Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли

А. М. ПЕРЕЛОМОВ

А.М. ПЕРЕЛОМОВ

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ И АЛГЕБРЫ ЛИ

МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1990

ББК 22.31
П27
УДК 531 + 512.81

Переломов А.М. **Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли.** – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 240 с. – ISBN 5-02-013826-6.

Посвящена одному из активно развивающихся направлений современной математической физики – теории интегрируемых систем классической механики. Подробно изложены как результаты и методы прошлого столетия, так и результаты, полученные в последние пятнадцать лет с помощью метода обратной задачи рассеяния. Детально рассмотрены многочастичные системы типа цепочки Тоды.

Для физиков-теоретиков и специалистов-математиков, а также для студентов математических и физических вузов, факультетов университетов.

Табл. 3. Ил. 7. Библиогр.: 318 назв.

Рецензенты:
академик АН СССР *Л.Д. Фаддеев*,
доктор физико-математических наук
М.А. Семенов-Тян-Шанский

П $\frac{1604030000-078}{053(02)-90}$ 104-90

ISBN 5-02-013 826-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель настоящей книги – собрать и представить с общей и универсальной точки зрения результаты и методы, относящиеся к интегрируемым системам классической механики. Под такими системами мы понимаем гамильтоновы системы с конечным числом степеней свободы, обладающие достаточно большим числом сохраняющихся величин (интегралов движения), так что, в принципе, интегрирование уравнений движения таких систем может быть сведено к квадратурам – вычислению интегралов известных функций.

Изучение таких систем явилось важным направлением исследований прошлого столетия. Отметим, в частности, что именно из этих исследований выросла теория групп Софуса Ли. Однако в начале нашего века благодаря работам А. Пуанкаре стало ясно, что глобальные интегралы движения гамильтоновых систем существуют лишь в исключительных случаях, и интерес к таким системам упал.

До недавнего времени было известно лишь небольшое число таких систем с двумя и бо́льшим числом степеней свободы. В последние пятнадцать лет, однако, в этом направлении достигнут большой прогресс. Это связано с открытием в 1967 г. Гарднером, Грином, Крускалом и Миурой [177] нового метода интегрирования нелинейных эволюционных уравнений – метода обратной задачи рассеяния, или метода изоспектральной деформации.

Применение этого метода к системам классической механики дало возможность установить полную интегрируемость множества классических систем. Заметим, что все известные системы такого типа связаны с алгебрами Ли, хотя во многих случаях эта связь и не является такой прямой, как связь, даваемая известной теоремой Э. Нётер.

Настоящая монография является первой попыткой последовательного изложения полученных в этой области результатов, содержащихся пока лишь в журнальных статьях. Книга частично основана на специальных курсах, прочитанных автором для студентов и аспирантов Московского Государственного университета. Она рассчитана в основном на физиков-теоретиков и математиков, может быть использована также студентами физических и математических факультетов.

К сожалению, из-за ограниченности объема в настоящей монографии не рассмотрен ряд интегрируемых систем классической механики, известных в настоящее время. Сюда относятся:

1. Системы с ограничениями (связями) типа движения точки по эллипсоиду или сфере под влиянием линейной силы.

2. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки в поле тяжести.

3. Движение твердого тела в идеальной жидкости.

4. Движение в периодическом поле конечнозонных потенциалов и ряд других периодических задач.

Автор предполагает подготовить к печати отдельную монографию, где будут рассмотрены все эти вопросы.

Различные вопросы классической механики, вошедшие в данную книгу, обсуждались с моими коллегами и соавторами: Ф. Березиным, М. Бруски, С. Войцеховским, А. Дегасперисом, Ф. Калоджеро, С. Камалиным, М. Кацем, И. Кричевером, М. Крускалом, Д. Леви, Ю. Мозером, С. Новиковым, М. Ольшанецким, О. Рагниско, А. Рейманом, М. Семеновым-Тян-Шанским.

Всем им выражаю мою сердечную благодарность.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая книга посвящена быстро развивающемуся разделу современной математической физики – вполне интегрируемым системам классической механики. Под такими системами мы понимаем гамильтоновы системы с конечным числом степеней свободы, обладающие достаточно большим числом сохраняющихся величин (интегралов движения), так что, в принципе, решение уравнений движения может быть сведено к квадратурам. (Относительно точного определения смотри раздел 1.8.)

До недавнего времени было известно лишь несколько таких систем с двумя и бо́льшим числом степеней свободы. Перечислим некоторые из них.

1. Движение в поле центрального потенциала (Ньютон)

$U(\mathbf{q}) = U(|\mathbf{q}|)$.

2. Движение в кулоновском (или ньютоновском) поле двух фиксированных центров (Эйлер)

$U(\mathbf{q}) = \alpha_1 |\mathbf{q} - \mathbf{a}_1|^{-1} + \alpha_2 |\mathbf{q} - \mathbf{a}_2|^{-1}$.

3. Свободное движение частицы на поверхности трехосного эллипсоида (Якоби).

4. Движение частицы на сфере под влиянием линейной силы (К. Нейман).

5. Одномерное движение трех частиц с парным взаимодействием вида (Якоби)

$$U(q) = \sum_{i<j}^{3} g_{ij}(q_i - q_j)^{-2}.$$

6. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки в поле тяжести в ряде специальных случаев (Эйлер, Лагранж, Ковалевская).

7. Движение твердого тела в идеальной жидкости в ряде специальных случаев (Кирхгоф, Клебш, Стеклов).

Дальнейший прогресс в этой области был достигнут лишь недавно. А именно, в 1967 г. Гарднер, Грин, Крускал и Миура [177] открыли новый метод интегрирования нелинейных эволюционных уравнений – метод обратной задачи рассеяния или метод изоспектральной деформации. Этот метод был преобразован к алгебраическому виду в работе Лакса [233] и применен первоначально к нелинейным эволюционным уравнениям в частных производных: уравнению Кортевега–де Фриза, нелинейному уравнению

Шредингера и так называемому уравнению sine-Gordon

$$u_t = u_{xxx} + uu_x,$$

$$u_t = u_{xx} + |u|^2 u, \quad u_{tt} - u_{xx} = \sin u.$$

Отметим еще работу В.Е. Захарова и Л.Д. Фаддеева [77], где была установлена гамильтоновость уравнения Кортевега– де Фриза.

Применение этого метода к системам классической механики, начатое в работах [168, 88, 251], дало возможность установить полную интегрируемость множества классических систем.

Суть метода изоспектральной деформации состоит в том, что интегралы движения рассматриваемой динамической системы являются собственными значениями некоторой матрицы L, зависящей от динамических переменных этой системы. Зависимость эта, однако, такова, что спектр матрицы для любого решения уравнений движения от времени не зависит. Таким образом, в процессе эволюции динамической системы эта матрица подвергается изоспектральной деформации. Собственные же значения матрицы, рассматриваемые как функционалы от переменных динамической системы, представляют интегралы движения.

Заметим, что все известные системы такого типа связаны с алгебрами Ли и во всех известных случаях их интегрируемость обусловлена наличием высшей (скрытой) симметрии. В специальных случаях такие системы описывают одномерную задачу n тел с парным взаимодействием, исследованную недавно многими авторами.

Явное интегрирование уравнений движения вполне интегрируемой системы является более сложной задачей. Тем не менее ряд вполне интегрируемых систем удается проинтегрировать явно с помощью так называемого метода проектирования [94, 95].

Сущность этого метода состоит в рассмотрении новой динамической системы с числом степеней свободы бо́льшим, чем у исходной системы. За счет этого динамика новой системы значительно упрощается и уравнения движения этой системы могут быть проинтегрированы явно. При этом исходная система представляет собой проекцию бо́льшей системы. Если проектирование может быть описано явными формулами, то мы получаем таким способом явное решение уравнений движения исходной системы.

В настоящей монографии из-за ограниченного объема рассмотрена лишь часть интегрируемых систем классической механики. Оставшуюся часть, в которую входят системы со связями и твердое тело, мы предполагаем рассмотреть в отдельной монографии. Там же будет рассмотрен ряд задач, относящихся к так называемому периодическому случаю. Теоретико-групповой подход для этого случая в настоящее время еще слабо разработан, и здесь требуется использование более сложного математического аппарата – техники алгебраической геометрии, алгебраических кривых, абелевых и якобиевых многообразий, абелевых интегралов и тета-функций.

Читатель, интересующийся такими проблемами, может найти детали в обзорах [12, 13, 14, 58, 110, 111] и оригинальных статьях.

Мы считаем, что читатель знаком с основами классической механики. Все аспекты этой области науки с разных точек зрения отражены в классических монографиях [35, 23, 1, 40], в которых интересующийся читатель может найти дальнейшие детали.

Глава 1

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Эта глава является вводной. В ней собраны основные сведения о гамильтоновой механике, необходимые для дальнейшего. Сведения более специального характера будут приводиться в основном тексте по мере необходимости. Бо́льшую часть этих сведений с подробными доказательствами результатов можно найти в современном изложении в монографиях [1, 40], а также в [2, 3, 9, 66]. Относительно исторических деталей мы отсылаем читателя к фундаментальной монографии Уиттекера [35] и обзорам Кэли [44, 45] и Пранге [61].

Мы предполагаем, что читатель знаком с основными понятиями и фактами из теории многообразий, расслоений, алгебры внешних дифференциальных форм и векторных полей, теории групп Ли и симметрических пространств. Необходимый материал по этим вопросам можно найти в цитированных выше монографиях, а также в монографиях [10, 11, 17, 19, 20, 36].

Читатель, знакомый с гамильтоновой механикой, может перейти прямо к чтению основного текста, возвращаясь к главе 1 по мере необходимости.

1.1. Простейший пример: движение в потенциальном поле

Чтобы мотивировать введение основных понятий теории гамильтоновых динамических систем, начнем с рассмотрения простейшего примера.

Пусть материальная точка (частица) с массой m находится в потенциальном поле $U(q)$, где $q = (q^1, \ldots, q^n)$ – вектор n-мерного пространства. Тогда движение частицы описывается уравнениями Ньютона

$$m\ddot{q}^j = -\frac{\partial U}{\partial q^j}, \tag{1.1.1}$$

где точка означает дифференцирование по времени. Введем, как обычно, вектор импульса

$$p = (p_1, \ldots, p_n), \qquad p_j = m\dot{q}^j$$

и энергию – функцию Гамильтона, или просто гамильтониан,

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + U(q), \qquad p^2 = p_j p_j \equiv \sum_{j=1}^{n} p_j p_j. \tag{1.1.2}$$

Тогда уравнения Ньютона (1.1.1) можно переписать в виде уравнений

Гамильтона

$$\dot{q}^j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q^j}, \tag{1.1.3}$$

причем эти уравнения описывают движение системы и в случае произвольной зависимости функции Гамильтона $H(p, q)$ от p и q. Уравнения (1.1.3) можно записать в виде одного уравнения. Для этого объединим, прежде всего, векторы p и q в один $2n$-мерный вектор $x = (p, q)$, величины $\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}; \frac{\partial H}{\partial q^k}\right)$ — в $2n$-мерный вектор ∇H и введем матрицу J порядка $2n$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.1.4}$$

где I — единичная матрица порядка n. Тогда уравнения Гамильтона (1.1.3) можно записать в виде

$$\dot{x} = J \cdot \nabla H(x) \quad (\text{или } J \cdot \dot{x} = -\nabla H(x)). \tag{1.1.5}$$

(Такая форма записи уравнений Гамильтона, по-видимому, впервые была использована Лагранжем в 1808 г. [230, 231] для описания вариации элементов планеты, возмущенной действием других планет. Относительно исторических фактов такого типа мы отсылаем читателя к фундаментальному трактату Уиттекера [35].)

Вектор $x = (x^1, \ldots, x^{2n})$ определяет состояние системы. Множество этих векторов образует фазовое пространство системы $M = \{x\}$, которое в данном случае является $2n$-мерным евклидовым пространством со стандартным скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{2n} x^j y^j. \tag{1.1.6}$$

С помощью матрицы J можно определить скобки Пуассона *) в пространстве $\mathscr{F}(M)$ гладких функций на M:

$$\begin{aligned}\{F(x), G(x)\} &= (\nabla F, J\nabla G) = J^{jk}\,\partial_j F\,\partial_k G \equiv \\ &\equiv \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial G}{\partial\ \ ^j} - \frac{\partial F}{\partial q^j}\frac{\partial G}{\partial p_j}\right).\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

Нетрудно видеть, что скобка Пуассона удовлетворяет условиям

$$\{F(x), G(x)\} = -\{G(x), F(x)\}, \tag{1.1.8}$$

$$\{F(x)\{G(x), H(x)\}\} + \{G(x)\{H(x), F(x)\}\} + \{H(x)\{F(x), G(x)\}\} = 0, \tag{1.1.9}$$

и, следовательно, определяет на $\mathscr{F}(M)$ структуру алгебры Ли (бесконечномерной!). Отметим, что скобка Пуассона (1.1.7) удовлетворяет также

*) Скобка Пуассона была введена в работе Пуассона [269].

правилу Лейбница

$$\{F, GH\} = \{F, G\}H + \{F, H\}G \tag{1.1.10}$$

и потому полностью определяется заданием скобок Пуассона для базисных величин

$$\{x^j, x^k\} = J^{jk}. \tag{1.1.11}$$

Уравнения движения (1.1.5) теперь можно переписать в виде

$$\dot{x}^j = \{H, x^j\}, \quad \dot{x} = \{H, x\} = X_H, \tag{1.1.12}$$

который является каноническим видом записи уравнений движения гамильтоновой системы. Таким образом, гамильтонова система характеризуется тройкой объектов $\{M, \ \{\ ,\}, H(x)\}$: фазовым пространством M, пуассоновой структурой $\{\ ,\}$ и гамильтонианом $H(x)$. Векторное поле $X_H = \{H, x\}$ называется гамильтоновым векторным полем, соответствующим гамильтониану H.

В рассматриваемом случае матрица J является невырожденной, так что существует обратная матрица

$$J^{-1} = -J, \tag{1.1.13}$$

определяющая невырожденную кососимметричную билинейную форму на фазовом пространстве:

$$\omega(x, y) = (x, J^{-1}y). \tag{1.1.14}$$

Невырожденная замкнутая 2-форма называется симплектической, а многообразие, снабженное такой формой, – симплектическим многообразием. Итак, в нашем случае фазовое пространство является симплектическим многообразием.

Предположим теперь, что мы сделали замену координат $y^j = f^j(x^k)$, где $f^j(x^k)$ – гладкие функции. Если вектор $x(t)$ удовлетворяет уравнениям Гамильтона (1.1.5), то вектор $y(t) = f(x(t))$ удовлетворяет уравнениям

$$\dot{y} = A\dot{x} = AJ \cdot \nabla_x H(x) = AJA' \nabla_y H(x(y)), \tag{1.1.15}$$

где A – матрица вида $A^i_j = \dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}$, а A' – матрица, транспонированная к A. Нетрудно видеть, что уравнения для $y(t)$ будут гамильтоновы в том и только том случае, когда

$$AJA' = J, \tag{1.1.16}$$

причем новый гамильтониан $\tilde{H}(y) = H(x(y))$. Преобразование, удовлетворяющее условию (1.1.16), называется каноническим. В простейшем случае, когда матрица A не зависит от x, множество таких матриц образует группу Ли, называемую вещественной симплектической группой – группой $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$*). Геометрия фазового пространства, движениями кото-

*) Эта группа впервые рассматривалась Абелем. В XIX веке она обычно называлась линейной комплексной группой, поскольку она оставляет инвариантным определенное семейство (линейный комплекс) прямых. Термин "симплектическая группа" ввел Г. Вейль [8]. См. по этому поводу статью [306].

рого являются преобразования группы Sp $(2n, \mathbb{R})$, называется *симплектической геометрией*. Она играет важную роль при рассмотрении гамильтоновых систем [1, 3, 9, 40, 62, 63, 66, 279]. Заметим, что условие (1.1.16) в терминах симплектической формы ω обычно обозначается как

$$f^*\omega = \omega \tag{1.1.17}$$

и ознаает, что преобразование f не меняет ω.

В примере, рассмотренном в настоящем разделе, фазовое пространство являлось евклидовым пространством: $M = \mathbb{R}^{2n}$. Это, однако, не всегда так. В ряде задач возникает необходимость в рассмотрении фазовых пространств, являющихся многообразиями. Такие пространства возникают, например, когда движение системы ограничено некоторыми связями. Так, например, фазовым пространством для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, является кокасательное расслоение группы SO(3) – группы ортогональных матриц третьего порядка с определителем, равным единице. В ряде случаев возникают также многообразия, не являющиеся кокасательными расслоениями. Рассмотрение таких систем необходимо также для ясного понимания структуры гамильтоновой механики вообще.

1.2. Пуассонова структура и гамильтоновы системы

Уже из простейшего примера было видно, что скобки Пуассона играют важную роль в гамильтоновой механике. Здесь мы рассмотрим понятие пуассоновой структуры для систем общего вида. (Относительно использования нестандартных пуассоновых структур для описания конкретных физических систем см. обзорные статьи [14, 26].)

Пусть M – многообразие и $\mathcal{F}(M)$ – пространство гладких функций на M. Мы будем говорить, что на M задана пуассонова структура, если задана операция, сопоставляющая паре функций $F(x)$ и $G(x) \in \mathcal{F}(M)$ новую функцию $\{F(x), G(x)\} \in \mathcal{F}(M)$, которая линейна по F и G и удовлетворяет условиям:

а) кососимметричность

$$\{F(x), G(x)\} = -\{G(x), F(x)\}, \tag{1.2.1}$$

б) тождество Якоби

$$\{F\{G,H\}\} + \{G\{H,F\}\} + \{H\{F,G\}\} = 0, \tag{1.2.2}$$

в) правило Лейбница

$$\{F, GH\} = \{F, G\}H + \{F, H\}G. \tag{1.2.3}$$

Но равенства (1.2.1) и (1.2.2) – это не что иное, как условия, которым должны удовлетворять элементы алгебры Ли. Таким образом, пространство $\mathcal{F}(M)$, снабженное скобкой Пуассона $\{,\}$, превращается в алгебру Ли (бесконечномерную!).

Пусть x^j – локальные координаты на M, а $H(x)$ – гладкая функция на M. Тогда на M определена динамическая система

$$\dot{x}^j = \{H, x^j\} = X_H^j. \tag{1.2.4}$$

Такая система называется гамильтоновой, а векторное поле $X_H = \{ X_H^j \}$ – гамильтоновым векторным полем. Для такой системы имеем

$$\dot{F} = \{H, F\}, \tag{1.2.5}$$

где $F(x)$ – произвольная гладкая функция на M. Отсюда видно, что величины, удовлетворяющие условию

$$\{H, F\} = 0, \tag{1.2.6}$$

являются величинами сохраняющимися – интегралами движения.

Заметим, что из тождества Якоби (1.2.2) следует, что скобка Пуассона двух интегралов движения снова является интегралом движения, так что интегралы движения тоже образуют алгебру Ли. Из (1.2.3) следует также, что произведение двух интегралов движения также является интегралом движения.

Алгебра интегралов движения является важной характеристикой гамильтоновой системы, она тесно связана с наличием у рассматриваемой системы группы симметрии. Если система обладает достаточно большим числом интегралов движения, то она является вполне интегрируемой, так что решение уравнений движения такой системы может быть, в принципе, сведено к вычислению интегралов – квадратурам. Именно такие системы и представляют для нас наибольший интерес.

Возвращаясь к пуассоновой структуре, рассмотрим скобки Пуассона вида

$$\{F(x), G(x)\} = \omega^{jk}(x)\, \partial_j F\, \partial_k G, \qquad \partial_j = \partial/\partial x^j. \tag{1.2.7}$$

Тогда правило Лейбница (1.2.3) автоматически выполняется, условие (1.2.1) будет эквивалентно условию

$$\omega^{jk}(x) = -\omega^{kj}(x), \tag{1.2.8}$$

а условие (1.2.2) примет вид

$$\omega^{jk}\, \partial_k\, \omega^{lm} + \omega^{lk}\, \partial_k\, \omega^{mj} + \omega^{mk}\, \partial_k\, \omega^{jl} = 0. \tag{1.2.9}$$

Уравнения движения (1.2.4) принимают вид

$$\dot{x}^j = X_H^j = \omega^{jk}(x)\partial_k H, \qquad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{1.2.10}$$

а коммутатор двух гамильтоновых векторных полей X_F и X_H дается формулой

$$[X_F, X_H] = X_{\{F, H\}}. \tag{1.2.11}$$

(Подчеркнем, что мы не требуем, чтобы тензор $\omega^{jk}(x)$, входящий в определение скобки Пуассона (1.2.7), был невырожден. В частности, пространство M может быть и нечетномерным.)

Рассмотрим основные типы скобок Пуассона.

1. Простейшим здесь является случай, когда тензор $\omega^{jk}(x)$ от координаты x не зависит. Этот случай с помощью линейной замены переменных сводится к случаю, рассмотренному в предыдущем разделе.

2. Следующий по сложности (и наиболее важный) случай – это случай линейной зависимости $\omega^{jk}(x)$ от x (мы предполагаем здесь, что прост-

ранство M является линейным):

$$\omega^{jk}(x) = C_l^{jk} x^l. \tag{1.2.12}$$

Нетрудно видеть, что в этом случае условия (1.2.8) и (1.2.9) совпадают с условием кососимметричности и тождеством Якоби для структурных постоянных C_l^{jk} алгебры Ли, так что величины C_l^{jk} должны совпадать со структурными постоянными некоторой алгебры Ли. Скобка Пуассона принимает здесь вид

$$\{F(x),\ G(x)\} = C_l^{jk} x^l \partial_j F \partial_k G \tag{1.2.13}$$

и называется скобкой Ли–Пуассона.

Рассмотрим этот случай более подробно. Пусть $\mathcal{G}$ – алгебра Ли, $\mathcal{G}^*$ – пространство, дуальное к ней, т.е. пространство линейных функционалов на $\mathcal{G}$. Тогда пространство $\mathcal{F}(\mathcal{G}^*)$ – пространство гладких функций на $\mathcal{G}^*$ – обладает естественной пуассоновой структурой. Опишем ее.

Пусть e_j – базис в $\mathcal{G}$, f^k – дуальный к нему базис в $\mathcal{G}^*$: $\langle f^k, e_j \rangle = \delta_j^k$, $\langle x, \xi \rangle$ – значение функционала $x \in \mathcal{G}^*$ на элементе $\xi \in \mathcal{G}$. Пусть C_{jk}^l – структурные постоянные алгебры Ли $\mathcal{G}$ в базисе e_j: $[e_j, e_k] = C_{jk}^l e_l$, а $x = x_j f^j$ – элемент из $\mathcal{G}^*$. Тогда пространство $\mathcal{F}(\mathcal{G}^*)$ является пространством функций от переменных x_j: $F \in \mathcal{F}(\mathcal{G}^*)$, $F = F(x_j)$. Для величин x_j скобку Пуассона зададим формулой

$$\{x_j, x_k\} = C_{jk}^l x_l, \tag{1.2.14}$$

и, кроме того, потребуем выполнения правила Лейбница (1.2.3). Тогда мы придем к выражению для скобки Ли–Пуассона двух функций F и G

$$\{F, G\} = C_{jk}^i x_i \partial^j F \partial^k G. \tag{1.2.15}$$

Нетрудно проверить, что тождество Якоби (1.2.2) при этом является следствием тождества Якоби в алгебре Ли $\mathcal{G}$

$$[\xi[\eta, \zeta]] + [\eta[\zeta, \xi]] + [\zeta[\xi, \eta]] = 0. \tag{1.2.16}$$

Здесь ξ, η и $\zeta \in \mathcal{G}$.

Заметим, что линейные функции на $\mathcal{G}^*$ (которые можно рассматривать как элементы алгебры $\mathcal{G}$) образуют подалгебру относительно скобки Пуассона, которая совпадает с исходной алгеброй Ли $\mathcal{G}$.

Отметим также, что скобка Пуассона двух полиномиальных функций на $\mathcal{G}^*$ снова является полиномиальной функцией, так что пространство $\mathcal{P}(\mathcal{G}^*)$ всех полиномов на $\mathcal{G}^*$ образует подалгебру Ли.

Пусть теперь в пространстве $\mathcal{G}^*$ задана динамическая система с гамильтонианом $H(x)$ и M – подмногообразие в $\mathcal{G}^*$ такое, что вектор X_H во всех точках этого подмногообразия касателен к M. Такое подмногообразие называется инвариантным подмногообразием рассматриваемой динамической системы.

Обычно в пространстве $\mathcal{F}(\mathcal{G}^*)$ существуют такие функции $F_\alpha(x)$, что

$$\{x_k,\ F_\alpha(x)\} \equiv 0. \tag{1.2.17}$$

Выбирая из них функционально независимые и приравнивая их постоянным

$$F_\alpha(x) = c_\alpha, \tag{1.2.18}$$

получем подмногообразие в $\mathcal{G}^*$, которое, как нетрудно видеть, является инвариантным подмногообразием для любого гамильтониана $H(x)$. В пространстве $\mathcal{G}^*$ имеется естественное действие группы G (с помощью коприсоединенного представления этой группы), и нетрудно видеть, что рассматриваемое подмногообразие инвариантно относительно этого действия, т.е. является орбитой коприсоединенного представления или же объединением ряда таких орбит. В частности, любая орбита является инвариантным многообразием и обладает невырожденной пуассоновой структурой.

Примеры

1. Пусть $M = \mathbb{R}^{2n}$, $M = \{x : x = (p, q), p = (p_1, \ldots, p_n), q = (q_1, \ldots \ldots, q_n)\}$.

Тогда формула

$$\{F, G\} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} - \frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} \right) \tag{1.2.19}$$

задает на $\mathcal{F}(M)$ обычную пуассонову структуру.

2. $M = \mathcal{G}^*$ – пространство, дуальное алгебре Гейзенберга–Вейля $\mathcal{G} = \mathcal{W}_n$: $M = \{x : x = (p, q, r), p = (p_1, \ldots, p_n), q = (q_1, \ldots, q_n)\}$. Тогда формулы

$$\begin{aligned} \{p_j, p_k\} &= \{q_j, q_k\} = 0, \\ \{p_j, q_k\} &= \delta_{jk} r, \ \{p_j, r\} = \{q_k, r\} = 0 \end{aligned} \tag{1.2.20}$$

с учетом правила Лейбница задают на M пуассонову структуру. Эта структура вырождена и на орбитах коприсоединенного представления $\mathcal{O}_c = \{x : x = (p, q, r), r = c \neq 0\}$ отличается от структуры (1.2.19) лишь постоянным множителем c.

3. Скобка Пуассона для частицы во "внешнем магнитном поле" $F_{ij}(x)$ определяется формулой [14]

$$\{q^i, q^j\} = 0, \ \{q^i, p_j\} = \delta^i_j, \ \{p_i, p_j\} = F_{ij}(q), \ i, j = 1, \ldots, n, \tag{1.2.21}$$

где 2-форма

$$F = F_{ij}(q) dq^i \wedge dq^j \tag{1.2.22}$$

замкнута, $dF = 0$. Соответствующая этой скобке Пуассона симплектическая форма ω имеет вид

$$\omega = \sum_j dp_j \wedge dq^j + \sum_{i,j} F_{ij}(q) dq^i \wedge dq^j. \tag{1.2.23}$$

Уравнения движения в рассматриваемом случае имеют вид

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q^j} + F_{jk} \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{q}^j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \tag{1.2.24}$$

и при $n = 2$ или $n = 3$ описывают заряженную частицу во "внешнем магнитном поле F_{ij}". Отметим, что в области, где $F = dA$ ($A = A_j dq^j$ – 1-форма), скобка (1.2.21) приводится к стандартному виду с $F_{ij}(x) \equiv 0$.

К виду (1.2.21) обычно глобально приводятся скобки Пуассона для кокасательных расслоений $M = T^*N$, удовлетворяющие дополнительному условию: любые функции F и G, зависящие лишь от координат базы N, имеют нулевую скобку Пуассона $\{F, G\} = 0$.

4. $M = \mathcal{G}^*$ – пространство, дуальное алгебре Ли группы SO(3), $M = \{x : x = (x_1, x_2, x_3)\}$. Пуассонова структура задается формулой

$$\{x_j, x_k\} = \epsilon_{jkl}x_l, \quad j, k, l = 1, 2, 3, \tag{1.2.25}$$

где ϵ_{jkl} – полностью кососимметричный тензор, $\epsilon_{123} = 1$. Отсюда нетрудно получить явную формулу

$$\{F(x), G(x)\} = \left(x, \left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial x}\right]\right). \tag{1.2.26}$$

Здесь $[x, y]$ – векторное произведение векторов x и y. Пуассонова структура вырождена и на орбитах коприсоединенного представления $\mathcal{O}_r = \{x : |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$ переходит в структуру

$$\{F(\theta, \varphi), G(\theta, \varphi)\} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial G}{\partial \varphi} - \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial G}{\partial \theta}\right). \tag{1.2.27}$$

Здесь $x_1 = r\sin\theta\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\theta\sin\varphi$, $x_3 = r\cos\theta$. Динамика в M задаётся уравнением

$$\dot{x} = \left[x, \frac{\partial H}{\partial x}\right]. \tag{1.2.28}$$

Отметим, что для случая квадратичного гамильтониана

$$H = \frac{1}{2}\Sigma a_j x_j^2 \tag{1.2.29}$$

эти уравнения переходят в уравнения Эйлера, описывающие вращение свободного твердого тела вокруг неподвижной точки.

5. Пусть $M = \mathcal{G}^*$ – пространство, дуальное алгебре Ли группы E (3) – группы движений трехмерного евклидова пространства, $M = \{(x, y) : x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3)\}$.

Пуассонова структура задается формулами

$$\{x_j, x_k\} = \epsilon_{jkl}x_l, \quad \{x_j, y_k\} = \epsilon_{jkl}y_l, \quad \{y_j, y_k\} = 0. \tag{1.2.30}$$

Или, в более явном виде,

$$\{F(x, y), G(x, y)\} = \left(x, \left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial x}\right]\right) + \left(y, \left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}\right]\right) + \left(y, \left[\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial x}\right]\right). \tag{1.2.31}$$

Эта пуассонова структура вырождена и становится невырожденной на орбитах коприсоединенного представления

$$\mathcal{O}_{a,b} = \{(x, y) : |y|^2 = a^2,\ (x, y) = ab\}, \quad a > 0. \tag{1.2.32}$$

Уравнения динамики в M имеют вид

$$\dot{x} = \left[x, \frac{\partial H}{\partial x}\right] + \left[y, \frac{\partial H}{\partial y}\right], \quad \dot{y} = \left[y, \frac{\partial H}{\partial x}\right]. \tag{1.2.33}$$

Отметим, что для случая квадратичного гамильтониана

$$H = \frac{1}{2}\Sigma\,(a_j x_j^2 + 2b_j x_j y_j + c_j y_j^2) \tag{1.2.34}$$

эти уравнения совпадают с уравнениями Кирхгофа, описывающими движение твердого тела в идеальной жидкости.

В заключение этого раздела приведем краткий исторический комментарий. Общая теория скобок Пуассона (так же, как и ряд других важных понятий гамильтоновой механики) была развита в локальной форме Софусом Ли (см. [54–57, 307]; там же можно найти и случай линейной зависимости $\omega^{jk}(x)$ от x). Выражение для линейной скобки Пуассона (1.2.12) было переоткрыто Березиным в 1967 г. [69]. На ином языке, языке симплектических многообразий, оно встречалось также в работах Кириллова и Костанта по геометрическому квантованию (см. [17, 79]). Скобки Пуассона с более сложной зависимостью $\omega^{jk}(x)$ от x в настоящее время только начинают изучаться. По-видимому, первый пример таких скобок с квадратичной зависимостью от x был найден в работе [105]. Дальнейшее развитие теории скобок Пуассона осуществлено в работе [76].

1.3. Симплектические многообразия

В этом разделе будет рассмотрен важный класс фазовых пространств, для которых тензор $\omega^{jk}(x)$ не вырожден. Такие многообразия обладают рядом специфических свойств и называются симплектическими многообразиями.

Определение. Симплектическим многообразием (M, ω) называется гладкое многообразие M, на котором задана замкнутая невырожденная дифференциальная 2-форма ω. В локальных координатах x^j имеем

$$\omega = \omega_{jk}(x)dx^j \wedge dx^k. \tag{1.3.1}$$

Условие невырожденности означает, что $\det(\omega_{jk}(x)) \neq 0$ во всех точках многообразия M, следовательно, существует обратная к $\omega_{jk}(x)$ (кососимметричная) матрица $\omega^{jk}(x)$. Поэтому многообразие M должно быть четномерно.

Условие замкнутости формы $(d\omega = 0)$ в локальных координатах имеет вид

$$\partial_k\omega_{ij} + \partial_i\omega_{jk} + \partial_j\omega_{ki} = 0, \quad \partial_j = \partial/\partial x^j. \tag{1.3.2}$$

Оно эквивалентно условию (1.2.9) для тензора ω^{jk}; так что мы можем определить пуассонову структуру формулой (1.2.7) или же как

$$\{F, G\} = \omega(X_F, X_G). \tag{1.3.3}$$

Отметим, что все симплектические многообразия локально устроены одинаково. Точную формулировку этого утверждения дает

Теорема Дарбу [155, 1] *). Пусть x – произвольная точка симплектического моногообразия (M, ω). Тогда в некоторой окрестности x можно выбрать такую систему локальных координат $(p_1, \ldots, p_n, q^1, \ldots, q^n)$, что форма ω примет стандартный вид

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} dp_j \wedge dq^j. \tag{1.3.4}$$

С помощью этой теоремы можно распространить на все симплектические многообразия любое утверждение локального характера, инвариантное относительно симплектических преобразований и доказанное для стандартного фазового пространства $(M = \mathbb{R}^{2n}, \omega = \sum_{j=1}^{n} dp_j \wedge dq^j)$. В частности, отсюда сразу же следует, что любые два симплектических многообразия одинаковой размерности локально симплектически изоморфны друг другу. Относительно геометрии симплектических пространств см., например, [1, 3, 9, 40, 66]. Заметим, что общее пуассоново многообразие с вырожденной пуассоновой структурой ω^{jk} расслаивается на симплектические подмногообразия, на каждом из которых тензор ω^{jk} уже не вырожден (см. [79, 307]).

Симплектические многообразия обладают специфическими топологическими свойствами. Отметим лишь одно из них.

Пусть (M, ω) – компактное симплектическое многообразие размерности $2n$. Тогда внешняя n-степень формы ω – ω^n является формой объема этого многообразия, так что класс когомологий де Рама $[\omega^n]$ в $H^{2n}(M, \mathbb{R})$, к которому принадлежит форма ω^n, отличен от нуля. Заметим, что при этом все степени формы ω вплоть до ω^n должны быть отличны от нуля и, следовательно, все группы когомологий $H^{2j}(M, \mathbb{R})$, $j = 1, \ldots, n$, должны быть нетривиальны.

Отметим три больших класса симплектических многообразий.

1. Если N – произвольное многообразие, то кокасательное расслоение T^*N, рассматриваемое как многообразие, несет на себе каноническую симплектическую структуру ω, являющуюся обобщением структуры на пространстве $\mathbb{R}^{2n} \approx T^*\mathbb{R}^n$ [1, 40].

2. Любое гладкое комплексное алгебраическое многообразие M, т.е. многообразие, заданное системой полиномиальных уравнений в комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^N$, является симплектическим и, более того, обладает естественной симплектической структурой [1].

Действительно, как хорошо известно, N-мерное комплексное пространство $\mathbb{C}P^N$ является симплектическим многообразием с канонической 2-формой Ω. Пусть $i\colon M \to \mathbb{C}P^N$ – вложение комплексного многообразия M в пространство $\mathbb{C}P^N$. Такое отображение индуцирует отображение i^* в пространстве форм $i^*\colon H^*(\mathbb{C}P^N) \to H^*(M)$, и мы можем

---

*) Другой вариант теоремы Дарбу имеется в работе [305].

построить 2-форму ω на M

$$\omega = i^*\Omega. \qquad (1.3.4')$$

Можно показать, что эта форма является замкнутой и невырожденной и, следовательно, задает симплектическую структуру на M (см. [1]).

Известно также (см., например, [37]), что любое гладкое комплексное алгебраическое многообразие является кэлеровым многообразием. Это значит, что многообразие M допускает кэлерову метрику, т.е. эрмитову метрику

$$ds^2 = h_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu d\bar{z}^\nu, \quad \bar{h}_{\mu\bar{\nu}} = h_{\nu\bar{\mu}}, \qquad (1.3.5)$$

мнимая часть которой

$$\omega = \frac{1}{2i} h_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu \qquad (1.3.6)$$

является замкнутой 2-формой. Эту форму и можно выбрать в качестве симплектической формы многообразия M.

Таким образом, не только алгебраическое, но и любое кэлерово многообразие является симплектическим. Обратное утверждение, однако, не верно. Именно, В. Терстоном был найден пример четырехмерного компактного симплектического неодносвязного многообразия, не являющегося кэлеровым (см. [296, 66] и приложение А). Существуют примеры и односвязных симплектических некэлеровых многообразий ([244] и приложение А).

3. Еще одним важным классом симплектических многообразий являются орбиты коприсоединенного представления групп Ли [17].

Пусть G – группа Ли, $\mathcal{G}$ – ее алгебра Ли, $\mathcal{G}^*$ – пространство, дуальное к $\mathcal{G}$, т.е. пространство линейных функционалов на $\mathcal{G}$. Группа G действует естественно на алгебре Ли $\mathcal{G}$, и это действие называется присоединенным представлением Ad группы G. Соответственно в пространстве $\mathcal{G}^*$ действует коприсоединенное представление Ad^* группы G. Действуя на какую-либо точку f пространства $\mathcal{G}^*$ операторами $\mathrm{Ad}^*(g)$ для всех g, получим орбиту O_f коприсоединенного представления, проходящую через точку f. Любая орбита является симплектическим многообразием и форма ω^f на ней задается условием

$$\omega^f(X_\xi, X_\eta) = \langle f, [\xi, \eta]\rangle, \qquad (1.3.7)$$

где ξ и $\eta \in \mathcal{G}$, X_ξ и X_η – соответствующие им векторные поля на орбите, взятые в точке x, $\langle f, \xi\rangle$ – значение функционала f на элементе $\xi \in \mathcal{G}$. Более подробно этот класс симплектических многообразий будет рассмотрен в разделе 1.4. Здесь мы отметим лишь, что любая орбита коприсоединенного представления компактной группы Ли является кэлеровым многообразием [126].

Отметим еще следующий способ построения новых симплектических многообразий. Пусть на симплектическом многообразии M действует дискретная подгруппа симплектических преобразований $\Gamma = \{\gamma\}$, причем это действие является эффективным (т.е. лишь единичный элемент e группы Γ действует как тождественное преобразование) и не имеет неподвижных точек (т.е. при $\gamma \neq e$ для всех $x \in M$, $\gamma x \neq x$). Тогда факторпространство $\widetilde{M} = M/\Gamma$ является гладким симплектическим многообразием. Отметим, что если многообразие M односвязно, то фундаментальная группа π_1 многообразия $\widetilde{M}$ изоморфна группе Γ: $\pi_1(\widetilde{M}) = \Gamma$, а первая группа когомологий $H^1(\widetilde{M}, \mathbb{Z}) \approx \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$, где $[\Gamma, \Gamma]$ – коммутант группы Γ.

Примеры

1. Пусть $M = \mathbb{R}^{2n}$ – евклидово пространство размерности $2n$:

$$M = \{ x : x = (p, q),\ p = (p_1, \ldots, p_n),\ q = (q^1, \ldots, q^n)\}.$$

Пространство M становится симплектическим после задания на нем стандартной 2-формы

$$\omega = dp_j \wedge dq^j. \tag{1.3.8}$$

2. $M = \mathbb{R}^1 \times S^1$ – двумерный цилиндр с координатами $p \in \mathbb{R}^1, q \in \in S^1, 0 \leqslant q < 2\pi$ (S^1 – окружность). Здесь

$$\omega = dp \wedge dq. \tag{1.3.9}$$

Многообразие M получается путем факторизации двумерной плоскости $\{(p, q)\}$ по дискретной подгруппе сдвигов $\Gamma = \{\gamma_n\}$, где γ_n: $(p, q) \to \to (p, q + 2\pi n)$.

3. $M = T^2 = S^1 \times S^1$ – двумерный тор с координатами $0 \leqslant q < 2\pi$, $0 \leqslant p < 2\pi$; форма ω имеет вид (1.3.9). Это простейший пример компактного симплектического многообразия. Это пространство также получается из двумерной плоскости путем факторизации по подгруппе $\Gamma = = \{\gamma_{mn}\}$, где γ_{mn}: $(p, q) \to (p + 2\pi m, q + 2\pi n)$.

4. $M = S^2$ – двумерная сфера с обычными координатами θ, φ, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ и элементом длины

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2. \tag{1.3.10}$$

Форма ω определяет элемент площади на сфере:

$$\omega = \sin\theta d\theta \wedge d\varphi. \tag{1.3.11}$$

Если с помощью стереографической проекции отобразить сферу S^2 на плоскость Римана комплексной переменной z,

$$z = x + iy = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} e^{i\varphi}, \tag{1.3.12}$$

то внешняя форма принимает вид

$$\omega = -2i(1 + |z|^2)^{-2} dz \wedge d\bar{z}. \tag{1.3.13}$$

Отметим, что многообразие M является неплоским (нелинейным) компактным симплектическим многообразием.

5. Многообразия в примерах 3 и 4 являются частными случаями более общего класса симплектических многообразий. Именно, любое двумерное многообразие с 2-формой ω, нигде не обращающейся в нуль на нем, является симплектическим.

6. $M = \mathcal{L}^2$ – плоскость Лобачевского, которую можно реализовать, например, в виде единичного круга $D = \{z : |z| < 1\}$ на плоскости комп-

лексного переменного z. Форма ω имеет вид

$$\omega = (-2i)(1 - |z|^2)^{-2} dz \wedge d\bar{z}. \qquad (1.3.14)$$

Отметим, что область D можно рассматривать как стереографическую проекцию верхней полости двухполостного гиперболоида, вложенного в терхмерное псевдоевклидово пространство.

7. Пусть M – орбита коприсоединенного представления $E(3)$ – группы движений трехмерного евлклидова пространства. Как уже отмечалось ранее, орбита M выделяется в шестимерном пространстве с координатами x_j и y_k, $j, k = 1, 2, 3$, уравнениями

$$y^2 = a^2, \quad (xy) = ab. \qquad (1.3.15)$$

Скобка Пуассона имеет вид (1.2.30) и на многообразии M невырождена. Замена

$$z_j = x_j - \frac{b}{a} y_j \qquad (1.3.16)$$

устанавливает изоморфизм M с кокасательным расслоением T^*S^2 к двумерной сфере $S^2\{y, z: y^2 = a^2, (zy) = 0\}$. Оказывается, что скобку Пуассона на T^*S^2, индуцированную скобкой (1.2.30), можно глобально привести к виду (1.2.21). Соответствующая замена (см. [93, 14]) имеет вид

$$\begin{gathered} y_1 = a\cos\theta\cos\psi, \quad y_2 = a\cos\theta\sin\psi, \quad y_3 = a\sin\theta, \\ z_1 = y_\psi \operatorname{tg}\theta\cos\psi - y_\theta\sin\psi, \quad z_2 = y_\psi\operatorname{tg}\theta\sin\psi + y_\theta\cos\psi, \quad z_3 = -y_\psi, \end{gathered} \qquad (1.3.17)$$

где

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqslant \psi < 2\pi.$$

Из формулы (1.3.17) следует, что

$$\begin{gathered} \{\theta, \psi\} = \{y_\theta, \psi\} = \{y_\psi, \theta\} = 0, \quad \{\theta, y_\theta\} = \{\psi, y_\psi\} = 1, \\ \{y_\theta, y_\psi\} = b\cos\theta, \end{gathered} \qquad (1.3.18)$$

а соответствующая 2-форма ω имеет вид

$$\omega = d\theta \wedge dy_\theta + d\psi \wedge dy_\psi + b\cos\theta d\theta \wedge d\psi = d\eta^j \wedge d\xi_j + F, \qquad (1.3.19)$$

где

$$\eta^1 = \theta, \quad \eta^2 = \psi, \quad \xi_1 = y_\theta, \quad \xi_2 = y_\psi, \quad F = b\cos\theta d\theta \wedge d\psi. \qquad (1.3.20)$$

Интеграл от формы F (или ω) по базисному циклу $[S^2] \in H_2(T^*S^2) = \mathbb{Z}$ имеет вид

$$\iint_{S^2} F = \iint_{S^2} \omega = 4\pi b. \qquad (1.3.21)$$

Таким образом, мы получаем стандартную скобку Пуассона на T^*S^2, дополнительно искаженную магнитным полем F. При $b \neq 0$ эффективное магнитное поле отлично от нуля и представляет собой "монополь Дирака" (неквантованный).

Как уже отмечалось выше, симплектические многообразия являются естественными фазовыми пространствами для гамильтоновых систем. Рассмотрим простейшие свойства таких систем (относительно подробного рассмотрения см. монографии [1, 2, 40]).

Пусть многообразие M – симплектическое с формой $\omega = \omega_{jk}(x)dx^j \wedge \wedge\, dx^k$. Наличие тензоров ω_{jk} и ω^{kl} позволяет установить соответствие между 1-формами $\theta = a_j(x)dx^j$ и векторными полями $X = \{X^j\}$ на M. Заметим, что векторное поле X можно рассматривать как дифференциальный оператор первого порядка на M:

$$X = X^j\partial_j, \quad \partial_j = \partial/\partial x^j. \tag{1.3.22}$$

При этом векторному полю $X = X^j\partial_j$ соответствует 1-форма $\theta = \omega(X) = \omega_{jk}X^j dx^k$.

Определение 1. Векторное поле X на симплектическом многообразии (M, ω) называется гамильтоновым, если соответствующая ему 1-форма $\theta = \omega(X) = a_j dx^j$ является замкнутой.

В локальных координатах x^j условие гамильтоновости поля $X = X^j\partial_j$ имеет вид

$$\partial_k a_j - \partial_j a_k = 0, \quad a_j = \omega_{jk}X^k. \tag{1.3.23}$$

Нетрудно видеть, что любое гамильтоново векторное поле X сохраняет форму ω:

$$L_X\omega = 0, \tag{1.3.24}$$

где L_X – производная по направлению поля X. Отметим, что обратное утверждение также справедливо.

При некоторых дополнительных предположениях гамильтоново векторное поле X генерирует однопараметрическую группу $\{g_t\}$ симплектических преобразований многообразия M – фазовый поток. Такой поток оставляет инвариантной форму ω, т.е. $g_t^*\omega = \omega$.

Определение 2. Векторное поле X называется строго гамильтоновым, если соответствующая ему форма $\theta = \omega(X)$ является точной, т.е. $\omega(X) = dH$, где H – функция на симплектическом многообразии M (функция Гамильтона, или гамильтониан).

Обратно, если H – функция на M, то векторное поле $X_H = \omega^{-1} \cdot dH$, соответствующее 1-форме, является строго гамильтоновым.

Приведем простой пример гамильтонова векторного поля, не являющегося строго гамильтоновым. Пусть $M = S^1 \times S^1$ – двумерный тор, $\omega = dp \wedge dq$, $0 \leqslant p < 2\pi$, $0 \leqslant q < 2\pi$. Поле $X = a\dfrac{\partial}{\partial q} + b\dfrac{\partial}{\partial p}$ (a и b – константы) является гамильтоновым, но не строго гамильтоновым. Нетрудно видеть, что это связано с топологическими свойствами многообразия M, а именно с тем, что первая группа когомологий $H^1(M; \mathbb{R})$ нетривиальна: $H^1(M; \mathbb{R}) \neq 0$.

Мы будем в основном рассматривать случаи, когда поле X строго гамильтоново и динамика на M задается функцией Гамильтона $H(x)$, а уравнения динамики в локальных координатах имеют вид

$$\omega_{jk}\dot{x}^k = \partial_j H \text{ или } \dot{x}^k = \omega^{kl}\partial_l H. \tag{1.3.25}$$

Еще раз отметим, что такая форма записи уравнений была впервые использована (в частном случае) Лагранжем в 1808 г. (см. [230, 231]).

Пример

Пусть $M = \mathbb{R}^{2n}$, $\omega = dp_j \wedge dq^j$, $H = H(p, q)$. Тогда уравнения динамики имеют вид обычных уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q^j}, \quad \dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k}. \tag{1.3.26}$$

Пусть X_H – строго гамильтоново векторное поле, порожденное функцией Гамильтона H. Тогда, как нетрудно видеть, поток, генерируемый X_H, оставляет функцию H инвариантной:

$$X_H \cdot H = \omega(X_H, X_H) = 0. \tag{1.3.27}$$

Иными словами, функция H (энергия системы) не зависит от времени – является интегралом движений уравнений динамики.

Далее, поскольку векторные поля можно рассматривать как дифференциальные операторы 1-го порядка на M, для них определена операция коммутирования, относительно которой они образуют алгебру Ли. Эта алгебра Ли бесконечномерна. Отметим, что коммутатор двух гамильтоновых векторных полей является строго гамильтоновым векторным полем. Таким образом, строго гамильтоновы векторные поля образуют инвариантную подалгебру этой алгебры. Факторалгебра одной алгебры по другой является алгеброй одномерных когомологий $H^1(M, \mathbb{R})$ пространства M.

Отметим еще, что в рассматриваемом нами случае для двух произвольных функций F и H на M имеет место тождество

$$X_{\{F, H\}} = [X_F, X_H]. \tag{1.3.28}$$

1.4. Однородные симплектические многообразия

Нас будут интересовать гамильтоновы системы, обладающие достаточно большим числом интегралов движения. Существование таких интегралов во всех известных случаях является следствием симметрии рассматриваемой динамической системы, хотя иногда эта связь и не является такой простой, как, например, связь, описываемая теоремой Э. Нётер. Поэтому нас будут интересовать в первую очередь симплектические многообразия, обладающие симметрией.

Определение. Симплектическое многообразие (M, ω) называется однородным, если оно допускает транзитивное действие некоторой группы Ли G, действующей как группа симплектических преобразований. Иными словами, действие группы G–Φ_g: $M \to M$ является симплектическим (оставляет инвариантной форму ω, $\Phi_g^* \omega = \omega$).

При этом однопараметрической подгруппе группы G отвечает фазовый поток на M, а элементу ξ алгебры Ли $\mathcal{G}$ отвечает гамильтоново поле X_ξ на M. Если все поля X_ξ, $\xi \in \mathcal{G}$ являются строго гамильтоновыми и соответствующие им функции H_ξ можно выбрать так, чтобы

$$H_{[\xi, \eta]} = \{H_\xi, H_\eta\}, \quad H_{\xi + \eta} = H_\xi + H_\eta \tag{1.4.1}$$

(т.е. чтобы соответствие $\xi \to H_\xi$ являлось гомоморфизмом алгебры Ли $\mathcal{G}$ и алгебры Ли функций на M), то мы назовем M строго однородным симплектическим многообразием [17], а действие группы Ли G на M – гамильтоновым действием. Отметим, что для симплектического действия группы Ли G на M в общем случае мы имеем вместо (1.4.1) формулу

$$H_{[\xi,\eta]} = \{H_\xi, H_\eta\} + c(\xi, \eta). \tag{1.4.1'}$$

Существование неустранимой величины $c(\xi, \eta)$ связано с нетривиальностью второй группы когомологий алгебры Ли $\mathcal{G}$.

Оказывается, что класс однородных симплектических многообразий по существу совпадает с классом орбит коприсоединенного представления группы Ли.

Т е о р е м а 1.4.1. [17]. Любое однородное симплектическое многообразие, группой движений которого является связная группа Ли G, локально изоморфно орбите коприсоединенного представления самой группы G или ее центрального расширения с помощью $\mathbb{R}$. При этом любая орбита группы G является строго однородным симплектическим многообразием.

В качестве иллюстрации этой теоремы рассмотрим двумерный тор $M = T^2$. Он является однородным симплектическим многообразием, на котором транзитивно действует двумерная группа трансляций G. Однако M не является орбитой коприсоединенного представления группы G – эта группа абелева и все ее орбиты коприсоединенного представления нульмерны. Пусть $\widetilde{G}$ – центральное расширение группы G – так называемая группа Гейзенберга–Вейля (ее алгебра Ли порождена тремя элементами

$$e_1, e_2, e_3; \quad [e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0).$$

У группы $\widetilde{G}$ есть орбиты коприсоединенного представления типа $\widetilde{M} = \mathbb{R}^2$; тор T^2 получается из $\widetilde{M}$ путем факторизации по дискретной подгруппе Γ группы G и лишь локально изоморфен орбите $\widetilde{M}$.

Перейдем к более подробному рассмотрению однородных симплектических многообразий.

Орбиты коприсоединенного представления групп Ли. Пусть G – группа Ли, $\mathcal{G}$ – ее алгебра Ли, $\mathcal{G}^*$ – пространство, дуальное к $\mathcal{G}$, т.е. пространство линейных функционалов на $\mathcal{G}$. Если алгебра Ли $\mathcal{G}$ реализована в виде алгебры левоинвариантных векторных полей на G; то естественно реализовать $\mathcal{G}^*$ в виде пространства левоинвариантных дифференциальных форм на G. Коприсоединенное представление $\mathrm{Ad}^*(g)$ группы G действует при этом в пространстве 1-форм с помощью правых сдвигов. Отметим, что в случае простой группы мы можем идентифицировать $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}^*$ с помощью метрического тензора Киллинга–Картана: $g_{ij} = -C^l_{ik}C^k_{jl}$, а в случае матричной группы можем представить линейный функционал l на $\mathcal{G}$ как $l(X) = \mathrm{tr}(AX)$ для некоторого $A \in \mathcal{G}$.

Рассмотрим группу G как однородное пространство, на котором сопряжениями действует эта же группа

$$\Phi_g \colon h \to ghg^{-1}. \tag{1.4.2}$$

Такое действие переводит единичный элемент e группы G в себя, Φ_g: $e \to e$. Поэтому линеаризация действия в точке $h = e$ определяет действие группы G на ее алгебре Ли. Это и есть присоединенное представление группы G, $\mathrm{Ad}(g): \mathcal{G} \to \mathcal{G}$. Присоединенное представление индуцирует действие $\mathrm{Ad}^*(g)$ группы G в пространстве $\mathcal{G}^*$. Это и есть коприсоединенное представление группы G.

Пусть f – точка пространства $\mathcal{G}^*$. Действуя на нее преобразованиями $\mathrm{Ad}^*(g)$, где g пробегает всю группу, получаем орбиту $\mathcal{O}_f$, проходящую через точку f. Как уже отмечалось выше, любая орбита является однородным и, более того, строго однородным симплектическим многообразием.

Пусть ξ и $\eta \in \mathcal{G}$, а X_ξ и X_η – порождаемые ими векторные поля в пространстве $\mathcal{G}^*$. Тогда симплектическая форма ω^f на орбите $\mathcal{O}_f$ определяется условием

$$\omega^f(X_\xi, X_\eta) = \langle f, [\xi, \eta] \rangle, \qquad (1.4.3)$$

где $\langle f, \xi \rangle$ – значение функционала f на элементе $\xi \in \mathcal{G}$. Как уже отмечалось в предыдущем разделе, пуассонова структура в пространстве $\mathcal{F}(\mathcal{G}^*)$ и, в частности, в пространстве $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ дается скобкой Ли–Пуассона [54–57]

$$\{F(x), G(x)\} = C^l_{jk} x_l \partial^j F \partial^k G, \qquad (1.4.4)$$

где C^l_{jk} – структурные постоянные алгебры Ли $\mathcal{G}$, $\partial^j = \partial/\partial x_j$, x_j – координаты точки x в пространстве $\mathcal{G}^*$. Заметим, что имеется естественное вложение орбиты в пространство $\mathcal{G}^*$, из которого она в случае полупростой группы Ли выделяется набором полиномиальных уравнений*)

$$P_{n_j}(x) = c_j, \quad x \in \mathcal{G}^*, \quad j = 1, \ldots, l, \qquad (1.4.5)$$

где $\{P_{n_j}(x)\}$ – набор генераторов алгебры инвариантных полиномов, причем степень полинома P_{n_j} равна n_j, а целые числа $(n_j - 1)$ называются экспонентами алгебры $\mathcal{G}$. При этом в случае полупростой алгебры Ли $\mathcal{G}$ существует невырожденное G-инвариантное скалярное произведение в $\mathcal{G}$, с помощью которого можно отождествить пространства $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}^*$.

Примеры

1. $G = SO(3) \approx SU(2)$ – группа вращений терхмерного пространства, $\mathcal{G}^* \approx \mathcal{G} = \{x \colon x = (x_1, x_2, x_3)\}$. Орбиты здесь – двумерные сферы $S^2 = \{x \colon x^2 = r^2\}$. Начало координат также является орбитой.

2. G – простейшая некомпактная простая группа Ли – группа $SU(1,1) \approx SO(2,1) \approx SL(2,\mathbb{R}) \approx Sp(2,\mathbb{R})$; $SO(2,1)$ – трехмерная группа Лоренца,

$$\mathcal{G}^* \simeq \mathcal{G} = \{x \colon x = (x_0, x_1, x_2)\},$$

$$\{x_0, x_1\} = x_2, \quad \{x_0, x_2\} = -x_1, \quad \{x_1, x_2\} = -x_0.$$

Орбиты группы G выделяются уравнением $x^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = \mathrm{const}$ и представляют однополостные гиперболоиды, двухполостные гиперболоиды, два конуса и начало координат.

---

*) Следует иметь в виду, что если группа G не компактна, то этими условиями выделяются лишь регулярные орбиты, т.е. орбиты, проходящие через регулярные полупростые элементы в $\mathcal{G}^*$.

3. $G = E(2)$ – группа движений евклидовой плоскости, $\mathcal{G}^* = \{x : x = (x_0, x_1, x_2)\}$, при этом $\{x_0, x_1\} = x_2$, $\{x_0, x_2\} = -x_1$, $\{x_1, x_2\} = 0$. Орбиты коприсоединенного представления здесь – цилиндры с осью x_0. Каждая точка оси x_0 является нульмерной орбитой.

4. $G = W_1$ – группа Гейзенберга–Вейля, $\mathcal{G}^* = \{x : x = (x_0, x_1, x_2)\}$, при этом $\{x_1, x_2\} = x_0$, $\{x_0, x_1\} = \{x_0, x_2\} = 0$. Орбитами коприсоединенного представления здесь являются плоскости $x_0 = c$, $c \neq 0$. Каждая точка плоскости $x_0 = 0$ является нульмерной орбитой.

5. $G = \{g\} = \mathrm{SU}(3)$, g – унитарная матрица третьего порядка с определителем, равным единице: $gg^+ = I$, $\det g = 1$. Здесь $\mathcal{G}^* \simeq \mathcal{G} = \{x\}$ – алгебра (восьмимерная) антиэрмитовых матриц $(x^+ = -x)$ третьего порядка с нулевым следом. Действие присоединенного представления имеет вид

$$x \to gxg^{-1} = gxg^+ .$$

В этом случае имеется три типа орбит:

а) шестимерные орбиты $\mathcal{O} = \mathrm{SU}(3)/\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$, отвечающие случаю, когда все собственные значения матрицы x фиксированы и различны;

б) четырехмерные орбиты $\mathcal{O} = \mathrm{SU}(3)/\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$; соответствующие матрицы x имеют два равных собственных значения. Такие орбиты изоморфны двумерному комплексному проективному пространству;

в) орбита, отвечающая началу координат.

6. $G = \mathrm{SU}(n)$, $\mathcal{G}^* \simeq \mathcal{G} = \{x : x^+ = -x,\ \operatorname{tr} x = 0\}$.

Пусть $(n - 1)$ собственных значений матрицы x совпадают. В этом случае

$$\mathcal{O} = \mathrm{SU}(n)/\mathrm{SU}(n-1) \times \mathrm{U}(1),$$

и орбита $\mathcal{O}$ изоморфна пространству $\mathbb{C}P^{n-1}$. Заметим, что это орбита минимальной ненулевой размерности в $\mathcal{G}^*$. Отметим также, что для простых групп Ли все орбиты минимальной ненулевой размерности перечислены и изучены в работе [315] (см. табл. 1).

7. $G = \mathrm{SU}(m + n)$, $\mathcal{G} \simeq \mathcal{G} = \{x\}$, $x^+ = -x$, $\operatorname{tr} x = 0$.

Пусть собственные значения матрицы x разделены на два набора по m и n чисел, причем собственные значения в каждом из этих наборов совпадают. В этом случае

$$\mathcal{O} = \mathrm{SU}(m + n)/\mathrm{SU}(m) \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{U}(1)$$

и орбита $\mathcal{O}$ изоморфна так называемому комплексному многообразию Грассмана G_{mn}.

8. Пусть G – группа вещественных верхних треугольных матриц с определителем, равным единице. Тогда алгебра Ли $\mathcal{G}$ состоит из вещественных верхних треугольных матриц с нулевым следом, а пространство $\mathcal{G}^* = \{x\}$ с помощью скалярного произведения $(A, B) = \operatorname{tr}(A \cdot B)$ в алгебре $\mathrm{sl}(n, \mathbb{R})$ можно отождествить с пространством вещественных нижних

Таблица 1

G		$(O_{\min} = G/H)$	
		$\dim O_{\min}$	H
A_n	$SU(n+1)$	$2n$	$A_{n-1} \times U(1)$
B_n	$SO(2n+1)$	$2(2n-1)$	$B_{n-1} \times SO(2)$
C_n	$Sp(2n)$	$2(2n-1)$	$C_{n-1} \times U(1)$
D_n	$SO(2n)$	$2(2n-2)$	$D_{n-1} \times SO(2)$
$n \neq 2,3$			
G_2		10	$A_1 \times SO(2)$
F_4		30	$C_3 \times SO(2)$
E_6		32	$D_5 \times SO(2)$
E_7		54	$E_6 \times SO(2)$
E_8		114	$E_7 \times SO(2)$

треугольных матриц с $\operatorname{tr} x = 0$. При этом действие группы G на $\mathscr{G}^*$ дается формулой

$$\mathrm{Ad}^*(g):\ x \to (g x g^{-1})_-, \tag{1.4.6}$$

где знак минус означает, что элементы рассматриваемой матрицы, стоящие выше главной диагонали, мы заменяем нулями. Например, орбита группы G в пространстве $\mathscr{G}^*$, проходящая через элемент

$$f = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & 0 & \\ 0 & \ddots\ 1 & \ddots\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.4.7}$$

состоит из элементов x вида

$$\begin{pmatrix} b_1, & 0, & & 0 \\ a_1, & b_2 & & \\ & a_2 & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \\ & & a_{n-1}, & b_n \end{pmatrix}, \qquad \sum_{j=1}^{n} b_j = 0. \tag{1.4.8}$$

В заключение этого раздела приведем таблицу размерностей орбит коприсоединенного представления наименьшей положительной размерности для простых компактных групп Ли.

Отметим, что описание орбит компактных простых групп Ли было дано А. Борелем [126]. Все эти орбиты являются кэлеровыми компактными многообразиями.

Задачи

1. Найти орбиты наименьшей положительной размерности для групп SO (4) и SO (6).

2. Найти орбиты коприсоединенного представления для группы вещественных верхних треугольных матриц четвертого порядка с единицами на главной диагонали.

1.5. Отображение момента

Как хорошо известно, сохранение импульса и момента количества движения механической системы связано с инвариантностью этой системы относительно трансляций и вращений. В настоящем разделе мы установим такую связь для общего случая, когда фазовое пространство рассматриваемой системы является симплектическим многообразием, инвариантным относительно действия произвольной группы Ли. Такая теория была развита в работах [64, 32, 243].

Пусть M – многообразие, $\mathcal{F}(M)$ – пространство функций на M, снабженное пуассоновой структурой (скобкой Пуассона), и на M действует группа Ли G. Тогда на M действует также алгебра Ли $\mathcal{G}$ группы G (как алгебра Ли векторных полей на M). Иными словами, элементу $\xi \in \mathcal{G}$ мы ставим в соответствие векторное поле X_ξ на M. Предположим дополнительно, что скобка Пуассона $\{\ ,\ \}$ на $\mathcal{F}(M)$ такова, что каждому полю X_ξ можно сопоставить функцию H_ξ на M такую, что в локальных координатах x^j

$$X_\xi^j = \{H_\xi, x^j\} \tag{1.5.1}$$

и

$$H_{\xi + \eta} = H_\xi + H_\eta. \tag{1.5.2}$$

Такое действие группы G назовем гамильтоновым, если имеет место равенство*)

$$H_{[\xi,\eta]} = \{H_\xi, H_\eta\} . \tag{1.5.3}$$

Иными словами, действие Φ_g группы G на M называется гамильтоновым, если отображение $\xi \to H_\xi$ является гомоморфизмом алгебры Ли $\mathcal{G}$ в алгебру Ли $\mathcal{F}(M)$ относительно скобки Пуассона.

Следующий случай встречается довольно часто. Пусть $M = T^*X$ (где X – гладкое многообразие), G – группа диффеоморфизмов X, действие которой мы считаем распространенным на T^*M, $\omega = d\theta$ – стандартная симплектическая структура на M $(\theta = p_j dq^j)$. Функцию Гамильтона H_ξ однопараметрической подгруппы g_t группы G определим формулой

$$H_\xi(x) = \theta(\hat{\xi}(x)) = \langle x, \xi \rangle, \quad x \in X, \quad \xi(x) = \frac{d}{dt}(g_t \cdot x)\Big|_{t=0} \tag{1.5.4}$$

$\hat{\xi}$ – поднятие ξ на T^*X.

Тогда построенное действие группы G гамильтоново [1]. Заметим, что в случае гамильтонова действия группы функция Гамильтона $H_\xi(x)$

---

*) В книге Арнольда [1] такое действие называется пуассоновским. В настоящее время бо́льшее распространение получил термин "гамильтоново действие", который мы и будем использовать в дальнейшем. Отметим еще, что возможность негамильтонова действия данной группы Ли определяется ее когомологиями: если $H^2(\mathcal{G}, \mathbb{R}) = 0$, то действие всегда гамильтоново.

зависит от элемента алгебры Ли линейно и поэтому может быть записана в виде

$$H_\xi(x) = \langle \mu(x), \xi \rangle, \tag{1.5.5}$$

$\mu(x)$ – элемент пространства $\mathcal{G}^*$, дуального к $\mathcal{G}$, $\langle \mu, \xi \rangle$ – значение функционала μ в точке $\xi \in \mathcal{G}$. Таким образом, в случае гамильтонова действия группы G на M возникает отображение

$$\mu: M \to \mathcal{G}^*, \tag{1.5.6}$$

называемое *отображением момента* [64]. Отображение момента обладает важным свойством эквивариантности.

Теорема 1.5.1 [1, 40]. Гамильтоново действие связной группы Ли G при отображении момента μ переходит в коприсоединенное действие группы G на пространстве $\mathcal{G}^*$, дуальном к ее алгебре Ли $\mathcal{G}$. Иными словами, коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Phi_g} & M \\ \mu\downarrow & & \downarrow\mu \\ \mathcal{G}^* & \xrightarrow{\mathrm{Ad}^*(g)} & \mathcal{G}^*. \end{array} \tag{1.5.7}$$

Доказательство. Пусть элемент g принадлежит однопараметрической подгруппе $\{g_t\}$, генерируемой элементом η алгебры Ли $\mathcal{G}$, и пусть ad_η^* – коприсоединенное представление алгебры $\mathcal{G}$. Тогда

$$\langle \mathrm{ad}_\eta^* \mu(x), \xi \rangle = \langle \mu(x), [\xi, \eta] \rangle = H_{[\xi,\eta]}(x) = X_\eta \cdot H_\xi(x) = \langle L_{X_\eta} \cdot \mu(x), \xi \rangle. \tag{1.5.8}$$

Отсюда следует, что $\mathrm{ad}_\eta^* \cdot \mu(x) = L_{X_\eta} \cdot \mu(x)$, а это равенство эквивалентно коммутативности диаграммы (1.5.7) для инфинитезимальных преобразований группы G. Коммутативность диаграммы (1.5.7) для конечных преобразований группы G доказывается теперь без труда.

Следствие. Пусть функция Гамильтона $H(x)$ рассматриваемой системы инвариантна относительно гамильтонова действия группы G на M. Тогда момент $\mu(x)$ является первым интегралом этой гамильтоновой системы.

Отметим еще, что из эквивариантности отображения момента следует, что множество

$$\Omega_x = \{\Phi_g \cdot x: \ g \text{ пробегает всю группу } G\}$$

при отображении момента μ переходит в орбиту коприсоединенного представления

$$\mathcal{O}_{\mu(x)} = \{\mathrm{Ad}^*(g) \cdot \mu(x): \ g \text{ пробегает всю группу } G\}.$$

Отметим еще следующую полезную теорему [40], обобщающую формулу (1.5.4)

Теорема 1.5.2. Пусть Φ_g – симплектическое действие G на M. Предположим, что симплектическая форма ω на M является точной: $\omega = d\theta$;

и что действие Φ_g оставляет θ инвариантной: $\Phi_g^*\theta = \theta$ для всех $g \in G$. Тогда отображение момента μ: $M \to \mathcal{G}^*$ определяется формулой

$$\langle \mu(x), \xi \rangle = \langle \theta(x), X_\xi(x) \rangle.$$

Важным специальным случаем этой теоремы является случай, когда $M = T^*G$ и G действует сама на себя левыми или правыми сдвигами, что приводит к двум коммутирующим гамильтоновым действиям G на M. Если мы отождествим T^*G с $G \times \mathcal{G}^*$ при помощи левых сдвигов, то соответствующие отображения момента μ_l (левое) и μ_r (правое) даются формулами

$$\mu_l(g, x) = -\mathrm{Ad}^*(g) \cdot x,$$
$$\mu_r(g, x) = x, \quad g \in G, \quad x \in \mathcal{G}^*. \tag{1.5.9}$$

Приведем еще интересную теорему о свойствах выпуклости отображения момента, доказанную недавно в работах [119, 120] и [180].

Т е о р е м а 1.5.3. Пусть M – компактное, связное симплектическое многообразие и пусть $F_1, F_2, \ldots, F_k$ – вещественные функции на M, находящиеся в инволюции и такие, что соответствующие им гамильтоновы векторные поля почти-периодичны*). Тогда отображение μ: $M \to \mathbb{R}^k$, задаваемое функциями F_j, таково, что:

(А) все (непустые) прообразы $\mu^{-1}(c)$ $(c \in \mathbb{R}^k)$ связны;

(Б) образ $\mu(M)$ является выпуклым множеством.

Кроме того, если $Z_1, \ldots, Z_N$ – связные компоненты множества $Z \subset M$ общих критических точек функций F_j, то $\mu(Z_j) = c_j$ – одна точка в $\mathbb{R}^k$, а $\mu(M)$ – выпуклая оболочка точек $c_1, \ldots, c_N$.

З а м е ч а н и е 1. Важный частный случай теоремы – это когда всем F_j соответствуют периодические гамильтоновы векторные поля, так что мы имеем симплектическое действие тора T^k на M. Отображение μ – это отображение момента $M \to \mathcal{G}^*$, $\mathcal{G} = \mathbb{R}^k$, $\mathcal{G}^*$ – дуальное пространство к алгебре Ли группы $G = T^k$.

З а м е ч а н и е 2. Пусть M – орбита коприсоединенного представления компактной простой группы Ли G, $H = T^k \subset G$ – максимальный тор в G (картановская подгруппа), $F_1, \ldots, F_k$ – линейные функции на $\mathcal{G}^*$, соответствующие T^k. Фиксируем G-инвариантную метрику на $\mathcal{G}^*$ и определим ортогональную проекцию на $\mathbb{R}^k$ – пространство, дуальное к алгебре Ли группы T^k. При этом нетрудно идентифицировать точки $c_1, \ldots, c_N$ (см. формулировку теоремы) с орбитой группы Вейля W в $\mathbb{R}^k$. Теорема 1.5.3 сводится при этом к теореме Костанта [221]:

Ортогональная проекция орбиты коприсоединенного представления на $\mathbb{R}^k$ (на пространство, дуальное к алгебре Ли картановской подгруппы T^k) совпадает с выпуклой оболочкой соответствующей W-орбиты.

З а м е ч а н и е 3. В свою очередь, теорема Костанта для частного случая группы $G = \mathrm{SU}(n)$–группы унитарных унимодулярных матриц сводится к старым результатам Шура [278] и Хорна [203] о выпуклости множества диагональных элементов эрмитовых матриц с заданным спектром, т.е. множества матриц из заданного изоспектрального семейства.

---

*) Векторное поле X на M называется почти-периодическим, если оно генерирует действие тора, и периодическим, если оно генерирует действие окружности S^1.

Примеры

1. $M = \mathbb{R}^{2n} = \{ x = (p, q): p = (p_1, \ldots, p_n), \quad q = (q^1, \ldots, q^n) \}$,

$$\{ F, H \} = \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q^j} - \frac{\partial F}{\partial q^j} \frac{\partial H}{\partial p_j}, \tag{1.5.10}$$

$$G = \{ g_s \}, \ g_s: \ p_j \to p_j, \ q^j \to q^j + s.$$

Здесь G – однопараметрическая группа и ей соответствует $\mathcal{G} = \{\xi\}$, векторное поле $X_\xi = \Sigma \dfrac{\partial}{\partial q^j}$ на M и функция $H_\xi = \Sigma p_j = \mu(x)$.

2. Многообразие M и скобки Пуассона те же, что и в примере 1 при $n = 3$. Группа $G = SO(3)$, действие группы дается формулой $\Phi_g(p, q) = (gp, gq)$, $g \in G$. Элемент g принадлежит однопараметрической подгруппе $\{ g_t \}$ при $t = 1$, $g_t = \exp(tA)$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.5.11}$$

Элемент $A \in \mathcal{G}$ генерирует векторное поле

$$X_A: \ \dot{p} = Ap, \quad \dot{q} = Aq. \tag{1.5.12}$$

Это векторное поле гамильтоново с гамильтонианом

$$H_A = \langle Ap, q \rangle = (a \ [q, p]), \tag{1.5.13}$$

где $a = (a_1, a_2, a_3)$, $[q, p]$ – векторное произведение векторов q и p. Отображение момента μ: $\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ переводит $x = (p, q)$ в вектор $\mu(x) = [q, p]$.

3. Многообразие $M = \mathbb{R}^{2n}$ и скобки Пуассона те же, что и в примере 1. Группа $G = Sp(2n; \mathbb{R})$ – вещественная симплектическая группа. Пространство $\mathcal{G}^*$ мы можем здесь отождествить с алгеброй Ли $\mathcal{G}$, которая состоит из матриц $\mathcal{A}$ порядка $2n$, удовлетворяющих условию

$$\mathcal{A}J + J\mathcal{A}' = 0, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.5.14}$$

Отсюда следует, что матрица $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A' \end{pmatrix}, \quad B' = B, \quad C' = C. \tag{1.5.15}$$

Такой матрице соответствует гамильтониан

$$H_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}x, Jx) = (p, Cp) - (q, Bq) - (q, Ap) - (p, A'q). \tag{1.5.16}$$

Отображение момента μ: $\mathbb{R}^{2n} \to \mathcal{G}$ переводит $x = (p, q)$ в матрицу $\mathcal{A}$ такую, что

$$A = -(p \otimes q), \quad B = p \otimes p, \quad C = -(q \otimes q). \tag{1.5.17}$$

4. Многообразие $M = \mathbb{R}^{2n}$, скобки Пуассона даются формулой (1.5.10). Группа $G = \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{SO}(2n) \simeq \mathrm{U}(n)$. Элемент $\mathcal{A}$ алгебры $\mathcal{G}$ группы G – это матрица вида

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}, \quad A' = -A, \quad B' = B. \tag{1.5.18}$$

Гамильтониан, соответствующий этой матрице, имеет вид

$$H_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}x, Jx) = -(p, Bp) - (q, Bq) + (p, Aq) - (q, Ap). \tag{1.5.19}$$

Отображение момента $\mu: \mathbb{R}^{2n} \to U(n)$ переводит $x = (p, q)$ в матрицу $\mathcal{A}$ (1.5.18), у которой

$$A = p \otimes q - q \otimes p, \quad B = -(p \otimes p + q \otimes q). \tag{1.5.20}$$

5. Многообразие $M = T^*X = \{x, y\}$, $X = \{x\}$ – множество эрмитовых матриц порядка n. Симплектическая структура на M задается формулой

$$\omega = \operatorname{tr}(dy \wedge dx). \tag{1.5.21}$$

Пуассонова структура индуцируется этой симплектической структурой. На многообразии M действует группа $G = U(n)$ – группа унитарных матриц порядка n:

$$g: x \to gxg^+, \ y \to gyg^+, \ gg^+ = I. \tag{1.5.22}$$

Отображение момента здесь дается формулой

$$\mu: (x, y) \to i\,[x, y] = i(xy - yx). \tag{1.5.23}$$

6. Многообразие $M = T^*X$, где X – пространство вещественных симметрических положительно определенных матриц порядка n. Элемент пространства M задается парой (x, y), $x \in X$, $y \in T_x^* X$. Симплектическая форма ω имеет вид $d\theta$, где $\theta = \frac{1}{2} \operatorname{tr} (y \cdot x^{-1} \cdot dx \cdot x^{-1})$. Обе эти формы инвариантны относительно преобразований $x \to gxg'$, $y \to gyg'$, где g – элемент группы G верхних треугольных матриц с единицами на главной диагонали. Пространство $\mathcal{G}^*$ состоит из нижних треугольных матриц с нулями на главной диагонали. Отображение момента имеет вид

$$\mu: (x, y) \to (yx^{-1})^-, \tag{1.5.24}$$

где верхний индекс "минус" означает, что мы заменяем на нуль все элементы матрицы, стоящие на главной диагонали и выше нее.

1.6. Гамильтоновы системы с симметриями

Пусть M – многообразие с пуассоновой структурой $\{\,,\,\}$. Гамильтонова динамическая система определяется заданием функции Гамильтона $H(x)$, и ее уравнения движения имеют вид

$$\dot{x}^i = \{H(x), x^i\}, \tag{1.6.1}$$

где x^i – локальные координаты на M, точка означает дифференцирование по времени. Пусть на M гамильтоновым образом действует группа Ли G, причем функция H инвариантна относительно этого действия. Такую систему

$$\{M, \{\ ,\ \},\quad H, G\} \tag{1.6.2}$$

назовем гамильтоновой системой с симметрией группы G.

Одним из важнейших свойств гамильтоновой системы с симметрией является наличие у такой системы интегралов движения.

Теорема 1.6.1 [1]. Пусть мы имеем динамическую систему с функцией Гамильтона $H(x)$ и пусть $H(x)$ инвариантна относительно гамильтонова действия группы G на M. Тогда момент $\mu(x)$ (определенный в предыдущем разделе) является интегралом движения рассматриваемой системы.

Эта теорема является обобщением хорошо известной теоремы Э. Нётер. Таким образом, наличие симметрии у системы дает возможность найти для нее интегралы движения. Следует, однако, иметь в виду, что нахождение симметрии системы по известным интегралам движения в ряде случаев может оказаться весьма сложной задачей.

В конкретных случаях для нахождения гамильтоновых систем с симметриями бывает удобнее фиксировать сначала M, $\{\ ,\ \}$ и G, и затем находить условия, при которых гамильтониан H инвариантен относительно действия группы.

Приведем несколько примеров.

1. $M = \mathbb{R}^{2n} = \{x = (p, q)\colon\ p = (p_1, \dots, p_n),\ q = (q_1, \dots, q_n)\}$,

скобка Пуассона стандартная, группа G однопараметрическая и действует на M так:

$$q_s\colon\ p_j \to p_j,\quad q^j \to q^j + s.$$

Эта группа порождается векторным полем

$$X_\xi = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q^j}.$$

Условие инвариантности гамильтониана H имеет вид

$$H(p_j, q^k + s) = H(p_j, q^k),$$

или

$$X_\xi \cdot H = 0.$$

Отсюда следует, что общий вид гамильтониана, инвариантного относительно G, таков:

$$H(p_j, q^k) = F(p_j, q^k - q^l). \tag{1.6.3}$$

Величина $p = \sum_j p_j$ является интегралом движения.

2. Пространство M и скобка Пуассона те же, что и в предыдущем примере. Группа $G = \{g\} = \mathrm{SO}(n)$ — группа вращений n-мерного пространства

$$g\colon (p, q) \to (gp, gq).$$

Условие инвариантности гамильтониана H имеет вид

$$H(gp, gq) = H(p, q).$$

Общий вид такого гамильтониана

$$H = H(p^2, q^2, pq). \tag{1.6.4}$$

Величины

$$l_{jk} = (q_j p_k - q_k p_j)$$

являются интегралами движения.

3. Пусть H – гамильтониан n-мерного осциллятора,

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \tag{1.6.5}$$

(M и скобка Пуассона те же, что и в примере 1). Этот гамильтониан инвариантен не только относительно группы $SO(n)$, но также относительно более широкой группы, а именно группы $SO(2n)$. Однако преобразования из этой группы не сохраняют симплектическую форму $\omega = dp_j \wedge dq_j$. Форма ω, однако, инвариантна относительно группы $Sp(2n; \mathbb{R})$. Поэтому наша система инвариантна относительно группы $G = Sp(2n, \mathbb{R}) \cap SO(2n)$, которая является максимальной компактной подгруппой в $Sp(2n, \mathbb{R})$ и изоморфна группе $U(n)$. Алгебра Ли этой группы состоит из матриц вида

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}, \quad A' = -A, \quad B' = B. \tag{1.6.6}$$

Интегралы движения имеют вид

$$\begin{aligned} l_{jk} &= q_j p_k - q_k p_j, \quad l_{jk} = -l_{kj}, \\ f_{jk} &= q_j q_k + p_j p_k, \quad f_{jk} = f_{kj}. \end{aligned} \tag{1.6.7}$$

В заключение этого раздела отметим, что наличие интегралов движения приводит к уменьшению размерности многообразия, на котором происходит движение. Именно, многообразие поверхности уровней интегралов движения F_α, $M_c = \{ x : F_\alpha(x) = c_\alpha \}$ инвариантно относительно динамики. В разделе 1.8 мы рассмотрим замечательный класс гамильтоновых систем, для которых это многообразие является n-мерным тором.

1.7. Редукция гамильтоновых систем с симметриями

Напомним, что наличие симметрии приводит к существованию у гамильтоновой системы интегралов движения. Это дает возможность редуцировать систему – свести ее к системе с меньшим числом степеней свободы. В этом разделе мы покажем, следуя [243, 1, 40, 25], как это можно сделать.

Хорошо известный пример (см., например, [25]) – это гамильтонова система, инвариантная относительно группы $G = SO(3)$ – группы вращения трехмерного пространства:

$$M = \{(p, q): \quad p, q \in \mathbb{R}^3\}, \quad \omega = dp_j \wedge dq_j, \tag{1.7.1}$$

$$H = \frac{1}{2} p^2 + U(|q|).$$

Гамильтониан H и форма ω инвариантны относительно действия группы $G = \mathrm{SO}(3)$:

$$p \to gp, \quad q \to gq; \quad g \in \mathrm{SO}(3). \tag{1.7.2}$$

Отсюда находим интегралы движения – компоненты вектора момента количества движения

$$l_1 = q_2 p_3 - q_3 p_2, \quad l_2 = q_3 p_1 - q_1 p_3, \quad l_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1. \tag{1.7.3}$$

Поскольку мы имеем три интеграла, то можно было бы ожидать, что с их помощью можно уменьшить размерность фазового пространства на шесть единиц. Однако эти интегралы не находятся в инволюции, и потому удается уменьшить размерность лишь на четыре единицы.

Рассмотрим подмногообразие $\widetilde{M}_l$ с фиксированным значением момента количества движения l. При этом без ограничения общности мы можем считать, что вектор l направлен по оси x_3: $l = \lambda l_3$, $l_3 = (0, 0, 1)$, $\lambda > 0$. Подмногообразие $\widetilde{M}_l$ определяется уравнениями

$$q_2 p_3 - q_3 p_2 = 0, \tag{1.7.4}$$

$$q_3 p_1 - q_1 p_3 = 0, \tag{1.7.5}$$

$$q_1 p_2 - q_2 p_1 = \lambda. \tag{1.7.6}$$

Из уравнений (1.7.4) и (1.7.5) следует, что $q_3 = 0, p_3 = 0$, и, следовательно, задача сводится к задаче с двумя степенями свободы (q_1, p_1, q_2, p_2) с дополнительным условием (1.7.6). Но эта задача обладает дополнительной инвариантностью относительно вращений в плоскости (q_1, q_2). Удобно поэтому перейти с помощью канонического преобразования к полярным координатам $r, \varphi, p_r, p_\varphi$:

$$\begin{aligned} q_1 &= r\cos\varphi, \quad q_2 = r\sin\varphi, \quad p_1 = p_r\cos\varphi - \frac{p_\varphi}{r}\sin\varphi, \\ p_2 &= p_r \sin\varphi + \frac{p_\varphi}{r}\cos\varphi, \end{aligned} \tag{1.7.7}$$

после чего условие (1.7.6) принимает вид

$$p_\varphi = \lambda. \tag{1.7.8}$$

Таким образом, p_φ есть интеграл движения, а гамильтониан H не зависит от φ.

Редуцированный гамильтониан имеет вид

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{\lambda^2}{r^2}\right) + U(r), \tag{1.7.9}$$

а зависимость φ от времени можно найти из уравнения

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{\lambda}{r^2}. \tag{1.7.10}$$

Можно осуществить эту редукцию и несколько иным способом. Разложим вектор импульса $\mathbf{p}$ на вектор, перпендикулярный $\mathbf{p}_r$ к орбите группы вращений в координатном пространстве, и вектор, касательный $\mathbf{p}_t$ к этой орбите:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_r + \mathbf{p}_t. \tag{1.7.11}$$

Из уравнения (1.7.6) тогда следуют

$$|\mathbf{p}_t| = \frac{\lambda}{|\mathbf{q}|} = \frac{\lambda}{r} \tag{1.7.12}$$

и выражение (1.7.9) для редуцированного гамильтониана.

Как отмечается в работе [25], редукция такого типа была известна еще Якоби, который редуцировал задачу трех тел в трехмерном пространстве, используя инвариантность системы относительно группы Галилея, содержащей группу вращений в качестве подгруппы. С помощью интегралов движения центра масс и момента количества движения он свел эту систему с 9 степенями свободы к системе с 4 степенями свободы, т.е. редуцировал фазовое пространство от 18-мерного до 8-мерного. Используя, кроме того, закон сохранения энергии, получаем динамическую систему на 7-мерном многообразии.

Опишем теперь процедуру редукции в общем виде.

Пусть дано гамильтоново действие группы G на симплектическом многообразии M и отображение момента $\mu\colon M \to \mathcal{G}^*$. Рассмотрим множество уровней момента, т.е. прообраз какой-либо точки $c \in \mathcal{G}^*$ при отображении μ. Это множество обозначим через $\widetilde{M}_c$:

$$\widetilde{M}_c = \mu^{-1} c. \tag{1.7.13}$$

Потребуем теперь, чтобы c было регулярным значением момента, т.е. чтобы дифференциал отображения μ в каждой точке множества $\widetilde{M}_c$ отображал касательное пространство к M на все касательное пространство к $\mathcal{G}^*$, либо чтобы $\widetilde{M}_c$ было пусто (по теореме Сарда [12] это условие выполняется для почти всех значений c). Тогда $\widetilde{M}_c$ является многообразием.

Группа G, действующая на M, вообще говоря, переставляет множества $\widetilde{M}_c$ относительно друг друга. Однако стационарная подгруппа точки c относительно действия коприсоединенного представления (т.е. подгруппа, состоящая из тех элементов g группы G, для которых $\mathrm{Ad}(g)c = c$) оставляет $\widetilde{M}_c$ на месте. Обозначим эту стационарную подгруппу через G_c ($G_c = \{g\colon \mathrm{Ad}^*(g) \cdot c = c\}$). Предположим также, что G_c является компактной и действует на $\widetilde{M}_c$ эффективно и без неподвижных точек*). Прост-

*) Эти условия можно несколько ослабить, например вместо компактности G_c потребовать, чтобы действие G_c на $\widetilde{M}_c$ было собственным. Однако некоторые условия на G_c всегда необходимо наложить.

ранство $\widetilde{M}_c$ относительно действия группы G_c разбивается на орбиты. Пространство орбит $M_c = \widetilde{M}_c/G_c$ при этом также будет многообразием. Это пространство M_c и называют *приведенным фазовым пространством*.

Можно показать [1, 40], что на пространстве M_c имеется естественная симплектическая структура, т.е. оно является симплектическим многообразием, и, более того, построенное нами отображение

$$\pi: M \to M_c \tag{1.7.14}$$

является отображением симплектических многообразий.

Пусть теперь на M задана функция Гамильтона H, инвариантная относительно G, и M_c – приведенное фазовое пространство (предполагается, что условия, при которых его можно определить, выполнены). Функция Гамильтона H определяет гамильтоново векторное поле на M, которое после проектирования π переходит в поле на M_c, называемое приведенным полем. Справедлива следующая

Теорема 1.7.1 [1, 40]. Приведенное поле на приведенном фазовом пространстве гамильтоново. Значение функции Гамильтона приведенного поля в какой-либо точке приведенного фазового пространства равно значению исходной функции Гамильтона в соответствующей точке исходного фазового пространства.

Отметим, что из рассмотренной выше конструкции следует

$$\dim M_c = \dim M - \dim G - \dim G_c; \tag{1.7.15}$$

напомним, что c – регулярное значение отображения момента.

В примере, приведенном в начале настоящего раздела, $\widetilde{M}_c = \widetilde{M}_l$ – подмногообразие, определенное уравнениями (1.7.4–1.7.6), при этом если $l \neq 0$, то $G_l = SO(2)$ – группа вращений вокруг оси l; $\dim M_c = 6 - 3 - 1 = 2$.

Примеры

1. Пусть $M = \{(p, q)\}$ – стандартное фазовое пространство, $G = \{g_s\}$, $g_s: p_j \to p_j, q_j \to q_j + s$. Тогда $\widetilde{M}_c$ выделяется из M условием $\Sigma p_j = c$, $G_c = G$ и

$$\dim M_c = 2n - 1 - 1 = 2(n-1).$$

2. Пусть M – то же, что и предыдущем примере [25]; $G = \{g_s\}$,

$$g_s: (p, q) \to (p - sq, q).$$

Это действие группы гамильтоново с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}|q|^2$. Подмногообразие $\widetilde{M}_c$ выделяется условием $H = c$ и при $c > 0$ имеет вид $S^{n-1} \times \mathbb{R}^n$, где S^{n-1} – единичная сфера в $\mathbb{R}^n$. Группа G_c совпадает с G. Для описания $M_c = \widetilde{M}_c/G_c$ выберем в качестве начальной ($s = 0$) точку на прямой $(p - sq, q)$ с минимальным расстоянием от начала координат, т.е. положим $(p, q) = 0$. При этом

$$M_c = \widetilde{M}_c/G_c \sim \{(p, q) \in \mathbb{R}^{2n}: |q|^2 = 2c, \ (p, q) = 0\},$$

т.е. представляет собой кокасательное расслоение T^*S^{n-1} $(n-1)$-мерной сферы. Нетрудно показать также, что 2-форма $dp \wedge dq$ проектируется в стандартную 2-форму на T^*S^{n-1}.

В качестве примера рассмотрим гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}(|p|^2 |q|^2 - (p, q)^2),$$

инвариантный относительно рассмотренного выше действия группы G. Уравнения движения для этой системы

$$\dot{p} = -|p|^2 q + (p, q)p, \quad \dot{q} = |q|^2 p - (p, q) q$$

при ограничении на T^*S^{n-1} переходят в (при $c = 1/2$)

$$\dot{p} = -|p|^2 q, \quad \dot{q} = p \quad \text{или} \qquad \ddot{q} = -|\dot{q}|^2 q,$$

т.е. описывают геодезический поток на сфере.

3. Пусть $M = T^*G$ – кокасательное расслоение группы Ли G и пусть G действует на M правыми сдвигами. Соответствующее отображение момента $\mu_r : M \to \mathcal{G}^*$ имеет вид

$$\mu_r(g, x) = x, \qquad g \in G, \quad x \in \mathcal{G}^*,$$

где T^*G отождествляется с $G \times \mathcal{G}^*$ при помощи левых сдвигов. Следовательно, $\widetilde{M}_c \sim G$ и $M_c \sim O_c$ – орбите точки c в $\mathcal{G}^*$. Действительно, M_c симплектически диффеоморфно O_c, что проще всего увидеть с помощью отображения момента для левых сдвигов

$$\mu_l(g, x) = -\mathrm{Ad}^*(g) \cdot x.$$

1.8. Интегрируемые гамильтоновы системы

Среди гамильтоновых систем принято выделять класс интегрируемых систем. "Если, однако, мы попытаемся сформулировать точное понятие интегрируемости, то оказываются возможными многие различные определения, каждому из которых присущ известный теоретический интерес" [6]. В этом разделе мы приведем основные определения и теоремы об интегрируемости гамильтоновых систем, не забывая при этом указания Пуанкаре, что "система дифференциальных уравнений может быть только более или менее интегрируемой" [6].

А. Системы, интегрируемые в квадратурах. Система дифференциальных уравнений называется интегрируемой в квадратурах, если решения этих уравнений могут быть получены с помощью конечного числа алгебраических операций (включая обращение функций) и квадратур – вычислений интегралов известных функций. Оказывается, что при наличии достаточно большого числа интегралов движения гамильтонову систему можно проинтегрировать в квадратурах.

Основная теорема здесь была доказана Буром [127] и Лиувиллем [241]. Мы приведем ее в более современной формулировке.

Т е о р е м а 1.8.1 [2]. Пусть $\mathbb{R}^{2n} = \{p, q\}$ – фазовое пространство гамильтоновой системы со стандартной скобкой Пуассона и гамильтонианом $H(p, q, t)$. Предположим, что эта система имеет n интегралов движения $F_1, \ldots, F_n$ в инволюции, т.е.

$$\frac{\partial F_j}{\partial t} + \{F_j, H\} = 0, \quad \{F_j, F_k\} = 0. \tag{1.8.1}$$

Если на множестве

$$M_a = \{(p, q, t) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^1 : F_j(p, q, t) = a_j, \quad j = 1, \ldots, n\} \tag{1.8.2}$$

функции $F_1, \ldots, F_n$ независимы, то решения уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q^j}, \quad \dot{q}^j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \tag{1.8.3}$$

лежащие на M_a, можно найти в квадратурах.

Обобщением этой теоремы является

Теорема 1.8.2 [81]. Пусть $\mathbb{R}^{2n}$ – фазовое пространство гамильтоновой системы со стандартной симплектической структурой и гамильтонианом $H(p, q, t)$. Предположим, что эта система имеет n интегралов движения $F_1, \ldots, F_n$ таких, что

$$\{F_i, F_j\} = C_{ij}^k F_k, \quad C_{ij}^k = \mathrm{const}. \tag{1.8.4}$$

Если:

1) на множестве

$$M_a = \{(p, q; t)\} \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^1 : F_j(p, q; t) = a_j\}$$

функции $F_1, \ldots, F_n$ независимы;

2) алгебра Ли со структурными константами C_{ij}^k разрешима;

3) $C_{ij}^k a_k = 0$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$, то решения уравнений Гамильтона (1.8.3), лежащие на M_a, можно найти в квадратурах.

Пример [81].

Рассмотрим систему трех точек на прямой с потенциальной энергией, являющейся произвольной однородной функцией координат, степени (-2). Тогда уравнения движения для нулевых значений полной энергии и импульса можно проинтегрировать в квадратурах. Действительно, функции $F_1 = H$, $F_2 = \Sigma p_j q_j$, $F_3 = \Sigma p_j$ независимы и алгебра

$$\{F_1, F_3\} = 0, \quad \{F_2, F_3\} = F_3, \quad \{F_2, F_1\} = 2F_1$$

является разрешимой, так что можно воспользоваться теоремой 1.8.2.

Б. Вполне интегрируемые системы [1, 3].

Пусть M^{2n} – симплектическое многообразие и $F_1, \ldots, F_k$ – гладкие независимые функции на M, генерирующие конечномерную алгебру Ли $\mathcal{G}$:

$$\{F_i, F_j\} = C_{ij}^m F_m, \quad C_{ij}^m = \mathrm{const}, \quad i, j, m = 1, \ldots, k.$$

Тогда в каждой точке $x \in M$ векторы $X_j \equiv X_{F_j}$ порождают k-мерное линейное подпространство $\Pi(x)$ в $T_x M$. Распределение плоскостей $\Pi(x)$ инволютивно (если X_i и $X_j \in \Pi$, то $[X_i, X_j] \in \Pi$). Поэтому, по теореме Фробениуса, через каждую точку $x \in M$ проходит максимальное интегральное многообразие N_x распределения Π. Эти многообразия могут быть погружены в M весьма сложным образом, в частности, они не обязаны быть замкнутыми. Если $k = n$, то среди интегральных многообразий распределения П есть замкнутые многообразия $M_a = \{ x \in M: F_j(x) = a_j,\ \Sigma C_{ij}^l a_l = 0 \}$. Если $x \in M_a$, то N_x совпадает с одной из связных компонент M_a. В частном случае, когда функции $F_1, \ldots, F_n$ находятся в инволюции, почти все M "расслоено" на замкнутые интегральные многообразия M_a.

Теорема, обобщающая теорему Лиувилля, была доказана Арнольдом (см. [1,3]).

Т е о р е м а 1.8.3. Пусть на симплектическом $2n$-мерном многообразии даны n гладких функций $F_1, \ldots, F_n$ в инволюции,

$$\{F_j, F_k\} = 0, \quad j, k = 1, \ldots, n. \tag{1.8.5}$$

Если:

1) они независимы на M_a (т.е. n дифференциалов линейно независимы в каждой точке M_a);

2) гамильтоновы поля $X_j = X_{F_j}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ полны на M_a, то:

а) M_a – гладкое многообразие, инвариантное относительно фазового потока с функцией Гамильтона $H = F_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$;

б) если многообразие M_a связно, то оно диффеоморфно произведению k-мерного тора и $(n-k)$-мерного евклидова пространства $M_a \simeq T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Если M_a к тому же компактно, то $k = n$, $M_a = T^n$;

в) на M_a существуют координаты $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, $y_1, \ldots, y_{n-k}$ такие, что в этих координатах уравнения Гамильтона на M_a имеют вид

$$\dot{\varphi}_m = \omega_{mj}, \quad \dot{y}_s = c_{sj} \quad (\omega = \omega(a),\ c = \text{const}). \tag{1.8.6}$$

г) если M_a компактно, то оно имеет окрестность в M, диффеоморфную прямому произведению n-мерного тора T^n на шар D^n n-мерного евклидова пространства.

Гамильтоновы системы, для которых выполнены условия теоремы 1.8.3, называются вполне интегрируемыми.

З а м е ч а н и е 1 [3]. Если алгебра $\mathcal{A}$ интегралов движения некоммутативна, то замкнутые инвариантные интегральные уровни диффеоморфны односвязной группе алгебры $\mathcal{A}$, профакторизованной по некоторой ее дискретной подгруппе. Однако реализация этого общего замечания упирается в нерешенную задачу классификации групп и алгебр Ли.

З а м е ч а н и е 2. Переменные F_j, φ_k $j, k = 1, \ldots, n$ не являются, вообще говоря, каноническими координатами на M. Можно показать, однако, что существуют некоторые функции $I_j(F)$, $j = 1, \ldots, n$, – так называемые переменные действия такие, что переменные I_j, φ_k уже будут каноническими, т.е. симплектическая форма ω в этих переменных имеет стандартный вид

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} dI_j \wedge d\varphi_j. \tag{1.8.7}$$

Фиксируя величины F_j (или, это эквивалентно, I_j), мы фиксируем (в компактном случае) инвариантный тор, на котором развивается динамика системы. При этом величины φ_j характеризуют положение точки на этом торе и меняются с течением времени линейно.

В ряде случаев число глобальных интегралов движения гамильтоновой системы может быть больше чем $n = \frac{1}{2}\dim M$ (при этом не все они находятся в инволюции!). В таком случае инвариантными многообразиями M_a будут торы размерности меньшей n.

Итак, рассмотрим систему с гамильтонианом H на симплектическом многообразии M^{2n}, обладающую $(n+k)$ независимыми интегралами движения $F_1, F_2, \ldots, F_{n+k}$, и пусть многообразие уровней интегралов

$$M_a = \{x \in M: \ F_j(x) = a_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n+k\} \tag{1.8.8}$$

компактно и связно.

Теорема 1.8.4 [91]. Пусть первые $(n-k)$ интегралов находятся в инволюции со всеми интегралами, тогда:

1) многообразие M_a диффеоморфно $(n-k)$-мерному тору;

2) в окрестности M_a существуют канонические координаты типа действие–угол $(I, p; \varphi, q)$ такие, что

$$I_s = I_s(F_1, \ldots, F_{n-k}), \quad 1 \leqslant s \leqslant n-k,$$

а координаты p_l, q_m $(l, m = 1, \ldots, k)$ зависят от всех F_j.

Некоммутативные наборы интегралов. Пусть $M = M^{2n}$ – симплектическое многообразие и $F_1, \ldots, F_k$ – гладкие независимые функции на M, образующие алгебру Ли $\mathcal{G}$ относительно скобки Пуассона,

$$\{F_i, F_j\} = C_{ij}^m F_m. \tag{1.8.9}$$

Рангом алгебры $\mathcal{G}$ $(rk\mathcal{G})$ назовем минимальное число нулевых собственных значений матрицы

$$C_{ij}(f) = C_{ij}^m f_m, \tag{1.8.10}$$

когда f_j пробегают все пространство $\mathbb{R}^k$.

В такой ситуации справедливо утверждение, родственное теореме 1.8.4, указанное в работе [90] (см. также [34]). Отметим, что его можно вывести из более общей теоремы Ли–Картана (см. теорему 1.8.7, ниже).

Теорема 1.8.5. Предположим, что на множестве

$$M_a = \{x \in M: \ F_j(x) = a_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant k\}$$

дифференциалы dF_j линейно независимы и алгебра $\mathcal{G}$ удовлетворяет условию

$$\dim \mathcal{G} + rk\, \mathcal{G} = \dim M = 2n = k + r. \tag{1.8.11}$$

Если M_a компактно и связно, то оно диффеоморфно r-мерному тору T^r, где $r = rk\,\mathcal{G}$. Далее, если функции $F_1, \ldots, F_k$ являются первыми интегралами гамильтоновой системы с гамильтонианом H, то на M_a можно выбрать угловые координаты $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ так, чтобы уравнения Гамильтона на T^r приняли следующий вид:

$$\dot{\varphi}_s = \omega_s(a) = \text{const}. \tag{1.8.12}$$

З а м е ч а н и е. Во всех известных случаях, описываемых теоремой 1.8.5, можно указать полный набор интегралов в инволюции. Это не случайно. В действительности справедлива

Т е о р е м а 1.8.6 [34]. Если M компактно, то в предположениях теоремы 1.8.5 можно найти $n = (\dim M)/2$ независимых интегралов движения $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, находящихся в инволюции; эти функции являются полиномами от $F_1, \ldots, F_k$.

В заключение этого раздела приведем старые результаты С. Ли и Э. Картана.

Пусть функции $F_1(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n), \ldots, F_k(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n)$ обладают тем свойством, что все скобки Пуассона для них выражаются через эти же функции,

$$\{F_j, F_l\} = c_{jl}(F_1, \ldots, F_k). \tag{1.8.13}$$

Свойства таких систем функций изучались С. Ли [54] и Э. Картаном [16]. С. Ли называл такие наборы группами функций. Такой набор определяет отображение $F: M \to \mathbb{R}^k$.

Здесь мы укажем теорему Ли–Картана в формулировке работы [3].

Т е о р е м а 1.8.7. Предположим, что точка $a \in \mathbb{R}^k$ не является критическим значением отображения F и в ее окрестности ранг матрицы $\| c_{ij} \|$ постоянен. Тогда в малой окрестности $U \subset \mathbb{R}^k$ точки a найдутся k независимых функций $\varphi_s: U \to \mathbb{R}$ таких, что функции $\Phi_s = \varphi_s \circ F: N \to \mathbb{R}$, $N = F^{-1}(U)$, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\{\Phi_1, \Phi_2\} = \ldots = \{\Phi_{2q-1}, \Phi_{2q}\} = 1, \tag{1.8.14}$$

а все остальные скобки Пуассона $\{\Phi_i, \Phi_j\} = 0$. При этом число $2q$ равно рангу матрицы $\| c_{ij} \|$.

С помощью теоремы Ли–Картана нетрудно осуществить редукцию системы к системе с меньшим числом степеней свободы.

Пусть $a = (a_1, \ldots, a_k)$ удовлетворяет условиям теоремы Ли–Картана. Тогда множество

$$M_a = \{ x \in M: \ \Phi_s(x) = a_s, \ 1 \leqslant s \leqslant k \} \tag{1.8.15}$$

является гладким подмногообразием в M, размерность которого равна $2n - k$. Поскольку $\Phi_{2q+1}, \ldots, \Phi_k$ находятся в инволюции со всеми функциями Φ_s, $s = 1, \ldots, k$, то их гамильтоновы векторные поля касаются многообразия M_a, и, следовательно, определено действие коммутативной группы $\mathbb{R}^l$, $l = k - 2q$, на M_a, порожденное фазовыми потоками уравнений Гамильтона с гамильтонианами $\Phi_s, s > 2q$.

Факторпространство

$$M_a/\mathbb{R}^l = \widetilde{M}_a \tag{1.8.16}$$

является гладким многообразием. Это приведенное фазовое пространство и его размерность

$$\dim \widetilde{M}_a = (2n - k) - l = 2(n - k + q). \tag{1.8.17}$$

Однако следует иметь в виду, что в вырожденных случаях ранг матрицы c_{ij} может, конечно, падать.

В. Алгебраическая полная интегрируемость. Рассмотренные до сих пор вполне интегрируемые гамильтоновы системы обладают тем характерным свойством, что для системы с $2n$-мерным фазовым пространством траектория находится на вещественном n-мерном торе T^n, зависящем от n интегралов движения.

При этом во многих случаях интегралы движения являются рациональными функциями от фазовых переменных, а тор T^n является частью комплексного тора, который, в свою очередь, является алгебраическим (абелевым) многообразием. Решение же уравнений движения дается абелевыми функциями, связанными с этим абелевым многообразием и выражающимися через многомерные тэта-функции. Движение на абелевом многообразии линеаризуется, а фазовые переменные являются мероморфными функциями времени.

Такие системы, следуя [112, 41], мы будем называть алгебраически вполне интегрируемыми. При этом, в отличие от вполне интегрируемых систем, для которых нахождение критерия интегрируемости в настоящее время представляется безнадежной задачей, для некоторых типов алгебраически вполне интегрируемых систем удается получить эффективный критерий интегрируемости [112, 113] *).

Такой критерий интегрируемости был впервые использован С. Ковалевской в знаменитых статьях [224, 225], где она показала, что единственными алгебраически вполне интегрируемыми случаями движения твердого тела вокруг неподвижной точки в поле тяжести могут быть случаи:

1) Эйлера [165], когда неподвижная точка совпадает с центром тяжести тела;

2) Лагранжа [22], когда центр тяжести и неподвижная точка находятся на оси симметрии тела,

3) и новый случай, открытый Ковалевской [224], когда неподвижная точка находится на оси симметрии эллипсоида инерции; центр тяжести находится в плоскости, проходящей через неподвижную точку перпендикулярно оси симметрии, и главные моменты инерции тела относительно неподвижной точки связаны соотношением

$$A = B = 2C. \tag{1.8.18}$$

Перейдем теперь, следуя [112], к точным формулировкам. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{z} = f(z) = J\,\frac{\partial H}{\partial z}, \quad z \in \mathbb{C}^k, \tag{1.8.19}$$

где матрица J (z) рациональна по z.

Будем называть эту систему алгебраически вполне интегрируемой, если:

1) она является вполне интегрируемой и обладает рациональными интегралами движения, которые для $z \in \mathbb{R}^k$ определяют вещественные

---

*) В ряде случаев удается показать, что данная гамильтонова система в том или ином смысле слова не является интегрируемой. Читателя, интересующегося этим вопросом, мы отсылаем к обзорной статье [21].

алгебраические торы (по крайней мере, для почти всех значений таких интегралов), и

2) вещественный тор является частью комплексного алгебраического тора $\mathcal{A}$ с алгебраическим законом сложения, который совместен с линеаризацией данного фазового потока, а также других коммутирующих потоков.

Среди интегралов движения мы будем различать тривиальные F_j, для которых $J \dfrac{\partial F_j}{\partial z} \equiv 0 \quad 1 \leqslant j \leqslant l$, и которые определяют симплектическое многообразие размерности $k - l = 2n$

$$M_a = \{ z\colon \ F_j = a_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant l \}, \tag{1.8.20}$$

и n оставшихся интегралов, которые определяют коммутирующие векторные поля и вещественный тор, определяемый уравнениями

$$F_j = a_j, \quad j = l + 1, \ldots, l + n. \tag{1.8.21}$$

При этом из условия 2) следует, что уравнения (1.8.21), распространенные на $\mathbb{C}^k$, опреляют аффинную часть абелева многообразия $\mathcal{A}$.

Приведем формулировку критерия алгебраической полной интегрируемости.

Теорема 1.8.8 [112]. Необходимое условие для того, чтобы система (1.8.19) была алгебраически вполне интегрируемой в абелевых функциях z_j, $j = 1, \ldots, k$, состоит в том, что уравнения (1.8.19) должны иметь достаточное число полюсных разложений по t, так чтобы каждая координата z_j могла обращаться в бесконечность по крайней мере один раз, причем эти разложения должны зависеть от $(k - 1)$ параметра. Этот критерий был применен в работах [112, 113] к уравнениям Эйлера на алгебре so (4) и цепочкам Тоды.

1.9. Метод проектирования

Как было показано в разделе 1.7, гамильтоновы системы, обладающие симметрией, можно редуцировать к системам с меньшим числом степеней свободы.

Движение на приведенном фазовом пространстве при этом, однако, усложняется, а симметрия, которая раньше была явной, теперь становится скрытой.

Если нас интересует задача явного интегрирования уравнений движения вполне интегрируемой гамильтоновой системы, то, к сожалению, мы не можем воспользоваться теоремой Лиувилля, которая, не являясь конструктивной, не указывает, как можно осуществить процесс интегрирования.

Для решения этой задачи в ряде случаев удается использовать так называемый метод проектирования. Этот метод был введен в работе [94] и использован для решения ряда задач в работах [94, 95, 97, 256, 257].

Основная идея метода проектирования обратна идее метода редукции.

Метод проектирования состоит в рассмотрении новой динамической системы $(\widetilde{M}, \widetilde{\omega}, \widetilde{H})$ в фазовом пространстве $\widetilde{M}$ бóльшей размерности. При этом требуется выполнение условий:

1) интересующая нас система (M, ω, H) является проекцией π системы $(\widetilde{M}, \widetilde{\omega}, \widetilde{H})$;

2) уравнения динамики для системы $(\widetilde{M}, \widetilde{\omega}, \widetilde{H})$ интегрируются в явном виде;

3) проекция π также задается явными формулами.

Дадим абстрактную формулировку метода.

Пусть мы имеем динамическую систему на многообразии $M = \{ x \}$

$$h_t \colon M \to M, \quad x_t = h_t \cdot x_0. \tag{1.9.1}$$

Пусть существуют динамическая система на другом многообразии $\widetilde{M} = \{ y \}$

$$\widetilde{h}_t \colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}, \quad y_t = \widetilde{h}_t \cdot y_0 \tag{1.9.1'}$$

и проекция $\pi \colon \widetilde{M} \to M$ такие, что

$$x_t = \pi y_t = \pi \widetilde{h}_t y_0. \tag{1.9.2}$$

Пусть ρ – отображение $M \to \widetilde{M}$ такое, что $\pi \cdot \rho = I$ (I – тождественное преобразование на M). Тогда динамику на M можно найти по формуле

$$x_t = \pi \widetilde{h}_t \rho \cdot x_0. \tag{1.9.3}$$

Для того, чтобы эта формула была справедлива, необходимо выполнение условия самосогласования:

$$\begin{aligned} &\text{если } \pi y_1 = \pi y_2 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (y_1, y_2 \in \widetilde{M}), \\ &\text{то } \pi \widetilde{h}_t y_1 = \pi \widetilde{h}_t y_2 \quad \text{при} \quad \text{всех } t. \end{aligned} \tag{1.9.4}$$

Это условие будет выполняться, например, если на $\widetilde{M}$ действует группа Ли $G = \{ g \}$, причем ее действие коммутирует с фазовым потоком $\widetilde{h}_t$ и любое множество $\widetilde{M}_x = \pi^{-1} x$ является орбитой этой группы в пространстве $\widetilde{M}$. Сюда относится, например, случай редукции динамических систем с симметрией, рассмотренный в разделе 1.7. Здесь h_t зависит от момента c: $h_t = h_t^c$, $M = M_c = \mu^{-1} c$, $G = G_c$ – подгруппа, оставляющая c на месте.

Проиллюстрируем теперь этот метод на простейших примерах. Обобщение этих примеров дано в гл. 3 и 4.

1. Рассмотрим свободное движение частицы единичной массы на плоскости (q_1, q_2). В этом случае

$$\widetilde{M} = \mathbb{R}^4 = \{ (p, q) \colon p = (p_1, p_2), \ q = (q_1, q_2) \}, \tag{1.9.5}$$

$$\widetilde{\omega} = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2, \quad \widetilde{H} = \frac{1}{2} p^2 = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2).$$

В качестве проекции π возьмем стандартную радиальную проекцию:

$$\pi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (p, q), \quad q = r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}, \qquad p = p_r = \frac{\mathbf{pq}}{q}. \tag{1.9.6}$$

Тогда после проектирования мы приходим к системе $\{ M, \omega, H \}$, где

$$\begin{aligned} &M = \{ (p, q) \colon q > 0 \}, \quad \omega = dp \wedge dq, \\ &H = H_l = ½(p^2 + l^2/q^2). \end{aligned} \tag{1.9.7}$$

Здесь $l^2 = (q_1 p_2 - q_2 p_1)^2$ – интеграл движения системы $(\widetilde{M}, \widetilde{\omega}, \widetilde{H})$. При этом, как нетрудно проверить, условие самосогласования (1.9.4) выполняется. (Этот факт является следствием инвариантности системы $(\widetilde{M}, \widetilde{\omega}, \widetilde{H})$ относительно группы $G = SO(2)$ – группы вращений плоскости.) В то же время уравнения движения системы $\{\widetilde{M}, \widetilde{\omega}, \widetilde{H}\}$ легко интегрируются, и мы получаем

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b}t, \tag{1.9.8}$$

причем без ограничения общности мы можем считать, что $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 0$. Отсюда сразу же находим решение уравнений движения для системы $\{M, \omega, H\}$:

$$q(t) = \sqrt{a^2 + b^2 t^2}, \quad p(t) = \frac{b^2 t}{\sqrt{a^2 + b^2 t^2}}. \tag{1.9.9}$$

Обобщение этой конструкции на случай бо́льшего числа степеней свободы дано в работе [94] (см. главу 3).

2. Рассмотрим на той же плоскости (q_1, q_2) двумерный изотропный осциллятор с частотой ν. Тогда $\widetilde{M}$ и $\widetilde{\omega}$ остаются теми же, что и в предыдущем примере, а гамильтониан имеет вид

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2}(p^2 + \nu^2 q^2). \tag{1.9.10}$$

Оставляя без изменения проекцию π, приходим к системе $\{M, \omega, H\}$ с гамильтонианом

$$H_l = ½(p^2 + l^2/q^2 + \nu^2 q^2). \tag{1.9.11}$$

Отсюда сразу же получаем

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{a}\cos\nu t + \frac{\mathbf{b}}{\nu}\sin\nu t, \quad (\mathbf{ab}) = 0 \tag{1.9.12}$$

и

$$q(t) = \sqrt{a^2\cos^2\nu t + \frac{b^2}{\nu^2}\sin^2\nu t}. \tag{1.9.13}$$

Относительно обобщения см. [94] и главу 3.

3. Рассмотрим движение по геодезической на верхней плоскости двухполостного гиперболоида (метрика на гиперболоиде индуцирована метрикой объемлющего пространства)

$$\mathbb{H}^2 = \{x: x^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1, \quad x_0 > 0\}, \tag{1.9.14}$$

а проекцию π определим формулой

$$\pi: \mathbf{x} \to q = \operatorname{Arch} x_0. \tag{1.9.15}$$

Тогда после проектирования приходим к системе $\{M, \omega, H\}$ с гамильтонианом

$$H = p^2/2 + g^2 \operatorname{sh}^{-2} q. \tag{1.9.16}$$

Уравнения для геодезического движения на гиперболоиде легко интегрируются:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}\operatorname{ch} t + \mathbf{b}\operatorname{sh} t, \tag{1.9.17}$$

где

$$\mathbf{a}^2 = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 = 1, \quad \mathbf{b}^2 = -1, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0. \tag{1.9.18}$$

Отсюда следует явное выражение для интересующей нас величины $q(t)$:

$$q(t) = \operatorname{Arch}(\operatorname{ch} q_0 \cdot \operatorname{ch} t). \tag{1.9.19}$$

Обобщение на случай нескольких степеней свободы дано в [95].

4. Пусть частица единичной массы движется по геодезической на двумерной сфере

$$S^2 = \{ \mathrm{x}: \ \mathrm{x}^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1 \}. \tag{1.9.20}$$

Проекцию π зададим формулой

$$q = \pi \cdot \mathrm{x} = \arccos x_0. \tag{1.9.21}$$

В этом случае после проектирования приходим к системе с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2} + g^2 \sin^{-2} q, \quad 0 < q < \pi. \tag{1.9.22}$$

Интегрируя уравнения для геодезических на сфере, получаем

$$\mathrm{x}(t) = \mathbf{a} \cos t + \mathbf{b} \sin t, \tag{1.9.23}$$

где

$$\mathbf{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \quad \mathbf{b}^2 = 1, \quad (\mathbf{ab}) = 0.$$

Для интересующей нас величины $q(t)$ отсюда получаем выражение

$$q(t) = \arccos(\cos q_0 \cdot \cos t). \tag{1.9.24}$$

(Относительно обобщения см. работу [95].)

5. Рассмотрим движение по геодезической на однополостном гиперболоиде

$$\tilde{\mathbb{H}}^2 = \{ \mathrm{x}: \ \mathrm{x}^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = -1 \}. \tag{1.9.25}$$

Проекцию π определим формулой

$$q = \pi \cdot \mathrm{x} = \operatorname{Arsh} x_0. \tag{1.9.26}$$

Проектирование приводит нас к системе $\{M, \omega, H\}$ с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2} - g^2 \operatorname{ch}^{-2} q. \tag{1.9.27}$$

Заметим, что в отличие от предыдущих случаев на однополостном гиперболоиде есть три различных вида геодезических. В соответствии с этим мы получим три различных выражения для величины $q(t)$.

а) Начальные условия таковы, что

$$\mathrm{x}(t) = \mathbf{a} \operatorname{ch} t + \mathbf{b} \operatorname{sh} t, \qquad \mathbf{a}^2 = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 = -1, \quad \mathbf{b}^2 = 1, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0. \tag{1.9.28}$$

В этом случае

$$q(t) = \operatorname{Arsh}(\alpha \cdot \operatorname{sh} t), \quad \alpha > 1. \tag{1.9.29}$$

б) Пусть осуществляется случай

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}\cos t + \mathbf{b}\sin t, \qquad \mathbf{a}^2 = -1, \quad \mathbf{b}^2 = -1, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0, \tag{1.9.30}$$

тогда

$$q(t) = \operatorname{Arsh}(\alpha \sin t). \tag{1.9.31}$$

в) Наконец, если

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b}t, \quad \mathbf{a}^2 = -1, \quad \mathbf{b}^2 = 0, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0, \tag{1.9.32}$$

то

$$q(t) = \operatorname{Arsh}(\alpha t). \tag{1.9.33}$$

Обобщение этих формул на случай нескольких степеней свободы было найдено в работе [257].

6. Как и в случае 3, рассмотрим свободное движение по верхней полости двуполостного гиперболоида, но вместо радиальной проекции (1.9.15) возьмем так называемую орисферическую проекцию:

$$q = \pi \cdot \mathbf{x} = \ln(x_0 - x_1). \tag{1.9.34}$$

После проектирования приходим к системе с гамильтонианом

$$H = ½ p^2 + g^2 \exp(-2q), \tag{1.9.35}$$

эквивалентной так называемой цепочке Тоды для двух частиц.

Воспользовавшись формулой (1.9.17) для геодезического движения

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}\operatorname{ch} t + \mathbf{b}\operatorname{sh} t, \tag{1.9.27}$$

в которой нам удобно положить

$$\mathbf{a} = (a_0, a_1, 0), \quad \mathbf{b} = (0, 0, 1), \quad a_0^2 - a_1^2 = 1, \tag{1.9.36}$$

получаем явное выражение для величины $q(t)$:

$$q(t) = \ln(\alpha \operatorname{ch} t), \quad \alpha = \sqrt{2}\, g, \quad E = ½. \tag{1.9.37}$$

Обобщение этой формулы на случай цепочки Тоды для произвольного числа частиц, а также ряда модифицированных цепочек Тоды было дано в работах [256, 222, 97] (см. гл. 4).

1.10. Метод изоспектральной деформации

Одним из важнейших методов изучения интегрируемых динамических систем является так называемый метод обратной задачи рассеяния, или метод изоспектральной деформации. Этот метод возник в известной работе П. Лакса [233] в связи с изучением уравнения Кортевега–де Фриза

$$u_t = u_{xxx} + uu_x = 0, \quad u = u(x, t), \qquad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t},$$

начатым в знаменитой теперь работе Гарднера, Грина, Крускала и Миуры [177]. Отметим еще важную работу В. Захарова и Л. Фаддеева [77], где было показано, что уравнение Кортевега – де Фриза является бесконечномерной гамильтоновой системой.

К динамическим системам с конечным числом степеней свободы метод изоспектральной деформации был применен в работах [168, 88, 251] *). Идея метода очень проста. Пусть динамическая система описывается уравнениями

$$\dot{x}_\alpha = F_\alpha(x). \tag{1.10.1}$$

Предположим, что нам удалось найти пару матриц L и M (так называемую $L - M$-пару), элементы которых зависят от динамических переменных x_α так, что при этом уравнения (1.10.1) эквивалентны уравнению

$$\dot{L} = [M, L]. \tag{1.10.2}$$

Тогда из (1.10.2) следует, что матрица $L(t)$ в процессе эволюции подвергается преобразованию подобия,

$$\begin{gathered} L(t) = U(t)\, L(0)\, U^{-1}(t), \\ U^{-1}(t) = U^{+}(t), \quad M = \dot{U} U^{-1}. \end{gathered} \tag{1.10.3}$$

Следовательно, собственные значения матрицы $L(t)$ от времени не зависят, или, что эквивалентно, матрица $L(t)$ с течением времени испытывает изоспектральную деформацию. Таким образом, собственные значения матрицы $L(t)$, или, что часто бывает более удобно, симметрические функции от собственных значений, например величины

$$I_k = k^{-1}\, \mathrm{tr}(L^k), \tag{1.10.4}$$

являются интегралами движения. Если при этом удается найти достаточно много функционально независимых интегралов движения и показать, что они находятся в инволюции, т.е. что скобки Пуассона любых двух интегралов равны нулю, то рассматриваемая система является вполне интегрируемой.

Интересно отметить, что этот метод применим почти ко всем известным вполне интегрируемым системам. В данном разделе мы ограничимся применением метода изоспектральной деформации к простейшим системам, рассмотренным в предыдущем разделе. Таким образом, мы будем предполагать дополнительно, что к рассматриваемым системам применим метод проектирования. При этом, как мы увидим далее, мы автоматически получаем также и представление Лакса.

Следует, однако, иметь в виду, что представление Лакса известно в настоящее время для более широкого класса динамических систем, однако в тех случаях, когда не удается применить метод проектирования, интегрирование уравнений движения представляет нетривиальную проблему, решение которой удается получить лишь в немногих случаях.

---

*) Само название – метод изоспектральной деформации – было введено в работе Мозера [251].

1. Начнем с рассмотрения свободного движения частицы на плоскости (q_1, q_3). Уравнения движения здесь имеют вид

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = 0. \tag{1.10.5}$$

Для дальнейшего нам будет более удобно представить вектор $\mathbf{q}$ в виде вещественной симметрической матрицы второго порядка

$$\mathbf{q} \to \hat{q} = (q_1\sigma_1 + q_3\sigma_3), \tag{1.10.6}$$

где σ_1 и σ_3 – матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.10.7}$$

С другой стороны, мы можем представить матрицу $\hat{q}(t)$ в виде

$$\hat{q}(t) = U(t)QU^{-1}(t), \tag{1.10.8}$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -q \end{pmatrix}, \quad U(t) = U(\varphi(t)) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) & \sin(\varphi/2) \\ -\sin(\varphi/2) & \cos(\varphi/2) \end{pmatrix}, \tag{1.10.9}$$

$$q = q(t) = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}, \quad \varphi = \varphi(t).$$

Заметим, что матрица $U(\varphi)$ описывает поворот на угол φ в плоскости (q_1, q_3). Дифференцируя по времени выражение (1.10.8) для $q(t)$, получаем

$$\dot{\hat{q}} = U(t)L(t)U^{-1}(t) = \hat{p}, \tag{1.10.10}$$

где

$$L = \dot{Q} + i[M, Q], \tag{1.10.11}$$

$$M = -iU^{-1}\dot{U} = i\dot{U}U^{-1}. \tag{1.10.12}$$

Дифференцируя теперь выражение (1.10.10), приходим к уравнению

$$\dot{L} + i[M, L] = 0, \tag{1.10.13}$$

т.е. к уравнению Лакса. Заметим, что помимо уравнения Лакса (1.10.13) должно также выполняться и уравнение (1.10.11). Нетрудно проверить, что если матрицы L и M имеют вид

$$L = \begin{pmatrix} p & gq^{-1} \\ gq^{-1} & -p \end{pmatrix}, \quad M = i\begin{pmatrix} 0 & gq^{-2} \\ -gq^{-2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.10.14}$$

то уравнение (1.10.11) выполняется, а уравнение Лакса (1.10.13) при этом эквивалентно уравнениям Гамильтона для системы с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + g^2q^{-2}). \tag{1.10.15}$$

Отметим, что аналогичная конструкция известна и для системы частиц с парным взаимодействием вида $v(q) = g^2q^{-2}$. Она была найдена в работе [251].

2. Рассмотрим динамическую систему в пространстве $X=\{x\}$ – пространстве эрмитовых положительно определенных матриц второго порядка. Пространство X является однородным: на нем транзитивно действует группа $G=\{g\}=SL(2, \mathbb{C})$ – группа комплексных матриц второго порядка. Это действие дается формулой

$$g: \quad x \to g x g^{+}. \tag{1.10.16}$$

На пространстве X существует G-инвариантная метрика

$$ds^2 = \mathrm{tr}(x^{-1}\, dx\, x^{-1}\, dx), \tag{1.10.17}$$

и уравнения для геодезических для этой метрики можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}(x^{-1}\dot{x} + \dot{x}x^{-1}) = 0. \tag{1.10.18}$$

Нетрудно проверить, что матрица $x(t)$, определенная согласно формуле

$$\begin{aligned} &x(t) = b\exp\{2at\}b^{+}, \quad b \in SL(2, \mathbb{C}), \\ &a^{+} = a, \qquad \mathrm{tr}\, a = 0, \end{aligned} \tag{1.10.19}$$

является решением уравнений (1.10.18).

С другой стороны, эрмитову положительно определенную матрицу $x(t)$ можно представить в виде

$$x(t) = U(t)\exp(Q(t))\,U^{-1}(t), \tag{1.10.20}$$

где $U(t)$ – унитарная матрица. Вычисляя с помощью (1.10.20) величины $\dot{x}x^{-1}$ и $x^{-1}\dot{x}$, получаем

$$\frac{\dot{x}x^{-1} + x^{-1}\dot{x}}{2} = U(t)L(t)U^{-1}(t), \tag{1.10.21}$$

где

$$L(t) = P + \frac{i}{2}\{\exp(-Q)\,M\exp(Q) - \exp(Q)M\exp(-Q)\}, \tag{1.10.22}$$

$$M = -iU^{-1}(t)\,\dot{U}(t). \tag{1.10.23}$$

Дифференцируя (1.10.21) по времени, приходим к уравнению Лакса

$$\dot{L} + i\,[M, L] = 0. \tag{1.10.24}$$

Как и в предыдущем случае, нетрудно проверить, что если матрицы L и M имеют вид

$$L = \begin{pmatrix} p & g\,\mathrm{cth}\, q \\ g\,\mathrm{cth}\, q & -p \end{pmatrix}, \quad M = \frac{ig}{\mathrm{sh}^2 q}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.10.25}$$

то уравнение (1.10.22) выполняется, а уравнение Лакса (1.10.24) при этом эквивалентно уравнениям Гамильтона для системы с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + g^2\,\mathrm{sh}^{-2} q). \tag{1.10.26}$$

Представление Лакса для общего случая системы n частиц, взаимодействующих посредством парного потенциала $v(q) = g^2 \mathrm{sh}^{-2} q$, было найдено в работах [251, 133], см. гл. 3.

3. В качестве последнего примера рассмотрим ту же динамическую систему в пространстве эрмитовых положительно определенных матриц второго порядка, что и в предыдущем разделе, но вместо формулы (1.10.20) воспользуемся другой формулой:

$$x(t) = z(t) \exp(2Q(t)) z^+(t), \tag{1.10.27}$$

где $z(t)$ – верхняя треугольная матрица. Вычисляя с помощью (1.10.27) величину $\dot{x}x^{-1}$, получаем

$$\dot{x}x^{-1} = zLz^{-1}, \tag{1.10.28}$$

где

$$L = P + M + \exp(Q) M^+ \exp(-Q), \tag{1.10.29}$$

$$M = z^{-1}\dot{z}. \tag{1.10.30}$$

Дифференцируя равенство (1.10.28) по времени с учетом того обстоятельства, что $x(t)$ является геодезической, получаем уравнение Лакса

$$\dot{L} = [L, M]. \tag{1.10.31}$$

Матрицы L и M, выраженные через динамические переменные p и q, даются формулами

$$L = \begin{pmatrix} p & \exp(2q) \\ 1 & -p \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & \exp(2q) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.10.32}$$

При этом уравнение (1.10.29) удовлетворяется, а уравнение Лакса (1.10.31) эквивалентно уравнениям движения системы с гамильтонианом

$$H = \tfrac{1}{2}(p^2 + \exp(2q)). \tag{1.10.33}$$

Метод проектирования справедлив и для цепочки Тоды, состоящей из произвольного числа частиц [256, 97]. Представление Лакса для цепочки Тоды, состоящей из произвольного числа частиц, было найдено ранее в работах [168, 88], см. гл. 4.

1.11. Гамильтоновы системы на орбитах коприсоединенного представления групп Ли

Как было показано ранее (см. раздел 1.4), орбиты коприсоединенного представления групп Ли являются однородными симплектическими многообразиями, и потому они – естественные кандидаты на фазовые пространства гамильтоновых систем.

В этом разделе мы рассмотрим гамильтоновы системы с фазовыми пространствами такого типа со стандартной скобкой Ли–Пуассона на них. Уравнения движения подобных систем во многих случаях допускают представление Лакса; такие системы обладают высокой симметрией и в ряде случаев оказываются вполне интегрируемыми.

Естественным аппаратом для изучения этого типа систем является теория групп и алгебр Ли; такой теоретикогрупповой подход интенсивно развивался в последние годы как для конечномерных, так и для бесконечномерных гамильтоновых систем. Различные аспекты и обобщения этого подхода, а также ссылки на статьи, имеющие отношение к данному вопросу, можно найти в работах [30, 34, 87, 102, 104, 109–111, 122, 181, 182, 216, 223, 271–273, 292, 293].

Перейдем к рассмотрению конструкции этого класса гамильтоновых систем.

Пусть G – произвольная группа Ли, $\mathscr{G}$ – ее алгебра Ли, $\mathscr{G}^*$ – пространство, дуальное к $\mathscr{G}$, т.е. пространство линейных функционалов на $\mathscr{G}$. В пространстве $\mathscr{F}(\mathscr{G}^*)$ гладких функций на $\mathscr{G}^*$ введем, следуя [54–57], скобку Пуассона согласно формуле

$$\{F, G\} = C^l_{jk} x_l \, \partial^j F \, \partial^k G. \tag{1.11.1}$$

Здесь x_j – координаты точки x в пространстве $\mathscr{G}^*$, C^l_{jk} – структурные постоянные алгебры $\mathscr{G}$ (относительно деталей этой конструкции см. раздел 1.2).

Пространство $\mathscr{F}(\mathscr{G}^*)$ приобретает после этого структуру бесконечномерной алгебры Ли. Величины $\partial^j F$ в (1.11.1) представляют координаты некоего элемента ∇F алгебры Ли $\mathscr{G}$ – градиента функции F – и выражение (1.11.1) для скобки Пуассона теперь можно переписать в бескоординатной форме

$$\{F, G\}(x) = \langle x, [\nabla F, \nabla G]\rangle, \tag{1.11.2}$$

где $\langle x, \xi\rangle$ – значение функционала x в точке $\xi \in \mathscr{G}$.

В пространстве, снабженном скобкой Пуассона, мы можем рассмотреть динамическую систему, задаваемую уравнением

$$\dot{x} = \{H, x\}. \tag{1.11.3}$$

Расписывая это уравнение по компонентам, получаем

$$\dot{x}_j = -C^l_{jk} x_l \, \partial^k H. \tag{1.11.4}$$

Приведем еще одну форму записи этого уравнения:

$$\dot{x} = -(\mathrm{ad}^*_{\nabla H}) \cdot x, \quad x \in \mathscr{G}^*, \tag{1.11.5}$$

где ad^*_ξ $(\xi \in \mathscr{G})$ – оператор коприсоединенного представления алгебры Ли $\mathscr{G}$:

$$\mathrm{ad}^*_\xi\colon \mathscr{G}^* \to \mathscr{G}^*.$$

Таким образом, уравнения гамильтоновой динамики всегда имеют вид (1.11.5). Они, однако, не имеют вид уравнений Лакса, поскольку действие оператора ad^*_ξ не сводится, вообще говоря, к вычислению коммутатора.

Предположим теперь дополнительно, что на алгебре Ли $\mathscr{G}$ существует невырожденное, инвариантное относительно присоединенного представления скалярное произведение $(\ , \ )$. В этом случае мы можем отождествить пространство $\mathscr{G}^*$ с $\mathscr{G}$ с помощью соотношения

$$\langle y^*, \xi\rangle = (y, \xi). \tag{1.11.6}$$

Здесь $\xi \in \mathscr{G}$, $y^* \in \mathscr{G}^*$ и элемент $y \in \mathscr{G}$ отождествляется с y^*. Инвариантность скалярного произведения эквивалентна тождеству

$$([c, b], a) + (b, [c, a]) = 0, \tag{1.11.7}$$

и потому в рассматриваемом случае

$$\{F, G\}(x^*) = \langle x^*, [\nabla F, \nabla G]\rangle = (x, [\nabla F, \nabla G]) = (\nabla G[x, \nabla F]), \tag{1.11.8}$$

где мы отождествили x^* и x с помощью (1.11.6). Уравнения движения (1.11.4) теперь нетрудно преобразовать к виду

$$\dot{x} = [x, \nabla H] = -\operatorname{ad}_{\nabla H} \cdot x, \qquad x \in \mathcal{G}. \tag{1.11.9}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае динамика разыгрывается в пространстве $\mathcal{G}$ и уравнения динамики всегда приводятся к специальному виду Лакса

$$\dot{x} = -[M, x], \qquad M = \nabla H. \tag{1.11.10}$$

Уравнения (1.11.10) являются обобщением уравнений Эйлера, описывающих вращение твердого тела вокруг неподвижной точки. В этом случае алгебра Ли $\mathcal{G}$ – алгебра Ли группы вращений трехмерного пространства, а гамильтониан H квадратичен по элементам этой алгебры. Описание вращения n-мерного твердого тела с помощью таких уравнений было дано впервые Арнольдом [118, 67].

Уравнения (1.11.5) (или (1.11.9)) задают динамику в пространстве $\mathcal{G}^*$ (соответственно в пространстве $\mathcal{G}$). Эти уравнения обычно допускают ряд интегралов движения, так что реальное движение происходит на некоем подмногообразии пространства $\mathcal{G}^*$ (или $\mathcal{G}$), а именно на орбите коприсоединенного (присоединенного) представления группы G.

Действительно, рассмотрим множество $I(\mathcal{G}^*)$ ($I(\mathcal{G})$) функций $f_\alpha(x)$, таких, что

$$\{f_\alpha(x), x_j\} = 0 \quad \text{или} \quad C^l_{jk} x_l \, \partial^k f_\alpha = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.11.11}$$

Эти функции являются инвариантами коприсоединенного (присоединенного) представления и, как нетрудно видеть, обладают тем свойством, что

$$\{f_\alpha(x), h(x)\} = 0 \tag{1.11.12}$$

для произвольной функции $h(x)$. Это значит, что они являются интегралами движения для произвольной гамильтоновой системы типа (1.11.5) (или (1.11.9)). Приравнивая эти функции постоянным,

$$f_\alpha(x) = c_\alpha, \tag{1.11.13}$$

мы получаем инвариантное многообразие, которое является орбитой коприсоединенного представления (или же объединением ряда таких орбит).

Для полной интегрируемости такой системы интегралов $\{f_\alpha\}$, разумеется, недостаточно – если динамика происходит на орбите размерности $2n$, то помимо гамильтониана необходимо иметь еще $(n - 1)$ интегралов движения в инволюции.

Гамильтоновы системы, допускающие дополнительные интегралы движения, действительно существуют. Описанию конструкции таких систем посвящен следующий раздел.

1.12. Конструкции гамильтоновых систем с большим числом интегралов движения

В данном разделе дано описание нескольких конструкций гамильтоновых систем на дуальном пространстве алгебры Ли, допускающих достаточно много интегралов движения в инволюции. Как известно, любую из таких систем можно ограничить на орбиту коприсоединенного представления. Во многих интересных случаях получающиеся при этом гамильтоновы системы оказываются вполне интегрируемыми. Отметим, что все эти конструкции можно рассматривать как частные случаи более общего метода — так называемого метода классической r-матрицы [104]. Однако методы, описанные в настоящем разделе, обладают рядом специфических особенностей, важны для приложений и потому заслуживают отдельного рассмотрения. Перейдем к их описанию.

1. Пусть $\mathcal{G}$ — алгебра Ли, а $\mathcal{G}^*$ — пространство, дуальное к $\mathcal{G}$, снабженное стандартной скобкой Ли—Пуассона (см. раздел 1.11). Обозначим через $I(\mathcal{G}^*)$ пространство функций на $\mathcal{G}^*$, инвариантных относительно коприсоединенного представления группы G. Поскольку эти функции коммутируют по Пуассону с любой функцией на $\mathcal{G}^*$, они приводят к тривиальным уравнениям Гамильтона. Тем не менее — и это является главной темой данного раздела — инвариантные функции можно использовать для получения нетривиальных уравнений движения, обладающих дополнительными интегралами движения в инволюции.

Теорема 1.12.1 [90]. Пусть $f(x)$, $h(x) \in I(\mathcal{G}^*)$, $a \in \mathcal{G}^*$ и λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Введем обозначения $f_{\lambda,a}(x) = f(x + \lambda a)$, $h_{\mu,a}(x) = h(x + \mu a)$. Тогда

$$\{f_{\lambda,a}(x),\ h_{\mu,a}(x)\} = 0, \qquad (1.12.1)$$

где $\{\ ,\ \}$ — стандартная скобка Ли—Пуассона на $\mathcal{G}^*$.

Доказательство. Представим x в виде линейной комбинации $(x + \lambda a)$ и $(x + \mu a)$: $x = \alpha(x + \lambda a) + \beta(x + \mu a)$, где $\alpha = \mu(\mu - \lambda)^{-1}$, $\beta = \lambda(\lambda - \mu)^{-1}$. Тогда

$$\{f_{\lambda,a}(x),\ h_{\mu,a}(x)\} = \langle x,\ [\nabla f_{\lambda,a}(x),\ \nabla h_{\mu,a}(x)]\rangle =$$

$$= \alpha\langle x + \lambda a,\ [\nabla f(x + \lambda a),\ \nabla h(x + \mu a)]\rangle +$$

$$+ \beta\langle x + \mu a,\ [\nabla f(x + \lambda a),\ \nabla h(x + \mu a)]\rangle.$$

Но первое слагаемое обращается в нуль в силу инвариантности функции $f(x)$, а второе — в силу инвариантности функции $h(x)$. Таким образом, $\{f_{\lambda,a}(x),\ h_{\mu,a}(x)\} = 0$. Отметим, что эта конструкция дает полный инволютивный набор функций для достаточно широкого класса алгебр Ли, включающего полупростые алгебры Ли (см. ниже). В качестве гамильтониана здесь можно взять любую функцию из этого набора. Относительно дальнейших обобщений этой конструкции см. обзор [34].

2. Идея второго способа состоит в том, чтобы рассмотреть более широкую алгебру $\tilde{\mathcal{G}}$, в которую алгебра $\mathcal{G}$ вложена в качестве подалгебры, и использовать инварианты коприсоединенного представления алгебры $\tilde{\mathcal{G}}$ для построения нетривиальных уравнений движения на $\mathcal{G}^*$.

Теорема 1.12.2 [222, 292]. Предположим, что алгебра Ли $\tilde{\mathcal{G}}$ является линейной суммой двух подалгебр, $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G} + \mathcal{F}$, и соответственно для дуальных пространств имеем $\widetilde{\mathcal{G}}^* = \mathcal{G}^* + \mathcal{F}^*$, $\mathcal{G}^* \simeq \mathcal{F}^\perp$, $\mathcal{F}^* \simeq \mathcal{G}^\perp$. Тогда:

а) инвариантные функции на $\widetilde{\mathcal{G}}^*$, ограниченные на $\mathcal{G}^*$, находятся в инволюции относительно скобки Ли–Пуассона на $\mathcal{G}^*$;

б) пусть f – инвариантная функция на $\widetilde{\mathcal{G}}^*$, рассматриваемая как гамильтониан на $\mathcal{G}^*$. Тогда соответствующие уравнения Гамильтона на $\mathcal{G}^*$ можно записать в виде обобщенного представления Лакса

$$\dot{x} = \widetilde{\mathrm{ad}}^*_M \cdot x, \quad x \in \mathcal{G}^*, \tag{1.12.2}$$

где $\widetilde{\mathrm{ad}}^*$ означает коприсоединенное представление $\widetilde{\mathcal{G}}$, $M = \Pi_{\mathcal{F}} \nabla f(x)$, $\nabla f(x)$ – градиент функции $f(x)$ в точке x, а $\Pi_{\mathcal{F}}$: $\widetilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{F}$ – проекционный оператор для разложения $\widetilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G} + \mathcal{F}$.

Доказательство. По определению скобка Ли–Пуассона для двух функций f и h на $\mathcal{G}^*$ дается формулой

$$\{f(x),\ h(x)\}_{\mathcal{G}^*} = \langle x\,[\nabla f(x),\ \nabla h(x)]\,\rangle. \tag{1.12.3}$$

Для функции $f(x)$ на $\widetilde{\mathcal{G}}^*$ положим

$$\nabla f(x) = \nabla_1 f(x) + \nabla_2 f(x), \tag{1.12.4}$$

где $\nabla_1 f(x) \in \mathcal{G}$, $\nabla_2 f(x) \in \mathcal{F}$, так что $\nabla_1 f(x)$ – это дифференциал функции f, ограниченный на $\mathcal{G}^*$. Если $f(x)$ является $\widetilde{\mathrm{Ad}}^*$-инвариантной функцией, то для любого $\xi \in \widetilde{\mathcal{G}}$

$$\langle x,\ [\nabla f(x), \xi]\rangle = 0. \tag{1.12.5}$$

Если h – другая $\widetilde{\mathrm{Ad}}^*$-инвариантная функция на $\widetilde{\mathcal{G}}^*$, то из (1.12.3) и (1.12.5) следует

$$\{f(x),\ h(x)\}_{\mathcal{G}^*} = \langle x\ [\nabla_1 f(x),\ \nabla_1 h(x)]\,\rangle =$$

$$= -\langle x\ [\nabla_2 f(x),\ \nabla_1 h(x)] = \langle x\,[\nabla_2 f(x), \nabla_2 h(x)]\,\rangle = 0,$$

поскольку $x \in \mathcal{G}^* = \mathcal{F}^\perp$, а $[\nabla_2 f(x),\ \nabla_2 h(x)] \in \mathcal{F}$. Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Возьмем в качестве гамильтониана на $\mathcal{G}^*$ инвариантную функцию f на $\mathcal{G}^*$. Тогда для линейной функции $\xi \in \mathcal{G}$ на $\mathcal{G}^*$ получаем уравнение

$$\langle \dot{x}, \xi\rangle = \{f(x),\ \xi(x)\}_{\mathcal{G}^*} = \langle x\,[\nabla_1 f(x),\ \xi]\rangle =$$

$$= -\langle x\,[\nabla_2 f(x),\ \xi]\rangle = \langle \widetilde{\mathrm{ad}}^*_{\nabla_2 f(x)} \cdot x,\ \xi\rangle.$$

Следовательно,

$$\dot{x} = \widetilde{\mathrm{ad}}^*_{\nabla_2 f(x)} \cdot x,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что если на алгебре $\widetilde{\mathcal{G}}$ существует невырожденное, $\widetilde{\mathrm{ad}}^*$-инвариантное скалярное произведение, которое позволяет отождествить $\widetilde{\mathcal{G}}^*$ с $\widetilde{\mathcal{G}}$ и $\widetilde{\mathrm{ad}}^*$ с $\widetilde{\mathrm{ad}}$, то уравнение (1.12.2) можно переписать как обычное представление Лакса ($L = x$):

$$\dot{L} = [L, M].$$

Пример

В качестве иллюстрации теоремы 1.12.2 мы обсудим цепочку Тоды [109, 222, 292]. Пусть $\tilde{\mathcal{G}} = \mathrm{sl}(n, \mathbb{R})$, $\mathcal{G}$ – подалгебра нижних треугольных матриц, $\mathcal{F} = \mathrm{so}(n)$ – подалгебра антисимметричных матриц. Инвариантное скалярное произведение дается формулой $(A, B) = \mathrm{tr}(A \cdot B)$ и позволяет отождествить $\mathcal{G}^*$ с пространством $\mathcal{F}^\perp$ – пространством симметричных матриц: $\mathcal{G}^* \simeq \mathrm{Symm}(n)$. В качестве гамильтониана возьмем

$$H = \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(L^2).$$

Тогда уравнение Лакса на $\mathcal{G}^*$ принимает вид

$$\dot{L} = [L, M], \qquad M = \Pi_{\mathrm{so}(n)} L \tag{1.12.6}$$

(если через L_+, L_- обозначить верхнюю, соответственно нижнюю треугольные части L, то $M = L_+ - L_-$). Как было показано ранее, все гамильтоновы системы на $\mathcal{G}^*$ можно ограничить на орбиты коприсоединенного представления. Рассмотрим, в частности орбиту, проходящую через элемент L_0,

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.12.7}$$

Тогда нетрудно доказать, что эта орбита состоит из матриц вида

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & 0 \\ a_1 & b_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}, \quad \sum_{j=1}^{n} b_j = 0, \quad a_j \geqslant 0. \tag{1.12.8}$$

Ограничение скобки Ли–Пуассона на эту орбиту дается формулами

$$\begin{aligned} &\{a_i, a_j\} = 0, \quad \{b_i, b_j\} = 0, \\ &\{a_i, b_i\} = a_i, \quad \{a_i, b_{i+1}\} = -a_i, \\ &\{a_i, b_j\} = 0, \quad \text{если} \quad |i-j| > 1. \end{aligned} \tag{1.12.9}$$

Заметим, что замена переменных

$$b_i = p_i, \quad a_i = \exp(q_{i+1} - q_i)$$

приводит эти скобки к каноническому виду. При этом гамильтониан $H = \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(L^2)$ принимает вид

$$H = \frac{1}{2} \sum_1^n b_i^2 + \sum_1^{n-1} a_i^2 = \frac{1}{2}\sum_1^n p_i^2 + \sum_1^{n-1} \exp\{2(q_{i+1} - q_i)\}, \tag{1.12.10}$$

а матрица $M = L_+ - L_-$, входящая в уравнение Лакса, имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & \\ -a_1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ & & -a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.12.11}$$

Инвариантные функции $I_k = \frac{1}{k}\operatorname{tr}(L^k)$, $k = 2, \ldots, n$, образуют полный набор интегралов движения в инволюции. (Заметим, что уравнения движения, генерируемые этими функциями, имеют вид Лакса с $M = (L^{k-1})_+ - (L^{k-1})_-$. Этот факт был впервые отмечен П. ван Мербеке, см. [109].)

3. Другое полезное семейство функций в инволюции дается следующей теоремой.

Теорема 1.12.3 [30]. Пусть $\mathscr{G}$ – алгебра Ли, σ – инволюция на $\mathscr{G}$, а $\mathscr{G} = \mathscr{K} + \mathscr{P}$ – разложение на собственные пространства оператора σ: $\sigma = \mathrm{id}$ на $\mathscr{K}$ и $\sigma = -\mathrm{id}$ на $\mathscr{P}$. Пусть $\mathscr{G}_\sigma = \mathscr{K} \dot{+} \mathscr{P}$ – полупрямая сумма подалгебры $\mathscr{K}$ и векторного пространства $\mathscr{P}$. Фиксируем элемент $a \in \mathscr{P}^*$ и определим семейство функций на $\mathscr{G}_\sigma^* = \mathscr{K}^* + \mathscr{P}^*$ формулой

$$f_{a,\lambda}(L) = f(\lambda^{-1}a + x + \lambda s), \qquad L = x + s, \tag{1.12.12}$$

где $f \in I(\mathscr{G}^*)$, $x \in \mathscr{K}^*$ и $s \in \mathscr{P}^*$ – независимые переменные, а λ – вещественный параметр. Тогда функции (1.12.12) находятся в инволюции относительно скобки Ли–Пуассона для полупрямой суммы $\mathscr{G}_\sigma = \mathscr{K} \dot{+} \mathscr{P}$.

Доказательство. Обозначим через $\{\ ,\ \}$ скобку Ли–Пуассона на $\mathscr{G}^*$, а через $\{\ ,\ \}_\sigma$ – скобку Ли–Пуассона на $\mathscr{G}_\sigma^*$ (относительно структуры полупрямой суммы). Тогда линейное преобразование T_λ на $\mathscr{G}^*$, определенное формулой

$$T_\lambda(x + s) = \lambda^{-1}a + x + \lambda s$$

(λ фиксировано), переводит скобку $\{\ ,\ \}$ в скобку $\{\ ,\ \}_\lambda = \lambda^{-2}\{\ ,\ \} + (1 - \lambda^{-2})\{\ ,\ \}_\sigma + \lambda^{-2}\{\ ,\ \}_a$, где скобка $\{\ ,\ \}_a$ определена формулой

$$\{\xi, \eta\}_a = \langle a\,[\xi, \eta]\rangle$$

для $\xi, \eta \in \mathscr{G}$. Предположим теперь, что f – инвариантная функция на $\mathscr{G}^*$. Поскольку $f_{a,\lambda}(L) = f(T_\lambda \cdot L)$ и f является центральной функцией для $\{\ ,\ \}$, т.е. $\{f, \psi\} = 0$ для произвольной функции ψ, мы имеем $\{f_{a,\lambda}, \psi\}_\lambda = 0$ для произвольной функции ψ. Следовательно, если h – другая инвариантная функция, то

$$\{f_{a,\lambda}, h_{a,\mu}\}_\lambda = 0 = \{f_{a,\lambda}, h_{a,\mu}\}_\mu .$$

Таким образом, $f_{a,\lambda}$ и $h_{a,\mu}$ коммутируют по Пуассону также по отношению к любой линейной комбинации скобок $\{\ ,\ \}_\lambda$ и $\{\ ,\ \}_\mu$. В частности,

$$\lambda^2\{\ ,\ \}_\lambda - \mu^2\{\ ,\ \}_\mu = (\lambda^2 - \mu^2)\{\ ,\ \}_\sigma ,$$

так что $\{f_{a,\lambda}, h_{a,\mu}\}_\sigma = 0$, что и требовалось показать.

Заметим, что в действительности было доказано более сильное утверждение: функции $f_{a,\lambda}$ (1.12.12) находятся в инволюции по отношению к линейному семейству скобок Пуассона

$$\alpha\{\ ,\ \}_\sigma + \beta(\{\ ,\ \} + \{\ ,\ \}_a).$$

Применение теоремы 1.12.3 к римановым симметрическим парам $(\mathscr{G}, \sigma)$ дает многочисленные интегрируемые гамильтоновы системы, имеющие естественную механическую интерпретацию, такие, например, как вращение многомерного твердого тела в определенных потенциальных полях.

4. Все рассмотренные выше конструкции гамильтоновых систем с большим числом интегралов движения в инволюции оказываются специальными случаями так называемого метода классической r-матрицы, который в настоящее время является, по-видимому, наиболее общим методом построения интегрируемых гамильтоновых систем. Этот метод был предложен вначале в работе [105] и был развит затем в теоретико-групповую схему в работе [104]. Здесь мы лишь сформулируем основную теорему, отсылая интересующегося читателя за деталями к работе [104].

Начнем с определения. Пусть $\mathcal{G}$ – алгебра Ли и R – линейный оператор на $\mathcal{G}$. Определим на $\mathcal{G}$ билинейную операцию $[\ ,\ ]_R$ согласно формуле

$$[\xi, \eta]_R = [R\xi, \eta] + [\xi, R\eta]; \quad \xi, \eta \in \mathcal{G}. \tag{1.12.13}$$

Очевидно, что эта операция антисимметрична. Оператор R называется классической r-матрицей, если $[\ ,\ ]_R$ удовлетворяет тождеству Якоби. Если R – классическая r-матрица, то скобка (1.12.13) определяет вторую структуру алгебры Ли на $\mathcal{G}$, и мы назовем пару $(\mathcal{G}, R)$ двойной алгеброй Ли. Этим двум скобкам Ли соответствуют две скобки Ли–Пуассона на $\mathcal{G}^*$:

$$\begin{aligned} \{f(x), h(x)\} &= \langle x, [\nabla f(x), \nabla h(x)]\rangle, \\ \{f(x), h(x)\}_R &= \langle x, [\nabla f(x), \nabla h(x)]_R\rangle. \end{aligned} \tag{1.12.14}$$

Теперь из (1.12.14) получаем

$$(\mathrm{ad}_R^*)_\xi \cdot x = \mathrm{ad}_{R\xi}^* \cdot x + R^*(\mathrm{ad}_\xi^* \cdot x). \tag{1.12.15}$$

Напомним, что Ad^*-инвариантные функции на $\mathcal{G}^*$ являются центральными для скобки Ли–Пуассона $\{\ ,\ \}$.

Теорема 1.12.4 [104]. Пусть $(\mathcal{G}, R)$ – двойная алгебра Ли. Тогда:

(1) Ad^*-инвариантные функции на $\mathcal{G}^*$ находятся в инволюции по отношению к R-скобке $\{\ ,\ \}_R$;

(2) уравнения движения на $\mathcal{G}^*$, индуцируемые инвариантным гамильтонианом H относительно R-скобки $\{\ ,\ \}_R$, т.е. уравнения

$$\dot{x} = (\mathrm{ad}_R^*)_{\nabla H(x)} \cdot x,$$

можно записать в "обобщенном лаксовом виде"

$$\dot{x} = \mathrm{ad}_M^* \cdot x, \quad \text{где} \quad M = R \cdot \nabla H(x). \tag{1.12.16}$$

Доказательство. R-скобку (1.12.13) можно записать в более явном виде:

$$\{f(x), h(x)\}_R = \langle x[R\nabla f(x), \nabla h(x)]\rangle + \langle x[\nabla f(x), R\nabla h(x)]\rangle. \tag{1.12.17}$$

Если H – инвариантная функция, то $\langle x[\nabla H(x), \xi]\rangle = 0$ для любого элемента $\xi \in \mathcal{G}$. Отсюда и следует часть (1) теоремы. Теперь, как следует из (1.12.15), уравнения движения, индуцируемые H, имеют вид

$$\dot{x} = (\mathrm{ad}_R^*)_{\nabla H(x)} \cdot x = \mathrm{ad}_{R\cdot\nabla H(x)}^* \cdot x + R^*(\mathrm{ad}_{\nabla H(x)}^* \cdot x).$$

В силу инвариантности функции $H(x)$, $\mathrm{ad}_{\nabla H(x)}^* \cdot x = 0$ и мы приходим к уравнению (1.12.16).

Важный класс r-матриц возникает при рассмотрении разложения алгебры $\mathcal{G}$ в линейную сумму двух подалгебр, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_+ + \mathcal{G}_-$ (ср. с теоремой 1.12.2). Пусть $P_\pm$ – проекционные операторы на $\mathcal{G}_\pm$ параллельно $\mathcal{G}_{\mp}$. Тогда оператор

$$R = \frac{1}{2}(P_+ - P_-) \tag{1.12.18}$$

является r-матрицей, а соответствующая R-скобка является прямой разностью скобок Ли в алгебрах $\mathcal{G}_+$ и $\mathcal{G}_-$:

$$[\xi_+ + \xi_-, \eta_+ + \eta_-]_R = [\xi_+, \eta_+] - [\xi_-, \eta_-], \tag{1.12.19}$$

$\xi_\pm$, $\eta_\pm \in \mathcal{G}_\pm$. Для r-матрицы такого вида теорема 1.12.4 становится прямым обобщением теоремы 1.12.2 (в таком виде она впервые появилась в работе [30]):

Т е о р е м а 1.12.5. Пусть $\mathcal{G} = \mathcal{G}_+ + \mathcal{G}_-$ – расщепление алгебры Ли в линейную сумму двух подалгебр. Тогда:

1) Ad^*-инвариантные функции на $\mathcal{G}^* = \mathcal{G}_+^* + \mathcal{G}_-^*$ находятся в инволюции по отношению к "прямой разности" скобок Ли–Пуассона на $\mathcal{G}_+$ и $\mathcal{G}_-$ (1.12.19);

2) уравнения движения на $\mathcal{G}^* = \mathcal{G}_+^* + \mathcal{G}_-^*$, индуцируемые инвариантным гамильтонианом H относительно R-скобки (1.12.19), можно записать в обобщенном лаксовом виде

$$\dot{x} = \mathrm{ad}^*_{M_\pm} \cdot x, \tag{1.12.20}$$

где

$$M_\pm = \pm P_\pm(\nabla H(x)).$$

Напомним еще раз, что если существует инвариантное невырожденное скалярное произведение на $\mathcal{G}$, которое позволяет отождествить $\mathcal{G}^*$ и $\mathcal{G}$, и ad^* и ad, то уравнение (1.12.20) принимает обычный лаксов вид ($L = x$)

$$\dot{L} = [L, M_\pm]. \tag{1.12.21}$$

Теорема 1.12.2 является очевидным следствием теоремы 1.12.5 (для случая $\widetilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_+$, $\mathcal{F} = \mathcal{G}_-$), поскольку $\mathcal{G}_+^*$ является инвариантным подпространством в $\mathcal{G}^*$ относительно R-скобки.

Переходя к рассмотрению более общего случая, предположим, что $a \in \mathcal{G}_-^*$ – это характер алгебры $\mathcal{G}_-$, т.е. $\langle a\,[\mathcal{G}_-, \mathcal{G}_-]\rangle = 0$. Тогда "сдвинутое" пространство $(\mathcal{G}_+^* + a)$ является инвариантным подпространством в $\mathcal{G}^*$, так что, применяя теорему 1.12.5 к этому подпространству, получаем следующую теорему.

Т е о р е м а 1.12.6 [222]. Предположим, что алгебра Ли $\widetilde{\mathcal{G}}$ является линейной суммой двух подалгебр: $\widetilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G} + \mathcal{F}$. Пусть $a \in \mathcal{F}^* \simeq \mathcal{G}^\perp$ – характер $\mathcal{F}$, т.е. $\langle a, [\mathcal{F}, \mathcal{F}]\rangle = 0$. Тогда:

(а) функции на $\mathcal{G}^* \simeq \mathcal{F}^\perp$ вида $f_a(x) = f(x+a)$, где $f(x)$ пробегает множество инвариантных функций на $\widetilde{\mathcal{G}}^*$, находятся в инволюции по отношению к скобке Ли–Пуассона на $\mathcal{G}^*$;

(б) пусть $f \in I(\widetilde{\mathcal{G}}^*)$. Тогда уравнения движения на $\mathcal{G}^*$, индуцируемые гамильтонианом f_a, можно переписать в обобщенном лаксовом виде

$$\dot{L} = \mathrm{ad}^*_{M_\pm} \cdot L,$$

где $L = x + a$, а $M_\pm = \pm P_\pm(\nabla f(L))$.

Проиллюстрируем эту теорему на примере цепочки Тоды. Пусть $\mathcal{G} = \mathrm{sl}(n, \mathbb{R})$, $\mathcal{G}_-$ — подалгебра нижних треугольных матриц, а $\mathcal{G}_+$ — подалгебра верхних треугольных матриц с нулями на диагонали. Скалярное произведение в $\mathcal{G}$, как и прежде, выберем в виде $\mathrm{tr}(AB)$. Тогда $\mathcal{G}_-^*$ идентифицируется с пространством верхних треугольных матриц. Рассмотрим два элемента e_+ и e_- в алгебрах $\mathcal{G}_+$ и $\mathcal{G}_-$ соответственно:

$$e_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_- = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.12.22}$$

e_+ — это характер $\mathcal{G}_-$, или, что эквивалентно, одноточечная орбита. Орбита $\mathcal{O}_+$ алгебры $\mathcal{G}_-$, проходящая через e_+, состоит из матриц вида

$$L_0 = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & & & b_n \end{pmatrix}, \quad \sum_j b_j = 0, \quad a_i > 0. \tag{1.12.23}$$

Выбирая в качестве H простейшую инвариантную функцию $H(L) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(L^2)$ и применяя теорему 1.12.6 к орбите $\mathcal{O}_+$, находим второе представление Лакса для цепочки Тоды $\dot{L} = [L, M_\pm]$ с $L = L_0 + e_-$, $M_\pm = \pm P_\pm L$,

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & 0 \\ 1 & b_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & & 1 & b_n \end{pmatrix}, \quad M_+ = -\begin{pmatrix} 0 & a_1 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.12.24}$$

Отметим еще, что теоремы 1.12.1 и 1.12.3 можно вывести из теоремы 1.12.5. Однако для этого необходимо ввести бесконечномерные алгебры Ли, состоящие из многочленов Лорана с коэффициентами в данной алгебре Ли (см. [102], [30]). Подчеркнем, что r-матрица $R = \frac{1}{2}(P_+ - P_-)$ (1.12.18), связанная с разложением $\mathcal{G} = \mathcal{G}_+ + \mathcal{G}_-$, является выделенной. Именно, соответствующая алгебраическая схема, описанная в теореме 1.12.5, интимно связана с задачей факторизации в соответствующей группе G ([272], [273], [30]).

Т е о р е м а 1.12.7. Пусть $G_\pm$ — подгруппы группы G, соответствующие подалгебрам $\mathcal{G}_\pm$. Пусть $H \in I(\mathcal{G}^*)$ и $\xi = \nabla H(x)$. Пусть $g_\pm(t)$ — гладкие кривые в соответствующих подгруппах $G_\pm$, являющиеся решениями задачи факторизации

$$\exp(t\xi) = g_+(t)^{-1} g_-(t), \quad g_\pm(0) = c \tag{1.12.25}$$

(величины $g_\pm(t)$ существуют по крайней мере для достаточно малых t). Тогда решение уравнения $\dot{x} = \mathrm{ad}^*_{M_\pm} \cdot x$ (1.12.20) дается формулой

$$x(t) = \mathrm{Ad}^*_{g_\pm(t)} \cdot x. \tag{1.12.26}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что $\mathrm{ad}^*_\xi \cdot x = 0$, так что $\mathrm{Ad}^*(\exp \xi t)x = x$ и, следовательно, $\mathrm{Ad}^*(g_+) \cdot x = \mathrm{Ad}^*(g_-) \cdot x$. Дифференцируя (1.12.26) по отношению к t, мы получаем

$$\dot{x}(t) = \mathrm{ad}^*_{\dot{g}_+(t)g_+^{-1}(t)} \cdot x(t) = \mathrm{ad}_{\dot{g}_-(t)g_-^{-1}(t)} \cdot x(t).$$

Мы должны показать, что $\dot{g}_\pm(t)g_\pm^{-1}(t) = M_\pm(t)$, где $M_\pm(t) = \mp P_\pm \cdot \xi(t)$, а $\xi(t) = \nabla H(\xi(t))$. Поскольку H – это инвариантная функция, мы имеем $\xi(t) = \mathrm{Ad}_{g_\pm(t)} \cdot \xi$. Перепишем (1.12.25) в виде $g_+(t)\exp(t\xi) = g_-(t)$ и продифференцируем его по t. Получаем $\dot{g}_+(t)g_+^{-1}(t) + \mathrm{Ad}_{g_-(t)} \cdot \xi = \dot{g}_-(t)g_-^{-1}(t)$. Поскольку $\dot{g}_\pm(t)g_\pm(t)^{-1} \in \mathcal{G}_\pm$, отсюда следует, что $\dot{g}_\pm(t)g_\pm(t)^{-1} = \mp P_\pm \xi(t)$, что и требовалось доказать.

1.13. Полнота инволютивных семейств

В предыдущем разделе мы обсудили различные конструкции инволютивных семейств функций на дуальном пространстве к алгебре Ли. Доказательство полноты таких семейств является, вообще говоря, нетривиальной задачей. В данном разделе, следуя работе [70], будет указан критерий полноты инволютивных систем, описанных в теоремах 1.12.1 и 1.12.3.

Как и прежде, через $\mathcal{G}$ обозначена конечномерная алгебра Ли, а через $\mathcal{G}^*$ – пространство, дуальное к ней. Мы уже видели, что для произвольного элемента a пространства $\mathcal{G}^*$ функции $f_{\lambda,a}(x) = f(x + \lambda a)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in I(\mathcal{G}^*)$, при разных λ находятся в инволюции относительно скобки Ли–Пуассона на $\mathcal{G}^*$. В случае полупростой алгебры Ли $\mathcal{G}$ проблема полноты до некоторой степени решается следующими двумя теоремами.

Теорема 1.13.1 [90]. Пусть $\mathcal{G}$ – полупростая алгебра Ли и a – регулярный элемент в $\mathcal{G}^*$. Тогда семейство сдвинутых инвариантных $f_{\lambda,a}(x)$ полно на $\mathcal{G}^*$.

Теорема 1.13.2 [71]. Пусть $\mathcal{G}$ – полупростая алгебра Ли (так что мы можем идентифицировать $\mathcal{G}^*$ и $\mathcal{G}$) и пусть x – полупростой элемент*) $\mathcal{G}$. Тогда существует элемент $a \in \mathcal{G}$ такой, что семейство сдвинутых инвариантов $f_{\lambda,a}(x)$ является полным на орбите $\mathcal{O}_x$, проходящей через x.

Обратимся к рассмотрению алгебр Ли общего вида. Отметим прежде всего, что конструкция сдвинутых инвариантов может быть переформулирована в локальной форме. Для этого фиксируем элемент $a \in \mathcal{G}^*$ и для любой функции f, определенной в окрестности этого элемента, рассмотрим разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора в точке a:

$$f(a + \lambda x) = f_0(a) + \lambda f_1(x) + \lambda^2 f_2(x) + \ldots$$

Когда $f(x)$ пробегает все локально инвариантные функции, определенные в окрестности точки a, т.е. такие, что $\mathrm{ad}^*_{\nabla f(x)} \cdot x = 0$, тогда полиномы $f_k(x)$ образуют инволютивное семейство на $\mathcal{G}^*$, которое мы обозначим через $\mathcal{F}_a$. (Если на пространстве $\mathcal{G}^*$ имеется достаточно много инвариантов для того,

---

*) Элемент x алгебры Ли $\mathcal{G}$ называется полупростым, если оператор ad_x является полупростым, т.е. если существует базис из собственных векторов для ad_x в $\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$.

чтобы разделить орбиты общего положения, то семейства $\{f_{\lambda,a}\}$ и $\mathcal{F}_a$ по существу совпадают – они имеют одну и ту же линейную оболочку.)

Пусть $\mathrm{rk}(\mathcal{G})$ – ранг алгебры $\mathcal{G}$, т.е. коразмерность орбиты коприсоединенного представления общего положения. Для $x \in \mathcal{G}^*$ мы положим $\mathrm{Ann}(x) = \{\xi \in \mathcal{G} \mid \mathrm{ad}_\xi^* \cdot x = 0\}$.

Теорема 1.13.3 [70]. Пусть $\mathcal{G}$ – конечномерная комплексная алгебра Ли и a – регулярный элемент $\mathcal{G}^*$. Пусть $S = \{y \in \mathcal{G}^* \mid \dim \mathrm{Ann}(y) > > \mathrm{rk}(\mathcal{G})\}$ – множество сингулярных элементов в $\mathcal{G}^*$. Инволютивное семейство $\mathcal{F}_a$ полно относительно скобки Ли–Пуассона на $\mathcal{G}^*$, если и только если $\operatorname{codim} S \geqslant 2$. Соответствующее условие полноты для вещественной алгебры Ли $\mathcal{G}$ требует, чтобы $\operatorname{codim} S \geqslant 2$ для комплексификации $\mathcal{G}$.

Примеры

Пусть $\mathcal{G}$ – (комплексная или вещественная) полупростая алгебра Ли. В этом случае множество сингулярных элементов имеет коразмерность 3 и из теоремы 1.13.3 следует теорема 1.13.1.

Другой класс примеров дается фробениусовыми алгебрами Ли, которые являются алгебрами Ли ранга нуль. Поскольку в этом случае не существует инвариантных функций, отличных от констант, семейство $\mathcal{F}_a$ является тривиальным. С другой стороны, множество сингулярных элементов определяется одним уравнением вида $C_{jk}^l x_l = 0$, где C_{jk}^l – структурные постоянные алгебры Ли.

Отметим, что сведение вопроса о полноте семейства сдвинутых инвариантов к вычислению коразмерности множества сингулярных элементов в ряде случаев упрощает задачу построения полных инволютивных семейств на $\mathcal{G}^*$.

Следствие. Пусть $\mathcal{G} = \mathcal{K} + {}_\varphi\mathcal{V}$ – полупрямая сумма классической простой алгебры Ли $\mathcal{K}$ и векторного пространства $\mathcal{V}$ относительно неприводимого представления $\varphi: \mathcal{K} \to \mathrm{GL}(\mathcal{V})$. Тогда семейство сдвинутых инвариантов $\mathcal{F}_a$ полно на $\mathcal{G}^*$ для любого регулярного элемента $a \in \mathcal{G}^*$.

Пусть теперь $x \in \mathcal{G}^*$ – сингулярный элемент. Возникает естественный вопрос: когда семейство $\mathcal{F}_a$ при ограничении на сингулярную орбиту O_x дает полное инволютивное семейство относительно стандартной симплектической структуры на O_x (задаваемой ограничением скобки Ли–Пуассона на O_x)? Известно, что из полноты семейства $\mathcal{F}_a$ на всем пространстве $\mathcal{G}^*$ еще не вытекает полнота при его ограничении на сингулярную орбиту. Оказывается, тем не менее, что при некотором дополнительном предположении относительно x полнота имеет место.

Теорема 1.13.4 [70]. Пусть $\mathcal{G}$ – конечномерная комплексная алгебра Ли, S – множество сингулярных элементов на $\mathcal{G}^*$, и предположим, что $\operatorname{codim} S \geqslant 2$. Пусть $x \in \mathcal{G}^*$ – сингулярный элемент такой, что $\mathrm{rk}\,\mathrm{Ann}(x) = = \mathrm{rk}\,\mathcal{G}$. Тогда существует регулярный элемент $a \in \mathcal{G}^*$ такой, что ограничение инволютивного семейства $\mathcal{F}_a$, ограниченного на сингулярную орбиту O_x, является полным. Это утверждение остается справедливым и для вещественной алгебры Ли $\mathcal{G}$, если S рассматривается как множество сингулярных элементов в пространстве $(\mathcal{G}^{\mathbb{C}})^*$.

Пример

Пусть алгебра $\mathcal{G}$ полупроста. Тогда нетрудно доказать, что для полупростых элементов $x \in \mathcal{G}^* \simeq \mathcal{G}$ условие $\mathrm{rk}\,\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{rk}\,\mathcal{G}$, очевидно, выполнено. Таким образом, из теоремы 1.13.4 следует теорема 1.13.2. Более того, если $\mathcal{G} = \mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$, то $\mathrm{rk\,Ann}(x) = \mathrm{rk}\,\mathcal{G}$ для любого сингулярного элемента $x \in \mathcal{G}^* \simeq \mathcal{G}$. Следовательно, система сдвинутых инвариантов дает полное инволютивное семейство на любой орбите коприсоединенного представления группы $\mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$.

Обсудим также другую конструкцию функций в инволюции, которая дается теоремой 1.12.3 и связана с симметрической градуировкой алгебры Ли. При этом ограничимся рассмотрением случая, наиболее интересного для приложений. Пусть σ – инволюция Картана в $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G} = \mathcal{K} + \mathcal{P}$ – разложение $\mathcal{G}$ на собственные подпространства σ, соответствующие собственным значениям $+1$ и -1 соответственно. Обозначим через $\mathcal{G}_\sigma$ полупрямую сумму подалгебры и векторного пространства $\mathcal{P}$. С помощью формы Киллинга на $\mathcal{G}$ мы можем отождествить дуальные пространства $\mathcal{G}^*$ и $\mathcal{G}_\sigma^*$ с $\mathcal{G}$. Тем самым на $\mathcal{G}$ возникает две скобки Ли-Пуассона: $\{,\}$ и $\{,\}_\sigma$. Фиксируем какой-либо элемент $a \in \mathcal{G}$. Тогда, как известно, для любых $\mathcal{G}$-инвариантов f и h и любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ функции $f(p + \lambda k + \lambda^2 a)$ и $h(p + \mu k + \mu^2 a)$ коммутируют по Пуассону по отношению к скобке Пуассона $\{\,,\,\}_\sigma$ на $\mathcal{G}$. Такое семейство функций может оказаться неполным, однако его всегда можно дополнить произвольным полным инволютивным набором $\mathcal{F}_{\mathcal{K}_a}$ функций на $\mathcal{K}_a^*$, где $\mathcal{K}_a$ – стационарная подалгебра элемента a в $\mathcal{K}$. (Функции $f(p + \lambda k + \lambda^2 a)$, очевидно, инвариантны относительно действия стационарной подгруппы K_a, следовательно, они коммутируют по Пуассону с любой функцией, поднятой с $\mathcal{K}_a^*$ с помощью проекции $\mathcal{G}^* \to \mathcal{K}_a^*$.)

Теорема 1.13.5 [70]. Пусть $\mathcal{G}$ – вещественная полупростая алгебра Ли, σ – инволюция Картана, $\mathcal{G} = \mathcal{K} + \mathcal{P}$ – соответствующее разложение Картана и a – произвольный элемент в $\mathcal{P}$. Тогда инволютивное семейство

$$\mathcal{F}_{a,\sigma} = \{ f(p + \lambda k + \lambda^2 a) \mid f \in I(\mathcal{G}) \ \ \lambda \in \mathbb{R} \} \cup \mathcal{F}(\mathcal{K}_a)$$

полно на $\mathcal{G}$ относительно скобки Ли–Пуассона $\{\,,\,\}_\sigma$.

В качестве иллюстрации дадим описание семейства гамильтонианов, содержащихся в $\mathcal{F}_{a,\sigma}$ и описывающих конкретные механические системы. Обозначим через $\mathcal{K}_a^\perp$ ортогональное дополнение $\mathcal{K}_a$ в $\mathcal{G}$. Нетрудно доказать, что ad_a является обратимым оператором на $\mathcal{K}_a^\perp$. Выберем элемент в $b \in \mathcal{P}$ такой, что $[b, a] = 0$, $[b, \mathcal{K}_a] = 0$. Тогда $[b, \mathcal{K}] \subset \mathcal{K}_a^\perp$, так что можно определить оператор $C_{a,b}$: $\mathcal{K} \to \mathcal{K}$ согласно формуле

$$C_{a,b}(k) = (\mathrm{ad}_a^{-1} \cdot \mathrm{ad}_b \cdot k_1) + k_2, \text{ где } k = k_1 + k_2, \ k_1 \in \mathcal{K}_a^\perp, \ k_2 \in \mathcal{K}_a.$$

Тогда гамильтонианы

$$H(k + p) = \frac{1}{2}(k, C_{a,b}k) - (b, p)$$

содержатся в семействе $\mathcal{F}_{a,\sigma}$ и, следовательно, описывают вполне интегрируемые системы на $\mathcal{G}$ по отношению к скобке $\{\,,\,\}_\sigma$. Во многих практических случаях эти гамильтонианы описывают классические интегрируемые случаи движения твердого тела и их многомерные аналоги (см., например, [30], [274], [275]).

Отметим еще, что инволютивные семейства $\mathcal{F}_a$ и $\mathcal{F}_{a,\sigma}$ связаны с парами согласованных скобок Пуассона: в первом случае это скобки $\{\,,\}$ и

$\{\,,\}_a$, где $\{f, h\}_a = \langle a[\nabla f, \nabla h]\,\rangle$; во втором случае это $\{\,,\}_\sigma$ и $\{\,,\} + \{\,,\}_a$ [30].

Еще одна серия согласованных скобок Пуассона была указана И.Л. Кантором. Опишем частный случай этой конструкции. Пусть L – пространство антисимметричных матриц. Зададим на L семейство коммутаторов $[\,,]_A$: $[\xi, \eta]_A = \xi A \eta - \eta A \xi$, где A – произвольная симметричная матрица. Тем самым на L^* определено многопараметрическое семейство скобок Ли–Пуассона $\{\,,\}_A$, причем любые две скобки $\{\,,\}_A$ и $\{\,,\}_B$ согласованы, поскольку рассматриваемое семейство линейно: $\alpha\{\,,\}_A + \beta\{\,,\}_B = \{\,,\}_{\alpha A + \beta B}$.

Обозначим через I_A множество центральных функций для скобки $\{\,,\}_A$, а через $S(A, B)$ – двумерное подпространство $\alpha A + \beta B$. Положим $r = \max\{\mathrm{rk}\,[\,,]_c,\ c \in S(A, B)\}$ и обозначим через $\mathcal{F}_{AB}$ объединение множеств I_c с такими $c = S(A, B)$, для которых ранг $[\,,]_c = r$. Как нетрудно видеть, $\mathcal{F}_{A,B}$ – это инволютивное семейство по отношению к любой скобке $\{\,,\}_c$, $c \in S(A, B)$. Если положить $A_0 = \mathrm{diag}[1, 1, \ldots, 1, 1]$, $B_0 = \mathrm{diag}[1, 1, \ldots, 1, 0]$, $C_0 = \mathrm{diag}[c_1, \ldots, c_n]$, $c_i \neq c_j$, то оказывается, что $\mathcal{F}_{A_0 B_0}$ – это множество первых интегралов уравнений движения n-мерного твердого тела в идеальной жидкости, обобщающих случай Клебша (см. [99]).

1.14. Гамильтоновы системы и алгебраические кривые

Как мы видели ранее, ключевым моментом в современном подходе к интегрируемым гамильтоновым системам является представление их уравнений движения в форме Лакса

$$\dot{L} = [L, M], \tag{1.14.1}$$

где L и M принадлежат одной и той же конечномерной алгебре Ли $\mathcal{G}$. Мы предположим для простоты в этом разделе, что $\mathcal{G}$ – это матричная алгебра Ли. Тогда величины

$$I_k = \frac{1}{k}\,\mathrm{tr}(L^k) \tag{1.14.2}$$

являются интегралами движения и при выполнении дополнительных условий, сформулированных в разделе 1.12, находятся в инволюции.

Однако во многих важных случаях рассмотрение лишь конечномерных алгебр Ли для наших целей недостаточно. Например, число функционально независимых инвариантов полупростой алгебры Ли равно ее рангу, так что интегралы (1.14.2) обеспечивают полную интегрируемость лишь для тех орбит, размерность которых не превышает удвоенного ранга.

Более серьезное ограничение касается природы траекторий. Поскольку решение уравнения (1.14.1) может быть получено с помощью стандартных разложений в группе Ли G – таких, как разложения Брюа, Ивасавы или Картана, зависимость динамических переменных от времени имеет вид

$$L(t) = F(t, \exp(a_1 t), \ldots, \exp(a_N t)), \tag{1.14.3}$$

где F — рациональная, матричнозначная функция, а $a_1, \ldots, a_N$ — некоторые вещественные числа. С другой стороны, многие задачи механики, интегрируемые в квадратурах, решаются в эллиптических или более сложных (например, абелевых) функциях времени. Это приводит к естественному обобщению конструкции — рассмотрению уравнения Лакса, содержащего параметр λ*):

$$\dot{L}(\lambda) = [L(\lambda), M(\lambda)]. \tag{1.14.4}$$

В большинстве случаев $L(\lambda)$ и $M(\lambda)$ зависят от параметра λ (который обычно называется спектральным параметром) через рациональные функции, однако имеются также интересные примеры тригонометрических и эллиптических пар Лакса.

В терминах алгебр Ли переход от (1.14.1) к (1.14.4) состоит в замене алгебры Ли $\mathcal{G}$ на $\mathcal{G}$-значные функции от λ. Простейшей алгеброй такого рода является алгебра полиномов Лорана по λ с коэффициентами в алгебре Ли $\mathcal{G}$, так называемая алгебра петель, или (менее строго и только когда алгебра $\mathcal{G}$ проста) аффинная алгебра Ли, или алгебра Каца–Муди (см. [78, 50, 248]). На важность использования таких бесконечномерных алгебр в теории вполне интегрируемых систем было указано впервые в работах [272] и [110, 111]. В качестве иллюстрации покажем, как можно применить теорему 1.12.6 к алгебрам петель.

Пусть $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}[\lambda, \lambda^{-1}]$ — алгебра петель на $\mathcal{G}$, т.е. алгебра Ли полиномов Лорана с коэффициентами в алгебре $\mathcal{G}$:

$$\tilde{\mathcal{G}} = \{\xi(\lambda) = \Sigma \xi_j \lambda^j, \ \xi_l \in \mathcal{G}\}. \tag{1.14.5}$$

Имеется очевидное разложение $\tilde{\mathcal{G}}$ на две дополнительные подалгебры $\tilde{\mathcal{G}}_\pm$:

$$\tilde{\mathcal{G}}_+ = \{\xi = \sum_{i \geqslant 0} \xi_i \lambda^i\}, \qquad \tilde{\mathcal{G}}_- = \{\xi : \xi = \sum_{i<0} \xi_i \lambda^i\}. \tag{1.14.6}$$

Нетрудно видеть, что теорема 1.12.6, примененная к разложению $\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}}_+ + \tilde{\mathcal{G}}_-$, дает теорему 1.12.1. Далее, пусть σ — инволюция в $\mathcal{G}$ и определим "скрученную" алгебру петель $\tilde{\mathcal{G}}_\sigma$ согласно формуле

$$\tilde{\mathcal{G}}_\sigma = \{\xi(\lambda) \in \tilde{\mathcal{G}} \mid \xi(-\lambda) = \sigma\xi(\lambda)\}. \tag{1.14.7}$$

Эту алгебру можно разложить: $\tilde{\mathcal{G}}_\sigma = \tilde{\mathcal{G}}^\sigma_+ + \tilde{\mathcal{G}}^\sigma_-$, где $\tilde{\mathcal{G}}^\sigma_\pm = \tilde{\mathcal{G}}_\sigma \cap \tilde{\mathcal{G}}_\pm$. Тогда теорема 1.12.6 дает сразу же теорему 1.12.3. Отметим, что теорема 1.12.6 дает также представление Лакса для уравнений Гамильтона, индуцированных инволютивными семействами теорем 1.12.1 и 1.12.3.

Инварианты

$$I_k(\lambda) = \frac{1}{k} \operatorname{tr}(L(\lambda))^k, \tag{1.14.8}$$

как и прежде, являются интегралами движения, но теперь уже зависят

---

*) Уравнение Лакса в таком виде было введено в работе С.П. Новикова [92].

от λ. Разлагая их по степеням λ, получаем семейство интегралов $I_{k,m}$:

$$I_k(\lambda) = \sum_m I_{k,m} \lambda^m, \qquad (1.14.9)$$

которых в большинстве случаев достаточно для доказательства полной интегрируемости.

Уравнения Лакса со спектральным параметром недавно стали предметом интенсивного изучения методами алгебраической геометрии (см., например, [12, 13]). Связь между парами Лакса со спектральным параметром и римановыми поверхностями устанавливается следующей теоремой, которая является простым следствием теоремы 1.12.7, примененной к разложению $\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}}_+ + \tilde{\mathcal{G}}_-$ (см. [273]).

Теорема 1.14.1. Уравнение Лакса $\dot{L}(\lambda) = [L(\lambda), M(\lambda)]$ типа (1.12.20) линеаризуется на многообразии Якоби алгебраической кривой, определенной уравнением

$$P(\lambda, \mu) = \det(L(\lambda) - \mu I) = 0. \qquad (1.14.10)$$

Этот результат приводит, в принципе, к явному решению уравнений движения в терминах тета-функций Римана, связанных с кривой, определенной уравнением (1.14.10). Имеются многочисленные примеры такого типа; сюда относятся, в частности, периодические цепочки Тоды, связанные с простыми алгебрами Ли, задача Неймана – движение точки по сфере под действием линейной силы, свободное движение точки по эллипсоиду, волчки Эйлера, Лагранжа и Ковалевской и другие интегрируемые системы.

Глава 2

ПРОСТЕЙШИЕ СИСТЕМЫ

2.1. Системы с одной степенью свободы

Как хорошо известно (см., например, [1, 23, 35]), интегрирование уравнений движения гамильтоновой системы с одной степенью свободы сводится к квадратурам. Здесь мы рассмотрим простейшие примеры таких систем; аналогичные системы удается проинтегрировать и в случае нескольких степеней свободы.

Пусть материальная точка (частица) единичной массы движется по прямой в потенциальном поле $U(q)$ (q – координата частицы, p – ее импульс). Такая система описывается гамильтонианом:

$$H = \frac{p^2}{2} + U(q). \tag{2.1.1}$$

Уравнения движения частицы имеют вид

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial U}{\partial q} \tag{2.1.2}$$

или

$$\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q} \tag{2.1.3}$$

и допускают интеграл движения (интеграл энергии)

$$H = \frac{p^2}{2} + U(q) = E = \text{const}. \tag{2.1.4}$$

Нахождение закона движения – функции $q(t)$ – сводится теперь к квадратуре

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{q_0}^{q} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \tag{2.1.5}$$

Очевидно, что движение частицы может происходить лишь в области $E \geqslant U(q)$, так что точки $(a, b, \ldots)$, для которых $E = U(q)$ (так называемые точки остановки), определяют границы движения.

Характер движения зависит от вида потенциальной энергии $U(q)$: движение может быть инфинитным (частица может уходить на бесконечность) и финитным (частица движется в конечной области).

В случае финитного движения в области $a \leqslant q \leqslant b$ (a и b – точки остановки) частица совершает колебания, период которых находится по формуле*)

$$T(E) = \sqrt{2} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \tag{2.1.6}$$

При этом период малых колебаний вблизи положения равновесия $q \approx q_0$:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q}\right|_{q=q_0} = U'(q_0) = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right|_{q=q_0} = U''(q_0) > 0 \tag{2.1.7}$$

дается формулой

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{U''(q_0)}}. \tag{2.1.8}$$

В рассматриваемом случае функция $q(t)$ может быть разложена в ряд Фурье

$$q(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cos(j\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

По поводу вычисления коэффициентов a_j и b_k в этом разложении мы отсылаем заинтересованного читателя к работам [117, 303]. Отметим лишь, что для потенциала $U(q) = -\frac{\alpha}{q} + \frac{\beta}{q^2}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, эти коэффициенты выражаются через функции Бесселя.

Рассмотрим ряд примеров, когда интегрирование в (2.1.5) удается выполнить явно. В дальнейшем мы обобщим все эти примеры на случай нескольких степеней свободы.

1. $U(q) = g^2 q^{-2}$, $E > 0$.

Движение происходит в области $q_0 < q < \infty$, где $q_0 = \sqrt{g^2/E}$. При этом

$$q(t) = \sqrt{q_0^2 + p_0^2 t^2}, \quad p_0^2 = 2E. \tag{2.1.9}$$

2. $U(q) = g^2 \operatorname{sh}^{-2} q$, $E > 0$ (рис. 1).

Движение происходит в области $q_0 < q < \infty$, где $q_0 = \operatorname{Arsh}\sqrt{g^2/E}$. При этом

$$\operatorname{ch} q = a \operatorname{ch} p_0 t,$$
$$a = \operatorname{ch} q_0 = \sqrt{1 + g^2/E}, \tag{2.1.10}$$
$$p_0 = \sqrt{2E}.$$

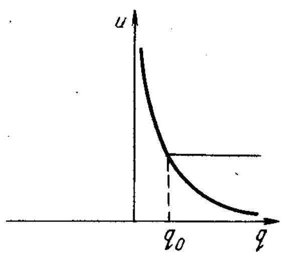


Рис. 1

*)Заметим, что знание функции $T(E)$ при всех допустимых значениях E, при дополнительном предположении, что функция $U(q)$ четна относительно середины отрезка (a, b), позволяет однозначно восстановить потенциал $U(q)$ (см. [23, 107]). В частности, если T не зависит от E и $U(q)$ – четная функция, то $U(q) = kq^2$.

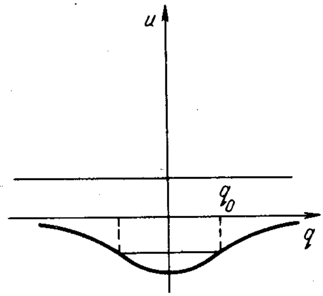


Рис. 2

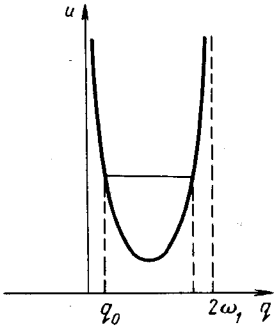


Рис. 3

$2'$. $U(q) = -g^2 \operatorname{ch}^{-2} q$ (рис. 2).

а) $-g^2 < E < 0$. Движение финитно: $-q_0 < q < q_0$, где $q_0 = \operatorname{Arch}\sqrt{g^2/|E|}$, и

$$\operatorname{sh} q = a \sin \omega t, \quad a = \operatorname{sh} q_0 = \sqrt{(g^2/|E|) - 1},$$

$$\omega = \sqrt{2|E|}, \quad T = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{|E|}}. \tag{2.1.11}$$

б) $E > 0$. Движение инфинитно: $-\infty < q < \infty$.

$$\operatorname{sh} q = a \operatorname{sh} p_0 t, \quad a = \sqrt{(g^2/E) + 1}, \quad p_0 = \sqrt{2E}. \tag{2.1.12}$$

в) $E = 0$, $-\infty < q < \infty$.

$$\operatorname{sh} q = at, \quad a = \sqrt{2} g. \tag{2.1.13}$$

3. $U(q) = g^2 \sin^{-2} q$, $E > g^2$ (рис. 3).

Движение происходит на отрезке $q_0 < q < \pi - q_0$, где $q_0 = \arcsin\sqrt{g^2/E}$. При этом

$$\cos q = a \cos \omega t, \quad a = \cos q_0 = \sqrt{1 - g^2/E},$$

$$\omega = \sqrt{2E}, \quad T = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{E}}. \tag{2.1.14}$$

Интересной особенностью движения в случаях $2'$а и 3 является независимость периода колебаний T от величины g.

4. $U(q) = g^2 \mathscr{P}(q \mid \omega_1, \omega_2)$, где $\mathscr{P}(q \mid \omega_1, \omega_2)$ – функция Вейерштрасса (см. [4]) (см. рис. 3).

$$\mathscr{P}(q \mid \omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1 n_2}{}' (q - 2n_1\omega_1 - 2n_2\omega_2)^{-2} -$$

$$- \sum_{n_1 n_2}{}' (2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2)^{-2} + q^{-2} = \alpha \operatorname{sn}^{-2}(\beta q, k) + \gamma. \tag{2.1.15}$$

Здесь $\omega_1 = a$, $\omega_2 = ib$ – два полупериода этой функции (мы ограничимся рассмотрением простейшего случая, когда a и b вещественны), $\operatorname{sn}(q, k)$ –

так называемый эллиптический синус

$$\mathrm{sn}^{-2}((e_1-e_3)^{1/2}q,k)=(e_1-e_2)^{-1}(\mathcal{P}(q)-e_2),$$

$$e_j=\mathcal{P}(\omega_j),\quad j=1,2,\quad e_3=\mathcal{P}(\omega_1+\omega_2). \tag{2.1.16}$$

Мы можем поэтому предположить, что $U(q)=g^2\mathrm{sn}^{-2}(q,k)$. При $E>E_0$, $E_0=g^2\mathcal{P}(\omega_1)$, движение происходит в области $q_0<q<2a-q_0$, где q_0 находится иэ условия $\mathrm{sn}(q_0,k)=\sqrt{g^2/E}$ и определяется уравнением

$$\mathrm{cn}(q,k)=a\,\mathrm{cn}(\gamma t,\tilde{k}). \tag{2.1.17}$$

Здесь

$$\tilde{k}^2=\frac{k^2a^2}{1-k^2(1-a^2)}=k^2\frac{E-g^2}{E-g^2k^2},$$

$$\gamma=\sqrt{2}g(1-k^2(1-a^2))^{1/2}=\sqrt{2}(E-g^2k^2)^{1/2}. \tag{2.1.18}$$

Период колебаний дается формулой

$$T=\frac{4}{\gamma}K(k),\quad K(k)=\int_0^1\frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}(1-k^2x^2)^{1/2}},\quad k<1. \tag{2.1.19}$$

5. $U(q)=g^2q^{-2}+\dfrac{\omega^2q^2}{2}$, $E>E_0=\sqrt{2}\omega g$ (рис. 4).

Движение происходит на отрезке $q_1<q<q_2$, где q_1 и q_2 определяются из уравнения

$$g^2x^{-2}+\frac{\omega^2}{2}x^2=E. \tag{2.1.20}$$

При этом

$$q=\sqrt{q_1^2+(q_2^2-q_1^2)\sin^2\omega t}. \tag{2.1.21}$$

Период колебаний $T=\pi/\omega$ не зависит от g и так же, как и в случае гармонических колебаний, не зависит от энергии.

6. $U(q)=g^2\exp(-2q)$, $E>0$ (рис. 5).

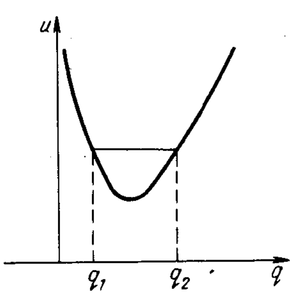


Рис. 4

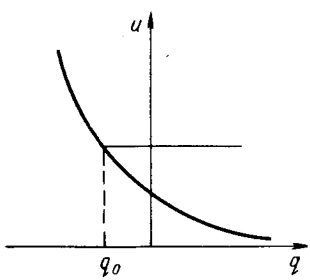


Рис. 5

Движение инфинитно: $q_0 < q < \infty$, где $q_0 = -\frac{1}{2}\ln(E/g^2)$. При этом

$$q = \ln \operatorname{ch} bt + q_0, \quad b = \sqrt{2E}. \tag{2.1.22}$$

6'. $U(q) = g^2 \operatorname{ch} 2q$, $E > g^2$ (рис. 6).

Движение происходит на отрезке $-q_0 < q < q_0$, где $q_0 = \frac{1}{2}\operatorname{Arch}(E/g^2)$. При этом

$$\operatorname{sh} q(t) = a \operatorname{cn}(\gamma t, k), \tag{2.1.23}$$

где

$$a = \operatorname{sh} q_0 = \left[\frac{1}{2}(E/g^2 - 1)\right]^{1/2}, \quad k = \operatorname{th} q_0 = [(E - g^2)/(E + g^2)]^{1/2},$$

$$\gamma = 2g \operatorname{ch} q_0 = (E + g^2)^{1/2}. \tag{2.1.24}$$

Период колебаний равен

$$T = \frac{4}{\gamma} K(k). \tag{2.1.25}$$

7. $U(q) = -g^2 q^4$.

В этом случае интеграл

$$\int^q \frac{dx}{\sqrt{E + g^2 x^4}}$$

стремится к определенному пределу при $q \to \infty$, а это значит, что частица за конечное время уходит на бесконечность. Таким образом, траекторию

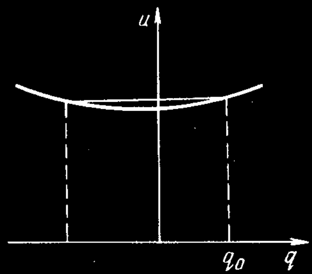


Рис. 6

частицы в этом случае нельзя продолжить неограниченно по времени. Это — простейший пример гамильтонова векторного поля

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = 4g^2 q^3, \tag{2.1.26}$$

которое не определяет поток на фазовой плоскости (q, p).

Мы рассмотрели простейшие случаи, когда фазовым пространством системы является обычная евклидова плоскость. Более сложные системы с нелинейным фазовым пространством типа двумерной сферы S^2 или плоскости Лобачевского $\mathcal{L}^2$ мы рассмотрим позже. Отметим лишь, что к случаю $\mathcal{S}^2$ сводится хорошо известный волчок Эйлера.

З а д а ч а: Проинтегрировать уравнения движения:

а) математического маятника: $U(q) = g^2(1 - \cos q)$;

б) системы с $U(q) = g^2(2e^q + e^{-2q} - 3)$;

в) системы с $U(q) = g_1^2 \,\mathrm{sh}^{-2} q - g_2^2 \,\mathrm{ch}^{-2} q$.

2.2. Системы с двумя степенями свободы

Анализ общей гамильтоновой системы с двумя (и бо́льшим числом) степенями свободы выходит за рамки возможностей современной науки [1].

В то же время известно достаточно много таких систем, являющихся вполне интегрируемыми. Некоторые из них удается проинтегрировать в явном виде.

Ключевым здесь является следствие*) теоремы Лиувилля [127, 241]:

Если помимо гамильтониана $H(p, q)$ известен второй, функционально независимый от H интеграл движения $I(p, q)$, определенный на всем фазовом пространстве динамической системы, то рассматриваемая система является вполне интегрируемой (т.е. в принципе может быть сведена к квадратурам).

Таким образом, основная проблема состоит в нахождении дополнительного интеграла движения. Приведем ряд примеров систем с двумя степенями свободы, обладающих дополнительным интегралом движения.

А. *Движение частицы единичной массы на плоскости* (q_1, q_2) *в потенциальном поле* $U(q_1, q_2)$: Гамильтониан рассматриваемой задачи имеет вид

$$H = H_2 + U, \quad H_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2), \quad U = U(q_1, q_2). \tag{2.2.1}$$

Конфигурационным пространством рассматриваемой системы является двумерная плоскость $\{q: \; q = (q_1, q_2)\}$, на которой транзитивно действует группа $E(2)$ – группа движений двумерной евклидовой плоскости. Группа $E(2)$ порождается трансляциями

$$T_a: \; q \to q + a$$

и вращениями

$$R_\varphi: \quad (q_1, q_2) \to (q_1 \cos\varphi + q_2 \sin\varphi, \; -q_1 \sin\varphi + q_2 \cos\varphi).$$

Действие этой группы распространяется естественно и на фазовое прост-

*) Это следствие было первоначально доказано как самостоятельная теорема для частного случая движения одной частицы в работе [209], а затем для общего случая в [239].

ранство$\{q, p\}$ согласно формулам

$$T_a:\ p\to p;\quad R_\varphi:\ (p_1,p_2)\to(p_1\cos\varphi+p_2\sin\varphi, -p_1\sin\varphi+p_2\cos\varphi).$$

Алгебра Ли этой группы (относительно стандартных скобок Пуассона) порождается величинами

$$p_1,\ p_2\quad \text{и}\quad l=(q_1p_2-p_1q_2), \tag{2.2.2}$$

$$\{p_1,l\}=p_2,\ \{p_2,l\}=-p_1,\ \{p_1,p_2\}=0. \tag{2.2.3}$$

Рассмотрим сначала гамильтониан свободной частицы $H_2=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)$.

Очевидно, что он инвариантен относительно группы $E(2)$.

В силу инвариантности гамильтониана H_2 величины p_1, p_2 и l являются интегралами движения *):

$$\{p_1,H_2\}=\{p_2,H_2\}=\{l,H_2\}=0. \tag{2.2.4}$$

Потребуем теперь, чтобы не только H_2, но и полный гамильтониан H был инвариантен относительно однопараметрической подгруппы группы $E(2)$, порождаемой элементом

$$al+b_2p_1-b_1p_2. \tag{2.2.5}$$

Рассмотрим отдельно два случая.

1. $a\neq 0$.

Тогда величина (2.2.5) генерирует бесконечно малый поворот вокруг вектора

$$\mathrm{c}=(c_1,c_2)=a^{-1}(b_1,b_2). \tag{2.2.6}$$

Следовательно, величина (2.2.5) будет интегралом движения, если $U(q_1,q_2)$ имеет вид

$$U(q)=U(|\mathrm{q}-\mathrm{c}|). \tag{2.2.7}$$

2. $a=0$.

В этом случае величина $b_2p_1-b_1p_2$ генерирует бесконечно малую трансляцию в направлении вектора $(b_2,-b_1)$.

Следовательно, эта величина будет интегралом движения, если

$$U(q_1,q_2)=U(b_1q_1+b_2q_2). \tag{2.2.8}$$

Подчеркнем еще раз, что линейный по импульсу интеграл движения существует лишь в случаях 1 и 2. Нетрудно видеть, что в соответствующей системе отсчета потенциал $U(q_1,q_2)$ не зависит от одной из координат (или, как говорят, одна из координат является циклической). В случае 1 в полярной системе координат с центром в точке c координата φ – циклическая.

Перейдем к рассмотрению систем с двумя степенями свободы, обладающих квадратичным интегралом движения. Опять рассмотрим сначала случай свободного движения: $H=H_2$. Тогда наиболее общий интеграл

*) Нетрудно доказать, что это единственные интегралы движения, линейные по импульсам p_1 и p_2.

движения, однородный и квадратичный по импульсам, имеет вид

$$I_2 = al^2 + b_1 lp_1 + b_2 lp_2 + c_{11} p_1^2 + 2c_{12} p_1 p_2 + c_{22} p_2^2, \tag{2.2.9}$$

где a, b_j, c_{jk} – константы.

Заметим, что действие группы $E(2)$ в пространстве величин l, p_1 и p_2 дается формулами:

при повороте R_φ вокруг начала координат на угол φ

$$l \to l; \quad p_1 \to p_1 \cos\varphi + p_2 \sin\varphi, \quad p_2 \to -p_1 \sin\varphi + p_2 \cos\varphi; \tag{2.2.10}$$

при трансляции T_a на вектор $a = (a_1, a_2)$

$$l \to l + a_1 p_2 - a_2 p_1, \qquad p_1 \to p_1, \qquad p_2 \to p_2. \tag{2.2.11}$$

Это действие индуцирует действие группы $E(2)$ в шестимерном пространстве $\mathcal{S}_2$ квадратичных величин с базисом

$$l^2,\ lp_1,\ lp_2,\ p_1^2; \qquad p_1 p_2,\ p_2^2. \tag{2.2.12}$$

Действие группы, однако, не транзитивно, так что относительно него пространство $\mathcal{S}_2$ расслаивается на орбиты. Так, например, гамильтониан H_2 инвариантен относительно действия $E(2)$, т.е. представляет нульмерную орбиту в $\mathcal{S}_2$.

Естественно считать все величины I_2, отвечающие одной орбите, эквивалентными. Таким образом, число существенно различных квадратичных интегралов движения равно числу типов орбит группы $E(2)$ в пространстве $\mathcal{S}_2$.

Оказывается, что в данном случае существует 4 типа орбит (см. [24]):

$$\text{I. } a \neq 0,\ c_{ij} \neq 0,\ I_2 = a(l^2 - c^2 p_2^2) + c'(p_1^2 + p_2^2); \tag{2.2.13}$$

$$\text{II. } a \neq 0,\ c_{ij} = 0,\ I_2 = al^2 + c'(p_1^2 + p_2^2); \tag{2.2.14}$$

$$\text{III. } a = 0,\ b_1^2 + b_2^2 \neq 0,\ I_2 = blp_2 + c'(p_1^2 + p_2^2); \tag{2.2.15}$$

$$\text{IV. } a = 0,\ b_1 = b_2 = 0,\ I_2 = cp_1^2 + c'(p_1^2 + p_2^2). \tag{2.2.16}$$

Заметим, что поскольку величина $(p_1^2 + p_2^2)$ является инвариантом, коэффициент c' мы можем считать равным нулю; кроме того, коэффициент a для систем типа I и II, b – для системы III и c – для системы IV можно считать произвольным числом.

Теперь потребуем, чтобы и для полного гамильтониана $H = H_2 + U$ существовал интеграл движения вида $I = I_2 + V$, где U и V – величины нулевой степени по импульсам. Условие $\{H, I\} = 0$ при этом сводится к условию

$$\{H_2, V\} = \{I_2, U\}, \tag{2.2.17}$$

которое эквивалентно системе дифференциальных уравнений в частных производных для функций $U(q)$ и $V(q)$.

Так, в случае I, полагая $a = 1/2$ и $c' = 0$, получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial q_1} &= q_2\left(q_2 \frac{\partial U}{\partial q_1} - q_1 \frac{\partial U}{\partial q_2}\right), \\ \frac{\partial V}{\partial q_2} &= -q_1\left(q_2 \frac{\partial U}{\partial q_1} - q_1 \frac{\partial U}{\partial q_2}\right) - c^2 \frac{\partial U}{\partial q_2}. \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Исключая из системы (2.2.18) функцию $V(q)$, получаем уравнение для функции $U(q)$:

$$q_1 q_2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\right) + (q_2^2 - q_1^2 + c^2)\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} +$$

$$+ 3\left(q_2 \frac{\partial U}{\partial q_1} - q_1 \frac{\partial U}{\partial q_2}\right) = 0. \qquad (2.2.19)$$

Для решения этого уравнения удобно перейти от переменных q_1 и q_2 к новым переменным

$$r_1 = |\mathbf{q} - \mathbf{c}| \quad \text{и} \quad r_2 = |\mathbf{q} + \mathbf{c}|, \quad \mathbf{c} = (c, 0). \qquad (2.2.20)$$

Опуская вычисления, приведем окончательный ответ:

$$U = \frac{1}{r_1 r_2}[A(r_1 + r_2) + B(r_1 - r_2)]. \qquad (2.2.21)$$

Аналогично, полагая в случае III $b = 1$, $c' = 0$, приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = q_2 \frac{\partial U}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = -2q_1 \frac{\partial U}{\partial q_2} + q_2 \frac{\partial U}{\partial q_1}, \qquad (2.2.22)$$

откуда получаем

$$q_2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right) + 2q_1 \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} + 3\frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \qquad (2.2.23)$$

$$U = \frac{1}{r}(A(r + q_1) + B(r - q_1)), \quad r = |\mathbf{q}|. \qquad (2.2.24)$$

Аналогично нетрудно найти возможный вид потенциальной энергии и в случаях III и IV.

Итак, возможны следующие виды гамильтониана H (2.2.1), допускающие квадратичный интеграл движения.

$$\text{I.}\ H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{r_1 r_2}(A(r_1 + r_2) + B(r_1 - r_2)), \qquad (2.2.25)$$

где

$$r_1 = |\mathbf{q} - \mathbf{c}|, \quad r_2 = |\mathbf{q} + \mathbf{c}|, \quad \mathbf{c} = (c, 0).$$

В этом случае

$$I = \frac{1}{2}(l^2 - c^2 p_2^2) + \frac{1}{r_1 r_2}[-(c^2 - \eta^2)A(\xi) + (\xi^2 - c^2)B(\eta)],$$

$$\xi = \frac{r_2 + r_1}{2}, \quad \eta = \frac{r_2 - r_1}{2}. \qquad (2.2.26)$$

$$\text{II.}\ H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + A(r) + r^{-2}B(\theta), \qquad (2.2.27)$$

где

$$r = |\mathbf{q}|, \quad q_1 = r\cos\theta, \quad q_2 = r\sin\theta.$$

При этом

$$I = \frac{1}{2} l^2 + B(\theta). \tag{2.2.28}$$

$$\text{III. } H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{r}\left(A\left(\frac{r+q_1}{2}\right) + B\left(\frac{r-q_1}{2}\right)\right), \tag{2.2.29}$$

где $r = |\mathbf{q}|$.

Здесь

$$I = lp_2 + \frac{1}{r}[\eta A(\xi) - \xi B(\eta)], \quad \xi = \frac{r+q_1}{2}, \quad \eta = \frac{r-q_1}{2}. \tag{2.2.30}$$

$$\text{IV. } H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + U_1(q_1) + U_2(q_2), \tag{2.2.31}$$

$$I = \frac{1}{2} p_1^2 + U_1(q_1) \quad \left(\text{или } I = \frac{1}{2} p_2^2 + U_2(q_2)\right). \tag{2.2.32}$$

Приведем несколько конкретных примеров систем такого типа.

1. Системы с полиномиальными потенциалами, которые допускают разделение переменных после замены переменных q_1 и q_2 на $(q_1 + q_2)$ и $(q_1 - q_2)$. В этом случае потенциал $U(q_1, q_2)$ имеет вид

$$\begin{gathered} U = U_k(q_1, q_2) = \frac{1}{2}[(q_1 + q_2)^k + (q_1 - q_2)^k], \\ U_1 = q_1, \quad U_2 = q_1^2 + q_2^2, \quad U_3 = q_1^3 + 3q_1 q_2^2, \\ U_4 = q_1^4 + 6q_1^2 q_2^2 + q_2^4, \ldots \end{gathered} \tag{2.2.33}$$

2. Пусть потенциальная энергия имеет вид

$$U(q_1, q_2) = U_1(r) + U_2(q_1, q_2), \quad r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}, \tag{2.2.34}$$

где $U_2(q_1, q_2)$ – однородная функция степени (-2):

$$U_2(\lambda q_1, \lambda q_2) = \lambda^{-2} U_2(q_1, q_2). \tag{2.2.35}$$

Переходя к полярным координатам

$$q_1 = r\cos\theta, \quad q_2 = r\sin\theta,$$

мы получаем

$$U_2(q_1, q_2) = r^{-2} B(\theta), \tag{2.2.36}$$

т.е. приходим к случаю II.

Сюда относятся, например:

а) рассмотренная Якоби [212] система трех частиц на прямой, взаимодействующих обратно пропорционально квадрату расстояния,

$$U(x_1, x_2, x_3) = g_{12}(x_1 - x_2)^{-2} + g_{23}(x_2 - x_3)^{-2} + g_{31}(x_3 - x_1)^{-2} \tag{2.2.37}$$

(это становится очевидным после перехода к относительным координатам q_1 и q_2 в системе центра масс);

б) более общая система трех взаимодействующих частиц с потенциалом

$$U(x_1, x_2, x_3) = \sum_{j<k=1}^{3} U_{jk}(x_j - x_k), \tag{2.2.38}$$

где

$$U_{jk}(x) = g_{jk} x^{-2} + \alpha x^2 + \beta x^4. \tag{2.2.39}$$

Это следует из легко проверяемого тождества

$$[(x_1 - x_2)^4 + (x_2 - x_3)^4 + (x_3 - x_1)^4] = \\ = \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2]^2. \tag{2.2.40}$$

Относительно более общих систем такого типа см. работу [264].

3. Системы с полиномиальным потенциалом, для которых переменные разделяются после перехода к параболическим координатам $(r + q_1)$ и $(r - q_1)$, где $r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$. Сюда относится случай

$$U = U_k = \frac{1}{2r}[(r + q_1)^{k+1} + (-1)^k (r - q_1)^{k+1}], \\ U_1 \sim q_1,\ U_2 \sim (4q_1^2 + q_2^2),\ U_3 \sim q_1(2q_1^2 + q_2^2), \\ U_4 \sim (16q_1^4 + 12q_1^2 q_2^2 + q_2^4),\ U_5 \sim q_1(16q_1^4 + 16q_1^2 q_2^2 + 3q_2^2). \tag{2.2.41}$$

4. Системы с полиномиальным потенциалом, для которых переменные разделяются после перехода к эллиптическим координатам $(r_1 + r_2)$ и $(r_1 - r_2)$, где $r_1 = \sqrt{(q_1 - c)^2 + q_2^2}$, $r_2 = \sqrt{(q_1 + c)^2 + q_2^2}$. Сюда относится случай

$$U = U_{2k} = \frac{1}{2r_1 r_2}[(r_1 + r_2)^{2k+2} - (r_1 - r_2)^{2k+2}], \\ U_2 \sim (q_1^2 + q_2^2 + c^2),\ U_4 \sim [(q_1^2 + q_2^2)^2 + c^2(q_1^2 + 2q_2^2)]. \tag{2.2.42}$$

5. Двумерный ангармонический осциллятор (частный случай системы, рассмотренной Гарнье [178])

$$U(q_1, q_2) = Aq_1^2 + Bq_2^2 + (q_1^2 + q_2^2)^2. \tag{2.2.43}$$

Здесь

$$I = \frac{p_1^2}{2} + \frac{1}{A - B}(q_1 p_2 - q_2 p_1)^2 + Aq_1^2 + q_1^2(q_1^2 + q_2^2), \tag{2.2.44}$$

или

$$I = \frac{p_2^2}{2} - \frac{1}{A - B}(q_1 p_2 - q_2 p_1)^2 + Bq_2^2 + q_2^2(q_1^2 + q_2^2). \tag{2.2.44'}$$

Эта система легко сводится к случаю 1.

Отметим еще интегрируемое обобщение системы Гарнье, указанное в работе [313]:

$$U = (q_1^2 + q_2^2)^2 + Aq_1^2 + Bq_2^2 + Cq_1^{-2} + Dq_2^{-2}. \tag{2.2.45}$$

В этом случае

$$I = \frac{p_1^2}{2} + q_1^2(q_1^2 + q_2^2) + Aq_1^2 + Cq_1^{-2} +$$

$$+ \frac{1}{2(B-A)}\left[(q_2 p_1 - q_1 p_2)^2 + 2C\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^2 + 2D\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2\right], \tag{2.2.46}$$

и уравнения движения этой системы интегрируются после перехода к эллиптическим координатам.

Б. Кубический интеграл движения. Общий случай натуральной системы (т.е. системы вида $H = \frac{1}{2}\mathrm{p}^2 + U(\mathrm{q})$) с двумя степенями свободы, допускающей интеграл движения, кубичный по импульсам, изучался в работах [161, 202].

Потенциал Драха. В первой из этих работ [161] рассматривалась система с гамильтонианом

$$H = p_1 p_2 + U(q_1, q_2) \tag{2.2.47}$$

и были найдены 10 случаев с дополнительным интегралом движения, кубичным по импульсам. Потенциал U при этом зависит от трех постоянных α, β и γ. Приведем выражения для U (относительно интегралов движения см. работу [161]).

1. $U = \dfrac{\alpha}{xy} + \beta x^{r_1} y^{r_2} + \gamma x^{r_2} y^{r_1}$,

где r_1 и r_2 – корни уравнения $r^2 + 3r + 3 = 0$.

2. $U = \dfrac{\alpha}{\sqrt{xy}} + \dfrac{\beta}{(y - \mu_0 x)^2} + \dfrac{\gamma(y + \mu_0 x)}{\sqrt{xy}\,(y - \mu_0 x)^2}$.

3. $U = \alpha xy + \dfrac{\beta}{(y - ax)^2} + \dfrac{\gamma}{(y + ax)^2}$.

4. $U = \dfrac{\alpha}{\sqrt{y(x-a)}} + \dfrac{\beta}{\sqrt{y}\,(x+a)} + \dfrac{\gamma x}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$.

5. $U = \dfrac{\alpha}{\sqrt{xy}} + \dfrac{\beta}{\sqrt{x}} + \dfrac{\gamma}{\sqrt{y}}$. (2.2.48)

6. $U = \alpha xy + \beta y \dfrac{2x^2 + c}{\sqrt{x^2 + c}} + \gamma \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + c}}$.

7. $U = \dfrac{\alpha}{(y + 3mx)^2} + \beta(y - 3mx) + \gamma(y - mx)(y - 9mx)$.

8. $$U = \frac{\alpha}{\left(y+\frac{m}{3}x\right)^{2/3}} + \frac{\beta\left(y-\frac{m}{3}x\right)}{\left(y+\frac{m}{3}x\right)^{2/3}} + {}$$
$$+ \gamma\frac{4\left(y-\frac{m}{3}x\right)^2 - 3\left(y+\frac{m}{3}x\right)}{\left(y+\frac{m}{3}x\right)^{2/3}}.$$

9. $U = \alpha y^{-3/2} + \beta x y^{-3/2} + \gamma x.$

10. $U = \alpha\left(y - \frac{\rho}{3}x\right) + \beta x^{-1/2} + \gamma x^{-1/2}(y-\rho x).$

Потенциал Холта. В работе [202] для системы с $H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + U(q_1, q_2)$ был получен следующий новый интегрируемый потенциал:

$$U = q_2^{-2/3}(cq_2^2 + q_1^2 + \delta), \quad c = 3/4. \tag{2.2.49}$$

В этом случае дополнительный интеграл движения имеет вид

$$I = I_3 = 2p_1^3 + 3p_1 p_2^2 + 3p_1(-3q_2^2 + 2q_1^2 + 2\delta)q_2^{-2/3} + 18 p_2 q_1 q_2^{1/3}. \tag{2.2.50}$$

Потенциал Фокаса – Лагерстрема. Еще один случай с дополнительным интегралом движения, кубичным по импульсам, был обнаружен в работе [173]. В этом случае

$$U(q_1, q_2) = (q_1^2 - q_2^2)^{-2/3}, \tag{2.2.51}$$

$$I = I_3 = (p_1^2 - p_2^2)(q_1 p_2 - q_2 p_1) - 4(q_2 p_1 + q_1 p_2)(q_1^2 - q_2^2)^{-2/3}. \tag{2.2.52}$$

Потенциалы, связанные с лаксовым представлением. Несколько важных многочастичных систем, которые подробно рассматриваются в следующей главе, в частном случае сводятся к системам с двумя степенями свободы, обладающим дополнительным интегралом движения, кубичным по импульсам.

Рассмотрим, например, систему трех взаимодействующих частиц на прямой с потенциальной энергией,

$$U(q_1, q_2, q_3) = [v(q_1 - q_2) + v(q_2 - q_3) + v(q_3 - q_1)], \tag{2.2.53}$$

где

(1) $v(x) = a^2 \mathcal{P}(ax)$, $\mathcal{P}(x)$ – функция Вейерштрасса [133];

(2) $v(x) = g^2 \exp(-x)$. Это так называемая цепочка Тоды [298, 299].

В обоих случаях интеграл движения кубичен по импульсам и имеет вид

$$I = I_3 = p_1 p_2 p_3 - p_1 v(q_2 - q_3) - p_2 v(q_3 - q_1) - p_3 v(q_1 - q_2). \tag{2.2.54}$$

Относительно интегрирования системы (1) см. работу [85], а относительно интегрирования системы (2) см. работы [214, 215].

В. Интегралы четвертой степени по импульсам. Перейдем теперь к рассмотрению интегралов четвертой степени по импульсам.

1. Потенциал кубический. Возьмем систему с кубическим потенциалом вида

$$U = a(cq_2^3 + q_1^2 q_2), \tag{2.2.55}$$

детальное изучение которой началось в работе [197]. Отметим прежде всего, что из приведенных выше формул (2.2.41) и (2.2.33) следует, что при $c = 1/3$ и $c = 2$ такая система допускает квадратичный интеграл движения и интегрируется методом разделения переменных.

Еще один интегрируемый случай (уже нетривиальный) был найден независимо в работах [183] и [191]. Это случай с $c = 16/3$. Интеграл движения здесь имеет вид

$$I = I_4 = p_1^4 + 4aq_1^2 q_2 p_1^2 - 4aq_1^3 p_1 p_2/3 - 4a^2 q_1^4 q_2^2/3 - 2a^2 q_1^6/9. \tag{2.2.55'}$$

В работах [185] и [200] было найдено интегрируемое обобщение этого потенциала

$$U = \frac{16}{3} q_2^3 + q_1^2 q_2 + \frac{a}{2}(q_1^2 + 16q_2^2) + mq_1^{-2} + nq_1^{-6} \tag{2.2.56}$$

с дополнительным интегралом движения

$$\begin{aligned} I = I_4 = {} & p_1^4 + (2aq_1^2 + 4q_1^2 q_2 + 4mq_1^{-2} + 4nq_1^{-6})p_1^2 - \\ & - 4q_1^3 p_1 p_2/3 - 4aq_1^4 q_2/3 - 4q_1^4 q_2^2/3 + 8mq_2/3 + 8nq_2 q_1^{-4} - \\ & - 2q_1^6/9 + a^2 q_1^4 + 4(an + m^2)q_1^{-4} + 8mnq_1^{-8} + 4n^2 q_1^{-12}. \end{aligned} \tag{2.2.57}$$

2. Потенциал четвертой степени. Рассмотрим потенциал четвертой степени вида

$$U = Aq_1^4 + Bq_1^2 q_2^2 + Cq_2^4. \tag{2.2.58}$$

Отметим прежде всего уже указанные выше случаи разделения переменных для этой системы:

(1) $B = 0$, уравнения разделяются в переменных q_1 и q_2;

(2) $B = 6A$, $C = A$: система разделяется в координатах $(q_1 + q_2)$ и $(q_1 - q_2)$;

(3) $B = 2A$, $C = A$: система разделяется в координатах r и φ, $q_1 = r\cos\varphi$, $q_2 = r\sin\varphi$;

(4) $B = 12A$, $C = 16A$: система разделяется в параболических координатах $(r + q_1)$ и $(r - q_1)$.

Последний случай допускает интегрируемое обобщение

$$\begin{aligned} U = {} & a(q_1^4 + 12q_1^2 q_2^2 + 16q_2^4) + b(q_1^2 + 4q_2^2) + \\ & + cq_1^{-6}(q_1^2 + 4q_2^2) + mq_1^{-2} + nq_2^{-2}. \end{aligned} \tag{2.2.59}$$

Отметим, что если параметр $n = 0$, то система допускает квадратичный интеграл движения вида

$$I = I_2 = (q_1 p_2 - q_2 p_1) p_1 + f(q), \tag{2.2.60}$$

но если $n \neq 0$, то квадратичного интеграла нет, а есть лишь интеграл четвертой степени. Он имеет вид [186]

$$I = I_4 = I_2^2 + n\,[2q_1^2 q_2^{-2} p_1^2 + 16(aq_1^4 + cq_1^{-4})]. \tag{2.2.61}$$

(5) Известен еще один интегрируемый потенциал четвертой степени по импульсам, который допускает дополнительный интеграл движения степени по импульсам [184, 270],

$$U = q_1^4 + 6q_1^2 q_2^2 + 8q_2^4. \tag{2.2.62}$$

Здесь

$$I = I_4 = p_1^4 + 4(q_1^4 + 6q_1^2 q_2^2) p_1^2 - 16q_1^3 q_2 p_1 p_2 + 4q_1^4 p_2^2 +$$
$$+ 4q_1^8 + 16q_1^6 q_2^2 + 16q_1^4 q_2^4. \tag{2.2.63}$$

Известны два интегрируемых обобщения этого потенциала. Это случаи

(а) $e = 0$ [185]

и

(б) $n = l = 0$ [200]

для $U(q_1, q_2)$ вида

$$U = q_1^4 + 6q_1^2 q_2^2 + 8q_2^4 + k(q_1^2 + 4q_2^2) + mq_1^{-2} + nq_1^{-6} + lq_2^{-2} + eq_2. \tag{2.2.64}$$

Здесь

$$\begin{aligned} I = {} & p_1^4 + 4p_1^2(q_1^4 + 6q_1^2 q_2^2 + kq_1^2 + mq_1^{-2} + nq_1^{-6} + eq_2) - \\ & - (16q_1^3 q_2 + 4eq_1) p_1 p_2 + 4q_1^4 q_2^2 + 4m^2 q_1^{-4} + 8mq_1^2 + 16mq_2^2 + \\ & + 4k^2 q_1^4 + 8kq_1^6 + 16kq_1^4 q_2^2 + 4q_1^8 + 16q_1^6 q_2^2 + 16q_1^4 q_2^4 + \\ & + e(8mq_1^{-2} q_2 - 2eq_1^2 - 8q_1^4 q_2 - 16q_1^2 q_2^3 - 8kq_1^2 q_2) + 8lq_1^4 q_2^{-2} + \\ & + n(8mq_1^{-8} + 4nq_1^{-12} + 8kq_1^{-4} + 8q_1^{-2} + 48q_1^{-4} q_2^2). \end{aligned} \tag{2.2.65}$$

3. **Потенциал типа Холта**. В работах [185] и [199] было показано, что потенциал

$$U = q_1^{-2/3}\left(\frac{9}{2} q_1^2 + q_2^2\right) \tag{2.2.66}$$

является интегрируемым и допускает дополнительный интеграл четвертой степени по импульсам

$$I = I_4 = P_4. \tag{2.2.67}$$

Интегрируемое обобщение этого потенциала было указано в работах [185] и [200]. Именно,

$$U = q_1^{-2/3}\left(\frac{9}{2}q_1^2 + q_2^2 + d\right) + mq_1^{2/3} + nq_2^{-2} + a(9q_1^2 + 4q_2^2), \tag{2.2.68}$$

$$\begin{aligned} I = I_4 &= p_1^4 + 2p_1^2p_2^2 + (16aq_2^2 + 4nq_2^{-2})p_1^2 + 24q_1^{1/3}q_2p_1p_2 + \\ &+ 4p_2^2(q_1^{-2/3}(q_2^2 + d) + mq_1^{2/3} + a(9q_1^2 + 4q_2^2) + nq_2^{-2}) + 16mq_2^2 + \\ &+ 32adq_1^{-2/3}q_2^2 + 8dnq_1^{-2/3}q_2^{-2} + 8nq_1^{-2/3} + 32amq_1^{2/3}q_2^2 + 8mnq_1^{2/3}q_2^{-2} + \\ &+ 72q_1^{2/3}q_2^2 + 72anq_1^2q_2^{-2} + 4n^2q_2^{-4} + 32aq_1^{-2/3}(9q_1^2 + q_2^2)q_2^2 + \\ &+ 32a^2q_2^2(9q_1^2 + 2q_2^2). \end{aligned} \tag{2.2.69}$$

Еще один интегрируемый случай такого типа был обнаружен в работах [199, 185]. Именно,

$$U = q_1^{-2/3}(12q_1^2 + q_2^2). \tag{2.2.70}$$

В этом случае

$$\begin{aligned} I = I_6 &= p_2^6 + 3p_1^2p_2^4 + 72q_1^{1/3}q_2p_1p_2^3 + 6(3q_1^{4/3} + q_1^{-2/3}q_2^2) + \\ &+ 648q_1^{2/3}q_2^2p_2^2 + 648q_2^4. \end{aligned} \tag{2.2.71}$$

Относительно дальнейших обобщений см. работу [49].

Отметим еще, что в работе [317] было рассмотрено семейство потенциалов вида

$$U = q_1^4 + bq_1^2q_2^2 + q_2^4 \tag{2.2.72}$$

и доказано, что единственные интегрируемые случаи — это случаи, рассмотренные выше, т.е. $b = 0, 2$ и 6.

4. **Потенциалы, связанные с лаксовым представлением**. Здесь, следуя [49], мы опишем несколько систем с двумя степенями свободы, которые обладают дополнительным интегралом движения четвертой степени по импульсам и представляют собой частные случаи многочастичных систем, рассмотренных в следующем разделе. Потенциал таких систем имеет вид

$$U(q_1, q_2) = [v_1(q_1) + v_2(q_2) + v_3(q_1 - q_2) + v_4(q_1 + q_2)]. \tag{2.2.73}$$

Дополнительный интеграл движения такой системы будем искать в виде

$$I = I_4 = \frac{p_1^2p_2^2}{2} + g_0p_1^2 + g_1p_1p_2 + g_2p_2^2 + h. \tag{2.2.74}$$

Из условия $\{I, H\} = 0$ сразу же получаем явное выражение для функций g_0, g_1 и g_2:

$$g_0 = v_2(y), \quad g_1 = -v_3(x - y) + v_4(x + y), \quad g_2 = v_1(x) \tag{2.2.75}$$

и функциональное уравнение для интересующих нас функций v_1, v_2, v_3 и v_4

$$\begin{aligned} &[v_4(x + y) - v_3(x - y)]\,[v_2''(y) - v_1''(x)] + \\ &+ 2\,[v_4''(x + y) - v_3''(x - y)]\,[v_2(y) - v_1(x)] + \\ &+ 3v_4'(x + y)[v_2'(y) - v_1'(x)] + 3v_3'(x - y)[v_2'(y) + v_1'(x)] = 0. \end{aligned} \tag{2.2.76}$$

Общее решение этого уравнения не известно, однако известен целый ряд его частных решений.

(1) Как показано в работе [255], рассматриваемая система интегрируема при выполнении условий

$$
\begin{aligned}
&v_3 = v_4 = g^2 v(x), \quad v_1(x) = g_1^2 v(x) + g_2^2 v(2x) = v_2(x),\\
&g_1[g_1^2 - 2g^2 + \sqrt{2}\, g_2 g_1] = 0
\end{aligned}
\tag{2.2.77}
$$

и если $v(x)$ – функция одного из пяти типов:

I. $v(q) = q^{-2}$;

II. $v(q) = a^2 [\operatorname{sh} aq]^{-2}$;

III. $v(q) = a^2 [\sin aq]^{-2}$;

IV. $v(q) = a^2 \wp(aq)$, $\wp(x)$ – функция Вейерштрасса;

V. $v(q) = q^{-2} + \omega^2 q^2$.

(2) В работе [128] были найдены интегрируемые системы с потенциалами

$$
\begin{aligned}
&v_1(x) = [a + b \sin x]\,[\cos x]^{-2},\\
&v_2(y) = [c + d \sin y]\,[\cos y]^{-2},\\
&v_3(z) = -v_4(z) = -\cos z.
\end{aligned}
\tag{2.2.79}
$$

(3) В работе [206]

$$
\begin{aligned}
&v_1(x) = v_2(x) = k\,\mathrm{ch}(bx),\\
&v_3(x) = k_2\,[\mathrm{sh}(bx/2)]^{-2} + k_3\,[\mathrm{sh}(bx/4)]^{-2},\\
&v_4(x) = k_4\,[\mathrm{sh}(bx/2)]^{-2} + k_5\,[\mathrm{sh}(bx/4)]^{-2};
\end{aligned}
\tag{2.2.80}
$$

$$
\begin{aligned}
&v_1(x) = v_2(x) = k_1\,\mathrm{ch}(bx) + k_2\,\mathrm{ch}(2bx),\\
&v_3(x) = k_3\,[\mathrm{sh}(bx/2)]^{-2},\\
&v_4(x) = k_4\,[\mathrm{sh}(bx/2)]^{-2}.
\end{aligned}
\tag{2.2.81}
$$

(4) В работах [238], [207]

$$
\begin{aligned}
&v_1(x) = v_2(x) = g_1^2 x^{-2} + g_2^2 x^2 + g_3^2 x^4 + g_4^2 x^6,\\
&v_3(x) = v_4(x) = g^2 x^{-2},
\end{aligned}
\tag{2.2.82}
$$

$$
\begin{aligned}
&v_1(x) = v_2(x) = g_1^2\,[\mathrm{sh}(ax)]^{-2} + g_2^2\,[\mathrm{sh}(2ax)]^{-2} +\\
&+ g_3^2\,\mathrm{ch}(2ax) + g_4^2\,\mathrm{ch}(4ax),\\
&v_3(x) = v_4(x) = g^2\,[\mathrm{sh}(ax)]^{-2},
\end{aligned}
\tag{2.2.83}
$$

$$
\begin{aligned}
&v_1(x) = v_2(x) = g_1^2\,\wp(ax) + g_2^2\,\wp\left(ax + \frac{\omega_1}{2}\right) + g_3^2\,\wp\left(ax + \frac{\omega_2}{2}\right) +\\
&+ g_4^2\,\wp\left(ax + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right),\\
&v_3(x) = v_4(x) = g^2\,\wp(ax).
\end{aligned}
$$

В последнем случае величины ω_j – это периоды функции $\wp(x)$, а константы g_j удовлетворяют условию

$$\Big(\sum_j g_j^4 - \sum_{i\neq j} g_i^2 g_j^2\Big)^2 = 64\prod_k g_k. \qquad (2.2.84)$$

(5) В частном случае $v_4 = 0$ в работе [206] было найдено два типа решений уравнений

$$\begin{aligned} v_1(x) &= k_1 \operatorname{ch}(2bx + c_1 + 2d) + k_2 \operatorname{ch}(bx + c_2 + d), \\ v_2(x) &= k_1 \operatorname{ch}(2bx + c_1 - 2d) + k_2 \operatorname{ch}(bx + c_2 - d), \\ v_3(x-y) &= k_3 \left[\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2} b(x-y) + d\right)\right]^{-2} \end{aligned} \qquad (2.2.85)$$

(которые тоже были найдены в работе [311]), а также решение

$$\begin{aligned} v_1(x) &= k_1 \operatorname{ch}(bx + c_1 + d), \\ v_2(x) &= k_1 \operatorname{ch}(bx + c_1 - d), \\ v_3(x-y) &= k_2\left[\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2} b(x-y) + d\right)\right]^{-2} + k_3 [\operatorname{sh}(b(x-y)/4 + d/2)]^{-2}. \end{aligned} \qquad (2.2.86)$$

(6) Отсюда в качестве предельного случая можно получить решение, ранее найденное в работе [108],

$$v_1(z) = v_2(z) = a\exp(z), \quad v_3 = (\operatorname{cth}(z/2))^2, \qquad (2.2.87)$$

а также решения ([207, 311])

$$v_1 = v_2 = c_0 z + c_1 z^2 + c_2 z^3 + c_3 z^4; \quad v_3 = a^2 z^{-2}. \qquad (2.2.88)$$

Г. Другие результаты. В работе [314] было описано новое семейство интегрируемых потенциалов $U(x, y)$, допускающих дополнительный интеграл четвертой степени по импульсам. Эти потенциалы имеют вид

$$U(x,y) = \frac{1}{4c}[\gamma(x) - n'(x)y + v(y)], \qquad (2.2.89)$$

где $v(y) = \frac{1}{6}by^3 + \frac{1}{2}ay^2 + ey + f$; a, b, c, e, f — некоторые константы, а функции $n(x)$ и $\gamma(x)$ — решения двух нелинейных дифференциальных уравнений

$$n(n''' + b) + 5n'n'' = 0$$

и $\qquad (2.2.90)$

$$n(\gamma'' - a) + 3n'\gamma' + 2n'''\gamma = 0.$$

Интеграл движения в этом случае имеет вид

$$I = \frac{1}{4c}\Big(\gamma^2(x) - \frac{1}{2}n^2(x) + e\int n(x)dx + n(x)\gamma'(x)y - $$

$$- \frac{1}{2}n(x)n''(x)y^2\Big) + [\gamma(x) - n'(x)y]\,p_x^2 + cp_x^4 + n(x)p_x p_y. \qquad (2.2.91)$$

Приведем два явных решения:

$$1)\ U(x,y) = \frac{1}{4c}\left[\left(\frac{E}{\delta}\right)x^{-2/3} + F\delta^2 x^{2/3} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{9a}{32}\right)x^2 - \frac{1}{3}\,\delta y x^{-2/3} + v(y)\right],$$

$$v(y) = \frac{1}{2}\,ay^2 + ey + f, \tag{2.2.92}$$

$$2)\ U(x,y) = \frac{1}{4c}\left[Ex^{-6} + Fx^{-2} + a\,\frac{x^2}{32} + \frac{bx^2 y}{32} + v(y)\right].$$

Д. Трансцендентные интегралы движения. Почти во всех рассмотренных выше случаях дополнительный интеграл движения полиномиален по импульсам (а в большинстве случаев также и по координатам). Однако известны также случаи, когда дополнительный интеграл движения является рациональным или же трансцендентным. Приведем три случая, найденные в работе [200]:

$$(1)\ H = \frac{1}{2}\,p_x^2 + \frac{1}{2}\left(p_y - \frac{x}{y}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^2,$$
$$I = I_1 = (xp_y - yp_x + y)/p_y, \tag{2.2.93}$$

или же

$$I = I_2 = p_x + \ln\left(\frac{p_y}{y}\right), \quad I = I_3 = \frac{p_y}{y}\ \exp(p_x). \tag{2.2.94}$$

$$(2)\ H = \frac{1}{2}\,(p_x^2 + p_y^2) + 2yp_x p_y - x, \tag{2.2.95}$$

$$I = I_1 = p_y \exp(p_x^2),$$
$$I = I_2 = -y\exp(-p_x^2) + \frac{1}{4}\,(2\pi)^{1/2}p_y \exp(p_x^2)\,\mathrm{erf}\,(\sqrt{2}\,p_x), \tag{2.2.96}$$

$$(3)\ H = \frac{1}{2}\,(p_x^2 + p_y^2) + \left(\frac{x}{y}\right); \quad I = I_2 = \frac{1}{2}\,y\left[p_y W_+\left(\frac{1}{2}\,E, p_x\right) + \right.$$

$$\left. + 2W'_+\left(\frac{E}{2}, p_x\right)\right]^2,$$

$$I = I_3\,\frac{p_y W_-\left(\frac{1}{2}\,E, p_x\right) + 2W'_-\left(\frac{1}{2}\,E, p_x\right)}{p_y W_+\left(\frac{1}{2}\,E,\ p_x\right) + 2W'_+\left(\frac{1}{2}\,E,\ p_x\right)}, \tag{2.2.97}$$

где W_+ и W_- — стандартные функции Уиттекера, т.е. решения уравнения

$$y'' + \left(\frac{1}{4}x^2 - a\right)y = 0. \tag{2.2.98}$$

Е. Системы Камалина – Переломова. В работе [216] описан класс интегрируемых гамильтоновых систем, связанных с определенными орбитами (типа Тоды) коприсоединенного представления борелевских подгрупп вещественных расщепимых групп Ли. В частном случае получаются интегрируемые системы с двумя степенями свободы.

Приведем несколько примеров.

(1) Случай A_2:

$$H = q_1^2p_1^2 + (q_1^2 + q_2^2)p_2^2 + q_1q_2p_1p_2 + q_1^2 + q_2^2. \tag{2.2.99}$$

(2) Три случая, связанных с группой G_2:

$$\begin{aligned} &(\text{а})\ H = q_1^2p_1^2 + 3(q_1^2 + q_2^2)p_2^2 + 3q_1q_2p_1p_2 + (q_1^2 + q_2^2);\\ &(\text{б})\ H = q_1^2p_1^2 + (4q_1^2 + 3q_2^2)p_2^2 + q_1^4 + 4q_1^2q_2^2 + 3q_2^4;\\ &(\text{в})\ H = q_1^2p_1^2 + (3q_1^2 + q_2^2)p_2^2 - q_1q_2p_1p_2 + q_1^6 - \frac{3}{4}q_2^6. \end{aligned} \tag{2.2.100}$$

Ж. Движение по поверхности. 1. Движение по поверхности вращения*). Эту поверхность можно задавать, например, уравнением

$$z = f(\rho), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi. \tag{2.2.101}$$

Гамильтониан такой системы имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{p_\rho^2}{1 + (f'(\rho))^2} + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2}\right). \tag{2.2.102}$$

Координата φ здесь является циклической и соответственно величина $p_\varphi = \rho^2\dot{\varphi}$ является интегралом движения.

Заметим, что при движении в потенциальном поле вида

$$U = U(\rho, \varphi) = A(\rho) + \frac{B(\varphi)}{\rho^2} \tag{2.2.103}$$

система обладает интегралом движения

$$I = \frac{1}{2}p_\varphi^2 + B(\varphi) \tag{2.2.104}$$

и интегрируется в квадратурах [35].

Задача. Проинтегрировать уравнения движения свободной частицы:

а) на поверхности шара;

б) на поверхности параболоида вращения;

в) на поверхности конуса.

Детали вычислений можно найти в книге [35].

*) Движение по поверхности вращения впервые исследовано Ньютоном [27].

Задача. Проинтегрировать уравнения движения частицы на поверхности вращения в поле тяжести, направленном по оси симметрии системы, для поверхностей, задаваемых уравнениями:

а) $9a\rho^2 = z(z-3a)^2$;

б) $2\rho^4 + 3a^2\rho^2 - 2za^2 = 0$;

в) $\left(\rho^2 - az - \frac{1}{2}a^2\right)^2 = a^3 z$.

Указание. В этих примерах интегрирование выполняется в эллиптических функциях. Случаи а) и б) были рассмотрены в работе [219]. Относительно других случаев интегрируемости в эллиптических функциях см. работу [280].

2. Свободное движение по поверхности эллипсоида с полуосями a, b, c (Якоби [210]). Поверхность эллипсоида задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{2.2.105}$$

Система допускает квадратичный интеграл движения (Иоахимсталь [213])

$$I = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)\left[\frac{\dot{x}^2}{a^2} + \frac{\dot{y}^2}{b^2} + \frac{\dot{z}^2}{c^2}\right], \tag{2.2.106}$$

а также интегралы

$$\begin{gathered} I_j = \frac{1}{2}p_j^2 + \sum_k{}' (\alpha_j - \alpha_k)^{-1} l_{jk}^2, \\ \alpha_1 = a^2, \quad \alpha_2 = b^2, \quad \alpha_3 = c^2, \quad l_{jk} = (x_j p_k - x_k p_j), \\ H = I_1 + I_2 + I_3, \end{gathered} \tag{2.2.107}$$

находящиеся в инволюции (К. Уленбек [300]).

3. Движение по поверхности сферы в поле квадратичного потенциала (К. Нейман [254])

$$U = \frac{1}{2}(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2). \tag{2.2.108}$$

Система допускает квадратичный интеграл движения

$$I = \frac{1}{2}\Sigma\lambda_j p_j^2 + \frac{1}{2}(\Sigma p_j^2)(\Sigma\lambda_k q_k^2) + \frac{1}{2}\Sigma\lambda_j^2 q_j^2, \tag{2.2.109}$$

а также интегралы

$$I_j = \frac{1}{2}(p_j^2 + \lambda_j q_j^2) + \sum_k \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k} l_{jk}^2, \tag{2.2.110}$$

находящиеся в инволюции (К. Уленбек [300]).

3. *Системы с нелинейным фазовым пространством.* Мы рассмотрим здесь движение твердого тела с неподвижной точкой в поле тяжести и движение твердого тела в идеальной жидкости.

Обе эти системы связаны с группой E(3) – группой движений*) трехмерного евклидова пространства [93, 99]. Динамическими переменными здесь являются величины l_1, l_2, l_3, p_1, p_2, p_3. Скобки Пуассона для них имеют вид

$$\{l_i, l_j\} = \epsilon_{ijk} l_k, \quad \{l_i, p_j\} = \epsilon_{ijk} p_k, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \tag{2.2.111}$$

а уравнения движения

$$\dot{l}_j = \{H, l_j\}, \quad \dot{p}_j = \{H, p_j\}. \tag{2.2.112}$$

Величины $I_1 = \mathbf{p}^2$ и $I_2 = \mathbf{lp}$ инвариантны относительно действия группы E(3). Приравнивая их константам, получаем четырехмерное многообразие, топологически эквивалентное кокасательному расслоению $T^* \mathbb{S}^2$ к двумерной сфере $\mathbb{S}^2$. Таким образом, рассматриваемая система относится к числу систем с двумя степенями свободы.

Приведем несколько примеров таких систем.

1) Волчок Лагранжа (Лагранж [22]):

$$H = \frac{1}{2}\,[A(l_1^2 + l_2^2) + Cl_3^2] + \gamma p_3. \tag{2.2.113}$$

Как следствие симметрии относительно вращений вокруг третьей оси, система обладает интегралом

$$I = l_3. \tag{2.2.114}$$

2) Волчок Ковалевской (С. Ковалевская [224, 225]):

$$H = \frac{A}{2}\,(l_1^2 + l_2^2 + 2l_3^2) + \gamma_1 p_1 + \gamma_2 p_2. \tag{2.2.115}$$

Дополнительный интеграл движения имеет вид

$$I = |A(l_1 + il_2)^2 + (\gamma_1 + i\gamma_2)(p_1 + ip_2)|^2. \tag{2.2.116}$$

3) Движение твердого тела в идеальной жидкости. Случай Кирхгофа [218]:

$$H = \frac{A_1}{2}\,(l_1^2 + l_2^2) + \frac{A_3}{2}\,l_3^2 + B_1(l_1 p_1 + l_2 p_2) +$$

$$+ B_3 l_3 p_3 + \frac{C_1}{2}\,(p_1^2 + p_2^2) + \frac{C_3}{2}\,p_3^2. \tag{2.2.117}$$

Так же, как и в случае волчка Лагранжа,

$$I = l_3. \tag{2.2.118}$$

4) Движение твердого тела в идеальной жидкости. Случай Клебша [152]:

$$2H = (A_1 l_1^2 + A_2 l_2^2 + A_3 l_3^2) + (C_1 p_1^2 + C_2 p_2^2 + C_3 p_3^2), \tag{2.2.119}$$

где коэффициенты A_j и C_k не являются независимыми, а удовлетворяют

---

*) Эта группа, однако, имеет различную физическую интерпретацию для этих двух случаев.

соотношению

$$A_1^{-1}(C_2 - C_3) + A_2^{-1}(C_3 - C_1) + A_3^{-1}(C_1 - C_2) = 0. \qquad (2.2.120)$$

Дополнительный интеграл движения имеет вид

$$I = (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) - (B_1 p_1^2 + B_2 p_2^2 + B_3 p_3^2), \quad B_1 - B_2 = \frac{C_1 - C_2}{A_3}, \ldots \qquad (2.2.121)$$

5) Движение твердого тела в идеальной жидкости. Случай Стеклова [288]:

$$2H = \sum_j (A_j l_j^2 + C_j p_j^2 + 2B_j l_j p_j). \qquad (2.2.122)$$

Коэффициенты A_j, B_k и C_l удовлетворяют условиям

$$B_j = \mu(A_1 A_2 A_3) A_j^{-1} + \nu, \qquad C_1 = \mu^2 A_1 (A_2 - A_3)^2 + \nu', \ldots \qquad (2.2.123)$$

Дополнительный интеграл

$$2I = \sum_j (l_j^2 - 2\mu(A_j + \nu) l_j p_j) + \mu^2((A_2 - A_3)^2 + \nu'') p_1^2 + \ldots \qquad (2.2.124)$$

Отметим, что во всех рассмотренных случаях (за исключением волчка Ковалевской) дополнительный интеграл движения линеен или квадратичен по импульсам (или динамическим переменным). С этим обстоятельством связана возможность интегрирования уравнений движения методом разделения переменных (см. следующий раздел). В случае С. Ковалевской приходится использовать более сложный метод (см. [224]).

В настоящее время известны системы (помимо системы Гарнье и системы С. Ковалевской), для которых дополнительный интеграл движения имеет более высокую степень по импульсам. Приведем два примера таких систем. Это системы трех взаимодействующих частиц на прямой с потенциальной энергией

$$U(x_1, x_2, x_3) = [v(x_1 - x_2) + v(x_2 - x_3) + v(x_3 - x_1)], \qquad (2.2.125)$$

где

6) $v(x) = g^2 \mathscr{P}(x)$, $\qquad (2.2.126)$

$\mathscr{P}(x)$ – функция Вейерштрасса, и

7) $v(x) = g^2 e^x$. $\qquad (2.2.127)$

Это – так называемая система Тоды [298, 299].

В обоих случаях интеграл движения кубичен по импульсам и имеет вид

$$I = p_1 p_2 p_3 - p_1 v(x_2 - x_3) - p_2 v(x_3 - x_1) - p_3 v(x_1 - x_2). \qquad (2.2.128)$$

Относительно интегрирования системы 6) см. работу [85], а относительно системы 7) см. [214].

2.3. Разделение переменных

Метод разделения переменных является одним из основных методов интегрирования уравнений движения динамических систем. Он позволяет свести интегрирование для случая многих степеней свободы к интегрированию последовательности одномерных задач.

Проблема разделения переменных в уравнениях механики интенсивно исследовалась в прошлом веке и начале нашего века. Здесь мы ограничимся наиболее важными случаями.

А. Системы Лиувилля. Такие системы были впервые рассмотрены Лиувиллем в 1849 г. [240]. Это системы, для которых

$$H = T + U, \tag{2.3.1}$$

а кинетическая энергия T и потенциальная энергия U имеют вид

$$T = \frac{1}{2} C \sum_{j=1}^{n} \frac{\dot{q}_j^2}{a_j} = \frac{1}{2C} \sum_{j=1}^{n} a_j p_j^2, \tag{2.3.2}$$

$$U = \frac{1}{C} \sum_{j=1}^{n} U_j, \quad C = \sum_{j=1}^{n} c_j. \tag{2.3.3}$$

Здесь функции a_j, c_j и U_j зависят лишь от переменной q_j.

Для этих систем

$$\dot{q}_j = \frac{a_j}{C} p_j \tag{2.3.4}$$

и, как нетрудно проверить, величины

$$I_j = \frac{1}{2} a_j p_j^2 + U_j - Hc_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.3.5}$$

являются интегралами движения.

Отметим, что из них лишь $(n - 1)$ величин являются независимыми, поскольку

$$\sum_{j=1}^{n} I_j = 0. \tag{2.3.6}$$

Таким образом, с учетом гамильтониана H мы имеем n квадратичных интегралов движения. Очевидно, что все эти величины находятся в инволюции,

$$\{I_j, I_k\} = 0,$$

и, следовательно, рассматриваемые системы являются вполне интегрируемыми.

Уравнения движения можно проинтегрировать, например, следующим способом. Из равенств

$$I_j = \alpha_j = \text{const} \tag{2.3.7}$$

нетрудно получить систему дифференциальных уравнений для величин q_j:

$$\frac{dq_j}{\sqrt{2a_j(\alpha_j + Ec_j - U_j)}} = \frac{dt}{C(q_1, \ldots, q_n)}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.3.8}$$

Переходя к новому ("локальному") времени τ согласно формуле

$$d\tau = \frac{dt}{C(q_1, \ldots, q_n)}, \tag{2.3.9}$$

приходим к системе

$$\frac{dq_j}{\sqrt{2a_j(\alpha_j + Ec_j - U_j)}} = d\tau. \tag{2.3.10}$$

Отсюда с помощью квадратур можно найти $q_j = f_j(\tau)$. После этого мы можем выразить τ через t, используя квадратуру

$$t = \int^{\tau} C(q_1(\tau'), \ldots, q_n(\tau'))d\tau'. \tag{2.3.11}$$

Таким образом, решение задачи свелось к решению последовательности одномерных задач, в чем и заключается метод разделения переменных.

Отметим, что часто бывает удобнее применять метод разделения переменных к уравнению Гамильтона – Якоби:

$$H(p_j, q_k) = E, \quad p_j = \frac{\partial W}{\partial q_j}, \quad W = W(q_1, \ldots, q_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n). \tag{2.3.12}$$

Это значит, что мы интересуемся решением вида

$$W = \Sigma W_j(q_j). \tag{2.3.12'}$$

Однако подробнее на этом останавливаться не будем (см. [23]).

Заметим, что системы с двумя степенями свободы типа I–IV, рассмотренные в предыдущем разделе, после перехода соответственно к эллиптическим, полярным, параболическим и декартовым координатам*) принимают вид систем Лиувилля (см., например, [23]):

$$\text{I. } \xi = \frac{1}{2}(r_1 + r_2), \quad \eta = \frac{1}{2}(r_2 - r_1),$$
$$r_1 = |\mathbf{q} - \mathbf{c}|, \quad r_2 = |\mathbf{q} + \mathbf{c}|, \quad \mathbf{c} = (c, 0); \tag{2.3.13}$$

$$T = \frac{[(\xi^2 - c^2)p_\xi^2 + (c^2 - \eta^2)p_\eta^2]}{2(\xi^2 - \eta^2)}, \quad U = \frac{U_1(\xi) + U_2(\eta)}{\xi^2 - \eta^2},$$
$$I = \frac{1}{2}\frac{(\xi^2 - c^2)(c^2 - \eta^2)}{\xi^2 - \eta^2}(p_\xi^2 - p_\eta^2) + \tag{2.3.14}$$
$$+ \frac{(c^2 - \eta^2)U_1(\xi) - (\xi^2 - c^2)U_2(\eta)}{\xi^2 - \eta^2}.$$

$$\text{II. } r = |\mathbf{q}|, \quad \theta = \operatorname{arctg}(q_2/q_1); \tag{2.3.15}$$

$$T = \frac{1}{2}(p_r^2 + r^{-2}p_\theta^2), \quad U = U_1(r) + r^{-2}U_2(\theta), \quad I = \frac{1}{2}p_\theta^2 + U_2(\theta). \tag{2.3.16}$$

---

*) Отметим, что полярные, параболические и декартовы координаты являются предельными случаями эллиптических координат.

$$\text{III. } \xi = \frac{1}{2}(r + q_1), \quad \eta = \frac{1}{2}(r - q_1); \tag{2.3.17}$$

$$T = \frac{(\xi p_\xi^2 + \eta p_\eta^2)}{2(\xi + \eta)}, \quad U = \frac{U_1(\xi) + U_2(\eta)}{\xi + \eta},$$

$$I = \frac{\xi\eta(p_\xi^2 - p_\eta^2)}{2(\xi + \eta)} + \frac{\eta U_1(\xi) - \xi U_2(\eta)}{\xi + \eta}. \tag{2.3.18}$$

$$\text{IV. } T = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2), \quad U = U_1(q_1) + U_2(q_2),$$

$$I = I_1 = \frac{1}{2} p_1^2 + U_1(q_1). \tag{2.3.19}$$

В работе Морера [249] было доказано обратное утверждение: динамические системы вида

$$H = \frac{1}{2}(a_1 p_1^2 + a_2 p_2^2) + U(q_1, q_2), \tag{2.3.20}$$

интегрируемые методом разделения переменных, имеют вид систем Лиувилля. Относительно качественного поведения траекторий систем Лиувилля см. работу Адамара [190].

Таким образом, вопрос об интегрируемости систем типа (2.3.20) методом разделения переменных полностью решен.

Однако при переходе к бо́льшему числу степеней свободы ситуация усложняется. Именно, существуют системы, интегрируемые методом разделения переменных, которые не сводятся к системам Лиувилля. Рассмотрим еще один тип таких систем.

Б. Системы Штеккеля. Эти системы были открыты Штеккелем в 1891 г. (см. [282–286]). Гамильтониан таких систем имеет вид

$$H = \sum_{j=1}^{n} a_j(q_1, \ldots, q_n)\left[\frac{1}{2} p_j^2 + U_j(q_j)\right]. \tag{2.3.21}$$

Штеккелем была доказана

Теорема 2.3.1. Система с H вида (2.3.21) допускает разделение переменных в уравнении Гамильтона – Якоби (2.3.12) тогда и только тогда, когда существует матрица B порядка n, элемент b_{jk} которой зависит лишь от q_k, причем выполнены следующие условия:

$$\det B \not\equiv 0, \quad \sum_k b_{jk}(q_k) a_k(q_1, \ldots, q_n) = \delta_{j1}. \tag{2.3.22}$$

Обозначим через A матрицу, обратную к матрице B. Тогда

$$a_k = a_{k1}. \tag{2.3.23}$$

С помощью матрицы A образуем величины

$$I_l = \sum a_{jl}\left[\frac{1}{2} p_j^2 + U_j(q_j)\right], \quad I_1 = H. \tag{2.3.24}$$

У т в е р ж д е н и е. Величины I_l являются интегралами движения и находятся в инволюции.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычисляя скобки Пуассона величин I_k и I_l, получаем

$$\{I_k, I_l\} = \sum_{r,s}\left(a_{rk}\frac{\partial a_{sl}}{\partial q_r} - a_{rl}\frac{\partial a_{sk}}{\partial q_r}\right)p_r\left(\frac{1}{2}p_s^2 + U_s\right). \tag{2.3.25}$$

С другой стороны, дифференцируя по q_r тождество

$$\sum_s b_{js}(q_s)a_{sm}(q_1, \ldots, q_n) = \delta_{jm}, \tag{2.3.26}$$

получаем

$$\sum_s b_{js}(q_s)\frac{\partial a_{sk}}{\partial q_r} + \frac{\partial b_{jr}}{\partial q_r}a_{rk} = 0, \tag{2.3.27}$$

$$\sum_s b_{js}(q_s)\frac{\partial a_{sl}}{\partial q_r} + \frac{\partial b_{jr}}{\partial q_r}a_{rl} = 0. \tag{2.3.27$'$}$$

Исключая из (2.3.27) и (2.3.27′) величину $\partial b_{jr}/\partial q_r$, приходим к соотношению

$$\sum_s b_{js}\left(a_{rk}\frac{\partial a_{sl}}{\partial q_r} - a_{rl}\frac{\partial a_{sk}}{\partial q_r}\right) = 0. \tag{2.3.28}$$

Наконец, умножая (2.3.28) на a_{mj} и суммируя по j, получаем (суммирования по индексу r нет)

$$\left(a_{rk}\frac{\partial a_{sl}}{\partial q_r} - a_{rl}\frac{\partial a_{sk}}{\partial q_r}\right) = 0, \tag{2.3.29}$$

откуда и следует равенство (2.3.25).

Приведем еще более сильный вариант теоремы Штеккеля.

Т е о р е м а 2.3.2. [261]. Для гамильтоновой системы с H вида (2.3.21) следующие утверждения эквивалентны:

(1) уравнения Гамильтона – Якоби (2.3.12) допускают разделение переменных;

(2) существует матрица B порядка n с определителем $\det B \neq 0$, элемент b_{jk} которой зависит лишь от q_k, причем выполнены условия (2.3.22);

(3) существует n квадратичных по импульсам функционально независимых интегралов движения вида (2.3.24).

Итак, для систем Штеккеля существует n квадратичных по импульсам, ортогональных*) интегралов движения (2.3.24). Это позволяет свести интегрирование уравнений движения к квадратурам. Действительно, из

*) Термин "ортогональный" означает отсутствие в величине I слагаемых вида $a_{jk}p_jp_k$, $j \neq k$.

равенств

$$\sum_j a_{jl}\left[\frac{1}{2}p_j^2+U_j(q_j)\right]=\alpha_l \tag{2.3.30}$$

сразу же следует, что

$$\frac{1}{2}p_j^2+U_j(q_j)=\sum_k \alpha_k b_{kj}(q_j)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)^2+U_j(q_j). \tag{2.3.31}$$

Таким образом, уравнение Гамильтона – Якоби (2.3.12) для рассматриваемого случая допускает разделение переменных

$$W(q_1,\ldots,q_n)=\sum_{j=1}^{n} W_j(q_j), \tag{2.3.32}$$

и функция $W_j(q_j)$ дается формулой

$$W_j(q_j)=\int\sqrt{2\,(\sum_k \alpha_k b_{kj}(q_j)-U_j(q_j))}dq_j. \tag{2.3.33}$$

Согласно стандартной процедуре интегрирования уравнения Гамильтона – Якоби величины $q_j(t,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ находятся из уравнений

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\int\frac{b_{1j}\,dq_j}{\sqrt{2\,(\sum_k \alpha_k b_{kj}(q_j)-U_j(q_j))}}=t,\\ &\sum_{j=1}^{n}\int\frac{b_{lj}\,dq_j}{\sqrt{2(\sum_k \alpha_k b_{kj}(q_j)-U_j(q_j))}}=\beta_l,\quad l=2,\ldots,n.\end{aligned} \tag{2.3.34}$$

Отметим, что в случае финитного движения это движение, вообще говоря, будет уже не периодическим, а лишь условно периодическим (см. [23]). Если a_j и b_j – точки остановки, определяемые условием обращения в нуль функции $f_j(q_j)$ (2.3.33), то периоды движения системы определяются матрицей

$$\omega_{kj}=\int_{a_j}^{b_j}\frac{b_{kj}(q_j)dq_j}{\sqrt{2f_j(q_j)}},\quad f_j(q_j)=\sum_k[\alpha_k b_{kj}(q_j)]-U_j(q_j). \tag{2.3.35}$$

Отметим еще, что система Лиувилля является частным случаем системы Штеккеля. Именно, система Лиувилля получается, если матрица B имеет вид

$$\begin{pmatrix} c_1/a_1 & c_2/a_2 & \ldots & c_n/a_n\\ 1/a_1 & -1/a_2 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1/a_1 & 0 & \ldots & -1/a_n \end{pmatrix}. \tag{2.3.36}$$

В. Общий случай разделения переменных. Теорема Штеккеля полностью решает вопрос о разделении переменных для систем с гамильтонианами вида (2.3.21).

Вопрос о разделении переменных для гамильтоновых систем общего вида был рассмотрен в работе Леви-Чивита в 1904 г. [236]. Следуя этой работе, рассмотрим уравнение Гамильтона – Якоби (2.3.12) и предположим, что функция $W(q_1, \ldots, q_n)$ имеет вид

$$W(q_1, \ldots, q_n) = \sum_j W_j(q_j). \tag{2.3.37}$$

Тогда величина

$$p_j = \frac{\partial W}{\partial q_j} = \frac{\partial W_j}{\partial q_j} \tag{2.3.38}$$

зависит лишь от переменной q_j. Дифференцируя уравнение (2.3.12) по q_j, с учетом этого обстоятельства, получаем

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} + \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_j} = 0, \tag{2.3.39}$$

или

$$\frac{\partial p_j}{\partial q_j} = -\rho_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}\Big/\frac{\partial H}{\partial p_j}. \tag{2.3.40}$$

Отсюда следует, что при $i \neq j$

$$\frac{\partial}{\partial q_i}p_j = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\Big/\frac{\partial H}{\partial p_j}\right) = 0. \tag{2.3.41}$$

Таким образом, мы приходим к следующему критерию: уравнение Гамильтона – Якоби (2.3.12) интегрируемо методом разделения переменных, если функция $H(q_j, p_k)$ удовлетворяет $n(n-1)/2$ уравнениям ($i > j$ или $i < j$)

$$\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_k} -$$
$$- \frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_k} + \frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_k} = 0. \tag{2.3.42}$$

Систему (2.3.42) едва ли представляется возможным исследовать в столь общем виде.

Рассмотрим важный случай, когда

$$H = T + U, \quad T = \frac{1}{2}\sum_{j,k} a_{jk}(q) p_j p_k, \quad U = U(q_1, \ldots, q_n). \tag{2.3.43}$$

Тогда система (2.3.42) сводится к следующим уравнениям ($i > j$ или $i < j$):

$$\frac{\partial T}{\partial p_j}\frac{\partial T}{\partial p_k}\frac{\partial^2 T}{\partial q_j \partial q_k} - \frac{\partial T}{\partial p_j}\frac{\partial T}{\partial q_k}\frac{\partial^2 T}{\partial q_j \partial p_k} -$$

$$- \frac{\partial T}{\partial q_j}\frac{\partial T}{\partial p_k}\frac{\partial^2 T}{\partial p_j \partial q_k} + \frac{\partial T}{\partial q_j}\frac{\partial T}{\partial q_k}\frac{\partial^2 T}{\partial p_j \partial p_k} = 0, \tag{2.3.44}$$

$$\frac{\partial T}{\partial p_j}\frac{\partial T}{\partial p_k}\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k} - \frac{\partial T}{\partial p_j}\frac{\partial^2 T}{\partial q_j \partial p_k}\frac{\partial U}{\partial q_k} - \frac{\partial T}{\partial p_k}\frac{\partial^2 T}{\partial q_k \partial p_j}\cdot\frac{\partial U}{\partial q_j} +$$

$$+ \frac{\partial^2 T}{\partial p_j \partial p_k}\left\{\frac{\partial T}{\partial q_j}\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k}\frac{\partial U}{\partial q_j}\right\} = 0, \tag{2.3.45}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial p_j \partial p_k}\frac{\partial U}{\partial q_j}\frac{\partial U}{\partial q_k} = 0. \tag{2.3.46}$$

Отметим, что уравнения (2.3.44) содержат лишь кинетическую энергию T и выражают условие интегрируемости уравнений для геодезических в римановом пространстве с метрикой

$$ds^2 = \sum_{j,k} g_{jk}\, dq_j\, dq_k. \tag{2.3.47}$$

Здесь $g_{jk}(q_1, \ldots, q_n)$ – матрица, обратная матрице a_{jk}.

Г. Случай двух степеней свободы. В работе [281] Штеккель рассмотрел случай $n = 2$ и обнаружил три типа таких метрик.

1. Если обе величины

$$\rho_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1}\Big/\frac{\partial T}{\partial p_1} \quad \text{и} \quad \rho_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2}\Big/\frac{\partial T}{\partial p_2} \tag{2.3.48}$$

являются полиномами по p_1 и p_2, то

$$ds^2 = dq_1^2 + 2\cos(X_1 + X_2)dq_1\, dq_2 + dq_2^2, \quad X_j = X(q_j). \tag{2.3.49}$$

Система допускает два линейных по p_j интеграла движения.

2. Лишь одна из величин (2.3.48) является полиномом по p_1 и p_2. Тогда система допускает линейный по импульсу интеграл вида

$$X_1(q_1)p_1 \quad \text{или} \quad X_2(q_2)p_2. \tag{2.3.50}$$

Следовательно, система обладает циклической координатой q_1 или q_2 и интегрируется в квадратурах.

3. Обе величины (2.3.48) не являются полиномами по p_j. Тогда величина $a_{12} \equiv 0$, и этот случай сводится к случаю Лиувилля, рассмотренному в п. A:

$$ds^2 = (c_1(q_1) + c_2(q_2))\,(dq_1^2 + dq_2^2). \tag{2.3.51}$$

Следует иметь в виду, что в работе Леви-Чивиты [236] и в ряде последующих работ глобальные (топологические) свойства конфигурационного пространства не были рассмотрены, так что полученные результаты относятся лишь к простейшему случаю, когда конфигурационным пространством является вся двумерная плоскость (или же некоторая односвязная область этой плоскости).

Д. Геодезические потоки на поверхности. Описание метрик на поверхности рода 0, т.е. поверхности, топологически эквивалентной двумерной сфере, допускающих линейные и квадратичные интегралы движения, было дано в работе Дарбу [46] и работе [82]. При этом метрика типа (2.3.49) на сфере отсутствует.

Описание интегрируемых метрик на торе (поверхности рода 1) дано в работе [82]. Итак, рассмотрим движение по геодезической в фиксированной метрике g_{ij} на ориентируемой поверхности S_g рода g (т.е. поверхности с g ручками) — геодезический поток на S_g. В простейших случаях $g = 0$, S_0 — сфера, $g = 1$, S_1 — тор. Напомним, что эйлерова характеристика χ поверхности S_g равна $\chi = (2 - 2g)$.

Мы имеем гамильтонову систему с двумя степенями свободы и гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} g^{ij}(q) p_i p_j, \quad i, j = 1, 2, \tag{2.3.52}$$

где g^{ij} — матрица, обратная матрице g_{ij}. Поэтому вопрос об интегрируемости такой системы сводится к вопросу о существовании дополнительного интеграла движения, функционально независимого от H. Напомним прежде всего, что любая метрика на поверхности S_g после перехода к так называемым изотермическим координатам x и y принимает вид

$$ds^2 = a(x, y)(dx^2 + dy^2) \tag{2.3.53}$$

и, следовательно,

$$H = \frac{1}{2a}(p_x^2 + p_y^2). \tag{2.3.54}$$

Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением метрик и гамильтонианов такого вида. Если ограничиться случаем дополнительного интеграла движения, полиномиально зависящего от импульсов, то для случая сферы S_0 можно описать все такие метрики (или, что эквивалентно, гамильтонианы).

Теорема 2.3.3. [82]. Метрика класса C^2 на сфере, геодезический поток которой имеет дополнительный квадратичный по импульсам интеграл, функционально независимый от интеграла энергии, в некоторых изотермических координатах $z = x + iy$, заданных на сфере с одной выколотой точкой, имеет один из двух видов:

$$\text{(а)}\quad a(x, y) = f(x^2 + y^2), \tag{2.3.55}$$

где f — такая положительная функция класса C^2, что $f(\xi) = (c + o(1))/\xi$ при $\xi \to \infty$; такие геодезические потоки допускают линейный по импульсам интеграл движения

$$\text{(б)}\quad a(x, y) = \frac{f(u(x, y)) + h(v(x, y))}{|4z^3 + g_2 z + g_3|}, \tag{2.3.56}$$

где $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. При этом u и v — вещественная и мнимая части преобразования $w(z) = \mathcal{P}^{-1}(z)$, где $\mathcal{P}(w)$ – функция Вейерштрасса: $\mathcal{P}(w) = \mathcal{P}(w|g_2, g_3)$ с периодами ω_1 и ω_2, где ω_1 и ω_2 вещественны, а f и h – такие функции класса C^2, что:

(1) $f(u) = (u - k\omega_1/2)^2 (c + o(1))$ при $u \to \frac{1}{2}(k\omega_1)$

и аналогично

$$h(v) = (v - k\omega_2/2)(c + o(1))$$

при $v \to k\omega_2/2$ для любого фиксированного целого $k, c > 0$;

(2) значения функций f и h на отрезках $[\omega_1/2, \omega_1]$, $[\omega_2/2, \omega_2]$ определяются через их значения на отрезках $[0, \omega_1/2]$, $[0, \omega_2/2]$ по формулам

$$\begin{aligned} &f(\omega_1/2 + \tau) = f(\omega_1/2 - \tau), \quad \tau \in [0, \omega_1/2], \\ &h(\omega_2/2 + \tau) = h(\omega_2/2 - \tau), \quad \tau \in [0, \omega_2/2]; \end{aligned} \tag{2.3.57}$$

(3) f и h периодичны с периодами ω_1 и ω_2 соответственно (ясно, что при таких f и h значение $f(u(z)) + h(v(z))$ не зависит от выбора значения многозначной функции $\mathcal{P}^{-1}(z)$).

Обратно, положительная функция $a(x, y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, имеющая один из двух указанных видов, задает метрику на сфере S^2, геодезический поток которой имеет дополнительный квадратичный по импульсам интеграл, независимый от интеграла энергии.

Вопрос о существовании полиномиальных по импульсам интегралов движения для натуральной гамильтоновой системы

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + U(q_1, q_2) \tag{2.3.58}$$

на двумерном торе рассматривался в работе [72].

Здесь $U(q_1, q_2)$ – потенциальная энергия системы – 2π-периодическая функция переменных q_1 и q_2.

Приведем сначала хорошо известные результаты.

1. Линейный по импульсам интеграл I_1 существует тогда и только тогда, когда $U = f(mx + ny)$, где m и n – целые числа, f – 2π-периодическая функция

$$U = f(mx + ny). \tag{2.3.59}$$

2. Квадратичный по импульсам интеграл I_2 существует тогда и только тогда, когда

$$U = f_1(m_1 x + n_1 y) + f_2(m_2 x + n_2 y), \tag{2.3.60}$$

где m_i, n_i – целые числа, $m_1 m_2 = -n_1 n_2$, а функции f_j 2π-периодичны. При этом

$$\begin{aligned} I_2 &= (r_1 + r_2) p_1^2 + 4 p_1 p_2 - (r_1 + r_2) p_2^2 + \\ &+ 2(r_1 - r_2)(f_1 + f_2), \quad r_j = \frac{m_j}{n_j}. \end{aligned} \tag{2.3.61}$$

В работе [72] показано, что для рассматриваемых систем интегралов третьей и четвертой степени по импульсам, функционально независимых от интегралов низших степеней, не существует.

А именно, были доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.3.4. Для рассматриваемого случая кубический по импульсам интеграл I_3 существует тогда и только тогда, когда реализуется случай 1, т.е. существует линейный по импульсам интеграл I_1. При этом $I_3 = aI_1H + bI_1^3$, где a и b – константы.

Теорема 2.3.5. Интеграл четвертой степени по импульсам I_4 существует тогда и только тогда, когда реализуется случай 2, т.е. существует квадратичный по импульсам интеграл I_2 и при этом

$$I_4 = aI_2^2 + bI_2H + cH^2.$$

Замечание. Результаты теорем 2.3.4 и 2.3.5, по-видимому, сохраняют силу и для случая полиномиального интеграла любой степени по импульсам, т.е., по-видимому, случаи 1 и 2 исчерпывают все случаи дополнительных интегралов, полиномиальных по импульсам.

В случае поверхности рода $g > 1$ существуют топологические и геометрические препятствия для интегрируемости геодезических потоков.

Пусть S_g – связная, компактная ориентируемая поверхность,

$$H(p,q) = T(p,q) + U(q) \qquad (2.3.62)$$

вещественно-аналитическая функция на кокасательном расслоении T^*S_g, $T(p,q)$ – квадратичная форма по импульсам p.

Теорема 2.3.6. [21]. Если род поверхности S_g больше 1, т.е. S_g не гомеоморфна сфере S^2 или тору T^2, то рассматриваемая система не имеет интеграла движения, аналитического на T^*S_g и функционально независимого от интеграла энергии.

Замечание [21]. В бесконечно дифференцируемом случае теорема 2.3.6, вообще говоря, не справедлива: для любой гладкой поверхности S_g можно указать "натуральный" гамильтониан

$$H = T(p,q) + U(q) \qquad (2.3.63)$$

такой, что система имеет дополнительный бесконечно дифференцируемый интеграл, независимый (точнее, не всюду зависимый) от функции H.

Доказательство этого утверждения см. в обзоре [21], где также детально рассмотрен вопрос о неинтегрируемости в классической механике.

Отметим, что теорема 2.3.6 остается справедливой и для случая неориентируемых компактных поверхностей, если дополнительно исключить проективную плоскость P и бутылку Клейна K.

Приведем еще один результат (см. [2]).

Теорема 2.3.7. [*С. Болотин, Д. Абраров*]. Пусть M^{2n} – связное, компактное ориентируемое $2n$-мерное многообразие. Если гамильтонова натуральная система (т.е. система вида $H = \dfrac{p^2}{2} + U(q)$) на кокасательном расслоении T^*M имеет $k \geqslant n = (\dim M)/2$ независимых линейных интегралов в инволюции, то эйлерова характеристика M неотрицательна: $\chi(M) \geqslant 0$.

С л е д с т в и е 2.3.8. Пусть $\dim M = 2$. Если натуральная система имеет линейный по скорости интеграл движения, то M диффеоморфно сфере или тору. В неориентируемом случае надо добавить проективную плоскость P и бутылку Клейна K.

В заключение этого раздела отметим, что чрезвычайно сложный характер поведения геодезических на компактных поверхностях отрицательной кривизны был установлен Адамаром еще в 1898 г. [189].

Е. Случай трех степеней свободы. Этот случай был полностью разобран в работе Даль-Аква [156] на основе метода Леви-Чивиты. Оказалось, что здесь разделение переменных имеет место для метрик следующих четырех типов (индекс j у функции указывает, что эта функция зависит лишь от переменной q_j):

$$1.\ ds^2 = \sum_{j,\,k} (a_j a_k + b_j b_k + c_j c_k) dq_j\, dq_k. \tag{2.3.64}$$

$$\begin{aligned} 2.\ ds^2 &= (a_3 + 2l_1 e_3 + l_1^2 b_3) dq_1^2 + (m_2^2 a_3 + 2m_2 e_3 + b_3) dq_2^2 + \\ &+ dq_3^2 + 2(m_2 a_3 + l_1 b_3 + (1 + l_1 m_2) e_3) dq_1\, dq_2 + \\ &+ 2(c_3 + m_2 d_3) dq_2 dq_3 + 2(l_1 c_3 + d_3) dq_1\, dq_3. \end{aligned} \tag{2.3.65}$$

$$\begin{aligned} 3.\ ds^2 &= \frac{a_1 - b_2}{c_1 - f_2} [(l_1^2 + c_1 - f_2) dq_1^2 + (m_2^2 + c_1 - f_2) dq_2^2 + \\ &+ dq_3^2 + 2l_1 m_2 dq_1\, dq_2 + 2m_2 dq_2\, dq_3 + 2l_1\, dq_3\, dq_1]. \end{aligned} \tag{2.3.66}$$

$$4^{*}).\ ds^2 = \sum_{j=1}^{3} r_j(q_{j+1} - q_{j+2}) \sum_{r=1}^{3} \frac{dq_r^2}{|q_{r+1} - q_{r+2}|}. \tag{2.3.67}$$

Приведем еще несколько примеров интегрируемых гамильтоновых систем с тремя степенями свободы, для которых гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + q_1^4 + aq_1^2 q_2^2 + bq_2^4 + cq_1^2 q_3^2 + dq_2^2 q_3^2 + eq_3^4. \tag{2.3.68}$$

Приведем взятую из работы [162] таблицу известных интегрируемых случаев.

Ж. Общий случай. Исследование проблемы разделения переменных было продолжено в работах Бургатти [129] и Даль-Аквы [157]. Ими было показано, что в случае n степеней свободы существует $(n + 1)$ тип метрик (или, что эквивалентно, кинетических энергий), которые допускают разделение переменных.

Явный вид этих метрик для случая n степеней свободы был найден в работе Хаваса в 1975 г. [194, 195].

Перейдем к изложению результатов этих работ. Рассмотрим уравнение Гамильтона–Якоби

$$H = T = \frac{1}{2} \sum_{j,\,k} a_{jk}(q) \frac{\partial W}{\partial q_j} \frac{\partial W}{\partial q_k} = E \tag{2.3.69}$$

---

*) Входящие в эту формулу индексы следует рассматривать по модулю три.

Таблица 2

Значения параметров, для которых система (2.3.68) интегрируема

N	a	b	c	d		Примечание
1	2	1	0	0	произволен	Третья координата отщепляется
2	2	1	2	2	1	Сферическая симметрия
3	2	1	6	6	8	Случай VI в работе [168]
4	2	1	12	12	16	Случай II в работе [168]
5	2	1	6	6	1	Новый случай
6	6	1	12	12	16	Новый случай
7	0	1	6	6	8	Новый случай
8	6	8	6	6	8	Случай VII в работе [168]

Примечание. Другие интегрируемые случаи получаются путем перестановки координат q_1, q_2, q_3; случаи 6 и 7 связаны с помощью поворота на угол $\pi/4$ в плоскости (q_1, q_2).

и разделим координаты q_j $(j = 1, \ldots, n)$ на две группы по следующему принципу:

1) величину q_j отнесем к первой группе, если функция $\partial T(q, p)/\partial q_j$, рассматриваемая как полином от p_k, делится на $\partial T(q, p)/\partial p_j$ (это эквивалентно делимости $\partial T(q, \dot{q})/\partial q_j$ на $\dot{q}_j$);

2) в противном случае координату q_k отнесем ко второй группе.

Пусть $q_1, \ldots, q_r$ – координаты первой группы, $q_{r+1}, \ldots, q_n$ – координаты второй группы. Тогда, как показано в работе Бургатти [129], уравнения для функции $W_j(q_j)$ имеют следующий вид:

$$\frac{\partial W_1}{\partial q_1} = b_{11}(q_1)\alpha_1 + \ldots + b_{1r}(q_1)\alpha_r,$$

. . . .

$$\frac{\partial W_r}{\partial q_r} = b_{r1}(q_r)\alpha_1 + \ldots + b_{rr}(q_r)\alpha_r,$$

$$\frac{\partial W_{r+1}}{\partial q_{r+1}} = b_{r+1,1}(q_{r+1})\alpha_1 + \ldots + b_{r+1,r}(q_{r+1})\alpha_r +$$

$$+ \psi_{r+1}(q_{r+1})\sqrt{2E - \epsilon_{r+1} + b_{r+1,r+1}(q_{r+1})\alpha_{r+1} + \ldots},$$

. . . .

$$\frac{\partial W_n}{\partial q_n} = b_{n1}(q_n)\alpha_1 + \ldots + b_{nr}(q_n)\alpha_r +$$

$$+ \psi_n(q_n)\sqrt{2E - \epsilon_n + b_{n,r+1}(q_n)\alpha_{r+1} + \ldots + b_{n,n-1}\alpha_{n-1} + 2b_{nn}(q_n)}, \tag{2.3.70}$$

где $\epsilon_{r+1}, \ldots, \epsilon_n$ – однородные квадратичные формы относительно величин $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$; коэффициенты формы ϵ_k зависят лишь от координаты q_k.

Найдем из первых r уравнений выражения для $\alpha_1 \ldots \alpha_r$ через $\partial W_j/\partial q_j$ и подставим эти выражения в оставшиеся уравнения.

Исключая из них $(n - r - 1)$ константу, за исключением одной константы E, получаем уравнение Гамильтона–Якоби, интегрируемое методом разделения переменных.

Нетрудно видеть, что такое уравнение допускает r линейных (по импульсам) интегралов движения и $(n - r)$ квадратичных интегралов; причем все они находятся в инволюции.

Индекс r при этом может принимать значения $0, 1, \ldots, n$; соответственно мы получаем $(n + 1)$ тип уравнений Гамильтона–Якоби, допускающих разделение переменных.

Таким образом, показано, что выполнение уравнений (2.3.70) является достаточным условием для решения уравнения Гамильтона–Якоби методом разделения переменных.

Тот факт, что эти уравнения являются также необходимыми условиями для разделения переменных, был установлен в работе Даль-Аквы [157].

Вопрос о том, какие из рассмотренных метрик являются плоскими, т.е. в каких случаях тензор кривизны тождественно равен нулю, был разобран в работе [304].

2.4. Системы, обладающие квадратичными интегралами движения

Как видно из раздела 2.3, для систем Лиувилля и Штеккеля возможность решения задачи методом разделения переменных связана с существованием n интегралов движения, квадратичных по импульсам и находящихся в инволюции. Существуют, однако, системы, обладающие меньшим числом квадратичных интегралов движения.

А. Системы с двумя степенями свободы. Пусть система описывается гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\,(a_1(q_1, q_2)\,p_1^2 + a_2(q_1, q_2)\,p_2^2) + U(q_1, q_2) \tag{2.4.1}$$

и обладает квадратичным интегралом движения вида

$$I = \frac{1}{2}\,(b_1(q_1, q_2)\,p_1^2 + b_2(q_1, q_2)\,p_2^2) + V(q_1, q_2). \tag{2.4.2}$$

Условие, что I является интегралом движения,

$$\{H, I\} = 0, \tag{2.4.3}$$

эквивалентно уравнениям:

$$\frac{1}{a_j}\,\frac{\partial a_j}{\partial q_j} = \frac{1}{b_j}\,\frac{\partial b_j}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \tag{2.4.4}$$

$$a_1\,\frac{\partial b_2}{\partial q_1} = b_1\,\frac{\partial a_2}{\partial q_1}, \quad a_2\,\frac{\partial b_1}{\partial q_2} = b_2\,\frac{\partial a_1}{\partial q_2}, \tag{2.4.5}$$

$$a_j\,\frac{\partial V}{\partial q_j} = b_j\,\frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \tag{2.4.6}$$

Решая эти уравнения, получаем или тривиальное решение

$$b_j = \alpha a_j, \quad V = \alpha U + \beta, \tag{2.4.7}$$

где α и β — постоянные, или же решение

$$a_j = \frac{d_j(q_j)}{c_1(q_1) + c_2(q_2)}, \quad j = 1, 2, \quad U(q_1, q_2) = \frac{U_1 + U_2}{c_1 + c_2}. \tag{2.4.8}$$

В последнем случае гамильтониан H имеет вид Лиувилля и, следовательно, уравнения движения интегрируются методом разделения переменных.

Интеграл движения имеет вид

$$I = [c_2(q_2) + c_1(q_1)]^{-1} \left\{ \frac{1}{2}(c_2 d_1 p_1^2 - c_1 d_2 p_2^2) + c_2 U_1 - c_1 U_2 \right\}. \tag{2.4.9}$$

Функции c_j, d_j и U_j зависят лишь от переменной q_j и произвольны.

Переходя к рассмотрению системы с бóльшим числом степеней свободы, отметим, что в работе ди Пирро [268] были указаны примеры систем с n степенями свободы, которые обладают любым числом r квадратичных интегралов движения $(1 \leqslant r \leqslant n - 1)$.

Б. Системы с тремя степенями свободы. Здесь мы рассмотрим лишь случай $n = 3$. В работе [268] была доказана следующая

Теорема 2.4.1. Система с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} a_j(q_1, q_2, q_3) p_j^2 + U(q_1, q_2, q_3) \tag{2.4.10}$$

допускает дополнительные квадратичные интегралы движения в двух случаях.

1. Существуют два дополнительных квадратичных ортогональных интеграла *). В этом случае система является системой Штеккеля

$$H = \sum A_{j1} \left(\frac{1}{2} p_j^2 + U_j(q_j) \right), \tag{2.4.11}$$

где A_{jk} — матрица обратная к матрице B_{jk} и $B_{jk} = B_{jk}(q_j)$.

2. Существует лишь один квадратичный ортогональный интеграл. В этом случае

$$2T = (c_{12}(q_1, q_2) + c_3(q_3))^{-1} (a_1(q_1, q_2) p_1^2 + a_2(q_1, q_2) p_2^2 + a_3(q_3) p_3^2), \tag{2.4.12}$$

а дополнительный интеграл движения имеет вид

$$2T_1 = (c_{12}(q_1 q_2) + c_3(q_3)) (c_3(a_1 p_1^2 + a_2 p_2^2) - c_{12} a_3 p_3^2). \tag{2.4.13}$$

Мы не будем приводить здесь остальных результатов ди Пирро, посколь-

*) Под ортогональным интегралом мы понимаем интеграл, не содержащий слагаемых вида $a_{ij} p_i p_j$, $i \neq j$. Заметим, что существуют также системы, обладающие квадратичными, но неортогональными интегралами. Примером такой системы является система с H вида

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2 + (q_1^2 + q_2^2)^2.$$

ку они были значительно обобщены Пенлеве [260], к изложению работы которого мы переходим.

В. Система с n степенями свободы. Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \sum a_{jk}(q_1, \ldots, q_n) p_j p_k + U(q_1, \ldots, q_n), \tag{2.4.14}$$

однако на него накладываются дальнейшие ограничения.

Представим число n в виде суммы r положительных целых чисел

$$n = i + j + \ldots + l + m \tag{2.4.15}$$

и соответственно разобьем координаты $q_1, \ldots, q_n$ на r групп

$$(q_1 \ldots q_i),\ (q_{i+1} \ldots q_{i+j}), \ldots$$

Пусть

$$\mathcal{T}_1(q_1 \ldots q_i, \dot{q}_1 \ldots \dot{q}_i), \quad \mathcal{T}_2(q_{i+1} \ldots q_{i+j}, \dot{q}_{i+1} \ldots \dot{q}_{i+j}), \ldots \tag{2.4.16}$$

– произвольные функции от переменных в соответствующей группе, квадратичные по этим переменным.

Построим матрицу B порядка r:

$$B = \begin{vmatrix} b_1^1(q_1 \ldots q_i) & b_2^1(q_{i+1} \ldots q_{i+j}) & \ldots & b_r^1(\ldots q_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_1^r(q_1 \ldots q_i) & b_2^r(q_{i+1} \ldots q_{i+j}) & \ldots & b_r^r(\ldots q_n) \end{vmatrix}. \tag{2.4.17}$$

Пусть $A = [a_{\alpha\beta}]$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, r)$ – матрица, обратная к матрице B, и

$$H = H_1 = \sum_\alpha a_{\alpha 1}(\mathcal{T}_\alpha + U_\alpha(q)),$$
$$U_1 = U(q_1, \ldots, q_i), \quad U_2 = U_2(q_{i+1}, \ldots, q_{i+j}), \ldots \tag{2.4.18}$$

Тогда построенная гамильтонова система допускает r квадратичных интегралов движения H_β (включая гамильтониан), имеющих вид

$$H_\beta = \sum_\alpha a_{\alpha\beta}(\mathcal{T}_\alpha + U_\alpha(q)); \quad \beta = 1, \ldots, r. \tag{2.4.19}$$

Все эти интегралы находятся в инволюции.

Уравнение Гамильтона–Якоби

$$H(p_j, q_k) = E, \quad p_j = \frac{\partial W}{\partial q_j}, \quad W = W_1 + \ldots + W_r,$$
$$W_1 = W_1(q_1 \ldots q_r), \quad W_2 = W_2(q_{i+1} \ldots q_{i+j}), \ldots \tag{2.4.20}$$

эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\mathcal{T}_1\left(\frac{\partial W_1}{\partial q_1} \ldots \frac{\partial W_1}{\partial q_i}, q_1, \ldots, q_i\right) + U_1 = C_1 b_1^1 + \ldots + C_r b_1^r,$$
$$\ldots \tag{2.4.21}$$
$$\mathcal{T}_r\left(\ldots \frac{\partial W_r}{\partial q_n}, \ldots q_n\right) + U_r = C_1 b_r^1 + \ldots + C_r b_r^r.$$

При этом, если все числа $i, j, \ldots, m$ равны единице, $r = n$, мы получаем случай Штеккеля; если же равны единице все числа, кроме первого, то мы приходим к случаю ди Пирро.

Отметим еще работу Леви-Чивита [235], в которой был найден критерий существования квадратичного интеграла вида

$$I = \frac{1}{2} \Sigma \alpha_{jk}(q) p_j p_k \tag{2.4.22}$$

для гамильтоновой системы с

$$H = \frac{1}{2} \Sigma a_{jk} p_j p_k. \tag{2.4.23}$$

Этот критерий довольно сложен и мы его здесь не приводим.

В заключение этого раздела отметим, что существуют системы, не обладающие квадратичными интегралами движения, но имеющие интегралы движения более высоких степеней по импульсам (см. примеры в разделе 2.2). Уравнения движения таких систем методом разделения переменных проинтегрировать не удается, и для их интегрирования приходится использовать более сложные методы (первые примеры такого интегрирования можно найти в работах Вебера [302], С. Ковалевской [224, 225] и Гарнье [178]).

2.5. Движение в центральном поле

Рассмотрим движение материальной точки единичной массы в n-мерном пространстве в центральном поле, т.е. в потенциальном поле, зависящем лишь от расстояния r от начала координат,

$$H = \frac{1}{2} p^2 + U(r), \quad p = |p|, \quad U(q) = U(r), \quad r = |q|. \tag{2.5.1}$$

Гамильтониан такой системы инвариантен относительно преобразований группы $SO(n)$ – группы вращений n-мерного пространства. Как следствие этого, $\frac{n(n-1)}{2}$ величин – компоненты тензора момента количества движения

$$l_{jk} = q_j p_k - q_k p_j, \quad j \neq k, \quad l_{jk} = -l_{kj} \tag{2.5.2}$$

– являются сохраняющимися величинами. Нетрудно видеть, однако, что не все эти величины являются независимыми: среди них имеется всего $(2n-3)$ независимых величины.

Фиксируя значения всех компонент этого тензора, мы фиксируем тем самым двумерную плоскость, содержащую векторы q и p. Постоянство тензора l_{jk} означает, что частица во время движения находится в этой плоскости. Вводя на этой плоскости обычную декартову систему координат, приходим к задаче с двумя степенями свободы и гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + U(r), \quad r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}. \tag{2.5.3}$$

Переходя к полярным координатам r и φ

$$q_1 = r\cos\varphi, \quad q_2 = r\sin\varphi, \tag{2.5.4}$$

получаем

$$H = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) + U(r). \tag{2.5.5}$$

Мы видим, что гамильтониан H не зависит от φ (или, как говорят, координата φ является циклической). Отсюда следует, что сопряженная к ней величина p_φ от времени не зависит:

$$p_\varphi^2 = l^2 = \sum_{j<k} l_{jk}^2 = \text{const}, \quad p_\varphi = r^2\dot\varphi. \tag{2.5.6}$$

Таким образом, интересующая нас задача сводится к одномерной задаче с новой потенциальной энергией

$$V_l(r) = U(r) + \frac{l^2}{2r^2}. \tag{2.5.7}$$

Поэтому зависимость величины r от времени определяется квадратурой

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}}\int^r \frac{d\xi}{\sqrt{E - V_l(\xi)}}. \tag{2.5.8}$$

После этого можно найти и зависимость φ от времени

$$\varphi(t) = l\int^t \frac{dt}{r^2(t)}. \tag{2.5.9}$$

Орбита же частицы определяется уравнением

$$\varphi = l\int^r \frac{d\xi}{\xi^2\sqrt{2(E - V_l(\xi))}}. \tag{2.5.10}$$

Отсюда в случае финитного движения получаем

$$\Delta\varphi = l\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2\sqrt{2(E - V)}}. \tag{2.5.11}$$

Поэтому такая орбита является замкнутой, если $\Delta\varphi/\pi$ является рациональным числом: $\Delta\varphi = \frac{m}{n}\pi$, m и n – целые числа. Ясно, что это может происходить лишь в исключительных случаях. Нахождению этих случаев посвящен следующий раздел.

Отметим еще, что в случае степенного потенциала ($U(r) = \alpha r^k$) для степеней

$$k = 6, 4, 2, -1, -2, -3, -4, -6;\ -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{4}{3}$$

интегрирование в (2.5.8) приводит к эллиптическим функциям [35].

2.6. Системы с замкнутыми траекториями

Как мы уже видели ранее, характерной чертой вполне интегрируемых систем с n степенями свободы является наличие у них n глобальных интегралов движения $I_j(p, q)$. Приравнивая их константам ($I_j(p, q) = c_j$), мы выделяем n-мерное многообразие M_c, которое топологически эквивалентно n-мерному тору (в компактном случае) или произведению тора и евклидова пространства. Динамические переменные при этом являются почти-периодическими функциями времени t, т.е. разлагаются в n-кратный ряд или интеграл Фурье,

$$q_j(t) = \sum_{k_1 \ldots k_n} a_{k_1 \ldots k_n} \exp(i \sum k_j \omega_j t), \qquad (2.6.1)$$

величины $p_j(t)$ даются аналогичной формулой. Частоты ω_j при этом, вообще говоря, несоизмеримы друг с другом.

Особый случай возникает, когда хотя бы две частоты ω_j оказываются соизмеримыми друг с другом. Такое движение называют вырожденным. Здесь нас будет интересовать лишь полностью вырожденное движение, когда все n частот ω_j соизмеримы друг с другом. Классическая траектория превращается при этом в замкнутую кривую*), а число глобальных интегралов движения увеличивается до $(2n - 1)$. Уравнение Гамильтона – Якоби обычно разделяется в нескольких системах координат, что соответствует различным возможностям выбора n переменных действия из совокупности $(2n - 1)$ независимых интегралов движения. Для систем, допускающих разделение переменных гамильтониан H имеет вид

$$H = F(\sum n_j J_j),$$

где $J_j = \oint p_j dq_j$ – так называемые адиабатические инварианты. Начнем с рассмотрения простейшего примера

А. Двумерный осциллятор. Это система, описываемая гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(\omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2), \qquad (2.6.2)$$
$$H = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2 .$$

Такая система обладает интегралом движения

$$I_1 = \frac{1}{2}(p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2) \quad \left(\text{или} \quad I_2 = \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2)\right). \qquad (2.6.3)$$

Здесь следует различать два случая:

а) отношение ω_1/ω_2 иррационально. В этом случае второй глобальный дополнительный интеграл движения отсутствует, а траектория на плоскости q_1, q_2 всюду плотно заполняет прямоугольник $-a < q_1 < a$, $-b < q_2 < b$;

б) отношение ω_1/ω_2 рационально: $\omega_1/\omega_2 = r/s$, где r и s – целые взаимно простые числа. Система допускает помимо интеграла (2.6.3)

---

*) В соответствующей квантовомеханической задаче при этом обычно возникает вырождение уровней.

второй глобальный дополнительный интеграл движения

$$I_2 = \bar{a}_1^s a_2^r, \tag{2.6.4}$$

где

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\omega r}}(p_1 + i\omega r q_1), \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2\omega s}}(p_2 - i\omega s q_2). \tag{2.6.5}$$

Этот интеграл имеет степень $(r + s)$ как по импульсам, так и по координатам. Все траектории системы замкнуты. Они даются так называемыми кривыми Лиссажу (см. [1]).

Относительно случая изотропного осциллятора, когда все частоты ω_j равны между собой, см. раздел 2.7.

Б. Центральное поле. В этом случае ответ на интересующий нас вопрос был найден Бертраном в 1873 г. [123].

Теорема 2.6.1. При движении частицы в центральном потенциальном поле все финитные траектории такой системы являются замкнутыми лишь для потенциалов $U(r) = -\alpha/r \quad (\alpha > 0)$ и $U(r) = kr^2 \quad (k > 0)$.

Доказательство. Рассмотрим частицу единичной массы, движущуюся в центральном поле $U(r)$ с моментом количества движения l. Тогда радиальное движение определяется эффективным потенциалом

$$V_l(r) = U(r) + l^2/2r^2. \tag{2.6.6}$$

Предположим, что потенциал $U(r)$ является потенциалом притяжения $(U'(r) \geqslant 0)$. Тогда потенциал $V_l(r)$ будет обладать локальным минимумом при $r = a \quad (V_l'(a) = 0)$ и можно так выбрать начальные условия, чтобы частица двигалась по круговой орбите $r = a$. Для этого необходимо, чтобы

$$l^2 = a^3 U'(a). \tag{2.6.7}$$

Угловая частота вращения частицы по орбите находится из условия

$$\omega_0^2 a = U'(a), \quad \omega_0^2 = a^{-1} U'(a). \tag{2.6.8}$$

Рассмотрим теперь траекторию, близкую к круговой. Тогда частота радиальных колебаний определяется соотношением

$$\omega_1^2 = V_l'' = U'' + 3l^2/a^4 = U''(a) + 3a^{-1}U'(a). \tag{2.6.9}$$

Траектория частицы будет замкнутой кривой, если эти частоты соизмеримы, т.е.

$$\omega_1 = \nu\omega_0, \quad \nu - \text{рациональное число}. \tag{2.6.10}$$

Весьма существенно при этом, что в силу непрерывности число ν не зависит от формы орбиты, является характеристикой данного потенциала. Из (2.6.8)–(2.6.10) получаем

$$U''(r) = (\nu^2 - 3)r^{-1}U'(r), \tag{2.6.11}$$

т.е. потенциал $U(r)$ является степенным:

$$U(r) = -c\beta^{-1}r^\beta, \quad \beta = \nu^2 - 2. \tag{2.6.12}$$

Рассмотрим теперь произвольную орбиту.

Из рассуждений, аналогичных предыдущим, следует, что при изменении r от $r_1 = r_{\min}$ до $r_2 = r_{\max}$ угол поворота $\Delta\varphi = \pi/\nu$. Отсюда получаем соотношение

$$\Delta\varphi = \pi/\nu = l \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2\sqrt{2(E-U) - l^2/r^2}}, \tag{2.6.13}$$

которое после замены $r = r_1/\rho$ принимает вид

$$\int_{\rho_0}^{1} \frac{d\rho}{\sqrt{\dfrac{2Er_1^2}{l^2} - \dfrac{2r_1^2}{l^2}U - \rho^2}} = \frac{\pi}{\nu}. \tag{2.6.14}$$

Рассмотрим сначала случай $\beta = \nu^2 - 2 > 0$, $U = c_1 r^{\nu^2 - 2}$. Устремив E к бесконечности, получаем

$$\int_0^1 \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\nu}, \quad \nu = 2, \quad U = cr^2. \tag{2.6.15}$$

Пусть теперь $\nu^2 - 2 < 0$, $U(r) = -c\rho^{2-\nu^2}$. Устремляя E к нулю, получаем

$$\int_0^1 \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho^{-\nu^2} - 1}} = \int_0^1 \frac{\rho^{\nu^2/2 - 1}}{\sqrt{1-\rho^{\nu^2}}}\, d\rho = \frac{\pi}{\nu^2} = \frac{\pi}{\nu}. \tag{2.6.16}$$

Таким образом, интересующим нас свойством могут обладать лишь два потенциала

$$U(r) = kr^2 \quad \text{и} \quad U(r) = -\alpha/r, \qquad k, \alpha > 0. \tag{2.6.17}$$

Хорошо известно, что для них любая финитная траектория является замкнутой.

В. Нецентральное поле. Этот случай значительно сложнее случая центрального поля, и здесь имеются лишь отдельные результаты.

Случай двух степеней свободы, допускающий разделение переменных, был рассмотрен в работе [74]. В этой работе были найдены четыре типа систем, обладающих замкнутыми траекториями. Потенциальные энергии этих систем таковы:

1. $$U(q_1, q_2) = \alpha(q_1^2 + q_2^2) + \frac{\beta_1}{q_1^2} + \frac{\beta_2}{q_2^2}. \tag{2.6.18}$$

2. $$U(q_1, q_2) = \alpha(4q_1^2 + q_2^2) + \beta q_1 + \frac{\gamma}{q_2^2}. \tag{2.6.19}$$

3. $$U(q_1, q_2) = U(r, \theta) = \frac{\alpha}{2r} + \frac{1}{4r^2}\left(\frac{\beta_1}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}} + \frac{\beta_2}{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}\right). \tag{2.6.20}$$

4. $$U = \frac{\alpha}{2r} + \left(\beta_1 \cos\frac{\theta}{2} + \beta_2 \sin\frac{\theta}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{r}}. \tag{2.6.21}$$

Уравнение Гамильтона – Якоби для этих систем допускает разделение переменных:

1) в декартовых и полярных координатах;
2) в декартовых и параболических координатах;
3) в полярных и параболических координатах;
4) в двух различных системах параболических координат.

Обобщение теоремы Бертрана для случая двух степеней свободы, когда уравнения Гамильтона – Якоби допускают разделение в декартовых или полярных координатах, было дано в [259]. В этой работе было обнаружено два семейства таких систем, обобщающих осцилляторные и кеплеровские системы соответственно. Гамильтонианы этих систем следующим способом выражаются через переменные действия J_1 и J_2:

$$J_j = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2(E - U_j(x))}\, dx; \tag{2.6.22}$$

$$\text{а) } H = \alpha(n_1 J_1 + n_2 J_2) + \beta, \tag{2.6.23}$$

$$\text{б) } H = -\alpha(n_1 J_1 + n_2 J_2 + \beta)^{-2}, \tag{2.6.23$'$}$$

где n_1 и n_2 – положительные взаимно простые целые числа, α и β – положительные константы.

Среди этих потенциалов находятся, например, следующие:

$$\text{а) } U(q_1, q_2) = U_1(q_1) + U_2(q_2), \tag{2.6.24}$$

$$U_j(q) = (\alpha_0^2 - \alpha^2)^{-2}(\alpha_0 q - \alpha\sqrt{q^2 + \gamma(\alpha_0^2 - \alpha^2)})^2, \quad |\alpha| < \alpha_0, \quad \gamma > 0, \tag{2.6.25}$$

или

$$U_j(q) = (2\alpha_0)^{-2}\left(q - \frac{\alpha_0^2\gamma}{q}\right)^2; \tag{2.6.26}$$

$$\text{б) } U(r, \theta) = U_1(r) + r^{-2} U_2(\theta), \tag{2.6.27}$$

$$U_1(r) = \frac{c_1}{2mr^2} - \sqrt{k^2 r^2 + \frac{\gamma^4}{(2m)^2}}\,\frac{1}{r^2}, \tag{2.6.28}$$

$$U_2(\theta) = \frac{\beta^2}{m}\,\frac{1 + \alpha^2\cos^2(2q\varphi)}{1 + \cos(2q\varphi)\sqrt{1 - \alpha^2\sin^2(2q\varphi)}}, \tag{2.6.29}$$

где

$$|\varphi| < \frac{\pi}{2q}, \quad \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2 < 1. \tag{2.6.30}$$

В пределе $\alpha \to 1$ получается неаналитический потенциал, который, однако, описывает периодическое движение.

$$\text{б$'$) } U_2(\theta) = \frac{\beta^2}{2m}\,\frac{1 + \cos^2(2q\varphi)}{1 + \cos(2q\varphi)\,|\cos(2q\varphi)|}. \tag{2.6.31}$$

$$H = 2\omega(J_r + qJ_\theta) + \beta, \tag{2.6.32}$$

$$U_1(r) = \frac{1}{2}\omega^2 r^2, \tag{2.6.33}$$

$$U_2(\theta) = U_0 \cos^{-2} q\varphi. \tag{2.6.34}$$

Г. Отдельные результаты. Укажем еще несколько систем, обладающих замкнутыми траекториями.

в) Система с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(1+q^2)^2 p^2. \tag{2.6.35}$$

Эта система получается при стереографической проекции системы, описывающей свободное движение частицы на n-мерной сфере. Отсюда и следует факт замкнутости траекторий.

г) Система n взаимодействующих частиц [262] с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\Sigma p_j^2 + g^2 \sum_{j<k} (q_j - q_k)^{-2} + \sum_j q_j^2. \tag{2.6.36}$$

д) Свободное движение на поверхности вращения (вокруг оси z), задаваемой уравнением [294] (груша Таннери)

$$16a^2(x^2+y^2) = z^2(2a^2 - z^2). \tag{2.6.37}$$

е) Движение по поверхности двумерной сферы в потенциальном поле

$$U(\theta,\varphi) = -\alpha \operatorname{ctg}\theta. \tag{2.6.38}$$

Здесь θ, φ – стандартные сферические координаты.

ж) Задача Бертрана. Найти закон центральных (но не обязательно потенциальных) сил, зависящих только от положения движущейся точки и заставляющей ее описывать конические сечения, каковы бы ни были начальные условия.

Эта задача была решена Дарбу [154] и Альфеном [192]. Оказалось, что имеется два таких закона:

1) $F = -kr(ar\cos\theta + br\sin\theta + c)^{-3}$; $\quad$ (2.6.39)

2) $F = -\mu r^{-2}(A\cos^2\theta + 2B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta)^{-3/2}$. $\quad$ (2.6.40)

з) Если отказаться от требования центральности сил, то можно найти еще два случая, когда траектории являются коническими сечениями. Это – случаи параллельных сил:

$$\mathbf{F} = (0, F_y). \tag{2.6.41}$$

Здесь

1) $F_y = \mu(ax + by + c)^{-3}$ $\quad$ (2.6.42)

или

2) $F_y = \mu(ax^2 + 2bx + c)^{-3/2}$. $\quad$ (2.6.43)

и) Отметим еще работу [220], где исследовался вопрос о том, каким должно быть центральное поле, чтобы траектория являлась алгебраической кривой. Было показано, что это может быть лишь для $U(r) = kr^2$ или $U(r) = -\alpha r^{-1}$.

к) Груша Таннера, упомянутая выше, является примером метрики на сфере, которая инвариантна относительно вращений вокруг оси z и для которой все геодезические замкнуты, так же как и в случае стандартной $SO(3)$-инвариантной метрики на сфере. Другие примеры метрик на S^2 с этими свойствами можно найти в работах Дарбу [154, 155] и Цолля [318]. Метрики такого вида можно получить путем деформации стандартной метрики, которая определяется нечетной функцией на сфере [175] и, следовательно, не обладает аксиальной симметрией. Недавно было показано [179], что любая нечетная функция на сфере определяет такую деформацию. Детальное обсуждение этой и аналогичных проблем можно найти в книге Бессе [5]. Относительно поведения геодезических на поверхностях типа Лиувилля см. работу [240].

2.7. Гармонический осциллятор

Многомерный гармонический осциллятор описывается гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(p_j^2 + \omega_j^2 q_j^2), \tag{2.7.1}$$

где ω_j – частоты колебаний. Интегрирование уравнений движения для такой системы тривиально. Мы все же рассмотрим эту систему, поскольку она является простейшей системой, обладающей "скрытой" симметрией.

Многомерный осциллятор обладает $(n - 1)$ дополнительным квадратичным интегралом движения:

$$I_j = \frac{1}{2}(p_j^2 + \omega_j^2 q_j^2), \quad j = 1, \ldots, n; \quad \sum_{j=1}^{n} I_j = H. \tag{2.7.2}$$

Если все частоты ω_j несоизмеримы друг с другом, т.е. равенство

$$\sum n_j \omega_j = 0, \tag{2.7.2'}$$

где n_j – целые числа, выполняется лишь в том случае, когда все n_j равняются нулю, то, помимо интегралов I_j, других однозначных интегралов нет и "скрытая" симметрия отсутствует.

А. Изотропный n-мерный осциллятор. В другом предельном случае все частоты ω_j соизмеримы между собой. Тогда существует $(n - 1)$ дополнительный интеграл движения и все траектории системы будут замкнуты. Особенно простым является случай, когда все ω_j равны между собой: $\omega_j = \omega$, это случай так называемого изотропного осциллятора. Полагая $\omega = 1$, имеем

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(p_j^2 + q_j^2). \tag{2.7.3}$$

Очевидной группой симметрии этого гамильтониана является группа вращений n-мерного пространства – группа $SO(n)$. Она, однако, не объясняет факта замкнутости траекторий. Гамильтониан (2.7.3) инвариантен также относительно группы $SO(2n)$ – группы вращений $2n$-мерного фазового пространства. Эта группа, однако, не является группой инвариантности нашей задачи, поскольку преобразования из $SO(2n)$, вообще говоря, не сохраняют стандартную симплектическую форму

$$\sum_{j=1}^{n} dp_j \wedge dq_j. \tag{2.7.4}$$

С другой стороны, линейные однородные преобразования $2n$-мерного пространства, оставляющие инвариантной форму (2.7.4), образуют, как мы знаем, симплектическую группу – группу $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$.

Поэтому группой симметрии рассматриваемой задачи будет группа, являющаяся пересечением групп $\mathrm{SO}(2n)$ и $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Эта группа является максимальной компактной подгруппой в некомпактной группе $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ и, как оказывается (см., например, [1]), она изоморфна группе $\mathrm{U}(n)$ – группе унитарных матриц порядка n.

Для того чтобы увидеть это, удобно перейти к новым комплексным переменным

$$a_j = \frac{p_j - iq_j}{\sqrt{2}}, \qquad \bar{a}_k = \frac{p_k + iq_k}{\sqrt{2}}. \tag{2.7.5}$$

Тогда, как нетрудно проверить, величины

$$A^j_k = \bar{a}_j a_k \tag{2.7.6}$$

являются интегралами движения: $\{A^j_k, H\} = 0$. Эти величины образуют замкнутую алгебру относительно скобок Пуассона

$$\{A^j_k, A^l_m\} = i(\delta^j_m A^l_k - \delta^l_k A^j_m), \tag{2.7.7}$$

которая изоморфна алгебре $\mathrm{U}(n)$ – алгебре эрмитовых матриц порядка n.

Заметим, что мнимая часть величин A^j_k дает тензор момента количества движения а вещественная часть дает сохраняющийся тензор

$$Q_{jk} = (p_j p_k + q_j q_k). \tag{2.7.8}$$

Отметим также, что не все величины A^j_k являются независимыми. Однако среди них имеется $(2n - 1)$ независимый интеграл движения, что и объясняет факт замкнутости траекторий.

2.8. Задача Кеплера

В настоящем разделе будет подробно рассмотрена другая динамическая система, для которой все финитные траектории являются замкнутыми, – частица в потенциальном поле ньютоновского центра*)

$$U(q) = -\frac{\alpha}{r}, \quad r = |\mathbf{q}|, \quad \alpha > 0. \tag{2.8.1}$$

Как будет видно из дальнейшего, замкнутость траекторий является следствием существования скрытой (динамической) симметрии, которой обладает рассматриваемая система.

---

*) Законы движения такой системы были установлены Кеплером [51, 52] задолго до нахождения Ньютоном [27] уравнений динамики.

Гамильтониан задачи Кеплера имеет вид

$$H = \frac{1}{2} p^2 - \frac{\alpha}{r}, \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3). \tag{2.8.2}$$

Отсюда следуют уравнения движения

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \ddot{\mathbf{q}} = -(\alpha/r^3)\mathbf{q}. \tag{2.8.3}$$

Гамильтониан (2.8.2) инвариантен относительно группы SO(3) – группы вращений трехмерного пространства. Отсюда следует, что компоненты вектора момента количества движения

$$\mathbf{l} = [\mathbf{q}, \mathbf{p}], \tag{2.8.4}$$

являющегося векторным произведением векторов $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$, являются сохраняющимися величинами.

Заметим, что, как уже отмечалось в разделе 2.6, все финитные траектории, которые при $\alpha > 0$ существуют и отвечают энергии $E < 0$, являются замкнутыми. Это указывает на существование скрытой симметрии и соответственно существование дополнительных интегралов движения, причем полное число функционально независимых интегралов движения равно пяти.

Действительно, как нетрудно проверить, компоненты вектора

$$\mathbf{A} = [\mathbf{l}, \mathbf{p}] + (\alpha/r)\mathbf{q}, \tag{2.8.5}$$

где $\mathbf{l}$ дается формулой (2.8.4), являются интегралами движения.

Этот результат был впервые получен Лапласом в 1799 г. [53], развившим общий метод нахождения интегралов движения. Идея этого метода сводится к следующему.

Пусть $I(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ – интеграл движения. Тогда

$$\frac{dI}{dt} = \{H, I\} = \sum_j \left(\frac{\partial I}{\partial q_j} p_j - \frac{\alpha}{r^3} \frac{\partial I}{\partial p_j} q_j \right). \tag{2.8.6}$$

Разложим $I(p, q)$ по однородным полиномам степени k относительно p:

$$I(p, q) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k(p, q). \tag{2.8.7}$$

Из (2.8.6) получаем систему уравнений

$$\sum_j \frac{\partial I_1}{\partial p_j} q_j = 0, \quad \sum \frac{\partial I_n}{\partial q_j} p_j = \frac{\alpha}{r^3} \sum_j \frac{\partial I_{n+2}}{\partial p_j} q_j. \tag{2.8.8}$$

Если предположить, что $I(p, q)$ является полиномом по p_j степени k, то цепочка уравнений (2.8.8) обрывается. Лаплас ограничился рассмотрением случаев $k = 1,2$ и нашел, что при $k = 1$ единственным интегралом движения является вектор $\mathbf{l} = [\mathbf{q}, \mathbf{p}]$, а при $k = 2$ имеются интегралы $H = \frac{p^2}{2} - \frac{\alpha}{r}$ и вектор $\mathbf{A}$ (2.8.5). Использование вектора $\mathbf{A}$ облегчает исследование кеплеровского движения. Отметим следующее.

1. Из (2.8.5) получаем

$$(\mathbf{l} \cdot \mathbf{A}) = 0, \tag{2.8.9}$$

т.е. вектор $\mathbf{A}$ лежит в плоскости орбиты.

2. Умножая **A** скалярно на **q** и вводя угол θ между **A** и **q**, находим уравнение орбиты

$$r = \frac{l^2/\alpha}{1-\epsilon\cos\theta}, \quad \epsilon = |\mathbf{A}|/\alpha. \tag{2.8.10}$$

Следовательно, вектор **A** направлен по большой оси эллипса, а его модуль пропорционален эксцентриситету.

3. Средний дипольный момент частицы

$$\mathbf{d} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{q}(t)dt \tag{2.8.11}$$

равен

$$|\mathbf{d}| = \frac{3}{2}\epsilon a, \tag{2.8.12}$$

где $a = \alpha/2|E|$ – большая полуось эллипса, и направлен так же, как и **A**. Отсюда

$$\mathbf{A} = \frac{4}{3}|E|\mathbf{d}. \tag{2.8.13}$$

При возмущении потенциала

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \beta U_1(r), \quad \beta \ll \alpha, \tag{2.8.14}$$

кеплеровская орбита медленно прецессирует, а вектор **A** поворачивается вместе с орбитой и сохраняет значение приближенного интеграла движения.

4. Возводя (2.8.5) в квадрат, получаем

$$\mathbf{A}^2 = 2E\mathbf{l}^2 + \alpha^2, \quad E = \frac{p^2}{2} - \frac{\alpha}{r}. \tag{2.8.15}$$

Введем вектор

$$\mathbf{m} = (-2E)^{-1/2}\mathbf{A}. \tag{2.8.16}$$

Тогда энергия равняется

$$E = -\frac{\alpha^2}{2(\mathbf{l}^2 + \mathbf{m}^2)}. \tag{2.8.17}$$

5. Интегралы движения **l** и **A** можно выразить через адиабатические инварианты I_r и I_θ [23]:

$$l = I_\theta = \int p_\theta d\theta, \quad A = \alpha\sqrt{1 - \left(\frac{I_\theta}{I_r + I_\theta}\right)^2}, \quad m = \sqrt{I_r(I_r + 2I_\theta)}. \tag{2.8.18}$$

Отсюда следует, что при медленном изменении α величины l и m остаются неизменными, а A меняется пропорционально α.

6. Вычислим, наконец, скобки Пуассона для интегралов движения $\mathbf{l}$ и $\mathbf{A}$:

$$\{l_i, l_j\} = \epsilon_{ijk} l_k, \quad \{l_i, A_j\} = \epsilon_{ijk} A_k, \quad \{A_i, A_j\} = -2E\epsilon_{ijk} l_k, \tag{2.8.19}$$

где ϵ_{ijk} – полностью кососимметричный тензор, $\epsilon_{123} = 1$. Из (2.8.19) видно, что при фиксированном значении E алгебра интегралов движения относительно скобок Пуассона замыкается.

Переходя к вектору $\mathbf{m}$, при $E < 0$ получаем

$$\{l_i, l_j\} = \epsilon_{ijk} l_k, \quad \{l_i, m_j\} = \epsilon_{ijk} m_k, \quad \{m_i, m_j\} = \epsilon_{ijk} l_k. \tag{2.8.20}$$

Видно, что эта алгебра есть алгебра Ли группы SO(4). Поскольку $(\mathbf{l}, \mathbf{m}) = 0$, среди l_i, m_j имеется пять независимых интегралов движения, как это и должно быть для системы с тремя степенями свободы.

7. Отметим еще, что классическая задача Кеплера при $\alpha > 0$ обладает специфической особенностью: некоторые решения уравнений движения (2.8.3) обладают сингулярностью, соответствующей попаданию частицы в центр силового поля.

Однако после подходящей регуляризации эта сингулярность может быть устранена. В двумерном случае способ устранения сингулярности был указан в работе Леви-Чивиты в 1906 г. [237].

Именно, если ввести вместо времени t новую переменную

$$s = \int \frac{dt}{r(t)} \tag{2.8.21}$$

и преобразовать независимую переменную с помощью формул

$$q_1 + iq_2 = \frac{1}{2} z^2, \quad p_1 + ip_2 = w/\bar{z}, \tag{2.8.22}$$

то для полученного дифференциального уравнения точка $z = 0$ станет регулярной. После этого поверхность постоянной энергии становится многообразием без границы, топологически эквивалентным вещественному проективному пространству $\mathbb{R}P^3$, т.е. расслоению единичных касательных векторов к двумерной сфере S^2.

Регуляризация уравнений движения для трехмерного случая была найдена в работе [228]. Оба эти способа, однако, не годятся в n-мерном случае и, кроме того, их связь со скрытой симметрией системы не вполне ясна.

8. Мы показали, что задача Кеплера инвариантна относительно алгебры SO(4). Более сложно увидеть инвариантность этой задачи относительно соответствующих глобальных преобразований – преобразований группы SO(4).

Впервые это было сделано в 1935 г. В. Фоком [172] для квантового случая. Для классического случая глобальная инвариантность задачи Кеплера относительно группы SO(4) для трехмерного случая, а также группы SO(n + 1) для n-мерного случая была явно продемонстрирована лишь в 1970 г. в работе Мозера [250]. В этой же работе была описана естественная регуляризация уравнений движения. Именно, Мозером было показано, что после подходящей компактификации поверхность постоянной энергии ($E < 0$) топологически эквивалентна касательному расслоению единичных векторов к n-мерной сфере S^n. Им была доказана

Теорема 2.8.1. При $E < 0$ поверхность энергии $H = E$ можно отобразить топологически и взаимно однозначно на касательное расслоение единичных векторов к S^n при условии, что одна точка сферы (северный полюс, соответствующий центру сил) выколота.

Кроме того, фазовый поток задачи Кеплера переходит, после замены времени новой переменной, в геодезический поток на S^n без выколотой точки. Сингулярные орбиты соответствуют при этом окружностям, проходящим через северный полюс сферы.

Ниже излагается решение проблемы, следуя оригинальной работе [250].

А. Геодезический поток на сфере и задача Кеплера.

а) Начнем с описания геодезического потока на сфере S^n, которую мы рассматриваем как вложенную в $(n+1)$-мерное пространство:

$$S^n = \{\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \colon |\xi|^2 = \sum_0^n \xi_j^2 = 1\}. \tag{2.8.23}$$

Рассмотрим в $(n+1)$-мерном пространстве динамическую систему с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} |\eta|^2 |\xi|^2, \tag{2.8.24}$$

где $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ и $\eta = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n)$ – это $(n+1)$-мерные векторы координаты и импульса соответственно. Уравнения движения такой системы имеют вид

$$\xi' = |\xi|^2 \eta, \quad \eta' = -|\eta|^2 \xi. \tag{2.8.25}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по величине s, играющей роль времени.

Из (2.8.25) следует, что если в начальный момент времени выполнялись условия

$$|\xi|^2 = 1, \quad (\xi, \eta) = \sum_{j=0}^n \xi_j \eta_j = 0, \tag{2.8.26}$$

то они будут выполняться и во все последующие моменты времени. Но, как нетрудно видеть, многообразие, определяемое условиями (2.8.26), представляет касательное расслоение TS^n к сфере S^n, а уравнение (2.8.25), или же

$$\xi'' + |\eta|^2 \xi = 0, \tag{2.8.27}$$

описывает геодезический поток на сфере $S^n = \{\xi \colon |\xi|^2 = 1\}$ с энергией $H = \frac{1}{2} |\eta|^2$. Единичные касательные векторы $\{\eta \colon (\eta, \xi) = 0, \ |\eta|^2 = 1\}$, образуют поверхность постоянной энергии $H = E = \frac{1}{2}$. Для того чтобы описать этот поток в евклидовом пространстве, используем стереографическую проекцию

$$x_k = \frac{\xi_k}{1-\xi_0}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2.8.28}$$

которая отображает сферу S^n с выколотой точкой $(1, 0, \ldots, 0)$ на n-мерное евклидово пространство.

Распространим это отображение до отображения касательного расслоения в пространство $\mathbb{R}^{2n} = \{(x, y)\colon\ x, y \in \mathbb{R}^n\}$ так, чтобы при этом выполнялось условие

$$\sum_{\mu=0}^{n} \eta_\mu d\xi_\mu = \sum_{k=1}^{n} y_k dx_k. \tag{2.8.29}$$

Величины y_k будем искать в виде

$$y_k = a(\xi, \eta)\eta_k + b(\xi, \eta)\xi_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.8.30}$$

С помощью соотношений (2.8.26), а также равенств

$$\begin{gathered} \sum_0^n \eta_\mu d\xi_\mu = \sum_1^n \left(\eta_k - \frac{\eta_0}{\xi_0}\xi_k\right) d\xi_k, \\ dx_k = \frac{d\xi_k}{1-\xi_0} - \frac{\xi_k(\xi_l d\xi_l)}{\xi_0(1-\xi_0)^2} \end{gathered} \tag{2.8.31}$$

получаем простой ответ *)

$$y_k = (1-\xi_0)\eta_k + \eta_0\xi_k. \tag{2.8.31'}$$

Приведем еще формулы для обратного отображения из пространства $\mathbb{R}^n$ на сферу S^n:

$$\xi_k = \frac{2x_k}{|x|^2+1}, \quad \xi_0 = \frac{|x|^2-1}{|x|^2+1}, \tag{2.8.32}$$

$$\eta_k = \frac{|x|^2+1}{2} y_k - (x, y)x_k, \quad \eta_0 = (x, y). \tag{2.8.33}$$

Гамильтониан же после перехода в пространство (x, y) принимает вид

$$F = \frac{(|x|^2+1)^2}{8}|y|^2 = \frac{1}{2}|\xi|^2|\eta|^2. \tag{2.8.34}$$

Поскольку уравнения Гамильтона

$$x' = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad y' = -\frac{\partial F}{\partial x} \tag{2.8.35}$$

содержат лишь производные от функции F, то мы можем заменить функцию F любой функцией $G(F)$ при условии, что $G'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Сделаем такую

---

*) Можно показать [250], что это единственная возможная форма y_k.

замену:

$$G = \sqrt{2F} - 1 = \frac{(|x|^2 + 1)|y|}{2} - 1. \tag{2.8.36}$$

Тогда уравнения движения (2.8.35) переходят в уравнения

$$x' = \frac{\partial G}{\partial y}, \quad y' = -\frac{\partial G}{\partial x}, \tag{2.8.35$'$}$$

причем условие $F = 1/2$ переходит в условие $G = 0$.

Переходя от переменной s к новой переменной t согласно формуле

$$t = \int |y| ds, \tag{2.8.37}$$

получаем вместо (2.8.35′)

$$\dot{x} = |y|^{-1} \frac{\partial G}{\partial y}, \quad \dot{y} = -|y|^{-1} \frac{\partial G}{\partial x}, \tag{2.8.38}$$

где точка означает дифференцирование по t.

Заметим, наконец, что при $G = 0$

$$|y|^{-1} \partial G/\partial y = \partial H/\partial y, \quad |y|^{-1} \partial G/\partial x = +\partial H/\partial x;$$

где

$$H = |y|^{-1} G - \frac{1}{2} = \frac{1}{|y|} (\sqrt{2F} - 1) = \frac{1}{2} |x|^2 - |y|^{-1}, \tag{2.8.39}$$

так что окончательно мы получаем систему с гамильтонианом (2.8.39), полагая в котором $p = -x$, $q = y$, приходим к гамильтониану задачи Кеплера

$$H = \frac{1}{2} |p|^2 - \frac{1}{|q|} = -\frac{1}{2}. \tag{2.8.40}$$

В результате мы показали, что преобразования (2.8.28), (2.8.31) и (2.8.37) отображают расслоение единичных касательных векторов к сфере в $2n$-мерное фазовое пространство, а большие окружности сферы S^n – в кеплеровские эллипсы на поверхности энергии $H = E = -1/2$.

До сих пор мы исключали из рассмотрения северный полюс сферы $\xi = (1, 0, \ldots, 0)$. Теперь мы можем рассмотреть и его. При этом геодезические, проходящие через северный полюс сферы, преобразуются в вырожденные орбиты, отвечающие попаданию частицы в начало координат.

Если мы хотим описать фазовый поток вблизи сингулярной точки $q = 0$, соответствующей северному полюсу сферы, то нам следует использовать преобразование

$$\xi_0 \to -\xi_0, \quad \eta_0 \to -\eta_0, \quad \xi_k \to \xi_k, \quad \eta_k \to \eta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.8.41}$$

переводящее северный полюс в южный. Этому преобразованию соответствует следующее преобразование в пространстве (p, q):

$$q \to |p|^2 q - 2(pq)p, \quad p \to \frac{p}{|p|^2}, \tag{2.8.42}$$

которое, как отмечается в [250], уже использовалось в теории Зундмана. Заметим, что при этом преобразовании кеплеровские орбиты переходят в кеплеровские орбиты. Кроме того, сингулярные состояния системы ($|p| = \infty$, $q = 0$) преобразуются в состояния $p = 0$, $|q| = 2$.

Отметим также, что общий случай произвольной отрицательной энергии $E = -1/2\rho^2$ легко сводится к рассмотренному случаю $E = -1/2$ заменой переменных $q \to \rho^2 q$, $p \to \rho^{-1} p$, $t \to \rho^3 t$.

Из найденной геометрической картины сразу получается и зависимость координат и импульсов от времени. В силу инвариантности относительно вращений вокруг оси ξ_0 мы можем считать, что движение происходит в трехмерном пространстве (ξ_0, ξ_1, ξ_2): $\xi_3 = \xi_4 = \ldots = \xi_n = 0$. Движение совершается по большой окружности, угол между плоскостью которой и плоскостью экватора $\xi_0 = 0$ обозначим через α. Тогда при соответствующем выборе начала отсчета величины s мы получаем

$$\xi_0 = \sin\alpha\cos s,\quad \xi_1 = \sin s,\quad \xi_2 = -\cos\alpha\cos s,\quad \eta_\mu = \xi'_\mu = d\xi_\mu/ds. \tag{2.8.43}$$

После стереографической проекции и замены $x_j = -p_j$, $y_j = q_j$ мы получаем

$$p_1 = -\frac{\sin s}{1 - \sin\alpha\cos s},\quad p_2 = \frac{\cos\alpha\cos s}{1 - \sin\alpha\sin s}, \tag{2.8.44}$$
$$q_1 = \cos s - \sin\alpha,\quad q_2 = \cos\alpha\sin s.$$

Таким образом, вектор $p = (p_1, p_2)$ описывает окружность, а вектор $q = (q_1, q_2)$ описывает эллипс с эксцентриситетом

$$\epsilon = \sin\alpha, \tag{2.8.45}$$

параметризованные эксцентрической аномалией s (см. [250]). Для получения соотношения между t и s заметим, что

$$|y| = |q| = 1 - \sin\alpha\cos s = 1 - \epsilon\cos s \tag{2.8.46}$$

и, следовательно,

$$t = \int^{s} |y|\, ds = s - \epsilon\sin s. \tag{2.8.47}$$

Таким образом, данная регуляризационная процедура автоматически приводит к уравнению Кеплера.

Заметим, наконец, что при $\epsilon = 1$ уравнение Кеплера принимает вид

$$t = s - \sin s \approx \frac{1}{6}s^3 - \ldots, \tag{2.8.48}$$

откуда видно, что координаты орбиты вблизи сингулярности являются аналитическими функциями величины $t^{1/3}$.

Отметим две работы, имеющие отношение к рассматриваемому вопросу. В работе [124] методом Мозера были изучены также случаи $E > 0$ и $E = 0$, которые сводятся к исследованию геодезических потоков на гиперболоиде и в евклидовом пространстве. В работе [227] рассмотрено соотношение между методами регуляризации работ [228] и [250] для трехмерной задачи Кеплера.

Отметим еще, что если взять все состояния задачи Кеплера (для простоты при $n = 3$), то это пространство естественно изоморфно пространству $T_0^*S^3$, т.е. подпространству в T^*S^3, состоящему из ненулевых касательных векторов к сфере S^3. Оказывается, что это пространство является однородным: на нем транзитивно действует группа $SO(4,2)$, причем как группа симплектических диффеоморфизмов на $T_0^*S^3$ (т.е. эти преобразования сохраняют стандартную симплектическую структуру этого пространства). При этом T^*S^3 изоморфно орбите наименьшей размерности — шестимерной орбите коприсоединенного представления группы $SO(4,2)$. Этот изоморфизм используется при так называемом геометрическом квантовании задачи Кеплера (детали см. в [258]; описание действия группы $SO(4,2)$ в фазовом пространстве дано в [124]).

Замечание (А.Б. Гивенталь, см. [2]).

Пусть плоскость (x, y) — конфигурационная плоскость задачи Кеплера с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{1}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Рассмотрим в пространстве (x, y, z) прямой круговой конус $z^2 = (x^2 + y^2)$ и семейство вписанных в него параболоидов вращения $z = ((x^2 + y^2)/4\alpha) + \alpha$ (α — параметр). Спроектируем пространство (x, y, z) на плоскость (x, y) вдоль оси z. Тогда можно показать, что:

(а) траектории задачи Кеплера — это проекции плоских сечений конуса (в частности, вершина конуса — фокус проекций его плоских сечений);

(б) траектории с одинаковым значением полной энергии — проекции сечений конуса плоскостями, касающимися одного и того же параболоида;

(в) траектории с одинаковым значением момента импульса — проекции сечений конуса плоскостями, проходящими через одну и ту же точку оси z.

2.9. Движение в ньютоновском и однородном поле

Рассмотрим простейший случай плоского движения, описываемого гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(\mathrm{p}_1^2 + \mathrm{p}_2^2) + U(\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2), \quad U(\mathrm{q}) = -\frac{\alpha}{r} + \beta q_1. \tag{2.9.1}$$

Отметим, прежде всего, что при $\beta \to 0$ нашу задачу можно рассматривать как возмущение задачи Кеплера, причем возмущение инвариантно при замене $q_2 \to -q_2$. Поэтому если задача допускает дополнительный интеграл движения, то он при этом должен переходить в компоненту $A_1 = [\mathrm{l}, \mathrm{p}]_1 + \alpha q_1/r$ — вектора Лапласа. И действительно, наша задача допускает квадратичный интеграл движения, имеющий вид

$$I = A_1 + \frac{1}{2}\beta q_2^2, \quad I = -lp_2 + \frac{\alpha q_1}{r} + \frac{\beta}{2} q_2^2. \tag{2.9.2}$$

Отсюда следует, что уравнения движения интегрируются методом разделения переменных с одной из четырех систем координат, рассмотренных в разделе 2.3. Нетрудно видеть, что в данном случае для этого нужно перейти к параболическим координатам

$$\xi = \frac{1}{2}(r + q_1), \quad \eta = \frac{1}{2}(r - q_1), \tag{2.9.3}$$

откуда

$$r = \xi + \eta, \quad q_1 = \xi - \eta, \quad q_2 = 2\sqrt{\xi\eta}. \tag{2.9.4}$$

Гамильтониан H в новых переменных принимает вид

$$H = \frac{1}{2(\xi + \eta)}(\xi p_\xi^2 + \eta p_\eta^2) + \frac{1}{\xi + \eta}\{\beta(\xi^2 - \eta^2) - \alpha\}. \tag{2.9.5}$$

Таким образом, система имеет вид Лиувилля и ее интегрирование производится стандартно, в результате чего получаем уравнения

$$\frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}} = \frac{d\eta}{\sqrt{S(\eta)}} = ds, \quad dt = (\xi + \eta)ds, \tag{2.9.6}$$

где

$$R = 2\xi\left(\gamma + E\xi + \frac{\alpha}{2} - \beta\xi^2\right), \quad S = 2\eta\left(-\gamma + E\eta + \frac{\alpha}{2} + \beta\eta^2\right). \tag{2.9.7}$$

Интегрируя уравнения (2.9.6), получаем выражения для $\xi(s)$ и $\eta(s)$ через функцию Вейерштрасса $\wp(x)$. Заметим, что при $\beta = 0$ мы возвращаемся к задаче Кеплера, которая может быть решена методом разделения переменных как в полярных, так и в параболических, а также в эллиптических координатах.

2.10. Движение в поле двух ньютоновских центров

Мы ограничимся рассмотрением простейшего случая плоского движения (Эйлер, 1760 [164], Лагранж [229]). Гамильтониан в этом случае имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + U(q_1, q_2), \quad U(q_1, q_2) = -\left(\frac{\alpha_1}{r_1} + \frac{\alpha_2}{r_2}\right), \tag{2.10.1}$$

где

$$r_1 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \tag{2.10.2}$$

— расстояния до притягивающих центров.

В этом случае также имеется дополнительный, квадратичный по импульсам интеграл движения, обобщающий компоненту вектора Лапласа A_1 для одного центра, а именно

$$I = \frac{1}{2}(l^2 - c^2 p_2^2) + cq_1\left(\frac{\alpha_1}{r_1} - \frac{\alpha_2}{r_2}\right). \tag{2.10.3}$$

Для интегрирования уравнений движения перейдем к эллиптическим координатам

$$\xi = \frac{1}{2}(r_1 + r_2), \quad \eta = \frac{1}{2}(r_2 - r_1), \tag{2.10.4}$$

откуда

$$cx = \xi\eta, \quad cy = \sqrt{(\xi^2 - c^2)(c^2 - \eta^2)}, \quad r^2 = \xi^2 + \eta^2 - c^2. \tag{2.10.5}$$

Гамильтониан (2.10.1) теперь принимает вид

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\xi^2 - \eta^2}\,\{(\xi^2 - c^2)p_\xi^2 + (c^2 - \eta^2)p_\eta^2\} - \frac{k\xi + k'\eta}{\xi^2 - \eta^2}, \tag{2.10.6}$$

где

$$k = \alpha_1 + \alpha_2, \quad k' = \alpha_1 - \alpha_2. \tag{2.10.7}$$

Интегрируя уравнения движения методом разделения переменных, получаем

$$\frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}} = \frac{d\eta}{\sqrt{S(\eta)}} = ds, \quad dt = (\xi^2 - \eta^2)\,ds, \tag{2.10.8}$$

где

$$\begin{aligned} R &= 2(\xi^2 - c^2)(E\xi^2 + k\xi + \gamma), \\ S &= -2(c^2 - \eta^2)(E\eta^2 - k'\eta + \gamma). \end{aligned} \tag{2.10.9}$$

Интегрируя уравнения (2.10.8), получаем выражения для $\xi(s)$ и $\eta(s)$ через эллиптические функции.

Подробное качественное исследование этого движения можно найти в книге [38].

Глава 3

МНОГОЧАСТИЧНЫЕ СИСТЕМЫ

В этой части работы будут рассмотрены вполне интегрируемые системы n взаимодействующих частиц в стандартном конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^d$.

Такие системы описываются гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + g^2 \sum_{j<k} v(q_j - q_k), \quad p_j, q_k \in \mathbb{R}^d.$$

В пространстве двух и бо́льшего числа измерений известна лишь одна вполне интегрируемая система такого типа — система n взаимодействующих осцилляторов:

$$v(q) = \frac{1}{2}\omega^2 q^2.$$

Эта система, однако, после введения координат Якоби сводится к системе $(n-1)$ частицы, движущейся независимо в общем осцилляторном потенциале.

Для одномерного случая, т.е. для случая n попарно взаимодействующих частиц на прямой, в последние годы обнаружен ряд вполне интегрируемых систем, которые и будут детально рассмотрены в настояшем разделе. Все эти системы связаны с алгебрами Ли и обладают высокой скрытой симметрией. Эта симметрия и является причиной их интегрируемости. В изложении материала мы следуем работам [28, 42, 43, 60].

3.1. Представление Лакса для многочастичных систем

Рассмотрим систему n частиц единичной массы, находящихся на прямой и взаимодействующих попарно друг с другом. Такая система описывается гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + g^2 \sum_{j<k} v(q_j - q_k). \tag{3.1.1}$$

Попробуем подобрать потенциал $v(q)$ так, чтобы рассматриваемая система обладала дополнительными интегралами движения. Воспользуемся для этого, следуя работам [252, 133], приемом Лакса [233], часто называемым также методом изоспектральной деформации.

Именно, предположим, что нам удалось найти пару матриц L и M, зависящих от динамических переменных p и q (так называемую пару Лакса), так что уравнения Гамильтона

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}; \quad \dot{q}_j = p_j \tag{3.1.2}$$

эквивалентны матричному уравнению

$$i\dot{L} = [M, L]. \tag{3.1.3}$$

Такую форму записи уравнений движения мы будем называть представлением Лакса (см. раздел 1.10).

Из (3.1.3) следует, что матрица $L(t)$ подвергается преобразованию подобия

$$L(t) = u(t)L(0)u^{-1}(t), \quad M = i\dot{u}u^{-1}. \tag{3.1.4}$$

Если при этом M эрмитова, то матрица u унитарна: $u^{-1} = u^{+}$. Следовательно, собственные значения матрицы $L(t)$ от времени не зависят, т.е. являются интегралами движения; или, иными словами, матрица $L(t)$ с течением времени испытывает изоспектральную деформацию. При этом в качестве интегралов движения часто бывает удобно использовать не собственные значения матрицы $L(t)$, а симметрические функции от них, например величины

$$I_k = k^{-1}\operatorname{tr}(L^k). \tag{3.1.5}$$

Если с помощью такого приема удается найти n функционально независимых интегралов движения и показать, что все они находятся в инволюции, то рассматриваемая система является вполне интегрируемой.

Следуя [133], для матриц L и M используем следующий анзац:

$$L_{jk} = p_j\delta_{jk} + ig(1-\delta_{jk})x(q_j - q_k), \tag{3.1.6}$$

$$M_{jk} = g[\delta_{jk}(\sum_{l \neq j} z(q_j - q_l)) - (1-\delta_{jk})y(q_j - q_k)], \tag{3.1.7}$$

где $x(q), y(q), z(q)$ – три пока неизвестные функции.

Подставляя L и M в уравнение Лакса (3.1.3) и требуя, чтобы это уравнение было эквивалентно уравнениям Гамильтона, получим явное выражение функции $y(q)$

$$y(q) = -x'(q) \tag{3.1.8}$$

и функциональное уравнение для функций $x(\xi)$ и $z(\xi)$

$$x(\xi)x'(\eta) - x(\eta)x'(\xi) = x(\xi+\eta)[z(\xi) - z(\eta)]. \tag{3.1.9}$$

При этом потенциальная энергия $v(\xi)$ дается формулой

$$v(\xi) = -x(\xi)x(-\xi) + \text{const}. \tag{3.1.10}$$

Функциональное уравнение (3.1.9) было решено в ряде работ [101, 255, 134], см. Приложение Б.

Оказывается, что

$$z(\xi) = \frac{x''(\xi)}{2x(\xi)}. \tag{3.1.11}$$

При дополнительном предположении $x(-\xi) = -x(\xi)$ мы получаем следующие решения:

$$x(\xi) = \begin{cases} \xi^{-1} & \text{I}, \\ a\,\mathrm{cth}(a\xi),\ a[\mathrm{sh}(a\xi)]^{-1} & \text{II}, \\ a\,\mathrm{ctg}(a\xi),\ a[\sin(a\xi)]^{-1} & \text{III}, \\ a\dfrac{\mathrm{cn}(a\xi)}{\mathrm{sn}(a\xi)},\ a\dfrac{\mathrm{dn}(a\xi)}{\mathrm{sn}(a\xi)},\ \dfrac{a}{\mathrm{sn}(a\xi)} & \text{IV}. \end{cases} \tag{3.1.12}$$

Здесь sn, cn и dn – эллиптические функции Якоби [4].

Если не накладывать условие $x(-\xi) = -x(\xi)$, то можно получить более общее решение [85]

$$x(\xi, \alpha) = \frac{\sigma(\xi - \alpha)}{\sigma(\alpha)\sigma(\xi)} \exp(\zeta(\alpha)\xi) \tag{3.1.13}$$

(σ и ζ – сигма- и дзета-функции Вейерштрасса), зависящее от дополнительного параметра, но приводящее к той же самой потенциальной энергии $v(\xi)$.

Из (3.1.12) получаем выражение для потенциальной энергии $v(\xi)$:

$$v(\xi) = \begin{cases} \xi^{-2} & \text{I}, \\ a^2\,\mathrm{sh}^{-2}(a\xi), & \text{II}, \\ a^2 \sin^{-2}(a\xi), & \text{III}, \\ a^2\wp(a\xi) & \text{IV}. \end{cases} \tag{3.1.14}$$

Здесь $\wp(\xi) = \wp(\xi, \omega_1, \omega_2)$ – функция Вейерштрасса – двоякопериодическая функция комплексной переменной ξ с периодами $2\omega_1$ и $2\omega_2$, обладающая полюсом второго порядка в точках $2(m\omega_1 + n\omega_2)$ [4].

Отметим, что если устремить один из периодов к бесконечности, то мы получим из потенциала типа IV потенциалы типа II и III. Потенциал типа I получается при стремлении обоих периодов к бесконечности. Таким образом, система типа IV является системой наиболее общего вида. Однако системы типа I, II и III обладают рядом специфических особенностей, и их разумно рассматривать отдельно.

Отметим также, что если заменить a на ia в потенциале типа III, то мы получим потенциал типа II, а если положить $a = 0$, то мы приходим к системе типа I. Отметим еще, что для систем типа I и II мы имеем дело с инфинитным движением, а для систем типа III и IV движение финитно.

Из выражения (3.1.14) для потенциала $v(\xi)$ видно, что потенциалы типа I–IV сингулярны при $q_k = q_j$. Поэтому порядок частиц в процессе движения измениться не может и мы можем считать, что $q_k < q_j$ при $j < k$. Таким образом, в случаях I и II конфигурационное пространство является конусом Λ, задаваемым неравенствами

$$q_j - q_{j+1} > 0, \quad j = 1, \ldots, n-1, \tag{3.1.15}$$

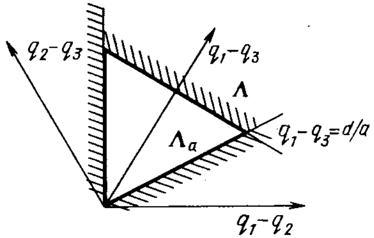
и равенством $\Sigma q_j = 0$.

Для систем типа III и IV конфигурационное пространство представляет выпуклый многогранник Λ_a (симплекс), определяемый условиями

$$q_j - q_{j+1} > 0, \quad j = 1, \ldots, n-1, \quad q_1 - q_n < \frac{d}{a}, \quad \sum_j q_j = 0, \tag{3.1.16}$$

где d – вещественный период функции $v(\xi)$.

Конфигурационное пространства Λ и Λ_a для $n = 3$ представляют внутренность угла $\pi/3$ и правильный треугольник соответственно:



Отметим еще, что ввиду периодичности потенциала $v(\xi)$ в случаях III и IV мы имеем дело с системой n частиц на окружности.

Итак, для систем типа I–IV (см. (3.1.14)) функции $x(q)$, $y(q)$ и $z(q)$ известны. Следовательно, матрицы L и M также известны, и по формуле (3.1.15) мы можем получить n интегралов движения $I_1, \ldots; I_n$. Нетрудно видеть, что все они являются функционально независимыми.

Небольшая модификация метода [262] позволяет рассмотреть также систему с потенциалом

$$v(\xi) = \xi^{-2} + \omega^2 \xi^2, \tag{3.1.17}$$

который мы будем называть потенциалом типа V. Такая система обладает финитным движением, а конфигурационное пространство для нее то же, что и для систем типа I и II (см. (3.1.15)).

Как показано в работе [262], уравнения движения гамильтоновой системы (3.1.1) с таким потенциалом эквивалентны матричным уравнениям

$$i\dot{L}^{\pm} = [M, L^{\pm}] \pm \omega L^{\pm}, \tag{3.1.18}$$

где матрицы $L^{\pm}$ имеют вид

$$L^{\pm} = L \pm i\omega Q, \tag{3.1.19}$$

а

$$Q = \mathrm{diag}(q_1, \ldots, q_n). \tag{3.1.20}$$

Матрицы L и M даются формулами (3.1.6) и (3.1.7) соответственно с $x(q) = q^{-1}$. Доказательство использует соотношение

$$[Q, M] = X, \quad X_{jk} = g(1 - \delta_{jk})x(q_j - q_k). \tag{3.1.21}$$

Из (3.1.18) следует, что величины

$$B_k^{\pm} = \frac{1}{k}\,\mathrm{tr}(L^{\pm})^k \tag{3.1.22}$$

не являются больше интегралами движения, однако они очень просто зависят от времени:

$$B_k^{\pm}(t) = B_k^{\pm}(0)\, e^{\mp ik\omega t}. \qquad (3.1.23)$$

Заметим, что при $\omega \neq 0$ они полностью определяют эволюцию системы. Действительно, эти величины являются симметрическими рациональными функциями от p_j и q_k; выражая p_j и q_k через B_k^+ и B_l^- и используя соотношение (3.1.23), получаем явные выражения для $p_j(t)$ и $q_l(t)$.

Из (3.1.18) нетрудно найти также и интегралы движения. Например, матрицы

$$L_1 = L^+L^-, \quad L_2 = L^-L^+ \qquad (3.1.24)$$

удовлетворяют обычному уравнению Лакса

$$i\dot{L}_j = [M, L_j], \quad j = 1, 2. \qquad (3.1.25)$$

Следовательно, собственные значения матрицы L_j, или, что более удобно, величины $\operatorname{tr}(L_j^k)$, являются интегралами движения; можно показать также, что эти величины находятся в инволюции.

Заметим, что гамильтониан (3.1.1) с потенциальной энергией (3.1.17) в системе центра инерции ($\Sigma q_j = 0$) принимает вид

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \sum_{j<k} v(q_j - q_k) + \sum_{j=1}^{n} w(q_j), \qquad (3.1.26)$$

где $v(q) = q^{-2}$, $w(q) = (n-1)\,q^2$, и, следовательно, описывает систему n взаимодействующих частиц во внешнем поле.

Покажем, следуя [108, 204], что для ряда таких систем представление Лакса по-прежнему существует:

$$\dot{\tilde{L}} = [\tilde{L}, \tilde{M}], \qquad (3.1.27)$$

где матрицы $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$ имеют вид

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} L & Q \\ Q & -L \end{pmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} M & S \\ -S & M \end{pmatrix}, \qquad (3.1.28)$$

а L и M – матрицы вида (3.1.6) и (3.1.7), Q и S – диагональные матрицы порядка n:

$$Q_{jk} = Q(q_j)\,\delta_{jk}, \qquad S_{jk} = S(q_j)\,\delta_{jk}. \qquad (3.1.29)$$

Из (3.1.27) следует, что матрицы L и Q должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{L} &= [L, M] - \{S, Q\}, \\ \dot{Q} &= [Q, M] + \{S, L\}, \end{aligned} \qquad (3.1.30)$$

где $\{\,,\}$ означает антикоммутатор матриц.

Отсюда нетрудно получить, что

$$w'(\xi) = 2\,Q(\xi)\,S(\xi). \qquad (3.1.31)$$

Считая, что матрицы L и M по-прежнему имеют вид (3.1.6) и (3.1.7), из уравнений (3.1.30) получаем

$$[Q(\xi) - Q(\eta)]x'(\xi-\eta) + [S(\xi) + S(\eta)]x(\xi-\eta) = 0, \tag{3.1.32}$$

$$Q'(\xi) = 2S(\xi). \tag{3.1.33}$$

Подставляя (3.1.33) в (3.1.32), получаем функциональное уравнение для функций Q и x:

$$2[Q(\xi) - Q(\eta)]x'(\xi-\eta) + [Q'(\xi) + Q'(\eta)]x(\xi-\eta) = 0, \tag{3.1.34}$$

$$w(\xi) = \frac{1}{2}Q^2(\xi) + w_0. \tag{3.1.35}$$

При дополнительном предположении, что функция $x(\xi)$ – это функция вида I–IV (см. (3.1.12)), помимо старых решений получаем еще решения

$$x(\xi) = \frac{1}{\xi}, \quad Q(\xi) = \alpha\xi^2 + \beta; \tag{3.1.36}$$

$$x(\xi) = \frac{a}{\operatorname{sh}(a\xi)}, \quad Q(\xi) = \gamma\operatorname{ch}(2a\xi + \delta) + \beta, \tag{3.1.37}$$

где a, α, β, γ, δ – произвольные постоянные. Отсюда следует, что если функции v, w имеют вид

$$v(\xi) = g^2\xi^{-2}, \quad w(\xi) = \alpha\xi^2 + \beta\xi^4; \tag{3.1.38}$$

$$v(\xi) = g^2a^2\operatorname{sh}^{-2}(a\xi), \quad w(\xi) = \gamma\operatorname{ch}(4a\xi + \delta), \tag{3.1.39}$$

то системы с гамильтонианом вида (3.1.26) обладают представлением Лакса и имеют n функционально независимых интегралов движения

$$I_k = \frac{1}{2k}\operatorname{tr}(\tilde{L}^{2k}), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3.1.40}$$

Можно показать также [205], что если

$$w(\xi) = Q(\xi) \tag{3.1.41}$$

и уравнения (3.1.34) выполняются, то пара матриц порядка $n \times n$

$$\tilde{\tilde{L}} = \frac{L^2}{2} + Q, \quad \tilde{\tilde{M}} = M \tag{3.1.42}$$

удовлетворяет уравнению Лакса. Таким образом, система вида (3.1.26) при

$$v(\xi) = g^2a^2\operatorname{sh}^{-2}(a\xi), \quad w(\xi) = \gamma\operatorname{ch}(2a\xi + \delta) \tag{3.1.43}$$

также допускает представление Лакса и обладает n независимыми интегралами движения

$$I_k = \frac{1}{k}\operatorname{tr}(\tilde{\tilde{L}}^k), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3.1.44}$$

Отметим, что частным случаем этой системы при $\delta \to \infty$, $\gamma e^{\delta} \to \mathrm{const}$ является система Адлера [108]

$$v(\xi) = g^2a^2\operatorname{sh}^{-2}(a\xi), \quad w(\xi) = \gamma e^{2a\xi}, \tag{3.1.45}$$

для которой в работе [108] была доказана полная интегрируемость.

Дальнейшее обобщение этих результатов дано в работе [206], где показано, что системы вида (3.1.26) с гамильтонианом, определяемым парами функций

$$v(\xi)=g^2\xi^2, \quad w(\xi)=\alpha_1\xi+\alpha_2\xi^2+\alpha_3\xi^3+\alpha_4\xi^4 \tag{3.1.46}$$

и

$$v(\xi)=g^2a^2\operatorname{sh}^{-2}(a\xi), \quad w(\xi)=\beta_1\operatorname{ch}(2a\xi)+\beta_2\operatorname{ch}(4a\xi+\gamma), \tag{3.1.47}$$

допускают представление Лакса с матрицами $\tilde{\tilde{L}}$ и $\tilde{\tilde{M}}$ порядка $4n$ вида

$$\tilde{\tilde{L}}=\begin{pmatrix}\tilde{L} & \tilde{R}\\ \tilde{R} & -\tilde{L}\end{pmatrix}, \quad \tilde{\tilde{M}}=\begin{pmatrix}\tilde{M} & \tilde{T}\\ -\tilde{T} & \tilde{M}\end{pmatrix}, \tag{3.1.48}$$

где матрицы $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$ имеют вид (3.1.28), а $\tilde{R}$ и $\tilde{T}$ – диагональные матрицы порядка $2n\times 2n$:

$$\tilde{R}=\begin{pmatrix}R & 0\\ 0 & R\end{pmatrix}, \quad \tilde{T}=\begin{pmatrix}T & 0\\ 0 & -T\end{pmatrix}, \tag{3.1.49}$$

$$R_{jk}=R(x_j)\delta_{jk}, \quad T_{jk}=\frac{1}{2}R'(x_j)\delta_{jk}.$$

При этом Q и R удовлетворяют уравнению (3.1.34) и

$$w(\xi)=\frac{1}{2}(Q^2(\xi)+R^2(\xi))+\mathrm{const}. \tag{3.1.50}$$

Можно показать, что существуют решения соответствующих функциональных уравнений вида

$$x(\xi)=g\xi^{-1}, \quad Q(\xi)=\alpha_0+\alpha_1\xi+\alpha_2\xi^2, \quad R(\xi)=\beta_1\xi+\beta_2\xi^2; \tag{3.1.51}$$

$$x(\xi)=ga\operatorname{sh}^{-1}(a\xi), \quad Q(\xi)=\gamma_0+\gamma_1\operatorname{ch}(2a\xi), \quad R(\xi)=\gamma_2\operatorname{ch}(4a\xi+\delta), \tag{3.1.52}$$

что и дает потенциал вида (3.1.46), (3.1.47).

Отметим, что в работе [206] методом работы [263] (см. следующий раздел) была доказана инволютивность интегралов движения рассматриваемых систем и, следовательно, их полная интегрируемость. Другое доказательство инволютивности этих интегралов движения дано в работе [309].

3.2. Вполне интегрируемые многочастичные системы

Докажем, что системы, рассмотренные в предыдущем разделе, являются вполне интегрируемыми. Для этого, согласно теории Лиувилля (см., например, [1]), достаточно показать, что интегралы движения (3.1.5), где L дается формулой (3.1.6) или (3.1.24) при $k=2,\dots,n$, являются функционально независимыми и находятся в инволюции

$$\{I_k, I_l\}=0.$$

Заметим прежде всего, что интегралы I_k имеют вид

$$I_k=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n}p_j^k+\text{слагаемые меньшей степени по импульсам}. \tag{3.2.1}$$

Поэтому функциональная независимость величин I_k следует из функциональной независимости величин $S_k = \sum_{j=1}^{n} p_j^k$. (Доказательство этого свойства величин элементарно, и мы оставляем его читателю.)

Доказательство же инволютивности интегралов I_k является более сложной задачей. Для систем типа I такое доказательство было дано Мозером [25]. Приведем его. Нетрудно показать, что при $g^2 > 0$ и $t \to \pm\infty$ расстояние между двумя любыми частицами неограниченно возрастает: $|q_j(t) - q_k(t)| \to \to\infty$ для любых начальных условий*). При этом величины

$$I_k(t) \to k^{-1} \sum_j p_j^k(t),$$

так что при $t \to \infty$ величины $\{I_j(t), I_k(t)\} \to 0$. Однако мы знаем, что величины I_j, а следовательно, и $\{I_j, I_k\}$ являются интегралами движения. Поэтому скобки Пуассона $\{I_j(t), I_k(t)\} = \text{const} = 0$ в любой момент времени. Для систем типа II, как отмечено в работе [133], это доказательство остается справедливым.

Что касается систем типа III, то, как отмечено в работе [133], они получаются из систем типа II заменой $a \to ia$ и поэтому также вполне интегрируемы.

Для систем типа V нетрудно доказать [262], что в инволюции находятся величины $B_k(p, q) = k \operatorname{tr}(L^-)^k$ (или же $\bar{B}_k$), а этого достаточно для полной интегрируемости рассматриваемых систем. Однако доказательство инволютивности интегралов движения для систем типа IV является значительно более сложной задачей.

Два разных доказательства инволютивности даны в работах [263, 308]. Мы приведем здесь доказательство из работы [263]. Заметим, что оно справедливо также для некоторых систем с непарным взаимодействием, рассмотренных в работе [255].

Возьмем одну из приведенных выше систем с функцией $v(q)$ вида I–IV. Пусть эрмитова матрица $L = P + iX$ порядка n построена по (3.1.6), где функция $x(q)$ удовлетворяет функциональному уравнению (3.1.9). Пусть $\varphi' = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ и $\psi' = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ — собственные векторы матрицы L, отвечающие собственным значениям λ и μ соответственно (штрих означает транспонирование):

$$L\varphi = (P + iX)\varphi = \lambda\varphi, \qquad L\psi = (P + iX)\psi = \mu\psi. \tag{3.2.2}$$

Покажем, что если функция $x(\xi)$ удовлетворяет функциональному уравнению (3.1.9), то величины λ и μ находятся в инволюции, т.е.

$$\{\lambda, \mu\} = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{\partial\lambda}{\partial p_j}\frac{\partial\mu}{\partial q_j} - \frac{\partial\lambda}{\partial q_j}\frac{\partial\mu}{\partial p_j} \right\} = 0. \tag{3.2.3}$$

Основная идея метода аналогична идее работ [168, 88], в которых бы-

---

*) Это свойство оказывается справедливым для довольно широкого класса отталкивающих потенциалов [75]. Многочастичные системы с такими потенциалами взаимодействия также являются вполне интегрируемыми, хотя явный вид интегралов движения для таких систем в настоящее время неизвестен.

ла доказана инволютивность интегралов движения для цепочки Тоды. Заметим, прежде всего, что

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_k} = \left(\varphi, \frac{\partial L}{\partial p_k} \varphi \right) = \bar{\varphi}_k \varphi_k, \tag{3.2.4}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial q_k} = \left(\varphi, \frac{\partial L}{\partial q_k} \varphi \right) = ig \sum_l x'(q_k - q_l)(\bar{\varphi}_k \varphi_l - \bar{\varphi}_l \varphi_k). \tag{3.2.5}$$

С помощью этих соотношений выражение для скобки Пуассона можно привести к виду

$$\{\lambda, \mu\} = ig \sum_{k,l} (\bar{\varphi}_k \bar{\psi}_k R_{kl} - \varphi_k \psi_k \bar{R}_{kl}) x'(q_k - q_l), \tag{3.2.6}$$

где

$$R_{kl} = \varphi_k \psi_l - \psi_k \varphi_l, \qquad R_{kl} = -R_{lk}. \tag{3.2.7}$$

С другой стороны из уравнений (3.2.2) находим

$$\varphi_k \psi_k = ig(\lambda - \mu)^{-1} \sum_l x(q_k - q_l) R_{lk}. \tag{3.2.8}$$

Подставляя выражение для $\varphi_k \psi_k$ и $\bar{\varphi}_k \bar{\psi}_k$ в уравнение (3.2.6)

$$\{\lambda, \mu\} = g^2(\lambda - \mu)^{-1} \sum_k \sum_{l \neq j} \bar{R}_{lk} R_{kj} [x'(q_j - q_k) x(q_k - q_l) -$$

$$- x(q_j - q_k) x'(q_k - q_l)] \tag{3.2.9}$$

и используя функциональное уравнение (3.1.9), преобразуем это соотношение к виду

$$\{\lambda, \mu\} = g^2(\mu - \lambda)^{-1} \sum_{k, l \neq j} \bar{R}_{lk} R_{kj} [z(q_j - q_k) - z(q_k - q_l)] \, x(q_j - q_l). \tag{3.2.10}$$

Равенство (3.2.10) содержит две суммы. В первой из них выполним суммирование по l, а во второй по j. Воспользуемся теперь соотношением

$$g \sum_l x(q_j - q_l) R_{lk} = -i\lambda \psi_k \varphi_j + i\mu \varphi_k \psi_j + i p_j R_{jk} \tag{3.2.11}$$

и соотношением, комплексно сопряженным к нему. Принимая во внимание четность функции $z(q)$, получим

$$\{\lambda, \mu\} = ig(\mu - \lambda)^{-1} \lambda \sum_{j \neq k} (\bar{\psi}_k \bar{\varphi}_j R_{kj} + \psi_k \varphi_j \bar{R}_{jk}) z(q_j - q_k) -$$

$$- ig(\mu - \lambda)^{-1} \mu \sum_{j \neq k} (\bar{\varphi}_k \bar{\psi}_j R_{kj} + \varphi_k \psi_j \bar{R}_{jk}) z(q_j - q_k). \tag{3.2.12}$$

Нетрудно видеть, что выражения, стоящие под знаком первой и второй суммы, антисимметричны. Следовательно, $\{\lambda, \mu\} = 0$ и системы типа IV вполне интегрируемы.

Помимо интегралов I_k полезно рассмотреть также другой набор интегралов J_l, которые определяются формулой

$$\det(L + \lambda I) = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} J_k \lambda^{n-k}. \tag{3.2.13}$$

Из формул (3.1.5) и (3.2.13) следует, что интегралы I_k и J_l связаны теми же соотношениями, что и обычные симметрические функции, т.е. формулами Ньютона

$$I_k = I_{k-1} J_1 - I_{k-2} J_2 + \ldots - (-1)^{k-1} I_1 J_{k-1} - (-1)^k k J_k. \qquad (3.2.14)$$

С их помощью нетрудно выразить величины I_k через величины J_l.

Для систем типа I–IV для интеграла J_n известно простое представление [277, 308]

$$J_n = \exp\left\{-\frac{g^2}{2} \sum_{k,l} v(q_k - q_l) \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial p_l}\right\} \prod_{l=1}^{n} p_l. \qquad (3.2.15)$$

Остальные интегралы получаются с помощью рекуррентной формулы

$$J_{k-1} = -\frac{1}{n-k+1}\left\{\sum_{j=1}^{n} q_j, J_k\right\} = \left(\frac{1}{(n-k+1)}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p_j}\right) J_k. \qquad (3.2.16)$$

В работе [308] инволютивность была доказана с помощью этого представления интегралов движения.

3.3. Явное интегрирование уравнений движения для систем типа I и V с помощью метода проектирования

В предыдущем разделе было показано, что многочастичные системы типа I–V являются вполне интегрируемыми. Однако теорема Лиувилля, из которой следует это утверждение, не дает конструктивного метода интегрирования уравнений движения.

Как уже отмечалось в гл. 1, в ряде случаев уравнения движения можно проинтегрировать явно с помощью нового метода, предложенного в работе [94], так называемого **метода проектирования**.

Идея метода заключается в рассмотрении системы с n степенями свободы как проекции другой системы с бо́льшим числом степеней свободы, уравнения движения которой имеют более простой вид и легко интегрируются. После соответствующего проектирования на n-мерное подпространство мы приходим уже к движению в потенциальном поле

$$U(q_1, \ldots, q_n) = g^2 \sum_{j<k} v(q_j - q_k),$$

где $v(\xi)$ дается формулами (3.1.14) (I–III).

Этот подход выявляет причину интегрируемости рассматриваемых систем. В частности, как было показано в работах [94, 95], системы I–III являются проекциями систем, описывающих свободное движение (геодезический поток) в некоторых симметрических пространствах нулевой, отрицательной и положительной кривизны соответственно, причем размерности этих пространств значительно больше числа степеней свободы исходной системы.

В настоящем разделе мы рассмотрим, следуя работе [94], системы I и V, т.е. системы с $v(\xi) = \xi^{-2}$ и $v(\xi) = \xi^{-2} + \omega^2 \xi^2$ соответственно. Относительно простейшего случая одной степени свободы см. раздел 1.9.

Для того чтобы получить систему не с одной, а с многими степенями свободы, рассмотрим свободное движение в матричном пространстве $X_n^0 = \{x\}$ – пространстве эрмитовых матриц порядка n с нулевым следом. Уравнения движения здесь имеют вид

$$\ddot{x} = 0, \tag{3.3.1}$$

общее решение которых

$$x = at + b, \quad a, b \in X_n^0. \tag{3.3.2}$$

Приведем теперь эрмитову матрицу x с помощью унитарного преобразования u к диагональному виду Q:

$$x(t) = u(t) Q(t) u^{-1}(t), \qquad u^+ = u^{-1}. \tag{3.3.3}$$

Здесь

$$Q(t) = \operatorname{diag}[q_1, \ldots, q_n], \tag{3.3.4}$$

и без ограничения общности можно считать, что величины q_j упорядочены: $q_1 < q_2 < \ldots < q_n$. Отметим, что в простейшем случае $n = 2$, $x = \sum_j x_j \sigma_j$ (σ_j – матрицы Паули), $Q = \operatorname{diag}(-q, q)$ и $q = |\mathrm{x}|$, т.е. переход от x к Q можно назвать сферической проекцией.

Попробуем теперь вывести уравнения для $q_j(t)$ и $p_j(t) = \dot{q}_j(t)$. Дифференцируя уравнение (3.3.3) по времени, получаем

$$u(t) L(t) u^{-1}(t) = a, \tag{3.3.5}$$

где

$$L = P + i[M, Q], \tag{3.3.6}$$

$$P = \dot{Q}, \quad M = -iu^{-1}\dot{u}, \tag{3.3.7}$$

L и M – эрмитовы $n \times n$ матрицы.

Дифференцируя по t уравнение (3.3.5), получаем

$$\dot{L} + i[M, L] = 0, \tag{3.3.8}$$

т.е. уравнение Лакса. Фактически уравнение (3.3.8) эквивалентно уравнению (3.3.1).

Напротив, предположим, что мы имеем пару матриц Лакса $L(t)$ и $M(t)$, связанных соотношением (3.3.6) и удовлетворяющих уравнению Лакса (3.3.8). Пусть $u(t)$ – это решение уравнения $u = -iMu$, $u(0) = I$, и пусть $x(t)$ определено формулой (3.3.3). Тогда кривая $x(t)$ является геодезической $\ddot{x} = 0$.

Нетрудно доказать, что матрицы L и M, определяемые формулами (3.1.6) и (3.1.7), для систем типа I с $v(q) = q^{-2}$ удовлетворяют (3.3.6). Мы должны теперь охарактеризовать соответствующие геодезические. Предполагая без потери общности, что матрица b диагональна и, следовательно, $u(0) = I$, получаем

$$a = L(0), \quad b = Q(0). \tag{3.3.9}$$

Заметим, что соответствующая матрица момента количества движения

$$\mu = i[x, \dot{x}] = i[b, a] = e \otimes e - I, \quad e = (1, \ldots, 1) \tag{3.3.10}$$

имеет очень специальный вид; $(n-1)$ собственных значений этой матрицы совпадают друг с другом. Это является характеристическим свойством геодезических, которые проектируются в траектории системы типа I.

Итак, мы получили окончательный результат: координаты $q_j(t)$ — решения уравнений движения для системы типа I — являются собственными значениями матрицы*)

$$Q(0) + L(0)t. \tag{3.3.11}$$

Обсудим теперь процесс рассеяния. Потенциал $U(q) = \sum_{j<k} v_{jk}$ в (3.1.1) исчезает при $(q_j - q_k) \to \infty$ и поэтому

$$q_j(t) \sim p_j^{\pm} t + q_j^{\pm} \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty. \tag{3.3.12}$$

Таким образом, процесс рассеяния определяется каноническим преобразованием от переменных (p_j^-, q_k^-) к переменным (p_j^+, q_k^+).

Далее, нетрудно видеть, что

$$I_k = k^{-1}\operatorname{tr}(L^k) = k^{-1}\sum_{j=1}^{n}(p_j^-)^k = k^{-1}\sum_{j=1}^{n}(p_j^+)^k. \tag{3.3.13}$$

Отсюда следует, что величины p_j^+ отличаются от p_j^- лишь перестановкой:

$$p^+ = sp^-. \tag{3.3.14}$$

Учитывая условие $q_1 < q_2 < \ldots < q_n$, получим

$$p_1^+ < p_2^+ < \ldots < p_n^+; \quad p_1^- > p_2^- > \ldots > p_n^-$$

и, следовательно,

$$p_1^- = p_n^+, \quad p_2^- = p_{n-1}^+, \ldots, p_n^- = p_1^+. \tag{3.3.15}$$

Докажем, что величины q_j^+ и q_k^- также удовлетворяют аналогичному условию

$$q_1^- = q_n^+, \quad q_2^- = q_{n-1}^+, \ldots, q_n^- = q_1^+. \tag{3.3.16}$$

Действительно, из (3.3.5) следует, что

$$a = u(\infty)L(\infty)u^{-1}(\infty) = u(-\infty)L(-\infty)u^{-1}(-\infty). \tag{3.3.17}$$

Кроме того,

$$L(\infty) = P^+ = \operatorname{diag}[p_1^+, \ldots, p_n^+], \quad L(-\infty) = P^- = \operatorname{diag}[p_1^-, \ldots, p_n^-]. \tag{3.3.18}$$

Отсюда получаем

$$P^+ = SP^-S^{-1}, \tag{3.3.19}$$

где

$$S = u^{-1}(\infty)u(-\infty) = u^{-1}(-\infty)u(\infty), \qquad S_{ij} = \delta_{j,\,n+1-i}. \tag{3.3.20}$$

---

*) Отметим, что для доказательства этого утверждения мы использовали явный вид матриц $L(t)$ и $M(t)$ ((3.1.6) и (3.1.7)). Доказательство, не использующее явного вида матриц L и M (но зато использующее соотношение $\mu = c$), в рамках схемы редукции гамильтоновых систем с симметрией приведено в разделе 3.7.

Теперь воспользуемся равенством

$$Q(t) = u^{-1}(t)x(t)\,u(t) = Pt + i\,[M, Q]\,t + u^{-1}(t)\,bu(t). \qquad (3.3.21)$$

Отсюда следует, что

$$Q^{+} = SQ^{-}S^{-1}, \qquad (3.3.22)$$

таким образом, соотношение (3.3.16) доказано. Другое доказательство соотношения (3.3.16) дано в работе [251].

Соотношение (3.3.15) было впервые обнаружено для $n = 3$ в работе [242] и для произвольного n в квантовом случае в работе [132]. Естественная гипотеза, что оно справедливо и в классическом случае, была доказана Мозером, который доказал также и соотношение (3.3.16) [251].

Соотношения (3.3.15) и (3.3.16) означают, что рассеяние в данной задаче сводится к следующим друг за другом рассеяниям отдельных пар частиц.

Перейдем теперь к системам типа V, т.е. к системам с потенциалом $v(q) = q^{-2} + \omega^2 q^2$.

В этом случае вместо свободного рассмотрим гармоническое движение в пространстве X^0:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad x \in X^0. \qquad (3.3.23)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = \frac{a}{\omega}\sin\omega t + b\cos\omega t, \qquad a, b \in X^0. \qquad (3.3.24)$$

Представляя это выражение в виде (3.3.3) и дифференцируя (3.3.3) дважды по времени, аналогично предыдущему приходим к утверждению: координаты $q_j(t)$ рассматриваемой системы являются собственными значениями матрицы

$$Q(0)\cos\omega t + \omega^{-1}L(0)\sin\omega t. \qquad (3.3.25)$$

Далее, из (3.3.3) следует, что

$$\mathrm{tr}\,[Q(t)]^{k} = \mathrm{tr}\,[x(t)]^{k}. \qquad (3.3.26)$$

Однако $\mathrm{tr}\,[Q(t)]^k$ – это полином по q_j степени k, инвариантный относительно перестановок. Отсюда получаем

Следствие 1. Полином степени k по q_j, инвариантный относительно перестановок, является полиномом степени k по t (при $\omega = 0$) или по $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$ (при $\omega \neq 0$).

Заметим, что явное решение уравнений движения для систем типа I и V (см. (3.3.11) и (3.3.25)) позволяет установить простое соотношение между этими решениями.

Пусть $q_j(t)$ – решение уравнений движения для системы типа I ($\omega = 0$). Тогда из формул (3.3.11) и (3.3.25) следует, что величины

$$\tilde{q}_j(t) = q_j(\omega^{-1}\,\mathrm{tg}\,\omega t)\cos\omega t \qquad (3.3.27)$$

являются решениями соответствующей системы типа V ($\omega \neq 0$). Справедливо, разумеется, и обратное утверждение *).

*) Аналогичная связь существует и для систем более общего вида [266], см. следующий раздел.

Отметим еще, что величины

$$\mathrm{tr}(Q^{k_1} L^{l_1} Q^{k_2} L^{l_2} \ldots) \qquad (3.3.28)$$

весьма просто зависят от времени. Именно, такая величина является полиномом степени $k = \Sigma k_j$ по t (при $\omega = 0$) или по $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ (при $\omega \neq 0$). Алгебра скобок Пуассона для таких величин изучена в работе [121].

3.4. Связь между решениями уравнений движения для систем типа I и V

Рассмотрим, следуя [266], две классические динамические системы типа I и V, но с гамильтонианом $\widetilde{H}$, зависящим от времени:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} p_j^2 + U(q), \qquad q = (q_1, \ldots, q_n) \qquad (3.4.1)$$

и

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (p_j^2 + \omega^2(t) q_j^2) + \kappa(t) U(q). \qquad (3.4.2)$$

Относительно потенциала $U(q)$ предположим лишь, что $U(q)$ является однородной функцией степени k:

$$U(\lambda q) = \lambda^k U(q). \qquad (3.4.3)$$

Пусть $q(t)$ и $\widetilde{q}(t)$ – решения уравнений движения для соответствующих систем:

$$\ddot{q}_j = F_j(q), \quad F_j(q) = -\partial U/\partial q_j, \qquad (3.4.4)$$

$$\ddot{\widetilde{q}}_j = \kappa(t) F_j(\widetilde{q}) - \omega^2 \widetilde{q}_j. \qquad (3.4.5)$$

Оказывается, что при дополнительном предположении относительно функции $\kappa(t)$ между этими решениями существует простое соотношение. Для нахождения этого соотношения рассмотрим уравнение

$$\ddot{\alpha} + \omega^2(t)\alpha = 0 \qquad (3.4.6)$$

и пусть $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ – два линейно независимых решения (3.4.6).

Определим функцию $\beta(t)$ формулой

$$\beta(t) = c\alpha_2(t)/\alpha_1(t) = c\int \alpha_1^{-2}(t')\,dt' \qquad (3.4.7)$$

и предположим, что функция $\kappa(t)$ имеет вид

$$\kappa(t) = c^2[\alpha_1(t)]^{-(k+2)}. \qquad (3.4.8)$$

Тогда справедливо следующее

Утверждение. Если $q(t)$ – решение уравнения (3.4.4), то

$$\widetilde{q}(t) = \alpha_1(t) q(\beta(t)) \qquad (3.4.9)$$

является решением уравнения (3.4.5).

Для доказательства этого утверждения надо подставить $\widetilde{q}(t)$ в виде (3.4.9) в (3.4.5) и учесть соотношения (3.4.4) и (3.4.6) – (3.4.8).

Таким образом, решение более сложной системы (3.4.5) сводится к решению более простой системы (3.4.4).

Приведем несколько простых следствий из сформулированного выше утверждения.

1. Если $U(q)$ – однородная функция степени $k = -2$, то, полагая $c = 1$, мы получаем $\kappa(t) \equiv 1$ и, следовательно, величины

$$\tilde{q}(t) = \alpha_1(t) q_j(\beta(t)) \tag{3.4.10}$$

являются решением уравнений движения гамильтоновой системы с

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \sum_j (\tilde{p}_j^2 + \omega^2 \tilde{q}_j^2) + U(\tilde{q}). \tag{3.4.11}$$

2. Пусть потенциал $U(\tilde{q})$ в (3.4.11) имеет вид

$$U(q) = \sum_{j<k} (q_j - q_k)^{-2}. \tag{3.4.12}$$

Тогда, как было показано в предыдущем разделе, при $\omega(t)$, не зависящем от времени, координаты $q_j(t)$ рассматриваемой системы даются формулой (3.3.25).

В случае же частоты $\omega(t)$, зависящей от времени, координаты $q_j(t)$ являются собственными значениями матрицы

$$\alpha_1(t) Q(0) + \alpha_2(t) L(0), \tag{3.4.13}$$

где

$$Q = \mathrm{diag}\,[q_1, \ldots, q_n], \tag{3.4.14}$$

$$L_{jk} = \delta_{jk} + i(1 - \delta_{jk})(q_j - q_k)^{-1}, \tag{3.4.15}$$

а $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ – решения уравнения (3.4.6), удовлетворяющие начальным условиям

$$\alpha_1(0) = 1, \ \dot{\alpha}_1(0) = 0; \ \alpha_2(0) = 0, \ \dot{\alpha}_2(0) = 1. \tag{3.4.16}$$

В частности, в случае постоянной частоты получается формула (3.3.27).

3. Пусть $\tilde{q}(t) = q^0$ – положение равновесия системы (3.4.11) с $\omega(t) = \mathrm{const}$. Тогда

$$q(t) = \sqrt{a^2 + b^2 t^2} \cdot q^0, \quad b = \omega/a, \tag{3.4.17}$$

– автомодельное решение системы с H вида (3.4.1).

4. Если $\alpha_1(t) = t$, $\alpha_2(t) = 1$, то $\omega = 0$ и мы получаем решение системы (3.4.5) с $\omega = 0$ и $U(q)$ вида

$$U(q, t) = bt^{-(k+2)} U_k(q), \quad U_k(\lambda q) = \lambda^k U_k(q). \tag{3.4.18}$$

В частности, при $k = -1$ получается решение для "кулоновского" случая

$$U(q, t) = bt^{-1} U_{-1}(q). \tag{3.4.19}$$

3.5. Явное интегрирование уравнений движения для систем типа II и III

В данном разделе, следуя [95], будет показано, что системы типа II и III являются проекциями движения по геодезическим в некоторых пространствах отрицательной и положительной кривизны соответственно.

Простейший случай одной степени свободы рассмотрен в разделе 1.9. Напомним, что при свободном движении частицы по верхней полости двуполостного гиперболоида

$$\mathbb{H}^2 = \{ x:\ x^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1, \quad x_0 > 0 \} \tag{3.5.1}$$

после проектирования

$$x \to q = \operatorname{Arch} x_0 \tag{3.5.2}$$

получаем систему с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} p^2 + g^2 (\operatorname{sh} q)^{-2}, \tag{3.5.3}$$

т.е. систему типа II для одной степени свободы.

Аналогичное рассмотрение геодезического потока на сфере

$$S^2 = \{ x:\ x^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1 \} \tag{3.5.4}$$

приводит к системе типа III с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} p^2 + g^2 \sin^{-2} q, \qquad q = \arccos x_0 . \tag{3.5.5}$$

Перейдем к общему случаю. Остановимся сначала на системах типа II. Для этого рассмотрим пространство X_n^- положительно определенных эрмитовых матриц порядка n с определителем, равным единице.

На этом пространстве транзитивно действует группа $G = SL(n, \mathbb{C})$ – группа комплексных матриц порядка n с определителем, равным единице. Это означает, что любую точку $x \in X_n^-$ можно перевести в любую другую точку с помощью действия группы G, которое задается формулой

$$x \to g x g^+, \ x \in X_n^-, \ g \in G, \ g^+ = \bar{g}'. \tag{3.5.6}$$

В частности, если исходной точкой пространства является единичная матрица, то получается представление для произвольной точки $x \in X_n^-$:

$$x = g g^+, \tag{3.5.7}$$

и тем самым вложение пространства X^- в группу G. Такое представление неоднозначно – если g умножить справа на элемент из подгруппы $K \subset G$, $K = \mathrm{SU}(n)$, $(k^{-1} = k^+)$, то точка x не изменится. Это означает, что пространство X_n^- есть факторпространство $G/K = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})/\mathrm{SU}(n)$.

На пространстве X_n^- существует инвариантная относительно действия группы G (3.5.6) метрика

$$ds^2 = \operatorname{tr}(dx \cdot x^{-1} dx \cdot x^{-1}). \tag{3.5.8}$$

Относительно этой метрики пространство X_n^- имеет неположительную кривизну, чем и объясняется знак минус в его обозначении. Нетрудно вывести уравнение геодезических для метрики (3.5.8):

$$\frac{d}{dt}(x^{-1}\dot{x}) = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}(\dot{x}x^{-1}) = 0. \tag{3.5.9}$$

Отметим, что если $x(t)$ – кривая в пространстве X_n^-, то матрицы $x^{-1}(t)\dot{x}(t)$ и $\dot{x}(t)x^{-1}(t)$ можно рассматривать как два векторных поля на группе $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Эти поля не являются, вообще говоря, векторными полями на X_n^-. Их полусумма, однако, будет уже векторным полем на X_n^-. Поэтому вместо уравнения (3.5.9) мы будем рассматривать уравнение

$$\frac{d}{dt}\,\frac{x^{-1}\dot{x} + \dot{x}x^{-1}}{2} = 0, \tag{3.5.10}$$

которому геодезическая $x(t)$ будет удовлетворять. Очевидно, что произвольная геодезическая на X_n^- имеет вид

$$x(t) = b\exp\{2at\}b^+, \tag{3.5.11}$$

где $b \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $a = a^+$, $\operatorname{tr} a = 0$.

На пространстве X_n^- существует аналог сферической системы координат. Из курса линейной алгебры известно, что всякую эрмитову матрицу можно привести к диагональному виду с помощью унитарного преобразования. Пусть $x(t)$ – произвольная кривая в X_n^-. Тогда

$$x(t) = U(t)\exp\{2\alpha Q(t)\}\,U^+(t), \tag{3.5.12}$$

где $U(t) \in K = \mathrm{SU}(n)$ – "угловая переменная" и $Q(t)$ – диагональная матрица $\operatorname{diag}[q_1(t), \ldots, q_n(t)]$, $(\Sigma q_j = 0)$ – сферическая проекция, α – параметр. Для такой параметризации $x(t)$ справедливо соотношение

$$\frac{1}{2}(x^{-1}\dot{x} + \dot{x}x^{-1}) = 2\alpha ULU^+, \tag{3.5.13}$$

где

$$L(t) = P + i(4\alpha)^{-1}[\exp\{-2\alpha Q\}M\exp\{2\alpha Q\} - \exp\{2\alpha Q\}M\exp\{-2\alpha Q\}], \tag{3.5.14}$$

$M = -iU^{-1}\dot{U}$ – "угловая скорость" вращения, $P = \dot{Q}$ – "относительная скорость".

Дифференцируя (3.5.13) по времени, мы находим

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}(x^{-1}\dot{x} + \dot{x}x^{-1}) = 2\alpha U(\dot{L} + i[M, L])\,U^+, \tag{3.5.15}$$

так что уравнение (3.5.10) эквивалентно уравнению Лакса

$$i\dot{L} = [M, L]. \tag{3.5.16}$$

Напротив, предположим, что мы имеем пару матриц $L(t)$, $M(t)$, связанных соотношением (3.5.14) и удовлетворяющих уравнению Лакса (3.5.16). Пусть $u(t)$ – решение уравнения $\dot{u} = iuM$ и пусть $x(t)$ определено уравнением (3.5.12). Тогда $x(t)$ удовлетворяет уравнению (3.5.10) и потому является геодезической.

Нетрудно проверить, что пара Лакса (3.1.6), (3.1.7) для систем типа II с $x(\xi) = \alpha \operatorname{cth}(\alpha\xi)$ удовлетворяет уравнению (3.5.14). Теперь мы должны определить геодезические, ассоциированные с парой Лакса. Предполагая без ограничения общности, что матрица b диагональна, следовательно, $u(0) = I$, мы находим из (3.5.11) и (3.5.13)

$$b = \exp\{\alpha Q(0)\}, \quad Q(0) = \operatorname{diag}(q_1^0, \dots, q_n^0), \tag{3.5.17}$$

$$a_{jk} = \alpha p_j^0 \delta_{jk} + i\alpha^2 g(1 - \delta_{jk}) \operatorname{sh}^{-1} [\alpha(q_j^0 - q_k^0)]. \tag{3.5.18}$$

Мы приходим, таким образом, к окончательному результату: решения $q_j(t)$ уравнений движения для систем типа II являются логарифмами собственных значений матрицы $x(t) = b \exp\{2at\} b^+$, где матрицы b и a даются формулами (3.5.17), (3.5.18).

Специальный выбор геодезических, которые проектируются на поток для системы типа II, имеет простую механическую интерпретацию.

Сохраняющийся "момент количества движения" относительно действия группы $SU(n)$ дается формулой

$$\mu = i[x^{-1}, \dot{x}]. \tag{3.5.19}$$

Для геодезической (3.5.11) мы получаем

$$\mu = 2i(b^{-1}ab - bab^{-1}) \tag{3.5.20}$$

и для специального случая a, b вида (3.5.17) – (3.5.18) μ принимает вид

$$\mu = 4\alpha^2 g(e \otimes e - I), \qquad e = (1, \dots, 1), \tag{3.5.21}$$

(сравни с формулой (3.3.10)). Такое значение "момента количества движения" является весьма специальным: $(n - 1)$ собственное значение матрицы μ совпадает друг с другом. Это свойство является характеристическим для геодезических, которые проектируются на траектории системы типа II. Заметим, что $SU(n)$-орбита O_μ, проходящая через μ, имеет минимальную (ненулевую) размерность среди всех орбит группы $SU(n)$: $\dim O_\mu = 2(n - 1)$. Этот факт важен для обсуждения гамильтоновой редукции в разделе 3.7.

Отметим также, что формулы для явных решений систем типа III получаются заменой параметра α на $i\alpha$. Однако поучительней будет указать на связь этих решений с геодезическим потоком на унитарной группе $SU(n)$. Группа $SU(n)$ находится в двойственном соответствии с пространством X_n^-. Эта двойственность для широкого класса пространств была установлена Э. Картаном. Частичным ее проявлением является связь между гиперболической и сферической геометриями; другое ее проявление – связь между формулами для систем II и III. Группа $SU(n)^*$ является римановым пространством положительной кривизны с метрикой (3.5.8), и геодезические этой метрики вычисляются столь же просто, как и для пространства X_n^-. Поэтому все рассуждения в этом случае могут быть повторены и явные формулы получены независимо.

В случае одной степени свободы пространства X_2^- и $SU(2)$ суть трехмерный гиперболоид и трехмерная сфера. В начале раздела мы реализовали системы с одной степенью свободы на двумерном гиперболоиде и двумерной сфере. На самом деле системы с одной степенью свободы можно реализовать на гиперболоидах и сферах произвольной размерности.

В заключение этого раздела, следуя работе [310], проинтегрируем явно уравнения движения систем с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + g^2 \sum_{j<k} \mathrm{sh}^{-2}(q_j - q_k) + \alpha \sum_{k=1}^{n} \exp(4q_k). \tag{3.5.22}$$

Прежде всего заметим, что для уравнений движения этой системы можно записать обобщенное представление Лакса

$$\dot{L} = [M, L] - 4\alpha \exp(4Q), \tag{3.5.23}$$

где

$$\begin{aligned} L_{jk} &= p_k \delta_{jk} + ig(1 - \delta_{jk}) \,\mathrm{cth}(q_j - q_k), \\ M_{ik} &= \Big(-\sum_{\substack{l=1,\\ l\neq j}}^{n} M_{lj}\Big)\delta_{jk} + g(1-\delta_{jk})\,\mathrm{sh}^{-2}(q_j - q_k) \end{aligned} \tag{3.5.24}$$

и

$$Q = \mathrm{diag}(q_1, \ldots, q_n). \tag{3.5.25}$$

Дифференцируя по времени матрицу $\exp(2Q)$, получаем

$$\frac{d}{dt}[\exp(2Q)] = [L, \exp(2Q)] + 2(L + C)\exp(2Q), \tag{3.5.26}$$

где

$$C_{jk} = ig(1 - \delta_{jk}). \tag{3.5.27}$$

Удобно ввести матрицы

$$L^{\pm} = L \pm C, \tag{3.5.28}$$

удовлетворяющие соотношениям

$$L^{+}\exp(2Q) = \exp(2Q)L^{-}, \quad L^{+} - L^{-} = 2C \tag{3.5.29}$$

и уравнениям типа Лакса

$$\dot{L}^{\pm} = [M, L^{\pm}] - 4\alpha\exp(4Q), \tag{3.5.30}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\exp(2Q)] &= [M, \exp(2Q)] + 2L^{+}\exp(2Q) = \\ &= [M, \exp(2Q)] + 2\exp(2Q)L^{-}. \end{aligned} \tag{3.5.31}$$

Для того чтобы упростить эти уравнения, ведем матрицы

$$Y = U^{-1}\exp(2Q)\,U, \quad Z^{\pm} = U^{-1}L^{\pm}U, \tag{3.5.32}$$

где матрица U – это матрица, являющаяся решением дифференциального уравнения

$$\dot{U}(t) = MU(t) \tag{3.5.33}$$

с начальным условием

$$U(t = 0) = I. \tag{3.5.34}$$

Теперь для матриц Y и $Z^{\pm}$ получаем дифференциальные уравнения

$$\dot{Z}^{\pm} = -4\alpha Y^2, \quad \dot{Y} = 2Z^{+}Y = 2YZ^{-} \tag{3.5.35}$$

Эти уравнения можно проинтегрировать тем же способом, который был использован в работе [108] для потенциала $w(x) = \exp(2x)$. Именно, из уравнений (3.5.35) следует, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} Z^{+}Z^{-} + \alpha Y^2\right) = 0, \tag{3.5.36}$$

откуда получаем

$$\frac{1}{2} Z^{+}Z^{-} + \alpha Y^2 = \frac{1}{2} L_0^{+}L_0^{-} + \alpha \exp(4Q_0) = W_0. \tag{3.5.37}$$

Здесь индекс 0 означает, что значения матрицы берутся при $t = 0$.

Теперь, подставляя в (3.5.37) выражение для αY^2 из (3.5.35) и используя тот факт, что $2C = L^{+} - L^{-}$ и $U^{-1}CU = C$ (что следует из $[M, C] = 0$), получаем матричное уравнение Риккати

$$2(Z^{-})^2 - \dot{Z}^{-} = 4W_0 - 4CZ^{-} \tag{3.5.38}$$

Это уравнение можно линеаризовать с помощью подстановки

$$Z^{-} = -\frac{1}{2} \dot{P}P^{-1}, \tag{3.5.39}$$

где матрица $P(t)$ является обратимой матрицей порядка $n \times n$. А именно, получаем

$$\ddot{P} = 8W_0P + 4C\dot{P}, \tag{3.5.40}$$

или, в блочных обозначениях,

$$\dot{\tilde{P}} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} P \\ \dot{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 8W_0 & 4C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P \\ \dot{P} \end{bmatrix} = \tilde{W}_0\tilde{P}. \tag{3.5.41}$$

Заметим, что имеется произвол в выборе начальной матрицы $P(0)$, поскольку уравнение (3.5.38) должно удовлетворять лишь одному начальному условию $Z^{-}(0) = L_0^{-}$. Удобно выбрать $P(0) = I$, так что $\dot{P}(0) = -2L_0^{-}$, и тогда решение уравнения (3.5.41) имеет вид

$$\begin{bmatrix} P(t) \\ \dot{P}(t) \end{bmatrix} = \exp\left[\begin{pmatrix} 0 & I \\ 8W_0 & 4C \end{pmatrix} t\right]\begin{bmatrix} I \\ -2L_0^{-} \end{bmatrix}. \tag{3.5.42}$$

Таким образом, величины $\exp(4q_j(t))$ можно найти как собственные значения матрицы

$$U^{-1}\exp(4Q)\,U = Y^2(t) = -\frac{1}{4\alpha}\dot{Z}^{-}(t) = \frac{1}{8\alpha}\frac{d}{dt}[\dot{P}(t)P^{-1}(t)], \tag{3.5.43}$$

где матрицы $P(t)$ и $\dot{P}(t)$ находятся из уравнения (3.5.42).

Дальнейший анализ рассматриваемой системы для случая $\alpha > 0$ (случай $\alpha < 0$ рассматривается аналогично) аналогичен анализу работы [108] и дает следующие результаты.

Асимптотические значения импульсов $p_k(\pm\infty)$ частиц являются интегралами движения. При этом

$$\lambda_k = p_k(+\infty) = -p_k(-\infty), \quad \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < 0, \tag{3.5.44}$$

а асимптотика $q_j(t), p_k(t)$ имеет вид (при $t \to \pm\infty$)

$$q_j(t) = \pm\lambda_j t + \alpha_j^{\pm} + O(t^{-1}), \quad p_k(t) = \pm\lambda_k + O(t^{-2}), \tag{3.5.45}$$

т.е. асимптотически частицы ведут себя как свободные.

В рассматриваемом случае имеются две матрицы, подвергающиеся изоспектральной деформации. Это

$$W = \frac{1}{2} L^+ L^- + \alpha \exp(4Q), \tag{3.5.46}$$

для которой

$$\dot W = [M, W], \tag{3.5.47}$$

и матрица

$$\widetilde W = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 8W & 4C \end{bmatrix}, \tag{3.5.48}$$

удовлетворющая уравнению

$$\dot{\widetilde W} = [\widetilde M, \widetilde W], \quad \widetilde M = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}. \tag{3.5.49}$$

Величины

$$I_k = \frac{1}{k} \operatorname{tr}(W^k), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{3.5.50}$$

представляют n функционально независимых интегралов движения, и нетрудно показать, что все они находятся в инволюции.

3.6. Интегрирование уравнений движения для систем с двумя типами частиц

Простая замена переменных, предложенная в [133], позволяет получить некоторое обобщение систем типа II. Пусть

$$q_j \to q_j + i\frac{\pi}{2a}, \quad 0 < n_1 < j \leqslant n. \tag{3.6.1}$$

Тогда потенциал

$$U(q) = g^2 a^2 \sum_{k<j} \operatorname{sh}^{-2}[a(q_j - q_k)] \tag{3.6.2}$$

перейдет в потенциал

$$U(q) = g^2 a^2 \sum_{\substack{1 \leqslant j < i \leqslant n_1 \\ n_1 < j < i \leqslant n}} \operatorname{sh}^{-2}[a(q_i - q_j)] - g^2 a^2 \sum_{j \leqslant n_1 < i} \operatorname{ch}^{-2}[a(q_i - q_j)]. \tag{3.6.3}$$

Эта система содержит n_1 частиц одного знака и $n_2 = n - n_1$ частиц противоположного. Каждая пара частиц противоположного знака притягивается с потенциалом $-g^2 a^2 \mathrm{ch}^{-2}[a(q_j - q_k)]$. В то же время частицы одного знака отталкиваются с потенциалом $g^2 a^2 \mathrm{sh}^{-2}[a(q_j - q_k)]$. Очевидно, что все предыдущие результаты, касающиеся систем типа II, остаются справедливыми после замены (3.6.1). В частности, величины $\exp[2\alpha q_j(t)]$ являются собственными значениями матрицы

$$x(t) = b\exp(2at)\, b^+. \tag{3.6.4}$$

Однако эта формула не позволяет явно ответить на важный вопрос: существуют ли связанные состояния (или, иными словами, финитные движения) в системе с потенциалом (3.6.3)? Ответ на него дан в [257].

Отметим сначала, что формула (3.6.4) уже не определяет геодезическую в пространстве эрмитовых положительно определенных матриц, как это было для систем типа II. Оказывается, что системам (3.6.3) отвечает пространство X_{n_1, n_2} эрмитовых матриц сигнатуры (n_1, n_2), а формула (3.6.4) определяет (при условии замены (3.6.1)) геодезическую в этом пространстве. Таким образом, ответ на вопрос о связанных состояниях сводится к выяснению характера поведения геодезических в пространстве X_{n_1, n_2}. Для того чтобы связанные состояния существовали, очевидно, необходимо, чтобы существовали геодезические, целиком лежащие в ограниченной области пространства X_{n_1, n_2} (геодезические, не уходящие на бесконечность). Множество различных классов геодезических пространств X_{n_1, n_2} больше, чем у пространства X_n^-, отвечающего системам типа II, и соответственно динамика систем с потенциалом (3.6.3) богаче динамики систем с потенциалом (3.6.2).

Рассмотрим систему с одной степенью свободы. В этом случае вместо пространства $X_{1,1}$ можно рассмотреть однополостный гиперболоид $\{x\colon x^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = -1\}$. Легко показать, что энергия свободной частицы в сферических координатах

$$x_0 = \mathrm{sh}\, q, \quad x_1 = \mathrm{ch}\, q\cos\varphi, \quad x_2 = \mathrm{ch}\, q\sin\varphi \tag{3.6.5}$$

после исключения циклической координаты φ приводится к виду

$$H = \frac{1}{2}p^2 - g^2\mathrm{ch}^{-2} q, \tag{3.6.6}$$

где $p = \dot q$, $g^2 = \frac{1}{2}\mu_\varphi^2$, μ_φ – момент.

Так как гиперболоид однороден относительно гиперболических вращений, то достаточно рассмотреть геодезические, проходящие через фиксированную точку. Остальные геодезические получаются гиперболическими сдвигами точки. Рассмотрим геодезические, проходящие через точку $e = (0, 1, 0)$. В метрике (3.5.8) это сечения гиперболоида плоскостями, проходящими через точку e и начало координат. Отсюда получаем уравнение геодезических

$$\mathrm{th}\, q = k\cos\varphi. \tag{3.6.7}$$

При $k < 1$ это эллипсы, $k = 1$ – изотропные прямые, $k > 1$ – гиперболы. Таким образом, имеются два класса геодезических – замкнутые ($k < 1$) и уходящие в бесконечность ($k \geqslant 1$). В первом случае движение финитно, а во втором – инфинитно, что согласуется с характером движения, определяемого гамильтонианом (3.6.6).

Перейдем теперь к общему случаю. Пространство X_{n_1, n_2} эрмитовых матриц порядка $n \times n$ и сигнатуры (n_1, n_2), $n_1 + n_2 = n$, является однородным псевдоримановым пространством с метрикой (3.5.8). Группа $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ действует на $X_{n_1 n_2}$ обычным способом:

$$x \to gxg^+, \quad x \in X_{n_1 n_2}, \quad g \in G. \tag{3.6.8}$$

Стационарная подгруппа матрицы

$$J = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1), \ \mathrm{tr}\, J = n_1 - n_2, \tag{3.6.9}$$

– это $K = U(n_1, n_2)$, так что $X_{n_1 n_2} = G/K$; заметим, что группа K некомпактна и состоит из матриц, удовлетворяющих условию $g^{-1} = Jg^+J$. В соответствующем "псевдокартановском разложении" $\mathscr{G} = \mathscr{K} + \mathscr{P}$ подпространство $\mathscr{P}$ состоит из матриц a таких, что

$$Ja^+ = aJ, \tag{3.6.10}$$

а действие K на $\mathscr{P}$ дается формулой

$$a \to gag^{-1}, \quad a \in \mathscr{P}, \quad g \in K. \tag{3.6.11}$$

Нетрудно доказать, что геодезические в $X_{n_1 n_2}$ имеют вид

$$x(t) = b \exp(2at) Jb^+, \tag{3.6.12}$$

где $b \in G$, $a \in \mathscr{P}$. При этом различным типам геодезических соответствуют различные классы сопряженных картановских подалгебр в $\mathscr{P}$ относительно действия K, т.е. различные типы нормальной формы, к которой можно привести a путем действия K. Можно показать, что матрицу a всегда можно привести к виду

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & \alpha_r & & & & & & \\ & & & \beta_1 & \cdots & & i\varphi_1 & & \\ & & & \vdots & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & & \beta_k & \cdots & & i\varphi_k \\ & & & i\varphi_1 & \cdots & & \beta_1 & & \vdots \\ & 0 & & & & & \vdots & \ddots & \\ & & & & & i\varphi_k & \cdots & & \beta_k \end{pmatrix}, \tag{3.6.13}$$

где

$$n_1 - n_2 \leqslant r \leqslant n, \quad k \leqslant n_2, \quad r + 2k = n,$$

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j + 2 \sum_{j=1}^{k} \beta_j = 0. \tag{3.6.14}$$

Соответственно матрицу $\exp(2at)$ можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} e^{2\alpha_1 t} & & & & 0 & \\ \dots & e^{2\alpha_r t} & & & & \\ \dots & \dots & e^{2\beta_1 t}\cos 2\varphi_1 t & \dots\dots & ie^{2\beta_1 t}\sin 2\varphi_1 t & \\ & & \vdots & e^{2\beta_k t}\cos 2\varphi_k t & \vdots & ie^{2\beta_k t}\sin 2\varphi_k t \\ & & ie^{2\beta_1 t}\sin 2\varphi_1 t & \dots\dots & e^{2\beta_1 t}\cos 2\varphi_1 t & \vdots \\ 0 & & & ie^{2\beta_k t}\sin 2\varphi_k t & \dots\dots & e^{2\beta_k t}\cos 2\varphi_k t \end{pmatrix}. \quad (3.6.15)$$

Из (3.6.14), (3.6.15) следует, что все геодезические распадаются на $n_2 + 1$ класса. Каждый класс характеризуется k "компактными" параметрами φ_j и $r + k$ "некомпактными" (α_j, β_l).

Заметим теперь, что геодезическая (3.6.15) содержится в ограниченной части пространства X_{n_1, n_2}, если и только если $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = \beta_1 = \dots = \beta_r = 0$. Такая геодезическая зависит только от $k \leqslant n_2$ параметров, тогда как геодезическая общего положения зависит от $n - 1$ параметров. При $n > 2$ она находится не в общем положении, и это означает, что она является неустойчивой – некоторое число частиц будет уходить на бесконечность при малом изменении начальных данных.

3.7. Многочастичные системы как редуцированные системы

В настоящем разделе будет показано, следуя работе [217], что результаты разделов 3.3 и 3.5 можно получить методом редукции гамильтоновых систем с симметриями (см. раздел 1.7). Характерной чертой такого подхода является то, что здесь не используется представление Лакса для уравнений движения; напротив, это представление получается из геометрических соображений. В изложении результатов мы следуем работам [25, 60].

А. Системы типа I и V. Рассмотрим динамическую систему, конфигурационным пространством которой является пространство $X^0 = \{x\}$ – пространство эрмитовых матриц порядка $n \times n$ или, иными словами, алгебра Ли группы $\mathrm{U}(n)$. Фазовым пространством такой системы является кокасательное расслоение T^*X^0. Отождествляя $(X^0)^*$ и X^0 с помощью стандартного скалярного произведения $(x_1, x_2) = \mathrm{tr}(x_1, x_2)$ в пространстве X^0, заметим, что величина $\mathrm{tr}(x_1, x_2)$ вещественна и мы можем рассматривать элемент T^*X^0 как пару эрмитовых матриц x и y:

$$T^*X^0 = \{(x, y) : x, y \in X^0\}. \quad (3.7.1)$$

Обозначим через θ каноническую 1-форму на пространстве T^*X^0:

$$\theta = \mathrm{tr}(y\ dx). \quad (3.7.2)$$

Соответствующая ей 2-форма

$$\omega = d\theta = \mathrm{tr}(dy \wedge dx) \quad (3.7.3)$$

определяет симплектическую структуру пространства T^*X^0.

Гамильтонова система на T^*X^0 с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(y^2) \tag{3.7.4}$$

описывает геодезический поток на X^0:

$$\dot y = 0, \quad \dot x = y, \tag{3.7.5}$$

$$x(t) = b + at, \quad y(t) = a. \tag{3.7.6}$$

Рассматриваемая система инвариантна относительно точного симплектического действия группы $G = \mathrm{U}(n)$:

$$(x, y) \to (gxg^+, gyg^+). \tag{3.7.7}$$

Преобразование (3.7.7) с $g = g(t) = \exp(at)$, $a \in \mathcal{G}$ ($\mathcal{G}$ – алгебра Ли группы G), порождает векторное поле на T^*X^0:

$$(x, y) \mapsto ([\xi, x], [\xi, y]). \tag{3.7.8}$$

Это векторное поле гамильтоново и порождается гамильтонианом

$$F(x, y; \xi) = \mathrm{tr}(y[\xi, x]) = \mathrm{tr}(\xi[x, y]). \tag{3.7.9}$$

Мы приходим, таким образом, к отображению момента φ из фазового пространства T^*X^0 в пространство $\mathcal{G}^*$, дуальное алгебре Ли $\mathcal{G}$, которое мы уже отождествили с алгеброй зрмитовых матриц

$$\varphi\colon (x, y) \mapsto \mu = i[x, y]. \tag{3.7.10}$$

Напомним, что, в силу инвариантности гамильтониана H относительно действия группы $G = \mathrm{U}(n)$, момент μ является сохраняющейся величиной.

Следуя работе [217], возьмем в качестве $\mu = c$ матрицу вида

$$c = [c_{ij}], \quad c_{ij} = 1 - \delta_{ij}. \tag{3.7.11}$$

Как мы уже видели в разделе 3.3, "момент количества движения" для геодезических, которые проектируются в траектории системы типа I, имеет как раз такой вид.

Отметим следующее важное свойство матрицы c: $(n - 1)$ собственное значение этой матрицы совпадает и равно (-1), так что матрица c является сильно вырожденной. Как следствие этого, преобразования из группы $\mathrm{U}(n)$, оставляющие ее инвариантной,

$$G_c = \{g \in U(n)\colon g \subset g^+ = c\}, \tag{3.7.12}$$

образуют подгруппу G_c, изоморфную $U(n - 1) \times U(1)$.

Действительно, как нетрудно видеть, условие (3.7.12) эквивалентно условию

$$g \cdot e = \lambda e, \tag{3.7.13}$$

где e – вектор вида $e = (1, \ldots, 1)$.

Теперь из (3.7.6), (3.7.10) следует, что матрицы x и y, определяющие движение системы, не являются произвольными, а связаны соотношением

$$i[x, y] = c. \tag{3.7.14}$$

Нетрудно видеть, что общее решение этого уравнения имеет вид

$$x = gQ(q)\,g^{+}, \qquad (3.7.15)$$

$$y = gL(q,p)\,g^{+}, \qquad (3.7.16)$$

где

$$Q(q) = \operatorname{diag}(q_1, \ldots, q_n), \qquad (3.7.17)$$

$$[L(q,p)]_{jk} = p_j\delta_{jk} + i(1-\delta_{jk})(q_j - q_k)^{-1}, \qquad (3.7.18)$$

$q_1, \ldots, q_n$ — различные действительные числа, а матрица $g \in G_c$, т.е. удовлетворяет (3.7.13).

Для доказательства этого утверждения заметим прежде всего, что с помощью преобразования из группы G_c можно привести матрицу b к диагональному виду (см. например, [25]).

Действительно, пусть $x = \tilde{g}Q\tilde{g}^{+}$, где Q — диагональная матрица и $\tilde{g} \in U(n)$. Тогда мы имеем

$$[Q, \tilde{g}^{+}y\tilde{g}] = \tilde{g}^{+}c\tilde{g} = \tilde{g}^{+}(e \otimes e - I)\tilde{g} = f \otimes f - I, \quad f = \tilde{g}^{+}e. \qquad (3.7.19)$$

Поскольку Q диагональна, мы должны иметь $f_j\bar{f}_j = 1$. Полагая $g = \tilde{g}F$, где $F = \operatorname{diag}(f_1, \ldots, f_n)$ — это унитарная матрица, мы видим, что $g \in G_c$ и $x = gQg^{+}$.

Далее, из (3.7.15) и (3.7.16) и того факта, что $g \in G_c$, следует

$$[Q(q), L(q,p)] = -g^{+}[x,y]\,g = -ig^{+}cg = -ic. \qquad (3.7.20)$$

Отсюда сразу же получаем выражение (3.7.18) для $L(q,p)$.

Заметим еще, что вся эта конструкция проходит и для бесследовых матриц, что приводит к дополнительным ограничениям

$$\Sigma\, q_j = 0, \quad \Sigma\, p_j = 0.$$

В качестве следствия из доказанного выше утверждения получаем, что факторпространство $\varphi^{-1}(c)/G_c$ является $2n$-мерным многообразием и параметризуется координатами $(q_1, \ldots, q_n), (p_1, \ldots, p_n)$. При этом паре матриц $(x,y) \in \varphi^{-1}(c)$ сопоставляется пара $(Q(q), L(q,p))$ (3.7.17), (3.7.18), а симплектическая структура (3.7.3) переходит в стандартную симплектическую структуру

$$\tilde{\omega} = \operatorname{tr}(dL(q,p) \wedge dQ(q)) = \sum_{j=1}^{n} dp_j \wedge dq_j. \qquad (3.7.21)$$

В результате мы редуцировали симплектическое пространство $(T^{*}X^{0}, \omega)$ к симплектическому многообразию $\{(q,p), \tilde{\omega}\}$:

$$\pi\colon (x,y) \to (Q(q), L(q,p)) = (u^{+}xu,\ u^{+}yu). \qquad (3.7.22)$$

При этом гамильтониан H переходит в гамильтониан системы Калоджеро

$$H = \frac{1}{2}\operatorname{tr} y^2 \to \tilde{H} = \frac{1}{2}\operatorname{tr} L^2(q,p) = \frac{1}{2}\sum_j p_j^2 + \sum_{j<k}(q_j - q_k)^{-2}, \qquad (3.7.23)$$

а функции $F_k = \dfrac{1}{k}\operatorname{tr} y^k$, $F_2 = H$, очевидно, находящиеся в инволюции, переходят в функции $I_k = \frac{1}{k} \operatorname{tr} L^k$, т.е. в интегралы движения системы с гамильтонианом (3.7.23). Из явного же решения (3.7.6) уравнений движения в пространстве T^*X^0 сразу вытекает результат раздела 3.3, что величины $q_j(t)$ являются собственными значениями матрицы

$$x(t) = Q(0) + L(0)\,t. \tag{3.7.24}$$

Отметим еще один полезный факт: отображение

$$(x, y) \to (-y, x) \tag{3.7.25}$$

симплектично и оставляет инвариантным многообразие $\varphi^{-1}(c)$. Отсюда следует, что существует матрица $v \in G_c$ такая, что

$$(v^+ Q(q)\, v, \quad v^+ L(q, p)\, v) = (-L(\xi, \eta),\ Q(\xi)). \tag{3.7.26}$$

(Отсюда следует, в частности, что все (3.7.26) собственные значения матрицы $L(q, p)$ различны.)

Это отображение переводит гамильтониан $\frac{1}{2} \operatorname{tr} L^2(q, p)$ в

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} Q^2(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2. \tag{3.7.27}$$

Уравнения движения становятся при этом линейными:

$$\dot{\xi}_j = 0, \quad \dot{\eta}_j = -\ \xi_j. \tag{3.7.28}$$

Б. Отображение рассеяния [252]. Ранее уже отмечалось, что в модели типа I частицы отталкиваются друг от друга, и потому при $t \to +\infty$ мы имеем следующее асимптотическое поведение:

$$q_j(t) \sim p_j^+ t + q_j^+, \quad p_j(t) \sim p_j^+, \tag{3.7.29}$$

где все величины p_j^+ различны.

Из явного вида (3.7.18) матрицы $L(q, p)$ следует, что величины p_j^+ являются собственными значениями матрицы $L(q, p)$. Поэтому мы можем отождествить величины ξ_j в (3.7.26) с асимптотическими импульсами p_j^+. Аналогично из (3.7.26) следует

$$v(t)^{-1} Q(q(t))\, v(t) = -L(\xi, \eta - \xi t) = L(-\xi, -\eta + \xi t). \tag{3.7.30}$$

Из теории возмущений следует, что собственные значения матрицы $L(-\xi, -\eta + \xi t)$ ведут себя асимптотически как $\xi_j t - \eta_j + O(t^{-1})$, откуда $\eta_j = -q_j^+$, и мы получаем

$$\begin{aligned} q_j(t) &\sim \xi_j t - \eta_j, \\ p_j(t) &\sim \xi_j + O(t^{-1}), \end{aligned} \qquad t \to +\infty. \tag{3.7.31}$$

Итак, формулы (3.7.26) задают отображение рассеяния, ставящее в соответствие начальным данным q_j^0 и p_j^0 асимптотические величины ξ_j и $-\eta_j$.

Аналогичные формулы имеют место и при $t \to -\infty$:

$$\begin{aligned} q_j(t) &\sim \xi_j^- t - \eta_j^-, \\ p_j(t) &\sim \xi_j^-, \end{aligned} \qquad t \to -\infty. \tag{3.7.32}$$

В силу инвариантности системы относительно обращения времени $t \to -t$, $x \to x$, $y \to -y$ мы получаем

$$\xi_k = \xi^-_{n-k+1}, \quad \eta_k = \eta^-_{n-k+1}, \tag{3.7.33}$$

т.е. что рассеяние здесь такое же, как в системе упруго сталкивающихся свободных частиц.

До сих пор рассматривались системы типа I. Системы типа V получаются аналогично, как редукция гамильтоновых систем на T^*X^0 с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(y^2 + x^2). \tag{3.7.34}$$

B. Системы типа II и III. Возьмем теперь в качестве фазового пространства кокасательное расслоение T^*X^- к однородному пространству

$$X^- = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})/\mathrm{SU}(n) \tag{3.7.35}$$

эрмитовых положительно-определенных матриц с определителем равным единице

$$T^*X^- = \{(x, y):\ x \in X^-,\ y \in T^*_x X^-\}. \tag{3.7.36}$$

Касательное пространство $T_x X^-$ и дуальное кокасательное пространство $T^*_x X^-$ в точке x можно отождествить с эрмитовыми матрицами y, удовлетворяющими условию $\operatorname{tr}(yx^{-1}) = 0$, которое является следствием условия $\det x = 1$. Спаривание между касательными и кокасательными векторами определяется инвариантной метрикой

$$ds^2 = \operatorname{tr}(dx \cdot x^{-1} dx \cdot x^{-1}). \tag{3.7.37}$$

На пространстве T^*X^- действует группа $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ согласно формуле

$$x \to gxg^+, \quad y \to gyg^+. \tag{3.7.38}$$

Определим каноническую форму v и симплектическую форму ω на пространстве T^*X^- согласно формулам

$$\theta = -\operatorname{tr}(y d(x^{-1})) = \operatorname{tr}(yx^{-1} dx \cdot x^{-1}), \tag{3.7.39}$$

$$\omega = d\theta = -\operatorname{tr}(dy \wedge d(x^{-1})) = \operatorname{tr}(x^{-1} dy \wedge x^{-1} dx) \tag{3.7.40}$$

и рассмотрим динамическую систему с гамильтонианом T^*X^-

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(yx^{-1})^2. \tag{3.7.41}$$

Соответствующие уравнения движения

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = yx^{-1}y \tag{3.7.42}$$

эквивалентны уравнениям геодезических на X^-:

$$\ddot{x} = \dot{x}x^{-1}\dot{x}. \tag{3.7.43}$$

Их решения имеют вид

$$x(t) = b\exp(2at)b^+, \tag{3.7.44}$$

где $a^+ = a$. Гамильтонова система, определенная формулой (3.7.41), инвариантна относительно точного симплектического действия (3.7.38) группы G. Для любого элемента ξ алгебры Ли $\mathcal{G}$ группы G экспоненциальная подгруппа $\exp(\xi t)$ порождает гамильтоново векторное поле

$$\frac{d}{dt}(x^{-1}) = -\xi^+ x^{-1} - x^{-1}\xi, \quad \frac{d}{dt} y = \xi y + y\xi^+. \tag{3.7.45}$$

Соответствующий гамильтониан имеет вид

$$H_\xi(x,y) = \mathrm{tr}(x^{-1} y\, \xi^+ + y x^{-1}\xi), \tag{3.7.46}$$

и, следовательно, ассоциированное отображение момента Φ: $T^*X^- \to \mathcal{G}^*$ дается формулой

$$\Phi(x,y) = 2yx^{-1}. \tag{3.7.47}$$

Рассмотрим теперь гамильтонову редукцию геодезического потока на X^- по отношению к действию максимальной компактной подгруппы $K = \mathrm{SU}(n)$. Действие K на T^*X^- гамильтоново, а соответствующее отображение момента φ: $T^*X^- \to \mathcal{K}^*$ из T^*X^- в пространство $\mathcal{K}^*$, дуальное к алгебре Ли $\mathcal{K}$ группы K, легко выводится из (3.7.46) с помощью условия $\xi^+ = -\xi$ или из (3.7.47) путем перехода к подгруппе k,

$$\varphi(x,y) = i\,[x^{-1}, y]. \tag{3.7.48}$$

Мы пришли к прежнему отображению момента (см. формулу (3.7.10), в которой x заменено на x^{-1}). Напомним теперь, что геодезические, которые проектируются в траектории системы типа II, обладают "моментом количества движения" очень специального вида:

$$\mu = d(e \otimes e - I), \qquad e = (1, \ldots, 1), \qquad d = 4a^2 g. \tag{3.7.49}$$

Поэтому мы рассмотрим редукцию именно для отображения момента такого вида. Приведенное пространство $\varphi^{-1}(\mu)/K_\mu$ (т.е. решения уравнения $i[x^{-1}, y] = \mu$ с точностью до действия группы K_μ) уже было описано формулами (3.7.17), (3.7.18):

$$x^{-1} = \mathrm{diag}(q_1, \ldots, q_n), \tag{3.7.50}$$

$$y_{jk} = p_j \delta_{jk} + i4a^2 g(1 - \delta_{jk})(q_j - q_k)^{-1}.$$

После канонического преобразования

$$q_j \to e^{2aq_j}, \qquad p_j \to \frac{1}{2a} p_j e^{-2aq_j} \tag{3.7.51}$$

уравнение (3.7.50) принимает вид

$$x^{-1} = \mathrm{diag}(e^{2aq_1}, \ldots, e^{2aq_n}), \tag{3.7.52}$$

$$(yx^{-1})_{jk} = \frac{1}{2a} p_j \delta_{kj} + id(1 - \delta_{jk}) e^{2aq_k}(e^{2aq_j} - e^{2aq_k})^{-1}.$$

Приведенный гамильтониан $H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(yx^{-1})^2$ теперь принимает вид

$$\tilde{H} = \frac{1}{4a^2} \sum_{j=1}^{n} p_j^2 + 4d^2 \sum_{j<k} \mathrm{sh}^{-2}[a(q_j - q_k)] \tag{3.7.53}$$

и, таким образом, описывает систему типа II. В частности, отсюда следует главный результат раздела (3.5): геодезические с "моментом количества движения" μ (3.7.49) проектируются в траектории системы типа II.

Иными словами, экспоненты $e^{q_j(t)}$ являются собственными значениями матрицы

$$x(t) = e^{aQ(0)}e^{2at}e^{aQ(0)} \tag{3.7.54}$$

при условии, что "момент количества движения"

$$i[\dot{x}, x^{-1}] = i(e^{aQ(0)}ae^{-aQ(0)} - e^{-aQ(0)}ae^{aQ(0)}) = \mu,$$

т.е. если a дается формулой (3.5.18). В общем, можно сказать, что метод проектирования, обсуждавшийся в разделах 3.3 и 3.5, является явной реализацией гамильтоновой редукции геодезического потока на симметрическом пространстве по отношению к группе симметрии этого пространства. Заметим, что матрица $L = x^{-1/2}yx^{-1/2}$, сопряженная yx^{-1}, совпадает с матрицей L (3.1.6) для систем типа II. Функции

$$I_k = \frac{1}{k}\operatorname{tr}(yx^{-1})^k = \frac{1}{k}\operatorname{tr}(L^k)$$

на T^*X^- являются K-инвариантными (в действительности G-инвариантными) и находятся в инволюции. В самом деле, $I_k(x, y) = \dfrac{1}{k}\operatorname{tr}(\Phi(x, y))^k$ – это инвариантный полином $\dfrac{1}{k}\operatorname{tr} A^k$, вычисленный с помощью отображения момента. Поскольку инвариантные полиномы коммутируют по Пуассону на $\mathscr{G}^*$, а отображение Φ является пуассоновым, то мы имеем $\{I_k, I_l\} = 0$. Следовательно, величины I_k представляют интегралы движения в инволюции для редуцированной системы с гамильтонианом $H = I_2$.

В заключение этого раздела заметим, что подстановка $a \to ia$ переводит систему типа II в систему типа III *). Эта же конструкция, примененная к пространству X_{n_1, n_2} (см. раздел 3.6), приводит к системам с двумя типами частиц.

3.8. Обобщение многочастичных систем типа I–III на случай системы корней произвольной полупростой алгебры Ли

Результаты предыдущих разделов можно распространить на более широкий класс гамильтоновых систем [255], который мы сейчас и опишем. Нам будут нужны некоторые факты из теории групп Ли, которые можно найти в книгах [7, 15] или же в приложениях к обзору [60].

Пусть $p = (p_1, \ldots, p_n)$ и $q = (q_1, \ldots, q_n)$ – векторы импульса и координаты в n-мерном евклидовом пространстве E_n, $(p, q) = \sum_{j=1}^{n} p_j q_j$ –

---

*) Геометрически это эквивалентно переходу от пространства X_n^- к симметрическому пространству X_n^+ положительной кривизны; $X_n^+ = \mathrm{SU}(n)$.

скалярное произведение этих векторов. Так же, как и в предыдущих разделах, мы рассмотрим динамическую систему с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}p^2 + U(q), \qquad p^2 = (p, p). \tag{3.8.1}$$

Потенциал $U(q)$ строится по определенной системе векторов, связанной с алгеброй Ли – так называемой системой корней*). Эту систему обозначим через $R = \{\alpha\}$. Такая система обладает тем свойством, что вместе с вектором α она обязательно содержит и вектор $-\alpha$, причем нулевой вектор не принадлежит системе R. Поэтому систему R можно представить как объединение подсистемы R_+ (положительных корней) и подсистемы R_- (отрицательных корней); при этом существует гиперплоскость в R, разделяющая подсистемы R_+ и R_-.

Введем обозначение $q_\alpha = (\alpha, q)$, и пусть g_α^2 – константы, одинаковые для эквивалентных корней, т.е. для корней, которые связаны друг с другом с помощью преобразований группы Вейля W.

Определим, следуя [255], потенциальную энергию формулой

$$U(q) = \sum_{\alpha \in R_+} g_\alpha^2 v(q_\alpha), \tag{3.8.2}$$

где функции $v(q_\alpha)$ определены формулой (3.1.14) для случаев I–IV и формулой

$$v(q_\alpha) = q_\alpha^{-2} + \omega^2 q_\alpha^2 \tag{3.8.3}$$

для случая V.

В простейшем случае, обозначаемом A_{n-1} и связанном с алгеброй Ли $\mathrm{su}(n)$, подсистема положительных корней имеет вид

$$R_+ = \{ e_i - e_j,\ i < j,\ i, j = 1, \ldots, n \}, \tag{3.8.4}$$

где $\{ e_j \}$ – стандартный ортономированный базис в пространстве E_n.

Нетрудно видеть, что при этом мы получаем системы, рассмотренные в предыдущих разделах.

Для более явного описания систем введем обозначения

$$V_-^n = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} v(q_j - q_k), \quad V_+^n = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} v(q_j + q_k),$$
$$V_1^n = \sum_{j=1}^{n} v(q_j), \quad V_2^n = \sum_{j=1}^{n} v(2q_j), \tag{3.8.5}$$

функцию $v(q_\alpha)$ мы будем считать функцией типа I–V.

Приведем сводку результатов для различных типов систем корней:

$$A_{n-1}:\ U = g^2 V_-^n,$$
$$B_n:\ U = g^2 [V_-^n + V_+^n] + g_1^2 V_1^n,$$
$$C_n:\ U = g^2 [V_-^n + V_+^n] + g_2^2 V_2^n,$$
$$D_n:\ U = g^2 [V_-^n + V_+^n], \tag{3.8.6}$$

---

*) Точное определение и свойства таких систем можно найти, например, в [7] и в [60] в приложении Б.

$$BC_n:\ U = g^2[V_-^n + V_+^n] + g_1^2 V_1^n + g_2^2 V_2^n,$$

$$G_2:\ U = g^2[v(q_1 - q_2) + v(q_2 - q_3) + v(q_1 - q_3)] +$$

$$+ g_1^2[v(-2q_1 + q_2 + q_3) + v(-2q_2 + q_3 + q_1) + v(-2q_3 + q_1 + q_2)],$$

$$F_4:\ U = g^2[V_-^4 + V_+^4] + g_1^2 V_1^4 + g_1^2 \sum_{\nu_j} v\left(\frac{1}{2}\left(q_1 + \sum_{j=2}^{4} (-1)^{\nu_j} q_j\right)\right),$$

$$E_6:\ U = g^2[V_-^5 + V_+^5] + g^2 \sum_{\nu_j} v\left(\frac{1}{2}\left(-q_8 + q_7 + q_6 - \sum_{j=1}^{5} (-1)^{\nu_j} q_j\right)\right),$$

$$E_7:\ U = g^2[V_-^6 + V_+^6] + g^2 v(q_7 - q_8) +$$

$$+ g^2 \sum_{\nu_j} v\left(\frac{1}{2}\left(-q_8 + q_7 - \sum_{j=1}^{6} (-1)^{\nu_j} q_j\right)\right),$$

$$E_8:\ U = g^2[V_-^8 + V_+^8] + g^2 \sum_{\nu_j} v\left(\frac{1}{2}\left(-q_8 - \sum_{j=1}^{r} (-1)^{\nu_j} q_j\right)\right).$$

В этих формулах суммирование по индексу ν_j должно удовлетворять следующим условиям:

для систем $\mathrm{I}E_6 - \mathrm{V}E_6$

$\nu_j = 0{,}1$, сумма $\sum_{j=1}^{5} \nu_j$ четна;

для системы $\mathrm{I}E_7 - \mathrm{V}E_7$

$\nu_j = 0{,}1$, сумма $\sum_{j=1}^{6} \nu_j$ нечетна;

для систем $\mathrm{I}E_8 - \mathrm{V}E_8$

$\nu_j = 0{,}1$, сумма $\sum_{j=1}^{7} \nu_j$ четна;

для систем $\mathrm{I}F_4 - \mathrm{V}F_4$

$\nu_j = 0{,}1$.

Отметим, что для систем A_{n-1}, E_6, E_7 и G_2 имеется дополнительное ограничение на координаты:

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 0 \quad \text{для } A_{n-1} \text{ и } G_2,\ q_7 = -q_8,$$
$$\text{для } E_7 \text{ и } q_6 = q_7 = -q_8 \text{ для } E_6.$$

Из приведенной выше формулы (3.8.6) видно, что система типа BC_n является наиболее общей среди классических систем B_n, C_n и D_n. Для этой системы

$$U(q) = g^2 \sum_{j<k} [v(q_j - q_k) + v(q_j + q_k)] +$$

$$+ g_1^2 \sum v(q_j) + g_2^2 \sum v(2q_j). \tag{3.8.7}$$

Системы B_n, C_n и D_n являются вырожденными случаями этой системы

$$B_n \to g_2 = 0;\ C_n \to g_1 = 0;\ D_n \to g_1 = g_2 = 0. \tag{3.8.8}$$

Отметим, что гамильтонову систему типа BC_n можно рассматривать так же, как систему $(2n + 1)$ частицы на прямой A_{2n}, при условии, что координаты и импульсы удовлетворяют дополнительному условию симметрии

$$\begin{gathered} q_{-k} = -q_k, \quad p_{-k} = -p_k, \quad p_0 = q_0 = 0; \\ k = -n, \ldots, 0, \ldots, n. \end{gathered} \tag{3.8.8}$$

Отметим еще, что конфигурационным пространством для систем типа I, II и V является камера Вейля

$$\Lambda = \{q \in E_n\colon\ q_\alpha > 0,\ \alpha \in R_+\}, \tag{3.8.9}$$

а для систем типа III и IV – альков Вейля

$$\Lambda_a = \{q \in E_n\colon\ q_\alpha > 0,\ \alpha \in R_+;\ q_\delta < d/a\}, \tag{3.8.10}$$

причем $d = \pi$ для систем типа III и зависит от вещественного периода функции $\mathcal{P}(q;\ \omega_1,\ \omega_2)$ для систем типа IV, δ – так называемый максимальный корень, см. [7].

3.9. Полная интегрируемость систем раздела 3.8

В предыдущем разделе был определен класс систем, связанных с системами корней полупростых алгебр Ли.

В настоящем разделе, следуя работе [255], будет показано, что ряд результатов, полученных ранее для простейших систем типа A_{n-1}, может быть перенесен и на общий случай.

Более точно, мы построим представление Лакса для систем типа BC_n, которое позволит доказать их полную интегрируемость. Мы также покажем, что системы типа BC_n представляют редукции геодезического потока на симметрических пространствах типа AIII, и дадим явные решения для потенциалов типа I, II, III и V. Что касается систем типа B_n, C_n и D_n, они представляют специальные случаи системы BC_n для подходящих значений констант связи.

Системы типа E_i, $i = 6$, 7 и 8; F_4 и G_2 также полностью интегрируемы, однако это требует отдельного доказательства, поскольку мы не знаем представления Лакса для них.

Один из способов доказательства полной интегрируемости гамильтоновой системы с потенциалом (3.8.2), связанным с системой корней R, состоит в следующем. Рассмотрим некомпактное симметрическое пространство X^- с ограниченной системой корней R (такое пространство всегда существует, но, вообще говоря, не единственно, см., например, [36]). Анализируя семейство операторов Лапласа на X^-, можно показать [96], что соответствующая квантовая система, и, следовательно, также классическая система, является вполне интегрируемой. Это верно, однако, лишь для соответствующих значений констант g_α^2 в приведенных в работе [96].

А. Представление Лакса. Пусть G, K – риманова симметрическая пара, где G – вещественная полупростая группа Ли, а K – подгруппа в G, выделяемая в ней инволюцией Картана. Пусть $\mathcal{G}$ и $\mathcal{K}$ – алгебры Ли групп G и K, и

$$\mathcal{G} = \mathcal{K} + \mathcal{P} \tag{3.9.1}$$

– соответствующее разложение Картана. Пусть $\mathcal{A}$ – подалгебра Картана в $\mathcal{P}$, R – соответствующая ограниченная система корней и R_+ – множество положительных корней. Нам удобно выбрать корневые векторы так, что $\theta E_\alpha = -E_\alpha$, где θ – автоморфизм Картана, связанный с разложением (3.9.1). Пусть $H_1, \ldots, H_n$, $n = \dim \mathcal{A}$ – ортогональный базис в $\mathcal{A}$ относительно формы Киллинга. С его помощью мы можем отождествить $\mathcal{A}$ с конфигурационным пространством R^n: $q = \Sigma q_j H_j$. Положим $q_\alpha = (q, \alpha)$ и определим

$$P = \Sigma p_j H_j, \quad X = \sum_{\alpha \in R_+} x(q_\alpha)(E_\alpha + E_{-\alpha}),$$
$$Y = \sum_{\alpha \in R_+} y(q_\alpha)(E_\alpha - E_{-\alpha}). \tag{3.9.2}$$

Заметим, что P лежит в $\mathcal{A}$, X в $\mathcal{P}$, а Y – в $\mathcal{K}$.

Предложение 1 [256]. Пусть $x(\xi)$ – нечетная функция и $y(\xi) = x'(\xi)$. Предположим, что существует элемент $D \in \mathcal{K}$ такой, что

$$[D, \mathcal{A}] = 0 \tag{3.9.3}$$

и

$$[X, D + Y] \in \mathcal{A}. \tag{3.9.4}$$

Тогда уравнение Лакса $\dot{L} = [L, M]$ с

$$L = P + X, \; M = D + Y \tag{3.9.5}$$

эквивалентно уравнению движения с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \sum_{\alpha \in R_+} g_\alpha^2 v(q_\alpha), \tag{3.9.6}$$

где $v(\xi) = x^2(\xi)$ и $g_\alpha^2 = (E_\alpha, E_{-\alpha})$.

Заметим, что для пары Лакса (9.3.5) $L \in \mathcal{P}$, а $M \in \mathcal{K}$. Ясно также, что любое линейное представление алгебры Ли $\mathcal{G}$ превращает эту пару Лакса в матричнозначную пару Лакса.

Пара Лакса такого типа для случая $G = SL(n, \mathbb{C})$, $K = \mathrm{SU}(n)$, приводящая к системам типа A_{n-1}, уже была описана. Перейдем теперь к рассмотрению систем типа BC_n.

Соответствующая симметрическая пара – это $G = \mathrm{SU}(n+1, n)$, $K = \mathrm{SU}(n+1) \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{U}(1)$. Группа Ли $\mathrm{SU}(n+1, n)$ состоит из линейных преобразований, которые оставляют инвариантными эрмитову форму

$$z_1 \bar{z}_{n+2} + \ldots + z_n \bar{z}_{2n+1} + z_{n+1} \bar{z}_{n+1}. \tag{3.9.7}$$

Обозначим через J матрицу этой формы. Тогда алгебра Ли $\mathcal{G} = \mathrm{SU}(n+1, n)$ состоит из матриц, удовлетворяющих условию

$$XJ + JX^+ = 0, \tag{3.9.8}$$

которые можно записать в блочных обозначениях как

$$X = \begin{pmatrix} A & C_1' & B_1 \\ -\bar{C}_2 & s & -\bar{C}_1 \\ B_2 & C_2' & -A^+ \end{pmatrix}, \tag{3.9.9}$$

где A, B_1, B_2 – матрицы порядка n, $B_1^+ = -B_1$, $B_2^+ = -B_2$, C_1 и C_2 – векторы, s – число, $\mathrm{Re}(s) = 0$. Инволюция Картана задается формулой $\theta x = -x^+$, и мы выбираем подалгебру Картана в $\mathcal{P}$ как алгебру диагональных матриц вида $Q = \mathrm{diag}(q_1, \ldots, q_n, 0, -q_1, \ldots, -q_n)$. При этом справедливо следующее

Предложение 2 [255]. Гамильтоновы системы $\mathrm{I}BC_n$ – $\mathrm{V}BC_n$ вполне интегрируемы при выполнении следующих условий:

$$\begin{aligned} &(\text{а})\ g_1 \neq 0,\ g_1^2 + \sqrt{2}\, g_2 g - 2g^2 = 0; \\ &(\text{б})\ g_1 = 0,\ g \text{ и } g_2 \text{ – произвольны.} \end{aligned} \tag{3.9.10}$$

Матрицы L и M имеют следующий вид:

$$L = P + X,\ M = D + Y, \tag{3.9.11}$$

где

$$\begin{aligned} P &= \mathrm{diag}[p_1, \ldots, p_n, 0, -p_1, \ldots, -p_n], \\ D &= \mathrm{diag}[d_1, \ldots, d_n, d_0, d_1, \ldots, d_n], \end{aligned} \tag{3.9.12}$$

а матрицы X и Y даются формулами

$$X = \begin{pmatrix} A_1 & C_1' & B_1 \\ \bar{C}_1 & 0 & -\bar{C}_1 \\ -B_1 & -C_1' & -A_1 \end{pmatrix}, \tag{3.9.13}$$

$$Y = \begin{pmatrix} A_2 & C_2' & B_2 \\ -\bar{C}_2 & 0 & -\bar{C}_2 \\ B_2 & C_2' & A_2 \end{pmatrix}, \tag{3.9.14}$$

где

$$\begin{aligned} \{A_1\}_{kl} &= ig(1 - \delta_{kl})x(q_k - q_l), \\ \{B_1\}_{kl} &= i[\sqrt{2}\, g_2 \delta_{kl} x(2q_k) + g(1 - \delta_{kl})x(q_k + q_l)], \\ \{C_1\}_{kl} &= ig_1 x(q_k), \\ \{A_2\}_{kl} &= ig(1 - \delta_{kl})y(q_k - q_l), \\ \{B_2\}_{kl} &= i[\sqrt{2}\, g_2 \delta_{kl} y(2q_k) + g(1 - \delta_{kl})y(q_k + q_l)], \\ \{C_2\}_k &= ig_1(q_k), \\ d_k &= i(c - e_k),\quad d_0 = i(c - e_0), \end{aligned}$$

$$e_k = g \sum_{s=1}^{n} [z(q_k - q_s) + z(q_k + q_s)] + g^{-1} g_1^2 z(q_k) + \sqrt{2}\, g_2 z(2q_k),$$

$$e_0 = 2g \sum_{s=1}^{n} z(q_s), \qquad c = \frac{2}{2n+1}\left[\sum_{s=1}^{n} e_s + \frac{1}{2} e_0\right].$$

Здесь $y(\xi) = x'(\xi)$ и $z(\xi) = x''(\xi)/2x(\xi)$.

Мы уже отмечали, что систему типа BC_n (для $g^2 = g_1^2 = 2g_2^2$) можно рассматривать как инвариантную часть системы A_{2n} на подмногообразии $q_k = -q_{-k}$, $p_k = -p_{-k}$, $k = -n, \ldots, +n$. Неудивительно поэтому, что пара Лакса (3.9.11) для этого частного случая совпадает с парой (3.1.6) – (3.1.7).

Доказательство полной интегрируемости для систем $\mathrm{I}BC_n$ – $\mathrm{IV}BC_n$ аналогично доказательству для систем $\mathrm{I}A_{n-1}$ – $\mathrm{IV}A_{n-1}$ (см. раздел. 3.2). Интегрируемость для систем типа $\mathrm{V}BC_n$ получается из доказательства для систем типа $\mathrm{I}BC_n$ с помощью того же приема, который был использован для систем типа A_{n-1} в работе [262].

Отметим, что, как показано в работах [238] и [208], полная интегрируемость имеет место для класса потенциалов, более широкого, чем (3.8.7), а именно для потенциалов вида

$$U(q_1, \ldots, q_n) = \sum_{j<k} [V(q_j - q_k) + V(q_j + q_k)] + \sum_{j=1}^{n} W(q_j), \qquad (3.9.15)$$

где пара функций $(V(\xi), W(\xi))$ дается формулами

$$V(\xi) = g^2 \xi^{-2}, \; W(\xi) = g_1^2 \xi^{-2} + g_2^2 \xi^2 + g_3^2 \xi^4 + g_4^2 \xi^6, \qquad (3.9.16)$$

$$V(\xi) = g^2 a^2 \operatorname{sh}^{-2}(a\xi), \; W(\xi) = g_1^2 \operatorname{sh}^{-2}(a\xi) + g_2^2 \operatorname{sh}^{-2}(2a\xi) + g_3^2 \operatorname{ch}(2a\xi) + g_4^2 \operatorname{ch}(4a\xi), \qquad (3.9.17)$$

где постоянные g_1^2, g_2^2, g_3^2 и g_4^2 произвольны;

$$V(\xi) = g^2 a^2 \wp(a\xi), \; W(\xi) = g_1^2 \wp(a\xi) + g_2^2 \wp(a\xi + \omega_1) + g_3^2 \wp(a\xi + \omega_2) + g_4^2 \wp(a\xi + \omega_1 + \omega_2), \qquad (3.9.18)$$

где ω_1 и ω_2 – полупериоды функции Вейерштрасса $\wp(\xi)$.

В формуле (3.9.11) постоянные g_j не являются произвольными, и должны удовлетворять нелинейному уравнению

$$.(\sum_{j=1}^{4} g_j^4 - \sum_{k \neq l}^{4} g_k^2 g_l^2) = 64 \prod_{j=1}^{4} g_j^2. \qquad (3.9.19)$$

Б. Интегрирование уравнений движения. Интегрирование уравнений движения для систем BC_n I–III, V (и, следовательно, для систем B_n, C_n и D_n) можно выполнить в явном виде аналогично тому, как это было сделано ранее для систем типа A_{n-1}. При этом используется проектирование движения по геодезическим на симметрических пространствах нулевой (тип I), отрицательной (тип II) и положительной (тип III) кривизны, связанных с группой $SU(n+1, n)$. Вся схема параллельна схеме разделов 3.3 и 3.5 и пригодна для любой пары Лакса из предложения 3.9.1.

1. Системы типа I. Пусть (G, K) – симметрическая пара Картана и пусть X – соответствующее симметрическое пространство нулевой кривизны, т.е. $X^0 = \mathscr{P}$ – симметрическая компонента разложения Картана $\mathscr{G} = \mathscr{K} + \mathscr{P}$.

Геодезические на X^0 определяются уравнением

$$\ddot{x} = 0 \qquad (3.9.16)$$

и являются просто прямыми линиями

$$x(t) = at + b, \; a, b \in X^0. \qquad (3.9.17)$$

Пусть $\mathcal{A}$ – подалгебра Картана в $\mathcal{P}$. Каждый элемент пространства $\mathcal{P}$ может быть переведен в $\mathcal{A}$ с помощью действия группы K, так что мы можем положить

$$x(t) = u(t)Q(t)u^{-1}(t), \quad u(t) \in K, \qquad Q(t) \in \mathcal{A}. \tag{3.9.18}$$

Здесь $Q(t)$ – "радиальная часть" элемента $x(t)$. Дифференцируя (3.9.18) по отношению к t, мы получим

$$\dot{x}(t) = u(t)L(t)u^{-1}(t), \tag{3.9.19}$$

где

$$L = P + [M, Q], \tag{3.9.20}$$

$$M = u^{-1}\dot{u}, \quad P = \dot{Q}. \tag{3.9.21}$$

Дифференцирование (3.9.19) дает

$$\ddot{x}(t) = u(t)(\dot{L} + [M, L])u^{-1}(t). \tag{3.9.22}$$

Таким образом, если пара Лакса L, M удовлетворяет соотношению (3.9.20), то уравнение $\dot{L} = [L, M]$ эквивалентно уравнению для геодезических (3.9.16). Соотношение (3.9.20), очевидно, выполняется для пары Лакса из предложения 1 с $x(\xi) = \xi^{-1}$. Точно так же, как и в разделе 3.3, мы видим, что если гамильтонова система с энергией

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \sum_{\alpha \in R_+} g_\alpha^2 v(q_\alpha), \quad v(\xi) = \xi^{-2}, \tag{3.9.23}$$

обладает парой Лакса, описанной в предложении 1, то траектория системы $Q(t)$ с начальными данными $Q(0)$, $P(0)$ является радиальной частью траектории движения по прямой линии,

$$L(0)t + Q(0). \tag{3.9.24}$$

Если при этом картановская подалгебра $\mathcal{A}$ состоит из диагональных матриц, как в случаях $\mathcal{A}_n$ и BC_n, рассмотренных выше, то координаты $q_j(t)$ – это просто собственные значения матрицы (3.9.24).

Скажем еще несколько слов о процессе рассеяния. Поскольку потенциал $v(q)$ для систем типа I стремится к нулю при $|q| \to \infty$, то мы получаем

$$Q(t) \sim p^{\pm}t + Q^{\pm} + O(t^{-1}) \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty. \tag{3.9.25}$$

Пусть Λ – камера Вейля, содержащая P^-, и s – элемент группы Вейля, который переводит Λ в $-\Lambda$: $s\Lambda = -\Lambda$. Тогда

$$P^+ = sP^-, \quad Q^+ = sQ^-, \tag{3.9.26}$$

и эти соотношения обобщают соотношения (3.3.19) и (3.3.22).

2. Системы типа II. Рассмотрим уравнения для гармонического осциллятора на X^0

$$\ddot{x} = -\omega^2 x. \tag{3.9.27}$$

Его решения, очевидно, имеют вид

$$x(t) = a\sin\omega t + b\cos\omega t. \tag{3.9.28}$$

Переходя к радиальной части

$$x(t) = u(t)Q(t)u^{-1}(t), \tag{3.9.29}$$

мы находим

$$\dot{x}(t) = u(t)L(t)u^{-1}(t), \tag{3.9.30}$$

где

$$L = P + [M, Q], \tag{3.9.31}$$

$$M = u^{-1}\dot{u}, \quad P = \dot{Q}, \tag{3.9.32}$$

и

$$\ddot{x} + \omega^2 x = u(\dot{L} + [M, L] + \omega^2 Q)u^{-1}. \tag{3.9.33}$$

Таким образом, если пара Лакса (L, M) удовлетворяет (3.9.31), то уравнение

$$\dot{L} = [L, M] - \omega^2 Q \tag{3.9.34}$$

эквивалентно уравнению гармонического движения (3.9.27). Заметим, что пару уравнений (3.9.31), (3.9.34) можно записать в виде (3.1.18)

$$\dot{L}^{\pm} = [L^{\pm}, M] \pm i\omega L^{\pm}, \quad L^{\pm} = L \pm i\omega Q. \tag{3.9.35}$$

Для (L, M) пары из предложения 1 с $x(\xi) = \xi^{-1}$ это эквивалентно уравнениям движения, порожденным гамильтонианом (3.9.23) с $v(\xi) = \xi^{-2} + \omega^2\xi^2$. Мы видим, таким образом, что их решение с начальными данными $Q(0)$, $L(0)$ является радиальной частью траектории

$$L(0)\sin\omega t + Q(0)\cos\omega t. \tag{3.9.36}$$

Заметим, что в этом случае движение является строго периодическим.

3. Системы типа II и III. Рассмотрим симметрическое пространство $X = G/K$ *). Геодезические на X даются формулой

$$x(t) = b\exp(at)(\theta b)^{-1}, \quad a \in \mathscr{P}, \quad b \in G, \tag{3.9.37}$$

где $b \to \theta b$ – автоморфизм Картана в G (в случае группы $SU(n+1, n)$, описанном выше, $(\theta b)^{-1} = b^{+}$). Перейдем к радиальной части $x(t)$:

$$x(t) = u(t)\exp(2aQ(t))u^{-1}(t), \quad u(t) \in K, \quad Q(t) \in A. \tag{3.9.38}$$

Повторяя рассуждения раздела 3.5, мы приходим к следующему результату: если гамильтонова система (3.9.23) с потенциалом $v(\xi) = a^2\,\mathrm{sh}^{-2}(a\xi)$ описывается парой Лакса из предложения 1 с $x(\xi) = a\,\mathrm{cth}\,a\xi$, тогда решение этой системы с начальными условиями $Q(0)$, $P(9)$ являет-

---

*) X может иметь или отрицательную, или положительную кривизну в зависимости от вида симметрической пары (G, K).

ся радиальной частью траектории

$$\exp(aQ(0))\exp(at)\exp(aQ(0)), \tag{3.9.39}$$

где q определяется из формулы

$$\exp(-aQ(0))\ a\exp(aQ(0))+\exp(aQ(0))\ a\exp(-aQ(0))=2aL(0). \tag{3.9.40}$$

3.10. Анизотропный гармонический осциллятор в поле центрального потенциала четвертой степени (система Гарнье)

Хорошо известно, что как анизотропный гармонический осциллятор, так и частица, движущаяся в поле произвольного центрального потенциала $U(r)$, являются интегрируемыми системами. Однако ангармонический осциллятор, находящийся в поле центрального потенциала, вообще говоря, не является интегрируемой системой. Исключительным здесь является случай центрального потенциала четвертой степени

$$U(r)=\alpha r^4=\alpha(\Sigma\, q_j^2)^2,$$

для которого система оказывается вполне интегрируемой.

Мы рассмотрим сначала более общую гамильтонову систему, открытую и подробно изученную Гарнье в 1919 г. [178]. Отметим, что Гарнье показал, что уравнения движения этой системы можно проинтегрировать с помощью тета-функций.

Гамильтониан системы Гарнье имеет вид

$$H=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j y_j+\sum_j a_j q_j x_j+\Big(\sum_j q_j x_j\Big)^2, \tag{3.10.1}$$

где $\{p, y\}$ – канонические импульсы, а $\{q, x\}$ – канонические координаты в стандартном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{4n}$. При этом, как нетрудно видеть, подпространство $\mathbb{R}^{2n}$, определяемое условиями

$$y_j=p_j,\quad x_k=q_k;\quad j,k=1,\ldots,n, \tag{3.10.2}$$

является инвариантным подпространством для системы Гарнье. Ограничение системы Гарнье на это подпространство приводит к интересующему нас случаю ангармонического осциллятора с гамильтонианом

$$H=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2+\sum_{j=1}^{n} a_j q_j^2+\Big(\sum_{j=1}^{n} q_j^2\Big)^2. \tag{3.10.3}$$

Для доказательства интегрируемости системы Гарнье проще всего использовать представление ее уравнений движения в форме Лакса. Такое представление было дано в работе [151], исходя из представления Лакса для нелинейного уравнения Шредингера

$$\dot{L}(\lambda)=[L(\lambda),M(\lambda)], \tag{3.10.4}$$

где

$$L(\lambda) = (q \otimes e_{n+1} - e_{n+1} \otimes x) + \lambda B + \lambda^{-1}(q \otimes x + $$
$$+ p \otimes e_{n+1} + e_{n+1} \otimes y + (q, x) e_{n+1} \otimes e_{n+1} + A), \tag{3.10.5}$$
$$M(\lambda) = (q \otimes e_{n+1} - e_{n+1} \otimes x) + \lambda B. \tag{3.10.6}$$

Здесь L и M — матрицы порядка $(n + 1)$, $\{ e_1, \ldots, e_{n+1} \}$ — стандартный ортонормированный базис в пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$,

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{diag}[a_1, \ldots, a_n, 0], \\ B &= \mathrm{diag}[0, 0, \ldots, 0, 1]. \end{aligned} \tag{3.10.7}$$

Лаксово представление для ангармонического осциллятора получается при замене в (3.10.5), (3.10.6) y на p и x на q.

Рассмотрим подробнее случай общего положения, когда все величины a_j различны и отличны от нуля. В этом случае, как показано в работе [188], величины

$$F_j = \sum_k{}' (a_j - a_k)^{-1} l_{jk}^2 + p_j^2 + a_j q_j^2 + a_j^2 \left(\sum_k q_k^2 \right), \tag{3.10.8}$$

где $l_{jk} = (q_j p_k - q_k p_j)$, являются интегралами движения *), причем все они квадратичны по импульсам.

Нетрудно видеть, что все они функционально независимы. Можно показать также прямым вычислением, что все они находятся в инволюции. Замечая, что

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} F_j, \tag{3.10.9}$$

мы приходим к выводу, что рассматриваемая система является вполне интегрируемой. Тот факт, что интегралы движения F_j зависят от импульсов квадратично, указывает на то, что уравнение Гамильтона–Якоби для данной системы допускает разделение переменных. Как оказывается, в этом случае разделение переменных происходит в эллиптической системе координат. Относительно деталей интегрирования уравнения Гамильтона–Якоби в эллиптической системе координат см. работу [312].

Перейдем теперь к рассмотрению обобщения ангармонического осциллятора, данному в работе [312]. А именно, возьмем систему с гамильтонианом

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} p_k^2 + \sum_k (a_k q_k^2 + c_k q_k^{-2}) + (\Sigma q_k^2)^2. \tag{3.10.10}$$

---

*) Полная интегрируемость рассматриваемой системы была доказана также в работе [151], где эта система рассматривалась как стационарный поток для многокомпонентного нелинейного уравнения Шредингера. В этой работе была указана также рекуррентная конструкция интегралов движения.

Для такой системы, так же, как и для системы, рассмотренной ранее, величины

$$\tilde{F}_j = \sum_k{}' \, (a_j - a_k)^{-1}(l_{jk}^2 + c_j q_k^2 q_j^{-2} + c_k q_j^2 q_k^{-2}) +$$
$$+ p_j^2 + a_j q_j^2 + q_j^2 \left(\sum_k q_k^2 \right) + c_j q_j^{-2} \qquad (3.10.11)$$

являются интегралами движения. Все они квадратичны по импульсам, функционально независимы и находятся в инволюции, так что рассматриваемая система является вполне интегрируемой. Относительно интегрирования уравнения Гамильтона–Якоби путем разделения переменных в эллиптической системе координат см. работу [312]. Там же приведено представление Лакса для этой системы.

3.11. Семейство интегрируемых потенциалов четвертой степени, связанных с симметрическими пространствами

В данном разделе, следуя работе [174], используем конструкцию определенного семейства гамильтоновых систем, связанных с эрмитово симметрическими пространствами. Гамильтониан такой системы имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} p_k^2 + U(q_1, \ldots, q_n),$$

где $U(q_1, \ldots, q_n)$ – четный полином четвертой степени по переменным q_j. Важность изучения таких систем связана с тем, что их можно использовать как простейшие нелинейные аппроксимации для четных потенциалов в окрестности положения равновесия. Отметим, что такие системы являются обобщением системы, рассмотренной в предыдущем разделе.

Напомним сначала необходимые для нас сведения из теории эрмитово симметрических пространств. Пусть $\mathcal{G}$ – вещественная простая алгебра Ли. Тогда

$$\mathcal{G} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{P}, \qquad (3.11.1)$$

где $\mathcal{K}$ – максимальная компактная подалгебра в $\mathcal{G}$, $\mathcal{P}$ – пространство, дополнительное к $\mathcal{K}$ в $\mathcal{G}$. При этом

$$[\mathcal{K}, \mathcal{K}] = \mathcal{K}, \quad [\mathcal{K}, \mathcal{P}] = \mathcal{P}, \quad [\mathcal{P}, \mathcal{P}] = \mathcal{K}. \qquad (3.11.2)$$

Специфическая особенность эрмитово симметрического пространства заключается в том, что существует элемент $A \in \mathcal{K}$ такой, что $\mathcal{K}$ – это централизатор A в $\mathcal{G}$, т.е. $\mathcal{K}$ – это множество элементов $B \in \mathcal{G}$ таких, что $[B, A] = 0$. Элемент A сильно вырожден: для него собственные значения матрицы ad_A равны $0, \pm a$. Следовательно,

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ \oplus \mathcal{P}^-,$$
$$[A, \mathcal{K}] = 0, \quad [A, X^\pm] = \pm a X^\pm, \quad X^\pm \in \mathcal{P}^\pm. \qquad (3.11.3)$$

Для величины $Q = Q(x, t) \in \mathcal{P}$ рассмотрим линейную спектральную задачу

$$\psi_x = (Q + \lambda A)\,\psi, \qquad (3.11.4)$$

где λ — спектральный параметр, t — время, а зависимость $\psi(x, t)$ от времени определяется уравнением

$$\psi_t = P(x, t, \lambda)\,\psi. \tag{3.11.5}$$

Тогда условие совместности уравнений (3.11.4) и (3.11.5) имеет вид

$$Q_t = P_x - [Q + \lambda A, P]. \tag{3.11.6}$$

Пусть $e_{\pm\alpha}$ — базис пространства $\mathscr{P}^{\pm}$, Λ — постоянная диагональная матрица,

$$Q = \sum_{\alpha} (q^{\alpha} e_{\alpha} + r^{-\alpha} e_{-\alpha}), \tag{3.11.7}$$

$$P = \frac{1}{a} \sum_{\alpha} (q_x^{\alpha} e_{\alpha} - r_x^{-\alpha} e_{-\alpha}) - \frac{1}{a} \sum_{\alpha, \beta} q^{\alpha} r^{-\beta} [e_{\alpha}, e_{\beta}] + \Lambda + \lambda Q + \lambda^2 A. \tag{3.11.8}$$

Тогда уравнения совместности имеют вид

$$\begin{aligned} a q_t^{\alpha} &= q_{xx}^{\alpha} + \sum_{\beta, \gamma, \delta} R^{\alpha}_{\beta\gamma-\delta} q^{\beta} q^{\gamma} r^{-\delta} + \omega_{\alpha} q^{\alpha}, \\ -a r_t^{-\alpha} &= r_{xx}^{-\alpha} + \sum_{\beta, \gamma, \delta} R^{-\alpha}_{-\beta-\gamma\delta} r^{-\beta} r^{-\gamma} q^{\delta} + \omega_{\alpha} r^{-\alpha}, \end{aligned} \tag{3.11.9}$$

где $R^{\alpha}_{\beta,\gamma,-\delta}$ — тензор кривизны данного симметрического пространства числа ω_{α} — линейные комбинации собственных значений матрицы Λ Интегрируемые квадратичные потенциалы соответствуют стационарным потокам системы (3.11.9). При этом, как нетрудно проверить, эти пото ки являются гамильтоновыми с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H = \sum_{\alpha, \beta} g^{\alpha, -\beta} p_{\alpha} s_{-\beta} &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} R_{-\alpha\beta\gamma-\delta}\, r^{-\alpha} q^{\beta} q^{\gamma} r^{-\delta} + \\ &+ \sum_{\alpha, \beta} \omega_{\alpha} g_{\alpha-\beta} q^{\alpha} r^{-\beta}, \end{aligned} \tag{3.11.10}$$

где величины $p_{\alpha} = \sum_{\beta} g_{\alpha,-\beta} r_x^{-\beta}$ и $s_{-\beta} = \sum_{\alpha} g_{\alpha,-\beta} q_x^{\alpha}$ — это импульсы, канонически сопряженные координатам q^{α} и $r^{-\beta}$ соответственно, а $g_{\alpha\beta} = \mathrm{tr}(e_{\alpha} e_{\beta})$ — метрика на симметрическом пространстве. Эти уравнения допускают представление Лакса

$$\frac{\partial L}{\partial x} = [Q + \lambda A, L] \tag{3.11.11}$$

(при этом следует считать переменную x временной переменной).

Заметим, что

$$H = \frac{1}{4}\, \mathrm{tr}(L^2)\,|_{\lambda = 0}. \tag{3.11.12}$$

Интересные интегрируемые системы получаются при ограничении

$$r^{-\alpha} = -q^{\alpha}, \quad s_{-\alpha} = -p_{\alpha}. \tag{3.11.13}$$

В этом случае канонические уравнения ~~имеют~~ имеют вид

$$q_{xx}^{\alpha} = R^{\alpha}_{\beta\gamma-\delta} q^{\beta} q^{\gamma} q^{\delta} - \omega_{\alpha} q^{\alpha}. \tag{3.11.14}$$

Таким образом, каждому эрмитово симметрическому пространству размерности $2n$ (размерность пространства всегда четна) соответствует интегрируемая гамильтонова система с n степенями свободы. Как хорошо известно, имеются четыре бесконечные серии эрмитово симметрических пространств. Приведем потенциалы для некоторых простейших систем:

$$U(q_1,\ldots,q_n)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\omega_j q_j^2+\frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^{n} q_k^2\Big)^2, \tag{3.11.15}$$

$$U(q_1,\ldots,q_4)=\frac{1}{2}\sum_{1}^{4}\omega_j q_j^2+\frac{1}{2}\Big(\sum_{1}^{4} q_k^2\Big)^2-(q_1q_3-q_2q_4)^2, \tag{3.11.16}$$

$$U(q_1,q_2,q_3)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\omega_j(\delta_{j2}+1)\,q_j^2+\frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^{3}(\delta_{j2}+1)\,q_j^2\Big)^2-$$
$$-(q_1q_3-q_2^2)^2, \tag{3.11.17}$$

$$U(q_1,\ldots,q_6)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{6}\omega_j q_j^2+\frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^{6} q_j^2\Big)^2-(q_3q_5-q_2q_6-q_1q_4)^2, \tag{3.11.18}$$

$$U(q_1,\ldots,q_4)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4}\omega_j q_j^2+\frac{1}{2}(\Sigma\, q_k^2)^2-(q_1q_3+q_2q_4)^2. \tag{3.11.19}$$

Первые два потенциала отвечают симметрическому пространству $SU(m+n)/SU(m)\times SU(n)\times U(1)$. Третий потенциал соответствует симметрическому пространству $Sp(4)/U(2)$. Четвертый потенциал отвечает симметрическому пространству $SO(8)/U(4)$ и, наконец, пятый потенциал отвечает симметрическому пространству $SO(6)/SO(4)\times SO(2)$.

Можно показать, что все описанные системы являются вполне интегрируемыми. При этом система Гарнье, рассмотренная в предыдущем разделе, связана с симметрическим пространством типа $SU(n+1)/SU(n)\times$ $\times\, U(1)$. Следующей по сложности является система, связанная с пространством $SU(n+2)/SU(n)\times SU(2)\times U(1)$. Для этой системы матрица $L(\lambda)$ имеет вид

$$\begin{array}{lll}
q^2+\delta_{-1}-n(n+2)\,\lambda^2 & \rho & \ldots\; p_k-i(n+2)\,\lambda q_k\;\ldots \\
\rho & r^2+\delta_0-n(n+2)\,\lambda^2\;\ldots & s_k-i(n+2)\,\lambda r_k\;\ldots \\
\hline
\vdots & \vdots & \\
p_j+i(n+2)\,\lambda q_j & s_j+i(n+2)\,\lambda r_j & -q_jq_k-r_jr_k+ \\
 & & +\,[2(n+2)\lambda^2+\alpha_j]\;\delta_{jk} \\
\vdots & \vdots &
\end{array}, \tag{3.11.20}$$

где q_k и r_k — координаты, p_k и s_k — сопряженные им импульсы. Если ввести обозначения

$$q^2=\sum_{k=1}^{n} q_k^2,\quad r^2=\sum_{k=1}^{n} r_k^2,\quad \rho^2=\sum_{1}^{n} q_k r_k, \tag{3.11.21}$$

то гамильтониан принимает вид

$$H=\frac{1}{4}\operatorname{tr}(L^2)_{\lambda=0}=\frac{1}{2}\sum_1^n(p_k^2+s_k^2)+\frac{1}{2}q^4+\frac{1}{2}r^4+\rho^4-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n(\alpha_k-\delta_{-1})q_k^2-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n(\alpha_k-\delta_0)r_k^2. \qquad (3.11.22)$$

Таким образом, мы имеем дело с гамильтоновой системой с $2n$ степенями свободы. Для этой системы имеется n интегралов движения, квадратично зависящих от импульсов:

$$F_j=\sum_{k\neq j}{}'\frac{1}{\alpha_j-\alpha_k}(q_jp_k-q_kp_j+r_js_k-r_ks_j)^2+$$
$$+p_j^2+s_j^2+q_j^2q^2+r_j^2r^2+2q_jr_j\rho^2+(\delta_{-1}-\alpha_j)q_j^2+(\delta_0-\alpha_j)r_j^2. \qquad (3.11.23)$$

Однако кроме них имеется также n интегралов движения четвертой степени по импульсам. Как можно показать [174], все эти интегралы фундаментально независимы и находятся в инволюции. Следовательно, рассматриваемая система является вполне интегрируемой.

Отметим еще работу [103], где дана орбитная интерпретация рассматриваемых систем.

Глава 4

ЦЕПОЧКА ТОДЫ

Цепочка Тоды — это система частиц на прямой с экспоненциальным взаимодействием между ближайшими соседями.

Для бесконечного числа частиц на прямой такая система была впервые рассмотрена в 1967 г. в работе Тоды [298, 299], который обнаружил, что в такой ангармонической решетке могут распространяться незатухающие нелинейные волны.

Случай конечного числа частиц отличается от изученного Тодой рядом специфических особенностей и должен рассматриваться отдельно. Прежде всего надо различать непериодическую цепочку n частиц на прямой, когда первая и последняя частицы не взаимодействуют друг с другом, и периодическую цепочку n частиц, когда эти частицы взаимодействуют так же, как и все остальные.

Более простой случай непериодической цепочки Тоды и его обобщения и будут представлены в данной главе. Периодическая цепочка будет рассмотрена отдельно; в этом случае приходится использовать более сложный математический аппарат — теорию абелевых интегралов и тета-функций.

Остановимся кратко на истории данной задачи, отсылая за деталями к монографии [33].

В 1974 г. в работе [196] для цепочки Тоды, состоящей из n частиц, были найдены n функционально независимых интегралов движения. В том же году в работах Флашки [168, 169] и Манакова [88] была доказана инволютивность этих интегралов и, тем самым, полная интегрируемость рассматриваемой системы. Вскоре Мозером [252] и Кацем и ван Мербеке [214] было показано, что для непериодической цепочки величины $\exp(q_j(t))$ (q_j — координата j-й точки) являются рациональными функциями экспонент $\exp(\lambda_k t)$, где λ_k — асимптотический импульс k-й частицы при $t \to +\infty$.

В работе Богоявленского [125] были введены обобщенные цепочки Тоды, связанные с системами корней произвольной простой алгебры Ли. При этом обычная цепочка Тоды связана с алгеброй Ли $\mathrm{sl}(n, \mathbb{R})$-алгеброй вещественных матриц порядка n со следом, равным нулю. Наконец, в работах Ольшанецкого и автора [256, 97] и Костанта [222] с помощью методов теории групп уравнения движения для непериодического случая были проинтегрированы явно. Отметим еще работу Адлера [109], где было показано, что фазовое пространство непериодической цепочки Тоды изоморфно орбите коприсоединенного представления группы треугольных матриц со стандартной симплектической структурой на этой орбите. Другие обобщенные цепочки Тоды связаны с орбитами коприсоединенного представления разрешимых групп Ли [292, 293, 272, 216, 181, 182].

Периодическая цепочка Тоды является значительно более сложной системой и не будет подробно рассматриваться в данной главе. Отметим лишь, что хотя она и вполне интегрируема, однако, в отличие от непериодической цепочки, она не является асимптотически свободной: при $t \to \pm\infty$ она испытывает сложные нелинейные колебания. Уравнения движения такой системы были сведены к квадратурам в работе Каца и ван Мербеке [215] и проинтегрированы в тета-функциях в работе Кричевера [83] методами алгебраической геометрии, развитыми в обзоре [12]. Случай обобщенных периодических цепочек Тоды [125] изучен в работах [272, 273, 110, 111].

Интегрирование так называемой неабелевой цепочки Тоды было выполнено Кричевером (см. приложение к работе [13]). Отметим еще работу [246], где было показано, что для периодической цепочки Тоды уравнения движения могут быть линеаризованы на так называемом многообразии Якоби алгебраической кривой, связанной с данной системой, а также ряд других работ [170, 158, 171, 167, 112, 113, 216, 181, 182, 247, 68], посвященных различным аспектам рассматриваемой проблемы.

4.1. Обычная цепочка Тоды. Представление Лакса. Полная интегрируемость

Обычная непериодическая цепочка Тоды — это система n взаимодействующих частиц на прямой с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n} p_j^2 + g^2 \sum_{1}^{n-1} \exp[2(q_j - q_{j+1})]. \tag{4.1.1}$$

Для периодического случая такая система характеризуется гамильтонианом

$$H' = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n} p_j^2 + g^2 \sum_{1}^{n} \exp[2(q_j - q_{j+1})], \quad q_{n+1} = q_1. \tag{4.1.1$'$}$$

Здесь q_j — координата j-й частицы, p_j — ее импульс. Заметим, что после перехода в систему центра масс ($\sum_{1}^{n} p_j = 0$) мы получаем систему с $n-1$ степенью свободы. Отметим также, что с помощью сдвигов координат $q_j \to q_j + a_j$ мы можем перейти к случаю $g = 1$ для непериодической цепочки и к гамильтониану

$$H'' = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n} p_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \exp[2(q_j - q_{j+1})] + f^2 \exp[2(q_n - q_1)] \tag{4.1.1$''$}$$

для периодической цепочки.

Уравнения движения в непериодическом случае имеют вид (мы полагаем далее $g = 1$)

$$\begin{aligned} &\dot q_j = p_j, \quad j = 1, \ldots, n, \\ &\dot p_1 = -2\exp[2(q_1 - q_2)], \quad \dot p_n = 2\exp[2(q_{n-1} - q_n)], \\ &\dot p_j = -2\exp[2(q_j - q_{j+1})] + 2\exp[2(q_{j-1} - q_j)], \quad j = 2, \ldots, (n-1). \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

В периодическом же случае мы имеем

$$\dot{q}_j = p_j,\ \dot{p}_j = 2\{\exp[2(q_{j-1} - q_j)] - \exp[2(q_j - q_{j+1})]\}. \qquad (4.1.2')$$

Хотя уравнения (4.1.2) и (4.1.2′), на первый взгляд, отличаются друг от друга незначительно, поведение их решений имеет совершенно различный характер: уравнения (4.1.2) при $t \to \pm\infty$ описывают свободное движение частиц, так что в этом случае естественно рассматривать задачу рассеяния; решения же уравнений (4.1.2′) квазипериодичны по t и описывают сложные нелинейные колебания системы.

1. **Представление Лакса**. Как в непериодическом, так и в периодическом случаях уравнения движения цепочки Тоды для n частиц обладают n интегралами движения [196]. Явный вид их сразу же следует из представления Лакса, открытого в работах Флашки [168, 169] и Манакова [88]. Именно, в этих работах было показано, что уравнения движения (4.1.2) и (4.1.2′) эквивалентны матричному уравнению Лакса

$$\dot{L} = [L, M]. \qquad (4.1.3)$$

Здесь матрицы L и M зависят от динамических переменных p_j и q_k и в непериодическом случае являются матрицами Якоби (т.е. все элементы этих матриц равны нулю, за исключением элементов на главной диагонали и двух соседних с ней диагоналях). Иными словами, матрицы L и M имеют вид

$$L = \sum_{j=1}^{n} p_j E_{jj} + \sum_{k=1}^{n-1} \exp(q_k - q_{k+1})(E_k + E_{-k}), \qquad (4.1.4)$$

$$M = \sum_{k=1}^{n-1} \exp(q_k - q_{k+1})(E_k - E_{-k}). \qquad (4.1.5)$$

Здесь

$$E_k = E_{k,k+1}, \quad E_{-k} = E_k^{+} = E_{k+1,k}, \qquad (4.1.6)$$

E_{jk} – матрица, элемент которой, стоящий в j-й строке и k-м столбце, равен единице, остальные элементы равны нулю. В периодическом случае также имеет место представление Лакса, в котором L и M имеют вид (4.1.4) и (4.1.5), где суммирование по k уже производится от 1 до n, $E_n = E_{n,1}$, $q_{n+1} = q_1$.

Эквивалентность уравнений движения и уравнения Лакса проверяется путем непосредственных вычислений, которые мы оставляем читателю.

Прежде чем перейти к рассмотрению следствий из представления Лакса, укажем еще несколько иных форм этого представления, полезных для дальнейшего.

а) Несимметрическая форма

$$\tilde{L} = \sum_{j=1}^{n} p_j E_{jj} + \sum_{k=1}^{n-1} \{\exp[2(q_k - q_{k+1})]\, E_k + E_{-k}\}, \qquad (4.1.4')$$

$$\tilde{M} = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \exp[2(q_k - q_{k+1})]\, E_k. \qquad (4.1.5')$$

Эта форма получается из предыдущей путем преобразования подобия

$$L \to QLQ^{-1}, \quad M \to QMQ^{-1} - \dot{Q}Q^{-1} + \tilde{L},$$
$$Q = \sum_{j=1}^{n} \exp(q_j) \cdot E_{jj}. \tag{4.1.7}$$

б) Форма Флашки [168]. Перейдем от переменных p_j, q_k к новым переменным

$$a_j = \exp(q_j - q_{j+1}), \quad b_k = p_k, \quad j = 1, \ldots, (n-1), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{4.1.8}$$

Уравнения движения теперь принимают вид

$$\dot{b}_k = 2(-a_k^2 + a_{k-1}^2), \quad \dot{a}_k = a_k(b_k - b_{k+1}). \tag{4.1.9}$$

Мы получили систему уравнений с простейшей (квадратичной) нелинейностью; отметим аналогию этих уравнений с уравнениями движения твердого тела вокруг неподвижной точки, которые также квадратичны по динамическим переменным.

Выражая гамильтониан через переменные a_j и b_k, получаем

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(L^2) = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n} b_j^2 + \sum_{1}^{n-1} a_j^2. \tag{4.1.10}$$

Соответственно для скобок Пуассона переменных a_j и b_k имеем

$$\{ b_j, a_{j-1} \} = -a_{j-1}, \quad \{ b_j, a_j \} = a_j. \tag{4.1.11}$$

Остальные скобки Пуассона равны нулю. Это определяет пуассонову структуру в пространстве переменных (a_j, b_k).

Из (4.1.10) и (4.1.11) следует, что уравнения (4.1.9) можно записать в гамильтоновом виде:

$$\dot{a}_j = \{ H, a_j \}, \quad \dot{b}_k = \{ H, b_k \}. \tag{4.1.12}$$

в) Приведем еще одну форму представления Лакса, которая допускает прямое обобщение в терминах алгебр Ли (см. раздел 4.5).

Заметим, что величина $\sum_{1}^{n} p_j$ от времени не зависит. Это дает возможность перейти в систему центра масс $(\sum_{1}^{n} p_j = 0)$, в которой динамическими переменными являются величины

$$
\begin{aligned}
a_j &= \exp(q_j - q_{j+1}), \quad j = 1, \ldots, (n-1),\\
\tilde{b}_1 &= \frac{1}{n} [(n-1) p_1 - p_2 - \ldots - p_n],\\
\tilde{b}_2 &= \frac{1}{n} [(n-2)(p_1 + p_2) - 2p_3 - \ldots - 2p_n],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\tilde{b}_{n-1} &= \frac{1}{n} [p_1 + \ldots + p_{n-1} - (n-1) p_n].
\end{aligned}
\tag{4.1.13}
$$

В этих переменных для уравнений движения по-прежнему имеет место представление Лакса (4.1.3), где

$$L = \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{b}_j H_j + \sum_{k=1}^{n-1} a_k (E_k + E_{-k}), \quad M = \sum_{k=1}^{n-1} a_k (E_k - E_{-k}), \tag{4.1.14}$$

величины a_k и $\tilde{b}_j$ даются формулой (4.1.13), а

$$H_j = E_{jj} - E_{j+1,\,j+1}, \quad E_k = E_{k,\,k+1}, \quad E_{-k} = E_k^{+} = E_{k+1,\,k}. \tag{4.1.15}$$

Отметим, что эквивалентность представления Лакса и уравнений движения сразу же следует из перестановочных соотношений для матриц H_j, E_k и E_{-k}, $j, k = 1, \ldots, (n-1)$,

$$[H_j, H_k] = 0, \quad [E_j, E_{-k}] = H_j \delta_{jk}, \quad [H_j, E_k] = C_{jk} E_k. \tag{4.1.16}$$

Здесь матрица C_{jk} определяет перестановочные соотношения для H_j и E_k и имеет вид

$$C_{jk} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.1.17}$$

Построенное выше представление Лакса тесно связано с алгеброй Ли $\mathcal{G} = \mathrm{sl}(n, \mathbb{R})$ — алгеброй вещественных матриц порядка n с нулевым следом. Рассмотрим естественное разложение

$$\mathcal{G} = \mathcal{K} + \mathcal{P}, \tag{4.1.18}$$

где $\mathcal{K}$ — алгебра вещественных кососимметричных матриц, $\mathcal{P}$ — пространство вещественных симметричных матриц. Тогда

$$[\mathcal{K}, \mathcal{K}] \subset \mathcal{K}, \quad [\mathcal{K}, \mathcal{P}] \subset \mathcal{P}, \quad [\mathcal{P}, \mathcal{P}] \subset \mathcal{K} \tag{4.1.19}$$

и при этом

$$L \subset \mathcal{P}, \quad M \in \mathcal{K}. \tag{4.1.20}$$

Величины H_j, E_k и E_{-l} порождают алгебру $\mathcal{G}$, а величины $(E_k - E_{-k})$ — алгебру $\mathcal{K}$.

Пусть $\{e_j\}$ — стандартный ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{R}^n$: $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$. В подпространстве $\mathbb{R}^{n-1}$, ортогональном вектору $e = (1, 1, \ldots, 1)$, введем базис $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}$:

$$\alpha_1 = e_1 - e_2, \ldots, \alpha_{n-1} = e_{n-1} - e_n, \tag{4.1.21}$$

и дуальный к нему базис $\{\beta_k\}$:

$$\beta_1 = \frac{1}{n} ((n-1) e_1 - e_2 - \ldots - e_n),$$

$$\beta_2 = \frac{1}{n} ((n-2)(e_1 + e_2) - 2e_3 - \ldots - 2e_n), \tag{4.1.22}$$

. . . .

$$\beta_{n-1} = \frac{1}{n} ((e_1 + e_2 + \ldots + e_{n-1} - (n-1) e_n),$$

$$(\alpha_j, \beta_k) = \delta_{jk}.$$

Тогда величины a_j и b_k, входящие в матрицы L и M, принимают вид

$$\widetilde{b}_j = (\beta_j, p), \quad a_j = \exp(\alpha_j, q). \tag{4.1.23}$$

В этих переменных пуассонова структура имеет особенно простой вид:

$$\{\widetilde{b}_j, a_k\} = a_k \delta_{jk}. \tag{4.1.24}$$

Приведем еще выражение для гамильтониана,

$$H = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(L^2) = \sum_1^{n-1} \widetilde{b}_j^2 - \sum_1^{n-2} \widetilde{b}_j \widetilde{b}_{j+1} + \sum_1^{n-1} a_j^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_1^{n-1} C_{jk}\widetilde{b}_j\widetilde{b}_k + \sum_1^{n-1} a_j^2, \quad C_{jk} = (\alpha_j, \alpha_k), \tag{4.1.25}$$

и для уравнений движения:

$$\dot{\widetilde{b}}_j = -2a_j^2, \quad \dot{a}_j = C_{jk} a_j \widetilde{b}_k = (\alpha_j, p)\, a_j. \tag{4.1.26}$$

Заметим, что векторы α_j полностью характеризуют рассматриваемую систему, они образуют так называемую систему простых корней алгебры $\mathrm{sl}(n, \mathbb{R})$. Отметим, что угол между векторами α_j и α_{j+1} равен 120°, а все остальные векторы ортогональны друг другу. Удобно изображать эти векторы кружочками, соединяя неортогональные друг другу векторы линией. Мы приходим, таким образом, к схеме Дынкина алгебры $\mathrm{sl}(n, \mathbb{R})$

$$\overset{\alpha_1}{\circ}\!-\!\overset{\alpha_2}{\circ}\!-\ \dots\ -\!\overset{\alpha_{n-1}}{\circ}, \tag{4.1.27}$$

которая полностью характеризует рассматриваемую цепочку Тоды.

Отметим еще, что матрица C_{jk}, называемая матрицей Картана, также определяется схемой Дынкина:

$$C_{jk} = (\alpha_j, \alpha_k), \quad |\alpha_j|^2 = (\alpha_j, \alpha_j) = 2. \tag{4.1.28}$$

В общем случае любой простой алгебре Ли соответствует интегрируемая система типа Тоды, как будет объяснено в разделе 4.5.

2. **Анализ уравнений движения.** Перейдем теперь к рассмотрению следствий из представления Лакса (4.1.3). Из него сразу же получаем

$$L(t) = u(t)\, L(0)\, u^{-1}(t), \tag{4.1.29}$$

где $u(t)$ – ортогональная матрица, являющаяся решением уравнения

$$\dot{u} = -Mu, \quad u(0) = I, \quad M = -\dot{u}u^{-1} = u^{-1}\dot{u}. \tag{4.1.30}$$

Из (4.1.29) сразу же следует, что величины

$$I_k = k^{-1}\operatorname{tr}(L^k), \quad I_2 = H, \ k = 2, \dots, n \tag{4.1.31}$$

являются интегралами движения.

В ряде случаев, однако, бывает удобно использовать другой набор интегралов движения $\{\mathcal{J}_k\}$, $k = 2, \dots, n$. Эти величины определяются уравнением

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - L) = \prod_k (\lambda - \lambda_k) = \sum_k (-1)^k \mathcal{J}_k \lambda^{n-k}. \tag{4.1.32}$$

Докажем теперь, следуя Мозеру [252], что в непериодическом случае для произвольных начальных условий

$$a_k(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty, \quad k = 1, \ldots, (n-1). \tag{4.1.33}$$

Это означает, что расстояние между любыми двумя частицами неограниченно возрастает:

$$|q_{k+1}(t) - q_k(t)| \to \infty \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty, \quad k = 1, \ldots, (n-1). \tag{4.1.34}$$

Для доказательства этого утверждения рассмотрим уравнение (4.1.26):

$$\dot{\tilde{b}}_j = -2a_j^2. \tag{4.1.35}$$

Из него следует, что величина $\tilde{b}_j(t)$ является монотонно убывающей функцией времени. С другой стороны, эта величина ограничена в силу ограниченности и положительной определенности кинетической энергии $T = \frac{1}{2} C_{jk} \tilde{b}_j \tilde{b}_k$. Поэтому $\tilde{b}_j(t)$, а следовательно, и величины $p_k(t)$ имеют определенный предел при $t \to \pm\infty$. Отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_j^2(t)\, dt < \infty, \tag{4.1.36}$$

а также что

$$a_j(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty. \tag{4.1.37}$$

Действительно, если неравенство (4.1.36) выполнено, а величина $a_j(t)$ не стремится к нулю при $t \to \pm\infty$, то существует последовательность $|t_k| \to \infty$ такая, что $a_j(t_k) > \epsilon > 0$. Это, в свою очередь, с учетом ограниченности производной $\dot{a}_j$, что следует из (4.1.26), приводит к нарушению неравенства (4.1.36).

Таким образом, при $t \to \pm\infty$ матрица L в (4.1.4) становится диагональной:

$$\begin{aligned} L(t) &\underset{t \to +\infty}{\sim} \operatorname{diag}(p_1^+, \ldots, p_n^+), \\ L(t) &\underset{t \to -\infty}{\sim} \operatorname{diag}(p_1^-, \ldots, p_n^-), \end{aligned} \tag{4.1.38}$$

В силу же условия изоспектральной деформации (4.1.29) величины p_j^+ (или же p_j^-) и являются собственными значениями λ_j этой матрицы. Так как взаимодействие в цепочке Тоды является отталкивающим, то асимптотические импульсы p_j^+, так же как и p_j^-, должны быть различными. Можно показать также чисто алгебраически (см. например, [166]), что при выполнении условия $a_j > 0$ величины λ_j являются вещественными и различными, так что можно считать, что

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n. \tag{4.1.39}$$

Теперь из условия (4.1.37) следует, что

$$p_j(t) \sim p_j^{\pm} \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty, \tag{4.1.40}$$

т.е. в процессе эволюции системы на интервале времени $(-\infty, +\infty)$ происходит перестановка импульсов

$$p_j^+ = \lambda_j, \quad p_j^- = \lambda_{n+1-j}. \tag{4.1.41}$$

Асимптотическое же поведение величин $q_j(t)$ имеет вид

$$q_j(t) \sim p_j^\pm t + q_j^\pm \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty. \tag{4.1.42}$$

Итак, величины $\lambda_j = p_j^+$ являются интегралами движения. Отметим, что из асимптотического поведения $L(t)$ (4.1.38) следует, что эти величины находятся в инволюции $\{\lambda_j, \lambda_k\} = 0$. Нетрудно видеть также, что они функционально независимы. Таким образом, непериодическая цепочка Тоды является вполне интегрируемой гамильтоновой системой.

Переменные λ_j можно выбрать в качестве переменных действия для рассматриваемой системы. Для нахождения сопряженных к ним переменных r_j типа угла в работе Мозера [252] был указан следующий рецепт.

Определим функцию $f(\lambda)$ формулой

$$f(\lambda) = R_{nn}(\lambda), \quad R(\lambda) = (\lambda I - L)^{-1}, \tag{4.1.43}$$

где I – единичная матрица. Разлагая $f(\lambda)$ на простейшие дроби, получаем

$$f(\lambda) = \sum_1^n \frac{r_k^2}{\lambda - \lambda_k}, \tag{4.1.44}$$

здесь

$$r_k = u_n^{(k)}, \tag{4.1.45}$$

$u^{(k)} = (u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \ldots, u_n^{(k)})$ – собственный вектор матрицы L,

$$Lu^{(k)} = \lambda_k u^{(k)}, \quad (u^{(k)}, u^{(k)}) = 1, \quad u_n^{(k)} > 0. \tag{4.1.46}$$

Из (4.1.43) и (4.1.44) следует, в частности, что

$$\sum_1^n r_k^2 = 1, \tag{4.1.47}$$

так что лишь $n - 1$ величин r_k являются независимыми.

Величины r_k являются функциями от p_j и q_k, и их можно рассматривать как параметры на многообразии уровней интегралов движения. Оказывается, что они весьма просто зависят от времени, а отображение, переводящее переменные p_j, q_k в переменные λ_j, r_k в области

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n, \quad \sum_1^n r_j^2 = 1, \quad r_j > 0, \tag{4.1.48}$$

является взаимно однозначным с точностью до общего сдвига величин q_j.

На этом пути Мозером [252], а также другим способом Кацем и ван Мербеке [214] было показано, что величины p_j и $\exp q_j$ являются рациональными функциями величин λ_j и $\exp \lambda_k t$.

Для нахождения дифференциального уравнения для величин $r_j(t)$ воспользуемся уравнением

$$\dot{u}^{(k)} = -Mu^{(k)}. \tag{4.1.49}$$

Отсюда получаем

$$\dot{r}_k = \dot{u}_n^{(k)} = -(Mu^{(k)})_n = a_{n-1} u_{n-1}^{(k)}. \tag{4.1.50}$$

С другой стороны, из уравнения

$$Lu^{(k)} = \lambda_k u^{(k)} \tag{4.1.51}$$

следует

$$a_{n-1} u_{n-1}^{(k)} = (\lambda_k - b_n) r_k, \quad b_n = L_{nn} = \sum_1^n \lambda_k r_k^2. \tag{4.1.52}$$

В результате получаем систему уравнений

$$\dot{r}_k = (\lambda_k - \sum_j \lambda_j r_j^2) r_k, \quad \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n, \tag{4.1.53}$$

которая эквивалентна линейной системе

$$\dot{r}_k = \lambda_k r_k = \frac{\partial u}{\partial r_k}, \qquad u = \frac{1}{2} \Sigma \lambda_k r_k^2, \tag{4.1.54}$$

при условии, что на величины r_k наложена связь

$$\sum_1^n r_k^2 = 1. \tag{4.1.55}$$

Отсюда следует, что величины $r_k(t)$ меняются от $r_k = \delta_{k1}$ при $t \to -\infty$ до $r_k = \delta_{kn}$ при $t \to +\infty$:

$$r_k^2(t) = \frac{r_k^2(0) e^{2\lambda_k t}}{\sum_1^n r_j^2(0) e^{2\lambda_j t}}. \tag{4.1.56}$$

Оказывается, что величины a_j и b_k выражаются рационально через λ_j и r_k^2 и, таким образом, являются рациональными функциями от λ_j и $\exp(\lambda_k t)$.

Это утверждение, в свою очередь, является следствием обнаруженного Мозером [252] представления функции $f(\lambda)$ в виде цепной дроби:

$$f(\lambda) \equiv f_n(\lambda) = \cfrac{1}{\lambda - b_n - \cfrac{a_{n-1}^2}{\lambda - b_{n-1} \; \ddots \; - \cfrac{a_1^2}{\lambda_1 - b_1}}}. \tag{4.1.57}$$

Докажем эту формулу. Пусть Δ_k — левый верхний угловой минор порядка k матрицы $(\lambda I - L)$. Тогда, как нетрудно видеть, величины Δ_k связаны рекуррентным соотношением

$$\Delta_k = (\lambda - b_k)\Delta_{k-1} - a_{k-1}^2 \Delta_{k-2}. \tag{4.1.58}$$

Отсюда следует рекуррентное соотношение для величин

$$s_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}, \qquad s_1 = \Delta_1, \qquad \Delta_0 \equiv 1. \tag{4.1.59}$$

Именно,

$$s_k = (\lambda - b_k) - a_{k-1}^2 \frac{1}{s_{k-1}}. \tag{4.1.60}$$

С другой стороны, можно показать [252], что

$$s_k = f_k^{-1}, \tag{4.1.61}$$

где f_k – функция, построенная точно так же, как функция f, но для матрицы порядка k, состоящей из первых k строк и столбцов матрицы $(\lambda I - L)$.

Отсюда следует рекуррентное соотношение

$$f_k = \frac{1}{\lambda - b_k - a_{k-1}^2 f_{k-1}}, \tag{4.1.62}$$

эквивалентное (4.1.57).

Для цепочки Тоды, состоящей из небольшого числа частиц, из (4.1.57) можно получить явные формулы для величин a_j и b_k через λ_j и r_k. Приведем их лишь для простейшего случая двух частиц:

$$b_1 = \frac{\lambda_2 r_1^2 + \lambda_1 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2}, \quad b_2 = \frac{\lambda_1 r_1^2 + \lambda_2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2}, \quad a_1 = -\frac{(\lambda_2 - \lambda_1) r_1 r_2}{r_1^2 + r_2^2}. \tag{4.1.63}$$

3. **Инволютивность интегралов движения.** Подчеркнем, что полученные результаты существенно использовали асимптотически свободное поведение частиц при $t \to \pm\infty$ и потому справедливы только для непериодического случая. В частности, приведенное выше доказательство интегрируемости в периодическом случае не проходит.

Однако здесь можно воспользоваться доказательством, данным в работах [168, 169, 88].

Именно, докажем, что два различных собственных значения λ и μ матрицы L (являющиеся интегралами движения) находятся в инволюции.

Пусть этим собственным значениям соответствуют нормированные векторы u и v соответственно: $(u, u) = 1$, $(v, v) = 1$. Очевидно, что $\lambda = (u, Lu)$, так что

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_j} = \left(u, \frac{\partial L}{\partial p_j} u\right), \tag{4.1.64}$$

откуда следует

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_j} = u_j^2. \tag{4.1.65}$$

Аналогично

$$\frac{\partial \lambda}{\partial q_j} = 2(a_j u_j u_{j+1} - a_{j-1} u_{j-1} u_j), \tag{4.1.66}$$

где a_j дается формулой (4.1.8). Аналогичные формулы имеют место и для величины μ.

С помощью этих формул получаем

$$\{\lambda,\mu\} = 2\sum_{j=1}^{n} u_j^2(a_j v_j v_{j+1} - a_{j-1} v_{j-1} v_j) - \\ - 2\sum_{j=1}^{n} v_j^2(a_j u_j u_{j+1} - a_{j-1} u_{j-1} u_j), \tag{4.1.67}$$

или

$$\{\lambda,\mu\} = 2\sum_{j=1}^{n} u_j v_j (R_j + R_{j-1}), \tag{4.1.68}$$

где

$$R_j = a_j(u_j v_{j+1} - v_j u_{j+1}). \tag{4.1.69}$$

Умножим теперь уравнение для u

$$a_{j-1} u_{j-1} + a_j u_{j+1} + b_j u_j = \lambda u_j \tag{4.1.70}$$

на v_j, соответствующее уравнение для v – на u_j и вычтем одно из другого. Получим

$$u_j v_j = \frac{1}{\lambda - \mu}(R_{j-1} - R_j). \tag{4.1.71}$$

Следовательно,

$$\{\lambda,\mu\} = \frac{2}{\lambda-\mu}\sum_{j=1}^{n}(R_{j-1}^2 - R_j^2), \tag{4.1.72}$$

и в силу условия периодичности $R_{n+1} = R_1$ сумма в (4.1.65) обращается в нуль.

Можно показать также (см., например, [166]), что в периодическом случае, за исключением подмногообразий в фазовом пространстве размерности $n-1$, собственные значения матрицы L являются простыми. Это завершает доказательство полной интегрируемости цепочки Тоды.

4. Задача рассеяния. Из предыдущего рассмотрения ясно, что в непериодическом случае при $t \to \pm\infty$ частицы становятся свободными и, следовательно,

$$q_k(t) = p_k^+ t + q_k^+ + O(e^{-\delta t}), \quad \delta > 0, \quad t \to +\infty, \tag{4.1.73}$$

$$q_k(t) = p_k^- t + q_k^- + O(e^{\delta t}), \quad t \to -\infty. \tag{4.1.74}$$

При этом, как мы уже видели,

$$p_k^+ = \lambda_k, \qquad p_k^- = \lambda_{n-k+1} \tag{4.1.75}$$

и, следовательно,

$$p_{n-k+1}^+ = p_k^-. \tag{4.1.76}$$

Соотношение между величинами q_j^+ и q_j^- имеет более сложный вид. А именно, как было показано Мозером [252],

$$q_{n-k+1}^+ = q_k^- + c\sum_j \Phi_{jk}(p^-), \tag{4.1.77}$$

где

$$\Phi_{jk}(p^-) = \begin{cases} \ln(p_j^- - p_k^-) & \text{для} \quad j < k, \\ -\ln(p_j^- - p_k^-) & \text{для} \quad j > k, \end{cases} \tag{4.1.78}$$

c — некоторая константа.

Величина Φ_{jk} представляет фазовый сдвиг между двумя частицами, движущимися со скоростями p_j^-, p_k^- при $t \to -\infty$. Из формулы (4.1.77) вытекает следующая интерпретация: частицы рассеиваются так, как если бы происходила последовательность лишь парных рассеяний.

5. Высшие цепочки Тоды. Гамильтониан обычной цепочки Тоды имел вид

$$H_1 = \frac{1}{2}\operatorname{tr} L^2 .$$

Мы можем рассмотреть также гамильтоновы системы, описываемые высшими гамильтонианами

$$H_k = \frac{1}{k+1}\operatorname{tr}(L^{k+1}). \tag{4.1.79}$$

Все такие системы также являются вполне интегрируемыми, и интегралы движения для них имеют прежний вид

$$I_k = \frac{1}{k}\operatorname{tr}(L^k). \tag{4.1.80}$$

Все они обладают представлением Лакса

$$\dot{L} = [L, M_k], \tag{4.1.81}$$

где M_k — вещественная кососимметричная матрица, у которой k диагоналей, ближних к главной диагонали, отличны от нуля; все остальные матричные элементы равны нулю. Именно,

$$M_k = (L^k)^+ - (L^k)^-. \tag{4.1.82}$$

Здесь $A^\pm$ означает строго верхнюю (соответственно нижнюю) треугольную часть матрицы A.

Рассмотрим следующий по сложности пример системы с

$$H = H_2 = \frac{1}{3}\operatorname{tr}(L^3). \tag{4.1.83}$$

Уравнения движения в этом случае имеют вид

$$\dot{a}_k = a_k(a_{k-1}^2 - a_{k+1}^2 + b_k^2 - b_{k+1}^2),$$

$$\dot{b}_k = 2b_k(a_{k-1}^2 - a_k^2) + 2b_{k-1}a_{k-1}^2 - 2b_{k+1}a_k^2. \tag{4.1.84}$$

Эти уравнения эквивалентны уравнению Лакса

$$\dot{L} = [L, M_2], \tag{4.1.85}$$

где матрица M_2 имеет вид

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & \gamma_1 & & & & \\ -\beta_1 & 0 & \beta_2 & \gamma_2 & & 0 & \\ -\gamma_1 & -\beta_2 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \gamma_{n-2} \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & & & -\gamma_{n-2} & -\beta_{n-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.1.86}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \beta_k &= (b_k + b_{k+1})a_k, \quad k = 1, \dots, n-1, \\ \gamma_k &= a_k a_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n-2. \end{aligned} \tag{4.1.87}$$

Решение уравнений движения (4.1.84) дается рациональными функциями λ_j и $\exp(\lambda_k t)$.

Интересно, что уравнения (4.1.84) обладают инвариантным многообразием $b_k = 0$, $k = 1, \dots, n$, на котором они сводятся к уравнениям

$$\dot{a}_k = a_k(a_{k-1}^2 - a_{k+1}^2). \tag{4.1.88}$$

Эти уравнения определяют изоспектральную деформацию матрицы Якоби с нулевой главной диагональю.

Подставляя вместо a_k величины $c_k = a_k^2$, получаем

$$\dot{c}_k = 2c_k(c_{k-1} - c_{k+1}), \tag{4.1.89}$$

т.е. известные уравнения Вольтерра.

4.2. Цепочка Тоды как динамическая система на орбите коприсоединенного представления группы треугольных матриц

В настоящем разделе будет показано, что непериодическая цепочка Тоды тесно связана с определенной разрешимой группой Ли – группой вещественных верхних треугольных матриц. Эта связь была обнаружена и использована в работах [109, 222, 292]. Она дает простую геометрическую интерпретацию цепочке Тоды и позволяет значительно упростить доказательство ряда результатов.

Начнем с установления основного факта: фазовое пространство цепочки Тоды можно рассматривать как орбиту коприсоединенного представления группы Ли G – группы вещественных верхних треугольных матриц с определителем, равным единице.

Напомним сначала некоторые основные факты относительно этой группы (см., например, [17]). Алгебра Ли $\mathscr{G}$ группы G состоит из верхних треугольных матриц с нулевым следом. Что касается пространства $\mathscr{G}^*$, дуального к $\mathscr{G}$, – пространства линейных функционалов на $\mathscr{G}$, то возможны различные реализации этого пространства. Мы используем две такие реализации, приводящие к несимметричной и соответственно симметричной форме представления Лакса.

А. Несимметричная форма представления Лакса. Здесь мы определим значение функционала $x \in \mathcal{G}^*$ на элементе $\xi \in \mathcal{G}$ согласно формуле

$$\langle x, \xi\rangle = \operatorname{tr}(x\xi). \tag{4.2.1}$$

Тем самым пространство $\mathcal{G}^*$ отождествляется с пространством нижних треугольных матриц с нулевым следом.

Группа G действует в пространстве $\mathcal{G}^*$ с помощью коприсоединенного представления $\mathrm{Ad}^*(g)$ согласно формуле

$$\mathrm{Ad}^*(g)\colon\ x \to (gxg^{-1})_-, \tag{4.2.2}$$

где нижний индекс минус означает, что элементы рассматриваемой матрицы, стоящие выше главной диагонали, заменяются нулями. Возьмем в качестве начального элемента

$$f = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.2.3}$$

Стационарная подалгебра $\mathcal{G}_f$ этого элемента состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.2.4}$$

Поэтому орбита коприсоединенного представления $\mathcal{O}_f$, проходящая через f, имеет размерность $2(n-1)$ и состоит из матриц вида

$$x = \begin{pmatrix} b_1 & & & 0 \\ a_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}, \quad \Sigma b_j = 0, \quad a_j > 0. \tag{4.2.5}$$

Естественная пуассонова структура на этой орбите определяется структурой Ли–Пуассона на пространстве $\mathcal{G}^*$ (см. раздел 1.11) и дается формулами

$$\{b_j, a_j\} = a_j, \quad \{b_{j+1}, a_j\} = -a_j. \tag{4.2.6}$$

Полагая $b_j = p_j$, $a_j = \exp(q_j - q_{j+1})$, мы сводим (4.2.6) к каноническим скобкам Пуассона для p_j и q_j.

Таким образом, орбита $\mathcal{O}_f$ является естественным кандидатом на роль фазового пространства цепочки Тоды. Для того чтобы включить цепочку Тоды в общую схему Костанта–Адлера–Симса [222, 109, 292] (см. раздел 1.12), мы рассмотрим группу G как подгруппу группы $\tilde{G} = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ – группы вещественных матриц порядка n с определителем, равным единице, а также рассмотрим дополнительную к G подгруппу F нижних треугольных матриц с единицами на главной диагонали.

Очевидно, что алгебра Ли $\tilde{\mathcal{G}}$ разлагается в линейную сумму алгебры $\mathcal{G}$ и дополнительной подалгебры $\mathcal{F}$ – алгебры строго нижних треугольных матриц, т.е. нижних треугольных матриц с нулями на главной диагонали,

$$\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G} + \mathcal{F}. \tag{4.2.7}$$

Соответствующее разложение в дуальном пространстве имеет вид

$$\tilde{\mathcal{G}}^* = \mathcal{G}^* + \mathcal{F}^*, \tag{4.2.8}$$

где $\mathcal{F}^*$ – пространство строго верхних треугольных матриц, $\mathcal{G}^*$ – пространство нижних треугольных матриц.

Поскольку на алгебре $\tilde{\mathcal{G}}$ существует невырожденное инвариантное скалярное произведение $(X, Y) = \mathrm{tr}(XY)$, мы можем с его помощью отождествить $\tilde{\mathcal{G}}^*$ и $\tilde{\mathcal{G}}$. Таким образом, величины

$$s_k(x) = k^{-1}\mathrm{tr}(x^k) \tag{4.2.9}$$

являются инвариантами коприсоединенного представления группы $\tilde{G}$.

Однако величины s_k для $x \in O_f$ (см. (4.2.5)) имеют вид $k^{-1}\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^k$ и описывают системы с тривиальной динамикой. Поэтому для описания цепочки Тоды мы используем сдвинутые инварианты коприсоединенного представления

$$F_k(x) = k^{-1}\mathrm{tr}(x+h)^k, \quad h \in \mathcal{F}^*. \tag{4.2.10}$$

Для того чтобы эти функции находились в инволюции, необходимо потребовать выполнения условия (см. теорему 1.12.6)

$$\langle h, [\mathcal{F}, \mathcal{F}]\rangle = 0. \tag{4.2.11}$$

Общий вид $h \in \mathcal{F}^*$, удовлетворяющего этим условиям, имеет вид

$$h = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ 0 & & \ddots & c_{n-1} \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.2.12}$$

Выберем в качестве h элемент

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = E_{12} + E_{23} + \ldots + E_{n-1,n}. \tag{4.2.13}$$

Тогда

$$F_2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(x+h)^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} b_j^2 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \sum_{k=1}^{n-1} e^{q_k - q_{k+1}}, \tag{4.2.14}$$

и после замены переменных $q_j \to 2q_j$, $p_j \to \frac{1}{2}p_j$ эта функция переходит в гамильтониан (точнее, в функцию $(1/4)H$) для цепочки Тоды. Алгебра $\tilde{\mathcal{G}} = \mathrm{sl}(n, \mathbb{R})$ в рассматриваемом случае обладает $\tilde{\mathcal{G}}$-инвариантным скалярным произведением и потому, согласно общей теории Костанта–Адлера–Симса (см. теорему 1.12.6), уравнения движения цепочки Тоды эквивалентны уравнению Лакса

$$\dot{L} = [L, M], \quad L = x + h, \quad M = \nabla H(x+h)^- = L^-, \tag{4.2.15}$$

или же

$$\dot{L} = [L, M], \quad L = x + h, \quad M = -L_+, \tag{4.2.16}$$

где L^- означает строго нижнюю треугольную часть матрицы L.

Мы получили, таким образом, представление Лакса в несимметричной форме и доказали интегрируемость цепочки Тоды исходя из общих теоретико-групповых принципов.

Б. Симметричная форма представления Лакса. Здесь мы изучим другое разложение алгебры $\tilde{\mathcal{G}} = \mathrm{sl}(n, \mathbb{R})$, рассматриваемой как линейное пространство, в линейную сумму двух подалгебр

$$\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G} + \mathcal{K}, \tag{4.2.17}$$

где $\mathcal{G}$ – по-прежнему алгебра вещественных верхних треугольных матриц, а $\mathcal{K}$ – алгебра вещественных кососимметричных матриц. Соответственно разложение пространства $\mathcal{G}^*$, дуального к $\mathcal{G}$, имеет вид

$$\tilde{\mathcal{G}}^* = \mathcal{G}^* + \mathcal{K}^*, \tag{4.2.18}$$

где $\mathcal{G}^* \sim \mathcal{K}^\perp$ – пространство вещественных симметрических матриц, а $\mathcal{K}^* \sim \mathcal{G}^\perp$ – пространство строго верхних треугольных матриц.

Группа верхних треугольных $G = \{g\}$ матриц действует в пространстве $\mathcal{G}^*$ с помощью коприсоединенного представления согласно формуле

$$\mathrm{Ad}^*(g)\colon x \to (gxg^{-1})_s, \quad g \in G, \quad x \in \mathcal{G}^*, \tag{4.2.19}$$

где значок s означает, что мы рассматриваем разложение элемента

$$\xi = \xi_s + \xi^+, \quad \xi_s \in \mathcal{G}^*, \quad \xi^+ \in \mathcal{K}^*, \tag{4.2.20}$$

и берем компоненту ξ_s. Здесь ξ_s – симметричная часть элемента ξ, ξ^+ – строго верхнетреугольная часть этого элемента.

В качестве начального элемента возьмем

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} = f_1 + f_2; \quad f_1 = (E_{21} + \ldots + E_{n,n-1}),$$
$$f_2 = (E_{12} + \ldots + E_{n-1,n}). \tag{4.2.21}$$

Тогда орбита O_f группы верхних треугольных матриц, проходящая через f, состоит из элементов вида

$$x = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & 0 \\ a_1 & b_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}, \quad \Sigma b_j = 0, \quad a_k > 0. \tag{4.2.22}$$

Действительно, действие g на элемент f_2 не дает вклада в симметричную часть (gfg^{-1}), так что

$$(gfg^{-1})_s = (gf_1g^{-1})_s. \tag{4.2.23}$$

С другой стороны, величина $(gf_1g^{-1})_s$ полностью определяется величиной (gf_1g^{-1}), откуда и следует утверждение о виде (4.2.22) для x. Отметим, что естественная пуассонова структура на $\mathcal{O}_f$ по-прежнему дается формулами (4.2.6).

Мы будем считать, что фазовое пространство цепочки Тоды изоморфно $\mathcal{O}_f$. Гамильтоново описание цепочки Тоды и представление Лакса для нее основаны на следующем утверждении.

Теорема Ван-Мербеке (см. [109]).

Уравнения Гамильтона в $\mathcal{G}^*$ (см. раздел 1.11)

$$\dot{L} = -[\nabla H(L), L]_s, \tag{4.2.24}$$

где $L \in \mathcal{G}^*$, а H дается формулой

$$H = H_\varphi(L) = \operatorname{tr} \varphi(L), \tag{4.2.25}$$

эквивалентны уравнению Лакса

$$\dot{L} = [L, M], \tag{4.2.26}$$

где

$$M = M_\varphi = \varphi'(L)^+ - \varphi'(L)^-. \tag{4.2.27}$$

Кроме того, для любых двух полиномов φ и ψ соответствующие им функции H_φ и H_ψ на $\mathcal{G}^*$, определенные формулой (4.2.25), находятся в инволюции по отношению к стандартной скобке Пуассона на $\mathcal{G}^*$.

В действительности эта теорема является частным случаем теоремы 1.12.2. Мы приведем здесь доказательство в несколько ином виде.

Доказательство. Вычисление градиента функции H_φ дает

$$\nabla H_\varphi(L) = 2\varphi'(L)^+ + \varphi'(L)^0, \tag{4.2.28}$$

где ξ^0 означает диагональную часть ξ. Так как

$$[\varphi'(L), L] = 0, \tag{4.2.29}$$

то мы можем написать

$$\begin{aligned} \dot{L} &= -[\nabla H_\varphi(L), L]_s = -[2\varphi'(L)^+ + \varphi'(L)^0, L]_s = \\ &= -[\varphi'(L)^+ - \varphi'(L)^-, L]_s = [L, M]_s. \end{aligned} \tag{4.2.30}$$

Но, так как матрица M кососимметрична, а L симметрична, то их коммутатор является симметрической матрицей: $[L, M]_s = [L, M]$, так что первая часть теоремы доказана. Далее, используя уравнение (4.2.26) для $M = M_\varphi$, мы имеем

$$\{H_\varphi, H_\psi\} = \frac{d}{dt} H_\psi(L) = \langle \psi'(L), [L, M] \rangle = \langle [\psi'(L), L], M \rangle = 0 \tag{4.2.31}$$

в силу соотношения $[\psi'(L), L] = 0$. Это завершает доказательство теоремы.

4.3. Явное интегрирование уравнений движения обычной непериодической цепочки Тоды

Как было показано в разделе 4.1, цепочка Тоды является вполне интегрируемой гамильтоновой системой. Однако явное интегрирование уравнений движения таких систем является далеко не простой задачей, и ее удается осуществить лишь в редких случаях. Здесь мы, следуя [256, 97], покажем, что к данному случаю можно применить метод проектирования (см. раздел 1.9, где был исследован простейший случай двух частиц) и проинтегрировать с его помощью уравнения движения явно. Несколько иным способом эти результаты были получены в [222, 182].

Идея состоит в рассмотрении геодезического потока на пространстве $X = \{x\}$ вещественных симметрических положительно определенных матриц. Так называемая орисферическая проекция этого потока и дает решение уравнений движения для цепочки Тоды.

Напомним, что обычная цепочка Тоды описывается гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1}\exp[2(q_j - q_{j+1})]. \tag{4.3.1}$$

Уравнения движения такой системы имеют вид

$$\begin{gathered} \dot q_j = p_j, \quad \dot p_1 = -2\exp[2(q_1 - q_2)], \quad \dot p_n = 2\exp[2(q_{n-1} - q_n)], \\ \dot p_j = 2\exp[2(q_{j-1} - q_j)] - 2\exp[2(q_j - q_{j+1})], \quad 1 < j < n. \end{gathered} \tag{4.3.2}$$

Ниже будет показано, что решение этих уравнений дается следующей конструкцией [256, 222].

Пусть $a = L(p^0, q^0)$ – матрица Якоби, зависящая от начальных ($t = 0$) данных $p^0 = p(0)$ и $q^0 = q(0)$:

$$a_{jk} = p_j^0\delta_{jk} + \exp(q_{j-1}^0 - q_j^0)\,\delta_{j,k+1} + \exp(q_j^0 - q_{j+1}^0)\delta_{j,k-1}. \tag{4.3.3}$$

Образуем матрицу $\exp(2at)$. Для ее конструктивного построения удобно привести матрицу a к диагональному виду

$$\begin{gathered} u^{-1}au = \Lambda, \quad a = u\Lambda u^{-1}, \\ \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 0. \end{gathered} \tag{4.3.4}$$

Отметим, что величины λ_j являются корнями уравнения степени n

$$\det(\lambda I - a) = 0. \tag{4.3.5}$$

Знание величин λ_j позволяет найти матрицу u с помощью линейных операций, а именно j-й столбец этой матрицы является нормированным собственным вектором матрицы a, соответствующим собственному значению λ_j.

Итак,

$$\exp(2at) = u\exp(2\Lambda t)u^{-1}, \quad u^{-1} = u'. \tag{4.3.6}$$

Пусть Δ_j – нижний правый угловой минор порядка j матрицы $\exp(2at)$.

Предложение 4.3.1. Решение уравнений движения (4.3.2) дается формулой

$$q_k(t) = q_k(0) + \frac{1}{2} \ln \frac{\Delta_{n-k+1}(t)}{\Delta_{n-k}(t)}. \tag{4.3.7}$$

Прежде чем переходить к доказательству этого предложения, рассмотрим простейшие свойства пространства X – пространства вещественных симметрических положительно определенных матриц.

Пространство X является однородным – на нем транзитивно действует группа $G = SL(n, \mathbb{R})$ – группа вещественных унимодулярных матриц порядка n:

$$g\colon x \to gxg', \quad x \in X, \quad g \in G. \tag{4.3.8}$$

Здесь g' – матрица, транспонированная матрице g.

Пусть $Z = \{ z \}$ – подгруппа верхних треугольных матриц с единицами на главной диагонали, а H – подгруппа диагональных матриц в G. Тогда любую матрицу $x \in X$ можно представить в виде

$$x = z(x) h^2(x) z'(x), \quad h \in H, \quad z \in Z. \tag{4.3.9}$$

Причем это разложение (так называемое разложение Гаусса) однозначно.

Таким образом, пара матриц $h(x)$, $z(x)$ задает систему координат на X, называемую орисферической системой. В частности, для группы $SL(2, \mathbb{R})$, локально изоморфной группе $SO(2, 1)$, эта система координат совпадает с орисферической системой координат $\exp q(x)$, $z(x)$ на гиперболоиде. Координата $h(x)$ называется орисферической проекцией точки x.

Отметим также, что касательное пространство TX к X в единице $x_0 = I$ совпадает с пространством симметрических матриц. Поэтому мы можем рассматривать вместо диагональных матриц $h(x)$ соответствующие диагональные матрицы $q(x) \in TX$, $h(x) = \exp q(x)$.

Орисферическая проекция может быть легко найдена для любой матрицы $x \in X$. Для этого рассмотрим ее нижние угловые миноры $\Delta_j(x)$ порядка j. Из вида представления (4.3.9) следует, что *)

$$h_j^2(x) = \frac{\Delta_{n-j+1}}{\Delta_{n-j}}, \quad \Delta_0 = 1, \quad h(x) = \operatorname{diag}(h_1, \ldots, h_n). \tag{4.3.10}$$

Пространство X допускает лишь одну (с точностью до постоянного множителя) G-инвариантную риманову метрику

$$ds^2 = \operatorname{tr}(x^{-1} \cdot dx \cdot x^{-1} \cdot dx). \tag{4.3.11}$$

Движение по геодезическим в такой метрике (геодезический поток) определяет динамику на кокасательном расслоении T^*X. Элемент пространства T^*X – это пара матриц (x, y), где $x \in X$, $y \in T_x^*X$; ясно, что как касательное, так и кокасательное пространство в точке x можно отождествить с пространством всех симметрических матриц y, удовлетворяющих условию $\operatorname{tr} x^{-1} y = 0$ (как следствие условия $\det x = 1$); спаривание между касательным и кокасательным векторами дается метрикой (4.3.11).

---

*) Доказательство этого утверждения можно найти, например, в [15].

Пространство T^*X является симплектическим многообразием со стандартной 2-формой

$$\omega = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(dy \wedge d(x^{-1})) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(x^{-1}dy \wedge x^{-1}\cdot dx), \qquad (4.3.12)$$

причем эта форма инвариантна относительно действия группы G на T^*X (см. раздел 3.7):

$$g\colon\ x \to gxg', \quad y \to gyg'. \qquad (4.3.13)$$

Заметим, что форма ω является точной,

$$\omega = d\theta, \qquad (4.3.14)$$

где

$$\theta = -\operatorname{tr}(yd(x^{-1})) = \operatorname{tr}(yx^{-1}\cdot dx\cdot x^{-1}). \qquad (4.3.15)$$

Зададим на T^*X функцию $H(x, y)$ — гамильтониан. Это определяет гамильтонов поток на T^*X:

$$\frac{d}{dt}y = \frac{\partial H}{\partial(x^{-1})}, \quad \frac{d}{dt}(x^{-1}) = -\frac{\partial H}{\partial y}. \qquad (4.3.16)$$

Здесь $\partial H/\partial y$ — матрица, определяемая равенством

$$\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_{jk} = \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_{kj}. \qquad (4.3.17)$$

Из уравнения (4.3.11) следует, что геодезический поток на T^*X задается гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(yx^{-1}yx^{-1}). \qquad (4.3.18)$$

Очевидно, что этот гамильтониан инвариантен относительно преобразований (4.3.13), а уравнения движения имеют вид

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = yx^{-1}y. \qquad (4.3.19)$$

Нетрудно видеть, что эта система эквивалентна уравнению

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}x^{-1}) = 0. \qquad (4.3.20)$$

Его решения определяют геодезические в пространстве X и имеют простой вид

$$x(t) = b\exp(2at)b'. \qquad (4.3.21)$$

Здесь $b \in G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $a \in T_eX$ (T_eX — касательное пространство в точке $e = I$ — единичная матрица), $a' = a$, $\operatorname{tr} a = 0$.

Из (4.3.19) следует, что интегралами движения являются величины

$$I_k = \frac{1}{k}\operatorname{tr}(yx^{-1})^k, \quad k = 2, \ldots, n. \qquad (4.3.22)$$

Все они находятся в инволюции и функционально независимы.

Теперь мы можем перейти к доказательству предложения 4.3.1, которое сформулируем в эквивалентной форме.

П р е д л о ж е н и е 4.3.2. После орисферической проекции

$$x(t) \to h(t) = \exp Q(x(t)) \tag{4.3.23}$$

геодезического потока (4.3.21) мы получаем задачу о движении цепочки Тоды.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x(t)$ — геодезическая в пространстве X и $h(t) = \exp Q(t)$, $z(t)$ — орисферические координаты $x(t)$:

$$x(t) = z(t) \exp(2Q(t)) z'(t). \tag{4.3.24}$$

Вычисляя величину $\dot{x} x^{-1}$, получаем

$$\dot{x} x^{-1} = z\{ z^{-1} \dot{z} + 2P + \exp(2Q) \dot{z}' (z')^{-1} \exp(-2Q)\} z^{-1},$$

$$P = \dot{Q}, \; P = \operatorname{diag}(p_1, \ldots, p_n). \tag{4.3.25}$$

Введем обозначения

$$\widetilde{M} = z^{-1} \dot{z}, \quad M = \exp(2Q) \widetilde{M}' \exp(-2Q), \tag{4.3.26}$$

$$\widetilde{L} = P + \frac{1}{2} M + \frac{1}{2} \widetilde{M}. \tag{4.3.27}$$

Здесь $\widetilde{M}$ (соответственно M) является строго верхней (соответственно нижней) треугольной матрицей. Мы имеем

$$\dot{x} x^{-1} = 2z \widetilde{L} z^{-1}. \tag{4.3.28}$$

Дифференцирование этого уравнения по времени дает

$$\frac{d}{dt} (\dot{x} x^{-1}) = 2z (\dot{\widetilde{L}} + [\widetilde{M}, \widetilde{L}]) z^{-1}. \tag{4.3.29}$$

Мы видим, что если матрицы $\widetilde{L}$, $\widetilde{M}$ связаны соотношением (4.3.27), то уравнение Лакса

$$\dot{\widetilde{L}} = [\widetilde{L}, \widetilde{M}] \tag{4.3.30}$$

эквивалентно уравнению для геодезических (4.3.20). Ясно, что пара Лакса (4.1.4′), (4.1.5′) для цепочки Тоды удовлетворяет (4.1.27). Остается найти параметры геодезических, которые проектируются в поток Тоды. Без потери общности мы можем предположить, что матрица b диагональна, так что $z(0) = I$. Тогда

$$b = \exp Q^0, \quad Q^0 = \operatorname{diag}(q_1(0), \ldots, q_n(0)), \tag{4.3.31}$$

и из (4.3.27) мы имеем

$$\widetilde{L}^0 = bab^{-1}. \tag{4.3.32}$$

Следовательно, $\widetilde{L}$ имеет вид (4.1.4′) в том и только в том случае, когда матрица a дается формулой (4.3.3).

Поскольку уравнения Гамильтона для цепочки Тоды эквивалентны уравнению Лакса, предположение 4.3.2 доказано.

Остается записать явные формулы для $Q(t)$, определяющей координаты системы. Для определения матрицы $P(t)$ нам нужна лишь вторая орисферическая координата $z(x)$, которая выражается через миноры матрицы $\exp(2at)$, не являющиеся главными.

Наконец, прокомментируем соотношение между методом проектирования и теоремой 1.12.7 о факторизации. Пусть $L^0 = a$ – симметричная матрица Лакса в начальной момент времени. Теорема о факторизации утверждает, что если

$$\exp(tL^0) = g(t)k(t) \tag{4.3.32}$$

представляет факторизацию матрицы $\exp(tL^0)$ в произведение ортогональной матрицы $k(t)$ и верхней треугольной матрицы $g(t)$, то

$$L(t) = g^{-1}(t)L^0 g(t). \tag{4.3.33}$$

Полагая $g(t) = z_1(t)d(t)$, где $z_1(t) \in Z$, а $d(t)$ – диагональная матрица, из (4.3.33) получаем

$$\exp Q(t) = d(t)\exp Q^0. \tag{4.3.34}$$

С другой стороны, умножая матрицы в уравнении (4.3.32) на матрицы транспонированные, получаем

$$\exp(2tL^0) = gg'. \tag{4.3.35}$$

Сравнивая это уравнение с уравнениями (4.3.21) и (4.3.24) и вспоминая, что $b = \exp Q^0$, получаем

$$\begin{aligned} g(t) &= \exp(-Q^0)z(t)\exp Q(t), \\ d(t) &= \exp(Q(t) - Q^0), \\ z_1(t) &= \exp(-Q^0)z(t)\exp(Q^0), \end{aligned} \tag{4.3.36}$$

так что факторизации (4.3.24) и (4.3.32) дают по существу один и тот же метод решения уравнений движения для цепочки Тоды.

4.4. Цепочка Тоды как редуцированная система

В настоящем разделе мы, следуя работе [97], рассмотрим более подробно геометрический смысл результатов предыдущего раздела с точки зрения редукции гамильтоновых систем с симметрией (см. раздел 1.7). Такая редукция характеризуется определенным моментом – матрицей, зависящей от констант взаимодействия g_j^2. При этом мы получаем также реализацию фазового пространства цепочки Тоды как орбиты коприсоединенного представления группы треугольных матриц.

1. Напомним, что фазовым пространством геодезического потока на пространстве $X = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)$ – пространстве вещественных симметрических положительно определенных матриц порядка n с определителем, равным единице, является кокасательное расслоение $M = T^*X = \{x, y\}$ с симплектической формой $\omega = dy \wedge d(x^{-1})$, являющейся G-инвариантной

и точной: $\omega = d\theta$. На M действует группа $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ согласно формуле (4.3.13), причем формы ω и θ инвариантны относительно этого действия. Элемент ξ алгебры Ли $\mathscr{G}$ группы G задает бесконечно малое преобразование пространства M – порождает векторное поле на M:

$$\frac{d}{dt}(x^{-1}) = -\xi' x^{-1} - x^{-1}\xi, \quad \frac{d}{dt} y = \xi y + y\xi'. \tag{4.4.1}$$

Это поле является гамильтоновым и, как нетрудно проверить, в свою очередь порождается гамильтонианом

$$H_\xi(x, y) = \operatorname{tr}(x^{-1} y \xi' + y x^{-1} \xi). \tag{4.4.2}$$

Поэтому соответствующее отображение момента Φ: $T^*X \to \mathscr{G}^*$ имеет вид

$$\Phi(x, y) = 2 y x^{-1}. \tag{4.4.3}$$

В качестве группы редукции возьмем подгруппу Z верхних треугольных матриц с единицами на главной диагонали. Пусть $\mathscr{Z}$ – алгебра Ли группы Z. Форма Киллинга–Картана $(x, y) = \operatorname{tr}(xy)$ на $\mathscr{G}$ позволяет нам отождествить дуальное пространство $\mathscr{Z}^*$ с алгеброй Ли $\mathscr{Z}'$ строго нижних треугольных матриц. Ограничивая отображение момента (4.4.3) на $\mathscr{Z}$, получаем отображение момента φ: $T^*X \to \mathscr{Z}^* = \mathscr{Z}'$ для действия Z на T^*X:

$$\varphi(x, y) = 2(y x^{-1})^-, \tag{4.4.4}$$

где через ξ^- обозначена строго нижняя треугольная часть ξ, т.е. элементы ξ, стоящие на или выше главной диагонали, полагаем равными нулю.

В качестве значения μ момента φ возьмем матрицу

$$\mu_{jk} = 2 g_k \delta_{j,k+1}. \tag{4.4.5}$$

Нетрудно проверить, что μ является неподвижной точкой присоединенного действия группы Z.

2. Покажем, что при редукции геодезического потока на X по отношению к действию группы Z мы получаем цепочку Тоды.

Сначала докажем следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е 4.4.1. Подмногообразие $\varphi^{-1}(\mu)$ в T^*X с μ и φ, заданными формулами (4.4.5) и (4.4.4), описывается матрицами

$$x = z \exp(2Q) z', \tag{4.4.6}$$

$$y = z \tilde{y} z', \tag{4.4.7}$$

где z пробегает всю группу Z, $Q = \operatorname{diag}(q_1, \ldots, q_n)$ и

$$\tilde{y}_{jk} = p_j e^{2q_j} \delta_{jk} + g_j e^{2q_j} \delta_{j,k-1} + g_{j-1} e^{2q_j - 1} \delta_{j-1,k}. \tag{4.4.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как уже отмечалось выше, любую матрицу $x \in X$ можно привести к диагональному виду с помощью преобразования из подгруппы Z: $x = z \exp(2Q) z'$. Матрица y при этом переходит в матрицу $\tilde{y}$: $y = z\tilde{y}z'$. После отображения момента этим преобразованиям будут соответствовать преобразования из коприсоединенного представления группы Z. При этом очевидно, что группа Z сохраняет момент μ (4.4.5). Следовательно, уравнение $2(yx^{-1})^{-} = \mu$ дает

$$\exp(-2q_k)\tilde{y}_{k,k+1} = g_k, \quad \tilde{y}_{k,k+m} = 0 \text{ для } m > 1. \tag{4.4.9}$$

Полагая $\tilde{y}_{kk} = p_k \exp(2q_k)$ и изменяя масштаб, так что $\tilde{y}$ становятся симметрической матрицей, получаем (4.4.8).

Однако удобнее параметризовать многообразие $\varphi^{-1}(\mu)$ не парой (x, y), а эквивалентной ей парой x (4.4.6) и

$$yx^{-1} = \mathrm{Ad}_z L, \tag{4.4.10}$$

где, очевидно,

$$L_{jk} = p_j\delta_{jk} + g_{j-1}\,\delta_{j-1,k} + g_j e^{2(q_j - q_{j+1})}\,\delta_{j,k-1}. \tag{4.4.11}$$

Заметим, что L — это матрица из несимметричной пары Лакса (4.1.4′) для цепочки Тоды (с $g_1 = \ldots = g_{n-1} = 1$).

Как уже отмечалось, подгруппа Z совпадает со стационарной подгруппой точки μ. Поэтому справедливо следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 4.4.2. Приведенное фазовое пространство $\widetilde{M} = \varphi^{-1}(\mu)/Z$ параметризуется двумя векторами

$$q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n \text{ и } p\,(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n,$$

или, что эквивалентно, двумя матрицами

$$\exp(2Q) \text{ и } L \text{ с } \Sigma q_j = 0 = \Sigma p_j. \tag{4.4.11′}$$

Перейдем теперь к рассмотрению гамильтониана (4.3.18), описывающего геодезический поток. Он инвариантен, в частности, относительно преобразования иэ подгруппы Z.

П р е д л о ж е н и е 4.4.3. При отображении проекции π: $M \to \widetilde{M}$ гамильтониан (4.3.18) переходит в гамильтониан цепочки Тоды (4.1.1), а симплектическая форма (4.3.12), ограниченная на $\varphi^{-1}(\mu)$, переходит в стандартную форму на $\widetilde{M}$:

$$\tilde{\omega} = 2dp \wedge dq. \tag{4.4.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Иэ формулы (4.4.10) следует, что

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(yx^{-1}\,yx^{-1}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(L^2). \tag{4.4.12}$$

Очевидно, что $\widetilde{H}$ совпадает с гамильтонианом цепочки Тоды (4.1.1).

Аналогично, используя формулы (4.4.6) и (4.4.7), мы можем вычислить форму $\omega = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}\;dy \wedge d(x^{-1})$ на M и показать, что она проектируется в форму $\tilde{\omega} = dp \wedge dq$ на $\widetilde{M}$. Таким образом, мы покаэали, что редукция по отношению к подгруппе Z дает интересующую нас динамическую систему. Как уже отмечалось выше, величины

$$I_k = \frac{1}{k}\,\mathrm{tr}\,(y\,x^{-1})^k \tag{4.4.13}$$

являются интегралами движения геодезического потока. Нетрудно показать, что они находятся в инволюции. Поскольку величины I_k являются Z-инвариантными (в действительности G-инвариантными), они переходят в функции $\widetilde{I}_k = \frac{1}{k}\ \mathrm{tr}(L^k)$ на приведенном фазовом пространстве $\widetilde{M}$, находящиеся в инволюции. Отсюда в качестве следствия получаем опять утверждение о том, что цепочка Тоды является вполне интегрируемой системой, причем интегралы движения даются формулой

$$\widetilde{I}_k = \frac{1}{k}\ \mathrm{tr}\,(L^k). \tag{4.4.14}$$

3. Обозначим через B подгруппу верхних треугольных матриц в группе $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Покажем, как в методе редукции возникает реализация фазового пространства цепочки Тоды как орбиты коприсоединенного представления группы B ([108], [222]).

Заметим вначале, что действие B на симметрическом пространстве X является свободным и транзитивным, поскольку любую матрицу $x \in X$ можно представить в виде $x = bb'$, $b \in B$, и такое разложение единственно. Следовательно, X можно отождествить с B, так что действие B на X отождествляется с действием B на самой себе левыми сдвигами, а T^*X отождествляется с T^*B. Пример 3 в конце раздела 1.7 показывает, что гамильтонова редукция T^*B по отношению к действию B левыми сдвигами на точку μ, принадлежащую $\mathfrak{B}^*$, дает орбиту O_μ коприсоединенного представления, проходящую через μ. Мы должны теперь сравнить результаты двух редукций: одной по отношению к группе Z и другой по отношению к бо́льшей группе B.

Отображение момента $\varphi_B : T^*X \to \mathfrak{B}^*$ дается формулой

$$\varphi_B\,(x, y) = 2\,(y\,x^{-1})_-, \tag{4.4.15}$$

где ξ_- означает нижнюю треугольную часть матрицы ξ. Мы имеем $\varphi\,(x, y) = (\varphi_B\,(x, y))^-$. Ясно, что для любого $\mu \in \mathfrak{B}^*$, $\varphi_B^{-1}\,(\mu) \subset \varphi^{-1}\,(\mu^-)$. Пусть B_μ (соответственно Z_μ) является стационарной подгруппой элемента μ в группе B (соответственно в группе Z). Приведенное пространство $\widetilde{M}_B$ для B-редукции является пространством B_μ-орбит в $\varphi_B^{-1}\,(\mu)$, тогда как приведенное пространство $\widetilde{M}$ для Z-редукции является пространством Z_μ-орбит в $\varphi^{-1}\,(\mu^-)$. Мы утверждаем, что если μ дается формулой (4.4.5) с $g_k \neq 0$, $k = 1, \ldots, n-1$, то $Z_\mu = Z$ и каждая Z-орбита в $\varphi^{-1}(\mu^-)$ пересекает $\varphi_B^{-1}\,(\mu)$ вдоль единственной орбиты группы B_μ. Действительно, из $\varphi\,(x, y) = \mu$ следует, что $\varphi_B\,(x, y) = \mu + d$, где d – диагональная матрица. Нетрудно видеть, что при наших предположениях имеется элемент $z \in Z$ такой, что $(\mathrm{Ad}_B^*)_z\,(\mu + d) = \mu$, где Ad_B^* – коприсоединенное представление группы B. Тогда $\varphi_B\,(zxz',\ zyz') = \mu$, так что каждая Z-орбита в $\varphi^{-1}(\mu)$ пересекает $\varphi_B^{-1}\,(\mu)$. Если (x, y) и (zxz', zyz') – две точки в $\varphi_B^{-1}\,(\mu)$, то

$$\varphi_B\,(zxz', zyz') = (\mathrm{Ad}_B^*)_z\,\varphi_B(x, y) = \mu,$$

так что $(\mathrm{Ad}_B^*)_z\,\mu = \mu$, и следовательно, $z \in B_\mu$. Таким образом, пересечение представляет одну B_μ-орбиту в $\varphi_B^{-1}\,(\mu)$. Мы показали, таким образом, что приведенные пространства $\tilde{M}$ и $\tilde{M}_B$ можно канонически отождествить. Однако, как мы упоминали выше, $\tilde{M}_B$ совпадает с коприсоединенной орбитой O_μ элемента μ.

Нетрудно доказать, что коразмерность B_μ в B, а следовательно, размерность орбиты O_μ, равна $2(n-1)$, т.е. размерности $\tilde{M}$.

4.5. Обобщенные непериодические цепочки Тоды, связанные с простыми алгебрами Ли

Рассмотренные до сих пор цепочки Тоды тесно связаны с алгеброй Ли $\mathrm{sl}(n, \mathbb{R})$ и ее треугольными подалгебрами. Возникает вопрос: нельзя ли связать аналогичные системы с другими простыми алгебрами Ли? Положительный ответ на этот вопрос был дан в работе Богоявленского [125], где было показано, как можно построить интегрируемую систему типа Тоды по системе корней простой алгебры Ли или эквивалентно по соответствующей схеме Дынкина. Дальнейший прогресс в этом направлении достигнут в работах [222, 223, 102, 256, 110, 111].

1. **Определения и представление Лакса.** Пусть $q = (q_1, \ldots, q_n)$ и $p = (p_1, \ldots, p_n)$ являются векторами координаты и импульса в n-мерном евклидовом пространстве. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ — набор из l векторов в $\mathbb{R}^n$. Нас будет интересовать гамильтонова система с экспоненциальным взаимодействием:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \sum_{k=1}^{l} g_k^2 \exp(\alpha_k, q), \tag{4.5.1}$$

где g_k, $k = 1, \ldots, l$ — некоторые константы, а $(\alpha_k, q) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_k^j q_j$ — скалярное произведение α_k и q. Заметим, что для $l \leqslant n$ можно положить $g_1 = \ldots \ldots = g_l = 1$, используя сдвиги $q_j \to q_j + a_j$.

Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ — произвольный набор векторов в $\mathbb{R}^n$, то о таких гамильтоновых системах мало что можно сказать. Если же $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ — набор простых корней простой алгебры Ли, то почти все результаты предыдущих разделов (при необходимости несколько модифицированные) остаются справедливыми. В частности, рассматриваемые системы являются вполне интегрируемыми и обладают представлением Лакса.

Приведем детали этой конструкции. Всю необходимую информацию о простых алгебрах Ли можно найти в монографии [7].

Пусть $\mathcal{G}$ — простая вещественная расщепимая алгебра Ли, $\mathcal{A}$ — ее подалгебра Картана, R — соответствующая система корней, R_+ — множество положительных корней и $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} \subset R_+$ — множество простых корней. Выберем $E_\alpha \in \mathcal{G}_\alpha$, $\alpha \in R$ так, что

$$[H, E_\alpha] = (\alpha, H) E_\alpha, \quad H \in \mathcal{A}. \tag{4.5.2}$$

Для краткости положим $E_{\pm k} = E_{\pm \alpha_k}$. Взяв ортонормированный базис $F_1, \ldots, F_l$ в $\mathcal{A}$ относительно формы Киллинга $(\ ,\ )$, можем отождествить $\mathcal{A}$ с $\mathbb{R}^l$. Коммутационные соотношения для F_j и E_k имеют вид

$$\begin{aligned} &[F_j, E_k] = \pm \alpha_k^j E_k, \\ &[E_j, E_{-k}] = \delta_{jk} g_k^2 \sum_s \alpha_k^s F_s, \quad \alpha_k^j = (\alpha_k, F_j), \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

где

$$g_k^2 = (E_k, E_{-k}). \tag{4.5.4}$$

Т е о р е м а 4.5.1. Обобщенная цепочка Тоды с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{l} p_k^2 + \sum_{k=1}^{l} g_k^2 \exp\left[2(\alpha_k, q)\right] \tag{4.5.5}$$

является вполне интегрируемой и соответствующие уравнения движения допускают представление Лакса со значениями в $\mathcal{G}$: $\dot{L} = [L, M]$, где

$$\begin{aligned} L &= \sum_{k=1}^{l} p_k F_k + \sum_{k=1}^{l} e^{(\alpha_k, q)} (E_k + E_{-k}), \\ M &= \sum_{k=1}^{l} e^{(\alpha_k, q)} (E_k - E_{-k}). \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

Ясно, что любое линейное представление алгебры $\mathcal{G}$ превращает пару Лакса (4.5.5)–(4.5.6) в матричнозначную пару Лакса.

Как обычно, инварианты элемента L, такие как $\operatorname{tr}(\pi(L)^k)$ для любого линейного представления π алгебры $\mathcal{G}$, являются интегралами движения для уравнения Лакса. В частности,

$$H = \frac{1}{2}(L, L). \tag{4.5.7}$$

Ниже мы покажем, что эти инварианты находятся в инволюции.

Гамильтониан (4.5.5) является прямым обобщением гамильтониана (4.1.1). Используя переменные a_k, b_j, аналогичные переменным (4.1.23), его можно также интерпретировать как обобщение (4.1.25). В самом деле, пусть $\beta_1, \ldots, \beta_l$ – базис, дуальный к базису $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$: $(\beta_j, \alpha_k) = \delta_{jk}$. Определим новые переменные

$$a_k = \exp(\alpha_k, q), \quad b_j = (\beta_j, p). \tag{4.5.8}$$

Скобки Пуассона этих переменных даются формулой

$$\{b_j, a_k\} = \delta_{jk} a_k, \tag{4.5.9}$$

а гамильтониан (4.5.5) принимает вид

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j,k} (\alpha_j, \alpha_k) b_j b_k + \sum_k g_k^2 a_k^2. \tag{4.5.10}$$

Полагая

$$H_j = \frac{2\alpha_j}{(\alpha_j, \alpha_j)}, \tag{4.5.11}$$

так что $[H_j, E_{\pm k}] = \pm c_{jk} E_{\pm k}$, где (c_{jk}) является матрицей Картана, мы можем записать представление Лакса в форме, аналогичной (4.1.14):

$$L = \sum_{j=1}^{l} b_j H_j + \sum_{k=1}^{l} a_k (E_k + E_{-k}), \qquad M = \sum_{k=1}^{l} a_k (E_k - E_{-k}). \tag{4.5.12}$$

Приведем список гамильтонианов обобщенных цепочек Тоды, соответствующих простым алгебрам Ли. При этом мы положим $g_k = 1$, тогда

$$A_{n-1}:\ H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + e^{q_1-q_2} + \ldots + e^{q_{n-1}-q_n},$$

$$B_n:\ H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + e^{q_1-q_2} + \ldots + e^{q_{n-1}-q_n} + e^{q_n},$$

$$C_n:\ H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + e^{q_1-q_2} + \ldots + e^{q_{n-1}-q_n} + e^{2q_n},$$

$$D_n:\ H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + e^{q_1-q_2} + \ldots + e^{q_{n-1}-q_n} + e^{q_{n-1}+q_n},$$

$$G_2:\ H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} p_j^2 + e^{q_1-q_2} + e^{-2q_1+q_2+q_3},$$

$$F_4:\ H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4} p_j^2 + e^{q_1-q_2} + e^{q_2-q_3} + e^{q_3} + e^{\frac{1}{2}(q_4-q_1-q_2-q_3)},$$

$$E_6:\ H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{8} p_j^2 + e^{q_1-q_2} + e^{q_2-q_3} + e^{q_3-q_4} +$$
$$+ e^{q_4-q_5} + e^{-(q_1+q_2)} + e^{\frac{1}{2}(-q_1+q_2+\ldots+q_7-q_8)},$$

$$E_7:\ H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{8} p_j^2 + e^{q_1-q_2} + \ldots + e^{q_5-q_6} +$$
$$+ e^{-(q_1+q_2)} + e^{-\frac{1}{2}(-q_1+q_2+\ldots+q_7-q_8)},$$

$$E_8:\ H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{8} p_j^2 + e^{q_1-q_2} + \ldots + e^{q_6-q_7} +$$
$$+ e^{-(q_1+q_2)} + e^{\frac{1}{2}(-q_1+q_2+\ldots+q_7-q_8)}.$$

Замечания.

1. Гамильтонианы типа A_{n-1}, G_2, E_6 и E_7, приведенные выше, содержат большее число степеней свободы, чем ранг соответствующей системы корней, поскольку эти корневые системы удобно описывать в расширенном евклидовом пространстве (см. [7]). Такие корневые системы выделяются следующими линейными условиями:

$$\sum_j q_j = 0 \quad \begin{array}{l} \text{для } A_{n-1} \text{ и } G_2,\ q_7 + q_8 = 0, \\ \text{для } E_7,\ q_6 = q_7 = -q_8, \\ \text{для } E_6. \end{array}$$

2. Гамильтониан типа D_4 можно переписать в эквивалентном, но более симметричном виде:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4} p_j^2 + e^{q_1} + e^{q_2} + e^{q_3} + e^{\frac{1}{2}(q_4 - q_1 - q_2 - q_3)}$$

3. Системы Тоды типа B_n и C_n можно рассматривать как подсистемы обычной цепочки Тоды типа A_n и A_{2n-1} соответственно, где положения частиц симметричны относительно начала координат.

Приведем также пары Лакса для цепочек Тоды типа A_{n-1}, B_n, C_n, D_n, G_2. Обозначим $a_j = e^{q_j - q_{j+1}}$:

A_{n-1} ($\mathcal{G}$ = sl $(n, \mathbb{R})$):

$$L = \begin{pmatrix} p_1 & a_1 & & 0 \\ a_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & & a_{n-1} & p_n \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & 0 \\ -a_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & & -a_{n-1} & 0 \end{pmatrix};$$

B_n ($\mathcal{G}$= so $(n, n+1)$):

$$L = \begin{pmatrix} p_1 & a_1 & & & & & & 0 \\ a_1 & \ddots & \ddots & & & & & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} & & & & \\ & & a_{n-1} & p_n & a_n & & & \\ & & & a_n & 0 & -a_n & & \\ & & & & -a_n & -p_n & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \ddots & -a_1 \\ 0 & & & & & & -a_1 & -p_1 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & & & & 0 \\ -a_1 & \ddots & \ddots & & & & & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} & & & & \\ & & -a_{n-1} & 0 & a_n & & & \\ & & & -a_n & 0 & -a_n & & \\ 0 & & & & a_n & 0 & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \ddots & -a_1 \\ & & & & & & a_1 & 0 \end{pmatrix};$$

$C_n(\mathscr{G} = \mathrm{sp}\,(2n, \mathbb{R}))$:

$$L = \begin{pmatrix} p_1 & a_1 & & & & & & 0 \\ a_1 & \ddots & \ddots & & & & & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} & & & & \\ & & a_{n-1} & p_n & a_n & & & \\ & & & a_n & -p_n & -a_{n-1} & & \\ & & & & -a_{n-1} & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \ddots & -a_1 \\ 0 & & & & & & -a_1 & -p_1 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & & & & & & 0 \\ -a_1 & \ddots & \ddots & & & & & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} & & & & \\ & & -a_{n-1} & 0 & a_n & & & \\ & & & -a_n & 0 & -a_{n-1} & & \\ & & & & a_{n-1} & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \ddots & -a_1 \\ 0 & & & & & & a_1 & 0 \end{pmatrix};$$

$D_n(\mathscr{G} = \mathrm{so}\,(n, n))$:

$$L = \begin{pmatrix} p_1 & a_1 & & & & & & 0 \\ a_1 & \ddots & \ddots & & & & & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} & -a_n & 0 & & \\ & & a_{n-1} & p_n & 0 & a_n & & \\ & & -a_n & 0 & -p_n & -a_{n-1} & & \\ & & 0 & a_n & -a_{n-1} & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \ddots & -a_1 \\ 0 & & & & & & -a_1 & -p_1 \end{pmatrix},$$

$$
M = \begin{pmatrix}
0 & a_1 & & & & & & \\
-a_1 & \ddots & \ddots & & & & 0 & \\
 & \ddots & \ddots & a_{n-1} & -a_n & & & \\
 & & -a_{n-1} & 0 & 0 & a_n & & \\
 & & a_n & 0 & 0 & -a_{n-1} & & \\
 & & & -a_n & a_{n-1} & \ddots & \ddots & \\
 & 0 & & & & \ddots & \ddots & -a_1 \\
 & & & & & & a_1 & 0
\end{pmatrix}
$$

G_2:

$$
L = \begin{pmatrix}
-(p_1+p_2) & -a_1 & & & & & \\
-a_1 & -p_1 & -a_2 & & & 0 & \\
 & -a_2 & -p_2 & -\sqrt{2}a_1 & & & \\
 & & -\sqrt{2}a_1 & 0 & \sqrt{2}a_1 & & \\
 & & & \sqrt{2}a_1 & p_2 & a_2 & \\
 & 0 & & & a_2 & p_1 & a_1 \\
 & & & & & a_1 & p_1+p_2
\end{pmatrix},
$$

$$
M = \begin{pmatrix}
0 & a_1 & & & & & \\
-a_1 & 0 & a_2 & & & 0 & \\
 & -a_2 & 0 & \sqrt{2}a_1 & & & \\
 & & -\sqrt{2}a_1 & 0 & -\sqrt{2}a_1 & & \\
 & & & \sqrt{2}a_1 & 0 & -a_2 & \\
 & 0 & & & a_2 & 0 & -a_1 \\
 & & & & & a_1 & 0
\end{pmatrix}.
$$

2. Орбитная интерпретация обобщенных цепочек Тоды. Мы уже отмечали ранее, что существует общая ли-алгебраическая конструкция, связывающая обычную цепочку Тоды с группой Ли $SL(n, \mathbb{R})$ (см. теорему 4.2.1 и теорему 1.12.2). Та же конструкция работает также и для обобщенных цепочек Тоды, связанных с вещественными простыми расщепимыми группами Ли.

Пусть, как и выше, $\mathcal{G}$ — вещественная простая расщепимая алгебра Ли, θ — автоморфизм Картана алгебры $\mathcal{G}$ и

$$
\mathcal{G} = \mathcal{K} + \mathcal{P} \tag{4.5.13}
$$

– соответствующее разложение Картана алгебры $\mathcal{G}$. Фиксируем картановскую алгебру $\mathcal{A}$ в $\mathcal{P}$ и выберем корневые векторы E_α, $\alpha \in R$ таким образом, что $\theta E_\alpha = -E_{-\alpha}$. Тогда компактная подалгебра $\mathcal{K}$ в $\mathcal{G}$ натянута на элементы $E_\alpha - E_{-\alpha}$, а "симметрическое" подпространство $\mathcal{P}$ натянуто на элементы $E_\alpha + E_{-\alpha}$, $\alpha \in R_+$ и $\mathcal{A}$. Соответствующая подгруппа K является максимальной компактной подгруппой в G. Пусть $\mathcal{Z}$ – нильпотентная подалгебра в $\mathcal{G}$, натянутая на E_α, $\alpha \in R_+$ и Z – соответствующая подгруппа. Тогда имеет место разложение Ивасавы

$$\mathcal{G} = \mathcal{K} + \mathcal{A} + \mathcal{Z} = \mathcal{K} + \mathcal{B}, \quad \mathcal{B} = \mathcal{A} + \mathcal{Z}, \tag{4.5.14}$$

$$G = KAZ = KB, \qquad B = AZ, \tag{4.5.15}$$

где A – картановская подгруппа, а B – борелевская подгруппа в G.

Применим теперь теорему 1.12.2 к разложению $\mathcal{G} = \mathcal{K} + \mathcal{B}$. Как обычно, пространство $\mathcal{G}^*$ можно отождествить с $\mathcal{G}$ с помощью формы Киллинга, так что b^* отождествляется с $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P}^* \simeq \mathcal{K}^\perp = \mathcal{P}. \tag{4.5.16}$$

Напомним, что скобка Ли–Пуассона на $\mathcal{P}^*$ имеет вид

$$\{x_j, x_k\} = \sum_l C_{jk}^l x_l \tag{4.5.17}$$

для линейных координатных функций x_j, где C_{jk}^l – структурные постоянные алгебры $\mathcal{P}$. Теорема 1.12.2 теперь переходит в

Теорему 4.5.2.

а) Инвариантные функции на $\mathcal{G}$, ограниченные на $\mathcal{P} \simeq \mathcal{B}^*$, находятся в инволюции по отношению к скобке Пуассона на $\mathcal{B}^*$.

б) Если F – инвариантная функция, то соответствующие уравнения Гамильтона на $\mathcal{P}$ можно переписать в форме Лакса

$$\dot{L} = [L, M_{\mathcal{K}}] = [L, M_{\mathcal{B}}], \tag{4.5.18}$$

где $M_{\mathcal{K}} \in \mathcal{K}$ и $M_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}$ определяются формулой

$$\nabla F(L) = M_{\mathcal{K}} - M_{\mathcal{B}}. \tag{4.5.19}$$

Для того чтобы получить обобщенную цепочку Тоды из теоремы 4.5.2, мы должны фиксировать орбиту группы B в $\mathcal{B}^*$. Напомним, что $E_{\pm j} = E_{\pm\alpha_j}$, а H_j определены формулой (4.5.11).

Теорема 4.5.3. Элементы

$$L = \sum b_j H_j + \sum a_j (E_j + E_{-j}), \tag{4.5.20}$$

где $-\infty < b_j < \infty$, $0 < a_j < \infty$, $j = 1, \dots, l$ ($l = \dim \mathcal{A}$) заметают орбиту O группы B в $\mathcal{B}^* \simeq \mathcal{P}$. Скобка Ли–Пуассона на O дается при этом формулой

$$\{b_j, a_k\} = \delta_{jk} a_k, \quad \{a_j, a_k\} = 0, \quad \{b_j b_k\} = 0. \tag{4.5.21}$$

Переходя от переменных b_j, a_k к переменным p_j, q_k согласно формуле (4.5.8), мы можем отождествить фазовое пространство обобщенной цепочки Тоды с орбитой коприсоединенного представления группы B, проходящей через точку $\mu = \sum_j (E_j + E_{-j})$. Далее, из (4.5.7), (4.5.10) мы видим, что гамильтониан цепочки Тоды $H = \frac{1}{2}(L, L)$ и инварианты L являются интегралами движения, находящимися в инволюции. Нетрудно видеть, что среди этих интегралов имеется $l = \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}$ функционально независимых на орбите. Действительно, инварианты алгебры $\mathcal{G}$, ограниченные на картановскую подалгебру $\mathcal{A}$, дают l функционально независимых полиномов на $\mathcal{A}$(это следует из теоремы Шевалле).

Эти l полиномов остаются независимыми на подмножестве $\mathcal{A} + \sum a_j (E_j + E_{-j})$ для случая достаточно малых положительных a_j, и следовательно, они независимы на $\mathcal{O}$. Это показывает, что обобщенные цепочки Тоды являются вполне интегрируемыми.

3. Обобщенные цепочки Тоды как редуцированные системы. В полной аналогии с разделами 4.3 и 4.4 можно показать, что цепочка Тоды, связанная с простой алгеброй Ли $\mathcal{G}$, получается путем редукции геодезического потока на симметрическом пространстве $X = G/K$ по отношению действия нильпотентной группы Z. Напомним, что дуальное пространство $\mathcal{B}^*$ можно отождествить с $\mathcal{P}$ из (4.5.16) и что имеется естественная проекция $\mathcal{B}^* \to \mathcal{Z}^*$. Мы можем отождествить $\mathcal{Z}^*$ с ортогональным дополнением к $\mathcal{A}$ в $\mathcal{P}$, натянутым на $(E_\alpha + E_{-\alpha})$, $\alpha \in R_+$.

Теорема 4.5.4.

а) Приведенное пространство T^*X по отношению к действию Z для момента μ вида

$$\mu = \sum_{j=1}^{l} (E_j + E_{-j}) \tag{4.5.22}$$

симплектически диффеоморфно орбите O_μ группы B в $\mathcal{B}^*$.

б) Редукция переводит геодезический поток на T^*X в гамильтонов поток для цепочки Тоды на $\mathcal{O}_\mu$. В частности, риманова метрика на X переходит в гамильтониан цепочки Тоды.

Опишем схему редукции более детально (она здесь несколько отличается от рассмотрения в разделе 4.4). Мы должны сначала определить отображение момента для действия Z на T^*X. Введем сокращенное обозначение

$$g^T = \theta\,(g^{-1}), \tag{4.5.23}$$

где θ — это инволюция Картана в G. Симметрическое пространство X можно вложить в G как вполне геодезическое подмногообразие, $X = \exp \mathcal{P}$, состоящее из элементов вида $x = gg^T$.

Вспоминая разложение Ивасавы $G = BK$, мы можем написать

$$x = bb^T, \qquad b \in B, \tag{4.5.24}$$

и это отображение является диффеоморфизмом между B и X. Действие группы G на X дается формулой

$$x \to gxg^T, \tag{4.5.25}$$

так что действие B на X при отождествлении (4.5.24) становится естественным действием группы B на самой себе с помощью левых трансляций.

Используя (4.5.24), мы можем идентифицировать кокасательное пространство $T_x^* X$ с $\mathcal{B}^*$, тогда, как нетрудно видеть, отображение момента Φ: $T^* X \to \mathcal{G}^*$ для действия (4.5.25) дается формулой

$$\Phi(a, bb^T) = \mathrm{Ad}_b\, a, \quad a \in \mathcal{P}. \tag{4.5.26}$$

Следовательно, отображение момента для действия Z имеет вид

$$\varphi(a, bb^T) = (\mathrm{Ad}_b\, a)^-, \tag{4.5.27}$$

где верхний индекс $^-$ означает проекцию из $\mathcal{G}^*$ на $\mathcal{L}^*$. Для того чтобы описать приведенное пространство, мы должны решить уравнение

$$(\mathrm{Ad}_b\, a)^- = \mu. \tag{4.5.28}$$

Полагая $b = ze^Q$, где $z \in Z$, $Q \in \mathcal{A}$, и замечая, что μ является фиксированной точкой для априсоединенного действия Z, так что $Z_\mu = Z$, мы можем записать (4.5. 28) в виде

$$(\mathrm{Ad}_{e^Q}\, a)^- = \sum_{j=1}^{l} (E_j + E_{-j}), \tag{4.5.29}$$

что приводит к решению

$$a = \sum_{j=1}^{l} b_j H_j + \sum_{j=1}^{l} a_j (E_j + E_{-j}), \tag{4.5.30}$$

где $a_j = \exp(\alpha_j, Q)$, а величины b_j произвольны. Нетрудно показать, что величины a_j и b_j являются канонически сопряженными. Это показывает, что приведенное пространство $\varphi^{-1}(\mu)/Z$ совпадает с орбитой $\mathcal{O}_\mu$, описанной в теореме 4.5.3.

Геодезический поток на T^*X определяется G-инвариантным гамильтонианом $H(a, x) = \frac{1}{2}(a, a)$, который редуцируется к гамильтониану обобщенной цепочки Тоды. Геодезические в X даются простой формулой

$$x(t) = b\, e^{at}\, b^T. \tag{4.5.31}$$

Для $b = z e^Q$ и a, определяемых формулой (4.5.30), эта геодезическая (точнее, ее подъем на T^*X) лежит в $\varphi^{-1}(\mu)$. Теперь редукция сводится к нахождению орисферической координаты $Q(t) \in \mathcal{A}$ в разложении

$$x(t) = b(t)\, b^T(t) = z(t)\, e^{Q(t)}\, z^T(t), \quad z(t) \in Z. \tag{4.5.32}$$

Следовательно, мы заключаем, что траектория $Q(t)$ обобщенной цепочки Тоды является орисферической проекцией геодезической $e^{Q(0)} e^{at} e^{Q(0)}$, где a дается формулой (4.5.30).

В заключение этого раздела заметим, что теорема 1.12.7 дает следующий рецепт для решения уравнения Лакса (4.5.18).

Т е о р е м а 4.5.5. Пусть F — инвариантная функция и

$$e^{t\nabla F(L)} = k(t)\, b(t) \tag{4.5.33}$$

— факторизация Ивасавы элемента $\exp[t\nabla F(L)]$. Тогда решение $L(t)$

уравнения Лакса (4.5.18) дается формулой

$$L(t) = \mathrm{Ad}_{k(t)} L(0) = \mathrm{Ad}_{b^{-1}(t)} L(0). \tag{4.5.34}$$

Для обобщенной цепочки Тоды мы имеем $F(L) = \frac{1}{2}(L, L)$ и $\nabla F(L) = L$, где L дается формулой (4.5.20). Нетрудно видеть (так же, как в разделе 4.4), что решение проблемы факторизации (4.5.33) в этом случае эквивалентно нахождению разложения (4.5.32).

4.6. Системы типа Тоды на орбитах коприсоединенного представления борелевских подгрупп

Системы, рассмотренные в предыдущем разделе, представляют гамильтоновы системы на орбитах специального вида борелевских подгрупп. В этом разделе мы исследуем другие возможности выбора орбит с целью применения теоремы 4.5.2 для построения вполне интегрируемых систем.

Мы будем использовать обозначения предыдущего раздела, так что $\mathcal{G}$ – это вещественная простая расщепимая алгебра Ли,

$$\mathcal{G} = \mathcal{K} + \mathcal{P} \tag{4.6.1}$$

– ее разложение Картана, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ – ее картановская подалгебра и

$$\mathcal{G} = \mathcal{K} + \mathcal{A} + \mathcal{Z} = \mathcal{K} + \mathcal{B}, \qquad G = KAZ = KB \tag{4.6.2}$$

– разложение Ивасавы для $\mathcal{G}$ и для соответствующей группы G. Напомним, что нильпотентная подалгебра $\mathcal{Z}$ натянута на корневые векторы $E_\alpha, \alpha \in R_+$, где R_+ – подмножество положительных корней.

Разложение $\mathcal{Z} = \mathcal{K} + \mathcal{B}$ и форма Киллинга на $\mathcal{G}$ позволяют нам индентифицировать дуальное пространство $\mathcal{B}^*$ с $\mathcal{P} = \mathcal{K}^\perp$:

$$\mathcal{B}^* \simeq \mathcal{P}. \tag{4.6.3}$$

Пусть $\mathcal{I}$ означает кольцо инвариантных полиномов на $\mathcal{G}$, ограниченное на $\mathcal{P}$; это то же самое, что кольцо K-инвариантных полиномов на $\mathcal{P}$. В виду отождествления $\mathcal{B}^* \simeq \mathcal{P}$ элементы $\mathcal{I}$ можно также рассматривать как полиномы на $\mathcal{B}^*$.

Теперь основное утверждение теоремы 4.5.2 можно сформулировать следующим образом:

функции, принадлежащие $\mathcal{I}$, находятся в инволюции по отношению к скобке Ли–Пуассона на $\mathcal{B}^*$. Хорошо известно также, что $\mathcal{I}$ порождается с помощью $l = \dim \mathcal{A} = \operatorname{rank} \mathcal{G}$ алгебраически независимых инвариантов (базисных инвариантов). В этом разделе мы будем интересоваться теми орбитами коприсоединенного представления в $\mathcal{B}^*$, на которых кольцо $\mathcal{I}$ дает полную инволютивную систему функций.

1. $\mathcal{I}$-регулярные орбиты.

. Определение. Орбита O коприсоединенного представления группы B в $\mathcal{B}^*$ называется $\mathcal{I}$-регулярной, если базис инвариантов кольца $\mathcal{I}$ остается независимым при ограничении на O.

Заметим, что для $\mathcal{I}$-регулярной орбиты $\dim O \geqslant 2l$. Простой критерий $\mathcal{I}$-регулярности был дан в работе [182]. Пусть $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ –

множество простых корней в R_+. Для любого корня $\alpha \in R_+$ обозначим через Supp (α) множество простых корней, которые входят в разложение $\alpha = n_1\alpha_1 + \ldots + n_l\alpha_l$ с ненулевыми коэффициентами.

Далее для любого элемента $x \in \mathscr{B}^*$ определим следующее подмножество простых корней:

$$\Phi(x) = \bigcup_{\{\alpha \in R_+ : \, x\,(E_\alpha) \neq 0\}} \mathrm{Supp}(\alpha). \qquad (4.6.4)$$

Теорема 4.6.1 [182]. Орбита $\mathcal{O}$ является $\mathcal{I}$-регулярной, если и только если существует $x \in \mathcal{O}$ такой, что $\Phi(x) = \Pi$.

Можно дать также более детальное описание орбит коприсоединенного представления. Для этого введем следующие обозначения. Пусть Π_1 – подмножество системы простых корней Π. Обозначим через $R_+(\Pi_1)$ подмножество положительных корней, натянутых на Π_1.

Определим

$$\mathscr{L}(\Pi_1) = \sum_{\alpha \in R_+(\Pi_1)} \mathscr{G}_\alpha, \qquad (4.6.5)$$

$$\mathscr{A}(\Pi_1) = \mathrm{span}\{H_\alpha, \ \alpha \in \Pi_1\},$$

и

$$\mathscr{B}(\Pi_1) = \mathscr{A}(\Pi_1) + \mathscr{L}(\Pi_1). \qquad (4.6.6)$$

Соответствующая связная подгруппа $B(\Pi_1) \subset B$ является борелевской подгруппой в расщепимой полупростой группе $G(\Pi_1) \subset G$ с алгеброй Ли $\mathscr{G}(\Pi_1) = \mathscr{L}(\Pi_1) + \mathscr{A}(\Pi_1) + \mathscr{L}(\Pi_1)'$.

Пусть $\{E^*_\alpha, \ \alpha \in R_+\}$ – базис для $\mathscr{L}^*$, дуальный к $\{E_\alpha\}$. Мы отождествим дуальное пространство $\mathscr{L}(\Pi_1)^*$ с подпространством $\mathscr{L}^*$, натянутым на E^*_α, $\alpha \in R_+(\Pi_1)$.

Теорема 4.6.2 [182]. Пусть $\mathcal{O} \subset \mathscr{B}^*$ – орбита коприсоединенного представления группы B. Определим $\Pi\mathcal{O} = \{\alpha \in \Pi\colon \langle E_\alpha, \mathcal{O}\rangle \neq 0\}$. Тогда существуют $\delta \in \mathscr{A}^*$ и $\xi \in z(\Pi_{\mathcal{O}})^*$ такие, что $\mathcal{O} = \delta + \mathrm{Ad}^*_{B(\Pi_{\mathcal{O}})}\xi$. Кроме того, орбита $\mathcal{O}$ является $\mathcal{I}$-регулярной, если и только если $\Pi_{\mathcal{O}} = \Pi$.

2. Орбиты типа Тоды. Определение. Орбита $\mathcal{O}$ коприсоединенного представления в $\mathscr{B}^*$ называется орбитой типа Тоды, если $\mathcal{O}$ является $\mathcal{I}$-регулярной и $\dim \mathcal{O} = 2l$.

Иными словами, орбиты типа Тоды – это орбиты минимальной размерности среди $\mathcal{I}$-регулярных орбит. Такие орбиты интересны потому, что в этом случае инварианты группы G дают полное и инволютивное семейство функций на любой орбите типа Тоды (т.е. функциональная размерность этого семейства равна $(1/2)\dim \mathcal{O} = l$).

Следствие 4.6.1. Любой гамильтониан $H \in \mathcal{I}$ определяет вполне интегрируемую систему на каждой орбите типа Тоды в $\mathscr{B}^*$.

Из теоремы 4.6.1 мы получаем следующий критерий для орбит типа Тоды.

Следствие 4.6.2. Пусть $\mathcal{O}$ – орбита в $\mathscr{B}^*$. Тогда $\mathcal{O}$ – орбита типа Тоды, если и только если $\dim \mathcal{O} = 2l$ и, кроме того, существует $x \in \mathcal{O}$ такой, что $\Phi(x) = \Pi$.

3. Примеры орбит типа Тоды. Хотя полная классификация орбит типа Тоды в настоящее время не известна, имеется достаточно большое число примеров таких орбит. Естественный способ построения орбит типа Тоды — это выбрать некоторый элемент $x \in \mathscr{B}^*$ такой, что $\Phi(x) = \Pi$, и затем проверить, что орбита $\mathcal{O}_x$ имеет размерность $2l$.

Конструкция 4.6.1. Возьмем любой корень $\alpha \in R_+$ такой, что $\operatorname{Supp}(\alpha) = \Pi$, и пусть $x \in E_\alpha^*$. При подходящем минимальном α мы получаем орбиту типа Тоды. Такую орбиту назовем элементарной.

Простейший пример такого типа — это когда B есть группа вещественных верхних треугольных матриц с определителем, равным единице, и

$$x = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 1 & & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.6.6'}$$

Возникающая при этом гамильтонова система уже рассматривалась детально в разделе 4.5.

Для вычисления размерности элементарной орбиты полезна следующая

Лемма [182]. Пусть $\mathcal{O}^\alpha$ — элементарная орбита, проходящая через E_α^*, $\alpha \in R_+$, тогда

$$\dim \mathcal{O}^\alpha = N_\alpha + 2, \tag{4.6.7}$$

где N_α — это число корней $\beta \in R_+$ таких, что $(\alpha - \beta) \in R_+$. С помощью этой леммы, а также, используя явное описание системы корней, можно показать, что справедлива

Теорема 4.6.3 [182]. Следующие элементарные орбиты $\mathcal{O}^\alpha$ являются орбитами типа Тоды:

а) $$\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_l \tag{4.6.8}$$

для любой системы корней

б) $$\alpha = 2\Sigma\alpha_i + \Sigma\alpha_j, \tag{4.6.9}$$

где α_i — короткий корень, α_j — длинный корень,

для систем корней типа B_n, C_n и D_n

в) $$\alpha = 3\alpha_1 + \alpha_2, \tag{4.6.10}$$

α_1 — короткий корень, α_2 — длинный корень для систем типа G_2.

При этом в случаях (ii) и (iii) α — это длинный корень.

Просмотр всех остальных случаев [216] показывает, что в случае системы корней типа G_2 имеется еще одна элементарная орбита типа Тоды и

$$\alpha = 2\alpha_1 + \alpha_2, \tag{4.6.11}$$

α_1 — короткий корень, α_2 — длинный корень.

Таким образом, все элементарные орбиты типа Тоды полностью перечислены. Для явного описания этих систем необходимо ввести глобальные канонические координаты на этих орбитах. Этот вопрос детально рассмотрен в работе [216] (см. следующий раздел).

Перейдём теперь к рассмотрению следующей конструкции.

Конструкция 4.6.2. Начнём с простейшего примера. Пусть x_α — ненулевой элемент E_α^* для любого простого корня α, а

$$x = x_{\alpha_1} + \ldots + x_{\alpha_l}. \tag{4.6.12}$$

Мы приходим к обобщенной цепочке Тоды. В случае $\mathscr{G} = \mathrm{sl}(n, \mathbb{R})$ элемент x, определяющий орбиту, имеет вид

$$x = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ b_1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.6.13}$$

Нетрудно видеть, что полученная орбита $\mathcal{O}_x$ является векторной суммой двумерных орбит:

$$\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_1 + \ldots + \mathcal{O}_l. \tag{4.6.14}$$

Перейдем к рассмотрению общего случая. Имеет место

Теорема 4.6.4 [182]. Пусть $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$ и $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \phi$, B_1 и B_2 – борелевские группы, соответствующие Π_1 и Π_2, а $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ – орбиты групп B_1 и B_2, соответственно. Обозначим через $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2$ векторную сумму орбит $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$. Тогда:

(а) орбита $\mathcal{O}$ является орбитой коприсоединенного представления группы B;

$$\text{(б) } \Pi_{\mathcal{O}} = \Pi_{\mathcal{O}_1} \cup \Pi_{\mathcal{O}_2}; \quad \text{(в) } \dim \mathcal{O} = \dim \mathcal{O}_1 + \dim \mathcal{O}_2. \tag{4.6.15}$$

В частности, если орбиты $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ J_1- и J_2-регулярны (соответственно являются орбитами типа Тоды) относительно B_1 и B_2, тогда орбита $\mathcal{O}$ J-регулярна (соответственно является орбитой типа Тоды) относительно B.

Следствие. Пусть $\Pi = \Pi_1 \cup \ldots \cup \Pi_k$ – объединение непересекающихся подмножеств системы простых корней и предположим, что $\mathcal{O}_i \subset \mathscr{B}(\Pi_i)^*$ являются орбитами типа Тоды для $1 \leqslant i \leqslant k$. Пусть

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 + \ldots + \mathcal{O}_k \text{ (векторная сумма)}. \tag{4.6.16}$$

Тогда орбита $\mathcal{O}$ является орбитой типа Тоды для группы B.

Подмножества Π_1 и Π_2 в теореме 4.6.4 могут иметь нетривиальное пересечение, однако в этом случае на них надо наложить дополнительные условия для того, чтобы размерность орбиты $\mathcal{O}$ была равна $2l$.

Рассмотрим простейший случай [182]. Пусть, как и прежде, $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$, но теперь пересечение Π_1 и Π_2 не пусто, а состоит из одного корня:

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 = \{\delta\}.$$

Выберем $\beta_j \in R_+(\Pi_j)$ так, что $\mathrm{Supp}(\beta_j) = \Pi_j$ и $\dim B(\Pi_j) \cdot x_{\beta_j} = 2N_j$, $j = 1, 2$, где N_j – число корней в системе Π_j. При таком выборе орбита группы $B_j = B(\Pi_j)$ в пространстве $\mathscr{B}_j^*$, проходящая через точку ξ_j, является орбитой типа Тоды. Рассмотрим теперь орбиту группы B в $\mathscr{B}^*$, проходящую через точку $\xi = \xi_1 + \xi_2$. Обозначим через $\Gamma_j = \{\gamma \in R_+(\Pi_j) : \beta_j - \gamma \in R_+(\Pi_j)\}$. Тогда $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{\delta\}$ или $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi$. Пусть выполнено условие $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{\delta\}$. Тогда $\mathcal{O} = B \cdot \xi$ – орбита типа Тоды в $\mathscr{B}^*$.

4. Рассеяние на J-регулярных орбитах. Пусть $\mathcal{O}$ есть J-регулярная орбита группы B в $\mathscr{B}^*$ и $H \in J$ – гамильтониан, определяемый формой

Киллинга на $\mathcal{P}$. Тогда в силу теоремы 4.6.2 решение уравнений движения с начальными условиями $x(0) = x_0$, $x_0 \in \mathcal{B}^* \simeq \mathcal{P}$ имеет вид *)

$$x(t) = B(\exp(-tx_0)) \cdot x_0$$

и справедлива

Теорема 4.6.5 [182]. Для траектории $x(t)$ существуют пределы

$$x_\pm = \lim_{t \to \pm\infty} x(t) \quad \text{и} \quad x_+ = wx_-,$$

где преобразование рассеяния w – это элемент группы Вейля W группы G относительно подгруппы A. При этом для почти всех начальных условий $x_0 \in \mathcal{O}$ преобразование рассеяния – это элемент наибольшей длины в W.

4.7. Канонические координаты для систем типа Тоды

Орбиты коприсоединенного представления борелевских подгрупп, рассмотренные в предыдущем разделе, были описаны не вполне явно. Для их явного описания надо еще уметь описывать точку орбиты с помощью канонических координат q_j и p_k. В простейшем случае $\mathrm{sl}(4, \mathbb{R})$, когда борелевская подгруппа является группой вещественных верхних треугольных матриц четвертого порядка, такие координаты были введены в работе [293], где для их построения был использован алгоритм работы [301]. Однако даже в этом случае такая конструкция канонических координат оказалась очень громоздкой.

В данном разделе, следуя работе [216], укажем простую конструкцию канонических координат на орбитах типа Тоды. Заметим, что в работе [216] была указана простая конструкция канонических координат для более широкого класса орбит, а именно для орбит, обладающих поляризацией. Отметим, что любая орбита коприсоединенного представления борелевской подгруппы вещественной расщепимой простой группы Ли этим свойством обладает.

Определим сначала важное понятие поляризации. Пусть $\mathcal{G}^*$ – пространство, дуальное к алгебре Ли $\mathcal{G}$, $\langle x, \xi \rangle$ – значение функционала $x \in \mathcal{G}^*$ на элементе $\xi \in \mathcal{G}$. Тогда поляризация $\mathcal{P}$ относительно $x \in \mathcal{G}^*$ – это подалгебра в $\mathcal{G}$, которая одновременно является максимально изотропным подпространством формы $\langle x, [\xi, \eta] \rangle$, т.е. $\langle x, [\mathcal{P}, \mathcal{P}] \rangle = 0$.

Пусть G – связная группа Ли, соответствующая алгебре Ли $\mathcal{G}$. Если $\mathcal{P}$ – поляризация относительно x, то $\mathrm{Ad}_g \mathcal{P}$ – поляризация относительно $\mathrm{Ad}_g^* x$, т.е. при этом все точки орбиты обладают поляризацией.

Замечания.

1. Не каждый элемент $x \in \mathcal{G}^*$ обладает поляризацией. Например, если $\mathcal{G}$ – компактная полупростая алгебра Ли, то поляризация существует только относительно нулевого элемента.

2. Однако для борелевских алгебр $\mathcal{B}$ вещественных расщепимых алгебр Ли поляризация существует для любого элемента $x \in \mathcal{B}^*$.

---

*) Можно показать, что для обычной цепочки Тоды это решение приводит к тому же ответу, что и решение с помощью орисферической проекции, приведенное в разделе 4.5.

Следует иметь в виду, что построение поляризации для орбиты коприсоединенного представления, вообще говоря, является очень сложной задачей. Очень простую конструкцию поляризации можно указать для специальных орбит Z_+-градуированных алгебр Ли [216].

Пусть $\mathscr{G} = \sum_{k \geqslant 0} \mathscr{G}_k$ есть Z_+-градуированная алгебра Ли и $\mathscr{G}^* = \sum_{k \geqslant 0} \mathscr{G}^*_{-k}$ – дуальное пространство с дуальной градуировкой

$$[\mathscr{G}_i, \mathscr{G}_j] \subset \mathscr{G}_{i+j}, \quad \mathrm{ad}^* \mathscr{G}_i \cdot \mathscr{G}^*_{-j} \subset \mathscr{G}^*_{i-j}. \tag{4.7.1}$$

Рассмотрим специальные орбиты, проходящие через элементы вида $x \in \mathscr{G}^*_{-k}$. Очевидно, что стационарные подалгебры $\mathscr{G}_x$ таких элементов являются $\mathbb{Z}_+$-градуированными,

$$\mathscr{G}_x = \sum_{i \geqslant 0} \mathscr{G}_{x,i}, \quad \mathscr{G}_{x,i} = \mathscr{G}_x \cap \mathscr{G}_i, \tag{4.7.2}$$

и если k четно, то подпространство $\mathscr{G}_{k/2}$ ортогонально его дополнению $\sum_{i \neq k/2} \mathscr{G}_i$ относительно формы $\langle x, [\cdot, \cdot] \rangle$.

Теорема 4.7.1 [216]. Пусть $\mathscr{G} = \sum_{i \geqslant 0} \mathscr{G}_i$ – градуированная алгебра Ли и $x \in \mathscr{G}^*_{-k}$, $k > 0$. Предположим, что при четном k существует $\mathscr{G}_{x,0}$ – инвариантное максимальное подпространство $\mathscr{G}'_{k/2}$, изотропное относительно формы $\langle x, [\cdot, \cdot] \rangle$, при k нечётном мы полагаем $\mathscr{G}'_{k/2} = 0$. Тогда

$$\mathscr{P} = \mathscr{G}_x \cap \sum_{i < k/2} \mathscr{G}_i + \mathscr{G}'_{k/2} + \sum_{j > k/2} \mathscr{G}_j \tag{4.7.3}$$

– это поляризация относительно x, и при k нечетном для любого x

$$\mathrm{Ad}^*_{\exp \xi} \cdot x = x + \mathrm{ad}^*_{\xi} \cdot x. \tag{4.7.4}$$

Замечания.

1. Если $x \in \mathscr{G}^*_0$, то $\mathscr{G}^+ = \sum_{i > 0} \mathscr{G}_i \subset \mathscr{G}_x$, и для того, чтобы поляризация в $\mathscr{G}$ относительно x существовала, необходимо и достаточно, чтобы поляризация $\mathscr{P}_0$ в $\mathscr{G}_0$ относительно ограничения x на $\mathscr{G}_0$ существовала. В этом случае в качестве $\mathscr{P}_0$ можно взять $\mathscr{P} \cap \mathscr{G}_0$, а в качестве $\mathscr{P}$ можно взять $\mathscr{P}_0 + \mathscr{G}^+$.

2. Размерность орбиты $G \cdot x$ дается формулой

$$2 \dim (\mathscr{G}_{k/2} / \mathscr{G}'_{k/2}) + 2 \sum_{k/2 < j \leqslant k} \dim \mathrm{ad}^*_{\mathscr{G}_j} \cdot x. \tag{4.7.5}$$

3. Условия теоремы выполняются для борелевских подалгебр вещественных расщепимых алгебр Ли. В действительности для таких алгебр справедливо следующее

Предложение. Пусть $\mathscr{G} = \sum_k \mathscr{G}_k$ – расщепимая полупростая алгебра Ли, градуированная высотой корней. Тогда для любого k пространство $\mathscr{G}_k$ можно представить в виде линейной суммы коммутативных подалгебр $\mathscr{G}'_k$ и $\mathscr{G}''_k$, $\mathscr{G}_k = \mathscr{G}'_k + \mathscr{G}''_k$, натянутых на корневые подпространства и, следовательно, $\mathscr{G}_0$-инвариантных. Это предложение проверяется путем просмотра всех систем корней по отдельности.

Приведем теперь список канонических координат и гамильтонианов для систем типа Тоды на элементарных орбитах (гамильтонианы, используемые ниже, индуцированы формой Киллинга). Детали вычислений можно найти в работе [216].

Серия A_r. Обозначим через E_{jk} матрицу $(r+1)\times(r+1)$, элемент которой типа (jk) равен единице, а все остальные элементы равны нулю. Пусть $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ – простые корни. Тогда корневой вектор, соответствующий $\alpha=\alpha_1+\dots+\alpha_r$, – это $E_\alpha=E_{1,r+1}$, и орбита, проходящая через E_α^*, имеет следующую параметризацию:

$$x_A=\sum_i q_iE_{i,r+1}-\sum_{i\le j}q_ip_jE_{ij}+\sum q_ip_iE_{r+1,r+1},\quad q_1>0, \tag{4.7.6}$$

а гамильтониан имеет вид

$$H_A=\sum_{i\leqslant j}q_j^2p_j^2+\sum_{i<j}q_iq_jp_ip_j+q^2. \tag{4.7.7}$$

Серия B_r. В этом случае имеются две элементарные орбиты Тоды: одна соответствует короткому корню

$$\alpha_s=\alpha_1+\dots+\alpha_r \tag{4.7.8}$$

(это корень вида $2E_{1,0}+E_{0,1}$), а другая – длинному корню

$$\alpha_l=\alpha_1+\dots+\alpha_{r-1}+2\alpha_r \tag{4.7.9}$$

(это корень вида $E_{1,-r}-E_{r,-1}$). Мы имеем

$$x_{B,s}=\frac{1}{\sqrt{10}}\sum q_i(2E_{i,0}+E_{0,-i})-\frac{1}{2}\sum_{i\le j}q_ip_j(E_{i,j}-E_{-j,-i}),$$

$$q_1>0, \tag{4.7.10}$$

$$H_{B,s}=\frac{1}{2}\sum_i q_i^2p_i^2+\sum_{i<j}q_i^2p_j^2+q^2, \tag{4.7.11}$$

$$x_{B,l}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r-1}q_k(E_{k,-r}-E_{r,-k})+\frac{1}{\sqrt{10}}q_r(2E_{r,0}+E_{0,-r})-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{l\le m<r}q_lp_m(E_{l,m}-E_{-m,-l})-\frac{\sqrt{10}}{8}\sum_{k=1}^{r-1}q_kp_k(2E_{k,0}+E_{0,-k})-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_i q_ip_i(E_{r,r}-E_{-r,-r}),\quad q_1>0,$$

$$H_{B,l}=\sum_{i\le j}q_i^2p_j^2+\sum_{i<j}q_iq_jp_ip_j+\frac{1}{16}(9q^2-17q_r^2)p_r^2+q^2. \tag{4.7.13}$$

Серия C_r. Здесь, как и выше, имеются две элементарные орбиты Тоды, соответствующие корням

$$\alpha_s=\alpha_1+\dots+\alpha_r,\quad \alpha_s\to E_s=E_{1,-r}+E_{r,-1} \tag{4.7.14}$$

и

$$\alpha_l=2\alpha_1+\dots+2\alpha_{r-1}+\alpha_r,\quad \alpha_l\to E_l=E_{1,-1}. \tag{4.7.15}$$

Здесь

$$x_{C,s}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r-1} q_k(E_{k,-r}+E_{r,-k})+\frac{1}{\sqrt{2}}q_rE_{r,-r}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{r-1} q_kp_r(E_{k,r}-E_{-r,-k})-$$

$$-\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r-1} q_kp_k+q_rp_r\right)(E_{r,r}-E_{-r,-r})-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{l\leq m<r} q_lp_m(E_{l,m}-E_{-m,-l}),\quad q_1>0, \tag{4.7.16}$$

$$H_{C,s}=\sum_{i\leq j} q_i^2p_j^2+\sum_{i<j} q_iq_jp_ip_j+\sum_{k=1}^{r-1} q_kq_rp_kp_r+q^2p_r^2+q^2, \tag{4.7.17}$$

$$x_{C,l}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{i,j} q_iq_j(E_{i,-j}+E_{j,-i})-\frac{1}{2}\sum_{i\leq j} q_ip_j(E_{i,j}-E_{-j,-i}),$$

$$q_1>0, \tag{4.7.18}$$

$$H_{C,l}=\frac{1}{2}\sum_i q_i^2p_i^2+\sum_{i<j} q_i^2p_j^2+q^4,\quad q^4=(q^2)^2. \tag{4.7.19}$$

Серия D_r. Здесь имеется одна элементарная орбита Тоды, соответствующая корню

$$\alpha_s=\alpha_1+\ldots+\alpha_r,\quad \alpha_s\to E_s=E_{1,1-r}-E_{r-1,-1}, \tag{4.7.20}$$

и мы имеем

$$x_D=\frac{1}{2}\sum_{i\neq r-1} q_i(E_{i,1-r}-E_{r-1,-i})+\frac{1}{2}q_{r-1}(E_{r-1,r}-E_{-r,1-r})-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i\leq j} q_ip_j(E_{i,j}-E_{-j,-i})-\frac{1}{2}\sum_i q_ip_i(E_{r-1,r-1}-E_{1-r,1-r})-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i\neq r-1} q_ip_{r-1}(E_{r,-i}-E_{i,-r})+$$

$$+\frac{1}{2}q_{r-1}p_{r-1}(E_{r,r}-E_{-r,-r}),\quad q_1>0, \tag{4.7.21}$$

$$H_D=\frac{1}{2}\sum_i q_i^2p_j^2+\sum_{i<j} q_i^2p_j^2+q_r^2p_{r-1}^2-q_{r-1}^2p_r^2-q_{r-1}q_rp_{r-1}p_r+q^2. \tag{4.7.22}$$

Приведем также результаты для исключительных простых алгебр Ли. Вычисления удобно выполнять в базисе Шевалле (см. [7]) с точностью до знаков структурных постоянных, что достаточно для нахождения гамильтонианов.

Алгебра G_2. Здесь имеются три элементарные орбиты Тоды, соответствующие корням

$$\alpha_1+\alpha_2, \quad 2\alpha_1+\alpha_2, \quad 3\alpha_1+\alpha_2. \tag{4.7.23}$$

Соответственно имеем

$$\begin{aligned} H_{G_2(1,1)} &= q_1^2p_1^2+3q_2^2p_2^2+3q_1q_2p_1p_2+3q_1^2p_2^2+q^2, \\ H_{G_2(2,1)} &= q_1^2(p_1^2+q_1^2)+4q_1^2(p_2^2+q_2^2)+3q_2^2(p_2^2+q_2^2), \\ H_{G_2(3,1)} &= q_1^2p_1^2+q_2^2p_2^2-q_1q_2p_1p_2+3q_1^2p_2^2+q^6-\frac{3}{4}q_2^6. \end{aligned} \tag{4.7.24}$$

Алгебра F_4. Здесь имеются две элементарные орбиты Тоды, соответствующие корням

$$\alpha_s=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4, \tag{4.7.25}$$

$$H_{F_4,s}=\sum_i q_i^2p_i^2+2\sum_{i<j\leqq 3}q_i^2p_j^2+\sum_{i=1}^{3}q_i^2p_4^2+\sum_{i=1}^{3}q_iq_4p_ip_4+q^2, \tag{4.7.26}$$

и

$$\alpha_l=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4, \tag{4.7.27}$$

$$\begin{aligned} H_{F_4,l} &= \sum_{i=1}^{3}q_i^2p_i^2+3q_4^2p_4^2+2(q_2p_2+q_3p_3)q_4p_4+ \\ &+2\sum_{i<j\leqq 3}q_i^2p_j^2+4(q_1^2+2q_2^2+2q_3^2)p_4^2+ \\ &+4(q_2^2+q_3^2)\frac{p_4^2}{q_1^2}+\Big(\sum_{i=1}^{3}q_i^2\Big)^2+q_1^2q_4^2. \end{aligned} \tag{4.7.28}$$

Алгебры E_6, E_7, E_8. Здесь имеется лишь одна элементарная орбита Тоды для каждого случая, которая соответствует корню

$$\alpha=\alpha_1+\ldots+\alpha_r, \tag{4.7.29}$$

где r = 6, 7, 8 соответственно. Гамильтонианы можно записать в едином виде:

$$\begin{aligned} H_E &= \frac{3}{4}\sum_i q_i^2p_i^2-\frac{1}{2}q_\omega^2p_\omega^2+\frac{1}{2}\sum_{\omega<i<j}^{5}q_iq_jp_ip_j- \\ &-\sum_{i=\omega+1}^{5}q_iq_8p_ip_8+q_\omega^2p_8^2+\sum_{i<j<8}q_i^2p_j^2+ \\ &+\sum_{i=2}^{5}q_i^2q_8^2\frac{p_6^2+p_7^2}{q_\omega^2}+q_1^2q_8^2+q_\omega^2\sum_{i=1}^{7}q_i^2+\sum_{i=2}^{5}q_i^2q_8^2, \end{aligned} \tag{4.7.30}$$

где $\omega=3$, $q_1=q_2=0$ для E_6, $\omega=2$, $q_1=0$ для E_7 и $\omega=1$ для E_8.

4.8. Интегрируемость систем типа Тоды на орбитах общего положения

В предыдущих разделах рассматривались гамильтоновы системы на орбитах типа Тоды, размерность которых равна $2r$, где r – ранг группы G; например, гамильтоновы системы на орбитах размерности $2(n-1)$ группы $SL(n, \mathbb{R})$ – группы вещественных верхних треугольных матриц с положительными элементами на диагонали. Как мы видели, такую орбиту $\mathcal{O}$ можно рассматривать также как орбиту действия группы B в пространстве $\mathcal{P}$ – пространстве вещественных симметрических матриц. Мы будем рассматривать динамическую систему на орбите $\mathcal{O}$, порождаемую гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(x^2), \quad x \in \mathcal{P}, \tag{4.8.1}$$

и стандартной пуассоновой структурой на $\mathcal{P} \simeq \mathcal{B}^*$.

В данном разделе излагаются результаты работы [159], в которой показано, что для орбиты общего положения такая система по-прежнему остается интегрируемой по Лиувиллю.

Введем необходимые обозначения. Пусть L – вещественная матрица порядка n. Определим для нее набор полиномов

$$P_k(L, \lambda), \quad 0 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$$

($[a]$ – целая часть числа a) согласно формуле

$$P_k(L, \lambda) = \det[(L - \lambda I)_k], \tag{4.8.2}$$

где $(L - \lambda I)_k$ – матрица порядка $(n-k)$, получающаяся вычеркиванием k верхних строк и k правых столбцов из матрицы $(L - \lambda I)$.

Нетрудно видеть, что $P_k(L, \lambda)$ – полином степени $n-2k$ по λ:

$$P_k(L, \lambda) = \sum_{m=0}^{n-2k} E_{m,k}(L)\lambda^{n-2k-m}. \tag{4.8.3}$$

Таким образом, для матрицы L порядка n определены величины

$$E_{m,k}(L), \quad 0 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right], \quad 0 \leqslant m \leqslant n-2k. \tag{4.8.4}$$

Заметим, что коприсоединенное действие группы B на $\mathcal{P}$ сохраняет знаки величин $E_{0,k}$.

Определение. Орбита $\mathcal{O}_x$ называется орбитой общего положения, если все величины $E_{0,k}(x)$ отличны от нуля.

Пусть $\mathcal{O}_x$ – орбита общего положения. Тогда можно определить величины

$$I_{m,k}(x) = \frac{E_{m,k}(x)}{E_{0,k}(x)}, \quad 0 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right], \quad 1 \leqslant m \leqslant n-2k. \tag{4.8.5}$$

Имеет место

Теорема 4.8.1 [159]. Орбита общего положения $\mathcal{O}_{x_0}$, проходящая через точку x_0, определяется уравнениями

$$I_{1,k}(x) = I_{1,k}(x_0), \quad 0 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right];$$
$$\operatorname{sign} E_{0,k}(x) = \operatorname{sign} E_{0,k}(x_0), \quad 0 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right], \quad x \in \mathcal{P}, \tag{4.8.6}$$

и ее размерность равна

$$\dim \mathcal{O}_{x_0} = 2\left[\frac{n^2}{4}\right]. \tag{4.8.7}$$

Функции

$$I_{m,k}(x), \quad 0 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right], \quad 2 \leqslant m \leqslant n-2k, \tag{4.8.8}$$

дают $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ интегралов движения в инволюции для системы Тоды на данной орбите.

Кроме того, эти интегралы функционально независимы на плотном открытом множестве в $\mathcal{O}_{x_0}$.

Набросок доказательства этой теоремы дан в работе [159]. В той же работе сформулирована

Теорема 4.8.2. Для любых m и k обозначим через $\{Q(t), P(t)\}$ гамильтонов поток с начальным условием $Q(0) = I$, $P(0) = x_0$ на касательном расслоении

$$T^*(\mathrm{GL}(n)) = \{(P, Q)\colon\ Q \in \mathrm{GL}(n),\ P - \text{произвольная матрица порядка } n\}$$

с гамильтонианом

$$H = \tilde{I}_{m,k}(Q, P) \equiv I_{m,k}(Q'P). \tag{4.8.9}$$

Тогда

$$x(t) = S(t')x_0S(t) \tag{4.8.10}$$

– это решение уравнений движения для динамической системы на $\mathcal{O}_{x_0}$ с гамильтонианом $H = I_{m,k}(x)$ и начальным условием $x(0) = x_0$. Здесь $Q(t) = S(t)K(t)$, где $S(t)$ – верхняя треугольная матрица, $K(t)$ – ортогональная матрица.

Иными словами, рассматриваемая система на орбите $\mathcal{O}_{x_0}$ является проекцией соответствующей системы на $T^*(\mathrm{GL}(n))$.

Глава 5

РАЗНОЕ

5.1. Равновесные конфигурации и малые колебания некоторых динамических систем

Как нетрудно видеть, системы типов III, V и VI (см. гл. 3) обладают равновесными конфигурациями. Эти конфигурации имеют ряд замечательных особенностей. Прежде всего, положения равновесия тесно связаны с нулями классических полиномов. Кроме того, частоты малых колебаний вблизи положений равновесия и соответствующие им нормальные моды даются собственными значениями и собственными векторами определенных матриц. Здесь мы рассмотрим вопрос о равновесных конфигурациях вкратце. Детальное обсуждение этого и связанных с ним вопросов можно найти в работах [138, 115, 43, 139] и в ряде последующих работ, опубликованных главным образом в журнале Lettere al Nuovo Cimento.

Начнем с рассмотрения системы типа V (для простоты положим $g = 1$), т.е. системы, характеризуемой гамильтонианом

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} p_j^2 + U_2(q), \qquad (5.1.1)$$

где

$$U_2(q) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} q_j^2 + \sum_{j<k} (q_j - q_k)^{-2}. \qquad (5.1.2)$$

Обозначая величины q_j в положении равновесия через x_j с учетом того, что $p_j = 0$, получаем систему уравнений для этих величин:

$$x_j = 2 \sum_k{}' (x_j - x_k)^{-3}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (5.1.3)$$

Здесь и ниже штрих означает, что слагаемое с $k = j$ опущено. В работе [136] было показано, что величины x_j также удовлетворяют уравнениям

$$x_j = \sum_k{}' (x_j - x_k)^{-1} \qquad (5.1.4)$$

и, следовательно, описывают также положение равновесия системы, характеризуемой гамильтонианом

$$H_1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} p_j^2 + U_1(q), \qquad (5.1.5)$$

где

$$U_1(q) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} q_j^2 - \sum_{j<k} \ln |q_j - q_k|. \qquad (5.1.6)$$

Таким образом, положения равновесия для систем, характеризуемых гамильтонианами (5.1.1) и (5.1.5), совпадают.

Известно также, что величины x_j, удовлетворяющие уравнениям (5.1.4), являются нулями полиномов Эрмита:

$$H_n(x_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{5.1.7}$$

Этот результат не нов; он был открыт Стильтьесом [289, 290] почти сто лет назад (см., например, книгу [31], подраздел 6.7). Утверждение относительно совпадения положений равновесия для систем (5.1.1) и (5.1.5) было получено в работе [136] и является следствием общей теоремы [265].

Рассмотрим последовательность динамических систем с гамильтонианами вида

$$H_s = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} p_j^2 + U_s(q_1, \ldots, q_n) \tag{5.1.8}$$

и потенциальной энергией вида

$$U_s = \frac{1}{2} (\partial_i U_1)(\partial_i \partial_j U_1) \ldots (\partial_k \partial_l u_1)(\partial_l u_1), \qquad s = 2, 3, \ldots, \tag{5.1.9}$$

где $\partial_j U = \partial U_1/\partial q_j$, а s – степень U_s по U_1. Предположим, что система с гамильтонианом H_1 (см. (5.1.5)) обладает стабильным изолированным положением равновесия

$$q^0 = (q_1^0, \ldots, q_n^0) = (x_1, \ldots, x_n).$$

Теорема 5.1.1 [265]. Система с гамильтонианом вида (5.1.8), (5.1.9) для любого $s \geqslant 2$ обладает стабильным изолированным положением равновесия, которое совпадает с положением равновесия для системы (5.1.5). Частоты малых колебаний вблизи положения равновесия для системы с потенциальной энергией U_s равны s-й степени соответствующих собственных частот малых колебаний для системы (5.1.5). Нормальные моды малых колебаний для всех рассматриваемых систем совпадают.

Доказательство этой теоремы элементарно. Применяя теперь эту теорему к системе с потенциальной энергией (5.1.6), получаем систему с потенциальной энергией

$$U_2(q_1, \ldots, q_n) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} q_j^2 + \sum_{j<k} \frac{1}{(q_j - q_k)^2} - \frac{n(n-1)}{2}. \tag{5.1.10}$$

Отсюда следует, что абсолютный минимум потенциальной энергии равен

$$U_0 = \frac{n(n-1)}{2}, \tag{5.1.11}$$

а равновесная конфигурация такой системы с потенциалом $U_s(q)$ (см. (5.1.9)) определяется уравнениями (5.1.3) или (5.1.4).

Используя выражение (5.1.6) для $U_1(q)$, нетрудно получить явные выражения для матрицы

$$a_{ij} = (\partial_i \partial_j U_1(q))_{q = q^0}, \qquad \partial_j = \partial/\partial q_j, \tag{5.1.12}$$

собственные значения которой дают квадраты частот малых колебаний вблизи положения равновесия. Именно

$$a_{ij} = \delta_{ij}(1 + \sum_k{}'(x_j - x_k)^{-2}) - (1 - \delta_{ij})(x_j - x_k)^{-2}. \tag{5.1.13}$$

Собственные значения этой матрицы равны $1, 2, \ldots, n$; частоты малых колебаний системы с потенциальной энергией (5.1.6) равны $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \ldots, \sqrt{n}$.

Отметим, что этот результат следует также из работы [136].

Заметим также, что из (5.1.13) следует, что

$$\sum_j a_{ij} x_j = 2x_i. \tag{5.1.14}$$

Следовательно, вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ определяет нормальную моду малых колебаний системы с потенциалом U_2.

Отметим еще следующую гипотезу Ф. Калоджеро. Заменим в формуле (5.1.13) числа x_j на произвольные числа y_j и потребуем, чтобы собственные значения этой матрицы были по-прежнему равны $1, 2, \ldots, (n-1)$. Тогда с точностью до общего сдвига числа y_j совпадают с нулями полинома Эрмита $H_n(x)$:

$$y_j = x_j + c. \tag{5.1.15}$$

Аналогично при рассмотрении системы с потенциальной энергией $U_2(q)$ приходим к матрице

$$B_{jk} = \delta_{jk}(\sum_l{}'(x_j - x_l)^{-4}) - (1 - \delta_{jk})(x_j - x_k)^{-4}, \tag{5.1.16}$$

которая, как можно показать, связана с матрицей a простым соотношением

$$B = \frac{1}{6}(a^2 - I). \tag{5.1.17}$$

Следовательно, собственные значения этой матрицы равны

$$\frac{1}{6}(k^2 - 1), \quad k = 1, 2, \ldots, (n-1). \tag{5.1.18}$$

Относительно аналогичных результатов для систем с потенциальной энергией более общего вида см. работу [265].

Для нахождения нормальных мод колебаний вблизи положения равновесия можно использовать следующий метод. Введем матрицы

$$X_{jk} = (1 - \delta_{jk})(x_j - x_k)^{-1},$$

$$\bar{M}_{jk} = \delta_{jk}(\sum_l{}'(x_k - x_l)^{-2}) - (1 - \delta_{jk})(x_j - x_k)^{-2}, \tag{5.1.19}$$

$$Q_{jk} = \delta_{jk} x_k, \quad A^{\pm} = Q \pm X$$

или

$$A^{\pm}_{jk} = \delta_{jk}(\sum_l{}'(x_j - x_l)^{-1}) \pm (1 - \delta_{jk})(x_j - x_k)^{-1}. \tag{5.1.19'}$$

Заметим, что матрица iX равна матрице L для положения равновесия и играет роль импульса. Соответственно матрицы $A^{\pm}$, введенные в работе

[262], играют роль повышающих и понижающих операторов. Действительно, из работы [262] следует, что для равновесной конфигурации

$$[\bar{M}, A^{\pm}] = \pm A^{\pm} \quad (\text{но } [A^+, A^-] \neq \lambda \bar{M}). \tag{5.1.20}$$

Поэтому если $u^{(k)}$ – собственный вектор матрицы $\bar{M}$ с собственным значением μ_k, то

$$A^{\pm} u^{(k)} = \lambda_k^{\pm} u^{(k \pm 1)}, \quad A^- u^{(1)} = 0, \quad A^+ u^{(n)} = 0, \quad \mu_{k \pm 1} = \mu_k \pm 1. \tag{5.1.21}$$

Отсюда следует, что собственные векторы $u^{(k)}$ получаются из вектора $u^{(1)} = (1, \ldots, 1)$ по формуле $u^{(k)} = c_k (A^+)^{k-1} u^{(1)}$ и имеют вид

$$u^{(k+1)} = N_k (P_k(x_1) \ldots P_k(x_n)), \tag{5.1.22}$$

где $P_k(x)$ – полином степени k, имеющий определенную четность. Явное выражение для нормированного вектора $u^{(k)}$ было получено в работе [130]. Аналогичные результаты имеют место и для полиномов Лагерра и Якоби и функций Бесселя (см. [115, 43, 131]).

Отметим также, что собственные значения матрицы

$$\delta_{jk} x_j \cos\theta + i(1 - \delta_{jk})(x_j - x_k)^{-1} \sin\theta, \tag{5.1.23}$$

где x_j – нули полинома Эрмита $H_n(x)$, не зависят от величины θ и, следовательно, равны x_j (см. [115]).

Приведем некоторые результаты относительно положений равновесия для систем типа III [141, 143]). Относительно результатов для систем типа VI см. статьи [170, 245].

Равновесная конфигурация для системы с гамильтонианом (см. работу [163])

$$H = \frac{1}{2} \Sigma p_j^2 - \sum_{j<k} \log|\sin(q_j - q_k)| \tag{5.1.24}$$

дается формулой

$$x_j = x_0 + \frac{\pi}{n} j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{5.1.25}$$

где x_0 – некоторая постоянная.

Для частот малых колебаний вблизи положения равновесия в работе [143] была получена формула

$$\omega_s^2 = 2s(n - s), \quad s = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.1.26}$$

При рассмотрении малых колебаний такой системы естественно возникают эрмитовы матрицы

$$A_{jk} = (1 - \delta_{jk}) \left[1 + i \operatorname{ctg}(j - k) \frac{\pi}{n} \right], \tag{5.1.27}$$

$$B_{jk} = (1 - \delta_{jk}) \sin^{-2}(j - k) \frac{\pi}{n}, \tag{5.1.28}$$

$$C_{jk} = (1 - \delta_{jk}) \sin^{-4}(j - k) \frac{\pi}{n}. \tag{5.1.29}$$

Можно показать [143], что собственные значения матрицы A даются формулами

$$a_s = 2s - n - 1, \quad s = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.1.30}$$

и что матрицы B и C выражаются через матрицу A согласно формулам

$$B = \frac{1}{2}(A^2 + 2A - \sigma_n^{(1)} I), \tag{5.1.31}$$

$$C = -\frac{1}{6}(B^2 - 2(2 + \sigma_n^{(1)})B - \sigma_n^{(2)} I), \tag{5.1.32}$$

где I – единичная матрица, а

$$\sigma_n^{(1)} = \frac{1}{3}(n^2 - 1), \quad \sigma_n^{(2)} = \frac{1}{45}(n^2 - 1)(n^2 + 1). \tag{5.1.33}$$

Собственные векторы $v^{(s)}$ этих матриц определяются простой формулой

$$v_j^{(s)} = \exp(-2\pi i s j/n), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.1.34}$$

В заключение этого раздела отметим результат, относящийся к матрицам, построенным с помощью системы произвольных чисел. Пусть числа x_j, определяющие матрицы X и A^+ согласно формулам (5.1.19) и (5.1.19$'$), произвольны. Определим матрицу $N = XA^+$:

$$N_{jk} = \delta_{jk} x_j \Big(\sum_l (x_j - x_l)^{-1}\Big) + (1 - \delta_{jk}) x_j (x_j - x_k)^{-1}. \tag{5.1.35}$$

В работе [115] было показано, что собственными значениями этой матрицы являются n первых неотрицательных целых чисел.

Оказывается, что матрицы X и A^+ в значительной степени аналогичны операторам x и d/dx: именно они представляют эти операторы в некотором функциональном пространстве, натянутом на полиномы степени меньше n [139]. Отсюда можно получить большое число матричных тождеств.

5.2. Движение полюсов нелинейных эволюционных уравнений и связанные с этим интегрируемые многочастичные системы

В работе Эро, Маккина и Мозера [116] (которая была основана на более ранних работах Крускала [227] и Тикстуна [295]) была открыта глубокая связь между рациональными решениями $u(x, t)$ уравнения Кортевега–де Фриза

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx} \tag{5.2.1}$$

и решениями многочастичной системы с потенциалом $u(q_1, \ldots, q_n) = \sum_{j<k} (q_j - q_k)^{-2}$, описываемой уравнениями

$$\dot{q}_j = p_j, \quad \dot{p}_j = 2 \sum_{j<k} (q_j - q_k)^{-3}. \tag{5.2.2}$$

Именно, в работе [116] была доказана

Теорема. Функция $u(x, t)$ вида

$$u(x,t) = 2\sum_{j=1}^{n}(x - x_j(t))^{-2} \tag{5.2.3}$$

является решением уравнения (5.2.1) в том и только том случае, когда:

$$\text{а) } n = \frac{d(d+1)}{2}, \quad d - \text{целое}; \tag{5.2.4}$$

б) величины $[x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0), \quad p_1(t_0), \ldots, p_n(t_0)]$ определяют положение равновесия гамильтоновой системы с $H = H_2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(L^2)$, где L дается формулой (5.2.5), или, иными словами, выполняется следующее условие:

$$p_j(t_0) = 0, \quad \sum_k{}' (x_j(t_0) - x_k(t_0))^{-3} = 0; \tag{5.2.5}$$

в) величины $x_j(t)$ являются решениями уравнений Гамильтона для системы с гамильтонианом

$$H = H_3 = \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(L^3). \tag{5.2.6}$$

Нетрудно показать, что эти уравнения эквивалентны следующим:

$$\dot{x}_j = 6\sum_k (x_j - x_k)^{-2} \tag{5.2.7}$$

или

$$\ddot{x}_j = 2\sum_k{}' (x_j - x_k)^{-3}. \tag{5.2.8}$$

Аналогичные результаты были получены также в работе [149], где было также рассмотрено уравнение Бюргерса–Хопфа и обсуждался ряд других вопросов.

Функцию $u(x, t)$ в (2.3) можно переписать в виде

$$u(x,t) = -2\frac{d^2}{dx^2}\ln P_d(x,t), \tag{5.2.9}$$

где $P_d(x, t)$ – полином по x степени n

$$P_d(x,t) = \prod_{j=1}^{n}(x - x_j(t)), \quad n = \frac{d(d+1)}{2}. \tag{5.2.10}$$

В простейшем случае $d = 2$ имеем

$$P_2 = x^3 + t, \quad u(x,t) = 6x(x^3 - 2t)(x^3 + t)^{-2}. \tag{5.2.11}$$

В работе [114] для полиномов P_k была получена следующая рекуррентная формула:

$$P'_{k+1}P_{k-1} - P'_{k-1}P_{k+1} = (2k+1)P_k. \tag{5.2.12}$$

В работе [83] были рассмотрены рациональные по x решения уравнения Кадомцева – Петвиашвили

$$\partial_x(u_t - 6uu_x - u_{xxx}) = 3d^2 u_{yy}. \tag{5.2.13}$$

Полюса функции $u(x, y, t)$ зависят уже от двух переменных y и t, которые играют роль временных переменных для гамильтоновой системы с двумя гамильтонианами

$$H_2 = \frac{1}{2} \operatorname{tr} L^2, \quad H_3 = \frac{1}{3} \operatorname{tr} L^3. \tag{5.2.14}$$

Уравнения движения в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_j}{\partial y} &= \frac{\partial H_2}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial p_j}{\partial y} = -\frac{\partial H_2}{\partial x_j}, \\ \frac{\partial x_j}{\partial t} &= \frac{\partial H_3}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial p_j}{\partial t} = -\frac{\partial H_3}{\partial x_j}. \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

В работе [83] была доказана

Т е о р е м а. Решения уравнения Кадомцева – Петвиашвили (5.2.13), убывающие при $|x| \to \infty$, имеют вид

$$u = 2 \sum_j (x - x_j(y, t))^{-2}, \tag{5.2.16}$$

где величины $x_j(y, t)$ удовлетворяют уравнениям (5.2.15). Формулой (5.2.16) описываются все убывающие по x решения уравнения Кадомцева – Петвиашвили.

В работе [73] были изучены неубывающие рациональные решения уравнения Кадомцева – Петвиашвили. Так же, как и для решений многочастичных систем типа I–III, задача была сведена к нахождению собственных значений некоторой матрицы.

Относительно связи эллиптических решений уравнения Кадомцева – Петвиашвили с решениями многочастичной задачи, потенциал взаимодействия для которой дается $\wp$-функцией Вейерштрасса, см. работу [85].

Еще одним примером уравнения, обладающего рациональными решениями, является уравнение Бенджамина – Оно

$$2u_t + 2uu_x + Hu_{xx} = 0. \tag{5.2.17}$$

Это уравнение, так же как и уравнение Кортевега–де Фриза, описывает волны на воде. В (5.2.17) символ H означает преобразование Гильберта

$$Hu(x) = \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(y)}{y - x}\, dy. \tag{5.2.18}$$

Символ P означает главное значение.

Как было показано в работах [145–148], это уравнение обладает рациональными по x решениями вида

$$u(x, t) = i \sum_j \{(x - a_j(t))^{-1} - (x - \bar{a}_j(t))^{-1}\}. \tag{5.2.19}$$

Здесь все величины $a_j(t)$ являются различными комплексными числами, находящимися в верхней полуплоскости комплексной переменной x.

Подставляя выражение (5.2.19) в уравнение (5.2.17), получаем уравнения движения для величин $a_j(t)$

$$i\dot{a}_j(t) = \sum_k{}' (a_k - a_j)^{-1} + \sum_k{}' (a_j - \bar{a}_k)^{-1}. \qquad (5.2.20)$$

Дифференцируя (2.20) еще раз по времени и еще раз используя (2.20), получаем

$$\ddot{a}_j = 2 \sum_k{}' (a_j - a_k)^{-3}. \qquad (5.2.21)$$

Таким образом, полюса решения уравнения Бенджамина – Оно движутся так же, как частицы в системах типа I. Подчеркнем, что в отличие от случая уравнения Кортевега–де Фриза на величины a_j не накладывается никаких дополнительных ограничений типа (5.2.5).

Помимо рациональных решений для уравнения Бенджамина – Оно существуют также тригонометрические решения:

$$u(x, t) = i\{\sum_k \operatorname{tg}(x - a_k(t)) - \sum_k \operatorname{tg}(x - \bar{a}_k(t))\}. \qquad (5.2.22)$$

Величины $a_j(t)$, как нетрудно показать, удовлетворяют уравнениям

$$i\dot{a}_j = \{\sum_k{}' \operatorname{tg}(a_k - a_j) + \sum_k{}' \operatorname{tg}(a_j - \bar{a}_k)\}. \qquad (5.2.23)$$

Таким образом, полюса в рассматриваемом случае движутся так же, как частицы системы типа III:

$$\ddot{a}_j \mp 2 \sum_k{}' \operatorname{cosec}(a_j - a_k) \operatorname{tg}(a_j - a_k). \qquad (5.2.24)$$

В качестве последнего примера рассмотрим уравнение Кортевега–де Фриза при наличии затухания [144]:

$$u_t + u_{xxx} - 12uu_x - cHu_x = 0. \qquad (5.2.25)$$

Здесь H – преобразование Гильберта (5.2.18). В этом случае также имеется класс убывающих рациональных решений уравнения (5.2.25). Простейшая из них имеет вид

$$u(x, t) = [x - a - ic(t - \bar{t})]^{-2} \qquad (5.2.26)$$

и становится сингулярным (для вещественных x) при $t = \bar{t}$.

Более общее решение имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{n} [x - x_j(t)]^{-2}, \qquad (5.2.27)$$

где все величины x_j находятся в верхней полуплоскости. Производя замену переменных

$$x_j(t) = z_j(t) + ict, \qquad (5.2.28)$$

можно преобразовать уравнения для $x_j(t)$ к уравнениям для полюсов обычного уравнения Кортевега–де Фриза (см. начало настоящего раздела):

$$\dot{z}_j = -12 \sum_k{}' (z_j - z_k)^{-2}, \quad \sum_k{}' (z_j - z_k)^{-3} = 0. \qquad (5.2.29)$$

5.3. Движение нулей линейных дифференциальных уравнений в частных производных и связанные с этим интегрируемые многочастичные системы

Следуя работе [138], рассмотрим линейное дифференциальное уравнение в частных производных

$$\psi_{tt} + \frac{1}{2}[\psi_{xx} - 2x\psi_x + 2n\psi] = 0. \tag{5.3.1}$$

Нетрудно видеть, что это уравнение допускает решения, являющиеся полиномами степени n по переменной x:

$$\psi(x, t) = \prod_{j=1}^{n} (x - x_j(t)). \tag{5.3.2}$$

Подставляя $\psi(x, t)$ в (5.3.1), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{x}_j + x_j = \sum_k{}' (1 + 2\dot{x}_j \dot{x}_k)(x_j - x_k)^{-1}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{5.3.3}$$

Эти уравнения для величин $x_j(t)$ мы будем рассматривать как уравнения движения системы n взаимодействующих частиц. С другой стороны, представим решение $\psi(x, t)$ в виде

$$\psi(x, t) = 2^{-n}H_n(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(t)H_{n-k}(x), \tag{5.3.4}$$

где $H_n(x)$ – полином Эрмита, который является решением уравнений

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \tag{5.3.5}$$

и нормирован условием

$$H_n(x) \sim 2^n x^n \quad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{5.3.6}$$

Для коэффициентов $c_k(t)$ из (5.3.1) следует уравнение

$$\ddot{c}_k + kc_k = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{5.3.7}$$

решение которого имеет вид

$$c_k(t) = c_k(0)\cos(\sqrt{k}\,t) + k^{-1/2}\dot{c}_k(0)\sin(\sqrt{k}\,t). \tag{5.3.8}$$

Итак, мы нашли явное выражение для функции $\psi(x, t)$, нули которой и являются координатами интересующей нас системы. Рассмотрим еще одно уравнение

$$i\psi_t + \frac{1}{2}[\psi_{xx} - 2x\psi_x + 2n\psi] = 0. \tag{5.3.9}$$

Подставляя в него решение вида (5.3.2), получаем систему уравнений

$$i\dot{x}_j = -x_j + \sum_k{}'(x_j - x_k)^{-1}. \tag{5.3.10}$$

Дифференцируя (5.3.10) еще раз по t, получаем систему

$$\ddot{x}_j = -x_j + 2\sum_k{}' (x_j - x_k)^{-3}, \tag{5.3.11}$$

т.е. уравнения движения для системы n частиц с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(p_j^2 + x_j^2) + \sum_{j<k}(x_j - x_k)^{-2}. \qquad (5.3.12)$$

С другой стороны, нетрудно найти полиномиальное решение уравнения (5.3.9), а именно

$$\psi(x, t) = 2^{-n}\sum_k c_k(t)H_{n-k}(x), \qquad (5.3.13)$$

где

$$c_k(t) = c_k(0)\exp(ikt). \qquad (5.3.14)$$

Таким образом, функция $\psi(x, t)$, а следовательно, и величины $x_j(t)$ определены для всех значений t, но при этом лишь для начальных условий специального вида (5.3.10).

Рассмотренные выше два примера являются частными случаями определенного класса динамических систем, которые могут быть решены описанным выше методом. Мы приведем здесь лишь некоторые результаты. Более детальное рассмотрение можно найти в [43].

Рассмотрим теперь следующее линейное дифференциальное уравнение в частных производных

$$\begin{aligned}&(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3)\psi_{xx} + (B_0 + B_1x - 2(n-1)A_3x^2)\psi_x + \\ &+ c\psi_{tt} + [E - (n-1)D_2x]\psi_t + (D_0 + D_1x + D_2x^2)\psi_{xt} - \\ &- [n(n-1)(A_2 - A_3x) + nB_1]\psi = 0 \qquad (5.3.15)\end{aligned}$$

и полиномиальное по x решение (5.3.2) этого уравнения. Подставляя $\psi(x, t)$ в виде (5.3.2) в (5.3.15), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}&c\ddot{x}_j + E\dot{x}_j = B_0 + B_1x_j + \sum_k{}'(x_j - x_k)^{-1}[2(A_0 + A_1x_j + A_2x_j^2 + A_3x_jx_k) + \\ &+ 2c\dot{x}_j\dot{x}_k - (\dot{x}_j + \dot{x}_k)(D_0 + D_1x) - D_2x_j(\dot{x}_j x_k - x_j\dot{x}_k)]. \qquad (5.3.16)\end{aligned}$$

Эти уравнения для величин $x_j(t)$ можно рассматривать как уравнения движения системы n взаимодействующих частиц и исследовать их описанным выше способом.

5.4. Разное

5.4.1. До сих пор мы рассматривали лишь одномерные многочастичные проблемы. Однако, используя формальный прием ("комплексификацию"), можно получить отсюда определенные "уравнения движения", которые напоминают уравнения движения для соответствующих двумерных многочастичных систем [137].

Рассмотрим, например, классическую нерелятивистскую задачу частиц единичной массы, движущихся по двумерной плоскости (x, y) и взаимодействующих друг с другом с помощью силы

$$F(r) = f(r) - \omega^2 r, \qquad (5.4.1)$$

где

$$f_x(r) = gr^{-6}x(x^2 - 3y^2) = gr^{-3}\cos 3\varphi,$$
$$f_y(r) = gr^{-6}\cdot y\cdot y^2. \tag{5.4.2}$$

Здесь f_x и f_y – это x- и y-компоненты силы f, x и y (соответственно r и φ) – декартовы (соответственно полярные) координаты вектора $\mathbf{r}$, связывающего две частицы. Заметим, что модуль силы $f(\mathbf{r})$ зависит лишь от r, однако сама сила $f(\mathbf{r})$ не является центральной. Кроме того, эта сила не является консервативной. Тем не менее уравнения движения рассматриваемой многочастичной системы имеют вид

$$\ddot{r}_j = \sum_k{}' \, [f(r_{jk}) - \omega^2 r_{jk}], \tag{5.4.3}$$

где

$$r_{jk} = r_j - r_k. \tag{5.4.4}$$

Для того чтобы решить их, заметим, что после введения новых координат

$$z_j = x_j + iy_j \tag{5.4.5}$$

мы получаем

$$\ddot{z}_j = \sum_k{}' \, (gz_{jk}^{-3} - \omega^2 z_{jk}), \tag{5.4.6}$$

т.е. уравнения движения для системы типа V A_{n-1}. Следовательно, решение дается хорошо известными формулами [95] (см. гл. 3).

5.4.2. Опишем здесь, следуя работе [264], класс гамильтоновых систем, обладающих дополнительными интегралами движения (однако, по-видимому, не являющихся вполне интегрируемыми).

Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_j p_j^2 + U(q), \quad U(q) = \sum_{\alpha\in R_+} g_\alpha^2 v(q_\alpha). \tag{5.4.7}$$

Здесь $q_\alpha = (\alpha, q)$, $R = \{\alpha\}$ – система корней простой алгебры Ли, R_+ – подсистема положительных корней, g_α – константы, равные друг другу для корней равной длины, $v(q_\alpha)$ – вещественная четная функция. Предположим дополнительно, что $v(x)$ – полином от x^2. Тогда $U(q)$ – полином той же степени (четной), инвариантный относительно действия группы Вейля W.

Тогда, как следствие известных результатов относительно алгебры полиномов, инвариантных относительно действия группы Вейля W, мы получаем, что если степень полинома $v(x)$ достаточно мала, то потенциал $U(q)$ зависит лишь от величины $q^2 = \sum_{\alpha\in R_+} q_\alpha^2$. В этом случае рассматриваемая система инвариантна относительно действия группы $O(n)$. Она обладает поэтому дополнительными интегралами

$$l_{jk} = (q_j p_k - q_k p_j)$$

и может быть проинтегрирована стандартным способом.

Приведем таблицу таких случаев, в которой указаны степени полиномов:

Таблица

Тип системы корней	Возможный вид (v, q)	Тип системы корней	Возможный вид (v, q)
A_2	P_4	F_4	P_4
$A_n, n > 2$	P_2	E_6	P_4
$B_n = C_n$	P_2	E_7	P_4
D_n	P_2	E_8	P_6
G_2	P_4		

Замечание. Тот факт, что для системы типа A_2 потенциал $v(q)$ может иметь вид P_4, отмечался в работе [151].

Приложение А

ПРИМЕР КОМПАКТНОГО СИМПЛЕКТИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ, НЕ ЯВЛЯЮЩЕГОСЯ КЭЛЕРОВЫМ

Как отмечалось в разделе 1.1.2, любое кэлерово многообразие является симплектическим.

Обратное утверждение, однако, не верно. Приведем пример (найденный В. Терстоном в 1971 г., см. [296]) четырехмерного компактного симплектического многообразия (M, ω), не являющегося кэлеровым.

Пусть $M = \mathbb{R}^4$ — обычное евклидово пространство с координатами (q_1, p_1, q_2, p_2) и обычной симплектической структурой

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2. \qquad \text{(A.11.1)}$$

Пусть Γ — дискретная подгруппа симплектических преобразований пространства M, порожденная преобразованиями

$$\begin{aligned}
a&: \ (q_1, p_1, q_2, p_2) \to (q_1, p_1, q_2 + 1, p_2),\\
b&: \ (q_1, p_1, q_2, p_2) \to (q_1, p_1, p_2, p_2 + 1),\\
c&: \ (q_1, p_1, q_2, p_2) \to (q_1 + 1, p_1, q_2, p_2),\\
d&: \ (q_1, p_1, q_2, p_2) \to (q_1, p_1 + 1, q_2 + p_2, p_2).
\end{aligned} \qquad \text{(A.1.2)}$$

Многообразие $\widetilde{M} = M/\Gamma$ — факторпространство M по действию группы Γ — является симплектическим многообразием, поскольку Γ действует на M без неподвижных точек.

Первая гомотопическая группа $\widetilde{M}$ $\pi_1(\widetilde{M}) = \pi_1(M/\Gamma) = \Gamma$, а первая группа когомологий H^1 $(\widetilde{M}, \mathbb{Z}) = \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ ($[\Gamma, \Gamma]$ — коммутант группы Γ, факторгруппа $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ абелева). Группа $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ имеет ранг 3 и, следовательно, первое число Бетти b_1 многообразия $\widetilde{M}$ равно $b_1(\widetilde{M}) = 3$.

В то же время хорошо известно, что для кэлерова многообразия b_k (k — нечетное) является четным (см., например, [37]). Таким образом, симплектическое многообразие $\widetilde{M}$ не допускает никакой кэлеровой структуры.

Отметим (см. [66]), что $\widetilde{M}$ — является нильмногообразием, т.е. факторпространством нильпотентной группы. Действительно, пространству $M = \mathbb{R}^4$ можно придать структуру нильпотентной группы, отождествив точку (q_1, p_1, q_2, p_2) с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & p_1 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{A.1.3}$$

При этом группа Г будет состоять из левых трансляций на элементы подгруппы $\mathbb{Z}^4$. Группа $\mathbb{R}^4$ действует транзитивно на $\mathbb{R}^4/\Gamma$ правыми трансляциями, однако некоторые из этих трансляций не сохраняют симплектическую структуру.

Отметим также, что построенное многообразие является T^2-расслоением над тором T^2 и что симплектическая форма $\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2$ на M является целочисленной: $[\omega] \in H^2(M; \mathbb{Z})$. Отметим также, что многообразие M не удовлетворяет теореме Лефшеца, т.е. умножение на $[\omega]$ не индуцирует изоморфизм из $H^1(M; \mathbb{R})$ в $H^3(M; \mathbb{R})$.

Далее, как показано в работе [297], любое многообразие с целочисленной симплектической формой ω может быть вложено в комплексное проективное пространство с помощью отображения f такого, что $f^*\omega_0 = \omega$, где ω_0 – стандартная кэлерова форма на $\mathbb{C}P^N$. Воспользуемся теперь результатом Громова [187], который доказал, что если $\dim M = 2m$, то $N = 2m + 1$. Таким образом, мы можем вложить многообразие Терстона (M, ω) в $(\mathbb{C}P^5, \omega_0)$. Громов показал также, что если (M, ω) симплектически вложено в (X, ω), то тогда можно раздуть X на подмногообразии M и получить новое симплектическое многообразие $(\tilde{X}, \omega)$.

Теперь можно построить новое симплектическое многообразие $(\tilde{X}, \tilde{\omega})$ путем раздутия CP^5 вдоль многообразия M. Далее, как показано в работе [244], многообразие $(\tilde{X}, \tilde{\omega})$ является компактным односвязным симплектическим многообразием с $b_1 = b_3 = 3$.

Приложение Б

РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (3.1.9)

Пусть нечетная функция $x(\xi)$ удовлетворяет функциональному уравнению (3.1.9)

$$x(\xi)\,x'(\eta) - x(\eta)\,x'(\xi) = x(\xi+\eta)\,[z(\xi) - z(\eta)], \qquad z(-\xi) = z(\xi). \tag{Б.1}$$

Нетрудно видеть, что если $x(\xi)$ регулярна при $\xi = 0$, то $x(\xi) \equiv 0$. Нетрудно показать также, что функция $x(\xi)$ должна иметь следующую асимптотику при $\xi \to 0$:

$$x(\xi) \sim \alpha(\xi^{-1} + \gamma\xi), \qquad \alpha \neq 0. \tag{Б.2}$$

Для нахождения общего решения уравнения (Б.1), следуя [34], устремим η к нулю. Приравнивая коэффициенты при степенях переменной η, получаем

$$z(\xi) \sim \alpha(\xi^{-2} - \delta) \quad \text{при} \quad \xi \to 0 \tag{Б.3}$$

и

$$z(\xi) = \alpha\left(\frac{x''(\xi)}{2\,x(\xi)} + \gamma - \delta\right). \tag{Б.4}$$

Однако поскольку функция $z(\xi)$ определена с точностью до аддитивной постоянной, то, полагая $\delta = \gamma$, имеем

$$z(\xi) = \alpha\,\frac{x''(\xi)}{2x(\xi)}\;. \tag{Б.5}$$

Таким образом, решение уравнения (Б.1) должно удовлетворять также уравнению

$$x(\xi)\,x'(\eta) - x(\eta)\,x'(\xi) = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{x''(\xi)}{x(\xi)} - \frac{x''(\eta)}{x(\eta)}\right)x(\xi+\eta). \tag{Б.6}$$

Снова устремим η к нулю. Тогда коэффициенты при η^{-2}, η^{-1} и η^{0} в левой и правой частях уравнения (Б.6) тождественно совпадают. Приравнивая коэффициенты при η, получаем уравнение

$$x(\xi)\,x'''(\xi) - 3\,x'(\xi)\,x''(\xi) - 12\gamma x(\xi)\,x'(\xi) = 0. \tag{Б.7}$$

Умножая его на x^{-4} и интегрируя, приходим к уравнению

$$x^{-3}x'' + 6\gamma x^{-2} + c = 0. \tag{Б.8}$$

Но $x(\xi) \sim \alpha\xi^{-1}$, при $\xi \to 0$. Отсюда следует, что $c = -2\alpha^{-2}$. Умножая (Б.8) на x^3x' и интегрируя, находим

$$(x')^2 = \alpha^{-2}x^4 - 2\mu x^2 + \lambda, \quad \mu = 3\gamma. \tag{Б.9}$$

Заметим, что из (Б.8) следует

$$z(\xi) = \alpha\,\frac{x''(\xi)}{2x(\xi)} = \alpha^{-1}x^2(\xi) + \mu\alpha = \alpha^{-1}V(\xi) + \text{const}. \tag{Б.10}$$

Интегрируя (Б.9) с граничными условиями $x(\xi) \sim \alpha\xi^{-1}$ при $\xi \to 0$, находим выражение для функции, обратной к $x(\xi)$:

$$\xi(x) = \int\limits_x^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(\alpha^{-2}x^4 - 2\mu x^2 + \lambda)}}. \tag{Б.11}$$

Это эллиптический интеграл. Он упрощается в следующих случаях:

$$\begin{aligned}
&(1)\ \mu = 0, \quad \lambda = 0, \quad x(\xi) = \alpha\xi^{-1};\\
&(2)\ \mu = \pm a^2, \quad \lambda = \alpha^2 a^4, \quad x(\xi) = \alpha a \operatorname{cth} a\xi, \quad \alpha a \operatorname{ctg} a\xi;\\
&(3)\ \mu = \mp\frac{a^2}{2}, \quad \lambda = 0, \quad x(\xi) = \alpha a/(\operatorname{sh} a\xi), \quad \alpha a/(\sin a\xi).
\end{aligned} \tag{Б.12}$$

В остальных случаях интеграл можно выразить через эллиптические функции. Явные формулы для $x(\xi)$ зависят от положений корней z_1 и z_2 квадратного уравнения

$$z^2 - 2\mu\alpha^2 z + \lambda\alpha^2 = 0. \tag{Б.13}$$

1. Пусть $\alpha^2\mu^2 - \lambda > 0$, следовательно, z_1 и z_2 вещественны. Рассмотрим отдельно три случая.

(а) $z_2 < z_1 < 0$.

Положим $|z_1| = a^2$, $|z_2|^2 = (1-k^2)a^2$. Тогда

$$\begin{aligned}
&x(\xi) = \frac{da\operatorname{cn}(a\xi, k)}{\operatorname{sn}(a\xi, k)}, \quad y(\xi) = \alpha a^2\,\frac{\operatorname{dn}(a\xi, k)}{\operatorname{sn}^2(a\xi, k)},\\
&v(\xi) = \alpha^2\operatorname{sn}^{-2}(a\xi, k) = g^2\,\mathscr{P}(a\xi) + \text{const};
\end{aligned} \tag{Б.14}$$

(б) $z_1 < 0$, $z_2 > 0$.

Положим $|z_1| = k^2a^2$, $z_2 = (1-k^2)a^2$, тогда

$$\begin{aligned}
&x(\xi) = \alpha a\,\frac{\operatorname{dn}(a\xi, k)}{\operatorname{sn}(a\xi, k)}, \quad y(\xi) = \alpha a^2\,\frac{\operatorname{cn}^2(a\xi, k)}{\operatorname{sn}^2(a\xi, k)},\\
&v(\xi) = \alpha^2a^2\operatorname{sn}^{-2}(a\xi, k) = g^2\,\mathscr{P}(a\xi) + \text{const};
\end{aligned} \tag{Б.15}$$

(в) $z_1 > 0$, $z_2 > 0$.

Тогда

$$\begin{aligned}
&x(\xi) = \alpha a\,\frac{1}{\operatorname{sn}(a\xi, k)}, \quad y(\xi) = \alpha\,\frac{a^2\operatorname{cn}(a\xi, k)\operatorname{dn}(a\xi, k)}{\operatorname{sn}^2(a\xi, k)},\\
&v(\xi) = \alpha^2a^2\operatorname{sn}^{-2}(a\xi, k) = g^2\,\mathscr{P}(a\xi) + \text{const}.
\end{aligned} \tag{Б.16}$$

II. Пусть $\alpha\mu^2 - \lambda < 0$ и, следовательно, z_1 и z_2 комплексны. Тогда выражение $x^4 - 2\mu\alpha^2 x^2 + \lambda\alpha^2$ можно представить в следующем виде:

$$(x^2 + 2\nu x + \alpha\sqrt{\lambda})(x^2 - 2\nu x + \alpha\sqrt{\lambda}), \quad \nu = \sqrt{\frac{1}{2}(\mu\alpha^2 + \alpha\sqrt{\lambda})}.$$

Сделаем в интеграле (Б.11) замену переменных

$$x = (\lambda\alpha^2)^{2/4}(\tilde{x} + 1)^{-1}(\tilde{x} - 1), \quad dx = (\lambda\alpha^2)^{1/4}(\tilde{x} + 1)^{-2} 2 \cdot d\tilde{x}.$$

После этого интеграл принимает вид

$$\xi = \sqrt{2(\alpha\sqrt{\lambda} - \mu\alpha^2)^{-1}} \int_{-1}^{\tilde{x}} [(x^2 + \tau^2)(x^2 + \sigma^2)]^{-1/2} dx, \tag{Б.17}$$

где

$$\tau^2 = [(\lambda\alpha^2)^{1/4} - \nu]^{-1} \cdot [(\lambda\alpha^2)^{1/4} + \nu], \quad \sigma^2 = \tau^{-2}. \tag{Б.18}$$

Отсюда получаем

$$\tilde{x}(\xi) = a/[\mathrm{sn}(a\sqrt{2(\alpha\sqrt{\lambda} - \mu\alpha^2)^{-1}}(\xi + \xi_0), k)]$$

или

$$\begin{gathered} x(\xi) = (\lambda\alpha^2)^{1/4}[1 + a^{-1}\mathrm{sn}(\rho, k)]^{-1}[1 - a^{-1}\mathrm{sn}(p, k)], \\ \rho = a[2(\alpha\sqrt{\lambda} - \mu\lambda^2)^{-1}]^{1/2}(\xi - \xi_0). \end{gathered} \tag{Б.19}$$

Нетрудно показать, что во всех случаях потенциал имеет вид

$$V(\xi) = g^2 a^2 \wp(a\xi) + \mathrm{const}. \tag{Б.20}$$

Действительно, из уравнения (Б.9) следует

$$((x^2)')^2 = 4\alpha^{-2}x^6 - 8\mu x^4 + 4\lambda x^2$$

или

$$(V')^2 = (4\alpha^{-2}V^2 - 8\mu V + 4\lambda)V. \tag{Б.21}$$

Остается доказать, что во всех рассмотренных случаях функции $x(\xi)$ и $z(\xi)$ удовлетворяют функциональному уравнению (Б.1). В этом можно убедиться прямой проверкой (Б.1), используя формулы сложения для эллиптических функций (см. [2]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

А. монографии и обзоры

1. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – 3-е изд. М.: Наука, 1989. – 472 с.
2. *Арнольд В.И., Гивенталь А.Б.* Симплектическая геометрия // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). – М., 1985. – Т. 4. – С. 5–139.
3. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). – М., 1985. – Т. 3. – С. 5–304.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции /Пер. с англ. В 3-х т. – Т.3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. – М.: Наука, 1976. – 299 с.
5. *Бессе А.* Многообразия с замкнутыми геодезическими/Пер. с англ.– М.: Мир, 1981.
6. *Биркгоф Дж.* Динамические системы / Пер. с англ.; Под ред. А.А. Маркова и др. – М.–Л.: Гостехиздат, 1941. – 320 с.
7. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Гл. IV–VI/Пер. с франц. – М.: Мир, 1972.
8. *Вейль Г.* Классические группы, их инварианты и представления / Пер. с англ. Д.А. Райкова. – М.: ИЛ, 1947. – 480 с.
9. *Гийемин В., Стернберг С.* Геометрические асимптотики / Пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – 500 с.
10. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. – М.: Наука, 1979. – 760 с.
11. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы теории гомологий. – М.: Наука, 1984. – 344 с.
12. *Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П.* Нелинейные уравнения типа Кортевега – де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // Успехи мат. наук. – 1976. – Т. 31, вып. 1. – С. 55–136.
13. *Дубровин Б.А.* Тета-функции и нелинейные уравнения // Успехи мат. наук. – 1981. – Т. 36, вып. 2. – С. 11–80.
14. *Дубровин Б.А., Кричевер И.М., Новиков С.П.* Интегрируемые системы. I. // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. (Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР) – М., 1985. – Т. 4. – С. 179–290.
15. *Желобенко Д.П.* Компактные группы Ли и их представления.– М.: Наука. 1970. – 664 с.
16. *Картан Э.* Интегральные инварианты / Пер. с франц.; под ред. В.В. Степанова. – М. – Л: ГИТТЛ, 1940. – 216 с.
17. *Кириллов А.А.* Элементы теории представлений. – М.: Наука, 1978. – 344 с.
18. *Кирхгоф Г.* Механика. – М.: Изд-во АН СССР, 1962.
19. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. – Т. I /Пер. с англ. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
20. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. – Т. 2 /Пер. с англ. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
21. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи мат. наук. – 1983. – Т. 38, вып. 1. – С. 3–67.

22. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. – 2-е изд. – Т. 1–2 / Пер. с франц. – М.–Л.: Гостехиздат. 1950. – 594 с. – 440 с.
23. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: В 10 т. Т. I. Механика. – 4-е изд. – М.: Наука, 1988 . 216 с.
24. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных / Пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – 340 с.
25. *Мозер Ю.* Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем // Успехи мат. наук. – 1981. – Т. 36, вып. 5. – С. 109–151.
26. *Новиков С.П.* Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // Успехи мат. наук. – 1982. – Т. 37, вып. 3. – С. 49.
27. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии // Собрание трудов академика А.Н. Крылова. – Т. VII / Пер. с латинск. – М. – Л.: Изд-во АН СССР, 1936.
28. *Переломов А.М.* Точные результаты для одномерных многочастичных систем // ЭЧАЯ. – 1979. – Т. 10, вып. 4. – С. 850–883.
29. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. – Т. 1–3 // Избр. труды. – Т. 1–2 / Пер. с франц. – М.: Наука, 1971. – 771 с.; – 1972. – С. 9–356.
30. *Рейман А.Г.* Интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с градуированными алгебрами Ли // Записки научн. семинаров ЛОМИ. – 1980. – Т. 95. – С. 3–54.
31. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены / Пер. с англ. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.
32. *Смейл С.* Топология и механика // Успехи мат. наук. – 1972. – Т. 27, вып. 2. – С. 77–133.
33. *Тода М.* Теория нелинейных решеток / Пер. с англ. – М.: Мир, 1984.
34. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновых систем иа алгебрах Ли // Успехи мат. наук. – 1984. – Т. 39, вып. 2. – С. 3–56.
35. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика / Пер. с англ. – М. – Л.: Гостехиздат, 1937. – 500 с.
36. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / Пер. с англ. – М.: Мир, 1964.
37. *Чжэнь Ш.Ш.* Комплексные многообразия / Пер. с англ. – М : ИЛ, 1961. – 240 с.
38. *Шарлье К.* Небесная механика / Пер. с нем.; под ред. Б.М. Щиголева. – М.: Наука, 1966. – 627 с.
39. *Якоби К.* Лекции по динамике / Пер. с нем.; под ред. Н.С. Кошлякова.– М. – Л.: Гостехиздат, 1936. – 271 с.
40. *Abraham R., Marsden J.* Foundation of mechanics. – N.Y.: Benjamin-Cummings, 1978.
41. *Adler M., van Moerbeke P.* A systematic approach towards solving integrable systems, 1990.
42. *Calogero F.* // Nonlinear equations in physics and mathematics. – Dordrecht: Reidel, 1978. – P. 3.
43. *Calogero F.* // Bifurcation phenomena in mathematical phisics and related topics. – Dordrecht: Reidel, 1980. – P. 171.
44. *Ceyley A.* Report on the recent progress of theoretical dynamics // Report of the British Association of the Advancement of Science, 1857. – P. 98.
45. *Cayley A.* Report on the progress of the solution of certain special problems of dynamics // Report of the British Association for the Advancement of Science, 1862. – P. 184–252.
46. *Darboux G.* Lecons sur la theorie generale des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal. P. III. – Paris: Gauthier–Villars, 1891.
47. *Euler L.* Mechanice sive motus scientia analytice exposita. – Petropoli, 1736.
48. *Hamilton W.R.* On a general method in Dynamics, by which the study of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation of characteristic function // Phil. Trans. Roy. Soc. – 1834. – P. 247–308.
49. *Hieterinta J.* Direct methods for the search of the second invariant. // Phys. Reports. – 1987. – V. 147. – P. 87–154.
50. *Kac V.* Infinite dimensional Lie algebras, 1983.

51. *Kepleri J.* Astronomia Nova. – Helderbergae, 1609.
52. *Kepleri J.* Harmonices Mundi. – Linici, 1619.
53. *Laplace P.–S.* Traité de mechanique céleste. – Paris, 1799. – T. I. – Livre 2. – Ch. 3. – P. 395.
54. *Lie S.* Begründung einer Invarianten–Theorie der Berührungs Transformationen. – Math. Ann. – 1874/75. – Bd 85. – S. 214–303.
55. *Lie S.* (unter Mitwirkung von *F. Engel*). Theorie der Transformationsgruppen. – Bd I. – Leipzig: Teubner, 1888.
56. *Lie S.* (unter Mitwirkung von *F. Engel*). Theorie der Transformationsgruppen. – Bd 2. – Leipzig: Teubner, 1890.
57. *Lie S.* (unter Mitwirkung von *F. Engel*). Theorie der Transformationsgruppen. – Bd 3. – Leipzig: Teubner, 1893.
58. *McKeen H.* Algebraic curves and integrable systems // Lecture Notes Math. – 1979. – V. 755. – P. 83–200.
59. *Moser J.* Geometry of quadrics and spectral theorie // The Chern Symposium 1979. – Springer, 1980. – P. 147–188.
60. *Olshanetsky M.A., Perelomov A.M.* Classical integrable finitedimensional systems related to Lie algebras // Phys. Reps. – V. 71. – No. 5. – 1981. – P. 313–400.
61. *Prange G.* Die Allgemeinen Integrationsmethoden der analityschen Mechanik // Encykl. der Math. Wiss. – Bd IV, I–II. – Heft 4. – Leipzig: Teubner, 1935. – S. 505–804.
62. *Siegel C.L.* Symplectic geometry. – N.Y.: Acad. Press, 1964.
63. *Siegel C., Moser J.* Lectures on celestial mechanics. – Springer, 1971.
64. *Souriau J.–M.* Structure des systemes dynamiques. – Paris: Dunod, 1970.
65. *Thirring W.* Classical dynamical systems. – N.Y.: Springer, 1978.
66. *Weinstein A.* Lectures on symplectic manifolds. – Providence. – R.I.: 1977.

Б. Журнальные статьи

67. *Арнольд В.И.* // Успехи мат. наук. – 1969. – Т. 24, вып. 3. – С. 225.
68. *Березанский Ю.М.* // ДАН СССР. – 1985. – Т. 281. – С. 16.
69. *Березин Ф.А.* // Функцион. анализ и его прил. – 1967. – Т. 1, вып. 2. – С. 1.
70. *Болсинов А.В.* // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – В. 23.
71. *Браилов А.В.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1986. – Т. 50. – С. 661.
72. *Бялый М.Л.* // Функцион. анализ и его прил. – 1987. – Т. 21, вып. 4. – С. 64.
73. *Веселов А.П.* // Успехи мат. наук. – 1980. – Т. 35, вып. 4. – С. 195.
74. *Винтерниц П., Смородинский Я.А., Углирж М., Фриш И.* // Ядерная физика. – 1966. – Т. 4. – С. 625.
75. *Гальперин Г.А.* // Успехи мат. наук. – 1981. – Т. 36, вып. 5. – С. 167.
76. *Дринфельд В.Г.* // ДАН СССР. – 1982. – Т. 268. – С. 1011.
77. *Захаров В.Е., Фаддеев Л.Д.* // Функцион. анализ и его прил. – 1971. – Т. 5, вып. 4. – С. 18.
78. *Кац В.Г.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – Т. 32. – С. 1323.
79. *Кириллов А.А.* // Успехи мат. наук. – 1976. – Т. 31, вып. 4. – С. 57.
80. *Козлов В.В.* // ДАН СССР. – 1979. – Т. 249. – С. 1299.
81. *Козлов В.В., Колесников Н.Н.* // Вестник МГУ. сер. механика. – 1979, вып. 6. – С. 88.
82. *Колокольцов В.В.* // Изв. АН СССР. Сер. математика. – 1983. – Т. 46. – С. 994.
83. *Кричевер И.М.* // Успехи мат. наук. – 1978. – Т. 33, вып. 4. – С. 215.
84. *Кричевер И.М.* // Функцион. анализ и его прил. – 1978. – Т. 12, вып. 1. – С. 76.
85. *Кричевер И.М.* // Функцион. анализ и его прил. – 1980. – Т. 14, вып. 4. – С. 45.
86. *Кулиш П.П.* // Теорет. и мат. физика. – 1976. – Т. 19. – С. 332.
87. *Лебедев Д.Р., Манин Ю.И.* // Функцион. анализ и его прил. – 1979. – Т. 13, вып. 4. – С. 40.
88. *Манаков С.В.* // Журн. эксперим. и теорет. физ. – 1974. – Т. 40. – С. 269.
89. *Мищенко А.С., Фоменко А.Т.* // ДАН СССР. – 1976. – Т. 231. – С. 536.
90. *Мищенко А.С., Фоменко А.Т.* // Изв. АН СССР. Сер. математика. – 1978. – Т. 42. – С. 396.
91. *Нехорошев Н.Н.* // Труды Московского Математического общества. – 1972. – Т. 26. – С. 181.

92. *Новиков С.П.* // Функцион. анализ и его прил. – 1974. – Т. 8, вып. 3. – С. 54.
93. *Новиков С.П., Шмельцер И.* // Функцион. анализ и его прил. – 1981. – Т. 15, вып. 3. – С. 54.
94. *Ольшанецкий М.А., Переломов А.М.* // Функцион. анализ и его прил. – 1976. – Т. 10, вып. 3. – С. 86.
95. *Ольшанецкий М.А., Переломов А.М.* // Функцион. анализ и его прил. – 1977. – Т. 11, вып. 1. – С. 75.
96. *Ольшанецкий М.А., Переломов А.М.* // Функцион. анализ и его прил. – 1978. – Т. 12, вып. 2. – С. 60.
97. *Ольшанецкий М.А., Переломов А.М.* // Теорет. и мат. физика. – 1980. – Т. 45. – С. 3.
98. *Переломов А.М.* // Теорет и мат. физика. – 1971. – Т. 6. – С. 364.
99. *Переломов А.М.* // Функцион. анализ и его прил. – 1981. – Т. 15, вып. 2. – С. 83.
100. *Переломов А.М.* // Препринт ИТЭФ N147. – 1983.
101. *Пидкуйко С., Степин А.М.* // Функцион. анализ и его прил. – 1976. – Т. 10, вып. 2. – С. 84.
102. *Рейман А.Г., Семенов-Тян-Шанский М.А., Френкель И.Я.* // ДАН СССР. – 1979. – Т. 247. – С. 802.
103. *Рейман А.Г.* // Записки науч. сем. ЛОМИ. – 1986. – Т. 155. – С. 187.
104. *Семенов-Тян-Шанский М.А.* // Функцион. анализ и его прил. – 1983. – Т. 17, вып. 4. – С. 34.
105. *Склянин Е.К.* // Функцион. анализ и его прил. – 1982. – Т. 16, вып. 4. – С. 27.
106. *Яров-Яровой М.С.* // Прикл. математика и механика. – 1963. – Т. 27. – С. 973.
107. *Abel N.H.* // Jour. Reine Angew. Math. – 1826. – Bd I. – S. 153.
108. *Adler M.* // Comm. Math. Phys. – 1977. – V. 55. – P. 195.
109. *Adler M.* // Invent. Math. – 1979. – V. 50. – P. 219.
110. *Adler M., van Moerbeke P.* // Adv. Math. – 1980. – V. 38. – P. 267.
111. *Adler M., van Moerbeke P.* // Adv. Math. – 1980. – V. 38. – P. 318.
112. *Adler M., van Moerbeke P.* // Comm. Math. Phys. – 1982. – V. 83. – P. 83.
113. *Adler M., van Moerbeke P.* // Invent. Math. – 1982. – V. 67. – P. 297.
114. *Adler M., Moser J.* // Comm. Math. Phys. – 1978. – V. 61. – P. 1.
115. *Ahmed S., Bruschi M., Calogero F., Olshanetsky M., Perelomov A.* // Nuovo Cim. – 1979. – V. B49. – P. 173.
116. *Airault H., McKean H., Moser J.* // Comm. Pure Appl. Math. – 1977. – V. 30. – P. 95.
117. *Appel P.* // Compt. Rend. – 1915. – V. 160. – P. 419.
118. *Arnold V.I.* // Ann. Inst. Fourier. – 1966. – V. 16. – P. 319.
119. *Atiyah M.* // Bull. Lond. Math. Soc. – 1982. – V. 14. – P. 1.
120. *Atiyah M.* // Proc. Edinburgh Math. – 1983. – V. 26. – P. 121.
121. *Barucchi G., Regge T.* // Journ. Math. Phys. – 1977. – V. 18. – P. 1149.
122. *Berezin F.A., Perelomov A.M.* // Comm. Math. Phys. – 1980. – V. 74. – P. 129.
123. *Bertrand J.* // Compt. Rend. – 1873. – V. 77. – P. 849.
124. *Belbruno E.* // Celest. Mech. – 1977. – V. 15. – P. 467.
125. *Bogoyavlensky O.I.* // Comm. Math. Phys. – 1976. – V. 51. – P. 201.
126. *Borel A.* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1954. – V. 40. – P. 1147.
127. *Bour E.* // Journ. Math. Pures Appl. – 1855. – V. 20. – P. 185.
128. *Bozis G.* // Celest. Mech. – 1982. – V. 28. – P. 367.
129. *Burgatti P.* // Rend. Lincei. – 1911. – V. 20. – P. 108.
130. *Bruschi M., Calogero F.* // Lett. Nuovo Cim. – 1979. – V. 24. – P. 601.
131. *Bruschi M.* // Lett. Nuovo Cim. – 1979. – V. 25. – P. 417.
132. *Calogero F.* // J. Math. Phys. – 1971. – V. 12. – P. 419.
133. *Calogero F.* // Lett. Nuovo Cim. – 1975. – V. 13. – P. 411.
134. *Calogero F.* // Lett. Nuovo Cim. – 1976. – V. 16. – P. 35.
135. *Calogero F.* // Lett. Nuovo Cim. – 1976. – V. 16. – P. 77.
136. *Calogero F.* // Lett. Nuovo Cim. – 1977. – V. 19. – P. 505.
137. *Calogero F.* // Lett. Nuovo Cim. – 1977. – V. 20. – P. 251.
138. *Calogero F.* // Nuovo Cim. – 1978. – V. B43. – P. 177.
139. *Calogero F.* // Nuovo Cim. – 1980. – V. 58. – P. 169.
140. *Calogero F., Marchioro C., Ragnisco O.* // Lett. Nuovo Cim. – 1975. – V. 13. – P. 383.
141. *Calogero F., Perelomov A.M.* // Lett. Nuovo Cim. – 1978. – V. 23. – P. 650.
142. *Calogero F., Perelomov A.M.* // Comm. Math. Phys. – 1978. – V. 59. – P. 109.

143. *Calogero F., Perelomov A.M.* // Linear Algebra Appl. – 1979. – V. 25. – P. 91.
144. *Calogero F., Olshanetsky M.A., Perelomov A.M.* // Lett. Nuovo Cim. – 1979. – V. 24. – P. 97.
145. *Case K.* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1978. – V. 75. – P. 3562.
146. *Case K.* // Journ. Math. Phys. – 1979. – V. 20. – P. 972.
147. *Case K.* // Physica. – 1979. – V. A96. – P. 173.
148. *Chen H., Lee Y., Pereira N.* // Phys. Fluids. – 1979. – V. 22. – P. 187.
149. *Choodnovsky D.V., Choodnovsky G.V.* // Nuovo Cim. – 1977. – V. B40. – P. 339.
150. *Choodnovsky D.V., Choodnovsky G.V.* // Lett. Nuovo Cim. – 1977. – V. 19. – P. 291.
151. *Choodnovsky D.V., Choodnovsky G.V.* // Lett. Nuovo Cim. – 1978. – V. 22. – P. 47.
152. *Clebsch A.* // Math. Ann. – 1871. – V. 3. – P. 238.
153. *Cordani B.* // Comm. Math. Phys. – 1986. – V. 103. – P. 104.
154. *Darboux G.* // Compt. Rend. – 1877. – T. 84. – P. 760 – 936.
155. *Darboux G.* // Bull. Sci. Math. – 1882. – T. 6. – P. 14 – 49.
156. *Dal Acqua F.A.* // Math. Ann. – 1908. – V. 66. – P. 398.
157. *Dal Acqua F.A.* // Rend. Circ. Math. Palermo. – 1912. – V. 33. – P. 341.
158. *Date E., Tanaka S.* // Prog. Theor. Phys. – 1976. – V. 55. – P. 457.
159. *Deift P., Li L.C., Nanda T., Tomei C.* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1984. – V. 11. – P. 367.
160. *Devaney R.* // Amer. J. Math. – 1978. – V. 100. – P. 631.
161. *Drach J.* // Compt. Rend. – 1935. – V. 200. – P. 22.
162. *Dorizzi B., Grammaticos B., Hietarinta J., Ramani A., Schwarz F.* // Phys. Lett. – 1986. – V. A116. – P. 432.
163. *Dyson F.* // Journ. Math. Phys. – 1962. – V. 3. – P. 140, 157, 166.
164. *Euler L.* // Mem. de Berlin, 1760. – 1767. – P. 228–249.
165. *Euler L.* // Historie de Acad. Roy. des Sci. Berlin. – 1758 – 1765. – T. 14. – P. 154–193.
166. *Ferguson W., Jr.* // Math. Computation. – 1980. – V. 35. – P. 1203.
167. *Ferguson W., Flaschka H., McLaughlin D.* // Journ. Comp. Phys. – 1982. – V. 45. – P. 157.
168. *Flaschka H.* // Phys. Rev. – 1974. – V. B9. – P. 1924.
169. *Flaschka H.* // Prog. Theor. Phys. – 1974. – V. 51. – P. 703.
170. *Flaschka H.* // Lecture Notes in Phys. – 1975. – V. 38. – P. 441.
171. *Flaschka H., McLaughlin D.* // Prog. Theor. Phys. – 1976. – V. 55. – P. 438.
172. *Fock V.A.* // Zc. für Phys. – 1935. – Bd 98. – S. 145.
173. *Fokas A., Lagerstrom P.* // J. Math. Anal. Appl. – 1980. – V. 74. – P. 325.
174. *Fordi A., Wojciechowsky S., Marshall I.* //Phys. Lett. – 1986. – V.A113. – P. 395.
175. *Funk O.* // Math. Ann. – 1913. – Bd. 74. – S. 278.
176. *Gambardella P.* // Journ. Math. Phys. – 1975. – V. 16. – P. 1172.
177. *Gardner C., Greene J., Kruskal M., Miura R.* // Phys. Rev. Lett. – 1967. – V.19. – P. 1921.
178. *Garnier R.* // Rend. Circ. Math. Palermo. – 1919. – V.43. – N4. – P. 155.
179. *Guillemin V.* // Adv. Math. – 1976. – V. 22. – P. 85.
180. *Guillemin V., Sternberg S.* // Invent. Math. – 1982. – V. 67. – P. 491.
181. *Goodman R., Wallach N.* // Comn. Math. Phys. – 1982. – V. 83. – P. 355.
182. *Goodman R., Wallach N.* // Comn.Math. Phys. – 1984. – V. 94. – P. 127.
183. *Grammaticos B., Dorizzi B., Padjen R.* // Phys. Lett. – 1982. – V. A89. – P. 111.
184. *Grammaticos B., Dorizzi B., Ramani A.* // J. Math. Phys. – 1983. – V. 24. – P. 2289.
185. *Grammaticos B., Dorizzi B., Ramani A.* // J. Math. Phys. – 1984. – V.25. – P. 1833.
186. *Grammaticos B., Dorizzi B., Ramani A., Hietarinta J.* // Phys. Lett. – 1985. – V. A109. – P. 81.
187. *Gromov M.* // Actes Congr. Intern. Math., 1970. – T. 2. – Paris. – 1971. – P. 221–225.
188. *Grosse H.* // Acta Phys. Austriaca. – 1980. – Bd 52. – S.89.
189. *Hadamard J.* // Jour. de Math. Pures Appl. – 1898. – T.4. – P. 27.
190. *Hadamard J.* // Bull. Sci. Math. – 1911. – T. 35. – P. 106.
191. *Hall L.* // Phys. Rev. Lett. – 1985. – V. 54. – P. 614.
192. *Halphen G.* // Compt. Rend. – 1877. – T. 84. – P. 939.
193. *Halphen G.* // Jour. de Math. Pures Appl. – 1888. – T. 4. – P. 28.
194. *Havas P.* // Jour. Math. Phys. – 1975. – V. 16. – P. 1461.
195. *Havas P.* // Jour. Math. Phys. – 1975. – V. 16. – P. 2476.
196. *Henon M.* // Phys. Rev. – 1974. – V. B9. – P. 1921.

197. *Henon M., Heiles C.* // Astron. Jour. – 1964. – V. 69. – P. 73.
198. *Hietarinta J.* // Phys. Lett. – 1983. – V. A96. – P. 273.
199. *Hietarinta J.* // Phys. Rev. – 1983. – V. A28. – P.3670.
200. *Hietarinta J.* // Phys. Rev. Lett. – 1984. – V. 52. – P. 1057.
201. *Himchenko N.G., Sinai Ya.G.* // Reps. Math. Phys. – 1984. – V.20. – P. 53.
202. *Holt C.* // Jour. Math. Phys. – 1982. – V. 23. – P. 1037.
203. *Horn A.* // Amer. J. Math. – 1954. – V. 76. – P. 620.
204. *Inosemzev V.I.* // Phys. Lett. – 1983. – V. A96. – P. 447.
205. *Inosemzev V.I.* // Phys. Lett. – 1983. – V. A98. – P. 316.
206. *Inosemzev V.I.* // Phys. Scripta. – 1984. – V. 29. – P. 518.
207. *Inosemzev V.I.* // Jour. Phys. – 1984. – V. A17. – P. 815.
208. *Inosemzev V.I., Meshcheryakov D.V.* // Lett. Math. Phys. – 1985. – V.9. – P. 13.
209. *Jacobi C.* // Compt. Rend. – 1836. – V. 3. – P. 59.
210. *Jacobi C.* // Jour. Reine Angew. Math. – 1839. – Bd 19. – S. 309.
211. *Jacobi C.* // Jour. Reine Angew. Math. – 1842. – Bd 24. – S. 5.
212. *Jacobi C.* // Gesammelte Werke. – Bd 4. – Berlin. – 1886. – S. 533.
213. *Joachimsthal F.* // Jour. Reine Angew. Math. – 1843. – Bd 26. – S. 155.
214. *Kac M., van Moerbeke P.* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1975. – V.72. – P. 2879.
215. *Kac M., van Moerbeke P.* // Adv. Math. – 1975. – V. 16. – P. 160.
216. *Kamalin S., Perelomov A.* // Comn. Math. Phys. – 1985. – V. 97. – P. 553.
217. *Kazhdan D., Kostant B., Sternberg S.* // Comm. Pure. Appl. Math. – 1978. – V.31. – P. 481.
218. *Kirchhoff G.* // Jour. Reine Angew. Math. – 1870. – Bd 71. – S. 237.
219. *Kobb G.* // Acta Math. – 1887. – V. 10. – P. 89–108.
220. *Koenigs G.* // Bull. Soc. Math. France. – 1889. – V.17. – P. 153.
221. *Kostant B.* // Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. – 1973. – V. 6. – P. 413.
222. *Kostant B.* // Adv. Math. – 1979. – V. 34. – P. 195.
223. *Kostant B.* // London Math. Soc. Lect. Notes Ser. – 1979. – V. 34. – P. 287.
224. *Kowalewski S.* // Acta Math. – 1889. – V. 12. – P. 177.
225. *Kowalewski S.* // Acta Math. – 1890. – V. 14. – P. 81.
226. *Kruskal M.* // Lectures in Appl. Math. – 1974. – V. 15. – P. 61.
227. *Kummer M.* // Comm. Math. Phys. – 1982. – V. 84. – P. 133.
228. *Kustaanheimo P., Stiefel E.* // Jour. Reine Angew. Math. – 1965. – Bd 218. – S. 204.
229. *Lagrange J.* // Anc. Mem. de Turin. – 1766–1769. – P. 118, 215.
230. *Lagrange J.* // Mem. Cl. Sci. Math. Phys. Inst. France. – 1808. – P. 1.
231. *Lagrange J.* // Mem. Cl. Sci. Math. Phys. Inst. France. – 1809. – P. 343.
232. *Laplace P. – S.* // Traité de Mecanique Céleste. – 1799. – Paris. – F.I. – Livre 2. – Chap. 3. – P. 39.
233. *Lax P.* // Comm. Pure Appl. Math. – 1968. – V. 21. – P. 467.
234. *Lenz W.* // Zs. für Phys. – 1924. – Bd 24. – S. 197.
235. *Levi-Civita T.* // Compt. Rend. – 1897. – V. 124. – P. 392, 1434.
236. *Levi-Civita T.* // Math. Ann. – 1904. – Bd 59. – S. 383.
237. *Levi-Civita T.* // Acta Math. – 1906. – V. 30. – P. 305.
238. *Levi D., Wojciechowsky S.* // Phys. Lett. – 1984. – V. A 103. – P. 11.
239. *Liouville J.* // Jour. de Math. Pure Appl. – 1840. – T. 5. – P. 351.
240. *Liouville J.* // Jour. de Math. Pure Appl. – 1849. – T. 14. – P. 257.
241. *Liouville J.* // Jour. de Math. Pure Appl. – 1855. – T.20. – P. 137, 201.
242. *Marchioro C.* // Jour. Math. Phys. – 1970. – V.11. – P. 2193.
243. *Marsden J., Weinstein A.* // Reps. Math. Phys. – 1974. – V.5. – P. 121.
244. *McDuff D.* // Jour. Diff. Geom. – 1984. – V.20. – P. 267.
245. *Mikhailov A.V., Olshanetsky M.A., Perelomov A.M.* // Comm. Math. Phys. – 1981. – V.79. – P. 473.
246. *van Moerbeke P.* // Invent. Math. – 1976. – V. 37. – P. 45.
247. *van Moerbeke P., Mumford D.* // Acta Math. – 1979. – V.143. – P. 93.
248. *Moody R.* // Jour. Algebra. – 1968. – V. 10. – P. 211.
249. *Morera G.* // Atti Acad. Sci. di Torino. – 1881. – V.16. – P. 276.
250. *Moser J.* // Comm. Pure Appl. Math. – 1970. – V.23. – P. 609.
251. *Moser J.* // Adv. Math. – 1975. – V. 16. – P. 1.
252. *Moser J.* // Lecture Notes Phys. – 1975. – V. 38. – P. 467.

253. *Moser J.* // Lecture Notes Math. – 1977. – V. 597. – P. 441.
254. *Neumann C.* // Jour. Reine Angew.Math. – 1859. – Bd 56. – S. 46.
255. *Olshanetsky M., Perelomov A.* // Invent. Math. – 1976. – V.37. – P. 93.
256. *Olshanetsky M., Perelomov A.* // Invent. Math. – 1979. – V. 54. – P. 261.
257. *Olshanetsky M., Rogov V.* // Ann. Inst. H. Poincarè. – 1978. – T.29. – P.169.
258. *Onofri E.* // Jour. Math. Phys. – 1976. – V. 17. – P. 401.
259. *Onofri E., Pauri M.* // Jour. Math. Phys. – 1978. – V. 19. – P. 1850.
260. *Painlèvè P.* // Compt. Rend. – 1897. – V. 124. – P. 221.
261. *Pars L.* // Amer. Math. Monthly. – 1949. – V. 56. – P. 394.
262. *Perelomov A.M.* // Preprint ITEP N 27. – 1976.
263. *Perelomov A.M.* // Lett. Math. Phys. – 1977. – V. 1. – P. 531.
264. *Perelomov A.M.* // Lett. Math. Phys. – 1977. – V. 2. – P. 89.
265. *Perelomov A.M.* // Ann. Inst. H. Poincaré. – 1978. – V. A28.
266. *Perelomov A.M.* // Comm. Math. Phys. – 1978. – V. 63. – P. 9.
267. *Perelomov A.M.* // Phys. Lett. – 1980. – V. A80. – P. 156.
268. *Di Pirro* // Annali di Mat. Pura ed Appl. – 1896. – V. 24. – P. 315.
269. *Poisson S.* // Jour. Ecole Politec. – 1809. – N. 8. – P. 266.
270. *Ramani A., Dorizzi B., Grammaticos B.* // Phys. Rev. Lett. – 1982. – V. 49. – P. 1539.
271. *Ratiu T.* // Lecture Notes Math. – 1980. – V. 775. – P. 219–257.
272. *Reyman A.G., Semenov-Tian-Shansky M.A.* // Invent. Math. – 1979. – V. 54. – P. 81.
273. *Reyman A.G., Semenov-Tian-Shansky M.A.* // Invent. Math. – 1981. – V. 63. – P. 423.
274. *Reyman A.G., Semenov-Tian-Shansky M.A.* // Comm. Math. Phys. – 1986. – V. 105. – P. 461.
275. *Reyman A.G., Semenov-Tian-Shansky M.A.* // Lett. Math. Phys. – 1987. – V. 14. – P. 55.
276. *Runge C.* // Vectoranalysis. – 1919. – Bd 1. – Leipzig. – S. 195.
277. *Sawada K., Kotera T.* // J. Phys. Soc. Japan. – 1975. – V. 39. – P. 1614.
278. *Schur I.* // Sitzungsber. Berlin Math. Geselschaft. – 1923. – Bd 22. – S. 9.
279. *Siegel C.L.* // Amer. Jour. Math. – 1943. – V. 65. – P. 1.
280. *Staude O.* // Acta Math. – 1988. – V. 11. – P. 303.
281. *Stäckel P.* // Math. Ann. – 1890. – Bd 35. – S. 91.
282. *Stäckel P.* // Math. Ann. – 1893. – Bd 42. – S. 537.
283. *Stäckel P.* // Compt. Rend. – 1893. – T. 116. – P. 485.
284. *Stäckel P.* // Compt. Rend. – 1893. – T. 116. – P. 1284.
285. *Stäckel P.* // Compt. Rend. – 1895. – T. 121. – P. 489.
286. *Stäckel P.* // Ann. Math. Pura Appl. – 1897. – V. 26. – P. 55.
287. *Stäckel P.* // Jour. Reine Angem. Math. – 1905. – Bd 130. – S. 89.
288. *Stekloff W.* // Math. Ann. – 1893. – Bd 42. – S. 273.
289. *Stieltjes T.* // Compt. Rend. – 1885. – T. 100. – P. 439.
290. *Stieltjes T.* // Compt. Rend. – 1885. – T. 100. – P. 620.
291. *Sutherland B.* // Phys. Rev. – 1971. – V. A4. – P. 2019.
292. *Symes W.* // Invent. Math. – 1980. – V. 59. – P. 13.
293. *Symes W.* // Physica D. – 1980. – V. 1. – P. 339.
294. *Tannery J.* // Bull. Sci. Math. – 1892. – T. 16. – P. 190.
295. *Thikstun W.* // Jour. Math. Anal. Appl. – 1976. – V. 55. – P. 335.
296. *Thurston W.* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – V. 55. – P. 467.
297. *Tischler D.* // Jour. Diff. Geom. – 1977. – V. 12. – P. 229.
298. *Toda M.* // Jour. Phys. Soc. Japan. – 1967. – V. 20. – P. 431.
299. *Toda M.* // Jour. Phys. Soc. Japan. – 1967. – V. 20. – P. 2095.
300. *Uhlenbeck K.* Minimal 2-spheres and tori in S^k. Chicago Univ. // Preprint. – 1975.
301. *Vergne M.* // Compt. Rend. 1970. – T. 170. – P. 173.
302. *Weber H.* // Math. Ann. – 1878. – Bd 14. – S. 143.
303. *Weierstrass K.* // Monatsber. König. Akad. Wiss. Berlin. – 1866. – S. 97, 185.
304. *Weinacht J.* // Math. Ann. – 1924. – Bd 91. – S. 279.
305. *Weinstein A.* // Adv. Math. – 1971. – V. 6. – P. 329.
306. *Weinstein A.* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1981. – V. 5. – P. 1.
307. *Weinstein A.* // Jour Diff. Geom. – 1983. – V. 18. – P. 523.
308. *Wojciechowski S.* // Phys. Lett. – 1977. – V. A59. – P. 84.
309. *Wojciechowski S.* // Phys. Lett. – 1984. – V. A102. – P. 85.

310. *Wojciechowski S.* // Phys. Lett. – 1984. – V. A105. – P. 188.
311. *Wojciechowski S.* // Lett. Nuovo Cim. – 1984. – V. 41. – P. 361.
312. *Wojciechowski S.* // Phys. Scripta. – 1985. – V. 31. – P. 433.
313. *Wojciechowski S.* // Lett. Math. Phys. – 1985. – V. 9. – P. 221.
314. *Wojciechowski M., Wojciechowski S.* // Phys. Lett. – 1984. – V. A105. – P. 11.
315. *Wolf J.* // Lecture Notes in Math. – 1978. – V. 676. – P. 329.
316. *Yoshida H.* // Celest. Mech. – 1983. – V. 31. – P. 361–381.
317. *Yoshida H.* // Celest. Mech. – 1984. – V. 32. – P. 73.
318. *Zoll O.* // Math. Ann. – 1903. – Bd 57. – S. 108.