,4823	0,4690	0,4661	0,4662	0,4675
$D_1=\alpha_2-\alpha_1^2$	0,0951	0,0966	0,1002	0,1039	0,1074
α_4	0,2181	0,2211	0,2358	0,2518	0,2682
α_6	0,2097	0,2383	0,2804	0,3224	0,3658
α_8	0,2626	0,3518	0,4671	0,5857	0,7137
$m_1=\alpha_1$	0,4823	0,4690	0,4661	0,4662	0,4675
$D_1=\alpha_2-\alpha_1^2$	0,0951	0,0966	0,1002	0,1039	0,1074
α_4	0,2181	0,2215	0,2369	0,2536	0,2709
α_6	0,2100	0,2439	0,2961	0,3505	0,4089
α_8	0,2640	0,3814	0,5590	0,7652	1,0113

В табл. 1 и на рис. 14 приведены результаты расчета моментов случайной величины Z_1 в зависимости от времени t для $\alpha=5$, $k=\nu=1$, $t \in [0, 1]$ при нормальном начальном распределении вектора $[Z_1 Z_2]^{\mathrm{T}}$ с параметрами $m_{10}=m_{20}=0{,}5$, $k_{110}=0{,}1$, $k_{120}=0$, $k_{220}=1$.

В третьей и четвертой группах строк таблицы даны результаты расчета моментно-семиинвариантным методом с учетом моментов до четвертого и до десятого порядка соответственно. Во второй группе строк даны результаты расчета методом нормальной аппроксимации. В первой группе строк даны для сравнения точные значения моментов величины Z_1. На рис. 14 приведены результаты расчета кривой распределения величины Z_1 для тех же данных методом нормальной аппроксимации (кривая *4*) и моментно-семиинвариантным методом с учетом моментов до четвертого (кривая 3) и до десятого (кривая 2) порядка. Для сравнения приведена точная кривая распределения (кривая 1).

6.5.4. Приближенное определение стационарных процессов в нелинейных системах. Для приближенного определения одномерного распределения стационарного в узком смысле процесса в стационарной нелинейной стохастической дифференциальной системе методом семиинвариантов следует положить в уравнениях (59) $\dot{\varkappa}_r = 0$. Если полученные таким путем уравнения имеют решение, которое может служить множеством семиинвариантов некоторой случайной величины, то можно предположить, что стационарный в узком смысле процесс в системе существует. В этом случае для определения других конечномерных распределений этого стационарного процесса следует заменить в уравнениях (60) производные по t_n производными по $\tau_{n-1} = t_n - t_1$, а начальные условия записать в виде

$$\varkappa_{r_1, \ldots, r_n}(\tau_1, \ldots, \tau_{n-2}, \tau_{n-2}) = \varkappa_{r_1, \ldots, r_{n-1}+r_n}(\tau_1, \ldots, \tau_{n-2}).$$

Следует, однако, иметь в виду замечания в конце п. 6.3.3 о возможности появления «лишних» решений полученных уравнений за счет приближенности исходных уравнений.

Моментно-семиинвариантный метод применяется для приближенного определения характеристик стационарных в узком смысле процессов в стационарных нелинейных стохастических дифференциальных системах совершенно так же, как в п. 6.4.6.

§ 6.6. Методы, основанные на ортогональных разложениях

6.6.1. Ортогональное разложение одномерного распределения. При аппроксимации распределения конечным отрезком ортогонального разложения естественно принять за параметры распределения математическое ожидание, ковариационную матрицу (от которых зависят эталонное распределение и вследствие этого полиномы $p_\nu(z)$, $q_\nu(z)$) и коэффициенты разложения.

Чтобы получить уравнения для математического ожидания и ковариационной матрицы, подставим в выражения математических ожиданий в формулах (8) и (13) аппроксимирующую функцию

$$f_1^*(z;\ \theta) = w_1(z)\left[1 + \sum_{k=3}^{N} \sum_{|\nu|=k} c_\nu p_\nu(z)\right]. \tag{63}$$

Тогда получим

$$\dot{m} = \int_{-\infty}^{\infty} a(z,\ t)\, w_1(z)\left[1 + \sum_{k=3}^{N} \sum_{|\nu|=k} c_\nu p_\nu(z)\right] dz,$$

$$\dot{K}=\int_{-\infty}^{\infty}[a(z,\ t)(z^{\mathrm{T}}-m^{\mathrm{T}})+(z-m)\,a(z,\ t)^{\mathrm{T}}+$$
$$+b(z,\ t)\,\nu(t)\,b(z,\ t)^{\mathrm{T}}]\,w_1(z)\left[1+\sum_{k=3}^{N}\sum_{|\nu|=k}c_\nu p_\nu(z)\right]dz.$$

Вводя обозначения

$$\varphi_1(m,\ K,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}a(z,\ t)\,w_1(z)\,dz, \tag{64}$$

$$\varphi_{1\nu}(m,\ K,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}a(z,\ t)\,p_\nu(z)\,w_1(z)\,dz, \tag{65}$$

$$\varphi_2(m,\ K,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}[a(z,\ t)(z^{\mathrm{T}}-m^{\mathrm{T}})+$$
$$+(z-m)\,a(z,\ t)^{\mathrm{T}}+b(z,\ t)\,\nu(t)\,b(z,\ t)^{\mathrm{T}}]\,w_1(z)\,dz, \tag{66}$$

$$\varphi_{2\nu}(m,\ K,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}[a(z,\ t)(z^{\mathrm{T}}-m^{\mathrm{T}})+$$
$$+(z-m)\,a(z,\ t)^{\mathrm{T}}+b(z,\ t)\,\nu(t)\,b(z,\ t)^{\mathrm{T}}]\,p_\nu(z)\,w_1(z)\,dz, \tag{67}$$

представим эти уравнения в виде

$$\dot{m}=\varphi_1(m,\ K,\ t)+\sum_{k=3}^{N}\sum_{|\nu|=k}\varphi_{1\nu}(m,\ K,\ t)\,c_\nu, \tag{68}$$

$$\dot{K}=\varphi_2(m,\ K,\ t)+\sum_{k=3}^{N}\sum_{|\nu|=k}\varphi_{2\nu}(m,\ K,\ t)\,c_\nu. \tag{69}$$

▶ Чтобы составить уравнения для коэффициентов c_ν, воспользуемся формулой (2.40), согласно которой

$$c_\varkappa=\left[q_\varkappa\left(\frac{\partial}{i\partial\lambda}\right)g_1(\lambda;\ t)\right]_{\lambda=0}.$$

Дифференцируя эту формулу по времени t и приняв во внимание, что полином $q_\varkappa(z)$ зависит от математического ожидания m и ковариационной матрицы K вектора Z_t, которые являются функциями времени, находим

$$\dot{c}_\varkappa=\left[q_\varkappa\left(\frac{\partial}{i\partial\lambda}\right)\frac{\partial g_1(\lambda;\ t)}{\partial t}\right]_{\lambda=0}+\left[q_\varkappa^m\left(\frac{\partial}{i\partial\lambda}\right)^{\mathrm{T}}g_1(\lambda;\ t)\right]_{\lambda=0}\cdot\dot{m}+$$
$$+\operatorname{tr}\left\{\left[q_\varkappa^K\left(\frac{\partial}{i\partial\lambda}\right)g_1(\lambda;\ t)\right]_{\lambda=0}\cdot\dot{K}\right\},$$

где $q_\varkappa^m(z)$ — матрица-столбец производных полинома $q_\varkappa(z)$ по компонентам вектора m, а $q_\varkappa^K(z)$ — квадратная матрица производных полинома $q_\varkappa(z)$ по элементам матрицы K. Подставив в эту формулу выражение $\partial g_1(\lambda;\ t)/\partial t$ из (31) и заменив плотность $f_1(z;\ t)$ аппроксимирующим ее отрезком ортогонального разложения, получим

$$\dot{c}_\varkappa = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ q_\varkappa\left(\frac{\partial}{i\partial\lambda}\right) [i\lambda^{\mathrm{T}} a(z,\ t) + \chi(b(z,\ t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)] e^{i\lambda^{\mathrm{T}} z} \right\}_{\lambda=0} \times$$
$$\times \left[1 + \sum_{k=3}^{N} \sum_{|\nu|=k} c_\nu p_\nu(z) \right] w_1(z)\,dz + q_\varkappa^m(\alpha)\,\dot{m} + \operatorname{tr}[q_\varkappa^K(\alpha)\,\dot{K}],$$

где $q_\varkappa^m(\alpha)$ и $q_\varkappa^K(\alpha)$ — как всегда, результат замены одночленов вида $z_1^{r_1} \ldots z_p^{r_p}$ в выражениях полиномов $q_\varkappa^m(z)$ и $q_\varkappa^K(z)$ соответствующими моментами $\alpha_{r_1,\ldots,r_p}$. Положив

$$\varphi_\varkappa^0(m,\ K,\ t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ q_\varkappa\left(\frac{\partial}{i\partial\lambda}\right) \times \right.$$
$$\left. \times [i\lambda^{\mathrm{T}} a(z,\ t) + \chi(b(z,\ t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)] e^{i\lambda^{\mathrm{T}} z} \right\}_{\lambda=0} w_1(z)\,dz, \qquad (70)$$

$$\varphi_{\varkappa\nu}(m,\ K,\ t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ q_\varkappa\left(\frac{\partial}{i\partial\lambda}\right) [i\lambda^{\mathrm{T}} a(z,\ t) + \right.$$
$$\left. + \chi(b(z,\ t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)] e^{i\lambda^{\mathrm{T}} z} \right\}_{\lambda=0} p_\nu(z)\, w_1(z)\,dz \qquad (71)$$

и подставив выражения $\dot{m}$ и $\dot{K}$ из (68), (69), получим уравнения

$$\dot{c}_\varkappa = \varphi_\varkappa^0(m,\ K,\ t) + \varphi_1(m,\ K,\ t)^{\mathrm{T}} q_\varkappa^m(\alpha) + \operatorname{tr}[\varphi_2(m,\ K,\ t)\, q_\varkappa^K(\alpha)] +$$
$$+ \sum_{k=3} \sum_{|\nu|=k} \{\varphi_{\varkappa\nu}(m,\ K,\ t) + \varphi_{1\nu}(m,\ K,\ t)^{\mathrm{T}} q_\varkappa^m(\alpha) +$$
$$+ \operatorname{tr}[\varphi_{2\nu}(m,\ K,\ t)\, q_\varkappa^K(\alpha)]\}\, c_\nu \qquad (|\nu| = 3,\ \ldots,\ N). \qquad (72)$$

Здесь моменты $\alpha_{r_1,\ldots,r_p}$ в $q_\varkappa^m(\alpha)$ и $q_\varkappa^K(\alpha)$ должны быть заменены их выражениями через коэффициенты c_ν в соответствии с формулой (2.42). ◀

Уравнения (68), (69) и (72) образуют систему уравнений, определяющую все параметры m, K, c_ν ($|\nu| = 3,\ \ldots,\ N$) отрезка ортогонального разложения $f_1^*(z;\ \theta)$, аппроксимирующего плотность $f_1(z;\ t)$. При этом за начальные значения m, K, c_ν ($|\nu| = 3,\ \ldots,\ N$) при $t = t_0$ следует принять соответствующие параметры отрезка ортогонального разложения, аппроксимирующего начальную плотность $f_0(z)$ величины Z_0.

Все предыдущие выкладки справедливы и в том случае, когда только $q_\nu(z)$ представляют собой полиномы, а $p_\nu(z)$ не являются полиномами. В частности, уравнения (68), (69) и (72) справедливы в случае, когда правая часть формулы (63) представляет собой отрезок разложения $f_1(z;\ t)$ по производным плотности $w_1(z)$. В этом случае $p_\nu(z)=w_1^{(\nu)}(z)/w_1(z)$, а $q_\nu(z)$ представляют собой полиномы (п. 2.3.1). Такое разложение было использовано для приближенного нахождения $f_1(z;\ t)$ в [78].

Заметим, что уравнения (72) нелинейны относительно коэффициентов c_ν. Если отказаться от требования совпадения моментов первого и второго порядков распределения $w_1(z)$ с соответствующими моментами распределения $f_1(z;\ t)$ и задать эти моменты для $w_1(z)$ априори, то получатся линейные уравнения для коэффициентов c_ν ($|\nu|=1,\ \ldots,\ N$). Эти уравнения проще, чем (72), однако при этом придется взять большее N.

Если $q_\nu(z)$ не являются полиномами, то предыдущие выкладки неприменимы. В этом случае для вывода уравнений для коэффициентов c_ν следует вычислить стохастический дифференциал функции $q_\nu(Z(t))$ процесса $Z(t)$ по формуле Ито (3.61) (в случае нормального белого шума $V(t)$) или по общей формуле дифференцирования сложной функции (3.75) (в случае произвольного белого шума $V(t)$) и взять математическое ожидание полученного выражения. В результате в случае нормального белого шума получатся те же самые уравнения (72) для коэффициентов c_ν (в случае нормального белого шума $V(t)$ множитель при $w_1(z)$ в (70) и при $p_\nu(z)\,w_1(z)$ в (71) определяется формулой (76)). Разложение плотности $f_1(z;\ t)$ по произвольной ортонормальной системе функций было применено для приближенного нахождения $f_1(z;\ t)$ в [115].

В случае непрерывно-дискретной системы с (расширенным) вектором состояния, определяемым уравнениями (7а) п. 6.4.1, формулы (70) и (71) заменяются соответственно формулами

$$\varphi_\varkappa^0(m,\ K,\ t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big\{q_\varkappa([\partial^{\mathrm{T}}/i\partial\lambda'\bar{z}''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}})\,[i\lambda'^{\mathrm{T}}a(z,\ t)+ \\ +\chi(b(z,\ t)^{\mathrm{T}}\lambda';\ t)]\,e^{i\lambda'^{\mathrm{T}}z'}\Big\}_{\lambda'=0}w_1(\bar{z})\,d\bar{z}, \tag{70a}$$

$$\varphi_{\varkappa\nu}(m,\ K,\ t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big\{q_\varkappa([\partial^{\mathrm{T}}/i\partial\lambda'\bar{z}''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}})\,[i\lambda'^{\mathrm{T}}a(z,\ t)+ \\ +\chi(b(z,\ t)^{\mathrm{T}}\lambda';\ t)]\,e^{i\lambda'^{\mathrm{T}}z'}\Big\}_{\lambda'=0}p_\nu(\bar{z})\,w_1(\bar{z})\,d\bar{z}, \tag{71a}$$

где $\bar{z}''=[z_{\pi+1}\ \ldots\ z_{p+\pi}]^{\mathrm{T}}$, уравнения (68) и (69) заменяются уравнениями (41а) и (42а) п. 6.4.2 при $|r|=2$, $k_{rs}=\mu_{e_r+e_s}$ с $f_1^*(\bar{z};\ \theta)$, определяемой формулой (63) при $z=\bar{z}$, а уравнения (72) заменяются уравнениями

$$\dot{c}_\varkappa = \varphi^0_\varkappa(m, K, t) + \sum_{k=3}^{N} \sum_{|\nu|=k} \varphi_{\varkappa\nu}(m, K, t)\, c_\nu + q^m_\varkappa(\alpha)\,\dot{m} + \operatorname{tr}\{q^K_\varkappa(\alpha)\dot{K}\}.$$

$$c_\varkappa(t^{(k+1)}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} q_\varkappa\left[(z'^{\mathrm{T}}\omega_k(\bar{z}, v)^{\mathrm{T}} z'^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\right) \times$$

$$\times\, \eta_k(v)\, w_1(\bar{z}) \left[1 + \sum_{k=3}^{N} \sum_{|\nu|=k} c_\nu\left(t^{(k+1)} - 0\right) p_\nu(\bar{z})\right] dv\, d\bar{z} \quad (|\varkappa| = 3, \ldots, N).$$

(72a)

6.6.2. Метод квазимоментов. При аппроксимации плотности $f_1(z;\, t)$ отрезком разложения по полиномам Эрмита

$$p_\nu(z) = H_\nu(z - m)/(\nu_1! \ \ldots, \ \nu_p!), \qquad q_\nu(z) = G_\nu(z - m),$$

вследствие чего $c_\nu = q_\nu(\alpha) = G_\nu(\mu)$.

▶ Чтобы найти вектор $q^m_\varkappa(\alpha)$ и матрицу $q^K_\varkappa(\alpha)$, воспользуемся формулами (9), (12) и (13) приложения 1. Тогда получим

$$q^m_{\varkappa r}(z) = \frac{\partial}{\partial m_r} G_\varkappa(z - m) = -\frac{\partial}{\partial z_r} G_\varkappa(z - m) = -\varkappa_r\, G_{\varkappa - e_r}(z - m),$$

$$q^K_{\varkappa r}(z) = \frac{\partial}{\partial k_{rr}} G_\varkappa(z - m) = -\frac{1}{2}\, \varkappa_r(\varkappa_r - 1)\, G_{\varkappa - 2e_r}(z - m),$$

$$q^K_{\varkappa rs}(z) = \frac{\partial}{\partial k_{rs}} G_\varkappa(z - m) = -\varkappa_r \varkappa_s\, G_{\varkappa - e_r - e_s}(z - m),$$

где e_r — вектор, все координаты которого равны нулю, кроме r-й, равной единице. Заменив здесь одночлен вида $(z_1 - m_1)^{r_1} \ldots \ldots (z_p - m_p)^{r_p}$ соответствующими моментами $\mu_{r_1, \ldots, r_p}$ и вспомнив, что $G_\nu(\mu) = c_\nu$ и что $c_\nu = 0$ при $|\nu| < 3$, находим элементы матрицы-столбца $q^m_\varkappa(\alpha)$ и квадратной матрицы $q^K_\varkappa(\alpha)$:

$$q^m_{\varkappa r}(\alpha) = -\varkappa_r\, c_{\varkappa - e_r} \qquad (r = 1, \ldots, p;\ |\varkappa| = 4, \ldots, N); \tag{73}$$

$$q^K_{\varkappa rr}(\alpha) = -\frac{1}{2}\varkappa_r(\varkappa_r - 1)\, c_{\varkappa - 2e_r},$$

$$q^K_{\varkappa rs}(\alpha) = -\varkappa_r\varkappa_s\, c_{\varkappa - e_r - e_s}$$

$$(r,\ s = 1, \ldots, p;\ s > r;\ |\varkappa| = 5, \ldots, N). \tag{74}$$

При $|\varkappa| = 3$, $q^m_\varkappa(\alpha) = 0$ при $|\varkappa| = 3$ и $q^K_\varkappa(\alpha) = 0$.

Таким образом, при аппроксимации плотности $f_1(z;\, t)$ отрезком разложения по полиномам Эрмита элементы матриц $q^m_\varkappa(\alpha)$ и $q^K_\varkappa(\alpha)$ пропорциональны соответствующим квазимоментам. Уравнения (68), (69) и (72) в этом случае определяют математическое ожидание m, ковариационную матрицу K и квазимоменты c_ν ($|\nu| = 3, \ldots, N$). ◀

6.6.3. Вычисление подынтегральных функций в уравнениях. Для вычисления подынтегральных функций в (70) и (71) воспользуемся формулой (49):

$$\left\{\frac{\partial^{|r|}}{\partial(i\lambda_1)^{r_1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{r_p}}\left[\lambda^{\mathrm{T}}a(z,\ t)+\chi(b(z,\ t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)\right]e^{i\lambda^{\mathrm{T}}z}\right\}_{\lambda=0}=$$

$$=\sum_{s=1}^{p}a_s(z,\ t)\,r_s z_1^{r_1}\ldots z_s^{r_s-1}\ldots z_p^{r_p}+$$

$$+\sum_{k=2}^{|r|}\sum_{|h|=k}\sum_{h_1=0}^{r_1}\ldots\sum_{h_p=0}^{r_p}\frac{r_1!\ldots r_p!}{h_1!\ldots h_p!\,(r_1-h_1)!\ldots(r_p-h_p)!}\times$$

$$\times\omega_{h_1,\ \ldots,\ h_p}(z,\ t)\,z_1^{r_1-h_1}\ldots z_p^{r_p-h_p}.$$

▶ Заметив, что

$$\frac{r_1!\ldots r_p!}{(r_1-h_1)!\ldots(r_p-h_p)!}\,z_1^{r_1-h_1}\ldots z_p^{r_p-h_p}=\frac{\partial^{|h|}}{\partial z_1^{h_1}\ldots\partial z_p^{h_p}}\,z_1^{r_1}\ldots z_p^{r_p},$$

$$r_s z_1^{r_1}\ldots z_s^{r_s-1}\ldots z_p^{r_p}=\frac{\partial}{\partial z_s}\,z_1^{r_1}\ldots z_p^{r_p},$$

находим

$$\left\{q_\varkappa(\partial/i\partial\lambda)\left[i\lambda^{\mathrm{T}}a(z,\ t)+\chi(b(z,\ t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)\right]e^{i\lambda^{\mathrm{T}}z}\right\}_{\lambda=0}=$$

$$=\sum_{s=1}^{p}a_s(z,\ t)\frac{\partial q_\varkappa(z)}{\partial z_s}+$$

$$+\sum_{k=2}^{|\varkappa|}\sum_{|h|=k}\sum_{h_1,\ \ldots,\ h_p=0}^{k}\frac{\omega_{h_1,\ \ldots,\ h_p}(z,\ t)}{h_1!\ldots h_p!}\frac{\partial^{|h|}q_\varkappa(z)}{\partial z_1^{h_1}\ldots\partial z_p^{h_p}}.\qquad(75)$$

В частном случае нормального белого шума $V(t)$ в уравнении (7) (представляющего собой слабую среднюю квадратическую производную винеровского процесса $W(t)$), пользуясь формулой (51) вместо (49), получаем

$$\left\{q_\varkappa(\partial/i\partial\lambda)\left[i\lambda^{\mathrm{T}}a(z,\ t)+\chi(b(z,\ t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)\right]e^{i\lambda^{\mathrm{T}}z}\right\}_{\lambda=0}=$$

$$=-\sum_{s=1}^{p}a_s(z,\ t)\frac{\partial q_\varkappa(z)}{\partial z_s}+\frac{1}{2}\sum_{s,\ u=1}^{p}\sigma_{su}(z,\ t)\frac{\partial^2 q_\varkappa(z)}{\partial z_s\partial z_u}.\ ◀\qquad(76)$$

В частности, применяя разложение по полиномам Эрмита, перепишем (75) в виде

$$\left\{q_\varkappa(\partial/i\partial\lambda)\left[i\lambda^{\mathrm{T}}a(z,\ t)+\chi(b(z,\ t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)\right]e^{i\lambda^{\mathrm{T}}z}\right\}_{\lambda=0}=$$

$$=\left\{G_\varkappa(\partial/i\partial\lambda-m)\left[i\lambda^{\mathrm{T}}a(z,\ t)+\chi(b(z,\ t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)\right]e^{i\lambda^{\mathrm{T}}z}\right\}_{\lambda=0}=$$

$$=\left\{G_\varkappa(\partial/i\partial\lambda)\left[i\lambda^{\mathrm{T}}a(z,\ t)+\chi(b(z,\ t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)\right]e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(z-m)}\right\}_{\lambda=0}=$$

$$= \sum_{s=1}^{p} a_s(z, t) \frac{\partial}{\partial z_s} G_\varkappa(z-m) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{|\varkappa|} \sum_{|h|=k} \sum_{h_1, \ldots, h_p=0}^{k} \frac{\omega_{h_1, \ldots, h_p}(z, t)}{h_1! \ldots h_p!} \frac{\partial^k}{\partial z_1^{h_1} \ldots \partial z_p^{h_p}} G_\varkappa(z-m).$$

Здесь мы перенесли слагаемое $-m$ из аргумента полинома $G_\varkappa$ в аргумент показательной функции. Чтобы показать, что это допустимо, заметим, что для любой дифференцируемой функции $\varphi(s)$ векторного аргумента $s=[s_1 \ \ldots \ s_p]^{\mathrm{T}}$ и любых векторов $\alpha=[\alpha_1 \ \ldots \ \alpha_p]^{\mathrm{T}}$ и $m=[m_1 \ \ldots \ m_p]^{\mathrm{T}}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_h} - m_h\right) \varphi(s) e^{s^{\mathrm{T}}\alpha} = e^{s_h m_h} \frac{\partial}{\partial s_h} \varphi(s) e^{s^{\mathrm{T}}\alpha - s_h m_h}$$

и вообще

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_h} - m_h\right)^{k_h} \varphi(s) e^{s^{\mathrm{T}}\alpha} = e^{s_h m_h} \frac{\partial^{k_h}}{\partial s_h^{k_h}} \varphi(s) e^{s^{\mathrm{T}}\alpha - s_h m_h}.$$

Применив эту формулу для дифференцирования по $s_1, \ldots, s_p$, находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_1} - m_1\right)^{k_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial s_p} - m_p\right)^{k_p} \varphi(s) e^{s^{\mathrm{T}}\alpha} =$$

$$= e^{s^{\mathrm{T}} m} \frac{\partial^{|k|}}{\partial s_1^{k_1} \ldots \partial s_p^{k_p}} \varphi(s) e^{s^{\mathrm{T}}(\alpha - m)}.$$

Отсюда видно, что для любого полинома $P(z)$

$$[P(\partial/\partial s - m) \varphi(s) e^{s^{\mathrm{T}}\alpha}]_{s=0} = [P(\partial/\partial s) \varphi(s) e^{s^{\mathrm{T}}(\alpha-m)}]_{s=0}.$$

Пользуясь формулой (9) приложения 1 для производных полиномов $G_\varkappa$, в итоге получаем

$$\{q_\varkappa(\partial/i\partial\lambda) [i\lambda^{\mathrm{T}} a(z, t) + \chi(b(z, t)^{\mathrm{T}} \lambda; t)] e^{i\lambda^{\mathrm{T}} z}\}_{\lambda=0} =$$

$$= \sum_{s=1}^{p} \varkappa_s a_s(z, t) G_{\varkappa - e_s}(z-m) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{|\varkappa|} \sum_{|h|=k} \sum_{h_1, \ldots, h_p=0}^{k} C_{\varkappa_1}^{h_1} \ldots C_{\varkappa_p}^{h_p} \omega_{h_1, \ldots, h_p}(z, t) \times$$

$$\times G_{\varkappa - h_1 e_1 - \ldots - h_p e_p}(z-m), \tag{77}$$

где e_s — как и раньше, вектор, все компоненты которого равны нулю, за исключением s-й, которая равна единице. Формула (76) в этом случае принимает вид

$$\{q_\varkappa(\partial/i\partial\lambda)\left[i\lambda^{\mathrm{T}}a(z,\ t)+\chi(b(z,\ t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)\right]e^{i\lambda^{\mathrm{T}}z}\}_{\lambda=0}=$$
$$=\sum_{s=1}^{p}\varkappa_s a_s(z,\ t)\,G_{\varkappa-e_s}(z-m)+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{p}\varkappa_s(\varkappa_s-1)\,\sigma_{ss}(z,t)\times$$
$$\times G_{\varkappa-2e_s}(z-m)+\sum_{u=2}^{p}\sum_{s=1}^{u-1}\varkappa_s\varkappa_u\sigma_{su}(z,\ t)\,G_{\varkappa-e_s-e_u}(z-m). \tag{78}$$

Метод квазимоментов для случая нормально распределенного белого шума был предложен в [7].

Пример 24. В задачах примеров 20 и 21 уравнения для квазимоментов идентичны уравнениям для семиинвариантов, полученным в этих примерах, так как квазимоменты до пятого порядка включительно совпадают с соответствующими семиинвариантами (п. 2.3.3).

Пример 25. В условиях примера 17,

$$\dot{Z}_1=-Z_1Z_2,\quad \dot{Z}_2=-\alpha Z_2+kV,$$

при аппроксимации $f_1(z;\ t)$ отрезком разложения по полиномам Эрмита с учетом полиномов до четвертой степени уравнения (68), (69) и (72) имеют вид (конечно, они совпадают с соответствующими уравнениями для семиинвариантов; различие будет только при учете полиномов Эрмита не ниже шестой степени)

$$\begin{aligned}
&\dot{m}_1=-m_1m_2-k_{12},\quad \dot{m}_2=-\alpha m_2,\\
&\dot{k}_{11}=-2\,(m_2k_{11}+m_1k_{12}+c_{21}),\\
&\dot{k}_{12}=-(m_2+\alpha)\,k_{12}-m_1k_{22}-c_{12},\\
&\dot{k}_{22}=-2\alpha k_{22}+k^2\nu,\\
&\dot{c}_{30}=-3\,(2k_{11}k_{12}+m_2c_{30}+m_1c_{21}+c_{31}),\\
&\dot{c}_{21}=-2\,[k_{11}k_{22}+k_{12}^2+(m_2+\alpha)\,c_{21}+m_1c_{12}+c_{22}],\\
&\dot{c}_{12}=-2k_{12}k_{22}-(m_2+2\alpha)\,c_{12}-m_1c_{03}-c_{13},\\
&\dot{c}_{03}=-3\alpha c_{03},\\
&\dot{c}_{40}=-4\,(3k_{12}c_{30}+3k_{11}c_{21}+m_2c_{40}+m_1c_{31}),\\
&\dot{c}_{31}=-3\,(k_{22}c_{30}+3k_{12}c_{21}+2k_{11}c_{12}-(3m_2+\alpha)\,c_{31}-3m_1c_{22},\\
&\dot{c}_{22}=-2\,[2k_{12}c_{21}+3k_{12}c_{12}+k_{11}c_{03}+(m_2+\alpha)\,c_{22}+m_1c_{13}],\\
&\dot{c}_{13}=-3\,(k_{22}c_{12}+k_{12}c_{03})-(m_2+3\alpha)\,c_{13}-m_1c_{04},\\
&\dot{c}_{04}=-4\alpha c_{04}.
\end{aligned}$$

6.6.4. Согласованные ортогональные разложения конечномерных распределений. Решение уравнений (5.38) и (5.41) для конечномерных распределений случайного процесса, определяемого стохастическим дифференциальным уравнением (7), можно искать в виде отрезков согласованных ортогональных разложений конечномерных плотностей $f_n(z_1, \ldots, z_n; t_1, \ldots, t_n)$ (п. 2.3.5):

$$f_n(z_1, \ldots, z_n; t_1, \ldots, t_n) \approx f_n^*(z_1, \ldots, z_n; \theta_n) \approx$$
$$\approx w_n(z_1, \ldots, z_n)\left[1 + \sum_{k=3}^{N} \sum_{|\nu_1|+\ldots+|\nu_n|=k} c_{\nu_1, \ldots, \nu_n} p_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(z_1, \ldots, z_n)\right]$$
$$(n=1, 2, \ldots), \tag{79}$$

где $\{w_n(z_1, \ldots, z_n)\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ — согласованная последовательность плотностей, имеющих те же моменты первого и второго порядков, что и соответствующие плотности f_n, вследствие чего каждая из плотностей w_n зависит как от параметров от значений математического ожидания $m(t)$ и ковариационной функции $K(t, t')$ процесса $Z(t)$ при $t, t' = t_1, \ldots, t_n$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Заменив в выражении математического ожидания в уравнении (16) для ковариационной функции процесса $Z(t)$ двумерную плотность $f_2(z_1, z_2; t_1, t_2)$ аппроксимирующим ее отрезком ортогонального разложения (79), получим

$$\partial K(t_1, t_2)/\partial t_2 =$$
$$= \varphi_2(m, K, t_1, t_2) + \sum_{k=3}^{N} \sum_{|\nu_1|+|\nu_2|=k} \varphi_{2\nu_1\nu_2}(m, K, t_1, t_2)\, c_{\nu_1\nu_2}(t_1, t_2), \tag{80}$$

где

$$\varphi_2(m, K, t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [z_1 - m(t_1)]\, a(z_2, t_2)^{\mathrm{T}} w_2(z_1, z_2)\, dz_1\, dz_2, \tag{81}$$

$$\varphi_{2\nu_1\nu_2}(m, K, t_1, t_2) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [z_1 - m(t_1)]\, a(z_2, t_2)^{\mathrm{T}} p_{\nu_1\nu_2}(z_1, z_2)\, w_2(z_1, z_2)\, dz_1\, dz_2. \tag{82}$$

Эти функции φ_2 и $\varphi_{2\nu_1\nu_2}$ зависят от значений m_{t_1}, m_{t_2}, K_{t_1}, K_{t_2} математического ожидания $m(t)$ и ковариационной матрицы $K(t)$ вектора Z_t и от ковариационной функции $K(t_1, t_2)$ процесса $Z(t)$.

▶ Чтобы вывести уравнения для коэффициентов согласованных ортогональных разложений многомерных распределений процесса $Z(t)$, заметим, что согласно (2.48)

$$c_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(t_1, \ldots, t_n) =$$
$$= \left[q_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}\left(\frac{\partial}{i\partial\lambda_1}, \ldots, \frac{\partial}{i\partial\lambda_n}\right) g_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; t_1, \ldots, t_n)\right]_{\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0}.$$

Дифференцируя эту формулу по t_n, будем иметь

$$\partial c_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(t_1, \ldots, t_n)/\partial t_n =$$
$$= \left[q_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}\left(\frac{\partial}{i\partial\lambda_1}, \ldots, \frac{\partial}{i\partial\lambda_n}\right) \frac{\partial g_n}{\partial t} \right]_{\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0} +$$
$$+ \left[q^m_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}\left(\frac{\partial}{i\partial\lambda_1}, \ldots, \frac{\partial}{i\partial\lambda_n}\right)^{\mathrm{T}} g_n \right]_{\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0} \cdot \dot{m}_{t_n} +$$
$$+ \operatorname{tr}\left\{ \sum_{h=1}^{n-1} \left[q^{K_h}_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}\left(\frac{\partial}{i\partial\lambda_1}, \ldots, \frac{\partial}{i\partial\lambda_n}\right) g_n \right]_{\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0} \cdot \frac{\partial K(t_h, t_n)}{\partial t_n} \right\} +$$
$$+ \operatorname{tr}\left\{ \left[q^{K_n}_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}\left(\frac{\partial}{i\partial\lambda_1}, \ldots, \frac{\partial}{i\partial\lambda_n}\right) g_n \right]_{\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0} \cdot \dot{K}_{t_n} \right\} =$$
$$= \left[q_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}\left(\frac{\partial}{i\partial\lambda_1}, \ldots, \frac{\partial}{i\partial\lambda_n}\right) \frac{\partial g_n}{\partial t} \right]_{\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0} +$$
$$+ q^m_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(\alpha)^{\mathrm{T}} \dot{m}_{t_n} + \operatorname{tr}\left[\sum_{h=1}^{n-1} q^{K_h}_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(\alpha) \frac{\partial K(t_h, t_n)}{\partial t_n} \right] +$$
$$+ \operatorname{tr}\left[q^{K_n}_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(\alpha) \dot{K}_{t_n} \right],$$

где $q^m_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(z_1, \ldots, z_n)$ — матрица-столбец производных полинома $q_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(z_1, \ldots, z_n)$ по компонентам вектора $m_{t_n} = m(t_n)$, $q^{K_h}_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(z_1, \ldots, z_n)$ — квадратная матрица вторых производных полинома $q_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(z_1, \ldots, z_n)$ по элементам матрицы $K(t_h, t_n)$ $h = 1, \ldots, n)$, $q^m_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(\alpha)$, $q^{K_h}_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(\alpha)$ — результат замены одночленов вида $z_{11}^{r_{11}} \ldots z_{1p}^{r_{1p}} \ldots z_{n1}^{r_{n1}} \ldots z_{np}^{r_{np}}$ соответствующими моментами $\alpha_{r_{11}, \ldots, r_{1p}, \ldots, r_{n1}, \ldots, r_{np}}$ в выражениях полиномов $q^m_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(z_1, \ldots, z_n)$, $q^{K_h}_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(z_1, \ldots, z_n)$. Подставив в эту формулу выражение $\partial g_n/\partial t_n$ из (53), заменив плотность $f_n(z_1, \ldots, z_n; t_1, \ldots, t_n)$ аппроксимирующим ее отрезком разложения (79) и учитывая, что в результате применения оператора $\partial/i\partial\lambda_k$ к $e^{i\lambda_k^{\mathrm{T}} z_k}$ $\partial/i\partial\lambda_k$ заменяется величиной z_k, получим при $t_1 < \ldots < t_n$

$$\partial c_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(t_1, \ldots, t_n)/\partial t_n =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ q_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}\left(z_1, \ldots, z_{n-1}, \frac{\partial}{i\partial\lambda_n}\right) [i\lambda_n^{\mathrm{T}} a(z_n, t_n) +\right.$$
$$\left. + \chi(b(z_n, t_n)^{\mathrm{T}}\lambda_n; t_n)] e^{i\lambda_n^{\mathrm{T}} z_n} \right\}_{\lambda_n = 0} f_n^*(z_1, \ldots, z_n; \theta_n)\, dz_1 \ldots dz_n +$$
$$+ q^m_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(\alpha)^{\mathrm{T}} \dot{m}_{t_n} + \sum_{h=1}^{n-1} \operatorname{tr}\left[q^{K_h}_{x_1, \ldots, \varkappa_n}(\alpha) \frac{\partial K(t_h, t_n)}{\partial t_n} \right] +$$
$$+ \operatorname{tr}\left[q^{K_h}_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(\alpha) \dot{K}_{t_n} \right].$$

Заменив здесь $\dot{m}_{t_n}$, $\dot{K}_{t_n}$ и $\partial K(t_h, t_n)/\partial t_n$ их выражениями из (68), (69) и (80), приведем эти уравнения к виду

$$\partial c_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(t_1, \ldots, t_n)/\partial t_n = \varphi^0_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(m, K, t_1, \ldots, t_n) +$$
$$+ \left\{ \varphi_1(m_{t_n}, K_{t_n}, t_n)^{\mathrm{T}} + \sum_{k=3}^{N} \sum_{|\nu|=k} c_\nu(t_n)\varphi_{1\nu}(m_{t_n}, K_{t_n}, t_n)^{\mathrm{T}} \right\} q^m_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(\alpha) +$$
$$+ \operatorname{tr}\left[\left\{ \varphi_2(m_{t_n}, K_{t_n}, t_n) + \sum_{k=3}^{N} \sum_{|\nu|=k} c_\nu(t_n)\varphi_{2\nu}(m_{t_n}, K_{t_n}, t_n) \right\} \times \right.$$
$$\left. \times q^{Kn}_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(\alpha) \right] + \sum_{h=1}^{n-1} \operatorname{tr}\left[\left\{ \varphi_2(m, K, t_h, t_n)^{\mathrm{T}} + \right. \right.$$
$$+ \left. \sum_{k=3}^{N} \sum_{|\nu_1|+|\nu_2|=k} c_{\nu_1\nu_2}(t_h, t_n)\varphi_{2\nu_1\nu_2}(m, K, t_h, t_n)^{\mathrm{T}} \right\} \times$$
$$\left. \times q^{K_h}_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(\alpha) \right] + \sum_{k=3}^{N} \sum_{|\nu_1|+\ldots+|\nu_n|=k} \varphi_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n, \nu_1, \ldots, \nu_n}(m, K,$$
$$t_1, \ldots, t_n) c_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(t_1, \ldots, t_n)$$
$$(|\varkappa_1|, \ldots, |\varkappa_n| = 1, \ldots, N-n+1; \quad |\varkappa_1| + \ldots + |\varkappa_n| = n, \ldots, N), \tag{83}$$

где в дополнение к предыдущим обозначениям

$$\varphi^0_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(m, K, t_1, \ldots, t_n) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ q_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}\left(z_1, \ldots, z_{n-1}, \frac{\partial}{i\partial\lambda_n}\right) [i\lambda_n^{\mathrm{T}} a(z_n, t_n) + \right.$$
$$\left. + \chi(b(z_n, t_n)^{\mathrm{T}}\lambda_n; t_n)] e^{i\lambda_n^{\mathrm{T}} z_n} \right\}_{\lambda_n=0} w_n(z_1, \ldots, z_n)\, dz_1 \ldots dz_n, \tag{84}$$

$$\varphi_{\varkappa_1 \ldots, \varkappa_n, \nu_1, \ldots, \nu_n}(m, K, t_1, \ldots, t_n) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ q_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}\left(z_1, \ldots, z_{n-1}, \frac{\partial}{i\partial\lambda_n}\right) [i\lambda_n^{\mathrm{T}} a(z_n, t_n) + \right.$$
$$\left. + \chi(b(z_n, t_n)^{\mathrm{T}}\lambda_n; t_n)] e^{i\lambda_n^{\mathrm{T}} z_n} \right\}_{\lambda_n=0} p_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(z_1, \ldots, z_n) \times$$
$$\times w_n(z_1, \ldots, z_n)\, dz_1 \ldots dz_n. \tag{85}$$

Эти функции зависят от значений $m_{t_h} = m(t_h)$, $K(t_h, t_l)$ $(h, l = 1, \ldots, n)$ математического ожидания $m(t)$ и ковариационной функции $K(t, t')$ процесса $Z(t)$, что для краткости показано буквами m, K, $t_1, \ldots, t_n$ в качестве аргументов.

На основании свойства (2.51) коэффициентов согласованных ортогональных разложений начальные условия для уравнений (83) имеют вид

$$c_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_{n-1}) = c_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1}+\varkappa_n}(t_1, \ldots, t_{n-1}). \blacktriangleleft \tag{86}$$

Совершенно так же, как была выведена формула (75), получаем

$$\left\{q_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(z_1, \ldots, z_{n-1}, \partial/i\partial\lambda_n)\left[i\lambda_n^{\mathrm{T}}a(z_n, t_n)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\chi(b(z_n, t_n)^{\mathrm{T}}\lambda_n;\ t_n)\right]e^{i\lambda_n^{\mathrm{T}}z_n}\right\}_{\lambda_n=0}=$$
$$=\sum_{s=1}^{p} a_s(z_n, t_n)\frac{\partial}{\partial z_{ns}}q_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(z_1, \ldots, z_n)+$$
$$+\sum_{k=2}^{|\varkappa|}\sum_{|h|=k}\sum_{h_1, \ldots, h_p=0}^{k}\frac{\omega_{h_1, \ldots, h_p}(z_n, t_n)}{h_1!\ldots h_p!}\times$$
$$\times\frac{\partial^{|h|}}{\partial z_{n1}^{h_1}\ldots\partial z_{np}^{h_p}}q_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(z_1, \ldots, z_n). \qquad (87)$$

В случае нормального белого шума V в уравнении (7) эта формула принимает вид

$$\left\{q_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(z_1, \ldots, z_{n-1}, \partial/i\partial\lambda_n)\left[i\lambda_n^{\mathrm{T}}a(z_n, t_n)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\chi(b(z_n, t_n)^{\mathrm{T}}\lambda_n;\ t_n)\right]e^{i\lambda_n^{\mathrm{T}}z_n}\right\}_{\lambda_n=0}=$$
$$=\sum_{s=1}^{p} a_s(z_n, t_n)\frac{\partial}{\partial z_{ks}}q_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(z_1, \ldots, z_n)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{s, u=1}^{p}\sigma_{su}(z_n, t_n)\frac{\partial^2}{\partial z_{ns}\partial z_{nu}}q_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(z_1, \ldots, z_n). \qquad (88)$$

Заметим, что при каждом n неизвестными в уравнениях (83) (и в уравненни (80) при $n=2$) являются только те коэффициенты $c_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$, которые зависят от всех n аргументов $t_1, \ldots, t_n$. В силу свойства (2.49) коэффициентов согласованных ортогональных разложений от всех n аргументов $t_1, \ldots, t_n$ зависят только те коэффициенты $c_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$, у которых ни один из векторных индексов $\nu_1, \ldots, \nu_n$ не равен нулю, т. е. ни одна из сумм $|\nu_1|, \ldots, |\nu_n|$ не равна нулю. Коэффициенты $c_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$, у которых некоторые из индексов $\nu_1, \ldots, \nu_n$ равны нулю, зависят только от тех аргументов $t_1, \ldots, t_n$, которым соответствуют ненулевые индексы, и, следовательно, определены ранее при нахождении коэффициентов разложений распределений меньших размерностей.

Проинтегрировав уравнения (68), (69) и (72), определим приближенно все параметры m, K, c_ν ($|\nu|=3, \ldots, N$) отрезка разложения одномерной плотности $f_1(z;\ t)$ как функции времени t. Проинтегрировав после этого уравнения (83) с начальными условиями (86) при $n=2$, $t_2>t_1$ совместно с уравнением (80) при начальном условии $K(t_1, t_1)=K(t_1)$, определим приближенно ковариационную функцию $K(t_1, t_2)$ процесса $Z(t)$ и все оставшиеся неизвестными коэффициенты $c_{\nu_1\nu_2}$ отрезка разложения двумерной плотности $f_2(z_1, z_2; t_1, t_2)$. Интегрируя далее уравнения (83) с начальными условиями (86) при $t_1 < \ldots < t_n$ последовательно при $n=3, \ldots, N$, приближенно определим коэффициенты $c_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$ отрезков разложений (79) плотностей $f_n(z_1, \ldots, z_n; t_1, \ldots, t_n)$ $(n=3, \ldots, N)$. После этого коэффициенты отрезков разложений (75) всех остальных конечномерных плотностей процесса $Z(t)$ определятся по формуле (2.49), так как при $n > N$ по меньшей мере $n-N$ индексов равны нулю у всех коэффициентов $c_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$ в (79). В результате будут приближенно определены все конечномерные распределения процесса $Z(t)$.

В случае непрерывно-дискретной системы с вектором состояния (расширенным), определяемым уравнениями (7а) п. 6.4.1, уравнения (83) заменяются уравнениями

$$\partial c_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(t_1, \ldots, t_n)/\partial t_n = \varphi^0_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(m, K, t_1, \ldots, t_n) + \\ + \sum_{k=3}^{N} \sum_{|\nu_1|+\ldots+|\nu_n|=k} \varphi_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n, \nu_1, \ldots, \nu_n}(m, K, t_1, \ldots, t_n) \times \\ \times c_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(t_1, \ldots, t_n) + q^m_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(\alpha)^{\mathrm{T}} \dot{m}_{t_n} + \\ + \sum_{h=1}^{n-1} \mathrm{tr}\left[q^{K_h}_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(\alpha) \partial K(t_h, t_n)/\partial t_n\right] + \mathrm{tr}\left[q^{K_n}_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(\alpha) \dot{K}_{t_n}\right],$$

$$c_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(t_1, \ldots, t_{n-1}, t^{(k+1)}) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} q_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_{n-1}, [z_n'^{\mathrm{T}}\ \omega_k(\bar{z}_n', v)^{\mathrm{T}}\ z_n''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}) \times \\ \times \eta_k(v) f_n^*(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n; \theta_n(t^{(k+1)}-0))\, dv\, d\bar{z}_1 \ldots d\bar{z}_n$$

$$(|\varkappa_1|, \ldots, |\varkappa_n| = 1, \ldots, N-n+1;\ |\varkappa_1| + \ldots + |\varkappa_n| = n, \ldots, N) \tag{83а}$$

с функцией $f_n^*(z_1, \ldots, z_n; \theta_n)$, определяемой формулой (79). Формулы (84) и (85) в этом случае заменяются формулами

$$\varphi^0_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(m, K, t_1, \ldots, t_n) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ q_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_{n-1}, [\partial^{\mathrm{T}}/i\partial\lambda_n'\ \bar{z}_n''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}) [i\lambda_n'^{\mathrm{T}} a(z_n, t_n) + \\ + \chi(b(z_n, t_n)^{\mathrm{T}} \lambda_n'; t_n)] e^{i\lambda_n'^{\mathrm{T}} z_n'} \Big\}_{\lambda_n'=0} w_n(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)\, d\bar{z}_1 \ldots d\bar{z}_n, \tag{84а}$$

$$\varphi_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n, \nu_1, \ldots, \nu_n}(m, K, t_1, \ldots, t_n) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ q_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_{n-1}, [\partial^{\mathrm{T}}/i\partial\lambda_n'\ \bar{z}_n''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}) [i\lambda_n'^{\mathrm{T}} a(z_n, t_n) + \\ + \chi(b(z_n, t_n)^{\mathrm{T}} \lambda_n'; t_n)] e^{i\lambda_n'^{\mathrm{T}} z_n'} \Big\}_{\lambda_n'=0} \times \\ \times p_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)\, w_n(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)\, d\bar{z}_1 \ldots d\bar{z}_n, \tag{85а}$$

где $\bar{z}''_n = [z_{n,\,\pi+1} \ldots z_{n,\,p+\pi}]^{\mathrm{T}}$. Элементы $k_{rs}(t_1, t_2) = \mu_{e_r, e_s}(t_1, t_2)$ матрицы $K(t_1, t_2)$ в этом случае определяются уравнениями (55а) п. 6.4.5 при $n=2$ с функцией $f_2^*(\bar{z}_1, \bar{z}_2; \theta_2)$, определяемой формулой (79) при $n=2$, $z_1=\bar{z}_1$, $z_2=\bar{z}_2$.

6.6.5. Согласованные разложения по полиномам Эрмита. Так же, как в п. 6.6.2, доказывается, что при применении согласованных разложений по полиномам Эрмита элементы матриц $q^m_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(\alpha)$, $q^{K_h}_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(\alpha)$ пропорциональны соответствующим квазимоментам:

$$q^m_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n, r}(\alpha) = -\varkappa_{nr} c_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n - e_r}$$
$$(r=1, \ldots, p; \quad |\varkappa_1| + \ldots + |\varkappa_n| = 4, \ldots, N), \tag{89}$$

$$q^{K_h}_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n, rs}(\alpha) = -\varkappa_{hr}\varkappa_{ns} c_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_h - e_r, \ldots, \varkappa_n - e_s}$$
$$(r, s=1, \ldots, p; \quad h=1, \ldots, n-1; \quad |\varkappa_1| + \ldots + |\varkappa_n| = 5, \ldots, N), \tag{90}$$

$$q^{K_n}_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n, rr}(\alpha) = -\frac{1}{2}\varkappa_{nr}(\varkappa_{nr}-1) c_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n - 2e_r},$$

$$q^{K_n}_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n, rs}(\alpha) = -\varkappa_{nr}\varkappa_{ns} c_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n - e_r - e_s}$$
$$(r, s=1, \ldots, p; \quad s \neq r; \quad |\varkappa_1| + \ldots + |\varkappa_n| = 5, \ldots, N), \tag{91}$$

$q^m_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(\alpha) = 0$ при $|\varkappa_1| + \ldots + |\varkappa_n| = 3$;

$q^{K_h}_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(\alpha) = 0$ при $|\varkappa_1| + \ldots + |\varkappa_n| = 3$ и $|\varkappa_1| + \ldots + |\varkappa_n| = 4$.

Совершенно так же, как была выведена формула (77), получается формула

$$\Big\{ q_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(z_1, \ldots, z_{n-1}, \partial/i\partial\lambda_n)\,[i\lambda_n^{\mathrm{T}} a(z_n, t_n) + $$
$$+ \chi(b(z_n, t_n)^{\mathrm{T}}\lambda_n; t_n)]\, e^{i\lambda_n^{\mathrm{T}} z_n} \Big\}_{\lambda_n=0} =$$
$$= \sum_{s=1}^{p} \varkappa_{ns} a_s(z_n, t_n)\, G_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n - e_s}(z_1 - m_{t_1}, \ldots, z_n - m_{t_n}) +$$
$$+ \sum_{k=2}^{|\varkappa|} \sum_{|h|=k} \sum_{h_1, \ldots, h_p=0}^{k} C^{h_1}_{\varkappa_{n1}} \ldots C^{h_p}_{\varkappa_{np}} \omega_{h_1, \ldots, h_p}(z_n, t_n) \times$$
$$\times G_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n - h_1 e_1 - \ldots - h_p e_p}(z_1 - m_{t_1}, \ldots, z_n - m_{t_n}). \tag{92}$$

В частном случае нормального белого шума V в уравнении (7) эта формула принимает вид

$$\Big\{ q_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(z_1, \ldots, z_{n-1}, \partial/i\partial\lambda_n)\,[i\lambda_n^{\mathrm{T}} a(z_n, t_n) +$$
$$+ \chi(b(z_n, t_n)^{\mathrm{T}}\lambda_n; t)]\, e^{i\lambda_n^{\mathrm{T}} z_n} \Big\}_{\lambda_n=0} =$$
$$= \{ G_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(z_1 - m_{t_1}, \ldots, z_{n-1} - m_{t_{n-1}}, \partial/i\partial\lambda_n)\,[i\lambda_n^{\mathrm{T}} a(z_n, t_n) +$$
$$+ \chi(b(z_n, t_n)^{\mathrm{T}}\lambda_n; t_n)] \exp\{i\lambda_n^{\mathrm{T}}(z_n - m_{t_n})\}\}_{\lambda_n=0} =$$

$$= \sum_{s=1}^{p} \varkappa_{ns} a_s (z_n, t_n) G_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n - e_s} (z_1 - m_{t_1}, \ldots, z_n - m_{t_n}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{p} \varkappa_{ns} (\varkappa_{ns} - 1) \sigma_{ss} (z_n, t_n) G_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n - 2e_s} (z_1 - m_{t_1}, \ldots, z_n - m_{t_n}) +$$

$$+ \sum_{q=2}^{p} \sum_{s=1}^{q-1} \varkappa_{ns} \varkappa_{nq} \sigma_{sq} (z_n, t_n) G_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n - e_s - e_q} (z_1 - m_{t_1}, \ldots, z_n - m_{t_n}). \quad (93)$$

Как и уравнения для моментов, уравнения (72) и (83) для коэффициентов ортогональных разложений конечномерных плотностей процесса $Z(t)$ в практических задачах удобно составлять дифференцированием случайной функции $q_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(Z(t_1) \ldots Z(t_n))$ по t_n по формуле Ито (3.61) или по общей формуле дифференцирования сложной функции (3.73) и вычислением математических ожиданий полученных выражений с помощью приближенного представления соответствующих плотностей отрезками их ортогональных разложений (79).

Пример 26. В задаче примеров 15 и 20 при

$$\dot{Z} = -Z^3 + ZV$$

при аппроксимации распределений отрезками разложений по полиномам Эрмита с учетом полиномов до четвертой степени ковариационная функция $K(t_1, t_2)$ и квазимоменты $c_{21}(t_1, t_2)$, $c_{12}(t_1, t_2)$, $c_{31}(t_1, t_2)$, $c_{22}(t_1, t_2)$, $c_{13}(t_1, t_2)$ двумерного распределения процесса Z определяются уравнениями

$$\partial K(t_1, t_2)/\partial t_2 = -3[m^2(t_2) + D(t_2)] K(t_1, t_2) - \\ - 3m(t_2) c_{12}(t_1, t_2) - c_{13}(t_1, t_2),$$

$$\partial c_{21}(t_1, t_2)/\partial t_2 = -3m(t_2) K^2(t_1, t_2) - 3[m^2(t_2) + D(t_2)] c_{21}(t_1, t_2) - \\ - 6K(t_1, t_2) c_{12}(t_1, t_2) - 3m(t_2) c_{22}(t_1, t_2),$$

$$\partial c_{12}(t_1, t_2)/\partial t_2 = 2[\nu m(t_2) - 8m(t_2) D(t_2) - 6c_3(t_2)] K(t_1, t_2) + \\ + [\nu - 6m^2(t_2) - 12D(t_2)] c_{12}(t_1, t_2) - 6m(t_2) c_{13}(t_1, t_2),$$

$$\partial c_{31}(t_1, t_2)/\partial t_2 = -6K^3(t_1, t_2) - 18m(t_2) K(t_1, t_2) c_{21}(t_1, t_2) - \\ - 3[m^2(t_2) + D(t_2)] c_{31}(t_1, t_2) - 9K(t_1, t_2) c_{22}(t_1, t_2) + c_3(t_1) c_3(t_2),$$

$$\partial c_{22}(t_1, t_2)/\partial t_2 = 2[\nu - 6D(t_2)] K^2(t_1, t_2) + 2[\nu m(t_2) - \\ - 8m(t_2) D(t_2) + c_3(t_2)] c_{21}(t_1, t_2) - 24m(t_2) K(t_1, t_2) c_{12}(t_1, t_2) + \\ + [\nu - 6m^2(t_2) - 12D(t_2)] c_{22}(t_1, t_2) - 12K(t_1, t_2) c_{13}(t_1, t_2) + 6D(t_1) D^2(t_2),$$

$$\partial c_{13}(t_1, t_2)/\partial t_2 = 3\{D(t_2)[2\nu + 3D(t_2)] - 6m(t_2) c_3(t_2) - 3c_4(t_2)\} K(t_1, t_2) + \\ + 3[2\nu m(t_2) - 12m(t_2) D(t_2) + c_3(t_2)] c_{12}(t_1, t_2) + \\ + 3[\nu - 3m^2(t_2) - 9D(t_2)] c_{13}(t_1, t_2)$$

и начальными условиями

$$K(t_1, t_1) = D(t_1), \quad c_{21}(t_1, t_1) = c_{12}(t_1, t_1) = c_3(t_1), \\ c_{31}(t_1, t_1) = c_{22}(t_1, t_1) = c_{13}(t_1, t_1) = c_4(t_1).$$

Квазимоменты $c_{111}(t_1, t_2, t_3)$, $c_{211}(t_1, t_2, t_3)$, $c_{121}(t_1, t_2, t_3)$, $c_{112}(t_1, t_2, t_3)$ трехмерного распределения определяются уравнениями

$$\partial c_{111}(t_1, t_2, t_3)/\partial t_3 = -3[m^2(t_3) + D(t_3)] c_{111}(t_1, t_2, t_3) - \\ - 3m(t_3) c_{112}(t_1, t_2, t_3) - 6m(t_3) K(t_1, t_3) K(t_2, t_3) - \\ - 3K(t_1, t_3) c_{12}(t_2, t_3) - 3K(t_2, t_3) c_{12}(t_1, t_3),$$

$$\begin{gathered}
\partial c_{211}(t_1,\ t_2,\ t_3)/\partial t_3 = -12m(t_3)K(t_1,\ t_3)c_{111}(t_1,\ t_2,\ t_3) - \\
-3[m^2(t_3) + D(t_3)]c_{211}(t_1,\ t_2,\ t_3) - 6K(t_1,\ t_3)c_{112}(t_1,\ t_2,\ t_3) - \\
-6K^2(t_1,\ t_3)K(t_2,\ t_3) + c_3(t_3)c_{21}(t_1,\ t_2) - \\
-6m(t_3)K(t_2,\ t_3)c_{21}(t_1,\ t_3) - 3K(t_2,\ t_3)c_{22}(t_1,\ t_3), \\
\partial c_{121}(t_1,\ t_2,\ t_3)/\partial t_3 = -12m(t_3)K(t_2,\ t_3)c_{111}(t_1,\ t_2,\ t_3) - \\
-3[m^2(t_3) + D(t_3)]c_{121}(t_1,\ t_2,\ t_3) - 6K(t_1,\ t_3)c_{112}(t_1,\ t_2,\ t_3) - \\
-6K(t_1,\ t_3)K^2(t_2,\ t_3) - 6m(t_3)K(t_1,\ t_3)c_{21}(t_2,\ t_3) + \\
+c_3(t_3)c_{12}(t_1,\ t_2) - 3K(t_1,\ t_3)c_{22}(t_2,\ t_3), \\
\partial c_{112}(t_1,\ t_2,\ t_3)/\partial t_3 = 2[\nu m(t_3) - 6m(t_3)D(t_3) + c_3(t_3)]c_{111}(t_1,\ t_2,\ t_3) + \\
+[\nu - 6m^2(t_3) - 12D(t_3)]c_{112}(t_1,\ t_2,\ t_3) + \\
+2[\nu - 6D(t_3)]K(t_1,\ t_3)K(t_2,\ t_3) - 12m(t_3)[K(t_2,\ t_3)c_{12}(t_1,\ t_3) + \\
+K(t_1,\ t_3)c_{12}(t_2,\ t_3)] - 6[K(t_2,\ t_3)c_{13}(t_1,\ t_3) + K(t_1,\ t_3)c_{13}(t_2,\ t_3)]
\end{gathered}$$

и начальными условиями

$$c_{111}(t_1,\ t_2,\ t_2) = c_{12}(t_1,\ t_2), \quad c_{211}(t_1,\ t_2,\ t_2) = c_{22}(t_1,\ t_2),$$
$$c_{121}(t_1,\ t_2,\ t_2) = c_{112}(t_1,\ t_2,\ t_2) = c_{13}(t_1,\ t_2).$$

Единственный квазимомент четырехмерного распределения $c_{1111}(t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4)$, зависящий от четырех переменных $t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4$, определяется уравнением

$$\begin{gathered}
\partial c_{1111}(t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4)/\partial t_4 = -3[m^2(t_4) + D(t_4)]c_{1111}(t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4) - \\
-6K(t_1,\ t_4)K(t_2,\ t_4)K(t_3,\ t_4) + c_3(t_4)c_{111}(t_1,\ t_2,\ t_3) - \\
-6m(t_4)[K(t_3,\ t_4)c_{111}(t_1,\ t_2,\ t_4) + K(t_2,\ t_4)c_{111}(t_1,\ t_3,\ t_4) + \\
+K(t_1,\ t_4)c_{111}(t_2,\ t_3,\ t_4)] - 3[K(t_3,\ t_4)c_{112}(t_1,\ t_2,\ t_4) + \\
+K(t_2,\ t_4)c_{112}(t_1,\ t_3,\ t_4) + K(t_1,\ t_4)c_{112}(t_2,\ t_3,\ t_4)]
\end{gathered}$$

и начальным условием

$$c_{1111}(t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_3) = c_{112}(t_1,\ t_2,\ t_3).$$

6.6.6. Приближенное определение стационарных процессов в нелинейных системах. Для приближенного определения одномерного распределения стационарного в узком смысле процесса в стационарной нелинейной стохастической дифференциальной системе методами, основанными на ортогональных разложениях, следует положить в уравнениях (68), (69), (72) $\dot{m} = 0$, $\dot{K} = 0$, $\dot{c}_\varkappa = 0$. Если полученные таким путем уравнения имеют решение, которое может служить параметрами соответствующего отрезка ортогонального разложения одномерного распределения, то можно предположить, что стационарный в узком смысле процесс в системе существует. В этом случае для определения других конечномерных распределений этого стационарного процесса следует заменить в уравнениях (80) и (83) производные по t_n производными по $\tau_{n-1} = t_n - t_1$, а начальные условия (86) принять в виде

$$c_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n}(\tau_1,\ \ldots,\ \tau_{n-2},\ \tau_{n-2}) = c_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1}+\varkappa_n}(\tau_1,\ \ldots,\ \tau_{n-2}).$$

6.6.7. Сокращение числа уравнений. Основной трудностью практического применения изложенных здесь методов, особенно для многомерных систем, является быстрый рост числа уравнений для моментов, семиинвариантов или коэффициентов отрезков ортогональных разложений плотностей с увеличением размерности p вектора состояния Z (в общем случае расширенного) и максимального порядка N используемых моментов. Табл. 2 показывает зависимость числа уравнений для параметров одномерного распределения от p и N. На практике часто встречаются случаи, когда p равно 100 или даже 200. В таких случаях число уравнений для параметров становится чрезмерно большим. Например, при $p=100$, $N=6$ число уравнений для параметров достигает $1{,}7\cdot 10^9$.

Таблица 2

N	p										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20
2	2	5	9	14	20	27	35	44	54	65	230
4	4	14	34	69	125	209	329	494	714	1000	10 625
6	6	27	83	209	461	923	1715	3002	5004	8007	
8	8	44	164	494	1286	3002	6434				
10	10	65	285	1000	3002	8007					

Для того чтобы уменьшить число уравнений для параметров распределений, можно, следуя идее Мальчикова [95], использовать такое приближение распределения, которое включает смешанные моменты или семиинварианты только второго порядка и не зависит от смешанных моментов или семиинвариантов высших порядков. Табл. 3 показывает зависимость числа уравнений для параметров одномерного распределения от размерности p вектора состояния Z и наивысшего порядка N учитываемых моментов каждой из компонент вектора Z, входящих в такое приближение. Строка, соответствующая $N=2$, показывает число уравнений для моментов первого и второго порядков для метода нормальной аппроксимации.

Таблица 3

N	p							
	10	20	30	40	50	100	150	200
2	65	230	495	860	1325	5150	11 475	20 300
4	85	270	555	840	1425	5350	11 475	20 700
6	105	310	615	1020	1525	5550	12 075	21 100
8	125	350	675	1100	1625	5750	12 375	21 500
10	145	390	735	1180	1725	5950	12 675	21 900

Сравнивая цифры в табл. 2 и 3, видим, что число уравнений для параметров распределения может быть значительно сокращено с помощью аппроксимаций распределений, включающих смешанные моменты или семиинварианты только второго порядка. В частности, в приведенном выше примере при $p=100$ и $N=6$

число уравнений сокращается с $1{,}7\cdot 10^9$ до 5550, т. е. приблизительно в $3\cdot 10^5$ раз. При $p=10$, $N=6$ число уравнений сокращается с 8007 до 105, т. е. приблизительно в 80 раз.

Такая аппроксимация распределения может быть получена различными путями. Например, можно принять, что все смешанные семиинварианты выше второго порядка равны нулю. В результате получаем рекуррентную формулу (61), определяющую смешанные моменты второго, третьего и высших порядков как функции моментов компонент случайного вектора и смешанных моментов второго порядка [88]. Другой путь состоит в использовании известных выражений смешанных центральных моментов через дисперсии и ковариации компонент случайного вектора для нормальных распределений (*ТВ*, п. 4.5.9):

$$\mu_{r_1, \ldots, r_s} = \frac{r_1! \ldots r_s!}{2^m m!} \sum k_{h_1 l_1} \ldots k_{h_m l_m} \quad \text{при } r_1 + \ldots + r_s = 2m,$$
$$\mu_{r_1, \ldots, r_s} = 0 \quad \text{при } r_1 + \ldots + r_s = 2m+1$$
$$(m = 1, 2, \ldots), \quad (94)$$

где сумма распространена на все различные перестановки $2m$ индексов $h_1, l_1, \ldots, h_m, l_m$, из которых r_1 равны 1, r_2 равны 2, $\ldots, r_s$ равны s, а $s=np$ для n-мерного распределения. Оба этих подхода позволяют использовать любую из аппроксимаций распределений § 6.4—6.6 и записать соответствующие уравнения (32), (42), (53), (55), (59), (60), (68), (69), (72), (80), (83) для моментов, семиинвариантов и коэффициентов ортогональных разложений, от которых зависит аппроксимирующая функция $f_1^*(z;\,\theta)$ или $f_n^*(z_1, \ldots, z_n;\,\theta_n)$. Если применяется метод ортогональных разложений, в частности, метод квазимоментов, то естественно пренебречь всеми членами разложений, содержащими коэффициенты c_ν, $c_{\nu_1, \ldots, \nu_n}$ с более чем одной отличной от нуля компонентой векторов ν, $[\nu_1^T \ldots \nu_n^T]^T$.

Пример 27. Для системы примеров 15 и 18,

$$\dot{Z} = -Z^3 + ZV,$$

изложенный метод при применении формулы (61) дает

$$\mu_{12}(t_1, t_2) = \mu_{21}(t_1, t_2) = 0,$$
$$\mu_{13}(t_1, t_2) = 3D(t_2)K(t_1, t_2),$$
$$\mu_{22}(t_1, t_2) = D(t_1)D(t_2) + 2K^2(t_1, t_2),$$
$$\mu_{31}(t_1, t_2) = 3D(t_1)K(t_1, t_2),$$
$$\mu_{111}(t_1, t_2, t_3) = 0,$$
$$\mu_{112}(t_1, t_2, t_3) = D(t_3)K(t_1, t_2) + 2K(t_1, t_3)K(t_2, t_3),$$
$$\mu_{121}(t_1, t_2, t_3) = D(t_2)K(t_1, t_3) + 2K(t_1, t_2)K(t_2, t_3),$$
$$\mu_{211}(t_1, t_2, t_3) = D(t_1)K(t_2, t_3) + 2K(t_1, t_2)K(t_1, t_3),$$
$$\mu_{1111}(t_1, t_2, t_3, t_4) = K(t_1, t_2)K(t_3, t_4) + K(t_1, t_3)K(t_2, t_4) + K(t_1, t_4)K(t_2, t_3).$$

Такой же результат дает формула (94), так как семиинварианты третьего и четвертого порядка равны нулю для нормального распределения. Расхождение между (61) и (94) появляется только при $N > 4$.

Подставляя полученные выражения $\mu_{12}(t_1, t_2)$ и $\mu_{13}(t_1, t_2)$ в уравнение примера 18 для ковариационной функции, получаем

$$\partial K(t_1, t_2)/\partial t_2 = -3[m^2(t_2) + D(t_2)]\, K(t_1, t_2), \quad t_2 > t_1.$$

После интегрирования этого приближенного уравнения с начальным условием $K(t_1, t_1) = D(t_1)$, можно найти все смешанные моменты четвертого порядка по вышеприведенным формулам. Тогда все конечномерные распределения процесса $Z(t)$ определятся так же, как в примерах 15 и 18.

Такое же уравнение для ковариационной функции дает метод квазимоментов, если мы положим в формулах (I) и (II) примера 18 $c_\nu = 0$, если больше, чем одна из компонент вектора ν отлична от нуля.

Пример 28. Для системы примера 17 формулы (61) и (94) дают

$$\mu_{12} = \mu_{21} = 0, \quad \mu_{13} = 3k_{12}k_{22},$$
$$\mu_{22} = k_{11}k_{22} + 2k_{12}^2, \quad \mu_{31} = 3k_{11}k_{12},$$

а уравнения примера 17 для моментов одномерного распределения приводятся к виду

$$\dot m_1 = -m_1 m_2 - k_{12}, \qquad \dot m_2 = -\alpha m_2,$$
$$\dot k_{11} = -2(m_2 k_{11} + m_1 k_{12}),$$
$$\dot k_{12} = -(m_2 + \alpha)\, k_{12} - m_1 k_{22},$$
$$\dot k_{22} = -2\alpha k_{22} + k^2 \nu,$$
$$\dot\mu_{30} = -3(m_2\mu_{30} + 2k_{11}k_{12}),$$
$$\dot\mu_{03} = -3\alpha\mu_{03},$$
$$\dot\mu_{40} = -4(3k_{12}\mu_{30} + m_2\mu_{40} + 3m_1 k_{11} k_{12}),$$
$$\dot\mu_{04} = -4\alpha\mu_{04} + 6k^2\nu k_{22}.$$

Приравнивая нулю c_{12}, c_{21}, c_{13}, c_{22}, c_{31} в методе квазимоментов, получаем вышеприведенные уравнения для m_1, m_2, k_{11}, k_{12}, k_{22}, а уравнения для μ_{30}, μ_{03}, μ_{40} и μ_{04} заменяются уравнениями

$$\dot c_{30} = -3(2k_{11}k_{12} + m_2 c_{30}),$$
$$\dot c_{03} = -3\alpha c_{03},$$
$$\dot c_{40} = -4(3k_{12}c_{30} + m_2 c_{40}),$$
$$\dot c_{04} = -4\alpha c_{04}.$$

Что касается многомерных распределений, то все приведенные аппроксимации дают уравнения

$$\partial K_{11}(t_1, t_2)/\partial t_2 = -m_2(t_2)\, K_{11}(t_1, t_2) - m_1(t_2)\, K_{12}(t_1, t_2),$$
$$\partial K_{12}(t_1, t_2)/\partial t_2 = -\alpha K_{12}(t_1, t_2),$$
$$\partial K_{21}(t_1, t_2)/\partial t_2 = -m_2(t_2)\, K_{21}(t_1, t_2) - m_1(t_2)\, K_{22}(t_1, t_2),$$
$$\partial K_{22}(t_1, t_2)/\partial t_2 = -\alpha K_{22}(t_1, t_2), \qquad t_2 > t_1$$

для ковариационной функции процесса $Z(t) = [Z_1(t_1)\ Z(t_2)]^{\mathrm{T}}$. Интегрируя сначала уравнения для моментов или квазимоментов одномерного распределения, а затем уравнения для ковариационных функций с начальными условиями $K_{11}(t_1, t_1) = k_{11}(t_1)$, $K_{12}(t_1, t_1) = K_{21}(t_1, t_1) = k_{12}(t_1)$, $K_{22}(t_1, t_1) = k_{22}(t_1)$ можем найти все конечномерные распределения процесса $Z(t) = [Z(t_1)\ Z(t_2)]^{\mathrm{T}}$, пользуясь соответствующими отрезками разложения по полиномам Эрмита или ряда Эджуорта (если применяется метод, использующий формулу (61) или (94)).

Последние два примера иллюстрируют значительные упрощения, которые дают рассмотренные упрощенные аппроксимации распределений. В задаче примера 28 количество уравнений для полной системы моментов первых четырех порядков составляет 115 вместо 13, полученных в примере 28.

Дальнейшее сокращение числа уравнений для параметров распределения возможно только при дополнительных ограничениях на структуру распределения.

§ 6.7. Метод эллипсоидальной аппроксимации

6.7.1. Эллипсоидальная аппроксимация одномерного распределения. Для более радикального сокращения числа уравнений для параметров распределения предположим, что распределение имеет эллипсоидальную структуру, т. е. плотность вектора состояния системы Z постоянна на поверхности каждого эллипсоида некоторого семейства подобных эллипсоидов. Этому условию удовлетворяет, в частности, нормальное распределение, для которого плотность постоянна на каждом эллипсоиде $(z^{\mathrm{T}}-m^{\mathrm{T}})C(z-m)=\mathrm{const}$, $C=K^{-1}$, где m и K — математическое ожидание и ковариационная матрица вектора состояния Z. На основании этого будем аппроксимировать одномерную плотность $f_1(z;\ t)$ случайного процесса $Z(t)$ в виде отрезка ортогонального разложения по полиномам, зависящим от квадратичной формы $u=(z^{\mathrm{T}}-m^{\mathrm{T}})C(z-m)$ [116].

Пусть $\{p_\nu(u),\ q_\nu(u)\}$ — биортонормальная система полиномов от u:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_\nu(u)\,q_\mu(u)\,w_1(u)\,dz=\delta_{\nu\mu},\qquad u=(z^{\mathrm{T}}-m^{\mathrm{T}})C(z-m)=x^{\mathrm{T}}Cx. \tag{95}$$

Примером такой биортонормальной системы полиномов может служить система полиномов, для которой весом служит γ-распределение (приложение 2). Аппроксимируя одномерную плотность $f_1(z;\ t)$ отрезком разложения по полиномам $p_\nu(u)$, будем иметь

$$f_1(z;\ t)\approx f_1^*(u;\ \theta)=w_1(u)\left[1+\sum_{\nu=2}^{N}c_\nu p_\nu(u)\right]\,^{*)}, \tag{96}$$

---

*) $c_1=0$ в силу того, что m и K — математическое ожидание и ковариационная матрица вектора состояния Z. Действительно, в этом случае формула (97) дает

$$c_1=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(z;\ t)\,q_1(u)\,dz=\int_{-\infty}^{\infty} w_1(u)\,q_1(u)\,dz=\int_{-\infty}^{\infty} w_1(u)\,p_0(u)\,q_1(u)\,dz=0$$

вследствие (95).

где θ — вектор, координатами которого служат компоненты вектора математического ожидания m вектора состояния Z, элементы его ковариационной матрицы K и коэффициенты $c_2, \ldots, c_N$, $w_1(u)$ — некоторая плотность, зависящая только от квадратичной формы u, а коэффициенты c_ν, согласно (2.38) и (2.40), определяются формулой

$$c_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z;\ t)\, q_\nu(u)\, dz = Mq_\nu(U) =$$
$$= [q_\nu((\partial^{\text{т}}/i\partial\lambda - m^{\text{т}})\, C\, (\partial/i\partial\lambda - m))\, g_1(\lambda;\ t)]_{\lambda=0}. \quad (97)$$

6.7.2. Уравнения для параметров распределения. Чтобы вывести уравнения для математического ожидания и ковариационной матрицы случайного вектора Z, найдем математические ожидания в формулах (8) и (13) при принятой аппроксимации (96) одномерной плотности:

$$\dot{m} = \int_{-\infty}^{\infty} a(z,\ t)\, f_1^*(u;\ \theta)\, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} a(z,\ t)\, w_1(u) \left[1 + \sum_{\nu=2}^{N} c_\nu p_\nu(u)\right] dz, \quad (98)$$

$$\dot{K} = \int_{-\infty}^{\infty} [a(z,\ t)(z^{\text{т}} - m^{\text{т}}) + (z - m)\, a(z,\ t)^{\text{т}} +$$
$$+ b(z,\ t)\, \nu(t)\, b(z,\ t)^{\text{т}}]\, f_1^*(u,\ \theta)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} [a(z,\ t)(z^{\text{т}} - m^{\text{т}}) +$$
$$+ (z - m)\, a(z,\ t)^{\text{т}} + b(z,\ t)\, \nu(t)\, b(z,\ t)^{\text{т}}]\, w_1(u) \left[1 + \sum_{\nu=2}^{N} c_\nu p_\nu(u)\right] dz. \quad (99)$$

Вводя обозначения, аналогичные (64) — (67),

$$\varphi_1(m,\ K,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(z,\ t)\, w_1(u)\, dz,$$

$$\varphi_{1\nu}(m,\ K,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(z,\ t)\, p_\nu(u)\, w_1(u)\, dz,$$

$$\varphi_2(m,\ K,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} [a(z,\ t)(z^{\text{т}} - m^{\text{т}}) + (z - m)\, a(z,\ t)^{\text{т}} +$$
$$+ b(z,\ t)\, \nu(t)\, b(z,\ t)^{\text{т}}]\, w_1(u)\, dz,$$

$$\varphi_{2\nu}(m,\ K,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} [a(z,\ t)(z^{\text{т}} - m^{\text{т}}) + (z - m)\, a(z,\ t)^{\text{т}} +$$
$$+ b(z,\ t)\, \nu(t)\, b(z,\ t)^{\text{т}}]\, p_\nu(u)\, w_1(u)\, dz,$$

представим (98) и (99) в виде

$$\dot{m}=\varphi_1(m,\ K,\ t)+\sum_{\nu=2}^{N} c_\nu\varphi_{1\nu}(m,\ K,\ t), \tag{100}$$

$$\dot{K}=\varphi_2(m,\ K,\ t)+\sum_{\nu=2}^{N} c_\nu\varphi_{2\nu}(m,\ K,\ t). \tag{101}$$

Для получения уравнений для коэффициентов разложения $c_\varkappa$ воспользуемся формулой (97):

$$c_\varkappa=[q_\varkappa((\partial^{\mathrm{T}}/i\partial\lambda-m^{\mathrm{T}})\,C\,(\partial/i\partial\lambda-m))\,g_1(\lambda;\ t)]_{\lambda=0}. \tag{102}$$

Дифференцируя (102) по времени t и учитывая, что полином $q_\varkappa(u)$ зависит от математического ожидания m и ковариационной матрицы K вектора Z, которые являются функциями времени, находим

$$\begin{aligned}\dot{c}_\varkappa=[q_\varkappa((\partial^{\mathrm{T}}/i\partial\lambda-m^{\mathrm{T}})\,C\,(\partial/i\partial\lambda-m))\,\partial g_1(\lambda;\ t)/\partial t]_{\lambda=0}+\\+[q_\varkappa^m((\partial^{\mathrm{T}}/i\partial\lambda-m^{\mathrm{T}})\,C\,(\partial/i\partial\lambda-m))^{\mathrm{T}}\,g_1(\lambda;\ t)]_{\lambda=0}\,\dot{m}+\\+\operatorname{tr}\{[q_\varkappa^K((\partial^{\mathrm{T}}/i\partial\lambda-m^{\mathrm{T}})\,C\,(\partial/i\partial\lambda-m))\,g_1(\lambda;\ t)]_{\lambda=0}\,\dot{K}\},\end{aligned} \tag{103}$$

где $q_\varkappa^m(u)$ — матрица-столбец производных полинома $q_\varkappa(u)=q_\varkappa((z^{\mathrm{T}}-m^{\mathrm{T}})\,C\,(z-m))$ по компонентам вектора m, $q_\varkappa^K(u)$ — квадратная матрица производных полинома $q_\varkappa(u)$ по элементам матрицы K. Подставив в (103) выражение для $\partial g_1(\lambda;\ t)/\partial t$ из (31), заменив плотность $f_1(z;\ t)$ аппроксимирующим ее отрезком ортогонального разложения (96) и имея в виду, что, согласно (97),

$$[q_\varkappa^m((\partial^{\mathrm{T}}/i\partial\lambda-m^{\mathrm{T}})\,C\,(\partial/i\partial\lambda-m))\,g_1(\lambda;\ t)]_{\lambda=0}=Mq_\varkappa^m(U),$$
$$[q_\varkappa^K((\partial^{\mathrm{T}}/i\partial\lambda-m^{\mathrm{T}})\,C\,(\partial/i\partial\lambda-m))\,g_1(\lambda;\ t)]_{\lambda=0}=Mq_\varkappa^K(U),$$

получим

$$\begin{aligned}\dot{c}_\varkappa=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{q_\varkappa\left(\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{i\partial\lambda}C\frac{\partial}{i\partial\lambda}\right)[i\lambda^{\mathrm{T}}a(z,\ t)+\chi(b(z,\ t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)]\,e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(z-m)}\right\}_{\lambda=0}\times\\\times\left[1+\sum_{\nu=2}^{N}c_\nu p_\nu(u)\right]w_1(u)\,dz+Mq_\varkappa^m(U)^{\mathrm{T}}\,\dot{m}+\operatorname{tr}\{Mq_\varkappa^K(U)\,\dot{K}\}\ ^{*)}.\end{aligned} \tag{104}$$

Все интегралы в (98), (99), (104) представляют собой p-кратные интегралы по компонентам вектора z.

В нашем случае $\partial q_\varkappa(u)/\partial m=q'_\varkappa(u)\,\partial u/\partial m$. А так как

$$u=\sum_{i,\ j=1}^{p} c_{ij}(z_i-m_i)(z_j-m_j),$$

---

*) Перенос $-m$ из аргумента полинома $q_\varkappa$ в аргумент показательной функции возможен в силу сказанного на с. 401.

то

$$\frac{\partial u}{\partial m_r} = -2\sum_{j=1}^{p} c_{rj}(z_j - m_j).$$

Отсюда видно, что вектор $\partial u/\partial m$ выражается формулой

$$\partial u/\partial m = -2C(z-m) = -2Cx, \quad x = z - m.$$

Следовательно, при принятой аппроксимации распределения вектора Z

$$Mq_\varkappa^m(U) = M\{-2q'_\varkappa(U)CX\} = -2\int_{-\infty}^{\infty} q'_\varkappa(u)Cxf_1^*(u;\ \theta)\,dx.$$

Вводя новую векторную переменную $y = C^{1/2}x$ *) и заметив, что $u = x^{\mathrm{T}}Cx = x^{\mathrm{T}}C^{1/2}C^{1/2}x = y^{\mathrm{T}}y$, получаем

$$Mq_\varkappa^m(U) = -2\int_{-\infty}^{\infty} q'_\varkappa(yy)C^{1/2}yf_1^*(yy;\ \theta)\,|C|^{-1/2}\,dy = 0, \qquad (105)$$

поскольку подынтегральная функция нечетна относительно каждой из координат вектора y, а интеграл от нечетной функции в симметричных пределах всегда равен нулю. В итоге второе слагаемое в (104) обращается в нуль.

Рассуждая аналогично, находим

$$\frac{\partial q_\varkappa^K(u)}{\partial k_{rs}} = q'_\varkappa(u)\frac{\partial u}{\partial k_{rs}} = q'_\varkappa(u)\,x^{\mathrm{T}}\frac{\partial C}{\partial k_{rs}}x.$$

Для вычисления производных элементов матрицы C по элементам матрицы K продифференцируем соотношение $KC = I$ по элементу матрицы K. Рассмотрим отдельно случаи одинаковых и различных индексов элемента матрицы K. В случае одинаковых индексов

$$\frac{\partial}{\partial k_{rr}}(KC) = \frac{\partial K}{\partial k_{rr}}C + K\frac{\partial C}{\partial k_{rr}} = 0.$$

Отсюда

$$K\frac{\partial C}{\partial k_{rr}} = -\frac{\partial K}{\partial k_{rr}}C, \qquad \frac{\partial C}{\partial k_{rr}} = -C\begin{array}{cc} \begin{array}{c} \quad\quad r \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0\ldots0\ldots0 \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ 0\ldots1\ldots0 \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ 0\ldots0\ldots0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ r \\ \\ \\ \end{array} \end{array} C,$$

*) Под C^k, как всегда, понимается $C^k = S\,\mathrm{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_p^k)S^{\mathrm{T}}$, где S — ортогональная матрица, приводящая C к диагональной форме $C = S\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)S^{\mathrm{T}}$, $k \in R$.

или, в скалярной форме,

$$\partial c_{ij}/\partial k_{rr} = -c_{ri}c_{rj}.$$

В случае различных индексов аналогичными рассуждениями приходим к формуле

$$\frac{\partial C}{\partial k_{rs}} = -C \begin{array}{c} \begin{matrix} r & s \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0\ldots0\ldots0\ldots0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0\ldots0\ldots1\ldots0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0\ldots1\ldots0\ldots0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0\ldots0\ldots0\ldots0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \\ r \\ \\ s \\ \\ \\ \end{matrix} C,$$

или, в скалярной форме,

$$\frac{\partial c_{ij}}{\partial k_{rs}} = -(c_{ri}c_{sj} + c_{si}c_{rj}).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial q_\varkappa(u)}{\partial k_{rr}} = -q'_\varkappa(u) \sum_{i,\,j=1}^{p} x_i x_j c_{ri} c_{rj} = -q'_\varkappa(u) \left(\sum_{i=1}^{p} x_i c_{ri}\right)^2 =$$
$$= -q'_\varkappa(u)(Cx)_r^2, \tag{106}$$

$$\frac{\partial q_\varkappa(u)}{\partial k_{rs}} = -q'_\varkappa(u) \sum_{i,\,j=1}^{p} x_i x_j (c_{ri}c_{sj} + c_{si}c_{rj}) =$$
$$= -2q'_\varkappa(u) \left(\sum_{i=1}^{p} x_i c_{ri} \sum_{j=1}^{p} x_j c_{sj}\right) = -2q'_\varkappa(u)(Cx)_r(Cx)_s, \tag{107}$$

где $(Cx)_k$ — k-я координата вектора Cx.

Таким образом, для вычисления третьего слагаемого в уравнении (104) необходимо найти математическое ожидание

$$Mq'_\varkappa(U)CXX^{\mathsf{T}}C = M_w q'_\varkappa(U)CXX^{\mathsf{T}}C + \sum_{\nu=2}^{N} c_\nu M_w q'_\varkappa(U) p_\nu(U) CXX^{\mathsf{T}}C.$$

Здесь M_w означает математическое ожидание при плотности $w_1(u)$. Очевидно, что нахождение этого математического ожидания сводится к вычислению математических ожиданий вида $M_w\{U^k CXX^{\mathsf{T}}C\}$, так как $q'_\varkappa(u)$ и $p_\nu(u)$ — полиномы переменной u. Выполнив в интеграле, выражающем M_w, замену переменных $y = C^{1/2}x$, запишем

$$M_w\{U^k CXX^{\mathsf{T}}C\} = M_w\{U^k C^{1/2} YY^{\mathsf{T}} C^{1/2}\} = C^{1/2} M_w\{U^k YY^{\mathsf{T}}\} C^{1/2}.$$

Вычислим сначала диагональные элементы матрицы $M_w U^k YY^{\mathsf{T}}$. Так как распределение случайного вектора $Y = C^{1/2}X$ обладает шаровой симметрией, то $M_w U^k Y_1^2 = \ldots = M_w U^k Y_p^2$. Поэтому положим $M_w\{U^k Y_i^2\} = \alpha$. Просуммировав по i и принимая во внимание, что $U = \sum_{i=1}^{p} Y_i^2 = Y^{\mathsf{T}}Y$, находим $M_w\{U^k Y^{\mathsf{T}} Y\} = M_w U^{k+1} = p\alpha$. Что касается недиагональных элементов матрицы $M_w\{U^k YY^{\mathrm{T}}\}$, то они оказываются нулевыми по той же причине, что и элементы матрицы $M_w q_\varkappa^m(Z)$. В итоге получаем $C^{1/2}M_w U^k YY^{\mathrm{T}}C^{1/2} = C^{1/2}(M_w U^{k+1}/p)\,IC^{1/2} = (M_w U^{k+1}/p)\,C^{1/2}IC^{1/2} = (M_w U^{k+1}/p)\,C$. Следовательно,

$$M_w U^k CXX^{\mathrm{T}}C = (M_w U^{k+1}/p)\,C.$$

Таким образом,

$$Mq'_\varkappa(U)\,CXX^{\mathrm{T}}C = \frac{1}{p}M_w\{q'_\varkappa(U)\,UC\} + \sum_{\nu=2}^{N}\frac{c_\nu}{p}M_w\{q'_\varkappa(U)\,p_\nu(U)\,UC\}. \tag{108}$$

Для вычисления математических ожиданий в (108) достаточно знать плотность величины U. Она выражается формулой (*ТВ*, пример 5.10)

$$\varphi(u) = au^{p/2-1}\,w_1(u), \tag{109}$$

где a — нормирующий множитель,

$$a^{-1} = \int_0^\infty u^{p/2-1}\,w_1(u)\,du. \tag{110}$$

На основании (109)

$$M_w q'_\varkappa(U)\,U = a\int_0^\infty q'_\varkappa(u)\,u^{p/2}\,w_1(u)\,du,$$

$$M_w q'_\varkappa(U)\,p_\nu(U)\,U = a\int_0^\infty q'_\varkappa(u)\,p_\nu(u)\,u^{p/2}\,w_1(u)\,du.$$

Подставив эти выражения в (108), будем иметь

$$Mq'_\varkappa(U)\,CXX^{\mathrm{T}}C = \left\{\frac{a}{p}\int_0^\infty q'_\varkappa(u)\,u^{p/2}w_1(u)\,du + \sum_{\nu=2}^{N}c_\nu\frac{a}{p}\int_0^\infty q'_\varkappa(u)\,p_\nu(u)\,u^{p/2}w_1(u)\,du\right\}C.$$

Для удобства введем обозначения

$$\gamma_{\varkappa 0} = \frac{a}{p}\int_0^\infty q'_\varkappa(u)\,u^{p/2}w_1(u)\,du, \tag{111}$$

$$\gamma_{\varkappa\nu} = \frac{a}{p}\int_0^\infty q'_\varkappa(u)\,p_\nu(u)\,u^{p/2}w_1(u)\,du. \tag{112}$$

Заметим, что вследствие ортогональности $p_\nu(u)$ ко всем функциям u^λ при $\lambda < \nu$ величина $\gamma_{\varkappa\nu}$ обращается в нуль при $\nu > \varkappa$ *). Поэтому

$$Mq''_\varkappa(U)\,CXX^{\mathrm{T}}C = \left(\gamma_{\varkappa 0} + \sum_{\nu=2}^{\varkappa} c_\nu \gamma_{\varkappa\nu}\right) C.$$

И, наконец, на основании (106) и (107) получаем

$$Mq^K_\varkappa(U) = -\left(\gamma_{\varkappa 0} + \sum_{\nu=2}^{\varkappa} c_\nu \gamma_{\varkappa\nu}\right) C. \tag{113}$$

После всех проведенных преобразований уравнение (104) принимает вид

$$\dot{c}_\varkappa = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ q_\varkappa\left(\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{i\,\partial\lambda} C \frac{\partial}{i\,\partial\lambda}\right) [i\lambda^{\mathrm{T}} a(z,\ t) + \chi(b(z,\ t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)]\, e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(z-m)} \right\}_{\lambda=0} \times$$
$$\times \left[1 + \sum_{\nu=2}^{N} c_\nu p_\nu(u)\right] w_1(u)\,dz - \left(\gamma_{\varkappa 0} + \sum_{\nu=2}^{\varkappa} c_\nu \gamma_{\varkappa\nu}\right) \operatorname{tr}[C\dot{K}].$$

Положив

$$\varphi^0_\varkappa(m,\ K,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ q_\varkappa\left(\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{i\,\partial\lambda} C \frac{\partial}{i\,\partial\lambda}\right) [i\lambda^{\mathrm{T}} a(z,\ t) + \right.$$
$$\left. + \chi(b(z,\ t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)]\, e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(z-m)} \right\}_{\lambda=0} w_1(u)\,dz, \tag{114}$$

$$\varphi_{\varkappa\nu}(m,\ K,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ q_\varkappa\left(\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{i\,\partial\lambda} C \frac{\partial}{i\,\partial\lambda}\right) [i\lambda^{\mathrm{T}} a(z,\ t) + \right.$$
$$\left. + \chi(b(z,\ t)^{\mathrm{T}}\lambda;\ t)]\, e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(z-m)} \right\}_{\lambda=0} p_\nu(u)\, w_1(u)\,dz \tag{115}$$

и подставив выражение (101) для $\dot{K}$, окончательно получим

$$\dot{c}_\varkappa = \varphi^0_\varkappa(m,\ K,\ t) + \sum_{\nu=2}^{N} c_\nu \varphi_{\varkappa\nu}(m,K,t) - \left(\gamma_{\varkappa 0} + \sum_{\nu=2}^{\varkappa} c_\nu \gamma_{\varkappa\nu}\right) \times$$
$$\times \left\{ \operatorname{tr}[C\varphi_2(m,\ K,\ t)] + \sum_{\nu=2}^{N} c_\nu \operatorname{tr}[C\varphi_{2\nu}(m,\ K,\ t)] \right\} \quad (\varkappa = 2,\ \ldots,\ N). \tag{116}$$

Уравнения (100), (101), (116) при начальных условиях

$$m(t_0) = m_0,\ K(t_0) = K_0,\ c_\varkappa(t_0) = c^0_\varkappa \quad (\varkappa = 2,\ \ldots,\ N) \qquad (117$$

---

*) Величина u^λ может быть выражена как линейная комбинация полиномов $q_0(u),\ q_1(u),\ \ldots,\ q_\lambda(u)$.

определяют m, K, $c_2, \ldots, c_N$ как функции времени. Для нахождения величин $c_\varkappa^0$ следует аппроксимировать плотность начального значения Z_0 вектора состояния системы формулой (96).

6.7.3. Вычисление подынтегральных функций в уравнениях. При аппроксимации (96) плотности $f_1(z;\, t)$ производные полинома $q_\varkappa(u)$ в формуле (75) выражаются через производные полинома $q_\varkappa(u)$ по u и первые и вторые производные квадратичной формы $u=(z^\mathrm{T}-m^\mathrm{T})\,C\,(z-m)$ по переменным $z_1, \ldots, z_p$.

Приведем конкретную формулу для случая нормального белого шума $V(t)$, представляющего собой слабую среднюю квадратическую производную винеровского процесса $W(t)$. В этом случае формула (76) дает

$$\left\{q_\varkappa\left(\frac{\partial^\mathrm{T}}{i\,\partial\lambda}\,C\,\frac{\partial}{i\,\partial\lambda}\right)[i\lambda^\mathrm{T}a(z,\, t)+\chi(b(z,\, t)^\mathrm{T}\lambda;\, t)]\,e^{i\lambda^\mathrm{T}(z-m)}\right\}_{\lambda=0}= \\ =\sum_{s=1}^{p}a_s(z,\, t)\,\frac{\partial q_\varkappa(u)}{\partial z_s}+\frac{1}{2}\sum_{s,\, r=1}^{p}\sigma_{sr}(z,\, t)\,\frac{\partial^2 q_\varkappa(u)}{\partial z_s\,\partial z_r}, \qquad (118)$$

где $\sigma_{sq}(z,\, t)$ — элементы матрицы $\sigma(z,\, t)=b(z,\, t)\,\nu(t)\,b(z,\, t)^\mathrm{T}$. В нашем случае

$$\frac{\partial q_\varkappa(u)}{\partial z_s}=\frac{\partial q_\varkappa(u)}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial z_s}=2q'_\varkappa(u)\sum_{j=1}^{p}c_{sj}(z_j-m_j),$$

$$\frac{\partial^2 q_\varkappa(u)}{\partial z_s\,\partial z_r}=4q''_\varkappa(u)\sum_{i=1}^{p}c_{ri}\,(z_i-m_i)\sum_{j=1}^{p}c_{sj}\,(z_j-m_j)+2q'_\varkappa(u)\,c_{rs}.$$

Подставив эти выражения в (118), получаем

$$\left\{q_\varkappa\left(\frac{\partial^\mathrm{T}}{i\,\partial\lambda}\,C\,\frac{\partial}{i\,\partial\lambda}\right)[i\lambda^\mathrm{T}a(z,\, t)+\chi(b(z,\, t)^\mathrm{T}\lambda;\, t)]\,e^{i\lambda^\mathrm{T}(z-m)}\right\}_{\lambda=0}= \\ =q'_\varkappa(u)\sum_{s=1}^{p}2a_s(z,\, t)\sum_{j=1}^{p}c_{sj}(z_j-m_j)+ \\ +\frac{1}{2}\sum_{s,\, r=1}^{p}\sigma_{sr}(z,\, t)\left(4q''_\varkappa(u)\sum_{i=1}^{p}c_{ri}\,(z_i-m_i)\sum_{j=1}^{p}c_{sj}\,(z_j-m_j)+2q'_\varkappa(u)\,c_{rs}\right),$$

или, в матричной форме,

$$\left\{q_\varkappa\left(\frac{\partial^\mathrm{T}}{i\,\partial\lambda}\,C\,\frac{\partial}{i\,\partial\lambda}\right)[i\lambda^\mathrm{T}a(z,\, t)+\chi(b(z,\, t)^\mathrm{T}\lambda;\, t)]\,e^{i\lambda^\mathrm{T}(z-m)}\right\}_{\lambda=0}= \\ =q'_\varkappa(u)\{2a(z,\, t)^\mathrm{T}\,C\,(z-m)+\mathrm{tr}\,[C\sigma(z,\, t)]\}+ \\ +2q''_\varkappa(u)\,(z^\mathrm{T}-m^\mathrm{T})\,C\sigma(z,\, t)\,C\,(z-m). \qquad (119)$$

6.7.4. Разложение одномерной плотности по полиномам, ортогональным по отношению к χ^2-распределению. Представим условие биортонормальности полиномов $p_\nu(u)$ и $q_\nu(u)$ в виде

$$M_w\{p_\nu(U)\, q_\mu(U)\} = \delta_{\nu\mu}.$$

Принимая во внимание выражение (109) для плотности случайной величины U, перепишем условие биортонормальности полиномов в форме

$$a \int_0^\infty p_\nu(u)\, q_\mu(u)\, u^{p/2-1} w_1(u)\, du = \delta_{\nu\mu}. \tag{120}$$

Для приложений большое значение имеет случай, когда за распределение $w_1(u)$ выбирается нормальное распределение

$$w_1(u) = w_1(x^{\mathsf{T}}Cx) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p\,|K|}} \exp\{-x^{\mathsf{T}}Cx/2\}. \tag{121}$$

В этом случае, согласно (110), $a^{-1} = \Gamma(p/2)/\sqrt{\pi^p |K|}$ и условие биортонормальности (120) принимает вид

$$\frac{1}{2^{p/2}\Gamma(p/2)} \int_0^\infty p_\nu(u)\, q_\mu(u)\, u^{p/2-1} e^{-u/2}\, du = \delta_{\nu\mu}. \tag{122}$$

Таким образом, задача сводится к нахождению биортонормальной системы полиномов, для которой весом служит χ^2-распределение с p степенями свободы (приложение 2). Для этого случая можно принять во всех предыдущих формулах

$$p_\nu(u) = \frac{(p-2)!!}{(p+2\nu-2)!!\,(2\nu)!!} S_{p\nu}(u), \quad q_\nu(u) = S_{p\nu}(u), \tag{123}$$

где $S_{p\nu}(u)$ $(\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ — полиномы, определяемые формулой (5) приложения 2.

Любая плотность $f(u)$, $u \geqslant 0$, удовлетворяющая условию

$$\int_0^\infty u^{-p/4+1/2} e^{u/4} f^2(u)\, du < \infty,$$

может быть представлена ортогональным разложением (приложение 2)

$$f(u) = \frac{1}{2^{p/2}\Gamma(p/2)} u^{p/2-1} e^{-u/2} \left\{1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(p-2)!!\, c_\nu S_{p\nu}(u)}{(p+2\nu-2)!!\,(2\nu)!!}\right\},$$

где

$$c_\nu = \int_0^\infty f(u)\, S_{p\nu}(u)\, du.$$

Отсюда следует, что любая плотность вероятности p-мерного случайного вектора $X = Z - m$, зависящая только от квадратичной формы $u = x^{\mathrm{T}}Cx$, может быть представлена разложением

$$f((z^{\mathrm{T}} - m^{\mathrm{T}})C(z-m)) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |K|}} \exp\{-(z^{\mathrm{T}} - m^{\mathrm{T}})C(z-m)/2\} \times \left\{1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(p-2)!!\, c_\nu S_{p\nu}(u)}{(p+2\nu-2)!!\,(2\nu)!!}\right\},$$

где в силу (97)

$$c_\nu = \int_0^\infty f((z^{\mathrm{T}} - m^{\mathrm{T}})C(z-m))\, S_{p\nu}((z^{\mathrm{T}} - m^{\mathrm{T}})C(z-m))\, dz = = MS_{p\nu}((Z^{\mathrm{T}} - m^{\mathrm{T}})C(Z-m)) = \left[S_{p\nu}\left(\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{i\,\partial\lambda} C \frac{\partial}{i\,\partial\lambda}\right) e^{-i\lambda^{\mathrm{T}}m} g(\lambda)\right]_{\lambda=0}.$$

Если принять $C = K^{-1}$, где K — ковариационная матрица случайного вектора Z, то $c_1 = 0$.

Если плотность $f(z)$ случайного вектора Z произвольным образом зависит от координат вектора z, то ее, конечно, нельзя представить точно разложением по полиномам $S_{p\nu}(u)$. Речь может идти только о приближенном представлении $f(z)$ конечным отрезком разложения.

При применении разложения $f_1(z;\, t)$ по полиномам $S_{p\nu}(u)$ величины $\gamma_{\varkappa 0}$, $\gamma_{\varkappa\nu}$, определяемые формулами (111) и (112) легко вычисляются. Для этого достаточно выполнить интегрирование по частям в (111), (112) и учесть ортогональность полинома $q_\varkappa(u)$ всем степеням u^λ при $\lambda < \varkappa$. В результате получим

$$\gamma_{\varkappa\nu} = 0 \quad \text{при } \nu < \varkappa - 1, \quad \gamma_{\varkappa,\,\varkappa-1} = (p + 2\varkappa - 2)\varkappa/p, \quad \gamma_{\varkappa\varkappa} = \varkappa/p. \qquad (124)$$

6.7.5. Вычисление типовых интегралов в уравнениях для параметров распределения. В приложениях функции $a(z, t)$ и $b(z, t)$ в уравнении (7) часто содержат полиномы относительно z и произведения полиномов на тригонометрические и показательные функции. Поэтому при составлении уравнений (100), (101), (116) приходится вычислять выражения вида $M_w\{U^n Z_1^{r_1} \ldots Z_p^{r_p}\}$ и $M_w\{U^n Z_1^{r_1} \ldots Z_p^{r_p} e^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z}\}$. Рассмотрим подробнее вычисление каждого из них в случае нормального распределения $w_1(u)$.

Введем функцию переменных α, $i\lambda_1, \ldots, i\lambda_p$:

$$\varphi(\alpha, i\lambda) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |K|}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^{\mathrm{T}}z - \alpha x^{\mathrm{T}}Cx/2}\, dz = = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |K|}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z - \alpha u/2}\, dz, \quad x = z - m.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{\partial^{n+r_1+\ldots+r_p}\varphi(\alpha, i\lambda)}{\partial\alpha^n\partial(i\lambda_1)^{r_1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{r_p}}=\frac{(-2)^{-n}}{\sqrt{(2\pi)^p|K|}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u^n z_1^{r_1}\ldots z_p^{r_p}e^{i\lambda^{\mathrm{T}}z-\alpha u/2}\,dz.$$

Отсюда видно, что

$$M_w U^n Z_1^{r_1}\ldots Z_p^{r_p}=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p|K|}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u^n z_1^{r_1}\ldots z_p^{r_p}e^{-x^{\mathrm{T}}Cx/2}\,dz=$$

$$=(-2)^n\left[\frac{\partial^{n+r_1+\ldots+r_p}\varphi(\alpha, i\lambda)}{\partial\alpha^n\partial(i\lambda_1)^{r_1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{r_p}}\right]_{\alpha=1,\ \lambda=0}. \qquad (125)$$

Для вычисления функции $\varphi(\alpha, i\lambda)$ сделаем замену переменных $z_k=m_k+\alpha^{-1/2}y_k$. Тогда получим

$$\varphi(\alpha, i\lambda)=\frac{\alpha^{-p/2}e^{i\lambda^{\mathrm{T}}m}}{\sqrt{(2\pi)^p|K|}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda^{\mathrm{T}}\alpha^{-1/2}y-y^{\mathrm{T}}Cy/2}\,dy.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p|K|}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda^{\mathrm{T}}\alpha^{-1/2}y-y^{\mathrm{T}}Cy/2}\,dy$$

представляет собой значение характеристической функции нормально распределенного случайного вектора Y с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $K=C^{-1}$ при значении аргумента $\alpha^{-1/2}\lambda$. Пользуясь известной формулой для характеристической функции нормального распределения (*ТВ*, пример 5.32), находим

$$\varphi(\alpha, i\lambda)=\alpha^{-p/2}e^{i\lambda^{\mathrm{T}}m-\lambda^{\mathrm{T}}K\lambda/2\alpha}. \qquad (126)$$

Положив для краткости $\lambda^{\mathrm{T}}K\lambda/2=v$, перепишем (126) в виде

$$\varphi(\alpha, i\lambda)=\alpha^{-p/2}e^{i\lambda^{\mathrm{T}}m-v/\alpha}.$$

Дифференцирование функции $\varphi(\alpha, i\lambda)$ по α будем проводить по правилу дифференцирования произведения двух функций:

$$(uv)^{(n)}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m u^{(m)}v^{(n-m)}.$$

В соответствии с ним

$$\frac{\partial^n\varphi(\alpha, i\lambda)}{\partial\alpha^n}=e^{i\lambda^{\mathrm{T}}m}\sum_{m=0}^{n}C_n^m(\alpha^{-p/2})^{(m)}(e^{-v/\alpha})^{(n-m)}=$$

$$=e^{i\lambda^{\mathrm{T}}m}\sum_{m=0}^{n}C_n^m(-p/2)(-p/2-1)\ldots$$

$$\ldots(-p/2-m+1)\,\alpha^{-p/2-m}(e^{-v/\alpha})^{(n-m)}. \qquad (127)$$

Теперь будем вычислять производные второго сомножителя:

$$(e^{-v/\alpha})' = v\alpha^{-2}e^{-v/\alpha},$$
$$(e^{-v/\alpha})'' = (-2v\alpha^{-3} + v^2\alpha^{-4})\,e^{-v/\alpha},$$
$$(e^{-v/\alpha})''' = (3!v\alpha^{-4} - 6v^2\alpha^{-5} + v^3\alpha^{-6})\,e^{-v/\alpha}.$$

Постараемся выявить общую закономерность. Для этого положим

$$(e^{-v/\alpha})^{(k)} = \sum_{l=1}^{k} (-1)^{k-l}\beta_{kl}v^l\alpha^{-k-l}e^{-v/\alpha}. \tag{128}$$

Тогда, продифференцировав еще раз, будем иметь

$$(e^{-v/\alpha})^{(k+1)} = \sum_{l=1}^{k} (-1)^{k-l+1}(k+l)\,\beta_{kl}v^l\alpha^{-k-l-1}e^{-v/\alpha} + \sum_{l=1}^{k} (-1)^{k-l}\beta_{kl}v^{l+1}\alpha^{-k-l-2}e^{-v/\alpha}.$$

Заменив во второй сумме $l+1$ на l, получим

$$(e^{-v/\alpha})^{(k+1)} = \sum_{l=1}^{k} (-1)^{k-l+1}(k+l)\,\beta_{kl}v^l\alpha^{-k-l-1}e^{-v/\alpha} + \sum_{l=2}^{k+1} (-1)^{k-l+1}\beta_{k,\,l-1}v^l\alpha^{-k-l-1}e^{-v/\alpha}.$$

Но в силу (128)

$$(e^{-v/\alpha})^{(k+1)} = \sum_{l=1}^{k+1}(-1)^{k+1-l}\beta_{k+1,\,l}v^l\alpha^{-k-1-l}e^{-v/\alpha}.$$

Сравнив коэффициенты при α^{-k-l-1} $(l=1, \ldots, k+1)$, получим рекуррентные формулы

$$\beta_{k+1,\,l} = (k+l)\,\beta_{kl} + \beta_{k,\,l-1} \qquad (l=2, \ldots, k), \tag{129}$$
$$\beta_{k+1,\,1} = (k+1)\,\beta_{k1}, \ \beta_{k+1,\,k+1} = \beta_{kk} \qquad (k=2, 3, \ldots). \tag{130}$$

Имея в виду, что $\beta_{11}=1$, $\beta_{21}=2$, $\beta_{22}=1$, $\beta_{31}=3!$, $\beta_{33}=1$, находим из (130)

$$\beta_{k1} = k!, \ \beta_{kk} = 1. \tag{131}$$

Рекуррентные формулы (129)—(131), определяют все коэффициенты β_{kl} в формуле (128). Подставив выражение (128) при $k=n-m$ в (127) и имея в виду, что

$$(-p/2)(-p/2-1)\ \ldots\ (-p/2-m+1) = (-1)^m\frac{\Gamma(m+p/2)}{\Gamma(p/2)}, \tag{132}$$

получаем

$$\frac{\partial^n \varphi(\alpha, i\lambda)}{\partial\alpha^n} = e^{i\lambda^{\mathrm{T}} m}\left\{\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m C_n^m \frac{\Gamma(m+p/2)}{\Gamma(p/2)} \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{l=1}^{n-m}(-1)^{n-m-l}\beta_{n-m,\,l}v^l\alpha^{-p/2-n-l} + (-1)^n\frac{\Gamma(n+p/2)}{\Gamma(p/2)}\alpha^{-p/2-n}\right\}e^{-v/\alpha}. \tag{133}$$

Для преобразования (133) изменяем порядок суммирования:

$$\frac{\partial^n \varphi(\alpha, i\lambda)}{\partial\alpha^n} = (-1)^n e^{i\lambda^{\mathrm{T}} m}\left\{\frac{\Gamma(n+p/2)}{\Gamma(p/2)}\alpha^{-p/2-n} + \right.$$
$$\left. + \sum_{l=1}^{n}(-1)^l v^l \alpha^{-p/2-l-n}\sum_{m=0}^{n-l} C_n^m \beta_{n-m,\,l}\frac{\Gamma(m+p/2)}{\Gamma(p/2)}\right\}e^{-v/\alpha}.$$

Положив

$$\varepsilon_{n0} = \Gamma(n+p/2)/\Gamma(p/2), \tag{134}$$

$$\varepsilon_{nl} = \sum_{m=0}^{n-l} C_n^m \beta_{n-m,\,l}\frac{\Gamma(m+p/2)}{\Gamma(p/2)} \qquad (l=1,\ \ldots,\ n), \tag{135}$$

получим при $\alpha=1$

$$\left[\frac{\partial^n \varphi(\alpha, i\lambda)}{\partial\alpha^n}\right]_{\alpha=1} = (-1)^n \sum_{l=0}^{n} \varepsilon_{nl}(-v)^l e^{i\lambda^{\mathrm{T}} m - v}. \tag{136}$$

Далее, руководствуясь (125), мы должны выполнить дифференцирование по $(i\lambda)$. Но вместо дифференцирования по $(i\lambda)$ разложим правую часть формулы (136) в ряд Маклорена. Тогда значение производной

$$\left[\frac{\partial^{n+r_1+\ldots+r_p}\varphi(\alpha, i\lambda)}{\partial\alpha^n\partial(i\lambda_1)^{r_1}\ \ldots\ \partial(i\lambda_p)^{r_p}}\right]_{\alpha=1}$$

при $\lambda=0$ будет равно коэффициенту при $(i\lambda_1)^{r_1}\ \ldots\ (i\lambda_p)^{r_p}$, умноженному на $r_1!\ \ldots\ r_p!$.

Напомним, что $v=\lambda^{\mathrm{T}}K\lambda/2$. Следовательно,

$$(-v) = (i\lambda)^{\mathrm{T}} K(i\lambda)/2 = 2^{-1}\sum_{j,\,q=1}^{p} k_{jq}(i\lambda_j)(i\lambda_q),$$

$$(-v)^l = 2^{-l}\sum_{j_1,\,q_1,\,\ldots,\,j_l,\,q_l=1}^{p} k_{j_1q_1}\ \ldots\ k_{j_lq_l}(i\lambda_{j_1})(i\lambda_{q_1})\ldots(i\lambda_{j_l})(i\lambda_{q_l}). \tag{137}$$

Приведя подобные члены, находим

$$(-v)^l = 2^{-l}\sum_{|h|=2l}(i\lambda_1)^{h_1}\ldots(i\lambda_p)^{h_p}\sum k_{j_1q_1}\ldots k_{j_lq_l},\ |h| = h_1+\ldots+h_p. \tag{138}$$

В формуле (138) вторая сумма распространена на все различные перестановки $2l$ индексов $j_1, q_1, \ldots, j_l, q_l$, из которых h_1 равны 1, h_2 равны 2, ..., h_p равны p. Но согласно формуле (94)

$$\sum k_{j_1 q_1} \ldots k_{j_l q_l} = \frac{2^l l!}{h_1! \ldots h_p!} \mu^w_{h_1, \ldots, h_p},$$

где $\mu^w_{h_1, \ldots, h_p}$ — центральные моменты нормального распределения $w_1(x^{\text{T}}Cx)$. Следовательно,

$$(-v)^l = \sum_{|h|=2l} \frac{l!}{h_1! \ldots h_p!} \mu^w_{h_1, \ldots, h_p} (i\lambda_1)^{h_1} \ldots (i\lambda_p)^{h_p}. \tag{139}$$

В формуле (136) также присутствует величина $e^{i\lambda^{\text{T}}m-v}$. Она представляет собой характеристическую функцию нормально распределенного случайного вектора (*ТВ*, пример 5.32)

$$e^{i\lambda^{\text{T}}m-v} = e^{i\lambda^{\text{T}}m - \lambda^{\text{T}}K\lambda/2}.$$

Разложив ее в ряд Маклорена, получим (*ТВ*, п. 4.5.3)

$$e^{i\lambda^{\text{T}}m-v} = \sum_{s_1, \ldots, s_p=0}^{\infty} \frac{\alpha^w_{s_1, \ldots, s_p}}{s_1! \ldots s_p!} (i\lambda_1)^{s_1} \ldots (i\lambda_p)^{s_p}, \tag{140}$$

где $\alpha^w_{s_1, \ldots, s_p}$ — начальные моменты нормального распределения $w_1(x^{\text{T}}Cx)$.

Теперь перемножим формулы (139) и (140) почленно:

$$(-v)^l e^{i\lambda^{\text{T}}m-v} = \sum_{|h|=2l} \sum_{s_1, \ldots, s_p=0}^{\infty} \frac{l!\mu^w_{h_1, \ldots, h_p}\alpha^w_{s_1, \ldots, s_p}}{h_1! \ldots h_p! s_1! \ldots s_p!} (i\lambda_1)^{h_1+s_1} \ldots$$

$$\ldots (i\lambda_p)^{h_p+s_p} = \sum_{|h|=2l} \sum_{|r| \geqslant 2l} \frac{l!\mu^w_{h_1, \ldots, h_p}\alpha^w_{r_1-h_1, \ldots, r_p-h_p}}{h_1! \ldots h_p! (r_1-h_1)! \ldots (r_p-h_p)!} \times$$

$$\times (i\lambda_1)^{r_1} \ldots (i\lambda_p)^{r_p}. \tag{141}$$

Вторая сумма распространена на все $r_1, \ldots, r_p$, сумма которых не меньше $2l$, так как $r_1 \geqslant h_1, \ldots, r_p \geqslant h_p$, вследствие чего $|r| \geqslant |h| = 2l$.

Подставив выражение (141) в (136), будем иметь

$$[\partial^n \varphi(\alpha, i\lambda)/\partial\alpha^n]_{\alpha=1} =$$

$$= (-1)^n \sum_{l=0}^{n} \varepsilon_{nl} \sum_{|h|=2l} \sum_{|r| \geqslant 2l} \frac{l!\mu^w_{h_1, \ldots, h_p}\alpha^w_{r_1-h_1, \ldots, r_p-h_p}}{h_1! \ldots h_p! (r_1-h_1)! \ldots (r_p-h_p)!} \times$$

$$\times (i\lambda_1)^{r_1} \ldots (i\lambda_p)^{r_p}.$$

Изменив порядок суммирования по r и l, получим

$$[\partial^n \varphi(\alpha,\ i\lambda)/\partial\alpha^n]_{\alpha=1} = (-1)^n \sum_{r_1,\ \ldots,\ r_p=0}^{\infty} (i\lambda_1)^{r_1}\ldots(i\lambda_p)^{r_p} \sum_{l=0}^{\min(n,\ [|r|/2])} l!\,\varepsilon_{nl} \times$$
$$\times \sum_{|h|=2l} \frac{\mu^w_{h_1,\ \ldots,\ h_p}\alpha^w_{r_1-h_1,\ \ldots,\ r_p-h_p}}{h_1!\ldots h_p!\,(r_1-h_1)!\ldots(r_p-h_p)!}.$$

Отсюда видно, что

$$\left[\frac{\partial^{n+r_1+\ldots+r_p}\varphi(\alpha,\ i\lambda)}{\partial\alpha^n\,\partial(i\lambda_1)^{r_1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{r_p}}\right]_{\alpha=1,\ \lambda=0} =$$
$$= (-1)^n r_1!\ldots r_p! \sum_{l=0}^{\min(n,\ [|r|/2])} l!\,\varepsilon_{nl} \sum_{|h|=2l} \frac{\mu^w_{h_1,\ \ldots,\ h_p}\alpha^w_{r_1-h_1,\ \ldots,\ r_p-h_p}}{h_1!\ldots h_p!\,(r_1-h_1)!\ldots(r_p-h_p)!}.$$

В итоге формула (125) принимает вид

$$M_w U^n Z_1^{r_1}\ldots Z_p^{r_p} = 2^n \sum_{l=0}^{\min(n,\ [|r|/2])} l!\,\varepsilon_{nl} \sum_{|h|=2l} C_{r_1}^{h_1}\ldots C_{r_p}^{h_p}\,\mu^w_{h_1,\ \ldots,\ h_p}\alpha^w_{r_1-h_1,\ \ldots,\ r_p-h_p}. \quad (142)$$

Для вычисления центральных и начальных моментов нормального распределения μ_r^w и α_r^w удобны рекуррентные формулы

$$\mu_r^w = \sum_{s=1}^{p} r_s k_{1s}\mu^w_{r-e_1-e_s} - k_{11}\mu^w_{r-2e_1}, \quad (143)$$

$$\alpha_r^w = m_1\alpha^w_{r-e_1} + \sum_{s=1}^{p} r_s k_{1s}\alpha^w_{r-e_1-e_s} - k_{11}\alpha^w_{r-2e_1}, \quad (144)$$

где r — векторный индекс $r=[r_1\ldots r_p]^{\mathrm{T}}$, а e_s — p-мерный вектор, все компоненты которого равны 0, кроме s-й, равной 1. Для вывода этих формул достаточно применить формулу (39) для производной произведения двух функций к

$$\left(e^{-i\lambda^{\mathrm{T}}m} g_1(\lambda;\ t)\right)\partial\ln\left(e^{-i\lambda^{\mathrm{T}}m} g_1(\lambda;\ t)\right)/\partial(i\lambda_1)$$

и

$$g_1(\lambda;\ t)\,\partial\ln g_1(\lambda;\ t)/\partial(i\lambda_1)$$

и учесть, что семиинварианты первого и второго порядков совпадают с компонентами вектора математического ожидания m и элементами ковариационной матрицы K, а все семиинварианты выше второго порядка нормально распределенной случайной величины равны нулю.

Теперь вычислим выражение $M_w U^n Z_1^{r_1} \ldots Z_p^{r_p} e^{i\lambda^{\mathrm{T}} Z}$. Для этого воспользуемся вышеизложенным методом. Очевидно, что

$$M_w U^n Z_1^{r_1} \ldots Z_p^{r_p} e^{i\lambda^{\mathrm{T}} Z} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |K|}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^n z_1^{r_1} \ldots z_p^{r_p} e^{i\lambda^{\mathrm{T}} z - u/2}\, dz.$$

Из приведенных в начале пункта формул для функции $\varphi(\alpha, i\lambda)$ и ее n-й производной видно, что

$$M_w U^n Z_1^{r_1} \ldots Z_p^{r_p} e^{i\lambda^{\mathrm{T}} Z} = (-2)^n \left[\frac{\partial^{n+r_1+\ldots+r_p} \varphi(\alpha, i\lambda)}{\partial \alpha^n\, \partial (i\lambda_1)^{r_1} \ldots \partial (i\lambda_p)^{r_p}} \right]_{\alpha=1}.$$

Пользуясь формулой (136), находим

$$M_w U^n Z_1^{r_1} \ldots Z_p^{r_p} e^{i\lambda^{\mathrm{T}} Z} =$$
$$= 2^n \frac{\partial^{r_1+\ldots+r_p}}{\partial (i\lambda_1)^{r_1} \ldots \partial (i\lambda_p)^{r_p}} \sum_{l=0}^{n} \varepsilon_{nl} \left(\frac{-\lambda^{\mathrm{T}} K \lambda}{2} \right)^l e^{i\lambda^{\mathrm{T}} m - \lambda^{\mathrm{T}} K \lambda/2}. \quad (145)$$

Заметив, что все выведенные формулы справедливы и при комплексных $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, получим из (145) при $i\lambda = \mu + i\nu$, $|r| = 0$

$$M_w U^n e^{(\mu^{\mathrm{T}} + i\nu^{\mathrm{T}}) Z} = \sum_{l=0}^{n} \varepsilon_{nl} 2^{n-l} [\mu^{\mathrm{T}} K \mu - \nu^{\mathrm{T}} K \nu +$$
$$+ i(\mu^{\mathrm{T}} K \nu + \nu^{\mathrm{T}} K \mu)]^l \exp\{(\mu^{\mathrm{T}} + i\nu^{\mathrm{T}}) m + [\mu^{\mathrm{T}} K \mu - \nu^{\mathrm{T}} K \nu +$$
$$+ i(\mu^{\mathrm{T}} K \nu + \nu^{\mathrm{T}} K \mu)]/2\}.$$

Разделив здесь действительную и мнимую части, придем к формулам для $M_w U^n e^{\mu^{\mathrm{T}} Z} \cos \nu^{\mathrm{T}} Z$ и $M_w U^n e^{\mu^{\mathrm{T}} Z} \sin \nu^{\mathrm{T}} Z$.

Аналогично, выполнив в (145) дифференцирование и положив $i\lambda = \mu + i\nu$, выведем при $|r| = 1$ и $|r| = 2$ формулы для $M_w U^n Z_s e^{(\mu^{\mathrm{T}} + i\nu^{\mathrm{T}}) Z}$, $M_w U^n Z_s e^{\mu^{\mathrm{T}} Z} \cos \nu^{\mathrm{T}} Z$, $M_w U^n Z_s e^{\mu^{\mathrm{T}} Z} \sin \nu^{\mathrm{T}} Z$, $M_w U^n Z_s^2 e^{(\mu^{\mathrm{T}} + i\nu^{\mathrm{T}}) Z}$, $M_w U^n Z_s Z_q e^{(\mu^{\mathrm{T}} + i\nu^{\mathrm{T}}) Z}$. В частности, при $\nu = 0$ или при $\mu = 0$ получаем формулы

$$M_w U^n e^{\mu^{\mathrm{T}} Z} = \sum_{l=0}^{n} 2^{n-l} \varepsilon_{nl} (\mu^{\mathrm{T}} K \mu)^l e^{\mu^{\mathrm{T}} m + \mu^{\mathrm{T}} K \mu/2},$$

$$M_w U^n \cos \nu^{\mathrm{T}} Z = \sum_{l=0}^{n} 2^{n-l} \varepsilon_{nl} (-\nu^{\mathrm{T}} K \nu)^l e^{-\nu^{\mathrm{T}} K \nu/2} \cos \nu^{\mathrm{T}} m,$$

$$M_w U^n \sin \nu^{\mathrm{T}} Z = \sum_{l=0}^{n} 2^{n-l} \varepsilon_{nl} (-\nu^{\mathrm{T}} K \nu)^l e^{-\nu^{\mathrm{T}} K \nu/2} \sin \nu^{\mathrm{T}} m,$$

$$M_w U^n Z e^{\mu^{\mathrm{T}} Z} =$$
$$= \sum_{l=0}^{n} 2^{n-l} \varepsilon_{nl} (\mu^{\mathrm{T}} K \mu)^{l-1} [\mu^{\mathrm{T}} K \mu m + (2l + \mu^{\mathrm{T}} K \mu) K \mu] e^{\mu^{\mathrm{T}} m + \mu^{\mathrm{T}} K \mu/2}.$$

$$M_w U^n Z \cos \nu^{\mathrm{T}} Z =$$
$$= -\sum_{l=0}^{n} 2^{n-l} \varepsilon_{nl} \left[\nu^{\mathrm{T}} K \nu m \cos \nu^{\mathrm{T}} m + (2l - \nu^{\mathrm{T}} K \nu) K \nu \sin \nu^{\mathrm{T}} m\right] e^{-\nu^{\mathrm{T}} K \nu/2},$$
$$M_w U^n Z \sin \nu^{\mathrm{T}} Z =$$
$$= -\sum_{l=0}^{n} 2^{n-l} \varepsilon_{nl} \left[\nu^{\mathrm{T}} K \nu m \sin \nu^{\mathrm{T}} m - (2l - \nu^{\mathrm{T}} K \nu) K \nu \cos \nu^{\mathrm{T}} m\right] e^{-\nu^{\mathrm{T}} K \nu/2}.$$

Если функции $a(z, t)$, $b(z, t)$ в уравнении (7) включают произвольные нелинейные функции от линейных комбинаций компонент вектора Z, то при составлении уравнений (100), (101), (116) приходится вычислять интегралы вида

$$M_w U^n \varphi(\eta_0 + \eta Z), \quad M_w U^n Z_1^{r_1} \ldots Z_p^{r_p} \varphi(\eta_0 + \eta Z). \tag{146}$$

Вычислим сначала первый из интегралов (146).

Введем случайный q-мерный вектор $V = \eta(Z - m)$ с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $K_v = \eta K \eta^{\mathrm{T}}$. С помощью линейного преобразования приведем случайный вектор Z к блочному вектору $[V^{\mathrm{T}}\ Y^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $Y = \zeta(Z - m)$ и выберем матрицу ζ так, чтобы вектор Y был не коррелирован с V, а его компоненты были некоррелированными случайными величинами с единичными дисперсиями. Это всегда возможно. Действительно, введем вектор $Z' = [Z_{q+1} - m_{q+1} \ldots Z_p - m_p]^{\mathrm{T}}$. Положим $Y' = Z' + \xi V$ и выберем матрицу ξ так, чтобы векторы Y' и V были некоррелированными. Для этого приравняем нулю их взаимную ковариационную матрицу:

$$MY'V^{\mathrm{T}} = MZ'V^{\mathrm{T}} + \xi M\, VV^{\mathrm{T}} = MZ'V^{\mathrm{T}} + \xi K_v = 0.$$

Отсюда $\xi = MZ'V^{\mathrm{T}} K_v^{-1}$ (матрица K_v не может быть вырожденной, так как в противном случае координаты вектора V были бы линейно зависимыми). После этого приведем вектор Y' к вектору Y с некоррелированными компонентами, дисперсии которых равны единице. Для этого достаточно найти какое-либо каноническое разложение вектора Y' (*ТВ*, § 3.4). В результате этих преобразований ковариационная матрица составного вектора $[V^{\mathrm{T}}\ Y^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ будет блочнодиагональной:

$$\begin{bmatrix} K_v & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

и вычисляемый интеграл примет вид

$$MU^n \varphi(\eta_0 + \eta Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu + v)(v^{\mathrm{T}} K_v^{-1} v + y^{\mathrm{T}} y)^n \times$$
$$\times e^{-v^{\mathrm{T}} K_v^{-1} v/2 - y^{\mathrm{T}} y/2}\, dv\, dy = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |K_v|}} \sum_{h=0}^{n} C_n^h \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu + v) \times$$
$$\times (v^{\mathrm{T}} K_v^{-1} v)^{n-h} e^{-v^{\mathrm{T}} K_v^{-1} v/2} dv \int_{-\infty}^{\infty} (y^{\mathrm{T}} y)^h e^{-y^{\mathrm{T}} y/2}\, dy, \tag{147}$$

где $\mu=\eta_0+\eta m$. Интегралы по y в этой формуле могут быть вычислены. Для этого сделаем замену переменных $y_1=\alpha_1\sqrt{u_1}$, ..., $y_\rho=\alpha_\rho\sqrt{u_1}$, где $\rho=p-q$. При этом учтем, что

$$y_1^2+\ldots+y_\rho^2=y^{\mathrm{T}}y=u_1\,^{*)} \tag{148}$$

и, следовательно, $\alpha_1^2+\ldots+\alpha_\rho^2=1$. Чтобы переписать интеграл (147) в переменных $u_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_\rho$, найдем якобиан преобразования:

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_\rho)}{\partial(u, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\rho-1})}=\begin{vmatrix} \partial y_1/\partial u & \partial y_1/\partial\alpha_1 & \ldots & \partial y_1/\partial\alpha_{\rho-1} \\ \partial y_2/\partial u & \partial y_2/\partial\alpha_1 & \ldots & \partial y_2/\partial\alpha_{\rho-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial y_\rho/\partial u & \partial y_\rho/\partial\alpha_1 & \ldots & \partial y_\rho/\partial\alpha_{\rho-1} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{\alpha_1}{2\sqrt{u}} & \sqrt{u} & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{\alpha_2}{2\sqrt{u}} & 0 & \sqrt{u} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\alpha_{\rho-1}}{2\sqrt{u}} & 0 & 0 & \ldots & \sqrt{u} \\ \frac{\alpha_\rho}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}(-2\alpha_1)}{2\alpha_\rho} & \frac{\sqrt{u}(-2\alpha_2)}{2\alpha_\rho} & \ldots & \frac{\sqrt{u}(-2\alpha_{\rho-1})}{2\alpha_\rho} \end{vmatrix}. \tag{149}$$

Вынесем из первого столбца $1/(2\sqrt{u})$, а из каждого из оставшихся $(\rho-1)$ столбцов $\sqrt{u}$. Из последней строки вынесем α_ρ^{-1}. Тогда якобиан (149) запишется в виде

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_\rho)}{\partial(u, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\rho-1})}=\frac{u^{\rho/2-1}}{2\alpha_\rho}\begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\rho-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \alpha_\rho^2 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots & -\alpha_{\rho-1} \end{vmatrix}. \tag{150}$$

Для вычисления определителя (150) умножим первую строку на α_1 и сложим с последней, вторую строку на α_2 и сложим с последней,... . Проделав это преобразование и вычислив получившийся простейший определитель, находим

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_\rho)}{\partial(u, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\rho-1})}=\frac{u^{\rho/2-1}(-1)^{\rho+1}}{2\alpha_\rho}. \tag{151}$$

---

*) Через u_1 обозначена новая переменная интегрирования, её не следует путать с ранее используемым обозначением квадратичной формы $u=(z-m)^{\mathrm{T}}\times\times K^{-1}(z-m)$.

Поскольку величина $\alpha_\rho = \pm\sqrt{1-\alpha_1^2-\ldots-\alpha_{\rho-1}^2}$ может быть как положительной, так и отрицательной в соответствии со знаком переменной y_ρ, разобьем область интегрирования в интеграле по y (147) на область положительных y_ρ и область отрицательных y_ρ. Так как подынтегральная функция — четная функция y_ρ, то интегралы по областям отрицательных и положительных y_ρ равны, и поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (y^{\mathrm{T}}y)^h e^{-(y^{\mathrm{T}}y)/2}\,dy = \int\limits_{0}^{\infty} u_1^{h+\rho/2-1} e^{-u_1/2}\,du_1 \times$$

$$\times \int\limits_{-1}^{1} d\alpha_1 \int\limits_{-\sqrt{1-\alpha_1^2}}^{\sqrt{1-\alpha_1^2}} d\alpha_2 \ldots \int\limits_{-\sqrt{1-\alpha_1^2-\ldots-\alpha_{\rho-2}^2}}^{\sqrt{1-\alpha_1^2-\ldots-\alpha_{\rho-2}^2}} \frac{d\alpha_{\rho-1}}{\sqrt{1-\alpha_1^2-\ldots-\alpha_{\rho-1}^2}}. \quad (152)$$

Вычислим внутренний интеграл по $\alpha_{\rho-1}$. Сделаем замену переменных $\alpha_{\rho-1} = \beta\sqrt{1-\alpha_1^2-\ldots-\alpha_{\rho-2}^2}$. Тогда будем иметь

$$\sqrt{1-\alpha_1^2-\ldots-\alpha_{\rho-1}^2} = \sqrt{1-\alpha_1^2-\ldots-\alpha_{\rho-2}^2}\sqrt{1-\beta^2},$$

$$d\alpha_{\rho-1} = \sqrt{1-\alpha_1^2-\ldots-\alpha_{\rho-2}^2}\,d\beta,$$

$$\int\limits_{-\sqrt{1-\alpha_1^2-\ldots-\alpha_{\rho-2}^2}}^{\sqrt{1-\alpha_1^2-\ldots-\alpha_{\rho-2}^2}} \frac{d\alpha_{\rho-1}}{\sqrt{1-\alpha_1^2-\ldots-\alpha_{\rho-2}^2}} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \pi.$$

После этого получим

$$\int\limits_{-\sqrt{1-\alpha_1^2-\ldots-\alpha_{\rho-3}^2}}^{\sqrt{1-\alpha_1^2-\ldots-\alpha_{\rho-3}^2}} \pi\,d\alpha_{\rho-2} = 2\pi\sqrt{1-\alpha_1^2-\ldots-\alpha_{\rho-3}^2}.$$

Для вычисления интеграла по $\alpha_{\rho-3}$ положим $\alpha_{\rho-3} = \beta\sqrt{1-\alpha_1^2-\ldots-\alpha_{\rho-4}^2}$:

$$\int\limits_{-\sqrt{1-\alpha_1^2-\ldots-\alpha_{\rho-4}^2}}^{\sqrt{1-\alpha_1^2-\ldots-\alpha_{\rho-4}^2}} 2\pi\sqrt{1-\alpha_1^2-\ldots-\alpha_{\rho-3}^2}\,d\alpha_{\rho-3} =$$

$$= 2\pi(1-\alpha_1^2-\ldots-\alpha_{\rho-4}^2)\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-\beta^2}\,d\beta.$$

Продолжая таким образом, придем к формуле

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (y^{\mathrm{T}}y)^h e^{-(y^{\mathrm{T}}y)/2}\, dy =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{\infty} u_1^{\rho/2+h-1} e^{-u_1/2}\, du_1 \int\limits_{-1}^{1} (1-\beta^2)^{(\rho-3)/2}\, d\beta \ldots \int\limits_{-1}^{1} (1-\beta^2)^{1/2}\, d\beta. \quad (153)$$

Но

$$\int\limits_{-1}^{1} (1-\beta^2)^m\, d\beta = 2\int\limits_0^1 (1-\beta^2)^m\, d\beta = \frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(m+3/2)},$$

$$\int\limits_0^{\infty} u_1^{\rho/2+h-1} e^{-u_1/2}\, du_1 = 2^{\rho/2+h}\int\limits_0^{\infty} t^{\rho/2+h-1} e^{-t}\, dt = 2^{\rho/2+h}\,\Gamma(\rho/2+h).$$

Подставив эти выражения в (153) и учитывая, что $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (y^{\mathrm{T}}y)^h e^{-(y^{\mathrm{T}}y)/2}\, dy = \frac{2^{(p-q)/2+h}\,\Gamma\left(\frac{p-q}{2}+h\right)\pi^{(p-q)/2}}{\Gamma\left(\frac{p-q}{2}\right)}.$$

В итоге первый интеграл (146) примет вид

$$M_w U^n \varphi(\eta_0+\eta Z) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^q |K_v|}\,\Gamma\left(\frac{p-q}{2}\right)} \sum_{h=0}^{n} C_n^h 2^h \Gamma\left(\frac{p-q}{2}+h\right)\times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} (v^{\mathrm{T}}K_v^{-1}v)^{n-h}\varphi(\mu+v)\, e^{-v^{\mathrm{T}}K_v^{-1}v/2}\, dv. \quad (154)$$

Аналогично вычисляется второй интеграл (146):

$$M_w U^n Z_1^{r_1}\ldots Z_p^{r_p}\varphi(\eta_0+\eta Z) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |K_v|}} \sum_{h=0}^{n}\sum_{s_1=0}^{r_1}\ldots\sum_{s_p=0}^{r_p} A_{h,s_1,\ldots,s_p}\times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} (v^{\mathrm{T}}K_v^{-1}v)^{n-h}(m_1+f_1v)^{r_1-s_1}\ldots(m_p+f_pv)^{r_p-s_p}\varphi(\mu+v)\, e^{-v^{\mathrm{T}}K_v^{-1}v/2}\, dv, \quad (155)$$

где

$$A_{h,s_1,\ldots,s_p} = C_n^h C_{r_1}^{s_1}\ \ldots\ C_{r_p}^{s_p}\times$$

$$\times \sum_{s_{11}+\ldots+s_{1\rho}=s_1}\ldots\sum_{s_{p1}+\ldots+s_{p\rho}=s_p} \frac{s_1!\ldots s_p!}{s_{11}!\ldots s_{1\rho}!\ldots s_{p1}!\ldots s_{p\rho}!} g_{11}^{s_{11}}\ldots$$

$$\ldots g_{1\rho}^{s_{1\rho}}\ldots g_{p1}^{s_{p1}}\ldots g_{p\rho}^{s_{p\rho}}\, 2^{h+\rho/2+s_1/2+\ldots+s_p/2}\,\Gamma(h+\rho/2+s_1/2+\ldots+s_p/2)\times$$

$$\times\Gamma(\sigma_1+1/2)\ldots\Gamma(\sigma_\rho+1/2)/\Gamma(\sigma_1+\ldots+\sigma_\rho+\rho/2),$$

$f_i = [f_{i1} \ldots f_{iq}]$, $g_i = [g_{i1} \ldots g_{i,\,p-q}]$—$i$-е строки матриц f и g, $[fg] = [\eta\zeta]^{-1}$, а суммы по $s_{11}, \ldots, s_{1\rho}, \ldots, s_{p1}, \ldots, s_{p\rho}$ распространяются на все неотрицательные целые $s_{11}, \ldots, s_{1\rho}, \ldots, s_{p1}, \ldots, s_{p\rho}$, для которых суммы $s_{11} + \ldots + s_{p1} = 2\sigma_1, \ldots, s_{1\rho} + \ldots + s_{p\rho} = 2\sigma_\rho$, а, следовательно, и $s_1 + \ldots + s_p$ четные (интеграл по y равен нулю, если хотя бы одна координата вектора y входит в интеграл в нечетной степени).

При кусочно полиномиальной аппроксимации функции φ хотя бы по одной из переменных $v_1, \ldots, v_q$ интеграл по этой переменной можно вычислить с помощью неполной гамма-функции

$$\gamma(x, y) = \int_0^y t^{x-1} e^{-t}\, dt. \tag{156}$$

Пример 29. Для кусочно линейной функции (ограничителя)

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} -a & \text{при} \quad \xi < -a, \\ \xi & \text{при} \quad |\xi| < a, \\ a & \text{при} \quad \xi > a \end{cases}$$

вычислить $M_w U^n \varphi(\eta_0 + \eta Z)$.

В данном случае $q = 1$, $v^{\mathrm{T}} K_v^{-1} v = v^2/D_v$, где D_v—дисперсия случайной величины $V = \eta(Z - m)$.

Разобьем интервал интегрирования по v в формуле (154) на три части. Так как $v < -a - \mu$ при $\mu + v < -a$ и $v > a - \mu$ при $\mu + v > a$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} (v^2/D_v)^{n-h} \varphi(\mu + v)\, e^{-v^2/2D_v}\, dv = -a \int_{-\infty}^{-a-\mu} (v^2/D_v)^{n-h} e^{-v^2/2D_v}\, dv +$$
$$+ \int_{-a-\mu}^{a-\mu} (\mu + v)(v^2/D_v)^{n-h} e^{-v^2/2D_v}\, dv + a \int_{a-\mu}^{\infty} (v^2/D_v)^{n-h} e^{-v^2/2D_v}\, dv.$$

Для определенности предположим, что $-a - \mu < 0$ и $a - \mu > 0$. Для вычисления этих интегралов сделаем замену переменных $v^2/D_v = 2t$. Тогда для первого интеграла при $v < 0$, $v = -\sqrt{2D_v \cdot t}$, $dv = -\left(\sqrt{2D_v}/2\sqrt{t}\right) dt$, а для третьего при $v > 0$, $v = \sqrt{2D_v \cdot t}$ и $dv = \left(\sqrt{2D_v}/2\sqrt{t}\right) dt$. Во втором интеграле в зависимости от знака v разобьем интервал интегрирования на две части от $(-a - \mu)$ до 0 и от 0 до $(a - \mu)$. Тогда получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} (v^2/D_v)^{n-h} \varphi(\mu + v)\, e^{-v^2/2D_v}\, dv =$$
$$= -a\sqrt{D_v} \cdot 2^{n-h-1/2} \int_{(a+\mu)^2/2D_v}^{\infty} t^{n-h-1/2} e^{-t}\, dt +$$
$$+ \sqrt{D_v} \cdot 2^{n-h-1/2} \int_0^{(a+\mu)^2/2D_v} \left(\mu - \sqrt{2D_v \cdot t}\right) \cdot t^{n-h-1/2} e^{-t}\, dt +$$
$$+ \sqrt{D_v} \cdot 2^{n-h-1/2} \int_0^{(a-\mu)^2/2D_v} \left(\mu + \sqrt{2D_v \cdot t}\right) \cdot t^{n-h-1/2} e^{-t}\, dt +$$
$$+ a\sqrt{D_v} \cdot 2^{n-h-1/2} \int_{(a-\mu)^2/2D_v}^{\infty} t^{n-h-1/2} e^{-t}\, dt.$$

Пользуясь для вычисления интегралов неполной гамма-функцией, находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} (v^2/D_v)^{n-h} \varphi(\mu+v)\, e^{-v^2/2D_v}\, dv =$$

$$= 2^{n-h-1/2}\cdot\sqrt{D_v}\,[(\mu+a)\,\gamma(n-h+1/2,\ (a+\mu)^2/2D_v)+$$
$$+(\mu-a)\,\gamma(n-h+1/2,\ (a-\mu)^2/2D_v)]+D_v\cdot 2^{n-h}\,[\gamma(n-h+1,\ (a-\mu)^2/2D_v)-$$
$$-\gamma(n-h+1,\ (a+\mu)^2/2D_v)].$$

Окончательно получим

$$M_w U^n \varphi(\eta_0+\eta Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_v}\cdot\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)} \sum_{h=0}^{n} C_n^h\cdot 2^h\cdot\Gamma\left(\frac{p-1}{2}+h\right)\times$$
$$\times\{2^{n-h-1/2}\sqrt{D_v}\cdot[(\mu+a)\,\gamma(n-h+1/2,\ (a+\mu)^2/2D_v)+(\mu-a)\,\gamma(n-h+1/2,$$
$$(a-\mu)^2/2D_v)]+D_v\cdot 2^{n-h}\,[\gamma(n-h+1,\ (a-\mu)^2/2D_v)-\gamma(n-h+1,\ (a+\mu)^2/2D_v)]\}.$$

6.7.6. Моменты вектора состояния системы. Во многих исследовательских задачах возникает необходимость вычисления различных моментов вектора состояния. Учитывая приближенное представление (96) одномерной плотности $f_1(z;\ t)$, получаем для начальных моментов вектора Z следующую приближенную формулу:

$$MZ_1^{r_1}\ldots Z_p^{r_p} = \int_{-\infty}^{\infty} z_1^{r_1}\ldots z_p^{r_p} f_1^*(u;\ \theta)\, dz =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} z_1^{r_1}\ldots z_p^{r_p} w_1(u)\, dz + \sum_{\nu=2}^{N} c_\nu \int_{-\infty}^{\infty} z_1^{r_1}\ldots z_p^{r_p} p_\nu(u)\, w_1(u)\, dz,$$

или

$$MZ_1^{r_1}\ldots Z_p^{r_p} = M_w Z_1^{r_1}\ldots Z_p^{r_p} + \sum_{\nu=2}^{N} c_\nu M_w p_\nu(U)\, Z_1^{r_1}\ldots Z_p^{r_p}. \qquad (157)$$

В случае нормального распределения $w_1(u)$ формула (157) дает возможность прямого использования уже готового выражения (142) для моментов $M_w U^n Z_1^{z_1}\ldots Z_p^{r_p}$.

Число уравнений для параметров одномерного распределения, к которым приводит изложенный метод, лишь на $N/2-1$ больше числа уравнений метода нормальной аппроксимации при учете моментов до N-го порядка (в этом случае N всегда четное).

Пример 30. В условиях примера 23

$$\dot{Z}_1 = -Z_1 Z_2, \qquad \dot{Z}_2 = -\alpha Z_2 + kV$$

при аппроксимации $f_1(z;\ t)$ отрезком разложения (96) по полиномам $S_{p\nu}(u)$ (см. формулу (123) и формулу (5) приложения 2) с учетом моментов до 10 порядка включительно уравнения (100), (101), (116) имеют вид

$$\dot{m}_1 = -m_1 m_2 - k_{12}, \quad \dot{m}_2 = -\alpha m_2,$$
$$\dot{k}_{11} = -2(m_2 k_{11} + m_1 k_{12}),$$
$$\dot{k}_{12} = -2(m_2 + \alpha) k_{12} - m_1 k_{22},$$
$$\dot{k}_{22} = -2\alpha k_{22} + k^2 \nu,$$
$$\dot{c}_2 = 4k^2 \nu c_{22} + c_2 \{(m_2 + \alpha)(6 + 8c_{12}k_{12}) + 8m_1 c_{12} k_{12} - 3k^2 \nu c_{22}\},$$
$$\dot{c}_3 = -24k^2 \nu c_{22} + 3c_2((m_2 + \alpha)(c_{12}k_{12} - 5) + 4{,}5k^2 \nu c_{22} + m_1 c_{12} k_{12}) + 3c_3(6(m_2 + \alpha) c_{12} k_{12} + 6m_1 c_{12} k_{22} - 3k^2 \nu c_{22}),$$
$$\dot{c}_4 = 192k^2 \nu c_{22} + 24k^2 \nu c_{22} c_2 + 4c_3 \{(m_2 + \alpha)(c_{12}k_{12} - 7) + m_1 c_{12} k_{22} + 6{,}5k^2 \nu c_{22}\} + 2c_4 \{(m_2 + \alpha)(14 + 16c_{12}k_{12}) + 16m_1 c_{12} k_{22} - 7k^2 \nu c_{22}\},$$
$$\dot{c}_5 = -1920k^2 \nu c_{22} - 240k^2 \nu c_{22} c_2 + 40k^2 \nu c_{22} c_3 + 5c_4((m_2 + \alpha)(c_{12}k_{12} - 9) + m_1 c_{12} k_{22} - 8{,}5k^2 \nu c_{22}) + 5c_5((m_2 + \alpha)(9 + c_{12}k_{12}) + 10m_1 c_{12} k_{22} - 4{,}5k^2 \nu c_{22}),$$

здесь c_{ij} — элементы матрицы C, $C = K^{-1}$.

Таблица 4

Моменты Z_1	t				
	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
$m_1 = \alpha_1$	0,4823	0,4690	0,4661	0,4662	0,4675
$D_1 = \alpha_2 - \alpha_1^2$	0,0951	0,0966	0,1002	0,1039	0,1074
α_4	0,2181	0,2215	0,2369	0,2536	0,2709
α_6	0,2100	0,2439	0,2961	0,3505	0,4089
α_8	0,2640	0,3814	0,5591	0,7653	1,0115
$m_1 = \alpha_1$	0,4823	0,4690	0,4661	0,4662	0,4675
$D_1 = \alpha_2 - \alpha_1^2$	0,0951	0,0966	0,1002	0,1039	0,1074
α_4	0,2172	0,2168	0,2302	0,2477	0,2604
α_6	0,2080	0,2383	0,2715	0,3224	0,3523
α_8	0,2554	0,2981	0,4671	0,5118	0,7843
$m_1 = \alpha_1$	0,4823	0,4690	0,4661	0,4662	0,4675
$D_1 = \alpha_2 - \alpha_1^2$	0,0951	0,0966	0,1002	0,1039	0,1074
α_4	0,2178	0,2194	0,2341	0,2518	0,2615
α_6	0,2093	0,2279	0,2901	0,3316	0,3658
α_8	0,2614	0,3217	0,4998	0,5152	0,8723
$m_1 = \alpha_1$	0,4823	0,4690	0,4660	0,4661	0,4674
$D_1 = \alpha_2 - \alpha_1^2$	0,0939	0,0916	0,0923	0,0937	0,0954
α_4	0,2134	0,2013	0,2037	0,2091	0,2156
α_6	0,1985	0,1892	0,1977	0,2152	0,2214
α_8	0,2368	0,2320	0,2329	0,2770	0,3024
$m_1 = \alpha_1$	0,4823	0,4690	0,4660	0,4661	0,4674
$D_1 = \alpha_2 - \alpha_1^2$	0,0939	0,0916	0,0923	0,0937	0,0954
α_4	0,2133	0,2009	0,2030	0,2084	0,2150
α_6	0,1979	0,1880	0,1962	0,2080	0,2212
α_8	0,2349	0,2290	0,2501	0,2764	0,3037

При желании ограничиться моментами до четвертого порядка в полученных уравнениях надо положить $c_3=c_4=c_5=0$. Таким же путем получаются уравнения в случае учета моментов до шестого или восьмого порядка.

В табл. 4 приведены результаты вычисления моментов методом эллипсоидальной аппроксимации для тех же данных, что и в примере 23. Во второй группе строк таблицы приведены результаты вычислений с учетом моментов до четвертого порядка включительно, в третьей — с учетом моментов до десятого порядка. Для сравнения в первой группе строк приведены точные значения моментов случайной величины Z_1 в зависимости от времени t, а в четвертой и пятой группах строк — результаты вычисления модифицированным моментно-семиинвариантным методом, предложенным в [88], с учетом моментов до четвертого и десятого порядка соответственно.

Сравнивая табл. 1 и табл. 4, видим, что метод эллипсоидальной аппроксимации, так же как и модифицированный моментно-семиинвариантный метод, дает хорошую точность, почти ту же, что и моментно-семиинвариантный метод, которым были получены результаты в табл. 1. При этом метод эллипсоидальной аппроксимации с учетом моментов до десятого порядка дает 9 уравнений вместо 21 при применении модифицированного моментно-семиинвариантного метода и 65 при применении моментно-семиинвариантного метода п. 6.5.3.

ЗАДАЧИ

6.1. Найти одномерное распределение стационарного в узком смысле процесса в консервативной механической системе со случайными начальными условиями

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q},$$

где $q=[q_1\ldots q_n]^{\mathrm{T}}$ — вектор обобщенных координат, $p=A\dot{q}=[p_1\ldots p_n]^{\mathrm{T}}$ — вектор обобщенных импульсов, A — обобщенная масса (постоянная), H — функция Гамильтона (полная энергия системы),

$$H=H(q,\ p)=p^{\mathrm{T}}A^{-1}p/2+\Pi(q),$$

$\Pi(q)$ — потенциальная энергия системы. Показать, что при $\Pi(q)=q^{\mathrm{T}}Cq/2$ стационарные распределения координат и импульсов определяются плотностями $\varphi_1(q^{\mathrm{T}}Cq)$ и $\varphi_2(p^{\mathrm{T}}A^{-1}p)$, где φ_1 и φ_2 — в значительной мере произвольные функции (точнее, они обе выражаются через одну произвольную функцию) *). Показать, что распределения удвоенной потенциальной энергии $Y_1=q^{\mathrm{T}}Cq$ и удвоенной кинетической энергии $Y_2=p^{\mathrm{T}}A^{-1}p$ определяются плотностями

$$f_1(y_1)=c_1y_1^{(n-2)/2}\varphi_1(y_1)\,\mathbf{1}(y_1),$$
$$f_2(y_2)=c_2y_2^{(n-2)/2}\varphi_2(y_2)\,\mathbf{1}(y_2),$$

где c_1 и c_2 — нормировочные постоянные. В частном случае показательных функций φ_1 и φ_2, $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)=e^{-x/2}$, распределения удвоенной потенциальной и удвоенной кинетической энергии представляют собой χ^2-распределения с n степенями свободы. Найти также распределение полной энергии $Y=(Y_1+Y_2)/2$.

Указание. Написать уравнение (5.38) при $\partial g_1/\partial t=0$, $\chi(\mu)=0$, найти так же, как в примере 5.16, одномерную плотность $f_1(q,\ p)$ стационарного процесса в системе (само собой разумеется, начальное распределение должно совпадать с этим одномерным распределением) и учесть, что дифференциаль-

---

*) Это математический результат. Из физических соображений, а именно из принципа аддитивности энергии при объединении нескольких независимых систем, следует, что функции φ_1 и φ_2 должны быть показательными.

ные уравнения консервативной системы имеют первый интеграл (интеграл энергии) $H(q, p)$.

6.2. Пусть распределение вектора начальной угловой скорости $\omega_0 = [\omega_{x_0}\omega_{y_0}\omega_{z_0}]^{\mathrm{T}}$ в примере 1.2 при $M_x = M_y = M_z = 0$ задано плотностью $f_0(\omega_0) = p(\omega_0^{\mathrm{T}} J\omega_0)$, где $J = \mathrm{diag}(I_x, I_y, I_z)$. Показать, что распределение интеграла энергии $Y = \omega_0^{\mathrm{T}} J\omega_0/2$ определяется формулой

$$f(y) = {}^1/_2\, c\sqrt{y}\, p(y)\, 1(y),$$

где постоянная c находится из условия нормировки. Доказать, что для нормально распределенного вектора ω_0,

$$p(\omega_0^{\mathrm{T}} J\omega_0) = \sqrt{\frac{I_x I_y I_z}{(2\pi)^3}}\, e^{-\omega_0^{\mathrm{T}} J\omega_0/2},$$

распределение интеграла энергии представляет собой χ^2-распределение с 3 степенями свободы.

6.3. Найти распределение размахов колебаний одномерного осциллятора с сухим трением

$$\ddot{Z} + b_0 \,\mathrm{sgn}\, \dot{Z} + \omega_0^2 Z = 0$$

при случайном начальном отклонении $Z_0 > b_0/\omega_0^2$ и $\dot{Z}_0 = 0$.

6.4. Показать, что для одномерной нелинейной системы

$$\dot{Z} = -\gamma Z^{1+r} \qquad (r > -1)$$

со случайным начальным значением Z_0 n-мерная плотность определяется формулой

$$f_n(z_1, \ldots, z_n; t_1, \ldots, t_n) = f_0\left(z_1 (1 - r\gamma t_1 z_1^r)^{1/r} (1 - r\gamma t_1 z_1^r)^{-(1+r)/n}\right) \times$$
$$\times \prod_{l=2}^{n} \delta\left(z_l - z_1 (1 - r\gamma t_1 z_1^r)^{-(1+r)/r}\right) \left[1 + r\gamma t_l z_1^r (1 - r\gamma t_1 z_1^r)^{-(1+r)}\right]^{-1/r},$$
$$|z_l| < (r\gamma t_l)^{-1/r},$$

где $f_0(z_0)$ — плотность случайного начального значения Z_0.

6.5. Показать, что для линейной стохастической системы с параметрическим шумом задачи 3.6 уравнения (20), (22) и уравнение п. 6.2.6 для ковариационной функции имеют вид

$$\dot{m} = -\varepsilon(1 - 2\theta\varepsilon\nu_{22})\, m - 2\varepsilon\theta k\nu_{12},$$
$$\dot{D} = -2\varepsilon(1 - 2\theta\varepsilon\nu_{22})\, D + k^2\nu_{11} + \varepsilon^2\nu_{22}(m^2 + D) - 2\varepsilon k m\nu_{12},$$
$$\partial K(t_1, t_2)/\partial t_2 = -\varepsilon(1 - 2\theta\varepsilon\nu_{22})\, K(t_1, t_2).$$

Найти стационарные значения m и D, а также условия их существования.

6.6. Показать, что для линейной стохастической системы с параметрическими шумами задачи 3.8 уравнения (20) и (22) имеют вид

$$\dot{m}_1 = m_2, \quad \dot{m}_2 = -m_1\omega_0^2(1 - 2\theta\zeta\omega_0\nu_{23}) - 2m_2\zeta\omega_0(1 - 2\theta\zeta\omega_0\nu_{33}) - 2\theta k\zeta\omega_0\nu_{13};$$
$$\dot{k}_{11} = 2k_{12},$$
$$\dot{k}_{12} = -\omega_0^2(1 - 2\theta\zeta\omega_0\nu_{23})\, k_{11} - 2\zeta\omega_0(1 - 2\theta\zeta\omega_0\nu_{33})\, k_{12} + k_{22},$$
$$\dot{k}_{22} = -2\omega_0^2(1 - 2\theta\zeta\omega_0\nu_{23})\, k_{12} - 4\zeta\omega_0(1 - 2\theta\zeta\omega_0\nu_{33})\, k_{22} + k^2\nu_{11} -$$
$$- 2m_1 k\omega_0^2\nu_{12} - 4m_2\zeta\omega_0 k\nu_{13} + \omega_0^4\nu_{22}(m_1^2 + k_{11}) +$$
$$+ 4\zeta\omega_0^3\nu_{23}(m_1 m_2 + k_{12}) + 4\zeta^2\omega_0^2\nu_{33}(m_2^2 + k_{22}).$$

Найти значения m и K для стационарного процесса в системе и условия их существования. Написать для этого процесса уравнения для ковариационных функций.

6.7. Написать уравнения (20) и (22) для линейной системы с параметрическими шумами задачи 3.11. Найти стационарные режимы и условия их существования.

6.8. Вывести формулы для φ_0 и k_1, приведенные в таблицах 1 и 2 приложения 5.

6.9. Показать, что для одномерной нелинейной системы

$$\dot{Z}+\varphi(Z)=V,$$

где V — белый шум интенсивности ν, метод нормальной аппроксимации для математического ожидания m, дисперсии D и ковариационной функции $K(t_1, t_2)$ дает уравнения

$$\dot{m}=-\varphi_0(m, D), \qquad \dot{D}=-2k_1(m, D)+\nu,$$
$$\partial K(t_1, t_2)/\partial t_2=-k_1(m, D)K(t_1, t_2).$$

6.10. Пользуясь уравнениями задачи 6.9, показать, что метод нормальной аппроксимации для стационарного процесса в системе дает показательную ковариационную функцию $k(\tau)=De^{-\alpha|\tau|}$, где

а) $D=\pi\nu^2/8c^2, \quad \alpha=4c^2/\pi\nu$ при $\varphi(Z)=c\,\mathrm{sgn}\,Z$;

б) $D=(\nu/6b_3)^{1/2}, \quad \alpha=(3/2\nu b_3)^{1/2}$ при $\varphi(Z)=b_3Z^3$;

в) $D=\left(\sqrt{2\pi}\nu/8b_2\right)^{1/2}, \quad \alpha=(8/\pi)^{1/2}\left(\sqrt{2\pi\nu}/8b_2\right)^{1/3}$
при $\varphi(Z)=b_2Z^2\,\mathrm{sgn}\,Z$.

В случае а) показать, что относительная ошибка вычисления среднего квадратического отклонения $\sigma=\sqrt{D}$ методом нормальной аппроксимации при $\nu=1$ составляет $1-\sqrt{\pi/4}$, т. е. около 11% (точное значение $D=1/2c^2$ [100]).

6.11. Пользуясь уравнениями задач 6.9 и 6.10, в случае а) найти формулу для среднего квадратического отклонения $\sigma=\sqrt{D}$ для произвольного момента времени.

6.12. Математическое ожидание m и дисперсия D в системе

$$T\dot{Z}+Z=b(X-\alpha Z^3), \qquad X=m_x+V,$$

где V — стационарный белый шум интенсивности ν, согласно методу нормальной аппроксимации приближенно определяются уравнениями

$$T\dot{m}=bm_x-m[1+\alpha b(m^2+3D)], \qquad T^2\dot{D}=b^2\nu-2DT[1+3\alpha b(m^2+D)].$$

Найти приближенные значения m и D для стационарного режима колебаний.

Пользуясь методом моментов с учетом моментов до четвертого порядка, проверить, являются ли найденные m и D лишним решением.

6.13. Применяя метод нормальной аппроксимации, показать, что дисперсии и ковариация переменных состояния в нелинейной системе

$$T\dot{Z}_1+Z_1=b\,\mathrm{sgn}(Z_2-Z_1), \qquad \dot{Z}_2+\alpha Z_2=\sqrt{2D\alpha}V,$$

где V — белый шум единичной интенсивности, определяются приближенно уравнениями

$$T\dot{k}_{11}=2\beta k_{12}+2(1+\beta)k_{11}, \qquad T\dot{k}_{12}=\beta k_{22}-(1+\alpha T+\beta)k_{12},$$
$$\dot{k}_{22}=2\alpha(D-k_{22}), \qquad \beta=b\left[(k_{11}+k_{22}-2k_{12})\pi/2\right]^{-1/2}.$$

Найти k_{11}, k_{12}, k_{22} для стационарного режима. Пользуясь методом моментов с учетом моментов до четвертого порядка, проверить, является ли найденная дисперсия k_{11} для стационарного режима лишним решением.

6.14. Пользуясь методом нормальной аппроксимации, показать, что для системы

$$T\ddot{Z}+\dot{Z}=b\,\mathrm{sgn}\,(X-Z),$$
$$\dot{X}+\alpha X=\sqrt{2D\alpha}\,V,$$

где V — нормальный белый шум единичной интенсивности, дисперсии и ковариации переменных $Z_1=Z$, $Z_2=\dot{Z}$, $Z_3=X$ имеют вид

$$\dot{k}_{11}=2k_{12},\quad T\dot{k}_{12}=Tk_{22}-k_{12}+\beta\,(k_{13}-k_{11}),$$
$$\dot{k}_{13}=k_{23}-\alpha k_{13},\quad \dot{k}_{33}=2\alpha\,(D-k_{33}),$$
$$T\dot{k}_{22}=2k_{22}+2\beta\,(k_{23}-k_{12}),\quad T\dot{k}_{23}=-(1+\alpha T)\,k_{23}+\beta\,(k_{33}-k_{13}),$$
$$\beta=b\,[(k_{11}+k_{33}-2k_{13})\,\pi/2]^{-1/2}.$$

Найти стационарные значения дисперсий и ковариаций.

6.15. Показать, что для нелинейного осциллятора

$$\ddot{Z}+\varphi\,(Z,\ \dot{Z})+\omega_0^2 Z=V,$$

где V — белый шум интенсивности ν, дисперсии и ковариации переменных $Z_1=Z$, $Z_2=\dot{Z}$ определяются в соответствии с методом нормальной аппроксимации уравнениями

$$\dot{k}_{11}=2k_{12},$$
$$\dot{k}_{12}=k_{22}-\left(\omega_0^2+k_1\right)k_{11}-k_2k_{12},$$
$$\dot{k}_{22}=-2\left(\omega_0^2+k_1\right)k_{12}-2k_2k_{22}+\nu,$$

где k_1 и k_2 — коэффициенты статистической линеаризации функции $\varphi\,(z_1,\ z_2)$. Математические ожидания начальных значений Z_1, Z_2 равны нулю.

6.16. Пользуясь результатами задачи 6.15, убедиться в справедливости следующих приближенных формул для дисперсий и ковариаций стационарного процесса в системах:

а) осциллятор с сухим трением, $\varphi\,(z_1,\ z_2)=b_0\,\mathrm{sgn}\,z_2$,

$$k_{11}=\pi\nu^2/8\omega_0^2\,b_0^2,\quad k_{12}=0,\quad k_{22}=\omega_0^2 k_{11};$$

б) осциллятор Релея, $\varphi\,(z_1,\ z_2)=-b_1z_2+b_3z_2^3$,

$$k_{11}=\left(1/6\omega_0^2 b_3\right)\left(b_1+\sqrt{b_1^2+6\nu b_3}\right),\quad k_{12}=0,\quad k_{22}=\omega_0^2 k_{11};$$

в) осциллятор Ван-дер-Поля, $\varphi\,(z_1,\ z_2)=b\left(z_1^2-1\right)z_2$,

$$k_{11}=\left(1+\sqrt{1+2\nu/\omega_0^2 b}\right)/2,\quad k_{12}=0,\quad k_{22}=\omega_0^2 k_{11}.$$

6.17. Найти аппроксимацию одномерного распределения с помощью моментов, семиинвариантов и квазимоментов до четвертого порядка включительно стационарного в узком смысле процесса в одномерной нелинейной системе

$$\dot{Z}=-c\,\mathrm{sgn}\,Z+V,$$

где V — стационарный нормально распределенный шум интенсивности ν. Результаты сравнить с точным одномерным распределением [100]

$$f_1(z)=\gamma e^{-\gamma|z|},\quad g_1(\lambda)=2\gamma^2/(\lambda^2+\gamma^2)\quad(\gamma=2c/\nu).$$

Показать, что при $\nu=1$ относительная ошибка вычисления среднего квадратического отклонения $\sigma_z=\sqrt{D_z}$ с учетом момента четвертого порядка равна $0{,}705c$, что составляет 0,30 %.

6.18. Пользуясь уравнениями примера 15 для моментов третьего и четвертого порядков, показать, что стационарный случайный процесс в системе примера 9 со значением дисперсии $D=\nu/6$, даваемым методом нормальной аппроксимации, не существует (решение $D=\nu/6$ — лишнее).

6.19. Показать, что параметры одномерного распределения стационарного случайного процесса в системе задачи 5.19 выражаются через четыре первых момента рекуррентной формулой

$$nc_2\alpha_{n-1}-[(n+1)c_3+c_0]\alpha_n+[(n+2)c_4+c_1]\alpha_{n+1}=0,$$
$$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

где α_n — начальный момент n-го порядка, $\alpha_0=1$.

6.20. Составить уравнения, приближенно определяющие одномерное распределение стационарных колебаний самолета в вертикальной плоскости в режиме прямолинейного равномерного горизонтального полета в турбулентной атмосфере:

а) предполагая, что рулевая машина мгновенно устанавливает требуемое отклонение руля высоты;

б) с учетом динамики рулевой машины.

Колебания самолета в вертикальной плоскости в турбулентной атмосфере описываются уравнениями примера 1.23. Вертикальную компоненту W_y вектора скорости ветра считать стационарной случайной функцией времени со спектральной плотностью

$$s_{11}(\omega)=1{,}015\frac{D\alpha^2}{2\pi}\frac{\alpha^2+3\omega^2}{(\alpha^2+\omega^2)^2(\alpha^2+10^{-2}\omega^2)},\quad \alpha=\frac{v}{L},$$

где v — скорость полета, а L — величина, называемая масштабом турбулентности (величина L в зависимости от состояния атмосферы обычно имеет значения в диапазоне 200—500 м).

6.21. Составить уравнения, приближенно определяющие одномерное распределение стационарных поперечных колебаний самолета в режиме прямолинейного равномерного горизонтального полета в турбулентной атмосфере:

а) предполагая, что рулевые машины мгновенно устанавливают требуемые углы отклонения руля направления и элеронов;

б) с учетом динамики рулевых машин.

Поперечные колебания самолета в турбулентной атмосфере описываются системой уравнений задачи 1.16. Вертикальную W_y, поперечную горизонтальную W_z компоненты вектора скорости ветра и производную $\partial W_y/\partial z$ считать стационарными случайными функциями

$$X_{11}(t)=W_y,\quad X_{12}(t)=W_z,\quad X_{13}(t)=\partial W_y/\partial z$$

со спектральными плотностями

$$s_{11}(\omega)=s_{22}(\omega)=1{,}015\frac{D\alpha^3}{2\pi}\frac{\alpha^2+3\omega^2}{(\alpha^2+\omega^2)^2(\alpha^2+10^{-4}\omega^2)},$$
$$s_{33}(\omega)=1{,}015\frac{D\alpha^3}{2\pi v^2}\frac{(\alpha^2+3\omega^2)\,\omega^2}{(\alpha^2+\omega^2)^2(\alpha^2+10^{-4}\omega^2)},$$
$$s_{12}(\omega)=s_{23}(\omega)=0,$$
$$s_{13}(\omega)=1{,}015\frac{D\alpha^3}{2\pi v}\frac{(\alpha^2+3\omega^2)\,\omega}{(\alpha^2+\omega^2)^2(\alpha^2+10^{-4}\omega^2)},\quad \alpha=\frac{v}{L},$$

где v и L имеют те же значения, что и в задаче 6.20.

6.22. Вывести приближенные уравнения для моментов, семиинвариантов и квазимоментов до четвертого порядка включительно для нелинейных систем задачи 6.16. Пользуясь результатами работ [21, 22], составить программу для автоматического составления и решения уравнений моментно-семиинвариантного метода для систем задачи 6.16.

6.23. Вывести приближенные уравнения для моментов, семиинвариантов и квазимоментов до четвертого порядка для координат частицы, совершающей броуновское движение в силовом поле (пример 5.16).

6.24. Вывести приближенные уравнения для моментов, семиинвариантов и квазимоментов до четвертого порядка включительно для систем примеров 9, 10, 11 для случая общего пуассоновского процесса.

6.25. Составить приближенные уравнения для моментов, семиинвариантов и квазимоментов до четвертого порядка включительно для одномерного распределения стационарного процесса в системе примера 10 в случае общего пуассоновского процесса W постоянной интенсивности.

6.26. Вывести бесконечную систему уравнений для моментов для системы примера 7 в случае общего пуассоновского процесса.

6.27. Пользуясь параметризацией распределения путем приближенного представления одномерной плотности вектора состояния нелинейной системы **отрезком ряда Фурье**

$$f_1(z;\ t) \approx f_1^*(z;\ a) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_r = -s}^{s} a_{\nu_1, \ldots, \nu_r} e^{-i\pi(\nu_1 z_1 + \ldots + \nu_r z_r)/\Delta}$$

в r-мерном кубе $(-\Delta,\ \Delta)^r$ и приравнивания ее нулю вне этого куба, вывести приближенные обыкновенные дифференциальные уравнения для коэффициентов Фурье $a_{\nu_1, \ldots, \nu_r}$ [93—95].

Указание. Учесть, что коэффициент Фурье $a_{\nu_1, \ldots, \nu_r}$ связан со значением функции $g_1^*(\lambda;\ a) = g_1^*(\lambda_1, \ldots, \lambda_r;\ a)$, аппроксимирующей одномерную характеристическую функцию $g_1(\lambda;\ t)$, при $\lambda_1 = \lambda^{(\nu_1)}, \ldots, \lambda_r = \lambda^{(\nu_r)}$, $\lambda^{(\nu)} = \pi\nu/\Delta$ $(\nu = 0, \pm 1, \ldots, \pm s)$, формулой

$$a_{\nu_1, \ldots, \nu_r} = g_1^*\left(\lambda^{(\nu_1)}, \ldots, \lambda^{(\nu_r)};\ a\right)/(2\Delta)^r \quad (\nu_1, \ldots, \nu_r = 0, \pm 1, \ldots, \pm s).$$

6.28. Показать, что для системы примера 1.24 в случае, когда вектор случайных возмущений $N(t) = [N_1(t)\ \ N_2(t)]^T$ является нормальным двумерным белым шумом с матрицей интенсивностей ν, моменты $\alpha_{r,\,s}$ процесса $Z = [Z_1 Z_2]^T$ определяются бесконечной системой уравнений (18), распадающейся на независимые системы уравнений для моментов каждого данного порядка:

$$\dot{\alpha}_{r,\,s} = r\alpha_{r-1,\,s+1} - s\omega_0^2\alpha_{r+1,\,s-1} - 2\varepsilon s\alpha_{r,\,s} + \nu_{12}\omega_0^4 r(r-1)\alpha_{r-1,\,s} +$$
$$+ \frac{1}{2}\omega_0^4 s(s-1)(\nu_{11}\alpha_{r,\,s-2} + 2\nu_{12}\alpha_{r+1,\,s-2} + \nu_{22}\alpha_{r+2,\,s-2})$$
$$(r,\ s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ |r| + |s| = 1,\ 2,\ \ldots).$$

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ. ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

§ 7.1. Задачи оценивания в стохастических системах

7.1.1. Оценивание состояния системы. На практике часто возникают задачи определения состояния системы по результатам измерений. Так как измерения всегда сопровождаются случайными ошибками (общепринятая математическая модель измерений), то следует говорить не об определении состояния системы, а о его оценивании путем статистической обработки результатов измерений.

Мы будем рассматривать здесь задачи оценивания состояния систем, моделями которых могут служить стохастические дифференциальные уравнения (о приведении дифференциальных уравнений системы к стохастическим дифференциальным уравнениям см. в § 5.1).

Предположим, что поведение системы описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито

$$\dot{Z}=\varphi(Z,\ t)+\psi(Z,\ t)V_1, \tag{1}$$

где Z — p-мерный вектор состояния системы, V_1 — q-мерный векторный белый шум, $\varphi(z,\ t)$, $\psi(z,\ t)$ — известные функции состояния системы и времени. Очевидно, что значениями функции $\varphi(z,\ t)$ служат p-мерные векторы, а значениями функции $\psi(z,\ t)$ — $p\times q$-матрицы.

Если непрерывно измеряется вектор состояния системы Z, то результатом измерения будет p-мерный случайный процесс $X(t)=Z(t)+U(t)$, где $U(t)$ — ошибка измерения, представляющая собой случайную функцию времени. Однако на практике обычно измеряются не компоненты вектора состояния, а некоторые функции вектора состояния. Впрочем, могут измеряться некоторые компоненты (не все) вектора состояния. Эти компоненты также можно рассматривать как функции вектора состояния. Так, например, состояние летательного аппарата обычно характеризуется углами, определяющими направление его вектора скорости и его осей в пространстве, и декартовыми координатами его центра массы. При этом во время летных испытаний измеряются наземными средствами, как правило, сферические координаты центра массы летательного аппарата. Бортовыми же средствами непосредственно можно измерять только углы, определяющие направления его осей (т. е. некоторые компоненты вектора состояния). Все другие измерительные средства на борту производят измерение некоторых функций состояния.

Итак, в общем случае результат измерений определяется формулой

$$X = X(t) = \varphi_1(Z,\ U,\ t), \tag{2}$$

где X — m-мерный вектор, U — ошибка измерений, представляющая собой векторную случайную функцию времени размерности $r \geqslant m$, $\varphi_1(z, u, t)$ — известная функция состояния системы, ошибки измерений и времени. Функция φ_1 в общем случае нелинейна как относительно вектора состояния, так и относительно ошибки измерения. Размерность вектора ошибки U на практике не может быть меньше числа измеряемых величин m, так как каждое измерение сопровождается ошибкой и ошибки разных измерительных средств обычно независимы (или по крайней мере содержат независимые слагаемые).

В некоторых случаях измерения (особенно электрические и радиотехнические) производятся инерционными приборами или же результаты измерений пропускаются через различные фильтры. Так, например, результат измерения функции $\varphi_1(Z,\ t)$, если он содержит высокочастотную аддитивную помеху, можно пропустить через фильтр низких частот, представляющий собой апериодическое звено с некоторой постоянной времени T ([57], § 2.6). В этом случае результат измерения будет представлять собой случайный процесс $Y(t)$, определяемый дифференциальным уравнением

$$T\dot{Y} + Y = \varphi_1(Z,\ t) + U,$$

где $U = U(t)$ — ошибка измерений. То же будет, если измерительный прибор сам представляет собой апериодическое звено.

Чтобы построить общую модель измерений, охватывающую все возможные случаи, введем для модели (2) случайный процесс

$$Y(t) = \int_{t_0}^{t} X(\tau)\, d\tau.$$

Поскольку интегрирование сигнала не вызывает технических трудностей, процесс $Y(t)$ можно принять за измеряемый процесс. Тогда модель измерений (2) приведется к дифференциальному уравнению

$$\dot{Y} = \varphi_1(Z,\ U,\ t).$$

Таким образом, наиболее общей моделью измерений, производимых в системе, можно считать дифференциальное уравнение

$$\dot{Y} = \varphi_1(Y,\ Z,\ U,\ t). \tag{3}$$

Итак, мы пришли к задаче оценивания вектора состояния системы Z в каждый момент $t > t_0$ по результатам непрерывного наблюдения процесса Y, определяемого дифференциальным уравнением (3), в интервале времени $[t_0, t]$.

7.1.2. Оценивание неизвестных параметров системы. В некоторых случаях дифференциальные уравнения модели изучаемой системы могут содержать неизвестные параметры и, как правило, всегда содержат параметры, известные с ограниченной точностью. Так, например, в уравнения движения летательного аппарата в воздухе входят аэродинамические коэффициенты, которые определяются экспериментально путем продувок моделей летательного аппарата в аэродинамических трубах. Естественно, они определяются с ограниченной точностью, а некоторые из них — с очень низкой точностью. Поэтому возникает задача оценивания неизвестных параметров системы (точнее, ее модели) по результатам измерений.

Предположим, что функции φ и ψ в уравнении (1) зависят от конечного множества неизвестных параметров, которые мы будем рассматривать как компоненты вектора θ. Тогда уравнение (1) можно переписать в виде

$$\dot{Z} = \varphi(Z, \theta, t) + \psi(Z, \theta, t) V_1,$$

где $\varphi(z, \theta, t)$ и $\psi(z, \theta, t)$ — полностью известные функции указанных аргументов. В таких случаях обычно применяют следующий прием: неизвестный векторный параметр θ считают случайным процессом $\Theta(t)$, который определяется дифференциальным уравнением

$$\dot{\Theta} = 0,$$

и включают компоненты этого векторного процесса в вектор состояния системы («расширяют» вектор состояния путем включения в него всех неизвестных параметров в качестве дополнительных компонент). В результате получается дифференциальное уравнение, определяющее расширенный вектор состояния системы $Z' = [Z^{\mathrm{T}} \Theta^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} Z \\ \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(Z, \Theta, t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi(Z, \Theta, t) \\ 0 \end{bmatrix} V_1,$$

или

$$\dot{Z}' = \varphi'(Z', t) + \psi'(Z', t) V_1.$$

Таким образом, *задача оценивания неизвестных параметров модели системы сводится к задаче оценивания состояния системы с расширенным вектором состояния.*

От неизвестных параметров может также зависеть функция φ_1 в уравнении наблюдения (3). Эти параметры также следует включить в вектор θ и, следовательно, в расширенный вектор состояния.

7.1.3. Распознавание сигналов. Во многих задачах распознавания (*ТВ*, п. 10.4.1) наблюдаемой случайной величиной является некоторая функция случайного процесса, определяемого стохастическим дифференциальным уравнением, зависящим от того, к какому из распознаваемых классов относится этот случайный процесс. В этом случае задача тоже сводится к оцениванию неизвестного параметра в стохастическом дифференциальном уравнении. Предположим, что функции φ и ψ в уравнении (1), а может быть, и функция φ_1 в уравнении наблюдения (3) зависят от неизвестного параметра θ, который может принимать одно из конечного множества значений $\theta_1, \ldots, \theta_N$, соответствующих распознаваемым классам сигналов $A_1, \ldots, A_N$. Тогда задача распознавания сведется к решению вопроса о том, какое из значений $\theta_1, \ldots, \theta_N$ имеет параметр θ для данного наблюдаемого сигнала. Но значение параметра θ, выдаваемое системой распознавания, можно рассматривать как оценку параметра θ. Таким образом, поставленная задача распознавания также сводится к задаче оценивания неизвестного параметра в стохастическом дифференциальном уравнении. Поэтому и *для решения задачи распознавания можно применить прием расширения вектора состояния системы.* Заменив параметр θ случайным процессом, определяемым уравнением $\dot{\Theta}=0$, и включив Θ в вектор состояния, сведем задачу к оцениванию вектора состояния системы. Единственное различие состоит в том, что в задаче п. 7.1.2 параметр θ неизвестен и априори может принимать любые значения, а в задаче распознавания θ может принимать лишь одно из конечного множества заранее известных значений $\theta_1, \ldots, \theta_N$.

В частном случае, когда θ может иметь лишь два значения θ_1 и θ_2 и одному из них соответствует уравнение $Z=0$, задача распознавания представляет собой задачу обнаружения сигнала, определяемого стохастическим дифференциальным уравнением.

7.1.4. Построение математических моделей систем. В п. 1.1.5 уже говорилось о том, что большое значение для современной теории управления имеет задача построения математических моделей объектов управления, даже в тех случаях, когда объекты управления имеют столь сложную природу, что не могут быть описаны какими-либо уравнениями, вытекающими из законов физики или других отраслей науки, пользующихся математическим описанием изучаемых явлений. Удовлетворительные математические модели таких систем, естественно, нельзя построить, не прибегая к их экспериментальному изучению. В таких случаях можно пользоваться следующим способом построения математической модели изучаемой системы. Сначала на основе предварительного изучения общих закономерностей поведения системы написать предполагаемые уравнения ее модели с неопределенными параметрами. Затем по результатам наблюдения работы системы оценить неизвестные параметры в принятых уравнениях модели. После этого оценить качество воспроизведения поведения системы построенной моделью и принять решение об адекватности этой модели. Оценив таким путем ряд вариантов моделей системы, можно выбрать из них наиболее подходящий (см., например, [36]).

Построение модели какой-либо системы или процесса обычно называют *идентификацией* этой системы или процесса *).

Задача построения модели сложной системы и проверки ее адекватности очень сложна, и соответствующая теория пока еще слабо разработана. Однако одной из важнейших задач теории построения моделей систем по экспериментальным данным является задача оценивания параметров модели по результатам наблюдения поведения системы, рассмотренная в п. 7.1.2.

7.1.5. Экстраполяция состояния системы. Во многих задачах практики важно не только оценивать текущее состояние системы, но и прогнозировать будущее состояние системы по результатам наблюдения ее поведения. Это необходимо, в частности, для решения многих задач управления, а также для того, чтобы не допускать приближения к опасным режимам работы системы. Так, например, при летных испытаниях летательных аппаратов прогнозирование их состояния помогает избежать опасных режимов полета.

Задача прогнозирования, т. е. экстраполяции состояния системы, по существу представляет собой задачу оценивания ее будущего состояния. Эта задача отличается от задачи п. 7.1.1 только тем, что вместо оценивания вектора $Z_t = Z(t)$ требуется в каждый момент $t > t_0$ оценивать вектор $Z_{t+\Delta} = Z(t+\Delta)$ при некотором $\Delta > 0$. Можно также поставить задачу одновременного оценивания векторов $Z_{t+\Delta_1}, \ldots, Z_{t+\Delta_N}$ для $0 < \Delta_1 < \ldots < \Delta_N$.

7.1.6. Постановка математических задач оценивания и экстраполяции. Поставленные задачи оценивания и экстраполяции сравнительно легко решаются, если не только уравнение модели системы (1), но и уравнение модели измерений (3) представляет собой стохастическое дифференциальное уравнение. Уравнение (3) будет стохастическим, если ошибка измерения представляет собой белый шум, $U = V_2$, который в этом случае входит в уравнение (3) линейно, вследствие чего уравнение (3) может быть переписано в виде

$$\dot{Y} = \varphi_1(Y, Z, t) + \psi_1(Y, Z, t) V_2. \tag{4}$$

Так, например, в случае пропускания результата измерения с высокочастотной помехой через линейный фильтр эту помеху можно считать белым шумом. Если же помеха в измерениях U отлична от белого шума, то уравнение (3) следует привести к

*) По-английски «identification» означает «отождествление». Этот термин нельзя признать удачным, так как никакая математическая модель не может быть тождественной реальной системе.

стохастическому дифференциальному уравнению одним из методов, изложенных в § 5.1. Если для приведения уравнения (3) к стохастическому уравнению применяется метод формирующего фильтра, то уравнение (3) заменится системой уравнений вида

$$\dot{U}_1 = \varphi_2(U_1, t) + \psi_2(U_1, t)V_3, \qquad \dot{Y} = \varphi_1(Y, Z, \omega(U_1), t),$$

где V_3 — белый шум, как правило, независимый от V_1 в (1), а $\omega(U_1) = U$. В частности, $\omega(U_1)$ может представлять собой часть компонент вектора U_1. Включив компоненты векторной случайной функции $U_1(t)$ в вектор состояния системы в качестве дополнительных компонент, получим для составного вектора $Z' = [Z^{\mathrm{T}}U_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ и для вектора Y систему стохастических дифференциальных уравнений

$$\dot{Z}' = \varphi'(Z', t) + \psi'(Z', t)V_4, \quad \dot{Y} = \varphi_1'(Y, Z', t),$$

где

$$\varphi'(z', t) = \begin{bmatrix} \varphi(z, t) \\ \varphi_2(u_1, t) \end{bmatrix}, \qquad \psi'(z', t) = \begin{bmatrix} \psi(z, t) & 0 \\ 0 & \psi_2(u_1, t) \end{bmatrix},$$
$$\varphi_1'(y, z', t) = \varphi_1(y, z, \omega(u_1)),$$

$z' = [z^{\mathrm{T}}u_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, а $V_4 = [V_1^{\mathrm{T}}V_3^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ — составной белый шум. Таким образом, и в этом случае приходим к задаче, в которой состояние системы описывается стохастическим уравнением (1), а наблюдаемый процесс определяется дифференциальным уравнением (4), с той лишь разницей, что в этом случае оцениванию подлежит лишь часть компонент вектора состояния, а функция ψ_1 в (4) равна тождественно нулю. Первое отличие несущественно. Второе же очень существенно. На первый взгляд кажется, что случай, когда $\psi_1(y, z, t) \equiv 0$ в (4), является частным случаем. В действительности же методы решения общей задачи при $\psi_1(y, z, t) \neq 0$ неприменимы к частному случаю, когда $\psi_1(y, z, t) \equiv 0$. Поэтому случай $\psi_1(y, z, t) \equiv 0$ является особым случаем, требующим специального подхода.

Таким образом, мы приходим к задаче оценивания вектора состояния $Z' = Z'(t)$ системы, описываемой уравнением (1), или его будущего значения $Z_{t+\Delta} = Z(t+\Delta)$, $\Delta > 0$, в каждый момент $t > t_0$ по результатам наблюдения процесса Y в интервале времени $[t_0, t]$. Эту задачу нужно решить в двух вариантах. Во-первых, при $\psi_1(y, z, t) \neq 0$ (при любых y, z, t), а во-вторых, при $\psi_1(y, z, t) \equiv 0$.

Белые шумы V_1, V_2 и V_3 в уравнении системы (1), в уравнении наблюдения (4) и в уравнении формирующего фильтра в задачах практики обычно независимы. Однако с математической точки зрения их целесообразно рассматривать как блоки составного векторного белого шума $V = [V_1^{\mathrm{T}}V_2^{\mathrm{T}}V_3^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, от которого зависят правые части всех трех уравнений. Тогда для перехода от решения математической задачи к решению соответствующей практической задачи достаточно будет считать равными нулю коэффициенты при компонентах шумов V_2 и V_3 в первом уравнении, коэффициенты при компонентах шумов V_1 и V_3 во втором и коэффициенты при компонентах шумов V_1 и V_2 в третьем.

Наконец, при решении задачи оценивания состояния системы (и неизвестных параметров в уравнении ее модели) целесообразно сделать еще одно обобщение практической задачи, а именно допустить, что в уравнение состояния системы может входить и наблюдаемый вектор. Задачу экстраполяции состояния в этой обобщенной постановке решить не удается.

Таким образом, мы приходим к постановке следующих двух математических задач.

Задача 1. Векторный случайный процесс $[Y^{\mathrm{T}}Z^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ определяется стохастическими дифференциальными уравнениями Ито

$$\begin{aligned} dY &= \varphi_1(Y,\ Z,\ t)\,dt + \psi_1(Y,\ Z,\ t)\,dW, \\ dZ &= \varphi(Y,\ Z,\ t)\,dt + \psi(Y,\ Z,\ t)\,dW, \end{aligned} \tag{5}$$

где Y — m-мерный наблюдаемый случайный процесс, Z — p-мерный ненаблюдаемый процесс, W — q-мерный процесс с независимыми приращениями (в случае линейных уравнений (5) достаточно, чтобы он был процессом с некоррелированными приращениями), $\varphi_1(y, z, t)$ и $\varphi(y, z, t)$ — известные векторные функции, отображающие пространство $R^m \times R^p \times R$ соответственно в пространства R^m и R^p, а $\psi_1(y, z, t)$ и $\psi(y, z, t)$ — известные матричные функции, отображающие $R^m \times R^p \times R$ в R^{mq} и R^{pq} соответственно. Требуется оценить вектор состояния (может быть, расширенный) системы Z в любой момент $t > t_0$ по результатам непрерывного наблюдения процесса Y в интервале времени $[t_0,\ t]$.

Задача 2. Векторный случайный процесс $[Y^{\mathrm{T}}Z^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ определяется стохастическими дифференциальными уравнениями Ито

$$\begin{aligned} dY &= \varphi_1(Y,\ Z,\ t)\,dt + \psi_1(Y,\ Z,\ t)\,dW, \\ dZ &= \varphi(Z,\ t)\,dt + \psi(Z,\ t)\,dW, \end{aligned} \tag{6}$$

где, в отличие от предыдущей задачи, процесс $W(t)$ состоит из двух независимых блоков, один из которых входит только в первое уравнение (6), а другой — только во второе уравнение (6) *). Требуется оценить будущее состояние системы $Z_{t+\Delta} = Z(t+\Delta)$, $\Delta > 0$, в любой момент $t > t_0$ по результатам наблюдения процесса Y в интервале времени $[t_0,\ t]$.

---

*) Само собой разумеется, для этого необходимо, чтобы матрицы ψ_1 и ψ имели соответствующую блочную структуру $\psi_1 = [0\ \psi_1']$, $\psi = [\psi'\ 0]$ так, чтобы было

$$\psi_1\,dW = [0\,\psi_1'] \begin{bmatrix} dW_1 \\ dW_2 \end{bmatrix} = \psi_1'\,dW_2, \quad \psi\,dW = [\psi'\,0] \begin{bmatrix} dW_1 \\ dW_2 \end{bmatrix} = \psi'\,dW_1.$$

Первая задача в приложениях обычно называется *задачей фильтрации*, так как она технически решается путем пропускания наблюдаемого сигнала через устройство, называемое фильтром, предназначенное для того, чтобы «отфильтровать» помеху и получить на выходе сигнал, с возможно большей точностью воспроизводящий процесс $Z(t)$.

Вторая задача обычно называется *задачей экстраполяции* или *прогноза*.

Как мы знаем, стохастические дифференциальные уравнения определяют марковский случайный процесс (п. 3.6.2). Следовательно, поставленные задачи представляют собой задачи оценивания и экстраполяции одних компонент марковского процесса по результатам наблюдения остальных его компонент.

§ 7.2. Оптимальная фильтрация

7.2.1. Общая формула для оптимальной оценки. Поставленные в п. 7.1.6 задачи можно решать различными способами в зависимости от того, какие оценки желательно получить. Естественно потребовать, чтобы оценки процесса $Y(t)$ или его будущего значения $Y(t+\Delta)$ были в некотором смысле оптимальными. Если задать критерий оптимальности, то задачи, поставленные в п. 7.1.6, станут вполне определенными. Естественным критерием оптимальности во многих задачах математической статистики служит критерий минимума среднего квадрата ошибки, $M|\hat{Z}-Z|^2=\min$. Если принять этот критерий, то общее решение задач п. 7.1.6 и других более общих задач оценивания немедленно получается из известного свойства моментов второго порядка: из всех моментов второго порядка скалярной случайной величины наименьшим является ее дисперсия — центральный момент второго порядка. Отсюда следует, что наилучшее приближение случайной величины (как скалярной, так и векторной) неслучайной величиной с точки зрения критерия минимума среднего квадрата ошибки дает ее математическое ожидание. В частности, наилучшее приближение случайной величины по результатам наблюдения дает апостериорное математическое ожидание этой величины, т. е. ее условное математическое ожидание относительно результатов наблюдений.

Обозначим через $Y_{t_0}^t$ *совокупность значений наблюдаемого процесса* в интервале времени $[t_0, t]$, $Y_{t_0}^t=\{Y(\tau)\colon \tau\in[t_0, t]\}$. Оптимальная оценка вектора $Z_u=Z(u)$, дающая решение задачи 1 при $u=t$ и решение задачи 2 при $u=t+\Delta$, определяется формулой

$$\hat{Z}_t=M[Z_u|Y_{t_0}^t]. \qquad (7)$$

Эта формула определяет оптимальную оценку значения Z_u любой случайной функции $Z(t)$ по результатам наблюдения другой случайной функции $Y(t)$ в интервале $[t_0, t]$. Она справедлива также для случая векторного аргумента t и наблюдения случайиой функции $Y(t)$ на любом множестве T значений t.

Для практического применения формулы (7) в общем случае необходимо найти апостериорное распределение Z_u. Эта задача очень сложна и в общем случае пока не решена. В частном случае, когда процессы $Y(t)$ и $Z(t)$ определяются уравнениями (5) или (6), она может быть решена при некоторых дополнительных ограничениях. Однако даже в этих случаях практическое применение формулы (7) представляет большие, часто непреодолимые трудности. Причиной этого является то, что определение апостериорного распределеиия всегда требует очень громоздких вычислений, которые могут быть выполнены только после наблюдений. Это приводит к большим затратам времени на вычисление оценок после наблюдений. Практически же во многих случаях оценки необходимо получать в реальном масштабе времени по мере поступления результатов наблюдений.

Однако трудности применения формулы (7) не снижают значения теории оптимального оценивания и экстраполяции. Эта теория необходима для изучения потенциальиой точности оценок, т. е. предельно достижимой точности оценивания.

7.2.2. **Вспомогательная задача.** В основе теории оптимальной фильтрации лежит общая формула для стохастического дифференциала оптимальной оценки данной функции вектора состояния системы. Пусть $f(Z, t)$ — некоторая скалярная функция p-мерного вектора состояния системы и времени. Ее оптимальная оценка по результатам наблюдения $Y_{t_0}^t$ согласно (7) определяется формулой

$$\hat{f}(t) = M[f(Z, t) \mid Y_{t_0}^t].$$

Эта оценка представляет собой функционал от случайного процесса $Y(t)$ на интервале времени $[t_0, t]$ и, следовательно, сама представляет собой случайный процесс. Поставим задачу: найти стохастический дифференциал Ито этого процесса.

Эта задача может быть решена при условии, что $W(t)$ в (5), (6) представляет собой винеровский процесс, размерность которого q не меньше размерности m наблюдаемого процесса $Y(t)$, и что функция ψ_1 в (5) не зависит от Z. Уравнения (5) в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} dY &= \varphi_1(Y, Z, t)\,dt + \psi_1(Y, t)\,dW, \\ dZ &= \varphi(Y, Z, t)\,dt + \psi(Y, Z, t)\,dW. \end{aligned} \tag{8}$$

7.2.3. **Преобразование уравнений.** Чтобы упростить задачу нахождения стохастического дифференциала процесса $\hat{f}(t)$, преобразуем уравнения (8) к более простому виду.

► Заметим, что при любом ортогональном преобразовании q-мерного пространства R^q случайный процесс

$$W'(t)=\int_0^t \omega(y,\ \tau)\,\nu^{-1/2}(\tau)\,dW(\tau),$$

где $\omega(y,\ t)$ — матрица ортогонального преобразования, возможно, зависящая от y и t, представляет собой винеровский процесс с независимыми компонентами *). Действительно, ковариационная матрица значения процесса $W'(t)$ при данном t согласно (3.14) определяется формулой

$$MW'(t)\,W'(t)^{\mathrm{T}}=\int_0^t \omega(y,\tau)\,\nu^{-1/2}(\tau)\,\nu(\tau)\,\nu^{-1/2}(\tau)\,\omega(y,\ \tau)^{\mathrm{T}}\,d\tau=It,$$

так как $\omega(y,\ \tau)\,\omega(y,\ \tau)^{\mathrm{T}}=I$ в силу ортогональности матрицы $\omega(y,\ \tau)$. Эта формула убеждает нас в том, что компоненты процесса $W'(t)$ не коррелированы, а следовательно, и независимы, так как винеровский процесс распределен нормально (п. 3.4.3). При этом каждая компонента процесса $W'(t)$ представляет собой стандартный винеровский процесс (пример 3.1).

Заменим процесс $W(t)$ в уравнениях (8) процессом $W'(t)$. При этом дифференциал dW заменится величиной $\nu^{1/2}(t)\,\omega(y,\ t)^{\mathrm{T}}\,dW'$. Выберем теперь ортогональную матрицу $\omega(y,\ t)$ так, чтобы привести матрицу $\psi_1(y,\ t)$ к блочному виду $[0\ \ \psi_1''(y,\ t)]$, где первый блок представляет собой $m\times(q-m)$-матрицу, все элементы которой равны нулю, а второй — $m\times m$-матрицу. Это при некоторых условиях возможно, так как ортогональная $q\times q$-матрица ω имеет $q(q-1)/2$ произвольных элементов, которые должны удовлетворять $m(q-m)$ условиям, и $q(q-1)/2\geqslant q^2/4$ при $q\geqslant 2$, $m(q-m)\leqslant q^2/4$. В результате такого преобразования будем иметь

$$\begin{bmatrix}\psi_1(Y,\ t)\\ \psi(Y,\ Z,\ t)\end{bmatrix}dW=\begin{bmatrix}\psi_1(Y,\ t)\\ \psi(Y,\ Z,\ t)\end{bmatrix}\nu^{1/2}(t)\,\omega(Y,\ t)^{\mathrm{T}}\,dW'=$$

$$=\begin{bmatrix}\psi_1(Y,t)\,\nu^{1/2}(t)\,\omega(Y,\ t)^{\mathrm{T}}\\ \psi(Y,\ Z,\ t)\,\nu^{1/2}(t)\,\omega(Y,\ t)\end{bmatrix}dW'=\begin{bmatrix}0 & \psi_1''(Y,\ t)\\ \psi'(Y,Z,t) & \psi''(Y,\ Z,\ t)\end{bmatrix}dW'=$$

$$=\begin{bmatrix}\psi_1''(Y,\ t)\,dW_2\\ \psi'(Y,\ Z,\ t)\,dW_1+\psi''(Y,Z,\ t)\,dW_2\end{bmatrix},$$

где $W_1(t)$ и $W_2(t)$ — независимые винеровские процессы, образованные соответственно $q-m$ первыми и m последними компонен-

*) Степень симметричной неотрицательно определенной матрицы ν определяется формулой $\nu^s=A\Lambda^sA^{\mathrm{T}}$, где $\Lambda=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_q\}$ — диагональная матрица, к которой ν приводится ортогональным преобразованием A, а $\Lambda^s=\operatorname{diag}\{\lambda_1^s,\ \ldots,\lambda_q^s\}$.

тами процесса $W'(t)$. При этом уравнения (8) приводятся к виду

$$\begin{aligned} dY &= \varphi_1(Y,\ Z,\ t)\,dt + \psi_1''(Y,\ t)\,dW_2, \\ dZ &= \varphi(Y,\ Z,\ t)\,dt + \psi'(Y,\ Z,\ t)\,dW_1 + \psi''(Y,\ Z,\ t)\,dW_2. \end{aligned} \tag{9}$$

Чтобы найти матрицы ψ', ψ'' и ψ_1'' и выяснить условия, при которых приведение уравнений (8) к виду (9) возможно, вычислим условную ковариационную матрицу случайного вектора

$$\begin{bmatrix} \psi_1(Y,\ t) \\ \psi(Y,\ Z,\ t) \end{bmatrix} \Delta W = \begin{bmatrix} 0 & \psi_1''(Y,\ t) \\ \psi'(Y,\ Z,\ t) & \psi''(Y,\ Z,\ t) \end{bmatrix} \Delta W'$$

относительно величин Y, Z, где $\Delta W = W(t+\Delta t) - W(t)$, $\Delta W' = W'(t+\Delta t) - W'(t)$. Имея в виду, что ΔW и $\Delta W'$ независимы от Y_t, Z_t и их ковариационные матрицы равны соответственно $\nu(t)\Delta t + o(\Delta t)$ и $I\Delta t$, по формуле преобразования ковариационной матрицы при линейном преобразовании случайного вектора (*ТВ*, п. 3.3.5) находим, опуская для краткости аргументы функций ψ, ψ_1, ψ', ψ'', ψ_1'',

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi \end{bmatrix} \nu\,[\psi_1^{\mathrm{T}}\psi^{\mathrm{T}}]\,\Delta t + o(\Delta t) = \begin{bmatrix} 0 & \psi_1'' \\ \psi' & \psi'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \psi'^{\mathrm{T}} \\ \psi_1''^{\mathrm{T}} & \psi''^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \Delta t.$$

Отсюда, разделив обе части на Δt, при $\Delta t \to 0$ получаем

$$\begin{bmatrix} \psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}} & \psi_1\nu\psi^{\mathrm{T}} \\ \psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}} & \psi\nu\psi^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1''\psi_1''^{\mathrm{T}} & \psi_1''\psi''^{\mathrm{T}} \\ \psi''\psi_1''^{\mathrm{T}} & \psi'\psi'^{\mathrm{T}} + \psi''\psi''^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},$$

или

$$\psi_1''\psi_1''^{\mathrm{T}} = \psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}, \quad \psi''\psi_1''^{\mathrm{T}} = \psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}}, \quad \psi'\psi'^{\mathrm{T}} + \psi''\psi''^{\mathrm{T}} = \psi\nu\psi^{\mathrm{T}}. \tag{10}$$

Остается решить эти уравнения последовательно относительно ψ_1'', ψ'' и ψ'.

Первое уравнение (10) имеет очевидное решение $\psi_1'' = \psi_1\nu^{1/2}$. Определяемая этой формулой матрица ψ_1'' не зависит от Z, так как ψ_1 не зависит от Z. Второе уравнение (10) имеет решение тогда и только тогда, когда матрица $\psi_1''(y,\ t)$ обратима при всех y, t. Для этого необходимо, чтобы матрица $\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}$ была обратимой при всех y, t, так как на основании первого уравнения (10) $|\psi_1''|^2 = |\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}|$. В этом случае второе уравнение (10) дает $\psi'' = \psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}}(\psi_1''^{-1})^{\mathrm{T}}$. После этого третье уравнение (10) приводится к виду

$$\psi'\psi'^{\mathrm{T}} = \psi\nu\psi^{\mathrm{T}} - \psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}}(\psi_1''^{-1})^{\mathrm{T}}(\psi_1''^{-1})\,\psi_1\nu\psi^{\mathrm{T}},$$

или, так как в силу первого уравнения (10) $(\psi_1''^{-1})^{\mathrm{T}}(\psi_1''^{-1}) = (\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}$,

$$\psi'\psi'^{\mathrm{T}} = \psi\nu\psi^{\mathrm{T}} - \psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}}(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}\,\psi_1\nu\psi^{\mathrm{T}}.$$

Правая часть этого уравнения представляет собой симметричную матрицу. Докажем, что она неотрицательно определенна. Для этого заметим, что матрица

$$A = \begin{bmatrix} \psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}} & \psi_1 \nu \psi^{\mathrm{T}} \\ \psi \nu \psi_1^{\mathrm{T}} & \psi \nu \psi^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},$$

пропорциональная ковариационной матрице вектора $[\psi_1^{\mathrm{T}} \psi^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} dW$, неотрицательная определенная, вследствие чего при любом векторе $u = [u_1^{\mathrm{T}} u_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$

$$u^{\mathrm{T}} A u = u_1^{\mathrm{T}} \psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}} u_1 + u_2^{\mathrm{T}} \psi \nu \psi_1^{\mathrm{T}} u_1 + u_1^{\mathrm{T}} \psi_1 \nu \psi^{\mathrm{T}} u_2 + u_2^{\mathrm{T}} \psi \nu \psi^{\mathrm{T}} u_2 \geqslant 0.$$

Положив здесь $u_1 = -(\psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1} \psi_1 \nu \psi^{\mathrm{T}} u_2$, будем иметь

$$u_2^{\mathrm{T}} \psi \nu \psi_1^{\mathrm{T}} (\psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1} \psi_1 \nu \psi^{\mathrm{T}} u_2 - u_2^{\mathrm{T}} \psi \nu \psi_1^{\mathrm{T}} (\psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1} \psi_1 \nu \psi^{\mathrm{T}} u_2 - \\ - u_2^{\mathrm{T}} \psi \nu \psi_1^{\mathrm{T}} (\psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1} \psi_1 \nu \psi^{\mathrm{T}} u_2 + u_2^{\mathrm{T}} \psi \nu \psi^{\mathrm{T}} u_2 \geqslant 0,$$

или, после сокращений,

$$u_2^{\mathrm{T}} [\psi \nu \psi^{\mathrm{T}} - \psi \nu \psi_1^{\mathrm{T}} (\psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1} \psi_1 \nu \psi^{\mathrm{T}}] u_2 \geqslant 0.$$

Справедливость этого неравенства для всех p-мерных векторов u_2 доказывает справедливость нашего утверждения. После этого решение последнего уравнения (10) дается очевидной формулой $\psi' = \psi [\nu - \nu \psi_1^{\mathrm{T}} (\psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1} \psi_1 \nu]^{1/2}$. Очевидно, что в результате умножения матриц ψ_1'' и ψ' справа на произвольные ортогональные матрицы соответствующих размеров снова получится решение уравнений (10). ◀

Таким образом, уравнения (10) имеют бесконечное множество решений и, следовательно, уравнения (8) приводятся к виду (9), если матрица $\psi_1(y, t) \nu(t) \psi_1(y, t)^{\mathrm{T}}$ обратима при всех y, t.

7.2.4. Стохастический дифференциал оптимальной оценки функции состояния системы. Теперь мы можем найти стохастический дифференциал оптимальной оценки данной скалярной функции вектора состояния системы и времени $f(Z, t)$.

▶ Рассмотрим два бесконечно близких момента времени t и $t + \Delta t$, $\Delta t > 0$. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta \hat{f}(t) = \hat{f}(t + \Delta t) - \hat{f}(t) = \\ = M[f(Z_{t+\Delta t}, t + \Delta t) \mid Y_{t_0}^{t+\Delta t}] - M[f(Z_t, t) \mid Y_{t_0}^t] = \\ = M[f(Z_{t+\Delta t}, t + \Delta t) - f(Z_t, t) \mid Y_{t_0}^t] + \\ + M[f(Z_{t+\Delta t}, t + \Delta t) \mid Y_{t_0}^{t+\Delta t}] - M[f(Z_{t+\Delta t}, t + \Delta t) \mid Y_{t_0}^t]. \end{aligned} \tag{11}$$

Вычислим каждое слагаемое в правой части по отдельности. По формуле дифференцирования сложной функции (3.61) в силу второго уравнения (9) получаем, опустив для краткости аргументы функций,

$$f(Z_{t+\Delta t},\ t+\Delta t)-f(Z_t,\ t)=\Big\{f_t(Z_t,\ t)+f_z(Z_t,\ t)^{\mathrm{T}}\varphi+$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(f_{zz}(Z_t,\ t)[\psi'\psi'']\begin{bmatrix}\psi'^{\mathrm{T}}\\ \psi''^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\right)\Big\}\Delta t+f_z(Z_t,\ t)^{\mathrm{T}}(\psi'\Delta W_1+\psi''\Delta W_2)=$$

$$=\Big\{f_t(Z_t,\ t)+f_z(Z_t,\ t)^{\mathrm{T}}\varphi+\frac{1}{2}\operatorname{tr}[f_{zz}(Z_t,\ t)(\psi'\psi'^{\mathrm{T}}+\psi''\psi''^{\mathrm{T}})]\Big\}\Delta t+$$

$$+f_z(Z_t,\ t)^{\mathrm{T}}(\psi'\Delta W_1+\psi''\Delta W_2),$$

где, как и в п. 3.5.2, $f_t(z,\ t)=\partial f(z,\ t)/\partial t$, $f_z(z,\ t)$ — матрица-столбец, элементами которой служат производные функции $f(z,\ t)$ по компонентам вектора z, $f_{zz}(z,\ t)$ — квадратная матрица вторых производных функции $f(z,\ t)$ по компонентам вектора z. Подставим сюда выражение ΔW_2 из первого уравнения (9),

$$\Delta W_2=\psi_1''^{-1}(\Delta Y-\varphi_1\Delta t).$$

Взяв условное математическое ожидание полученного выражения относительно $Y_{t_0}^t$, пользуясь третьим уравнением (10) и учитывая независимость ΔW_1 от ΔW_2, а следовательно, и от ΔY, получим при фиксированном ΔY

$$M[f(Z_{t+\Delta t},\ t+\Delta t)-f(Z_t,\ t)\,|\,Y_{t_0}^t]=M[f_t(Z_t,\ t)+f_z(Z_t,\ t)^{\mathrm{T}}\varphi+$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\{f_{zz}(Z_t,\ t)\psi\nu\psi^{\mathrm{T}}\}\,|\,Y_{t_0}^t]\Delta t+$$

$$+M[f_z(Z_t,\ t)^{\mathrm{T}}\psi''\psi_1''^{-1}(\Delta Y-\varphi_1\Delta t)\,|\,Y_{t_0}^t].$$

Наконец, из первых двух уравнений (10) находим

$$\psi''=\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}}(\psi_1''^{-1})^{\mathrm{T}},\qquad \psi_1''^{-1}=\psi_1''^{\mathrm{T}}(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

Подставив эти выражения в предыдущую формулу и учитывая, что ψ_1 не зависит от Z_t, будем иметь

$$M[f(Z_{t+\Delta t},\ t+\Delta t)-f(Z_t,\ t)\,|\,Y_{t_0}^t]=$$

$$=M\left[f_t(Z_t,\ t)+f_z(Z_t,\ t)^{\mathrm{T}}\varphi+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\{f_{zz}(Z_t,\ t)\psi\nu\psi^{\mathrm{T}}\}\,|\,Y_{t_0}^t\right]\Delta t+$$

$$+M[f_z(Z_t,\ t)^{\mathrm{T}}\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}}(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(\Delta Y-\varphi_1\Delta t)\,|\,Y_{t_0}^t].\qquad(12)$$

Для вычисления второго слагаемого в (11) найдем условную плотность вектора Z_t относительно $Y_{t_0}^{t+\Delta t}$. Пусть $p_t(z)$ — условная плотность вектора Z_t относительно $Y_{t_0}^t$, т. е. его апостериорная плотность, $q_t(\eta\,|\,y,\ z)$ — условная плотность величины ΔY при данных значениях y, z векторов Y_t, Z_t. Так как при фиксированном значении z вектора Z_t первое уравнение (9) определяет марковский процесс $Y_z(t)$ (п. 3.6.2), то плотность $q_t(\eta\,|\,y,\ z)$ совпадает с условной плотностью величины ΔY при данных значениях $y_{t_0}^t$ и z величин $Y_{t_0}^t$ и Z_t (см. п. 2.1.3). Следовательно, на основании теоремы умножения плотностей (*ТВ*, п. 4.2.2) условная плотность $p_t'(z)$ вектора Z_t относительно $Y_{t_0}^{t+\Delta t}$ или, что одно и то же, относительно $Y_{t_0}^t$ и ΔY определяется формулой

$$p_t'(z) = \frac{p_t(z)\, q_t(\Delta Y \mid Y_t,\ z)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_t(z)\, q_t(\Delta Y \mid Y_t,\ z)\, dz}. \tag{13}$$

Числитель здесь представляет собой совместную условную плотность величин Z_t и ΔY относительно $Y_{t_0}^t$, а интеграл в знаменателе — условную плотность величины ΔY относительно $Y_{t_0}^t$. Для определения $q_t(\Delta Y \mid Y_t,\ z)$ заметим, что на основании первого уравнения (9) при $Z = z$

$$\Delta Y = \varphi_1(Y_t,\ z,\ t)\,\Delta t + \psi_1''(Y_t,\ t)\,\Delta W_2.$$

Отсюда видно, что при данных значениях Y_t и $Z_t = z$ ΔY представляет собой линейную функцию нормально распределенной величины ΔW_2. Следовательно, условное распределение ΔY при данных значениях Y_t и $Z_t = z$ нормально, и для определения $q_t(\Delta Y \mid Y_t,\ z)$ достаточно найти соответствующие условные математическое ожидание и ковариационную матрицу вектора ΔY. Пользуясь известными формулами для математического ожидания и ковариационной матрицы линейной функции случайного вектора (*ТВ*, п. 3.3.5), принимая во внимание, что ковариационная матрица вектора ΔW_2 равна $I_m \Delta t$, и опуская аргументы функций φ_1 и ψ_1'', получаем *)

$$M[\Delta Y \mid Y_t,\ z] = \varphi_1\,\Delta t,\ \ K_{\Delta Y} = \psi_1''\psi_1''^{\mathrm{T}}\,\Delta t,$$

или, принимая во внимание первое уравнение (10),

$$M[\Delta Y \mid Y_t,\ z] = \varphi_1\,\Delta t, \qquad K_{\Delta Y} = \psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}}\,\Delta t.$$

Следовательно,

$$q_t(\Delta Y \mid Y_t,\ z) = c \exp\left\{-\frac{1}{2\Delta t}(\Delta Y^{\mathrm{T}} - \varphi_1^{\mathrm{T}}\Delta t)(\psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(\Delta Y - \varphi_1\,\Delta t)\right\},$$

где c — нормирующая постоянная. Учитывая, что величины Δt и ΔY бесконечно малы, можем представить показательную функцию формулой Тейлора с остаточным членом порядка $o(\Delta t)$. Тогда получим

$$\begin{aligned} q_t(\Delta Y \mid Y_t,\ z) = c \exp\Big\{&-\frac{1}{2\,\Delta t}\,\Delta Y^{\mathrm{T}}(\psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}\Delta Y + \\ &+ \varphi_1^{\mathrm{T}}(\psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}\Delta Y - \frac{1}{2}\,\varphi_1^{\mathrm{T}}(\psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}\varphi_1\,\Delta t\Big\} = \\ = c \exp\Big\{-\frac{1}{2\,\Delta t}\,\Delta Y^{\mathrm{T}}&(\psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}\Delta Y\Big\}\Big[1 + \varphi_1^{\mathrm{T}}(\psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}\Delta Y - \\ &- \frac{1}{2}\,\varphi_1^{\mathrm{T}}(\psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}\varphi_1\,\Delta t + \frac{1}{2}\,\varphi_1^{\mathrm{T}}(\psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}\Delta Y\,\Delta Y^{\mathrm{T}}(\psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}\varphi_1\Big]. \end{aligned}$$

*) Через I_m обозначается единичная $m \times m$-матрица.

Учитывая, как и в п. 3.5.2, только математическое ожидание величины $\Delta Y\,\Delta Y^{\text{т}}$,

$$M\,\Delta Y\,\Delta Y^{\text{т}} = \varphi_1^2\,\Delta t^2 + \psi_1''\psi_1''\,\Delta t = \psi_1\nu\psi_1^{\text{т}}\,\Delta t + o\,(\Delta t),$$

получим

$$q_t\,(\Delta Y\,|\,Y_t,\ z) = c\exp\left\{-\frac{1}{2\,\Delta t}\,\Delta Y^{\text{т}}\,(\psi_1\nu\psi_1^{\text{т}})^{-1}\,\Delta Y\right\}[1 + \varphi_1^{\text{т}}\,(\psi_1\nu\psi_1^{\text{т}})^{-1}\,\Delta Y]$$

и, так как φ_1 не зависит от z,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_t\,(z)\,q_t\,(\Delta Y\,|\,Y_t,\ z)\,dz =$$

$$= c\exp\left\{-\frac{1}{2\,\Delta t}\,\Delta Y^{\text{т}}\,(\psi_1\nu\psi_1^{\text{т}})^{-1}\,\Delta Y\right\}\,[1 + \hat{\varphi}_1^{\text{т}}\,(\psi_1\nu\psi_1^{\text{т}})^{-1}\,\Delta Y],$$

где

$$\hat{\varphi}_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_1 p_t\,(z)\,dz = M\,[\varphi_1\,(Y_t,\ Z_t,\ t)\,|\,Y_{t_0}^t].$$

Подставив полученные выражения $q_t\,(\Delta Y\,|\,Y_t,\ z)$ и интеграла в (13), будем иметь после сокращений

$$p_t'\,(z) = p_t\,(z)\,\frac{1 + \varphi_1^{\text{т}}\,(\psi_1\nu\psi_1^{\text{т}})^{-1}\,\Delta Y}{1 + \hat{\varphi}_1^{\text{т}}\,(\psi_1\nu\psi_1^{\text{т}})^{-1}\,\Delta Y}.$$

Представив $1/[1 + \hat{\varphi}_1^{\text{т}}\,(\psi_1\nu\psi_1^{\text{т}})^{-1}\,\Delta Y]$ формулой Тейлора с остаточным членом порядка $o\,(\Delta t)$, выполнив умножение и учитывая, как и раньше, только математическое ожидание величины $\Delta Y\,\Delta Y^{\text{т}}$, получим

$$\begin{aligned} p_t'\,(z) = p_t\,(z)\,[1 + \varphi_1^{\text{т}}\,(\psi_1\nu\psi_1^{\text{т}})^{-1}\,\Delta Y]\,[1 - \hat{\varphi}_1^{\text{т}}\,(\psi_1\nu\psi_1^{\text{т}})^{-1}\,\Delta Y +{} \\ + \hat{\varphi}_1^{\text{т}}\,(\psi_1\nu\psi_1^{\text{т}})^{-1}\,\Delta Y\,\Delta Y^{\text{т}}\,(\psi_1\nu\psi_1^{\text{т}})^{-1}\hat{\varphi}_1] = \\ = p_t\,(z)\,\{1 + (\varphi_1^{\text{т}} - \hat{\varphi}_1^{\text{т}})\,(\psi_1\nu\psi_1^{\text{т}})^{-1}\,[\Delta Y - \Delta Y\,\Delta Y^{\text{т}}(\psi_1\nu\psi_1^{\text{т}})^{-1}\,\hat{\varphi}_1]\} = \\ = p_t\,(z)\,[1 + (\varphi_1^{\text{т}} - \hat{\varphi}_1^{\text{т}})\,(\psi_1\nu\psi_1^{\text{т}})^{-1}\,(\Delta Y - \hat{\varphi}_1\,\Delta t)]. \end{aligned}$$

Теперь можно вычислить второе слагаемое в правой части формулы (11). Учитывая, что согласно (3.61)

$$\begin{aligned} f\,(Z_{t+\Delta t},\ t + \Delta t) &= \\ = f\,(Z_t,\ t) + \left\{f_t\,(Z_t,\ t) + f_z\,(Z_t,\ t)^{\text{т}}\,\varphi + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,[f_{zz}\,(Z_t,\ t)\,\psi\nu\psi^{\text{т}}]\right\}\Delta t +{} \\ + f_z\,(Z_t,\ t)^{\text{т}}\,(\psi'\,\Delta W_1 + \psi''\,\Delta W_2) = \\ = f\,(Z_t,\ t) + f_1\,\Delta t + f_z\,(Z_t,\ t)^{\text{т}}\,(\psi'\,\Delta W_1 + \psi''\,\Delta W_2), \end{aligned}$$

где

$$f_1 = f_t\,(Z_t,\ t) + f_z\,(Z_t,\ t)^{\text{т}}\,\varphi + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,[f_{zz}\,(Z_t,\ t)\,\psi\nu\psi^{\text{т}}],$$

а ψ' и ψ'' зависят только от Y_t, Z_t, t, находим

$$M[f(Z_{t+\Delta t},\ t+\Delta t)\,|\,Y_{t_0}^{t+\Delta t}]-M[f(Z_{t+\Delta t},\ t+\Delta t)\,|\,Y_{t_0}^t]=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}[f(z,\ t)+f_1\Delta t+f_z(z,\ t)^{\mathrm{T}}(\psi'\Delta W_1+\psi''\Delta W_2)]\,[p_t'(z)-p_t(z)]\,dz=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}[f(z,\ t)+f_1\Delta t+f_z(z,\ t)^{\mathrm{T}}(\psi'\Delta W_1+\psi''\Delta W_2)]\times$$

$$\times(\varphi_1^{\mathrm{T}}-\hat\varphi_1^{\mathrm{T}})(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(\Delta Y-\hat\varphi_1\Delta t)\,p_t(z)\,dz,$$

или, пользуясь первым уравнением (9) и учитывая только слагаемые порядка не выше Δt,

$$M[f(Z_{t+\Delta t},\ t+\Delta t)\,|\,Y_{t_0}^{t+\Delta t}]-M[f(Z_{t+\Delta t},\ t+\Delta t)\,|\,Y_{t_0}^t]=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(z,\ t)(\varphi_1^{\mathrm{T}}-\hat\varphi_1^{\mathrm{T}})\,p_t(z)\,dz\,(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(\Delta Y-\hat\varphi_1\Delta t)+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_z(z,\ t)^{\mathrm{T}}(\psi'\Delta W_1\Delta W_2^{\mathrm{T}}\psi_1''^{\mathrm{T}}+\psi''\Delta W_2\Delta W_2^{\mathrm{T}}\psi_1''^{\mathrm{T}})\times$$

$$\times(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(\varphi_1-\hat\varphi_1)\,p_t(z)\,dz=M[f(Z_t,\ t)(\varphi_1^{\mathrm{T}}-\hat\varphi_1^{\mathrm{T}})\,|\,Y_{t_0}^t]\times$$

$$\times(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(\Delta Y-\hat\varphi_1\,dt)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_z(z,\ t)^{\mathrm{T}}(\psi'\Delta W_1\Delta W_2^{\mathrm{T}}\psi_1''^{\mathrm{T}}+$$

$$+\psi''\Delta W_2\Delta W_2^{\mathrm{T}}\psi_1''^{\mathrm{T}})(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(\varphi_1-\hat\varphi_1)\,p_t(z)\,dz.$$

Наконец, учитывая только математические ожидания величин $\Delta W_1\Delta W_2^{\mathrm{T}}$ и $\Delta W_2\Delta W_2^{\mathrm{T}}$ и принимая во внимание, что вследствие независимости W_2 и W_1 $M\Delta W_1\Delta W_2^{\mathrm{T}}=0$ и что согласно второму уравнению (10) $\psi''\psi_1''^{\mathrm{T}}=\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}}$, получим

$$M[f(Z_{t+\Delta t},\ t+\Delta t)\,|\,Y_{t_0}^{t+\Delta t}]-M[f(Z_{t+\Delta t},\ t+\Delta t)\,|\,Y_{t_0}^t]=$$

$$=M[f(Z_t,\ t)(\varphi_1^{\mathrm{T}}-\hat\varphi_1^{\mathrm{T}})\,|\,Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(\Delta Y-\hat\varphi_1\Delta t)+$$

$$+M[f_z(Z_t,\ t)^{\mathrm{T}}\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}}(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(\varphi_1-\hat\varphi_1)\,|\,Y_{t_0}^t]\,\Delta t. \quad (14)$$

Подставив выражения (12) и (14) в (11) и переходя от приращений к дифференциалам, получаем окончательную формулу для стохастического дифференциала оптимальной оценки величины $f(Z_t,\ t)$:

$$d\hat f=M\Big[f_t(Z,\ t)+f_z(Z,\ t)^{\mathrm{T}}\varphi(Y,\ Z,\ t)+$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\{f_{zz}(Z,\ t)(\psi\nu\psi^{\mathrm{T}})(Y,\ Z,\ t)\}\,|\,Y_{t_0}^t\Big]dt+$$

$$+M[f(Z,\ t)\{\varphi_1(Y,\ Z,\ t)^{\mathrm{T}}-\hat\varphi_1^{\mathrm{T}}\}+$$

$$+f_z(Z,\ t)^{\mathrm{T}}(\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})(Y,\ Z,\ t)\,|\,Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y,\ t)(dY-\hat\varphi_1\,dt), \quad (15)$$

где для краткости положено

$$(\psi\nu\psi^{\mathrm{T}})(y,\ z,\ t)=\psi(y,\ z,\ t)\,\nu(t)\,\psi(y,\ z,\ t)^{\mathrm{T}},$$
$$(\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})(y,\ z,\ t)=\psi(y,\ z,\ t)\,\nu(t)\,\psi_1(y,\ t)^{\mathrm{T}},$$
$$(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(y,\ t)=[\psi_1(y,\ t)\,\nu(t)\,\psi_1(y,\ t)^{\mathrm{T}}]^{-1}. \blacktriangleleft$$

Формула (15) справедлива, конечно, только в том случае, когда существуют производные f_t, f_z, f_{zz} и все условные математические ожидания в ее правой части.

Заметим, что все разложения по формуле Тейлора, которые были выполнены при нахождении $q_t(\Delta Y\,|\,Y_t,\ z)$ и $p_t'(z)$, строго говоря, законны только под знаком интеграла вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(z)\,p_t'(z)\,dz$$

с попутным доказательством возможности пренебречь остаточными членами. Для упрощения мы выполнили эти операции до вычисления интегралов, имея в виду, что это не могло повлиять на окончательный результат. Формула (15) была, по-видимому, впервые выведена в [49]. Пользуясь обозначением (3.63), можно написать формулу (15) и для векторной или матричной функции.

7.2.5. Уравнение для апостериорной характеристической функции. Положив в (15) $f(z,\ t)=e^{i\lambda^{\mathrm{T}}z}$, получим стохастическое уравнение для апостериорной характеристической функции вектора Z_t:

$$g_t(\lambda)=M\left[e^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z_t}\,\Big|\,Y_{t_0}^t\right].$$

$\blacktriangleright$ Имея в виду, что в данном случае

$$f_t=0,\quad f_z=i\lambda e^{i\lambda^{\mathrm{T}}z},\qquad f_{zz}=-\lambda\lambda^{\mathrm{T}}e^{i\lambda^{\mathrm{T}}z}$$

и что

$$\operatorname{tr}\{\lambda\lambda^{\mathrm{T}}(\psi\nu\psi^{\mathrm{T}})(y,\ z,\ t)\}=\lambda^{\mathrm{T}}(\psi\nu\psi^{\mathrm{T}})(y,\ z,\ t)\,\lambda,$$

из (15) получаем

$$dg_t(\lambda)=M\left[\left\{i\lambda^{\mathrm{T}}\varphi(Y,\ Z,\ t)-\frac{1}{2}\lambda^{\mathrm{T}}(\psi\nu\psi^{\mathrm{T}})(Y,\ Z,\ t)\,\lambda\right\}e^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z}\,\Big|\,Y_{t_0}^t\right]dt+$$
$$+M\left[\{\varphi_1(Y,\ Z,\ t)^{\mathrm{T}}-\hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}}+i\lambda^{\mathrm{T}}(\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})(Y,\ Z,\ t)\}\times\right.$$
$$\left.\times e^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z}\,\Big|\,Y_{t_0}^t\right](\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y,\ t)\,(dY-\hat{\varphi}_1\,dt).\ \blacktriangleleft \qquad (16)$$

Правая часть здесь представляет собой функционал от характеристической функции $g_t(\lambda)$, рассматриваемой как функция λ, поскольку апостериорное распределение вектора Z_t полностью и однозначно определяется этой характеристической функцией. Поэтому (16) представляет собой стохастическое дифференциальное уравнение для апостериорной характеристической функции $g_t(\lambda)$. Это уравнение нелинейно, поскольку $\hat{\varphi}_1=M\left[\varphi_1(Y,\ Z,\ t)\,|\,Y_{t_0}^t\right]$ тоже является функционалом от $g_t(\lambda)$.

В начальный момент t_0 $g_{t_0}(\lambda)$ представляет собой условную характеристическую функцию величины Z_0 относительно Y_0. Это служит начальным условием для уравнения (16).

Решив уравнение (16), можно легко вычислить оптимальную оценку $\hat{Z}$ вектора состояния системы Z, определяемую формулой (7). Для этого достаточно вспомнить, как выражается математическое ожидание через характеристическую функцию (*ТВ*, п. 4.5.3). Тогда получим

$$\hat{Z} = M\left[Z \mid Y_{t_0}^t\right] = \left[\frac{\partial g_t(\lambda)}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=0}. \tag{17}$$

7.2.6. Уравнение для апостериорной плотности. Из уравнения (16) совершенно так же, как было выведено уравнение (5.56) в п. 5.3.6, выводится стохастическое уравнение для апостериорной плотности $p_t(z)$ вектора Z_t:

$$\begin{aligned} dp_t(z) = &-\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial z}\left[\varphi(Y, z, t)\, p_t(z)\right] dt + \\ &+ \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial z}\left[(\psi\nu\psi^{\mathrm{T}})(Y, z, t)\, p_t(z)\right]\right\} dt + \\ &+ \Big\{\left[\varphi_1(Y, z, t)^{\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}}\right] p_t(z) - \\ &- \frac{\partial}{\partial z}\left[(\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})(Y, z, t)\, p_t(z)\right]\Big\} (\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y, t)\,(dY - \hat{\varphi}_1 dt). \end{aligned} \tag{18}$$

Имея в виду, что

$$\hat{\varphi}_1 = M\left[\varphi_1(Y, Z, t) \mid Y_{t_0}^t\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(Y, z, t)\, p_t(z)\, dz,$$

заключаем, что (18) представляет собой нелинейное стохастическое интегро-дифференциальное уравнение относительно апостериорной плотности $p_t(z)$.

В начальный момент t_0 $p_{t_0}(z)$ представляет собой условную плотность величины Z_0 относительно Y_0. Это служит начальным условием для (18).

Решив уравнение (18), можно найти по формуле (7) оптимальную оценку $\hat{Z}$ вектора состояния Z системы:

$$\hat{Z} = M\left[Z \mid Y_{t_0}^t\right] = \int_{-\infty}^{\infty} z p_t(z)\, dz. \tag{19}$$

Однако реализовать эту возможность, так же как и вычислить $\hat{Z}$ по формуле (17), чрезвычайно трудно; как уравнение (16), так и уравнение (18) можно решить только после получения результатов наблюдений $Y_{t_0}^t$, что невозможно выполнить в натуральном масштабе времени в процессе работы системы.

Так как формула (15) определяет стохастический дифференциал Ито случайного процесса $\hat{f}(t)$, то уравнения (16) и (18) представляют собой стохастические уравнения Ито.

Уравнение (18) было впервые получено при более жестких ограничениях основоположником теории нелинейной фильтрации Стратоновичем в иной форме, а именно в форме стохастического уравнения Стратоновича (т. е. в 1/2-дифференциалах; см. п. 3.6.4) [73]. Уравнение для $p_t(z)$ в форме Ито было получено Кушнером, тоже при более жестких ограничениях [44—46]. Поэтому уравнение (18) обычно называется уравнением Стратоновича — Кушнера.

Уравнение для $p_t(z)$ в форме Стратоновича или с применением других θ-дифференциалов можно получить из (18) по формуле (3.85) перехода от уравнений Ито к уравнениям в θ-дифференциалах, приняв во внимание, что коэффициент при dY в (18) зависит от пяти случайных процессов $\varphi_1(Y_t, z, t)$, $\hat{\varphi}_1(t)$, $\partial(\psi\nu\psi_1^{\text{т}})(Y, z, t)/\partial z$, $p_t(z)$, $\partial p_t(z)/\partial z$, для которых можно найти стохастические дифференциалы Ито по формулам (3.61), (15) и (18). Мы предоставляем читателю выполнить это, если он пожелает.

7.2.7. Стохастический дифференциал апостериорного математического ожидания. Формула (7) определяет оптимальную оценку как апостериорное математическое ожидание соответствующей случайной величины. Точность оптимальной оценки при данных результатах наблюдений характеризуется апостериорной ковариационной матрицей оцениваемой случайной величины. Поэтому для развития теории оптимального оценивания необходимо вывести формулы для стохастических дифференциалов апостериорных математического ожидания $\hat{Z}$ и ковариационной матрицы R вектора состояния системы. Эти формулы легко выводятся из общей формулы (15). Так как формула (15) определяет стохастический дифференциал скалярной функции состояния системы, необходимо применять ее для каждого элемента матриц $\hat{Z}$ и R по отдельности.

▶ Положив в (15) $f(Z, t) = Z_k$, будем иметь

$$f_t = 0, \quad f_z = [0 \ldots \underset{k}{1} \ldots 0]^{\text{т}}, \quad f_{zz} = 0,$$

и формула (15) даст

$$d\hat{Z}_k = \hat{\varphi}_k\,dt + M\,[Z_k(\varphi_1^{\text{т}} - \hat{\varphi}_1^{\text{т}}) + \\ + (\psi\nu\psi_1^{\text{т}})_k \mid Y_{t_0}^t]\,(\psi_1\nu\psi_1^{\text{т}})^{-1}(dY - \hat{\varphi}_1\,dt) \qquad (k = 1, \ldots, p), \quad (20)$$

где в соответствии с общим обозначением п. 7.2.2

$$\hat{\varphi}_k = M\left[\varphi_k(Y, Z, t) \mid Y_{t_0}^t\right],$$

$(\psi\nu\psi_1^{\text{т}})_k$ — k-я строка матрицы $\psi\nu\psi_1^{\text{т}}$ и аргументы функций φ_1, $\psi\nu\psi_1^{\text{т}}$ и $(\psi_1\nu\psi_1^{\text{т}})^{-1}$ для краткости опущены.

Из (20) вытекает матричная формула для стохастического дифференциала оптимальной оценки $\hat{Z}$ (апостериорного математического ожидания) вектора состояния Z системы:

$$d\hat{Z} = \hat{\varphi}\,dt + M\left[Z\{\varphi_1(Y, Z, t)^{\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}}\} + \right.$$
$$\left. + (\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})(Y, Z, t) \mid Y_{t_0}^t\right](\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y, t)(dY - \hat{\varphi}_1\,dt). \blacktriangleleft \quad (21)$$

7.2.8. Стохастический дифференциал апостериорного момента второго порядка. Найдем стохастический дифференциал апостериорного момента второго порядка вектора состояния системы.

► Положив в (15) $f(Z, t) = Z_k Z_l$, будем иметь при $k < l$

$$f_t = 0, \quad f_z = [0\ldots \underset{k}{Z_l} \ldots \underset{l}{Z_k} \ldots 0]^{\mathrm{T}}, \quad f_{zz} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & k & & l & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 \ldots 0 \ldots 1 \ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 \ldots 1 \ldots 0 \ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ k \\ \\ l \\ \\ \\ \end{array},$$

и формула (15) даст

$$d\Gamma_{kl} = M\left[Z_k\varphi_l + Z_l\varphi_k + (\psi\nu\psi^{\mathrm{T}})_{kl} \mid Y_{t_0}^t\right]dt +$$
$$+ M\left[Z_k Z_l(\varphi_1^{\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}}) + Z_k(\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})_l + \right.$$
$$\left. + Z_l(\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})_k \mid Y_{t_0}^t\right](\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(dY - \hat{\varphi}_1\,dt) \qquad (k, l = 1, \ldots, p), \quad (22)$$

где в дополнение к прежним обозначениям $\Gamma_{kl} = M[Z_k Z_l \mid Y_{t_0}^t]$, а $(\psi\nu\psi^{\mathrm{T}})_{kl}$ — соответствующий элемент матрицы $\psi\nu\psi^{\mathrm{T}}$.

Для вывода соответствующей матричной формулы перепишем (22) в виде

$$d\Gamma_{kl} = M\left[Z_k\varphi_l + Z_l\varphi_k + (\psi\nu\psi^{\mathrm{T}})_{kl} \mid Y_{t_0}^t\right]dt +$$
$$+ \sum_{r=1}^{m} M\left[Z_k Z_l a_r + Z_k b_{lr} + Z_l b_{kr} \mid Y_{t_0}^t\right](dY_r - \hat{\varphi}_{1r}\,dt),$$

где a_r — r-й элемент матрицы-строки $(\varphi_1^{\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}})(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}$, а b_{kr} — элемент k-й строки и r-го столбца матрицы $\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}}(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}$. Тогда, обозначив через b_r r-й столбец матрицы $\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}}(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}$, $b_r = [b_{1r} \ldots b_{pr}]^{\mathrm{T}}$ $(r = 1, \ldots, m)$, получим следующую формулу для стохастического дифференциала апостериорного момента второго порядка Γ вектора состояния Z системы:

$$d\Gamma = M\left[Z\varphi(Y, Z, t)^{\mathrm{T}} + \varphi(Y, Z, t)Z^{\mathrm{T}} + \right.$$
$$\left. + (\psi\nu\psi^{\mathrm{T}})(Y, Z, t) \mid Y_{t_0}^t\right]dt + \sum_{r=1}^{m} M\left[ZZ^{\mathrm{T}}a_r(Y, Z, t) + \right.$$
$$\left. + Zb_r(Y, Z, t)^{\mathrm{T}} + b_r(Y, Z, t)Z^{\mathrm{T}} \mid Y_{t_0}^t\right](dY_r - \hat{\varphi}_{1r}\,dt). \blacktriangleleft \quad (23)$$

7.2.9. Стохастический дифференциал апостериорной ковариационной матрицы. Для нахождения стохастического дифференциала апостериорной ковариационной матрицы R вектора состояния системы воспользуемся известной формулой, связывающей математическое ожидание, момент второго порядка и ковариационную матрицу случайного вектора (*ТВ*, п. 3.3.1):

$$R = \Gamma - \hat{Z}\hat{Z}^{\mathrm{T}},$$

или, в скалярной форме,

$$R_{kl} = \Gamma_{kl} - \hat{Z}_k \hat{Z}_l.$$

▶ Из этой формулы следует, что

$$dR_{kl} = d\Gamma_{kl} - d(\hat{Z}_k \hat{Z}_l).$$

Для нахождения $d(\hat{Z}_k\hat{Z}_l)$ применим формулу (3.62) для стохастического дифференциала произведения двух случайных процессов в случае винеровского процесса W. Имея в виду, что на основании (20) роль матриц-строк Y_1 и Y_2 в данном случае играют

$$M[Z_k(\varphi_1^{\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}}) + (\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})_k \mid Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}\psi_1$$

и

$$M[Z_l(\varphi_1^{\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}}) + (\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})_l \mid Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}\psi_1,$$

по формуле (3.62) находим

$$d(\hat{Z}_k\hat{Z}_l) = \hat{Z}_k d\hat{Z}_l + \hat{Z}_l d\hat{Z}_k + M[Z_k(\varphi_1^{\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}}) + (\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})_k \mid Y_{t_0}^t] \times$$
$$\times (\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1} M[Z_l(\varphi_1 - \hat{\varphi}_1) + (\psi_1\nu\psi^{\mathrm{T}})_l \mid Y_{t_0}^t]\,dt.$$

Подставив сюда выражения $d\hat{Z}_k$ и $d\hat{Z}_l$ из (20), будем иметь

$$d(\hat{Z}_k\hat{Z}_l) = \{\hat{Z}_k\hat{\varphi}_l + \hat{Z}_l\hat{\varphi}_k + M[Z_k(\varphi_1^{\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}}) +$$
$$+ (\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})_k \mid Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1} M[Z_l(\varphi_1 - \hat{\varphi}_1) +$$
$$+ (\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})_l^{\mathrm{T}} \mid Y_{t_0}^t]\}\,dt + M[(\hat{Z}_k Z_l + \hat{Z}_l Z_k)(\varphi_1^{\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}}) +$$
$$+ \hat{Z}_k(\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})_l + \hat{Z}_l(\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})_k \mid Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(dY - \hat{\varphi}_1\,dt).$$

Вычитая эту формулу из (22) и добавляя нулевое слагаемое

$$M[\hat{Z}_k\hat{Z}_l(\varphi_1^{\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}}) \mid Y_{t_0}^t] = \hat{Z}_k\hat{Z}_l(\hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}}) = 0,$$

получим

$$dR_{kl} = \{M[(Z_k - \hat{Z}_k)\varphi_l + (Z_l - \hat{Z}_l)\varphi_k + (\psi\nu\psi^{\mathrm{T}})_{kl} \mid Y_{t_0}^t] -$$
$$- M[Z_k(\varphi_1^{\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}}) + (\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})_k \mid Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1} M[Z_l(\varphi_1 - \hat{\varphi}_1) +$$
$$+ (\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})_l^{\mathrm{T}} \mid Y_{t_0}^t]\}\,dt + M[(Z_k - \hat{Z}_k)(Z_l - \hat{Z}_l)(\varphi_1^{\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}}) +$$
$$+ (Z_k - \hat{Z}_k)(\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})_l + (Z_l - \hat{Z}_l)(\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})_k \mid Y_{t_0}^t](\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(dY - \hat{\varphi}_1\,dt)$$
$$(k,\ l = 1,\ \ldots,\ p). \tag{24}$$

Преобразуя последнее слагаемое в (24), совершенно так же как в (22), получаем матричную формулу для стохастического дифференциала апостериорной ковариационной матрицы R

вектора Z состояния системы:

$$
\begin{aligned}
dR = \{M\,[(Z-\hat{Z})\,\varphi(Y, Z, t)^{\mathrm{T}} + \varphi(Y, Z, t)(Z^{\mathrm{T}}-\hat{Z}^{\mathrm{T}}) + \\
+ (\psi\nu\psi^{\mathrm{T}})(Y, Z, t) \mid Y_{t_0}^{t}] - M\,[Z\{\varphi_1(Y, Z, t)^{\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}}\} + \\
+ (\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})(Y, Z, t) \mid Y_{t_0}^{t}]\,(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y, t)\,M\,[\{\varphi_1(Y, Z, t) - \hat{\varphi}_1\}\,Z^{\mathrm{T}} + \\
+ (\psi_1\nu\psi^{\mathrm{T}})(Y, Z, t) \mid Y_{t_0}^{t}]\}\,dt + \sum_{r=1}^{m} M\,[(Z-\hat{Z})(Z^{\mathrm{T}}-\hat{Z}^{\mathrm{T}})\,a_r(Y, Z, t) + \\
+ (Z-\hat{Z})\,b_r(Y, Z, t)^{\mathrm{T}} + b_r(Y, Z, t)(Z^{\mathrm{T}}-\hat{Z}^{\mathrm{T}}) \mid Y_{t_0}^{t}]\,(dY_r - \hat{\varphi}_{1r}\,dt). \blacktriangleleft \quad (25)
\end{aligned}
$$

Средний квадрат ошибки оптимальной оценки $\hat{Z}$ при даных результатах наблюдений $Y_{t_0}^{t}$, т. е. апостериорное математическое ожидание квадрата модуля ошибки, очевидно, равен следу апостериорной ковариационной матрицы вектора состояния системы:

$$
M\,[\,|Z-\hat{Z}|^2 \mid Y_{t_0}^{t}] = \operatorname{tr} R.
$$

Ясно, что (21) и (23) или (21) и (25) в общем случае не являются стохастическими дифференциальными уравнениями относительно m и Γ или m и R, так как их правые части зависят от неизвестного апостериорного распределения. Тем не менее, как будет показано дальше, формулы (21), (23) и (25) могут служить основой для различных приближенных методов фильтрации и экстраполяции.

7.2.10. Применение теории оптимальной фильтрации для оценивания неизвестных параметров в уравнениях. Все выведенные уравнения справедливы также для случая, когда Z является расширенным вектором состояния системы, в который включены все неизвестные параметры, входящие в уравнения (8). При этом в соответствии с очень существенным для всей теории оптимальной фильтрации условием независимости функции ψ_1 в первом уравнении (8) от вектора состояния она не может также зависеть от неизвестных параметров, поскольку они входят в расширенный вектор состояння.

Таким образом, теорию оптимальной фильтрации можно применять для решения задач одновременного оценивания вектора состояния системы и неизвестных параметров, от которых могут зависеть функции φ, ψ и φ_1 в уравнениях (8).

7.2.11. Стохастические дифференциалы апостериорных вероятностей в задаче распознавания. Решение о том, к какому из N классов $A_1, \ldots, A_N$ относится наблюдаемый сигнал, обычно принимается по максимуму апостериорной вероятности: за значение параметра θ принимается то из значений $\theta_1, \ldots, \theta_N$, которое имеет наибольшую апостериорную вероятность (*ТВ*, п. 10.4.2). Иными словами, модель распознавания принимает $\hat{\theta} = \theta_h$, если апостериорная вероятность θ_h больше (или по крайней мере не меньше) апостериорных вероятностей всех остальных значений

$\theta_1, \ldots, \theta_{h-1}, \theta_{h+1}, \ldots, \theta_N$ параметра θ. Поэтому модель распознавания должна вычислять апостериорные вероятности всех классов (всех значений $\theta_1, \ldots, \theta_N$ параметра θ).

В случае распознавания процессов, определяемых стохастическими дифференциальными уравнениями, можно пользоваться формулами для стохастических дифференциалов апостеририых вероятностей классов, которые можно вывести из общего уравнения (16) для апостериорной характеристической функции вектора состояния системы.

► Чтобы вывести эти формулы, напишем уравнение (16) для расширенного вектора состояния $[Z^{\mathrm{T}}\Theta^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, предполагая, что от θ зависят функции φ, ψ и φ_1 в уравнениях (8), и учитывая, что $d\Theta = 0$ *):

$$dg_t(\lambda, \mu) = M\left[\left\{i\lambda^{\mathrm{T}}\varphi(Y, Z, \Theta, t) - \right.\right.$$
$$\left.\left. -\frac{1}{2}\lambda^{\mathrm{T}}(\psi\nu\psi^{\mathrm{T}})(Y, Z, \Theta, t)\lambda\right\} e^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z + i\mu^{\mathrm{T}}\Theta} \Big| Y_{t_0}^t\right] dt +$$
$$+ M\left[\{\varphi_1(Y, Z, \Theta, t)^{\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}} +\right.$$
$$\left. + i\lambda^{\mathrm{T}}(\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})(Y, Z, \Theta, t)\} e^{i\lambda^{\mathrm{T}}Z + i\mu^{\mathrm{T}}\Theta} \Big| Y_{t_0}^t\right](\psi_1\nu\varphi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y, t)(dY - \hat{\varphi}_1 dt).$$

Положив здесь $\lambda = 0$, найдем стохастический дифференциал апостериорной характеристической функции $g_t'(\mu)$ вектора Θ, $g_t'(\mu) = M\left[e^{i\mu^{\mathrm{T}}\Theta} \big| Y_{t_0}^t\right] = M\left[e^{i0Z + i\mu^{\mathrm{T}}\Theta} \big| Y_{t_0}^t\right] = g_t(0, \mu)$:

$$dg_t'(\mu) = M\left[\{\varphi_1(Y, Z, \Theta, t)^{\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}}\} e^{i\mu^{\mathrm{T}}\Theta} \big| Y_{t_0}^t\right] \times$$
$$\times (\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y, t)(dY - \hat{\varphi}_1 dt). \qquad (26)$$

Но Θ — дискретная случайная величина с возможными значениями $\theta_1, \ldots, \theta_N$. Поэтому, обозначив апостериорные вероятности этих значений соответственно через $q_1(t), \ldots, q_N(t)$,

$$q_k(t) = P(\Theta = \theta_k \mid Y_{t_0}^t) \quad (k = 1, \ldots, N),$$

будем иметь

$$g_t'(\mu) = \sum_{k=1}^{N} q_k(t) e^{i\mu^{\mathrm{T}}\theta_k} \quad (TB, \text{ пример } 4.24),$$

$$M\left[\varphi_1(Y, Z, \Theta, t)^{\mathrm{T}} e^{i\mu^{\mathrm{T}}\Theta} \big| Y_{t_0}^t\right] =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} q_k(t) e^{i\mu^{\mathrm{T}}\theta_k} M\left[\varphi_1(Y, Z, \theta_k, t)^{\mathrm{T}} \mid Y_{t_0}^t\right],$$

$$\hat{\varphi}_1 = \sum_{k=1}^{N} q_k(t) M\left[\varphi_1(Y, Z, \theta_k, t) \mid Y_{t_0}^t\right].$$

---

*) Напомним, что все уравнения теории оптимальной фильтрации справедливы только при условии, что ψ_1 в (8) не зависит от Z, а следовательно, и от Θ.

Подставив эти выражения в (26) и положив для краткости

$$\hat{\varphi}_{1h} = M[\varphi_1(Y, Z, \theta_h, t) \mid Y_{t_0}^t] \qquad (h = 1, \ldots, N),$$

придем к равенству

$$\sum_{k=1}^{N} e^{i\mu^{\mathrm{T}}\theta_k} dq_k(t) = \left\{ \sum_{k=1}^{N} q_k(t) \hat{\varphi}_{1k}^{\mathrm{T}} e^{i\mu^{\mathrm{T}}\theta_k} - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{N} \sum_{h=1}^{N} q_k(t) q_h(t) \hat{\varphi}_{1h}^{\mathrm{T}} e^{i\mu^{\mathrm{T}}\theta_k} \right\} (\psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1} \left(dY - \sum_{h=1}^{N} q_h(t) \hat{\varphi}_{1h} dt \right).$$

Сравнив коэффициенты при одинаковых показательных функциях в левой и правой частях этого равенства, получим

$$dq_k(t) = \left(\hat{\varphi}_{1k}^{\mathrm{T}} - \sum_{h=1}^{N} q_h(t) \hat{\varphi}_{1h}^{\mathrm{T}} \right) q_k(t) (\psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1} \left(dY - \sum_{h=1}^{N} q_h(t) \hat{\varphi}_{1h} dt \right)$$
$$(k = 1, \ldots, N). \blacktriangleleft \qquad (27)$$

Эти формулы нельзя рассматривать как стохастические дифференциальные уравнения для апостериорных вероятностей $q_1(t), \ldots$ $\ldots, q_N(t)$, так как величины

$$\hat{\varphi}_{1k} = M[\varphi_1(Y, Z, \theta_k, t) \mid Y_{t_0}^t] \qquad (k = 1, \ldots, N)$$

зависят от распределений процесса Z при $\theta = \theta_1, \ldots, \theta_N$. Лишь после решения уравнения (16) относительно апостериорных характеристических функций или уравнения (18) относительно апостериорных плотностей процесса Z при $\theta = \theta_1, \ldots, \theta_N$ и вычисления величин $\hat{\varphi}_{1k}$ как функций Y и t равенства (27) становятся уравнениями, определяющими $q_1(t), \ldots, q_N(t)$.

Таким образом, задача оптимального распознавания решается лишь после решения уравнений (16) или (18) при соответствующих условиях. При этом уравнения (27) определяют апостериорные вероятности классов $q_1(t), \ldots, q_N(t)$ при всех $t \geqslant t_0$, если за их начальные значения при $t = t_0$ взять соответствующие условные вероятности классов относительно величины Y_0.

Ясно, что задачу оптимального распознавания можно решать с одновременным оцениванием вектора состояния системы Z. При этом оптимальная оценка $\hat{Z}$ в соответствии с (7) определяется формулой

$$\hat{Z} = \sum_{k=1}^{N} q_k(t) \hat{Z}_k,$$

где $\hat{Z}_k$ — условная оптимальная оценка вектора Z в предположении, что $\theta = \theta_k$ $(k = 1, \ldots, N)$. При этом в вектор Z могут входить и неизвестные параметры, от которых могут зависеть функции φ, ψ и φ_1 в уравнениях (8).

Таким образом, задачу оптимального распознавания можно решать с одновременным оцениванием вектора состояния системы и всех неизвестных параметров, входящих в уравнения (8).

7.2.12. О возможности решения задач оптимальной фильтрации при автокоррелированной помехе в наблюдениях. Очевидно, что все выведенные формулы справедливы, только если $\psi_1(y, t)$ не обращается в нуль ни при каких y и t, так как только при этом условии матрица $\psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}}$ может быть обратимой. Поэтому решение задачи оптимальной фильтрации при $\psi_1(y, t) \equiv 0$ в общем случае невозможно. Однако в некоторых частных случаях эта задача может быть сведена к случаю $\psi_1(y, t) \neq 0$, если помеха в наблюдениях может быть представлена как результат преобразования белого шума формирующим фильтром, описываемым дифференциальным уравнением (п. 7.1.6). Это, во-первых, случай линейной фильтрации, который будет рассмотрен в п. 7.3.4. Во-вторых, это случай, когда функция ψ_2 в уравнении формирующего фильтра п. 7.1.6 зависит только от времени t, функция ψ в уравнении (1) не зависит от вектора состояния, а функция φ_1 в уравнении наблюдений (2) линейна относительно Z и U. В этом случае задача сводится к уравнениям

$$\dot{Z} = \varphi(Z, t) + \psi V_1, \quad \dot{U}_1 = \varphi_2(U_1, t) + \psi_2 V_2, \quad X = b_1 Z + b_2 U_1 + b_0.$$

При этом в последнее уравнение могут входить не все компоненты вектора U_1, а только некоторые из них, образующие вектор помехи U. Дифференцируя третье уравнение, приведем его к виду

$$\dot{X} = b_1 \varphi(Z, t) + \dot{b}_1 Z + b_2 \varphi_2(U_1, t) + \dot{b}_2 U_1 + \dot{b}_0 + [b_1 \psi \;\; b_2 \psi_2] \, [V_1^{\mathrm{T}} V_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}.$$

Исключив из этого уравнения и уравнения формирующего фильтра помехи все компоненты вектора U_1, которые могут быть выражены через Z и X из уравнения наблюдения $X = b_1 Z + b_2 U_1 + b_0$, получим уравнение типа первого уравнения (8), если хотя бы одна из величин $b_1 \psi$ и $b_2 \psi_2$ отлична от нуля. Поэтому решение задачи оптимальной фильтрации в этом случае принципиально возможно при условии, что размерность векторного белого шума $[V_1^{\mathrm{T}} \; V_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ не меньше размерности m наблюдаемого сигнала X и матрица

$$[b_1 \psi \quad b_2 \psi_2] \begin{bmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi^{\mathrm{T}} b_1^{\mathrm{T}} \\ \psi_2^{\mathrm{T}} b_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = b_1 \psi \nu_1 \psi^{\mathrm{T}} b_1^{\mathrm{T}} + b_2 \psi_2 \nu_2 \psi_2^{\mathrm{T}} b_2^{\mathrm{T}},$$

играющая роль матрицы $\psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}}$ в общей теории, обратима при всех t. В этом случае, расширив вектор состояния Z добавлением к нему всех оставшихся компонент вектора U_1, можем написать для данной задачи все выведенные формулы и уравнения теории оптимальной фильтрации.

§ 7.3. Оптимальная линейная фильтрация

7.3.1. Уравнения линейной фильтрации. Задачу оптимальной фильтрации удается решить до конца в случае линейных уравнений (8):

$$
\begin{aligned}
dY &= (bY + b_1 Z + b_0)\,dt + \psi_1 dW, \\
dZ &= (aY + a_1 Z + a_0)\,dt + \psi dW,
\end{aligned} \tag{28}
$$

где коэффициенты a, a_1, a_0, b, b_1, b_0, ψ и ψ_1 в общем случае зависят от времени t. В этом случае, как было показано в п. 5.4.4, распределение процесса $[Y(t)^{\mathrm{T}} Z(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ нормально (п. 2.2.8) при нормальном распределении его начального значения $[Y_0^{\mathrm{T}} Z_0^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$. Следовательно, и апостериорное распределение вектора состояния системы Z относительно наблюдаемого процесса $Y_{t_0}^t$ нормально, и для его определения достаточно найти апостериорные математическое ожидание $\hat{Z}$ и ковариационную матрицу R. Для этого обратимся к формулам (21) и (25) для стохастических дифференциалов величин $\hat{Z}$ и R.

▶ Подставив в (21) и (25) выражения функций φ и φ_1,

$$
\varphi(y, z, t) = ay + a_1 z + a_0, \quad \varphi_1(y, z, t) = by + b_1 z + b_0,
$$

получим

$$
\begin{aligned}
d\hat{Z} = (aY + a_1\hat{Z} + a_0)\,dt + \{M[Z(Z^{\mathrm{T}} - \hat{Z}^{\mathrm{T}}) \mid Y_{t_0}^t]\, b_1^{\mathrm{T}} + {}\\
+ \psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}}\}(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}[dY - (bY + b_1\hat{Z} + b_0)\,dt],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dR = M[(Z - \hat{Z})(Y^{\mathrm{T}} a^{\mathrm{T}} + Z^{\mathrm{T}} a_1^{\mathrm{T}} + a_0^{\mathrm{T}}) + {}\\
+ (aY + a_1 Z + a_0)(Z^{\mathrm{T}} - \hat{Z}^{\mathrm{T}}) + \psi\nu\psi^{\mathrm{T}} \mid Y_{t_0}^t]\,dt - {}\\
- M[(Z - \hat{Z})(Y^{\mathrm{T}} b^{\mathrm{T}} + Z^{\mathrm{T}} b_1^{\mathrm{T}} + b_0^{\mathrm{T}}) + \psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}} \mid Y_{t_0}^t] \times {}\\
\times (\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1} M[(bY + b_1 Z + b_0)(Z^{\mathrm{T}} - \hat{Z}^{\mathrm{T}}) + \psi_1\nu\psi^{\mathrm{T}} \mid Y_{t_0}^t]\,dt + {}\\
+ \sum_{r=1}^{m} \Bigg\{ \sum_{h=1}^{p} \alpha_{hr} M[(Z_h - \hat{Z}_h)(Z - \hat{Z})(Z^{\mathrm{T}} - \hat{Z}^{\mathrm{T}}) \mid Y_{t_0}^t] + {}\\
+ M[Z - \hat{Z} \mid Y_{t_0}^t]\,\beta_r^{\mathrm{T}} + \beta_r M[Z^{\mathrm{T}} - \hat{Z}^{\mathrm{T}} \mid Y_{t_0}^t] \Bigg\} \times {}\\
\times \left[dY_r - \left(\sum_{k=1}^{m} b_{rk} Y_k + \sum_{l=1}^{p} b_{1rl}\hat{Z}_l + b_{0r} \right) dt \right],
\end{aligned}
$$

где α_{hr} — элементы матрицы $\alpha = b_1^{\mathrm{T}}(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}$, а β_r — r-й столбец матрицы $\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}}(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}$. Учитывая, что

$$
\begin{aligned}
M[Z(Z^{\mathrm{T}} - \hat{Z}^{\mathrm{T}}) \mid Y_{t_0}^t] = M[(Z - \hat{Z})Z^{\mathrm{T}} \mid Y_{t_0}^t] = {}\\
= M[(Z - \hat{Z})(Z^{\mathrm{T}} - \hat{Z}^{\mathrm{T}}) \mid Y_{t_0}^t] = R,
\end{aligned}
$$

$$
M[Z - \hat{Z} \mid Y_{t_0}^t] = \hat{Z} - \hat{Z} = 0,
$$

$$
M[(Z - \hat{Z})Y^{\mathrm{T}} \mid Y_{t_0}^t] = M[Z - \hat{Z} \mid Y_{t_0}^t]\,Y^{\mathrm{T}} = 0
$$

и что апостериорные центральные моменты третьего порядка равны нулю вследствие нормальности апостериорного распределения, приведем полученные формулы к виду

$$d\hat{Z} = (aY + a_1 Z + a_0)\,dt + \\ + (Rb_1^{\mathrm{T}} + \psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}[dY - (bY + b_1\hat{Z} + b_0)\,dt], \quad (29)$$

$$dR = [a_1 R + R a_1^{\mathrm{T}} + \psi\nu\psi^{\mathrm{T}} - \\ - (Rb_1^{\mathrm{T}} + \psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(bR + \psi_1\nu\psi^{\mathrm{T}})]\,dt. \quad ◀ \quad (30)$$

Таким образом, формулы (21) и (25) в данном случае дают систему уравнений, определяющую оптимальную оценку $\hat{Z}$ вектора состояния системы Z и его апостериорную ковариационную матрицу R, характеризующую точность оценки $\hat{Z}$.

Обратим теперь внимание на два обстоятельства. Во-первых, матричное уравнение Риккати (30) для апостериорной ковариационной матрицы R не содержит $\hat{Z}$ и, следовательно, может быть проинтегрировано отдельно *). Определив R, можно после этого найти величину

$$\beta = (Rb_1^{\mathrm{T}} + \psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1} \quad (31)$$

и определить оценку $\hat{Z}$ вектора состояния системы Z интегрированием уравнения (29), которое можно теперь переписать в виде

$$d\hat{Z} = (aY + a_1\hat{Z} + a_0)\,dt + \beta\,[dY - (bY + b_1\hat{Z} + b_0)\,dt]. \quad (32)$$

Во-вторых, уравнение (30) не содержит результатов наблюдений. Поэтому апостериорная ковариационная матрица вектора состояния Z совпадает с априорной ковариационной матрицей вектора ошибки $\tilde{Z} = \hat{Z} - Z$ оценки $\hat{Z}$. Это дает возможность определять R и вычислять коэффициент β в уравнении (32) заранее, до получения результатов наблюдений. Тогда определение оценки $\hat{Z}$ сведется к интегрированию уравнения (32) по мере получения результатов наблюдений, что можно выполнять на практике в натуральном масштабе времени непосредственно в процессе работы изучаемой системы.

Уравнения (30) и (32) при начальных условиях

$$\hat{Z}(t_0) = \hat{Z}_0 = M[Z_0 \mid Y_0], \quad R(t_0) = R_0 = M[(Z_0 - \hat{Z}_0)(Z_0^{\mathrm{T}} - \hat{Z}_0^{\mathrm{T}}) \mid Y_0]$$

определяют оптимальную оценку $\hat{Z}$ вектора Z и его ковариационную матрицу R при всех $t > t_0$. Эта оптимальная оценка $\hat{Z}$ несмещенная при всех $t > t_0$, так как в силу формулы полного математического ожидания (*ТВ*, п. 4.3.3) и формулы (7)

$$M(\hat{Z}_t - Z_t) = M\{M[(\hat{Z}_t - Z_t) \mid Y_{t_0}^t]\} = M(\hat{Z}_t - \hat{Z}_t) = 0.$$

---

*) Относительно матричных уравнений Риккати см. приложение 3.

Уравнения (30) и (32) полностью и точно решают задачу оптимального оценивания состояния линейной системы, т. е. задачу линейной фильтрации.

7.3.2. Фильтры Калмана — Бьюси. Уравнения (30) и (32) были впервые получены Калманом и Бьюси при $a=b=0$ [35]. Это соответствует практической задаче фильтрации полезного сигнала Z, определяемого вторым уравнением (28) при $a=0$, в случае, когда наблюдается сигнал b_1Z+b_0 с аддитивной помехой,

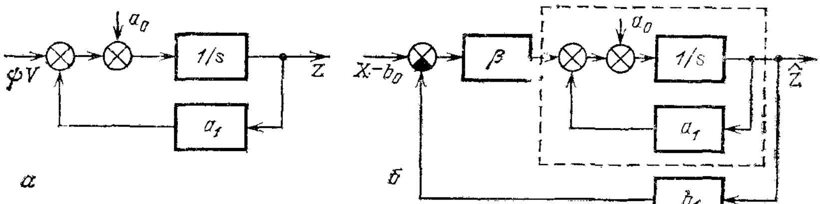

Рис. 15

представляющей собой белый шум. Уравнения (28) в этом случае можно переписать в виде

$$\dot{Z}=a_1Z+a_0+\psi V, \qquad X=b_1Z+b_0+\psi_1V, \tag{33}$$

где V — белый шум — производная винеровского процеса $W(t)$. Уравнение оптимального фильтра (32) в этом случае имеет вид

$$\mathring{\hat{Z}}=a_1\hat{Z}+a_0+\beta(X-b_1\hat{Z}-b_0).$$

Это уравнение определяет структуру оптимального фильтра. А именно, оптимальный фильтр получается из данной системы (системы, формирующей полезный сигнал Z; рис. 15, *а*) установкой перед ее входом усилителя с коэффициентом усиления β и замыканием полученной системы отрицательной обратной связью, содержащей усилитель с коэффициентом усиления b_1 (рис. 15, *б*). При подаче на вход полученного таким путем фильтра наблюдаемого процесса X с вычтенной из него функцией времени b_0 на выходе фильтра будет получаться оптимальная оценка $\hat{Z}$ вектора Z.

Так как процесс $Y(t)$, представляющий собой интеграл от наблюдаемого процесса $X(t)$, при построении оптимального фильтра не используется, то за начальное значение оценки $\hat{Z}$ при $t=t_0$ следует принять априорное математическое ожидание вектора Z_0, $\hat{Z}_0=MZ_0$, а при интегрировании уравнения (30) для определения коэффициента усиления β за начальное значение матрицы R следует принять априорную ковариационную матрицу вектора Z_0, $R_0=M(Z_0-MZ_0)(Z_0^{\mathrm{T}}-MZ_0^{\mathrm{T}})$. Однако обычно эти априорные характеристики неизвестны. Это вынуждает брать произвольные начальные значения $\hat{Z}$ и R. Конечно, при этом $\hat{Z}$ не будет оптимальной оценкой вектора Z, а может быть лишь асимптотически оптимальной, если только первое уравнение (33) и уравнение (30) описывают устойчивый процесс (т. е. если система, описываемая первым уравнением (33) и уравнением (30), устойчива).

Само собой разумеется, коэффициенты усиления β и b_1 в общем случае представляют собой матрицы. Так что под усилителями мы понимаем здесь усилители векторных сигналов, т. е. устройства, выполняющие линейные преобразования поступающих на их вход векторов, определяемые соответствующими матрицами — матричными коэффициентами усиления.

Оптимальные линейные фильтры, построенные изложенным способом, обычно называются *фильтрами Калмана — Бьюси*.

Обобщение теории линейной фильтрации Калмана — Бьюси на случай a, $b \neq 0$ дано в [49, 50].

Легко видеть, что к рассмотренной задаче линейной фильтрации сводится, в частности, задача фильтрации любого сигнала, представляющего собой линейную комбинацию конечного числа известных функций со случайными или неизвестными коэффициентами. Действительно, если сигнал $Z_1(t)$ определяется формулой

$$Z_1(t) = \sum_{p=1}^{N} A_p \psi_p(t),$$

то, как легко проверить непосредственной подстановкой, он удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\begin{vmatrix} Z_1 & \psi_1(t) & \dots & \psi_N(t) \\ Z_1' & \psi_1'(t) & \dots & \psi_N'(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Z_1^{(N)} & \psi_1^{(N)}(t) & \dots & \psi_N^{(N)}(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Приведя это уравнение к форме Коши, получим для вектора $Z = [Z_1 Z_1' \dots Z_1^{(N)}]^T$ второе уравнение (28) при $a_0 = \psi = 0$.

Пример 1. Найти оптимальный фильтр для фильтрации синусоидального сигнала данной частоты ω_0, наблюдаемого с аддитивным нормально распределенным белым шумом.

Синусоидальный сигнал $Z_1(t)$ и его производную $Z_2(t) = \dot{Z}_1(t)$ можно рассматривать как компоненты вектора состояния системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}.$$

Наблюдаемый процесс определяется формулой

$$\dot{Y} = X = Z_1 + V = [1 \ 0] Z + V.$$

Следовательно, в данном случае $a = a_0 = b = b_0 = \psi = 0$, $b_1 = [1 \ 0]$, $\psi_1 = 1$,

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Уравнение (30) представляет собой систему уравнений

$$\dot R_{11}=2R_{12}-\nu^{-1}R_{11}^2,$$
$$\dot R_{12}=-\omega_0^2R_{11}+R_{22}-\nu^{-1}R_{11}R_{12},$$
$$\dot R_{22}=-2\omega_0^2R_{12}-\nu^{-1}R_{12}^2.$$

Определив R_{11}, R_{12} и R_{22} интегрированием этих уравнений при начальных условиях $R_{11}(t_0)=MZ_1^{02}$, $R_{12}(t_0)=MZ_1^0Z_2^0$, $R_{22}(t_0)=MZ_2^{02}$, найдем средний

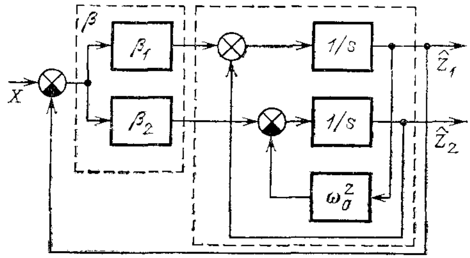

Рис. 16

квадрат ошибки фильтрации сигнала Z_1, $R_{11}=M\left[(Z_1-\hat Z_1)^2\,|\,Y_{t_0}^t\right]$, и его производной Z_2, $R_{22}=M\left[(Z_2-\hat Z_2)^2\,|\,Y_{t_0}^t\right]$, и коэффициент усиления

$$\beta=\nu^{-1}Rb_1^{\mathrm T}=\nu^{-1}\begin{bmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{12} & R_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\nu^{-1}\begin{bmatrix}R_{11}\\R_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}.$$

Уравнение (32) для оптимальных оценок $\hat Z_1$, $\hat Z_2$ имеет в данном случае вид

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\hat Z_1\\ \hat Z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat Z_1\\ \hat Z_2\end{bmatrix}+\nu^{-1}\begin{bmatrix}R_{11}\\ R_{12}\end{bmatrix}(X-\hat Z_1).$$

Структурная схема найденного оптимального фильтра показана на рис. 16.

7.3.3. Обновляющие процессы. Случайный процесс

$$Y_1(t)=Y(t)-\int_{t_0}^{t}(bY_\tau+b_1\hat Z_\tau+b_0)\,d\tau,$$

дифференциал которого входит в уравнение (32) для оптимальной оценки, обладает тем свойством, что его приращение на любом интервале $[t,\,s]$ не коррелировано со значениями Y_τ процесса $Y(t)$ при $\tau\leqslant t$.

▶ Действительно, на основании первого уравнения (28)

$$\Delta Y_1=Y_1(s)-Y_1(t)=$$
$$=Y(s)-Y(t)-\int_t^s(bY_\tau+b_1\hat Z_\tau+b_0)\,d\tau=\int_t^s b_1(Z_\tau-\hat Z_\tau)\,d\tau+\int_t^s\psi_1\,dW(\tau).$$

Математическое ожидание первого интеграла равно нулю вследствие несмещенности оценки $\hat Z_\tau$ при всех $\tau>t_0$, а математическое ожидание второго интеграла равно нулю вследствие того, что $MW(t)=0$. Следовательно, математическое ожидание приращения процесса $Y_1(t)$ на любом интервале равно нулю и взаимная ковариационная матрица векторов ΔY_1 и $Y_\sigma = Y(\sigma)$ определяется формулой

$$M\Delta Y_1 (Y_\sigma^\tau - MY_\sigma^\tau) = M\Delta Y_1 Y_\sigma^\tau.$$

Подставив сюда найденное выражение ΔY_1, учитывая, что в силу первого уравнения (28) Y_σ и $\Delta W_\tau = W(\tau') - W(\tau)$ независимы при всех $\sigma \leqslant \tau < \tau'$, и пользуясь формулой полного математического ожидания (TB, п. 4.3.3), находим при $\sigma \leqslant t$

$$M\Delta Y_1 Y_\sigma^\tau = \int_t^s b_1 M(Z_\tau - \hat{Z}_\tau) Y_\sigma^\tau \, d\tau =$$

$$= \int_t^s b_1 M\{M[Z_\tau - \hat{Z}_\tau \mid Y_{t_0}^\tau] Y_\sigma^\tau\} \, d\tau = \int_t^s b_1 M(\hat{Z}_\tau - \hat{Z}_\tau) Y_\sigma^\tau \, d\tau = 0. \blacktriangleleft$$

Таким образом, приращения процесса $Y_1(t)$ не коррелированы с прошлыми значениями процесса $Y(t)$.

Если случайный процесс $Y_1(t)$ обладает свойствами: 1) при любом $t > t_0$ его значение представляет собой функционал от процесса $Y(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$; 2) при любых $\sigma \leqslant t < s$ приращение $Y_1(s) - Y_1(t)$ не коррелировано с $Y(\sigma)$, то процесс $Y_1(t)$ называется *обновляющим* по отношению к процессу $Y(t)$.

Таким образом, в уравнение (32) для оптимальной оценки состояния системы входит не дифференциал наблюдаемого процесса $Y(t)$, а дифференциал (конечно, стохастический) соответствующего обновляющего процесса $Y_1(t)$.

Оказывается, что это общее свойство всех уравнений оптимальной фильтрации. Процесс

$$Y_1(t) = Y(t) - \int_{t_0}^t \hat{\varphi}_1(\tau) \, d\tau,$$

дифференциал которого входит во все уравнения теории оптимальной фильтрации § 7.2, всегда является обновляющим по отношению к $Y(t)$.

$\blacktriangleright$ Действительно,

$$\hat{\varphi}_1(\tau) = M[\varphi_1(Y_\tau, Z_\tau, \tau) \mid Y_{t_0}^\tau]$$

представляет собой функционал от процесса $Y(\sigma)$, $\sigma \in [t_0, \tau]$, при каждом $\tau > t_0$. Следовательно, $Y_1(t)$ при любом $t > t_0$ представляет собой функционал от $Y(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$. Далее, совершенно так же как в случае линейной фильтрации, находим

$$M\Delta Y_1 = \int_t^s M[\varphi_1(Y_\tau, Z_\tau, \tau) - \hat{\varphi}_1(\tau)] \, d\tau =$$

$$= \int_t^s M\{M[\varphi_1(Y_\tau, Z_\tau, \tau) - \hat{\varphi}_1(\tau) \mid Y_{t_0}^\tau]\} \, d\tau = \int_t^s M[\hat{\varphi}_1(\tau) - \hat{\varphi}_1(\tau)] d\tau = 0$$

и

$$M\Delta Y_1 Y_\sigma^{\tau} = \int_t^s M\left[\varphi_1(Y_\tau, Z_\tau, \tau) - \hat{\varphi}_1(\tau)\right] Y_\sigma^{\tau}\, d\tau =$$

$$= \int_t^s M\left\{M\left[\varphi_1(Y_\tau, Z_\tau, \tau) - \hat{\varphi}_1(\tau) \mid Y_{t_0}^{\tau}\right] Y_\sigma^{\tau}\right\} d\tau =$$

$$= \int_t^s M\left[\hat{\varphi}_1(\tau) - \hat{\varphi}_1(\tau)\right] Y_\sigma^{\tau}\, d\tau = 0$$

при всех $\sigma \leqslant t$. ◀

Таким образом, при оптимальной фильтрации в любой момент времени используется лишь та часть поступающего в этот момент приращения наблюдаемого процесса, которая не коррелирована с его прошлыми значениями, несет существенно новую информацию. Этим и объясняется название «обновляющий» процесс. Применение обновляющих процессов для решения некоторых задач оценивания дано в [34].

7.3.4. Оптимальная линейная фильтрация при автокоррелированной помехе в наблюдениях. Теория линейной фильтрации Калмана — Бьюси была распространена на случай произвольной помехи в наблюдениях, для которой существует линейный формирующий фильтр, описываемый дифференциальным уравнением, Брайсоном и Иохансеном [9] и Гулько и Новосельцевой [15, 16]. Мы изложим сначала метод Гулько — Новосельцевой, как более естественный и простой.

▶ В случае когда помеха в наблюдениях U не является белым шумом, второе уравнение (33) заменяется уравнением

$$X = b_1 Z + b_0 + \psi_1 U. \tag{34}$$

Предположим, что помеха U может рассматриваться как выходной сигнал формирующего фильтра, описываемого дифференциальным уравнением

$$\sum_{k=0}^{l} \alpha_k U^{(k)} = \sum_{k=0}^{h} \beta_k V_1^{(k)}, \qquad h < l, \tag{35}$$

где V_1 — белый шум. Идея Гулько и Новосельцевой состоит в том, чтобы преобразовать наблюдаемый сигнал системой, обратной формирующему фильтру (п. 1.3.5), и получить в результате сигнал X_1 с помехой, представляющей собой белый шум. Тогда задача сведется к построению фильтра Калмана — Бьюси для преобразованного наблюдаемого сигнала. Само собой разумеется, наблюдаемый сигнал $X(t)$ следует умножить слева на ψ_1^{-1} перед пропусканием через систему, обратную формирующему фильтру. Для этого необходимо, чтобы функция ψ_1 ни при каком t не обращалась в нуль (в случае скалярных $X(t)$ и $U(t)$) или была обратимой квадратной матрицей (в случае векторных $X(t)$ и $U(t)$). Это построение показано на рис. 17.

Как было показано в п. 1.3.5, система, обратная по отношению к системе, описываемой дифференциальным уравнением (35)

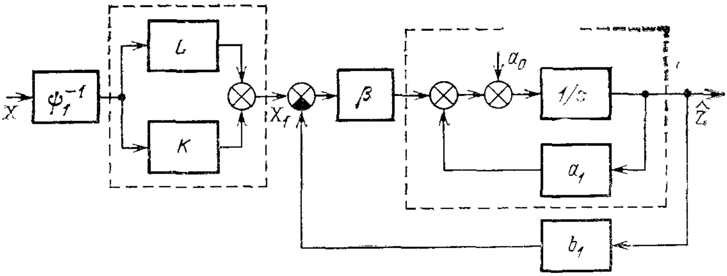

Рис. 17

(т. е. к формирующему фильтру), в общем случае при $h>0$ представляет собой параллельное соединение системы, осуществляющей линейную дифференциальную операцию

$$L=\sum_{k=0}^{l-h}\gamma_k D^k, \qquad D=d/dt,$$

и системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\sum_{k=0}^{h}\beta_k y^{(k)}=\sum_{k=0}^{h-1}\tilde{\alpha}_k x^{(k)}, \tag{36}$$

где

$$\gamma_{l-h}=\beta_h^{-1}\alpha_l,$$

$$\gamma_k=\beta_h^{-1}\left[\alpha_{h+k}-\sum_{r=\max(0,\,k-l+2h)}^{h-1}\ \sum_{j=0}^{h-r}C_{r+j}^{r}\beta_{r+j}\gamma_{h+k-r}^{(j)}\right]$$

$$(k=0,\,1,\,\ldots,\,l-h-1),$$

$$\tilde{\alpha}_k=\alpha_k-\sum_{r=\max(0,\,k-l+h)}^{k}\ \sum_{j=0}^{h-r}C_{r+j}^{r}\beta_{r+j}\gamma_{k-r}^{(j)}$$

$$(k=0,\,1,\,\ldots,\,h-1).$$

Эта система обведена штриховой линией в левой части рис. 17, где буквой L отмечена система, выполняющая дифференциальную операцию, а буквой K — система, описываемая дифференциальным уравнением (36).

Пропустив наблюдаемый сигнал X через систему, состоящую из усилителя с коэффициентом усиления ψ_1^{-1} и системы, обратной формирующему фильтру, получим на выходе сигнал

$$X_1=L(\psi_1^{-1}b_1Z)+Z_1'+L(\psi_1^{-1}b_0)+V_1, \tag{37}$$

где Z_1' — выходной сигнал системы, описываемой дифференциальным уравнением (36) при $x = \psi_1^{-1}(b_1 Z + b_0)$,

$$\sum_{k=0}^{h} \beta_k Z_1'^{(k)} = \sum_{k=0}^{h-1} \tilde{\alpha}_k \left[\psi_1^{-1}(b_1 Z + b_0)\right]^{(k)}.$$

Приведя это уравнение к системе уравнений первого порядка подстановкой $Z'_{k+1} = \dot{Z}'_k - q_k \psi_1^{-1}(b_1 Z + b_0)$ $(k = 1, \ldots, h-1)$, как это показано в п. 1.3.4, получим дифференциальное уравнение, определяющее вектор $Z' = [Z_1'^{\mathrm{T}} \ \ldots \ Z_h'^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$:

$$\dot{Z}' = c_1 Z + c_2 Z' + c_0.$$

Так как Z_1' входит в выражение (37) преобразованного наблюдаемого сигнала X_1, то необходимо расширить вектор состояния системы Z, добавив к нему вектор Z'. Тогда получим для расширенного таким путем вектора состояния уравнение

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} Z \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z \\ Z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ c_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi \\ 0 \end{bmatrix} V.$$

Чтобы сигнал X_1 имел требуемую для применения теории линейной фильтрации форму, т. е. был суммой линейного преобразования расширенного вектора состояния $[Z^{\mathrm{T}} Z'^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ и белого шума, необходимо, чтобы выражение $L(\psi_1^{-1} b_1 Z)$ не содержало производных белого шума V_1. Для этого необходимо, чтобы матрицы b_1 и ψ имели соответствующую структуру. Физически это соответствует требованию, чтобы фильтруемый полезный сигнал Z был более гладким, чем помеха (имел производные более высокого порядка, чем помеха). В этом случае, подставляя после каждого дифференцирования $\dot{Z}$ из первого уравнения (33), получим $L(\psi_1^{-1} b_1 Z)$ как линейную функцию $b_2 Z$ вектора Z. Тогда будем иметь

$$X_1 = b_2 Z + Z_1' + b_0' + V_1 = b_1' [Z^{\mathrm{T}} Z'^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} + b_0' + V_1 = \\ = b_1' [Z^{\mathrm{T}} Z_1'^{\mathrm{T}} \ \ldots \ Z_h'^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} + b_0' + V_1,$$

где $b_1' = [b_2 \ I \ 0 \ \ldots \ 0]$; здесь единичный блок представляет собой коэффициент усиления блока Z_1' в выражении преобразованного наблюдаемого сигнала X_1, а нулевые блоки — коэффициенты усиления блоков $Z_2'^{\mathrm{T}}, \ldots, Z_h'^{\mathrm{T}}$.

Таким образом, мы привели задачу фильтрации процесса $Z(t)$ при автокоррелированной помехе в наблюдениях к задаче фильтрации составного процесса $[Z(t)^{\mathrm{T}} Z'(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ в случае, когда помеха в наблюдениях представляет собой белый шум. Построив для этой задачи фильтр Калмана — Бьюси, получим оптимальный фильтр для первоначальной задачи в виде последовательного соединения усилителя с коэффициентом усиления ψ_1^{-1}, системы, обратной формирующему фильтру, и фильтра Калмана — Бьюси для расширенной системы с вектором состояния $[Z^{\mathrm{T}} Z'^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ (рис. 17). ◀

В частном случае при $h=0$ уравнение (35) дает непосредственно обратную формирующему фильтру систему как систему, осуществляющую линейную дифференциальную операцию

$$L = b_0^{-1} \sum_{k=0}^{l} \alpha_k D^k.$$

В этом случае преобразованный наблюдаемый сигнал X_1 определяется формулой

$$X_1 = L(\psi_1^{-1} b_1 Z) + L(\psi_1^{-1} b_0) + V_1 = b_2 Z + b_0' + V_1,$$

и расширять систему не приходится. Оптимальный фильтр в этом случае представляет собой последовательное соединение усилителя с коэффициентом усиления ψ_1^{-1}, системы, выполняющей линейную дифференциальную операцию L, и фильтра Калмана — Бьюси для преобразованного наблюдаемого сигнала X_1.

Пример 2. Построить оптимальный фильтр для выделения полезного сигнала, представляющего собой сумму синусоиды данной частоты ω_0 со случайными или неизвестными амплитудой и фазой и стационарной случайной функции с ковариационной функцией

$$k(\tau) = De^{-a|\tau|}\left(\cos\omega_1\tau + \frac{a}{\omega_1}\sin\omega_1|\tau|\right),$$

из аддитивной смеси его с помехой, имеющей показательную ковариационную функцию $k_1(\tau) = D_1 e^{-\alpha|\tau|}$.

Обозначив синусоидальный сигнал и его производную соответственно через $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$, получим дифференциальные уравнения

$$\dot{Z}_1 = Z_2, \qquad \dot{Z}_2 = -\omega_0^2 Z_1.$$

Стационарная случайная функция $Z_3(t)$, как мы видели в примере 5.3, может рассматриваться как выходной сигнал формирующего фильтра, описываемого уравнениями

$$\dot{Z}_3 = Z_4, \qquad \dot{Z}_4 = -b^2 Z_3 - 2aZ_4 + V,$$

где $b^2 = a^2 + \omega_1^2$, а V — белый шум интенсивности $\nu = 2Dab^2$. Наблюдаемый сигнал по условиям задачи определяется формулой

$$X = Z_1 + Z_3 + U,$$

где U — помеха с ковариационной функцией $k_1(\tau) = D_1 e^{-\alpha|\tau|}$. Таким образом, мы имеем систему с четырехмерным вектором состояния, описываемую первым уравнением (33) при $a_0 = 0$:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -b^2 & -2a \end{bmatrix}, \qquad \psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Формирующий фильтр для помехи U, как мы видели в примере 5.2, описывается уравнением $\dot{U} + \alpha U = V_1$, где V_1 — белый шум интенсивности $\nu_1 = 2D_1\alpha$. Обратная система представляет собой форсирующее звено первого порядка с передаточной функцией $s + \alpha$. Пропустив наблюдаемый сигнал X через это звено, получим преобразованный наблюдаемый сигнал

$$X_1 = \dot{X} + \alpha X = \dot{Z}_1 + \alpha Z_1 + \dot{Z}_3 + \alpha Z_3 + V_1 = \alpha Z_1 + Z_2 + \alpha Z_3 + Z_4 + V_1.$$

Таким образом, преобразованный наблюдаемый сигнал определяется второй формулой (33) при $b_1 = [\alpha \;\; 1 \;\; \alpha \;\; 1]$, $b_0 = 0$, $\psi_1 = [0 \;\; 1]$.

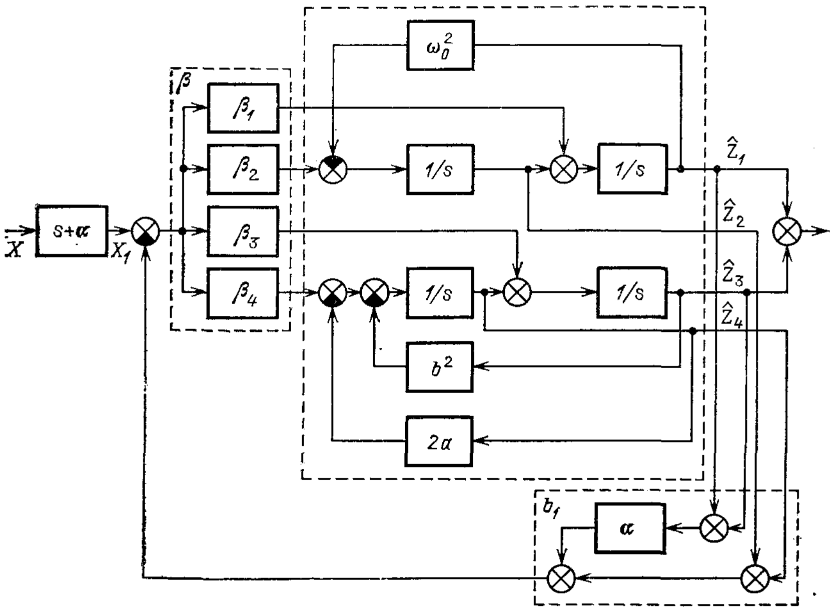

Рис. 18

Применив изложенный метод, получим оптимальный фильтр, схема которого представлена на рис. 18. Имея в виду, что в данном случае фильтр должен давать оценку сигнала $Z_1 + Z_3$, необходимо на выходе полученного фильтра поставить сумматор, выполняющий сложение оценок сигналов Z_1 и Z_3. На рис. 18 в средней части обведена штриховой линией система формирования сигналов Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, справа внизу обведен штриховой линией усилитель с матричным коэффициентом усиления b_1, а слева вверху — усилитель с матричным коэффициентом усиления β.

Остается вычислить матричный коэффициент усиления β. По формуле (31) находим

$$\beta = R b_1^T \nu_1^{-1} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{12} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{13} & R_{23} & R_{33} & R_{34} \\ R_{14} & R_{24} & R_{34} & R_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2D_1\alpha} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix},$$

где

$$\beta_p = \frac{\alpha R_{p1} + R_{p2} + \alpha R_{p3} + R_{p4}}{2D_1\alpha} \quad (p = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Уравнение (30), определяющее ковариационную матрицу ошибки R, в данном случае имеет вид

$$\dot{R}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -b^2 & -2a \end{bmatrix} R+R\begin{bmatrix} 0 & -\omega_0^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b^2 \\ 0 & 0 & 1 & -2a \end{bmatrix}-$$

$$-\frac{R}{2D_1\alpha}\begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha & 1 \\ \alpha^2 & \alpha & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix} R+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2Dab^2 \end{bmatrix}.$$

Средний квадрат ошибки равен дисперсии суммы ошибок на первом и третьем выходах оптимального фильтра, т. е. $R_{11}+2R_{13}+R_{33}$.

П р и м е р 3. Рассмотрим задачу предыдущего примера в случае помехи U с показательно-косинусной ковариационной функцией $k_1(\tau)=D_1e^{\alpha|\tau|}\cos\omega_2\tau$. В примере 5.3 было показано, что случайную функцию с такой ковариационной функцией можно рассматривать как результат преобразования белого шума V_1 интенсивности $\nu_1=2D_1\alpha$ формирующим фильтром с передаточной функцией $(s+\gamma)/(s^2+2\alpha s+\gamma^2)$, где $\gamma^2=\alpha^2+\omega_2^2$. Дифференциальное уравнение этого фильтра имеем вид $\ddot{U}+2\alpha\dot{U}+\gamma^2 U=\dot{V}_1+\gamma V_1$. Обратная система представляет собой параллельное соединение форсирующего звена первого порядка с передаточной функцией $s+2\alpha-\gamma$ и апериодического звена с передаточной функцией $2\gamma(\gamma-\alpha)/(s+\gamma)$ (рис. 19).

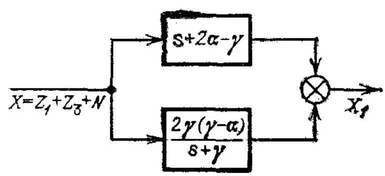

Рис. 19

В результате преобразования наблюдаемого сигнала $X=Z_1+Z_3+U$ этой системой получится сигнал

$$X_1=(2\alpha-\gamma)(Z_1+Z_3)+\dot{Z}_1+\dot{Z}_3+Z_5+V_1=$$
$$=(2\alpha-\gamma)(Z_1+Z_3)+Z_2+Z_4+Z_5+V_1,$$

где Z_5 определяется дифференциальным уравнением

$$\dot{Z}_5=2\gamma(\gamma-\alpha)(Z_1+Z_3)-\gamma Z_5.$$

Расширив систему предыдущего примера добавлением величины Z_5, получим систему с пятимерным вектором состояния, описываемую первым уравнением (33) при $a_0=0$:

$$a_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b^2 & -2a & 0 \\ 2\gamma(\gamma-\alpha) & 0 & 2\gamma(\gamma-\alpha) & 0 & -\gamma \end{bmatrix},\quad \psi=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и преобразованный наблюдаемый сигнал, определяемый второй формулой (33) при $b_1=[2\alpha-\beta\ \ 1\ \ 2\alpha-\beta\ \ 1\ \ 1]$, $b_0=0$, $\psi_1=[0\ \ 1]$. Построив для этой системы фильтр Калмана—Бьюси, получим оптимальный фильтр, показанный на рис. 20. Штриховой линией обведена система предыдущего примера и соответствующая расширенная система. Матричный коэффициент усиления β представляет собой матрицу-столбец с элементами

$$\beta_p=\frac{(2\alpha-\gamma)(R_{p1}+R_{p3})+R_{p2}+R_{p4}+R_{p5}}{2D_1\alpha}\qquad (p=1,\ \ldots,\ 5).$$

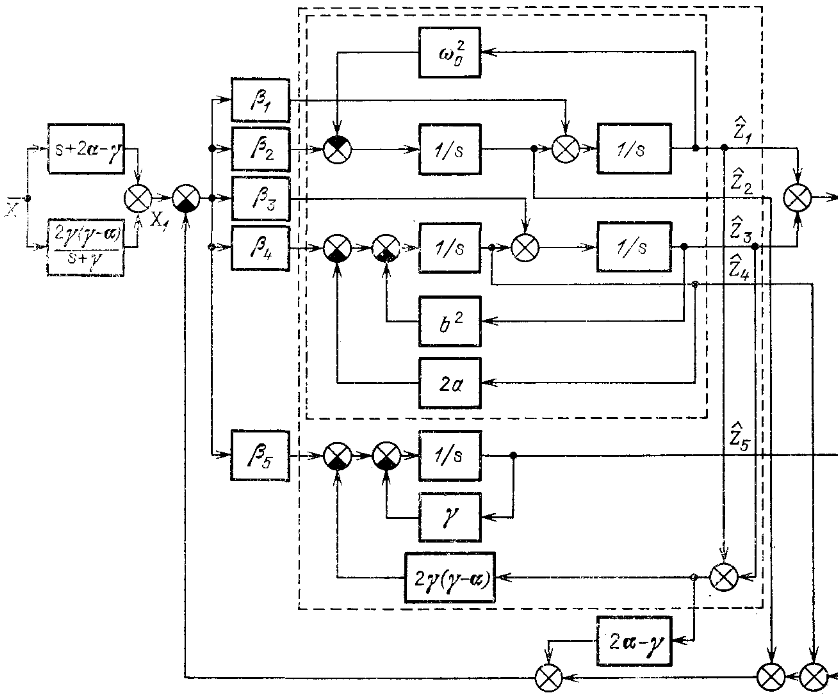

Рис. 20

Уравнение (30) для ковариационной матрицы ошибки фильтрации имеет в данном случае вид

$$\dot{R}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b^2 & -2a & 0 \\ 2\gamma(\gamma-\alpha) & 0 & 2\gamma(\gamma-\alpha) & 0 & -\gamma \end{bmatrix} R+$$

$$+R\begin{bmatrix} 0 & -\omega_0^2 & 0 & 0 & 2\gamma(\gamma-\alpha) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b^2 & 2\gamma(\gamma-\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & -2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix}-\frac{R}{2D_1\alpha}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} (2\alpha-\gamma)^2 & 2\alpha-\gamma & (2\alpha-\gamma)^2 & 2\alpha-\gamma & 2\alpha-\gamma \\ 2\alpha-\gamma & 1 & 2\alpha-\gamma & 1 & 1 \\ (2\alpha-\gamma)^2 & 2\alpha-\gamma & (2\alpha-\gamma)^2 & 2\alpha-\gamma & 2\alpha-\gamma \\ 2\alpha-\gamma & 1 & 2\alpha-\gamma & 1 & 1 \\ 2\alpha-\gamma & 1 & 2\alpha-\gamma & 1 & 1 \end{bmatrix} R+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2Dab^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

7.3.5. Метод дифференцирования наблюдаемого сигнала. Изложенный метод, как уже было сказано, применим только в том случае, когда результат применения линейной дифференциальной операции L к $\psi_1^{-1}b_1 Z$ с заменой производной $\dot{Z}$ после каждого дифференцирования ее выражением из первого уравнения (33) не содержит производных белого шума, т. е. если все компоненты случайного процесса $Z(t)$, входящие в уравнение наблюдения, не менее гладки, чем помеха $U(t)$. Если это условие не выполнено, то наблюдаемый сигнал нельзя преобразовать системой, обратной формирующему фильтру помехи, и метод Гулько—Новосельцевой неприменим. В этом случае можно применить метод Брайсона—Йохансена [9], основанный на дифференцировании наблюдаемого сигнала и исключении помехи и ее производных, не содержащих белого шума, из уравнений формирующего фильтра с помощью уравнения наблюдения и уравнений, полученных из него дифференцированием.

▶ Приведем уравнение формирующего фильтра помехи (35) к системе уравнений первого порядка, приняв $U_1 = U$,

$$\begin{aligned}
&\dot{U}_k = U_{k+1} \qquad (k=1, \ldots, l-h-1),\\
&\dot{U}_k = U_{k+1} + q_k V_1 \qquad (k = l-h, \ldots, l-1),\\
&\dot{U}_l = -\alpha_l^{-1} \sum_{i=1}^{l-1} \alpha_i U_{i+1} + q_l V_1.
\end{aligned}$$

Дифференцируя уравнение наблюдения, умноженное слева на ψ_1^{-1} до появления в полученном уравнении белого шума, будем иметь

$$\frac{d^k}{dt^k}(\psi_1^{-1}X) = \frac{d^k}{dt^k}[\psi_1^{-1}(b_1 Z + b_0)] + U_{k+1} \qquad (k=0, 1, \ldots, s),$$

если

$$d^s[\psi_1^{-1}(b_1 Z + b_0)]/dt^s \quad \text{при} \quad s < l-h$$

содержит белый шум, и

$$\begin{aligned}
&\frac{d^k}{dt^k}(\psi_1^{-1}X) = \frac{d^k}{dt^k}[\psi_1^{-1}(b_1 Z + b_0)] + U_{k+1} \qquad (k=0, 1, \ldots, l-h-1),\\
&\frac{d^{l-h}}{dt^{l-h}}(\psi_1^{-1}X) = \frac{d^{l-h}}{dt^{l-h}}[\psi_1^{-1}(b_1 Z + b_0)] + U_{l-h+1} + q_{l-h} V_1,
\end{aligned}$$

если ни при каком $s < l-h$ $d^s[\psi_1^{-1}(b_1 Z + b_0)]/dt^s$ не содержит белого шума. В первом случае исключим из уравнений формирующего фильтра помехи $U_1, \ldots, U_s$ с помощью уравнения наблюдения и уравнений, полученных из него $(s-1)$-кратным дифференцированием. Во втором случае исключим из уравнений формирующего фильтра помехи $U_1, \ldots, U_{l-h-1}$ и белый шум V_1

с помощью уравнения наблюдения и всех уравнений, полученных из него дифференцированием. В обоих случаях получим для $U_{s+1}, \ldots, U_l$ $(s \leqslant l-h)$ линейные дифференциальные уравнения, в правых частях которых будут линейные функции вектора состояния Z и линейные комбинации наблюдаемого сигнала и его производных. Расчленив каждую из переменных $U_{s+1}, \ldots, U_l$ на две части, одна из которых порождается линейными функциями вектора Z в правых частях уравнений, а другая — линейной комбинацией наблюдаемого сигнала и его производных, будем иметь

$$U_{s+k} = Z'_k - Y_k \qquad (k = 1, \ldots, l-s),$$

где $Z'_1, \ldots, Z'_{l-s}$ определяются дифференциальными уравнениями с линейными функциями вектора Z, а $Y_1, \ldots, Y_{l-s}$ определяются теми же уравнениями с линейными комбинациями наблюдаемого сигнала X и его производных в правых частях. Расширив вектор состояния системы Z добавлением к нему блоков $Z'_1, \ldots, Z'_{l-s}$ и написав последнее уравнение, полученное дифференцированием уравнения наблюдения, в виде

$$\frac{d^s}{dt^s}(\psi_1^{-1}X) + Y_1 = \frac{d^s}{dt^s}[\psi_1^{-1}(b_1 Z + b_0)] + Z'_1$$

при $s < l-h$ и в виде

$$\frac{d^{l-h}}{dt^{l-h}}(\psi_1^{-1}X) + Y_1 = \frac{d^{l-h}}{dt^{l-h}}[\psi_1^{-1}(b_1 Z + b_0)] + Z'_1 + q_{l-h}V_1$$

при $s = l-h$, приведем задачу к построению фильтра Калмана — Бьюси для наблюдаемого сигнала

$$X_1 = \frac{d^s}{dt^s}(\psi_1^{-1}X) + Y_1.$$

Оптимальным фильтром в этом случае будет последовательное соединение системы, формирующей сигнал $X_1(t)$ из наблюдаемого сигнала $X(t)$, и фильтра Калмана — Бьюси с расширенным вектором состояния $[Z^{\mathrm{T}} Z_1'^{\mathrm{T}} \ldots Z_{l-s}'^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ и наблюдаемым сигналом $X_1(t)$. ◀

Пример 4. В условиях примера 2 дифференцирование наблюдаемого сигнала дает

$$\dot{X} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_3 + \dot{U} = Z_2 + Z_4 - \alpha U + V_1.$$

Подставив сюда выражение U из уравнения наблюдения, получаем

$$\dot{X} = Z_2 + Z_4 - \alpha(X - Z_1 - Z_2) + V_1 = \alpha Z_1 + Z_2 + \alpha Z_3 + Z_4 - \alpha X + V_1.$$

Как и в примере 2, задача сведена к построению фильтра Калмана — Бьюси для наблюдаемого сигнала $X_1 = \dot{X} + \alpha X$.

Пример 5. В условиях примера 3, представив уравнения формирующего фильтра в виде $U = U_1$,

$$\dot{U}_1 = U_2 + V_1, \qquad \dot{U}_2 = -\gamma^2 U_1 - 2\alpha U_2 + (\gamma - 2\alpha) V_1,$$

и дифференцируя наблюдаемый сигнал, получаем

$$\dot{X} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_3 + \dot{U} = Z_2 + Z_4 + U_2 + V_1.$$

Исключив помеху $U = U_1$ и белый шум V_1 из второго уравнения формирующего фильтра с помощью уравнения наблюдения и уравнения, полученного из него дифференцированием,

$$U_1 = X - Z_1 - Z_3, \quad V_1 = \dot{X} - Z_2 - Z_4 - U_2,$$

будем иметь

$$\dot{U}_2 = -\gamma U_2 + \gamma^2 (Z_1 + Z_3) - (\gamma - 2\alpha)(Z_2 + Z_4) - \gamma^2 X + (\gamma - 2\alpha)\dot{X}.$$

Положив $U_2 = Z' + Y$, где Z' и Y определяются соответственно уравнениями

$$\dot{Z}' = -\gamma Z' + \gamma^2 (Z_1 + Z_3) - (\gamma - 2\alpha)(Z_2 + Z_4),$$
$$\dot{Y} = -\gamma Y - \gamma^2 X + (\gamma - 2\alpha)\dot{X},$$

приводим задачу к построению фильтра Калмана—Бьюси для наблюдаемого сигнала

$$X_1 = \dot{X} - Y = Z_2 + Z_4 + Z' + V_1.$$

Чтобы убедиться в том, что полученный фильтр совпадает с фильтром примера 3, положим $Z' = (2\alpha - \gamma)(Z_1 + Z_3) + Z_5$, $Y = -(2\alpha - \gamma)X - Y'$. Тогда после элементарных преобразований получим для Z_5 и Y' уравнения

$$\dot{Z}_5 = 2\gamma(\gamma - \alpha)(Z_1 + Z_3) - \gamma Z_5, \quad \dot{Y}' = -\gamma Y' + 2\gamma(\gamma - \alpha)X,$$

а преобразованный наблюдаемый сигнал X_1 выразится формулой

$$X_1 = \dot{X} + (2\alpha - \gamma)X + Y' = (2\alpha - \gamma)(Z_1 + Z_3) + Z_2 + Z_4 + Z_5 + V_1.$$

Отсюда непосредственно видно, что X_1 представляет собой результат преобразования наблюдаемого сигнала системой, обратной формирующему фильтру, а уравнение для Z_5 совпадает с соответствующим уравнением примера 3.

Пример 6. Найти оптимальный фильтр для фильтрации сигнала, представляющего собой сумму синусоиды известной частоты ω_0 с неизвестными амплитудой и фазой и случайной функции с ковариационной функцией $k(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}$, в случае помехи с ковариационной функцией

$$k_1(\tau) = D_1 e^{-a_1|\tau|}\left(\cos\omega_1\tau + \frac{a}{\omega_1}\sin\omega_1|\tau|\right).$$

В этом случае за вектор состояния системы принимаем трехмерный вектор, определяемый уравнениями

$$\dot{Z}_1 = Z_2, \quad \dot{Z}_2 = -\omega_0^2 Z_1, \quad \dot{Z}_3 = -\alpha Z_3 + V,$$

где V — белый шум интенсивности $\nu = 2D\alpha$. Формирующий фильтр для помехи согласно результату примера 5.3 описывается уравнением

$$\ddot{U} + 2a\dot{U} + b^2 U = V_1,$$

где $b^2 = a^2 + \omega_1^2$, а V_1 — белый шум интенсивности $\nu_1 = 2D_1 ab^2$. Система, обратная формирующему фильтру, выполняет линейную дифференциальную операцию второго порядка $L = D^2 + 2aD + b^2$. Наблюдаемый сигнал определяется формулой $X = Z_1 + Z_3 + U$. Следовательно,

$$\dot{X} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_3 + \dot{U} = Z_2 - \alpha Z_3 + \dot{U} + V,$$

и $\ddot{X}$ содержит производную белого шума $\dot{V}$. Поэтому операция L неприменима к X, и X не может служить входным сигналом системы, обратной формирующему фильтру. Метод же дифференцирования наблюдаемого сигнала применить можно. Для этого заменим уравнение формирующего фильтра системой уравнений первого порядка, положив $U_1 = U$,

$$\dot{U}_1 = U_2, \quad \dot{U}_2 = -b^2 U_1 - 2aU_2 + V_1.$$

Продифференцируем наблюдаемый сигнал $X = Z_1 + Z_3 + U_1$:

$$\dot{X} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_3 + \dot{U}_1 = Z_2 - \alpha Z_3 + U_2 + V$$

и исключим из второго уравнения формирующего фильтра U_1 с помощью уравнения наблюдения, $U_1 = X - Z_1 - Z_3$. В результате приведем это уравнение к виду

$$\dot{U}_2 = -2aU_2 + b^2 (Z_1 + Z_3) - b^2 X + V_1.$$

Положив $U_2 = Z_4 - Y$ и определив Z_4 и Y уравнениями

$$\dot{Z}_4 = -2aZ_4 + b^2 (Z_1 + Z_3) + V_1, \quad \dot{Y} = -2aY + b^2 X,$$

будем иметь

$$\dot{X} = Z_2 - \alpha Z_3 + Z_4 - Y + V.$$

Расширив вектор состояния добавлением компоненты Z_4, приводим задачу к построению фильтра Калмана — Бьюси для преобразованного наблюдаемого сигнала $X_1 = \dot{X} + Y$. Этот сигнал получается как результат преобразования наблюдаемого сигнала X системой, представляющей собой параллельное соединение дифференциатора и системы с передаточной функцией

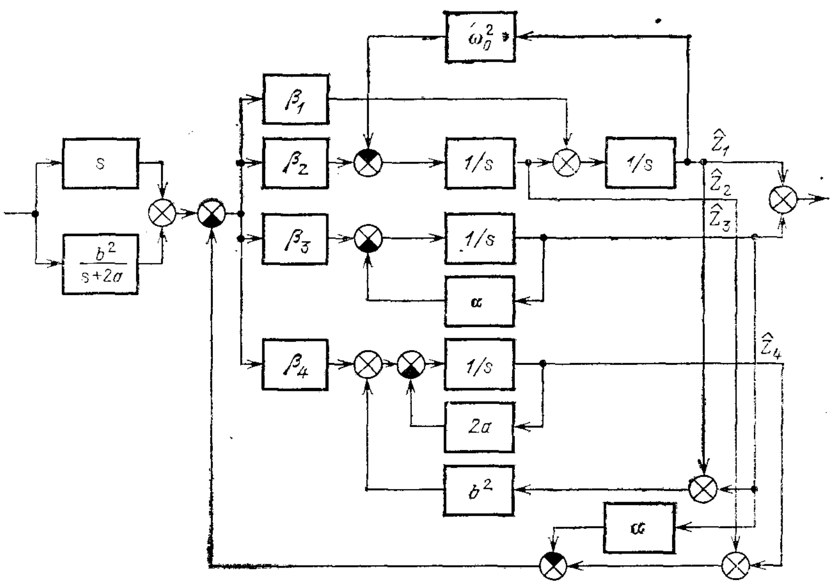

Рис. 21

$b^2/(s+2a)$. Оптимальным фильтром в данном случае служит последовательное соединение системы, преобразующей наблюдаемый сигнал X и дающей на выходе сигнал X_1, и фильтра Калмана — Бьюси для расширенного вектора состояния $[Z_1 Z_2 Z_3 Z_4]^T$ и наблюдаемого сигнала X_1. Схема этого фильтра представлена на рис. 21.

7.3.6. Начальные условия в случае автокоррелированной помехи. Фильтры, найденные изложенными в пп. 7.3.4 и 7.3.5 методами, оптимальны только при определенных начальных условиях. Чтобы понять это, напишем выражение для преобразованного наблюдаемого сигнала в виде

$$X_1(t)=LX(t)+\int_{t_0}^{t} w(t,\ \tau)X(\tau)\,d\tau=\sum_{k=0}^{s} c_k X^{(k)}(t)+\int_{t_0}^{t} w(t,\ \tau)X(\tau)\,d\tau,$$

где $w(t,\ \tau)$ — весовая функция той части системы, преобразующей наблюдаемый сигнал, которая описывается дифференциальным уравнением. Эта формула однозначно определяет $X_1(t)$ по данному наблюдаемому сигналу $X(t)$. Чтобы однозначно определить наблюдаемый сигнал $X(t)$ по данному преобразованному сигналу $X_1(t)$, необходимо задать начальные значения сигнала $X(t)$ и его производных $X'(t),\ \ldots,\ X^{(s-1)}(t)$. Таким образом, между $X(t)$, с одной стороны, и $X_1(t)$, $X_0=X(t_0)$, $X_0'=X'(t_0),\ \ldots$ $\ldots,\ X_0^{(s-1)}=X^{(s-1)}(t_0)$, с другой стороны, существует взаимно однозначное соответствие. Следовательно, оптимальная оценка $\hat{Z}$ вектора состояния системы Z, представляющая собой условное математическое ожидание Z относительно $X_{t_0}^{t}=\{X(\tau)\colon \tau\in[t_0,\ t]\}$, совпадает с условным математическим ожиданием Z относительно совокупности $X_{1t_0}^{t}$, X_0, X_0', $\ldots$, $X_0^{(s-1)}$. Выходной сигнал построенного изложенным методом фильтра будет представлять собой условное математическое ожидание Z относительно $X_{1t_0}^{t}$, X_0, X_0', $\ldots$, $X_0^{(s-1)}$, если за начальное значение оценки $\hat{Z}$ в момент $t=t_0$ принять условное математическое ожидание вектора $Z_0=Z(t_0)$ относительно X_0, X_0', $\ldots$, $X_0^{(s-1)}$ и соответственно за начальное значение R принять условную ковариационную матрицу R_0 вектора Z_0 относительно X_0, X_0', $\ldots$, $X_0^{(s-1)}$. При таких и только при таких начальных условиях выходной сигнал фильтра будет оптимальной оценкой вектора состояния системы Z. Это было показано Бьюси, который независимо от Гулько и Новосельцевой получил тот же фильтр и начальные условия, обеспечивающие его оптимальность, в частном случае, когда формирующий фильтр помехи описывается уравнением (35) при $l=1$, $h=0$, $\alpha_1=\beta_0=1$ [10].

► Чтобы найти условные математическое ожидание и ковариационную матрицу вектора Z_0 относительно X_0, X_0', $\ldots$, $X_0^{(s-1)}$, вспомним, что теория п. 7.3.1 была развита в предположении, что совместное распределение процессов $Y(t)$ и $Z(t)$ нормально. Поэтому мы естественно предположим, что распределения процесса $Z(t)$ и независимой от него помехи $U(t)$ нормальны. Тогда совместное распределение величин Z_0, X_0, X_0', $\ldots$, $X_0^{(s-1)}$ будет тоже нормальным и условные математическое ожидание и ковариационная матрица величины Z_0 относительно X_0, X_0', $\ldots$, $X_0^{(s-1)}$

полностью определятся математическим ожиданием и ковариационной матрицей составного вектора $[Z_0^{\mathrm{T}} X_0^{\mathrm{T}} X_0'^{\mathrm{T}} \dots X_0^{(s-1)\,\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$.

Для нахождения математического ожидания и ковариационной матрицы вектора $[Z_0^{\mathrm{T}} X_0^{\mathrm{T}} X_0'^{\mathrm{T}} \dots X_0^{(s-1)\,\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ напишем выражения для наблюдаемого сигнала и его производных при $t=t_0$, имея в виду, что каждое дифференцирование произведения $b_1 Z$ по условию дает линейную функцию вектора Z без белого шума:

$$X_0^{(k)} = b_{1k} Z_0 + b_{00}^{(k)} + \sum_{i=0}^{k} C_k^i \psi_{10}^{(k-i)} U_0^{(i)} \qquad (k=0,\ 1,\ \dots,\ s-1),$$

где $b_{10}, b_{11}, \dots, b_{1,\,s-1}$ — значения матрицы b_1 и полученных в результате дифференцирования матриц-коэффициентов при Z_0 при $t=t_0$, $b_{00}, b_{00}', \dots, b_{00}^{(s-1)}$ — значения вектора b_0 и его производных при $t=t_0$, $\psi_{10}, \psi_{10}', \dots, \psi_{10}^{(s-1)}$ — значения матрицы ψ_1 и ее производных при $t=t_0$. Введя матрицу $B_1 = [b_{10}^{\mathrm{T}} b_{11}^{\mathrm{T}} \dots b_{1,\,s-1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, вектор $B_0 = [b_{00}^{\mathrm{T}} b_{00}'^{\mathrm{T}} \dots b_{00}^{(s-1)\,\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ и матрицу Ψ с блоками $\psi_{ij} = C_{i-1}^{j-1} \psi_{10}^{(i-j)}$ при $i \geqslant j$, $\psi_{ij}=0$ при $i<j$ $(i,\ j=1,\ \dots,\ s)$, можем переписать полученные равенства в виде

$$[X_0^{\mathrm{T}} X_0'^{\mathrm{T}} \dots X_0^{(s-1)\,\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = B_1 Z_0 + B_0 + \Psi\,[U_0^{\mathrm{T}} U_0'^{\mathrm{T}} \dots U_0^{(s-1)\,\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}.$$

Отсюда, считая математическое ожидание помехи тождественно равным нулю, находим математическое ожидание вектора $[X_0^{\mathrm{T}} X_0'^{\mathrm{T}} \dots X_0^{(s-1)\,\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$:

$$[MX_0^{\mathrm{T}} MX_0'^{\mathrm{T}} \dots MX_0^{(s-1)\,\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = B_1 M Z_0 + B_0,$$

его ковариационную матрицу

$$K_x = B_1 K_0 B_1^{\mathrm{T}} + \Psi K_u \Psi^{\mathrm{T}}$$

и взаимную ковариационную матрицу векторов Z_0 и $[X_0^{\mathrm{T}} X_0'^{\mathrm{T}} \dots X_0^{(s-1)\,\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$:

$$K_{zx} = K_0 B_1^{\mathrm{T}},$$

где K_0 — ковариационная матрица вектора Z_0, а K_u — ковариационная матрица вектора начальных значений помехи и ее производных $[U_0^{\mathrm{T}} U_0'^{\mathrm{T}} \dots U_0^{(s-1)\,\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$. Полученные формулы полностью определяют математическое ожидание и блоки $K_z = K_0$, K_{zx}, K_{xz} и K_x ковариационной матрицы вектора $[Z_0^{\mathrm{T}} X_0^{\mathrm{T}} X_0'^{\mathrm{T}} \dots X_0^{(s-1)\,\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$.

Пользуясь известными формулами для условных математического ожидания и ковариационной матрицы проекции нормально распределенного вектора относительно его проекции на дополнительное подпространство (приложение 4, формулы (2) и (3)), находим

$$M[Z_0 \mid X_0,\ X_0',\ \dots,\ X_0^{(s-1)}] = MZ_0 + K_{zx} K_x^{-1} \left([X_0^{\mathrm{T}} X_0'^{\mathrm{T}} \dots X_0^{(s-1)\,\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} - [MX_0^{\mathrm{T}} MX_0'^{\mathrm{T}} \dots MX_0^{(s-1)\,\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \right);$$

$$K_{z \mid x} = K_0 - K_{zx} K_x^{-1} K_{xz},$$

где $K_{z|x}$ — условная ковариационная матрица вектора Z_0 относительно $[X_0^{\mathrm{T}} X_0'^{\mathrm{T}} \ldots X_0^{(s-1)\,\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$. Подставив сюда полученные выражения $[MX_0^{\mathrm{T}} MX_0'^{\mathrm{T}} \ldots MX_0^{(s-1)\,\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, K_x, K_{zx} и $K_{xz} = K_{zx}^{\mathrm{T}}$, найдем искомые начальные значения оценки $\hat{Z}$ и ее апостериорной ковариационной матрицы R:

$$\hat{Z}_0 = MZ_0 + K_0 B_1^{\mathrm{T}} (B_1 K_0 B_1^{\mathrm{T}} + \Psi K_u \Psi^{\mathrm{T}})^{-1} \times \\ \times ([X_0^{\mathrm{T}} X_0'^{\mathrm{T}} \ldots X_0^{(s-1)\,\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} - B_1 MZ_0 - B_0), \tag{38}$$

$$R_0 = K_0 - K_0 B_1^{\mathrm{T}} (B_1 K_0 B_1^{\mathrm{T}} + \Psi K_u \Psi^{\mathrm{T}})^{-1} B_1 K_0. \blacktriangleleft \tag{39}$$

Отметим еще раз, что только при этих начальных условиях фильтр, построенный методом п. 7.3.4 или п. 7.3.5, будет оптимальным.

Пример 7. Чтобы найти начальные условия для фильтра примеров 2 и 4, будем считать коэффициенты при $\sin \omega_0 t$ и $\cos \omega_0 t$ в выражении синусоидального сигнала Z_1 независимыми нормально распределенными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и дисперсией D_0. Тогда, пользуясь формулами (2.56) и (2.57) для вычисления ковариационных функций производных случайных функций Z_1 и Z_3 и их взаимных ковариационных функций с их производными Z_2 и Z_4, получим $MZ_{10} = MZ_{20} = MZ_{30} = MZ_{40} = 0$, $K_x = D_0 + D + D_1$, $K_{z_1 x} = D_0$, $K_{z_2 x} = 0$, $K_{z_3 x} = D$, $K_{z_4 x} = 0$,

$$K_0 = K_z = \begin{bmatrix} D_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 D_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^2 D \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что в данном случае $B_1 = b_1 = [1\ 0\ 1\ 0]$, $B_0 = 0$, по формулам (38) и (39) находим

$$\begin{aligned} &\hat{Z}_{10} = D_0 X_0 / (D_0 + D + D_1), && \hat{Z}_{20} = 0, \\ &\hat{Z}_{30} = D X_0 / (D_0 + D + D_1), && \hat{Z}_{40} = 0, \\ &R_{110} = D_0 - D_0^2 / (D_0 + D + D_1), && R_{220} = \omega_0^2 D_0, \\ &R_{330} = D - D^2 / (D_0 + D + D_1), && R_{440} = b^2 D, \\ &R_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Пример 8. В условиях примеров 3 и 5, принимая во внимание, что начальное значение переменной Z_5 в условиях задачи не определено, вследствие чего его можно взять произвольно, в частности положить $Z_{50} = 0$, получаем те же начальные значения $\hat{Z}_1$, $\hat{Z}_2$, $\hat{Z}_3$, $\hat{Z}_4$, R_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$, что и в предыдущем примере, и, кроме того, $\hat{Z}_{50} = 0$, $R_{150} = R_{250} = R_{350} = R_{450} = R_{550} = 0$.

Пример 9. В условиях примера 6 при $Z_{40} = 0$ формулы (38) и (39) дают те же значения $\hat{Z}_{10}$, $\hat{Z}_{20}$, $\hat{Z}_{30}$, $\hat{Z}_{40}$, R_{110}, R_{220}, R_{330}, что и в примере 7, и, кроме того, $R_{140} = R_{240} = R_{340} = R_{440} = 0$.

7.3.7. Дифференцирующие свойства оптимального фильтра в случае автокоррелированной помехи. Заметим, что если система предварительного преобразования наблюдаемого сигнала, в частности система, обратная формирующему фильтру помехи, выполняет s-кратное дифференцирование этого сигнала, то на вход соединенного с ней фильтра Калмана — Бьюси поступают производные наблюдаемого сигнала до порядка s включительно. При этом согласно результатам п. 1.3.5 выходной сигнал фильтра будет содержать линейную комбинацию наблюдаемого сигнала и его производных до порядка $s-1$ включительно. Эту линейную комбинацию можно выделить, применив метод п. 1.3.5 к дифференциальному уравнению фильтра Калмана — Бьюси, входной сигнал которого содержит производные наблюдаемого сигнала.

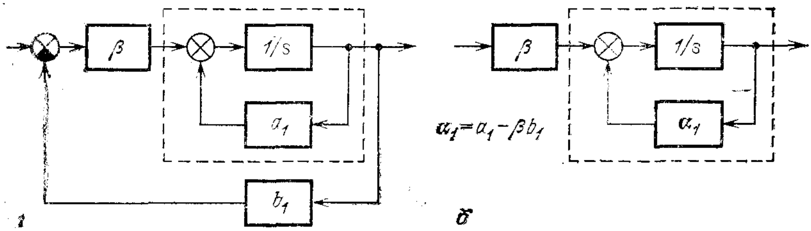

Рис. 22

В результате фильтр Калмана — Бьюси заменится параллельным соединением системы, выполняющей дифференциальную операцию порядка $s-1$ над наблюдаемым сигналом, и фильтра Калмана — Бьюси, получающего на вход сам наблюдаемый сигнал с некоторым (в общем случае матричным) коэффициентом усиления и выходной сигнал той части преобразующей системы, которая описывается дифференциальным уравнением. Это преобразование можно также выполнить структурными преобразованиями оптимального фильтра ([57], § 4.7). Для этого следует представить фильтр Калмана — Бьюси (рис. 22, *а*) схемой, показанной на рис. 22, *б*, объединив обе обратные связи, а затем каждый дифференциатор последовательно перенести по ходу сигнала через объединенный усилитель (с коэффициентом усиления $\sigma = \gamma\beta$) (рис. 23, *а*, *б*), потом через сумматор (рис. 23, *б*, *в*), затем перенести сумматор по ходу сигнала через точку разветвления (рис. 23, *в*, *г*, *д*) и перенести усилитель с коэффициентом усиления $\alpha_1 = a_1 - \beta b_1$ против хода сигнала через сумматор (рис. 23, *д*, *е*) и, наконец, поменять местами получившиеся рядом сумматоры (рис. 23, *е*, *ж*). Если перед входом фильтра Калмана — Бьюси есть еще дифференциаторы, то при повторении преобразования они все попадут в прямую цепь, параллельную фильтру Калмана — Бьюси на рис. 23, *е* *).

В результате такого преобразования s-кратное дифференцирование входного сигнала перед входом фильтра Калмана — Бьюси

*) Чтобы проверить эквивалентность всех схем на рис. 23, достаточно сравнить входной и выходной сигналы каждого преобразуемого участка схемы до и после преобразования и убедиться в том, что они совпадают.

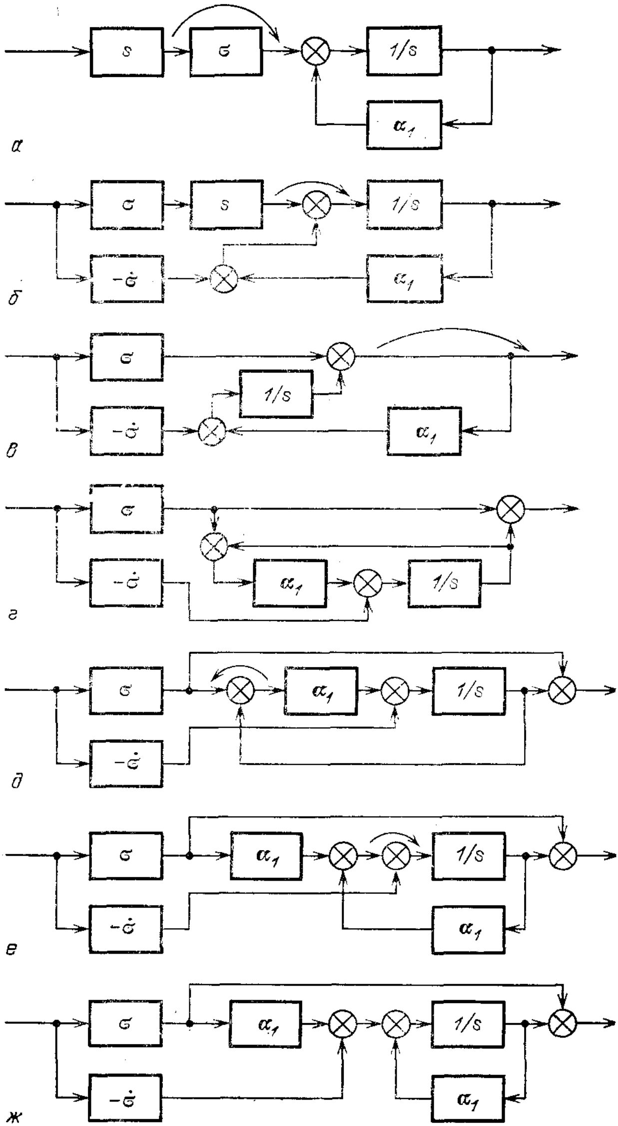

Рис. 23

заменяется $(s-1)$-кратным дифференцированием в цепи, параллельной этому фильтру.

7.3.8. Оптимальная линейная экстраполяция. Для линейной системы (28) при $a=0$ в соответствии с общей постановкой задачи 2 в п. 7.1.6 легко решается задача оптимальной экстраполяции состояния системы на данное время Δ. Для этого достаточно выразить $Z_{t+\Delta}$ через Z_t по формуле (3.32) для решения линейного стохастического дифференциального уравнения.

▶ Приняв за начальный момент t, а за конечный $t+\Delta$, получим

$$Z_{t+\Delta}=u(t+\Delta,\ t)Z_t+\int_t^{t+\Delta} u(t+\Delta,\ \tau)\,a_0(\tau)\,d\tau+\int_t^{t+\Delta} u(t+\Delta,\ \tau)\,\psi(\tau)\,dW(\tau),$$

где $u(t,\ \tau)$ — решение однородного уравнения $\dot{u}_t=a_1u$ при условии $u(\tau,\ \tau)=I$. Взяв условное математическое ожидание относительно $Y_{t_0}^t$, найдем оптимальную оценку будущего состояния $Z_{t+\Delta}$ системы:

$$\hat{Z}_{t+\Delta\,|\,t}=M\left[Z_{t+\Delta}\,|\,Y_{t_0}^t\right]=u(t+\Delta,\ t)\hat{Z}_t+\int_t^{t+\Delta} u(t+\Delta,\ \tau)\,a_0(\tau)\,d\tau. \blacktriangleleft \qquad (40)$$

Таким образом, оптимальный экстраполятор представляет собой последовательное соединение оптимального фильтра с усилителем с коэффициентом усиления $\varepsilon=u(t+\Delta,\ t)$ и с сумматором,

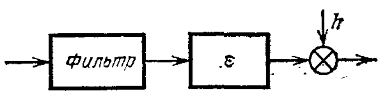

Рис. 24

добавляющим вырабатываемый соответствующим устройством детерминированный сигнал — второе слагаемое в правой части формулы (40) (рис. 24).

Пример 10. В условиях примера 1

$$u(t+\Delta,\ t)=\begin{bmatrix}\cos\omega_0\Delta & \dfrac{1}{\omega_0}\sin\omega_0\Delta\\ -\omega_0\sin\omega_0\Delta & \cos\omega_0\Delta\end{bmatrix}$$

и формула (40) дает

$$\hat{Z}_{1t+\Delta\,|\,t}=\hat{Z}_{1t}\cos\omega_0\Delta+\frac{\hat{Z}_{2t}}{\omega_0}\sin\omega_0\Delta,$$

$$\hat{Z}_{2t+\Delta\,|\,t}=-\hat{Z}_{1t}\omega_0\sin\omega_0\Delta+\hat{Z}_{2t}\cos\omega_0\Delta.$$

Пример 11. В условиях примера 2 оптимальный экстраполятор представляет собой последовательное соединение оптимального фильтра с усилителем с коэффициентом усиления, представляющим собой матрицу $u(t+\Delta,\ t)$ с элементами

$$\begin{aligned}
&u_{11}(t+\Delta,\ t)=u_{22}(t+\Delta,\ t)=\cos\omega_0\Delta,\\
&u_{12}(t+\Delta,\ t)=\frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0\Delta,\quad u_{21}(t+\Delta,\ t)=-\omega_0\sin\omega_0\Delta,\\
&u_{33}(t+\Delta,\ t)=e^{-a\Delta}\left(\cos\omega_1\Delta+\frac{a}{\omega_1}\sin\omega_1\Delta\right),\\
&u_{34}(t+\Delta,\ t)=\frac{1}{\omega_1}e^{-a\Delta}\sin\omega_1\Delta,\\
&u_{44}(t+\Delta,\ t)=e^{-a\Delta}\left(\cos\omega_1\Delta-\frac{a}{\omega_1}\sin\omega_1\Delta\right),\\
&u_{43}(t+\Delta,\ t)=-\frac{b^2}{\omega_1}e^{-a\Delta}\sin\omega_1\Delta,\\
&u_{13}(t+\Delta,\ t)=u_{14}(t+\Delta,\ t)=u_{23}(t+\Delta,\ t)=u_{24}(t+\Delta,\ t)=\\
&\qquad=u_{31}(t+\Delta,\ t)=u_{32}(t+\Delta,\ t)=u_{41}(t+\Delta,\ t)=u_{42}(t+\Delta,\ t)=0.
\end{aligned}$$

Пример 12. В условиях примера 3 оптимальный экстраполятор представляет собой последовательное соединение оптимального фильтра с усилителем с коэффициентом усиления, представляющим собой матрицу, элементы которой определяются формулами предыдущего примера и формулами

$$\begin{aligned}
&u_{51}(t+\Delta,\ t)=\frac{2\gamma(\gamma-\alpha)}{\omega_0^2+\gamma^2}\left(\gamma\cos\omega_0\Delta+\omega_0\sin\omega_0\Delta-\gamma e^{-\gamma\Delta}\right),\\
&u_{52}(t+\Delta,\ t)=\frac{2\gamma(\gamma-\alpha)}{\omega_0^2+\gamma^2}\left(\gamma\sin\omega_0\Delta-\omega_0\cos\omega_0\Delta+\omega_0 e^{-\gamma\Delta}\right),\\
&u_{53}(t+\Delta,\ t)=\frac{2\gamma(\gamma-\alpha)e^{-a\Delta}}{\omega_1\left[(\gamma-a)^2+\omega_1^2\right]}\left\{\omega_1(\gamma-2a)\left[\cos\omega_1\Delta-e^{-(a-\gamma)\Delta}\right]+\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\left(\omega_1^2-a^2+a\gamma\right)\sin\omega_1\Delta\right\},\\
&u_{54}(t+\Delta,\ t)=\frac{2\gamma(\gamma-\alpha)e^{-a\Delta}}{\omega_1\left[(\gamma-a)^2+\omega_1^2\right]}\left\{(\gamma-a)\sin\omega_1\Delta-\omega_1\cos\omega_1\Delta+\omega_1 e^{(a-\gamma)\Delta}\right\},\\
&u_{55}(t+\Delta,\ t)=e^{-\gamma\Delta},\\
&u_{15}(t+\Delta,\ t)=u_{25}(t+\Delta,\ t)=u_{35}(t+\Delta,\ t)=u_{45}(t+\Delta,\ t)=0.
\end{aligned}$$

Заметим, что решение задачи оптимальной экстраполяции возможно только для линейных уравнений (9). Для нелинейных уравнений теория оптимальной экстраполяции еще не разработана.

7.3.9. Случай уравнений, линейных относительно вектора состояния. Рассмотрим теперь более общий случай уравнений (8), линейных только относительно вектора состояния Z системы

$$\begin{aligned}
dY&=[b_1(Y,\ t)Z+b_0(Y,\ t)]\,dt+\psi_1(Y,\ t)\,dW,\\
dZ&=[a_1(Y,\ t)Z+a_0(Y,\ t)]\,dt+\psi(Y,\ t)\,dW.
\end{aligned}\tag{41}$$

В этом случае при каждой реализации $y(t)$ наблюдаемого процесса $Y(t)$ второе уравнение (41) линейно относительно Z. Поэтому из доказанного в п. 5.4.4 можно сделать вывод, что при нормальном начальном распределении Z условное распределение вектора Z_t нормально для каждой реализации $y_{t_0}^t = \{y_\tau\colon \tau \in [t_0, t]\}$ наблюдений Y при всех $t > t_0$. Это правдоподобное рассуждение, конечно, нельзя считать строгим доказательством нормальности условного распределения Z_t относительно Y. Тем не менее, как будет показано дальше, наш вывод правилен.

► Приняв условное распределение Z_t относительно $Y_{t_0}^t$ нормальным, напишем для этого случая формулы (21) и (25) для стохастических дифференциалов оптимальной оценки $\hat{Z}$ и апостериорной ковариационной матрицы R вектора состояния системы. Подставив в (21) и (25) выражения

$$\begin{aligned} \varphi(y, z, t) &= a_1(y, t) z + a_0(y, t), \\ \varphi_1(y, z, t) &= b_1(y, t) z + b_0(y, t), \end{aligned} \tag{42}$$

учитывая независимость ψ от Z и принимая во внимание, что для нормального распределения все центральные моменты третьего порядка равны нулю, получим совершенно так же, как в п. 7.3.1,

$$\begin{aligned} d\hat{Z} = {} & [a_1(Y, t)\hat{Z} + a_0(Y, t)]\,dt + \\ & + [Rb_1(Y, t)^{\mathrm{T}} + (\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})(Y, t)]\,(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y, t)\,\{dY - [b_1(Y, t)\hat{Z} + \\ & + b_0(Y, t)]\,dt\}, \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} dR = {} & \{a_1(Y, t)R + Ra_1(Y, t)^{\mathrm{T}} + (\psi\nu\psi^{\mathrm{T}})(Y, t) - \\ & - [Rb_1(Y, t)^{\mathrm{T}} + (\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})(Y, t)]\,(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y, t)\,[b_1(Y, t)R + \\ & + (\psi_1\nu\psi^{\mathrm{T}})(Y, t)]\}\,dt. \blacktriangleleft \end{aligned} \tag{44}$$

Как и в случае линейной фильтрации, эти уравнения представляют собой замкнутую систему уравнений, определяющую $\hat{Z}$ и R. Поэтому оптимальную оценку $\hat{Z}$ вектора состояния системы Z и его апостериорную ковариационную матрицу R, характеризующую точность оптимальной оценки $\hat{Z}$, можно вычислять по мере получения результатов наблюдений совместным интегрированием уравнений (43) и (44).

Заметим, что в противоположность линейной фильтрации в данном случае нельзя вычислить R заранее, до получения результатов наблюдений, так как от результатов наблюдений зависят коэффициенты уравнения (44). Поэтому оптимальный фильтр в данном случае должен выполнять интегрирование обоих уравнений (43) и (44). Это приводит к существенному повышению порядка оптимального фильтра. Если линейный фильтр (32) всегда описывается уравнениями того же порядка p, что и второе уравнение (28), то в рассматриваемом более общем случае оптимальный фильтр описывается уравнениями порядка $p + p(p+1)/2 = p(p+3)/2$.

► Докажем теперь, что апостериорное распределение вектора состояния системы в данном случае нормально. Для этого достаточно показать, что уравнение (16) для апостериорной характеристической функции $g_t(\lambda)$ вектора Z_t имеет решение

$$g_t(\lambda) = \exp\left\{i\lambda^{\tau}\hat{Z} - \frac{1}{2}\lambda^{\tau}R\lambda\right\}, \tag{45}$$

где $\hat{Z}$ и R определяются уравнениями (43) и (44).

Подставив в уравнение (16) выражения (42) функций φ и φ_1, приведем его к виду

$$dg_t(\lambda) = M\left[\left\{i\lambda^{\tau}(a_1Z + a_0) - \frac{1}{2}\lambda^{\tau}\psi\nu\psi^{\tau}\lambda\right\}e^{i\lambda^{\tau}z} \,|\, Y_{t_0}^t\right]dt +$$
$$+ M\left[\{(Z^{\tau} - \hat{Z}^{\tau})b_1^{\tau} + i\lambda^{\tau}\psi\nu\psi_1^{\tau}\}e^{i\lambda^{\tau}z} \,|\, Y_{t_0}^t\right](\psi_1\nu\psi_1^{\tau})^{-1}[dY - (b_1\hat{Z} + b_0)\,dt],$$

где аргументы функций a_1, a_0, b_1, b_0, ψ и ψ_1 для краткости опущены. Имея в виду, что

$$M\left[iZe^{i\lambda^{\tau}z} \,|\, Y_{t_0}^t\right] = \frac{\partial g_t(\lambda)}{\partial\lambda},$$

получим

$$dg_t(\lambda) = \left[\lambda^{\tau}a_1\frac{\partial g_t(\lambda)}{\partial\lambda} + \left(i\lambda^{\tau}a_0 - \frac{1}{2}\lambda^{\tau}\psi\nu\psi^{\tau}\lambda\right)g_t(\lambda)\right]dt -$$
$$- \left[i\frac{\partial^{\tau}g_t(\lambda)}{\partial\lambda}b_1^{\tau} + (\hat{Z}^{\tau}b_1^{\tau} - i\lambda^{\tau}\psi\nu\psi_1^{\tau})g_t(\lambda)\right](\psi_1\nu\psi_1^{\tau})^{-1}[dY - (b_1\hat{Z} + b_0)\,dt]. \tag{46}$$

Вычислим отдельно левую и правую части этого уравнения для функции $g_t(\lambda)$, определяемой формулой (45). Пользуясь формулой (3.61) дифференцирования сложной функции в случае винеровского процесса W, принимая во внимание, что стохастический дифференциал процесса $\hat{Z}(t)$ определяется формулой (43), и имея в виду, что роль матрицы Y в (3.61) на основании (43) и первого уравнения (41) в данном случае играет $(Rb^{\tau} + \psi\nu\psi_1^{\tau})\times$ $\times(\psi_1\nu\psi_1^{\tau})^{-1}\psi_1$, находим стохастический дифференциал процесса $g_t(\lambda)$, определяемого формулой (45):

$$dg_t(\lambda) = g_t(\lambda)\left\{i\lambda^{\tau}d\hat{Z} -\right.$$
$$\left.- \frac{1}{2}\operatorname{tr}[\lambda\lambda^{\tau}(Rb_1^{\tau} + \psi\nu\psi_1^{\tau})(\psi_1\nu\psi_1^{\tau})^{-1}\psi_1\nu\psi_1^{\tau}(\psi_1\nu\psi_1^{\tau})^{-1}(b_1R + \psi_1\nu\psi^{\tau})]dt\right\} -$$
$$- \frac{1}{2}\lambda^{\tau}dR\lambda g_t(\lambda) = g_t(\lambda)\{i\lambda^{\tau}(a_1\hat{Z} + a_0) -$$
$$- \frac{1}{2}\lambda^{\tau}(Rb_1^{\tau} + \psi\nu\psi_1^{\tau})(\psi_1\nu\psi_1^{\tau})^{-1}(b_1R + \psi_1\nu\psi^{\tau})\lambda -$$
$$- \frac{1}{2}\lambda^{\tau}[a_1R + Ra_1^{\tau} + \psi\nu\psi^{\tau} - (Rb_1^{\tau} + \psi\nu\psi_1^{\tau})(\psi_1\nu\psi_1^{\tau})^{-1}(b_1R + \psi_1\nu\psi^{\tau})]\lambda\}dt +$$
$$+ g_t(\lambda)\,i\lambda^{\tau}(Rb_1^{\tau} + \psi\nu\psi_1^{\tau})(\psi_1\nu\psi_1^{\tau})^{-1}[dY - (b_1\hat{Z} + b_0)\,dt] =$$

$$= g_t(\lambda)\left[i\lambda^{\mathrm{T}}(a_1\hat{Z} + a_0) - \frac{1}{2}\lambda^{\mathrm{T}}(a_1R + Ra_1^{\mathrm{T}} + \psi\nu\psi^{\mathrm{T}})\lambda\right]dt +$$
$$+ g_t(\lambda)\, i\lambda^{\mathrm{T}}(Rb_1^{\mathrm{T}} + \psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}\left[dY - (b_1\hat{Z} + b_0)\,dt\right],$$

или, так как $\lambda^{\mathrm{T}}Ra_1^{\mathrm{T}}\lambda = \lambda^{\mathrm{T}}a_1R\lambda$,

$$dg_t(\lambda) = g_t(\lambda)\left[i\lambda^{\mathrm{T}}(a_1\hat{Z} + a_0) - \lambda^{\mathrm{T}}a_1R\lambda - \frac{1}{2}\lambda^{\mathrm{T}}\psi\nu\psi^{\mathrm{T}}\lambda\right]dt +$$
$$+ g_t(\lambda)\, i\lambda^{\mathrm{T}}(Rb_1^{\mathrm{T}} + \psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}\left[dY - (b_1\hat{Z} + b_0)\,dt\right]. \quad (47)$$

Для вычисления правой части уравнения (46) заметим, что на основании (45)

$$\frac{\partial g_t(\lambda)}{\partial\lambda} = g_t(\lambda)(i\hat{Z} - R\lambda).$$

Пользуясь этой формулой, находим

$$\left[\lambda^{\mathrm{T}}a_1\frac{\partial g_t(\lambda)}{\partial\lambda} + \left(i\lambda^{\mathrm{T}}a_0 - \frac{1}{2}\lambda^{\mathrm{T}}\psi\nu\psi^{\mathrm{T}}\lambda\right)g_t(\lambda)\right]dt -$$
$$-\left[i\,\frac{\partial^{\mathrm{T}}g_t(\lambda)}{\partial\lambda}b_1^{\mathrm{T}} + (\hat{Z}^{\mathrm{T}}b_1^{\mathrm{T}} - i\lambda^{\mathrm{T}}\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})\,g_t(\lambda)\right](\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}\left[dY - (b_1\hat{Z} + b_0)\,dt\right] =$$
$$= g_t(\lambda)\left[i\lambda^{\mathrm{T}}(a_1\hat{Z} + a_0) - \lambda^{\mathrm{T}}a_1R\lambda - \frac{1}{2}\lambda^{\mathrm{T}}\psi\nu\psi^{\mathrm{T}}\lambda\right]dt +$$
$$+ g_t(\lambda)(i\lambda^{\mathrm{T}}Rb_1^{\mathrm{T}} + i\lambda^{\mathrm{T}}\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}\left[dY - (b_1\hat{Z} + b_0)\,dt\right].$$

Это выражение тождественно (47). Следовательно, нормальная апостериорная характеристическая функция, определяемая формулой (45), с параметрами $\hat{Z}$ и R, определяемыми уравнениями (43) и (44), удовлетворяет уравнению (46). Это и доказывает нормальность апостериорного распределения вектора Z_t и справедливость уравнений (43) и (44), определяющих параметры $\hat{Z}_t$ и R_t этого распределения при начальных значениях $\hat{Z}$ и R в момент t_0, равных соответственно условным математическому ожиданию и ковариационной матрице вектора $Z_0 = Z_{t_0}$ относительно $Y_0 = Y_{t_0}$. ◀

Изложенное обобщение теории оптимальной линейной фильтрации на случай уравнений (8), линейных только относительно вектора состояния Z, дано в [49, 50].

Пример 13. Процесс $Y(t)$ определяется стохастическим дифференциальным уравнением Ито

$$dY = [b_1(Y, t)\,\theta + b_0(Y, t)]\,dt + \psi_1(Y, t)\,dW,$$

где θ — неизвестный векторный параметр. Найти оптимальную оценку θ при каждом $t > t_0$ по результатам наблюдения процесса Y в интервале времени $[t_0, t]$.

Заменив вектор θ случайным процессом $\Theta(t)$, определяемым дифференциальным уравнением $d\Theta(t) = 0$, и приняв Θ за вектор состояния Z соответствующей системы (п. 7.1.2), получим дифференциальные уравнения вида (41) при $a_1(Y, t) = 0$, $a_0(Y, t) = 0$, $\psi(Y, t) = 0$. Уравнения (43) и (44) в этом случае принимают вид

$$d\hat{\Theta} = Rb_1(Y, t)^{\mathrm{T}} (\psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1} (Y, t) \{dY - [b_1(Y, t)\hat{\Theta} + b_0(Y, t)]\, dt\},$$
$$dR = -Rb_1(Y, t)^{\mathrm{T}} (\psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1} (Y, t)\, b_1(Y, t)\, R\, dt.$$

Поскольку параметр θ неизвестен и может в действительности не быть случайным, начальные условия для $\hat{\Theta}$ и R приходится брать произвольно. Полученные уравнения дадут в этом случае оценку $\hat{\Theta}$, оптимальную в предположении, что параметр θ случаен и имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $\hat{\Theta}_0$ и ковариационной матрицей R_0.

7.3.10. Оптимальное распознавание в линейных системах. Точное решение задачи оптимального распознавания легко получается для линейных уравнений (8), а также в более общем случае, когда уравнения (8) линейны только относительно Z.

► В случае линейных уравнений (8) сигналы Y и Z определяются для различных классов сигналов, т.е. для значений $\theta_1, \ldots, \theta_N$ параметра θ, уравнениями

$$dY = [b(\theta_k, t)Y + b_1(\theta_k, t)Z + b_0(\theta_k, t)]\, dt + \psi_1(t)\, dW,$$
$$dZ = [a(\theta_k, t)Y + a_1(\theta_k, t)Z + a_0(\theta_k, t)]\, dt + \psi(\theta_k, t)\, dW \quad (k = 1, \ldots, N). \tag{48}$$

В этом случае

$$\hat{\varphi}_{1k} = b(\theta_k, t)Y + b_1(\theta_k, t)\hat{Z}_k + b_0(\theta_k, t) \qquad (k = 1, \ldots, N),$$

где $\hat{Z}_1, \ldots, \hat{Z}_N$ — условные оптимальные оценки вектора состояния Z при $\theta = \theta_1, \ldots, \theta_k$, определяемые уравнениями типа (32):

$$d\hat{Z}_k = [a(\theta_k, t)Y + a_1(\theta_k, t)\hat{Z}_k + a_0(\theta_k, t)]\, dt + \beta_k \{dY - [b(\theta_k, t)Y + b_1(\theta_k, t)\hat{Z}_k + b_0(\theta_k, t)]\, dt\} \quad (k = 1, \ldots, N), \tag{49}$$

где в соответствии с (31)

$$\beta_k = [R_k b_1(\theta_k, t)^{\mathrm{T}} + (\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})(\theta_k, t)] (\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(t) \qquad (k = 1, \ldots, N), \tag{50}$$

а апостериорная ковариационная матрица R_k вектора Z при $\theta = \theta_k$ определяется уравнением (30):

$$\dot{R}_k = a(\theta_k, t)R_k + R_k a(\theta_k, t)^{\mathrm{T}} + (\psi\nu\psi^{\mathrm{T}})(\theta_k, t) - [R_k b_1(\theta_k, t)^{\mathrm{T}} + (\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})(\theta_k, t)] (\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(t) [b_1(\theta_k, t)R_k + (\psi_1\nu\psi^{\mathrm{T}})(\theta_k, t)] \quad (k = 1, \ldots, N). \tag{51}$$

Уравнения (27) для апостериорных вероятностей классов при этом принимают вид

$$dq_k(t) = \{Y^{\mathrm{T}} b(\theta_k, t)^{\mathrm{T}} + \hat{Z}_k^{\mathrm{T}} b_1(\theta_k, t)^{\mathrm{T}} + b_0(\theta_k, t)^{\mathrm{T}} - \sum_{h=1}^{N} q_h(t) [Y^{\mathrm{T}} b(\theta_h, t)^{\mathrm{T}} + \hat{Z}_h^{\mathrm{T}} b_1(\theta_h, t)^{\mathrm{T}} + b_0(\theta_h, t)^{\mathrm{T}}]\} \times q_k(t)(\psi_1\nu\psi_1)^{-1}(t) \left\{dY - \sum_{h=1}^{N} q_h(t)[b(\theta_h, t)Y + b_1(\theta_h, t)\hat{Z}_h + b_0(\theta_h, t)]\, dt\right\} \quad (k = 1, \ldots, N). \tag{52}$$

Уравнения (49) и (52) представляют собой замкнутую систему уравнений, определяющую $\hat{Z}_1, \ldots, \hat{Z}_N$, $q_1(t), \ldots, q_N(t)$ при соответствующих начальных условиях. Оптимальная оценка вектора состояния Z определяется после этого формулой

$$\hat{Z} = \sum_{k=1}^{N} q_k(t)\hat{Z}_k. \blacktriangleleft \tag{53}$$

Таким образом, уравнения (49) и (52) полностью и точно решают задачу оптимального распознавания для линейных систем.

Пример 14. Найти оптимальную систему обнаружения несущего информацию сигнала Z, определяемого линейным уравнением $\dot{Z} = a_1 Z + a_0 + \psi V$ в случае приема сигнала $X = b_1 Z + b_0 + \psi_1 V$, где V — белый шум интенсивности ν. В этом случае параметр θ имеет два возможных значения $\theta_1 = 1$ (сигнал Z присутствует в принимаемом сигнале) и $\theta_2 = 0$ (принимается один шум). Уравнение, определяющее сигнал Z, запишется в виде

$$\dot{Z} = \theta(a_1 Z + a_0) + \theta\psi_1 V.$$

Уравнения (49), определяющие условные оптимальные оценки сигнала Z при гипотезах $\theta = 1$ и $\theta = 0$, имеют вид

$$\dot{\hat{Z}}_1 = a_1\hat{Z}_1 + a_0 + \beta_1(X - b_1\hat{Z}_1 - b_0),$$
$$\dot{\hat{Z}}_2 = \beta_2(X - b_1\hat{Z}_2 - b_0).$$

Апостериорная вероятность q_1 присутствия сигнала Z в силу (52) определяется уравнением (напомним, что $q_1 + q_2 = 1$ при всех t)

$$\dot{q}_1 = (\hat{Z}_1^{\mathrm{T}} - \hat{Z}_2^{\mathrm{T}})\, b_1^{\mathrm{T}} q_1 (1 - q_1)(\psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}\left[X - q_1 b_1(\hat{Z}_1 - \hat{Z}_2) - b_1\hat{Z}_2 - b_0\right].$$

Оптимальная система обнаружения в данном случае представляет собой последовательное соединение двух параллельно соединенных фильтров Калмана — Бьюси, вырабатывающих соответствующие условные оценки $\hat{Z}_1$ и $\hat{Z}_2$ сигнала Z, устройства, интегрирующего дифференциальное уравнение, определяющее апостериорную вероятность q_1 сигнала Z, и порогового устройства, выдающего сигнал тревоги (сигнал о присутствии Z) в случае, когда q_1 становится больше $1/2$.

Если помеха в наблюдениях является результатом преобразования белого шума формирующим фильтром, то принимаемый сигнал X подвергается предварительному преобразованию в соответствии с теорией пп. 7.3.4—7.3.7.

7.3.11. Оптимальное распознавание в случае уравнений, линейных относительно вектора состояния. Задача оптимального распознавания легко решается также в более общем случае системы, линейной только относительно вектора состояния Z.

$\blacktriangleright$ В этом случае Y и Z для различных классов сигналов определяются уравнениями вида (41):

$$dY = [b_1(Y, \theta_k, t)Z + b_0(Y, \theta_k, t)]\,dt + \psi_1(Y, t)\,dW,$$
$$dZ = [a_1(Y, \theta_k, t)Z + a_0(Y, \theta_k, t)]\,dt + \psi(Y, \theta_k, t)\,dW$$

и на основании (42)

$$\hat{\varphi}_{1k} = b_1(Y, \theta_k, t)\hat{Z}_k + b_0(Y, \theta_k, t) \qquad (k = 1, \ldots, N),$$

где оптимальные оценки $\hat{Z}_1, \ldots, \hat{Z}_N$ вектора Z при $\theta=\theta_1, \ldots, \theta_N$ вместе с соответствующими апостериорными ковариационными матрицами $R_1, \ldots, R_N$ определяются уравнениями (43) и (44):

$$d\hat{Z}_k=[a_1(Y, \theta_k, t)\hat{Z}_k+a_0(Y, \theta_k, t)]\,dt+[Rb_1(Y, \theta_k, t)^{\mathrm{T}}+$$
$$+(\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})(Y, \theta_k, t)](\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y, t)\{dY-[b_1(Y, \theta_k, t)^{\mathrm{T}}\hat{Z}_k+b_0(Y, \theta_k, t)]\,dt\}, \tag{54}$$

$$\dot{R}_k=a_1(Y, \theta_k, t)R_k+R_k a_1(Y, \theta_k, t)^{\mathrm{T}}+(\psi\nu\psi^{\mathrm{T}})(Y, \theta_k, t)-$$
$$-[R_k b_1(Y, \theta_k, t)^{\mathrm{T}}+(\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})(Y, \theta_k, t)][(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y, t)\times$$
$$\times[b_1(Y, \theta_k, t)R_k+(\psi_1\nu\psi^{\mathrm{T}})(Y, \theta_k, t)] \quad (k=1, \ldots, N). \tag{55}$$

Уравнения (27) для апостериорных вероятностей классов в этом случае принимают вид

$$dq_k=\{\hat{Z}_k^{\mathrm{T}}b_1(Y, \theta_k, t)^{\mathrm{T}}+b_0(Y, \theta_k, t)^{\mathrm{T}}-$$
$$-\sum_{h=1}^{N} q_h(t)[\hat{Z}_h^{\mathrm{T}}b_1(Y, \theta_h, t)^{\mathrm{T}}+b_0(Y, \theta_h, t)^{\mathrm{T}}]\}q_k(t)(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y, t)\times$$
$$\times\left\{dY-\sum_{h=1}^{N} q_h(t)[b_1(Y, \theta_h, t)\hat{Z}_h+b_0(Y, \theta_h, t)]\,dt\right\}$$
$$(k=1, \ldots, N). \blacktriangleleft \tag{56}$$

Уравнения (54)—(56) представляют собой замкнутую систему уравнений, определяющую $\hat{Z}_1, \ldots, \hat{Z}_N, q_1(t), \ldots, q_N(t), R_1, \ldots, R_N$. Следовательно, они полностью и точно решают задачу оптимального распознавания в рассматриваемом случае. После решения уравнений (54)—(56) оптимальная оценка вектора состояния системы или расширенного вектора состояния Z, включающего все неизвестные параметры, линейно входящие в уравнения (8) наряду с вектором Z, находится по формуле (53).

ЗАДАЧИ

7.1. Пользуясь обозначением (3.63), написать формулу для стохастического дифференциала оптимальной оценки величины $f(Z_t, t)$ в случае векторной или матричной функции $f(Z, t)$.

7.2. Пользуясь формулой (3.85), вывести из (18) стохастическое уравнение в θ-дифференциалах для апостериорной плотности $p_t(z)$ для скалярных процессов $Y(t)$ и $Z(t)$. Случай $\theta=1/2$ рассмотрен в [73]. Указание. Принять во внимание, что коэффициент при dY в (18) зависит от пяти случайных процессов $\varphi_1(Y_t, z, t)$, $\hat{\varphi}_1(t)$, $\partial(\psi\nu\psi_1)^{\mathrm{T}}(Y, z, t)/\partial z$, $p_t(z)$, $\partial p_t(z)/\partial z$, для которых стохастические дифференциалы Ито находятся по формулам (3.61), (15), (18).

7.3. Показать, что оптимальный линейный фильтр для сигнала $Z_1=Ae^{ct}$ (A — случайный коэффициент), наблюдаемого с аддитивным нормально распределенным белым шумом V интенсивности ν, $\dot{Y}=X=Z_1+V$, определяется уравнением

$$\dot{\hat{Z}}_1=c\hat{Z}_1+(X-\hat{Z}_1)R/\nu,$$

где R находится из уравнения $\dot{R}=2cR$. Написать уравнение оптимального линейного фильтра для векторного случайного коэффициента A.

7.4. Показать, что оптимальный линейный фильтр для сигнала $Z=Z_0+At$ (Z_0, A — случайные величины), наблюдаемого с аддитивным нормально распределенным белым шумом V интенсивности ν, $\dot{Y}=X=Z+V$, определяется уравнением

$$\dot{\hat{Z}}=\hat{Z}+(X-\hat{Z})\,R/\nu,$$

где R находится из уравнения $\dot{R}=-R^2/\nu$. Написать уравнения оптимального линейного фильтра для векторных Z_0 и A.

7.5. Написать уравнения оптимального линейного фильтра для сигнала $Z=\sum\limits_{p=1}^{N} A_p t^p$, наблюдаемого с аддитивным нормально распределенным белым шумом. Рассмотреть случай векторных случайных коэффициентов A_p.

7.6. Написать уравнения оптимального линейного фильтра для сигнала Z в линейных системах задач 1.1—1.11, наблюдаемого с аддитивным нормально распределенным белым шумом. Входной сигнал x считать постоянным.

7.7. Пользуясь уравнениями примеров 2 и 3, написать уравнения линейного оптимального фильтра для выделения полезного сигнала $Z_1=Z_0+At$ (Z_0, A — случайные величины) и стационарной случайной функции с ковариационной функцией

$$k(\tau)=De^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\omega_0\tau+\frac{\alpha}{\omega_0}\sin\omega_0|\tau|\right)$$

из аддитивной смеси его с помехой с ковариационной функцией $k_1(\tau)$ в случаях: а) $k_1(\tau)=\nu\delta(\tau)$; б) $k_1(\tau)=D_1e^{-\alpha|\tau|}$; в) $k_1(\tau)=D_1e^{-\alpha_1|\tau|}\cos\omega_1\tau$.

7.8. Построить оптимальный фильтр для выделения полезного сигнала, представляющего собой сумму синусоиды данной частоты ω_0 со случайными амплитудой и фазой и стационарной случайной функции с ковариационной функцией $k(\tau)$, из аддитивной его смеси с помехой с ковариационной функцией $k_1(\tau)$ в случаях, когда функции $k(\tau)$ и $k_1(\tau)$ представляют собой линейную комбинацию типовых ковариационных функций п. 4.1.5 и задачи 5.1.

7.9. Найти оптимальный экстраполятор в условиях задач 7.4—7.8.

7.10. Наблюдается брауновское движение частицы (трехмерное) прибором, измеряющим координаты частицы с аддитивной помехой в виде белого шума. Найти оптимальный линейный фильтр для случаев: а) безынерционного прибора; б) прибора, представляющего собой апериодическое звено с постоянной времени T и коэффициентом усиления k. *Указание*. Движение частицы описывается уравнениями примера 5.16 при $n=3$ с постоянной обобщенной массой $A(q)=A$ и $\Pi(q)=q^{T}Cq/2$.

7.11. Во время прямолинейного горизонтального полета самолета с автопилотом в турбулентной атмосфере измерительный прибор записывает углы, определяющие положение самолета в пространстве, как функции времени. Измерительный прибор для каждого измеряемого угла представляет собой апериодическое звено с постоянной времени T и коэффициентом усиления k, входным сигналом которого служит измеряемый угол с аддитивной помехой в виде: а) белого шума; б) случайного процесса с экспоненциальной ковариационной функцией. Найти оптимальный линейный фильтр для обработки показаний измерительного прибора (т. е. для оценивания углов). *Указание*. Воспользоваться уравнениями примера 1.10 и задачей 1.16, предполагая, что отклонения рулей достаточно малы и что рулевые машины мгновенно отрабатывают требуемые отклонения рулей. Спектральные плотности случайных функций W_y и W_z, рассматриваемые как функции времени, определяются формулой задачи 6.21.

ГЛАВА 8

СУБОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

§ 8.1. Метод нормальной аппроксимации

8.1.1. Общая характеристика приближенных методов оптимальной фильтрации. Эффективное точное решение задач оптимальной фильтрации возможно только в рассмотренных в § 7.3 случаях, когда уравнения (7.8),

$$\begin{aligned} dY &= \varphi_1(Y,\ Z,\ t)\,dt + \psi_1(Y,\ t)\,dW, \\ dZ &= \varphi(Y,\ Z,\ t)\,dt + \psi(Y, Z, t)\,dW, \end{aligned} \tag{1}$$

линейны или линейны только относительно вектора состояния Z при независимой от состояния функции ψ. Конечно, уравнение (7.16) и формула (7.17) или уравнение (7.18) и формула (7.19) дают точное решение задачи оптимальной фильтрации в общем случае для любых уравнений (1), удовлетворяющих условиям, при которых была выведена формула (7.15). Однако это решение неэффективно, так как не может быть реализовано практически. Для нахождения оптимальной оценки вектора состояния необходимо решить уравнение (7.16) для апостериорной характеристической функции или уравнение (7.18) для апостериорной плотности вектора состояния Z после получения результатов наблюдений и лишь после этого можно вычислить оптимальную оценку вектора Z по формуле (7.17) или (7.19). Но методов точного решения уравнений (7.16) и (7.18) в общем случае пока еще не существует. Численное решение этих уравнений в задачах практики тоже невозможно, так как для этого требуется много времени, а решать их необходимо каждый раз после получения результатов наблюдений. Кроме того, практическое применение теории оптимальной фильтрации § 7.2 имеет смысл только в тех случаях, когда оценки можно вычислять в натуральном масштабе времени по мере получения результатов наблюдений. Действительно, теория § 7.2 дает оптимальные оценки в каждый момент t по результатам наблюдений, полученным к этому моменту, без использования последующих результатов наблюдений. Если эти оценки не могут быть вычислены в тот же момент t или хотя бы с фиксированным приемлемым запаздыванием, и их вычисление приходится откладывать на будущее, то нет никакого смысла отказываться от использования наблюдений, получаемых после момента t, для оценивания состояния системы в момент t. Поэтому для статистической обработки результатов наблюдений после окончания наблюдений целесообразно применять другие методы (см., например, [57], гл. 15, или [56], гл. 18).

Необходимость обрабатывать результаты наблюдений в натуральном масштабе времени непосредственно в процессе эксперимента привела к появлению ряда приближенных методов оптимальной фильтрации, называемых обычно методами *субоптимальной фильтрации*. Одни приближенные методы основаны на приближенном решении уравнения (7.16) или (7.18), а другие — на превращении формул (7.21) и (7.25) для стохастических дифференциалов оптимальной оценки $\hat{Z}$ и апостериорной ковариационной матрицы ошибки R в стохастические дифференциальные уравнения для $\hat{Z}$ и R путем разложения функций φ, φ_1 и ψ в степенные ряды и отбрасывания остаточных членов.

8.1.2. Параметризация апостериорных распределений. Для приближенного решения уравнения (7.16) для апостериорной характеристической функции $g_t(\lambda)$ вектора Z_t можно применить те же методы, основанные на параметризации распределений, которые были применены в гл. 6 для решения уравнений (5.38) и (5.41) для конечномерных распределений случайного процесса, определяемого стохастическим дифференциальным уравнением. Эти методы дают стохастические дифференциальные уравнения для параметров апостериорного распределения. Простейшим таким методом является метод нормальной аппроксимации апостериорного распределения. Другие методы основаны на использовании в качестве параметров апостериорных распределений моментов, семиинвариантов или коэффициентов ортогонального разложения апостериорной плотности вектора состояния системы.

Подчеркнем еще раз, что все получаемые дальше стохастические дифференциальные уравнения, так же как и уравнения § 7.2, представляют собой уравнения Ито. Характерной чертой уравнений Ито в теории оптимальной фильтрации, отличающей их от других форм стохастических дифференциальных уравнений, является то, что дифференциал наблюдаемого процесса Y всегда входит в них в комбинации $dY - \hat{\varphi}_1 dt$. Иными словами, в уравнения Ито всегда входит дифференциал соответствующего обновляющего процесса (п. 7.3.3).

8.1.3. Нормальная аппроксимация апостериорного распределения. ► Так как нормальное распределение, аппроксимирующее апостериорное распределение вектора Z, полностью определяется апостериорными математическим ожиданием $\hat{Z}$ и ковариационной матрицей R вектора Z, то при аппроксимации апостериорного распределения вектора Z нормальным все математические ожидания в правых частях формул (7.21) и (7.25) для $d\hat{Z}$ и dR будут определенными функциями $\hat{Z}$, R и t, т. е. (7.21) и (7.25) будут представлять собой стохастические дифференциальные уравнения, определяющие $\hat{Z}$ и R:

$$d\hat{Z}=f(Y,\ \hat{Z},\ R,\ t)\,dt+h(Y,\ \hat{Z},\ R,\ t)\left[dY-f^{(1)}(Y,\hat{Z},\ R,\ t)\,dt\right], \quad (2)$$

$$dR=\{f^{(2)}(Y,\ \hat{Z},\ R,\ t)-h(Y,\hat{Z},R,t)\,(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})(Y,\ t)\,h(Y,\hat{Z},\ R,\ t)^{\mathrm{T}}\}\,dt+$$
$$+\sum_{r=1}^{m}\rho_r(Y,\ \hat{Z},\ R,\ t)\left[dY_r-f_r^{(1)}(Y,\ \hat{Z},\ R,\ t)\,dt\right], \quad (3)$$

где

$$f(Y,\ \hat{Z},\ R,\ t)=$$
$$=[(2\pi)^p\,|R|]^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(Y,\ z,\ t)\exp\{-(z^{\mathrm{T}}-\hat{Z}^{\mathrm{T}})\,R^{-1}(z-\hat{Z})/2\}\,dz, \quad (4)$$

$$f^{(1)}(Y,\ \hat{Z},\ R,\ t)=$$
$$=[(2\pi)^p\,|R|]^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(Y,\ z,\ t)\exp\{-(z^{\mathrm{T}}-\hat{Z}^{\mathrm{T}})\,R^{-1}(z-\hat{Z})/2\}\,dz, \quad (5)$$

$$h(Y,\hat{Z},\ R,\ t)=\Bigg\{[(2\pi)^p\,|R|]^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}[z\varphi_1(Y,\ z,\ t)^{\mathrm{T}}+(\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})(Y,\ z,\ t)]\times$$
$$\times\exp\{-(z^{\mathrm{T}}-\hat{Z}^{\mathrm{T}})\,R^{-1}(z-\hat{Z})/2\}\,dz-$$
$$-\hat{Z}f^{(1)}(Y,\hat{Z},\ R,\ t)^{\mathrm{T}}\Bigg\}(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y,\ t), \quad (6)$$

$$f^{(2)}(Y,\ \hat{Z},\ R,\ t)=[(2\pi)^p\,|R|]^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\{(z-\hat{Z})\,\varphi(Y,\ z,\ t)^{\mathrm{T}}+$$
$$+\varphi(Y,\ z,\ t)\,(z^{\mathrm{T}}-\hat{Z}^{\mathrm{T}})+(\psi\nu\psi^{\mathrm{T}})(Y,\ z,\ t)\}\times$$
$$\times\exp\{-(z^{\mathrm{T}}-\hat{Z}^{\mathrm{T}})\,R^{-1}(z-\hat{Z})/2\}\,dz, \quad (7)$$

$$\rho_r(Y,\ \hat{Z},\ R,\ t)=[(2\pi)^p\,|R|]^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\{(z-\hat{Z})\,(z^{\mathrm{T}}-\hat{Z}^{\mathrm{T}})\,a_r(Y,z,\ t)+$$
$$+(z-\hat{Z})\,b_r(Y,\ z,\ t)^{\mathrm{T}}+b_r(Y,\ z,\ t)\,(z^{\mathrm{T}}-\hat{Z}^{\mathrm{T}})\}\times$$
$$\times\exp\{-(z^{\mathrm{T}}-\hat{Z}^{\mathrm{T}})\,R^{-1}(z-\hat{Z})/2\}\,dz\quad(r=1,\ \ldots,\ m).\ \blacktriangleleft \quad (8)$$

За начальные значения $\hat{Z}$ и R при интегрировании уравнений (2) и (3) так же, как и в п. 7.3.1, естественно следует принять условные математическое ожидание и ковариационную матрицу величины Z_0 относительно Y_0:

$$\hat{Z}_0=M\,[Z_0\,|\,Y_0],\quad R_0=M\,[(Z_0-\hat{Z}_0)\,(Z_0^{\mathrm{T}}-\hat{Z}_0^{\mathrm{T}})\,|\,Y_0].$$

Если нет информации об условном распределении Z_0 относительно Y_0, то начальные условия для уравнений (2) и (3) можно взять в виде $\hat{Z}_0=MZ_0$, $R_0=M\,(Z_0-MZ_0)\,(Z_0^{\mathrm{T}}-MZ_0^{\mathrm{T}})$. Если же и об этих величинах нет никакой информации, то начальные значения $\hat{Z}$ и R приходится задавать произвольно.

Из формулы (8) видно, что если функция φ_1 линейна относительно Z, а функция ψ не зависит от Z, то при нормальной аппроксимации апостериорного распределения все матрицы ρ_r равны нулю, вследствие чего уравнение (3) не содержит dY.

Пример 1. Найти алгоритм оценивания состояния системы примера 6.15,

$$\dot{Z} = -Z^3 + ZV_1,$$

по результатам наблюдения величины Z с аддитивной помехой V_2, представляющей собой нормально распределенный белый шум, независимый от V_1.

Наблюдаемый процесс в этом случае определяется уравнением $\dot{Y} = X = Z + V_2$. Процесс $W(t)$ в уравнениях (1) состоит из двух независимых скалярных винеровских процессов $W_1(t)$, $W_2(t)$, слабыми с. к. производными которых служат белые шумы V_1 и V_2 соответственно. Соответствующую структуру имеют в этом случае матрицы

$$\psi(y, z, t) = [z \quad 0], \quad \psi_1(y, t) = [0 \quad 1]$$

и

$$\nu = \begin{bmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{bmatrix},$$

где ν_1 и ν_2 — интенсивности белых шумов V_1 и V_2 соответственно. Функции φ и φ_1 определяются формулами $\varphi(y, z, t) = -z^3$, $\varphi_1(y, z, t) = z$. Уравнения (2) и (3) имеют вид

$$\dot{\hat{Z}} = -\hat{Z}(\hat{Z}^2 + 3R) + \nu_2^{-1}R(X - \hat{Z}),$$
$$\dot{R} = (\nu_1 - 6R)(\hat{Z}^2 + R) - \nu_2^{-1}R^2.$$

Эти уравнения приближенно определяют оптимальную оценку $\hat{Z}$ состояния системы и апостериорную дисперсию ошибки. За начальные значения $\hat{Z}$ и R следует взять априорные математическое ожидание и дисперсию величины Z_0, поскольку Y_0 не задано и может быть взято совершенно произвольно, независимо от Z_0.

Пример 2. Найти алгоритм приближенной оптимальной фильтрации процесса, определяемого уравнением

$$\dot{Z} = -Z^3 + V_1,$$

если аддитивная помеха в наблюдениях представляет собой нормально распределенную случайную функцию с ковариационной функцией $k(\tau) = De^{-\alpha|\tau|}$.

Уравнение наблюдения в этом случае может быть записано в виде $X = Z + U$, где $X = \dot{Y}$. В соответствии с рекомендациями п. 7.2.12 дифференцируем уравнение наблюдения и подставляем в полученное уравнение значение $\dot{U}$ из уравнения формирующего фильтра помехи (пример 5.2),

$$\dot{U} = -\alpha U + V_2,$$

и значение U из уравнения наблюдения. В результате получаем

$$\dot{X} = -\alpha X + \alpha Z - Z^3 + V_1 + V_2.$$

Заменив уравнение наблюдения этим преобразованным уравнением наблюдения, сводим задачу к задаче оптимальной фильтрации § 7.2 при $\varphi_1(x, z, t) =$

$=-\alpha x+\alpha z-z^3$, $\psi_1=[1 \quad 1]$. Уравнения (2) и (3) имеют в этом случае вид

$$\dot{\hat{Z}}=-\hat{Z}(\hat{Z}^2+3R)+(\nu_1+\nu_2)^{-1}[\nu_1+\alpha R-$$
$$-3R(\hat{Z}^2+R)][\dot{X}+\alpha X-\alpha\hat{Z}+\hat{Z}(\hat{Z}^2+3R)],$$
$$\dot{R}=\nu_1-6R(\hat{Z}^2+R)-(\nu_1+\nu_2)^{-1}[\nu_1+\alpha R-3R^2(\hat{Z}^2+R)]^2-$$
$$-6(\nu_1+\nu_2)^{-1}\hat{Z}R^2[\dot{X}+\alpha X-\alpha\hat{Z}+\hat{Z}(\hat{Z}^2+R)],$$

где в соответствии с результатами примера 5.2 интенсивность ν_2 белого шума V_2 равна $2D\alpha$.

Чтобы найти начальные условия для полученных уравнений, воспользуемся приемом п. 7.3.6 для нахождения условных математического ожидания и дисперсии начального значения Z_0 процесса Z относительно X_0. Так как $X_0=Z_0+U_0$ и помеха U распределена нормально и независима от Z, то безусловные дисперсии и ковариация величин Z_0 и X_0 равны соответственно D_0, D_0+D и D_0. Допустив, что Z_0 — нормально распределенная величина, и пользуясь известными формулами для условных математического ожидания и дисперсии одной компоненты нормально распределенного случайного вектора относительно другой, находим начальные значения величин $\hat{Z}$ и R:

$$\hat{Z}_0=M[Z_0 \mid X_0]=D_0X_0/(D_0+D),$$
$$R_0=M[(Z_0-\hat{Z}_0)^2 \mid X_0]=D_0D/(D_0+D).$$

Пример 3. Найти приближенно оптимальный алгоритм оценивания состояния Z системы, описываемой скалярным уравнением

$$\dot{Z}=-\theta Z+V_1,$$

и неизвестного параметра θ по результатам наблюдения процесса $X=Z+V_2$, где V_2 — белый шум, независимый от V_1.

Следуя приему п. 7.1.2, заменим параметр θ случайным процессом $\Theta(t)$, определяемым уравнением $\dot{\Theta}=0$, и примем за расширенный вектор состояния пару $[Z \ \Theta]^{\mathrm{T}}$. Тогда уравнения (1) будут иметь вид

$$\dot{Y}=X=Z+[0 \quad 1][V_1 \quad V_2]^{\mathrm{T}},$$
$$\begin{bmatrix}\dot{Z}\\ \dot{\Theta}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}Z\Theta\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\end{bmatrix}.$$

Таким образом, в данном случае $p=2$, $\varphi(y, z, \theta, t)=[-z\theta \ 0]^{\mathrm{T}}$, $\varphi_1(y, z, \theta, t)=z$,

$$\psi(y, z, \theta, t)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \psi_1(y, t)=[0 \ 1].$$

Уравнения (2) и (3) имеют вид

$$\dot{\hat{Z}}=-\hat{Z}\hat{\Theta}-R_{12}+\nu_2^{-1}R_{11}(X-\hat{Z}),$$
$$\dot{\hat{\Theta}}=\nu_2^{-1}R_{12}(X-\hat{Z}),$$
$$\dot{R}_{11}=\nu_1-2(\hat{\Theta}R_{11}+\hat{Z}R_{12})-\nu_2^{-1}R_{11}^2,$$
$$\dot{R}_{12}=-\hat{\Theta}R_{12}-\hat{Z}R_{22}-\nu_2^{-1}R_{11}R_{12},$$
$$\dot{R}_{22}=-\nu_2^{-1}R_{12}^2,$$

где R_{11}, R_{22}, R_{12} — апостериорные дисперсии и ковариация ошибок оценок $\hat{Z}$ и $\hat{\Theta}$ соответственно. За начальные значения $\hat{Z}$, $\hat{\Theta}$, R_{11}, R_{22}, R_{12} следует принять соответствующие априорные величины, причем $\hat{\Theta}_0$, R_{220} и R_{120} всегда приходится брать произвольно, так как априорной информации о параметре θ обычно нет, за исключением, может быть, информации о возможном диапазоне его значений.

§ 8.2. Методы, основанные на приближенном решении уравнений оптимальной фильтрации

8.2.1. Метод моментов. Начальные моменты. Если аппроксимировать апостериорную плотность $p_t(\lambda)$ вектора состояния Z_t системы некоторой функцией $p^*(z;\ \theta)$, зависящей не только от апостериорных математического ожидания $\hat{Z}$ и ковариационной матрицы R вектора Z, но и от его апостериорных моментов до порядка N включительно, то к уравнениям для $\hat{Z}$ и R придется добавить уравнения для апостериорных моментов α_r или μ_r ($r_1, \ldots, r_p = 0, 1, \ldots, N;\ |r| = 3, \ldots, N$) *).

▶ Чтобы вывести уравнения для апостериорных начальных моментов α_r, положим в (7.15) $f(z) = Z_1^{r_1} \ldots Z_p^{r_p}$. Тогда будем иметь

$$f_t = \partial f/\partial t = 0, \quad \partial f/\partial Z_s = r_s Z_1^{r_1} \ldots Z_s^{r_s-1} \ldots Z_p^{r_p} \qquad (s = 1, \ldots, p),$$

$$\partial^2 f/\partial Z_s^2 = r_s(r_s-1) Z_1^{r_1} \ldots Z_s^{r_s-2} \ldots Z_p^{r_p} \qquad (s = 1, \ldots, p),$$

$$\partial^2 f/\partial Z_s \partial Z_q = r_s r_q Z_1^{r_1} \ldots Z_s^{r_s-1} \ldots Z_q^{r_q-1} \ldots Z_p^{r_p}$$

$$(s = 1, \ldots, q-1;\ q = 2, \ldots, p),$$

$$\operatorname{tr}[f_{zz}(\psi\nu\psi^{\mathrm{T}})] = \sum_{s,\ q=1}^{p} (\partial^2 f/\partial Z_s \partial Z_q)\, \sigma_{sq}(Y,\ Z,\ t) =$$

$$= \sum_{s=1}^{p} r_s(r_s-1)\, \sigma_{ss}(Y,\ Z,\ t) Z_1^{r_1} \ldots Z_s^{r_s-2} \ldots Z_p^{r_p} +$$

$$+ 2 \sum_{q=2}^{p} \sum_{s=1}^{q-1} r_s r_q \sigma_{sq}(Y,\ Z,\ t) Z_1^{r_1} \ldots Z_s^{r_s-1} \ldots Z_q^{r_q-1} \ldots Z_p^{r_p},$$

где $\sigma_{sq}(Y,\ Z,\ t)$ — элементы матрицы $\sigma(Y,\ Z,\ t) = (\psi\nu\psi^{\mathrm{T}})(Y,\ Z,\ t)$. Подставив эти выражения в (7.15), получим следующие стохастические дифференциальные уравнения для апостериорных моментов вектора Z:

$$d\alpha_r = \beta_r\, dt + \eta_r(dY - f^{(1)}\, dt)$$

$$(r_1, \ldots, r_p = 0,\ 1, \ldots, N;\ |r| = 1, \ldots, N), \tag{9}$$

где

$$\beta_r = \beta_r(Y,\ \theta,\ t) =$$

$$= \sum_{s=1}^{p} r_s \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_s(Y,\ z,\ t)\, z_1^{r_1} \ldots z_s^{r_s-1} \ldots z_p^{r_p} p^*(z;\ \theta)\, dz +$$

---

*) Как и в гл. 6, r представляет собой векторный индекс $r = [r_1 \ldots r_p]^{\mathrm{T}}$, а $|r| = r_1 + \ldots + r_p$.

$$+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{p} r_s(r_s-1)\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_{ss}(Y,\ z,\ t)\,z_1^{r_1}\ldots z_s^{r_s-1}\ldots z_p^{r_p}\,p^*(z;\ \theta)\,dz+$$

$$+\sum_{q=2}^{p}\sum_{s=1}^{q-1} r_s r_q\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_{sl}(Y,\ z,\ t)\,z_1^{r_1}\ldots z_s^{r_s-1}\ldots z_q^{r_q-1}\ldots z_p^{r_p}\,p^*(z;\ \theta)\,dz, \tag{10}$$

$$\eta_r=\eta_r(Y,\ \theta,\ t)=$$
$$=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(Y,\ z,\ t)^{\mathrm{T}}z_1^{r_1}\ldots z_p^{r_p}p^*(z;\ \theta)\,dz-f^{(1)\,\mathrm{T}}\alpha_r+\right.$$
$$\left.+\sum_{s=1}^{p} r_s\int_{-\infty}^{\infty}(\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})_s(Y,\ z,\ t)\,z_1^{r_1}\ldots z_s^{r_s-1}\ldots z_p^{r_p}p^*(z;\ \theta)\,dz\right\}\times$$
$$\times(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y,\ \ t),$$

$$f^{(1)}=f^{(1)}(Y,\ \theta,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(Y,\ z,\ t)\,p^*(z;\ \theta)\,dz, \tag{11}$$

а $(\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})_s$ — s-я строка матрицы $\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}}$. Интегрирование уравнений (9) при начальных значениях моментов α_r при $t=t_0$, равных соответствующим условным моментам вектора Z_0 относительно Y_0, приближенно определяет все апостериорные моменты α_r ($r_1, \ldots, r_p = 0, 1, \ldots, N$; $|r|=1, \ldots, N$), составляющие вектор параметров θ. ◀

При аппроксимации апостериорной плотности $p_t(z)$ отрезком ортогонального разложения вида (2.41),

$$p_t(z)=p^*(z;\ \theta)=w_1(z)\left[1+\sum_{k=3}^{N}\sum_{|\nu|=k}c_\nu p_\nu(z)\right], \tag{12}$$

β_r, η_r и $f^{(1)}$ представляют собой линейные функции моментов α_r ($|r|=3, \ldots, N$) с коэффициентами, зависящими от моментов первого и второго порядков:

$$\beta_r=\beta_{0,r}+\sum_{k=3}^{N}\sum_{|\nu|=k}\beta_{\nu,r}q_\nu(\alpha),\qquad \eta_r=\eta_{0,r}+\sum_{k=3}^{N}\sum_{|\nu|=k}\eta_{\nu,r}q_\nu(\alpha),$$
$$f^{(1)}=f_0^{(1)}+\sum_{k=3}^{N}\sum_{|\nu|=k}f_\nu^{(1)}q_\nu(\alpha),$$

так как в силу формулы (2.38) $c_\nu=q_\nu(\alpha)$, а величина $q_\nu(\alpha)$ при $|\nu|\geqslant 3$ представляет собой линейную функцию моментов α_r ($|r|=3, \ldots, |\nu|$) с коэффициентами, зависящими от моментов первого и второго порядков (п. 2.3.1).

При аппроксимации плотности $p_t(z)$ отрезком ряда Эджуорта (2.46) с учетом моментов до N-го порядка число слагаемых в сумме по k увеличится до $3N-6$ и коэффициенты c_ν при $|\nu|>N$ не будут равны $q_\nu(\alpha)=G_\nu(\mu)$, а будут функциями семиинвариантов до N-го порядка, которые надо будет заменить их выражениями через моменты.

Пример 4. Для задачи примера 1,

$$\dot{Y}=X=Z+V_2, \quad \dot{Z}=-Z^3+ZV_1,$$

уравнения (9) имеют вид ($\alpha_1=\hat{Z}$, $\alpha_2=\hat{Z}^2+R$)

$$\dot{\hat{Z}}=-\alpha_3+(\alpha_2-\hat{Z}^2)(X-\hat{Z}),$$

$$\dot{\alpha}_2=-2\alpha_4+\nu_1\alpha_2+\nu_2^{-1}(\alpha_3-\hat{Z}\alpha_2)(X-\hat{Z}),$$

$$\dot{\alpha}_3=72\hat{Z}^5-180\hat{Z}^3\alpha_2+3(\nu_1+20\hat{Z}^2)\alpha_3-15\hat{Z}\alpha_4+90\hat{Z}\alpha_2^2-30\alpha_2\alpha_3+$$
$$+\nu_2^{-1}(\alpha_4-\hat{Z}\alpha_3)(X-\hat{Z}),$$

$$\dot{\alpha}_4=256\hat{Z}^6-480\hat{Z}^4\alpha_2+160\hat{Z}^3\alpha_3+6\nu_1\alpha_4+120\alpha_2^3-60\alpha_2\alpha_4+$$
$$+\nu_2^{-1}(4\hat{Z}\alpha_4-20\hat{Z}^2\alpha_3+60\hat{Z}^3\alpha_2-30\hat{Z}\alpha_2^2+10\alpha_2\alpha_3-24\hat{Z}^5)(X-\hat{Z}).$$

При аппроксимации апостериорной плотности отрезком ряда Эджуорта с учетом моментов до четвертого порядка в правой части последнего уравнения добавится слагаемое $10\mu_3^2=10(\alpha_3-3\hat{Z}\alpha_2+2\hat{Z}^3)^2$.

8.2.2. Метод моментов. Центральные моменты. Уравнения для апостериорных центральных моментов выводятся значительно сложнее, чем для начальных. Их можно вывести, вычислив по формуле Ито (3.61) стохастический дифференциал апостериорного центрального момента μ_r, рассматриваемого как функция начальных моментов, стохастические дифференциалы которых определяются формулами (9) совершенно так же, как в п. 7.2.9 была выведена формула (7.24) для стохастических дифференциалов элементов апостериорной ковариационной матрицы вектора Z. Можно также найти стохастический дифференциал момента μ_r, как и в п. 6.4.2, дифференцированием формулы, выражающей μ_r через характеристическую функцию.

► Напишем сначала уравнения для апостериорных математического ожидания $\hat{Z}$ и ковариационной матрицы R. Заменив в выражениях математических ожиданий в (7.21) и (7.25) апостериорную плотность $p_t(z)$ аппроксимирующей её функцией $p^*(z;\ \theta)$, получим уравнения

$$d\hat{Z}=f\,dt+h(dY-f^{(1)}\,dt), \tag{13}$$

$$dR=(f^{(2)}-h\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}h^{\mathrm{T}})\,dt+\sum_{r=1}^{m}\rho_r(dY_r-f_r^{(1)}\,dt), \tag{14}$$

где

$$f=f(Y,\ \theta,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(Y,\ z,\ t)\,p^*(z;\ \theta)\,dz, \tag{15}$$

$$f^{(1)}=f^{(1)}(Y,\ \theta,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(Y,\ z,\ t)\,p^*(z;\ \theta)\,dz, \tag{16}$$

$$f^{(2)}=f^{(2)}(Y,\ \theta,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}[(z-\hat{Z})\,\varphi(Y,\ z,\ t)^{\mathrm{T}}+$$
$$+\varphi(Y,\ z,\ t)(z^{\mathrm{T}}-\hat{Z}^{\mathrm{T}})+(\psi\nu\psi^{\mathrm{T}})(Y,\ z,\ t)]\,p^*(z;\ \theta)\,dz, \tag{17}$$

$$h=h(Y,\ \theta,\ t)=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}[z\varphi_1(Y,\ z,\ t)^{\mathrm{T}}+\right.$$
$$\left.+(\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})(Y,\ z,\ t)]\,p^*(z;\ \theta)\,dz-\hat{Z}f^{(1)\mathrm{T}}\right\}(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y,\ t), \tag{18}$$

$$\rho_r=\rho_r(Y,\ \theta,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}[(z-\hat{Z})(z^{\mathrm{T}}-\hat{Z})\,a_r(Y,\ z,\ t)+$$
$$+(z-\hat{Z})\,b_r(Y,\ z,\ t)^{\mathrm{T}}+b_r(Y,\ z,\ t)(z^{\mathrm{T}}-\hat{Z}^{\mathrm{T}})]\,p^*(z;\ \theta)\,dz$$
$$(r=1,\ \ldots,\ m), \tag{19}$$

а θ — совокупность моментов $\hat{Z}$, R, μ_r ($r_1,\ \ldots,\ r_p=0,\ 1,\ \ldots,\ N$; $|r|=3,\ \ldots,\ N$).

Для вывода уравнений для остальных моментов μ_r продифференцируем формулу

$$\mu_r=\left[\frac{\partial^{|r|}}{\partial(i\lambda_1)^{r_1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{r_p}}e^{-i\lambda^{\mathrm{T}}\hat{Z}}g_t(\lambda)\right]_{\lambda=0},$$

выражающую апостериорные моменты через апостериорную характеристическую функцию $g_t(\lambda)$ (*ТВ*, п. 4.5.3). В результате получим

$$d\mu_r=\left[\frac{\partial^{|r|}}{\partial(i\lambda_1)^{r_1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{r_p}}\,de^{-i\lambda^{\mathrm{T}}\hat{Z}}g_t(\lambda)\right]_{\lambda=0}. \tag{20}$$

По формуле Ито (3.61), принимая во внимание (7.16) и (13), находим

$$de^{-i\lambda^{\mathrm{T}}\hat{Z}}g_t(\lambda)=-i\lambda^{\mathrm{T}}e^{-i\lambda^{\mathrm{T}}\hat{Z}}g_t(\lambda)\,d\hat{Z}+e^{-i\lambda^{\mathrm{T}}\hat{Z}}dg_t(\lambda)+$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\sum_{s,\ q=1}^{p}(i\lambda_s)(i\lambda_q)\,e^{-i\lambda^{\mathrm{T}}\hat{Z}}g_t(\lambda)\,h_s\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}h_q^{\mathrm{T}}-\sum_{s=1}^{p}i\lambda_s\,k\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}h_s^{\mathrm{T}}\right\}dt,$$

где h_s — s-я строка матрицы h, определяемой формулой (18), а

$$k=k(Y,\ \theta,\ \lambda,\ t)=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi_1(Y,\ z,\ t)^{\mathrm{T}}+\right.$$
$$+i\lambda^{\mathrm{T}}(\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})(Y,\ z,\ t)]\,e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(z-\hat{Z})}\,p^*(z;\ \theta)\,dz-$$
$$\left.-f^{(1)\mathrm{T}}e^{-i\lambda^{\mathrm{T}}\hat{Z}}g_t(\lambda)\right\}(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y,\ t). \tag{21}$$

Подставим полученное выражение $de^{-i\lambda^{\mathrm{T}}\hat{Z}}g_t(\lambda)$ и дифференциалы $d\hat{Z}$ и $dg_t(\lambda)$ из (13) и (7.16) в (20) и вычислим каждое слагаемое по отдельности (конечно, как и прежде, с заменой $p_t(z)$, где надо, аппроксимирующей функцией $p^*(z;\theta)$). Пользуясь формулой (6.52), находим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\partial^{|r|}}{\partial(i\lambda_1)^{r_1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{r_p}}\left[i\lambda^{\mathrm{T}}\varphi(Y,z,t)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2}\lambda^{\mathrm{T}}(\psi\nu\psi^{\mathrm{T}})(Y,z,t)\lambda\right]e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(z-\hat{Z})}\right\}_{\lambda=0}p^*(z;\theta)\,dz=$$
$$=\sum_{s=1}^{p}r_s\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_s(Y,z,t)(z_1-\hat{Z}_1)^{r_1}\ldots(z_s-Z_s)^{r_s-1}\ldots$$
$$\ldots(z_p-\hat{Z}_p)^{r_p}p^*(z;\theta)\,dz+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{p}r_s(r_s-1)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma_{ss}(Y,z,t)(z_1-\hat{Z}_1)^{r_1}\ldots$$
$$\ldots(z_s-\hat{Z}_s)^{r_s-2}\ldots(z_p-\hat{Z}_p)^{r_p}p^*(z;\theta)\,dz+$$
$$+\sum_{q=2}^{p}\sum_{s=1}^{q-1}r_sr_q\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma_{sq}(Y,z,t)(z_1-\hat{Z}_1)^{r_1}\ldots(z_s-\hat{Z}_s)^{r_s-1}\ldots$$
$$\ldots(z_q-\hat{Z}_q)^{r_q-1}\ldots(z_p-\hat{Z}_p)^{r_p}p^*(z;\theta)\,dz,$$

$$\left\{\frac{\partial^{|r|}k(Y,\theta,\lambda,t)}{\partial(i\lambda_1)^{r_1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{r_p}}\right\}_{\lambda=0}=\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\partial^{|r|}}{\partial(i\lambda_1)^{r_1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{r_p}}\left[\varphi_1(Y,z,t)^{\mathrm{T}}+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.+i\lambda^{\mathrm{T}}(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})(Y,z,t)\right]e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(z-\hat{Z})}\right\}_{\lambda=0}p^*(z;\theta)\,dz-$$
$$\left.-f^{(1)\mathrm{T}}\mu_r\right\}(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y,t)=$$
$$=\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(Y,z,t)^{\mathrm{T}}(z_1-\hat{Z}_1)^{r_1}\ldots(z_p-\hat{Z}_p)^{r_p}p^*(z;\theta)\,dz+\right.$$
$$+\sum_{s=1}^{p}r_s\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})_s(Y,z,t)(z_1-\hat{Z}_1)^{r_1}\ldots(z_s-\hat{Z}_s)^{r_s-1}\ldots$$
$$\left.\ldots(z_p-\hat{Z}_p)^{r_p}p^*(z;\theta)\,dz-f^{(1)\mathrm{T}}\mu_r\right\}(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y,t),$$

$$\left\{\frac{\partial^{|r|}}{\partial(i\lambda_1)^{r_1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{r_p}}(i\lambda_s)(i\lambda_q)e^{-i\lambda^{\mathrm{T}}\hat{Z}}g_t(\lambda)\right\}_{\lambda=0}=r_sr_q\mu_{r-e_s-e_q},$$
$$\left\{\frac{\partial^{|r|}}{\partial(i\lambda_1)^{r_1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{r_p}}(i\lambda_s)^2e^{-i\lambda^{\mathrm{T}}\hat{Z}}g_t(\lambda)\right\}_{\lambda=0}=r_s(r_s-1)\mu_{r-2e_s},$$
$$\left\{\frac{\partial^{|r|}}{\partial(i\lambda_1)^{r_1}\ldots\partial(i\lambda)^{r_p}}i\lambda_sk\right\}_{\lambda=0}=r_s\left\{\frac{\partial^{|r|-1}k}{\partial(i\lambda_1)^{r_1}\ldots\partial(i\lambda_s)^{r_s-1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{r_p}}\right\}_{\lambda=0},$$

где, как и в гл. 6, e_s — вектор, все компоненты которого равны нулю, кроме одной s-й, равной единице. В результате получим уравнения

$$d\mu_r = \left(\beta_r - \sum_{s=1}^{p} r_s f_s \mu_{r-e_s} + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{p} r_s (r_s - 1) h_s \psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}} h_s^{\mathrm{T}} \mu_{r-2e_s} + \right.$$
$$\left. + \sum_{q=2}^{p}\sum_{s=1}^{q-1} r_s r_q h_s \psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}} h_q^{\mathrm{T}} \mu_{r-e_s-e_q} - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{p} r_s \eta_{r-e_s} \psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}} h_s \right) dt +$$
$$+ \left(\eta_r - \sum_{s=1}^{p} r_s h_s \mu_{r-e_s}\right)(dY - f^{(1)}\,dt) \qquad (22)$$
$$(r_1, \ldots, r_p = 0, 1, \ldots, N;\ |r| = 3, \ldots, N),$$

где

$$\beta_r = \beta_r(Y, \theta, t) =$$
$$= \sum_{s=1}^{p} r_s \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_s(Y, z, t)(z_1 - \hat{Z}_1)^{r_1} \ldots (z_s - Z_s)^{r_s - 1} \ldots (z_p - \hat{Z}_p)^{r_p} p^*(z; \theta)\,dz +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{p} r_s (r_s - 1) \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{ss}(Y, z, t)(z_1 - \hat{Z}_1)^{r_1} \ldots (z_s - \hat{Z}_s)^{r_s - 2} \ldots$$
$$\ldots (z_p - \hat{Z}_p)^{r_p} p^*(z; \theta)\,dz + \sum_{q=2}^{p}\sum_{s=1}^{q-1} r_s r_q \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{sq}(Y, z, t)(z_1 - \hat{Z}_1)^{r_1} \ldots$$
$$\ldots (z_s - \hat{Z}_s)^{r_s - 1} \ldots (z_q - \hat{Z}_q)^{r_q - 1} \ldots (z_p - \hat{Z}_p)^{r_p} p^*(z; \theta)\,dz, \qquad (23)$$

$$\eta_r = \eta_r(Y, \theta, t) = \left\{\frac{\partial^{|r|} k(Y, \theta, \lambda, t)}{\partial (i\lambda_1)^{r_1} \ldots \partial (i\lambda_p)^{r_p}}\right\}_{\lambda=0} =$$
$$= \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(Y, z, t)^{\mathrm{T}} (z_1 - \hat{Z}_1)^{r_1} \ldots (z_p - \hat{Z}_p)^{r_p} p^*(z; \theta)\,dz + \right.$$
$$+ \sum_{s=1}^{p} r_s \int_{-\infty}^{\infty} (\psi \nu \psi_1^{\mathrm{T}})_s (Y, z, t)(z_1 - \hat{Z}_1)^{r_1} \ldots (z_s - \hat{Z}_s)^{r_s - 1} \ldots$$
$$\left. \ldots (z_p - \hat{Z}_p)^{r_p} p^*(z; \theta)\,dz - f^{(1)\mathrm{T}} \mu_{r-e_s} \right\} (\psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y, t), \qquad (24)$$

f_s — s-й элемент матрицы-столбца f, определяемой формулой (15). ◀

За начальные значения моментов μ_r при $t = t_0$ следует принять соответствующие условные моменты величины Z_0 относительно Y_0.

Уравнения (13), (14) и (22) определяют приближенно все моменты, от которых зависит аппроксимирующая апостериорную плотность $p_t(z)$ функция $p^*(z; \theta)$. В качестве $p^*(z; \theta)$ обычно берут отрезок ортогонального разложения плотности $p_t(z)$ (12), в частности разложения по полиномам Эрмита, или отрезок ряда Эджуорта. В последнем случае можно рассчитывать на более точную аппроксимацию плотности $p_t(z)$ при данном наивысшем порядке учитываемых моментов.

Пример 5. В задаче примеров 1 и 4,

$$\dot{Y}=X=Z+V_2, \qquad \dot{Z}=-Z^3+ZV_1,$$

при аппроксимации $p_t(z)$ отрезком разложения по полиномам Эрмита с учетом моментов до четвертого порядка уравнения (13), (14) и (22) имеют вид

$$\dot{\hat{Z}}=-\hat{Z}(\hat{Z}^2+3R)-\mu_3+\nu_2^{-1}R(X-\hat{Z}),$$
$$\dot{R}=(\nu_1-6\hat{Z}^2)R-\nu_2^{-1}R^2-6\hat{Z}\mu_3+\nu_2^{-1}\mu_3(X-\hat{Z})-2\mu_4,$$
$$\dot{\mu}_3=9\hat{Z}R^2-9(\hat{Z}^2+3R)\mu_3-9\hat{Z}\mu_4+3\nu_1(2\hat{Z}R+\mu_3)-\\ -\frac{3}{2}\nu_2^{-1}R\mu_3+\nu_2^{-1}(\mu_4-3R^2)(X-\hat{Z}),$$
$$\dot{\mu}_4=120R^3-108\hat{Z}R\mu_3-12(\hat{Z}^2+5R)\mu_4+4\mu_3^2+6\nu_1(\hat{Z}^2R+2\hat{Z}\mu_3+\mu_4)-\\ -2\nu_2^{-1}R(\mu_4-3R^2)+6\nu_2^{-1}R\mu_3(X-\hat{Z}).$$

При аппроксимации $p_t(z)$ отрезком ряда Эджуорта с учетом моментов до четвертого порядка в правой части последнего уравнения добавится слагаемое $10\mu_3^2$.

Пример 6. В задаче примера 3,

$$\dot{Y}=X=Z+V_2, \qquad \dot{Z}=-Z\Theta+V_1, \qquad \dot{\Theta}=0,$$

при аппроксимации $p_t(z)$ отрезком разложения по полиномам Эрмита или отрезком ряда Эджуорта с учетом моментов до четвертого порядка уравнения (13), (14) и (22) имеют вид

$$\dot{\hat{Z}}=-\hat{Z}\hat{\Theta}-R_{12}+\nu_{2}^{-1}R_{11}(X-\hat{Z}), \qquad \dot{\hat{\Theta}}=\nu_2^{-1}R_{12}(X-\hat{Z}),$$
$$\dot{R}_{11}=\nu_1-2\hat{\Theta}R_{11}-2\hat{Z}R_{12}-2\mu_{21}-\nu_2^{-1}R_{11}^2+\nu_2^{-1}\mu_{30}(X-\hat{Z}),$$
$$\dot{R}_{12}=-\hat{\Theta}R_{12}-\hat{Z}R_{22}-\mu_{12}-\nu_2^{-1}R_{11}R_{12}+\nu_2^{-1}\mu_{21}(X-\hat{Z}),$$
$$\dot{R}_{22}=-\nu_2^{-1}R_{12}^2+\nu_2^{-1}\mu_{12}(X-\hat{Z}),$$
$$\dot{\mu}_{30}=3R_{11}R_{22}-3\hat{\Theta}\mu_{30}-3\hat{Z}\mu_{21}-3\mu_{31}-\frac{3}{2}\nu_2^{-1}R_{11}\mu_{30}+\nu_2^{-1}(\mu_{40}-3R_{11}^2)(X-\hat{Z}),$$
$$\dot{\mu}_{21}=2R_{12}^2-2\hat{\Theta}\mu_{21}-2\hat{Z}\mu_{12}-2\mu_{22}-\frac{1}{2}\nu_2^{-1}R_{12}\mu_{30}-\nu^{-1}R_{11}\mu_{21}+\\ +\nu_2^{-1}(\mu_{31}-3R_{11}R_{12})(X-\hat{Z}),$$
$$\dot{\mu}_{12}=R_{12}R_{22}-\hat{\Theta}\mu_{12}-\hat{Z}\mu_{03}-\mu_{13}-\nu_2^{-1}R_{12}\mu_{21}-\frac{1}{2}\nu_2^{-1}R_{11}\mu_{12}+\\ +\nu_2^{-1}(\mu_{22}-R_{11}R_{22}-2R_{12}^2)(X-\hat{Z}),$$
$$\dot{\mu}_{03}=-\frac{3}{2}\nu_2^{-1}R_{12}\mu_{12}+\nu_2^{-1}(\mu_{13}-3R_{12}R_{22})(X-\hat{Z}),$$
$$\dot{\mu}_{40}=-12R_{12}\mu_{30}-24R_{11}\mu_{21}-4\hat{\Theta}\mu_{40}-4\hat{Z}\mu_{31}-\\ -2\nu_2^{-1}R_{11}(\mu_{40}-3R_{11}^2)+6\nu_2^{-1}R_{11}\mu_{30}(X-\hat{Z}),$$
$$\dot{\mu}_{31}=-3R_{22}\mu_{30}-15R_{12}\mu_{21}-9R_{11}\mu_{12}-3\hat{\Theta}\mu_{31}-3\hat{Z}\mu_{22}+\\ +3\nu_2^{-1}R_{11}^2R_{12}-\frac{1}{2}\nu_2^{-1}R_{12}\mu_{40}-\frac{3}{2}\nu_2^{-1}R_{11}\mu_{31}+3\nu_2^{-1}(R_{12}\mu_{30}+R_{11}\mu_{21})(X-\hat{Z}),$$

$$\dot{\mu}_{22} = -6R_{22}\mu_{21} - 10R_{12}\mu_{12} - 2R_{11}\mu_{03} - 2\hat{\Theta}\mu_{22} - 2\hat{Z}\mu_{13} + \\ + \nu_2^{-1}R_{11}^2R_{22} + 5\nu_2^{-1}R_{11}R_{12}^2 - \nu_2^{-1}(R_{12}\mu_{31} + R_{11}\mu_{22}) + \\ + \nu_2^{-1}(R_{22}\mu_{30} + 4R_{12}\mu_{21} + R_{11}\mu_{12})(X - \hat{Z}),$$

$$\dot{\mu}_{13} = -6R_{22}\mu_{12} - 3R_{12}\mu_{03} - \hat{\Theta}\mu_{13} - \hat{Z}\mu_{04} + 3\nu_2^{-1}R_{12}(R_{11}R_{22} + R_{12}^2) - \\ - \frac{3}{2}\nu_2^{-1}R_{12}\mu_{22} - \frac{1}{2}\nu_2^{-1}R_{11}\mu_{13} + 3\nu_2^{-1}(R_{22}\mu_{21} + R_{12}\mu_{12})(X - \hat{Z}),$$

$$\dot{\mu}_{04} = -2\nu_2^{-1}R_{12}(\mu_{13} - 3R_{12}R_{22}) + 6\nu_2^{-1}R_{22}\mu_{12}(X - \hat{Z}).$$

8.2.3. Метод семиинвариантов. Если параметрами функции $p^*(z;\ \theta)$, аппроксимирующей апостериорную плотность $p_t(t)$ величины Z, служат семиинварианты, то можно вывести стохастические дифференциальные уравнения, приближенно определяющие эти апостериорные семиинварианты.

► Для этого продифференцируем по формуле Ито (3.61) выражение семиинварианта $\varkappa_r$ через характеристическую функцию (TB, п. 4.5.4)

$$\varkappa_r = \left[\frac{\partial^{|r|}}{\partial(i\lambda_1)^{r_1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{r_p}} \ln g_t(\lambda)\right]_{\lambda=0}.$$

В результате получим

$$d\varkappa_r = \left[\frac{\partial^{|r|}}{\partial(i\lambda_1)^{r_1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{r_p}} d\ln g_t(\lambda)\right]_{\lambda=0}. \tag{25}$$

Стохастический дифференциал $d\ln g_t(\lambda)$ находим по формуле Ито (3.61). Пользуясь обозначением (21) коэффициента при $dY - \hat{\varphi}_1 dt$ в выражении стохастического дифференциала (7.16) характеристической функции $g_t(\lambda)$, будем иметь

$$d\ln g_t(\lambda) = \exp\{-\ln g_t(\lambda)\}\, dg_t(\lambda) + \\ + \frac{1}{2}\exp\{2i\lambda^{\mathrm{T}}\hat{Z} - 2\ln g_t(\lambda)\}\, k\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}k^{\mathrm{T}}\, dt.$$

Подставив это выражение в (25), заменив стохастический дифференциал $dg_t(\lambda)$ его выражением (7.16), пользуясь формулой (6.58) и учитывая, что согласно (24)

$$\left\{\frac{\partial^{|r|}k}{\partial(i\lambda_1)^{r_1}\ldots\partial(i\lambda_p)^{r_p}}\right\}_{\lambda=0} = \eta_r,$$

получим уравнения для апостериорных семиинвариантов вектора Z состояния системы:

$$d\varkappa_r = \beta_r\,dt + \eta_r\,(dY - f^{(1)}\,dt) + \sum_{q_1=0}^{r_1} \ldots \sum_{q_p=0}^{r_p} \sum_{|q|=2}^{|r|-1} \frac{r_1!\ldots r_p!}{(r_1-q_1)!\ldots(r_p-q_p)!} \sum_{s=1}^{[|q|/2]} \frac{(-1)^s}{s!} \times$$
$$\times \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_s=q} \frac{\varkappa_{\nu_1}\ldots\varkappa_{\nu_s}}{\nu_{11}!\ldots\nu_{1p}!\ldots\nu_{s1}!\ldots\nu_{sp}!}\,[\beta_{r-q}\,dt +$$
$$+ \eta_{r-q}\,(dY - f^{(1)}\,dt)] + \frac{1}{2}\,[\eta_r\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}\eta_r^{\mathrm{T}} +$$
$$+ \sum_{q_1=0}^{r_1} \ldots \sum_{q_p=0}^{r_p} \sum_{|q|=2}^{|r|-2} \frac{r_1!\ldots r_p!}{(r_1-q_1)!\ldots(r_p-q_p)!} \sum_{s=1}^{[|q|/2]} \frac{(-2)^s}{s!} \times$$
$$\times \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_s=q} \frac{\varkappa_{\nu_1}\ldots\varkappa_{\nu_s}}{\nu_{11}!\ldots\nu_{1p}!\ldots\nu_{s1}!\ldots\nu_{sp}!} \sum_{l_1=0}^{r_1-q_1} \ldots \sum_{l_p=0}^{r_p-q_p} \ldots$$
$$\ldots \sum_{|l|=1}^{|r-q|-1} C_{r_1-q_1}^{l_1} \ldots C_{r_p-q_p}^{l_p}\,\eta_l\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}\eta_{r-q-l}^{\mathrm{T}}\Big]\,dt$$
$$(r_1, \ldots, r_p = 0, 1, \ldots, N;\ |r| = 3, \ldots, N), \quad (26)$$

где $f^{(1)}$, β_r, η_r определяются формулами (16), (23) и (24). При выводе этих уравнений мы учли, что $k(Y, \theta, 0, t) = 0$, первые производные функции $\exp\{i\lambda^{\mathrm{T}}Z - \ln g_t(\lambda)\}$ по $i\lambda$ равны нулю и что производные функции $\exp\{2i\lambda^{\mathrm{T}} - 2\ln g_t(\lambda)\}$ по $i\lambda$ отличаются от производных функций $\exp\{i\lambda^{\mathrm{T}} - \ln g_t(\lambda)\}$ только тем, что все семиинварианты в выражении (6.58) удваиваются. При этом мы воспользовались векторными индексами $r = [r_1 \ldots r_p]^{\mathrm{T}}$, $q = [q_1 \ldots q_p]^{\mathrm{T}}$, $\nu_k = [\nu_{k1} \ldots \nu_{kp}]^{\mathrm{T}}$, $l = [l_1 \ldots l_p]^{\mathrm{T}}$. ◀

Добавив к (26) уравнения (13) и (14), получим полную систему уравнений, приближенно определяющую апостериорные семиинварианты вектора Z, от которых зависит функция $p^*(z;\ \theta)$.

За начальные значения семиинвариантов $\varkappa_r$ при $t = t_0$ следует принять соответствующие семиинварианты условного распределения величины Z_0 относительно Y_0.

Обратим внимание на то, что при $|r| = 1$ матрицы-строки η_r совпадают с соответствующими строками матрицы h в уравнении (13),

$$\eta_{e_k} = \eta_{0,\ \ldots,\ \underset{k}{1},\ \ldots,\ 0} = h_k \qquad (k = 1, \ldots, p),$$

а при $|r| = 2$ их элементы представляют собой соответствующие элементы квадратных матриц ρ_r в уравнении (14),

$$\eta_{2e_k} = [\rho_{1kk} \ldots \rho_{mkk}], \quad \eta_{e_k+e_l} = [\rho_{1kl} \ldots \rho_{mkl}]$$
$$(k, l = 1, \ldots, p).$$

В последнем можно убедиться, сравнив преобразованное в п. 7.2.9 уравнение (7.24) для dR_{kl} с соответствующим уравнением (22).

Метод семиинвариантов для приближенного решения задачи оптимальной нелинейной фильтрации был предложен в [25, 20].

Пример 7. В задаче примеров 1 и 5,

$$\dot{Y} = X = Z + V_2, \quad \dot{Z} = -Z^3 + ZV_1,$$

при аппроксимации $p_t(z)$ отрезком разложения по полиномам Эрмита с учетом моментов до четвертого порядка уравнения (13), (14) и (26) имеют вид

$$\dot{\hat{Z}} = -\hat{Z}(\hat{Z}^2 + 3R) - \varkappa_3 + \nu_2^{-1} R (X - \hat{Z}),$$

$$\dot{R} = \nu_1 - 6(\hat{Z}^2 + R) R - 6Z\varkappa_3 - 2\varkappa_4 - \nu_2^{-1} R^2 + \nu_2^{-1} \varkappa_3 (X - \hat{Z}),$$

$$\dot{\varkappa}_3 = -18\hat{Z}R^2 - 9(\hat{Z}^2 + 3R)\varkappa_3 - 9\hat{Z}\varkappa_4 + 3\nu_1 (2\hat{Z}R + \varkappa_3) - \frac{3}{2}\nu_2^{-1}\varkappa_3 + \nu_2^{-1}\varkappa_4 (X - \hat{Z}),$$

$$\dot{\varkappa}_4 = 12R^3 - 72\hat{Z}R\varkappa_3 - 12(\hat{Z}^2 + 4R)\varkappa_4 + 4\varkappa_3^2 + \\ + 6\nu_1 [(\hat{Z}^2 + 2R) R + 2\hat{Z}\varkappa_3 + \varkappa_4] + \nu_2^{-1}(6R^3 - 3\varkappa_3^2 - 2R\varkappa_4).$$

При аппроксимации $p_t(z)$ рядом Эджуорта с учетом семиинвариантов до четвертого порядка в правой части последнего уравнения добавится слагаемое $10\varkappa_3^2$.

Пример 8. В задаче примера 6,

$$\dot{Y} = X = Z + V_2, \quad \dot{Z} = -Z\Theta + V_1, \quad \dot{\Theta} = 0,$$

при аппроксимации $p_t(z)$ отрезком разложения по полиномам Эрмита или отрезком ряда Эджуорта с учетом моментов до четвертого порядка уравнения (13), (14) и (26) имеют вид

$$\dot{\hat{Z}} = -\hat{Z}\hat{\Theta} - R_{12} + \nu_2^{-1} R_{11} (X - \hat{Z}), \quad \dot{\hat{\Theta}} = \nu_2^{-1} R_{12} (X - \hat{Z}),$$

$$\dot{R}_{11} = -2\hat{\Theta} R_{11} - 2\hat{Z} R_{12} - 2\varkappa_{21} - \nu_2^{-1} R_{11}^2 + \nu_2^{-1}\varkappa_{30} (X - \hat{Z}),$$

$$\dot{R}_{12} = -\hat{\Theta} R_{12} - \hat{Z} R_{22} - \varkappa_{12} - \nu_2^{-1} R_{11} R_{12} + \nu_2^{-1}\varkappa_{21} (X - \hat{Z}),$$

$$\dot{R}_{22} = -\nu_2^{-1} R_{12}^2 + \nu_2^{-1}\varkappa_{12} (X - \hat{Z}),$$

$$\dot{\varkappa}_{30} = -6R_{11}R_{12} - 3\hat{\Theta}\varkappa_{30} - 3\hat{Z}\varkappa_{21} - 3\varkappa_{31} - \frac{3}{2}\nu_2^{-1} R_{11}\varkappa_{30} + \nu_2^{-1}\varkappa_{40} (X - \hat{Z}),$$

$$\dot{\varkappa}_{21} = -2(R_{11}R_{22} + R_{12}^2) - 2\hat{\Theta}\varkappa_{21} - 2\hat{Z}\varkappa_{12} - 2\varkappa_{22} - \\ - \frac{1}{2}\nu_2^{-1} R_{12}\varkappa_{30} - \nu_2^{-1} R_{11}\varkappa_{21} + \nu_2^{-1}\varkappa_{31} (X - \hat{Z}),$$

$$\dot{\varkappa}_{12} = -2R_{12}R_{22} - \hat{\Theta}\varkappa_{12} - \hat{Z}\varkappa_{03} - \nu_2^{-1} R_{12}\varkappa_{21} - \varkappa_{13} - \frac{1}{2}\nu_2^{-1} R_{11}\varkappa_{12} + \nu_2^{-1}\varkappa_{22} (X - \hat{Z}),$$

$$\dot{\varkappa}_{03} = -\frac{3}{2}\nu_2^{-1} R_{12}\varkappa_{12} + \nu_2^{-1}\varkappa_{13} (X - \hat{Z}),$$

$$\dot{\varkappa}_{40} = -12(R_{12}\varkappa_{30} + R_{11}\varkappa_{21}) - 4(\hat{\Theta}\varkappa_{40} + \hat{Z}\varkappa_{31}) + 2\nu_2^{-1} R_{11} (3R_{11}^2 - \varkappa_{40}),$$

$$\dot{\varkappa}_{31} = -3R_{22}\varkappa_{30} - 9R_{12}\varkappa_{21} - 3R_{11}\varkappa_{12} - 3(\hat{\Theta}\varkappa_{31} + \hat{Z}\varkappa_{22}) + \\ + 3\nu_2^{-1} R_{11}^2 R_{12} - \frac{1}{2}\nu_2^{-1} R_{12}\varkappa_{40} - \frac{3}{2}\nu_2^{-1} R_{11}\varkappa_{31} - \frac{3}{2}\nu_2^{-1} \ldots$$

$$\dot{\varkappa}_{22} = -4R_{22}\varkappa_{21} - 6R_{12}\varkappa_{12} - 2R_{11}\varkappa_{03} - 2(\hat{\Theta}\varkappa_{22} + \hat{Z}\varkappa_{13}) - \\ - \nu_2^{-1}(R_{12}\varkappa_{31} + R_{11}\varkappa_{22}) + \nu_2^{-1} R_{11} (R_{11}R_{22} + 5R_{12}^2) - 2\nu_2^{-1} \ldots$$

$$\dot{\varkappa}_{13} = -3(R_{22}\varkappa_{12} + R_{12}\varkappa_{03}) - \hat{\Theta}\varkappa_{13} - \hat{Z}\varkappa_{04} + 3\nu_2^{-1} R_{12} (R_{11}R_{22} + R_{12}^2) - \\ - \frac{3}{2}\nu_2^{-1} R_{12}\varkappa_{22} - \frac{1}{2}\nu_2^{-1} R_{11}\varkappa_{13} - \frac{3}{2}\nu_2^{-1}\varkappa_{21}\varkappa_{12}.$$

$$\dot{\varkappa}_{04} = 2\nu_2^{-1} R_{12} (6R_{12}R_{22} - \varkappa_{13}) - 3\nu_2^{-1}\varkappa_{12}^2.$$

8.2.4. Метод ортогональных разложений. При аппроксимации апостериорной плотности отрезком (12) ее ортогонального разложения естественно принять за параметры, образующие вектор θ, апостериорные математическое ожидание $\hat{Z}$, ковариационную матрицу R вектора Z и коэффициенты c_ν ($|\nu|=3, \ldots, N$) в (12).

► Для вывода стохастических дифференциальных уравнений для коэффициентов c_ν воспользуемся, как и в п. 6.6.1, формулой (2.40), выражающей $c_\varkappa$ через характеристическую функцию $g_t(\lambda)$:

$$c_\varkappa = [q_\varkappa(\partial/i\,\partial\lambda)\,g_t(\lambda)]_{\lambda=0}.$$

Чтобы найти стохастический дифференциал величины $c_\varkappa$, применим формулу Ито (3.61), учитывая, что полином $q_\varkappa(z)$ зависит от апостериорных математического ожидания $\hat{Z}$ и ковариационной матрицы R вектора Z. Предварительно перепишем уравнения (13) и (14) в скалярной форме:

$$d\hat{Z}_s = f_s\,dt + h_s(dY - f^{(1)}\,dt) \qquad (s=1, \ldots, p), \tag{27}$$

$$dR_{sq} = (f^{(2)}_{sq} - h_s\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}h_q^{\mathrm{T}})\,dt + \eta_{sq}(dY - f^{(1)}\,dt) \qquad (s,\ q=1, \ldots, p), \tag{28}$$

где η_{sq} — матрица-строка, элементами которой служат соответствующие элементы матриц $\rho_1, \ldots, \rho_m$,

$$\eta_{sq} = \eta_{e_s+e_q} = [\rho_{1sq} \ldots \rho_{msq}] \qquad (s,\ q=1, \ldots, p). \tag{29}$$

Теперь по формуле Ито (3.61), учитывая (27), (28) и первое уравнение (1), согласно которому $dY = \varphi_1\,dt + \psi_1\,dW$, находим

$$\begin{aligned} dc_\varkappa &= [d\{q_\varkappa(\partial/i\,\partial\lambda)\,g_t(\lambda)\}]_{\lambda=0} = \\ &= \sum_{s=1}^{p} [\partial q_\varkappa(\partial/i\,\partial\lambda)/\partial\hat{Z}_s\cdot g_t(\lambda)]_{\lambda=0}\,d\hat{Z}_s + \\ &+ \sum_{s,\,u=1}^{p} [\partial q_\varkappa(\partial/i\,\partial\lambda)/\partial R_{su}\cdot g_t(\lambda)]_{\lambda=0}\,dR_{su} + [q_\varkappa(\partial/i\,\partial\lambda)\,dg_t(\lambda)]_{\lambda=0} + \\ &+ \Big\{\frac{1}{2}\sum_{s,\,u=1}^{p} [\partial^2 q_\varkappa(\partial/i\,\partial\lambda)/\partial\hat{Z}_s\,\partial\hat{Z}_u\cdot g_t(\lambda)]_{\lambda=0}\,h_s\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}h_u^{\mathrm{T}} + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{s,\,u,\,k,\,l=1}^{p} [\partial^2 q_\varkappa(\partial/i\,\partial\lambda)/\partial R_{su}\,\partial R_{kl}\cdot g_t(\lambda)]_{\lambda=0}\,\eta_{su}\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}\eta_{kl}^{\mathrm{T}} + \\ &+ \sum_{s,\,k,\,l=1}^{p} [\partial^2 q_\varkappa(\partial/i\,\partial\lambda)/\partial\hat{Z}_s\,\partial R_{kl}\cdot g_t(\lambda)]_{\lambda=0}\,h_s\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}\eta_{kl}^{\mathrm{T}}\Big\}\,dt. \end{aligned}$$

Подставив сюда выражения (27), (28) и (7.16) дифференциалов $d\hat{Z}_s$, dR_{sq} и $dg_t(\lambda)$, вспомнив, что для любого полинома $P(z)$ $[P(\partial/i\,\partial\lambda)\,g_t(\lambda)]_{\lambda=0} = P(\alpha)$, и почти буквально повторив выкладки п. 6.6.1, получаем стохастические дифференциальные уравнения

$$dc_\varkappa = \left\{F_\varkappa + \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial q_\varkappa(\alpha)}{\partial \hat{Z}_s} f_s + \sum_{s,\,u=1}^{p} \frac{\partial q_\varkappa(\alpha)}{\partial R_{su}} (f_{su}^{(2)} - h_s \psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}} h_u^{\mathrm{T}}) + \right.$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{s,\,u=1}^{p} \frac{\partial^2 q_\varkappa(\alpha)}{\partial \hat{Z}_s \partial \hat{Z}_u} h_s \psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}} h_u^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2} \sum_{s,\,u,\,k,\,l=1}^{p} \frac{\partial^2 q_\varkappa(\alpha)}{\partial R_{su} \partial R_{kl}} \eta_{su} \psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}} \eta_{kl}^{\mathrm{T}} +$$
$$\left. + \sum_{s,\,k,\,l=1}^{p} \frac{\partial^2 q_\varkappa(\alpha)}{\partial \hat{Z}_s \partial R_{kl}} h_s \psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}} \eta_{kl}^{\mathrm{T}} \right\} dt + \left\{ H_\varkappa + \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial q_\varkappa(\alpha)}{\partial \hat{Z}_s} h_s + \right.$$
$$\left. + \sum_{s,\,u=1}^{p} \frac{\partial q_\varkappa(\alpha)}{\partial R_{su}} \eta_{su} \right\} (dY - f^{(1)} dt) \; (|\varkappa| = 3, \ldots, N), \qquad (30)$$

где в дополнение к прежним обозначениям

$$F_\varkappa = F_\varkappa(Y, \theta, t) = \sum_{s=1}^{p} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_s(Y, z, t) \frac{\partial q_\varkappa(z)}{\partial z_s} p^*(z; \theta)\, dz +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{s,\,u=1}^{p} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{su}(Y, z, t) \frac{\partial^2 q_\varkappa(z)}{\partial z_s \partial z_u} p^*(z; \theta)\, dz \qquad (31)$$

$$H_\varkappa = H_\varkappa(Y, \theta, t) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(Y, z, t)^{\mathrm{T}} q_\varkappa(z) p^*(z; \theta)\, dz + \right.$$
$$\left. + \sum_{s=1}^{p} \int_{-\infty}^{\infty} (\psi \nu \psi_1^{\mathrm{T}})_s (Y, z, t) \frac{\partial q_\varkappa(z)}{\partial z_s} p^*(z; \theta)\, dz - c_\varkappa f^{(1)\,\mathrm{T}} \right\} (\psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1} (Y, t).$$
$$(32)$$

Здесь через $(\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})_s$ обозначена s-я строка матрицы $\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}}$. Для вывода формул (31) и (32) достаточно вычислить

$$[q_\varkappa(\partial/i\,\partial\lambda)\, g_t(\lambda)]_{\lambda=0}$$

с помощью формул (7.16) и (6.76), учитывая, что $(\psi\nu\psi^{\mathrm{T}})(y, z, t) = \sigma(y, z, t)$.

На основании формулы (12) для $p^*(z; \theta)$ функции f_s, $f^{(1)}$, $f_{su}^{(2)}$, h_s, η_{su}, $F_\varkappa$ и $H_\varkappa$ в уравнениях (27), (28) и (30) представляют собой линейные комбинации величин c_ν ($|\nu| = 3, \ldots, N$) с коэффициентами, зависящими от $\hat{Z}$ и R. Величины $\partial q_\varkappa(\alpha)/\partial \hat{Z}_s$, $\partial q_\varkappa(\alpha)/\partial R_{su}$, $\partial^2 q_\varkappa(\alpha)/\partial \hat{Z}_s \partial \hat{Z} u$, $\partial^2 q_\varkappa(\alpha)/\partial R_{su} \partial R_{kl}$, $\partial^2 q_\varkappa(\alpha)/\partial \hat{Z}_s \partial R_{kl}$ после замены моментов их выражениями по формуле (2.42) тоже будут линейными комбинациями величин c_ν с коэффициентами, зависящими от $\hat{Z}$ и R. Таким образом, уравнения (27), (28) и (30) представляют собой полную систему стохастических дифференциальных уравнений, приближенно определяющую все величины $\hat{Z}$, R, c_ν ($|\nu| = 3, \ldots, N$), составляющие вектор параметров θ. ◀

За начальные значения коэффициентов c_ν при $t=t_0$ следует принять соответствующие коэффициенты ортогонального разложения условной плотности величины Z_0 относительно Y_0.

8.2.5. Метод квазимоментов. В частном случае разложений (12) по полиномам Эрмита коэффициенты c_ν представляют собой квазимоменты (п. 2.3.2). В этом случае на основании формул (9)—(11) приложения 1 для производных полиномов Эрмита G_ν формулы (31) и (32) приводятся к виду

$$F_\varkappa=\sum_{s=1}^{p}\varkappa_s\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_s(Y,z,t)\,G_{\varkappa-e_s}(z-m)\,p^*(z;\theta)\,dz+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{p}\varkappa_s(\varkappa_s-1)\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_{ss}(Y,z,t)\,G_{\varkappa-2e_s}(z-m)\,p^*(z;\theta)\,dz+$$
$$+\sum_{u=2}^{p}\sum_{s=1}^{u-1}\varkappa_s\varkappa_u\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_{su}(Y,z,t)\,G_{\varkappa-e_s-e_u}(z-m)\,p^*(z;\theta)\,dz, \tag{33}$$

$$H_\varkappa=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(Y,z,t)^{\mathrm{T}}\,G_\varkappa(z-m)\,p^*(z;\theta)\,dz+\right.$$
$$+\sum_{s=1}^{p}\varkappa_s\int_{-\infty}^{\infty}(\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})(Y,z,t)\,G_{\varkappa-e_s}(z-m)\,p^*(z;\theta)\,dz-$$
$$\left.-f^{(1)\,\mathrm{T}}c_\varkappa\right\}(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y,t). \tag{34}$$

На основании формул (9), (12) и (13) приложения 1 для производных полиномов Эрмита G_ν с учетом того, что $q_\varkappa(z)=G_\varkappa(z-m)$, величины $\partial q_\varkappa(\alpha)/\partial\hat{Z}_s$, $\partial q_\varkappa(\alpha)/\partial R_{su}$, $\partial^2 q_\varkappa(\alpha)/\partial\hat{Z}_s\,\partial\hat{Z}_u$, $\partial^2 q_\varkappa(\alpha)/\partial R_{su}\,\partial R_{kl}$, $\partial^2 q_\varkappa(\alpha)/\partial\hat{Z}_s\,\partial R_{kl}$ в этом случае пропорциональны соответствующим квазимоментам:

$$\partial q_\varkappa(\alpha)/\partial\hat{Z}_s=-\varkappa_s c_{\varkappa-e_s},$$
$$\partial q_\varkappa(\alpha)/\partial R_{ss}=-\frac{1}{2}\,\partial^2 q_\varkappa(\alpha)/\partial\hat{Z}_s^2=-\frac{1}{2}\varkappa_s(\varkappa_s-1)\,c_{\varkappa-2e_s},$$
$$\partial q_\varkappa(\alpha)/\partial R_{su}=-\partial^2 q_\varkappa(\alpha)/\partial\hat{Z}_s\,\partial\hat{Z}_u=-\varkappa_s\varkappa_u c_{\varkappa-e_s-e_u},$$
$$\partial^2 q_\varkappa(\alpha)/\partial R_{ss}^2=\frac{1}{4}\varkappa_s(\varkappa_s-1)(\varkappa_s-2)(\varkappa_s-3)\,c_{\varkappa-4e_s},$$
$$\partial^2 q_\varkappa(\alpha)/\partial R_{ss}\partial R_{kk}=\frac{1}{4}\varkappa_s(\varkappa_s-1)\varkappa_k(\varkappa_h-1)\,c_{\varkappa-2e_s-2e_k},$$
$$\partial^2 q_\varkappa(\alpha)/\partial R_{ss}\partial R_{sl}=\frac{1}{2}\varkappa_s(\varkappa_s-1)(\varkappa_s-2)\varkappa_l c_{\varkappa-3e_s-e_l},$$
$$\partial^2 q_\varkappa(\alpha)/\partial R_{ss}\partial R_{kl}=\frac{1}{2}\varkappa_s(\varkappa_s-1)\varkappa_k\varkappa_l c_{\varkappa-2e_s-e_k-e_l},$$
$$\partial^2 q_\varkappa(\alpha)/\partial R_{su}\partial R_{sl}=\varkappa_s(\varkappa_s-1)\varkappa_u\varkappa_l c_{\varkappa-2e_s-e\ -e}$$

$$\partial^2 q_\varkappa(\alpha)/\partial R_{su}\partial R_{kl} = \varkappa_s\varkappa_u\varkappa_k\varkappa_l c_{\varkappa-e_s-e_u-e_k-e_l},$$

$$\partial^2 q_\varkappa(\alpha)/\partial\hat{Z}_s\,\partial R_{ss} = \frac{1}{2}\varkappa_s(\varkappa_s-1)(\varkappa_s-2)c_{\varkappa-3e_s},$$

$$\partial^2 q_\varkappa(\alpha)/\partial\hat{Z}_s\,\partial R_{sl} = \varkappa_s(\varkappa_s-1)\varkappa_l c_{\varkappa-2e_s-e_l},$$

$$\partial^2 q_\varkappa(\alpha)/\partial\hat{Z}_s\,\partial R_{kk} = \frac{1}{2}\varkappa_s\varkappa_k(\varkappa_k-1)c_{\varkappa-e_s-2e_k},$$

$$\partial^2 q_\varkappa(\alpha)/\partial\hat{Z}_s\,\partial R_{kl} = \varkappa_s\varkappa_k\varkappa_l c_{\varkappa-e_s-e_k-e_l}.$$

Метод квазимоментов для приближенного решения задач нелинейной фильтрации был предложен в [74].

Пример 9. Уравнения (30) для апостериорных квазимоментов в задачах примеров 7 и 8 совпадают с уравнениями для семиинвариантов, так как квазимоменты до пятого порядка включительно совпадают с соответствующими семиинвариантами (п. 2.3.3). Различие получится только при аппроксимации $p_t(z)$ отрезком разложения по полиномам Эрмита с учетом моментов (семиинвариантов) по меньшей мере до шестого порядка.

8.2.6. Сокращение числа уравнений. Изложенные в пп. 8.2.1 — 8.2.5 методы дают принципиальную возможность получить приближение к оптимальной оценке с любой степенью точности. Чем выше максимальный порядок N учитываемых моментов, семиинвариантов или квазимоментов, тем выше будет точность приближения к оптимальной оценке. Однако число уравнений, определяющих параметры апостериорного распределения, быстро растет с увеличением числа учитываемых параметров. В табл. 2 в гл. 6 (с. 411) показана зависимость числа уравнений в системе, определяющей параметры апостериорного распределения, от размерности p вектора состояния системы и наивысшего порядка учитываемых моментов, семиинвариантов или квазимоментов *). Из этой таблицы видно, что даже для вектора состояния системы сравнительно небольшой размерности, порядка 10, число уравнений, определяющих параметры апостериорного распределения, достигает 1000 при учете моментов, семиинвариантов или квазимоментов до четвертого порядка. При необходимости учета моментов, семиинвариантов или квазимоментов до 10-го порядка число уравнений достигает 1000 для четырехмерного вектора состояния. Вследствие этого изложенные приближенные методы решения уравнений оптимальной нелинейной фильтрации практически реализуемы только при невысокой размерности расширенного вектора состояния системы, включающего все переменные состояния и неизвестные параметры. Между тем число подлежащих оцениванию неизвестных параметров во многих задачах практики

---

*) Число моментов (семиинвариантов, квазимоментов) порядка r p-мерного случайного вектора равно $C^r_{p+r-1} = (p+r-1)!/r!\,(p-1)!$, а полное число моментов (семиинвариантов, квазимоментов) порядков $1, \ldots, N$ равно $C^N_{p+N} - 1 = (p+N)!/p!\,N! - 1$.

оказывается больше 100. Для таких задач практически реализуем только метод нормальной аппроксимации апостериорного распределения. В первых двух строках табл. 3 в гл. 6 (с. 411) показана зависимость числа уравнений в системе, к которой приводит метод нормальной аппроксимации, от размерности вектора состояния (расширенного) системы.

Число уравнений, приближенно определяющих апостериорное распределение вектора состояния системы Z, может быть уменьшено тем же способом, что и в п. 6.6.7. Этот способ основан на том, что взаимная зависимость компонент вектора Z характеризуется только их ковариациями. Число уравнений для параметров распределения при таком подходе показано в последних четырех строках табл. 3 в гл. 6 (с. 411).

Однако наиболее радикальное сокращение числа уравнений для параметров апостериорного распределения дает метод эллипсоидальной аппроксимации, излагаемый в п. 8.2.7. Число уравнений для параметров апостериорного распределения, к которым приводит этот метод, лишь на $N/2-1$ превышает число уравнений метода нормальной аппроксимации (в этом случае N обязательно четное).

8.2.7. Эллипсоидальная аппроксимация апостериорного распределения. Применим метод эллипсоидальной аппроксимации для приближенного решения задачи оптимальной нелинейной фильтрации. Для этого аппроксимируем апостериорную плотность $p_t(z)$ формулой

$$p_t(z)=p^*(z;\ \theta)=w_1(u)\left[1+\sum_{\nu=2}^{N} c_\nu p_\nu(u)\right],\quad u=(z^{\mathrm{T}}-\hat{Z}^{\mathrm{T}})\,C\,(z-\hat{Z}),\tag{35}$$

где C — матрица, обратная по отношению к ковариационной матрице ошибки фильтрации R, $C=R^{-1}$.

На основании формулы (6.97)

$$c_\varkappa=\left[q_\nu\left(\left(\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{i\,\partial\lambda}-\hat{Z}^{\mathrm{T}}\right)C\left(\frac{\partial}{i\,\partial\lambda}-\hat{Z}\right)\right)g_t(\lambda)\right]_{\lambda=0}.$$

Чтобы найти стохастический дифференциал $c_\varkappa$, применим формулу Ито (3.61), учитывая, что $c_\varkappa$ представляет собой функцию трех случайных процессов $\hat{Z}(t)$, $R(t)$, $g_t(\lambda)$, стохастические дифференциалы Ито которых определяются формулами (27), (28) и (7.16). В результате получим уравнение (30), которое на основанич равенства $q_\varkappa(\alpha)=Mq_\varkappa(U)$ перепишем в виде

$$dc_\varkappa=\left\{F_\varkappa+\sum_{s=1}^{p} M\frac{\partial q_\varkappa(U)}{\partial\hat{Z}_s}f_s+\sum_{s,\,u=1}^{p} M\frac{\partial q_\varkappa(U)}{\partial R_{su}}\left(f_{su}^{(2)}-h_s\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}h_u^{\mathrm{T}}\right)+\right.$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{s,\,u=1}^{p} M\frac{\partial^2 q_\varkappa(U)}{\partial\hat{Z}_s\partial\hat{Z}_u}h_s\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}h_u^{\mathrm{T}}+\frac{1}{2}\sum_{s,\,u,\,k,\,l=1}^{p} M\frac{\partial^2 q_\varkappa(U)}{\partial R_{su}\,\partial R_{kl}}\eta_{su}\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}\eta_{kl}^{\mathrm{T}}+$$

$$+\sum_{s,k,l=1}^{p} M\frac{\partial^2 q_\varkappa(U)}{\partial\hat{Z}_s\partial R_{kl}}h_s\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}\eta_{kl}^{\mathrm{T}}\Big\}dt+$$

$$+\left\{H_\varkappa+\sum_{s=1}^{p} M\frac{\partial q_\varkappa(U)}{\partial\hat{Z}_s}h_s+\sum_{s,u=1}^{p} M\frac{\partial q_\varkappa(U)}{\partial R_{su}}\eta_{su}\right\}(dY-f^{(1)}dt).$$

Вычислим входящие сюда математические ожидания производных полинома $q_\varkappa(U)$. Совершенно так же, как в п. 6.7.2, находим

$$M\frac{\partial q_\varkappa(U)}{\partial\hat{Z}_s}=Mq'_\varkappa(U)\frac{\partial U}{\partial\hat{Z}_s}=Mq'_\varkappa(U)\left(-2\sum_{j=1}^{p}c_{sj}(Z_j-\hat{Z}_j)\right)=0. \tag{36}$$

Далее находим

$$M\frac{\partial^2 q_\varkappa(U)}{\partial\hat{Z}_s\partial\hat{Z}_u}=$$

$$=M\left[4q''_\varkappa(U)\left(\sum_{j=1}^{p}c_{uj}(Z_j-\hat{Z}_j)\right)\left(\sum_{j=1}^{p}c_{sj}(Z_j-\hat{Z}_j)\right)+2q'_\varkappa(U)c_{su}\right]. \tag{37}$$

Таким же путем, как в п. 6.7.2, находим

$$Mq''_\varkappa(U)C(Z-\hat{Z})(Z^{\mathrm{T}}-\hat{Z}^{\mathrm{T}})C=$$

$$=\left\{\frac{a}{p}\int_0^\infty q''_\varkappa(u)\,u^{p/2}w_1(u)\,du+\sum_{\nu=2}^{N}c_\nu\frac{a}{p}\int_0^\infty q''_\varkappa(u)\,p_\nu(u)\,u^{p/2}w_1(u)\,du\right\}C, \tag{38}$$

где нормирующий множитель a определяется соотношением (6.110). Вводя обозначения

$$\xi_{\varkappa 0}=\frac{a}{p}\int_0^\infty q''_\varkappa(u)\,u^{p/2}w_1(u)\,du,\quad \xi_{\varkappa\nu}=\frac{a}{p}\int_0^\infty q''_\varkappa(u)\,p_\nu(u)\,u^{p/2}w_1(u)\,du \tag{39}$$

и заметив, что вследствие ортогональности $p_\nu(u)$ ко всем функциям u^λ при $\lambda<\nu$ величина $\xi_{\varkappa\nu}$ обращается в нуль при $\nu>\varkappa-1$, получаем

$$Mq''_\varkappa(U)C(Z-\hat{Z})(Z^{\mathrm{T}}-\hat{Z}^{\mathrm{T}})C=\left(\xi_{\varkappa 0}+\sum_{\nu=2}^{\varkappa-1}c_\nu\xi_{\varkappa\nu}\right)C. \tag{40}$$

На основании (40)

$$4Mq''_\varkappa(U)\left(\sum_{j=1}^{p}c_{uj}(Z_j-\hat{Z}_j)\right)\left(\sum_{j=1}^{p}c_{sj}(Z_j-\hat{Z}_j)\right)=4\left(\xi_{\varkappa 0}+\sum_{\nu=2}^{\varkappa-1}c_\nu\xi_{\varkappa\nu}\right)c_{su}. \tag{41}$$

Математическое ожидание во втором слагаемом в (37) определяется формулой

$$Mq'_\varkappa(U)=\int_{-\infty}^{\infty}q'_\varkappa(u)\,u^{p/2-1}w_1(u)\left[1+\sum_{\nu=2}^{N}c_\nu p_\nu(u)\right]du. \tag{42}$$

Вводя обозначения

$$\zeta'_{\varkappa 0} = a \int_0^\infty q'_\varkappa(u)\, u^{p/2-1} w_1(u)\, du, \qquad \zeta'_{\varkappa\nu} = a \int_0^\infty q'_\varkappa(u)\, p_\nu(u)\, u^{p/2-1} w_1(u)\, du \tag{43}$$

и заметив, что вследствие ортогональности $p_\nu(u)$ ко всем функциям u^λ при $\lambda < \nu$ величина $\zeta_{\varkappa\nu}$ обращается в нуль при $\nu > \varkappa - 1$, получаем

$$Mq'_\varkappa(U) = \zeta'_{\varkappa 0} + \sum_{\nu=2}^{\varkappa-1} c_\nu \zeta'_{\varkappa\nu}. \tag{44}$$

На основании (41) и (44) формула (37) принимает вид

$$M\frac{\partial^2 q_\varkappa(U)}{\partial \hat{Z}_s \partial \hat{Z}_u} = 2\left(\zeta_{\varkappa 0} + \sum_{\nu=2}^{\varkappa-1} c_\nu \zeta_{\varkappa\nu}\right) c_{su}, \tag{45}$$

где для краткости положено

$$\zeta_{\varkappa 0} = 2\xi_{\varkappa 0} + \zeta'_{\varkappa 0}, \quad \zeta_{\varkappa\nu} = 2\xi_{\varkappa\nu} + \zeta'_{\varkappa\nu}.$$

Вычисление производных $\partial q_\varkappa(U)/\partial R_{su}$ ничем не отличается от аналогичных вычислений в п. 6.7.2. В результате получаем

$$M\frac{\partial q_\varkappa(U)}{\partial R_{ss}} = -c_{ss}\left(\gamma_{\varkappa 0} + \sum_{\nu=2}^{\varkappa} c_\nu \gamma_{\varkappa\nu}\right) \tag{46}$$

и

$$M\frac{\partial q_\varkappa(U)}{\partial R_{su}} = -2c_{su}\left(\gamma_{\varkappa 0} + \sum_{\nu=2}^{\varkappa} c_\nu \gamma_{\varkappa\nu}\right), \quad s \neq u, \tag{47}$$

где $\gamma_{\varkappa 0}, \gamma_{\varkappa 2}, \ldots, \gamma_{\varkappa\varkappa}$ определяются формулами (6.112).

Дифференцируя эти формулы по компонентам вектора $\hat{Z}$ и элементам матрицы R и имея в виду, что (п. 6.7.2)

$$\frac{\partial c_{ij}}{\partial R_{rr}} = -c_{ri}c_{rj}, \qquad \frac{\partial c_{ij}}{\partial R_{rs}} = -(c_{ri}c_{sj} + c_{si}c_{rj}),$$

получаем

$$M\frac{\partial^2 q_\varkappa(U)}{\partial \hat{Z}_k \partial R_{su}} = 0 \qquad (k,\ s,\ u = 1, \ldots, p), \tag{48}$$

$$M\frac{\partial^2 q_\varkappa(U)}{\partial R_{ss}\, \partial R_{rr}} = c_{rs}^2\left(\gamma_{\varkappa 0} + \sum_{\nu=2}^{\varkappa} c_\nu \gamma_{\varkappa\nu}\right), \tag{49}$$

$$M\frac{\partial^2 q_\varkappa(U)}{\partial R_{ss}\, \partial R_{kl}} = 2c_{ls}c_{ks}\left(\gamma_{\varkappa 0} + \sum_{\nu=2}^{\varkappa} c_\nu \gamma_{\varkappa\nu}\right), \quad k \neq l, \tag{50}$$

$$M\frac{\partial^2 q_\varkappa(U)}{\partial R_{su}\, \partial R_{kl}} = 2(c_{ks}c_{lu} + c_{ls}c_{ku})\left(\gamma_{\varkappa 0} + \sum_{\nu=2}^{\varkappa} c_\nu \gamma_{\varkappa\nu}\right), \ s \neq u, \ k \neq l. \tag{51}$$

Подставив выражения (36), (45)—(51) в уравнение для стохастического дифференциала величины $c_\varkappa$, приведем его к виду

$$dc_\varkappa = \Big\{ F_\varkappa - \Big(\gamma_{\varkappa 0} + \sum_{\nu=2}^{\varkappa} c_\nu \gamma_{\varkappa\nu} \Big) \operatorname{tr} [\overline{C} (f^{(2)} - h\psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}} h^{\mathrm{T}})] + \\ + \Big(\zeta_{\varkappa 0} + \sum_{\nu=2}^{\varkappa-1} c_\nu \zeta_{\varkappa\nu} \Big) \operatorname{tr} [C h \psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}} h^{\mathrm{T}}] + \\ + \frac{1}{2} \Big(\gamma_{\varkappa 0} + \sum_{\nu=2}^{\varkappa} c_\nu \gamma_{\varkappa\nu} \Big) \sum_{s,\,u,\,k,\,l=1}^{p} A_{sukl} \eta_{su} \psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}} \eta_{kl}^{\mathrm{T}} \Big\} dt + \\ + \Big\{ H_\varkappa - \Big(\gamma_{\varkappa 0} + \sum_{\nu=2}^{\varkappa} c_\nu \gamma_{\varkappa\nu} \Big) \sum_{s,\,u=1}^{p} \overline{c}_{su} \eta_{su} \Big\} (dY - f^{(1)} dt) \quad (52)$$
$$(\varkappa = 2, \ldots, N),$$

где

$$A_{ssrr} = c_{rs}^2, \quad A_{sskl} = 2 c_{ks} c_{ls}, \quad k \neq l, \\ A_{sukl} = 2 (c_{ks} c_{lu} + c_{ls} c_{ku}), \quad s \neq u, \ k \neq l, \quad (53)$$

$\overline{c}_{su}$ — элементы матрицы $\overline{C}$, определяемой формулой (6.113).

Формулы (15)—(19) для f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, h и ρ_r при аппроксимации (35) апостериорной плотности принимают вид

$$f = f(Y, \theta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(Y, z, t) w_1(u) \Big[1 + \sum_{\nu=2}^{N} c_\nu p_\nu(u) \Big] dz, \quad (54)$$

$$f^{(1)} = f^{(1)}(Y, \theta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(Y, z, t) w_1(u) \Big[1 + \sum_{\nu=2}^{N} c_\nu p_\nu(u) \Big] dz, \quad (55)$$

$$f^{(2)} = f^{(2)}(Y, \theta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} [(z - \hat{Z}) \varphi(Y, z, t)^{\mathrm{T}} + \varphi(Y, z, t)(z^{\mathrm{T}} - \hat{Z}^{\mathrm{T}}) + \\ + (\psi \nu \psi^{\mathrm{T}})(Y, z, t)] w_1(u) \Big[1 + \sum_{\nu=2}^{N} c_\nu p_\nu(u) \Big] dz, \quad (56)$$

$$h = h(Y, \theta, t) = \Big\{ \int_{-\infty}^{\infty} [z \varphi_1(Y, z, t)^{\mathrm{T}} + (\psi \nu \psi_1^{\mathrm{T}})(Y, z, t)] \times \\ \times w_1(u) \Big[1 + \sum_{\nu=2}^{N} c_\nu p_\nu(u) \Big] dz - \hat{Z} f^{(1)\,\mathrm{T}} \Big\} (\psi_1 \nu \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y, t), \quad (57)$$

$$\rho_r = \rho_r(Y, \theta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \{ (z - \hat{Z})(z^{\mathrm{T}} - \hat{Z}^{\mathrm{T}}) a_r(Y, z, t) + \\ + (z - \hat{Z}) b_r(Y, z, t)^{\mathrm{T}} + b_r(Y, z, t)(z^{\mathrm{T}} - \hat{Z}^{\mathrm{T}}) \} w_1(u) \Big[1 + \sum_{\nu=2}^{N} c_\nu p_\nu(u) \Big] dz. \\ (58)$$

Формулы (31), (32) для $F_\varkappa$ и $H_\varkappa$ совершенно так же, как формула (6.118) была преобразована к виду (6.119), преобразуются к виду

$$F_\varkappa = F_\varkappa(Y,\ \theta,\ t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} q'_\varkappa(u)\,\{2\varphi(Y,\ z,\ t)^{\mathrm{T}} C(z-\hat{Z}) + \\ + \operatorname{tr}[C\sigma(Y,\ z,\ t)]\}\,w_1(u)\left[1+\sum_{\nu=2}^{N} c_\nu p_\nu(u)\right]dz + \\ + 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} q''_\varkappa(u)\,(z^{\mathrm{T}}-\hat{Z}^{\mathrm{T}})C\sigma(Y,\ z,\ t)\,C(z-\hat{Z})\,w_1(u)\left[1+\sum_{\nu=2}^{N} c_\nu p_\nu(u)\right]dz, \tag{59}$$

$$H_\varkappa = H_\varkappa(Y,\ \theta,\ t) = \left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(Y,\ z,\ t)^{\mathrm{T}} q_\varkappa(u)\,w_1(u)\left[1+\sum_{\nu=2}^{N} c_\nu p_\nu(u)\right]dz + \right. \\ + 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} q'_\varkappa(u)\,(z^{\mathrm{T}}-\hat{Z}^{\mathrm{T}})\,C\,(\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})(Y,\ z,\ t)\,w_1(u)\times \\ \left.\times\left[1+\sum_{\nu=2}^{N} c_\nu p_\nu(u)\right]dz - f^{(1)\,\mathrm{T}} c_\varkappa\right\}(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y,\ t). \tag{60}$$

§ 8.3. Методы, основанные на упрощении уравнений оптимальной фильтрации

8.3.1. Способы упрощения уравнений оптимальной фильтрации. Теперь изучим другие методы получения субоптимальных фильтров. Первые попытки распространить линейную фильтрацию Калмана на нелинейные системы, естественно, основаны на линеаризации уравнений (1). Наиболее удачными следует признать два способа линеаризации уравнений (1). Первый способ основан на линеаризации уравнений (1) относительно вектора состояния Z в окрестности его оценки $\hat{Z}$. Этот способ приводит к так называемому *обобщенному фильтру Калмана—Бьюси*. Другой способ основан на статистической линеаризации уравнений (1). В обоих случаях порядок фильтра равен $p(p+3)/2$ вместо p в случае линейных уравнений (1) *). Это происходит из-за того, что уравнение для R в этих случаях зависит от результатов наблюдений, вследствие чего это уравнение не может быть заранее проинтегрировано отдельно и его приходится интегрировать совместно с уравнением для оценки $\hat{Z}$.

Желание повысить точность оценивания вектора состояния системы Z ведет к различным попыткам получить из (7.21) и (7.25)

*) Число уравнений первого порядка в системе уравнений фильтра называется *порядком фильтра*.

замкнутые приближенные уравнения для $\hat{Z}$ и R с помощью разложения в ряд функций $\varphi(y, z, t)$, $\varphi_1(y, z, t)$ и $\psi(y, z, t)$ относительно z и отбрасывания членов высших степеней, которые не могут быть выражены через $\hat{Z}$ и R. Все методы, полученные таким способом, дают фильтры того же порядка, что и метод нормальной аппроксимации.

8.3.2. Обобщенный фильтр Калмана — Бьюси. Естественно возникает мысль применить для приближенного решения задач нелинейной фильтрации теорию линейной фильтрации к линеаризованной системе. Конечно, при этом возникает вопрос: в окрестности какой функции $z(t)$ производить линеаризацию уравнений системы (1)? Ясно, что однозначного ответа на этот вопрос быть не может. Однако стало общепринятым линеаризовать уравнения в окрестности неизвестной оценки $\hat{Z}(t)$. При этом придется линеаризовать только коэффициенты при dt в (1), т. е. функции $\varphi(y, z, t)$ и $\varphi_1(y, z, t)$ относительно z, а функцию $\psi(y, z, t)$ принять равной $\psi(y, \hat{Z}_t, t)$, так как если этого не сделать, то второе уравнение (1) не будет линейным относительно Z и dW.

► На основании приведенных рассуждений заменим уравнения (1) приближенными уравнениями

$$\begin{aligned} dY &= [\varphi_1(Y, \hat{Z}, t) + \varphi_{1z}(Y, \hat{Z}, t)^{\tau}(Z - \hat{Z})]\,dt + \psi_1(Y, t)\,dW, \\ dZ &= [\varphi(Y, \hat{Z}, t) + \varphi_z(Y, \hat{Z}, t)^{\tau}(Z - \hat{Z})]\,dt + \psi(Y, \hat{Z}, t)\,dW, \end{aligned}$$

где $\varphi_z(y, z, t)$ и $\varphi_{1z}(y, z, t)$ — как всегда, матрицы производных компонент векторных функций φ и φ_1 по компонентам вектора z,

$$\varphi_z(y, z, t) = \frac{\partial}{\partial z}\varphi(y, z, t)^{\tau}, \qquad \varphi_{1z}(y, z, t) = \frac{\partial}{\partial z}\varphi_1(y, z, t)^{\tau}.$$

Если рассматривать оценку $\hat{Z}$ как известную функцию времени t, то полученные уравнения представляют собой частный случай уравнений (7.41), для которых задача оптимальной фильтрации была решена в [49] (п. 7.3.9). Оптимальная оценка $\hat{Z}$ и апостериорная ковариационная матрица R ошибки в этом случае определяются уравнениями (7.43) и (7.44) при

$$\begin{aligned} a(Y, t)Z + a_0(Y, t) &= \varphi(Y, \hat{Z}, t) + \varphi_z(Y, \hat{Z}, t)^{\tau}(Z - \hat{Z}), \\ b(Y, t)Z + b_0(Y, t) &= \varphi_1(Y, \hat{Z}, t) + \varphi_{1z}(Y, \hat{Z}, t)^{\tau}(Z - \hat{Z}). \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (7.43) и (7.44), получим приближенные уравнения для $\hat{Z}$ и R:

$$d\hat{Z} = \varphi(Y, \hat{Z}, t)\,dt + h(Y, \hat{Z}, R, t)\,[dY - \varphi_1(Y, \hat{Z}, t)\,dt], \tag{61}$$

$$\begin{aligned} dR = \{&\varphi_z(Y, \hat{Z}, t)^{\tau}R + R\varphi_z(Y, \hat{Z}, t) + (\psi\nu\psi^{\tau})(Y, \hat{Z}, t) - \\ &- h(Y, \hat{Z}, R, t)(\psi_1\nu\psi_1^{\tau})(Y, t)\,h(Y, \hat{Z}, R, t)^{\tau}\}\,dt, \end{aligned} \tag{62}$$

где

$$h(Y, \hat{Z}, R, t) = \{R\varphi_{1z}(Y, \hat{Z}, t) + (\psi\nu\psi_1^{\text{т}})(Y, \hat{Z}, t)\}(\psi_1\nu\psi_1^{\text{т}})^{-1}(Y, t). \blacktriangleleft \quad (63)$$

Уравнения (61) и (62) определяют фильтр, обычно называемый *обобщенным фильтром Калмана — Бьюси.*

Так же, как и уравнения (7.43) и (7.44), уравнения (61) и (62) должны интегрироваться совместно при начальных условиях $\hat{Z}(t_0) = \hat{Z}_0 = M[Z_0 \mid Y_0]$, $R(t_0) = R_0 = M[(Z_0 - \hat{Z}_0)(Z_0^{\text{т}} - \hat{Z}_0^{\text{т}}) \mid Y_0]$. Таким образом, обобщенный фильтр Калмана — Бьюси имеет порядок $p(p+3)/2$, тот же, что и приближенно оптимальный фильтр метода нормальной аппроксимации апостериорного распределения п. 8.1.3.

В приложениях обычно рассматривается более простая задача, когда функции φ, ψ, φ_1 и ψ_1 в уравнениях (1) не зависят от Y и процесс $W(t)$ состоит из двух независимых блоков, один из которых входит только в первое, а другой — только во второе уравнение (1). В этом случае $\psi = [\psi' \ 0]$, $\psi_1 = [0 \ \psi_1']$, $W = [W_1^{\text{т}} W_2^{\text{т}}]^{\text{т}}$, так что

$$\psi\, dW = \psi' dW_1,$$

$$\psi_1\, dW = \psi_1' dW_2, \quad \psi\nu\psi^{\text{т}} = \psi'\nu_1\psi'^{\text{т}}, \quad \psi\nu\psi_1^{\text{т}} = 0, \quad \psi_1\nu\psi_1^{\text{т}} = \psi_1'\nu_2\psi_1'^{\text{т}}.$$

Уравнения (1) при этом принимают вид

$$\dot{Z} = \varphi(Z, t) + \psi'(Z, t)V_1, \quad X = \dot{Y} = \varphi_1(Z, t) + \psi_1'(t)V_2. \quad (64)$$

Эти уравнения сводятся в результате линеаризации функций φ, φ_1 и замены Z в выражении ψ' оценкой $\hat{Z}$ к уравнениям (7.33) задачи Калмана — Бьюси. Уравнения (61) и (62) обобщенного фильтра Калмана — Бьюси принимают в этом случае вид

$$\dot{\hat{Z}} = \varphi(\hat{Z}, t) + R\varphi_{1z}(\hat{Z}, t)(\psi_1\nu_2\psi_1^{\text{т}})^{-1}(t)[X - \varphi_1(\hat{Z}, t)], \quad (65)$$

$$\dot{R} = \varphi_z(\hat{Z}, t)^{\text{т}} R + R\varphi_z(\hat{Z}, t) + (\psi\nu_1\psi^{\text{т}})(\hat{Z}, t) - \\ - R\varphi_{1z}(\hat{Z}, t)(\psi_1\nu_2\psi_1^{\text{т}})^{-1}(t)\varphi_{1z}(\hat{Z}, t)^{\text{т}} R. \quad (66)$$

В таком виде уравнения обобщенного фильтра Калмана — Бьюси обычно и применяются в задачах практики.

Уравнения (65) и (66) можно также вывести из общих формул (7.21) и (7.25) при принятых предположениях, подставив в них выражения

$$\varphi(z, t) = \varphi(\hat{Z}, t) + \varphi_z(\hat{Z}, t)^{\text{т}}(z - \hat{Z}),$$

$$\varphi_1(z, t) = \varphi_1(\hat{Z}, t) + \varphi_{1z}(\hat{Z}, t)^{\text{т}}(z - \hat{Z}),$$

$$\psi_{kl}(z, t) = \psi_{kl}(\hat{Z}, t) + \psi_{klz}(\hat{Z}, t)^{\text{т}}(z - \hat{Z})$$

$$(k = 1, \ldots, p;\ l = 1, \ldots, q)$$

и отбросив получившийся в результате в качестве коэффициента при $dY - \hat{\varphi}_1\, dt = dY - \varphi_1(\hat{Z}, t)\, dt$ третий центральный момент, который должен быть малым, если система (64) близка к линейной. Этот второй путь предпочтительнее, так как он дает возможность строить более точные фильтры, учитывая члены высших порядков малости.

Обобщенный фильтр Калмана — Бьюси иногда называют также *фильтром первого порядка*, поскольку он основан на учете только членов первого порядка малости в разложении функций в ряд Тейлора. Конечно, слово «порядок» понимается в данном случае не как порядок системы дифференциальных уравнений, описывающей фильтр.

Пример 10. В задаче примера 1,

$$\dot{Y}=X=Z+V_2, \qquad \dot{Z}=-Z^3+ZV_1,$$

обобщенный фильтр Калмана — Бьюси описывается уравнениями

$$\dot{\hat{Z}}=-\hat{Z}^3+\nu_2^{-1}R(X-\hat{Z}), \qquad \dot{R}=-6\hat{Z}^2R+\nu_1\hat{Z}^2-\nu_2^{-1}R^2.$$

Пример 11. В задаче примера 2,

$$\dot{Y}=X=Z+V_2, \qquad \dot{Z}=-Z\Theta+V_1, \qquad \dot{\Theta}=0,$$

обобщенный фильтр Калмана — Бьюси описывается уравнениями

$$\dot{\hat{Z}}=-\hat{Z}\hat{\Theta}+\nu_2^{-1}R_{11}(X-\hat{Z}), \qquad \dot{\hat{\Theta}}=\nu_2^{-1}R_{12}(X-\hat{Z}),$$

$$\dot{R}_{11}=-2(\hat{\Theta}R_{11}+\hat{Z}R_{12})-\nu_2^{-1}R_{11}^2+\nu_1,$$

$$\dot{R}_{12}=-\hat{\Theta}R_{12}-\hat{Z}R_{22}-\nu_2^{-1}R_{11}R_{12}, \qquad \dot{R}_{22}=-\nu_2^{-1}R_{12}R_{22}.$$

8.3.3. Фильтры второго порядка.

▶ Учитывая члены второй степени относительно $z-\hat{Z}$, будем иметь *)

$$\varphi(z,t)\approx\varphi(\hat{Z},t)+\varphi_z(\hat{Z},t)^{\mathrm{T}}(z-\hat{Z})+\frac{1}{2}\varphi_{zz}(\hat{Z},t):(z-\hat{Z})(z^{\mathrm{T}}-\hat{Z}^{\mathrm{T}}),$$

$$\varphi_1(z,t)\approx\varphi_1(\hat{Z},t)+\varphi_{1z}(\hat{Z},t)^{\mathrm{T}}(z-\hat{Z})+\\ +\frac{1}{2}\varphi_{1zz}(\hat{Z},t):(z-\hat{Z})(z^{\mathrm{T}}-\hat{Z}^{\mathrm{T}}),$$

$$\psi(z,t)\approx\psi(\hat{Z},t)+\\ +\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial\psi}{\partial z_k}(\hat{Z},t)(z_k-\hat{Z}_k)+\frac{1}{2}\sum_{k,\,l=1}^{p}\frac{\partial^2\psi}{\partial z_k\,\partial z_l}(\hat{Z},t)(z_k-\hat{Z}_k)(z_l-\hat{Z}_l).$$

Вычислим для этого случая по отдельности все слагаемые в правых частях формул (7.21) и (7.25), которые при принятых

---

*) Здесь используется обозначение (3.63), согласно которому $\varphi_{zz}(\hat{Z},t):(z-\hat{Z})(z^{\mathrm{T}}-\hat{Z}^{\mathrm{T}})=[\mathrm{tr}\{\varphi_{1zz}(\hat{Z},t)(z-\hat{Z})(z^{\mathrm{T}}-\hat{Z}^{\mathrm{T}})\}\dots\mathrm{tr}\{\varphi_{mzz}(\hat{Z},t)(z-\hat{Z})(z^{\mathrm{T}}-\hat{Z}^{\mathrm{T}})\}]^{\mathrm{T}}$.

допущениях имеют вид

$$d\hat{Z} = \hat{\varphi}\, dt + M\left[Z\{\varphi_1(Z,\ t)^{\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}}\} \mid Y_{t_0}^t\right](\psi_1' \nu_2 \psi_1'^{\mathrm{T}})^{-1}(t)\,(dY - \hat{\varphi}_1\, dt), \quad (67)$$

$$\begin{aligned} dR = \{M[(Z - \hat{Z})\,\varphi(Z,\ t)^{\mathrm{T}} + \varphi(Z,\ t)\,(Z^{\mathrm{T}} - \hat{Z}^{\mathrm{T}}) +{} \\ + (\psi' \nu_1 \psi'^{\mathrm{T}})(Z,\ t) \mid Y_{t_0}^t] - M[Z\{\varphi_1(Z,\ t)^{\mathrm{T}} -{} \\ - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}}\} \mid Y_{t_0}^t](\psi_1' \nu_2 \psi_1'^{\mathrm{T}})(t)\, M[\{\varphi_1(Z,\ t) - \hat{\varphi}_1\} Z^{\mathrm{T}} \mid Y_{t_0}^t]\}\, dt +{} \\ + M[(Z - \hat{Z})(Z^{\mathrm{T}} - \hat{Z}^{\mathrm{T}})\{\varphi_1(Z,\ t)^{\mathrm{T}} -{} \\ - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}}\} \mid Y_{t_0}^t](\psi_1' \nu_2 \psi_1'^{\mathrm{T}})^{-1}(t)\,(dY - \hat{\varphi}_1\, dt). \quad (68) \end{aligned}$$

В результате будем иметь

$$\hat{\varphi} \approx \varphi(\hat{Z},\ t) + \frac{1}{2}\varphi_{zz}(\hat{Z},\ t)\colon R,$$

$$\hat{\varphi}_1 \approx \varphi_1(\hat{Z},\ t) + \frac{1}{2}\varphi_{1zz}(\hat{Z},\ t)\colon R,$$

$$\begin{aligned} & M[Z\{\varphi_1(Z,\ t)^{\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}}\} \mid Y_{t_0}^t] = \\ & \qquad = M[(Z - \hat{Z})\{\varphi_1(Z,\ t)^{\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}}\} \mid Y_{t_0}^t] \approx R\varphi_{1z}(\hat{Z},\ t), \\ & M[(Z - \hat{Z})\,\varphi(Z,\ t)^{\mathrm{T}} \mid Y_{t_0}^t] \approx R\varphi_z(\hat{Z},\ t), \\ & M[(\psi' \nu_1 \psi'^{\mathrm{T}})(Z,\ t) \mid Y_{t_0}^t] \approx (\psi' \nu_1 \psi'^{\mathrm{T}})(\hat{Z},\ t) +{} \\ & \quad + \sum_{k,\, l=1}^{p} \left\{\frac{\partial \psi'}{\partial z_k}(\hat{Z},\ t)\, \nu\, \frac{\partial \psi'^{\mathrm{T}}}{\partial z_l}(\hat{Z},\ t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \psi'}{\partial z_k \partial z_l}(\hat{Z},\ t)\, \nu \psi'(\hat{Z},\ t)^{\mathrm{T}} +{} \right. \\ & \qquad \left. + \frac{1}{2}\psi'(\hat{Z},\ t)\, \nu\, \frac{\partial^2 \psi'^{\mathrm{T}}}{\partial z_k \partial z_l}(\hat{Z},\ t)\right\} R_{kl} = \\ & \quad = (\psi' \nu_1 \psi'^{\mathrm{T}})(\hat{Z},\ t) + \frac{1}{2}[\psi_{zz}'(\hat{Z},\ t)\colon R]\, \nu_1 \psi'(\hat{Z},\ t)^{\mathrm{T}} +{} \\ & \quad + \frac{1}{2}\psi'(\hat{Z},\ t)\, \nu_1 [\psi_{zz}'(\hat{Z},\ t)\colon R]^{\mathrm{T}} + \sum_{k,\, l=1}^{p} \left(\frac{\partial \psi'}{\partial z_k}\nu_1 \frac{\partial \psi'^{\mathrm{T}}}{\partial z_l}\right)(\hat{Z},\ t)\, R_{kl}, \\ & M[(Z - \hat{Z})(Z^{\mathrm{T}} - \hat{Z}^{\mathrm{T}})\{\varphi_{1r}(Z,\ t) - \hat{\varphi}_{1r}\} \mid Y_{t_0}^t] \approx \\ & \quad \approx \frac{1}{2}\sum_{k,\, l=1}^{p} \frac{\partial^2 \varphi_{1r}}{\partial z_k \partial z_l}(\hat{Z},\ t)\, \{M[(Z - \hat{Z})(Z^{\mathrm{T}} - \hat{Z}^{\mathrm{T}})(Z_k - \hat{Z}_k) \times{} \\ & \qquad \times (Z_l - \hat{Z}_l) \mid Y_{t_0}^t] - RR_{kl}\}. \quad (69) \end{aligned}$$

Если в последнем выражении пренебречь центральными моментами четвертого порядка, то неизбежно придется пренебречь и произведением моментов второго порядка RR_{kl}, так как в силу известного неравенства теории вероятностей (TB, п. 3.3.4)

$$R_{kl}^2 = \{M[(Z_k - \hat{Z}_k)(Z_l - \hat{Z}_l) \mid Y_{t_0}^t]\}^2 \leqslant M[(Z_k - \hat{Z}_k)^2 (Z_l - \hat{Z}_l)^2 \mid Y_{t_0}^t].$$

Таким образом, последним слагаемым в правой части уравнения (68) следует пренебречь. Тогда, подставив полученные выражения в (67) и (68), приходим к уравнениям

$$\dot{\hat{Z}} = \varphi(\hat{Z}, t) + \frac{1}{2}\varphi_{zz}(\hat{Z}, t)\colon R + R\varphi_{1z}(\hat{Z}, t)(\psi_1'\nu_2\psi_1'^{\mathrm{T}})^{-1}(t)\left[X - \varphi_1(\hat{Z}, t) - \frac{1}{2}\varphi_{1zz}(\hat{Z}, t)\colon R\right], \tag{70}$$

$$\dot{R} = R\varphi_z(\hat{Z}, t) + \varphi_z(\hat{Z}, t)^{\mathrm{T}} R + (\psi'\nu_1\psi'^{\mathrm{T}})(\hat{Z}, t) + \frac{1}{2}[\psi_{zz}'(\hat{Z}, t)\colon R]\,\nu_1\psi'(\hat{Z}, t)^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}\psi'(\hat{Z}, t)\,\nu_1[\psi_{zz}'(\hat{Z}, t)\colon R]^{\mathrm{T}} + \sum_{k,\,l=1}^{p}\left(\frac{\partial\psi_1'}{\partial z_k}\nu_1\frac{\partial\psi_1'^{\mathrm{T}}}{\partial z_l}\right)(\hat{Z}, t)\,R_{kl} - R\varphi_{1z}(\hat{Z}, t)(\psi_1'\nu_2\psi_1'^{\mathrm{T}})^{-1}(t)\,\varphi_{1z}(\hat{Z}, t)^{\mathrm{T}} R. \blacktriangleleft \tag{71}$$

Фильтр, определяемый уравнениями (70) и (71), обычно называется *модифицированным фильтром второго порядка*. В отличие от этого фильтра, *усеченным фильтром второго порядка* называется фильтр, который получается, если, пренебрегая моментами четвертого порядка в фигурных скобках в (69), учесть слагаемое $-RR_{kl}$. Как было показано, этого нельзя делать, так как это может привести к изменению знака слагаемых в уравнении (68). Неудивительно поэтому, что в задачах практики усеченный фильтр второго порядка дает плохие результаты. Поэтому мы будем рассматривать только модифицированные фильтры второго порядка и называть их просто *фильтрами второго порядка*.

Пример 12. В задаче примера 1,

$$\dot{Y} = X = Z + V_2, \quad \dot{Z} = -Z^3 + ZV_1,$$

уравнения фильтра второго порядка (70), (71) имеют вид

$$\dot{\hat{Z}} = -\hat{Z}^3 - 3\hat{Z}R + \nu_2^{-1}R(X - \hat{Z}), \quad \dot{R} = -6\hat{Z}^2R + \nu_1(\hat{Z}^2 + R) - \nu_2^{-1}R^2.$$

Пример 13. В задаче примера 2,

$$\dot{Y} = X = Z + V_2, \quad \dot{Z} = -Z\Theta + V_1, \quad \dot{\Theta} = 0,$$

равнения фильтра второго порядка (70), (71) имеют вид

$$\begin{aligned}
&\dot{\hat{Z}} = -\hat{Z}\hat{\Theta} - R_{12} + \nu_2^{-1}R_{11}(X - \hat{Z}), \quad \dot{\hat{\Theta}} = \nu_2^{-1}R_{12}(X - \hat{Z}),\\
&\dot{R}_{11} = -2(\hat{\Theta}R_{11} + \hat{Z}R_{12}) - \nu_2^{-1}R_{11}^2 + \nu_1,\\
&\dot{R}_{12} = -\hat{\Theta}R_{12} - \hat{Z}R_{22} - \nu_2^{-1}R_{11}R_{12},\\
&\dot{R}_{22} = -\nu_2^{-1}R_{12}R_{22}.
\end{aligned}$$

8.3.4. Гауссов фильтр. Точность приближения фильтра второго порядка к оптимальному можно повысить, если, оставаясь в рамках второго приближения в разложениях функций φ, φ_1 и ψ в ряд Тейлора, сохранить в уравнении (68) слагаемые с центральными моментами четвертого порядка в коэффициенте при $dY - \hat{\varphi}_1\,dt$ и в выражении $\psi\nu\psi^{\mathrm{T}}$. При этом естественно, предполагая систему близкой к линейной и, как следствие этого, апостериорное распределение вектора ее состояния близким к нормальному, заменить центральные моменты четвертого порядка их выражениями через элементы ковариационной матрицы R, соответствующими нормальному распределению. Тогда, принимая во внимание, что для нормального апостериорного распределения (TB, пример 4.34)

$$M\left[(Z_r-\hat{Z}_r)(Z_s-\hat{Z}_s)(Z_k-\hat{Z}_k)(Z_l-\hat{Z}_l)\,|\,Y_{t_0}^t\right]= \\ =R_{rs}R_{kl}+R_{rk}R_{sl}+R_{rl}R_{sk},$$

получим в уравнении (71) дополнительные слагаемые

$$\frac{1}{2}\left[\psi'_{zz}(\hat{Z},\ t):\ R\right]\nu_1\left[\psi'_{zz}(\hat{Z},\ t):\ R\right]^{\mathrm{T}}+ \\ +\sum_{k,\,l,\,r,\,s=1}^{p}\frac{\partial^2\psi'}{\partial z_k\,\partial z_l}(\hat{Z},\ t)\,\nu_1\,\frac{\partial^2\psi'^{\mathrm{T}}}{\partial z_r\partial z_s}(\hat{Z},\ t)\,R_{kr}R_{ls}+ \\ +\sum_{k,\,l=1}^{p}R_kR_l^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2\varphi_1^{\mathrm{T}}}{\partial z_k\,\partial z_l}(\hat{Z},t)\,(\psi_1'\nu_2\psi_1'^{\mathrm{T}})\,(t)\left[X-\varphi_1(\hat{Z},\ t)-\right. \\ \left.-\frac{1}{2}\,\varphi_{1zz}(\hat{Z},\ t):\ R\right],$$

где R_k — k-й столбец матрицы R. Полученный таким путем фильтр называется *гауссовым фильтром*.

Пример 14. В задачах примеров 12 и 13 гауссов фильтр совпадает с фильтром второго порядка вследствие того, что функции φ_1 и ψ' линейны и их вторые производные равны нулю.

8.3.5. Априорная оценка точности фильтрации. Все субоптимальные фильтры, получаемые методами §§ 8.1—8.3, описываются стохастическими дифференциальными уравнениями, которым удовлетворяют оценка $\hat{Z}$ и вспомогательные переменные, которые мы объединим в вектор S. Компонентами вектора S в уравнениях метода нормальной аппроксимации (2), (3), в уравнениях обобщенного фильтра Калмана—Бьюси (61), (62) или (65), (66), в уравнениях фильтра второго порядка (70), (71) и в уравнениях гауссова фильтра служат независимые элементы матрицы R. Компонентами вектора S в уравнениях (9) или (13), (14), (22) метода моментов служат все моменты от второго до N-го порядков, в уравнениях (13), (14), (26) метода семиинвариантов — все семиинварианты от второго до N-го порядков, в уравнениях (13), (14) и (30) метода ортогональных разложений (в частности, метода квазимоментов) — независимые элементы матрицы R и коэффициенты c_ν ($|\nu|=3,\ \ldots,\ N$) отрезка ортогонального разложения (12), аппроксимирующего апостериорную плотность $p_t(z)$.

Если подставить в уравнение приближенно оптимального фильтра выражение dY из первого уравнения (1), то уравнения фильтра вместе с уравнениями (1) будут представлять собой систему стохастических дифференциальных уравнений, определяющую составной векторный случайный процесс $[Y(t)^{\mathrm{т}}\, Z(t)^{\mathrm{т}}\, \hat{Z}(t)^{\mathrm{т}}\, S(t)^{\mathrm{т}}]^{\mathrm{т}}$. Для этой системы уравнений можно написать уравнение (5.38), определяющее одномерную характеристическую функцию, т. е. одномерное распределение процесса $[Y(t)^{\mathrm{т}}\, Z(t)^{\mathrm{т}}\, \hat{Z}(t)^{\mathrm{т}}\, S(t)^{\mathrm{т}}]^{\mathrm{т}}$. Зная это распределение, можно найти совместное распределение Z_t и $\hat{Z}_t$ и средний квадрат ошибки фильтрации $M\,|\hat{Z}-Z|^2$ и доверительные области для вектора Z при любом $t \geqslant t_0$. Таким образом, уравнение (5.38), соответствующее уравнениям фильтра, рассматриваемым совместно с уравнениями системы и наблюдения, принципиально точно определяет безусловное математическое ожидание квадрата модуля ошибки, которое характеризует точность фильтрации. Методы §§ 6.4 — 6.7 дают возможность решать уравнение (5.38) с любой степенью точности. Поэтому точность любого субоптимального фильтра и вообще любого фильтра, описываемого стохастическими дифференциальными уравнениями, можно априорно оценить методами §§ 6.4 — 6.7. При этом точность фильтрации можно характеризовать как средним квадратом ошибки, так и доверительными областями, которые всегда можно определить, зная совместное распределение Z и $\hat{Z}$. Вычисления, необходимые для такой оценки, конечно, очень сложны. Но они не включают результатов наблюдений, и для их выполнения необходимы только априорные данные. Поэтому эти вычисления приходится выполнять для каждого фильтра только один раз.

Имея возможность априорно оценивать точность любого метода приближенно оптимальной (субоптимальной) фильтрации, можно выбрать подходящий фильтр для каждой конкретной задачи заранее в процессе проектирования фильтра или алгоритма фильтрации.

Полезно заметить, что матрица R в уравнениях субоптимальных фильтров может и не быть близкой к апостериорной ковариационной матрице ошибки фильтрации. Конечно, можно рассчитывать на то, что при достаточно большом N методы моментов, семиинвариантов и квазимоментов (или более общий метод ортогональных разложений), изложенные в § 8.2, позволят приблизиться к решению задачи оптимальной фильтрации с любой степенью точности При этом матрица R будет близка к апостериорной ковариационной матрице ошибки и будет характеризовать апостериорную точность фильтрации при данных результатах наблюдений. Однако это не дает возможности оценивать точность фильтрации заранее. Вычислять апостериорную ковариационную матрицу ошибки R можно каждый раз только в процессе фильтрации. Кроме того, как уже неоднократно отмечалось, повышение порядка фильтра, особенно в многомерных задачах, приводит к невозможности реализации фильтра. Поэтому возможности методов § 8.2 не могут быть практически использованы для апостериорной оценки точности фильтрации. Пользуясь же фильтрами невысоких порядков, нельзя рассчитывать на близость матрицы R к апостериорной ковариационной матрице ошибки. В уравнениях фильтров низких порядков матрица R скорее играет роль вспомогательной переменной.

ЗАДАЧИ

8.1. Пользуясь нормальной аппроксимацией, найти алгоритмы оценивания состояния систем в задачах 6.10, 6.12—6.16 по результатам наблюдения величины Z с аддитивной помехой, представляющей собой нормально распределенный белый шум, независимый от V.

8.2. Найти субоптимальный фильтр для процесса в задаче 8.1 в случае, когда аддитивная помеха в наблюдениях представляет собой нормально распределенную случайную функцию с одной из типовых ковариационных функций п. 4.1.5.

8.3. Найти субоптимальные фильтры для оценивания: а) координат частицы, совершающей броуново движение в силовом поле, при известных A, ε, ν, б) координат частицы и неизвестных параметров A, ε, ν методами нормальной аппроксимации, моментов, семиинвариантов, квазимоментов, а также обобщенным фильтром Калмана—Бьюси, модифицированным фильтром второго порядка и гауссовым фильтром. Указание. Движение частицы описывается уравнениями примера 5.16 при $n=3$ и постоянной обобщенной массе $A(q)=A$.

8.4. В условиях задачи 7.11 найти субоптимальные фильтры для обработки показаний измерительного прибора с одновременным оцениванием параметров D и α в выражении спектральной плотности вертикальной составляющей вектора скорости ветра:

а) фильтр метода нормальной аппроксимации;

б) фильтры методов моментов, семиинвариантов и квазимоментов с учетом этих характеристик до четвертого порядка;

в) обобщенный фильтр Калмана—Бьюси, модифицированный фильтр второго порядка, гауссов фильтр.

ГЛАВА 9

УСЛОВНО ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ И ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ

§ 9.1. Задачи условно оптимальной фильтрации и экстраполяции

9.1.1. Основная идея условно оптимальной фильтрации. Практическое применение приближенных методов оптимальной фильтрации ограничивается высоким порядком фильтров, особенно в задачах большой размерности, в которых даже применение простейшего метода нормальной аппроксимации и методов § 8.3 приводит к необходимости интегрировать систему уравнений высокого порядка (см. табл. 2 на с. 411). Поэтому единственным способом получения практически реализуемых фильтров в задачах большой размерности является понижение порядка фильтров. Чтобы понять, как это может быть достигнуто, проанализируем структуру уравнения для субоптимальной оценки в методах гл. 8. Легко видеть, что все эти методы дают для оценки $\hat{Z}$ уравнение вида

$$d\hat{Z}=\alpha\xi(Y,\ \hat{Z},\ t)\,dt+\beta\eta(Y,\ \hat{Z},\ t)\,dY+\gamma\,dt, \tag{1}$$

где $\xi(Y,\ \hat{Z},\ t)$, $\eta(Y,\ \hat{Z},\ t)$ — некоторые функции текущих значений наблюдаемого процесса Y, оценки $\hat{Z}$ и времени t, а α, β и γ — некоторые функции времени. То, что они становятся известными вместе с R только после интегрирования полной системы уравнений, определяющей все неизвестные параметры функции $p^*(z;\ \theta)$, аппроксимирующей апостериорную плотность $p_t(z)$, для дальнейших рассуждений не имеет значения. Так, например, в методе нормальной аппроксимации $\xi=[f^{\mathrm{T}}-f^{(1)\,\mathrm{T}}h^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $\eta=h$. Соответственно, коэффициент α имеет блочную структуру $\alpha=[I_pI_p]$, где I_p — единственная $p\times p$-матрица, $\beta=I_p$, $\gamma=0$. Чтобы определить функцию ξ в методе ортогональных разложений п. 8.2.4, подставим в уравнение (8.13) выражения

$$f=f_0+\sum_{k=3}^{N}\sum_{|\nu|=k}f_\nu c_\nu,$$

$$f^{(1)}=f_0^{(1)}+\sum_{k=3}^{N}\sum_{|\nu|=k}f_\nu^{(1)}c_\nu,$$

$$=h_0+\sum_{k=3}^{N}\sum_{|\nu|=k}h_\nu c_\nu$$

функций f, $f^{(1)}$, h и перепишем это уравнение в виде

$$d\hat{Z} = \Bigg[f_0 - h_0 f_0^{(1)} + \sum_{k=3}^{N} \sum_{|\nu|=k} (f_\nu - h_0 f_\nu^{(1)} - h_\nu f_0^{(1)}) c_\nu - \\ - \sum_{k,\ l=3}^{N} \sum_{\substack{|\nu|=k \\ |\mu|=l}} h_\nu f_\mu^{(1)} c_\nu c_\mu \Bigg] dt + \left(h_0 + \sum_{k=3}^{N} \sum_{|\nu|=k} h_\nu c_\nu\right) dY.$$

Отсюда видно, что компонентами векторной функции ξ в этом случае служат все компоненты p-мерных векторных функций f_0, $-h_0 f_0^{(1)}$, f_ν, $-h_0 f_\nu^{(1)}$, $-h_\nu f_0^{(1)}$, $-h_\nu f_\mu^{(1)}$ $(|\nu|, |\mu| = 3, \ldots, N)$ и соответственно матрица α состоит из горизонтально расположенных диагональных блоков, первые два из которых представляют собой единичную матрицу I_p, а остальные — произведения I_p на соответствующие коэффициенты c_ν или на произведения $c_\nu c_\mu$. Если некоторые компоненты векторных функций f_0, $-h_0 f_0^{(1)}$, f_ν, $-h_0 f_\nu^{(1)}$, $-h_\nu f_0^{(1)}$, $-h_\nu f_\mu^{(1)}$ не зависят от $\hat{Z}$, то линейную комбинацию этих компонент с соответствующими столбцами матрицы α можно выделить и принять за вектор γ в (1). Матричная функция η представляет собой блочную матрицу, состоящую из всех расположенных по вертикали $p \times m$-матриц h_0, h_ν $(|\nu| = 3, \ldots, N)$, а матрица β состоит из горизонтально расположенных блоков, первый из которых представляет собой единичную матрицу I_p, а остальные — произведения I_p на соответствующие коэффициенты c_ν $(|\nu| = 3, \ldots, N)$. Аналогично можно привести к виду (1) уравнение (8.13) и при применении метода моментов или метода семиинвариантов.

Если бы коэффициенты α, β, γ в (1) были известными функциями времени, то уравнение (1) определило бы фильтр того же порядка p, что и второе уравнение (8.1), описывающее поведение системы. Поэтому естественно возникает мысль попытаться непосредственно определить коэффициенты α, β, γ в уравнении (1) как функции времени из условия минимума среднего квадрата ошибки, $M|\hat{Z}_t - Z_t|^2 = \min$, при всех $t > t_0$. Это приводит к теории условно оптимальной фильтрации, в которой уравнение фильтра задается заранее и оптимизируются только коэффициенты этого уравнения [58, 59, 61, 63, 65].

Заметим, что выбор функций ξ и η в (1) при применении методов § 8.2 не единствен. Так, например, в методе ортогональных разложений можно принять так же, как и в методе нормальной аппроксимации, $\xi = [f^T - f^{(1)\,T} h^T]^T$, $\eta = h$, $\alpha = [I_p I_p]$, $\beta = I_p$, $\gamma = 0$. То, что при этом функции ξ и η получаются зависящими от неизвестных параметров R, c_ν $(|\nu| = 3, \ldots, N)$, как будет показано дальше, не имеет существенного значения. Впрочем, чем больше компонент берется у вектора ξ и чем больше строк у матрицы η, тем точнее будет фильтрация.

9.1.2. Классы допустимых фильтров. Итак, мы пришли к идее решения задач 1 и 2 п. 7.1.5 путем нахождения оптимального фильтра в некотором классе допустимых фильтров, определяемом условием, чтобы поведение фильтра описывалось дифференциальным уравнением заданного порядка и заданной формы. Таким образом, мы отказываемся от абсолютной оптимизации и ограничиваемся условной оптимизацией в заданном ограниченном классе фильтров.

В п. 9.1.1 класс допустимых фильтров был определен уравнением (1) того же порядка p, что второе уравнение (7.5). Определив оптимальные коэффициенты α, β, γ в уравнении (1), можно оценить точность полученного условно оптимального фильтра, как показано в п. 8.3.5. Если точность фильтрации оказывается недостаточной, можно повысить порядок допустимых фильтров, например, взять за основу уравнения (8.2) и (8.3) метода нормальной аппроксимации и соответственно ввести дополнительную неизвестную матрицу R. Тогда к уравнению (1) добавится уравнение, определяющее матрицу R, и порядок фильтра повысится до $p(p+3)/2$. Компонентами векторной функции ξ будут все компоненты векторных функций f, $-hf^{(1)}$ и все независимые элементы матриц $f^{(2)}$, $-h\psi_1 v\psi_1^{\mathrm{T}} h^{\mathrm{T}}$, $-\rho_1 f_1^{(1)}$, $\ldots$, $-\rho_m f_m^{(1)}$ (число которых у каждой такой матрицы равно $p(p+1)/2$), а матричная функция η будет состоять из $m+1$ вертикально расположенных блоков, представляющих собой $p\times m$-матрицы h, ρ_1, $\ldots$, ρ_m. Само собой разумеется, фильтр метода нормальной аппроксимации будет в этом случае допустимым фильтром, у которого элементы матриц α и β равны 1 и 0 в зависимости от того, входят или не входят в соответствующие уравнения данные элементы матрицы-столбца ξ и матрицы η, а $\gamma=0$. Оптимизация коэффициентов α, β, γ в уравнениях такого фильтра даст в общем случае лучший фильтр, чем фильтр метода нормальной аппроксимации. Если точность такого условно оптимального фильтра тоже окажется недостаточной, то можно снова повысить порядок допустимых фильтров, например, добавив к уравнениям (8.13) и (8.14) уравнения (8.9), или (8.22), или (8.26), или (8.30) при некотором N, и ввести соответствующие дополнительные неизвестные. При этом полученные дифференциальные уравнения будут определять вектор $U=[\hat{Z}^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, где S — вектор, компонентами которого служат все добавленные к $\hat{Z}$ вспомогательные переменные, а оптимальная оценка вектора Z определится формулой $\hat{Z}=AU$, где $A=[I_p 0]$ (как всегда, в таких случаях 0 представляет собой матрицу, все элементы которой равны нулю). Эти соображения приводят к следующей общей схеме построения классов допустимых фильтров [64—66].

Задаются порядок $N\geqslant p$ фильтров, постоянная $p\times N$-матрица A ранга p, функция $\xi(y, u, t)$, значения которой представляют собой $r \times 1$-матрицы, функция $\eta(y, u, t)$, значения которой представляют собой $s \times m$-матрицы, и дифференциальное уравнение

$$dU = \alpha\xi(Y, U, t)\,dt + \beta\eta(Y, U, t)\,dY + \gamma\,dt \tag{2}$$

при любых функциях времени α, β, γ в качестве коэффициентов (очевидно, α представляет собой $N \times r$-матрицу, β — $N \times s$-матрицу, а γ — $N \times 1$-матрицу). Оценка вектора Z определяется формулой $\hat{Z} = AU$. В частном случае $N = p$, $A = I_p$ уравнение (2) имеет вид (1). Выбирать функции ξ и η на основе уравнений субоптимальной фильтрации предложено в [24].

9.1.3. Классы допустимых фильтров при автокоррелированной помехе в наблюдениях. Как было показано в п. 7.1.6, в случае, когда помеха в наблюдениях получается в результате преобразования белого шума формирующим фильтром, задачи фильтрации и экстраполяции приводятся к уравнениям (7.5) и (7.6) при $\psi_1 = 0$. В таком случае теория оптимальной фильтрации неприменима. Однако из результатов п. 7.2.12 и пп. 7.3.4—7.3.7 следует, что в некоторых случаях задачи фильтрации и экстраполяции приводятся к случаю белого шума в наблюдениях преобразованием наблюдаемого сигнала системой, обратной формирующему фильтру, или дифференцированием уравнения наблюдения.

В соответствии с этими результатами и в теории условно оптимальной фильтрации будем вводить в уравнения допустимых фильтров производные наблюдаемого сигнала до s-го порядка включительно, если его s-я производная содержит белый шум. При этом производные, не содержащие белого шума, могут входить в уравнения фильтров нелинейно. В этом случае задачи условно оптимальной фильтрации удается решать при произвольных уравнениях наблюдения и формирующего фильтра помехи, не требуя их линейности, как это приходится делать в теории оптимальной фильтрации.

На основании сказанного определим класс допустимых фильтров в случае автокоррелированной помехи в наблюдениях уравнением

$$d\hat{Z} = \alpha\xi(Y, \dot{Y}, \ldots, Y^{(s)}, \hat{Z}, t)\,dt + \\ + \beta\eta(Y, \dot{Y}, \ldots, Y^{(s)}, \hat{Z}, t)\,dY^{(s)} + \gamma\,dt \tag{3}$$

или более общими формулами $\hat{Z} = AU$ и уравнением

$$dU = \alpha\xi(Y, \dot{Y}, \ldots, Y^{(s)}, U, t)\,dt + \\ + \beta\eta(Y, \dot{Y}, \ldots, Y^{(s)}, U, t)\,dY^{(s)} + \gamma\,dt, \tag{4}$$

где матрица A определяется так же, как и в случае белого шума в наблюдениях.

Конечно, можно и не вводить производные наблюдаемого сигнала в уравнения допустимых фильтров или вводить производные до порядка $h < s$. Для этого достаточно взять функцию ξ независимой от $Y^{(h+1)}, \ldots, Y^{(s)}$ и положить $\eta \equiv 0$ [67, 69]. Однако качество фильтрации значительно улучшается при вводе производных наблюдаемого сигнала до порядка s включительно.

Функции ξ и η в (3) или (4) можно взять произвольно. Однако целесообразно их выбирать, руководствуясь соображениями п. 9.1.1, приведя сначала задачу к случаю белого шума в наблюдениях путем s-кратного дифференцирования уравнения наблюдения и исключения некоторых компонент помехи с помощью уравнения наблюдения и уравнений, полученных из него $(s-1)$-кратным дифференцированием.

9.1.4. Постановка задач условно оптимальной фильтрации и экстраполяции. Определив класс допустимых фильтров, следует решить вопрос о том, какой фильтр в этом классе считается оптимальным. В соответствии с общей постановкой задач фильтрации и экстраполяции в п. 7.1.6, требующей нахождения оптимальной оценки текущего или будущего состояния системы в каждый момент $t > t_0$, естественно считать оптимальным такой фильтр, который дает в известном смысле наилучшую оценку при всех $t > t_0$. Однако в общем случае нелинейной системы в классе допустимых фильтров может не быть такого фильтра, который давал бы наилучшую оценку при всех $t > t_0$. В самом деле, такой фильтр был бы оптимальным одновременно по множеству критериев. В каждый данный момент $t > t_0$ условие $M\,|\hat{Z}_t - Z_t|^2 = \min$ или $M\,|\hat{Z}_t - Z_{t+\Delta}|^2 = \min$ представляет собой один определенный критерий оптимальности. Требование, чтобы это условие выполнялось для некоторого множества значений t, равносильно требованию оптимальности фильтра одновременно по соответствующему множеству критериев. Иными словами, задача оптимизации фильтра при всех $t > t_0$ представляет собой задачу многокритериальной оптимизации. Такие задачи, как правило, не имеют решения [113]. Фильтр Калмана—Бьюси, дающий оптимальную линейную оценку состояния линейной системы в каждый момент $t > t_0$, представляет собой исключение. Значит, оптимальность фильтра надо определить так, чтобы решение задачи было возможно.

Исходя из приведенных соображений, будем считать оптимальным такой фильтр из класса допустимых фильтров, который при любом совместном распределении величин Y, Z, $\hat{Z}$ в момент $t \geqslant t_0$ дает наилучшую оценку $\hat{Z}_s$ вектора Z_s или вектора $Z_{s+\Delta}$, $\Delta > 0$, в бесконечно близкий момент $s > t$, $s \to t$, реализующую минимум среднего квадрата ошибки $M\,|\hat{Z}_s - Z_s|^2$ или соответственно $M\,|\hat{Z}_s - Z_{s+\Delta}|^2$. Иными словами, будем считать оптимальным такой допустимый фильтр, который на каждом бесконечно малом интервале времени совершает оптимальный переход из того состояния, в котором он оказался в начале этого интервала, в новое состояние. Такой допустимый фильтр будем называть *условно оптимальным*. Тогда задачи фильтрации и экстраполяции, поставленные в п. 7.1.6, сведутся к нахождению оптимальных значений α, β и γ в (1), или (2), или (3), или (4) в любой момент $t \geqslant t_0$, обеспечивающих минимум среднего квадрата ошибки фильтрации $M\,|\hat{Z}_s - Z_s|^2$ или экстраполяции $M\,|\hat{Z}_s - Z_{s+\Delta}|^2$, $\Delta > 0$, в бесконечно близкий будущий момент $s > t$, $s \to t$.

Условно оптимальный фильтр обладает тем свойством, что в данном классе допустимых фильтров не существует фильтра, который при данном начальном распределении Y, Z и $\hat{Z}$ в момент t_0 был бы лучше условно оптимального при всех $t > t_0$. Это значит, по терминологии теории многокритериальной оптимизации, что условно оптимальный фильтр представляет собой один из множества допустимых фильтров, *оптимальных по Парето* *). Однако в классе допустимых фильтров могут существовать фильтры, лучшие, чем условно оптимальный, при некоторых значениях $t > t_0$. Так, например, если бы удалось определить функции α, β и γ в (1), или (2), или (3), или (4) из условия минимума среднего квадрата ошибки в некоторый данный момент $T > t_0$ (такие α, β и γ, конечно, будут зависеть не только от t, но и от T), то соответствующий допустимый фильтр может оказаться лучше условно оптимального в некотором интервале времени, включающем точку T [23]. Такой фильтр тоже будет оптимальным по Парето, так как в классе допустимых фильтров не существует фильтра, лучшего, чем этот, при $t = T$.

При решении поставленных задач можно отказаться от тех ограничений, которые приходится накладывать на уравнения (7.5) в теории оптимальной фильтрации. Поэтому в задаче условно оптимальной фильтрации возьмем уравнения (7.5) в самой общей форме

$$\begin{aligned} dY &= \varphi_1(Y,\ Z,\ t)\,dt + \psi_1(Y,\ Z,\ t)\,dW, \\ dZ &= \varphi(Y,\ Z,\ t)\,dt + \psi(Y,\ Z,\ t)\,dW \end{aligned} \tag{5}$$

и будем предполагать, что $W(t)$ представляет собой процесс с независимыми приращениями с нулевым математическим ожиданием (это практически не ограничивает общности) и конечной ковариационной функцией

$$\begin{aligned} K_w(t_1,\ t_2) &= k(\min(t_1,\ t_2)), \\ k(t) &= k(t_0) + \int_{t_0}^{t} \nu(\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{6}$$

---

*) В теории многокритериальной оптимизации система называется *оптимальной по Парето* (*парето-оптимальной*), если в классе допустимых систем не существует лучшей системы одновременно по всем критериям. Парето-оптимальная система может быть оптимальной по какому-нибудь одному критерию или по нескольким критериям. Однако она может и не быть оптимальной ни по какому из принятых критериев [113].

Для задачи экстраполяции необходимо ограничиться, как и в п. 7.1.6, случаем, когда функции φ и ψ не зависят от наблюдаемого вектора Y, процесс $W(t)$ состоит из двух независимых блоков $W_1(t)$, $W_2(t)$ и соответственно матрицы ψ и ψ_1 имеют блочную структуру $\psi=[\psi' \;\; 0]$, $\psi_1=[0 \;\; \psi_1']$, так что $\psi\,dW=\psi'\,dW_1$, $\psi_1\,dW=\psi_1'\,dW_2$. В этом случае, отбрасывая штрихи у функций ψ' и ψ_1', напишем уравнения (7.6) в виде

$$\begin{aligned} dY &= \varphi_1(Y,\ Z,\ t)\,dt+\psi_1(Y,\ Z,\ t)\,dW_2, \\ dZ &= \varphi(Z,\ t)\,dt+\psi(Z,\ t)\,dW_1, \end{aligned} \tag{7}$$

где $W_1(t)$, $W_2(t)$ — независимые процессы с независимыми приращениями с нулевыми математическими ожиданиями и конечными ковариационными функциями

$$\begin{gathered} K_{w_i}(t_1,\ t_2)=k_i(\min(t_1,\ t_2)), \\ k_i(t)=k_i(t_0)+\int_{t_0}^{t}\nu_i(\tau)\,d\tau \qquad (i=1,\ 2). \end{gathered} \tag{8}$$

В случае автокоррелированной помехи в наблюдениях, имея в виду, что оценивать необходимо только состояние и параметры системы, но не помеху, будем рассматривать отдельно p-мерный вектор состояния системы Z (может быть, расширенный путем включения в него неизвестных параметров системы) и h-мерный вектор помехи N, причем будем предполагать, что $h \geqslant m$ *).

В задачах практики состояние системы и помеха определяются различными, независимыми одно от другого стохастическими дифференциальными уравнениями (уравнением системы и уравнением формирующего фильтра помехи). Однако для общности целесообразно при построении теории рассматривать случай, когда Z и N определяются совместными стохастическими дифференциальными уравнениями.

Таким образом, для задачи фильтрации при автокоррелированной помехе в наблюдениях будем записывать уравнения наблюдения, системы и формирующего фильтра помехи (7.5) в виде

$$\begin{aligned} dY &= \varphi_1(Y,\ Z,\ N,\ t)\,dt, \\ dZ &= \varphi(Y,\ Z,\ N,\ t)\,dt+\psi(Y,\ Z,\ N,\ t)\,dW, \\ dN &= \varphi_0(Y,\ Z,\ N,\ t)\,dt+\psi_0(Y,\ Z,\ N,\ t)\,dW. \end{aligned} \tag{9}$$

*) Размерность вектора помехи не может быть меньше размерности наблюдаемого вектора, так как никакая линейная функция наблюдаемого вектора не может быть свободной от ошибок измерений.

Для задачи экстраполяции будем записывать (7.6) в виде

$$\begin{aligned} dY &= \varphi_1(Y,\ Z,\ N,\ t)\,dt, \\ dZ &= \varphi(Z,\ t)\,dt + \psi(Z,\ t)\,dW_1, \\ dN &= \varphi_0(N,\ t)\,dt + \psi_0(N,\ t)\,dW_2. \end{aligned} \tag{10}$$

В практических задачах обычно наблюдается сигнал

$$X = \varphi_1(Z,\ N,\ t) \tag{11}$$

с помехой N, а исследуемая система и формирующий фильтр помехи, как уже было сказано, описываются независимыми уравнениями. В этом случае функции φ и ψ в уравнениях (9) не зависят от Y и N, функции φ_0 и ψ_0 не зависят от Y и Z, а W состоит из двух независимых блоков W_1 и W_2, один из которых входит только в уравнение системы, а второй — только в уравнение формирующего фильтра. Матрицы ψ и ψ_0 при этом имеют соответствующую блочную структуру $\psi = [\psi'\ 0]$, $\psi_0 = [0\ \psi_0']$, так что $\psi\,dW = \psi'\,dW_1$, $\psi_0\,dW = \psi_0'\,dW_2$.

Ясно, что в результате решения поставленных задач можно получать фильтры значительно меньших порядков, чем фильтры, даваемые методами приближенного решения задач оптимальной фильтрации; наинизший порядок фильтров главы 8 есть $p(p+3)/2$, в то время как условно оптимальные фильтры могут иметь любой порядок, не меньший, чем p (и меньший, чем p, только в случае оценивания части компонент вектора Z).

Что же касается точности фильтрации, то, как было показано в п. 8.3.5, методы гл. 6 дают возможность оценивать по априорным данным точность любого фильтра, описываемого конечным числом стохастических дифференциальных уравнений, независимо от того, каким методом получен этот фильтр. Это позволяет сравнивать по точности методы теории условно оптимальной фильтрации с методами субоптимальной фильтрации. Кроме того, принятый в теории условно оптимальной фильтрации метод построения классов допустимых фильтров позволяет построить класс допустимых фильтров, содержащий любой наперед заданный фильтр, описываемый конечным числом дифференциальных уравнений. Оптимальный фильтр этого класса будет, как правило, лучше и уже во всяком случае не хуже, чем данный фильтр.

Таким образом, теория условно оптимальной фильтрации обладает двумя несомненными преимуществами по сравнению с методами субоптимальной фильтрации. Во-первых, она позволяет получать фильтры более низкого порядка и, следовательно, более простые в реализации. Во-вторых, она дает возможность получать фильтры не меньшей, а при желании и большей точности, чем фильтры, даваемые методами субоптимальной нелинейной фильтрации.

Теория условно оптимальной фильтрации применима также к системам со случайно изменяющейся структурой, так как такие системы описываются стохастическими дифференциальными уравнениями такого же вида, что и второе уравнение (5) (п. 5.3.10).

§ 9.2. Решение задач фильтрации и экстраполяции

9.2.1. Определение коэффициентов уравнения условно оптимального фильтра. Для нахождения оптимальных коэффициентов α, β, γ в уравнении (2) рассмотрим два момента времени $t \geqslant t_0$ и $s > t$. На основании (2) для бесконечно малого $\Delta t = s - t$ можем написать с точностью до бесконечно малых высших порядков

$$U_s - U_t = \alpha\xi_t \Delta t + \beta\eta_t \Delta Y + \gamma\Delta t, \tag{12}$$

где $\Delta Y = Y_s - Y_t$, а через ξ_t, η_t для краткости обозначены $\xi(Y_t, U_t, t)$, $\eta(Y_t, U_t, t)$. Точно так же на основании первого уравнения (5) имеем с точностью до бесконечно малых высших порядков

$$\Delta Y = \varphi_{1t}\Delta t + \psi_{1t}\Delta W,$$

где $\Delta W = W_s - W_t$, $\varphi_{1t} = \varphi_1(Y_t, Z_t, t)$, $\psi_{1t} = \psi_1(Y_t, Z_t, t)$. Подставив это выражение в равенство (12), умноженное слева на A, будем иметь

$$\hat{Z}_s - \hat{Z}_t = A\alpha\xi_t\Delta t + A\beta\eta_t(\varphi_{1t}\Delta t + \psi_{1t}\Delta W) + A\gamma\Delta t. \tag{13}$$

Очевидно, что $\hat{Z}_s$ будет оптимальной оценкой Z_s тогда и только тогда, когда $\hat{Z}_s - \hat{Z}_t$ будет оптимальной оценкой $Z_s - \hat{Z}_t$, так как $\hat{Z}_s - Z_s = (\hat{Z}_s - \hat{Z}_t) - (Z_s - \hat{Z}_t)$. Таким образом, требуется определить α, β, γ так, чтобы величина $\hat{Z}_s - \hat{Z}_t$ была оптимальной оценкой $Z_s - \hat{Z}_t$, обеспечивающей минимум среднего квадрата ошибки $M|\hat{Z}_s - Z_s|^2$. Формула (13) задает структуру допустимой оценки величины $Z_s - \hat{Z}_t$, а именно, при любом $t \geqslant t_0$ в каждый момент $s > t$, бесконечно близкий к t, оценка должна быть линейной функцией случайных векторов

$$\xi_t\Delta t = \xi(Y_t, U_t, t)\,\Delta t$$

и

$$\eta_t\Delta Y = \eta_t(\varphi_{1t}\Delta t + \psi_{1t}\Delta W) = \eta(Y_t, U_t, t)\,[\varphi_1(Y_t, Z_t, t)\,\Delta t + \\ + \psi_1(Y_t, Z_t, t)\,\Delta W].$$

Этим определяется использование информации, получаемой до момента t, — она влияет на оценку в момент s только посредством значения величины U_t под знаком функций ξ и η в (13). В этом состоит ограничение, накладываемое на класс допустимых оценок требованием, чтобы они определялись формулой $\hat{Z} = AU$ и уравнением (2) при каких-нибудь α, β, γ. Но для того, чтобы линейная функция случайных векторов $\xi_t \Delta t$ и $\eta_t \Delta Y$ была оптимальной оценкой случайного вектора $Z_s - \hat{Z}_t$, необходимо и достаточно, чтобы она была линейной средней квадратической регрессией $Z_s - \hat{Z}_t$ на $\xi_t \Delta t$ и $\eta_t \Delta Y$ (*ТВ*, п. 9.2.2). Поэтому для определения оптимальных коэффициентов $A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$ в (13) можно применить теорию линейной регрессии (*ТВ*, п. 9.2.5).

▶ Согласно теории линейной регрессии для оптимальности оценки $\hat{Z}_s - \hat{Z}_t$ величины $Z_s - \hat{Z}_t$ необходимо и достаточно, чтобы оценка была несмещенной и ошибка $\hat{Z}_s - Z_s$ была не коррелирована со случайным вектором $[(\xi_t \Delta t)^T (\eta_t \Delta Y)^T]^T$.

Условие несмещенности оценки дает

$$M(\hat{Z}_s - \hat{Z}_t) = M(Z_s - \hat{Z}_t).$$

А так как это равенство должно быть справедливо при любом $s > t$, то, положив $s \to t$, после сокращения получим

$$M\hat{Z}_t = MZ_t. \tag{14}$$

Чтобы это условие было выполнено при всех $t > t_0$, необходимо и достаточно, чтобы оно было выполнено при $t = t_0$ и чтобы при всех $t \geqslant t_0$ дифференциал $dM(\hat{Z}_t - Z_t)$ был равен нулю. Для вычисления этого дифференциала воспользуемся формулой $\hat{Z}_t = AU_t$ и уравнениями (2) и (5). Тогда, учитывая, что величина ΔW не зависит от Y_t, Z_t, U_t и что $M\Delta W = 0$, получим

$$(A\alpha M\xi_t + A\beta M\eta_t\varphi_{1t} + A\gamma - M\varphi_t)\,dt = 0.$$

Это дает уравнение, связывающее α, β, γ:

$$A\alpha m_1 + A\beta m_2 + A\gamma = m_0, \tag{15}$$

где для краткости положено

$$m_0 = M\varphi(Y_t, Z_t, t), \quad m_1 = M\xi(Y_t, U_t, t),$$
$$m_2 = M\eta(Y_t, U_t, t)\,\varphi_1(Y_t, Z_t, t). \tag{16}$$

Таким образом, $\hat{Z}_t$ будет несмещенной оценкой Z_t при всех $t > t_0$, если $\hat{Z}_0 = \hat{Z}(t_0)$ является несмещенной оценкой $Z_0 = Z(t_0)$ и коэффициенты α, β, γ уравнения (2) удовлетворяют уравнению (15) при всех $t \geqslant t_0$.

Условие некоррелированности ошибки $\hat{Z}_s - Z_s$ со случайным вектором $[(\xi \Delta t)^T (\eta \Delta Y)^T]^T$ в силу несмещенности оценки $\hat{Z}_t$ дает

$$M(\hat{Z}_s - Z_s)\,\xi_t^T \Delta t = 0, \quad M(\hat{Z}_s - Z_s)\,\Delta Y^T \eta_t^T = 0. \tag{17}$$

Подставив во второе из этих равенств выражения

$$\hat{Z}_s = \hat{Z}_t + (A\alpha\xi_t + A\gamma)\,\Delta t + A\beta\eta_t(\varphi_{1t}\Delta t + \psi_{1t}\Delta W),$$
$$Z_s = Z_t + \varphi_t\Delta t + \psi_t\Delta W, \quad \Delta Y = \varphi_{1t}\Delta t + \psi_{1t}\Delta W,$$

вытекающие из (2) и (5) и формулы $\hat{Z} = AU$ с точностью до бесконечно малых высших порядков, приняв во внимание, что Y_t, Z_t, U_t независимы от ΔW и $M\Delta W = 0$, $M\Delta W\Delta W^{\mathrm{T}} = \nu_t\Delta t + o(\Delta t)$, получим

$$\{M(\hat{Z}_t - Z_t)\,\varphi_{1t}^{\mathrm{T}}\eta_t^{\mathrm{T}} + A\beta M\eta_t\psi_{1t}\nu_t\psi_{1t}^{\mathrm{T}}\eta_t^{\mathrm{T}} - M\psi_t\nu_t\psi_{1t}^{\mathrm{T}}\eta_t^{\mathrm{T}}\}\,\Delta t + o(\Delta t) = 0.$$

Отсюда после сокращения на Δt и перехода к пределу при $\Delta t \to 0$ находим

$$A\beta = \varkappa_{02}\varkappa_{22}^{-1}, \tag{18}$$

где

$$\varkappa_{02} = M(Z_t - AU_t)\,\varphi_1(Y_t,\ Z_t,\ t)^{\mathrm{T}}\eta(Y_t,\ U_t,\ t)^{\mathrm{T}} + \\ + M\psi(Y_t,\ Z_t,\ t)\,\nu(t)\,\psi_1(Y_t,\ Z_t,\ t)^{\mathrm{T}}\eta(Y_t,\ U_t,\ t)^{\mathrm{T}},$$
$$\varkappa_{22} = M\eta(Y_t,\ U_t,\ t)\psi_1(Y_t,\ Z_t,\ t)\,\nu(t)\,\psi_1(Y_t,\ Z_t,\ t)^{\mathrm{T}}\eta(Y_t,\ U_t,\ t)^{\mathrm{T}}. \tag{19}$$

Само собой разумеется, формула (18) справедлива только в том случае, когда матрица $\varkappa_{22}$ обратима. Если это условие не выполнено, то решение задачи невозможно. Заметим, что условие обратимости матрицы $\varkappa_{22}$ значительно слабее условия обратимости матрицы $\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}$ в теории оптимальной фильтрации § 7.2. Матрица $\varkappa_{22}$ может быть обратимой даже в том случае, когда матрица $\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}$ не обратима ни при каких Y, Z, t. Для обратимости матрицы $\varkappa_{22}$, представляющей собой ковариационную матрицу случайного вектора $\eta(Y_t,\ U_t,\ t)\,\psi_1(Y_t,\ Z_t,\ t)\,dW$, деленную на dt, необходимо и достаточно, чтобы компоненты этого вектора не были связаны никакими линейными зависимостями (*ТВ*, п. 3.3.4).

Сократив первое равенство (17) на Δt и перейдя к пределу при $s \to t$, получим

$$M(\hat{Z}_t - Z_t)\,\xi_t^{\mathrm{T}} = 0. \tag{20}$$

Это условие будет выполнено при всех $t > t_0$, если оно выполнено при $t = t_0$ и дифференциал $dM(\hat{Z}_t - Z_t)\,\xi_t^{\mathrm{T}}$ равен нулю при всех $t \geqslant t_0$. Чтобы вычислить этот дифференциал, достаточно найти стохастический дифференциал функции $(\hat{Z}_t - Z_t)\,\xi_t^{\mathrm{T}} = (AU_t - Z_t)\,\xi_t^{\mathrm{T}}$ случайных процессов Y_t, Z_t, U_t по формуле дифференцирования сложной функции и взять математическое ожидание полученного выражения. ◀

9.2.2. Случай винеровского процесса и линейного фильтра. Сначала мы вычислим дифференциал $dM(\hat{Z}_t - Z_t)\,\xi_t^{\mathrm{T}}$ для частного случая винеровского процесса $W(t)$ и линейного уравнения фильтра (2), когда

$$\xi(y,\ u,\ t) = [y^{\mathrm{T}}\ u^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \qquad \eta(y,\ u,\ t) = I.$$

В этом случае

$$d(\hat{Z}_t - Z_t)\,\xi_t^{\mathrm{T}} = d(AU_t - Z_t)\,[Y_t^{\mathrm{T}} U_t^{\mathrm{T}}].$$

► По формуле Ито (3.61), опуская для краткости индексы t, находим элементы матриц $d(AU_t - Z_t)\,Y_t^{\mathrm{T}}$ и $d(AU_t - Z_t)\,U_t^{\mathrm{T}}$:

$$d\left(\sum_{h=1}^{N} a_{kh} U_h - Z_k\right) Y_l = \left(\sum_{h=1}^{N} a_{kh} dU_h - dZ_k\right) Y_l + \\ + \left(\sum_{h=1}^{N} a_{kh} U_h - Z_k\right) dY_l + \left(\sum_{h=1}^{N} a_{kh} (\beta\psi_1)_h \nu \psi_{1l} - \psi_k \nu \psi_{1l}\right) dt,$$

$$d\left(\sum_{h=1}^{N} a_{kh} U_h - Z_k\right) U_l = \left(\sum_{h=1}^{N} a_{kh} dU_h - dZ_k\right) U_l + \\ + \left(\sum_{h=1}^{N} a_{kh} U_h - Z_k\right) dU_l + \left(\sum_{h=1}^{N} a_{kh} (\beta\psi_1)_h \nu (\beta\psi_1)_l - \psi_k \nu (\beta\psi_1)_l\right) dt,$$

где a_{kh} — элементы матрицы A, $(\beta\psi_1)_h$, ψ_{1h}, ψ_h — h-е строки матриц $\beta\psi_1$, ψ_1 и ψ. Из этих формул вытекают следующие матричные равенства:

$$dM(AU - Z)\,Y^{\mathrm{T}} = \\ = M(A\,dU - dZ)\,Y^{\mathrm{T}} + M(AU - Z)\,dY^{\mathrm{T}} + (A\beta M\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}} - M\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})\,dt,$$

$$dM(AU - Z)\,U^{\mathrm{T}} = \\ = M(A\,dU - dZ)\,U^{\mathrm{T}} + M(AU - Z)\,dU^{\mathrm{T}} + (A\beta M\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}} - M\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})\,\beta^{\mathrm{T}} dt.$$

Подставив сюда dY, dZ и dU из (2) и (5), будем иметь

$$dM(AU - Z)\,Y^{\mathrm{T}} = M(A\alpha\xi + A\beta\varphi_1 + A\gamma - \varphi)\,Y^{\mathrm{T}}\,dt + \\ + \{M(AU - Z)\,\varphi_1^{\mathrm{T}} + A\beta M\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}} - M\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}}\}\,dt,$$

$$dM(AU - Z)\,U^{\mathrm{T}} = M(A\alpha\xi + A\beta\varphi_1 + A\gamma - \varphi)\,U^{\mathrm{T}}\,dt + \\ + M(AU - Z)(\xi^{\mathrm{T}}\alpha^{\mathrm{T}} + \gamma^{\mathrm{T}})\,dt + \{M(AU - Z)\,\varphi_1^{\mathrm{T}} + A\beta M\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}} - \\ - M\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}}\}\,\beta^{\mathrm{T}}\,dt.$$

Но в силу несмещенности оценки и неслучайности γ $M(AU - Z)\,\gamma^{\mathrm{T}} = M(\hat{Z} - Z)\,\gamma^{\mathrm{T}} = 0$, а выражение в фигурных скобках равно нулю в силу (18), (19) при $\eta = I$. Поэтому, подставив в полученные равенства выражение $A\gamma$ из (15), будем иметь

$$dM(AU - Z)\,Y^{\mathrm{T}} = \\ = \{A\alpha M(\xi - m_1)\,Y^{\mathrm{T}} + A\beta M(\varphi_1 - m_2)\,Y^{\mathrm{T}} - M(\varphi - m_0)\,Y^{\mathrm{T}}\}\,dt,$$

$$dM(AU - Z)\,U^{\mathrm{T}} = \\ = \{A\alpha M(\xi - m_1)\,U^{\mathrm{T}} + A\beta M(\varphi_1 - m_2)\,U^{\mathrm{T}} - M(\varphi - m_0)\,U^{\mathrm{T}}\}\,dt + \\ + M(AU - Z)\,\xi^{\mathrm{T}}\alpha^{\mathrm{T}}\,dt,$$

или

$$dM(AU-Z)\xi^{\mathrm{T}} = \{A\alpha M(\xi - m_1)\xi^{\mathrm{T}} + \\ + A\beta M(\varphi_1 - m_2)\xi^{\mathrm{T}} - M(\varphi - m_0)\xi^{\mathrm{T}}\}\,dt + M(AU-Z)\xi^{\mathrm{T}}[0\ \ \alpha^{\mathrm{T}}]\,dt,$$

где нулем обозначена $(m+N)\times m$-матрица, все элементы которой равны нулю. Таким образом, мы получили линейное дифференциальное уравнение для $M(AU-Z)\xi^{\mathrm{T}} = M(\hat{Z}-Z)\xi^{\mathrm{T}}$. Для выполнения условия (20) необходимо, чтобы интеграл этого дифференциального уравнения был тождественно равен нулю. Но интеграл линейного дифференциального уравнения равен тождественно нулю тогда и только тогда, когда он равен нулю в начальный момент $t=t_0$ и уравнение однородное. Это дает условие

$$A\alpha\varkappa_{11} + A\beta\varkappa_{21} - \varkappa_{01} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \varkappa_{11} &= M[\xi(Y_t,\ U_t,\ t) - m_1]\,\xi(Y_t,\ U_t,\ t)^{\mathrm{T}}, \\ \varkappa_{21} &= M[\varphi_1(Y_t,\ Z_t,\ t) - m_2]\,\xi(Y_t,\ U_t,\ t)^{\mathrm{T}}, \\ \varkappa_{01} &= M[\varphi(Y_t,\ Z_t,\ t) - m_0]\,\xi(Y_t,\ U_t,\ t)^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{21}$$

Отсюда находим

$$A\alpha = (\varkappa_{01} - A\beta\varkappa_{21})\,\varkappa_{11}^{-1}. \blacktriangleleft \tag{22}$$

Для того чтобы можно было определить $A\alpha$ по этой формуле, необходимо, чтобы матрица $\varkappa_{11}$ была обратимой при всех $t \geqslant t_0$. Из первой формулы (21) следует, что это условие всегда будет выполнено, если компоненты векторной функции ξ не связаны линейными зависимостями (*ТВ*, п. 3.3.4) ($\varkappa_{11}$ представляет собой ковариационную матрицу случайного вектора $\xi(Y_t,\ U_t,\ t)$). Таким образом, в случае линейной фильтрации процесса, определяемого нелинейным стохастическим дифференциальным уравнением, условие (20) будет выполнено при всех $t > t_0$ тогда и только тогда, когда оно выполнено в начальный момент $t=t_0$ и коэффициенты α, β уравнения (47) удовлетворяют уравнениям (18) и (22) при всех $t \geqslant t_0$. После определения $A\alpha$ и $A\beta$ по формулам (18) и (22) величина $A\gamma$ находится из уравнения (15). О том, как определяются математические ожидания в (16), (19) и (21), будет сказано дальше.

9.2.3. Случай винеровского процесса и нелинейного фильтра. Рассмотрим теперь случай произвольной функции $\xi(y,\ u,\ t)$, непрерывной вместе со своими первыми и вторыми производными по компонентам векторов y, u и первой производной по t, и любой функции $\eta(y,\ u,\ t)$.

► В этом случае для винеровского процесса $W(t)$ в (5) по формуле Ито (3.61) находим

$$d\left(\sum_{s=1}^{N} a_{ks}U_s - Z_k\right)\xi_l = \left(\sum_{s=1}^{N} a_{ks}dU_s - dZ_k\right)\xi_l +$$
$$+\left(\sum_{s=1}^{N} a_{ks}U_s - Z_k\right)\left(\frac{\partial\xi_l}{\partial t}dt + \sum_{r=1}^{m}\frac{\partial\xi_l}{\partial y_r}dY_r + \sum_{s=1}^{N}\frac{\partial\xi_l}{\partial u_s}dU_s\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\sum_{s=1}^{N} a_{ks}U_s - Z_k\right)\left\{\sum_{r,\,s=1}^{m}\frac{\partial^2\xi_l}{\partial y_r\,\partial y_s}\psi_{1r}\nu\psi_{1s}^{\mathrm{T}} +\right.$$
$$\left.+\sum_{r,\,s=1}^{N}\frac{\partial^2\xi_l}{\partial u_r\,\partial u_s}(\beta\eta\psi_1)_r\nu(\beta\eta\psi_1)_s^{\mathrm{T}} + 2\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{N}\frac{\partial^2\xi_l}{\partial y_r\,\partial u_s}(\beta\eta\psi_1)_s\nu\psi_{1r}^{\mathrm{T}}\right\}dt +$$
$$+\left\{\sum_{r,\,s=1}^{N} a_{ks}\frac{\partial\xi_l}{\partial u_r}(\beta\eta\psi_1)_r\nu(\beta\eta\psi_1)_s^{\mathrm{T}} + \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{N} a_{ks}\frac{\partial\xi_l}{\partial y_r}(\beta\eta\psi_1)_s\nu\psi_{1r}^{\mathrm{T}} -\right.$$
$$\left.-\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial\xi_l}{\partial y_r}\psi_{1r}\nu\psi_k^{\mathrm{T}} - \sum_{s=1}^{N}\frac{\partial\xi_l}{\partial u_s}(\beta\eta\psi_1)_s\nu\psi_k^{\mathrm{T}}\right\}dt\ ^{*}),$$

или, в матричной форме,

$$d(AU-Z)\xi^{\mathrm{T}} = (A\,dU - dZ)\xi^{\mathrm{T}} +$$
$$+(AU-Z)\left(\frac{\partial\xi^{\mathrm{T}}}{\partial t}dt + dY^{\mathrm{T}}\frac{\partial\xi^{\mathrm{T}}}{\partial y} + dU^{\mathrm{T}}\frac{\partial\xi^{\mathrm{T}}}{\partial u}\right) +$$
$$+(A\beta\eta\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}} - \psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})\left(\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial u}\right)\xi^{\mathrm{T}}dt +$$
$$+\frac{1}{2}(AU-Z)\left\{\mathrm{tr}\left[\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial}{\partial y} + 2\eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial u}\right)\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial y} +\right.\right.$$
$$\left.\left.+\,\mathrm{tr}\left[\beta\eta\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}\eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial u}\right]\right\}\xi^{\mathrm{T}}dt.$$

Подставив сюда выражения dY, dZ и dU из (5) и (2), будем иметь

$$d(AU-Z)\xi^{\mathrm{T}} = \left\{(A\alpha\xi + A\beta\eta\varphi_1 + A\gamma - \varphi)\xi^{\mathrm{T}} +\right.$$
$$+(AU-Z)\left[\frac{\partial\xi^{\mathrm{T}}}{\partial t} + \varphi_1^{\mathrm{T}}\frac{\partial\xi^{\mathrm{T}}}{\partial y} + (\xi^{\mathrm{T}}\alpha^{\mathrm{T}} + \varphi_1^{\mathrm{T}}\eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}} + \gamma^{\mathrm{T}})\frac{\partial\xi^{\mathrm{T}}}{\partial u}\right] +$$
$$+(A\beta\eta\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}} - \psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}})\left(\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial u}\right)\xi^{\mathrm{T}} +$$
$$+\frac{1}{2}(AU-Z)\left(\mathrm{tr}\left[\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial}{\partial y} + 2\eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial u}\right)\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial y}\right] +\right.$$
$$\left.\left.+\,\mathrm{tr}\left[\beta\eta\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}\eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial u}\right]\right)\xi^{\mathrm{T}}\right\}dt + H\,dW, \quad (23)$$

*) Как и в п. 9.2.2, $(\beta\eta\psi_1)_h$, ψ_{1h} и ψ_h представляют собой h-е строки матриц $\beta\eta\psi_1$, ψ_1 и ψ соответственно. Производные функции $\xi(y, u, t)$ по компонентам векторов y и u, так же как и сама функция $\xi(y, u, t)$, здесь и везде дальше берутся при $y = Y$, $u = U$.

где через H обозначена сумма всех получившихся коэффициентов при dW. Подставим в правую часть выражения $A\gamma$ из (15) и приравняем нулю математическое ожидание полученного выражения $d(AU-Z)\xi^{\mathrm{T}}$. Тогда, принимая во внимание независимость H и dW и что $MdW=0$, получим уравнение для α, γ:

$$A\alpha\varkappa_{11}+M(AU-Z)(\xi^{\mathrm{T}}\alpha^{\mathrm{T}}+\gamma^{\mathrm{T}})\frac{\partial\xi^{\mathrm{T}}}{\partial u}=\varkappa_{01}'-A\beta\varkappa_{21}', \tag{24}$$

где $\varkappa_{11}$ определяется первой формулой (21), а

$$\varkappa_{21}'=M[\eta(Y_t,\ U_t,\ t)\varphi_1(Y_t,\ U_t,\ t)-m_2]\,\xi(Y_t,\ U_t,\ t)^{\mathrm{T}}, \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\varkappa_{01}'=\varkappa_{01}+M(Z-AU)\frac{\partial\xi^{\mathrm{T}}}{\partial t}+M\{(Z-AU)\varphi_1^{\mathrm{T}}+\\ +\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}}-A\beta\eta\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}\}\left(\frac{\partial}{\partial y}+\eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial u}\right)\xi^{\mathrm{T}}+\\ +\frac{1}{2}M(Z-AU)\left\{\mathrm{tr}\left[\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial}{\partial y}+2\eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial u}\right)\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial y}\right]+\right.\\ \left.+\mathrm{tr}\left[\beta\eta\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}\eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial u}\right]\right\}\xi^{\mathrm{T}}.\end{aligned} \tag{26}$$

В формуле (26) $\varkappa_{01}$ определяется последней формулой (21). Все функции без указания аргументов представляют собой значения соответствующих функций в момент t, например, $\xi=\xi(Y_t, U_t, t)$, $\varphi_1=\varphi_1(Y_t,\ Z_t,\ t)$. Уравнение (24) совместно с (15) определяет α и γ после вычисления β по формуле (18). ◀

9.2.4. Уравнения для оптимальных коэффициентов в общем случае. Перейдем, наконец, к общему случаю произвольного процесса $W(t)$ с независимыми приращениями с нулевым математическим ожиданием и конечной ковариационной матрицей. Такой процесс в общем случае выражается формулой (3.46):

$$W(t)=W_0(t)+\int_{R^n}c(x)P^0(t,\ dx),$$

где $W_0(t)$ — винеровский процесс, $c(x)$ — некоторая векторная функция (той же размерности q, что и процесс $W(t)$) n-мерного векторного аргумента x, а интеграл при любом $t\geqslant t_0$ представляет собой стохастический интеграл по центрированной пуассоновской мере $P^0(t,\ B)$, независимой от процесса $W_0(t)$ и имеющей независимые значения на попарно непересекающихся множествах (пп. 3.2.2 и 3.4.5).

▶ Для дальнейшего нам понадобится вычислить интенсивность процесса $W(t)$. Для этого воспользуемся формулой (3.47) для одномерной характеристической функции $h_1(\lambda;\ t)$ процесса $W(t)$,

$$\ln h_1(\lambda;\ t)=-\frac{1}{2}\lambda^{\mathrm{T}}\int_0^t\nu_0(\tau)\,d\tau\lambda+\int_{R^n}\left[e^{i\lambda^{\mathrm{T}}c(x)}-1-i\lambda^{\mathrm{T}}c(x)\right]\mu(t,\ x)\,dx,$$

где $\nu_0=\nu_0(t)$ — интенсивность винеровского процесса $W_0(t)$, а $\mu(t, x)\,dx$ — математическое ожидание числа скачков процесса $W(t)$, равных $c(x)$ (точнее, для любой бесконечно малой области Δx, содержащей точку x), $\mu(t, x)\,\Delta x+o(\Delta x)$ представляет собой математическое ожидание числа скачков процесса $W(t)$, принадлежащих множеству $\{y\colon y=c(x),\ x\in\Delta x\}$. Но математическое ожидание простого пуассоновского процесса, порождаемого потоком скачков процесса $W(t)$, равных $c(x)$, равно интегралу по времени от интенсивности $\nu_P(t, x)\,dx$ этого потока:

$$\mu(t, x)\,dx=\int_0^t \nu_P(\tau, x)\,d\tau\,dx.$$

Подставив это выражение в предыдущую формулу, будем иметь

$$\ln h_1(\lambda;\ t)=\int_0^t \left\{-\frac{1}{2}\lambda^{\mathrm{T}}\nu_0(\tau)\lambda+\right.$$
$$\left.+\int_{R^n}\left[e^{i\lambda^{\mathrm{T}}c(x)}-1-i\lambda^{\mathrm{T}}c(x)\right]\nu_P(\tau, x)\,dx\right\}d\tau. \quad (27)$$

Для нахождения интенсивности процесса $W(t)$ вычислим ковариационную матрицу $k(t)$ его значения W_t при данном t. Так как (*ТВ*, п. 4.5.3)

$$k(t)=\left[\frac{\partial}{\partial i\lambda}\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial i\lambda}h_1(\lambda;\ t)\right]_{\lambda=0},$$

то для нахождения $k(t)$ достаточно дважды продифференцировать формулу (27) по λ и положить после этого $\lambda=0$. В результате, учитывая, что $h_1(0;\ t)=1$, получим

$$\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial i\lambda}\ln h_1(\lambda;\ t)=\frac{1}{h_1(\lambda;\ t)}\,\frac{\partial^{\mathrm{T}}h_1(\lambda;\ t)}{\partial i\lambda}=$$
$$=\int_0^t\left\{i\lambda^{\mathrm{T}}\nu_0(\tau)+\int_{R^n}c(x)^{\mathrm{T}}\left[e^{i\lambda^{\mathrm{T}}c(x)}-1\right]\nu_P(\tau, x)\,dx\right\}d\tau,$$

$$\frac{\partial}{\partial i\lambda}\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial i\lambda}\ln h_1(\lambda;\ t)=$$
$$=\frac{1}{h_1(\lambda;\ t)}\frac{\partial}{\partial i\lambda}\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial i\lambda}h_1(\lambda;\ t)-\frac{1}{h_1^2(\lambda;\ t)}\,\frac{\partial h_1(\lambda;\ t)}{\partial i\lambda}\,\frac{\partial^{\mathrm{T}}h_1(\lambda;\ t)}{\partial i\lambda}=$$
$$=\int_0^t\left\{\nu_0(\tau)+\int_{R^n}c(x)c(x)^{\mathrm{T}}e^{i\lambda^{\mathrm{T}}c(x)}\nu_P(\tau, x)\,dx\right\}d\tau$$

и

$$\left[\frac{\partial h_1(\lambda;\ t)}{\partial i\lambda}\right]_{\lambda=0}=0,$$

$$k(t)=\int_0^t\left\{\nu_0(\tau)+\int_{R^n}c(x)c(x)^{\mathrm{T}}\nu_P(\tau, x)\,dx\right\}d\tau.$$

Отсюда видно, что интенсивность $\nu(t)$ процесса $W(t)$ определяется формулой

$$\nu(t)=\nu_0(t)+\int\limits_{R^n} c(x)\,c(x)^{\mathrm{T}}\,\nu_P(t,\ x)\,dx. \blacktriangleleft \tag{28}$$

$\blacktriangleright$ Вычислим теперь стохастический дифференциал $d(AU-Z)\xi^{\mathrm{T}}$. Согласно обобщенной формуле Ито (3.75) в этом случае в правой части формулы (23) вместо ν будет интенсивность ν_0 винеровского процесса и добавятся интегральные члены

$$\begin{gathered}
\int\limits_{R^n}\Big[\{A\,[U+\beta\eta\psi_1 c(x)]-Z-\psi c(x)\}\times\\
\times\xi(Y+\psi_1 c(x),\ U+\beta\eta\psi_1 c(x),\ t)^{\mathrm{T}}-\\
-(AU-Z)\,\xi^{\mathrm{T}}-(A\beta\eta\psi_1-\psi)\,c(x)\,\xi^{\mathrm{T}}-\\
-(AU-Z)\,c(x)^{\mathrm{T}}\,\psi_1^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial}{\partial y}+\eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial u}\right)\xi^{\mathrm{T}}\Big]\,\nu_P(t,\ x)\,dx\,dt+\\
+\int\limits_{R^n}[\{A\,[U+\beta\eta\psi_1 c(x)]-Z-\psi c(x)\}\times\\
\times\xi(Y+\psi_1 c(x),\ U+\beta\eta\psi_1 c(x),\ t)^{\mathrm{T}}-(AU-Z)\,\xi^{\mathrm{T}}]\,dP^0(t,\ dx)=\\
=\int\limits_{R^n}\Big\{[AU-Z+(A\beta\eta\psi_1-\psi)\,c(x)]\times\\
\times[\xi(Y+\psi_1 c(x),\ U+\beta\eta\psi_1 c(x),\ t)^{\mathrm{T}}-\xi^{\mathrm{T}}]-\\
-(AU-Z)\,c(x)^{\mathrm{T}}\,\psi_1^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial}{\partial y}+\eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial u}\right)\xi^{\mathrm{T}}\Big\}\,\nu_P(t,\ x)\,dx\,dt+\\
+\int\limits_{R^n}\{[AU-Z+(A\beta\eta\psi_1-\psi)\,c(x)]\,\xi(Y+\psi_1 c(x),\ U+\beta\eta\psi_1 c(x),\ t)^{\mathrm{T}}-\\
-(AU-Z)\,\xi^{\mathrm{T}}\}\,dP^0(t,\ dx).
\end{gathered}$$

Математическое ожидание первого интеграла добавится к выражению $dM(AU-Z)\xi^{\mathrm{T}}$, найденному для случая винеровского процесса $W(t)$ в п. 9.2.3, а математическое ожидание второго интеграла равно нулю. В результате условие $dM(AU-Z)\xi^{\mathrm{T}}=0$ даст уравнение (24), в котором $\varkappa_{01}'$ определяется формулой

$$\begin{gathered}
\varkappa_{01}'=\varkappa_{01}+M\,(Z-AU)\,\frac{\partial\xi^{\mathrm{T}}}{\partial t}+\\
+M\Big\{(Z-AU)\Big[\varphi_1^{\mathrm{T}}-\int\limits_{R^n} c(x)^{\mathrm{T}}\,\nu_P(t,\ x)\,dx\cdot\psi_1^{\mathrm{T}}\Big]+\\
+\psi\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}}-A\beta\eta\psi_1\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}}\Big\}\left(\frac{\partial}{\partial y}+\eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial u}\right)\xi^{\mathrm{T}}+\\
+\frac{1}{2}M\,(Z-AU)\Big\{\mathrm{tr}\Big[\psi_1\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial}{\partial y}+2\eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial u}\right)\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial y}\Big]+\\
+\mathrm{tr}\Big[\beta\eta\psi_1\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}}\eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial u}\Big]\Big\}\,\xi^{\mathrm{T}}+\\
+\int\limits_{R^n} M\,[Z-AU+(\psi-A\beta\eta\psi_1)\,c(x)]\times\\
\times[\xi(Y+\psi_1 c(x),\ U+\beta\eta\psi_1 c(x),\ t)^{\mathrm{T}}-\xi^{\mathrm{T}}]\,\nu_P(t,\ x)\,dx.
\end{gathered}\tag{29}$$

Эта формула отличается от (26) двумя дополнительными интегральными членами в правой части. ◀

Таким образом, в случае любого процесса с независимыми приращениями $W(t)$ в (5) с нулевым метематическим ожиданием и конечным моментом второго порядка коэффициенты α и γ определяются теми же уравнениями (15) и (24) после нахождения $A\beta$ по формуле (18).

▶ В частном случае при $\xi(y,\ u,\ t)=[y^{\mathrm{T}}u^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $\eta(y,\ u,\ t)=I$

$$\xi(Y+\psi_1 c(x),\ U+\beta\psi_1 c(x),\ t)^{\mathrm{T}}-\xi^{\mathrm{T}}=c(x)^{\mathrm{T}}\,\psi_1^{\mathrm{T}}[I_m\beta^{\mathrm{T}}],\qquad \frac{\partial\xi^{\mathrm{T}}}{\partial u}=[0\ \ I_N],$$

$$\frac{\partial}{\partial y}+\eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial u}=[I_m\beta^{\mathrm{T}}]$$

и формула (29) дает

$$\begin{aligned}\varkappa_{01}'=\varkappa_{01}+M\Big\{(Z-AU)\Big[\varphi_1^{\mathrm{T}}-\int_{R^n}c(x)^{\mathrm{T}}\,\nu_p(t,\ x)\,dx\,\psi_1^{\mathrm{T}}\Big]+\\ +\psi\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}}-A\beta\psi_1\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}}\Big\}[I_m\beta^{\mathrm{T}}]+\\ +\int_{R^n}M\,[Z-AU+(\psi-A\beta\psi_1)\,c(x)]\,c(x)^{\mathrm{T}}\,\nu_p(t,\ x)\,dx\times\\ \times\psi_1^{\mathrm{T}}[I_m\beta^{\mathrm{T}}]=\varkappa_{01}+M\Big\{(Z-AU)\,\varphi_1^{\mathrm{T}}+\\ +\psi\Big[\nu_0+\int_{R^n}c(x)\,c(x)^{\mathrm{T}}\,\nu_p(t,\ x)\,dx\Big]\psi_1^{\mathrm{T}}-\\ -A\beta\psi_1\Big[\nu_0+\int_{R^n}c(x)\,c(x)^{\mathrm{T}}\,\nu_p(t,\ x)\,dx\Big]\psi_1^{\mathrm{T}}\Big\}[I_m\beta^{\mathrm{T}}].\end{aligned}$$

Отсюда на основании (28), пользуясь обозначениями (19), находим

$$\varkappa_{01}'=\varkappa_{01}+(\varkappa_{02}-A\beta\varkappa_{22})\,[I_m\ \ \beta^{\mathrm{T}}],$$

или, в силу (18), $\varkappa_{01}'=\varkappa_{01}$. Таким образом, уравнение (22) для α, полученное для случая $\xi(y,\ u,\ t)=[y^{\mathrm{T}}\ u^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $\eta(y,\ u,\ t)=I$ при винеровском процессе $W(t)$ в (5), справедливо при любом процессе с независимыми приращениями $W(t)$ с нулевым математическим ожиданием и конечным моментом второго порядка. ◀

Итак, оптимальные коэффициенты α, β, γ в уравнении фильтра (2) в общем случае определяются формулой (18) и уравнениями (15) и (24), в которых величины m_0, m_1, m_2, $\varkappa_{22}$, $\varkappa_{02}$, $\varkappa_{11}$, $\varkappa_{21}'$ и $\varkappa_{01}'$ определяются формулами (16), (19), (21), (25) и (29).

9.2.5. Уравнения, определяющие условно оптимальный фильтр. Для вычисления математических ожиданий в (16), (19), (21), (24), (25), (26) и (29) в общем случае необходимо знать совместное распределение векторов Y_t, Z_t, U_t при любом $t\geqslant t_0$, т. е. одномерное распределение составного случайного процесса $[Y(t)^{\text{т}}\ Z(t)^{\text{т}}\ U(t)^{\text{т}}]^{\text{т}}$. Это распределение определяется уравнением (5.38), соответствующим системе стохастических дифференциальных уравнений (2) и (5).

► Подставив в (2) выражение dY из (5), приведем эту систему уравнений к виду

$$d\begin{bmatrix} Y \\ Z \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(Y, Z, t) \\ \varphi(Y, Z, t) \\ \alpha\xi(Y, U, t) + \beta\eta(Y, U, t)\,\varphi_1(Y, Z, t) + \gamma \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \psi_1(Y, Z, t) \\ \psi(Y, Z, t) \\ \beta\eta(Y, U, t)\,\psi_1(Y, Z, t) \end{bmatrix} dW. \tag{30}$$

Сравнив это уравнение с (5.32), видим, что роль матриц $a(z, t)$ и $b(z, t)$ в общей теории в нашем случае играют соответственно первая и вторая матрицы в правой части уравнения (30). Подставив эти матрицы в (5.38) и соответственно положив $\lambda = [\lambda_1^{\text{т}}\lambda_2^{\text{т}}\lambda_3^{\text{т}}]^{\text{т}}$, получим уравнение для совместной одномерной характеристической функции $g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; t)$ процессов $Y(t)$, $Z(t)$ и $U(t)$:

$$\begin{aligned} \partial g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; t)/\partial t = M\{ & i\lambda_1^{\text{т}}\varphi_1(Y_t, Z_t, t) + \\ & + i\lambda_2^{\text{т}}\varphi(Y_t, Z_t, t) + i\lambda_3^{\text{т}}[\alpha\xi(Y_t, U_t, t) + \\ & + \beta\eta(Y_t, U_t, t)\,\varphi_1(Y_t, Z_t, t) + \gamma] + \\ & + \chi(\psi_1(Y_t, Z_t, t)^{\text{т}}\lambda_1 + \psi(Y_t, Z_t, t)^{\text{т}}\lambda_2 + \\ & + \psi_1(Y_t, Z_t, t)^{\text{т}}\eta(Y_t, U_t, t)^{\text{т}}\beta^{\text{т}}\lambda_3; t)\}\exp\{i\lambda_1^{\text{т}}Y_t + \\ & + i\lambda_2^{\text{т}}Z_t + i\lambda_3^{\text{т}}U_t\}. \end{aligned} \tag{31}$$

К этому уравнению следует добавить начальное условие (5.39), которое в этом случае имеет вид

$$g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; t_0) = g_0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \tag{32}$$

где $g_0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — совместная характеристическая функция начальных значений $Y_0 = Y(t_0)$, $Z_0 = Z(t_0)$, $U_0 = U(t_0)$ процессов $Y(t)$, $Z(t)$ и $U(t)$. Само собой разумеется, начальное распределение определяемого уравнением (2) процесса $U(t)$ не может быть известным. Поэтому его неизбежно надо задавать более или менее произвольно. Единственное требование, которому следует подчинить это распределение, состоит в том, чтобы в начальный момент $t = t_0$ удовлетворялись условие несмещенности оценки (14) и условие (20). Как мы видели, только в этом случае фильтр, определяемый формулой $\hat{Z} = AU$ и уравнением (2) при α, β, γ, удовлетворяющих (15), (18) и (24), будет условно оптимальным. ◄

В важном частном случае, когда функции φ, ψ, φ_1 и ψ_1 в уравнениях (5) не зависят от Y, величина Y обычно не включается и в уравнение (1) или (2), определяющее класс допустимых фильтров, т. е. функции ξ и η принимаются также не зависящими от Y. В этом случае для определения всех математических ожиданий в (16), (19), (21), (24), (25), (26) и (29) достаточно знать совместную одномерную характеристическую функцию $g_1(\lambda_1, \lambda_2, t)$ процессов $Z(t)$ и $U(t)$. Чтобы получить уравнение (5.38) для этой характеристической функции, достаточно положить в (31) $\lambda_1=0$. Тогда, изменив нумерацию величин λ_2, λ_3, т. е. обозначив их λ_1 и λ_2 соответственно, получим

$$\partial g_1(\lambda_1, \lambda_2; t)/\partial t = M\{i\lambda_1\varphi(Z_t, t) + \\ + i\lambda_2[\alpha\xi(U_t, t)+\beta\eta(U_t, t)\varphi_1(Z_t, t)+\gamma]+ \\ +\chi(\psi(Z_t, t)^{\mathrm{T}}\lambda_1+\psi_1(Z_t, t)^{\mathrm{T}}\eta(U_t, t)^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\lambda_2; t)\}\exp\{i\lambda_1^{\mathrm{T}}Z+i\lambda_2^{\mathrm{T}}U\}. \quad (33)$$

Уравнения (15), (18), (24) и (31), (32) полностью и точно решают поставленную в п. 9.1.4 задачу. Решив эти уравнения совместно, находим оптимальный фильтр в данном классе допустимых фильтров [58, 59, 61, 63—66].

Уравнение (31) можно решить совместно с (15), (18) и (24) любым приближенным методом § 6.3—6.7. При этом, взяв достаточно большое N, можно найти решение с любой степенью точности. Вычисления, необходимые для определения коэффициентов α, β, γ в уравнении (2) условно оптимального фильтра и совместного распределения Y_t, Z_t, U_t при любом $t \geqslant t_0$, конечно, очень сложны, особенно в многомерных задачах. Однако эти вычисления используют только априорные данные и не опираются на результаты наблюдений. Поэтому их надо выполнять для каждой конкретной задачи (или класса задач) только один раз при проектировании фильтра (алгоритма фильтрации).

Практическое применение фильтра при каждом конкретном эксперименте требует только решения уравнения (2) при известных функциях времени α, β, γ.

Обратим теперь внимание на то обстоятельство, что уравнения (15), (18) и (24) (или (22) в случае линейного фильтра), связывающие $N\times r$-матрицу α, $N\times s$-матрицу β и $N\times 1$-матрицу γ, дают $pr+ps+p=p(r+s+1)$ скалярных уравнений. Эти уравнения однозначно определяют α, β, γ в уравнении (1) фильтра p-го порядка, для которого $N=p$, $A=I_p$ (конечно, в случае обратимых при всех $t\geqslant t_0$ матриц $\varkappa_{11}$ и $\varkappa_{22}$). Однако они недостаточны для определения $N(r+s+1)$ элементов матриц α, β, γ при $N>p$. Поэтому $(N-p)(r+s+1)$ элементов матриц α, β, γ можно задать произвольно. В частности, взяв за основу для определения класса допустимых фильтров какой-нибудь субоптимальный фильтр, можно оставить уравнения для вспомогательных переменных (образующих вектор S в п. 8.3.5) неизменными и ввести коэффициенты α, β, γ, подлежащие оптимизации, только в уравнение для оценки, приняв при этом, конечно, $A=[I\ 0]$. Тогда уравнения всех допустимых фильтров будут содержать только $p(r+s+1)$

неизвестных скалярных коэффициентов, которые можно однозначно определить из уравнений (15), (18) и (24) (или (22) в случае линейного фильтра). Можно также попытаться определить оставшиеся неопределенными $(N-p)(r+s+1)$ элементов матриц α, β, γ путем дополнительной минимизации среднего квадрата ошибки $M|\hat{Z}-Z|^2$ на каждом шаге процесса численного решения уравнения (31).

Заметим, что в некоторых случаях функции ξ и η в (1) или (2) могут зависеть от неизвестных параметров. Так, например, взяв за основу определения класса допустимых фильтров уравнения метода нормальной аппроксимации, получим функции

$$\xi(y, \hat{z}, t) = [f(y, \hat{z}, R, t)^{\mathrm{T}} - f^{(1)}(y, \hat{z}, R, t)^{\mathrm{T}} h(y, \hat{z}, R, t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$
$$\eta(y, \hat{z}, t) = h(y, \hat{z}, R, t),$$

зависящие от неизвестной матрицы R. Взяв за основу уравнения какого-нибудь другого метода гл. 8, можем получить функции ξ, η, зависящие и от других неизвестных параметров — апостериорных моментов, семиинвариантов или квазимоментов. В таких случаях можно заменять эти параметры соответствующими априорными параметрами и определить их вместе с α, β, γ в процессе решения уравнений (15), (18), (24) и (31) (или 33)). Само собой разумеется, это касается только параметров, от которых ξ и η зависят нелинейно. Параметры, входящие в ξ и η линейно, можно принять за элементы оптимизируемых матриц α и β.

Подчеркнем, что изложенная теория условно оптимальной фильтрации (оценивания состояния и параметров систем) не дает абсолютно оптимальные фильтры, удовлетворяющие уравнениям теории оптимальной фильтрации § 7.2, а дает только условно оптимальные фильтры, которые, конечно, в общем случае хуже оптимальных, но зато легко реализуемы. Однако, если абсолютно оптимальная оценка $\hat{Z}$ вектора Z удовлетворяет уравнению допустимого фильтра (1) или (2) при $\hat{Z} = AU$ при каких-либо функциях времени α, β, γ, то уравнения (15), (18), (24) и (31), конечно, определят именно эти α, β, γ и условно оптимальный фильтр будет абсолютно оптимальным (абсолютно оптимальный фильтр будет в этом случае допустимым, и следовательно, оптимальным в классе допустимых фильтров). Точно так же, если оптимальный фильтр в каком-нибудь классе, содержащем класс допустимых фильтров, удовлетворяет уравнению (2) при какихнибудь α, β, γ, то теория условно оптимальной фильтрации даст именно этот фильтр.

Теория условно оптимального оценивания дает возможность оценивать не все компоненты вектора состояния системы (в общем случае расширенного), а только некоторые из них. Для этого достаточно взять функции ξ и η в (1), зависящие только от соответствующих компонент вектора $\hat{Z}$. Так, например, взяв ξ и η

в (1) зависящими только от Y, t и оценок неизвестных параметров системы, можно оценивать только параметры системы, не оценивая ее состояния. В таких случаях будут получаться фильтры, порядок которых меньше размерности p расширенного вектора состояния.

Пример 1. Для задачи примера 8.1,

$$\dot{Y} = X = Z + V_2, \qquad \dot{Z} = -Z^3 + ZV_1,$$

найдем условно оптимальный фильтр, удовлетворяющий уравнению первого порядка

$$\dot{\hat{Z}} = \alpha_1 \hat{Z}^3 + \alpha_2 \hat{Z} + \beta X + \gamma.$$

За основу для выбора функций $\xi(\hat{z}, t) = [\hat{z}\ \hat{z}^3]^{\mathrm{T}}$ и $\eta(\hat{z}, t) = 1$ мы выбрали уравнение субоптимального фильтра метода нормальной аппроксимации, в котором коэффициенты $-R(3+\nu_2^{-1})$ и $\nu_2^{-1}R$ при $\hat{Z}$ и X заменены подлежащими оптимизации функциями времени α_2, β и, кроме того, введены также подлежащие оптимизации коэффициент α_1 при $\hat{Z}^3$ и свободный член γ.

Сначала находим по формулам (19)

$$\varkappa_{22} = \nu_2, \qquad \varkappa_{02} = M(Z - \hat{Z})Z = m_{20} - m_{11},$$

где $m_{rs} = MZ^r\hat{Z}^s$. После этого формула (18) дает $\beta = \nu_2^{-1}(m_{20} - m_{11})$, и уравнения (15) и (24) принимают вид

$$m_{03}\alpha_1 + m_{01}\alpha_2 + \gamma = -m_{30} - \beta m_{10},$$

$$(4m_{06} - 3m_{15} - m_{03}^2)\alpha_1 + (4m_{04} - 3m_{13} - m_{01}m_{03})\alpha_2 + 3(m_{03} - m_{12})\gamma =$$
$$= -m_{33} + m_{30}m_{03} + \beta(3m_{22} - 4m_{13} + m_{10}m_{03}) - 3\nu_2\beta^2(m_{12} - m_{03}),$$

$$(2m_{04} - m_{13} - m_{01}m_{03})\alpha_1 + (2m_{02} - m_{11} - m_{01}^2)\alpha_2 =$$
$$= -m_{31} + m_{30}m_{01} + \beta(m_{20} - 2m_{11} + m_{10}m_{01}).$$

Уравнение (33), определяющее совместную характеристическую функцию случайных величин Z_t и $\hat{Z}_t$, имеет в нашем случае вид

$$\partial g_1(\lambda_1, \lambda_2; t)/\partial t = M\Big\{-i\lambda_1 Z^3 + i\lambda_2(\alpha_1\hat{Z}^3 + \alpha_2\hat{Z} + \beta Z + \gamma) -$$
$$- \frac{1}{2}\nu_1\lambda_1^2 Z^2 - \frac{1}{2}\nu_2\beta^2\lambda_2^2\Big\} e^{i\lambda_1 Z + i\lambda_2\hat{Z}}.$$

Так как

$$M(iZ)^r(i\hat{Z})^s e^{i\lambda_1 Z + i\lambda_2\hat{Z}} = \frac{\partial^{r+s}}{\partial\lambda_1^r\partial\lambda_2^s} g_1(\lambda_1, \lambda_2; t),$$

то полученное уравнение сводится к линейному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} = \lambda_1\frac{\partial^3 g_1}{\partial\lambda_1^3} - \alpha_1\lambda_2\frac{\partial^3 g_1}{\partial\lambda_2^3} + \alpha_2\lambda_2\frac{\partial g_1}{\partial\lambda_2} +$$
$$+ \beta\lambda_2\frac{\partial g_1}{\partial\lambda_1} + \frac{1}{2}\nu_1\lambda_1^2\frac{\partial^2 g_1}{\partial\lambda_1^2} + \left(i\gamma\lambda_2 - \frac{1}{2}\nu_2\beta^2\lambda_2^2\right)g_1.$$

Интегрируя это уравнение с $\alpha = [\alpha_1 \alpha_2]$, β и γ, определяемыми полученными алгебраическими уравнениями, найдем оптимальные α и γ. Для этого можно, конечно, применить любой приближенный метод интегрирования уравнений в частных производных. При этом придется учесть, что моменты m_{rs} в уравнениях для α и γ выражаются через характеристическую функцию g_1

формулой (TB, п.4.5.3)

$$m_{rs}=\left[\frac{\partial^{r+s}g_1}{\partial(i\lambda_1)^r\,\partial(i\lambda_2)^s}\right]_{\lambda_1=\lambda_2=0}.$$

Однако практически лучше всего применить для приближенного решения уравнения для g_1 один из методов § 6.3—6.7, независимо от того, сводится это уравнение к уравнению в частных производных или нет.

Пример 2. Если в предыдущем примере определить класс допустимых фильтров второго порядка, содержащий обобщенный фильтр Калмана—Бьюси примера 8.10, то следует положить $A=[1\ \ 0]$, $U=[U_1U_2]^{\mathrm{T}}=[\hat{Z}\ \ R]^{\mathrm{T}}$ и соответственно принять

$$\xi(u,\ t)=\left[u_1^3\ u_1^2\ u_1u_2\ u_1^2u_2\ u_2^2\right],\quad \eta(u,\ t)=u_2.$$

Тогда уравнения допустимых фильтров запишутся в виде $\hat{Z}=AU=[1\ \ 0]\times[U_1U_2]^{\mathrm{T}}=U_1$ и

$$U_r=\alpha_{r1}U_1^3+\alpha_{r2}U_1^2+\alpha_{r3}U_1U_2+\alpha_{r4}U_1^2U_2+\alpha_{r5}U_2^2+\beta_rU_2X+\gamma_r\qquad(r=1,\ 2).$$

Формулы (19) в этом случае дают

$$\varkappa_{22}=MU_2[0\quad 1]\begin{bmatrix}\nu_1 & 0\\ 0 & \nu_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}U_2=\nu_2m_{002},$$

$$\varkappa_{02}=M(Z-U_1)Z=m_{200}-m_{110},$$

где $m_{rsl}=MZ^rU_1^sU_2^l$. После этого (18) дает

$$\beta_1=A\beta=[1\quad 0]\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}=\frac{m_{200}-m_{110}}{\nu_2m_{002}}.$$

Уравнения (15) и (24) в этом случае имеют вид

$$m_{030}\alpha_{11}+m_{020}\alpha_{12}+m_{021}\alpha_{13}+m_{021}\alpha_{14}+m_{002}\alpha_{15}+\gamma_1=-m_{300}-\beta_1m_{102},$$

$$\begin{aligned}&\left(4m_{060}-3m_{150}-m_{030}^2\right)\alpha_{11}+(4m_{050}-3m_{140}-m_{020}m_{030})\alpha_{12}+\\&\quad+(4m_{041}-3m_{131}-m_{011}m_{030})\alpha_{13}+(4m_{051}-3m_{141}-m_{021}m_{030})\alpha_{14}+\\&\quad+(4m_{032}-3m_{122}-m_{002}m_{030})\alpha_{15}+3(m_{030}-m_{120})\gamma_1=\\&=-m_{330}+m_{300}m_{030}+\beta_1(3m_{221}-4m_{131}+m_{101}m_{030})+3\nu_2\beta_1^2(m_{112}-m_{022}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(3m_{050}-2m_{140}-m_{020}m_{030})\alpha_{11}+\left(3m_{040}-m_{020}^2-2m_{130}\right)\alpha_{12}+\\&\quad+(3m_{031}-m_{020}m_{011}-2m_{121})\alpha_{13}+(3m_{041}-m_{020}m_{021}-2m_{131})\alpha_{14}+\\&\quad+(3m_{022}-m_{020}m_{002})\alpha_{15}+2(m_{020}-m_{110})\gamma_1=-m_{320}+m_{300}m_{020}+\\&\quad+\beta_1(2m_{211}-3m_{121}+m_{020}m_{101})+\beta_1^2\nu_2(m_{102}-3m_{012}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(2m_{041}-m_{030}m_{011}-m_{131})\alpha_{11}+(2m_{031}-m_{020}m_{011}-m_{121})\alpha_{12}+\\&\quad+\left(2m_{022}-m_{011}^2-m_{112}\right)\alpha_{13}+(2m_{032}-m_{011}m_{021}-m_{122})\alpha_{14}+\\&\quad+(2m_{013}-m_{011}m_{002}-m_{103})\alpha_{15}+(m_{011}-m_{101})\gamma_1+(m_{050}-m_{140})\alpha_{21}+\\&\quad+(m_{040}-m_{130})\alpha_{22}+(m_{031}-m_{121})\alpha_{23}+(m_{041}-m_{131})\alpha_{24}+\\&\quad+(m_{022}-m_{112})\alpha_{25}+(m_{020}-m_{110})\gamma_2=-m_{311}+m_{300}m_{011}+\\&\quad+\beta_1(m_{202}-2m_{112}+m_{011}m_{101})-\beta_1^2\nu_2m_{003}+\beta_2(m_{211}-m_{121})+\\&\quad+\beta_1\beta_2\nu_2(m_{102}-2m_{012}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(3m_{051}-m_{030}m_{021}-2m_{141})\alpha_{11}+(3m_{041}-m_{020}m_{021}-2m_{131})\alpha_{12}+\\&\quad+(3m_{032}-m_{011}m_{021}-2m_{122})\alpha_{13}+\left(3m_{042}-m_{021}^2-2m_{132}\right)\alpha_{14}+\\&\quad+(3m_{023}-m_{021}m_{002}-2m_{113})\alpha_{15}+2(m_{021}-m_{111})\gamma_1+(m_{060}-m_{150})\alpha_{21}+\\&\quad+(m_{050}-m_{140})\alpha_{22}+(m_{041}-m_{131})\alpha_{23}+(m_{051}-m_{141})\alpha_{24}+\\&\quad+(m_{032}-m_{122})\alpha_{25}+(m_{030}-m_{120})\gamma_2=-m_{321}+m_{300}m_{021}+\\&\quad+\beta_1(2m_{212}-3m_{122}+m_{021}m_{101})+\beta_1^2\nu_2(m_{103}-3m_{013})+\beta_2(m_{221}-m_{131})+\\&\quad+\beta_1\beta_2\nu_2(2m_{112}-3m_{022}),\end{aligned}$$

$$(m_{032}-m_{030}m_{002})\,\alpha_{11}+(m_{022}-m_{020}m_{002})\,\alpha_{12}+(m_{013}-m_{011}m_{002})\,\alpha_{13}+$$
$$+(m_{023}-m_{021}m_{002})\,\alpha_{14}+(m_{004}-m_{002}^2)\,\alpha_{15}+2\,(m_{041}-m_{131})\,\alpha_{21}+$$
$$+2\,(m_{031}-m_{121})\,\alpha_{22}+2\,(m_{022}-m_{112})\,\alpha_{23}+2\,(m_{032}-m_{122})\,\alpha_{24}+$$
$$+2\,(m_{013}-m_{103})\,\alpha_{25}+2\,(m_{011}-m_{101})\,\gamma_2=-m_{302}+m_{300}m_{002}+$$
$$+2\beta_2\,(m_{202}-m_{112})-2\beta_1\beta_2\nu_2 m_{003}+\beta_2^2\nu_2\,(m_{102}-m_{012})+\beta_1\,(m_{002}m_{101}-m_{103}).$$

Уравнение (33) для совместной характеристической функции $g_1(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3;\ t)$ величин $Z,\ U_1,\ U_2$ имеет в данном случае вид

$$\partial g_1(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3;\ t)/\partial t=M\,\{-i\lambda_1 Z^3+$$
$$+i\lambda_2\,(\alpha_{11}U_1^3+\alpha_{12}U_1^2+\alpha_{13}U_1U_2+\alpha_{14}U_1^2U_2+\alpha_{15}U_2^2+\beta_1 ZU_2+\gamma_1)+$$
$$+i\lambda_3\,(\alpha_{21}U_1^3+\alpha_{22}U_1^2+\alpha_{23}U_1U_2+\alpha_{24}U_1^2U_2+\alpha_{25}U_2^2+\beta_2 ZU_2+\gamma_2)-$$
$$-\nu_1\lambda_1^2Z^2/2-\nu_2(\beta_1\lambda_2+\beta_2\lambda_3)^2/2\}\exp\{i\lambda_1 Z+i\lambda_2 U_1+i\lambda_3 U_2\}.$$

Решив это уравнение совместно с уравнениями, определяющими α, β, γ, любым приближенным методом гл. 6, найдем 7 из 14 неизвестных элементов матриц α, β, γ. Остальные 7 можно или взять произвольно, или выбирать на каждом шаге численного решения задачи так, чтобы средний квадрат ошибки был минимальным на этом шаге. Если избрать первый путь, то целесообразно взять те же значения α_{21}, α_{22}, α_{23}, α_{24}, α_{25}, β_2 и γ_2, что и в уравнениях обобщенного фильтра Калмана — Бьюси примера 8.10, $\alpha_{22}=\nu_1$, $\alpha_{24}=-6$, $\alpha_{25}=-\nu_2^{-1}$, $\alpha_{21}=\alpha_{23}=\beta_1=\gamma_1=0$.

Таблица 5

t	1	2	3	4
0,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
0,4	0,1584	0,1704	0,1587	0,1584
0,8	0,0930	0,1076	0,0943	0,0930
1,2	0,0652	0,0789	0,0660	0,0652
1,6	0,0497	0,0618	0,0504	0,0497
2,0	0,0399	0,0508	0,0408	0,0402

В табл. 5 приведена зависимость дисперсии ошибки фильтрации от времени для данной задачи для метода нормальной аппроксимации апостериорного распределения (столбец 1), обобщенного фильтра Калмана — Бьюси (столбец 2), условно оптимального фильтра первого порядка (столбец 3) и условно оптимального фильтра второго порядка в классе допустимых фильтров, содержащем обобщенный фильтр Калмана — Бьюси, при $\alpha_{21}=\alpha_{23}=\beta_1=\gamma_1=0$, $\alpha_{22}=\nu_1$, $\alpha_{24}=-6$, $\alpha_{25}=-\nu_2^{-1}$ (столбец 4). Расчеты произведены для $\nu_1=0{,}01$, $\nu_2=1$.

Анализ результатов расчетов показывает, что даже условно оптимальный фильтр первого порядка дает существенно более высокую точность фильтрации, чем значительно более сложный обобщенный фильтр Калмана — Бьюси, и приближается по точности к фильтру нормальной аппроксимации. Результаты расчетов показывают также, что оптимизация (даже частичная) в классе фильтров, содержащем данный фильтр (в нашем случае обобщенный фильтр Калмана — Бьюси), может существенно повысить точность фильтрации.

Пример 3. Найдем условно оптимальный фильтр для задачи примера 8.3,

$$\dot Y=X=Z+V_2,\quad \dot Z=-Z\Theta+V_1,\quad \dot\Theta=0.$$

За основу класса допустимых фильтров примем первые два уравнения метода нормальной аппроксимации и соответственно положим

$$\xi(\hat{z},\ \hat{\theta},\ t)=[\hat{z}\hat{\theta}\quad \hat{z}]^{\mathrm{T}},\quad \eta(\hat{z},\ \hat{\theta},\ t)=1.$$

Тогда уравнение (1), определяющее класс допустимых фильтров, будет представлять собой систему двух уравнений

$$\dot{\hat{Z}}=\alpha_{11}\hat{Z}\hat{\Theta}+\alpha_{12}\hat{Z}+\beta_1X+\gamma_1,$$
$$\dot{\hat{\Theta}}=\alpha_{21}\hat{Z}\hat{\Theta}+\alpha_{22}\hat{Z}+\beta_2X+\gamma_2.$$

Формулы (19) и уравнение (18) в этом случае дают

$$\varkappa_{22}=\nu_2,$$
$$\varkappa_{02}=M\,[(Z-\hat{Z})\,Z\quad (\Theta-\hat{\Theta})\,Z]^{\mathrm{T}}=[m_{2000}-m_{1010}\quad m_{1100}-m_{1001}]^{\mathrm{T}},$$
$$\beta_1=\nu_2^{-1}(m_{2000}-m_{1010}),\quad \beta_2=\nu_2^{-1}(m_{1100}-m_{1001}),$$

где $m_{pqrs}=MZ^p\Theta^q\hat{Z}^r\hat{\Theta}^s$. Уравнения (15) и (24), определяющие оптимальные коэффициенты α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{22}, γ_1, γ_2, имеют вид

$$m_{0011}\alpha_{11}+m_{0010}\alpha_{12}+\gamma_1=-m_{1100}-\beta_1m_{1000},$$
$$m_{0011}\alpha_{21}+m_{0010}\alpha_{22}+\gamma_2=-\beta_2m_{1000},$$
$$\begin{aligned}(2m_{0022}-m_{1012}-m_{0011}^2)\,\alpha_{11}&+(2m_{0021}-m_{1011}-m_{0010}m_{0011})\,\alpha_{12}+\\ &+(m_{0031}-m_{1021})\,\alpha_{21}+(m_{0030}-m_{0020})\,\alpha_{22}+(m_{0011}-m_{1001})\,\gamma_1+\\ +(m_{0020}-m_{1010})\,\gamma_2&=-m_{1111}+m_{1100}m_{0011}+\beta_1(m_{2001}-2m_{1011}+m_{1000}m_{0011})+\\ &+\beta_2(m_{2010}-m_{1020})-\nu_2\beta_1^2m_{0001}+\nu_2\beta_1\beta_2(m_{1000}-2m_{0010}),\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}(2m_{0021}-m_{1011}-m_{0010}m_{0011})\,\alpha_{11}&+(2m_{0020}-m_{1010}-m_{0010}^2)\,\alpha_{12}+\\ &+(m_{0010}-m_{1000})\,\gamma_1=-m_{1110}+m_{1100}m_{1010}+\\ &+\beta_1(m_{2000}-2m_{1010}+m_{1000}m_{0010})-\nu_2\beta_1^2,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}(m_{0013}-m_{0112})\,\alpha_{11}&+(m_{0012}-m_{0111})\,\alpha_{12}+(2m_{0022}-m_{0121}-m_{0011}^2)\,\alpha_{21}+\\ &+(2m_{0021}-m_{0120}-m_{0010}m_{0001})\,\alpha_{22}+(m_{0002}-m_{0101})\,\gamma_1+\\ +(m_{0011}-m_{0110})\,\gamma_2&=\beta_1(m_{1101}-m_{1002})+\beta_2(m_{1110}-2m_{1011}+m_{1000}m_{0011})+\\ &+\nu_2\beta_1\beta_2(m_{0100}-2m_{0001})-\nu_2\beta_2^2m_{0010},\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}(m_{0012}-m_{0111})\,\alpha_{11}&+(m_{0011}-m_{0110})\,\alpha_{12}+(m_{0021}-m_{0011}m_{0010})\,\alpha_{21}+\\ &+(m_{0020}-m_{0010}^2)\,\alpha_{22}+(m_{0001}-m_{0100})\,\gamma_1=\\ &=\beta_1(m_{1100}-m_{1001})-\beta_2(m_{1010}-m_{1000}m_{0010})-\nu_2\beta_1\beta_2.\end{aligned}$$

Наконец, напишем уравнение (33), определяющее совместную характеристическую функцию величин Z, Θ, $\hat{Z}$, $\hat{\Theta}$:

$$\begin{aligned}\partial g_1(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4;\ \ t)/\partial t=M\,\{&-i\lambda_1Z\Theta+i\lambda_3(\alpha_{11}\hat{Z}\hat{\Theta}+\alpha_{12}\hat{Z}+\beta_1Z+\gamma_1)+\\ &+i\lambda_4(\alpha_{21}\hat{Z}\hat{\Theta}+\alpha_{22}\hat{Z}+\beta_2Z+\gamma_2)-\nu_1\lambda_1^2/2-\\ &-\nu_2(\beta_1\lambda_3+\beta_2\lambda_4)^2/2\}\exp\{i\lambda_1Z+i\lambda_2\Theta+i\lambda_3\hat{Z}+i\lambda_4\hat{\Theta}\}.\end{aligned}$$

Решив это уравнение совместно с уравнениями, определяющими матрицы α, β, γ, любым приближенным методом гл. 6, найдем коэффициенты уравнений условно оптимального фильтра, предназначенного для оценивания состояния системы $\dot{Z}=-\theta Z+V_1$ и неизвестного параметра θ, и совместное распределение величин Z, Θ, $\hat{Z}$, $\hat{\Theta}$, с помощью которого можно определить точность оценивания и найти доверительные области для Z и θ.

Пример 4. Построим теперь для задачи предыдущего примера условно оптимальный фильтр для оценивания одного только неизвестного параметра θ. Для определения класса допустимых фильтров включим неизвестную функцию времени $\hat{Z}$ в уравнении для $\dot{\hat{\Theta}}$ предыдущего примера в оптимизируемые коэффициенты. Тогда получим следующее уравнение класса допустимых фильтров:

$$\dot{\hat{\Theta}} = \alpha\hat{\Theta} + \beta X + \gamma.$$

Таким образом, функции ξ и η определяются в этом случае формулами

$$\xi(\hat{\theta}, t) = \hat{\theta}, \quad \eta(\hat{\theta}, t) = 1.$$

Поскольку все допустимые фильтры линейны, для определения α, β и γ надо пользоваться формулами (15), (16), (18), (19), (21) и (22). Эти формулы последовательно дают

$$\beta = \nu_2^{-1}(m_{110} - m_{101}),$$
$$\alpha = \frac{-m_{111} + m_{110}m_{001} + \beta(m_{101} - m_{100}m_{001})}{m_{002}^2 - m_{001}^2},$$
$$\gamma = -\alpha m_{001} - \beta m_{100}.$$

Уравнение (33) для совместной характеристической функции величин Z, Θ, $\hat{\Theta}$ имеет в данном случае вид

$$\partial g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; t)/\partial t = M\{-i\lambda_1 Z\Theta + i\lambda_3(\alpha\hat{\Theta} + \beta Z + \gamma) - \\ - \nu_1\lambda_1^2/2 - \nu_2\beta^2\lambda_2^2/2\} \exp\{i\lambda_1 Z + i\lambda_2\Theta + i\lambda_3\hat{\Theta}\}.$$

Решив это уравнение при α, β, γ, определяемых полученными формулами, любым приближенным методом гл. 6, найдем оптимальные коэффициенты α, β, γ и совместное распределение Z, Θ, $\hat{\Theta}$, с помощью которого можно определить точность оценивания, в частности найти доверительные интервалы для θ.

9.2.6. Уравнения, определяющие условно оптимальный экстраполятор. Совершенно так же решается задача условно оптимальной экстраполяции, поставленная в п. 9.1.4. Разница будет лишь в том, что в случае экстраполяции $\hat{Z}_t$ представляет собой оценку будущего состояния системы $Z_{t+\Delta}$, $\Delta > 0$, которое в силу (7) определяется стохастическим дифференциальным уравнением

$$dZ_{t+\Delta} = \varphi(Z_{t+\Delta}, t+\Delta)\,dt + \psi(Z_{t+\Delta}, t+\Delta)\,dW(t+\Delta).$$

Заменив этим уравнением второе уравнение (5) и повторив все выкладки пп. 9.2.1—9.2.5, получим уравнения, определяющие коэффициенты уравнения условно оптимального экстраполятора. Приведем полученные таким путем результаты.

Условие некоррелированности ошибки с $\eta_t \Delta Y$ дает, как и в п. 9.2.1, формулу (18) для $A\beta$, в которой

$$\varkappa_{02} = M(Z_{t+\Delta} - AU_t)\varphi_1(Y_t, Z_t, t)^{\mathrm{T}}\eta(Y_t, U_t, t)^{\mathrm{T}},$$
$$\varkappa_{22} = M\eta(Y_t, U_t, t)\psi_1(Y_t, Z_t, t)\nu_2(t)\psi_1(Y_t, Z_t, t)^{\mathrm{T}}\eta(Y_t, U_t, t)^{\mathrm{T}}. \tag{34}$$

Условия несмещенности оценки и некоррелированности ошибки с $\xi_t \Delta t$ принимают в этом случае вид

$$M\hat{Z}_t = MZ_{t+\Delta}, \quad M(\hat{Z}_t - Z_{t+\Delta})\xi_t^{\mathrm{T}} = 0.$$

Из этих условий получаются уравнения (15), (22) и (24) для $A\alpha$ и $A\gamma$ и формулы (16), (21) и (25) для m_1, m_2, $\varkappa_{11}$, $\varkappa_{21}$, $\varkappa'_{21}$, а вместо первой формулы (16) для m_0, последней формулы (21) для $\varkappa_{01}$ и формулы (29) для $\varkappa'_{01}$ получаются формулы

$$m_0 = M\varphi(Z_{t+\Delta}, \quad t+\Delta), \tag{35}$$

$$\varkappa_{01} = M[\varphi(Z_{t+\Delta}, \ t+\Delta) - m_0]\,\xi(Y_t, \ U_t, \ t)^{\mathrm{T}}, \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \varkappa'_{01} = \varkappa_{01} &+ M(Z_{t+\Delta} - AU)\frac{\partial \xi^{\mathrm{T}}}{\partial t} + \\ &+ M\left\{(Z_{t+\Delta} - AU)\left[\varphi_1^{\mathrm{T}} - \int_{R^n} c_2(x)^{\mathrm{T}}\nu_{2P}(t, x)\,dx\,\psi_1^{\mathrm{T}}\right] - A\beta\eta\psi_1\nu_{20}\psi_1^{\mathrm{T}}\right\} \times \\ &\times\left(\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial u}\right)\xi^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}M(Z_{t+\Delta} - AU)\left\{\operatorname{tr}\left[\psi_1\nu_{20}\psi_1^{\mathrm{T}} \times \right.\right. \\ &\left.\times\left(\frac{\partial}{\partial y} + 2\eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial u}\right)\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial y}\right] + \left.\operatorname{tr}\left[\beta\eta\psi_1\nu_{20}\psi_1^{\mathrm{T}}\eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial u}\right]\right\}\xi^{\mathrm{T}} + \\ &+ \int_{R^n} M[Z_{t+\Delta} - AU - A\beta\eta\psi_1 c_2(x)] \times \\ &\times[\xi(Y + \psi_1 c_2(x), \ U + \beta\eta\psi_1 c_2(x), \ t)^{\mathrm{T}} - \xi^{\mathrm{T}}]\,\nu_{2P}(t, x)\,dx, \end{aligned} \tag{37}$$

где $c_2(x)$, ν_{20} и ν_{2P} — соответствующие величины в представлении интенсивности ν_2 процесса $W_2(t)$ формулой вида (28).

В случае винеровского процесса $W_2(t)$ $c_2(x) = 0$, $\nu_{20} = \nu_2$ и формула (37) принимает вид

$$\begin{aligned} \varkappa'_{01} = \varkappa_{01} &+ M(Z_{t+\Delta} - AU)\frac{\partial \xi^{\mathrm{T}}}{\partial t} + \\ &+ M[(Z_{t+\Delta} - AU)\varphi_1^{\mathrm{T}} - A\beta\eta\psi_1\nu_2\psi_1^{\mathrm{T}}]\left(\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial u}\right)\xi^{\mathrm{T}} + \\ &+ \frac{1}{2}M(Z_{t+\Delta} - AU)\left\{\operatorname{tr}\left[\psi_1\nu_2\psi_1^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial}{\partial y} + 2\eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial u}\right)\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial y}\right] + \right. \\ &\left. + \operatorname{tr}\left[\beta\eta\psi_1\nu_2\psi_1^{\mathrm{T}}\eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial u}\right]\right\}\xi^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{38}$$

В качестве пояснения ко второй формуле (34) и формулам (37) и (38) заметим, что роль матриц ψ, ψ_1, ν, ν_0 в задаче экстраполяции играют соответственно

$$[\psi_{t+\Delta} \ \ 0], \quad [0 \ \ \psi_1], \quad \begin{bmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \nu_{10} & 0 \\ 0 & \nu_{20} \end{bmatrix}$$

и величинам $\psi_1\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}}$, $\psi\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}}$, $\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}}$ и $\psi\nu\psi_1^{\mathrm{T}}$ соответствуют

$$[0 \ \ \psi_1]\begin{bmatrix} \nu_{10} & 0 \\ 0 & \nu_{20} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \psi_1^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \psi_1\nu_{20}\psi_1^{\mathrm{T}}, \qquad [\psi_{t+\Delta} 0]\begin{bmatrix} \nu_{10} & 0 \\ 0 & \nu_{20} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \psi_1^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = 0,$$

$$[0 \ \ \psi_1]\begin{bmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \psi_1^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \psi_1\nu_2\psi_1^{\mathrm{T}}, \quad [\psi_{t+\Delta} \ \ 0]\begin{bmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \psi_1^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = 0.$$

► Для вычисления математических ожиданий в первой формуле (34), в (36), (37) и (38) недостаточно знать одномерное распределение составного случайного процесса $[Y(t)^{\mathrm{T}} Z(t)^{\mathrm{T}} U(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, а надо знать совместное распределение величин Y_t, Z_t, $Z_{t+\Delta}$, U_t при каждом t. Чтобы найти это распределение, напишем уравнение (5.41), определяющее двумерную характеристическую функцию $g_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3;\ t, s)$ процесса $[Y(t)^{\mathrm{T}} Z(t)^{\mathrm{T}} U(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ при $s > t$. Совершенно так же, как в п. 9.2.5, получаем

$$\partial g_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3;\ t, s)/\partial s = M\{i\mu_1^{\mathrm{T}}\varphi_1(Y_s, Z_s, s) + i\mu_2^{\mathrm{T}}\varphi(Z_s, s) + \\ + i\mu_3^{\mathrm{T}}[\alpha_s\xi(Y_s, U_s, s) + \beta_s\eta(Y_s, U_s, s)\varphi_1(Y_s, Z_s, s) + \gamma_s] + \\ + \chi(\psi_1(Y_s, Z_s, s)^{\mathrm{T}}\mu_1 + \psi(Z_s, s)\mu_2 + \\ + \psi_1(Y_s, Z_s, s)^{\mathrm{T}}\eta(Y_s, U_s, s)^{\mathrm{T}}\beta_s^{\mathrm{T}}\mu_3;\ s)\}\exp\{i\lambda_1^{\mathrm{T}}Y_t + i\lambda_2^{\mathrm{T}}Z_t + \\ + i\lambda_3^{\mathrm{T}}U_t + i\mu_1^{\mathrm{T}}Y_s + i\mu_2^{\mathrm{T}}Z_s + i\mu_3^{\mathrm{T}}U_s\}. \quad (39)$$

К этому уравнению следует добавить начальное условие (5.42), которое в этом случае имеет вид

$$g_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3;\ t, t) = g_1(\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \lambda_3 + \mu_3;\ t). \blacktriangleleft \quad (40)$$

Распределение U_0 при этом следует выбрать так, чтобы условия $M\hat{Z}_t = MZ_{t+\Delta}$, $M(\hat{Z}_t - Z_{t+\Delta})\xi_t^{\mathrm{T}} = 0$ удовлетворялись при $t = t_0$.

Уравнения (15), (18), (24), (31), (32), (39) и (40) полностью и точно решают задачу нахождения условно оптимального экстраполятора, поставленную в п. 9.1.4 [62—66].

В частном случае, когда функции φ_1 и ψ_1 в уравнениях (7) не зависят от Y, для решения задачи достаточно знать двумерное распределение процесса $[Z(t)^{\mathrm{T}} U(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$. Совершенно так же, как в п. 9.2.5, находим уравнение (5.41) для двумерной характеристической функции $g_2(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2;\ t, s)$ этого процесса:

$$\partial g_2(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2;\ t, s)/\partial s = M\{i\mu_1^{\mathrm{T}}\varphi(Z_s, s) + \\ + i\mu_2^{\mathrm{T}}[\alpha_s\xi(U_s, s) + \beta_s\eta(U_s, s)\varphi_1(Z_s, s) + \gamma_s] + \\ + \chi(\psi(Z_s, s)^{\mathrm{T}}\mu_1 + \psi_1(Z_s, s)^{\mathrm{T}}\eta(U_s, s)^{\mathrm{T}}\beta_s^{\mathrm{T}}\mu_2;\ s)\}\times \\ \times\exp\{i\lambda_1^{\mathrm{T}}Z_t + i\lambda_2^{\mathrm{T}}U_t + i\mu_1^{\mathrm{T}}Z_s + i\mu_2^{\mathrm{T}}U_s\}. \quad (41)$$

Для приближенного решения уравнений (31) и (39) или (33) и (41) совместно с уравнениями (15), (18) и (24) можно применить один из приближенных методов гл. 6. Методы § 6.4—6.7 дают возможность решить эти уравнения с любой степенью точности.

Все замечания относительно уравнений (15), (18), (24) и (31) и функций ξ и η полностью относятся и к задаче условно оптимальной экстраполяции.

Изложенная теория условно оптимального оценивания и экстраполяции случайных процессов дает возможность строить фильтры для одновременного оценивания состояния и параметров системы и экстраполяции ее состояния на несколько различных интервалов времени в натуральном масштабе времени. Все сложные расчеты, необходимые для проектирования таких фильтров, не опираются на результаты наблюдения и могут быть выполнены по априорным данным в процессе проектирования. Практическое применение таких фильтров сводится к одновременному интегрированию уравнений (1) или (2) для оценок текущего и будущих состояний системы.

Пример 5. Найти условно оптимальный экстраполятор для прогнозирования процесса, определяемого уравнением

$$\dot{Z}=(a+bt)\,Z^3+ZV_1,$$

на время $\Delta>0$ по результатам его наблюдения с аддитивной помехой, представляющей собой белый шум V_2, независимый от V_1. Белые шумы V_1 и V_2 считать нормально распределенными. Класс допустимых фильтров для экстраполяции определяется уравнением

$$\dot{\hat{Z}}=\alpha_1\hat{Z}^3+\alpha_2\hat{Z}+\beta X+\gamma.$$

Уравнение наблюдения в данном случае имеет вид $\dot{Y}=X=Z+V_2$. Формулы (18) и (34) дают $\varkappa_{02}=m_{110}-m_{101}$, $\varkappa_{22}=\nu_2$ и $\beta=\nu_2^{-1}(m_{110}-m_{101})$, где $m_{rsu}=MZ_t^rZ_{t+\Delta}^s\hat{Z}_t^u$. После этого уравнения (15) и (24) в силу (36) и (38) принимают вид

$$m_{003}\alpha_1+m_{001}\alpha_2+\gamma=(a+bt+b\Delta)\,m_{030},$$

$$\left(4m_{006}-3m_{15}-m_{003}^2\right)\alpha_1+\left(4m_{004}-3m_{013}-m_{003}m_{001}\right)\alpha_2+3\,(m_{003}-m_{012})\,\gamma=$$
$$=(a+bt+b\Delta)\,(m_{033}-m_{030}m_{003})+\beta\,(3m_{112}-4m_{103}+m_{100}m_{003}-\nu_2\beta m_{002}),$$

$$\left(2m_{004}-m_{013}-m_{003}m_{001}\right)\alpha_1+\left(2m_{002}-m_{011}+m_{001}^2\right)\alpha_2+(m_{001}-m_{010})\,\gamma=$$
$$=(a+bt+b\Delta)\,(m_{031}-m_{030}m_{001})+\beta\,(m_{110}-2m_{101}+m_{100}m_{001}-\nu_2\beta).$$

Уравнения (33) и (41) имеют в этом случае вид

$$\partial g_1(\lambda_1,\ \lambda_2;\ t)/\partial t=M\,\{i\lambda_1(a+bt)\,Z^3+i\lambda_2\,(\alpha_1\hat{Z}^3+\alpha_2\hat{Z}+\beta Z+\gamma)-$$
$$-\nu_1Z^2\lambda_1^2/2-\nu_2\beta^2\lambda_2^2/2)\}\exp\{i\lambda_1Z+i\lambda_2\hat{Z}\},$$

$$\partial g_2(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \mu_1,\ \mu_2;\ t,\ s)/\partial s=$$
$$=M\,\{i\mu_1(a+bs)Z_s^3+i\mu_2\,(\alpha_{1s}\hat{Z}_s^3+\alpha_{2s}\hat{Z}_s+\beta_sZ_s+\gamma_s)-$$
$$-\nu_1Z_s^2\mu_1^2/2-\nu_2\beta_s^2\mu_2^2/2\}\exp\{i\lambda_1Z_t+i\lambda_2\hat{Z}_t+i\mu_1Z_s+i\mu_2\hat{Z}_s\}.$$

Решив эти уравнения совместно с уравнениями для α, β, γ, найдем оптимальные α, β, γ, определяющие оптимальный экстраполятор. Для этой цели надо сначала решить задачу фильтрации, пользуясь уравнением для g_1 и уравнениями для α, β, γ с заменой m_{rsu} величинами $m_{r+s,\,0,\,u}$. Подставив найденные таким путем α, β, γ в уравнение для g_2, можем решить это уравнение относительно g_2 и, таким образом, найти g_2 в первом приближении. После этого можно определить коэффициенты уравнений для α, β, γ в первом приближении. В результате эти уравнения определят α, β, γ во втором приближении. Решив уравнения для g_1 и g_2 с этими α, β, γ, найдем g_1 и g_2 во втором приближении, и так далее. Уравнения для g_1 и g_2 можно решить на каждом шаге любым из приближенных методов гл. 6.

9.2.7. Формула для производной ковариационной матрицы ошибки. Из общей формулы (6.13) для производной по времени ковариационной матрицы значения случайного процесса, имеющего стохастический дифференциал, можно вывести формулу для производной по времени ковариационной матрицы ошибки условно оптимального фильтра.

▶ Вычитая из уравнения (2), умноженного слева на матрицу A, второе уравнение (5), находим стохастический дифференциал ошибки фильтрации $\tilde{Z}=\hat{Z}-Z$:

$$d\tilde{Z}=(A\alpha\xi+A\beta\eta\varphi_1+A\gamma-\varphi)\,dt+(A\beta\eta\psi_1-\psi)\,dW.$$

Подставив отсюда выражения коэффициентов при dt и dW, т. е. матриц a и b в (6.13), получим

$$\begin{aligned}\dot{R}=(M\tilde{Z}\xi^{\mathsf{T}}\alpha^{\mathsf{T}}+M\tilde{Z}\varphi_1^{\mathsf{T}}\eta^{\mathsf{T}}\beta^{\mathsf{T}}+M\tilde{Z}\gamma^{\mathsf{T}})\,A^{\mathsf{T}}-\\ -M\tilde{Z}\varphi^{\mathsf{T}}+A\,(\alpha M\xi\tilde{Z}^{\mathsf{T}}+\beta M\eta\varphi_1\tilde{Z}^{\mathsf{T}}+\gamma M\tilde{Z}^{\mathsf{T}})-\\ -M\varphi\tilde{Z}^{\mathsf{T}}+M\,(A\beta\eta\psi_1-\psi)\,\nu\,(\psi_1^{\mathsf{T}}\eta^{\mathsf{T}}\beta^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}-\psi^{\mathsf{T}}).\end{aligned}$$

Эта формула справедлива для любого допустимого фильтра. Для условно оптимального фильтра выполняются условие несмещенности оценки (14) и условие некоррелированности ошибки со случайным вектором ξ (20), вследствие чего $M\tilde{Z}=M\hat{Z}-MZ=0$, $M\tilde{Z}\xi^{\mathsf{T}}=M\,(\hat{Z}-Z)\,\xi^{\mathsf{T}}=0$. Кроме того, в силу формул (18) и (19)

$$\begin{aligned}M\tilde{Z}\varphi_1^{\mathsf{T}}\eta^{\mathsf{T}}-M\psi\nu\psi_1^{\mathsf{T}}\eta^{\mathsf{T}}+A\beta M\eta\psi_1\nu\psi_1^{\mathsf{T}}\eta^{\mathsf{T}}=\\ =M\,(\hat{Z}-Z)\,\varphi_1^{\mathsf{T}}\eta^{\mathsf{T}}-M\psi\nu\psi_1^{\mathsf{T}}\eta^{\mathsf{T}}+A\beta M\eta\psi_1\nu\psi_1^{\mathsf{T}}\eta^{\mathsf{T}}=\\ =-\varkappa_{02}+A\beta\varkappa_{22}=0.\end{aligned}$$

Поэтому для условно оптимального фильтра формула для производной ковариационной матрицы ошибки принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{R}=M\,[(Z_t-\hat{Z}_t)\,\varphi\,(Y_t,\ Z_t,\ t)^{\mathsf{T}}+\varphi\,(Y_t,\ Z_t,\ t)\,(Z_t^{\mathsf{T}}-\hat{Z}_t^{\mathsf{T}})-\\ -A\beta\eta\,(Y_t,U_t,t)\,\psi_1\,(Y_t,Z_t,\ t)\,\nu\,(t)\,\psi_1\,(Y_t,Z_t,\ t)^{\mathsf{T}}\,\eta\,(Y_t,\ U_t,\ t)^{\mathsf{T}}\,\beta^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}+\\ +\psi\,(Y_t,\ Z_t,\ t)\,\nu\,(t)\,\psi\,(Y_t,\ Z_t,\ t)^{\mathsf{T}}].\ ◀ \qquad (42)\end{aligned}$$

Совершенно так же выводится формула для производной по времени ковариационной матрицы ошибки условно оптимального экстраполятора

$$\begin{aligned}\dot{R}=M\,[(Z_{t+\Delta}-\hat{Z}_t)\,\varphi\,(Z_{t+\Delta},\ \ t+\Delta)^{\mathsf{T}}+\varphi\,(Z_{t+\Delta},\ t+\Delta)\,(Z_{t+\Delta}^{\mathsf{T}}-\hat{Z}_t^{\mathsf{T}})-\\ -A\beta\eta\,(Y_t,\ U_t,\ t)\,\psi_1\,(Y_t,\ Z_t,\ t)\,\nu_2\,(t)\,\psi_1\,(Y_t,\ Z_t,\ t)^{\mathsf{T}}\,\eta\,(Y_t,\ U_t,\ t)^{\mathsf{T}}\,\beta^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}+\\ +\psi\,(Z_{t+\Delta},\ t+\Delta)\,\nu_1\,(t+\Delta)\,\psi\,(Z_{t+\Delta},\ t+\Delta)^{\mathsf{T}}]. \qquad (43)\end{aligned}$$

9.2.8. Применение условно оптимальной фильтрации к задачам распознавания. Теорию условно оптимальной фильтрации можно применить для решения задачи распознавания сигналов п. 7.2.11

в случае, когда функция φ_1 в первом уравнении (5) линейна относительно вектора состояния Z,

$$\varphi_1(y,\ z,\ \theta,\ t)=b(y,\ \theta,\ t)\,z+b_0(y,\ \theta,\ t),$$

а функция ψ_1 не зависит от Z. В этом случае

$$\hat{\varphi}_{1k}=M\left[\varphi_1(Y,\ Z,\ \theta_k,\ t)\,\middle|\,Y_{t_0}^t\right]=b(Y,\ \theta_k,\ t)\,\hat{Z}_k+b_0(Y_t,\ \theta_k,\ t)$$

и уравнения (7.27) принимают вид

$$dq_k(t)=\Big\{\hat{Z}_k^{\mathrm{T}}b(Y,\ \theta_k,\ t)^{\mathrm{T}}+b_0(Y,\ \theta_k,\ t)^{\mathrm{T}}-$$
$$-\sum_{h=1}^{N}q_h(t)\left[\hat{Z}_h^{\mathrm{T}}b(Y,\ \theta_h,\ t)^{\mathrm{T}}+b_0(Y,\ \theta_h,\ t)^{\mathrm{T}}\right]\Big\}\,q_k(t)\times$$
$$\times(\psi_1\nu\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y,\ t)\left\{dY-\sum_{h=1}^{N}q_h(t)\left[b(Y,\ \theta_h,\ t)\,\hat{Z}_h+b_0(Y,\ \theta_h,\ t)\right]dt\right\}$$
$$(k=1,\ \ldots,\ N). \qquad (44)$$

Заменив здесь оптимальные оценки $\hat{Z}_1,\ \ldots,\ \hat{Z}_N$ вектора состояния системы для разных классов сигналов соответствующими условно оптимальными оценками и добавив уравнения типа (1) или (2), определяющие эти оценки, $\hat{Z}_k=AU_k$,

$$dU_k=\alpha_k\xi(Y,\ U_k,\ \theta_k,\ t)\,dt+\beta_k\eta(Y,\ U_k,\ \theta_k,\ t)\,dY+\gamma_k\,dt \qquad (45)$$
$$(k=1,\ \ldots,\ N),$$

получим замкнутую систему уравнений для $\hat{Z}_1,\ \ldots,\ \hat{Z}_N,\ q_1,\ \ldots,\ q_N$.

Таким образом, при линейной относительно Z функции φ_1 в первом уравнении (5) и не зависящей от Z функции ψ_1 теория условно оптимальной фильтрации дает возможность решать задачи распознавания сигналов различных классов при любых функциях φ и ψ во втором уравнении (5).

§ 9.3. Фильтрация и экстраполяция при автокоррелированной помехе в наблюдениях

9.3.1. Преобразование уравнений. При решении задач теории условно оптимальной фильтрации и экстраполяции при автокоррелированной помехе в наблюдениях ограничимся для простоты случаем винеровских процессов $W(t)$, $W_1(t)$ и $W_2(t)$ в уравнениях (9) и (10).

Согласно сказанному в п. 9.1.4 для приведения задачи фильтрации к случаю белого шума в наблюдениях будем дифференцировать уравнение наблюдения до появления белого шума (члена с dW) в правой части. Дифференцировать следует, конечно, по формуле Ито (3.64).

► *Дифференцируя первое уравнение (9) по формуле Ито (3.64),* получаем, опуская для краткости аргументы функций,

$$d\dot{Y} = \left(\varphi_{1t} + \varphi_{1y}^{\mathrm{T}}\varphi_1 + \varphi_{1z}^{\mathrm{T}}\varphi + \varphi_{1n}^{\mathrm{T}}\varphi_0 + \frac{1}{2}\Phi_1\colon \Psi\nu\Psi^{\mathrm{T}}\right)dt + \\ + (\varphi_{1z}^{\mathrm{T}}\psi_1 + \varphi_{1n}^{\mathrm{T}}\psi_0)\,dW,$$

где, как обычно, $\varphi_{1t} = \partial\varphi_1/\partial t$, $\varphi_{1y} = (\partial/\partial Y)\,\varphi_1^{\mathrm{T}}$, $\varphi_{1z} = (\partial/\partial Z)\,\varphi_1^{\mathrm{T}}$, $\varphi_{1n} = (\partial/\partial N)\,\varphi_1^{\mathrm{T}}$, матрица Ψ определяется формулой $\Psi = [0\;\psi^{\mathrm{T}}\;\psi_0^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, а $\Phi_1\colon \Psi\nu\Psi^{\mathrm{T}}$ согласно обозначению (3.63) п. 3.5.2 представляет собой матрицу-столбец $m\times 1$, элементами которой служат следы произведений матриц вторых производных соответствующих компонент векторной функции φ_1 по всем компонентам векторов Y, Z, N и матрицы $\Psi\nu\Psi^{\mathrm{T}}$. Если $\varphi_{1z}^{\mathrm{T}}\psi + \varphi_{1n}^{\mathrm{T}}\psi_0 \neq 0$, то $s = 1$ и полученное уравнение представляет собой стохастическое дифференциальное уравнение, определяющее процесс $\dot{Y}(t)$. Если же $\varphi_{1z}^{\mathrm{T}}\psi + \varphi_{1n}^{\mathrm{T}}\psi_0 \equiv 0$, то полученное уравнение представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение. В этом случае дифференцирование надо продолжать.

Предположив, что отличное от нуля слагаемое с dW появляется только после s-кратного дифференцирования первого уравнения (9) *), и положив $Y^{(0)} = Y$, $Y^{(k+1)} = dY^{(k)}/dt$ $(k = 0, 1, \ldots, s-1)$, будем иметь

$$Y^{(k+1)} = \varphi_{k+1}(Y^{(0)}, Z, N, t) \qquad (k = 0, 1, \ldots, s-1), \tag{46}$$

где функции $\varphi_2, \ldots, \varphi_s$ определяются рекуррентной формулой

$$\varphi_{k+1}(Y, Z, N, t) = \\ = \varphi_{kt}(Y, Z, N, t) + \varphi_{ky}(Y, Z, N, t)^{\mathrm{T}}\varphi_1(Y, Z, N, t) + \\ + \varphi_{kz}(Y, Z, N, t)^{\mathrm{T}}\varphi(Y, Z, N, t) + \varphi_{kn}(Y, Z, N, t)^{\mathrm{T}}\varphi_0(Y, Z, N, t) + \\ + \frac{1}{2}(\Phi_k\colon \Psi\nu\Psi^{\mathrm{T}})(Y, Z, N, t) \quad (k = 1, \ldots, s-1). \tag{47}$$

В этой формуле $\Phi_k\colon \Psi\nu\Psi^{\mathrm{T}}$ — $m\times 1$-матрица, элементами которой служат следы произведений матриц вторых производных соответствующих компонент векторной функции φ_k по всем компонентам векторов Y, Z, N и матрицы $\Psi\nu\Psi^{\mathrm{T}}$. Дифференцирование последнего уравнения (46), соответствующего $k = s-1$, дает

$$dY^{(s)} = \varphi_{s+1}(Y^{(0)}, Z, N, t)\,dt + \psi_1(Y^{(0)}, Z, N, t)\,dW, \tag{48}$$

---

*) Так как первое уравнение (9) не может содержать меньше m независимых компонент помехи, то это может быть только при $h \geqslant sm$.

где

$$\varphi_{s+1}(Y, Z, N, t) = \varphi_{st}(Y, Z, N, t) + \varphi_{sy}(Y, Z, N, t)^{\mathrm{T}}\varphi_1(Y, Z, N, t) + \\ + \varphi_{sz}(Y, Z, N, t)^{\mathrm{T}}\varphi(Y, Z, N, t) + \varphi_{sn}(Y, Z, N, t)^{\mathrm{T}}\varphi_0(Y, Z, N, t) + \\ + \frac{1}{2}(\Phi_s\colon \Psi\nu\Psi^{\mathrm{T}})(Y, Z, N, t),$$

$$\psi_1(Y, Z, N, t) = \\ = \varphi_{sz}(Y, Z, N, t)^{\mathrm{T}}\psi(Y, Z, N, t) + \varphi_{sn}(Y, Z, N, t)^{\mathrm{T}}\psi_0(Y, Z, N, t). \tag{49}$$

Таким образом, в результате s-кратного дифференцирования уравнения наблюдения первое уравнение (9) заменяется уравнениями (46) и стохастическим уравнением (48). Эти уравнения можно переписать в виде

$$dY^{(k)} = Y^{(k+1)}dt \quad (k = 0, 1, \ldots, s-1), \\ dY^{(s)} = \varphi_{s+1}(Y^{(0)}, Z, N, t)\,dt + \psi_1(Y^{(0)}, Z, N, t)\,dW. \blacktriangleleft \tag{50}$$

Уравнения (50) вместе со вторым и третьим уравнениями (9) с $Y = Y^{(0)}$ представляют собой систему уравнений вида (5) с расширенным вектором состояния $Z' = [Z^{\mathrm{T}} N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ вместо Z и расширенным наблюдаемым вектором $Y' = [Y^{(0)\mathrm{T}} Y^{(1)\mathrm{T}} \ldots Y^{(s)\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ вместо Y. Порядок этой системы уравнений, как правило, можно понизить, исключив некоторые или все компоненты вектора помехи N с помощью уравнений (46).

Пример 6. Для уравнений вида (9)

$$dY = \varphi_1(Y, Z_1, N_1, t)\,dt \quad (Y \text{ — скалярная величина}), \\ dZ_k = Z_{k+1}\,dt \quad (k = 1, \ldots, l-1), \\ dZ_k = \varphi_k(Y, Z, N, t)\,dt + \psi_k(Y, Z, N, t)\,dW \quad (k = l, \ldots, p), \\ dN_k = N_{k+1}\,dt \quad (k = 1, \ldots, r-1), \\ dN_k = \varphi_{0k}(Y, Z, N, t)\,dt + \psi_{0k}(Y, Z, N, t)\,dW \quad (k = r, \ldots, h),$$

где $Z_1, \ldots, Z_p, N_1, \ldots, N_h$ — компоненты векторов Z и N, $s = \min(l, r)$, и формулы (47) и (49) дают

$$\varphi_{k+1} = \varphi_{kt} + \varphi_{ky}\varphi_1 + \sum_{i=1}^{k}[(\partial\varphi_i/\partial Z_1)Z_{k-i+2} + (\partial\varphi_i/\partial N_1)N_{k-i+2}] \\ (k = 1, \ldots, s-1),$$

$$\varphi_{s+1} = \varphi_{st} + \varphi_{sy}\varphi_1 + (\partial\varphi_1/\partial Z_1)\varphi_s' + (\partial\varphi_1/\partial N_1)\varphi_{0s}' + \\ + \sum_{i=2}^{s}[(\partial\varphi_i/\partial Z_1)Z_{s-i+2} + (\partial\varphi_i/\partial N_1)N_{s-i+2}],$$

$$\psi_1 = (\partial\varphi_1/\partial Z_1)\psi_s' + (\partial\varphi_1/\partial N_1)\psi_{0s}', \\ \varphi_s' = Z_{s+1}, \quad \psi_s' = 0 \quad \text{при} \quad s = r < l, \\ \varphi_{0s}' = N_{s+1}, \quad \psi_{0s}' = 0 \quad \text{при} \quad s = l < r.$$

Компоненты помехи $N_1, \ldots, N_s$ могут быть исключены из уравнений системы с помощью уравнений (46), которые последовательно дают

$$N_1 = \varphi_1^{-1}(Y^{(0)}, Y^{(1)}, Z_1, t),$$
$$N_{\rho+1} = \left(Y^{(\rho+1)} - \varphi_{\rho t} - \varphi_{\rho y}\varphi_1 - \sum_{i=1}^{\rho} \varphi_{iz_1} Z_{\rho-i+2} - \sum_{i=2}^{\rho} \varphi_{in_1} N_{\rho-i+2} \right) \varphi_{1n_1}$$
$$(\rho = 1, \ldots, s-1),$$
$$\varphi_{iz_1} = \partial\varphi_i/\partial Z_1, \quad \varphi_{in_1} = \partial\varphi_i/\partial N_1 \qquad (i = 1, \ldots, s-1).$$

Точно так же, заменив первое уравнение (10) уравнениями (50), приведем уравнения (10) в задаче экстраполяции к уравнениям вида (7) с расширенным вектором состояния $Z' = [Z^{\text{т}} N^{\text{т}}]^{\text{т}}$ вместо Z и расширенным наблюдаемым вектором $Y' = [Y^{(0)\text{т}} Y^{(1)\text{т}} \ldots$ $\ldots Y^{(s)\text{т}}]^{\text{т}}$ вместо Y.

9.3.2. Определение коэффициентов уравнения условно оптимального фильтра. Совершенно так же, как в п. 9.2.1, теория линейной регрессии дает для определения оптимальных α, β и γ в (4) условие несмещенности оценки $\hat{Z}$ (14) и условия некоррелированности ошибки со случайными векторами $\xi_t \Delta t$ и $\eta_t \Delta Y^{(s)}$:

$$M(AU_{t+\Delta t} - Z_{t+\Delta t})\,\xi_t^{\text{т}} = 0, \quad M(AU_{t+\Delta t} - Z_{t+\Delta t})\,\Delta Y^{(s)\text{т}}\,\eta_t^{\text{т}} = 0,$$

где $\xi_t = \xi(Y_t^{(0)}, Y_t^{(1)}, \ldots, Y_t^{(s)}, U_t, t)$, $\eta_t = \eta(Y_t^{(0)}, Y_t^{(1)}, \ldots, Y_t^{(s)}, U_t, t)$.

Из условия несмещенности оценки вытекает уравнение (15), в котором

$$m_0 = M\varphi(Y_t^{(0)}, Z_t, N_t, t), \qquad m_1 = M\xi(Y_t^{(0)}, Y_t^{(1)}, \ldots, Y_t^{(s)}, U_t, t),$$
$$m_2 = M\eta(Y_t^{(0)}, Y_t^{(1)}, \ldots, Y_t^{(s)}, U_t, t)\,\varphi_{s+1}(Y_t^{(0)}, Z_t, N_t, t). \tag{51}$$

Из условия некоррелированности ошибки со случайным вектором $\eta_t \Delta Y^{(s)}$ совершенно так же, как в п. 9.2.1, выводится формула (18) для оптимального $A\beta$, в которой

$$\varkappa_{02} = M[(Z_t - AU_t)\,\varphi_{s+1}(Y_t^{(0)}, Z_t, N_t, t)^{\text{т}} + (\psi\nu\psi_1^{\text{т}})(Y_t^{(0)}, Z_t, N_t, t)],$$
$$\varkappa_{22} = M\eta(Y_t^{(0)}, Y_t^{(1)}, \ldots, Y_t^{(s)}, U_t, t)\,(\psi_1\nu\psi_1^{\text{т}})(Y_t^{(0)}, Z_t, N_t, t) \times$$
$$\times \eta(Y_t^{(0)}, Y_t^{(1)}, \ldots, Y_t^{(s)}, U_t, t)^{\text{т}}. \tag{52}$$

Из условия некоррелированности ошибки со случайным вектором $\xi_t \Delta t$ при $\Delta t \to 0$ вытекает условие (20), которое должно быть выполнено при всех $t \geqslant t_0$. Из этого условия совершенно так же, как и в § 9.2, выводится второе уравнение, связывающее оптимальные α и γ. Сначала выведем это уравнение для случая линейного фильтра (4).

9.3.3. Оптимальные коэффициенты уравнения линейного фильтра. В случае линейного фильтра функция ξ в уравнении (4) линейна,

$$\xi(y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(s)}, u, t) = [y^{(0)\text{т}} y^{(1)\text{т}} \ldots y^{(s)\text{т}} u^{\text{т}}]^{\text{т}},$$

а η представляет собой единичную матрицу порядка m, $\eta(y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(s)}, u, t) = I$. При этом из (20) вытекает $s+2$ условий

$$M(AU - Z)Y^{(k)\text{т}} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, s), \quad M(AU - Z)U^{\text{т}} = 0.$$

Вычислив стохастические дифференциалы величин $(AU - Z)Y^{(k)\text{т}}$ $(k = 0, 1, \ldots, s)$ и $(AU - Z)U^{\text{т}}$ по формуле Ито (3.64) с учетом уравнений (50) и формул (15) и (18), получим систему линейных дифференциальных уравнений для $M(AU - Z)Y^{(k)\text{т}}$ $(k = 0, 1, \ldots \ldots, s)$ и $M(AU - Z)U^{\text{т}}$:

$$\begin{aligned} dM(AU - Z)\left[Y^{(0)\text{т}}\, Y^{(1)\text{т}} \ldots Y^{(s)\text{т}}\, U^{\text{т}}\right] = \\ = \{A\alpha M(\xi - m_1)\xi^{\text{т}} + A\beta M(\varphi_{s+1} - m_2)\xi^{\text{т}} - M(\varphi - m_0)\xi^{\text{т}}\}\, dt + \\ + \{M(AU - Z)\left[Y^{(1)\text{т}} \ldots Y^{(s)\text{т}}\, 0\; 0\right]^{\text{т}} + \\ + M(AU - Z)\left[Y^{(0)\text{т}}\, Y^{(1)\text{т}} \ldots Y^{(s)\text{т}}\, U^{\text{т}}\right][0 \ldots 0\; \alpha^{\text{т}}]\}\, dt. \end{aligned}$$

Для выполнения условия (20) при всех $t \geqslant t_0$ необходимо, чтобы эта система была однородной и условие (20) было выполнено в начальный момент t_0. Условие однородности уравнения дает для оптимального $A\alpha$ формулу (22), где

$$\begin{aligned} \varkappa_{01} &= M\left[\varphi(Y_t^{(0)}, Z_t, N_t, t) - m_0\right]\xi(Y_t^{(0)}, Y_t^{(1)}, \ldots, Y_t^{(s)}, U_t, t)^{\text{т}}, \\ \varkappa_{11} &= M\left[\xi(Y_t^{(0)}, Y_t^{(1)}, \ldots, Y_t^{(s)}, U_t, t) - m_1\right]\xi(Y_t^{(0)}, Y_t^{(1)}, \ldots, Y_t^{(s)}, U_t, t)^{\text{т}}, \\ \varkappa_{21} &= M\left[\varphi_{s+1}(Y_t^{(0)}, Z_t, N_t, t) - m_2\right]\xi(Y_t^{(0)}, Y_t^{(1)}, \ldots, Y_t^{(s)}, U_t, t)^{\text{т}}. \end{aligned} \tag{53}$$

Таким образом, условие (20) в случае линейного фильтра будет выполнено при всех $t \geqslant t_0$ тогда и только тогда, когда оно выполнено в начальный момент t_0, и α при всех $t \geqslant t_0$ определяется формулами (22) и (53).

9.3.4. Оптимальные коэффициенты уравнения нелинейного фильтра. Приравняв нулю дифференциал $dM(AU - Z)\xi^{\text{т}}$, получаем уравнение (24), в котором

$$\begin{aligned} \varkappa'_{21} = M\left[\eta(Y_t^{(0)}, Y_t^{(1)}, \ldots, Y_t^{(s)}, U_t, t)\,\varphi_{s+1}(Y_t^{(0)}, Z_t, N_t, t) - m_2\right] \times \\ \times\, \xi(Y_t^{(0)}, Y_t^{(1)}, \ldots, Y_t^{(s)}, U_t, t)^{\text{т}}, \end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned} \varkappa'_{01} = M(\varphi - m_0)\xi^{\text{т}} + M(Z - AU)\frac{\partial \xi^{\text{т}}}{\partial t} + \\ + \sum_{k=1}^{s-1} M(Z - AU)Y^{(k+1)\text{т}}\frac{\partial \xi^{\text{т}}}{\partial y^{(k)}} + M\{(Z - AU)\varphi_{s+1}^{\text{т}} + \\ + \psi\nu\psi_1^{\text{т}} - A\beta\eta\psi_1\nu\psi_1^{\text{т}}\}\left(\frac{\partial}{\partial y^{(s)}} + \eta^{\text{т}}\beta^{\text{т}}\frac{\partial}{\partial u}\right)\xi^{\text{т}} + \\ + \frac{1}{2}M(Z - AU)\left\{\operatorname{tr}\left[\psi_1\nu\psi_1^{\text{т}}\left(\frac{\partial}{\partial y^{(s)}} + 2\eta^{\text{т}}\beta^{\text{т}}\frac{\partial}{\partial u}\right)\frac{\partial^{\text{т}}}{\partial y^{(s)}}\right] + \right. \\ \left. + \operatorname{tr}\left[\beta\eta\psi_1\nu\psi_1^{\text{т}}\eta^{\text{т}}\beta^{\text{т}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial^{\text{т}}}{\partial u}\right]\right\}\xi^{\text{т}}, \end{aligned} \tag{55}$$

где, как и в п. 9.2.3, все функции без указания аргументов представляют собой их значения в момент t, например, $\xi = \xi(Y_t^{(0)}, Y_t^{(1)}, \ldots, Y_t^{(s)}, U_t, t)$.

Из (24), (54), (55) и (53) при $\xi(y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(s)}, u, t) = [y^{(0)\mathrm{T}} y^{(1)\mathrm{T}} \ldots y^{(s)\mathrm{T}} u^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $\eta(y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(s)}, u, t) = I$ следует, что $\varkappa_{21}' = \varkappa_{21}$, $\varkappa_{01}' = \varkappa_{01}$, и уравнение (24) дает формулу (22).

Само собой разумеется, формулы (54) и (55) можно получить из (25) и (26), если заменить Y составным вектором $Y' = [Y^{(0)\mathrm{T}} Y^{(1)\mathrm{T}} \ldots Y^{(s)\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, а φ_1, ψ_1 и η — блочными матрицами $\varphi_1' = [Y^{(1)\mathrm{T}} \ldots \ldots Y^{(s)\mathrm{T}} \varphi_{s+1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $\psi_1' = [0 \ldots 0\ \psi_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ и $\eta' = [0 \ldots 0\ \eta]$.

9.3.5. Уравнения, определяющие условно оптимальный фильтр. Для определения математических ожиданий в (51)—(55) и (24) достаточно знать совместное одномерное распределение процессов $Y^{(0)}(t)$, $Y^{(1)}(t)$, $\ldots$, $Y^{(s)}(t)$, $Z(t)$, $N(t)$ и $U(t)$. Одномерная характеристическая функция этого распределения определяется уравнением (5.38), в котором $a(z, t)$ и $b(z, t)$ должны быть заменены блочными матричными функциями

$$[Y^{(1)\mathrm{T}} \ldots Y^{(s)\mathrm{T}}\ \varphi_{s+1}^{\mathrm{T}}\varphi^{\mathrm{T}}\ \ \varphi_0^{\mathrm{T}}\ \ \xi^{\mathrm{T}}\alpha^{\mathrm{T}} + \varphi_{s+1}^{\mathrm{T}}\eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}} + \gamma^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

и

$$[0 \ldots 0\ \ \psi_1^{\mathrm{T}}\ \ \psi^{\mathrm{T}}\psi_0^{\mathrm{T}}\ \ \psi_1^{\mathrm{T}}\eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

соответственно. В результате получим для одномерной характеристической функции $g_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_{s+4}; t)$ процесса $[Y^{(0)}(t)^{\mathrm{T}} Y^{(1)}(t)^{\mathrm{T}} \ldots Y^{(s)}(t)^{\mathrm{T}} Z(t)^{\mathrm{T}} N(t)^{\mathrm{T}} U(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ уравнение

$$\begin{aligned}
\partial g_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_{s+4}; t)/\partial t &= \\
= M \Big\{ i \sum_{k=1}^{s} \lambda_k^{\mathrm{T}} Y^{(k)} &+ i\lambda_{s+1}^{\mathrm{T}}\varphi_{s+1} + i\lambda_{s+2}^{\mathrm{T}}\varphi + i\lambda_{s+3}^{\mathrm{T}}\varphi_0 + \\
+ i\lambda_{s+4}^{\mathrm{T}}(\alpha\xi + \beta\eta\varphi_{s+1} + \gamma) &+ \chi(\psi_1^{\mathrm{T}}\lambda_{s+1} + \psi^{\mathrm{T}}\lambda_{s+2} + \\
+ \psi_0^{\mathrm{T}}\lambda_{s+3} + \psi_1^{\mathrm{T}}\eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\lambda_{s+4};\ t) \Big\} &\exp \Big\{ i \sum_{k=0}^{s} \lambda_{k+1}^{\mathrm{T}} Y^{(k)} + \\
&+ i\lambda_{s+2}^{\mathrm{T}} Z + i\lambda_{s+3}^{\mathrm{T}} N + i\lambda_{s+4} U \Big\}, \qquad (56)
\end{aligned}$$

где, как и в (55), все функции без указания аргументов понимаются как их значения в момент t.

Начальным значением характеристической функции $g_1(\lambda_1, \ldots \ldots, \lambda_{s+4}; t)$ при $t = t_0$ на основании (5.39) служит характеристическая функция начальных значений векторов $Y^{(0)}$, $Y^{(1)}$, $\ldots \ldots$, $Y^{(s)}$, Z, N, U. При этом начальное распределение U следует задавать так, чтобы при $t = t_0$ были выполнены условия несмещенности оценки и некоррелированности ошибки с ξ.

Уравнение (56), конечно, может быть выведено из общего уравнения (31) путем замены Y расширенным вектором $Y' = [Y^{(0)\mathrm{T}} Y^{(1)\mathrm{T}} \ldots Y^{(s)\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, Z расширенным вектором $Z' = [Z^{\mathrm{T}} N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, φ, ψ, φ_1, ψ_1, η соответствующими блочными матрицами $[\varphi^{\mathrm{T}} \varphi_0^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,

$[\psi^T \psi_0^T]^T$, $[Y^{(1)T} \dots Y^{(s)T} \varphi_{s+1}^T]^T$, $[0 \dots 0\ \psi_1^T]^T$, $[0 \dots 0\ \eta]$ и векторов λ_1, λ_2, λ_3 векторами $[\lambda_1^T \dots \lambda_{s+1}^T]^T$, $[\lambda_{s+2}^T \lambda_{s+3}^T]^T$, λ_{s+4} соответственно.

Если некоторые компоненты помехи N исключены с помощью уравнений (46), то эти компоненты помехи должны быть заменены в φ, ψ, φ_{s+1}, ψ_1 в (51)—(56) их выражениями через $Y^{(0)}$, $Y^{(1)}$, ..., $Y^{(s)}$, а N в (56) следует понимать как вектор, составленный из оставшихся компонент помехи.

Однако можно поступить и наоборот, исключить из (51)—(55) $Y^{(1)}$, ..., $Y^{(s)}$ с помощью уравнений (46). В этом случае для вычисления математических ожиданий в (24), (51)—(55) достаточно знать совместное распределение векторов $Y^{(0)}$, Z, N и U в каждый момент t. Характеристическая функция этого распределения определяется уравнением (56) при $\lambda_2 = \dots = \lambda_{s+1} = 0$.

В задачах практики функция φ_1 в первом уравнении (9) обычно не зависит от $Y = Y^{(0)}$, функции φ и ψ во втором уравнении (9) не зависят от Y и N, а функции φ_0 и ψ_0 в третьем уравнении (9) не зависят от Y и Z. В этом случае функции ξ и η в (3) или (4) обычно берутся не зависящими от Y, и для определения всех математических ожиданий в (24) и (51)—(55) достаточно знать совместное распределение векторов Z, N и U в каждый момент t. Чтобы получить уравнение для характеристической функции $g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; t)$ этого распределения, достаточно положить в (56) $\lambda_1 = \dots = \lambda_{s+1} = 0$ и переименовать векторы λ_{s+2}, λ_{s+3}, λ_{s+4} в λ_1, λ_2, λ_3 соответственно. Тогда получим уравнение

$$\partial g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; t)/\partial t = M\{i\lambda_1^T\varphi + i\lambda_2^T\varphi_0 + i\lambda_3^T(\alpha\xi + \beta\eta\varphi_{s+1} + \gamma) + \\ + \chi(\psi^T\lambda_1 + \psi_0^T\lambda_2 + \psi_1^T\eta^T\beta^T\lambda_3;\ t)\} \exp\{i\lambda_1^T Z + i\lambda_2^T N + i\lambda_3^T U\}. \quad (57)$$

Уравнения (15), (18), (24) и (56) (или (57)) полностью и точно решают задачу нахождения условно оптимального фильтра при автокоррелированной помехе в наблюдениях, поставленную в п. 9.1.4 [69].

Для решения уравнения (56) или (57) совместно с (15), (18) и (24) (или (22)) можно применить любой из приближенных методов гл. 6.

В частном случае, когда класс допустимых фильтров определяется уравнением (3), $A = I$, $U = \hat{Z}$, и во всех формулах, определяющих условно оптимальный фильтр, следует заменить AU и U величиной $\hat{Z}$.

Все сказанное в конце п. 9.2.5 о нахождении коэффициентов уравнения условно оптимального фильтра, остающихся неопределенными после расчета изложенным методом, о практическом применении фильтра и о возможности оценивать только часть компонент вектора состояния системы, в частности только ее параметры, полностью относится и к только что полученным уравнениям для случая автокоррелированной помехи в наблюдениях.

Пример 7. В задаче примера 8.2,

$$\dot{Y}=X=Z+N,\quad \dot{Z}=-Z^3+V_1,\quad \dot{N}=-aN+V_2,$$

где N — стационарная помеха с показательной ковариационной функцией $k_n(\tau)=De^{-a|\tau|}$, а V_1 и V_2 — независимые нормально распределенные белые шумы, возьмем за основу для построения класса допустимых фильтров уравнение для $\hat{Z}$, полученное в примере 8.2 методом нормальной аппроксимации:

$$\dot{\hat{Z}}=-\hat{Z}(\hat{Z}^2+3R)+(\nu_1+\nu_2)^{-1}[\nu_1+aR-3R(\hat{Z}^2+R)][\dot{X}+aX-a\hat{Z}+\\+\hat{Z}(\hat{Z}^2+3R)].$$

Правая часть этого уравнения представляет собой полином относительно X, $\hat{Z}$ и $\dot{X}$, содержащий члены X, $X\hat{Z}^2$, $\hat{Z}$, $\hat{Z}^3$, $\hat{Z}^5$, $\dot{X}$ и $\dot{X}\hat{Z}^2$. Заменив коэффициенты при этих величинах подлежащими оптимизации функциями времени α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, β_1 и β_2 и вводя свободный член γ, также подлежащий оптимизации, получим уравнение допустимых фильтров в виде

$$\dot{\hat{Z}}=\alpha_1X+\alpha_2X\hat{Z}^2+\alpha_3\hat{Z}+\alpha_4\hat{Z}^3+\alpha_5\hat{Z}^5+(\beta_1+\beta_2\hat{Z}^2)\dot{X}+\gamma.$$

Таким образом, в данном случае

$$\varphi(z,\ t)=-z^3,\quad \varphi_0(n,\ t)=-an,\quad \varphi_1(z,\ n,\ t)=z+n,$$
$$\varphi_2(z,\ n,\ t)=-z^3-an,$$
$$\psi(z,\ t)=\psi_0(n,\ t)=1,\quad \psi_1(z,\ n,\ t)=[1\ \ 1],$$

ν представляет собой диагональную матрицу с элементами ν_1, ν_2,

$$\xi(x,\ \hat{z},\ t)=[x\ \ x\hat{z}^2\ \ \hat{z}\ \ \hat{z}^3\ \ \hat{z}^5]^{\mathrm{T}},\quad \eta(x,\ \hat{z},\ t)=[1\ \ \hat{z}^2]^{\mathrm{T}}.$$

Формулы (52) и (15) после исключения помехи из выражения функции φ_2 дают

$$\varkappa_{02}=\begin{bmatrix}\nu_1-m_{040}+m_{031}-a(m_{110}-m_{101}-m_{020}+m_{011})\\ \nu_1m_{002}-m_{042}+m_{033}-a(m_{112}-m_{103}-m_{022}+m_{013})\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$
$$\varkappa_{22}=(\nu_1+\nu_2)\begin{bmatrix}1 & m_{002}\\ m_{002} & m_{004}\end{bmatrix},\quad \beta=[\beta_1\ \ \beta_2]=\varkappa_{02}\varkappa_{22}^{-1},$$

где $m_{ijk}=MX^iZ^j\hat{Z}^k$. Уравнения (15) и (24) в этом случае имеют вид

$$m_{100}\alpha_1+m_{102}\alpha_2+m_{001}\alpha_3+m_{003}\alpha_4+m_{005}\alpha_5+\gamma=\\=-m_{030}+\beta_1(m_{030}-am_{100}+am_{010})+\beta_2(m_{032}-am_{102}+am_{012}),$$
$$(m_{200}-m_{100}^2)\alpha_1+(m_{202}-m_{100}m_{102})\alpha_2+(m_{101}-m_{100}m_{001})\alpha_3+\\+(m_{103}-m_{100}m_{003})\alpha_4+(m_{105}-m_{100}m_{005})\alpha_5=\\=-m_{130}+m_{100}m_{030}+\beta_1(m_{130}-m_{100}m_{030})+\beta_2(m_{132}-m_{102}m_{030})+\\+\beta_1a(m_{200}-m_{110}-m_{100}^2+m_{100}m_{010})+\beta_2a(m_{202}-m_{112}-m_{100}m_{102}+m_{102}m_{010}),$$
$$(3m_{202}-2m_{211}-m_{100}m_{102})\alpha_1+(3m_{204}-2m_{213}-m_{102}^2)\alpha_2+\\+(3m_{103}-2m_{112}-m_{102}m_{001})\alpha_3+(3m_{105}-2m_{114}-m_{102}m_{003})\alpha_4+\\+(3m_{107}-2m_{116}-m_{102}m_{005})\alpha_5+2(m_{102}-m_{111})\gamma=m_{132}-2m_{141}+\\+m_{102}m_{030}-2a(m_{211}-m_{202}-m_{121}+m_{112})+\beta_1(m_{132}-m_{102}m_{030})+\\+\beta_2(m_{134}-m_{104}m_{030})+\beta_1a(m_{202}-m_{112}-m_{100}m_{102}+m_{102}m_{010})+\\+\beta_2a(m_{204}-m_{114}-m_{100}m_{104}+m_{104}m_{010})+\nu_1[m_{002}+2(\beta_1m_{101}+\beta_2m_{103})]+\\+(\nu_1+\nu_2)[\beta_1(2m_{011}-3m_{002})+\beta_2(2m_{113}-3m_{004})+\beta_1^2(m_{110}-3m_{101})+\\+2\beta_1\beta_2(m_{112}-3m_{103})+\beta_2^2(m_{114}-3m_{105}),$$

$$
\begin{aligned}
&(2m_{101}-m_{110}-m_{100}m_{001})\,\alpha_1+(2m_{103}-m_{112}-m_{102}m_{001})\,\alpha_2+\\
&\quad+\left(2m_{002}-m_{011}-m_{001}^2\right)\alpha_3+(2m_{004}-m_{013}-m_{001}m_{003})\,\alpha_4+\\
&\quad+(2m_{006}-m_{015}-m_{001}m_{005})\,\alpha_5+(m_{001}-m_{010})\,\gamma=\\
&\quad=-m_{031}+m_{030}m_{001}+\beta_1(m_{031}-m_{030}m_{001})+\\
&\quad+\beta_2(m_{033}-m_{030}m_{003})+\beta_1 a(m_{101}-m_{011}-m_{100}m_{001}+m_{010}m_{001})+\\
&\quad+\beta_2 a(m_{103}-m_{013}-m_{100}m_{003}+m_{010}m_{003}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(4m_{103}-3m_{112}-m_{100}m_{003})\,\alpha_1+(4m_{105}-3m_{114}-m_{102}m_{003})\,\alpha_2+\\
&\quad+(4m_{004}-3m_{013}-m_{001}m_{003})\,\alpha_3+\left(4m_{006}-3m_{015}-m_{003}^2\right)\alpha_4+\\
&\quad+(4m_{008}-3m_{017}-m_{003}m_{005})\,\alpha_5+3(m_{003}-m_{012})\,\gamma=\\
&\quad=2m_{033}-3m_{042}+m_{030}m_{003}-3a(m_{112}-m_{103}-m_{022}+m_{013})+\\
&\quad+\beta_1(m_{033}-m_{030}m_{003})+\beta_2(m_{035}-m_{030}m_{005})+\\
&\quad+\beta_1 a(m_{103}-m_{013}-m_{100}m_{003}+m_{010}m_{003})+\beta_2 a(m_{105}-m_{015}-m_{100}m_{005}+m_{010}m_{005})+\\
&\quad+3\nu_1(\beta_1 m_{002}+\beta_2 m_{004})+3(\nu_1+\nu_2)\left[\beta_1^2(m_{011}-2m_{002})+\right.\\
&\quad\left.+2\beta_1\beta_2(m_{013}-2m_{004})+\beta_2^2(m_{015}-2m_{006})\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(6m_{105}-5m_{114}-m_{100}m_{005})\,\alpha_1+(6m_{107}-5m_{116}-m_{102}m_{005})\,\alpha_2+\\
&\quad+(6m_{006}-5m_{015}-m_{001}m_{005})\,\alpha_3+(6m_{008}-5m_{017}-m_{003}m_{005})\,\alpha_4+\\
&\quad+\left(6m_{00,10}-5m_{019}-m_{005}^2\right)\alpha_5+5(m_{005}-m_{014})\,\gamma=\\
&\quad=4m_{035}-5m_{044}+m_{030}m_{005}-5a(m_{114}-m_{105}-m_{024}+m_{015})+\\
&\quad+\beta_1(m_{035}-m_{030}m_{005})+\beta_2(m_{037}-m_{030}m_{007})+\\
&\quad+\beta_1 a(m_{105}-m_{015}-m_{100}m_{005}+m_{010}m_{005})+\\
&\quad+\beta_2 a(m_{107}-m_{017}-m_{100}m_{007}+m_{010}m_{007})+\\
&\quad+5\nu_1(\beta_1 m_{004}+\beta_2 m_{006})+5(\nu_1+\nu_2)\left[\beta_1^2(2m_{013}-3m_{004})+\right.\\
&\quad\left.+2\beta_1\beta_2(2m_{015}-3m_{006})+\beta_2^2(2m_{017}-3m_{008})\right].
\end{aligned}
$$

Уравнение (57), определяющее характеристическую функцию вектора $[Z\ N\ \hat{Z}]^{\mathrm{T}}$, имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\partial g_1(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3;\ t)/\partial t=M\,\{-i\lambda_1 Z^3-i\lambda_2 aN+\\
&\quad+i\lambda_3[\alpha_1(Z+N)+\alpha_2(Z+N)\hat{Z}^2+\alpha_3\hat{Z}+\alpha_4\hat{Z}^3+\alpha_5\hat{Z}^5+\gamma]-\\
&\quad-\left[\nu_1\lambda^2+\nu_2\lambda_2^2+(\nu_1+\nu_2)(\beta_1+\beta_2\hat{Z}^2)^2\lambda_3^2\right]/2-\\
&\quad-(\beta_1+\beta_2\hat{Z}^2)(\nu_1\lambda_1+\nu_2\lambda_2)\lambda_3\}\exp\{i\lambda_1 Z+i\lambda_2 N+i\lambda_3\hat{Z}\}.
\end{aligned}
$$

Решив это уравнение совместно с уравнениями, определяющими $\alpha=[\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5]$, $\beta=[\beta_1\beta_2]$ и γ, найдем коэффициенты уравнения условно оптимального фильтра. При этом следует иметь в виду, что необходимые для решения уравнений, определяющих оптимальные α, β, γ, моменты $m_{ijk}=MX^iZ^j\hat{Z}^k$ при $i=0,\ 1,\ 2$ выражаются через моменты $\alpha_{pqr}=MZ^pN^q\hat{Z}^r$ вектора $[Z\ N\ \hat{Z}]^{\mathrm{T}}$ формулами

$$
m_{0jk}=\alpha_{j0k},\quad m_{1jk}=\alpha_{j1k}+\alpha_{j+1,\,0,\,k},
$$
$$
m_{2jk}=\alpha_{j2k}+2\alpha_{j+1,\,1,\,k}+\alpha_{j+2,\,0,\,k}.
$$

Пример 8. Обобщая задачу примера 8.3, найдем условно оптимальный фильтр для оценивания неизвестного параметра θ в уравнении системы

$$
\dot{Z}=-\theta Z+V_1
$$

по результатам наблюдения состояния Z системы с аддитивной помехой, представляющей собой независимую от Z нормально распределенную стационарную случайную функцию $N(t)$ с ковариационной функцией $k_n(\tau)=De^{-a|\tau|}$.

В данном случае, взяв формирующий фильтр помехи $N(t)$ из примера 5.2, напишем уравнения (9) в виде

$$\dot{Y}=X=Z+N, \quad \dot{Z}=-Z\Theta+V_1, \quad \dot{\Theta}=0, \quad \dot{N}=-aN+V_2,$$

где V_1 и V_2 — независимые нормально распределенные белые шумы, причем интенсивность белого шума V_2 согласно результатам примера 5.2 равна $\nu_2=2Da$.

Чтобы найти подходящий класс допустимых фильтров, приведем задачу формально к случаю белого шума в наблюдениях и применим метод нормальной аппроксимации п. 8.1.3. Дифференцируя уравнение наблюдения, заменим его уравнением

$$\dot{X}=-Z\Theta-aN+V_1+V_2.$$

Это уравнение вместе с уравнениями, определяющими расширенный вектор состояния $Z'=[Z\ \Theta\ N]^{\mathrm{T}}$, образует систему уравнений вида (8.1) с $\varphi(x, z, \theta, n, t)=[-z\theta\ 0\ -an]^{\mathrm{T}}$, $\varphi_1(x, z, \theta, n, t)=-z\theta-an$,

$$\psi(x, z, \theta, n, t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \psi_1(x, t)=[1\ \ 1], \quad \nu=\begin{bmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{bmatrix},$$

для которой справедливы уравнения теории оптимальной фильтрации § 7.2. Уравнения для $\hat{Z}$ и $\hat{\Theta}$, полученные методом нормальной аппроксимации п. 8.1.3, имеют в данном случае вид

$$\dot{\hat{Z}}=-\hat{Z}\hat{\Theta}-R_{12}-(\nu_1+\nu_2)^{-1}(\hat{Z}R_{12}+\hat{\Theta}R_{11}+aR_{13})(\dot{X}-\hat{Z}\hat{\Theta}-R_{12}-a\hat{N}),$$
$$\dot{\hat{\Theta}}=-(\nu_1+\nu_2)^{-1}(\hat{Z}R_{22}+\hat{\Theta}R_{12}+aR_{23})(\dot{X}-\hat{Z}\hat{\Theta}-R_{12}-a\hat{N}),$$

где R_{ij} $(i, j=1, 2, 3)$ представляют собой элементы условной ковариационной матрицы вектора $[Z\ \Theta\ N]^{\mathrm{T}}$ относительно $X_{t_0}^t$. Правая часть уравнения для $\hat{\Theta}$ представляет собой полином второй степени относительно $\hat{\Theta}$ и $\dot{X}$, содержащий члены $\hat{\Theta}$, $\hat{\Theta}^2$, $\dot{X}$ и $\hat{\Theta}\dot{X}$ с коэффициентами, зависящими от других неизвестных функций времени $\hat{Z}$, $\hat{N}$, R_{12}, R_{22}, R_{23}. Согласно основной идее теории условно оптимальной фильтрации все эти величины следует включить в подлежащие определению коэффициенты уравнения. Тогда, добавив еще член с X (очевидно, это не может ухудшить качество фильтрации), получим уравнение класса допустимых фильтров

$$\dot{\hat{\Theta}}=\alpha_1\hat{\Theta}+\alpha_2\hat{\Theta}^2+\alpha_3 X+(\beta_1+\beta_2\hat{\Theta})\dot{X}+\gamma.$$

Формулы (18) и (52) с учетом того, что в данном случае $\varphi_2(Z, \Theta, N, t)=-Z\Theta-aN=aZ-Z\Theta-aX$ (при нахождении класса допустимых фильтров эта функция φ_2 играет роль функции φ_1 в уравнениях теории оптимальной фильтрации), дают для оптимальных β_1 и β_2 уравнения

$$(\nu_1+\nu_2)(\beta_1+m_{0001}\beta_2)=m_{0111}-m_{0120}+a(m_{1001}-m_{1010}+m_{0110}-m_{0101})+\nu_1,$$
$$(\nu_1+\nu_2)(m_{0001}\beta_1+m_{0002}\beta_2)=$$
$$=m_{0112}-m_{0121}+a(m_{1002}-m_{1011}+m_{0111}-m_{0102})+\nu_1 m_{0001},$$

где $m_{ijkl}=MX^iZ^j\Theta^k\hat{\Theta}^l$. Формулы (24), (53)—(55) дают для оптимальных α_1, α_2 и α_3 уравнения

$$(m_{0002}-m_{0001}^2)\alpha_1+(m_{0003}-m_{0002}m_{0001})\alpha_2+(m_{1001}-m_{1000}m_{0001})\alpha_3=$$
$$=\beta_1[m_{0111}+am_{1001}-am_{0101}-(m_{0110}+am_{1000}-am_{0100})m_{0001}]+$$
$$+\beta_2[m_{0112}+am_{1002}-am_{0102}-(m_{0111}+am_{1001}-am_{0101})m_{0001}],$$
$$(m_{0003}-m_{0001}m_{0002})\alpha_1+(3m_{0004}-2m_{0013}-m_{0002}^2)\alpha_2+$$
$$+(3m_{1002}-2m_{1011}-m_{1000}m_{0002})\alpha_3=\beta_1[m_{0112}+am_{1002}-am_{0102}-$$

$$-(m_{0110}+am_{1000}-am_{0100})\,m_{0002}]+\beta_2\,[3\,(m_{0113}+am_{1003}-am_{0103})-$$
$$-2\,(m_{0122}+am_{1012}-am_{0112})+(2\nu_1-m_{0111}-am_{1001}+am_{0101})\,m_{0002}]+$$
$$+2\,(\nu_1+\nu_2)\left[\beta_1^2\,(m_{0010}-m_{0001})+\beta_1\beta_2\,(2m_{0011}-3m_{0002})+\beta_2^2\,(m_{0012}-2m_{0003})\right],$$
$$(m_{1001}-m_{1000}m_{0001})\,\alpha_1+(m_{1002}-m_{1000}m_{0002})\,\alpha_2+\left(m_{2000}-m_{1000}^2\right)\alpha_3=$$
$$=\beta_1\,[m_{1110}+am_{2000}-am_{1100}-(m_{0110}+am_{1000}-am_{0100})\,m_{1000}]+$$
$$+\beta_2\,[m_{1111}+am_{2001}-am_{1101}-(m_{0111}+am_{1001}-am_{0101})\,m_{1000}].$$

Оптимальное значение γ определяется в силу (15) и (51) формулой

$$\gamma=-\alpha_1 m_{0001}-\alpha_2 m_{0002}-\alpha_3 m_{1000}+\beta_1\,(m_{0110}+am_{1000}-am_{0100})+$$
$$+\beta_2\,(m_{0111}+am_{1001}-am_{0101}).$$

Уравнение (57), определяющее одномерную характеристическую функцию процесса $[Z\,(t)\ \Theta\,(t)\ N\,(t)\ \hat{\Theta}\,(t)]^{\mathrm{T}}$, имеет вид

$$\partial g_1\,(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4;\ t)/\partial t=M\,\{-i\lambda_1 Z\Theta-i\lambda_3 aN+$$
$$+i\lambda_4\,[\alpha_1\hat{\Theta}+\alpha_2\hat{\Theta}^2+\alpha_3\,(Z+N)-(\beta_1+\beta_2\hat{\Theta})\,(Z\Theta+aN)+\gamma]-$$
$$-\nu_1\,[\lambda_1+(\beta_1+\beta_2\hat{\Theta})\,\lambda_4]^2/2-\nu_2\,[\lambda_3+(\beta_1+\beta_2\hat{\Theta})\,\lambda_4]^2/2\}\times$$
$$\times\exp\{i\lambda_1 Z+i\lambda_2\Theta+i\lambda_3 N+i\lambda_4\hat{\Theta}\}.$$

Решив это уравнение совместно с уравнениями, определяющими оптимальные α, β, γ, найдем коэффициенты уравнения условно оптимального фильтра.

Пример 9. Совершенно так же находится в условиях предыдущего примера условно оптимальный фильтр для одновременного оценивания состояния Z и параметра θ системы. Приведенные в предыдущем примере уравнения метода нормальной аппроксимации для $\hat{Z}$ и $\hat{\Theta}$ дают основание определить класс допустимых фильтров уравнениями

$$\dot{\hat{Z}}=\alpha_{11}\hat{Z}+\alpha_{12}\hat{\Theta}+\alpha_{13}\hat{Z}\hat{\Theta}+\alpha_{14}\hat{Z}^2\hat{\Theta}+\alpha_{15}\hat{Z}\hat{\Theta}^2+\alpha_{16}X+(\beta_{11}+\beta_{12}\hat{Z}+\beta_{13}\hat{\Theta})\,\dot{X}+\gamma_1,$$

$$\dot{\hat{\Theta}}=\alpha_{21}\hat{Z}+\alpha_{22}\hat{\Theta}+\alpha_{23}\hat{Z}\hat{\Theta}+\alpha_{24}\hat{Z}^2\hat{\Theta}+\alpha_{25}\hat{Z}\hat{\Theta}^2+\alpha_{26}X+(\beta_{21}+\beta_{22}\hat{Z}+\beta_{23}\hat{\Theta})\,\dot{X}+\gamma_2.$$

Предоставляем читателю самостоятельно получить для этого случая уравнения, определяющие оптимальные матрицы α, β и вектор γ.

9.3.6. Уравнения, определяющие условно оптимальный экстраполятор. Решение поставленной в п. 9.1.4 задачи экстраполяции состояния системы при автокоррелированной помехе в наблюдениях возможно только в том случае, когда компоненты вектора состояния, входящие в уравнение наблюдения, имеют с. к. производные более высокого порядка, чем компоненты помехи, входящие в то же уравнение наблюдения, т. е. когда при дифференцировании уравнения наблюдения появляется сначала белый шум, входящий в уравнение формирующего фильтра помехи. Физически это значит, что полезный сигнал в уравнении наблюдения более гладок, чем помеха.

Допустим, что белый шум, входящий в уравнение формирующего фильтра помехи, появляется после s-кратного дифференцирования уравнения наблюдения. Тогда первое уравнение (10) заменится уравнениями (50), причем функция ψ_1 в последнем уравнении (50) определяется формулой

$$\psi_1\,(Y,\ Z,\ N,\ t)=\varphi_{sn}\,(Y,\ Z,\ N,\ t)^{\mathrm{T}}\,\psi_0\,(N,\ t),\tag{58}$$

а функции $\varphi_2, \ldots, \varphi_{s+1}$ по-прежнему определяются формулой (47) и первой формулой (49). Уравнения (50) вместе со вторым и третьим уравнением (10) образуют систему уравнений вида (7) с расширенным вектором наблюдения $Y' = [Y^{(0)\mathrm{T}} Y^{(1)\mathrm{T}} \ldots Y^{(s)\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ вместо Y и расширенным вектором состояния $Z' = [Z^{\mathrm{T}} N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ вместо Z. Порядок этой системы уравнений, как правило, можно понизить путем исключения некоторых или всех компонент помехи N с помощью уравнений (46).

После преобразования уравнения наблюдения задача условно оптимальной экстраполяции решается совершенно так же, как и задача фильтрации. Разница будет лишь в том, что $\hat{Z}$ будет представлять собой оценку будущего вектора состояния системы $Z_{t+\Delta}$, $\Delta > 0$, стохастический дифференциал которого определяется в силу второго уравнения (10) формулой

$$dZ_{t+\Delta} = \varphi(Z_{t+\Delta},\ t+\Delta)\,dt + \psi(Z_{t+\Delta},\ t+\Delta)\,dW_1(t+\Delta).$$

Заменив этим уравнением второе уравнение (10) и повторив все выкладки пп. 9.3.2—9.3.4, получим уравнения, определяющие коэффициенты уравнения условно оптимального экстраполятора (3) или (4). Приведем полученные таким путем результаты.

Условие некоррелированности ошибки с $\eta_t \Delta Y^{(s)}$ дает формулу (18) для оптимального значения $A\beta$, в которой

$$\varkappa_{02} = M(Z_{t+\Delta} - AU_t)\,\varphi_{s+1}(Y_t^{(0)}, Z_t, N_t, t)^{\mathrm{T}}\,\eta(Y_t^{(0)}, Y_t^{(1)}, \ldots, Y_t^{(s)}, U_t, t)^{\mathrm{T}}, \tag{59}$$

а $\varkappa_{22}$ определяется второй формулой (52).

Условия несмещенности оценки и некоррелированности ошибки со случайным вектором ξ_t дают уравнения (15) и (24) ((22) в случае линейного экстраполятора) для оптимальных α и γ, в которых

$$m_0 = M\varphi(Z_{t+\Delta},\ t+\Delta),$$

$$\varkappa_{01} = M[\varphi(Z_{t+\Delta},\ t+\Delta) - m_0]\,\xi(Y_t^{(0)},\ Y_t^{(1)},\ \ldots,\ Y_t^{(s)},\ U_t,\ t)^{\mathrm{T}},$$

$$\begin{aligned}\varkappa'_{01} = {} & M(\varphi_{t+\Delta} - m_0)\,\xi^{\mathrm{T}} + M(Z - AU)\frac{\partial \xi^{\mathrm{T}}}{\partial t} + \sum_{k=0}^{s-1} M(Z - AU)\,Y^{(k+1)\mathrm{T}}\frac{\partial \xi^{\mathrm{T}}}{\partial y^{(k)}} + \\ & + M[(Z - AU)\,\varphi_{s+1}^{\mathrm{T}} - A\beta\eta\psi_1\nu_2\psi_1^{\mathrm{T}}]\left(\frac{\partial}{\partial y^{(s)}} + \eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial u}\right)\xi^{\mathrm{T}} + \\ & + \frac{1}{2}M(Z - AU)\left\{\mathrm{tr}\left[\psi_1\nu_2\psi_1^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial}{\partial y^{(s)}} + 2\eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial u}\right)\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial y^{(s)}}\right] + \right. \\ & \left. + \mathrm{tr}\left[\beta\eta\psi_1\nu_2\psi_1^{\mathrm{T}}\eta^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial^{\mathrm{T}}}{\partial u}\right]\right\}\xi^{\mathrm{T}},\end{aligned} \tag{60}$$

а m_1, m_2, $\varkappa_{11}$, $\varkappa_{21}$, $\varkappa'_2$ определяются второй и третьей формулами (51), второй и третьей формулами (53) и формулой (54). Как и в (55), все функции без указания аргументов в (60) представляют собой их значения в момент t, а $\varphi_{t+\Delta} = \varphi(Z_{t+\Delta},\ t+\Delta)$.

Для вычисления математических ожиданий в (59) и (60) необходимо в общем случае знать совместное распределение величин

$Y_t^{(0)}, Y_t^{(1)}, \ldots, Y_t^{(s)}, Z_t, Z_{t+\Delta}, N_t, U_t$ в каждый момент времени t. Чтобы найти это распределение, напишем уравнение (5.41) для двумерной характеристической функции $g_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_{s+4}, \mu_1, \ldots, \mu_{s+4}; t_1, t_2)$ случайного процесса $[Y^{(0)}(t)^{\mathrm{T}} Y^{(1)}(t)^{\mathrm{T}} \ldots Y^{(s)}(t)^{\mathrm{T}} Z(t)^{\mathrm{T}} \times \times N(t)^{\mathrm{T}} U(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$. Для этого достаточно подставить в (5.41) при $n=2$ вместо $a(Z, t)$ и $b(Z, t)$ соответствующие блочные матрицы

$$\begin{bmatrix} Y^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y^{(s)} \\ \varphi_{s+1}(Y^{(0)}, Z, N, t) \\ \varphi(Z, t) \\ \varphi_0(N, t) \\ \alpha\xi(Y', U, t) + \beta\eta(Y', U, t)\varphi_{s+1}(Y^{(0)}, Z, N, t) + \gamma \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \\ 0 & \psi_1(Y^{(0)}, Z, N, t) \\ \psi(Z, t) & 0 \\ 0 & \psi_0(N, t) \\ 0 & \beta\eta(Y', U, t)\psi_1(Y^{(0)}, Z, N, t) \end{bmatrix},$$

где $Y' = [Y^{(0)\mathrm{T}} Y^{(1)\mathrm{T}} \ldots Y^{(s)\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, и соответственно заменить векторы λ_1, λ_2 блочными векторами $[\lambda_1^{\mathrm{T}} \ldots \lambda_{s+4}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, [\mu_1^{\mathrm{T}} \ldots \mu_{s+4}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$. В результате получим уравнение

$$\begin{gathered} \partial g_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_{s+4}, \mu_1, \ldots, \mu_{s+4}; t_1, t_2)/\partial t_2 = \\ = M\left\{i\sum_{k=1}^{s} \mu_k^{\mathrm{T}} Y_{t_2}^{(k)} + i\mu_{s+1}^{\mathrm{T}}\varphi_{s+1}(Y_{t_2}^{(0)}, Z_{t_2}, N_{t_2}, t_2) + i\mu_{s+2}^{\mathrm{T}}\varphi(Z_{t_2}, t_2) + \right. \\ + i\mu_{s+3}^{\mathrm{T}}\varphi_0(N_{t_2}, t_2) + i\mu_{s+4}^{\mathrm{T}}[\alpha_{t_2}\xi(Y'_{t_2}, U_{t_2}, t_2) + \\ + \beta_{t_2}\eta(Y'_{t_2}, U_{t_2}, t_2)\varphi_{s+1}(Y_{t_2}^{(0)}, Z_{t_2}, N_{t_2}, t_2) + \gamma_{t_2}] + \\ \left. + \chi(\tilde{\mu}; t_2)\right\} \exp\left\{i\sum_{k=1}^{s+1} \lambda_k^{\mathrm{T}} Y_{t_1}^{(k-1)} + i\lambda_{s+2}^{\mathrm{T}} Z_{t_1} + i\lambda_{s+3}^{\mathrm{T}} N_{t_1} + \right. \\ \left. + i\lambda_{s+4}^{\mathrm{T}} U_{t_1} + i\sum_{k=1}^{s+1} \mu_k^{\mathrm{T}} Y_{t_2}^{(k-1)} + i\mu_{s+2}^{\mathrm{T}} Z_{t_2} + i\mu_{s+3}^{\mathrm{T}} N_{t_2} + i\mu_{s+4}^{\mathrm{T}} U_{t_2}\right\}, \quad (61) \end{gathered}$$

где для краткости через $\tilde{\mu}$ обозначена матрица-столбец, состоящая из двух блоков

$$\begin{gathered} \tilde{\mu}_1 = \psi(Z_{t_2}, t_2)^{\mathrm{T}} \mu_{s+2}, \\ \tilde{\mu}_2 = \psi_1(Y_{t_2}^{(0)}, Z_{t_2}, N_{t_2}, t_2)^{\mathrm{T}} \mu_{s+1} + \psi_0(N_{t_2}, t_2)^{\mathrm{T}} \mu_{s+3} + \\ + \psi_1(Y_{t_2}^{(0)}, Z_{t_2}, N_{t_2}, t_2)^{\mathrm{T}} \eta(Y'_{t_2}, U_{t_2}, t_2)^{\mathrm{T}} \beta_{t_2}^{\mathrm{T}} \mu_{s+4}. \end{gathered}$$

Начальное условие (5.42) для уравнения (61) имеет вид

$$g_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_{s+4}, \mu_1, \ldots, \mu_{s+4}; t_1, t_1) = g_1(\lambda_1+\mu_1, \ldots, \lambda_{s+4}+\mu_{s+4}; t_1). \quad (62)$$

Если некоторые компоненты вектора помехи N исключены с помощью формул (46), то N в (61) следует понимать как вектор, составленный из оставшихся компонент помехи.

Если $Y^{(1)}, \ldots, Y^{(s)}$ в функциях ξ и η заменяются их выражениями (46), то для вычисления математических ожиданий в (59) и (60) достаточно знать двумерное распределение процесса $[Y^{(0)}(t)^{\mathrm{T}} Z(t)^{\mathrm{T}} N(t)^{\mathrm{T}} U(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$. Чтобы получить уравнение для двумерной характеристической функции этого процесса, следует положить в (61) $\lambda_2 = \ldots = \lambda_{s+1} = \mu_2 = \ldots = \mu_{s+1} = 0$.

В практически важном частном случае, когда функции φ_1, ξ и η, а следовательно, и φ_{s+1} и ψ_1 не зависят от $Y = Y^{(0)}$, для вычисления математических ожиданий в (59) и (60) достаточно знать двумерное распределение процесса $[Z(t)^{\mathrm{T}} N(t)^{\mathrm{T}} U(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$. Уравнение для характеристической функции этого процесса получается из (61), если положить $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{s+1} = \mu_1 = \ldots = \mu_{s+1} = 0$. Тогда, заменив λ_{s+2}, λ_{s+3}, λ_{s+4}, μ_{s+2}, μ_{s+3}, μ_{s+4} соответственно величинами λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3, получим

$$\begin{aligned} \partial g_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3; t_1, t_2)/\partial t_2 = M\{i\mu_1^{\mathrm{T}}\varphi(Z_{t_2}, t_2) + \\ + i\mu_2^{\mathrm{T}}\varphi_0(N_{t_2}, t_2) + i\mu_3^{\mathrm{T}}[\alpha_{t_2}\xi(Y''_{t_2}, U_{t_2}, t_2) + \\ + \beta_{t_2}\eta(Y''_{t_2}, U_{t_2}, t_2)\varphi_{s+1}(Z_{t_2}, N_{t_2}, t_2) + \gamma_{t_2}] + \chi(\tilde{\mu}; t_2)\} \times \\ \times \exp\{i\lambda_1^{\mathrm{T}}Z_{t_1} + i\lambda_2^{\mathrm{T}}N_{t_1} + i\lambda_3^{\mathrm{T}}U_{t_1} + i\mu_1^{\mathrm{T}}Z_{t_2} + i\mu_2^{\mathrm{T}}N_{t_2} + i\mu_3^{\mathrm{T}}U_{t_2}\}, \quad (63) \end{aligned}$$

где $\tilde{\mu}$ — матрица-столбец, состоящая из двух блоков

$$\tilde{\mu}_1 = \psi(Z_{t_2}, t_2)^{\mathrm{T}}\mu_1,$$

$$\tilde{\mu}_2 = \psi_0(N_{t_2}, t_2)^{\mathrm{T}}\mu_2 + \psi_1(Z_{t_2}, N_{t_2}, t_2)^{\mathrm{T}}\eta(Y''_{t_2}, U_{t_2}, t_2)^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}}\mu_3,$$

а $Y'' = [\varphi_1(Z, N, t)^{\mathrm{T}} \ldots \varphi_s(Z, N, t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$.

Уравнения (15), (18), (24) (или (22) в случае линейного фильтра), (56), (61) и (62) (или (57), (63) и (62)) полностью и точно решают поставленную в п. 9.1.4 задачу условно оптимальной экстраполяции в случае автокоррелированной помехи в наблюдениях [69].

Изложенная в этом параграфе теория позволяет строить условно оптимальные фильтры для одновременного оценивания текущего состояния и неизвестных параметров системы и прогнозирования ее состояния на любое число заданных интервалов времени $\Delta_1, \ldots, \Delta_N$.

Заметим, что формулы (59) и (60) и уравнения (61)—(63) могут быть получены из соответствующих формул и уравнений п. 9.2.6 заменой векторов Y и Z в качестве аргументов функций φ, ψ, φ_1, ψ_1, ξ и η соответствующими блочными векторами $Y' = [Y^{(0)\mathrm{T}} Y^{(1)\mathrm{T}} \ldots Y^{(s)\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ и $Z' = [Z^{\mathrm{T}} N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ и матриц φ_1, ψ_1 и η соответствующими блочными матрицами $[Y^{(1)\mathrm{T}} \ldots Y^{(s)\mathrm{T}} \varphi_{s+1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $[0 \ldots 0\ \psi_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ и $[0 \ldots 0\ \eta]$.

9.3.7. Формула для производной ковариационной матрицы ошибки. Совершенно так же, как в п. 9.2.7 были выведены формулы (42) и (43), выводятся формулы для производной по времени ковариационной матрицы ошибки условно оптимальных фильтра и экстраполятора в случае автокоррелированной помехи в наблюдениях.

В результате получаются формула для производной по времени ковариационной матрицы ошибки условно оптимального фильтра

$$\dot{R} = M\left[(Z-\hat{Z})\,\varphi(Y,\ Z,\ N,\ t)^{\mathrm{T}} + \varphi(Y,\ Z,\ N,\ t)(Z^{\mathrm{T}}-\hat{Z}^{\mathrm{T}}) + \psi(Y,\ Z,\ N,\ t)\,\nu(t)\,\psi(Y,\ Z,\ N,\ t)^{\mathrm{T}} - \beta\eta(Y',\ U,\ t)\,\psi_1(Y,\ Z,\ N,\ t)\,\nu(t)\,\psi_1(Y, Z, N, t)^{\mathrm{T}}\,\eta(Y', U, t)^{\mathrm{T}}\right] \quad (64)$$

и формула для производной по времени ковариационной матрицы ошибки условно оптимального экстраполятора

$$\dot{R} = M\left[(Z_{t+\Delta}-\hat{Z}_t)\,\varphi(Z_{t+\Delta},\ t+\Delta)^{\mathrm{T}} + \varphi(Z_{t+\Delta},\ t+\Delta)(Z^{\mathrm{T}}_{t+\Delta}-\hat{Z}^{\mathrm{T}}_t) + \psi(Z_{t+\Delta},\ t+\Delta)\,\nu_1(t+\Delta)\,\psi(Z_{t+\Delta},\ t+\Delta)^{\mathrm{T}} - \beta\eta(Y'_t,\ U_t,\ t)\,\psi_1(Y_t, Z_t, N_t, t)\,\nu_2(t)\,\psi_1(Y_t, Z_t, N_t, t)^{\mathrm{T}}\,\eta(Y'_t, U_t, t)^{\mathrm{T}}\right], \quad (65)$$

где $Y' = [Y^{(0)\,\mathrm{T}}\,Y^{(1)\,\mathrm{T}}\ \ldots\ Y^{(s)\,\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $Y^{(0)} = Y$.

Формулы (64) и (65) можно также получить из (42) и (43) чисто формально как частные случаи, заменив аргумент Z функций φ, ψ, ψ_1 парой Z, N, аргумент Y функции η блочным вектором $Y' = [Y^{(0)\,\mathrm{T}}\,Y^{(1)\,\mathrm{T}}\ \ldots\ Y^{(s)\,\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ и матрицы η и ψ_1 блочными матрицами $[0\ \ldots\ 0\ \eta]$ и $[0\ \ldots\ 0\ \psi_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$.

§ 9.4. Линейная фильтрация и экстраполяция

9.4.1. Фильтрация. Рассмотрим частный случай линейных относительно Y, Z уравнений (5),

$$dY = (a_{11}Y + a_{12}Z + a_{10})\,dt + \left(c_{10} + \sum_{r=1}^{m} c_{1r}Y_r + \sum_{r=1}^{p} c_{1,\,m+r}Z_r\right)dW,$$

$$dZ = (a_{21}Y + a_{22}Z + a_{20})\,dt + \left(c_{20} + \sum_{r=1}^{m} c_{2r}Y_r + \sum_{r=1}^{p} c_{2,\,m+r}Z_r\right)dW, \quad (66)$$

где a_{rs} и c_{rs} — функции t, не зависящие от $Y = [Y_1\ \ldots\ Y_m]^{\mathrm{T}}$, $Z = [Z_1\ \ldots\ Z_p]^{\mathrm{T}}$. Класс допустимых фильтров определим уравнением

$$d\hat{Z} = \alpha\,[Y^{\mathrm{T}}\hat{Z}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\,dt + \beta\,dY + \gamma\,dt. \quad (67)$$

◀ В этом случае

$$\varphi_1(y,\ z,\ t) = a_{11}y + a_{12}z + a_{10},$$

$$\varphi(y,\ z,\ t) = a_{21}y + a_{22}z + a_{20},$$

$$\psi_1(y,\ z,\ t) = c_{10} + \sum_{r=1}^{m} c_{1r}y_r + \sum_{r=1}^{p} c_{1,\,m+r}z_r,$$

$$\psi(y,\ z,\ t) = c_{20} + \sum_{r=1}^{m} c_{2r}y_r + \sum_{r=1}^{p} c_{2,\,m+r}z_r,$$

$$\xi(y,\ z,\ t) = [y^{\mathrm{T}}z^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\quad \eta(y,\ z,\ t) = I.$$

Подставив эти выражения в (19) и (21), находим

$$\varkappa_{01}=[a_{21}K_y+a_{22}K_{zy} \quad a_{21}K_{y\hat{z}}+a_{22}K_{z\hat{z}}],$$
$$\varkappa_{02}=(K_{zy}-K_{\hat{z}y})\,a_{11}^{\mathrm{T}}+(K_z-K_{\hat{z}z})\,a_{12}^{\mathrm{T}}+\left(c_{20}+\sum_{r=1}^{m+p}c_{2r}m_r\right)\nu\left(c_{10}^{\mathrm{T}}+\sum_{r=1}^{m+p}c_{1r}^{\mathrm{T}}m_r\right)+\sum_{r,\ s=1}^{m+p}c_{2r}\nu c_{1s}^{\mathrm{T}}k_{rs},$$
$$\varkappa_{11}=\begin{bmatrix}K_y & K_{y\hat{z}}\\ K_{\hat{z}y} & K_{\hat{z}}\end{bmatrix},$$
$$\varkappa_{21}=\varkappa_{12}^{\mathrm{T}}=[a_{11}K_y+a_{12}K_{zy} \quad a_{11}K_{y\hat{z}}+a_{12}K_{z\hat{z}}],$$
$$\varkappa_{22}=\left(c_{10}+\sum_{r=1}^{m+p}c_{1r}m_r\right)\nu\left(c_{10}^{\mathrm{T}}+\sum_{r=1}^{m+p}c_{1r}^{\mathrm{T}}m_r\right)+\sum_{r,\ s=1}^{m+p}c_{1r}\nu c_{1s}^{\mathrm{T}}k_{rs}, \tag{68}$$

где K_y, K_z, $K_{\hat{z}}$, $K_{yz}=K_{zy}^{\mathrm{T}}$, $K_{z\hat{z}}=K_{\hat{z}z}^{\mathrm{T}}$, $K_{y\hat{z}}=K_{\hat{z}y}^{\mathrm{T}}$ — ковариационные и взаимные ковариационные матрицы случайных векторов Y_t, Z_t, $\hat{Z}_t$, m_r — математическое ожидание компоненты Q_r случайного вектора $Q=[Y_1\ \ldots\ Y_mZ_1\ \ldots\ Z_p]^{\mathrm{T}}$, а k_{rs} — ковариация компонент Q_r, Q_s вектора Q. Учитывая, что согласно (14) и (20) $K_{\hat{z}}=K_{z\hat{z}}$, $K_{\hat{z}y}=K_{zy}$ и, следовательно, $K_z-K_{\hat{z}z}=K_z-K_{\hat{z}}=R$, получаем

$$\varkappa_{01}=[a_{21}K_y+a_{22}K_{\hat{z}y} \quad a_{21}K_{y\hat{z}}+a_{22}K_{\hat{z}}],$$
$$\varkappa_{02}=Ra_{12}^{\mathrm{T}}+\left(c_{20}+\sum_{r=1}^{m+p}c_{2r}m_r\right)\nu\left(c_{10}^{\mathrm{T}}+\sum_{r=1}^{m+p}c_{1r}^{\mathrm{T}}m_r\right)+\sum_{r,\ s=1}^{m+p}c_{2r}\nu c_{1s}^{\mathrm{T}}k_{rs},$$
$$\varkappa_{11}=\begin{bmatrix}K_y & K_{y\hat{z}}\\ K_{\hat{z}y} & K_{\hat{z}}\end{bmatrix},$$
$$\varkappa_{21}=[a_{11}K_y+a_{12}K_{\hat{z}y} \quad a_{11}K_{y\hat{z}}+a_{12}K_{\hat{z}}]. \tag{69}$$

Подставив эти выражения в (22) и (18), получим

$$\alpha=[\alpha_1\alpha_2]=[(a_{21}-\beta a_{11})K_y+(a_{22}-\beta a_{21})K_{\hat{z}y}$$
$$(a_{21}-\beta a_{11})K_{y\hat{z}}+(a_{22}-\beta a_{21})K_{\hat{z}}]\begin{bmatrix}K_y & K_{y\hat{z}}\\ K_{\hat{z}y} & K_{\hat{z}}\end{bmatrix}^{-1}=[a_{21}-\beta a_{11} \quad a_{22}-\beta a_{12}],$$
$$\beta=\left\{Ra_{12}^{\mathrm{T}}+\left(c_{20}+\sum_{r=1}^{m+p}c_{2r}m_r\right)\nu\left(c_{10}^{\mathrm{T}}+\sum_{r=1}^{m+p}c_{1r}^{\mathrm{T}}m_r\right)+\sum_{r,\ s=1}^{m+p}c_{2r}\nu c_{1s}^{\mathrm{T}}k_{rs}\right\}\varkappa_{22}^{-1}. \tag{70}$$

Оптимальное значение γ находится из уравнения (15) с помощью формулы (16):

$$\gamma=a_{21}m_y+a_{22}m_z+a_{20}-\alpha\,[m_y^{\mathrm{T}}\,m_{\hat{z}}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}-\beta\,(a_{11}m_y+a_{12}m_z+a_{10})=a_{20}-\beta a_{10}. \tag{71}$$

При этом уравнение (67) принимает вид

$$d\hat{Z}=(a_{21}Y+a_{22}\hat{Z}+a_{20})\,dt+\beta\,[dY-(a_{11}Y+a_{12}\hat{Z}+a_{10})\,dt]. \tag{72}$$

Для определения β необходимо найти математическое ожидание m и ковариационную матрицу K случайного вектора $Q = [Y_1 \dots Y_m\, Z_1 \dots Z_p]^{\text{т}}$ и ковариационную матрицу R ошибки $\tilde{Z} = \hat{Z} - Z$. Для этого воспользуемся выведенными в п. 6.1.6 уравнениями (6.20) и (6.22). Эти уравнения в нашем случае имеют вид

$$\dot{m} = am + a_0, \tag{73}$$

$$\dot{K} = aK + Ka^{\text{т}} + c_0 \nu c_0^{\text{т}} + \sum_{r=1}^{m+p} (c_0 \nu c_r^{\text{т}} + c_r \nu c_0^{\text{т}})\, m_r + \sum_{r,\ s=1}^{m+p} c_r \nu c_s^{\text{т}} (m_r m_s + k_{rs}), \tag{74}$$

где

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad a_0 = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix}, \quad c_r = \begin{bmatrix} c_{1r} \\ c_{2r} \end{bmatrix} \qquad (r = 0,\ 1,\ \dots,\ m+p).$$

Уравнения (73) и (74) с соответствующими начальными условиями определяют все элементы m_r, k_{rs} матрицы-столбца m и матрицы K $(r,\ s = 1,\ \dots,\ m+p)$.

Уравнение для матрицы R вытекает из формулы (42):

$$\dot{R} = a_{22}R + Ra_{22}^{\text{т}} - \left[Ra_{12}^{\text{т}} + \left(c_{20} + \sum_{r=1}^{m+p} c_{2r} m_r \right) \nu \left(c_{10}^{\text{т}} + \sum_{r=1}^{m+p} c_{1r}^{\text{т}} m_r \right) + \sum_{r,\ s=1}^{m+p} c_{2r} \nu c_{1s}^{\text{т}} k_{rs} \right] \varkappa_{22}^{-1} \left[a_{12}R + \left(c_{10} + \sum_{r=1}^{m+p} c_{1r} m_r \right) \nu \left(c_{20}^{\text{т}} + \sum_{r=1}^{m+p} c_{2r}^{\text{т}} m_r \right) + \sum_{r,\ s=1}^{m+p} c_{1r} \nu c_{2s}^{\text{т}} k_{rs} \right] + \left(c_{20} + \sum_{r=1}^{m+p} c_{2r} m_r \right) \nu \left(c_{20}^{\text{т}} + \sum_{r=1}^{m+p} c_{2r}^{\text{т}} m_r \right) + \sum_{r,\ s=1}^{m+p} c_{2r} \nu c_{2s}^{\text{т}} k_{rs}, \tag{75}$$

где $\varkappa_{22}$ определяется последней формулой (68). Уравнение (75) представляет собой матричное уравнение Риккати.

После нахождения m_r, k_{rs} $(r,\ s = 1,\ \dots,\ m+p)$ и R путем интегрирования уравнений (73) — (75) оптимальный коэффициент β в (72) определяется по формуле (70). ◀

Докажем, что фильтр, определяемый уравнением (72), оптимален в классе всех линейных фильтров. Для этого достаточно показать, что ошибка фильтрации не коррелирована с любым результатом измерения Y_s, $s \in [t_0,\ t]$ (*ТВ*, п. 9.2.5). Чтобы сделать это, напишем уравнение для ошибки фильтрации $\tilde{Z}_t = \hat{Z}_t - Z_t$. Вычитая второе уравнение (66) из (72), находим

$$d\tilde{Z}_t = (a_{22} - \beta a_{12})\, \tilde{Z}_t\, dt + \left[\beta c_{10} - c_{20} + \sum_{r=1}^{m+p} (\beta c_{1r} - c_{2r})\, Q_r \right] dW.$$

Умножив это уравнение почленно справа на Y_τ^T, взяв математическое ожидание и учитывая, что случайный вектор $Q_\tau = [Y_\tau^T Z_\tau^T]^T$ не коррелирован с dW, при $\tau \leqslant t$, получим

$$dM\tilde{Z}_t Y_\tau^T = (a_{22} - \beta a_{12}) M\tilde{Z}_t Y_\tau^T dt \quad \text{при} \quad \tau \leqslant t.$$

Но в силу (20) $M\tilde{Z}_\tau Y_\tau^T = 0$, $\forall \tau \in [t_0, t]$. Следовательно, $M\tilde{Z}_t Y_\tau^T = 0$ при всех $t \geqslant \tau$.

Таким образом, мы имеем пример, когда условно оптимальный фильтр является оптимальным и в более широком классе всех линейных фильтров.

В частном случае линейной системы (66), когда $c_r = 0$ ($r = 1, \ldots, m+p$), уравнения (72) и (75) совпадают с уравнениями (7.32) и (7.30) теории оптимальной линейной фильтрации. Следовательно, в частном случае винеровского процесса $W(t)$ в (66) при $c_r = 0$ ($r = 1, \ldots, m+p$) условно оптимальный фильтр оказывается оптимальным и в классе всех возможных фильтров.

Заметим, что в рассмотренном случае нет необходимости использовать уравнение (31). Это объясняется тем, что оптимальные α, β и γ зависят в этом случае только от первых и вторых моментов случайных векторов $Q = [Y^T Z^T]^T$ и $\tilde{Z} = \hat{Z} - Z$, которые определяются уравнениями (73)—(75).

Для того чтобы найти доверительные области для Z_t, достаточно знать совместное распределение величин Z_t, $\hat{Z}_t$. Это распределение полностью определяется характеристической функцией $g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; t)$ случайного вектора $[Y_t^T Z_t^T \hat{Z}_t^T]^T$, которая находится из уравнения (31). Это уравнение в данном случае принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_1}{\partial t} &= (\lambda_1^T a_{11} + \lambda_2^T a_{21} + \lambda_3^T a_{21}) \frac{\partial g_1}{\partial \lambda_1} + (\lambda_1^T a_{12} + \lambda_2^T a_{22} + \lambda_3^T \beta a_{12}) \frac{\partial g_1}{\partial \lambda_2} + \\ &+ \lambda_3^T (a_{22} - \beta a_{21}) \frac{\partial g_1}{\partial \lambda_3} + i(\lambda_1^T a_{10} + \lambda_2^T a_{20} + \lambda_3^T a_{20}) g_1 + \\ &+ M\chi\left(\left(c_{10}^T + \sum_{r=1}^m c_{1r}^T Y_r + \sum_{r=1}^p c_{1,\,m+r}^T Z_r\right)\lambda_1 + \left(c_{20}^T + \sum_{r=1}^m c_{2r}^T Y_r + \right.\right. \\ &\left.\left. + \sum_{r=1}^p c_{2,\,m+r}^T Z_r\right)(\lambda_2 + \beta^T \lambda_3);\ t\right) \exp\{i\lambda_1^T Y + i\lambda_2^T Z + i\lambda_3^T \hat{Z}\}. \qquad (76)\end{aligned}$$

Для винеровского процесса $W(t)$ (76) представляет собой линейное уравнение в частных производных второго порядка.

В частном случае линейной системы (66) уравнение (76) представляет собой линейное уравнение в частных производных первого порядка, которое легко интегрируется стандартным методом п. 5.4.2. В результате можно получить явное выражение характеристической функции ошибки фильтрации $\tilde{Z} = \hat{Z} - Z$. Определив распределение ошибки, можно находить доверительные области для Z.

Предоставляем читателю самостоятельно проверить, что тот же условно оптимальный фильтр (72) получится и в том случае, когда класс допустимых фильтров определяется формулой $\hat{Z}=AU$ и уравнением (2) при

$$\xi(y,\ u,\ t)=[y^{\mathrm{T}}u^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\quad \eta(y,\ u,\ t)=I_m,$$

при любом $N\geqslant p$ и любой постоянной $p\times N$-матрице A ранга p. Это, конечно, прямое следствие того, что фильтр (72) оптимален среди всех линейных фильтров.

Пример 10. В случае скалярных уравнений (66) с независимыми белыми шумами V_1, V_2

$$\begin{gathered}\dot{Y}=a_{11}Y+a_{12}Z+a_{10}+(c_{10}+c_{11}Y+c_{12}Z)V_1,\\ \dot{Z}=a_{21}Y+a_{22}Z+a_{20}+(c_{20}+c_{21}Y+c_{22}Z)V_2,\\ c_r=\begin{bmatrix}c_{1r} & 0\\ 0 & c_{2r}\end{bmatrix}\quad (r=0,\ 1,\ 2),\qquad \nu=\begin{bmatrix}\nu_1 & 0\\ 0 & \nu_2\end{bmatrix}\,^{*)},\end{gathered}$$

и формулы (68) и (70) дают

$$\begin{aligned}&\varkappa_{22}=\nu_1(c_{10}+c_{11}m_1+c_{12}m_2)^2+\nu_1(c_{11}^2k_{11}+2c_{11}c_{12}k_{12}+c_{12}^2k_{22}),\\ &\beta=\varkappa_{22}^{-1}a_{12}R.\end{aligned}$$

Уравнения (73)—(75), определяющие m_1, m_2, k_{11}, k_{12}, k_{22} и R, имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{m}_1&=a_{11}m_1+a_{12}m_2+a_{10},\\ \dot{m}_2&=a_{21}m_1+a_{22}m_2+a_{20},\\ \dot{k}_{11}&=2(a_{11}k_{11}+a_{12}k_{12})+\nu_1(c_{10}+c_{11}m_1+c_{12}m_2)^2+\\ &\qquad+\nu_1(c_{11}^2k_{11}+2c_{11}c_{12}k_{12}+c_{12}^2k_{22}),\\ \dot{k}_{12}&=(a_{11}+a_{22})k_{12}+a_{21}k_{11}+a_{12}k_{22},\\ \dot{k}_{22}&=2(a_{21}k_{12}+a_{22}k_{22})+\nu_2(c_{20}+c_{21}m_1+c_{22}m_2)^2+\\ &\qquad+\nu_2(c_{21}^2k_{11}+2c_{21}c_{22}k_{12}+c_{22}^2k_{22}),\\ \dot{R}&=2a_{22}R-\varkappa_{22}^{-1}a_{12}^2R^2+\nu_2(c_{20}+c_{21}m_1+c_{22}m_2)+\nu_2(c_{21}^2k_{11}+2c_{21}c_{22}k_{12}+c_{22}^2k_{22}).\end{aligned}$$

9.4.2. Экстраполяция. Аналогично решается задача условно оптимальной экстраполяции состояния системы с параметрическими шумами. Уравнения (7) в этом случае имеют вид

$$dY=(a_{11}Y+a_{12}Z+a_{10})\,dt+\left(c_{10}+\sum_{r=1}^{m}c_{1r}Y_r+\sum_{r=1}^{p}c_{1,\,m+r}Z_r\right)dW_2,$$

$$dZ=(a_{22}Z+a_{20})\,dt+\left(c_{20}+\sum_{r=1}^{p}c_{2,\,m+r}Z_r\right)dW_1, \tag{77}$$

где $W_1(t)$ и $W_2(t)$ — независимые процессы с независимыми приращениями.

---

*) Обратим внимание на то, что c_{1r} и c_{2r} в этой задаче не те, что в общем случае в уравнениях (66). Они представляют собой соответственно первые и вторые элементы матриц-строк, на которые умножается вектор $[V_1V_2]^{\mathrm{T}}$ в (66). Для простоты мы оставляем для них обозначения c_{1r} и c_{2r}.

► Для нахождения оптимальных коэффициентов α, β, γ в (67) сначала найдем для этого случая m_0, $\varkappa_{01}$ и $\varkappa_{02}$. Подставив в (34)—(36) выражения функций φ, φ_1, ξ и $\eta = I$, находим

$$
\begin{aligned}
&m_0 = a_{22}(t+\Delta)\, m_z(t+\Delta) + a_{20}(t+\Delta),\\
&\varkappa_{01} = \left[a_{22}(t+\Delta)\, K_{zy}(t+\Delta,\ t) \quad a_{22}(t+\Delta)\, K_{z\hat{z}}(t+\Delta,\ t)\right],\\
&\varkappa_{02} = \left[K_{zy}(t+\Delta,\ t) - K_{\hat{z}y}\right] a_{11}^{\mathrm{T}} + \left[K_z(t+\Delta,\ t) - K_{\hat{z}z}\right] a_{12}^{\mathrm{T}},
\end{aligned} \tag{78}
$$

где $K_z(s,\ t)$, $K_{zy}(s,\ t)$ и $K_{z\hat{z}}(s,\ t)$—ковариационная функция процесса $Z(t)$ и его взаимные ковариационные функции с $Y(t)$ и $\hat{Z}(t)$. Для вычисления $K_z(s,\ t)$ обратимся к формуле (6.16), которая дает уравнение

$$\partial K_z(t,\ s)/\partial s = K_z(t,\ s)\, a_{22}(s)^{\mathrm{T}} \quad \text{при} \quad s \geqslant t.$$

Но нам необходимо значение $K_z(s,\ t)$ при $s \geqslant t$. Поэтому, вспомнив, что в силу (2.27) $K_z(s,\ t) = K_z(t,\ s)^{\mathrm{T}}$, транспонируем полученное уравнение. Тогда будем иметь

$$\partial K_z(s,\ t)/\partial s = a_{22}(s)\, K_z(s,\ t) \quad \text{при} \quad s \geqslant t.$$

Решение этого однородного линейного уравнения при начальном условии $K_z(t,\ t) = K_z(t) = K_z$ определяется формулой

$$K_z(s,\ t) = u(s,\ t)\, K_z, \qquad s \geqslant t,$$

где $u(s,\ t)$—фундаментальная матрица решений уравнения $du/ds = a_{22}(s)\, u$, т. е. решение этого уравнения, удовлетворяющий условию $u(t,\ t) = I$. Положив $\varepsilon = u(t+\Delta,\ t)$, будем иметь $K_z(t+\Delta,\ t) = \varepsilon K_z$. Кроме того, приняв во внимание, что в силу (14) и (20)

$$M(Z_{t+\Delta} - \hat{Z}) = 0, \quad M(Z_{t+\Delta} - \hat{Z})\, Y^{\mathrm{T}} = 0, \quad M(Z_{t+\Delta} - \hat{Z})\, \hat{Z}^{\mathrm{T}} = 0,$$

находим

$$K_{zy}(t+\Delta,\ t) = K_{\hat{z}y}, \quad K_{z\hat{z}}(t+\Delta,\ t) = K_{\hat{z}}.$$

Подставив найденные выражения $K_z(t+\Delta,\ t)$, $K_{zy}(t+\Delta,\ t)$ и $K_{z\hat{z}}(t+\Delta,\ t)$ в последние две формулы (78), получим

$$
\begin{aligned}
&\varkappa_{01} = \left[a_{22}(t+\Delta)\, K_{\hat{z}y} \quad a_{22}(t+\Delta)\, K_{\hat{z}}\right],\\
&\varkappa_{02} = \left(\varepsilon K_z - K_{\hat{z}z}\right) a_{12}^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}
$$

Для нахождения α и γ по формулам (22) и (15) выразим величины $m_z(t+\Delta)$, K_{zy} и $K_{z\hat{z}}$ в формуле (78) для m_0 и в формуле (68) для $\varkappa_{21}$ соответственно через m_z, $K_{\hat{z}y}$ и $K_{\hat{z}}$. Для этого проинтегрируем второе уравнение (77), приняв за начальный момент t, а за конечный $t+\Delta$. Пользуясь для этого формулой (3.32), находим

$$Z_{t+\Delta} = u(t+\Delta,\ t)\, Z_t + h(t) + \int_t^{t+\Delta} u(t+\Delta,\ \tau)\, c_2(\tau)\, dW_1(\tau),$$

где

$$h(t)=\int_t^{t+\Delta} u(t+\Delta,\ \tau)\,a_{20}(\tau)\,d\tau, \tag{79}$$

а через c_2 обозначен весь коэффициент при dW_1 в (77). Отсюда, учитывая, что $u(t+\Delta,\ t)=\varepsilon$ и что Y_t и $\hat{Z}_t$ независимы от dW_1 и $MW_1(t)=0$, получаем

$$m_z(t+\Delta)=\varepsilon m_z(t)+h(t)=\varepsilon m_z+h,$$
$$K_{zy}(t+\Delta,\ t)=\varepsilon K_{zy},\quad K_{z\hat{z}}(t+\Delta,\ t)=\varepsilon K_{z\hat{z}}.$$

Подставив найденное выражение $m_z(t+\Delta)$ в первую формулу (78), будем иметь

$$m_0=a_{22}(t+\Delta)(\varepsilon m_z+h)+a_{20}(t+\Delta).$$

Сравнив полученные выражения $K_{zy}(t+\Delta,\ t)$ и $K_{z\hat{z}}(t+\Delta,\ t)$ с найденными раньше, получим $K_{\hat{z}y}=\varepsilon K_{zy}$, $K_{\hat{z}}=\varepsilon K_{z\hat{z}}$. Отсюда, имея в виду, что матрица $\varepsilon=u(t+\Delta,\ t)$ обратима (п. 1.3.2), находим $K_{zy}=\varepsilon^{-1}K_{\hat{z}y}$, $K_{z\hat{z}}=\varepsilon^{-1}K_{\hat{z}}$. Подставив эти выражения в формулу (68) для $\varkappa_{21}$, будем иметь

$$\begin{aligned}\varkappa_{21}&=[a_{11}K_y+a_{12}K_{zy}\quad a_{11}K_{y\hat{z}}+a_{12}K_{z\hat{z}}]=\\&=[a_{11}K_y+a_{12}\varepsilon^{-1}K_{\hat{z}y}\quad a_{11}K_{y\hat{z}}+a_{12}\varepsilon^{-1}K_{\hat{z}}].\end{aligned}$$

Наконец, подставив найденные выражения m_0, $\varkappa_{01}$, $\varkappa_{02}$ и $\varkappa_{21}$ в (15), (18) и (22), находим оптимальные α, β и γ в (67):

$$\begin{aligned}\alpha=[\alpha_1\alpha_2]=[-\beta a_{11}K_y+\{a_{22}(t+\Delta)-\beta a_{12}\varepsilon^{-1}\}K_{\hat{z}y}-\\-\beta a_{11}K_{y\hat{z}}+\{a_{22}(t+\Delta)-\beta a_{12}\varepsilon^{-1}\}K_{\hat{z}}]\varkappa_{11}^{-1}=\\=[-\beta a_{11}\quad a_{22}(t+\Delta)-\beta a_{12}\varepsilon^{-1}],\end{aligned}$$

$$\beta=(\varepsilon K_z-K_{\hat{z}z})\,a_{12}^{\mathrm{T}}\varkappa_{22}^{-1},$$
$$\gamma=a_{20}(t+\Delta)-\beta a_{10}+\beta a_{12}\varepsilon^{-1}h, \tag{80}$$

где $\varkappa_{22}$ определяется последней формулой (68), а все величины без указания аргументов берутся в момент t.

Подставив выражения (80) в (67), получаем уравнение условно оптимального экстраполятора

$$\begin{aligned}d\hat{Z}=[a_{22}(t+\Delta)\hat{Z}+a_{20}(t+\Delta)]\,dt+\\+\beta[dY-(a_{11}Y+a_{12}\varepsilon^{-1}\hat{Z}+a_{10}-a_{12}\varepsilon^{-1}h)\,dt].\end{aligned} \tag{81}$$

Необходимые для вычисления $\varkappa_{22}$ по формуле (68) и β по формуле (80) моменты второго порядка можно найти из уравнений вида (73) и (74) для составного вектора $[Y^{\mathrm{T}}Z^{\mathrm{T}}\hat{Z}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ *). ◀

*) Обратим внимание на то, что роль матриц c_{1r} и c_{2r} теории п. 9.4.1 в нашем случае играют $[0\ \ c_{1r}]$ и $[c_{2r}\ \ 0]$, а матрица ν диагональна.

Докажем теперь, что найденный условно оптимальный экстраполятор можно представить в виде последовательного соединения условно оптимального фильтра, усилителя с коэффициентом усиления $\varepsilon = u(t+\Delta, t)$ и сумматора, вводящего неслучайное слагаемое $h(t)$, определяемое формулой (79), т. е. что

$$\hat{Z} = \varepsilon \hat{Z}_1 + h, \tag{82}$$

где $\hat{Z}_1$ — выходной сигнал условно оптимального фильтра — условно оптимальная оценка текущего состояния системы Z. Чтобы доказать это, достаточно показать, что (82) удовлетворяет уравнению (81) условно оптимального экстраполятора.

▶ Из (82) находим стохастический дифференциал величины $\hat{Z}$:

$$d\hat{Z} = \varepsilon d\hat{Z}_1 + (\dot{\varepsilon}\hat{Z}_1 + \dot{h})\,dt.$$

Но $\hat{Z}_1$ как выходной сигнал условно оптимального фильтра удовлетворяет уравнению (72), которое в нашем случае имеет вид

$$d\hat{Z}_1 = (a_{22}\hat{Z}_1 + a_{20})\,dt + \beta_1 [dY - (a_{11}Y + a_{12}\hat{Z}_1 + a_{10})\,dt],$$

где $\beta_1 = R_1 a_{12}^{\mathrm{T}} \varkappa_{22}^{-1}$, а $R_1 = K_z - K_{\hat{z}_1}$ — ковариационная матрица ошибки условно оптимального фильтра. Чтобы найти $\dot{h}$, продифференцируем формулу (79). Имея в виду, что $u(t+\Delta, t+\Delta) = I$, $u(t+\Delta, t) = \varepsilon$ и $du(t+\Delta, \tau)/dt = a_{22}(t+\Delta)\,u(t+\Delta, \tau)$, находим

$$\dot{h} = a_{20}(t+\Delta) - \varepsilon a_{20} + a_{22}(t+\Delta)\,h.$$

Чтобы вычислить $\dot{\varepsilon}$, вспомним, что на основании результатов пп. 1.3.2 и 1.3.3 (формулы (1.22) и (1.29))

$$\partial u(s, t)/\partial s = a_{22}(s)\,u(s, t), \quad \partial u(s, t)/\partial t = -u(s, t)\,a_{22}(t).$$

Тогда будем иметь

$$\dot{\varepsilon} = a_{22}(t+\Delta)\,\varepsilon - \varepsilon a_{22}.$$

Подставив найденные выражения $d\hat{Z}_1$, $\dot{h}$ и $\dot{\varepsilon}$ в формулу для $d\hat{Z}$, получим

$$\begin{aligned} d\hat{Z} &= \varepsilon (a_{22}\hat{Z}_1 + a_{20})\,dt + \varepsilon\beta_1 [dY - (a_{11}Y + a_{12}\hat{Z}_1 + a_{10})\,dt] = \\ &= [a_{22}(t+\Delta)\,\varepsilon\hat{Z}_1 - \varepsilon a_{22}\hat{Z}_1 + a_{20}(t+\Delta) - \varepsilon a_{20} + a_{22}(t+\Delta)\,h]\,dt = \\ &= [a_{22}(t+\Delta)(\varepsilon\hat{Z}_1 + h) + a_{20}(t+\Delta)]\,dt + \\ &\qquad + \varepsilon\beta_1 [dY - (a_{11}Y + a_{12}\hat{Z}_1 + a_{10})\,dt]. \end{aligned}$$

Вычислим теперь правую часть уравнения (81) для $\hat{Z}$, определяемого формулой (82). Учитывая, что β в (67) зависит от выходного сигнала фильтра $\hat{Z}$, из (82) находим $K_{\hat{z}z} = \varepsilon K_{\hat{z}_1 z} = \varepsilon K_{\hat{z}_1}$. Подставив это выражение в формулу (80) для β, получаем $\beta =$

$=\varepsilon(K_z-K_{\hat{z}})\,a_{12}^{\mathrm{T}}\varkappa_{22}^{-1}=\varepsilon\beta_1$. Подставив это выражение β и выражение (82) в правую часть уравнения (81), убеждаемся в том, что она совпадает с найденным из (82) выражением $d\hat{Z}$. Следовательно, выражение (82) удовлетворяет уравнению (81), что и доказывает наше утверждение. ◀

Таким образом, мы распространили полученный в п. 7.3.8 для линейных систем результат на значительно более широкий класс задач условно оптимальной экстраполяции состояния как линейных систем, так и линейных систем с параметрическими шумами. Впрочем, этот результат ясен интуитивно, поскольку математическое ожидание (как априорное, так и апостериорное) члена с dW в уравнении Ито всегда равно нулю, вследствие чего основную роль для прогнозирования состояния системы играет линейная часть $a_{22}Z+a_{20}$ в правой части второго уравнения (77).

Докажем, что в найденный условно оптимальный экстраполятор оптимален в классе всех линейных экстраполяторов. Для этого достаточно показать, что его ошибка в любой момент t не коррелирована со значениями наблюдаемого процесса Y_σ при всех $\sigma\leqslant t$.

▶ Из формулы для $Z_{t+\Delta}$, полученной путем интегрирования второго уравнения (77), и формулы (82) следует, что ошибка условно оптимального экстраполятора $\tilde{Z}_t=\hat{Z}_t-Z_{t+\Delta}$ связана с ошибкой условно оптимального фильтра $\tilde{Z}_{1t}$ формулой

$$\tilde{Z}_t=\varepsilon\tilde{Z}_{1t}-\int\limits_t^{t+\Delta}u(t+\Delta,\ \tau)\,c_2(\tau)\,dW_1(\tau).$$

Умножив это равенство справа на Y_σ^{T} при $\sigma\leqslant t$, взяв математическое ожидание и учитывая независимость Y_σ и $c_2(t)$ от dW_1, находим

$$M\tilde{Z}_tY_\sigma^{\mathrm{T}}=\varepsilon M\tilde{Z}_{1t}Y_\sigma^{\mathrm{T}},\qquad \sigma\leqslant t.$$

Но по доказанному в п. 9.4.1 $M\tilde{Z}_{1t}Y_\sigma^{\mathrm{T}}=0$ при всех $\sigma\leqslant t$. Следовательно, и $M\tilde{Z}_tY_\sigma^{\mathrm{T}}=0$ при всех $\sigma\leqslant t$, что и доказывает наше утверждение. ◀

В частном случае линейных уравнений (77), когда $c_r=0$ $(r=1,\ \ldots,\ m+p)$, найденный условно оптимальный экстраполятор совпадает с оптимальным экстраполятором п. 7.3.8. Следовательно, в случае линейных уравнений (77) и винеровских процессов $W_1(t)$ и $W_2(t)$ условно оптимальный экстраполятор оказывается оптимальным среди всех экстраполяторов.

Для оценки точности экстраполяции можно воспользоваться формулой (43) для производной ковариационной матрицы ошибки экстраполяции, которая дает уравнение

$$\dot{R} = a_{22}(t+\Delta)R + Ra_{22}(t+\Delta)^{\mathrm{T}} - \\ -\beta\left[\left(c_{10} + \sum_{r=1}^{m+p} c_{1r}m_r\right)\nu_2\left(c_{10}^{\mathrm{T}} + \sum_{r=1}^{m+p} c_{1r}^{\mathrm{T}}m_r\right) + \right. \\ \left. + \sum_{r,\,s=1}^{m+p} c_{1r}\nu_2 c_{1s}^{\mathrm{T}} k_{rs}\right]\beta^{\mathrm{T}} + \left[c_{20}(t+\Delta) + \right. \\ \left. + \sum_{r=m+1}^{m+p} c_{2r}(t+\Delta)\, m_r(t+\Delta)\right]\nu_1(t+\Delta)\times \\ \times\left[c_{20}(t+\Delta)^{\mathrm{T}} + \sum_{r=m+1}^{m+p} c_{2r}(t+\Delta)^{\mathrm{T}} m_r(t+\Delta)\right] + \\ + \sum_{r,\,s=m+1}^{m+p} c_{2r}(t+\Delta)\,\nu_1(t+\Delta)\,c_{2s}(t+\Delta)^{\mathrm{T}} k_{rs}. \quad (83)$$

Пример 11. В задаче примера 10 при $a_{21} = a_{20} = c_{21} = 0$ и постоянном a_{22} условно оптимальный экстраполятор представляет собой последовательное соединение условно оптимального фильтра примера 10 и усилителя с коэффициентом усиления $\varepsilon = e^{a_{22}\Delta}$.

9.4.3. Фильтрация при автокоррелированной помехе. Применим изложенную в § 9.3 теорию к частному случаю линейной системы с параметрическими шумами, линейного уравнения наблюдения и линейного фильтра. В этом случае уравнения (9) имеют вид

$$\dot{Y} = b_{11}Y + b_{12}Z + b_{13}N + b_{10}, \\ dZ = (a_{11}Y + a_{12}Z + a_{13}N + a_{10})\,dt + \\ + \left(c_{10} + \sum_{r=1}^{m} c_{1r}Y_r + \sum_{r=1}^{p} c_{1,\,m+r}Z_r + \sum_{r=1}^{h} c_{1,\,m+p+r}N_r\right)dW, \\ dN = (a_{21}Y + a_{22}Z + a_{23}N + a_{23})\,dt + \\ + \left(c_{20} + \sum_{r=1}^{m} c_{2r}Y_r + \sum_{r=1}^{p} c_{2,\,m+r}Z_r + \sum_{r=1}^{h} c_{2,\,m+p+r}N_r\right)dW. \quad (84)$$

► На основании формулы (47) и первой формулы (49) уравнения (46) и последнее уравнение (50) имеют в данном случае вид

$$Y^{(k)} = b_{k1}Y + b_{k2}Z + b_{k3}N + b_{k0} \qquad (k = 1, \ldots, s), \\ dY^{(s)} = (b_{s+1,\,1}Y + b_{s+1,\,2}Z + b_{s+1,\,3}N + b_{s+1,\,0})\,dt + \\ + \left(c_{30} + \sum_{r=1}^{m} c_{3r}Y_r + \sum_{r=1}^{p} c_{3,\,m+r}Z_r + \sum_{r=1}^{h} c_{3,\,m+p+r}N_r\right)dW, \quad (85)$$

где функции времени b_{kl} определяются рекуррентной формулой

$$b_{k+1,\,l} = b_{k1}b_{1l} + b_{k2}a_{1l} + b_{k3}a_{2l} + \dot{b}_{kl} \qquad (l = 0, 1, 2, 3;\ k = 1, \ldots, s), \quad (86)$$

а

$$c_{sr}=b_{s2}c_{1r}+b_{s3}c_{2r} \qquad (r=0,\ 1,\ \ldots,\ m+p+h). \tag{87}$$

Уравнение допустимых фильтров (3) имеет вид

$$d\hat{Z}=\alpha\left[Y^{(1)\,\mathrm{T}}\ \ldots\ Y^{(s)\,\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}\hat{Z}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}dt+\beta dY^{(s)}+\gamma dt.$$

Положив для краткости $X=\left[Y^{(1)\,\mathrm{T}}\ \ldots\ Y^{(s)\,\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$, перепишем первые s уравнений (85) в виде одного уравнения

$$X=b_1Y+b_2Z+b_3N+b_0, \tag{88}$$

где

$$b_l=\left[b_{1l}^{\mathrm{T}}\ \ldots\ b_{sl}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} \qquad (l=0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{89}$$

При этом уравнение допустимых фильтров примет вид

$$d\hat{Z}=\alpha\left[X^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}\hat{Z}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}dt+\beta dY^{(s)}+\gamma dt. \tag{90}$$

Подставив выражения функций φ_{s+1}, ψ и ψ_1 из второго уравнения (84) и последнего уравнения (85) в (52) и учитывая несмещенность оценки $\hat{Z}$ и вытекающие из (20) равенства $K_{zy}=K_{\hat{z}y}$, $K_{z\hat{z}}=K_{\hat{z}}$, находим

$$\varkappa_{02}=Rb_{s+1,\,2}^{\mathrm{T}}+\left(K_{zn}-K_{\hat{z}n}\right)b_{s+1,\,3}^{\mathrm{T}}+\sigma_{13}, \qquad \varkappa_{22}=\sigma_{33},$$

где $R=K_z-K_{\hat{z}}$ — ковариационная матрица ошибки фильтрации, буквой K с индексами обозначены, как всегда, ковариационные и взаимные ковариационные матрицы соответствующих случайных векторов,

$$\sigma_{ij}=c_{i0}\nu c_{j0}^{\mathrm{T}}+\sum_{r=1}^{m+p+h}\left(c_{ir}\nu c_{j0}^{\mathrm{T}}+c_{i0}\nu c_{jr}^{\mathrm{T}}\right)m_r+\sum_{r,\,q=1}^{m+p+h}c_{ir}\nu c_{jq}^{\mathrm{T}}\left(m_rm_q+k_{rq}\right) \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3), \tag{91}$$

m_r и k_{rq} $(r,\ q=1,\ \ldots,\ m+p+h)$ — математические ожидания компонент случайного вектора $Q=\left[Y^{\mathrm{T}}Z^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$ и элементы его ковариационной матрицы. После этого по формуле (18) можно вычислить оптимальное значение β:

$$\beta=\left[Rb_{s+1,\,2}^{\mathrm{T}}+\left(K_{zn}-K_{\hat{z}n}\right)b_{s+1,\,3}^{\mathrm{T}}+\sigma_{13}\right]\sigma_{33}^{-1}. \tag{92}$$

Для нахождения оптимальной матрицы α в (90) подставим выражения функций φ, φ_{s+1} и ξ из (84), (85) и (90) в (53). В результате, учитывая (51) и равенства $K_{zx}=K_{\hat{z}x}$, $K_{zy}=K_{\hat{z}y}$,

$K_{z\hat{z}} = K_{\hat{z}}$, находим

$$\varkappa_{11} = \begin{bmatrix} K_x & K_{xy} & K_{x\hat{z}} \\ K_{yx} & K_y & K_{y\hat{z}} \\ K_{\hat{z}x} & K_{\hat{z}y} & K_{\hat{z}} \end{bmatrix},$$

$$\varkappa_{01} = [a_{11}K_{yx} + a_{12}K_{\hat{z}x} + a_{13}K_{nx} \quad a_{11}K_y + a_{12}K_{\hat{z}y} + a_{13}K_{ny} \quad a_{11}K_{y\hat{z}} + a_{12}K_{\hat{z}} + a_{13}K_{n\hat{z}}],$$

$$\varkappa_{21} = [b_{s+1,\,1}K_{yx} + b_{s+1,\,2}K_{\hat{z}x} + b_{s+1,\,3}K_{nx} \quad b_{s+1,\,1}K_y + b_{s+1,\,2}K_{\hat{z}y} + b_{s+1,\,3}K_{ny} \quad b_{s+1,\,1}K_{y\hat{z}} + b_{s+1,\,2}K_{\hat{z}} + b_{s+1,\,3}K_{n\hat{z}}].$$

Вследствие этих формул (22) дает для оптимального $\alpha = [\alpha_1\alpha_2\alpha_3]$ систему уравнений

$$\alpha_1 K_x + \alpha_2 K_{yx} + \alpha_3 K_{\hat{z}x} = (a_{11} - \beta b_{s+1,\,1}) K_{yx} + (a_{12} - \beta b_{s+1,\,2}) K_{\hat{z}x} + (a_{13} - \beta b_{s+1,\,3}) K_{nx},$$

$$\alpha_1 K_{xy} + \alpha_2 K_y + \alpha_3 K_{\hat{z}y} = (a_{11} - \beta b_{s+1,\,1}) K_y + (a_{12} - \beta b_{s+1,\,2}) K_{\hat{z}y} + (a_{13} - \beta b_{s+1,\,3}) K_{ny},$$

$$\alpha_1 K_{x\hat{z}} + \alpha_2 K_{y\hat{z}} + \alpha_3 K_{\hat{z}} = (a_{11} - \beta b_{s+1,\,1}) K_{y\hat{z}} + (a_{12} - \beta b_{s+1,\,2}) K_{\hat{z}} + (a_{13} - \beta b_{s+1,\,3}) K_{n\hat{z}}. \quad (93)$$

На основании соотношений

$$\begin{aligned} K_{xy} &= b_1 K_y + b_2 K_{\hat{z}y} + b_3 K_{ny}, \\ K_{x\hat{z}} &= b_1 K_{y\hat{z}} + b_2 K_{\hat{z}} + b_3 K_{n\hat{z}}, \end{aligned} \quad (94)$$

вытекающих из (88), второе и третье уравнения (93) можно переписать в матричном виде:

$$[\alpha_2 + \alpha_1 b_1 - a_{11} + \beta b_{s+1,\,1} \quad \alpha_3 + \alpha_1 b_2 - a_{12} + \beta b_{s+1,\,2}]\, \bar{\varkappa}_{11} = (a_{13} - \beta b_{s+1,\,3}) [K_{ny} \ K_{n\hat{z}}],$$

где

$$\bar{\varkappa}_{11} = \begin{bmatrix} K_y & K_{y\hat{z}} \\ K_{\hat{z}y} & K_{\hat{z}} \end{bmatrix} \quad (95)$$

— ковариационная матрица случайного вектора $[Y^{\mathrm{T}}\ \hat{Z}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$. Так как компоненты случайных векторов Y и Z не могут быть связаны линейными зависимостями, то матрицу $\bar{\varkappa}_{11}$ можно считать обратимой. Тогда будем иметь

$$[\alpha_2 + \alpha_1 b_1 \ \ \alpha_3 + \alpha_1 b_2] = [a_{11} - \beta b_{s+1,\,1} \ \ a_{12} - \beta b_{s+1,\,2}] + (a_{13} - \alpha_1 b_3 - \beta b_{s+1,\,3}) [K_{ny} \ K_{n\hat{z}}]\, \bar{\varkappa}_{11}^{-1}. \quad (96)$$

Вычитая из первого уравнения (93) второе, умноженное справа на b_1^{T}, и третье, умноженное справа на b_2^{T}, на основании соотношений (94) и соотношений

$$\begin{aligned} K_x &= K_{xy}b_1^{\mathrm{T}} + K_{x\hat{z}}b_2^{\mathrm{T}} + K_{xn}b_3^{\mathrm{T}}, \\ K_{yx} &= K_y b_1^{\mathrm{T}} + K_{y\hat{z}}b_2^{\mathrm{T}} + K_{yn}b_3^{\mathrm{T}}, \\ K_{\hat{z}x} &= K_{\hat{z}y}b_1^{\mathrm{T}} + K_{\hat{z}}b_2^{\mathrm{T}} + K_{\hat{z}n}b_3^{\mathrm{T}}, \\ K_{nx} &= K_{ny}b_1^{\mathrm{T}} + K_{n\hat{z}}b_2^{\mathrm{T}} + K_n b_3^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

также вытекающих из (88) и равенств $K_{xz} = K_{x\hat{z}}$, $K_{yz} = K_{y\hat{z}}$, $K_{z\hat{z}} = K_{\hat{z}}$, получаем

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 K_{xn} + \alpha_2 K_{yn} + \alpha_3 K_{\hat{z}n})\, b_3^{\mathrm{T}} = \\ &\quad = \left[(a_{11} - \beta b_{s+1,\,1}) K_{yn} + (a_{12} - \beta b_{s+1,\,2}) K_{\hat{z}n}\right] b_3^{\mathrm{T}} + \\ &\qquad + (a_{13} - \beta b_{s+1,\,3}) \left[(K_{nz} - K_{n\hat{z}})\, b_2^{\mathrm{T}} + K_n b_3^{\mathrm{T}}\right], \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \left[b_2 (K_{zn} - K_{\hat{z}n}) + b_3 K_n\right] b_3^{\mathrm{T}} + \\ &\qquad + [\alpha_2 + \alpha_1 b_1 \;\; \alpha_3 + \alpha_1 b_2] \left[K_{yn}^{\mathrm{T}} \;\; K_{\hat{z}n}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} b_3^{\mathrm{T}} = \\ &\quad = [a_{11} - \beta b_{s+1,\,1} \;\; a_{12} - \beta b_{s+1,\,2}] \left[K_{yn}^{\mathrm{T}} \;\; K_{\hat{z}n}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} b_3^{\mathrm{T}} + \\ &\qquad + (a_{13} - \beta b_{s+1,\,3}) \left[(K_{nz} - K_{n\hat{z}})\, b_2^{\mathrm{T}} + K_n b_3^{\mathrm{T}}\right]. \end{aligned}$$

Подставив сюда выражение $[\alpha_2 + \alpha_1 b_1 \;\; \alpha_3 + \alpha_1 b_2]$ из (96), получим

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \left[b_2 (K_{zn} - K_{\hat{z}n}) + b_3 K_n\right] b_3^{\mathrm{T}} + \\ &\qquad + (a_{13} - \beta b_{s+1,\,3} - \alpha_1 b_3) \left[K_{yn} \;\; K_{\hat{z}n}\right] \overline{\varkappa}_{11}^{-1} \left[K_{yn}^{\mathrm{T}} \;\; K_{\hat{z}n}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} b_3^{\mathrm{T}} = \\ &\qquad\qquad = (a_{13} - \beta b_{s+1,\,3}) \left[(K_{nz} - K_{n\hat{z}})\, b_2^{\mathrm{T}} + K_n b_3^{\mathrm{T}}\right]. \end{aligned}$$

Отсюда на основании вытекающего из равенств $K_{xz} = K_{x\hat{z}}$, $K_{yz} = K_{y\hat{z}}$, $K_{z\hat{z}} = K_{\hat{z}}$ соотношения

$$b_3 (K_{nz} - K_{n\hat{z}}) = -b_2 (K_z - K_{\hat{z}}) = -b_2 R \tag{97}$$

получаем уравнение

$$\begin{aligned} &\alpha_1 (b_3 \overline{K}_n b_3^{\mathrm{T}} - b_2 R b_2^{\mathrm{T}}) = \\ &\qquad = (a_{13} - \beta b_{s+1,\,3}) \left[\overline{K}_n b_3^{\mathrm{T}} + (K_{nz} - K_{n\hat{z}})\, b_2^{\mathrm{T}}\right], \end{aligned} \tag{98}$$

где для краткости положено

$$\overline{K}_n = K_n - \left[K_{yn} \;\; K_{\hat{z}n}\right] \overline{\varkappa}_{11}^{-1} \left[K_{yn}^{\mathrm{T}} \;\; K_{\hat{z}n}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} {}^{*)}. \tag{99}$$

---

*) В случае нормального распределения вектора $[Y^{\mathrm{T}}\, Z^{\mathrm{T}}\, N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, что возможно, конечно, только при $c_{1r} = 0$, $c_{2r} = 0$ $(r = 1, \ldots, m+p+h)$, $\overline{m}_n$ и $\overline{K}_n$ представляют собой условные математическое ожидание и ковариационную матрицу помехи N относительно Y и $\hat{Z}$ (приложение 4).

Так как компоненты помехи N не связаны линейными зависимостями и $h \geqslant ms$, то $ms \times ms$-матрица $b_3 K_n b_3^{\text{т}}$ всегда обратима (матрица $b_2 R b_2^{\text{т}}$ при $p < ms$ необратима). Поэтому уравнение (98) всегда определяет α_1.

Формулы (51), (15) и (96) дают следующую формулу для оптимального γ:

$$\gamma = a_{10} - \beta b_{s+1,\,0} + (a_{13} - \beta b_{s+1,\,3} - \alpha_1 b_3)\,\overline{m}_n, \tag{100}$$

где

$$\overline{m}_n = m_n - \left[K_{yn}\ \ K_{\hat{z}n}\right] \overline{\varkappa}_{11}^{-1} \left[m_y^{\text{т}}\ \ m_z^{\text{т}}\right]. \tag{101}$$

Для нахождения β, $\alpha = [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3]$ и γ по формулам (18), (91), (92), (95), (96), (98)—(101) необходимо знать математическое ожидание $m = [m_y^{\text{т}}\ m_z^{\text{т}}\ m_n^{\text{т}}]^{\text{т}}$ и ковариационную матрицу

$$K = \begin{bmatrix} K_y & K_{yz} & K_{yn} \\ K_{zy} & K_z & K_{zn} \\ K_{ny} & K_{nz} & K_n \end{bmatrix}$$

случайного вектора $Q = [Y^{\text{т}}\, Z^{\text{т}}\, N^{\text{т}}]^{\text{т}}$, а также матрицы R и $K_{\hat{z}n} = K_{n\hat{z}}^{\text{т}}$.

Для нахождения m и K воспользуемся уравнениями (6.20) и (6.22), которые в данном случае имеют вид

$$\dot{m} = Am + A_0, \tag{102}$$

$$\dot{K} = AK + KA^{\text{т}} + c_0 \nu c_0^{\text{т}} + \sum_{r=1}^{m+p+h} (c_0 \nu c_r^{\text{т}} + c_r \nu c_0^{\text{т}})\, m_r + \sum_{r,\,q=1}^{m+p+h} c_r \nu c_q^{\text{т}} (m_r m_q + k_{rq}), \tag{103}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} b_{10} \\ a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix}, \quad c_r = \begin{bmatrix} 0 \\ c_{1r} \\ c_{2r} \end{bmatrix}$$
$$(r = 0,\ 1,\ \ldots,\ m+p+h).$$

Уравнения (102) и (103) с соответствующими начальными условиями определяют m и K.

Для нахождения уравнения для ковариационной матрицы ошибки воспользуемся формулой (64). Подставив в нее выражения φ, ψ и ψ_1 из (84) и (85), получаем уравнение

$$\dot{R} = a_{12} R + R a_{12}^{\text{т}} + a_{13}(K_{nz} - K_{n\hat{z}}) + (K_{zn} - K_{\hat{z}n})\, a_{13}^{\text{т}} - \beta \sigma_{33} \beta^{\text{т}} + \sigma_{11}, \tag{104}$$

где σ_{11} и σ_{33} определяются формулой (91).

Для нахождения уравнения для $K_{\hat{z}n}$ следует составить уравнение (6.22) для ковариационной матрицы составного вектора

$[Q^{\text{т}}\,\hat{Z}^{\text{т}}]^{\text{т}} = [Y^{\text{т}}\,Z^{\text{т}}\,N^{\text{т}}\,\hat{Z}^{\text{т}}]^{\text{т}}$. Из этого уравнения получается следующее уравнение для $K_{\hat{z}n}$:

$$\dot{K}_{\hat{z}n} = \alpha_3 K_{\hat{z}n} + K_{\hat{z}n} a_{23}^{\text{т}} + (K_z - R)\, a_{22}^{\text{т}} + K_{zy} a_{21}^{\text{т}} + \\ + (\alpha_2 + \alpha_1 b_1 + \beta b_{s+1,\,1}) K_{yn} + (\alpha_1 b_2 + \beta b_{s+1,\,2}) K_{zn} + \\ + (\alpha_1 b_3 + \beta b_{s+1,\,3}) K_n + \beta\sigma_{32}. \qquad (105)$$

При выводе этого уравнения учтено, что $K_{\hat{z}} = K_z - R$ и $K_{\hat{z}y} = K_{zy}$.

Интегрируя уравнения (104) и (105) при соответствующих начальных условиях с β и α, определяемыми формулой (92) и уравнениями (96) и (98), найдем оптимальные α и β, после чего оптимальное значение γ определится по формуле (100). ◀

В отличие от случая п. 9.4.1, построенный таким путем условно оптимальный фильтр в общем случае не будет оптимальным в классе всех линейных фильтров. И лишь в частном случае, когда помеха в первом уравнении (84) представляет собой m-мерную векторную случайную функцию, определяемую линейным стохастическим дифференциальным уравнением s-го порядка, не содержащим производных белого шума в правой части, $b_{13} = I_m$, а производные s-го порядка компонент вектора состояния, входящих в первое уравнение (84), не содержат белого шума, найденный изложенным методом условно оптимальный линейный фильтр будет оптимальным в классе всех линейных фильтров. Предоставляем читателю самостоятельно проверить, что в этом случае даваемый изложенным методом фильтр совпадает с фильтром п. 9.4.1 для наблюдаемого сигнала, преобразованного системой, обратной формирующему фильтру помехи (п. 7.3.4).

Пример 12. В задаче примера 7.2 условно оптимальный линейный фильтр, найденный изложенным методом, совпадает с абсолютно оптимальным фильтром примера 7.2.

9.4.4. Экстраполяция при автокоррелированной помехе. Применим теорию п. 9.3.6 для нахождения условно оптимального линейного экстраполятора состояния линейной системы с параметрическими шумами. Уравнения (10) имеют в этом случае вид

$$\dot{Y} = b_{11}Y + b_{12}Z + b_{13}N + b_{10},$$
$$dZ = (a_{12}Z + a_{10})\,dt + \left(c_{10} + \sum_{r=1}^{p} c_{1r}Z_r\right) dW_1,$$
$$dN = (a_{23}N + a_{20})\,dt + \left(c_{20} + \sum_{r=1}^{h} c_{2r}N_r\right) dW_2, \qquad (106)$$

а класс допустимых экстраполяторов определяется уравнением (90), в котором b_1, b_2, b_3, b_0 находятся по формулам (86) и (89) при $a_{11} = 0$, $a_{13} = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 0$. Коэффициенты c_{3r} $(r = 0, 1, \ldots$

$\ldots, h$) в соответствии с условиями п. 9.3.6 определяются в этом случае формулой $c_{3r}=b_{s3}c_{2r}$, а $b_{s2}c_{1r}=0$ $(r=0,\ 1,\ \ldots,\ p)$.

▶ Подставив выражения функций φ, φ_{s+1} и ψ_1 из (106) и (85) в (59) и (52), находим, как и в п. 9.4.2,

$$\varkappa_{02}=\left(\varepsilon K_z-K_{\hat{z}z}\right)b_{s+1,\,2}^{\mathrm{T}}+\left(\varepsilon K_{zn}-K_{\hat{z}n}\right)b_{s+1,\,3}^{\mathrm{T}},$$
$$\varkappa_{22}=b_{s2}\sigma_{22}b_{s2}^{\mathrm{T}},$$

где $\varepsilon=u(t+\Delta,\ t)$, $u(t,\ \tau)$ — решение однородного уравнения $du/dt=a_{12}u$ при начальном условии $u(\tau,\ \tau)=I$, а

$$\sigma_{22}=c_{20}\nu_2c_{20}^{\mathrm{T}}+\sum_{r=1}^{h}\left(c_{20}\nu_2c_{2r}^{\mathrm{T}}+c_{2r}\nu_2c_{20}^{\mathrm{T}}\right)m_{m+p+r}+ \\ +\sum_{r,\,q=1}^{h}c_{2r}\nu_2c_{2q}^{\mathrm{T}}\left(m_{m+p+r}m_{m+p+q}+k_{m+p+r,\,m+p+q}\right). \quad (107)$$

После этого (18) дает следующую формулу для оптимального значения β:

$$\beta=\left\{\left(\varepsilon K_z-K_{\hat{z}z}\right)b_{s+1,\,2}^{\mathrm{T}}+\left(\varepsilon K_{zn}-K_{\hat{z}n}\right)b_{s+1,\,3}^{\mathrm{T}}\right\}/\left(b_{s2}\sigma_{22}b_{s2}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}. \quad (108)$$

Подставив выражения функций φ, φ_{s+1} и ξ из (106), (85) и (90) в (60) и учитывая вытекающие из условия несмещенности оценки и условия некоррелированности ошибки с ξ соотношений

$$K_{\hat{z}x}=\varepsilon K_{zx},\quad K_{\hat{z}y}=\varepsilon K_{zy},\quad K_{\hat{z}}=\varepsilon K_{z\hat{z}},$$

получаем из (22) систему уравнений для оптимального значения α:

$$\alpha_1K_x+\alpha_2K_{yx}+\alpha_3K_{\hat{z}x}= \\ =-\beta b_{s+1,\,1}K_{yx}+\left\{a_{12}(t+\Delta)-\beta b_{s+1,\,2}\varepsilon^{-1}\right\}K_{\hat{z}x}-\beta b_{s+1,\,3}K_{nx},$$
$$\alpha_1K_{xy}+\alpha_2K_y+\alpha_3K_{\hat{z}y}= \\ =-\beta b_{s+1,\,1}K_y+\left\{a_{12}(t+\Delta)-\beta b_{s+1,\,2}\varepsilon^{-1}\right\}K_{\hat{z}y}-\beta b_{s+1,\,3}K_{ny},$$
$$\alpha_1K_{x\hat{z}}+\alpha_2K_{y\hat{z}}+\alpha_3K_{\hat{z}}= \\ =-\beta b_{s+1,\,1}K_{y\hat{z}}+\left\{a_{12}(t+\Delta)-\beta b_{s+1,\,2}\varepsilon^{-1}\right\}K_{\hat{z}}-\beta b_{s+1,\,3}K_{n\hat{z}}. \quad (109)$$

Эта система уравнений получается из (93), если заменить a_{11} и a_{13} нулями, а a_{12} и $b_{s+1,\,2}$ — величинами $a_{12}(t+\Delta)$ и $b_{s+1,\,2}\varepsilon^{-1}$. Поэтому оптимальные α_1, α_2, α_3 определяются формулами (98) и (96) с такой же заменой.

Чтобы найти оптимальное значение γ, заметим, что в рассматриваемом случае

$$m_z(t+\Delta)=\varepsilon m_z(t)+h(t)=\varepsilon m_z+h,$$

где

$$h(t) = \int_t^{t+\Delta} u(t+\Delta, \tau)\, a_{10}(\tau)\, d\tau. \qquad (110)$$

Тогда, пользуясь формулами (15), (51), (60) и (96), найдем

$$\gamma = a_{10}(t+\Delta) - (\alpha_1 b_3 + \beta b_{s+1,\,3})\,\overline{m}_n + [a_{12}(t+\Delta) - \alpha_3]\,h, \qquad (111)$$

где $\overline{m}_n$ определяется формулой (101).

Для нахождения α, β и γ по полученным формулам необходимо знать, как и в п. 9.4.3, m, K, R, $K_{\hat{z}}$ и $K_{\hat{z}n}$.

Математическое ожидание m и ковариационная матрица K случайного вектора $Q = [Y^{\mathrm{T}}\, Z^{\mathrm{T}}\, N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ определяются уравнениями (102) и (103), в которых

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} b_0 \\ a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix}, \quad c_{30} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_{10} & 0 \\ 0 & c_{20} \end{bmatrix},$$

$$c_{3r} = 0 \quad (r = 1, \ldots, m),$$

$$c_{3r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_{1,\,r-m} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (r = m+1, \ldots, m+p),$$

$$c_{3r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & c_{2,\,r-m-p} \end{bmatrix} \quad (r = m+p+1, \ldots, m+p+h).$$

Чтобы получить уравнение для R, воспользуемся формулой (65). В результате, имея в виду, что $m_{\hat{z}}(t) = m_z(t+\Delta)$ и

$$M\,[Z_{t+\Delta} - m_z(t+\Delta)]\,Z_{t+\Delta}^{\mathrm{T}} = \varepsilon K_z \varepsilon^{\mathrm{T}},$$

$$M\,(\hat{Z} - m_{\hat{z}})\,Z_{t+\Delta}^{\mathrm{T}} = K_{\hat{z}z}\varepsilon^{\mathrm{T}} = K_{\hat{z}} = \varepsilon K_{z\hat{z}},$$

$$R = \varepsilon K_z \varepsilon^{\mathrm{T}} - \varepsilon K_{z\hat{z}} - K_{\hat{z}z}\varepsilon^{\mathrm{T}} + K_{\hat{z}} = \varepsilon K_z \varepsilon^{\mathrm{T}} - K_{\hat{z}},$$

получим

$$\dot{R} = a_{12}(t+\Delta)\,R + R\,a_{12}(t+\Delta)^{\mathrm{T}} - \beta b_{s2}\sigma_{22} b_{s2}^{\mathrm{T}}\beta^{\mathrm{T}} + \sigma_{11}(t+\Delta), \qquad (112)$$

где σ_{22} определяется формулой (107), а

$$\sigma_{11} = c_{10}\nu_1 c_{10}^{\mathrm{T}} + \sum_{r=1}^{p} (c_{10}\nu_1 c_{1r}^{\mathrm{T}} + c_{1r}\nu_1 c_{10}^{\mathrm{T}})\, m_{m+r} + \sum_{r,\,q=1}^{p} c_{1r}\nu_1 c_{1q}^{\mathrm{T}}\,(m_{m+r} m_{m+q} + k_{m+r,\,m+q}). \qquad (113)$$

Матрица $K_{\hat{z}n}$ определяется в рассматриваемом случае уравнением

$$\dot{K}_{\hat{z}n} = \alpha_3 K_{\hat{z}n} + K_{\hat{z}n} a_{23}^{\mathrm{T}} + (\alpha_2 + \alpha_1 b_1 + \beta b_{s+1,\,1})\,K_{yn} + (\alpha_1 b_2 + \beta b_{s+1,\,2})\,K_{zn} + (\alpha_1 b_3 + \beta b_{s+1,\,3})\,K_n. \qquad (114)$$

Интегрирование уравнений (102), (103), (112) и (114) при соответствующих начальных условиях с найденными α и β и последующее определение γ по формуле (111) полностью решает задачу нахождения условно оптимального экстраполятора. ◄

Из доказанного в конце п. 9.4.2 следует, что найденный условно оптимальный экстраполятор может быть представлен в виде последовательного соединения условно оптимального фильтра с усилителем с коэффициентом усиления ε и сумматором, вводящим неслучайное слагаемое h.

§ 9.5. Условно оптимальная дискретная фильтрация и экстраполяция

9.5.1. Постановка задачи. В настоящее время фильтрация, как правило, осуществляется с использованием ЭВМ. В таких случаях фильтры, описываемые дифференциальными уравнениями, не могут быть непосредственно использованы. Такого рода фильтры могут применяться только с помощью какого-нибудь численного метода интегрирования дифференциальных уравнений с соответствующей дискретизацией наблюдаемых процессов. Таким образом, естественно ограничить класс допустимых фильтров дискретными фильтрами, использующими дискретные наблюдения. Идеи условно оптимальной фильтрации и экстраполяции легко могут быть распространены и на этот случай.

Те же рассуждения, которые привели нас к классам допустимых фильтров, описываемых дифференциальными уравнениями, подсказывают мысль использовать дискретные фильтры, описываемые разностными уравнениями, и дискретные наблюдения.

Таким образом, мы приходим к следующей задаче. Процесс

$$Z = [Z'(t)^{\mathrm{T}}\, Z''(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\ \ Z''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k'' \mathbf{1}_{A_k}(t),$$

определяется стохастическим дифференциальным уравнением Ито и разностным уравнением вида

$$dZ' = \varphi(Z, t)\,dt + \psi(Z, t)\,dW, \qquad Z_{n+1}'' = \varphi_n'(Z_n, V_n), \tag{115}$$

где $\varphi, \psi, \varphi_n'$ — известные функции указанных аргументов, $Z_n = Z(t^{(n)})$ — значение процесса $Z(t)$ в момент $t = t^{(n)} = t_0 + n\Delta$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $\mathbf{1}_{A_k}(t)$ — индикатор интервала $[t^{(k)}, t^{(k+1)})$, $W(t)$ и $\{V_n\}$ — взаимно независимые процесс с независимыми приращениями и последовательность независимых случайных величин. Некоторая функция вектора Z и t наблюдается в моменты времени $t^{(n)} = t_0 + n\Delta$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Из-за ошибок измерений (шумов) результаты наблюдения определяются формулой

$$X_n = \omega_n(Z_n, W_n), \tag{116}$$

где ω_n — некоторые известные функции указанных аргументов, $\{W_n\}$ — последовательность случайных величин (ошибки измерений). Задача состоит в том, чтобы оценить значение $Z_n = Z(t^{(n)})$ процесса $Z(t)$ при $t = t^{(n)}$ или его будущее значение $Z_{n+\tau}$ после получения результатов наблюдений $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$. Ошибки измерений W_n обычно независимы от процесса $W(t)$ в (115). Поэтому в дальнейшем предположим, что последовательность случайных величин $\{W_n\}$ в (116) независима от процесса $W(t)$ в (115).

Если функции φ, ψ, φ_n' в уравнениях состояния (115) и, возможно, функции ω_n в уравнении наблюдения (116) зависят от конечного числа неизвестных параметров, подлежащих оценке вместе с вектором состояния системы, то, заменив вектор состояния расширенным вектором состояния, содержащим все неизвестные параметры, сведем задачу обычным путем к задаче, поставленной выше.

9.5.2. Классы допустимых фильтров. В соответствии с соображениями в п. 9.5.1 определим класс допустимых фильтров формулой $\hat{Z}_n = AU_n$ и разностным уравнением

$$U_{n+1} = \delta_n \zeta_n (X_n, U_n) + \gamma_n, \tag{117}$$

где A — некоторая постоянная $p \times N$-матрица, $N \geqslant p$, ранга p, ζ_n — некоторые известные функции (в общем случае векторные функции размерности r), δ_n — произвольные $(N \times r)$-матрицы, а γ_n — произвольные $(N \times 1)$-матрицы-столбцы. Каждому выбору значений δ_n, γ_n соответствует определенный допустимый фильтр, а все возможные значения δ_n, γ_n определяют класс допустимых фильтров для данных функций ζ_n. Различные последовательности функций $\{\zeta_n\}$ определяют различные классы допустимых фильтров. Каждому выбору $\{\zeta_n\}$ соответствует определенный класс допустимых фильтров.

Последовательность функций $\{\zeta_n\}$ в (117) может быть, в принципе, произвольной. Но точность фильтрации зависит от выбора $\{\zeta_n\}$. Таким образом, встает вопрос о рациональном выборе $\{\zeta_n\}$. Априори можно только сказать, что чем больше размерность векторных функций ζ_n, тем выше может быть точность фильтрации. Некоторые указания на то, как выбрать функции ζ_n, могут быть получены путем замены уравнений гл. 8, определяющих приближенно оптимальные оценки, соответствующими разностными уравнениями.

Мы примем за оптимальный такой допустимый фильтр, который минимизирует средний квадрат ошибки $M|\hat{Z}_{n+1} - Z_{n+1}|^2$ или $M|\hat{Z}_{n+1} - Z_{n+\tau+1}|^2$ на каждом шаге (при каждом n) путем выбора δ_n, γ_n в (117) при данных значениях δ_h, γ_h, $h \leqslant n-1$, найденных в результате предыдущих шагов. Такой фильтр называется *условно оптимальным фильтром*. Значения δ_n и γ_n в (117), соответствующие условно оптимальному фильтру, принимаются за оптимальные значения δ_n и γ_n.

Само собой разумеется, что все, что было сказано в п. 9.1.4 о характере задач условно оптимальной фильтрации, относится также и к задачам условно оптимальной дискретной фильтрации.

Уравнение (117) показывает, каким образом допустимый фильтр использует в каждый момент времени $t^{(n+1)}$ информацию, содержащуюся в предыдущих результатах наблюдений $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$. А именно эта информация используется только через U_n. И только текущий результат наблюдения X_n используется непосредственно при формировании оценки $\hat{Z}_{n+1}$ в момент времени $t^{(n)}$. Таково условие, при котором $M|\hat{Z}_{n+1}-Z_{n+1}|^2$ или $M|\hat{Z}_{n+1}-Z_{n+\tau+1}|^2$ минимизируется в каждый момент времени $t^{(n+1)}$ условно оптимальным фильтром.

Таким образом, задача проектирования условно оптимального фильтра сводится к нахождению оптимальных последовательностей $\{\delta_n\}$ и $\{\gamma_n\}$ в (117).

9.5.3. Условно оптимальный дискретный фильтр. Записав (117) в форме

$$\hat{Z}_{n+1} = A\delta_n\zeta_n(X_n, U_n) + A\gamma_n, \tag{118}$$

видим, что средний квадрат ошибки $M|\hat{Z}_{n+1}-Z_{n+1}|^2$ будет минимальным тогда и только тогда, когда правая часть уравнения (118) представляет собой линейную среднюю квадратическую регрессию случайной величины Z_{n+1} на случайный вектор $\zeta_n(X_n, U_n)$ (*ТВ*, п. 9.2.2). Таким образом, для нахождения оптимальных значений $A\delta_n$ и $A\gamma_n$ можно применить теорию линейной регрессии.

▶ Теория линейной регрессии дает следующие уравнения для оптимальных $A\delta_n$ и $A\gamma_n$ (*ТВ*, п. 9.2.5):

$$A\delta_n K_n = L_n, \qquad A\gamma_n = m_{n+1} - A\delta_n l_n, \tag{119}$$

где

$$\begin{aligned} K_n &= M[\zeta_n(X_n, U_n) - l_n]\,\zeta_n(X_n, U_n)^{\mathrm{T}}, \\ L_n &= M(Z_{n+1} - m_{n+1})\,\zeta_n(X_n, U_n)^{\mathrm{T}}, \\ m_{n+1} &= MZ_{n+1}, \quad l_n = M\zeta_n(X_n, U_n). \end{aligned}$$

Подставив сюда выражение X_n из (116), $X_n = \omega_n(Z_n, W_n)$, получаем

$$K_n = M[\zeta_n(\omega_n(Z_n, W_n), U_n) - l_n]\,\zeta_n(\omega_n(Z_n, W_n), U_n)^{\mathrm{T}}, \tag{120}$$

$$L_n = M(Z_{n+1} - m_{n+1})\,\zeta_n(\omega_n(Z_n, W_n), U_n)^{\mathrm{T}}, \tag{121}$$

$$m_{n+1} = MZ_{n+1}, \quad l_n = M\zeta_n(\omega_n(Z_n, W_n), U_n). \tag{122}$$

$A\delta_n$, $A\gamma_n$, определяемые формулами (119), удовлетворяют при любом $n \geqslant 0$ соотношениям

$$M(\hat{Z}_{n+1} - Z_{n+1})\,\zeta_n(X_n, U_n)^{\mathrm{T}} = M(AU_{n+1} - Z_{n+1})\,\zeta_n(\omega_n(Z_n, W_n), U_n)^{\mathrm{T}} = 0.$$

Оценки $\hat{Z}$ величин Z_n являются несмещенными,

$$M\hat{Z}_n = MZ_n,$$

если $A\delta_n$ и $A\gamma_n$ определяются формулами (119).

Сначала предположим, что случайные величины W_n независимы. В этом случае можно положить без потери общности $W_n = V_n$ принимая, если необходимо, что функции φ_n' в (115) зависят только от одной части компонент вектора V_n, а функции ω_n в (116) зависят только от оставшейся части компонент вектора V_n.

Для того чтобы вычислить математические ожидания в (120)—(122), принимая во внимание, что по формуле (115) $Z''_{n+1} = \varphi_n'(Z_n, V_n)$, в этом случае достаточно знать распределение случайной величины $V_n = W_n$ и совместное распределение случайных величин Z'_{n+1}, Z_n, U_n (напомним, что из-за независимости случайной величины V_n от $V_0, V_1, \ldots, V_{n-1}$ и независимости последовательности $\{V_n\}$ в (116) от процесса $W(t)$ в (115) составной случайный вектор $[Z_n^{\mathrm{T}}\ U_n^{\mathrm{T}}\ Z_{n+1}'^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ независим от V_n). Для того чтобы найти это распределение запишем (117) в виде

$$U_{n+1} = \delta_n \zeta_n(\omega_n(Z_n, V_n), U_n) + \gamma_n. \tag{123}$$

Уравнения (115) и (123) представляют собой уравнения непрерывно-дискретной системы вида (5.32а) п. 5.3.1 с вектором состояния $[Z^{\mathrm{T}}\ U^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,

$$U = U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \mathbf{1}_{A_n}(t),$$

где $\mathbf{1}_{A_n}(t)$—индикатор интервала $[t^{(n)}, t^{(n+1)})$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Следуя идеям п. 5.3.1, введем случайный ступенчатый процесс

$$Z'''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n' \mathbf{1}_{A_n}(t), \qquad Z_n = Z(t^{(n)}).$$

Тогда одномерная характеристическая функция $g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; t)$ составного векторного процесса $[Z(t)^{\mathrm{T}}\, U(t)^{\mathrm{T}}\, Z'''(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ определится уравнениями (5.38а), (5.38б) с начальным условием (5.39а), которые в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned} &\partial g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; t)/\partial t = \\ &= M\{i\lambda_1'^{\mathrm{T}}\varphi(Z, t) + \chi(\psi(Z, t)^{\mathrm{T}}\lambda_1'; t)\}\exp\{i\lambda_1^{\mathrm{T}}Z + i\lambda_2^{\mathrm{T}}U + i\lambda_3^{\mathrm{T}}Z'''\}, \quad (124)\\ &g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; t^{(n+1)}) = M\exp\{i(\lambda_1'^{\mathrm{T}} + \lambda_3^{\mathrm{T}})Z'_{n+1} + \\ &\qquad + i\lambda_1''^{\mathrm{T}}\varphi_n'(Z_n, V_n) + i\lambda_2^{\mathrm{T}}[\delta_n\zeta_n(\omega_n(Z_n, V_n), U_n) + \gamma_n]\}, \quad (125)\\ &g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; t_0) = g_0([\lambda_1''^{\mathrm{T}} + \lambda_3^{\mathrm{T}}\ \ \lambda_1''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \lambda_2), \quad (126) \end{aligned}$$

где $g_0(\rho_1, \rho_2)$—совместная характеристическая функция значений Z_0, U_0 случайных процессов $Z(t)$, $U(t)$ при $t = t_0 = t^{(0)}$, а $\lambda_1 = [\lambda_1'^{\mathrm{T}}\lambda_1''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$—разделение вектора λ_1, соответствующее разделению

$Z=[Z'^{\mathrm{T}}Z''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ вектора Z. Совместная характеристическая функция случайных величин Z_n, U_n, Z'_{n+1} представляет собой значение

$$g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; t^{(n+1)}-0)=\lim_{t\to t^{(n+1)}} g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; t)$$

характеристической функции $g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; t)$, определяемой уравнениями (124)—(126). ◀

Таким образом, решив уравнения (124)—(126) вместе с (119), найдем оптимальные δ_n и γ_n в уравнении фильтра (117).

Что касается начального распределения процессов $Z(t)$ и $U(t)$, то можно заметить, что оно обычно неизвестно, и мы должны взять его произвольным, так же как в аналогичной задаче в п. 9.2.5. Но даже в случае известного начального распределения процесса $Z(t)$ распределение случайной величины U_0 приходится задавать произвольно.

Уравнения (124)—(126) могут быть решены любым приближенным методом гл. 6. Взяв достаточно большое N, можно надеяться найти решение с любой степенью точности.

Точность любого допустимого фильтра, в частности, условно оптимального, можно оценить, вычислив средний квадрат ошибки

$$M\,|\hat{Z}_{n+1}-Z_{n+1}|^2=M\,|A\,[\delta_n\zeta_n(\omega_n(Z_n, V_n), U_n)+\gamma_n]-Z_{n+1}|^2,$$

который определяется найденным совместным распределением случайных величин Z_n, Z'_{n+1}, U_n и известным распределением случайной величины V_n. Можно также найти доверительные области для Z_{n+1}.

Все сказанное в п. 9.2.5 о решении уравнений (15), (18) и (24) для α, β, γ в случае $(p\times N)$-матрицы A, $N>p$, относится и к уравнениям (119).

Решение уравнений (124)—(126) совместно с (119) приходится выполнять только в процессе проектирования фильтра по априорным данным. Как только фильтр спроектирован, процесс фильтрации определяется только уравнением (117), которое может решаться в реальном масштабе времени.

Пример 13. Спроектировать дискретный условно оптимальный фильтр для задачи примера 1,

$$\dot{Z}=-Z^3+ZV,$$

используя дискретные наблюдения Z в моменты $t^{(0)}=t_0$, $t^{(1)}$, $t^{(2)}$, ... с аддитивными ошибками $X_n=Z_n+V_n$, $Z_n=Z(t^{(n)})$, где $\{V_n\}$—последовательность независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями, независимая от белого шума V. Класс допустимых фильтров определяется уравнением

$$\hat{Z}_{n+1}=\delta_n\,[X_n\,\hat{Z}_n\,\hat{Z}_n^3]^{\mathrm{T}}+\gamma_n.$$

Для того чтобы определить матрицу-строку $\delta_n=[\delta_{n1}\ \delta_{n2}\ \delta_{n3}]$ и γ_n, воспользуемся уравнениями (119), которые в этом случае имеют вид

$$(m_{020}^{(n)}-m_{010}^{(n)}+D_n)\,\delta_{n1}+(m_{011}^{(n)}-m_{010}^{(n)}m_{001}^{(n)})\,\delta_{n2}+(m_{013}^{(n)}-m_{010}^{(n)}m_{003}^{(n)})\,\delta_{n3}=$$
$$=m_{110}^{(n)}-m_{100}^{(n)}m_{010}^{(n)},$$
$$(m_{011}^{(n)}-m_{010}^{(n)}m_{001}^{(n)})\,\delta_{n1}+(m_{002}^{(n)}-m_{001}^{(n)2})\,\delta_{n2}+(m_{004}^{(n)}-m_{001}^{(n)}m_{003}^{(n)})\,\delta_{n3}=m_{101}^{(n)}-m_{100}^{(n)}m_{001}^{(n)},$$
$$(m_{013}^{(n)}-m_{010}^{(n)}m_{003}^{(n)})\,\delta_{n1}+(m_{004}^{(n)}-m_{001}^{(n)}m_{003}^{(n)})\,\delta_{n2}+(m_{006}^{(n)}-m_{003}^{(n)2})\,\delta_{n3}=$$
$$=m_{103}^{(n)}-m_{100}^{(n)}m_{003}^{(n)},$$
$$\gamma_n=m_{100}^{(n)}-m_{010}^{(n)}\,\delta_{n1}-m_{001}^{(n)}\,\delta_{n2}-m_{003}^{(n)}\,\delta_{n3},$$

где $m_{pqr}^{(n)}=MZ_{n+1}^pZ_n^q\hat{Z}_n^r$, а D_n — дисперсия случайной величины V_n.

Уравнения (124), (125), определяющие одномерную характеристическую функцию процесса $[Z(t)\ \hat{Z}(t)\ Z'''(t)]^{\mathrm{T}}$ имеют в этом случае вид

$$\partial g_1(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3;\ t)/\partial t=M\left\{-i\lambda_1Z^3-\frac{1}{2}\nu\lambda_1^2Z^2\right\}e^{i\lambda_1Z+i\lambda_2\hat{Z}+i\lambda_3Z'''},$$
$$g_1(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3;\ t^{(n+1)})=M\exp\{i(\lambda_1+\lambda_3)\,Z_{n+1}+i\lambda_2[\delta_{n1}(Z_n+V_n)+$$
$$+\delta_{n2}\hat{Z}_n+\delta_{n3}\hat{Z}_n^3+\gamma_n]\},$$
$$g_1(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3;\ t_0)=g_0(\lambda_1+\lambda_3,\ \lambda_2),$$

где ν — интенсивность белого шума V, а $g_0(\rho_1,\ \rho_2)$ — совместная характеристическая функция случайных величин Z_0, $\hat{Z}_0$. Решив эти уравнения вместе с уравнениями для δ_n, γ_n любым из приближенных методов гл. 6, найдем оптимальные значения $\delta_n=[\delta_{n1}\ \delta_{n2}\ \delta_{n3}]$, γ_n.

9.5.4. Фильтрация в случае зависимых ошибок измерения. Теперь рассмотрим случай зависимых случайных величин W_n в (116), определяемых через некоторую последовательность независимых случайных величин $\{V_n\}$ разностным уравнением вида *)

$$W_{n+1}=\omega_n'(W_n,\ V_n). \tag{127}$$

► Для того чтобы вычислить в этом случае математические ожидания в (120)—(122), достаточно знания совместного распределения случайных величин Z_n, Z_{n+1}', U_n, W_n и распределения величины V_n, так как $Z_{n+1}''=\varphi_n'(Z_n,\ V_n)$ согласно (115). Добавив к (115) уравнение

$$U_{n+1}=\delta_n\zeta_n(\omega_n(Z_n,\ W_n),\ U_n)+\gamma_n, \tag{128}$$

вытекающее из (116) и (117), и уравнение (127), получим непрерывно-дискретную систему с расширенным вектором состояния $[Z^{\mathrm{T}}\ U^{\mathrm{T}}\ W^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,

$$U(t)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n\mathbf{1}_{A_n}(t),\qquad W(t)=\sum_{n=0}^{\infty}W_n\mathbf{1}_{A_n}(t).$$

Введя ступенчатый процесс

$$Z'''(t)=\sum_{n=0}^{\infty}Z_n'\mathbf{1}_{A_n}(t),$$

*) Без потери общности можно предположить, что эти случайные величины V_n — те же, что и в уравнениях (115).

можно написать уравнения (5.38а), (5.38б) и (5.39а) п. 5.3.1 для одномерной характеристической функции

$$g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4; t) = M\exp\{i\lambda_1^{\mathrm{T}}Z + i\lambda_2^{\mathrm{T}}U + i\lambda_3^{\mathrm{T}}W + i\lambda_4^{\mathrm{T}}Z'''\}$$

в виде

$$\partial g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4; t)/\partial t = M\{i\lambda_1'^{\mathrm{T}}\varphi(Z, t) + \\ + \chi(\psi(Z, t)^{\mathrm{T}}\lambda_1'; t)\}\exp\{i\lambda_1^{\mathrm{T}}Z + i\lambda_2^{\mathrm{T}}U + i\lambda_3^{\mathrm{T}}W + i\lambda_4^{\mathrm{T}}Z'''\}, \quad (129)$$

$$g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4; t^{(n+1)}) = \\ = M\exp\{i(\lambda_1'^{\mathrm{T}} + \lambda_4^{\mathrm{T}})Z'_{n+1} + i\lambda_1''^{\mathrm{T}}\varphi'_n(Z_n, V_n) + \\ + i\lambda_2^{\mathrm{T}}\{\delta_n\zeta_n(\omega_n(Z_n, W_n), U_n) + \gamma_n] + i\lambda_3^{\mathrm{T}}\omega'_n(W_n, V_n)\}, \quad (130)$$

$$g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4; t_0) = g_0([\lambda_1'^{\mathrm{T}} + \lambda_4^{\mathrm{T}} \ \lambda_1''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \lambda_2, \lambda_3), \quad (131)$$

где $g_0(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ — совместная характеристическая функция случайных величин Z_0, U_0, W_0. Совместная характеристическая функция случайных величин Z'_{n+1}, Z_n, U_n, W_n определяется как значение

$$g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4; t^{(n+1)} - 0) = \lim_{t \to t^{(n+1)}} g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4; t)$$

характеристической функции $g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4; t)$,

$$M\exp\{i\lambda_1'^{\mathrm{T}}Z'_{n+1} + i\lambda_1''^{\mathrm{T}}Z''_n + i\lambda_2^{\mathrm{T}}U_n + i\lambda_3^{\mathrm{T}}W_n + i\lambda_4^{\mathrm{T}}Z'_n\} = \\ = g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4; t^{(n+1)} - 0). \blacktriangleleft \quad (132)$$

Решив уравнения (129)—(131) совместно с (119), находим оптимальные значения δ_n, γ_n. После этого точность фильтрации может быть оценена средним квадратом ошибки и доверительными областями для Z_{n+1} так же, как и раньше.

Для решения уравнений (129)—(131) может быть применен любой из приближенных методов гл. 6.

Пример 14. Решить задачу примера 13, предположив, что $X_n = Z_n + W_n$, где $\{W_n\}$ — последовательность зависимых случайных величин, определяемых разностным уравнением $W_{n+1} = -q_nW_n + V_n$, где q_n — некоторые постоянные, $\{V_n\}$ — последовательность независимых случайных величин, независимая от белого шума V.

В этом случае оптимальные $\delta_n = [\delta_{n1} \ \delta_{n2} \ \delta_{n3}]$ и γ_n определяются теми же уравнениями, что и в примере 13. Моменты $m_{pqr}^{(n)}$ и дисперсии D_n случайных величин W_n в этих уравнениях определяются решением уравнений для одномерной характеристической функции $g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4; t)$ процесса $[Z(t)\ \hat{Z}(t)\ W(t)\ Z'''(t)]^{\mathrm{T}}$,

$$\partial g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4; t)/\partial t = M\left\{-i\lambda_1Z^3 - \frac{1}{2}\nu_1\lambda_1^2Z^2\right\}e^{i\lambda_1Z + i\lambda_2\hat{Z} + i\lambda_3W + i\lambda_4Z'''},$$

$$g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4; t^{(n+1)}) = M\exp\{i(\lambda_1 + \lambda_4)Z_{n+1} + \\ + i\lambda_2[\delta_{n1}(Z_n + W_n) + \delta_{n2}\hat{Z}_n + \delta_{n3}\hat{Z}_n^3 + \gamma_n] + i\lambda_3(-q_nW_n + V_n)\}$$

совместно с уравнениями, определяющими оптимальные δ_n, γ_n.

9.5.5. Условно оптимальный дискретный экстраполятор. Задача экстраполяции отличается от задачи оценивания только величиной, которая должна быть оценена. В задаче экстраполяции вместо Z_{n+1} должно быть оценено будущее значение $Z_{n+\tau+1} = Z(t^{(n+\tau+1)})$ процесса $Z(t)$ в момент времени $t^{(n+1)}$ по результатам наблюдения $X_0, X_1, \ldots, X_n$, где τ — некоторое натуральное число. Соответственно, для того чтобы $\hat{Z}_{n+1}$ была оптимальной оценкой $Z_{n+\tau+1}$, минимизирующей средний квадрат ошибки $M|\hat{Z}_{n+1} - Z_{n+\tau+1}|^2$, правая часть уравнения (118) должна быть линейной средней квадратической регрессией случайной величины $Z_{n+\tau+1}$ на случайный вектор $\zeta_n(X_n, U_n)$.

▶ Применяя теорию линейной регрессии (*ТВ*, п. 9.2.5), мы снова получаем уравнения (119), где

$$\begin{gathered} L_n = M(Z_{n+\tau+1} - m_{n+1})\zeta_n(X_n, U_n)^{\mathrm{T}} = \\ = M(Z_{n+\tau+1} - m_{n+1})\zeta_n(\omega_n(Z_n, W_n), U_n), \\ m_{n+1} = MZ_{n+\tau+1}, \end{gathered} \tag{133}$$

а K_n, l_n определяются формулами (120), (122).

Для того чтобы вычислить математические ожидания в (133) в случае независимых ошибок измерений W_n, предположим, что последовательности случайных величин $\{V_n\}$ в (115) и $\{W_n\}$ в (116) независимы. В этом случае достаточно знать распределения случайных величин $V_{n+\tau}$ и W_n и совместное распределение случайных величин Z_n, U_n, $U_{n+\tau}$, $Z'_{n+\tau+1}$ независимых от $V_{n+\tau}$ и W_n, так как согласно (115) $Z''_{n+\tau+1} = \varphi'_{n+\tau}(Z_{n+\tau}, V_{n+\tau})$. Последнее распределение, в свою очередь, определяется двумерным распределением случайного процесса $[Z(t)^{\mathrm{T}}\, U(t)^{\mathrm{T}}\, Z'''(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, где, как и раньше, $Z'''(t)$ — ступенчатый процесс, совпадающий с $Z'(t)$ в точках $t^{(n)}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Двумерная характеристическая функция этого процесса определяется уравнениями (5.41а), (5.41б), (5.42) п. 5.3.2 для непрерывно-дискретной системы, описываемой уравнениями (115) и (128). Уравнения (5.41а), (5.41б) и (5.42) в этом случае имеют вид

$$\begin{gathered} \partial g_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3;\ t,\ s)/\partial s = \\ = M\{i\mu_1'^{\mathrm{T}}\varphi(Z_s, s) + \chi(\psi(Z_s, s)^{\mathrm{T}}\mu_1';\ s)\}\exp\{i\lambda_1^{\mathrm{T}}Z_t + \\ + i\lambda_2^{\mathrm{T}}U_t + i\lambda_3^{\mathrm{T}}Z_t''' + i\mu_1^{\mathrm{T}}Z_s + i\mu_2^{\mathrm{T}}U_s + i\mu_3^{\mathrm{T}}Z_s'''\}, \end{gathered} \tag{134}$$

$$\begin{gathered} g_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3;\ t,\ t^{(h+1)}) = \\ = M\exp\{i\lambda_1^{\mathrm{T}}Z_t + i\lambda_2^{\mathrm{T}}U_t + i\lambda_3^{\mathrm{T}}Z_t''' + i(\mu_1'^{\mathrm{T}} + \mu_3^{\mathrm{T}})Z'_{h+1} + i\mu_1''^{\mathrm{T}}\varphi'_h(Z_h, V_h) + \\ + i\mu_2^{\mathrm{T}}[\delta_h\zeta_h(\omega_h(Z_h, W_h), U_h) + \gamma_h]\} \quad (\forall h,\ t^{(h+1)} > t), \end{gathered} \tag{135}$$

$$g_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3;\ t,\ t) = g_1(\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \lambda_3 + \mu_3;\ t), \tag{136}$$

где $\mu_1 = [\mu_1'^{\mathrm{T}}\ \mu_1''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ — разделение вектора μ_1, соответствующее разделению $Z = [Z'^{\mathrm{T}}\ \ Z''^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ вектора Z. Совместная характеристическая функция случайных величин Z_n, U_n, $Z_{n+\tau}$ и $Z'_{n+\tau+1}$ представляет собой значение $g_2(\lambda_1, \lambda_2, 0, \mu_1, 0, \mu_3; t^{(n)}, t^{(n+\tau+1)})$ характеристической функции

$$g_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3; t, s) = \\ = M \exp\{i\lambda_1^\tau Z_t + i\lambda_2^\tau U_t + i\lambda_3^\tau Z_t''' + i\mu_1^\tau Z_s + i\mu_2^\tau U_s + i\mu_3^\tau Z_s'''\}$$

при $\lambda_3 = 0$, $\mu_3 = 0$, $t = t^{(n)}$, $s \to t^{(n+\tau+1)}$. ◀

Решение уравнений (134)—(136) совместно с (119)—(122) и (124)—(126) дает оптимальные значения δ_n, γ_n в (117). После этого точность экстраполяции может быть оценена как средним квадратом ошибки $M|\hat{Z}_{n+1} - Z_{n+\tau+1}|^2$, так и доверительными областями для $Z_{n+\tau+1}$, которые могут быть найдены по известным совместному распределению величин Z_n, U_n, $Z_{n+\tau}$, $Z'_{n+\tau+1}$ и распределению величины W_n (напомним, что $\hat{Z}_{n+1} = AU_{n+1} = A[\delta_n \zeta_n(\omega_n(Z_n, W_n), U_n) + \gamma_n]$ в силу (128)).

Заметим, что для нахождения совместного распределения величин Z_n, U_n, $Z_{n+\tau}$, $Z'_{n+\tau+1}$ уравнения (134)—(136) должны быть решены для $t = t^{(n)}$, $s \in [t^{(n)}, t^{(n+\tau+1)})$. Эти уравнения содержат δ_n, γ_n, ..., $\delta_{n+\tau}$, $\gamma_{n+\tau}$, которые не могут быть известными или найденными при решении этих уравнений. Таким образом, уравнения (134)—(136) могут быть решены только с помощью итеративного приближенного метода. Например, взяв в первом приближении оптимальные δ_h, γ_h $(\forall h)$ из задачи фильтрации, можно решить уравнения (134)—(136) с этими δ_h, γ_h $(h = n, \ldots, n+\tau)$. В результате найдем в первом приближении совместное распределение величин Z_n, U_n, $Z_{n+\tau}$, $Z'_{n+\tau+1}$. Тогда уравнения (119)—(124) определят δ_h, γ_h при всех h во втором приближении. После этого уравнения (124)—(126) и (134)—(136) определят одномерное распределение процесса $[Z(t)^\tau\ U(t)^\tau\ Z''(t)^\tau]^\tau$ и совместное распределение величин Z_n, U_n, $Z_{n+\tau}$, $Z'_{n+\tau+1}$ во втором приближении, и так далее. Этот процесс считается законченным, когда два последующих приближения дают практически одни и те же результаты.

Любой из приближенных методов гл. 6 в сочетании с итеративным методом может служить для решения уравнений (134)—(136) совместно с уравнениями (119), (120), (122), (133), (124)—(126).

Пример 15. В задаче примера 13 оптимальные δ_n, γ_n для условно оптимального экстраполятора определяются теми же уравнениями, что и в примере 13 с $m_{pqr}^{(n)} = MZ_{n+\tau+1}^p Z_n^q \hat{Z}_n^r$. Уравнения (133)—(135) в этом случае имеют вид

$$\partial g_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3; t, s)/\partial s = \\ = M\left\{-i\mu_1 Z_s^3 - \frac{1}{2}\nu\mu_1^2 Z_s^2\right\} \exp\{i\lambda_1 Z_t + i\lambda_2 \hat{Z}_t + i\lambda_3 Z_t''' + \\ + i\mu_1 Z_s + i\mu_2 \hat{Z}_s + i\mu_3 Z_s'''\},$$

$$g_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3; t, t^{(h+1)}) = \\ = M \exp\{i\lambda_1 Z_t + i\lambda_2 \hat{Z}_t + i\lambda_3 Z_t''' + i(\mu_1+\mu_3) Z_{h+1} + \\ + i\mu_2 [\delta_{h1}(Z_h + V_h) + \delta_{h2}\hat{Z}_h + \delta_{h3}\hat{Z}_h^3 + \gamma_n]\} \quad (\forall h,\ t^{(h+1)} > t),$$

$$g_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3; t, t) = g_1(\lambda_1+\mu_1, \lambda_2+\mu_2, \lambda_3+\mu_3; t).$$

Решив эти уравнения вместе с уравнениями примера 13 для δ_n, γ_n, $g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; t)$ с помощью итераций, как было сказано выше, находим оптимальные значения δ_n, γ_n для условно оптимального экстраполятора.

9.5.6. Экстраполяция в случае зависимых ошибок измерений. Теперь решим задачу экстраполяции в случае, когда последовательность ошибок измерений $\{W_n\}$ выражается через последовательность независимых случайных величин $\{V_n\}$ разностным уравнением (127).

► В этом случае для вычисления математических ожиданий в (133) необходимо в общем случае знать совместное распределение случайных величин Z_n, U_n, W_n, $Z_{n+\tau}$, $Z'_{n+\tau+1}$ и распределение величины $V_{n+\tau}$. Для нахождения этого распределения запишем уравнения (5.41а), (5.41б) и (5.42) для непрерывно-дискретной системы, описываемой уравнениями (115), (128) и (127), которые в этом случае имеют вид

$$\partial g_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4; t, s)/\partial s = \\ = M\{i\mu_1'^{\mathrm{T}}\varphi(Z_s, s) + \chi(\psi(Z_s, s)^{\mathrm{T}}\mu_1'; s)\} \exp\{i\lambda_1^{\mathrm{T}} Z_t + i\lambda_2^{\mathrm{T}} U_t + i\lambda_3^{\mathrm{T}} W_t + \\ + i\lambda_4^{\mathrm{T}} Z_t''' + i\mu_1^{\mathrm{T}} Z_s + i\mu_2^{\mathrm{T}} U_s + i\mu_3^{\mathrm{T}} W_s + i\mu_4^{\mathrm{T}} Z_s'''\}, \quad (137)$$

$$g_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4; t, t^{(h+1)}) = \\ = M \exp\{i\lambda_1^{\mathrm{T}} Z_t + i\lambda_2^{\mathrm{T}} U_t + i\lambda_3^{\mathrm{T}} W_t + i\lambda_4^{\mathrm{T}} Z_t''' + i(\mu_1'^{\mathrm{T}} + \mu_4^{\mathrm{T}}) Z'_{h+1} + \\ + i\mu_1''^{\mathrm{T}}\varphi_h'(Z_h, V_h) + i\mu_2^{\mathrm{T}}[\delta_h \zeta_h(\omega_h(Z_h, W_h), U_h) + \gamma_h] + i\mu_3^{\mathrm{T}}\omega_h'(W_h, V_h)\}, \quad (138)$$

$$g_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4; t, t) = \\ = g_1(\lambda_1+\mu_1, \lambda_2+\mu_2, \lambda_3+\mu_3, \lambda_4+\mu_4; t). \quad (139)$$

Совместная характеристическая функция случайных величин Z_n, U_n, W_n, $Z_{n+\tau}$, $Z'_{n+\tau+1}$ представляет собой значение $g_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 0, \mu_1, 0, 0, \mu_4; t^{(n)}, t^{(n+1)}-0)$ характеристической функции

$$g_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4; t, s) = \\ = M \exp\{i\lambda_1^{\mathrm{T}} Z_t + i\lambda_2^{\mathrm{T}} U_t + i\lambda_3^{\mathrm{T}} W_t + i\lambda_4^{\mathrm{T}} Z_t''' + \\ + i\mu_1^{\mathrm{T}} Z_s + i\mu_2^{\mathrm{T}} U_s + i\mu_3^{\mathrm{T}} W_s + i\mu_4^{\mathrm{T}} Z_s'''\}$$

при $\lambda_4 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = 0$, $t = t^{(n)}$, $s \to t^{(n+\tau+1)}$. ◄

Решение уравнений (137)—(139) совместно с (119), (120), (122), (133), (129)—(131) любым из приближенных методов гл. 6 в сочетании с методом последовательных приближений дает оптимальные значения δ_n, γ_n для условно оптимального экстраполятора.

Пример 16. В задаче примера 14 значения δ_n, γ_n для условно оптимального экстраполятора определяются уравнениями примера 13 с $m_{pqr}^{(n)} =$

$= MZ^p_{n+\tau+1} Z^q_n \hat{Z}^r_n$. Для определения этих моментов, а также дисперсий D_n случайных величин W_n к уравнениям примера 14 должны быть добавлены уравнения (137)—(139). Эти уравнения в нашем случае имеют вид

$$\partial g_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4;\ t, s)/\partial s =$$
$$= M\left\{-i\mu_1 Z_s^3 - \frac{1}{2}\gamma\mu_1^2 Z_s\right\}\exp\{i\lambda_1 Z_t + i\lambda_2 \hat{Z}_t +$$
$$+ i\lambda_3 W_t + i\lambda_4 Z_t''' + i\mu_1 Z_s + i\mu_2 \hat{Z}_s + i\mu_3 W_s + i\mu_4 Z_s'''\},$$
$$g_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4;\ t, t^{(h+1)}) =$$
$$= M\exp\{i\lambda_1 Z_t + i\lambda_2 \hat{Z}_t + i\lambda_3 W_t + i\lambda_4 Z_t''' + i(\mu_1 + \mu_4) Z_{h+1} +$$
$$+ i\mu_2[\delta_{h1}(Z_h + V_h) + \delta_{h2}\hat{Z}_h + \delta_{h3}\hat{Z}_h^3 + \gamma_n] + i\mu_3(-q_h W_h + V_h)\}.$$

Решение этих уравнений совместно с уравнениями примера 14 любым из приближенных методов гл. 6 в сочетании с методом последовательных приближений дает оптимальные значения δ_n, γ_n.

ЗАДАЧИ

9.1. Показать, что фильтр Липцера и Ширяева (формулы (7.43) и (7.44)) при произвольном процессе с независимыми приращениями $W(t)$ и произвольной функции $\psi_1(y, z, t)$ является оптимальным в классе допустимых фильтров, содержащих этот фильтр.

9.2. Для задач 8.1—8.4 найти условно оптимальные фильтры различных порядков. Для приближенного решения уравнения (33) применить метод нормальной аппроксимации, а также другие методы гл. 6.

9.3. Для задачи 8.4 найти условно оптимальные экстраполяторы в различных классах допустимых фильтров для:

а) прогнозирования состояния самолета;

б) прогнозирования состояния с одновременным оцениванием неизвестных параметров D и α спектральной плотности вертикальной компоненты скорости ветра.

9.4. Решить задачи 9.1—9.3 для случаев помехи в наблюдениях, представляющей собой стационарную случайную функцию с одной из типовых ковариационных функций п. 4.1.5.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Полиномы Эрмита

Для приближенного представления распределений в теории вероятностей часто используются полиномы Эрмита.

Пусть K — симметричная положительно определенная действительная $n \times n$-матрица. Полиномы Эрмита n-мерного векторного аргумента x определяются как коэффициенты разложения производящих функций

$$\varphi(u) = \exp\left\{x^{\mathrm{T}} K^{-1} u - \frac{1}{2} u^{\mathrm{T}} K^{-1} u\right\}$$

и

$$\psi(u) = \exp\left\{x^{\mathrm{T}} u - \frac{1}{2} u^{\mathrm{T}} K u\right\}$$

по степеням переменных $u_1, \ldots, u_n$, образующих вектор $u = [u_1 \ldots u_n]^{\mathrm{T}}$:

$$\exp\left\{x^{\mathrm{T}} K^{-1} u - \frac{1}{2} u^{\mathrm{T}} K^{-1} u\right\} = \sum \frac{u_1^{m_1} \ldots u_n^{m_n}}{m_1! \ldots m_n!} H_m(x), \quad m = [m_1 \ldots m_n]^{\mathrm{T}}, \tag{1}$$

$$\exp\left\{x^{\mathrm{T}} u - \frac{1}{2} u^{\mathrm{T}} K u\right\} = \sum \frac{u_1^{m_1} \ldots u_n^{m_n}}{m_1! \ldots m_n!} G_m(x), \qquad m = [m_1 \ldots m_n]^{\mathrm{T}}, \tag{2}$$

где суммирование производится по всем неотрицательным целым значениям $m_1, \ldots, m_n$ [4] (п. 12.8).

Легко доказать, что $G_m(x)$ представляет собой полином степени m_1 относительно x_1, степени m_2 относительно $x_2, \ldots$, степени m_n относительно x_n, в то время как $H_m(x)$ представляет собой полином степени m_1 относительно $c_{11}x_1 + \ldots + c_{1n}x_n$, степени m_2 относительно $c_{21}x_1 + \ldots + c_{2n}x_n, \ldots$, степени m_n относительно $c_{n1}x_1 + \ldots + c_{nn}x_n$, где $c_{pq} = c_{qp}$ — элементы матрицы $C = K^{-1}$. Общая степень полиномов $G_m(x)$ и $H_m(x)$ равна сумме всех координат векторного индекса $m = [m_1 \ldots m_n]^{\mathrm{T}}$, $|m| = m_1 + \ldots + m_n$.

Имея в виду, что

$$\begin{aligned} x^{\mathrm{T}} K^{-1} u - \frac{1}{2} u^{\mathrm{T}} K^{-1} u &= \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} K^{-1} x - \frac{1}{2} (x^{\mathrm{T}} - u^{\mathrm{T}}) K^{-1} (x - u), \\ x^{\mathrm{T}} u - \frac{1}{2} u^{\mathrm{T}} K u &= \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} K^{-1} x - \frac{1}{2} (x^{\mathrm{T}} K^{-1} - u^{\mathrm{T}}) K (K^{-1} x - u), \end{aligned} \tag{3}$$

заключаем, что $e^{-x^{\mathrm{T}} K^{-1} x/2} H_m(x)$ представляют собой коэффициенты разложения функции $e^{-v^{\mathrm{T}} K^{-1} v/2}$, $v = -x + u$, в ряд Тейлора в окрестности точки $v = -x$, а $e^{-x^{\mathrm{T}} K^{-1} x/2} G_m(x)$ — коэффициенты разложения функции $e^{-v^{\mathrm{T}} K v/2}$,

$v=-K^{-1}x+u$, в ряд Тейлора в окрестности точки $v=-K^{-1}x$. Следовательно,

$$e^{-x^{\mathrm{T}}K^{-1}x/2}\,H_m(x)=\left[\frac{\partial^{|m|}}{\partial v_1^{m_1}\ldots\partial v_n^{m_n}}\,e^{-v^{\mathrm{T}}K^{-1}v/2}\right]_{v=-x},$$

$$e^{-x^{\mathrm{T}}K^{-1}x/2}\,G_m(x)=\left[\frac{\partial^{|m|}}{\partial v_1^{m_1}\ldots\partial v_n^{m_n}}\,e^{-v^{\mathrm{T}}Kv/2}\right]_{v=-K^{-1}x}.$$

Отсюда следует, что

$$H_m(x)=(-1)^{|m|}\,e^{x^{\mathrm{T}}K^{-1}x/2}\,\frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}}\,e^{-x^{\mathrm{T}}K^{-1}x/2},\tag{4}$$

$$G_m(x)=(-1)^{|m|}\,e^{x^{\mathrm{T}}K^{-1}x/2}\left[\frac{\partial^{|m|}}{\partial y_1^{m_1}\ldots\partial y_n^{m_n}}\,e^{-y^{\mathrm{T}}Ky/2}\right]_{y=K^{-1}x}.\tag{5}$$

В частном случае при $n=1$, $K=1/2$ из (4) и (5) получается определение полиномов Эрмита скалярной переменной, используемых обычно в математическом анализе [1]:

$$H_m(x)=(-1)^m\,e^{x^2}\,\frac{d^m}{dx^m}\,e^{-x^2},\qquad G_m(x)=2^{-m}\,H_m(x).$$

В другом частном случае при $n=1$, $K=1$ из (4) и (5) получается определение полиномов Эрмита скалярной переменной, используемых в теории вероятностей (*ТВ*, п. 8.2.3):

$$H_m(x)=G_m(x)=(-1)^m\,e^{x^2/2}\,\frac{d^m}{dx^m}\,e^{-x^2/2}.$$

Эти полиномы иногда обозначаются $He_m(x)$, в отличие от других полиномов Эрмита [1].

Докажем, что полиномы $H_m(x)$ и $G_m(x)$ обладают свойством биортогональности с весом

$$w(x)=[(2\pi)^n\,|K|]^{-1/2}\,e^{-x^{\mathrm{T}}K^{-1}x/2}.$$

Для этого выведем формулу

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\,|K|}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^{\mathrm{T}}K^{-1}x/2}\,H_m(x)\,G_l(x)\,dx=m_1!\,\ldots\,m_n!\,\delta_{ml},\tag{6}$$

где $\delta_{ml}=1$ при $l=m$ и $\delta_{ml}=0$, если хотя бы одна из координат векторного индекса l не совпадает с соответствующей координатой индекса m. Вес $w(x)$ представляет собой n-мерную нормальную плотность (*ТВ*, п. 4.4.1).

▶ Для доказательства формулы (6) перемножим почленно равенства

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\,(x^{\mathrm{T}}-u^{\mathrm{T}})\,K^{-1}(x-u)\right\}=\sum\frac{u_1^{m_1}\ldots u_n^{m_n}}{m_1!\,\ldots\,m_n!}\,e^{-x^{\mathrm{T}}K^{-1}x}\,H_m(x)\tag{7}$$

и

$$\exp\left\{x^{\mathrm{T}}u-\frac{1}{2}\,u^{\mathrm{T}}Ku\right\}=\sum\frac{u_1^{l_1}\ldots u_n^{l_n}}{l_1!\,\ldots\,l_n!}\,G_l(x),$$

вытекающие из (1)—(3). В результате получим

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\,u^{\mathrm{T}}Ku+x^{\mathrm{T}}u-\frac{1}{2}\,(x^{\mathrm{T}}-u^{\mathrm{T}})\,K^{-1}(x-u)\right\}=$$

$$=\sum\frac{u_1^{m_1+l_1}\ldots u_n^{m_n+l_n}}{m_1!\,l_1!\,\ldots\,m_n!\,l_n!}\,e^{-x^{\mathrm{T}}K^{-1}x/2}\,H_m(x)\,G_l(x).$$

Интегрируя это равенство по x, получаем

$$e^{-u^{\mathrm{T}}Ku/2+|u|^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{u^{\mathrm{T}}(x-u)-(x^{\mathrm{T}}-u^{\mathrm{T}})K^{-1}(x-u)/2}\,dx=$$

$$=\sum\frac{u_1^{m_1+l_1}\ldots u_n^{m_n+l_n}}{m_1!\,l_1!\ldots m_n!\,l_n!}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{\mathrm{T}}K^{-1}x/2}H_m(x)\,G_l(x)\,dx,$$

где $|u|^2=u^{\mathrm{T}}u=u_1^2+\ldots+u_n^2$. Отсюда, принимая во внимание, что (TB, приложение 2)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{u^{\mathrm{T}}v-v^{\mathrm{T}}K^{-1}v/2}\,dv=\sqrt{(2\pi)^n\,|K|}\,e^{-u^{\mathrm{T}}Ku/2},$$

выводим равенство

$$\sqrt{(2\pi)^n\,|K|}\,e^{u_1^2+\ldots+u_n^2}=$$

$$=\sum\frac{u_1^{m_1+l_1}\ldots u_n^{m_n+l_n}}{m_1!\,l_1!\ldots m_n!\,l_n!}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{\mathrm{T}}K^{-1}x/2}H_m(x)\,G_l(x)\,dx.$$

Разложив показательные функции $e^{u_1^2},\ \ldots,\ e^{u_n^2}$ по степеням $u_1^2,\ \ldots,\ u_n^2$, приходим к тождеству

$$\sqrt{(2\pi)^n\,|K|}\sum\frac{u_1^{2m_1}\ldots u_n^{2m_n}}{m_1!\ldots m_n!}=$$

$$=\sum\frac{u_1^{m_1+l_1}\ldots u_n^{m_n+l_n}}{m_1!\,l_1!\ldots m_n!\,l_n!}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{\mathrm{T}}K^{-1}x/2}H_m(x)\,G_l(x)\,dx.$$

Сравнив коэффициенты при одинаковых степенях переменных $u_1,\ \ldots,\ u_n$ в левой и правой частях полученного равенства, убеждаемся в том, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{\mathrm{T}}K^{-1}x/2}H_m(x)\,G_l(x)\,dx=0\qquad\text{при}\quad l\neq m$$

и

$$\frac{1}{m_1!\ldots m_n!}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{\mathrm{T}}K^{-1}x/2}H_m(x)\,G_m(x)\,dx=\sqrt{(2\pi)^n\,|K|}.\ ◀$$

Выведем еще формулы для производных полиномов $G_m(x)$ по компонентам вектора x и по элементам матрицы K.

▶ Дифференцируя формулу (2) по x_p, получаем

$$\sum\frac{u_1^{m_1}\ldots u_n^{m_n}}{m_1!\ldots m_n!}\frac{\partial}{\partial x_p}G_{m_1,\ldots,m_n}(x)=u_p\exp\left\{x^{\mathrm{T}}u-\frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}Ku\right\}=$$

$$=\sum\frac{u_1^{m_1}\ldots u_p^{m_p+1}\ldots u_n^{m_n}}{m_1!\ldots m_n!}G_{m_1,\ldots,m_n}(x)=$$

$$=\sum\frac{u_1^{m_1}\ldots u_n^{m_n}}{m_1!\ldots m_n!}m_pG_{m_1,\ldots,m_p-1,\ldots,m_n}(x).\qquad(8)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x_p} G_{m_1, \ldots, m_n}(x) = m_p G_{m_1, \ldots, m_p - 1, \ldots, m_n}(x). \tag{9}$$

Таким образом, дифференцирование полинома $G_{m_1, \ldots, m_n}(x)$ по x_p сводится к уменьшению на единицу индекса m_p и умножению результата на m_p. Применив это правило для повторного дифференцирования формулы (9), получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x_p^2} G_{m_1, \ldots, m_n}(x) = m_p(m_p - 1) G_{m_1, \ldots, m_p - 2, \ldots, m_n}(x), \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_q} G_{m_1, \ldots, m_n}(x) = m_p m_q G_{m_1, \ldots, m_p - 1, \ldots, m_q - 1, \ldots, m_n}(x) \text{ при } p < q. \tag{11}$$

Аналогично, дифференцируя формулу (2) по k_{pp} и по k_{pq}, получаем

$$\sum \frac{u_1^{m_1} \ldots u_n^{m_n}}{m_1! \ldots m_n!} \frac{\partial}{\partial k_{pp}} G_{m_1, \ldots, m_n}(x) = -\frac{1}{2} u_p^2 \exp\left\{x^{\mathrm{T}} u - \frac{1}{2} u^{\mathrm{T}} K u\right\} =$$
$$= -\frac{1}{2} \sum \frac{u_1^{m_1} \ldots u_n^{m_n}}{m_1! \ldots m_n!} m_p(m_p - 1) G_{m_1, \ldots, m_p - 2, \ldots, m_n}(x),$$

$$\sum \frac{u_1^{m_1} \ldots u_n^{m_n}}{m_1! \ldots m_n!} \frac{\partial}{\partial k_{pq}} G_{m_1, \ldots, m_n}(x) = -u_p u_q \exp\left\{x^{\mathrm{T}} u - \frac{1}{2} u^{\mathrm{T}} K u\right\} =$$
$$= -\sum \frac{u_1^{m_1} \ldots u_n^{m_n}}{m_1! \ldots m_n!} m_p m_q G_{m_1, \ldots, m_p - 1, \ldots, m_q - 1, \ldots, m_n}(x).$$

Отсюда следуют формулы

$$\frac{\partial}{\partial k_{pp}} G_{m_1, \ldots, m_n}(x) = -\frac{1}{2} m_p(m_p - 1) G_{m_1, \ldots, m_p - 2, \ldots, m_n}(x) =$$
$$= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} G_{m_1, \ldots, m_n}(x), \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial k_{pq}} G_{m_1, \ldots, m_n}(x) = -m_p m_q G_{m_1, \ldots, m_p - 1, \ldots, m_q - 1, \ldots, m_n}(x) =$$
$$= -\frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_q} G_{m_1, \ldots, m_n}(x). \blacktriangleleft \tag{13}$$

Аналогично выводятся формулы для производных полиномов $H_m(x)$.

Рассмотрим теперь последовательность неособенных симметричных положительно определенных матриц $\{K_n\}$,

$$K_n = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1n} \\ k_{12} & k_{22} & \ldots & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{1n} & k_{2n} & \ldots & k_{nn} \end{bmatrix}.$$

Для каждого n определим соответствующую систему полиномов Эрмита $H_m(x^{(n)}) = H_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n)$, $G_m(x^{(n)}) = G_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n)$, где $x^{(n)} = [x_1 \ldots x_n]^{\mathrm{T}}$, $m = [m_1 \ldots m_n]^{\mathrm{T}}$. Докажем несколько теорем, определяющих соотношения между полиномами Эрмита, соответствующими разным значениям n.

Теорема 1. *При любых* $m_1, \ldots, m_{n-1}, m_n$

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |K_n|}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{\mathrm{T}} K_n^{-1} x/2} H_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)\, dx_n =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n-1} |K_{n-1}|}} e^{-x'^{\mathrm{T}} K_{n-1}^{-1} x'/2} H_{m_1, \ldots, m_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-1})\, \delta_{0, m_n}, \tag{14}$$

где $\delta_{00} = 1$, $\delta_{0k} = 0$ *при* $k \neq 0$, $x' = [x_1 \ldots, x_{n-1}]^{\mathrm{T}}$.

Теорема 2. *При любых* $m_1, \ldots, m_{n-1}$

$$G_{m_1, \ldots, m_{n-1}, 0}(x_1, \ldots, x_n) = G_{m_1, \ldots, m_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-1}). \tag{15}$$

▶ Для доказательства теоремы 1 проинтегрируем равенство (7) при $K = K_n$, умноженное на $[(2\pi)^n |K_n|]^{-1/2}$, по x_n. В результате на основании свойств многомерных нормальных распределений (*ТВ*, § 4.4) будем иметь

$$[(2\pi)^{n-1} |K_{n-1}|]^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x'^{\mathrm{T}} - u'^{\mathrm{T}}) K_{n-1}^{-1} (x' - u')\right\} =$$

$$= \sum \frac{u_1^{m_1} \ldots u_n^{m_n}}{m_1! \ldots m_n!} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |K_n|}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^{\mathrm{T}} K_n^{-1} x/2} H_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n,$$

где $u' = [u_1 \ldots u_{n-1}]^{\mathrm{T}}$. С другой стороны, согласно той же формуле (7)

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(x'^{\mathrm{T}} - u'^{\mathrm{T}}) K_{n-1}^{-1} (x' - u')\right\} =$$

$$= \sum \frac{u_1^{m_1} \ldots u_{n-1}^{m_{n-1}}}{m_1! \ldots m_{n-1}!} e^{-x'^{\mathrm{T}} K_{n-1}^{-1} x'/2} H_{m_1, \ldots, m_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Умножив это равенство на $[(2\pi)^{n-1} |K_{n-1}|]^{-1/2}$ и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях $u_1, \ldots, u_n$ в правых частях полученного равенства и предыдущего равенства, убеждаемся в справедливости формулы (14). ◀

▶ Для доказательства теоремы 2 положим в (2) при $K = K_n$ $u_n = 0$. Тогда получим

$$\exp\left\{x'^{\mathrm{T}} u' - \frac{1}{2} u'^{\mathrm{T}} K_{n-1} u'\right\} = \sum \frac{u_1^{m_1} \ldots u_{n-1}^{m_{n-1}}}{m_1! \ldots m_{n-1}!} G_{m_1, \ldots, m_{n-1}, 0}(x_1, \ldots, x_n).$$

С другой стороны, та же формула (2) даст

$$\exp\left\{x'^{\mathrm{T}} u' - \frac{1}{2} u'^{\mathrm{T}} K_{n-1} u'\right\} = \sum \frac{u_1^{m_1} \ldots u_{n-1}^{m_{n-1}}}{m_1! \ldots m_{n-1}!} G_{m_1, \ldots, m_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Из сравнения полученных двух формул вытекает (15). ◀

Следующие две теоремы дают соотношения между полиномами Эрмита, соответствующими разным n в пределе, когда $k_{pn} = k_{p, n-1}$ $(p = 1, \ldots, n-1)$, $k_{nn} = k_{n-1, n-1}$, т. е. в случае вырожденного нормального распределения $N(0, K_n)$. В этом случае координаты X_{n-1} и X_n случайного вектора $X = [X_1 \ldots X_{n-1} X_n]$ с вероятностью 1 совпадают, $X_n = X_{n-1}$. При этом плотность

$$w_n(x) = [(2\pi)^n |K_n|]^{-1/2} \exp\{-x^{\mathrm{T}} K_n^{-1} x/2\}$$

заменяется соответствующей вырожденной нормальной плотностью (*ТВ*, п. 4.4.6)

$$w'_n(x) = [(2\pi)^{n-1} |K_{n-1}|]^{-1/2} \exp\{-x'^{\mathrm{T}} K_{n-1}^{-1} x'/2\}\, \delta(x_n - \quad {}_{n-1}).$$

Теорема 3. *При* $k_{pn}=k_{p,\,n-1}$ $(p=1, \ldots, n-1)$, $k_{nn}=k_{n-1,\,n-1}$

$$\sum_{k=0}^{m_{n-1}} C_{m_{n-1}}^k H_{m_1, \ldots, m_{n-1}-k,\, k}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n-1}) = \\ = H_{m_1, \ldots, m_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-1}). \quad (16)$$

Теорема 4. *При* $k_{pn}=k_{p,\,n-1}$ $(p=1, \ldots, n-1)$, $k_{nn}=k_{n-1,\,n-1}$

$$G_{m_1, \ldots, m_{n-1}, m_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n-1}) = G_{m_1, \ldots, m_{n-1}+m_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}). \quad (17)$$

▶ Для доказательства теоремы 3 заменим в равенстве (7) при $K=K_n$, $u_n=u_{n-1}$, умноженном на $[(2\pi)^n\,|\,K_n\,|\,]^{-1/2}$, n-мерные нормальные плотности $w_n(x)$ и $w_n(x-u)$ соответствующими вырожденными нормальными плотностями $w_n'(x)$ и $w_n'(x-u)$. В результате после сокращения на $[(2\pi)^{n-1}\,|\,K_{n-1}\,|\,]^{-1/2}$ получим

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(x'^{\mathrm{T}}-u'^{\mathrm{T}})K_{n-1}^{-1}(x'-u')\right\}\delta(x_n-x_{n-1}) = \\ = \sum \frac{u_1^{m_1} \ldots u_{n-1}^{m_{n-1}+m_n}}{m_1! \ldots m_{n-1}!\, m_n!} e^{-x'^{\mathrm{T}} K_{n-1}^{-1} x'/2} H_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n)\,\delta(x_n-x_{n-1}).$$

Так как правая часть здесь равна нулю при $x_n \neq x_{n-1}$, то x_n в ней можно заменить на x_{n-1}, не нарушив равенства. Тогда получим

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(x'^{\mathrm{T}}-u'^{\mathrm{T}})K_{n-1}^{-1}(x'-u')\right\}\delta(x_n-x_{n-1}) = \\ = \sum \frac{u_1^{m_1} \ldots u_{n-1}^{m_{n-1}+m_n}}{m_1! \ldots m_{n-1}!\, m_n!} e^{-x'^{\mathrm{T}} K_{n-1}^{-1} x'/2} \times \\ \times H_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n-1})\,\delta(x_n-x_{n-1}).$$

Из этого равенства двух обобщенных функций вытекает равенство коэффициентов при δ-функции:

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(x'^{\mathrm{T}}-u'^{\mathrm{T}})K_{n-1}^{-1}(x'-u')\right\} = \\ = \sum \frac{u_1^{m_1} \ldots u_{n-1}^{m_{n-1}+m_n}}{m_1! \ldots m_{n-1}!\, m_n!} e^{-x'^{\mathrm{T}} K_{n-1}^{-1} x'/2} H_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n-1}).$$

Собрав вместе слагаемые, соответствующие одинаковым значениям $m_{n-1}+m_n=l$, получим

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(x'^{\mathrm{T}}-u'^{\mathrm{T}})K_{n-1}^{-1}(x'-u')\right\} = \\ = \sum \frac{u_1^{m_1} \ldots u_{n-1}^{l}}{m_1! \ldots m_{n-2}!\, l!} e^{-x'^{\mathrm{T}} K_{n-1}^{-1} x'/2} \times \\ \times \sum_{k=0}^{l} \frac{l!}{k!\,(l-k)!} H_{m_1, \ldots, l-k,\, k}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n-1}),$$

или, заменив l на m_{n-1},

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(x'^{\mathrm{T}}-u'^{\mathrm{T}})K_{n-1}^{-1}(x'-u')\right\} = \sum \frac{u_1^{m_1} \ldots u_{n-1}^{m_{n-1}}}{m_1! \ldots m_{n-1}!} e^{-x'^{\mathrm{T}} K_{n-1}^{-1} x'/2} \times \\ \times \sum_{k=0}^{m_{n-1}} C_{m_{n-1}}^k H_{m_1, \ldots, m_{n-1}-k,\, k}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n-1}).$$

С другой стороны, (7) при $K=K_{n-1}$ дает

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(x'^{\mathrm{T}}-u'^{\mathrm{T}})K_{n-1}^{-1}(x'-u')\right\}=$$

$$=\sum\frac{u_1^{m_1}\ldots u_{n-1}^{m_{n-1}}}{m_1!\ldots m_{n-1}!}e^{-x'^{\mathrm{T}}K_{n-1}^{-1}x'/2}H_{m_1,\ldots,m_{n-1}}(x_1,\ldots,x_{n-1}).$$

Из сравнения полученных двух выражений одной и той же функции следует (16). ◀

▶ Для доказательства теоремы 4 положим в (2) при $K=K_n$

$$x_n=x_{n-1},\quad k_{pn}=k_{p,\,n-1}\quad (p=1,\ \ldots,\ n-1),\quad k_{nn}=k_{n-1,\,n-1}.$$

Тогда, учитывая, что при этом

$$u^{\mathrm{T}}x-\frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}K_nu=\sum_{p=1}^{n-1}u_px_p+u_nx_{n-1}-\frac{1}{2}\sum_{p,\,q=1}^{n-2}k_{pq}u_pu_q-$$

$$-\sum_{p=1}^{n-2}k_{p,\,n-1}(u_{n-1}+u_n)u_p-\frac{1}{2}k_{n-1,\,n-1}(u_{n-1}+u_n)^2=$$

$$=\sum_{p=1}^{n-1}v_px_p-\frac{1}{2}\sum_{p,\,q=1}^{n-1}k_{pq}v_pv_q=v^{\mathrm{T}}x'-\frac{1}{2}v^{\mathrm{T}}K_{n-1}v,$$

где $v=[v_1\ldots v_{n-1}]^{\mathrm{T}}$, $v_1=u_1,\ \ldots,\ v_{n-2}=u_{n-2}$, $v_{n-1}=u_{n-1}+u_n$, получим

$$\exp\left\{u^{\mathrm{T}}x-\frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}K_nu\right\}=\exp\left\{v^{\mathrm{T}}x'-\frac{1}{2}v^{\mathrm{T}}K_{n-1}v\right\}=$$

$$=\sum\frac{u_1^{m_1}\ldots u_n^{m_n}}{m_1!\ldots m_n!}G_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_{n-1},\ x_{n-1}).$$

С другой стороны, (2) дает

$$\exp\left\{v^{\mathrm{T}}x'-\frac{1}{2}v^{\mathrm{T}}K_{n-1}v\right\}=\sum\frac{v_1^{m_1}\ldots v_{n-1}^{m_{n-1}}}{m_1!\ldots m_{n-1}!}G_{m_1,\ldots,m_{n-1}}(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1})=$$

$$=\sum\frac{u_1^{m_1}\ldots(u_{n-1}+u_n)^{m_{n-1}}}{m_1!\ldots m_{n-1}!}G_{m_1,\ldots,m_{n-1}}(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1})=$$

$$=\sum\frac{u_1^{m_1}\ldots u_{n-1}^{m_{n-1}-k}u_n^k}{m_1!\ldots(m_{n-1}-k)!\,k!}G_{m_1,\ldots,m_{n-1}}(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}),$$

или

$$\exp\left\{v^{\mathrm{T}}x'-\frac{1}{2}v^{\mathrm{T}}K_{n-1}v\right\}=\sum\frac{u_1^{m_1}\ldots u_n^{m_n}}{m_1!\ldots m_n!}G_{m_1,\ldots,m_{n-1}+m_n}(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}).$$

Из сравнения двух полученных формул для $\exp\{v^{\mathrm{T}}x'-v^{\mathrm{T}}K_{n-1}v/2\}$ вытекает (17). ◀

Для изучения других свойств полиномов Эрмита читатель может обратиться к [4].

2. Полиномы, ортогональные по отношению к γ-распределению

Для приближенного представления распределений возможно использование ортогональной системы полиномов $S_\nu^\alpha(u)$:

$$S_\nu^\alpha(u)=(-k)^{-\nu}u^{-\alpha}e^{ku}\frac{d^\nu}{du^\nu}(u^{\alpha+\nu}e^{-ku}),\quad \alpha>-1. \tag{1}$$

Полиномы $S_\nu^\alpha(u)$ связаны с полиномами Лагерра $L_\nu^\alpha(x)$ [4], (п.10.12), соотношением

$$S_\nu^\alpha(u)=(-k)^{-\nu}\nu!\,L_\nu^\alpha(ku).$$

Выполнив дифференцирование в (1), получим

$$S_\nu^\alpha(u)=(-k)^{-\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu} C_\nu^\mu\frac{\Gamma(\alpha+\nu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}(-ku)^\mu. \tag{2}$$

Производящей функцией этих полиномов служит

$$\varphi(s)=\frac{e^{us/(1+s/k)}}{(1+s/k)^{\alpha+1}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{s^\nu}{\nu!}S_\nu^\alpha(u).$$

Для доказательства ортогональности полиномов $S_\nu^\alpha(u)$ и $S_\mu^\alpha(u)$ достаточно доказать ортогональность $S_\nu^\alpha(u)$ степеням u^λ, $\lambda<\nu$. Имеем

$$\int^\infty \frac{k^{\alpha+1}u^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}e^{-ku}S_\nu^\alpha(u)(ku)^\lambda\,du=$$

$$=(-k)^{-\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}C_\nu^\mu\frac{\Gamma(\alpha+\nu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}(-1)^\mu\frac{\Gamma(\alpha+\lambda+\mu+1)}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Разобьем эту сумму на две, учтя при этом, что $C_\nu^\mu=C_{\nu-1}^\mu+C_{\nu-1}^{\mu-1}$, $0<\mu<\nu$, $C_\nu^0=C_{\nu-1}^0=C_\nu^\nu=C_{\nu-1}^{\nu-1}=1$. Тогда получим

$$\int_0^\infty \frac{k^{\alpha+1}u^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}e^{-ku}S_\nu^\alpha(u)(ku)^\lambda\,du=$$

$$=(-k)^{-\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(-1)^\mu C_{\nu-1}^\mu\frac{\Gamma(\alpha+\nu+1)\,\Gamma(\alpha+\lambda+\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)\,\Gamma(\alpha+1)}+$$

$$+(-k)^{-\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(-1)^{\mu+1}C_{\nu-1}^\mu\frac{\Gamma(\alpha+\nu+1)\,\Gamma(\alpha+\lambda+\mu+2)}{\Gamma(\alpha+\mu+2)\,\Gamma(\alpha+1)}.$$

Здесь во второй сумме за μ взято $\mu-1$, что повлекло замену нижнего предела суммирования нулем, а верхнего на $\nu-1$. Таким образом,

$$\int^\infty \frac{k^{\alpha+1}u^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}e^{-ku}S_\nu^\alpha(u)(ku)^\lambda\,du=$$

$$=(-k)^{-\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(-1)^\mu C_{\nu-1}^\mu\frac{\Gamma(\alpha+\nu+1)\,\Gamma(\alpha+\lambda+\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)\,\Gamma(\alpha+1)}\left(1-\frac{\alpha+\lambda+\mu+1}{\alpha+\mu+1}\right)=$$

$$=(-k)^{-\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(-1)^{\mu-1}\lambda C_{\nu-1}^\mu\frac{\Gamma(\alpha+\nu+1)\,\Gamma(\alpha+\lambda+\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+2)\,\Gamma(\alpha+1)}.$$

Полученная сумма аналогична первоначальной сумме, но имеет на одно слагаемое меньше. Учитывая, что $C_{\nu-1}^\mu=C_{\nu-2}^\mu+C_{\nu-2}^{\mu-1}$, опять разобьем сумму на две суммы и снова заменим во второй сумме $\mu-1$ на μ. В результате получим

$$\int_0^\infty \frac{k^{\alpha+1}u^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} e^{-ku} S_\nu^\alpha(u)(ku)^\lambda du =$$

$$= (-k)^{-\nu}\lambda(\lambda-1)\sum_{\mu=0}^{\nu-2}(-1)^{\mu-2}C_{\nu-2}^{\mu}\frac{\Gamma(\alpha+\nu+1)\Gamma(\alpha+\lambda+\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+3)\Gamma(\alpha+1)}.$$

Проделав это преобразование λ раз, будем иметь

$$\int_0^\infty \frac{k^{\alpha+1}u^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} e^{-ku} S_\nu^\alpha(u)(ku)^\lambda du =$$

$$= (-k)^{-\nu}\lambda!\sum_{\mu=0}^{\nu-\lambda}(-1)^{\mu-\lambda}C_{\nu-\lambda}^{\mu}\frac{\Gamma(\alpha+\nu+1)}{\Gamma(\alpha+1)} =$$

$$= (-k)^{-\nu}\lambda!\frac{\Gamma(\alpha+\nu+1)}{\Gamma(\alpha+1)}(-1)^\lambda\sum_{\mu=0}^{\nu-\lambda}C_{\nu-\lambda}^{\mu}(-1)^\mu = 0,$$

так как сумма представляет собой биномиальное разложение величины $(1-1)^{\nu-\lambda}$.

При $\lambda=\nu$ та же формула дает

$$\int_0^\infty \frac{k^{\alpha+1}u^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} e^{-ku} S_\nu^\alpha(u)(ku)^\nu du = \frac{k^{-\nu}\nu!\Gamma(\alpha+\nu+1)}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty \frac{k^{\alpha+1}u^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} e^{-ku}\left[S_\nu^\alpha(u)\right]^2 du = \int_0^\infty \frac{k^{\alpha+1}u^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} e^{-ku} S_\nu^\alpha(u)\,u^\nu du = \frac{\nu!\Gamma(\alpha+\nu+1)}{k^{2\nu}\Gamma(\alpha+1)}.$$

На основании известной теоремы функционального анализа [40] (гл. VIII, § 4) система функций $u^{\alpha/2}e^{-ku/2}S_\nu^\alpha(u)$ $(\nu=0, 1, 2, \ldots)$ полна в пространстве $L_2([0, \infty))$. Следовательно, любая функция $f(u)$, в частности любая плотность случайной величины, удовлетворяющая условию

$$\int_0^\infty \frac{f^2(u)}{u^{\alpha/2}e^{-ku/2}} du < \infty, \tag{3}$$

может быть представлена разложением

$$f(u) = u^\alpha e^{-ku}\sum_{\nu=0}^\infty c_\nu S_\nu^\alpha(u), \tag{4}$$

где

$$c_\nu = \frac{k^{2\nu}\Gamma(\alpha+1)}{\nu!\Gamma(\alpha+\nu+1)}\int_0^\infty f(u)S_\nu^\alpha(u)\,du.$$

Согласно замечанию в п. 2.3.1 конечным отрезком разложения (4) может быть представлена с любой степенью точности и любая плотность $f(u)$, не удовлетворяющая условию (3). В частном случае при $\alpha=p/2-1$, $k=1/2$

получается система полиномов, ортогональная по отношению к χ^2-распределению с p степенями свободы:

$$S_{p\nu}(u)=S_{\nu}^{p/2-1}(u)=\sum_{\mu=0}^{\nu}(-1)^{\nu+\mu}C_{\nu}^{\mu}\frac{(p+2\nu-2)!!}{(p+2\mu-2)!!}u^{\mu}. \qquad (5)$$

3. Уравнение Риккати

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}=ax+xa^{\mathrm{T}}-xbx+c, \qquad (1)$$

где x — симметричная $n\times n$-матрица, a, b, c — $n\times n$-матрицы, представляющие собой функции независимой переменной t. По аналогии со случаем скалярного уравнения Риккати уравнение (1) называется *матричным уравнением Риккати*.

Как и аналогичное скалярное уравнение, матричное уравнение Риккати приводится к системе линейных дифференциальных уравнений удвоенного порядка, и, следовательно, его решение в общем случае выражается через фундаментальную матрицу решений этой системы линейных уравнений.

Введем две новые переменные квадратные матрицы y и z, положив

$$y=xz. \qquad (2)$$

Дифференцируя эту формулу, будем иметь

$$\dot{y}=\dot{x}z+x\dot{z}.$$

Подставив сюда выражение $\dot{x}$ из (1), получим

$$\dot{y}=axz+cz+x(\dot{z}+a^{\mathrm{T}}z-bxz),$$

или

$$\dot{y}=ay+cz+x(\dot{z}-by+a^{\mathrm{T}}z).$$

Так как мы ввели две неизвестные функции y, z вместо одной x, то имеем право связать их каким-либо соотношением. Приравняв выражение в скобках нулю, получим систему однородных линейных дифференциальных уравнений для y, z:

$$\dot{y}=ay+cz, \quad \dot{z}=by-a^{\mathrm{T}}z. \qquad (3)$$

Решив уравнения (3), можно найти решение x уравнения (1) из (2).

Обозначим через $\Phi(t,\tau)$ фундаментальную матрицу решений системы уравнений (3), т. е. решение уравнения

$$\dot{u}=\begin{bmatrix} a & c \\ b & -a^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}u,$$

удовлетворяющее начальному условию $u=I_{2n}$ при $t=\tau$. Тогда общее решение уравнений (3) определится формулой

$$[y^{\mathrm{T}}\ z^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}=\Phi(t,t_0)\left[y_0^{\mathrm{T}}\ z_0^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}, \qquad (4)$$

где y_0 и z_0 — начальные значения y и z при $t=t_0$. Разбив $2n\times 2n$-матрицу $\Phi(t,\tau)$ на блоки размера $n\times n$,

$$\Phi(t,\tau)=\begin{bmatrix} \Phi_{11}(t,\tau) & \Phi_{12}(t,\tau) \\ \Phi_{21}(t,\tau) & \Phi_{22}(t,\tau) \end{bmatrix},$$

перепишем (4) в виде

$$\begin{aligned} y&=\Phi_{11}(t,t_0)y_0+\Phi_{12}(t,t_0)z_0,\\ z&=\Phi_{21}(t,t_0)y_0+\Phi_{22}(t,t_0)z_0. \end{aligned} \qquad (5)$$

Теперь можно найти решение x уравнения (1) из (2), выразив y_0 и z_0 через начальное значение x_0 матрицы x. Из (2) видно, что, приняв $z_0=I$, получим $y_0=x_0$. Подставив эти значения в (5), из (2) находим

$$x=[\Phi_{11}(t,\ t_0)\,x_0+\Phi_{12}(t,\ t_0)]\,[\Phi_{21}(t,\ t_0)\,x_0+\Phi_{22}(t,\ t_0)]^{-1}. \tag{6}$$

Очевидно, что из $\Phi(t_0,\ t_0)=I_{2n}$ следует

$$\Phi_{11}(t_0,\ t_0)=\Phi_{22}(t_0,\ t_0)=I_n,\quad \Phi_{12}(t_0,\ t_0)=\Phi_{21}(t_0,\ t_0)=0. \tag{7}$$

Формула (6) дает возможность находить решение матричного уравнения Риккати (1) в аналитическом виде в тех случаях, когда фундаментальная матрица решений системы уравнений (3) может быть выражена через известные функции, например, при постоянных матрицах a, b, c. В последнем случае $\Phi(t,\ \tau)=\Phi(t-\tau)$ и возможно существование стационарного режима, при котором матрица x постоянна. Чтобы найти это постоянное установившееся значение x^* матрицы x, достаточно перейти в (6) к пределу при $t\to\infty$ или при $t_0\to-\infty$. В результате найдем решение матричного квадратного уравнения

$$ax^*+x^*a^{\mathrm{T}}-x^*bx^*+c=0, \tag{8}$$

которое по аналогии с (1) иногда называется *алгебраическим уравнением Риккати*.

4. Условные моменты случайного вектора, образованного частью компонент нормально распределенного вектора

Пусть X — нормально распределенный случайный вектор, m — его математическое ожидание, K — его ковариационная матрица. Разобьем вектор X на два блока X_1 и X_2, $X=\left[X_1^{\mathrm{T}}\ X_2^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$, и в соответствующем блочном виде представим его математическое ожидание $m=\left[m_1^{\mathrm{T}}\ m_2^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$, ковариационную матрицу K и обратную матрицу $C=K^{-1}$,

$$K=\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{bmatrix},\quad C=K^{-1}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}.$$

Как известно, распределения и условные распределения векторов X_1 и X_2 в этом случае нормальны (*ТВ*, п. 4.4.4). Условная плотность вектора X_2 при данном значении x_1 вектора X_1 определяется формулой (*ТВ*, пп. 4.2.1 и 4.4.1)

$$f_2(x_2\mid x_1)=[(2\pi)^n\,|K|/|K_{11}|]^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[u_2^{\mathrm{T}}C_{22}u_2+u_2^{\mathrm{T}}C_{21}u_1+\right.\right.$$
$$\left.\left.+u_1^{\mathrm{T}}C_{12}u_2+u_1^{\mathrm{T}}\left(C_{11}-K_{11}^{-1}\right)u_1\right]\right\}, \tag{1}$$

где n — размерность вектора X_2, $|K|$ и $|K_{11}|$ — определители матриц K и K_{11} соответственно, $u=\left[u_1^{\mathrm{T}}\ u_2^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}=x-m$. Но из условия $CK=I$ вытекают соотношения

$$C_{11}K_{11}+C_{12}K_{21}=I,\quad C_{11}K_{12}+C_{12}K_{22}=0,$$
$$C_{21}K_{11}+C_{22}K_{21}=0,\quad C_{21}K_{12}+C_{22}K_{22}=I,$$

из которых следуют формулы

$$C_{11}=\left(K_{11}-K_{12}K_{22}^{-1}K_{21}\right)^{-1},\quad C_{12}=-C_{11}K_{12}K_{22}^{-1},$$
$$C_{22}=\left(K_{22}-K_{21}K_{11}^{-1}K_{12}\right)^{-1},\quad C_{21}=-C_{22}K_{21}K_{11}^{-1},$$
$$K_{11}=\left(C_{11}-C_{12}C_{22}^{-1}C_{21}\right)^{-1},\quad K_{12}=-K_{11}C_{12}C_{22}^{-1},$$
$$K_{22}=\left(C_{22}-C_{21}C_{11}^{-1}C_{12}\right)^{-1},\quad K_{21}=-K_{22}C_{21}C_{11}^{-1}.$$

Подставив вытекающие отсюда выражения K_{11}^{-1} и $C_{22}^{-1}C_{21}$ в (1) и учитывая, что $C_{12}=C_{21}^{\mathrm{T}}$, получим

$$f_2(x_2\mid x_1)=\left[(2\pi)^n\mid K\mid/\mid K_{11}\mid\right]^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[u_2^{\mathrm{T}}C_{22}u_2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+u_2^{\mathrm{T}}C_{22}(C_{22}^{-1}C_{21}u_1)+(C_{22}^{-1}C_{21}u_1)^{\mathrm{T}}C_{22}u_2+(C_{22}^{-1}C_{21}u_1)^{\mathrm{T}}C_{22}C_{22}^{-1}C_{21}u_1\right]\right\}=$$

$$=\left[(2\pi)^n\mid K\mid/\mid K_{11}\mid\right]^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[u_2^{\mathrm{T}}+(C_{22}^{-1}C_{21}u_1)^{\mathrm{T}}\right]C_{22}\left[u_2+C_{22}^{-1}C_{21}u_1\right]\right\}=$$

$$=\left[(2\pi)^n\mid K\mid/\mid K_{11}\mid\right]^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[u_2^{\mathrm{T}}-(K_{21}K_{11}^{-1}u_1)^{\mathrm{T}}\right]C_{22}\left[u_2-K_{21}K_{11}^{-1}u_1\right]\right\}.$$

Отсюда видно, что условное математическое ожидание $m_{2\mid 1}$ и условная ковариационная матрица $K_{2\mid 1}$ вектора X_2 при данном значении x_1 вектора X_1 определяются формулами

$$m_{2\mid 1}=m_2+K_{21}K_{11}^{-1}(x_1-m_1), \tag{2}$$

$$K_{2\mid 1}=C_{22}^{-1}=K_{22}-K_{21}K_{11}^{-1}K_{12}. \tag{3}$$

Попутно получается соотношение между определителями матриц K, K_{11} и $K_{2\mid 1}$:

$$\mid K_{2\mid 1}\mid=\mid K_{22}-K_{21}K_{11}^{-1}K_{12}\mid=\mid K\mid/\mid K_{11}\mid. \tag{4}$$

Условные моменты высших порядков вектора X_2 при $X_1=x_1$ выражаются через условное математическое ожидание $m_{2\mid 1}$ и условную ковариационную матрицу $K_{2\mid 1}$ обычными для нормального распределения формулами (*ТВ*, п. 4.5.3).

5. Статистическая линеаризация типовых нелинейных функций *)

А. Функции скалярного аргумента

$$\varphi(X)\approx\varphi_0(m,\ D)+k_1(m,\ D)X^0,$$
$$X^0=X-m,\quad m=MX,\quad D=M\mid X^0\mid^2,$$
$$k_1(m,\ D)=\partial\varphi_0(m,\ D)/\partial m,$$

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-t^2/2}\,dt,\qquad \Phi'(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2},$$

$$\zeta=m/\sqrt{D},\quad \zeta_a^+=(m+a)/\sqrt{D},\quad \zeta_a^-=(m-a)/\sqrt{D}.$$

Б. Функции векторного аргумента

$$\varphi(X)\approx\varphi_0(m,\ K)+k_1(m,\ K)X^0,$$
$$X^0=X-m,\ X=[X_1\ \dots\ X_n]^{\mathrm{T}},\quad m=MX=[m_1\ \dots\ m_n]^{\mathrm{T}},$$
$$K=MX^0X^{0\mathrm{T}},\quad k_1(m,\ K)=[(\partial/\partial m)\varphi_0(m,\ K)]^{\mathrm{T}},$$
$$\nu=[\nu_1\ \dots\ \nu_n]^{\mathrm{T}},\quad \mid\nu\mid=\nu_1+\dots+\nu_n,$$
$$e_p=[0\ \dots\ \underset{p}{1}\ \dots\ 0]^{\mathrm{T}},\quad k_p=[k_{p1}\ \dots\ k_{pn}]\quad (p=1,\ \dots,\ n)\ ^{**}).$$

---

*) Приведенные в табл. 1 и 2 формулы для φ_0 для типовых нелинейных функций дают возможность находить φ_0 для любых линейных комбинаций этих функций.

**) k_{pq} $(p,\ q=1,\ \dots,\ n)$ — элементы ковариационной матрицы K.

Таблица 1

$\varphi(X)$	$\varphi_0(m, D)$
$1(X)$	$0{,}5+\Phi(\zeta)$
$1(X-a)$	$0{,}5+\Phi(\zeta_a^-)$
$\operatorname{sgn} X$	$2\Phi(\zeta)$
X^2	$\alpha_2=m^2+D$
$X^2 \operatorname{sgn} X$	$2\left[(m^2+D)\,\Phi(\zeta)+m\sqrt{D}\,\Phi'(\zeta)\right]$
X^3	$\alpha_3=m(m^2+3D)$
$X^n \ (n=2, 3, \ldots)$	$\alpha_n=m\alpha_{n-1}+(n-1)D\alpha_{n-2},\ \alpha_0=1,\ \alpha_1=m$
e^{aX}	$\beta_0=e^{am+a^2D/2}$
Xe^{aX}	$\beta_1=(m+aD)\,e^{am+a^2D/2}$
$X^n e^{aX} \quad (n=2, 3, \ldots)$	$\beta_n=(m+aD)\,\beta_{n-1}+(n-1)D\beta_{n-2}$
$\sin aX$	$\gamma_0^s=e^{-a^2D/2}\sin am$
$\cos aX$	$\gamma_0^c=e^{-a^2D/2}\cos am$
$X\sin aX$	$\gamma_1^s=e^{-a^2D/2}(aD\cos am+m\sin am)$
$X\cos aX$	$\gamma_1^c=e^{-\alpha^2D/2}(m\cos am-aD\sin am)$
$X^n\sin aX \ (n=2, 3, \ldots)$	$\gamma_n^s=aD\gamma_{n-1}^c+m\gamma_{n-1}^s+(n-1)D\gamma_{n-2}^s$
$X^n\cos aX \ (n=2, 3, \ldots)$	$\gamma_n^c=m\gamma_{n-1}^c-aD\gamma_{n-1}^s+(n-1)D\gamma_{n-2}^c$
1 при $X>a$ 0 при $\lvert X\rvert\leqslant a$ -1 при $X<-a$	$\Phi(\zeta_a^+)-\Phi(\zeta_a^-)$
l при $X>a$ lX/a при $\lvert X\rvert\leqslant a$ $-l$ при $X<-a$	$(l/a)\{(m+a)\,\Phi(\zeta_a^+)-(m-a)\,\Phi(\zeta_a^-)+$ $+\sqrt{D}\,[\Phi'(\zeta_a^+)-\Phi'(\zeta_a^-)]\}$
$X1(X)$	$m[0{,}5+\Phi(\zeta)]+\sqrt{D}\,\Phi'(\zeta)$

Таблица **2**

$\varphi(X)$	$\varphi_0(m, K)$
X_1X_2	$m_1m_2+k_{12}$
$X_1X_2X_3$	$m_1m_2m_3+m_1k_{23}+m_2k_{13}+m_3k_{12}$
$X_1^{\nu_1}\ldots X_n^{\nu_n}$ $\nu_1, \ldots, \nu_n$ — целые неотрицательные, $\lvert\nu\rvert>1$	$\alpha_\nu=m_p\alpha_{\nu-e_p}+\sum\limits_{r=1}^{n}\nu_r k_{pr}\alpha_{\nu-e_p-e_r}-k_{pp}\alpha_{\nu-2e_p}, \quad \alpha_0=1, \quad \alpha_{e_p}=m_p$
$e^{a^{\mathrm{T}}X}$	$\beta_0=e^{a^{\mathrm{T}}m+a^{\mathrm{T}}Ka/2}$
$X_pe^{a^{\mathrm{T}}X}$	$\beta_{e_p}=(m_p+k_pa)\,e^{a^{\mathrm{T}}m+a^{\mathrm{T}}Ka/2}$
$X_1^{\nu_1}\ldots X_n^{\nu_n}e^{a^{\mathrm{T}}X}$ $\nu_1, \ldots, \nu_n$ — целые неотрицательные, $\lvert\nu\rvert>1$	$\beta_\nu=(m_p+k_pa)\,\beta_{\nu-e_p}+\sum\limits_{r=1}^{n}\nu_r k_{pr}\beta_{\nu-e_p-e_r}-k_{pp}\beta_{\nu-2e_p}$
$\sin a^{\mathrm{T}}X$	$\gamma_0^s=e^{-a^{\mathrm{T}}Ka/2}\sin a^{\mathrm{T}}m$
$\cos a^{\mathrm{T}}X$	$\gamma_0^c=e^{-a^{\mathrm{T}}Ka/2}\cos a^{\mathrm{T}}m$
$X_p\sin a^{\mathrm{T}}X$	$\gamma_{e_p}^s=e^{-a^{\mathrm{T}}Ka/2}\,(k_pa\cos a^{\mathrm{T}}m+m_p\sin a^{\mathrm{T}}m)$
$X_p\cos a^{\mathrm{T}}X$	$\gamma_{e_p}^c=e^{-a^{\mathrm{T}}Ka/2}\,(m_p\cos a^{\mathrm{T}}m-k_pa\sin a^{\mathrm{T}}m)$
$X_1^{\nu_1}\ldots X_n^{\nu_n}\sin a^{\mathrm{T}}X$ $\nu_1, \ldots, \nu_n$ — целые неотрицательные, $\lvert\nu\rvert>1$	$\gamma_\nu^s=k_pa\gamma_{\nu-e_p}^c+m_p\gamma_{\nu-e_p}^s+\sum\limits_{r=1}^{n}\nu_r k_{pr}\gamma_{\nu-e_p-e_r}^s-k_{pp}\gamma_{\nu-2e_p}^s$
$X_1^{\nu_1}\ldots X_n^{\nu_n}\cos a^{\mathrm{T}}X$ $\nu_1, \ldots, \nu_n$ — целые неотрицательные, $\lvert\nu\rvert>1$	$\gamma_\nu^c=m_p\gamma_{\nu-e_p}^c-k_pa\gamma_{\nu-e_p}^s+\sum\limits_{r=1}^{n}\nu_r k_{pr}\gamma_{\nu-e_p-e_r}^c-k_{pp}\gamma_{\nu-2e_p}^c$
$X^{\mathrm{T}}aX$	$\mathrm{tr}\,\{a\,(K+mm^{\mathrm{T}})\}$

Таблица 2 (*продолжение*)

$\varphi(X)$	$\varphi_0(m, K)$
$\mathrm{sgn}\,(X_1 - a\,\mathrm{sgn}\,X_2)$	$\left[1-2\Phi(\eta)-2k_{12}m_1\Phi'(\eta)/\sqrt{k_{11}(k_{11}k_{22}-k_{12}^2)}\right]\Phi(\eta_a^+)+\left[1+2\Phi(\eta)+2k_{12}m_1\Phi'(\eta)/\sqrt{k_{11}(k_{11}k_{22}-k_{12}^2)}\right]\Phi(\eta_a^-)+2k_{12}\Phi'(\eta)\left[\Phi'(\eta_a^-)-\Phi'(\eta_a^+)\right]/\sqrt{k_{11}k_{22}-k_{12}^2}$, $\eta=(k_{11}m_2-k_{12}m_1)/\sqrt{k_{11}(k_{11}k_{22}-k_{12}^2)}$, $\eta_a^+=(m_1+a)/\sqrt{k_{11}}$, $\eta_a^-=(m_1-a)/\sqrt{k_{11}}$. (Приближенная формула для малых $k_{12}a/\sqrt{k_{11}(k_{11}k_{22}-k_{12}^2)}$)

6. Стохастические дифференциалы Ито типовых нелинейных функций

А. Функции стандартного винеровского процесса

Таблица 1

$U=\varphi(W)$	dU
W^a	$aW^{a-1}\,dW+{}^1/_2a\,(a-1)\,W^{a-2}\,dt$
e^{aW}	$ae^{aW}\,dW+{}^1/_2a^2e^{aW}\,dt$
a^W	$a^W\ln a\,dW+{}^1/_2a^W\ln^2 a\,dt$
$\log_b aW$	$\frac{a}{W\ln b}\,dW-\frac{a^2}{2W^2\ln b}\,dt$
$\sin aW$	$a\cos aW\,dW-{}^1/_2a^2\sin aW\,dt$
$\cos aW$	$-a\sin aW\,dW-{}^1/_2a^2\cos aW\,dt$
$\mathrm{tg}\,aW$	$\frac{a}{\cos^2 aW}\,dW+\frac{a^2\sin aW}{\cos^3 aW}\,dt$
$\mathrm{ctg}\,aW$	$-\frac{a}{\sin^2 aW}\,dW+\frac{a^2\cos aW}{\sin^3 aW}\,dt$

Таблица 1 (*продолжение*)

$U=\varphi(W)$	dU
$\sec aW$	$\dfrac{a\sin aW}{\cos^2 aW}\,dW+\dfrac{a^2(1+\sin^2 aW)}{2\cos^3 aW}\,dt$
$\operatorname{cosec} aW$	$-\dfrac{a\cos aW}{\sin^2 aW}\,dW+\dfrac{a^2(1+\cos^2 aW)}{2\sin^3 aW}\,dt$
$\arcsin aW$	$\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2W^2}}\,dW+\dfrac{a^3W}{2\sqrt{(1-a^2W^2)^3}}\,dt$
$\arccos aW$	$\dfrac{-a}{\sqrt{1-a^2W^2}}\,dW-\dfrac{a^3W}{2\sqrt{(1-a^2W^2)^3}}\,dt$
$\operatorname{arctg} aW$	$\dfrac{a}{1+a^2W^2}\,dW-\dfrac{a^3W}{(1+a^2W^2)^2}\,dt$
$\operatorname{arcctg} aW$	$\dfrac{-a}{1+a^2W^2}\,dW+\dfrac{a^3W}{(1+a^2W^2)^2}\,dt$
$\operatorname{sh} aW$	$a\operatorname{ch} aW\,dW+{}^1/_2a^2\operatorname{sh} aW\,dt$
$\operatorname{ch} aW$	$a\operatorname{sh} aW\,dW+{}^1/_2a^2\operatorname{ch} aW\,dt$
$\operatorname{th} aW$	$\dfrac{a}{\operatorname{ch}^2 aW}\,dW-\dfrac{a^2\operatorname{sh} aW}{2\operatorname{ch}^3 aW}\,dt$
$\operatorname{cth} aW$	$\dfrac{-a}{\operatorname{sh}^2 aW}\,dW+\dfrac{a^2\operatorname{ch} aW}{2\operatorname{sh}^3 aW}\,dt$
$\operatorname{arsh} aW$	$\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2W^2}}\,dW-\dfrac{a^3W}{2\sqrt{(1+a^2W^2)^3}}\,dt$
$\operatorname{arch} aW$	$\dfrac{a}{\sqrt{a^2W^2-1}}\,dW-\dfrac{a^3W}{2\sqrt{(a^2W^2-1)^3}}\,dt$
$\operatorname{arth} aW$	$\dfrac{a}{1-a^2W^2}\,dW-\dfrac{a^3W}{(1-a^2W^2)^2}\,dt$
$\operatorname{arcth} aW$	$\dfrac{a}{1-a^2W^2}\,dW-\dfrac{a^3W}{(1-a^2W^2)^2}\,dt$

Б. Функции многомерного винеровского процесса

Таблица 2

$U=\varphi(W)$	dU
W_1W_2	$W_2\,dW_1+W_1\,dW_2+\nu_{12}\,dt$
$W_1W_2W_3$	$W_2W_3\,dW_1+W_1W_3\,dW_2+W_1W_2\,dW_3+$ $+(\nu_{12}W_3+\nu_{13}W_2+\nu_{23}W_1)\,dt$
$W_1W_2^{-1}$	$W_2^{-1}\,dW_1+W_1W_2^{-2}\,dW_2+(\nu_{22}W_1W_2^{-3}-\nu_{12}W_2^{-2})\,dt$
$(W_1^2+W_2^2)^{1/2}$	$(W_1^2+W_2^2)^{-1/2}(W_1\,dW_1+W_2\,dW_2)+$ $+{}^1/_2(W_1^2+W_2^2)^{-3/2}(\nu_{11}W_2^2+\nu_{22}W_1^2-2\nu_{12}W_1W_2)\,dt$
$(W_1^2+W_2^2+W_3^2)^{1/2}$	$(W_1^2+W_2^2+W_3^2)^{-1/2}(W_1\,dW_1+W_2\,dW_2+W_3\,dW_3)+$ $+{}^1/_2(W_1^2+W_2^2+W_3^2)^{-3/2}[\nu_{11}(W_2^2+W_3^2)+$ $+\nu_{22}(W_1^2+W_3^2)+\nu_{33}(W_1^2+W_2^2)-2\nu_{12}W_1W_2-$ $-2\nu_{13}W_1W_3-2\nu_{23}W_2W_3]\,dt$
$W^{\mathrm{T}}aW$	$W^{\mathrm{T}}(a+a^{\mathrm{T}})\,dW+[W^{\mathrm{T}}\dot{a}W+{}^1/_2\,\mathrm{tr}\,(a+a^{\mathrm{T}})\,\nu]\,dt$
$e^{a^{\mathrm{T}}W}$	$e^{a^{\mathrm{T}}W}a^{\mathrm{T}}\,dW+\left[e^{a^{\mathrm{T}}W}\dot{a}^{\mathrm{T}}W+{}^1/_2e^{a^{\mathrm{T}}W}\,\mathrm{tr}\,(aa^{\mathrm{T}}\nu)\right]dt$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамовиц М., Стиган И. (ред.) (Abramowitz M., Stegun I. A., eds.). Handbook of Mathematical Functions. National Bureau of Standards. Applied Mathematics Series.— 1964.— V. 55. [Рус. пер.: Справочник по специальным функциям.— М.: Наука, 1979.]
2. Андронов А. А., Витт А. А., Понтрягин Л. С. О статистическом рассмотрении динамических систем // Журнал экспериментальной и теоретической физики.— 1933.— Т. 3, № 3.— С. 165—180. (См. также Андронов А. А. Собрание трудов.— М.: Изд-во АН СССР, 1956, 142—160.)
3. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.— М.: Наука, 1966.
4. Бейтман Г., Эрдейи А. (Bateman H., Erdélyi A.). Higher Transcendental Functions.— New York: McGraw-Hill, 1953. [Рус. пер.: Высшие трансцендентные функции.— М.: Наука, 1966.]
5. Бернштейн С. Н. Principes de la théorie des équations différentielles stochastiques // Тр. Физ. мат. ин-та им. В. А. Стеклова,— 1934.— Т. 5.— С. 95—124.
6. Бернштейн С. Н. Équations différentielles stochastiques // Actual. Scient. et Industr.— 1938.— V. 738.— P. 5—31.
7. Богуславский И. А. Статистический анализ многомерной динамической системы при использовании полиномов Эрмита многих переменных // Автом. и телемех.— 1969.— № 7.— С. 36—51.
8. Богуславский И. А. Оценка условной плотности вероятностей фазовых координат по неполной информации // Автом. и телемех.— 1969.— № 11.— С. 44—58.
9. Брайсон А., Иохансен Д. (Bryson A. E., Johansen D. E.). Linear filtering for time-varying systems using measurements containing coloured noise // IEEE Trans. on Automat. Contr.— 1965.—V. AC-10, № 1.—P. 4—10.
10. Бьюси Р. С. (Bucy R. S.). Optimal filtering for correlated noise // Journal of Mathematical Analysis and Applications.— 1967.— V. 20, № 1.— P. 1—8.
11. Винер Н. (Wiener N.). Generalized harmonic analysis // Acta Math.— 1930.— V. 55, № 2—3.— P. 117—258.
12. Ворович И. И. (ред.). Рациональное использование водных ресурсов бассейна Азовского моря. Математические модели.— М.: Наука, 1981.
13. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М.: Наука, 1967.
14. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.— М.: Гостехиздат, 1949.
15. Гулько Ф. Б., Новосельцева Ж. А. Решение нестационарных задач фильтрации и упреждения методами моделирования // Автом. и телемех.— 1966.— № 4.— С. 122—141.
16. Гулько Ф. Б., Новосельцева Ж. А. Решение нестационарных задач фильтрации и упреждения при произвольной помехе методами моделирования // Автом. и телемех.— 1966.— № 10.— С. 153—168.
17. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М.: Наука, 1970.

18. Дашевский М. Л. Приближенный анализ точности нестационарных, нелинейных систем методом семиинвариантов // Автом. и телемех.— 1967.— № 11.— С. 62—81.
19. Дашевский М. Л. Уравнения семиинвариантов нелинейной динамической системы // Автом. и телемех.— 1968.— № 10.— С. 63—71.
20. Дашевский М. Л. Метод семиинвариантов в задачах нелинейной фильтрации многомерных марковских процессов // Автом. и телемех.— 1968.— № 11.— С. 24—29.
21. Дашевский М. Л. A semiinvariant method of closing the equations for moments in statistical analysis of nonlinear systems // Проблемы управления и теории информации.— 1975.— Т. 4. № 4.— С. 317—326.
22. Дашевский М. Л. Техническая реализация моментно-семиинвариантного метода анализа случайных процессов // Автом. и телемех.— 1976.— № 10.— С. 23—26.
23. Дашевский М. Л. К проблеме существования решений в задачах субоптимального оценивания // Автом. и телемех.— 1980.— № 12.— С. 29—34.
24. Дашевский М. Л. Синтез условно оптимальных фильтров на основе уравнений оптимальной нелинейной фильтрации // Автом. и телемех.— 1981.— № 10.— С. 35—42.
25. Дашевский М. Л., Липцер Р. Ш. Применение условных семиинвариантов в задачах нелинейной фильтрации марковских процессов // Автом. и телемех.— 1967.— № 6.
26. Демух В. И. Приближенный метод анализа точности нелинейных систем // Автом. и телемех.—1965.— № 6.— С. 417—424.
27. Дункан Д. Б. (Duncan D. B.). Response of linear timedependent systems to random inputs // Journ. Appl. Phys.— 1953.— V. 24.— P. 609—611.
28. Ито К. (Ito K.) Stochastic integral // Proc. Imp. Acad. Tokyo.— 1944.— V. 20.— P. 519—524.
29. Ито К. (Ito K.). On a formula concerning stochastic differentials // Nagoya Math. J.— 1951.— V. 3.— P. 55—65.
30. Ито К. (Ito K.). On stochastic differential equations // Mem. Amer. Math. Soc.— 1951.— V. 4.— P. 1—51.
31. Казаков И. Е. Приближенный вероятностный анализ точности работы существенно нелинейных систем // Автом. и телемех.— 1956.— № 5.— С. 385—409.
32. Казаков И. Е. Статистический анализ систем с многомерными нелинейностями // Автом. и телемех.— 1965.— № 3.— С. 463—469.
33. Казаков И. Е. Статистические методы проектирования систем управления.— М.: Машиностроение, 1969.
34. Кайлат Т. и др. (Kailath T. and others). An innovations approach to least-squares estimation. Pts I—VII // IEEE Trans. on Automat. Contr.— 1968.— V. AC-13, № 6.— P. 646—660; 1971.— V. AC-16, № 3.— P. 217—226; № 6.— P. 720—727; 1973.— V. AC-18, № 5.— P. 435—453; № 6.— P. 588—607.
35. Калман Р. Е., Бьюси Р. С. (Kalman R. E., Bucy R. S.). New results in linear filtering and prediction theory // Trans. ASME, Journ. of Basic Engineering.— 1960.— V. 83D.— P. 95—108. [Рус. пер.: Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания // Техническая механика:— Сб. переводов.— 1961.— Т. 83, Сер. Д, № 1.— С. 123—133.]
36. Кашьяп Р. Л., Рао А. Р. (Kashyap R. L., Rao A. R.). Dynamic Stochastic Models from Empirical Data.— New York, London: Academic Press. 1976. [Рус. пер.: Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным.— М.: Наука, 1983.]
37. Колмогоров А. Н. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.— Berlin: Springer-Verlag, 1933. [Рус. пер.: Основные понятия теории вероятностей.— М.: Наука, 1974.]

38. Колмогоров А. Н. Über die analitische Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung // Math. Ann.— 1931.— V. 104.— P. 415—458. [Русский перевод: Об аналитических методах в теории вероятностей // Успехи мат. наук.— 1938.— № 5.— С. 5—41.]
39. Колмогоров А. Н. Статистическая теория колебаний с непрерывным спектром: Юбилейный сборник, посвященный 30-летию Великой Октябрьской социалистической революции.— М.: Изд-во АН СССР, 1947.— Т. 1.— С. 242—254.
40. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1972.
41. Корн Г., Корн Т. (Korn G. A., Korn T. M.) Mathematical Handbook. New York: McGraw-Hill, 1968. [Рус. пер.: Справочник по математике.— М.: Наука, 1984.]
42. Крамер Г. (Cramer H.). On the theory of stationary random processes // Ann. Math.— 1940.— V. 41.— P. 215—230.
43. Крамер Г. (Cramer H.). Mathematical Methods of Statistics. Princeton University Press, 1946. [Рус. пер.: Математические методы статистики.— М.: Мир, 1975.]
44. Кушнер Г. Дж. (Kushner H. J.). On the differential equations satisfied by the conditional densities of Markov processes with applications // J. SIAM Control, Ser. A.— 1964.— V. 2.— P. 106—119.
45. Кушнер Г. Дж. (Kushner H. J.). On the dynamical equations of conditional probability density functions with applications to optimal stochastic control theory // J. Math. Anal. Appl.— 1964.— V. 8.— P. 332—344.
46. Кушнер Г. Дж. (Kushner H. J.). Dynamical equations for optimal nonlinear filtering // J. Differential Equations.— 1967.— V. 3.—P. 179—190.
47. Ладаш Г. Е., Лакшмикантам В. (Ladas G. E., Lakshmikantham V.). Differential Equations in Abstract Spaces.— New York, London: Academic Press, 1972.
48. Летов А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем.— М.: Физматгиз, 1962.
49. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Нелинейная фильтрация диффузионных марковских процессов // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР.— 1968.— Т. 104.— С. 135—180.
50. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов.— М.: Наука, 1974.
51. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа.— М.: Наука, 1954.
52. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения.— Харьковское матем. общество, 1892.— М.: Гостехиздат, 1950.
53. Мельц И. О., Пыхова Т. А., Усков Г. В. Применение корреляционной системы уравнений для анализа точности в задачах динамики полета // Нелинейные и оптимальные системы.—М.: Наука.— 1971.— С. 246—263.
54. Никитин Н. Н., Разевиг В. Д. О вычислении коэффициентов сноса марковского процесса по стохастическому уравнению динамической системы // Автом. и телемех.— 1976.— № 4.— С. 46—54.
55. Пугачев В. С. Случайные функции, определяемые обыкновенными дифференциальными уравнениями // Тр. ВВА им. Н. Е. Жуковского.— 1944.— Т. 118.— С. 3—36.
56. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления.— М.: Физматгиз, 1962.
57. Пугачев В. С. (ред.) Основы автоматического управления.— М.: Наука, 1974.
58. Пугачев В. С. Оценивание переменных и параметров в стохастических системах, описываемых дифференциальными уравнениями // ДАН СССР.— 1978.— Т. 241, № 5.— С. 1031—1034.

59. Пугачев В. С. Оценивание состояния и параметров непрерывных нелинейных систем // Автом. и телемех.— 1979.— № 6.— С. 63—79.
60. Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика.— М.: Наука, 1979.
61. Пугачев В. С. Estimation of Markov processes. Time Series // Proc. Internat. Conference. Nottingham, March 1979.— Amsterdam—New York—London: North Holland, 1980.— P. 389—400.
62. Пугачев В. С. Конечномерные распределения процессов, определяемых стохастическими дифференциальными уравнениями, и экстраполяция таких процессов // ДАН СССР.— 1980.— Т. 251, № 1.— С. 40—43.
63. Пугачев В. С. The finite-dimentional distributions of a random process determined by a stochastic differential equation and their application to control problems // Проблемы управления и теории информации.— 1981.— Т. 10, № 2.— С. 95—114.
64. Пугачев В. С. Обобщение теории условно оптимального оценивания и экстраполяции // ДАН СССР.— 1982.— Т. 262, № 3.— С. 535—538.
65. Пугачев В. С. Conditionally optimal estimation in stochastic differential systems // Automatica.— 1982.— V. 18, № 6.— P. 685—696.
66. Пугачев В. С. Условно оптимальная фильтрация и экстраполяция непрерывных процессов // Автом. и телемех.— 1984.— № 2.— С. 82—89.
67. Силуянова И. Д. Оценивание переменных и параметров в стохастических системах, описываемых дифференциальными уравнениями, в особом случае // ДАН СССР.— 1980.— Т. 250, № 3.— С. 566—569.
68. Силуянова И. Д. The finite-dimensional distributions of the outputs of one class of non-linear systems // Пробл. управления и теории информации.— 1982.— Т. 11, № 6.— Р. 407—418.
69. Силуянова И. Д. Обобщение теории условно оптимальной фильтрации на случай, когда помеха в наблюдениях отлична от белого шума // Автом. и телемех.— 1985.— № 2.— С. 92—97.
70. Синицын И. Н. Методы статистической линеаризации (обзор) // Автом. и телемех.— 1974.— № 5. — С. 74—94.
71. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений.— М.: Физматгиз, 1959.
72. Стратонович Р. Л. Новая форма записи стохастических интегралов и уравнений // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика и механика, 1964.
73. Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления.— М.: Изд-во МГУ, 1966.
74. Фишер И. Р. (Fisher I. R.). Optimal nonlinear filtering // Advances in Control Systems. Theory and Application (ed. Leondes C. T.), v. 5.— P. 199—300.— New York, London: Academic Press, 1967.
75. Хинчин А. Я. Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse.— Math. Ann.— 1934.— V. 109.— P. 604—615. [Рус. пер.: Теория корреляции стационарных стохастических процессов.— Успехи мат. наук.— 1938.— № 5.— С. 42—51.]
76. Эджуорт Ф. И. (Edgeworth F. I.). The law of error // Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1905.— V. 20.— P. 36—65.
77. Эйнштейн А., Смолуховский М. Брауновское движение: Сборник статей: Пер. с нем.— М.: ОНТИ, 1936.

СПИСОК ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

78. Альберендт Н., Кемпе Ф. (Ahlbehrendt N., Kempe V.). Analyse stochastischer Systeme.— Berlin; Akademie-Verlag, 1984.
79. Баррет Д. Ф. Применение уравнений Колмогорова для исследования систем автоматического управления со случайными возмущениями // Тр. I Международного конгресса ИФАК, Москва, СССР, 27 июня — 7 июля 1960 г. Статистические методы исследования. Теория структур,

моделирование, терминология, образование.— М.: Изд-во АН СССР, 1961.— С. 84—97.
80. Булгаков Б. В. Колебания.— М.: Гостехиздат, 1954.
81. Варга Дж. (Varga J.). Optimal Control for Differential and Functional Equations.— John Wiley, 1969. [Рус. пер.: Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.— М.: Наука, 1977.]
82. Вольтерра В. (Volterra V.). Theory of Functionals and Integral and Integro-differential Equations.— New. York: Dover Publications Inc., 1959. [Рус. пер.: Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1982.]
83. Гиббс Дж. В. (Gibbs J. W.). The Collected Works of J. Willard Gibbs: in two volumes.— New York: Longmans, Green and Co., 1928. [Рус. пер.: Термодинамика. Статистическая механика.— М.: Наука, 1982.]
84. Должанский Ф. В., Кляцкин В. Н., Обухов А. М., Чусов М. А. Нелинейные системы гидродинамического типа.— М.: Наука, 1974.
85. Заде Л. А. (Zadeh L. A.). A contribution to the theory of nonlinear systems // Journ. of the Franklin Inst.— 1953.— V. 255, № 5.—P. 387—408.
86. Казаков И. Е. Статистическая динамика систем с переменной структурой.— М.: Наука, 1977.
87. Казаков И. Е., Артемьев В. М. Оптимизация систем случайной структуры.— М.: Наука, 1980.
88. Кашкарова А. Г., Шин В. И. Модифицированные семиинвариантные методы анализа нелинейных стохастических систем // Автом. и телемех.— 1986.— № 2.— С. 69—80.
89. Кои Т. К. (Caughey T. K.) On the response of a class of nonlinear oscillators to stochastic excitation. Division of Engineering and Applied Science.— California Institute of Technology, Pasadena, California, USA, 1964. [Рус. пер.: О реакции одного класса нелинейных осцилляторов на стохастическое возбуждение // Механика: период. сб. переводов иностр. статей).— 1965.— Т. 3 (91).— С. 17—27.]
90. Кордуняну К., Лакшмикантам В. Уравнения с неограниченным запаздыванием // Автом. и телемех.— 1985.— № 7.— С. 5—44.
91. Крамер Г., Лидбеттер М. (Cramér H., Leadbetter M.) Stationary and Related Stochastic Processes. Sample Function Properties and Their Applications.— New York, London, Sidney: John Wiley, 1967. [Рус. пер.: Стационарные случайные процессы. Свойства выборочных функций и их приложения.— М.: Мир, 1969.]
92. Красовский А. А. Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем.— М.: Наука, 1974.
93. Мальчиков С. В. Приближенный метод определения законов распределения фазовых координат нелинейных автоматических систем // Автом. и телемех.— 1970.— № 5.— С. 43—51.
94. Мальчиков С. В. Приближенный метод статистического анализа динамических систем, содержащих нелинейности мультипликативного типа // Автом. и телемех.— 1973.— № 10.— С. 3—38.
95. Мальчиков С. В. Определение закона распределения выходных переменных многомерной нелинейной системы // Автом. и телемех.— 1973.— № 11.— С. 16—21.
96. Мидддлтон Д. (Middleton D.) An Introduction to Statistical Communication Theory.— New York: McGraw-Hill, 1960. [Русский перевод: Введение в статистическую теорию связи.— М.: Сов. Радио, 1961.]
97. Мощук Н. К., Синицын И. Н. On Stationary Distributions in Nonlinear Stochastic Differential Sistems // Mathematics Institute of Warwick Coventry.— Preprint — CV4 7AL, UK, November 1989.
98. Мощук Н. К., Синицын И. Н. О стохастических неголономных системах // ПММ.— 1990.— Т. 54, вып. 2.— С. 213—223.

99. Неве Ж. (Neveu J.) Bases mathematiques du calcul des probabilités.— Masson et cie. Paris, 1964. [Рус. пер.: Математические основы теории вероятностей.— М.: Мир, 1969.]
100. Пугачев В. С. Применение теории марковских процессов к анализу точности автоматических систем // Изв. АН СССР ОТН. Энергетика и автоматика.— 1961.— № 3.— С. 46—57.
101. Пугачев В. С. О распределении числа выбросов случайного процесса // Труды I Всесоюзн. симпозиума по статистическим проблемам в технической кибернетике (Москва, СССР, 14—18 февр. 1967). Нелинейные и оптимальные системы.— М.: Наука, 1971, 374—381.
102. Пугачев В. С. Стохастические системы.— М.: Наука, 1973 (вып. 7—9); 1974 (вып. 11, 12); 1975 (вып. 10).
103. Пугачев В. С. Conditionally optimal estimation in systems with randomly varying structure // Proceedings of the 9 World Congress of IFAC (Budapest, Hungary, 2—6 July, 1984), v. 2, p. 773—777.— Oxford: Pergamon Press, 1985.
104. Пугачев В. С. Approximate methods for finding finite-dimensional distributions of random sequences determined by difference equations // Проблемы управления и теории информации.— 1986.— Т. 15, № 2.— С. 101—109.
105. Пугачев В. С., Синицын И. Н. Направления развития математического обеспечения для исследования стохастических систем // Современные средства информатики.— М.: Наука, 1986.— С. 166—174.
106. Пугачев В. С., Синицын И. Н. (ред.). Принципы разработки диалоговых пакетов прикладных программ для исследования линейных и нелинейных стохастических дифференциальных систем. Пакет прикладных программ «СтС-анализ» (версия 1). Институт проблем информатики АН СССР.— Препр.—М.: 1989.
107. Пугачев В. С., Синицын И. Н., Шин В. И. Условно оптимальная дискретная фильтрация процессов в непрерывно-дискретных системах // ДАН СССР.— 1986.— Т. 289, № 2.— С. 297—301.
108. Пугачев В. С., Синицын И. Н., Шин В. И. Problems of analysis and on-line conditionally optimal filtering of processes in nonlinear stochastic systems // Preprints of the Second IFAC Symposium on Stochastic Control (Вильнюс, СССР, 19—23 мая 1986).— № 1.— С. 4—18.
109. Пугачев В. С., Синицын И. Н., Шин В. И. Об одной программной реализации метода нормальной аппроксимации в задачах анализа нелинейных стохастических дифференциальных систем // ЭВМ массового применения.— М.: Наука, 1987.— С. 55—60.
110. Пугачев В. С., Синицын И. Н., Шин В. И. Программная реализация метода нормальной аппроксимации в задачах анализа нелинейных стохастических систем // Автом. и телемех.— 1987.— № 2.— С. 62—68.
111. Пугачев В. С., Синицын И. Н., Шин В. И. Проблемы анализа и условно оптимальной фильтрации в реальном масштабе времени процессов в нелинейных стохастических системах (обзор) // Автом. и телемех.— 1987.— № 12.— С. 3—24.
112. Райс С. О. (Rice S. O.). Mathematical analysis of random noise // Bell System Tech. Journ.— 1945.— V. 24, № 1.— P. 46—156. [Рус. пер.: Теория флуктуационных шумов. В сб. переводов Теория передачи электрических сигналов при наличии помех.— М.: ИЛ, 1963.]
113. Салуквадзе М. Е. Задачи векторной оптимизации в теории управления.— Тбилиси: Мецниереба, 1975.
114. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций.— М.: Наука, 1968.
115. Семенов В. В. Уравнение обобщенной характеристической функции вектора состояния автоматической системы // Аналитические методы синтеза регуляторов, вып. 2., Саратовский политехнический институт, 1977.— С. 3—36.

116. Синицын В. И. Новый приближенный метод нахождения одномерного распределения векторного процесса, определяемого стохастическим дифференциальным уравнением // ДАН СССР.— 1989.— Т. 309, № 3.— С. 541—544.
117. Синицын И. Н. Исследование выбросов нелинейных систем методом статистической линеаризации // Автом. и телемех.— 1972.— № 10.— С. 26—28.
118. Синицын И. Н. Stochastic hereditary control systems // Проблемы управления и теории информации.— 1986.— Т. 15, № 4.— С. 287—298.
119. Синицын И. Н. О статистической линеаризации стохастических нелинейностей // Рефераты докладов V Всесоюзн. совещания по проблемам управления (Москва, 1971), часть II.— М.: Наука, 1971.— С. 50—52.
120. Синицын И. Н., Чередниченко А. А., Зацман И. М., Шин В. И. Использование ПЭВМ для обучения вероятностно-статистическим дисциплинам // Информатика и компьютерная грамотность.— М.: Наука, 1988.— С. 111—121.
121. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике.— М.: Сов. Радио, 1961.
122. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника.—М.: Сов. Радио, 1966.
123. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов.— М.: Наука, 1970.
124. Феллер В. (Feller W.). Zur Theorie der stochastischen Prozesse (Existenz- und Eindeutigkeits-Sätze // Math. Ann.— 1936.— V. 113.— С. 113—160. [Рус. пер.: К теории стохастических процессов (теоремы существования и единственности).— Успехи мат. наук.— 1938.— № 5.— С. 57—96.]
125. Чандрасекар С. (Chandrasekhar S.). Stochastic problems in physics and astronomy // Reviews of Modern Physics.— 1943.— V. 15, № 1.— С. 1—89. [Рус. пер.: Стохастические проблемы в физике и астрономии.— М.: ИЛ, 1947.]
126. Челомей В. Н. (гл. ред.). Вибрации в технике: Справочник.— М.: Машиностроение, 1979.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Научное издание

ПУГАЧЕВ Владимир Семенович
СИНИЦЫН Игорь Николаевич

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

АНАЛИЗ И ФИЛЬТРАЦИЯ