

СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

М.: Мир, 1972, 184 стр.

Имя автора хорошо знакомо физикам-теоретикам и космологам. Именно Пенроузу принадлежит доказательство важной теоремы о неизбежности возникновения физической сингулярности пространства-времени в ходе релятивистского коллапса тел.

В этой небольшой книге изложены проблемы общей теории относительности, в том числе природа общей относительности, конформная бесконечность, горизонты событий и частиц, релятивистский гравитационный коллапс и роль сингулярностей в космологии, а также развитые автором методы анализа структуры пространства-времени.

Книга представляет большой интерес для физиков-теоретиков, астрофизиков, космологов — как специалистов, так и студентов старших курсов высших учебных заведений и аспирантов.

Содержание

От редакторов перевода	5
1. Введение	11
2. Сущность общей теории относительности	18
3. Метод абстрактных индексов	33
4. Пространства-времени со спинорной структурой	42
5. Истолкование спин-вектора	56
6. Явные формулы для кривизны	66
7. Уравнения Эйнштейна и фокусирование	72
8. Конформная бесконечность	89
9. Горизонты	111
10. Гравитационный коллапс	130
11. Сингулярности в космологии	161
Литература	176
Послесловие автора к русскому изданию	181

От редакторов перевода

Созданная Эйнштейном общая теория относительности легла в основу научного подхода к изучению геометрических свойств пространства и времени физического мира. Уравнения Эйнштейна описывают локальные искривления пространства-времени; решения же этих уравнений определяют структуру пространства-времени. Уже в первых космологических работах самого Эйнштейна возник вопрос о геометрических свойствах пространства-времени в целом, т. е. о его топологии. В этих работах (выполненных задолго до открытия Хабблом разбегания галактик) 3-мерное пространство рассматривалось как 3-сфера неизменного радиуса, вечно существующая во времени. Так был впервые поставлен вопрос о геометрических свойствах 3-мерного пространства: бесконечно ли оно, бесконечно ли число небесных тел во вселенной или же пространство замкнуто и конечно по объему?

Дальнейшее развитие космологии (построение моделей расширяющейся вселенной Фридманом, работы Эддингтона, Леметра и др.) привело к постановке новой проблемы — проблемы сингулярности в космологии. В расширяющихся однородных изотропных моделях вселенной (справедливость которых подтверждается наблюдениями) расширение начиналось с сингулярного состояния — бесконечно большой плотности материи и бесконечно большой кривизны пространства-времени. Естественно возникает вопрос, является ли эта особенность свойством лишь однородных изотропных моделей. Быть может, в общем случае, когда рассматриваются отклонения от строгой изотропии и однородности, бесконечности кривизны

и плотности материи не появляются? Не оказывается ли сингулярность специальным случаем «фокусировки» в вырожденном случае строго однородных и изотропных моделей?

Определенную надежду на последнюю возможность дает рассмотрение в ньютоновской теории кинематической задачи разлета сферического облака частиц. Если частицы движутся точно по радиусам, то неизбежно пересечение их траекторий в прошлом в центре шара и возникновение сингулярности. Однако если придать частицам небольшие случайные тангенциальные скорости, то частицы проскакивают друг мимо друга вблизи центра, и сингулярность не возникает. Может быть, аналогичная ситуация имеет место и в космологической проблеме общей теории относительности!

Развитие общей теории относительности, а затем и развитие астрофизики поставило вопрос о структуре пространства-времени, о сингулярностях, о топологических свойствах пространства применительно к проблеме эволюции не только всей вселенной, но и отдельного тела. Исследование гравитационного коллапса отдельного тела показало, что когда размер тела приближается к гравитационному радиусу $r_g = = 2GH/c^2$, гравитационное поле становится настолько сильным, а искривление пространства-времени столь велико, что даже лучи света и нейтрино, испускаемые телом, не могут уйти к далекому наблюдателю.

Что произойдет после сжатия тела до радиуса r_g , внешний наблюдатель никогда не узнает. Но каков же исход сжатия для наблюдателя на сжимающемся теле? В простейшем случае сферической симметрии здесь также возникает сингулярность: бесконечная кривизна, бесконечная плотность материи. Возможно ли избежать сингулярности в общем случае? Что будет с коллапсирующей материей после сжатия, сменится ли сжатие расширением, какова структура пространства-времени в этом случае?

Помимо этих вопросов, связанных со структурой пространства-времени в больших масштабах — так сказать, в целом, — стоит задача изучения локальных

свойств пространства-времени, т. е. локальных инвариантов, которыми оно характеризуется в разных физических процессах.

Уравнения общей теории относительности, описывающие структуру пространства-времени, суть нелинейные уравнения в частных производных второго порядка. Их анализ в сколько-нибудь сложном случае — задача необычайно трудная. В последнее время для решения подобных проблем развиваются тонкие математические методы. Автор предлагаемой книги, Роджер Пенроуз, является одним из создателей таких методов. До сих пор имя Пенроуза было хорошо известно у нас лишь сравнительно малому кругу лиц — математикам и физикам. Мы надеемся, что эта книга будет способствовать тому, что с методами Пенроуза познакомятся многие. Применение их привело Пенроуза и его последователей к глубоким и важным результатам, имеющим принципиальное значение. Главными из них являются доказательства неизбежности сингулярности в космологии и гравитационном коллапсе.

В предлагаемой книге излагаются основы строгих современных методов исследования структуры пространства-времени. Книга является переводом лекций Пенроуза, прочитанных им на I Баттельской конференции математиков и физиков. Эта конференция состоялась в 1967 г. в Сиэтле (США) и была посвящена топологическим проблемам в математике, квантовой физике и общей теории относительности. Лекции вошли в сборник, изданный под редакцией Дж. Уилера и Сесиль Де-Витт.

Следует указать, что данная книга не может быть первой книгой для тех, кто намерен изучить общую теорию относительности. Для чтения ее необходимо предварительное изучение учебника: Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, «Теория поля», а также книги: П. К. Рашевский, «Риманова геометрия и тензорный анализ».

Методы, излагаемые в книге, являются типично математическими и отличаются необходимой строгостью. Однако Пенроуз овладевает прекрасной

физической интуицией, и это делает изложение живым и наглядным. Он не прячет способ получения результатов за формальными математическими доказательствами, а делится с читателями теми идеями, которые помогают ему находить общие и глубокие решения проблем.

Строгое математическое рассмотрение гравитационного коллапса реальных массивных звезд в конце эволюции, с учетом вращения и отклонения от сферической симметрии, показывает, что для внешнего наблюдателя картина коллапса стремится к застыванию, когда размер звезды приближается к гравитационному радиусу r_g . Что будет после этого момента, внешний наблюдатель никогда не узнает. В настоящее время доказано, что внешнее поле при этом стремится к метрике Керра (рассматриваемой в данной книге), зависящей только от массы, углового момента и заряда коллапсирующего тела. На фоне этих строгих результатов особенно неубедительно выглядят предпринимаемые иногда еще и сейчас попытки доказать, что гравитационный коллапс тела после сжатия до размеров меньше r_g может смениться расширением к тому же внешнему наблюдателю, так что наблюдатель будет видеть периодические колебания. Явно несостоятельны попытки объяснить на этой основе природу таких объектов, как пульсары или квазары.

Излагая вопросы общей теории относительности, Пенроуз часто обращается к квантовой теории и теории частиц. Хотя общеизвестно, что теория относительности может быть построена без всякого обращения к квантовой теории и является в этом смысле «классической», многие аспекты теории квантов и общей теории относительности оказываются тесно переплетенными, что специально подчеркивается автором.

Другие аспекты общей теории относительности, не освещенные в книге Пенроуза, читатель может найти в книгах: В. А. Фок, «Теория пространства, времени и тяготения», Физматгиз, М., 1961 и А. З. Петров, «Новые методы в общей теории относительности», изд-во «Наука», М., 1966; астрофи-

зические аспекты — в книгах: Я. Б. Зельдович и И. Д. Новиков, «Релятивистская астрофизика», изд-во «Наука», М., 1967, и «Теория тяготения и эволюция звезд», изд-во «Наука», М., 1971.

Часть вопросов, связанных со структурой пространства-времени, не вошла в данную книгу. Это главным образом результаты, полученные после 1967 г. Мы укажем здесь некоторые из них, дав необходимые ссылки.

Последние теоремы о неизбежности сингулярностей в космологии и коллапсе см. в обзоре: S. Hawking, R. Penrose, Proc. Roy. Soc., A314, 529 (1970).

Вопросы о структуре пространства-времени вблизи сингулярности изложены в статье: В. А. Белинский, Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников, УФН, 102, 463 (1970).

В последнее время возникают идеи о рождении пар частиц-античастиц из вакуума в сильном и переменном гравитационном поле вблизи сингулярностей, как космологической, так и возникающих при коллапсе (Я. Б. Зельдович, А. А. Старобинский, ЖЭТФ, 61, № 6, 1971). Это одно из тех направлений, где квантовая теория непосредственно применяется в общей теории относительности. Заметим, что для этих вопросов оказалось важным понятие конформной инвариантности, широко обсуждаемое Пенроузом.

Структура пространства-времени, возникающая при коллапсе небесных тел (так называемые «черные дыры»), вопрос об эволюции материи после коллапса, поиски сколлапсировавших тел во вселенной, новый подход к тензору энергии-импульса гравитационных волн (тензор Айзексона), нелокальные инварианты для гравитационных волн обсуждаются в книге: Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, «Теория тяготения и эволюция звезд», 1971.

Перевод книги выполнен канд. физ.-мат. наук Л. П. Грищуком и док. физ.-мат. наук Н. В. Мицкевичем, которые сами являются известными специалистами по общей теории относительности. Переводчи-

ками исправлен ряд опечаток английского издания и сделан ряд примечаний к тексту (помимо примечаний редакторов).

Редакторы и переводчики благодарят Р. Пенроуза за присылку послесловия, а также дополнений и исправлений для русского издания.

Данную книгу следует рекомендовать в первую очередь астрономам, физикам и математикам, интересующимся проблемами общей теории относительности. Ее можно также настоятельно рекомендовать студентам физико-математических специальностей и аспирантам, ибо знание современных математических методов совершенно необходимо для успешной работы в области теоретической физики.

*Я. Б. Зельдович
И. Д. Новиков*

1.

Введение

Согласно современной теории, все физические явления совершаются в рамках некоторого дифференцируемого многообразия, именуемого *пространственно-временным континуумом*. Мы настолько свыклись с этой мыслью, что такая структура пространства и времени кажется нам сейчас почти «очевидной». Однако прежде чем приступить к ее анализу, стоит разобраться, на чем основывается эта вера. Конечно, совсем не исключено, что когда-нибудь будет создана теория, которая сможет описывать природу лучше, чем теперешняя, и вместе с тем эта новая теория окажется несовместимой с представлением о пространстве-времени как о дифференцируемом многообразии. На такую возможность не следует закрывать глаза, но в то же время полезно подумать и о том, почему современный подход является таким прекрасным приближением при описании удивительно широкого круга явлений.

Весьма близкий к «локально евклидову» характер пространства вместе с непрерывностью времени, конечно, дает нам главное основание для строгого развития представлений о континууме. Во времена Зенона такого точного представления о континууме не было и возникали затруднения с понятием предельного перехода в пространстве или во времени. Сейчас мы этих затруднений не испытываем, но, может быть, в этом и состоит наш просчет! Стандартное разрешение парадоксов Зенона основывается больше на *математическом* понятии континуума, чем на природе самого пространства-времени. Утверждение о том, что пространство-время образует континуум, подразумевает сохранение его непрерывной природы

независимо от того, с каким «увеличением» мы его рассматриваем. Но ведь отнюдь не очевидно, что непрерывное описание соответствует действительности в достаточно малых масштабах, где существенную роль начинают играть квантовые эффекты. Возьмем, например, масштабы порядка 10^{-13} см (примерный радиус элементарной частицы). При любой попытке определить положение частицы с такой степенью точности становится вероятным (ввиду принципа неопределенности) возникновение чрезвычайно большого импульса. Тогда должны рождаться *новые* частицы, и некоторые из них могут оказаться не отличимыми от первоначальной¹⁾, так что понятие «положения» первоначальной частицы становится неопределенным [22]. Но еще более угрожающая картина вырисовывается, когда мы осмеливаемся перейти к явлениям, протекающим в масштабах порядка 10^{-33} см. Здесь квантовые флуктуации кривизны пространства-времени²⁾ становятся достаточно сильными, чтобы изменять топологию, и пространство-время должно оказаться каким-то беспорядочным наложением разнообразных топологий [112], а это уж никак не похоже на гладкое многообразие.

Абсолютно не ясно, имеет ли вообще смысл говорить о природе пространства-времени в таких масштабах, и если это *бессмысленно*, то мы *заведомо* не можем со всей строгостью описывать пространство-время как гладкое многообразие. Но, с другой стороны, можно утверждать, что представление о гладком многообразии соответствует подходу ко всем «разумным» физическим процессам. Лично я думаю, что *в конечном счете* это окажется не так — я не верю

¹⁾ В квантовой физике *неразличимость* частиц — это не просто тождественность их количественных характеристик, а *полное* отсутствие индивидуальности (для частиц с одинаковыми основными характеристиками — например, для всех электронов), так что невозможно даже просто перенумеровать эти частицы. — *Прим. перев.*

²⁾ Если, конечно, в эту область удастся корректно экстраполировать современные представления как квантовой теории, так и теории гравитации. — *Прим. перев.*

в то, что действительное понимание природы элементарных частиц вообще может быть достигнуто без более глубокого понимания природы самого пространства-времени. Но если мы ограничимся рамками того уровня явлений, при котором это понимание не обязательно (а ведь это почти вся физика наших дней), то представление о гладком многообразии окажется превосходным орудием для нашего анализа.

Оставим пока в стороне вопрос о субмикроскопической структуре пространства-времени и вместо этого сосредоточим внимание на его крупномасштабных свойствах. Тогда мы можем принять адекватность представления о гладком многообразии и положить, что его структура в большом может быть получена из сложения меньших «локально евклидовых» кусочков подобно тому, как в дифференциальной геометрии берутся перекрывающиеся координатные окрестности (карты). Этот путь может привести нас к топологии пространства-времени в большом, отличной от евклидовой. К сожалению, о крупномасштабной структуре вселенной известно слишком мало, и мы не можем с уверенностью говорить о ее глобальной топологии (разве что возможно сформулировать утверждения о ее ориентируемости). Итак, может оказаться, что крупномасштабная топология пространства-времени не представляет никакого интереса.

И все же, *несмотря на это*, не мешает с достаточной общностью рассмотреть вопросы топологии пространственно-временных многообразий. Для этого, в частности, имеются две различные, хотя и до некоторой степени взаимосвязанные, причины. Чтобы четко выразить первую из них, следует представить вселенную в ее четырехмерной целостности, а не как некоторое трехмерное пространственноподобное сечение («теперь»). Одной из сколько-нибудь надежно *установленных* наблюдательных черт четырехмерной крупномасштабной структуры вселенной является тот факт, что в некий «момент» в прошлом (порядка 10^{10} лет тому назад) все вещество вселенной, по-видимому, находилось в крайне сжатом и хаотическом (горячем) состоянии. Это вытекает из наблюдаемого

расширения вселенной и из уравнений общей теории относительности, если сделать определенные предположения о крупномасштабной однородности распределения вещества во вселенной. По-видимому, еще более непосредственно это вытекает из наблюдений недавно обнаруженного [25, 80a] фонового электромагнитного излучения, заполняющего все пространство. Теперешняя температура этого излучения равна примерно 3 К, чего можно было ожидать, отправляясь от чрезвычайно сжатого общерелятивистского «начального состояния» [33, 2]. (Охлаждение излучения до его теперешней температуры следует тогда из расширения вселенной¹⁾.) Если мы теперь безоговорочно примем те сглаженные космологические модели, которые обычно используются при этих расчетах, то мы и в самом деле придем к *сингулярному* начальному состоянию, для которого кривизна пространства-времени бесконечна. Вблизи этой сингулярности радиус кривизны может быть сколь угодно малым — меньше 10^{-13} см и даже меньше 10^{-33} см. Но в таких масштабах мы не можем считать картину, описываемую нашей моделью, адекватной хотя бы по указанным выше причинам, дающим основание сомневаться в правомерности описания пространства-времени как гладкого многообразия именно в этих масштабах.

Следует ли полагаться на такие модели в области, где радиус кривизны хотя бы немного приближается к таким значениям? Можно ожидать, что имеющиеся сейчас отклонения от однородности в кривизне пространства-времени (вызванные неоднородным распределением вещества) при экстраполяции в прошлое на сильно искривленные области пространства-времени дадут картину, резко отличающуюся от

¹⁾ Наличие фонового электромагнитного излучения горячей вселенной свидетельствует о большой плотности материи в прошлом и, следовательно, о ее расширении от сверхплотного состояния (что предсказывалось общей теорией относительности), но из нее никак не следует конкретное значение 3 К. Температура порядка нескольких градусов была предсказана из сопоставления наблюдений химического состава небесных тел с теорией синтеза элементов в начале космологического расширения. — *Прим. ред.*

сглаженной модели¹⁾. Есть ли тогда основания вообще говорить о какой-либо сингулярности? (Будем, например, исходить из наглядного определения «сингулярности» как области, в которой кривизна столь возрастает, что локальные физические законы катастрофически изменяются, возможно, вследствие нарушения гладкого характера пространственно-временного многообразия.) Не может ли оказаться, что, когда кривизна становится уже «умеренно» большой, картина существенно отклоняется от рассматриваемой модели, возможно даже приводя к совершенно иной топологической структуре? Одной из главных моих целей является изложение некоторых строгих результатов, убедительно указывающих (хотя, может быть, и не вполне доказывающих это) на существование сингулярностей пространства-времени, следующих из законов общей теории относительности. Чтобы прийти к этим результатам, потребуется рассмотреть довольно-таки сложные с топологической точки зрения случаи, *даже если* на самом деле эти случаи в природе и не реализуются!

Выше мы изложили первую из двух причин, убеждающих в необходимости исследования топологии пространства-времени. Вторая причина (если оставить в стороне вопрос о связи с субмикроскопическими свойствами пространства-времени) связана с проблемой гравитационного коллапса. Как следует из общерелятивистских соображений, внутренняя неустойчивость, присущая гравитационному взаимодействию при наличии чрезмерно больших концен-

¹⁾ Надо иметь в виду, что имеющиеся неоднородности в распределении материи (наличие отдельных небесных тел и их систем) являются, вероятно, следствием *роста* неоднородностей, т. е. в прошлом неоднородности вблизи сингулярности были меньше. Это так называемая гипотеза «минимальных» возмущений в начале расширения, необходимых для объяснения окружающего мира. Имеется, однако, и другая возможность: начало космологического расширения было в некотором смысле «максимально» неоднородным, и в ходе расширения неоднородности «сгладились». Подробнее об этих вопросах см. книгу Я. Б. Зельдовича и И. Д. Новикова «Строение и эволюция вселенной», изд-во «Наука», М., готовится к печати. — *Прим. ред.*

траций масс, отражена в существовании начальной сингулярности, которой обладают космологические модели. Эта неустойчивость вновь проявляется в фазе коллапса тех моделей, расширение которых не продолжается беспрестанно, и вселенная возвращается к состоянию с бесконечной кривизной в своем окончательном сингулярном состоянии. Однако для того, чтобы гравитационная неустойчивость проявила себя, необязательно брать вселенную *в целом*. Действительно, даже тела, масса которых не очень сильно превышает солнечную, могут оказаться способными к катастрофическому коллапсу, когда истощаются запасы их внутренней энергии. При определенных условиях такие тела, коллапсируя, уйдут за «безвозвратную точку», где, грубо говоря, гравитационное взаимодействие становится таким сильным, что даже свет, испускаемый телом, «затягивается» назад, вовнутрь, и никакой сигнал не может выйти в окружающее пространство. За этим пределом поведение тела во многом напоминает конечный этап коллапса вселенной (или, как можно думать, обращенный во времени начальный этап ее расширения). При этом следует ожидать возникновения сингулярностей пространства-времени, хотя (в рассматриваемом случае) эти сингулярности не могут быть обнаружены внешним наблюдателем. Такой наблюдатель видит тогда нечто вроде «дыры» в пространстве, в которую могут падать объекты, но из которой не может вырваться наружу ни объект, ни световой сигнал. Взяв правдоподобный диапазон возможных масс, можно оценить размеры таких «дыр» от нескольких километров до нескольких диаметров солнечной системы. Эти «дыры», по-видимому, было бы трудно обнаружить внешнему наблюдателю, хотя в принципе это и осуществимо. В настоящее время возможность их существования следует скорее из теории, чем из наблюдательных данных, но тем не менее их изучение сопряжено со многими загадочными вопросами топологии пространства-времени.

Природа пространства-времени не совсем такова, какой она нам «представляется», и в понимании ее

мы пока не достигли ясности. В будущей теории мы, несомненно, столкнемся со множеством сюрпризов и важных новых идей. Однако даже существующая теперь теория пространства-времени (а под ней я понимаю эйнштейновскую общую теорию относительности 1916 г.) таит в себе неожиданности и предвидения, которые мы только еще начинаем сколько-нибудь подробно анализировать. Из нее наверняка еще можно без особого труда получить уйму новых результатов, стоит лишь применить соответствующий математический аппарат. Я приведу здесь некоторые полученные результаты и укажу аппарат, действенность которого была недавно продемонстрирована. Тем самым я надеюсь возбудить к этому предмету интерес (может быть, активный) у специалистов в смежных областях науки.

2.

Сущность общей теории относительности

Самое главное, чему учит теория относительности, состоит, по-видимому, в том, что понятия пространства и времени не могут рассматриваться независимо друг от друга, но лишь в сочетании, дающем *четырёхмерное* описание явлений, т. е. описание на языке *пространства-времени*. При этом динамика становится предметом геометрии. Поучительно проследить, как этот подход применим к дорелятивистским динамическим теориям. Так, мы можем сравнить динамику Аристотеля, Галилея или Ньютона с частной или общей теорией относительности, выражая все эти пять вариантов теории на языке пространства-времени.

Рассмотрим пять типов пространства-времени, обозначив их следующим образом:

- | | |
|---------------------------------|-------|
| Пространство-время Аристотеля, | (2.1) |
| Пространство-время Галилея, | (2.2) |
| Пространство-время Ньютона, | (2.3) |
| Пространство-время Минковского, | (2.4) |
| Пространство-время Эйнштейна. | (2.5) |

В каждом случае пространство-время будет гладким четырёхмерным многообразием, однако ему будет приписываться некоторая дополнительная геометрическая структура, отражающая характерный аспект динамики. Каждая *точка* пространства-времени в действительности является «событием», т. е. чем-то таким, что изображается как точка в пространстве, существование во времени которой ограничено, однако, лишь одним моментом. История частицы — это *кри-*

вая¹⁾ в пространстве-времени, именуемая мировой линией частицы.

Пространство-время Аристотеля является просто произведением $E^3 \times E^1$, где через E^n обозначено n -мерное евклидово пространство, несущее обычную евклидову метрику и обладающее обычной, $\frac{1}{2}n(n+1)$ -мерной группой движений. Метрика E^3 описывает пространственные расстояния, а метрика E^1 — отрезки времени. Тогда в динамике Аристотеля имеет смысл говорить об абсолютном расстоянии между двумя событиями в пространстве, даже если разность времен между ними не равна нулю. В частности, состояние покоя частицы должно здесь выделяться из всех других состояний движения тем, что пространственные расстояния между любыми двумя точками на мировой линии покоящейся частицы равны нулю. Семипараметрическая транзитивная группа движений пространства-времени Аристотеля является прямым произведением евклидовых групп для E^3 и E^1 .

Пространства-времени Галилея и Ньютона отличаются от пространства-времени Аристотеля в том отношении, что расстояние между двумя точками в пространстве определено для них лишь при обращении в нуль разности времен для этих точек. Напротив, разность времен здесь всегда определяется однозначно. Структуру геометрии тогда можно сравнить с расслоенным по E^1 пространством со слоями E^3 , так что «время» E^1 можно понимать как *фактор-пространство* полного пространства относительно слоев E^3 . (Топология здесь, конечно, все еще остается той же, что и в случае Аристотеля, хотя структура объединения слоев уже иная²⁾.) Различие между пространствами-временами Галилея и Ньютона проявляется лишь после дальнейшего уточнения их структуры. Для этого мы выделим специальное (шестипараметрическое) семейство кривых в пространстве-времени, которые будем называть «геодезическими». (Здесь

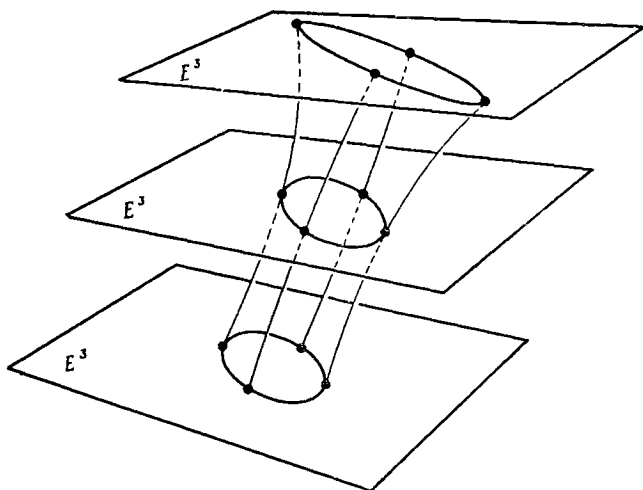
¹⁾ Если не оговорено противное, «кривая» не будет параметризована (ср. разд. 9).

²⁾ Я благодарен А. Траутману, который разъяснил мне этот вопрос.

не делается никаких предположений об экстремальных свойствах этих кривых — мы просто требуем, чтобы через каждую точку пространства-времени в каждом направлении проходила лишь одна такая геодезическая.) Эти геодезические (за исключением лежащих в слоях E^3) будут тогда мировыми линиями частиц, *движущихся по инерции*. Чтобы найти геодезические в пространстве-времени Галилея, достаточно постулировать их как систему прямых в некотором E^4 , причем слои E^3 отождествляются с максимальной системой взаимно параллельных плоскостей в E^4 , а фактор-пространство E^1 определяется очевидным образом. Группой движений пространства-времени Галилея, сохраняющей эту структуру, является десятипараметрическая группа Галилея.

Более сложно определение геодезических в пространстве-времени Ньютона. Идея здесь состоит в том [20, 108, 109], чтобы рассматривать ньютоновскую теорию тяготения с точки зрения общей теории относительности Эйнштейна. Гравитации тогда ставятся в соответствие *не истинные силы*, а силы инерциальные, или «фиктивные» — такие, как силы инерции поступательно ускоренного движения, центробежные силы и силы Кориолиса. Это возможно в силу принципа эквивалентности Галилея — Эйнштейна¹⁾, провозглашающего равенство инертной и пассивной гра-

¹⁾ Фактически принцип эквивалентности сам *требует* от нас принятия такого взгляда на ньютоновскую теорию тяготения. Постоянное во всем пространстве гравитационное поле (в ньютоновском смысле) не поддается вообще наблюдению, так как все тела приобретают в нем одно и то же ускорение, и внутренние физические отношения оказываются такими, как если бы поля не было. В этой ситуации есть нечто общее со случаем электрического потенциала: если мы, например, добавим к нему постоянное во всей вселенной слагаемое, внутренние физические отношения никак не изменятся. Поэтому-то мы и понимаем ньютоновское гравитационное «поле» в сущности как род потенциала. Его нужно *продифференцировать*, чтобы найти настоящее поле, а именно кривизну. Можно представить себе каноническую калибровку потенциалов, требующую обращения их в нуль на бесконечности, но трудно видеть, как было бы возможно приложить ее к реальному миру, так как ничто не свидетельствует об убывании плотности гравитирующих тел при уходе на бесконечность.



Р и с. 1. Естественной мерой кривизны пространства-времени Ньютона является отклонение геодезических, т. е. приливные силы.

витационных масс. При этом считается, что частица, движущаяся под воздействием силы тяжести, но в отсутствие всяких других сил, движется по инерции, и ее мировая линия должна быть геодезической. Различных пространств-времен Ньютона может быть много в соответствии с возможными различными не эквивалентными друг другу гравитационными полями. Пространство-время Галилея — это частный случай, соответствующий нулевому гравитационному полю, либо, что эквивалентно, полю *постоянного* во всем пространстве-времени гравитационного ускорения, поскольку здесь, как и в общей теории относительности, физически содержательное понятие гравитационного поля дают лишь «приливные силы», возникающие в *неоднородном* поле гравитационного ускорения¹⁾. Эти приливные силы находят выражение

¹⁾ Эта идея подробно обсуждается в недавно вышедшей новом издании в русском переводе книге Э. Тейлора, Дж. Уилера «Физика пространства-времени», изд-во «Мир», М., 1971. — Прим. перев.

в «кривизне» пространства-времени Ньютона, которая характеризует степень отклонения внутренней структуры геодезических от внутренней структуры пространства-времени Галилея (рис. 1). «Уравнения поля» пространства-времени Ньютона связывают кривизну с распределением гравитирующего вещества; их можно получить, переходя к пределу при $c \rightarrow \infty$ (c — скорость света) в уравнениях общей теории относительности, но подробнее об этом мы здесь говорить не будем¹⁾.

Коренное отличие пространств-времен Минковского и Эйнштейна от трех предыдущих состоит в том, что в них не вводится *никакого* дополнительного понятия разности времен между событиями, Вместо этого в пространстве-времени определена псевдориманова²⁾ метрическая форма ds^2 с гиперболической нормальной сигнатурой (+, —, —, —). Тогда разность во времени между двумя точками пространства-времени A и B *зависит от выбора мировой линии, соединяющей эти точки*, и дается интегралом вдоль мировой линии:

$$\tau = \int_A^B ds. \quad (2.6)$$

Везде вдоль допустимой (т. е. временноподобной или световой) мировой линии $ds^2 \geq 0$, так что τ оказывается действительным параметром. Величина τ определяет интервал времени (*собственного времени*) между событиями A и B по измерению (идеальными) часами, мировая линия которых совпадает с данной кривой. Так как собственное время стало теперь понятием, зависящим от пути, мы можем вернуться

¹⁾ Подробнее этот вопрос освещен у Траутмана [108, 109]. Траутман рассмотрел также более общий случай, когда ньютоновские пространства постоянного времени не обязательно представляют собой евклидовы E^3 . Это позволяет говорить о «ньютоновской космологии».

²⁾ Термин «риманов» относится вообще к случаю положительно определенной метрики, а «псевдориманов» — к случаю неопределенной метрики. Иногда псевдориманово многообразие сигнатуры (+, —, ..., —) называется «лоренцовым».

к определению «геодезической» как *экстремального* пути. Получаемая таким образом система (временноподобных) геодезических определяет (согласно теории) движение частиц по инерции. В отличие от только что рассмотренных галилеева и ньютонова случаев теперь движение по инерции определяется сразу, как только конкретизировано поведение (идеальных) часов.

Пространства-времени Минковского и Эйнштейна соотносятся друг с другом так же, как пространства-времени Галилея и Ньютона. Так, пространство-время Минковского описывается единственным способом (например, структура его геодезических та же, что у E^4 , причем система временноподобных геодезических соответствует геодезическим в E^4 , наклоненным под углом менее 45° к некоторому фиксированному направлению), и гравитация в нем не определяется. Оно обладает десятипараметрической транзитивной группой движений — группой Пуанкаре (т. е. неоднородной группой Лоренца). Напротив, пространства-времен Эйнштейна может быть много, в соответствии с различными, не эквивалентными друг другу гравитационными полями. Здесь, как и в случае пространства-времени Ньютона, физический смысл имеют лишь *приливные* гравитационные силы, существующие при наличии градиента «поля гравитационного ускорения». Такие приливные силы описываются через отклонение внутренней структуры геодезических от аналогичной структуры пространства-времени Минковского, иначе говоря, *кривизной* пространства-времени Эйнштейна [ср. с (7.8)]. Эйнштейновские уравнения гравитационного поля описывают связь этой кривизны пространства-времени с плотностью материи (т. е. с тензором энергии-импульса-натяжений).

Прежде чем согласиться с точкой зрения Эйнштейна, было бы уместно спросить, обладает ли на самом деле пространство-время однозначно и последовательно определенной псевдоримановой структурой. Это зависит от существования в природе точных часов, от того, ведут ли себя такие часы локально по законам частной теории относительности, и от того

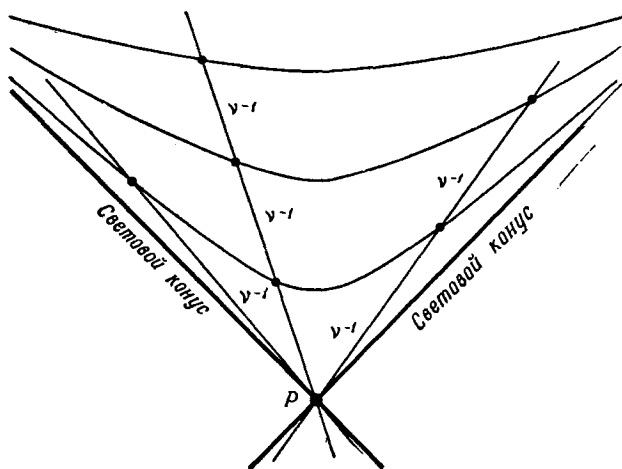
будут ли двое совмещенных друг с другом часов иметь одинаковый ход, независимо от выбора места и от их прошлой истории. По-видимому, факт существования точных часов теснейшим образом связан с квантовой природой материи¹⁾. В конечном счете это сводится к тому, что любой массе m соответствует (через постоянную Планка h) некоторая естественная частота ν , поскольку из эйнштейновского закона для массы и энергии $E = mc^2$ и формулы Планка $E = h\nu$ (если взять систему единиц, в которой скорость света $c = 1$, как это будет принято везде в дальнейшем), получим

$$\nu = m/h. \quad (2.7)$$

Поэтому каждая фундаментальная частица задает некую шкалу времени, связанную с ее собственной массой покоя m . Эту шкалу можно представить себе как последовательность «меток» времени вдоль мировой линии частицы²⁾, которые, по определению, отстоят друг от друга на ν^{-1} . Так определяется интервал ds вдоль мировой линии частицы, а если допустить изменение мировой линии, то мы получим ds для *любого* временноподобного интервала. Отсюда следует вывод о псевдоримановой структуре пространства-времени, поскольку частная теория относительности локально справедлива с чрезвычайно высокой степенью точности (рис. 2). Наконец, представляется, что получаемая псевдориманова структура не зависит от выбора частицы, используемой для ее определения. Это объясняется тем, что, по-видимому, отношения масс различных элементарных частиц являются строго определенными и не зависят от положения частиц в пространстве-времени или от их историй. (Если бы оказалось, что это не так, одно-

¹⁾ См. предисловие редакторов к русскому изданию. — *Прим. ред.*

²⁾ Планковские частоты элементарных частиц чрезвычайно велики и практически не могут быть непосредственно использованы в качестве часов. Соответствующие планковские частоты составных систем оказываются еще больше! По сути дела, те частоты, которые используются в атомных или ядерных часах, получаются из *разностей* масс (это как бы «биения»).



Р и с. 2. Для частиц, мировые линии которых, выходя из точки P , имеют различные временноподобные направления, интервал ds соответствует структуре псевдоримановой геометрии. Это следствие локальной применимости частной теории относительности.

значно определенной была бы только *конформная* геометрия, т. е. метрика была бы задана с точностью до множителя, зависящего от мировой точки.)

До сих пор я даже не упоминал о пространственноподобных интервалах, хотя риманову геометрию обычно излагают на языке расстояний, а не отрезков времени. Дело в том, что в действительности измерение расстояний — процесс более сложный, чем измерение времени. При задании двух близких точек P и Q , разделенных пространственноподобным отрезком, мы не можем просто приложить к ним линейку, чтобы измерить расстояние между ними. На самом деле линейка отнюдь не пригодна для измерения расстояний между событиями: в пространстве-времени «линейкой» служит двумерная полоса, протянутая во временноподобном направлении. Если не оговорено, что две точки P и Q на противоположных краях полосы «одновременны в системе отсчета, в которой

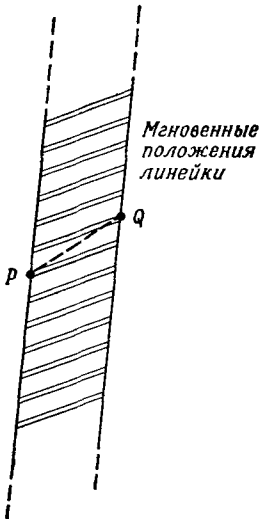


Рис. 3. Некорректное измерение пространственноподобного интервала PQ с помощью линейки: события P и Q не одновременны в системе отсчета, в которой линейка покоится.

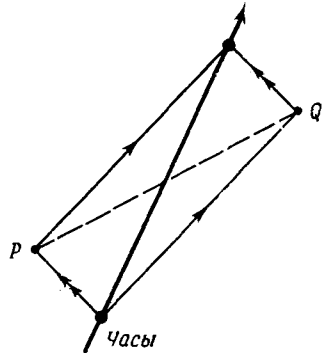


Рис. 4. Корректное измерение пространственноподобного интервала PQ с помощью часов и отраженных световых сигналов. (Весь рисунок следует представлять себе лежащим в одной плоскости.)

линейка покоится», то мы не определим правильной величины интервала PQ (рис. 3). К тому же положение осложняется вопросом о жесткости линейки, которая в конечном итоге зависит от пересечений «часов», представленных составляющими линейку атомами. Чтобы измерять пространственные интервалы более непосредственно, лучше пользоваться *часами*¹⁾ и отраженными световыми сигналами подобно тому, как показано на рис. 4. Тогда пространственноподобный интервал PQ будет равен временноподобному интервалу между событиями отправления исходного сигнала и приема отраженного (сигналы отправляют-

¹⁾ Как подчеркивал Синг [103], анализ геометрии пространства-времени по существу сводится к «хронометрии».

ся от часов во взаимно противоположных направлениях, и наш рисунок лежит во временноподобной плоскости).

Примем теперь, что пространство-время (при измерении правильно идущими часами) обладает однозначно определенной естественной псевдоримановой метрикой (с сигнатурой $+$, $-$, $-$, $-$). Тогда еще остается в силе вопрос, будут ли определенные с помощью этой метрики геодезические иметь какое-либо отношение к движению частиц по инерции. Когда общая теория относительности была впервые сформулирована, отождествление мировых линий частиц, движущихся по инерции, с временноподобными геодезическими было принято в качестве *постулата*. Однако позднее Эйнштейн и Громмер [30] сумели показать¹⁾, что в действительности это свойство является *следствием уравнений гравитационного поля Эйнштейна* [ср. с (7.1)] при некоторых разумных предположениях о том, как следует описывать (пробные) частицы в виде предельно малых распределений энергии-импульса. Вопрос этот довольно тонкий, но в конечном счете он сводится к выполнению ковариантного закона сохранения тензора энергии-импульса [ср. с (8.1)]. В остальном же конкретный вид уравнений гравитационного поля существенной роли не играет.

Возможен и другой ход рассуждений, когда движение частиц по инерции рассматривается как первичное, а метрика строится как вторичное понятие. Согласно рассуждениям Вейля [111] и Марцке и Уилера [56], если известны как временноподобные, так и световые геодезические (соответственно — мировые линии движущихся по инерции частиц и лучи света, не претерпевающие рассеяния), то метрику пространства-времени можно построить однозначно, с точностью до универсального множителя. В определенном смысле такой подход предпочтительнее, чем определение метрики с помощью часов, так

¹⁾ Более поздняя важная работа — [31]; более свежий обзор — [36]. [Современное состояние этой проблемы изложено в монографии В. А. Фока «Теория пространства, времени и тяготения», Физматгиз, М., 1961. — *Ред.*]

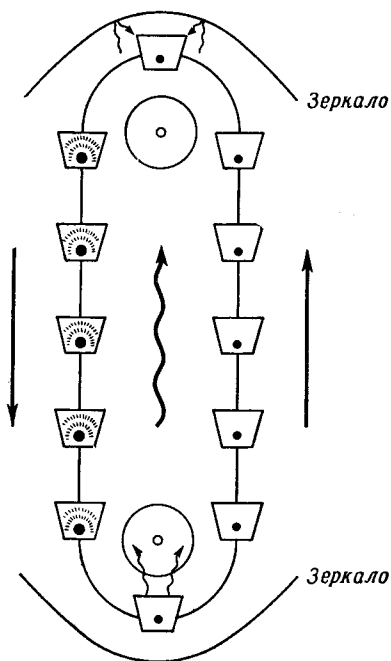
как при этом первичные понятия не зависят от тех разделов физики (например, квантовой теории), которые можно считать чуждыми духу общей теории относительности. Лично я придаю более фундаментальное значение часам, так как надо принять (без особой нужды) ряд предположений о геодезической структуре пространства-времени, чтобы она вообще соответствовала хоть какой-нибудь метрике, но тогда псевдориманова природа пространства-времени становится неясной. К тому же лично я считаю, что между квантовой теорией и общей теорией относительности *существует* глубокая связь, и было бы ошибкой пытаться строить эти теории в отрыве друг от друга.

Чтобы общая теория относительности имела отношение к реальной действительности, необходимо не только корректное определение псевдоримановой структуры пространства-времени, но и *нетривиальность* последней (т. е. чтобы кривизна хоть где-нибудь была отлична от нуля). Тот факт, что метрика пространства-времени *действительно* описывает искривленное пространство¹⁾, на самом деле следует из крайне элементарных рассуждений [96], касающихся

¹⁾ Последующие рассуждения не доказывают, что пространство-время не является *конформно-плоским*, т. е. не является таким, что его метрика может быть приведена к виду $ds^2 = f(x, y, z, t)\{dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2\}$. Свидетельством в пользу искривленности пространства-времени является отклонение лучей света в гравитационном поле Солнца. По-видимому, единственный механизм, приводящий к одинаковому отклонению лучей света разных частот (отсутствию хроматической дисперсии), — это действие кривизны пространства-времени. В конформно-плоском мире (например, в теории тяготения Нордстрема [66]) гравитация *не приводит* к отклонению лучей света (главным образом потому, что световые геодезические конформно инвариантны). В то же время можно считать экспериментально доказанным существование *некоторого* ахроматического отклонения лучей.

Кривизна пространства-времени проявляется наиболее очевидным образом в существовании планетных орбит. Однако я не опираюсь на этот факт как на основной довод в пользу искривленности пространства-времени, потому что взаимосвязь между искривленностью орбит и поведением часов нельзя назвать очень прямой — ведь уравнения движения выводятся из уравнений гравитационного поля, являющихся дифференциальными уравнениями для метрического тензора (см. выше).

Рис. 5. Бесконечная цепь ковшей по Бонди. Вес избыточной энергии возбужденных атомов приводит цепочку во вращение.

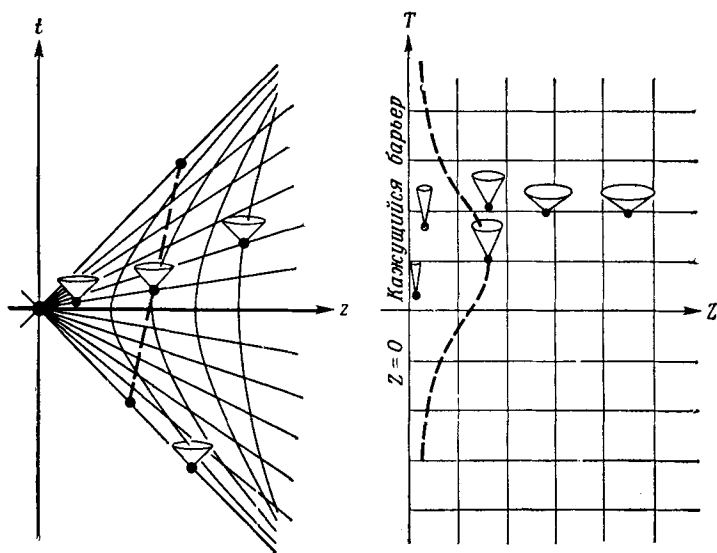


невозможности построить вечный двигатель. Рассмотрим замкнутую бесконечную цепь ковшей, натянутую на два шкива, оси которых закреплены относительно поверхности земли в точках с разными значениями гравитационного потенциала (рис. 5; см. [9, стр. 418]).

В каждом ковше находится атом, обладающий двумя состояниями — основным и возбужденным. Пусть все атомы в ковшах слева возбуждены, а атомы в ковшах справа находятся в основном состоянии. Возбужденные атомы, энергия которых превышает энергию атомов в основном состоянии, обладают при этом и большими массами. Значит, согласно самому слабому варианту принципа эквивалентности, и *весить* эти атомы должны больше. Допустим, что в нашей системе нет трения; тогда цепь начнет вращаться против часовой стрелки. Когда любой из ковшей достигнет своего нижнего положения, пусть находящийся в нем атом будет вынужден отдать свою избыточную энергию в виде фотона, направляемого системой зеркал к атому, находящемуся в верхнем положении. Если верхний атом *может* поглотить этот фотон, возбудившись

при этом, мы получим *перпетуум мобиле*, ибо такой процесс может продолжаться неограниченно долго, а энергию можно в принципе отвести от непрерывно вращающейся цепи. Нам остается поэтому предположить, что верхний атом *не может* поглотить фотон. Если бы мы могли спросить мнение Ньютона об этой системе, он, наверное, дал бы простой ответ: «Фотон «слабеет», пока он достигает верхнего шкива, и его энергии недостаточно, чтобы привести верхний атом в возбужденное состояние». Но из квантовой теории мы знаем, что фотон не может *просто* «ослабеть» — согласно формуле Планка, должна *понизиться* и его частота, когда он достигает верхнего атома, чтобы она оказалась ниже частоты возбуждения последнего. Поэтому в нижней части цепи часы должны идти во вполне определенном смысле медленнее, чем в верхней, а метрика пространства-времени, как мы ее определили, должна при наличии гравитационного поля быть иной, чем стандартная метрика плоского пространства-времени. (Описанный «прибор» является в высшей степени идеализированным, однако интересно отметить, что такой эффект замедления хода часов действительно удалось наблюдать непосредственно на Земле; это сделали Паунд и Ребка [85], используя эффект Мёссбауэра.) Заметим, что здесь использовался лишь чрезвычайно слабый вариант принципа эквивалентности, а именно утверждение, что энергия обладает *хоть каким-нибудь* весом. (Предельный вариант эксперимента состоял бы в использовании π^0 -мезонов, а не атомов. При распаде эти мезоны без остатка превращаются в фотоны, так что ковши справа будут совсем пустыми. Поэтому наши рассуждения справедливы, если π^0 -мезоны обладают хоть каким-нибудь весом!)

Однако этого рассуждения еще недостаточно для доказательства искривленности пространства-времени — метрика все же могла бы соответствовать плоскому миру и лишь записываться в необычной форме. Факт сферической симметрии гравитационного поля Земли, впрочем, сразу же показывает, что это невозможно, так как потребовалась бы связь метрики это-



Р и с. 6. Преобразование к равноускоренной системе отсчета. Кажущийся барьер при $Z = 0$ не имеет физического смысла.

го поля со стандартной метрикой пространства-времени Минковского путем преобразования, включающего ускорение, направленное от центра Земли наружу симметрично во всех направлениях. Мы не будем разбираться более подробно в этих вопросах, и мне лишь кажется поучительным ограничиться анализом преобразования в пространстве-времени Минковского к «равномерно ускоренной системе». Такой пример ясно показывает, как статическая система *может* обладать свойствами системы, в которой присутствует гравитационное поле, хотя в действительности пространство-время остается плоским. Этот пример в некоторых отношениях сходен с представлениями Шварцшильда и Крускала сферически симметричного истинного гравитационного поля, как это будет видно позднее {см. (10.1) и (10.4), а также работу Бергмана [6a].}

Пусть x, y, z, t — стандартные координаты Минковского, в которых метрика имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.8)$$

Введем новые координаты X, Y, Z, T , связанные с предыдущими в области $z > |t|$ ($Z > 0$) преобразованием

$$x = X, \quad y = Y, \quad z = Z \operatorname{ch} T, \quad t = Z \operatorname{sh} T \quad (2.9)$$

(рис. 6). Теперь метрика принимает вид

$$ds^2 = Z^2 dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2. \quad (2.10)$$

Метрика (2.10) имеет такой вид, как будто она описывает систему со статическим гравитационным полем, роль потенциала которого играет Z . Член $(ZdT)^2$ в (2.10), стоящий на месте dt^2 , как будто говорит о «более медленном течении времени» вблизи $Z = 0$. Любая частица, неподвижная в системе X, Y, Z, T (т. е. обладающая постоянными координатами X, Y, Z), будет испытывать действие постоянной силы в направлении убывания Z , так как мировая линия частицы есть «на самом деле» гипербола постоянного ускорения в системе x, y, z, t . В системе X, Y, Z, T свободно падающая частица падает в направлении $Z = 0$ с замедлением, так что к $Z = 0$ она приближается лишь асимптотически (штриховая линия на рис. 6). При $Z = 0$ имеется как бы «барьер», который частицы неспособны преодолеть. Если произвести обратное преобразование к метрике (2.8), становится очевидным, что все это — только лишь проявление неполноты координатной системы (X, Y, Z, T) . В дальнейшем будет полезно помнить об этом обстоятельстве, когда мы перейдем к обсуждению проблемы гравитационного коллапса в разд. 10.

3.

Метод абстрактных индексов

В ходе вычислений в общей теории относительности часто приходится работать с тензорами довольно высокой валентности¹⁾. Даже такая фундаментальная величина, как тензор кривизны, уже имеет валентность, равную 4, и обладает известными довольно сложными свойствами симметрии. Отсюда следует необходимость в индексных обозначениях, позволяющих следить за различными используемыми величинами. Многие математики стремятся избегать таких обозначений, вероятно, потому, что эти обозначения подразумевают конкретную используемую систему координат. Но когда величины « g_{ab} » или « R^a_{bcd} » используются физиком, я не думаю, чтобы он часто подразумевал при этом набор компонент, зависящих от выбора системы; скорее он имеет в виду не зависящий от системы координат физический объект, который олицетворяют эти компоненты. К тому же метод индексов позволяет очень удобно проводить ряд алгебраических операций, приводящих к новым объектам, и эти операции действительно никак не зависят от выбора системы. По сути эти алгебраические операции предельно просты, но вместе с тем гибки, и с их помощью можно производить более сложные операции. Было бы весьма досадно отказаться от такого мощного и гибкого метода всего лишь из-за какого-то чувства неловкости, связанного с условием суммирования и с зависимостью от конкретного выбора векторного базиса. Здесь я изложу алгебру,

¹⁾ Мы предпочитаем пользоваться здесь термином «валентность», а не «ранг», так как это более образный термин, а слово «ранг» несет иную смысловую нагрузку в приложении к матрицам.

совершенно не зависящую от выбора системы координат, но вместе с тем позволяющую, точно так же как и прежняя, проводить (но уже с чистой совестью!) вычисления с величинами, снабженными индексами. Эта новая алгебра (со своим методом абстрактных индексов) предоставляет даже бóльшую свободу, чем старая, когда в ней вводят системы координат и векторный базис (ср. с [96a]). Преимущества нового подхода становятся особенно очевидны при рассмотрении спиноров, к которым мы перейдем в следующем разделе.

Мы сэкономим время и усилия, воздержавшись от чрезмерной формализации. Я надеюсь, что основные идеи при этом будут ясны. Рассмотрим векторное пространство V^* над полем F ; или, вообще говоря, допустим, что группа V^* — модуль¹⁾, εF — соответствующего вида кольцо (например, элементами V^* могут быть векторные поля²⁾, элементами же F — C^∞ -функции на многообразии). Идея состоит в том, чтобы построить величину, являющуюся по существу обычным тензорным произведением, кратным по V^* и кратным по дуальному³⁾ ему V , т. е. величину, в которой мы, однако, с помощью индексов смогли бы без затруднений контролировать следствия свойств симметрии и свертывания. Этого можно достичь, просто копируя обычные индексные обозначения (вместе с условием о суммировании и пр.), хотя теперь индексы a, b, c, \dots уже не *следует* понимать как просто однородные по своему происхождению символы, заменяющие, скажем, цифры $0, 1, 2, \dots, N$, а как *абстрактные значки*. Нам потребуется бесконечный запас абстрактных индексов

$$a, b, c, \dots, a_0, b_0, \dots, a_1, b_1, \dots, i_2, \dots \quad (3.1)$$

¹⁾ Отличие модуля от векторного пространства состоит в том, что скаляры образуют не поле, а кольцо с тождеством. Кольцо отличается от поля тем, что в нем не всегда возможно деление на ненулевой элемент.

²⁾ Здесь под «полем» следует понимать сечение соответствующего векторного пучка над многообразием \mathcal{M} .

³⁾ Дуальное по отношению к V^* -пространству — это пространство всех линейных отображений модуля V^* на кольцо F .

чтобы можно было построить выражения произвольной протяженности. Обозначим через \mathbf{L} систему значков (3.1). Из любого элемента ξ из \mathbf{V}^{\bullet} и любого значка $x \in \mathbf{L}$ мы теперь можем составить символ ξ^x . При пробегании символом ξ элементов из \mathbf{V}^{\bullet} соответствующий объект ξ^x пробегает свое множество \mathbf{V}^x . Здесь следует подчеркнуть, что ξ^x — совершенно самостоятельная величина, а *вовсе не* набор компонент ξ в какой-то системе координат. Так как теперь мы хотим перенести обычные тензорные правила на действия над снабженными индексами величинами, следует запретить писать $\xi^a + \eta^b$ и разрешить только суммы $\xi^a + \eta^a$ и $\xi^b + \eta^b$. (Нужно считать ξ^a и ξ^b *разными* объектами.) Для любого $\lambda \in \mathbf{F}$ следует также разрешить писать $\lambda \xi^a$. Таким образом, любое из $\mathbf{V}^a, \mathbf{V}^b, \dots, \mathbf{V}^{a_0}, \dots$ есть векторное пространство или модуль, канонически изоморфные \mathbf{V}^{\bullet} .

Может показаться противоестественным вводить бесконечное число изоморфных пространств, хотя в действительности у нас лишь одно пространство. Однако эту ситуацию можно рассматривать и с другой точки зрения. Каждый элемент из \mathbf{L} есть просто разновидность метки, выделяющей конкретный вектор (и т. д.) вне зависимости от того, где он может оказаться в конструкции. Так что ξ^x есть всего-навсего пара, составленная из ξ и из метки x . Иначе говоря, это элемент из $\mathbf{V}^{\bullet} \times \mathbf{L}$. Мы имеем тогда $\mathbf{V}^a = \mathbf{V}^{\bullet} \times (a)$, $\mathbf{V}^b = \mathbf{V}^{\bullet} \times (b)$ и т. д. Аксиомы векторного пространства или модуля, конечно, применимы к любому \mathbf{V}^x :

$$\begin{aligned}
 \xi^x + (\eta^x + \zeta^x) &= (\xi^x + \eta^x) + \zeta^x, \\
 \lambda (\xi^x + \eta^x) &= \lambda \xi^x + \lambda \eta^x, \\
 (\lambda + \mu) \xi^x &= \lambda \xi^x + \mu \xi^x, \\
 \lambda (\mu \xi^x) &= (\lambda \mu) \xi^x, \\
 1 \xi^x &= \xi^x, \\
 0 \xi^x &= 0 \eta^x.
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Здесь $\lambda, \mu, 1, 0 \in \mathbf{F}$, причем 1 и 0 соответственно суть мультипликативная и аддитивная единицы. Кроме

того, $\xi^x + \eta^x = \eta^x + \xi^x$ [это следует из расшифровки $(1 + 1)(\xi^x + \eta^x)$] и $\xi^x + (-\xi^x) = 0$ [так как вместо $(-1)\xi^x$ можно записать $-\xi^x$, а вместо $0\eta^x$ — записать 0].

У дуального пространства V также имеется бесконечное число канонически изоморфных копий: $V_a, V_b, \dots, V_a, \dots$. Пространство V_x можно понимать как дуальное по отношению к пространству V^x для каждого $x \in L$. Элементы V_x являются линейными отображениями V^x на F . Тогда для $\theta_x \in V_x$ имеем

$$\theta_x(\xi^x + \eta^x) = \theta_x \xi^x + \theta_x \eta^x, \quad (3.3)$$

$$\theta_x(\lambda \xi^x) = \lambda(\theta_x \xi^x), \quad (3.4)$$

где результат отображения θ_x на ξ^x записан просто как $\theta_x \xi^x$. Разрешим записывать то же самое и в обратном порядке: $\theta_x \xi^x = \xi^x \theta_x$. Потребуем, чтобы

$$\theta_a \xi^a = \theta_b \xi^b = \dots = \theta_x \xi^x = \dots \quad (3.5)$$

Теперь каждое V_a, V_b, \dots будет векторным пространством или модулем, для которого $\lambda \theta_x$ и $\theta_x + \varphi_x$ определяются через

$$\begin{aligned} (\lambda \theta_x) \xi^x &= \lambda(\theta_x \xi^x); \\ (\theta_x + \varphi_x) \xi^x &= \theta_x \xi^x + \varphi_x \xi^x. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Идея состоит в том, чтобы задать нашу алгебру элементами из $F, V^a, V^b, \dots, V_a, V_b, \dots$. Чтобы сформулировать правила этой алгебры, следует вспомнить правила использования обычных тензорных индексных обозначений. Вспомним, например, что допустимы произведения вида $\xi^a \eta^b$, но не вида $\xi^a \eta^a$. Далее, допустимые произведения должны быть коммутативны:

$$\xi^a \eta^b = \eta^b \xi^a, \quad (3.7)$$

хотя в общем случае $\xi^a \eta^b \neq \eta^a \xi^b$. Из требования (3.7) видно, что, хотя по существу $\xi^a \eta^b$ есть тензорное произведение элементов $\xi^a \otimes \eta^b$, величины $\xi^a \eta^b$ и $\xi^a \otimes \eta^b$ нельзя попросту отождествлять, поскольку тензорные произведения, согласно строгому формальному опре-

делению, некоммутативны. Здесь же мы вправе определить коммутативный вариант тензорного произведения, потому что $\xi^a \eta^a$ в сущности не определено. В произведении $\xi^a \eta^b$ *значки* a и b указывают принадлежность множителей, но не их порядок следования. Один из способов точного определения типа произведения, использованного здесь (и предложенного С. Мак-Лейном), состоит в применении *симметричной алгебры* [54а] к прямой сумме $\mathbf{V}^a \oplus \mathbf{V}_a \oplus \mathbf{V}^b \oplus \mathbf{V}_b \oplus \dots$, после чего для каждой пары отдельных (конечных) систем элементов \mathbf{L} (скажем, a, p, r и b, m) мы выбираем соответствующее подпространство $\mathbf{V}_{bm}^{a,pr}$, натянутое на элементы типа

$$\xi^a \eta^p \zeta^r \theta_b \varphi_m. \quad (3.8)$$

Общий элемент $\mathbf{V}_{bm}^{a,pr}$ представляет собой линейную комбинацию выражений вида (3.8). Образованная таким путем конструкция гарантирует полную коммутативность каждого произведения (3.8) и выполнение ряда дистрибутивных законов [например, $\psi_m^{a,pr} (\theta_b + \chi_b) = \psi_m^{a,pr} \theta_b + \psi_m^{a,pr} \chi_b$ для $\psi_m^{a,pr} \in \mathbf{V}_m^{a,pr}$]. Порядок следования a, p, r или b, m в $\mathbf{V}_{bm}^{a,pr}$ не имеет значения, так что $\mathbf{V}_{bm}^{a,pr} = \mathbf{V}_{bm}^{p,ar} = \mathbf{V}_{mb}^{a,rp}$ и т. д. Однако для элемента $\rho_{bm}^{a,pr}$ порядок следования индексов безразличен.

Каждый элемент $\rho_{bm}^{a,pr} \in \mathbf{V}_{bm}^{a,pr}$ является линейной комбинацией коммутативных произведений типа (3.8):

$$\rho_{bm}^{a,pr} = \sum_{i=1}^M \lambda^{(i)} \xi^a \eta^p \zeta^r \theta_b \varphi_m, \quad (3.9)$$

однако существует много способов выражения каждого $\rho_{bm}^{a,pr}$. Для интересующих нас модулей удобным критерием равенства двух выражений типа (3.9) является равенство соответствующих скаляров

$$\rho_{bm}^{a,pr} \alpha_a \beta_p \gamma_r \sigma^b \tau^m = \sum_{i=1}^M \lambda^{(i)} (\xi^a \alpha_a) (\eta^p \beta_p) (\zeta^r \gamma_r) (\theta_b \sigma^b) (\varphi_m \tau^m) \quad (3.10)$$

при *любом* выборе $\alpha_a \in V_a$, $\beta_p \in V_p$, $\gamma_r \in V_r$, $\sigma^b \in V^b$, $\tau^m \in V^m$. Отсюда вытекают и все алгебраические свойства. (Отметим, что в общем случае $\rho_{bm}^{ar p} \neq \rho_{bm}^{p ar} \neq \rho_{mb}^{a pr}$ и т. д.)

Полная тензорная система $\{V\}$ состоит из всех $V_u^{x \dots z}$, включая и $V = F$:

$$\{V\} = (V, V^a, V^b, \dots, V_a, V_b, \dots, V^{ab}, \dots, V_u^{x \dots z}, \dots).$$

На $\{V\}$ определены четыре основные операции, а именно:

СЛОЖЕНИЕ:
$$V_u^{x \dots z} + V_u^{x \dots z} \rightarrow V_u^{x \dots z}, \quad (3.11)$$

УМНОЖЕНИЕ:
$$V_p^{a \dots d} \times V_u^{x \dots z} \rightarrow V_p^{a \dots dx \dots z}, \quad (3.12)$$

ЗАМЕНА ИНДЕКСОВ:
$$V_u^{x \dots z} \rightarrow V_k^{f \dots h}, \quad (3.13)$$

СВЕРТЫВАНИЕ ПО a И b :
$$V_{bu}^{ax \dots z} \rightarrow V_u^{x \dots z}. \quad (3.14)$$

Фигурирующие в (3.11), (3.12) и (3.14) различные значки считаются различными элементами из L . В (3.13) различными элементами L являются как $x, \dots, z, u, \dots, \omega$, так и f, \dots, h, k, \dots, m . В остальном на них не наложено никаких ограничений кроме того, что число элементов x, \dots, z и f, \dots, h одинаково (то же самое касается u, \dots, ω и k, \dots, m). Сложение и умножение определяются очевидным образом. Замена индексов осуществляется просто перестановкой элементов в L (а такая перестановка не влияет на справедливость каких-либо уравнений). Чтобы определить свертывание, рассмотрим, например, свертывание по p и b ($V_{bm}^{p ar} \rightarrow V_m^{ar}$) в применении к элементу $\rho_{bm}^{a pr} \in V_{bm}^{p ar}$, заданному в (3.9). В результате имеем

$$\rho_{xm}^{a xr} = \sum_{i=1}^M \lambda^{(i)} (\eta^x \theta_x)^{(i)} \xi^{a xr} \Phi_m. \quad (3.15)$$

Отсюда $\rho_{xm}^{a xr} \in V_m^{ar}$, так что индексы x — „немые“; они не дают вклада в общую валентность.

Алгебраическим путем можно проверить, что из таких построений следуют все обычные тензорные

правила¹⁾). Так, из сложения вытекает структура абелевой группы для каждого $V_u^x \dots^z$. Умножение коммутативно и дистрибутивно по сложению. Свертывание должным образом коммутативно со сложением, умножением и с другим свертыванием. Свертывание нулевого элемента дает снова нулевой элемент. [При использовании равенства скаляров (3.10) в качестве определения равенства формальных выражений (3.9) это свойство нулевого элемента следует из того, что любая матрица над F , квадрат которой равен нулю, имеет и нулевой след. Это свойство выполняется в интересующих нас здесь случаях, хотя и теряет силу для некоторых колец с конечной характеристикой.]

До сих пор еще не возник вопрос о системе базисных векторов для V^\bullet . Все же часто оказывается удобным работать с базисом, и нам понадобятся обозначения, позволяющие отличать базисные индексы от абстрактных значков. Я предлагаю использовать для описания элементов базиса *готические индексы* a, b, \dots, a_0, \dots , т. е. каждый индекс из a, b, \dots обозначает одно из целых чисел: $0, 1, \dots, N$ [рассматривается $(N+1)$ -мерное пространство]. Использование готических индексов должно напоминать нам о двух обстоятельствах: во-первых, что любое выражение, содержащее эти индексы, предполагает выбор (возможно, произвольный) базиса, из чего проистекает нарушение ковариантности; во-вторых, что при повторении в одном и том же члене индексов по ним всегда *подразумевается суммирование* согласно правилу Эйнштейна. Пусть теперь $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N \in V^\bullet$ будет базисом для V^\bullet (мы предполагаем, что пространство конечномерно), а $\delta^0, \delta^1, \dots, \delta^N \in V_\bullet$ — соответствующим дуальным базисом. При $x \in L$ в качестве канонических отображений в V^x и V_x имеем

$$\delta_0^x, \dots, \delta_N^x \in V^x, \quad \delta_x^0, \dots, \delta_x^N \in V_x. \quad (3.16)$$

Если воспользоваться собирательными символами $\delta_x^x \in V^x$ и $\delta_x^x \in V_x$, то условие ортогональности базис-

¹⁾ См. любой курс классического тензорного анализа, и например [100].

ных векторов примет вид

$$\delta_y^x \delta_x^y = \delta_y^y, \quad (3.17)$$

где δ_y^x — обычный дельта-символ Кронекера (в этих обозначениях не предполагается никакой связи между x и y). С помощью равенства

$$\delta_y^x \delta_x^y = \delta_y^y \quad (3.18)$$

можно также определить элемент δ_y^x из V_y^x . Величина δ_y^x обладает обычными свойствами:

$$\xi \dots y \dots \delta_y^x = \xi \dots x \dots; \quad \eta \dots x \dots \delta_y^x = \eta \dots y \dots, \quad (3.19)$$

и отсюда видно, что она действительно не зависит от выбора базиса. Компоненты любого элемента $\xi_{u \dots w}^{x \dots z} \in V_{u \dots w}^{x \dots z}$ относительно базиса задаются как

$$\xi_{u \dots w}^{x \dots z} = \xi_{u \dots w}^{x \dots z} \delta_u^u \dots \delta_w^w \delta_x^x \dots \delta_z^z. \quad (3.20)$$

И наоборот, чтобы выразить $\xi_{u \dots w}^{x \dots z}$ через их компоненты, следует просто написать

$$\xi_{u \dots w}^{x \dots z} = \xi_{u \dots w}^{x \dots z} \delta_u^u \dots \delta_w^w \delta_x^x \dots \delta_z^z. \quad (3.21)$$

Преимуществом таких обозначений является возможность в определенных случаях переводить отдельные индексы на язык компонент, сохраняя другие в виде абстрактных значков:

$$\rho_{bm}^{apr} = \rho_{bm}^{apr} \delta_p^p \delta_b^b \delta_m^m. \quad (3.22)$$

Вообще все алгебраические соотношения никак не меняются при переходе к отдельным готическим индексам. Однако, когда в следующем разделе мы обратимся к ковариантному дифференцированию, обнаружится важное формальное различие в том, как следует работать с этими двумя типами индексов (плюс к уже имеющейся разнице в их смысле).

Алгебраическая структура типа построенной нами здесь обладает тем элементарным, но важным свойством, что иногда можно вложить две такие структуры одну в другую путем группирования индексов.

Тогда можно рассматривать новую систему значков, скажем $\hat{\mathbf{L}}$, элементами которой служат (непересекающиеся) подсистемы элементов из \mathbf{L} . Например, можно взять $\alpha = abc$, $\beta = def$, $\gamma = ghi$ и т. д., причем \mathbf{L} разбивается целиком на непересекающиеся тройки и эти тройки уже суть элементы $\hat{\mathbf{L}}$. Ясно, что при этом наборы $\mathbf{V}^\alpha = \mathbf{V}^{abc}$, $\mathbf{V}^\beta = \mathbf{V}^{def}$, ..., $\mathbf{V}_\alpha = \mathbf{V}_{abc}$, ..., $\mathbf{V}_\gamma^{\alpha\beta} = \mathbf{V}_{ghi}^{abcdef}$, ... будут подчиняться прежним правилам. Можно группировать векторные пространства (модули) и более сложным образом.

Кроме того, можно рассматривать системы, у которых «индексы» содержат значки разных шрифтов. В нашей схеме это привело бы к изменению лишь операций замены индексов (индексы могут заменяться лишь на *однотипные* с ними) и свертывания (свертывание разрешается только для верхнего и нижнего *однотипных* индексов). При анализе спиноров в следующем разделе мы рассмотрим пример системы такого рода со значками двух разных типов (связанных друг с другом операцией комплексного сопряжения).

4.

Пространства-времени со спинорной структурой

Для более подробного анализа структуры пространства-времени нам понадобится определение дифференцируемого многообразия. Я буду использовать определение, данное Шевалье (ср. с [65]), в котором дифференцируемая структура многообразия \mathcal{M} задается полностью вещественными функциями C^∞ на \mathcal{M} . Я выбрал это определение не из-за каких-то его особых внутренних математических достоинств, а потому, что, по-моему, оно лучше всего отражает ту роль, которую системы координат играют в физике. В самом деле, система координат в пространстве-времени есть набор четырех вещественных функций в том же пространстве-времени, таких, что в некоторой окрестности знание значений этих функций «гладким» образом задает точку.

Начнем с того, что назовем пространство-время \mathcal{M} топологическим пространством. Из числа подмножеств \mathcal{M} выделяются *открытые* множества; открытым называется множество, удовлетворяющее требованиям:

Пересечение любых двух открытых множеств есть открытое множество, (4.1)

Объединение любого множества открытых множеств есть открытое множество, (4.2)

Выполняется условие Хаусдорфа (т. е. для любых двух точек из \mathcal{M} существует два непересекающихся открытых множества, каждое из которых содержит одну из этих точек), (4.3)

Множество \mathcal{M} связное (т. е. это не объединение двух непересекающихся непустых открытых множеств), (4.4)

Имеется счетное количество открытых множеств, объединением которых является любое открытое множество на \mathcal{M} . (4.5)

Понятие открытого множества весьма нефизично, что существенно для введения математического многообразия. Обойтись без понятия открытого множества можно было бы лишь ценой изменения теории. Вопрос об определении открытых множеств с помощью более физического понятия *причинности* будет затронут в разд. 11.

Выделим теперь некоторое множество \mathbf{T} вещественных функций на \mathcal{M} , которые окажутся не чем иным, как вещественными C^∞ -функциями в пространстве-времени \mathcal{M} . Дифференцируемую структуру \mathcal{M} можно охарактеризовать следующими аксиомами для \mathbf{T} :

$$\text{Если } f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathbf{T}, \text{ а } \varphi \text{ — любая вещественная } C^\infty\text{-функция } n \text{ переменных (в обычном смысле), то } \varphi(f_1, f_2, \dots, f_n) \in \mathbf{T}, \quad (4.6)$$

$$\text{Если элемент } f \text{ таков, что для каждого } P \in \mathcal{M} \text{ существует элемент } f_{(P)} \in \mathbf{T}, \text{ совпадающий с } f \text{ в открытом множестве, содержащем } P, \text{ то } f \in \mathbf{T}, \quad (4.7)$$

$$\text{Для каждого } P \in \mathcal{M} \text{ существует открытое множество } \mathcal{P}, \text{ содержащее } P, \text{ и четыре элемента } x^0, x^1, x^2, x^3 \in \mathbf{T}, \text{ такие, что карта, переводящая } Q \in \mathcal{P} \text{ в } [x^0(Q), x^1(Q), x^2(Q), x^3(Q)], \text{ представляет собой гомеоморфизм на открытое подмножество из } \mathbf{R}^4 \text{ и что любой элемент } f \in \mathbf{T} \text{ совпадает на } \mathcal{P} \text{ с некоторой } C^\infty\text{-функцией переменных } x^0, x^1, x^2, x^3. \quad (4.8)$$

Свойство (4.8) выражает то требование, которое предъявляется к функциям x^0, x^1, x^2, x^3 на \mathcal{M} , чтобы они могли играть роль *локальных координат* вблизи P .

Контравариантное векторное C^∞ -поле ξ на \mathcal{M} (т. е. сечение класса C^∞ касательного пучка к \mathcal{M}) можно определить как *производное* алгебры \mathbf{T} (над константами), т. е. таким отображением $\xi: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$, что

$$\xi(f + g) = \xi(f) + \xi(g), \quad (4.9)$$

$$\xi(fg) = f\xi(g) + g\xi(f), \quad (4.10)$$

$$\xi(k) = 0, \text{ если } k \text{ постоянно на } \mathcal{M}. \quad (4.11)$$

Очевидно, что множество \mathbf{T}^* на таких ξ является модулем над \mathbf{T} , причем $(\xi + \eta)(f) = \xi(f) + \eta(f)$, $(\lambda\xi)(f) = \lambda\xi(f)$, $\lambda \in \mathbf{T}$, $\xi, \eta \in \mathbf{T}^*$. Можно показать, что

на языке локальных координат x^0, x^1, x^2, x^3 в открытом множестве $\mathcal{P} \in \mathcal{M}$ любое поле $\xi \in \mathbf{T}^*$ имеет вид

$$\xi = \xi^a \frac{\partial}{\partial x^a} \quad (4.12)$$

во всем \mathcal{P} . Поэтому ξ^a можно понимать как компоненты ξ в системе координат x^a на \mathcal{P} . (При переходе к другой локальной координатной окрестности компоненты ξ^a преобразуются обычным образом в области, где старая и новая окрестности перекрываются.)

Теперь, положив $\mathbf{V}^* = \mathbf{T}^*$ и $\mathbf{F} = \mathbf{T}$, мы могли бы ввести систему тензоров со значками (как в разд. 3) и пришли бы тогда к бескоординатному варианту обычного тензорного исчисления с «абстрактными индексами». Однако я предложу здесь несколько иной путь, приводящий к довольно необычному построению теории пространства-времени. Причина этого затрагивает, вероятно, сущность основного отличия математики от физики. В математике мы стремимся к максимально общим формулировкам, чтобы любой полученный результат имел наиболее широкое применение. Иногда его применения выходят далеко за рамки первоначальной задачи, а это позволяет объединять широчайший круг идей. В физике наши цели несколько иные. Нам дана чрезвычайно специфическая (?) структура, которую мы недостаточно хорошо понимаем, а именно — вселенная. Определенные аспекты этой структуры весьма точно (как это ни странно!) отображаются определенными математическими моделями.

Однако из разных источников нам известно, что эти модели не совсем (?) верны. Поэтому мы всегда заинтересованы в изменении математической теории. В физике формализм, содержащий хотя бы один произвольный параметр (такой, например, как *размерность* дифференцируемого многообразия), в определенном смысле уже *слишком* общ. Нам нужен скорее не общий, а *частный* формализм. При изложении старой теории на необычном (хотя с математической точки зрения и эквивалентном) языке иногда могут представиться новые, прежде не ожидавшиеся, но

с математической точки зрения естественные возможности видоизменения теории. Примером может служить теория тяготения Ньютона. В обычной ее формулировке можно было бы, например, рассматривать вопрос о замене показателя степени (-2) при радиальной координате на какую-либо другую степень. (Между прочим, такие попытки действительно предпринимались для объяснения движения Меркурия, но безрезультатно!) Если, однако, переформулировать теорию Ньютона как теорию пространства-времени (как это обсуждалось в разд. 2), то окажется математически естественным совершенно иное видоизменение теории, а именно переход к некоторой форме общей теории относительности.

Я намереваюсь ввести такое формальное описание пространства-времени, при котором и его *спинорная* структура ¹⁾ будет более фундаментальной, чем псевдориманова. Конкретные размерность и сигнатура $(+, -, -, -)$ должны будут закладываться в теорию изначально. Таким образом, если бы возникло изменение сегодняшней картины пространства-времени как дифференцируемого многообразия, существенно зависящее от наличия такой спинорной структуры, то размерность и сигнатура нашего пространства-времени были бы одним из следствий теории.

Наше построение будет исходить из изоморфизма ²⁾ между группой $SL(2, \mathbb{C})$ унимодулярных комплексных 2×2 -матриц и двукратным (универсальным) покрытием связной компоненты группы Лоренца $O(1, 3)$. Чтобы выразить этот изоморфизм в наиболее явном виде, рассмотрим общие эрмитовы 2×2 -матрицы, которые я запишу здесь в виде

$$\begin{pmatrix} u^{00'} & u^{01'} \\ u^{10'} & u^{11'} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u^0 + u^1 & u^2 + iu^3 \\ u^2 - iu^3 & u^0 - u^1 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

¹⁾ Я говорю «спинорная структура», а не «спиновая структура», чтобы подчеркнуть, что \mathcal{M} не просто спиновое многообразие, но что его структура должна определяться *конкретным* типом используемой здесь спинорной системы.

²⁾ Для анализа структуры пространства-времени может быть также использован $(2-1)$ -изоморфизм между $SU(2, 2)$ и связной компонентой $O(2, 4)$ (ср. с [79, 80]).

При умножении матрицы (4.13) слева на унимодулярную комплексную 2×2 -матрицу ($t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}$), а справа — на комплексно-сопряженную ей сохраняется как эрмитовость, так и величина детерминанта (4.13). Мы получаем таким образом линейное преобразование (u^0, u^1, u^2, u^3), сохраняющее как вещественность u^a , так и форму

$$g_{ab} u^a u^b = (u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2, \quad (4.14)$$

где

$$(g_{ab}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (4.15)$$

Следовательно, для u^a мы получили преобразование Лоренца

$$u^a \rightarrow L_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}} u^b, \quad (4.16)$$

непрерывно переходящее в тождество (так как $t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}$ непрерывно переходит в $\delta_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}$). И наоборот, из ряда соображений следует, что любое преобразование типа (4.16) следует из *двух и только двух* унимодулярных матриц ($t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}$), а именно из ($t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}$) и ($\bar{t}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}}$). Поэтому преобразование (4.16) эквивалентно преобразованию

$$u^{\mathfrak{A}\mathfrak{A}'} \rightarrow t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}} \bar{t}_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}'} u^{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'}. \quad (4.17)$$

[В этих обозначениях \mathfrak{A} и \mathfrak{A}' считаются *разными* буквами, так что, в частности, по ним не подразумевается суммирование. Следовательно, (4.17) — это *четыре* соотношения. При комплексном сопряжении нештрихованные индексы становятся штрихованными, а штрихованные — нештрихованными. Так, например, величина $\bar{t}^{0'}$, является комплексно-сопряженной по отношению к t^0 . Прописные готические индексы принимают два значения: 0, 1 или 0', 1'. Строчные готические индексы принимают значения 0, 1, 2, 3.]

Обычно компоненты мирового вектора в псевдоортогональной системе координат представляют в виде линейно упорядоченной последовательности (u^0, u^1, u^2, u^3). Однако матричная запись (4.13) несколько не хуже, и мы намереваемся рассмотреть ее как *более* фундаментальную. С этой точки зрения

мировой вектор трактуется уже *не как* самая элементарная «векторная» величина в пространстве-времени, поскольку это теперь «бивалентный» объект и можно ожидать обнаружения неких «унивалентных» (двух-компонентных) объектов, имеющих какое-то пространственно-временное значение. Так оно и есть на самом деле. Назовем эти «унивалентные» объекты *спин-векторами*. Идея состоит тогда в том, чтобы взять в качестве основного модуля (V^\bullet в разд. 2) не множество полей мировых векторов T^\bullet , а *спин-векторные* поля S^\bullet класса C^∞ ¹⁾ на \mathcal{M} . Тот факт, что я еще не дал определения спин-вектора на языке пространства-времени, не играет роли. Процедура будет скорее обратной, и алгебра, определяемая спин-векторами, послужит для определения структуры пространства-времени. Найдя эту структуру, мы сможем затем вернуться обратно и дать трактовку спин-векторов на более привычном языке. В конце концов мы сможем даже дать на редкость полное «физическое» истолкование спин-вектора (см. разд. 5).

Какой же внутренней структурой должен обладать наш модуль S^\bullet спин-векторных полей? Мы требуем, чтобы около каждой точки $P \in \mathcal{M}$ слой $S^\bullet(P)$ над P был двумерным комплексным векторным пространством («спиновым пространством»). Симметрия этого пространства задается группой $SL(2, \mathbb{C})$, так что в этой симметрии отражается симметрия локальной группы Лоренца пространства-времени. Если ω^0, ω^1 — компоненты $\omega \in S^\bullet(P)$ в некотором базисе, то (активное) преобразование симметрии для $S^\bullet(P)$ дается в виде

$$\omega^{\alpha} \rightarrow t^{\alpha}_{\beta} \omega^{\beta} \quad (4.18)$$

(при этом базис остается фиксированным); здесь матрица (t^{α}_{β}) — комплексная и унимодулярная. При сравнении (4.18) с (4.17) и (4.16) через (4.13) заметим, что если рассматривать пространство $T^\bullet(P)$ мировых векторов как тензорное произведение $S^\bullet(P)$

¹⁾ Окажется, что система S^\bullet есть сечение класса C^∞ пучка спин-векторов над \mathcal{M} , рассматриваемое как модуль над комплексными C^∞ -функциями на \mathcal{M} .

и комплексно-сопряженного ему, то допустимые (активные) симметрии в $\mathbf{T}^*(P)$ оказываются именно преобразованиями Лоренца, не включающими пространственных отражений и обращения времени. Каждый элемент модуля \mathbf{S}^* будет непересекающимся объединением всех $P \in \mathcal{M}$ — по одному элементу от каждого $\mathbf{S}^*(P)$. При этом накладывается и некоторая дифференциальная структура. Мы дадим краткое аксиоматическое определение. Назовем объект, построенный из тензорных произведений \mathbf{S}^* , дуального ему \mathbf{S} , и комплексно-сопряженных им полей, *спинорным полем* на \mathcal{M} . Как видно, частным случаем здесь будет поле мирового вектора. При этом «тензорное произведение» следует понимать в смысле, указанном в разд. 3. Принятая система значков окажется весьма ценной при контроле за различными операциями.

Нам понадобятся спинорные значки двух типов

$$A, B, C, \dots, A_0, \dots, A_1, \dots, \quad (4.19)$$

$$A', B', C', \dots, A'_0, \dots, A'_1, \dots \quad (4.20)$$

Каждому $\omega \in \mathbf{S}^*$ будут соответствовать элементы $\omega^A \in \mathbf{S}^A$, $\omega^B \in \mathbf{S}^B$, ..., $\omega^X \in \mathbf{S}^X$, ..., а также элементы $\bar{\omega}^{A'} \in \mathbf{S}^{A'}$, $\bar{\omega}^{B'} \in \mathbf{S}^{B'}$, ..., $\bar{\omega}^{X'} \in \mathbf{S}^{X'}$, Как и прежде, мы при желании можем представлять себе ω^X просто как *пару* (ω, X) и т. д. Кольцо \mathbf{S} будет трактоваться как *комплексные* C^∞ -функции на \mathcal{M} :

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} \oplus i\mathbf{T}. \quad (4.21)$$

Различие между штрихованными и нештрихованными индексами возникает из следующего требования: если каждый модуль \mathbf{S}^A , \mathbf{S}^B , ... над \mathbf{S} канонически изоморфен \mathbf{S}^* , то каждый модуль $\mathbf{S}^{A'}$, $\mathbf{S}^{B'}$, ... над \mathbf{S} канонически *антиизоморфен* \mathbf{S}^* . Иначе говоря, если $\lambda, \mu \in \mathbf{S}$, а $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{S}^*$, причем $\gamma = \lambda\alpha + \mu\beta$, то

$$\gamma^X = \lambda\alpha^X + \mu\beta^X \quad \text{и} \quad \bar{\gamma}^{X'} = \bar{\lambda}\bar{\alpha}^{X'} + \bar{\mu}\bar{\beta}^{X'}. \quad (4.22)$$

Таким образом, мы будем рассматривать каждый элемент $\bar{\omega}^X$ как *комплексно-сопряженный* по отношению

к соответствующему ω^X и будем иногда писать

$$\overline{\omega^X} = \bar{\omega}^{X'}, \quad \overline{\pi^{X'}} = \bar{\pi}^X. \quad (4.23)$$

[Можно представлять себе операцию комплексного сопряжения как замену списка (4.19) на список (4.20), когда эта операция распространяется и на индексы.] Спинорная система строится тогда в точности, как в разд. 3, но с тем условием, что свертывание и замена индексов могут касаться лишь индексов *одного и того же* типа (т. е. лишь штрихованных или лишь нештрихованных). Так как замена индексов не приводит к перестановкам штрихованных индексов с нештрихованными, относительную расстановку штрихованных и нештрихованных индексов мы будем считать несущественной. Напротив, будет важно (в большинстве случаев) следить за порядком индексов *одного и того же* типа, *даже если* одни из них верхние, а другие — нижние. Так, например,

$$\rho^{AA'}_{B'B}{}^Q = \rho^{A'A}{}^Q_{B'B'} = \rho^{AA'Q}_{B'B'} \neq \rho^{AA'Q}_{BB'}. \quad (4.24)$$

Комплексное сопряжение — это пятая операция, в дополнение к (3.11)—(3.14), действующая на спинорную систему $\{S\}$:

комплексное сопряжение:

$$S_P^X \dots S_{Q'}^{ZW'} \dots U'^Y \rightarrow S_Q^W \dots S_{UP'}^{YX'} \dots S'^Z. \quad (4.25)$$

Эта операция применима очевидным образом [ср. с (4.23)] к каждому элементу $\rho^X \dots S_{P'}^{ZW'} \dots S_{Q'}^{Y'}$, представленному в виде разложения типа (3.9).

Мы еще не отразили в аппарате спинорной алгебры того факта, что матрицы $(t^{\mathfrak{N}}_{\mathfrak{B}})$ должны быть унимодулярными. Условие унимодулярности можно записать либо в виде

$$e^{\mathfrak{N}\mathfrak{G}} = t^{\mathfrak{N}}_{\mathfrak{B}} t^{\mathfrak{G}}_{\mathfrak{D}} e^{\mathfrak{B}\mathfrak{D}}, \quad (4.26a)$$

либо в виде

$$e^{\mathfrak{B}\mathfrak{D}} = t^{\mathfrak{N}}_{\mathfrak{B}} t^{\mathfrak{G}}_{\mathfrak{D}} e^{\mathfrak{N}\mathfrak{G}}. \quad (4.26b)$$

Здесь использован символ Леви-Чивиты

$$(\epsilon_{\mathbb{R}^3}) = (\epsilon^{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Обозначим элементы S_{AB} и S^{AB} , компоненты которых в некотором базисе имеют вид (4.27), соответственно как ϵ_{AB} и ϵ^{AB} . Тогда из (4.26) видно, что ϵ_{AB} и ϵ^{AB} инвариантны относительно активного преобразования симметрии $S^*(P)$, имеющего вид (4.18). Мы будем рассматривать ϵ_{AB} , ϵ^{AB} и комплексно-опряженные им $\epsilon_{A'B'}$, $\epsilon^{A'B'}$ как основной элемент внутренней структуры спинорной системы. (Более последовательно было бы писать $\bar{\epsilon}_{A'B'}$ вместо $\epsilon_{A'B'}$ и $\bar{\epsilon}^{A'B'}$ вместо $\epsilon^{A'B'}$, но обычно черточки опускают.) Любой базис, в котором компоненты $\epsilon_{\mathbb{R}^3}$ имеют вид (4.27) называется нормированным базисом, или *спиновой системой отсчета*.

Символ Леви-Чивиты, в частности, обеспечивает установление канонического изоморфизма между S^* и дуальным ему S_* . Это достигается путем поднятия и опускания спинорных значков:

$$\xi^{\dots A \dots} \epsilon_{AB} = \xi^{\dots B \dots}; \quad \epsilon^{AB} \xi_{\dots B \dots} = \xi^{\dots A \dots}; \quad (4.28)$$

$$\eta^{\dots A' \dots} \epsilon_{A'B'} = \eta^{\dots B' \dots}; \quad \epsilon^{A'B'} \eta_{\dots B' \dots} = \eta^{\dots A' \dots}. \quad (4.29)$$

(В связи с этим возникает ощущение, что использование сразу и верхних и нижних значков излишне. Сохранение различий между ними, в сущности, вопрос «бухгалтерского учета». На самом деле ведь можно пользоваться обозначениями, *стицающими* эти различия, но тогда мы столкнемся с непривычной ситуацией, когда спин-векторы антикоммутируют! Я слеую в этом отношении традициям.) Замечим, что

$$\xi^{\dots \dots X \dots} = - \xi^{\dots X \dots \dots} \quad (4.30)$$

(и аналогично для штрихованных индексов) вследствие антисимметрии

$$\epsilon_{AB} = - \epsilon_{BA}, \quad \epsilon^{AB} = - \epsilon^{BA}. \quad (4.31)$$

Поэтому нужно внимательно следить за порядком индексов, поднимая и опуская их. По этой же причине, а также во избежание недоразумений в обозначениях на дальнейших этапах, мы не будем пользоваться символами δ_B^A и $\delta_{B'}^{A'}$ типа (3.18). Вместо них введем эквивалентные символы ε_B^A и $\varepsilon_{B'}^{A'}$, для которых

$$\varepsilon_{AB}\varepsilon^{CB} = \varepsilon_A^C = -\varepsilon^C_A; \quad \varepsilon_A^A = 2; \quad (4.32)$$

$$\xi_{\dots B \dots} = \xi_{\dots A \dots} \varepsilon_B^A; \quad \xi_{\dots B \dots} = \xi_{\dots A \dots} \varepsilon_A^B. \quad (4.33)$$

Итак, ε_B^A обладает свойствами (3.19), которых мы требовали бы от δ_B^A . (Отметим, что операция поднятия и опускания индексов здесь согласуются друг с другом.) При любом выборе спиновой системы отсчета $\varepsilon_{\mathfrak{A}}^A, \varepsilon_A^{\mathfrak{A}}$ имеем

$$(\varepsilon_{\mathfrak{A}}^{\mathfrak{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Если спинор антисимметричен по трем или более индексам, он тождественно равен нулю (в силу двумерности). Поэтому

$$\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD} + \varepsilon_{AC}\varepsilon_{DB} + \varepsilon_{AD}\varepsilon_{BC} = 0. \quad (4.35)$$

Одно из следствий (4.35) состоит в том, что если $\xi_{\dots A \dots B \dots}$ антисимметричен по A и B , т. е.

$$\xi_{\dots A \dots B \dots} = -\xi_{\dots B \dots A \dots}, \quad (4.36)$$

то

$$\xi_{\dots A \dots B \dots} = \frac{1}{2} \varepsilon_{AB} \xi_{\dots X \dots}^X \dots. \quad (4.37)$$

Это свойство тесно связано с представлением группы $SL(2, \mathbf{C})$, так как указывает на тот факт, что лишь спиноры, полностью симметричные по всем нештрихованным индексам и по всем штрихованным индексам, не могут быть сведены к более простым. Говорят, что компоненты спинора с r симметричными нижними нештрихованными индексами и с s симметричными нижними штрихованными индексами преобразуются по неприводимому представлению $D(r/2, s/2)$ группы Лоренца.

Включим теперь в нашу спинорную схему и мировые тензоры, введя тензорные значки (3.1) как *парные комбинации* спинорных значков:

$$a = AA', b = BB', c = CC', \dots, a_0 = A_0 A'_0, \dots \quad (4.38)$$

Таким образом получим подсистему $(\mathfrak{S}, \mathbf{S}^a, \mathbf{S}^b, \dots, \mathbf{S}_a, \dots, \mathbf{S}_{u \dots w}^{x \dots z}, \dots)$ *комплексных мировых тензоров*, замкнутую относительно операций (3.11) — (3.14), а также относительно операции комплексного сопряжения (4.25), действие которой здесь сводится к $\mathbf{S}_{u \dots w}^{x \dots z} \rightarrow \overline{\mathbf{S}_{u \dots w}^{x \dots z}}$. Инвариантными при комплексном сопряжении элементами являются *вещественные мировые тензоры*: $\bar{\alpha}_{u \dots w}^{x \dots z} = \alpha_{u \dots w}^{x \dots z}$. Поля вещественных мировых тензоров образуют подсистему $\{\mathbf{T}\}$ полной системы $\{\mathbf{S}\}$:

$$\{\mathbf{T}\} = (\mathbf{T}, \mathbf{T}^a, \mathbf{T}^b, \dots, \mathbf{T}_a, \dots, \mathbf{T}_{u \dots w}^{x \dots z}, \dots). \quad (4.39)$$

Покажем, что этот процесс — именно то, что содержится в сопоставлении (4.13); для этого рассмотрим спиновую систему отсчета $\epsilon_{\mathfrak{A}}^A, \epsilon_{\mathfrak{I}}^{\mathfrak{A}}$ для \mathbf{S}^\bullet и определим (при $\epsilon_{A'}^{\mathfrak{A}'} = \overline{\epsilon_A^{\mathfrak{A}'}}$)

$$\begin{aligned} \delta_a^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_A^0 \epsilon_{A'}^{0'} + \epsilon_A^1 \epsilon_{A'}^{1'}), \\ \delta_a^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_A^0 \epsilon_{A'}^{0'} - \epsilon_A^1 \epsilon_{A'}^{1'}), \\ \delta_a^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_A^1 \epsilon_{A'}^{0'} + \epsilon_A^0 \epsilon_{A'}^{1'}), \\ \delta_a^3 &= \frac{i}{\sqrt{2}} (\epsilon_A^1 \epsilon_{A'}^{0'} - \epsilon_A^0 \epsilon_{A'}^{1'}). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Отсюда непосредственно следует (4.13), причем $u^a = u^{AA'}$ и

$$u^a = u^a \delta_a^a, \quad u^{\mathfrak{A}\mathfrak{A}'} = u^{AA'} \epsilon_A^{\mathfrak{A}} \epsilon_{A'}^{\mathfrak{A}'} \quad (4.41)$$

в согласии с условием (3.20). Формулы (4.40) дают нам стандартный способ определения мирового векторного базиса для любой данной спиновой системы

отсчета. Важно, однако, что мы не обязаны всегда пользоваться этим конкретным методом сопоставления. Иногда мы будем отдавать предпочтение мировому векторному базису, полученному естественным образом с помощью системы координат. В других случаях удобный базис задается световой тетрадой¹⁾

$$\begin{aligned}\delta_0^a &= \varepsilon_0^A \varepsilon_{0'}^{A'}, & \delta_1^a &= \varepsilon_1^A \varepsilon_{1'}^{A'}, \\ \delta_2^a &= \varepsilon_0^A \varepsilon_{1'}^{A'}, & \delta_3^a &= \varepsilon_1^A \varepsilon_{0'}^{A'}.\end{aligned}\quad (4.42)$$

В любом случае можно определить переводящие символы Инфельда — ван-дер-Вердена [46, 110]:

$$\sigma_a^{\mathfrak{A}\mathfrak{A}'} = \delta_a^A \varepsilon_A^{\mathfrak{A}} \varepsilon_{A'}^{\mathfrak{A}'}, \quad \sigma_a^{\mathfrak{A}} = \delta_a^A \varepsilon_A^{\mathfrak{A}} \varepsilon_{A'}^{A'}.\quad (4.43)$$

(Вспомним, что $a = AA'$; таким образом, свертывание имеет место для абстрактных значков. С другой стороны, не вводится никакой связи между a и \mathfrak{A} , \mathfrak{A}' , так что по ним нет суммирования. Каждое из соотношений (4.43) — это 16 уравнений.) Символы Инфельда — ван-дер-Вердена — это в действительности просто δ_a^b , только в них верхние и нижние индексы выражены на языке разных базисов. Пример связи между спинорными и мировыми тензорными компонентами величин можно записать как

$$\begin{aligned}\psi_a^b &= \psi_{\mathfrak{A}\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'} \sigma_a^{\mathfrak{A}\mathfrak{A}'} \sigma_b^{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'}, \\ \psi_{\mathfrak{A}\mathfrak{A}'}^{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'} &= \psi_a^b \sigma_{\mathfrak{A}\mathfrak{A}'}^a \sigma_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'}^b.\end{aligned}\quad (4.44)$$

Рассмотрим теперь удвоенный детерминант матрицы (4.13):

$$u^{\mathfrak{A}\mathfrak{A}'} u^{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'} \varepsilon_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} \varepsilon_{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'} = u^a u^b g_{ab}.\quad (4.45)$$

При обратном преобразовании к абстрактным значкам это дает

$$u^a u^b (\varepsilon_{AB} \varepsilon_{A'B'} - g_{ab}) = 0\quad (4.46)$$

¹⁾ Автор пользуется термином «null», что означает изотропный, светоподобный. Вместе с тем, часто встречается термин «null cone» — световой конус. Для унификации в русском переводе делается попытка писать «световой», хотя, конечно, комплексные изотропные векторы типа (5.3), составленные из пространственноподобных частей, «световыми» называть не следует. — Прим. перев.

[ср. с (3.21)], и мы получаем [ввиду симметрии g_{ab} и $\varepsilon_{AB}\varepsilon_{A'B'}$ при перестановке a и b и ввиду справедливости (4.46) для всех u^a]

$$g_{ab} = \varepsilon_{AB}\varepsilon_{A'B'}. \quad (4.47)$$

Уравнение (4.47) представляет собой фундаментальное соотношение, с помощью которого метрика пространства-времени определяется его спинорной структурой. Отметим, в частности, что *сигнатура* $(+, -, -, -)$ *автоматически включается в формализм* через соотношение (4.47), так как выбор мирового векторного базиса (4.40) дает нам значение (4.15). Вследствие (4.47), (4.32) и (4.31) получим

$$\begin{aligned} g^{ab} &= \varepsilon^{AB}\varepsilon^{A'B'}, & \delta_a^b &= \varepsilon_A^B\varepsilon_{A'}^{B'}, \\ g_{ab} &= g_{ba}, & g_{ab}g^{bc} &= \delta_a^c, \end{aligned} \quad (4.48)$$

так что правила поднятия и опускания спинорных индексов приводят к тензорным правилам

$$\zeta^{\dots a \dots} = \zeta^{\dots b \dots} g_{ab}; \quad \zeta^{\dots b \dots} = \zeta^{\dots a \dots} g^{ab}. \quad (4.49)$$

Итак, наш метод согласуется с обычными определениями.

Однако мы еще не связали локальную спинорную структуру с многообразием \mathcal{M} в целом. Чтобы связать различные $\mathbf{S}^\bullet(P)$ друг с другом, необходимо рассмотреть операцию дифференцирования. Дадим аксиоматическое определение ряда правил, которые нам понадобятся. Нам потребуется ввести операцию *ковариантного дифференцирования*

$$\nabla_{XY'} : \mathbf{S}_{F \dots MH' \dots K'}^{P \dots SR' \dots T'} \rightarrow \mathbf{S}_{F \dots MXH' \dots KY'}^{P \dots SR' \dots T'}, \quad (4.50)$$

обладающую свойствами

$$\nabla_{XY'}(\psi^{\dots} + \chi^{\dots}) = \nabla_{XY'}\psi^{\dots} + \nabla_{XY'}\chi^{\dots}; \quad (4.51)$$

$$\nabla_{XY'}(\psi^{\dots}\chi^{\dots}) = \chi^{\dots}\nabla_{XY'}\psi^{\dots} + \psi^{\dots}\nabla_{XY'}\chi^{\dots}; \quad (4.52)$$

$$\nabla_{XY'}\varepsilon_{AB} = 0, \quad \nabla_{XY'}\varepsilon^{AB} = 0; \quad (4.53)$$

$$\text{Если } \psi_{\dots} = \nabla_{XY} \chi_{\dots}, \text{ то } \overline{\psi_{\dots}} = \nabla_{YX} \overline{\chi_{\dots}}; \quad (4.54)$$

$$\text{Если } \psi_{\dots A \dots B \dots} = \nabla_{XY} \chi_{\dots A \dots B \dots}, \text{ то } \psi_{\dots A \dots B \dots} = \\ = \nabla_{XY} \chi_{\dots A \dots}; \quad (4.55)$$

ОПЕРАЦИЯ ∇_{XY} КОММУТИРУЕТ С ЛЮБОЙ ЗАМЕНОЙ ИНДЕКСОВ (НЕ ВКЛЮЧАЮЩИХ X ИЛИ Y); (4.56)

$$\nabla_x \nabla_z \varphi = \nabla_z \nabla_x \varphi; \quad (4.57)$$

Для любого производного ξ на \mathbf{T} существует единственный элемент $\xi^a \in \mathbf{T}^a$, такой, что $\xi(\varphi) = \xi^a \nabla_a \varphi$ для любого $\varphi \in \mathbf{T}$. (4.58)

В действительности аксиомы (4.51) — (4.58) не все друг от друга независимы, однако в них выражены все свойства, которые нам нужны. Отметим, что свойство (4.58) связывает $\{\mathbf{S}\}$ с пучком, касательным к \mathcal{M} . Мировые векторы оказываются векторами, касательными к \mathcal{M} . Все эти свойства однозначно определяют операцию ∇_{XY} . (Ясно, что для любой другой пары значков, скажем M, N' , мы получим $\nabla_{MN'}$ путем замены индексов.) Наоборот, можно было бы задаться вопросом, не накладывает ли факт существования системы $\{\mathbf{S}\}$, удовлетворяющей всем сформулированным условиям, каких-либо ограничений на \mathcal{M} как на дифференцируемое многообразие или как на псевдориманово многообразие с данной сигнатурой метрики $(+, -, -, -)$ [с которой по предположению согласуется g_{ab} , данное как (4.47)]. На это можно ответить, что локально никаких ограничений не возникает (т. е. $\{\mathbf{S}\}$ существует для некоторого открытого множества, содержащего любое данное $P \in \mathcal{M}$, однако глобальные ограничения имеются. Аналогичное замечание можно сделать и относительно единственности $\{\mathbf{S}\}$. Мы перейдем к обсуждению этих глобальных ограничений на \mathcal{M} в следующем разделе.

5.

Истолкование спин-вектора

В предыдущем разделе спиноры были введены совершенно формально. Непосредственную интерпретацию на языке пространства-времени получили лишь элементы $\{\mathbf{T}\}$. Можно было бы думать, что любая геометрическая интерпретация остальных элементов $\{\mathbf{S}\}$ должна быть по необходимости лишь сугубо косвенной. Оказывается, однако, что это не так. В действительности любой спин-вектор может быть интерпретирован в пространстве-времени даже графически (с точностью до знака). И даже знаку можно приписать свой смысл на языке физических построений.

Перейдем к истолкованию спин-вектора

$$\omega^A \in \mathbf{S}^A(P).$$

Самым простым мировым вектором, который можно построить из ω^A , является мировой вектор

$$u^a = \omega^A \bar{\omega}^{A'}. \quad (5.1)$$

Тогда $u^a u_a = |\omega^A \omega_A|^2 = 0$ (так как $\omega^A \omega_A = = -\omega_A \omega^A = 0$); следовательно, вектор u^a является образующей светового конуса с вершиной в точке P . При этом *всякий* световой мировой вектор имеет либо вид (5.1), либо вид

$$v^a = -\omega^A \bar{\omega}^{A'}, \quad (5.2)$$

тогда как *всякий* комплексный мировой вектор, изотропный в смысле $\omega^a \omega_a = 0$, имеет вид

$$\omega^a = \omega^A \pi^{A'}. \quad (5.3)$$

Эти выводы следуют непосредственно из представления (4.13), так как ранг 2×2 -матрицы, детерминант которой равен нулю, не может превышать единицы,

и поэтому такая матрица является внешним произведением двух векторов. Отметим, что наличие спинорной системы $\{\mathbf{S}\}$ приводит к абсолютному различию между двумя световыми полуконусами в точке P : можно *определить* как *направленные в будущее* те световые векторы, для которых верно (5.1) (при $\omega^A \neq 0$), и как *направленные в прошлое* — те световые векторы, для которых верно (5.2) (при $\omega^A \neq 0$). [Эти определения согласуются с (4.13), если принять, что положительность u^0 соответствует возрастанию времени.] Отсюда следует первое глобальное ограничение на \mathcal{M} как псевдориманово многообразие, обусловленное наличием $\{\mathbf{S}\}$: многообразие \mathcal{M} должно быть *ориентируемым во времени*. Иначе говоря, деление световых полуконусов в \mathcal{M} на два класса — полуконусы будущего и прошлого — может быть осуществлено непрерывным образом на всем многообразии.

Итак, из уравнения (5.1) следует, что направленный в будущее вещественный световой вектор однозначно определяется любым ненулевым спин-вектором. Однако одному и тому же световому мировому вектору соответствует множество разных спин-векторов, так как равенство (5.1) инвариантно относительно преобразования

$$\omega^A \rightarrow e^{i\theta} \omega^A, \quad (5.4)$$

где θ вещественно. Чтобы истолковать «фазу» ω^A , необходимо пойти иным путем. Рассмотрим для этого «квадрат» $\omega^A \omega^B$ и, чтобы ввести такое же количество штрихованных индексов, умножим его на $\varepsilon^{A'B'}$. Наконец, добавив сюда комплексно-сопряженное выражение, получим вещественный мировой тензор

$$p^{ab} = \omega^A \omega^B \varepsilon^{A'B'} + \varepsilon^{AB} \bar{\omega}^{A'} \bar{\omega}^{B'}. \quad (5.5)$$

Теперь уже видно, что p^{ab} антисимметричен и прост:

$$p^{ab} = u^a k^b - k^a u^b, \quad (5.6)$$

где

$$k^a = \omega^A \bar{\varkappa}^{A'} + \varkappa^A \bar{\omega}^{A'}. \quad (5.7)$$

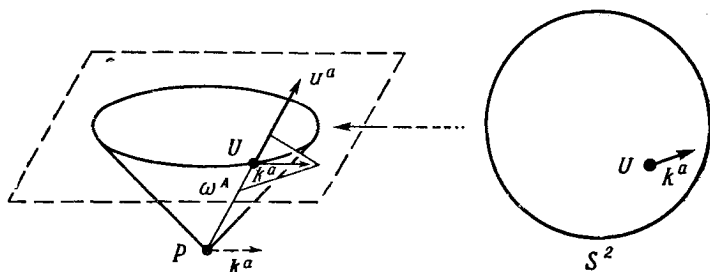


Рис. 7. Спин-вектор ω^A в точке P определяет световой флаг. Это можно изобразить, построив вектор, касательный к небесной сфере в точке U .

Здесь κ^A — произвольный элемент $S^A(P)$, для которого $\omega_A \kappa^A = 1$, причем из (4.37) следует $\omega^A \kappa^B = \kappa^A \omega^B = \varepsilon^{AB}$. Вектор k^a является вещественным и пространственноподобным, его модуль равен $\sqrt{2}$, и он ортогонален вектору u^a :

$$\bar{k}^a = k^a, \quad k^a k_a = -2, \quad k^a u_a = 0. \quad (5.8)$$

Этот вектор определяется бивектором p^{ab} с точностью до (вещественного) слагаемого, пропорционального u^a . Поэтому возможные направления k^a определяют элемент двумерной полуплощадки в P , касательный к световому конусу вдоль светового направления u^a . Можно сказать, что ω^A определяет *световой флаг* [70, 73, 114] в касательном пространстве при P , причем флагштоком служит направленный в будущее световой вектор u^a , а полотнище флага есть световая 2-площадка, в которой лежит u^a (рис. 7).

Чтобы полнее обрисовать природу площадки этого флага, рассмотрим сечение касательного пространства в P пространственноподобной гиперплоскостью, не проходящей через P , вырезав тем самым конус в сфере S^2 . Флагшток пересекает S^2 в точке U , а площадка флага дает в U *единичный касательный вектор* к S^2 (его можно отождествить с вектором $k^a/\sqrt{2}$ в том случае, если он выбран параллельным нашей гиперповерхности). Сфере S^2 можно дать не-

посредственное физическое истолкование: это «небесная сфера» (или поле зрения) для наблюдателя в P . (Пространственноподобная гиперплоскость может быть выбрана ортогональной мировой линии наблюдателя в P .) Фотон, приходящий в P , обладает мировой линией (световой геодезической) со световым касанием в P , так что может быть однозначно связан с точкой U на S^2 . Можно также описывать поляризацию этого фотона с помощью площадки флага, т. е. вектора, касательного к небесной сфере в U . Следовательно, спин-вектор оказывается естественным средством для описания поляризованного фотона. В разд. 8 эта связь между спинорами и полями частиц нулевой массы покоя, обладающими различными значениями спина, будет рассмотрена более подробно.

Здесь уместно сделать одно заключительное замечание относительно структуры небесной сферы. Хотя риманова метрика, введенная на S^2 описанным выше построением, зависит от нашего выбора пространственноподобной гиперплоскости, конформная структура S^2 , напротив, определена жестко. Это можно увидеть, например, вернувшись к (4.18), откуда при $\xi = \omega^0/\omega^1$ следует дробно-линейное преобразование $\xi \rightarrow (t^0_0\xi + t^0_1)/(t^1_0\xi + t^1_1)$. Комплексное число ξ определяет точку U , а связь между комплексной ξ -плоскостью и S^2 задается стереографической проекцией [71]. Оба эти преобразования — конформные (так, они переводят окружности в окружности). Поскольку преобразование (4.18) соответствует преобразованию Лоренца, небесные сферы двух наблюдателей в P оказываются связанными друг с другом конформным преобразованием [71, 106] (так что окружности, наблюдаемые одним наблюдателем, останутся окружностями и для другого). Теперь мы переходим к другому способу инвариантного введения конформной структуры S^2 .

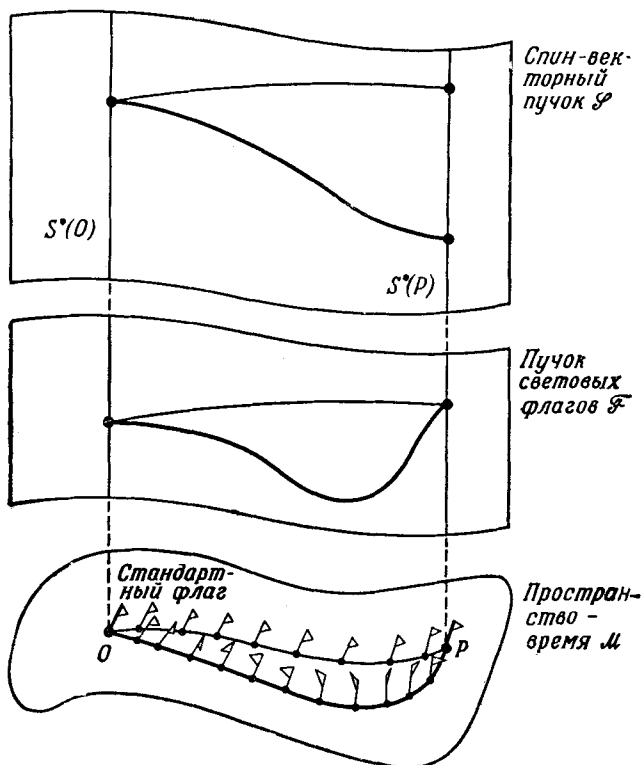
При умножении ω^A на отличное от нуля комплексное число $\lambda = re^{i\theta}$ (где r и θ вещественны) вектор u^a умножается на r^2 , а k^a (при $\kappa^A \rightarrow \lambda^{-1}\kappa^A$) поворачивается на угол 2θ в плоскости, натянутой на k^a и $h^a = i(\omega^A \bar{\kappa}^{A'} - \kappa^A \bar{\omega}^{A'})$. Таким образом, мы видим, что

преобразование $\omega^A \rightarrow \lambda \omega^A$ приводит к умножению длины флаштока на $\lambda \bar{\lambda}$ и к повороту площадки флага на угол $2 \operatorname{arg} \lambda$. Отметим, что тем самым задается прямой метод для определения конформной структуры сферы S^2 через спиноры. Если U является точкой на S^2 , то угол между двумя векторами, касательными к S^2 в U и заданными соответственно как ω^A и $e^{i\theta} \omega^A$, равен просто 2θ . Получив инвариантное определение углов на S^2 , мы тем самым нашли и инвариантное определение конформной структуры S^2 . К тому же имеем инвариантно определенную ориентацию для S^2 , а следовательно, и для \mathcal{M} . Можно просто определить понятие правого поворота как такой поворот, при котором площадка флага $e^{i\theta} \omega^A$ поворачивается в направлении возрастания θ . Это определение согласуется с понятием правой системы координат, если связать ее с (4.13). Отсюда следует второе глобальное ограничение на \mathcal{M} как псевдориманово многообразии: многообразии \mathcal{M} должно быть не только ориентируемым во времени, но и ориентируемым в пространстве. Поэтому на языке топологических многообразий \mathcal{M} можно просто назвать ориентируемым.

Третье и последнее глобальное ограничение на \mathcal{M} как псевдориманово (или топологическое) многообразии, обусловленное наличием $\{\mathbf{S}\}$, проявляется в связи с другим аспектом данного выше представления спин-вектора как светового флага. Заметим, что как u^a в (5.1), так и p^{ab} в (5.6) инвариантны относительно преобразования

$$\omega^A \rightarrow -\omega^A. \quad (5.9)$$

Если мы теперь рассмотрим площадку флага, заданную через $e^{i\theta} \omega^A$, то при изменении θ от 0 до 2π мы обнаружим, что она поворачивается при этом на 2π (полный оборот), возвращаясь в исходное положение, тогда как ω^A меняет знак. Спин-вектор вновь достигает своего первоначального значения лишь после еще одного полного поворота площадки флага на 2π . При этом ясно, однако, что никаким добавлением к световому флагу каких-либо новых локальных геометрических структур мы уже не сможем отличить ω^A от $-\omega^A$ (если понимать под «локальными геометриче-

Рис. 8. Флаг-пути на \mathcal{M} и их отображения на \mathcal{F} и \mathcal{S} .

скими структурами» построения в пространстве, касательном к \mathcal{M} в P). Дело в том, что поворот любой такой структуры на 2π вернет ее в первоначальное положение, тогда как ω^A преобразуется по закону (5.9).

Напротив, можно отличить ω^A от $-\omega^A$ с помощью *нелокального* геометрического построения. Для этого рассмотрим конкретный световой флаг в конкретной точке O из \mathcal{M} и назовем его *стандартным флагом*. Для простоты ограничимся анализом односвязной области в \mathcal{M} (либо будем работать с универсальным накрывающим \mathcal{M}). Идея тогда состоит в отождествлении

спин-вектора уже не со световым флагом, а с *классом эквивалентности флаг-путей*¹⁾. Флаг-путем назовем непрерывную последовательность световых флагов на \mathcal{M} , начинающуюся от стандартного флага и кончающуюся некоторым световым флагом в точке P из \mathcal{M} (рис. 8). Два флаг-пути будут эквивалентными, если их можно перевести друг в друга с помощью непрерывной деформации при сохранении конечных точек и световых флагов в этих точках фиксированными. Существование спин-векторов связывается теперь с существованием *двух* классов эквивалентности, соответствующих каждому световому флагу в P . Если рассматривать флаг-пути, основанные на *фиксированной* кривой на \mathcal{M} и кончающиеся фиксированным световым флагом, то из топологии группы Лоренца следует, что существует два и только два класса эквивалентности флаг-путей, связанных с этой кривой, различающихся результирующим относительным поворотом на 2π между O и P . Если же допустить на многообразии изменение кривой, на которой основывается флаг-путь, с ее дальнейшим возвращением в исходное положение, может оказаться, что эти классы эквивалентности объединятся в один класс эквивалентности. Тогда на многообразии нельзя будет определить спин-векторы. Если допустить, что P и O совпадают, то можно сформулировать это свойство другим способом. Пусть (замкнутый) флаг-путь дает просто поворот стандартного флага на угол 2π вокруг его флагштока; если теперь этот флаг-путь можно так непрерывно деформировать (смещая кривую в многообразии), что он станет постоянным (т. е. световой флаг не будет поворачиваться вообще), то спинорной структуры не существует.

Проделанное построение соответствует пучку световых флагов \mathcal{F} для \mathcal{M} (8-мерное пространство всех световых флагов во всех точках \mathcal{M}). Флаг-путь

¹⁾ Я сознательно допустил некоторую нечеткость, не описав геометрической структуры, соответствующей *равному нулю* спин-вектору в P , которую можно было бы назвать «световым флагом». Однако в случае *флаг-путей* «нулевые световые флаги» безусловно следует исключить.

соответствует кривой в \mathcal{F} . Когда \mathcal{F} односвязно, наше построение дает пучок спин-векторов \mathcal{P} (пространство всех спин-векторов во всех точках \mathcal{M}) в качестве универсального (двулистного) накрывающего для \mathcal{F} , если только данное \mathcal{F} обладает двулистным покрытием. Если же \mathcal{F} не обладает двулистным покрытием (является односвязным), то для \mathcal{M} не существует $\{\mathbf{S}\}$. В случае, когда $\{\mathbf{S}\}$ для \mathcal{M} существует, элементы \mathbf{S}^\bullet можно истолковать как сечения \mathcal{P} класса C^∞ .

Если \mathcal{M} не является односвязным, положение усложняется ввиду несравнимости флаг-путей, принадлежащих гомотопически неэквивалентным кривым на \mathcal{M} . При этом, если для \mathcal{M} спинорная структура $\{\mathbf{S}\}$ и существует, то она оказывается не единственной. Но во всяком случае для установления существования спинорной структуры мы можем апеллировать к универсальному накрывающему для \mathcal{M} , и положение останется прежним.

Мы вели рассуждения в терминах пучка \mathcal{F} световых флагов, поскольку это представляется наиболее непосредственным геометрическим путем к пространственно-временному описанию спин-вектора. Чаше, однако, пользуются пучком всех ортонормированных систем на \mathcal{M} , и это лучше подходит для общего n -мерного анализа. Легко видеть, что обе процедуры равноценны в случае пространственно-временного многообразия. Кроме того, ввиду ориентируемости \mathcal{M} (что означает равенство нулю класса ω_1 Штейфеля — Уитни) нетрудно использовать приведенные выше аргументы и показать, что другое топологическое условие на \mathcal{M} , следующее из существования $\{\mathbf{S}\}$, состоит в обращении в нуль класса ω_2 Штейфеля — Уитни [38, 57]. Это означает, что для каждой точки на этой 2-поверхности в \mathcal{M} можно задать непрерывную систему трех линейно независимых векторов. (Обсуждение этого вопроса см. в [113а, 116, 117].) Любопытно, что существуют «правдоподобные» пространственно-временные многообразия \mathcal{M}^1 , ориентируемые

¹⁾ Возьмите комплексную проективную плоскость \mathcal{P} (вещественное 4-многообразие) и задайте на ней (положительно определенную) риманову метрику класса C^∞ . Пусть t — вещественная

в пространстве и во времени и не содержащие замкнутых (или почти замкнутых) временноподобных линий, для которых тем не менее $\omega_2 \neq 0$. В таких \mathcal{M} система $\{S\}$ существовать не может.

Можно спросить, какие физические соображения свидетельствуют в пользу существования у пространства-времени спинорной структуры. В самом деле, какую степень физической реальности можно приписать объекту, не возвращающемуся в свое исходное состояние при повороте на 360° ? Эта картина не имеет ровно ничего общего с нашим опытом! Тем не менее волновые функции электронов, протонов, нейтронов, нейтрино и многих других частиц ведут себя именно так. Конечно, можно утверждать, что это ничего не доказывает: ведь волновая функция — понятие довольно туманное. И уж во всяком случае при повороте на угол 2π меняется-то лишь знак волновой функции в целом — а разве этот знак не считается как раз ненаблюдаемым? В недавно опубликованной интересной статье Ааронов и Сусскинд [1] утверждают, что эта точка зрения должна быть отброшена. Они пишут, как можно в принципе построить прибор, который именно в силу спинорной природы волнового уравнения для электрона ведет себя при поворотах как спинор в *макроскопических* масштабах. Этот прибор состоит из двух частей, при соединении которых возникает наблюдаемый электрический ток из одной части

C^∞ -функция на \mathcal{P} , имеющая лишь изолированные особые точки. Устраните эти точки из многообразия и с помощью единичного вектора, соответствующего градиенту t , постройте лоренцеву (+, —, —, —) псевдориманову метрику класса C^∞ . «Пространство-время», которое вы получите, будет ориентируемым во времени и в пространстве и в нем не будет замкнутых (т. е. $\approx S^2$) временноподобных кривых [фактически оно будет удовлетворять сильному требованию причинности (11.1)], но тем не менее у него не будет спиновой структуры ($\omega_2 \neq 0$). Я благодарен Р. Ботту и С. Смейлу за этот пример.

Примечание в корректуре. В недавно написанной работе (посланной в Journ. of Math. Phys.) Героч показал, что в случае некомпактного пространства-времени существование спинорной структуры эквивалентно глобальному существованию непрерывного поля ортонормированных тетрад. Он показал также, что наше предположение (4.5) фактически излишне.

в другую. Части прибора затем разделяются и одна часть поворачивается на 2π относительно другой. Затем их снова соединяют, и снова из одной части в другую течет наблюдаемый ток, только теперь его направление стало противоположным! Первоначальное направление тока восстанавливается, лишь если части прибора вновь разделить, повернуть их на угол 2π и присоединить друг к другу. Мы приходим, таким образом, к ситуации, когда геометрия прибора (в обычном смысле) еще не определяет его поведения. И лишь расширив понятие геометрии путем включения спинорных величин, мы сможем здесь снова утверждать, что поведение системы определяется ее геометрической конфигурацией.

Прибор Ааронова — Сусскинда дает «физический» способ изображения спин-вектора. Можно представить себе, что одна часть прибора скреплена с нашим стандартным флагом, тогда как другая движется в пространстве-времени вместе с другим световым флагом. Такой прибор при этом «следит» за четностью числа полных относительных оборотов — так, в сущности, мы получаем спин-вектор. Если бы удалось убедительно доказать, что такие части прибора могут (в принципе) сохранять свою «память» на больших (скажем, космологических) расстояниях и интервалах времени, мы получили бы решающий довод в пользу того, что ω_2 действительно равняется нулю для вселенной!

6.

Явные формулы для кривизны

Метод, изложенный в разд. 3, автоматически дает все общеизвестные основные формулы, включающие кривизну, символы Кристоффеля и коэффициенты вращения Риччи, как только будут введены известные основные определения. Мы перечислим их здесь вместе с параллельной записью различных спинорных формул, вытекающих из аппарата разд. 4.

Рассмотрим базис δ_a^a для \mathbf{T}^a и (возможно, не связанный с ним) базис $\epsilon_{\mathfrak{A}}^A$ для \mathbf{S}^A . Пусть δ_a^a и $\epsilon_A^{\mathfrak{A}}$ будут соответствующими дуальными базисами. Введем определения

$$\Gamma_{bc}^a = \delta_a^a \nabla_c \delta_b^a = -\delta_b^a \nabla_c \delta_a^a \quad (6.1)$$

и

$$\gamma_{\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}'} = \epsilon_{A\mathfrak{B}}^A \nabla_{\mathfrak{C}\mathfrak{D}'} \epsilon_{\mathfrak{A}}^A = \epsilon_{\mathfrak{B}}^A \nabla_{\mathfrak{C}\mathfrak{D}'} \epsilon_{\mathfrak{A}}^A. \quad (6.2)$$

Здесь, в согласии с (3.20), $\nabla_c = \delta_c^c \nabla_c$ и

$$\nabla_{\mathfrak{C}\mathfrak{D}'} = \epsilon_{\mathfrak{C}}^C \epsilon_{\mathfrak{D}'}^{D'} \nabla_{CD'}.$$

Эквивалентность определений (6.1) и (6.2) непосредственно следует из правил (4.51)–(4.56), а также (3.17), (4.30) и (4.31). Величины Γ_{bc}^a конкретизируются либо как *коэффициенты вращения Риччи* [в том случае, когда базис выбран так, чтобы давать g_{ab} в специальном виде, например (4.15)], либо как *символы Кристоффеля* (при взятии координатного естественного базиса). Величины $\gamma_{\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}'}$ называют *спинорными коэффициентами* [64]. В качестве примера выведем обычные свойства симметрии символов Кристоффеля. Пусть x^0, x^1, x^2, x^3 — локальная система

координат на \mathcal{M} . Тогда связанный с ней координатный базис определяется через

$$\delta_a^a = \nabla_a x^a \quad (6.3)$$

и через дуальные им компоненты δ_a^a . Тогда мы имеем

$$\Gamma_{bc}^a = -\delta_b^a \nabla_c \nabla_a x^a = -\delta_c^a \delta_b^a \nabla_a \nabla_c x^a \quad (6.4)$$

величину, явно симметричную по c и b ввиду условия обращения в нуль кручения (4.57). Из (6.2) столь же непосредственно следует симметрия спиновых коэффициентов

$$\gamma_{\mathfrak{M}\mathfrak{G}\mathfrak{D}'} = \gamma_{\mathfrak{M}\mathfrak{G}\mathfrak{D}} \quad (6.5)$$

Определения (6.1) и (6.2) вместе с (3.20) и (3.21) дают обычные формулы ковариантного дифференцирования в компонентах, например

$$\begin{aligned} \delta_c^c \delta_b^b \delta_a^a (\nabla_c \xi^a_b) &= \delta_b^b \delta_a^a \nabla_c (\xi^b \delta_b^a \delta_c^e) = \\ &= \nabla_c \xi^a_b + \xi^b \Gamma_{bc}^a - \xi^a \Gamma_{bc}^e, \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathfrak{G}}^C \varepsilon_{\mathfrak{D}'}^{D'} \varepsilon_{\mathfrak{M}}^A \varepsilon_{\mathfrak{B}'}^{B'} (\nabla_{CD'} \theta_{A'}^{B'}) &= \varepsilon_{\mathfrak{M}}^A \varepsilon_{\mathfrak{B}'}^{B'} \nabla_{\mathfrak{G}\mathfrak{D}'} (\theta_{\mathfrak{G}}^{\mathfrak{B}} \varepsilon_{A'}^{\mathfrak{G}} \varepsilon_{\mathfrak{B}'}^{B'}) = \\ &= \nabla_{\mathfrak{G}\mathfrak{D}'} \theta_{\mathfrak{M}}^{\mathfrak{B}'} - \theta_{\mathfrak{G}}^{\mathfrak{B}'} \gamma_{\mathfrak{M}\mathfrak{G}\mathfrak{G}'}^{\mathfrak{G}} + \theta_{\mathfrak{M}}^{\mathfrak{B}'} \bar{\gamma}_{\mathfrak{B}'\mathfrak{D}'\mathfrak{G}}^{\mathfrak{B}'} \end{aligned} \quad (6.7)$$

[Вспомним, что $\nabla_{..}$ — это просто обычный оператор частного дифференцирования (взятия градиента), когда он действует на величины без абстрактных значков.]

Определим теперь *тензор кривизны* и *спиноры кривизны*. Введем

$$R^a_{bcd} = 2\delta_a^a \nabla_{[c} \nabla_{d]} \delta_b^a \quad (6.8)$$

и, полагая,

$$\square_{AB} \equiv \nabla_{Y'} (A \nabla_{B'}^{Y'}), \quad \square_{A'B'} \equiv \nabla_Y (A' \nabla_{B'}^Y), \quad (6.9)$$

определим

$$\Psi_{ABCD} = \varepsilon_{D\mathfrak{D}} \square_{(AB} \varepsilon_{C)}^{\mathfrak{D}}, \quad (6.10)$$

$$\Phi_{CDA'B'} = \varepsilon_{D\mathfrak{D}} \square_{A'B'} \varepsilon_C^{\mathfrak{D}}, \quad (6.11)$$

$$\Lambda = \frac{1}{6} \varepsilon_{A\mathfrak{D}} \square^{AB} \varepsilon_{B'}^{\mathfrak{D}}. \quad (6.12)$$

Здесь принято условие, согласно которому квадратные скобки означают антисимметризацию по заключенным в них индексам, а круглые скобки — симметризацию, например

$$\alpha_{[ab]} = \frac{1}{2} (\alpha_{ab} - \alpha_{ba}), \quad b_{[abc]} = \frac{1}{6} (\beta_{abc} + \beta_{bca} + \beta_{cab} - \\ - \beta_{acb} - \beta_{cba} - \beta_{bac}), \quad \gamma_{(AB)} = \frac{1}{2} (\gamma_{AB} + \gamma_{BA}), \quad \text{и т. д.}$$

Так как в определениях (6.8) и (6.10) — (6.12) справа содержатся готические индексы, требуется еще доказать, что они фактически не зависят от выбора базиса. Это действительно так, ибо каждый из операторов $\nabla_{[c} \nabla_{d]}$, \square_{AB} и $\square_{A'B'}$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\xi^{\dots} + \eta^{\dots}) &= \mathcal{D}\xi^{\dots} + \mathcal{D}\eta^{\dots}, \\ \mathcal{D}(\xi^{\dots}\xi^{\dots}) &= \xi^{\dots}\mathcal{D}\xi^{\dots} + \xi^{\dots}\mathcal{D}\xi^{\dots}, \\ \mathcal{D}\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (6.13)$$

[ср. с (6.16)], где вместо \mathcal{D} можно подставить любой из этих операторов. Чтобы произвести замену базиса в (6.8) и (6.10) — (6.12), возьмем

$$\delta_b^a \rightarrow T^a_{\tilde{x}} \delta_b^{\tilde{x}}, \quad \delta_a^a \rightarrow T^{(-1)}_{\tilde{z}} \delta_a^{\tilde{z}}, \quad (6.14)$$

$$\varepsilon_C^{\mathfrak{D}} \rightarrow t^{\mathfrak{D}}_{\tilde{x}} \varepsilon_C^{\tilde{x}}, \quad \varepsilon_{D\mathfrak{D}} \rightarrow t^{(-1)\mathfrak{D}}_{\mathfrak{D}} \varepsilon_{D\mathfrak{D}}, \quad (6.15)$$

где степень (-1) означает обратную матрицу. В силу (6.13) матрица преобразования всякий раз переносится через операцию дифференцирования, сокращаясь с обратной ей матрицей, так что выражения не изменяют своего вида. (Следует помнить, что абстрактные значки не преобразуются!)

Рассмотренные операторы связаны между собой соотношением

$$2\nabla_{[a} \nabla_{b]} \equiv \varepsilon_{A'B'} \square_{AB} + \varepsilon_{AB} \square_{A'B'}, \quad (6.16)$$

так что, например, $\square_{AB} \equiv \varepsilon^{A'B'} \nabla_{[a} \nabla_{b]}$. Определения (6.10) и (6.12) можно тогда объединить в виде

$$\varepsilon_{D\mathfrak{D}} \square_{AB} \varepsilon_C^{\mathfrak{D}} = \Psi_{ABCD} - 2\Lambda \varepsilon_D (A^E B)_C. \quad (6.17)$$

Теперь (6.17) в комбинации с (6.11) и при учете (6.16) дает

$$2\varepsilon_{D\Xi}\nabla_{[a}\nabla_{b]}\varepsilon_C{}^\Xi = \Psi_{ABCD}\varepsilon_{A'B'} - 2\Lambda\varepsilon_D(A\varepsilon_B)C\varepsilon_{A'B'} + \\ + \Phi_{CDA'B'}\varepsilon_{AB}. \quad (6.18)$$

В самом деле, величины Ψ_{ABCD} , Λ и $\Phi_{ABC'D'}$ являются [72, 115] *неприводимыми* частями R_{abcd} относительно локальных (лоренцевых) преобразований $SL(2, C)$:

$$R_{abcd} = \Psi_{ABCD}\varepsilon_{A'B'}\varepsilon_{C'D'} + \varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\bar{\Psi}_{A'B'C'D'} + \\ + 2\Lambda\{\varepsilon_{AC}\varepsilon_{BD}\varepsilon_{A'B'}\varepsilon_{C'D'} + \varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\varepsilon_{A'D'}\varepsilon_{B'C'}\} + \\ + \varepsilon_{AB}\Phi_{CDA'B'}\varepsilon_{C'D'} + \varepsilon_{CD}\Phi_{ABC'D'}\varepsilon_{A'B'}. \quad (6.19)$$

Разложение (6.19) может быть получено из двукратного применения операции (6.18) с учетом (4.35) в определении (6.8). Свойства симметрии

$$R_{abcd} = R_{cdab} = R_{[ab][cd]}, \quad R_{a[bcd]} = 0 \quad (6.20)$$

находят отражение в равенствах

$$\Psi_{ABCD} = \Psi_{(ABCD)}, \quad \Lambda = \bar{\Lambda}, \\ \Phi_{ABC'D'} = \Phi_{(AB)(C'D')} = \bar{\Phi}_{ABC'D'}, \quad (6.21)$$

так что Ψ_{ABCD} , Λ и $\Phi_{ABC'D'}$ принадлежат соответственно к неприводимым представлениям $D(2, 0)$, $D(0, 0)$ и $D(1, 1)$ локальной группы Лоренца.

На тензорном языке выразить разложение R_{abcd} на неприводимые части оказывается несколько сложнее. Можно определить *тензор Вейля* (тензор конформной кривизны) как

$$C_{abcd} = \Psi_{ABCD}\varepsilon_{A'B'}\varepsilon_{C'D'} + \varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\bar{\Psi}_{A'B'C'D'}. \quad (6.22)$$

В чисто тензорных обозначениях это записывается как

$$C^{ab}{}_{cd} = R^{ab}{}_{cd} - 2R^{[a}{}_{[c}\delta_{d]}^{b]} + \frac{1}{3}R\delta_{[a}\delta_{b]}^c{}^d; \quad (6.23)$$

$$R_{ab} = R^x{}_{axb}; \quad R = R^x{}_x. \quad (6.24)$$

Тогда, наряду с обычными свойствами симметрии тензора Римана (6.20), тензор Вейля обладает еще дополнительным свойством

$$C^x{}_{bxd} = 0, \quad (6.25)$$

Тензор C_{abcd} еще не является неприводимым (если допустить рассмотрение комплексных тензоров) и распадается далее на так называемые самодуальную и антисамодуальную части:

$$C_{abcd} = C_{abcd}^+ + C_{abcd}^-,$$

где $C_{abcd}^+ = \Psi_{ABCD} \epsilon_{A'B'} \epsilon_{C'D'}$. (Термин «самодуальный» означает здесь, что $\frac{1}{2} C_{abxy} i e_{cd}^{xy} = C_{abcd}^+$, причем $-e_{abcb}$ — полностью антисимметричный символ Леви-Чивиты в правом ортонормированном базисе; на языке спиноров $e_{abcd} = i e_{AC} e_{BD} e_{A'D'} e_{B'C'} - i e_{AD} e_{BC} e_{A'C'} e_{B'D'}$. Остальные неприводимые части R_{abcd} суть

$$R_{ab} - \frac{1}{4} R g_{ab} = -2\Phi_{ABA'B'} \quad (6.26)$$

и

$$R = 24\Lambda. \quad (6.27)$$

Чтобы проверить совпадение определения (6.8) тензора Римана с его обычным определением, можно вывести тождества Риччи. Возьмем, например, ξ^a_b :

$$2\nabla_{[a} \nabla_{b]} \xi^c_d = 2\nabla_{[a} \nabla_{b]} (\xi^c_d \delta^b_a) = \xi^c_x R^x_{dab} - \xi^x_d R^c_{xab}. \quad (6.28)$$

Это видно из (6.13) и из свойства $R^a_{bcd} = -2\delta^a_b \nabla_{[c} \nabla_{d]} \delta^a$, следующего также из применения (6.13) к (6.8). В точности по тому же рецепту получим и соответствующие спинорные тождества Риччи, взяв, например,

$$\begin{aligned} \square_{A'B'} \theta_C^{D'} &= \square_{A'B'} (\theta_{\alpha}^{D'} e_{\beta}^{D'} e_C^{\alpha}) = \\ &= \theta_C^{X'} (\bar{\Psi}^{D'}_{X'A'B'} - 2\Lambda e_{X'(A} e_{B')}^{D'}) - \theta_{X'}^{D'} \Phi^X_{CA'B'}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Можно также непосредственно получить выражение для компонент R_{abcb} через Γ^a_{bc} , используя (6.1) в (6.8) при учете (3.20). Это дает формулы, выражающие тензор Римана обычным образом как через символы Кристоффеля, так и через коэффициенты вращения Риччи. Несколько менее привычны аналогичные выражения, связывающие спиновые коэффициенты и спинорные компоненты кривизны. Мы приведем их здесь

в явном виде, так как они нам дважды понадобятся в дальнейшем. Воспользуемся соотношением (6.18), так как в нем фигурируют сразу все компоненты кривизны. Получим [64]

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\xi^{\alpha}} \gamma_{\alpha\beta\gamma} - \nabla_{\xi^{\beta}} \gamma_{\alpha\gamma\xi} = & \\
 = e^{\beta\alpha} \{ & \gamma_{\alpha\beta\xi} \gamma_{\alpha\gamma\xi} + \gamma_{\alpha\beta\xi} \gamma_{\alpha\gamma\xi} - \\
 - \gamma_{\alpha\beta\xi} \gamma_{\alpha\gamma\xi} - & \gamma_{\alpha\beta\xi} \gamma_{\alpha\gamma\xi} \} + \\
 + e^{\eta'\xi'} \{ & \gamma_{\alpha\beta\xi} \gamma_{\xi'\gamma\eta} - \gamma_{\alpha\beta\xi} \gamma_{\xi'\gamma\eta} \} + \\
 + \Psi_{\alpha\beta\xi} e_{\xi'} + & \Lambda e_{\xi'} (e_{\alpha} e_{\beta} + e_{\alpha} e_{\beta}) + \\
 + \Phi_{\alpha\beta\xi} e_{\xi}. & \tag{6.30}
 \end{aligned}$$

Уместно также записать здесь коммутатор для двух «внутренних производных»:

$$\begin{aligned}
 \{\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} - \nabla_{\beta} \nabla_{\alpha}\} \phi = & \\
 = \{e^{\beta\alpha} (\gamma_{\alpha\beta\xi} \nabla_{\xi} - & \gamma_{\alpha\beta\xi} \nabla_{\xi}) + \\
 + e^{\eta'\xi'} (\gamma_{\alpha\beta\xi} \nabla_{\xi'} - & \gamma_{\alpha\beta\xi} \nabla_{\xi'})\} \phi. \tag{6.31}
 \end{aligned}$$

7.

Уравнения Эйнштейна и фокусирование

Разложение (6.19) тензора Римана на его неприводимые спинорные части позволяет нам детальнее обсудить структуру кривизны пространства-времени, которая определяется уравнениями поля Эйнштейна. Уравнения Эйнштейна суть

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \lambda g_{ab} = -2K T_{ab}, \quad (7.1)$$

где λ и K — действительные постоянные, причем $K > 0$, а T_{ab} — локальный тензор натяжений-энергии-импульса материи («тензор энергии»). Здесь термин «материя» относится к любому полю за исключением гравитационного. В этом смысле, например, свободное электромагнитное поле считается «материей». Вопрос о том, какая энергия должна быть приписана *собственно* гравитационному полю, является более тонким. Он будет обсужден несколько позднее. Гравитационная энергия не может быть адекватно определена *локальным* образом; наоборот, она проявляется как своего рода нелокальная величина. Локальную гравитационную энергию надо, очевидно, представлять себе равной нулю, что согласуется с уравнениями (7.1). Космологический член λg_{ab} обычно отбрасывают, так как нет теоретических или наблюдательных доводов, заставляющих верить в его существование. Во всяком случае λ должно быть чрезвычайно мало, порядка единицы, деленной на квадрат радиуса вселенной¹⁾.

¹⁾ Под радиусом вселенной автор подразумевает величину, равную произведению скорости света на время, протекшее с начала расширения вселенной. Это величина порядка 10^{28} см. — *Прим. ред.*

Уравнения (7.1) ничего не говорят о кривизне пространства, так как тензор T_{ab} не связан еще никакими ограничениями. Но мы можем рассматривать (7.1) для трех различных ситуаций. Во-первых, мы можем интересоваться теорией свободного гравитационного поля, для которого $T_{ab} = 0$. Тогда уравнения (7.1), записанные в координатной системе x^a , становятся хорошо определенной системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных для функций g_{ab} . Эти уравнения трудно решить точно, и известно очень мало решений, имеющих непосредственное физическое истолкование. (Некоторые из них будут приведены в последующих разделах.) С другой стороны, можно сделать некоторые общие утверждения о поведении решений, в частности, об их асимптотическом поведении, если наложены подходящие граничные условия.

Во-вторых, нас могут интересовать решения уравнений (7.1), для которых T_{ab} хотя и не равно нулю, но подчинено некоторым условиям («уравнениям состояния»), которые обычно выражаются дифференциальными уравнениями в частных производных, но относятся теперь к полевым переменным, входящим в T_{ab} . (Например, в случае уравнений Эйнштейна — Максвелла в качестве T_{ab} выбирают тензор энергии свободного электромагнитного поля, который подчинен ковариантным уравнениям Максвелла без источников.) Опять-таки, в общем случае уравнения практически невозможно решить в точном виде для уравнений состояния, имеющих физический смысл.

В-третьих, мы можем довольствоваться некоторыми общими утверждениями о решениях уравнений (7.1), в которых мы просто ограничили T_{ab} неравенствами. Например, такое неравенство может устанавливать положительность локальной плотности энергии или удовлетворять некоторым другим физически разумным требованиям. Такой подход наиболее удобен во многих отношениях; поэтому последние два раздела будут посвящены главным образом рассмотрению пространств-времен (миров. — *Перев.*) при таких условиях.

Наконец, можно отметить, что один из подходов к уравнениям (7.1), который, строго говоря, является *безосновательным*, состоит в том, чтобы рассматривать T_{ab} как некоторое *заданное* распределение источников, для которого мы пытаемся построить гравитационное поле. Такой подход часто применяется в других областях физики, но здесь, *до тех пор*, пока не определена метрика g_{ab} , даже не ясно, что *подразумевать* под заданным распределением источников.

Если разложить R_{abcd} на его спинорные части и использовать (6.26) и (6.27), то мы получим

$$KT_{ab} = \Phi_{ABA'B'} + \left(3\Lambda - \frac{1}{2}\lambda\right)\epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'}, \quad (7.2)$$

так что Φ_{ab} представляет собой бесследовую часть T_{ab} , а Λ — его след:

$$\Phi_{ab} = K\left(T_{ab} - \frac{1}{4}T_x^x g_{ab}\right), \quad \Lambda = \frac{1}{12}(KT_x^x + 2\lambda). \quad (7.3)$$

Та часть R_{abcd} , которая (локально) совершенно не зависит от T_{ab} , есть тензор Вейля C_{abcd} или, что эквивалентно, спинор Ψ_{ABCD} . Таким образом, мы можем говорить о Ψ_{ABCD} как о *свободной гравитационной части кривизны*. Области, где нет материи, все-таки могут иметь кривизну. Эта кривизна, согласно уравнениям Эйнштейна, будет определенного рода, и ее структура полностью определяется совершенно симметричным спинором Ψ_{ABCD} . Если $T_{ab} = 0$ и $\lambda = 0$, то получим $R_{abcd} = C_{abcd}$, где C_{abcd} определяется по (6.22). Исследуем природу Ψ_{ABCD} . Для этой цели особенно хорошо подходят спинорные методы, в то время как аналогичное исследование тензора Вейля C_{abcd} было бы значительно менее наглядным.

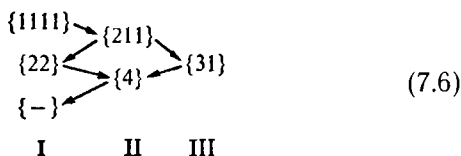
Рассмотрим форму $\Psi_{\alpha\beta\gamma\delta}\xi^\alpha\xi^\beta\xi^\gamma\xi^\delta$, где для простоты мы выбираем $\xi^0 = 1$, $\xi^1 = z$. Это полином 4-й степени по z с комплексными коэффициентами, и потому он факторизуется на четыре линейных множителя:

$$\Psi_{\alpha\beta\gamma\delta}\xi^\alpha\xi^\beta\xi^\gamma\xi^\delta = (\alpha_{\mu}\xi^\mu)(\beta_{\nu}\xi^\nu)(\gamma_{\sigma}\xi^\sigma)(\delta_{\tau}\xi^\tau). \quad (7.4)$$

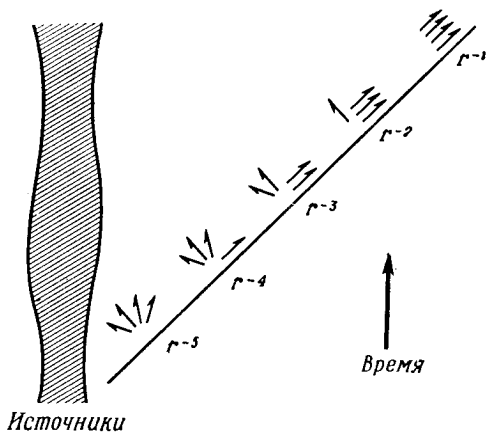
Сравнивая коэффициенты и исключая базис [ср. с (3.21)], мы получим

$$\Psi_{ABCD} = \alpha_A \beta_B \gamma_C \delta_D. \quad (7.5)$$

Факторизация однозначна с точностью до комплексного множителя в каждом из $\alpha_A, \dots, \delta_D$. Таким образом, световые направления, задаваемые каждым из $\alpha_A, \dots, \delta_D$, определяются однозначно, и мы видим, что Ψ_{ABCD} представляет неупорядоченное множество четырех (возможно, совпадающих) направлений вдоль светового конуса в каждой точке P на M (в которой $\Psi_{ABCD} \neq 0$). Эти направления называются *главными гравитационными световыми направлениями* в P [23, 72, 91]. Схема совпадений для главных световых направлений в P может быть представлена в следующем виде:



где стрелки указывают направление увеличивающегося вырождения. Здесь $\{1111\}$ представляет общий случай, когда световые направления различны; $\{211\}$ — случай, когда есть одно сдвоенное световое направление и два единичных несовпадающих, и т. д. Символ $\{-\}$ означает случай $\Psi_{ABCD} = 0$ в P ; римские цифры I, II, III, относящиеся к столбикам в (7.6), это типы Петрова, которые представляют собой более прямую классификацию [80b, 81] величин C_{abcd} в соответствии с размерностью пространства, натянутого на собственные векторы матрицы C^{ab}_{cd} (индексы a, b и c, d попарно собираются вместе). Случай $\{4\}$, в котором все главные световые направления совпадают, называют *световым*; случай $\{22\}$ называют *вырожденным*; все случаи, за исключением $\{1111\}$, называются алгебраически специальными. Используя тензор C_{abcd} , мы можем написать необходимое и достаточное условие [23, 93] того, чтобы



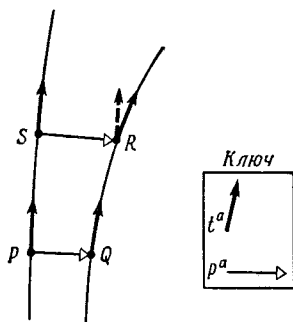
Р и с. 9. Свойство Сакса — свойство последовательного вырождения.

световой вектор l^a указывал главное световое направление:

$$l_{[a} C_{b] cd} l_{[e} l_{f]} l^c l^d = 0. \quad (7.7)$$

Классификационная схема (7.6) играет существенную роль для понимания геометрической структуры гравитационных полей. По-видимому, физический смысл главных световых направлений проявляется наиболее ясно в свойстве Сакса — свойстве последовательного вырождения (peeling-off) [64, 76, 93—95]. Оно гласит, что для асимптотически плоского пространства-времени, пустого на бесконечности (см. определение в разд. 8), вдоль любой световой геодезической тензор кривизны обнаруживает определенное характерное асимптотическое поведение. Пусть r — аффинный параметр на γ . Тогда кривизна уменьшается вдоль γ таким образом, что с точностью до величин порядка r^{-1} тензор кривизны является «световым», причем счетверенное главное световое направление указывает вдоль γ ; для величин порядка r^{-2} имеется строенное главное световое направление вдоль γ ; для величин порядка r^{-3} — двоянное; для величин порядка r^{-4} — единичное, а для величин по-

Рис. 10. Относительное ускорение соседних геодезических при наличии кривизны.



рядка r^{-5} кривизна не связана с γ (рис. 9). Это общее положение, но возможны также и более специальные случаи. В разд. 8 приведена схема доказательства этого результата.

Разложение (6.19) было сделано чисто алгебраически. Можно спросить, существует ли более непосредственный геометрический (или «физический») способ разделения эффектов, вызываемых тензором Вейля и другими частями кривизны, а также каков физический смысл главных световых направлений? Наиболее прямое физическое проявление кривизны пространства-времени обнаруживается в «приливных силах» — следствие эффекта геодезического отклонения на временноподобных геодезических [82, стр. 266]. Соответствующее уравнение может быть записано так:

$$D^2 p^a - R^a{}_{bcd} t^b p^c t^d = 0, \quad (7.8)$$

где t^a — касательный вектор к конгруэнции временноподобных геодезических, гладко параметризованный в соответствии с собственным временем s , скажем, $t^a t_a = 1$. Вектор p^a связывает точки с одинаковым значением s на двух соседних геодезических (рис. 10). Оператор D обозначает ковариантное дифференцирование в направлении t^a , т. е.

$$D \equiv t^a \nabla_a. \quad (7.9)$$

Уравнение (7.8) известно математикам как *уравнение Якоби*. [В действительности (7.8) выполняется при более общих условиях, чем приведенные, а именно требуется только, чтобы параметр s был аффинным на

каждой геодезической.] Если мы выберем p^a ортогональным к t^a (что можно сделать), то $D^2 p^a$ измеряет *относительное ускорение* соседних инерциальных пробных частиц. [Простой «интуитивный вывод» (7.8), когда две соседние геодезические первоначально параллельны, можно получить просто путем переноса вектора t^a вдоль контура $RQPSR$ на рис. 10. Изменение t^a дает нам изменение относительной скорости соседних частиц.]

Уравнение (7.8), примененное к временноподобным геодезическим, не позволяет нам разделить как-нибудь простым способом эффекты, вызванные разными неприводимыми частями тензора кривизны. Но если мы используем световые геодезические, то эффекты тензора Вейля и (бесследового) тензора Риччи становятся резко разделенными [83, 102]. Так как случай световых геодезических имеет некоторые специфические свойства, подходящие для спинорной трактовки, я приведу независимый спинорный вывод необходимых уравнений, вместо того чтобы пытаться вывести их из (7.8). Это дает нам также интерпретацию некоторых спиновых коэффициентов, которая будет полезна в дальнейшем.

Выберем спиновую систему отсчета ε_{α}^A и положим

$$\varepsilon_0^A = o^A, \quad \varepsilon_1^A = \iota^A. \quad (7.10)$$

Из условия нормировки (4.27) получим

$$o_A \iota^A = 1. \quad (7.11)$$

Попытаемся дать интерпретацию следующим спиновым коэффициентам [ср. (6.2)]:

$$\kappa = \gamma_{0000}', \quad \rho = \gamma_{0010}', \quad \sigma = \gamma_{0001}'. \quad (7.12)$$

Имеются все формы $o^A \nabla_{\mathbb{C}\mathbb{D}'} o_A$, где \mathbb{C} , \mathbb{D}' равны соответственно 0, 0'; 1, 0'; 0, 1'. При

$$o^A \rightarrow \xi o^A, \quad \iota^A \rightarrow \xi^{-1} \iota^A \quad (7.13)$$

мы имеем

$$\kappa \rightarrow \xi^3 \bar{\xi} \kappa, \quad \rho \rightarrow \xi \bar{\xi} \rho, \quad \sigma \rightarrow \xi^3 \bar{\xi}^{-1} \sigma, \quad (7.14)$$

а члены с производными пропадают в силу $o^A o_A = 0$. Теперь выясним смысл условия $\kappa = 0$:

$$o^A o^B \bar{o}^C \nabla_{BC} o_A = 0. \quad (7.15)$$

Это условие имеет вид $o^A \theta_A = 0$, откуда можно получить, что $\theta_A = \chi o_A$ для некоторого χ . Таким образом, $\kappa = 0$ означает

$$o^B \bar{o}^C \nabla_{BC} o_A = \chi o_A. \quad (7.16)$$

Полагая

$$l^a = o^A \bar{o}^{A'}, \quad m^a = o^A \iota^{A'}, \quad (7.17)$$

перепишем (7.16) как $l^a \nabla_a o_A = \chi o_A$. Это равенство означает, что o_A переносится параллельно самому себе в l^a -направлении (т. е. в o^A -направлении). Другими словами, условие $\kappa = 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы o^A -направления были касательными к *световым геодезическим*. Следовательно, κ есть своего рода мера *кривизны* o^A -кривых. (Она является комплексной, так что указывает также *направление* этой кривизны относительно флаговой площадки o^A .)

Теперь предположим, что $\kappa = 0$, так что мы имеем конгруэнцию световых геодезических o^A -кривых, и прочтем (7.15) двумя различными способами, а именно как $o^B \phi_B = 0$ и как $\bar{o}^{C'} \psi_{C'} = 0$. По аналогии с тем, что было выше, имеем соотношения следующей формы:

$$o^A \bar{o}^{C'} \nabla_{BC} o_A = \rho o_B, \quad (7.18)$$

$$o^A o^B \nabla_{BC} o_A = \sigma \bar{o}_{C'} \quad (7.19)$$

для некоторых ρ, σ . В действительности ρ и σ суть величины, введенные в (7.12), что следует из умножения (7.18) на ι^B и (7.19) на $\iota^{C'}$. Значение (7.18) и (7.19) состоит в том, что они показывают, что при $\kappa = 0$ величины ρ и σ не зависят от ι^A . А поскольку они просто изменяют масштаб согласно (7.14), если для o^A справедливо (7.13), то следует ожидать простого геометрического смысла для ρ и σ как некоторого свойства конгруэнции световых геодезических. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим элемент π двумерной плоскости в некоторой точке P на одной из

геодезических γ . Выберем π пространственноподобным и ортогональным к направлению γ . Мы можем также выбрать l^A ортогональным к π , так что π будет натянуто на m^a и \bar{m}^a , где m^a определяется по (7.17). Тогда любой (действительный) вектор, лежащий в π , имеет форму

$$\bar{z}m^a + zm^a, \quad (7.20)$$

и, следовательно, мы можем рассматривать π как аргандову плоскость $\sqrt{2}z$. В окрестности γ двумерное множество световых геодезических «протыкает» π . Эти геодезические, с точностью до величин первого порядка, лежат на световой гиперповерхности, проходящей через γ . Есть, разумеется, и другие световые геодезические в окрестности γ , но мы их не рассматриваем. Посмотрим, как изменяется z , если мы будем следить за одной из световых геодезических, протыкающих π . (Отметим, что z в точке P для определенной световой геодезической из конгруэнции вблизи γ не зависит от выбора π в P . Изменение π в точке P сводится просто к замене m^a на $m^a + kl^a$ в (7.20) с комплексным k .)

Положим

$$D \equiv l^a \nabla_a = \nabla_{00'}. \quad (7.21)$$

Для удобства будем считать, что o^A , l^A параллельно переносятся вдоль γ :

$$D o_A = 0; \quad D l_A = 0. \quad (7.22)$$

Тогда m^a , \bar{m}^a и, следовательно, π также переносятся параллельно вдоль γ . Пусть ϕ — некоторая функция, постоянная вдоль световых геодезических

$$D\phi = 0. \quad (7.23)$$

Требование неизменности значения z , выделяющего определенную геодезическую γ нашей системы, мы характеризуем условием [см. (7.20)]

$$D \{(\bar{z}m^a + zm^a) \nabla_a \phi\} = 0. \quad (7.24)$$

Это дает

$$D\bar{z}\nabla_{01'}\phi + Dz\nabla_{10'}\phi + \bar{z}(\nabla_{00'}\nabla_{01'} - \nabla_{01'}\nabla_{00'})\phi + z(\nabla_{00'}\nabla_{10'} - \nabla_{10'}\nabla_{00'})\phi = 0, \quad (7.25)$$

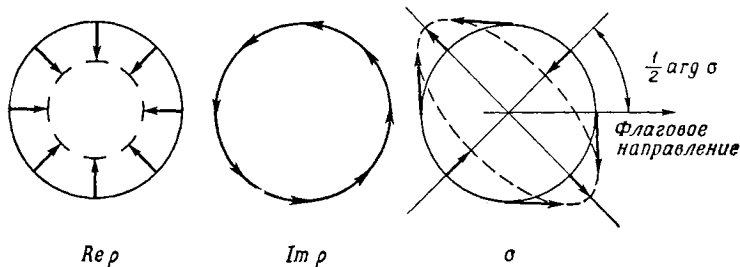


Рис. 11. Интерпретация ρ и σ в терминах их влияния на первоначально круглый пучок световых лучей.

т. е., используя (6.31) (или непосредственно вычисляя эти коммутаторы), получим:

$$(D\bar{z} + \bar{\rho}\bar{z} + \bar{\sigma}\bar{z})\nabla_{01'}\phi + (Dz + \rho z + \sigma\bar{z})\nabla_{01'}\phi = 0. \quad (7.26)$$

Таким образом

$$Dz = -\rho z - \sigma\bar{z}. \quad (7.27)$$

Теперь интерпретация ρ и σ становится очевидной. Действительная часть ρ измеряет сходимости световых геодезических, а мнимая часть ρ измеряет их вращение вокруг γ . Тот факт, что σ не обращается в нуль, указывает на присутствие дисторсии, или сдвига (рис. 11). Таким образом, если $\sigma \neq 0$, то малый круг превратится в эллипс по мере продвижения вдоль световых геодезических. Ориентация осей этого эллипса относительно флаговой плоскости o^A определяется как $\frac{1}{2} \arg \sigma$. Если световые геодезические являются образующими световых гиперповерхностей, то мы можем выбрать $l_a = \nabla_a u$, откуда следует, что

$$o^A \bar{o}^{B'} (\nabla_a l_b - \nabla_b l_a) = 0,$$

т. е. вращение отсутствует:

$$\rho = \bar{\rho}. \quad (7.28)$$

Условие (7.28) является также достаточным для того, чтобы световые геодезические образовывали световые гиперповерхности. Если (7.28) выполняется,

то ρ и σ относятся к геометрии каждой световой гиперповерхности в отдельности, а не к связи между различными световыми гиперповерхностями.

Рассмотрим далее D -производные от ρ и σ . Мы можем получить их из (6.30) [используя (7.22): $\gamma_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$] или непосредственно из определения ρ , σ , $\Phi_{ABC'D'}$ и Ψ_{ABCD} . Тогда

$$D\rho = \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} + \Phi, \quad (7.29)$$

$$D\sigma = \sigma(\rho + \bar{\rho}) + \Psi, \quad (7.30)$$

где

$$\Psi = \Psi_{0000}, \quad \Phi = \Phi_{000'0'}. \quad (7.31)$$

Уравнения (7.29) и (7.30) есть *уравнения Сакса* [93] для «оптических скаляров» ρ , σ . Комбинируя их с (7.27), получим

$$D^2z = -\Phi z - \Psi \bar{z}. \quad (7.32)$$

Фактически (7.32) можно получить также непосредственно из (7.8), если мы положим $t^a = l^a$ и $\rho^a = \bar{z}m^a + z\bar{m}^a$. В этой связи приведем формулы:

$$\begin{aligned} \Psi &= R_{abcd}l^am^bl^cm^d, & \Phi &= R_{abcd}l^am^bl^c\bar{m}^d, \\ \rho &= m^am^b\nabla_b l_a, & \sigma &= m^am^b\nabla_b l_a. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Из (7.29) и (7.30) видно, что изменения в ρ и σ определяются главным образом величинами Φ и Ψ соответственно, но в обоих случаях есть дополнительные нелинейные члены. Чтобы выделить эффекты, связанные с Φ и Ψ , в наиболее чистом виде, рассмотрим частный случай, в котором Φ и Ψ локализованы в очень малой области на γ . [Фактически возможен также идеализированный случай, когда Φ и Ψ являются дельта-функциями Дирака. См. пример с плоскими волнами (9.23)–(9.26).]

Предположим, что имеется импульс света, представляющий собой первоначально пучок параллельных лучей. Световые геодезические, образующие пучок, составляют небольшую часть (окрестность γ) световой гиперповерхности, проходящей через γ , и для них $\rho = \sigma = 0$. Тогда из (7.29) мы видим, что часть кривизны Φ (при $\Psi = 0$) действует как *линза*

без астигматизма (поскольку в пучок вносится сходимости ρ , но сдвиг σ остается нулевым). В то же время часть кривизны Ψ (при $\Phi = 0$) действует как *чисто астигматическая линза*, т. е. в одну плоскость вносится точно такая же положительная сходимости, какая отрицательная сходимости вносится в плоскость, перпендикулярную к первой (поскольку для результирующего пучка $\rho = 0$, а $\sigma \neq 0$). Интерпретация частей кривизны на языке линз остается в силе и для произвольного пучка, в котором ρ и σ не обязательно равны нулю вначале. Нелинейные члены в (7.29) и (7.30) также в точности соответствуют эффектам, которые производятся разделенными линзами [78]. Таким образом мы можем представлять себе действие кривизны пространства-времени на пучок света аналогичным эффектам, производимым серией линз, расположенных вдоль пучка. Степень сходимости описывается локально величиной Φ , а астигматизм — величиной Ψ . Вследствие симметрии (6.21) компоненты (7.31) дают *всю* информацию, содержащуюся в Ψ_{ABCD} и $\Phi_{ABC'D'}$ при изменении γ .

Одно важное свойство кривизны состоит в том, что всегда имеется *положительное* фокусирование вдоль любой световой геодезической, если мы предполагаем, что локальная плотность энергии положительна. Плотность энергии, измеренная наблюдателем, мировая линия которого имеет касательный вектор t^a , равна

$$T_{ab}t^at^b, \quad (7.34)$$

если еще предположить, что $t^at_a = 1$. Если мы требуем, чтобы (7.34) было неотрицательно, то $T_{ab}t^at^b \geq 0$ для любого временноподобного вектора t^a (безотносительно к условию нормировки на t^a). Таким образом, если мы возьмем предел вектора t^a при его стремлении к световому вектору l^a , мы получим [согласно (7.3)]

$$\Phi = KT_{ab}l^al^b \geq 0 \quad (7.35)$$

(неважно, равно λ нулю или нет, поскольку $g_{ab}l^al^b = 0$). Отсюда следует, что в отсутствие Ψ кривизна

Φ действует вдоль пучка как серия положительных (собирающих) линз. Присутствие Ψ проявляется в уравнении (7.29) посредством члена $\sigma\bar{\sigma}$, который опять-таки действует как положительная линза. Грубо говоря, мы можем считать σ интегралом от Ψ вдоль γ . Таким образом, Ψ действует *нелокально*, способствуя фокусировке вдоль γ . Своим суммарным эффектом осциллирующее Ψ сильно напоминает Φ . Это тесно связано с вопросом о гравитационной энергии. Хотя локально гравитационное поле не дает вклада в плотность энергии, но гравитационная волна переносит нелокальную энергию, причем полная энергия, переносимая волной, всегда *положительна*. (Поразительным примером того, как гравитационная «рябь» создает эффективную положительную энергию, является гравитационный «геон» — теоретическая конструкция Уилера [112]. Он представляет собой область пустого пространства, состоящую из «ряби», которая остается ограниченной длительное время. На достаточно большом расстоянии геон проявляется как «частица» с положительной массой.)

Рассмотрим положительный фокусирующий эффект несколько подробнее. Если в элементарной площадке π мы выберем малый треугольник с вершинами в точках $0, z_1, z_2$, то его площадь

$$a = \frac{i}{4} (z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1) \quad (7.36)$$

удовлетворяет уравнению [согласно (7.27)].

$$Da = -(\rho + \bar{\rho})a. \quad (7.37)$$

Так как наш пучок лучей выбран как часть световой гиперповерхности, то $\rho = \bar{\rho}$. Следовательно,

$$D(a^{1/2}) = -\rho a^{1/2}. \quad (7.38)$$

Из (7.29) получаем

$$D^2(a^{1/2}) = D(-\rho a^{1/2}) = -(\sigma\bar{\sigma} + \Phi)a^{1/2} \leq 0. \quad (7.39)$$

Таким образом, если $\rho > 0$ в некоторой точке γ , то по (7.38) $a^{1/2}$ уменьшается. Из (7.39) следует, что $a^{1/2}$

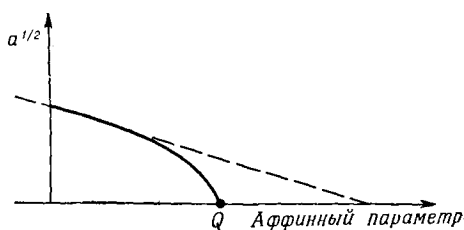


Рис. 12. Как только площадь поперечного сечения пучка световых лучей начинает убывать, она неизбежно падает до нуля.

уменьшается до нуля¹⁾ (рис. 12). Таким образом, пучок неизбежно достигает фокальной точки Q . (В общем случае фокальная точка будет астигматической, т. е. пучок собирается в линию, а не в точку.) Отметим, что ρ становится неограниченным вблизи Q , так как $\rho = -\frac{1}{2} D(\ln a)$ согласно (7.38).

Такое поведение является предельным случаем эффекта Райчаудури [49, 86], который относится к конгруэнции временноподобных геодезических, ортогональных к гиперповерхности. Пусть t^a — касательный вектор к геодезическим данной конгруэнции, параметризованный в соответствии с собственным временем s (так что $t^a t_a = 1$, а t^a направлено в будущее) и ортогональный к пространственноподобной гиперповерхности $s = 0$. Определим дивергенцию геодезических как

$$\theta = \nabla_a t^a. \quad (7.40)$$

¹⁾ Это свойство имеет одно простое применение, которое, видимо, не отмечалось прежде, а именно: может ли сферически-симметричное тело в асимптотически плоском пространстве-времени не иметь центра (см. [9, стр. 436]). Если мы рассмотрим световые лучи (световые геодезические), сходящиеся внутрь сферы, расположенной симметрично вокруг тела на некотором расстоянии от него, то мы видим, что лучи первоначально сходятся, так что $\rho > 0$. Они должны достичь (симметричной) фокальной точки [при условии, что выполняется (7.35)], и эта фокальная точка определяет центр (сравните со свойствами ловушечной поверхности, описанной в разд. 10).

Из тождества Риччи мы получим уравнение Райчаудури

$$D\theta = -\nabla_a t^b \nabla_b t^a + R_{ab} t^a t^b, \quad (7.41)$$

где $D = t^a \nabla_a$, как в (7.9).

Из условия ортогональности к гиперповерхности получим $\nabla_a t_b = \nabla_b t_a$, а из неравенства Шварца в 3-мерном пространстве, ортогональном к t^a , имеем

$$\nabla_a t^b \nabla_b t^a = \nabla_a t_b \nabla^a t^b \geq \frac{1}{3} \theta^2 \quad (7.42)$$

[из условия геодезичности $t^a \nabla_a t_b = 0$ и $t^a \nabla_b t_a = \frac{1}{2} \nabla_b (t^a t_a) = 0$]. Таким образом,

$$D\theta \leq -\frac{1}{3} \theta^2 + R_{ab} t^a t^b. \quad (7.43)$$

Пусть V — элемент 3-мерного объема, ортогональный к t^a . Тогда по (7.40)

$$DV = \theta V \quad (7.44)$$

и

$$D(V^{1/3}) = \frac{1}{3} \theta V^{1/3}. \quad (7.45)$$

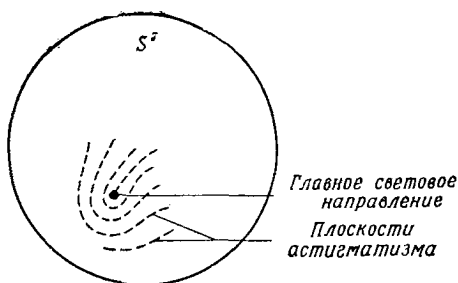
Теперь (7.43) дает

$$D^2(V^{1/3}) = \frac{1}{3} D(\theta V^{1/3}) \leq \frac{1}{3} V^{1/3} R_{ab} t^a t^b \leq 0, \quad (7.46)$$

если выполняется энергетическое условие [ср. с (7.1)]

$$T_{ab} t^a t^b \geq \frac{\lambda}{2K} + T^c_c. \quad (7.47)$$

[При $\lambda = 0$ неравенство (7.47) выполняется, если в «собственной тетраде» тензора T_{ab} плотность энергии не меньше каждого из главных давлений, взятых с отрицательным знаком, и не меньше суммы главных давлений с отрицательным знаком. Это справедливо для всех видов обычной материи.] С этого места доказательство проводится так же, как и прежде, с заменой (7.38) на (7.45) и (7.39) на (7.46). Видно, что



Р и с. 13. Главное световое направление проявляется как сингулярность в поле направлений астигматизма на S^2 , представляющей все световые направления в точке P .

если в некоторой точке на одной из геодезических $\theta < 0$, то где-то в будущем на этой геодезической достигается фокальная точка ($V = 0$, $\theta \rightarrow -\infty$). Аналогично, фокальная точка ($V = 0$, $\theta \rightarrow +\infty$) достигается в прошлом на геодезической, если $\theta > 0$.

Здесь уместно сделать еще одно заключительное замечание относительно (7.30). Согласно (7.31),

$$\Psi = \Psi_{ABCD} o^A o^B o^C o^D, \quad (7.48)$$

так что, сравнивая (7.4) и (7.5), мы видим, что Ψ обращается в нуль, если o^A ориентировано вдоль *главного светового направления*. Таким образом, мы можем дать физическую интерпретацию главных световых направлений. Это те световые направления (в точке P), вдоль которых *нет астигматического фокусирования*. Поскольку астигматизм зависит от направления, путем топологического рассмотрения можно показать, что в точке P должно быть по крайней мере *четыре* световых направления, где астигматизм обращается в нуль. Рассмотрим сферу S^2 , представляющую собой световые направления в P , на которой мы введем линейный элемент, представляющий астигматизм для каждого светового направления в P . Главные световые направления соответствуют четырем точкам, в которых линейный элемент обращается

в нуль (рис. 13). Аргументация этого типа применима к полям других спинов (например, к полю спина 1, а именно к электромагнетизму, когда аналогичный линейный элемент является *ориентированным*, так что случай, представленный на рис. 13, не осуществляется, и мы получаем только два главных световых направления). Этот подход может быть также применен к *асимптотическим* полям, для которых S^2 будет на бесконечности, а не в точке P .

8.

Конформная бесконечность

Вопрос о смысле гравитационной энергии был кратко рассмотрен в предыдущем разделе. Полезность понятия энергии обусловлена, вообще говоря, фактом ее *сохранения*. Теория Эйнштейна содержит «локальный закон сохранения» для энергии, а именно

$$\nabla_a T^{ab} = 0, \quad (8.1)$$

который в силу уравнений поля (7.1) является двойной сверткой тождеств Бианки:

$$\nabla_{[a} R_{bc]de} = 0. \quad (8.2)$$

Однако (8.1) *не приводит к интегральному* закону сохранения обычного типа, т. е. к закону, утверждающему, что интеграл по границе компактного 4-мерного объема от «потока» некоторой величины через эту границу равен нулю.

Прототипом такого интегрального закона может служить закон сохранения электрического заряда. Если J^a обозначает вектор тока, то

$$\nabla_a J^a = 0. \quad (8.3)$$

Так как J^a является «вектором» или, точнее, элементом, «дуальным к 3-форме», то закон сохранения (8.3) подразумевает существование также интегрального закона указанного выше типа, где поток заряда через элемент поверхности dS_a равен $J^a dS_a$. Однако (8.1) имеет другой вид. Мы можем получить *приближенный* интегральный закон сохранения, если проинтегрируем (8.1) по границе некоторой области, размеры которой малы по сравнению с радиусами кривизны, входящими в R_{abcd} . Для этой цели можно ввести базисный репер δ_a^a , который приближенно будет

ковариантно постоянным во всей области, и записать (8.1) как $\nabla_a T^{ab} \approx 0$. Это равенство имеет вид (8.3), так что возникает приближенный интегральный закон сохранения энергии-импульса с потоком энергии-импульса $T^{ab} dS_a$.

Мы можем рассматривать кривизну пространства-времени как заданный (нелокальный) *гравитационный* вклад в энергию-импульс, который должен учитываться для получения точного интегрального закона сохранения. Этот подход может быть формализован различными способами (используя «псевдотензоры» и т. д.), однако еще нет метода, который позволил бы приписать в общем случае какую-нибудь осмысленную однозначность, скажем, потоку гравитационной энергии-импульсу или полной энергии-импульсу в области. Я думаю, что мы можем считать вопрос о гравитационной энергии одной из важных нерешенных проблем в общей теории относительности¹⁾.

Но имеем ли мы право надеяться на решение этой проблемы вообще? Не может ли оказаться, что энергия-импульс просто не являются вполне сохраняющимися величинами в общей теории относительности или, другими словами, понятие энергии-импульса не подходит для этой цели (кроме, как в локальном смысле)? Возможно, что это так и есть. Я не знаю. Однако, по-моему, очень существенным является тот факт, что разумное (т. е. «ковариантно» или «геометрически» определенное) понятие энергии-импульса

¹⁾ К настоящему времени этот вопрос можно считать в значительной степени выясненным. Его решение шло по пути, описанному далее автором. С одной стороны, Айзексон [120*] построил тензор энергии-импульса для пакетов гравитационных волн в общем случае искривленного пространства-времени. С другой стороны, Торн [121*], Берк [122*] и Чандрасекар и Эспозито [123*] прямыми расчетами показали, что торможение гравитационным излучением движений в излучающей системе в точности соответствует энергии, уносимой волнами и рассчитанной стандартными методами. Вычислено гравитационное излучение нейтронных звезд. Указано также, что по аналогии с электромагнитным случаем гравитационная волна характеризуется нелокальным инвариантом, имеющим смысл числа гравитонов в волновом пакете [124*]. — *Прим. ред.*

действительно существует для интересного подкласса миров, а именно для тех из них, которые являются *асимптотически плоскими*.

Изучение асимптотически плоских миров составляет важную часть общей теории относительности. Это происходит не потому, что вселенную считают почти асимптотически плоской, а потому, что в любой ситуации, в которой следует ожидать существенных общерелятивистских эффектов (за исключением случая изучения вселенной в целом), значения кривизны, входящие в локальный процесс, будут превосходить на много порядков значения сглаженной кривизны общего фона. (Например, если бы даже сколлапсировала целая галактика, размер результирующего объекта был бы меньше радиуса фоновой кривизны вселенной примерно в 10^{11} раз. См. обсуждение в гл. 10.) Таким образом, асимптотическая евклидовость (flatness) является превосходным приближением во многих случаях. Это — счастливое обстоятельство, так как только в асимптотически плоских случаях общая теория относительности начинает напоминать остальную физику. Теперь мы можем обсуждать вопрос об опережающих и запаздывающих волнах, гравитационных или негравитационных. Мы можем говорить об энергии, переносимой этими волнами, о проблемах рассеяния и, возможно, даже о квантовании. Я не буду здесь углубляться в детали. Я просто изложу математически строгую схему для обсуждения этих вопросов и укажу на некоторые ее применения.

Чтобы сформулировать основные принципы, рассмотрим с физической точки зрения вопрос о том, переносят ли энергию гравитационные волны, излученные изолированной системой, и если переносят, то является ли эта энергия с необходимостью положительной. (Существование гравитационных волн, излученных системой с переменной асимметрией, следует прежде всего из линейного приближения эйнштейновой теории.) Чтобы выяснить, какую энергию мы должны приписать волнам, измерим массу m_1 системы до излучения волны и массу m_2 — после излучения. Если сохранение энергии (т. е. массы) продолжает иметь

какой-либо смысл, потребуем, чтобы полная энергия, перенесенная волнами, была в точности равна $m_1 - m_2$ (предполагая, что отсутствуют приходящие волны, которые могли бы быть поглощены системой).

Но как мы должны измерять массу? Один способ состоит в интегрировании некоторого выражения для плотности массы по пространственноподобной гиперповерхности \mathcal{S} . Однако мы должны были бы принять во внимание «нелокальную плотность массы» гравитационного поля самого по себе, что усложняет дело. В качестве альтернативы мы могли бы измерять массу, исследуя поле *только* в окрестности *бесконечности* на \mathcal{S} , так как характер падения кривизны на больших расстояниях на \mathcal{S} должен определять полную массу. Вместо интеграла по 3-объему мы используем тогда просто интеграл по 2-поверхности, взятой на бесконечности. Любой из этих методов *может* быть использован для получения удовлетворительного определения. Но в обоих случаях пространственноподобная гиперповерхность \mathcal{S} должна быть продолжена до бесконечности, и мы сталкиваемся с трудностью при измерении массы $m_1 - m_2$, переносимой волнами. Мы могли бы наложить «естественное» требование, чтобы \mathcal{S} надлежащим образом стремилась к пространственноподобной гиперплоскости по мере того, как пространство-время приближается к плоскому на бесконечности. Это требование законно для гиперповерхности \mathcal{S}_1 , которая пересекает мировую линию источника до излучения и дает массу m_1 (рис. 14). Но в случае гиперповерхности \mathcal{S}_2 , которая пересекает источник *после* излучения, в результате измерения массы мы получим не m_2 , а опять-таки m_1 . Это происходит потому, что \mathcal{S}_2 пересекает все волны, и какую бы энергию они ни переносили, мы получаем $m_1 = m_2 + (m_1 - m_2)$.

Можно попытаться осуществить некоторый сложный процесс, позволяющий гиперповерхности двигаться «вверх» по времени с постепенным расширением области интегрирования до бесконечности, так, чтобы волны оставались вне этой области. Применим его ко второй из упомянутых возможностей для измерения массы. Тогда мы придем к рассмотрению интегралов

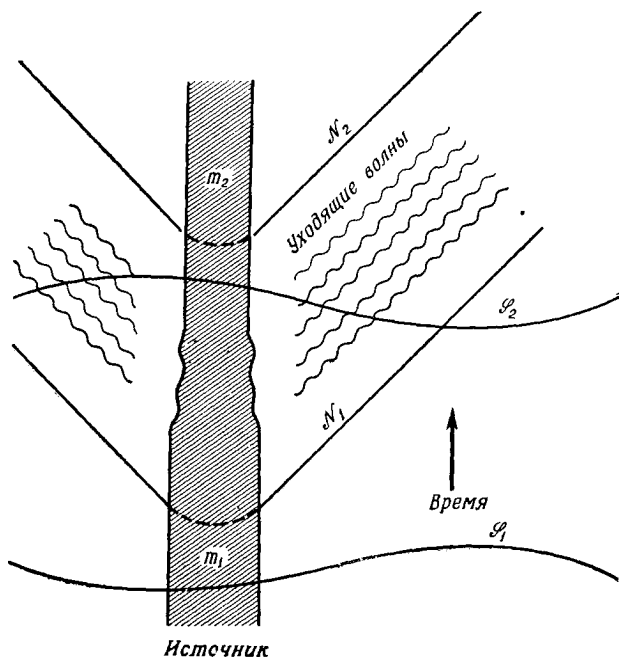


Рис. 14. Для измерения потери массы вследствие излучения \mathcal{N}_1 и \mathcal{N}_2 более удобны, чем \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 .

по 2-поверхности на бесконечности, но не в пространственноподобных, а в *световых* направлениях. Это предполагает использование световых (или, по крайней мере, асимптотически световых) гиперповерхностей \mathcal{N}_1 , \mathcal{N}_2 вместо \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 . При этом \mathcal{N}_1 полностью лежит вне конуса излучения, который, в свою очередь, полностью лежит вне \mathcal{N}_2 . Тогда интеграл по 2-поверхности на бесконечности \mathcal{N}_i можно использовать для измерения m_i (где $i = 1, 2$), а разность $m_1 - m_2$ дает массу волн.

Введя такое определение массы и показав, что разность $m_1 - m_2$ положительна в присутствии излучения, Бонди (с сотрудниками) [8, 11] и затем Сакс [95] существенно продвинулись в понимании гравитационной энергии. Их определение зависит от выбора

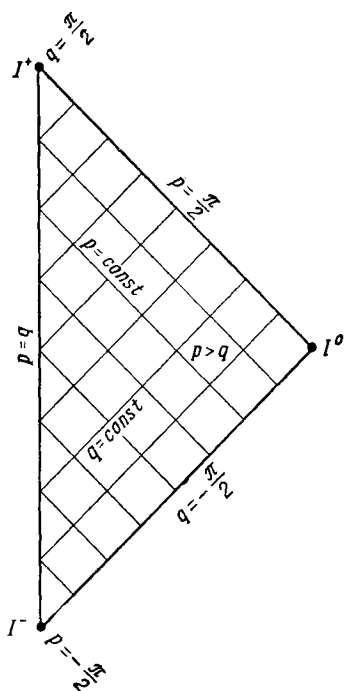


Рис. 15. Область изменения p и q . Чтобы построить \mathcal{M} , надо вращать рисунок вокруг $p = q$, так что каждая точка $p > q$ описывает S^2 (но I^0 должно оставаться фиксированным!).

специальной координатной системы, основанной на уходящих световых гиперповерхностях. Существование координатной системы требуемого типа взято в качестве определения необходимой степени асимптотической евклидовости. Я предлагаю дать другое определение асимптотической евклидовости, которое является более геометрическим, но по существу эквивалент-

но определению Бонди — Сакса. Идея состоит во введении *границы* пространства-времени \mathcal{M} , которая образована начальными и конечными точками каждой световой геодезической в \mathcal{M} . (Мы только что видели, что масса по Бонди — Саксу представляет собой интеграл по 2-поверхности «конечных точек» световых геодезических, а именно тех, которые образуют \mathcal{N}_i .) Чудесным образом оказывается, что асимптотическая евклидовость Бонди — Сакса находит свое выражение в существовании *гладкой конформной структуры* [74, 76] пространства-времени с границей. Имея на бесконечности такую хорошо определенную структуру, мы можем теперь выполнять вычисления, рассматривая бесконечность так, как если бы она была *локальной* структурой, что позволяет избежать неудобных асимптотических пределов.

Начнем с рассмотрения природы конформной бесконечности для пространства-времени Минковского \mathcal{M} . Выберем световые полярные координаты u, v, θ, φ , связанные с обычными координатами x^0, x^1, x^2, x^3 посредством

$$u = x^0 - r, \quad v = x^0 + r, \quad (8.4)$$

где $r = [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^{1/2}$ и

$$x^1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x^2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x^3 = r \cos \theta. \quad (8.5)$$

Тогда

$$ds^2 = du dv - \frac{1}{4}(u - v)^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad u \leq v. \quad (8.6)$$

Выберем новые координаты p, q , такие, что

$$v = \operatorname{tg} p, \quad u = \operatorname{tg} q \quad (-\pi/2 \leq q \leq p \leq \pi/2), \quad (8.7)$$

тогда точки на бесконечности имеют конечные значения координат p, q (рис. 15). Метрика (8.6) теряет смысл при этих значениях ($p = \pi/2$ или $q = -\pi/2$), но если мы перейдем к конформной метрике

$$d\hat{s} = \Omega ds, \quad (8.8)$$

где

$$\Omega = (1 + u^2)^{-1/2} (1 + v^2)^{-1/2}, \quad (8.9)$$

то (8.6) превращается в

$$d\hat{s}^2 = dp dq - \frac{1}{4} \sin^2(p - q)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (8.10)$$

Метрика (8.10) вполне регулярна при $p = \pi/2$ и $q = -\pi/2$ (за исключением $p = q$ или $p - q = \pi$, где имеются устранимые координатные сингулярности). Таким образом, мы имеем хорошо определенную конформную структуру на многообразии $(-\pi/2 \leq q \leq p \leq \pi/2)$ с границей¹⁾ ($q = -\pi/2$ или

¹⁾ Строго говоря, здесь нет многообразия с границей, поскольку граница обладает «углами». Они будут устранены в строгом определении, которое дано несколько ниже.

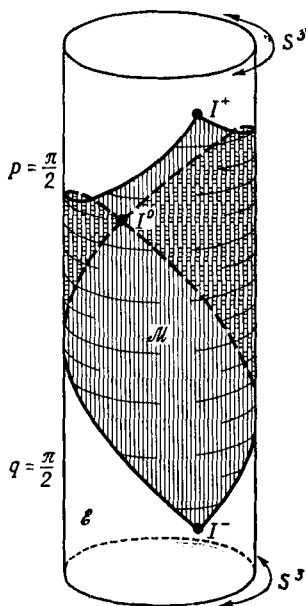
Есть также другой вариант компактного конформного мира Минковского, в котором отождествлены граничные гиперповерхности в будущем и в прошлом. Тогда имеет место компактное конформное многообразие с границей ($\approx S^1 \times S^3$) (см. [51, 92], а также [76, 79]).

$p = \pi/2$), внутренность которого ($-\pi/2 < q \leq p < \pi/2$) идентична по своей конформной структуре пространству-времени Минковского. Отметим, что $q = \text{const}$ и $p = \text{const}$ являются световыми гиперповерхностями (конусами) и образованы световыми геодезическими. Это же относится, в частности, и к граничным гиперповерхностям.

Метрика (8.10) является, по существу, метрикой статической вселенной Эйнштейна \mathcal{E} . Если полагать $p + q$ неограниченным, а $0 \leq p - q \leq \pi$ (с обычной областью изменения для сферических полярных координат θ, φ), то можно считать (8.10) уравнением «цилиндра» $\mathcal{E} \approx S^3 \times E^1$, если просто переписать (8.10) в форме $d\hat{s}^2 = dT^2 - d\Sigma^2$, где $d\Sigma^2$ — обычная метрика на 3-сфере. [Координатную сингулярность в (8.10) можно теперь покрыть, применяя к координатам p, q, θ, φ вращение в S^3 .] Часть \mathcal{E} , соответствующую \mathcal{M} , можно изобразить геометрически следующим образом (рис. 16). Выберем на \mathcal{E} точку I^- (это будет точка с координатами $p = q = -\pi/2$). Световые геодезические на \mathcal{E} , которые начинаются в I^- , образуют световой конус будущего для точки I^- . Эти геодезические собираются в первой фокальной точке, которая диаметрально противоположна (относительно S^3) точке I^- . Назовем ее I^0 (это будет точка $p = -q = \pi/2$).

Открытые отрезки световых геодезических от I^- до I^0 образуют гиперповерхность \mathcal{I}^- ($-\pi/2 < p < \pi/2, q = -\pi/2$), которая ограничена в прошлом точкой I^- , а в будущем — точкой I^0 . (\mathcal{I}^- имеет топологию $S^2 \times E^1$.) Гиперповерхность \mathcal{I}^- определяет световой конус прошлого для I^0 . Продолжим эти геодезические в будущее за точкой I^0 . Они достигнут второй фокальной точки I^+ ($p = q = \pi/2$), диаметрально противоположной I^0 (по отношению к S^3) и лежащей поэтому непосредственно «над» I^- в \mathcal{E} . Открытые сегменты световых геодезических от I^0 до I^+ образуют световую гиперповерхность \mathcal{I}^+ ($p = \pi/2, -\pi/2 < q < \pi/2$) опять-таки с топологией $S^2 \times E^1$, ограниченную в прошлом и будущем точками I^0 и I^+ соответственно. Часть \mathcal{E} , которая может быть отождествлена с \mathcal{M} (по конформной структуре), есть как раз множество точек \mathcal{E} , ле-

Рис. 16. Конформный мир Минковского как часть вселенной Эйнштейна.



жащих «между» \mathcal{I}^- и \mathcal{I}^+ (т.е. множество точек, которые лежат между I^- и I^+ на временноподобных кривых от I^- до I^+). Таким образом, \mathcal{M} является открытым подмножеством \mathcal{E} , и его граница есть

$$I^- \cup \mathcal{I}^- \cup I^0 \cup \mathcal{I}^+ \cup I^+.$$

Удобно изображать \mathcal{M} как внутренность двух соединенных по основаниям конусов (рис. 17). Тогда

разные части \mathcal{M} будут представлены частями этих ограниченных обрезанных конусов. Надо иметь в виду, однако, что эта картина не точна с точки зрения *конформности*. Наибольшее несоответствие имеет место вблизи I^0 , поскольку I^0 выглядит как экваториальная область, в то время как это должна быть точка. (Разумеется, мы должны также представлять себе картину четырехмерной.)

Точки I^- , I^0 , I^+ интерпретируются как «временная бесконечность прошлого», «пространственная бесконечность» и «временная бесконечность будущего». Гиперповерхности \mathcal{I}^- и \mathcal{I}^+ суть, соответственно, «световая бесконечность прошлого» и «световая бесконечность будущего». Происхождение таких названий становится очевидным, если мы исследуем прямые (согласно метрике Минковского ds) линии в \mathcal{M} . Временноподобная прямая линия становится кривой, соединяющей I^- и I^+ ; пространственноподобная линия становится замкнутой кривой, проходящей через I^0 ; световая линия

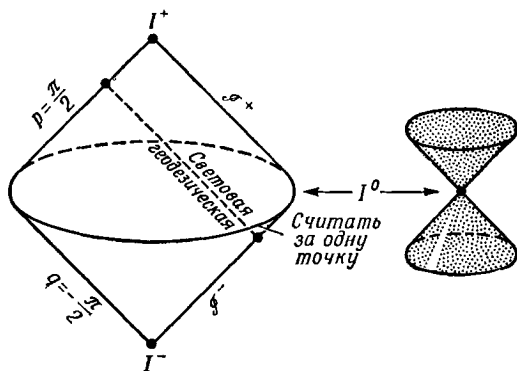


Рис. 17. Каждая световая геодезическая в \mathcal{M} достигает двух конечных точек в $\bar{\mathcal{M}}$; одна из них лежит на \mathcal{I}^- , другая — на \mathcal{I}^+ .

является световой геодезической, начинающейся на \mathcal{I}^- и заканчивающейся на \mathcal{I}^+ . Во всех случаях кривая становится «компактной» после добавления соответствующих точек на бесконечности.

Продолжение \mathcal{M} как конформного многообразия, конечно, не приводит однозначно ко *всей* конформной вселенной Эйнштейна, поскольку вне границы \mathcal{M} мы можем изгибать продолженное пространство произвольно. Однако замыкание $\bar{\mathcal{M}}$ пространства \mathcal{M} в \mathcal{E} *однозначно* определяется как конформное многообразие с границей. Для полной строгости было бы более логичным *удалить* точки I^- , I^0 , I^+ из определения $\bar{\mathcal{M}}$ и также из $\bar{\mathcal{M}} = \mathcal{I}$, так как в противном случае $\bar{\mathcal{M}}$ не было бы многообразием с границей в этих трех точках. Это будет сделано более аккуратно позднее в связи с обсуждением асимптотически плоских миров. (Однако я не всегда буду последователен в этом отношении, так как иногда бывает полезно говорить об I^- , I^0 , I^+ .) Есть несколько способов убедиться в том, что $\bar{\mathcal{M}}$ определяется конформно однозначно. По-видимому, наиболее прямым из них является построение точек \mathcal{I} в терминах классов эквивалентности световых геодезических в \mathcal{M} . [Точки $\bar{\mathcal{M}}$ можно определить другим путем — через горизонты события и частицы

(разд. 9). Нетривиальные горизонты можно использовать для определения точек \mathcal{M} .] Понятие *световой геодезической* является *конформно инвариантным*, поэтому здесь такое построение уместно. Мы должны решить, когда две световые геодезические в \mathcal{M} надо рассматривать как пересекающиеся на \mathcal{M} . Метод, развитый Герочем [34, 35, 118*], можно применять к произвольному пространству-времени. В данном случае, когда \mathcal{M} является миром Минковского, две световые геодезические встречаются в одной и той же точке на \mathcal{I}^+ тогда и только тогда, когда они принадлежат (согласно метрике ds) к одной и той же *световой гиперплоскости* в \mathcal{M} . Если же они просто параллельны в \mathcal{M} , они пересекают одну и ту же образующую точки I^{+1}). Для рассматриваемого частного случая мира \mathcal{M} две световые геодезические, встречающиеся на \mathcal{I}^+ , должны также встречаться на \mathcal{I}^- , и *наоборот*. Однако это очень специфическое свойство мира Минковского, и оно не имеет места в общем случае.

Перейдем к более общему миру \mathcal{M} , а именно к решению Шварцшильда для метрики внешнего поля сферически симметричного массивного тела. Я буду использовать метрику Эддингтона — Финкельштейна [27, 32] с одной запаздывающей световой координатой u :

$$ds^2 = du^2[1 - 2m/r] + 2drdu - r^2(d\theta^2 - \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (r > 0). \quad (8.11)$$

(Эта метрика обсуждается более подробно в разд. 10.)

Если выбрать $d\hat{s} = \Omega ds$, где

$$\Omega = r^{-1} = l, \quad (8.12)$$

¹⁾ *Примечание к русскому изданию.* Например, для мира Минковского в обычных координатах световая геодезическая $x = t, y = z = 0$ параллельна геодезической $x = t + 1, y = z = 0$, но всякая гиперплоскость, содержащая обе эти линии, должна быть временноподобной. Следовательно, эти геодезические пересекают \mathcal{I}^+ в различных точках некоторой образующей точки I^+ . С другой стороны, $x = t, y = z = 0$ лежит в той же световой гиперплоскости, что и $x = t, y = 1, z = 0$, а именно в гиперплоскости $x = t$, так что эти линии встречаются на \mathcal{I}^+ в одной и той же точке.

а l — новая координата, конечная при $r = \infty$, то мы получим

$$d\hat{s}^2 = du^2 (l^2 - 2ml^3) - 2 dl du - d\theta^2 - \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (l \geq 0). \quad (8.13)$$

Эта метрика регулярна на \mathcal{Y}^+ , определенном как $l=0$, u конечно. Как и раньше, \mathcal{Y}^+ есть $S^2 \times E^1$. Чтобы найти \mathcal{Y}^- , перепишем (8.11) в терминах опережающей световой координаты $v = u + 2r + 4m \ln(r - 2m)$:

$$ds^2 = dv^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) - 2 dr dv - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (r > 0) \quad (8.14)$$

и опять применим (8.12). Это дает метрику

$$d\hat{s}^2 = dv^2 (l^2 - 2ml^3) + 2 dl dv - d\theta^2 - \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (l \geq 0), \quad (8.14a)$$

которая регулярна на $\mathcal{Y}^- \approx S^2 \times E^1$, определенном посредством $l=0$. Единственное реальное различие между этим случаем и рассмотренным ранее, с точки зрения структуры бесконечности, состоит в том, что здесь мы не получаем *регулярных* точек I^- , I^0 , I^+ . Не удивительно, что I^- и I^+ оказываются сингулярными, так как источник сконцентрирован именно в этих точках — на двух концах его истории. Но I^0 — также сингулярная точка, в которой конформная кривизна бесконечна (хотя I^0 может быть присвоена конформная метрика класса C^0). Таким образом мы исключаем I^0 и I^\pm из определения $\bar{\mathcal{M}}$ (и из $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^- \cup \mathcal{Y}^+$).

Запись шварцшильдовской метрики в виде (8.11), (8.14) является частным случаем

$$ds^2 = r^{-2} A dr^2 - 2B_i dx^i dr + r^2 G_{ij} dx^i dx^j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (8.15)$$

где A , B_i , C_{ij} — функции x^1 , x^2 , x^3 и r , достаточное число раз дифференцируемые (скажем, класса C^3) по x^a ($a = 0, 1, 2, 3$) на и в окрестности гиперповерхности \mathcal{Y} , определенной как $x^0 = 0$, где $x^0 = r^{-1}$.

Если предположить, что детерминант из метрических коэффициентов A , B_i , C_{ij} не обращается в нуль, то станет ясно, что метрика $d\hat{s} = \Omega ds$, где $\Omega = r^{-1}$ регулярна (C^3) на \mathcal{Y} . Метрика (8.15) включает все

метрики типа Бонди — Сакса, так что предположение о регулярности \mathcal{I} не кажется неприемлемым, если мы хотим изучать асимптотически плоские миры и допустить возможность гравитационного излучения. В действительности (8.15) является более общим, чем метрики Бонди — Сакса в предположении, что не налагаются уравнения поля, ограничивающие R_{ab} . В частности (8.15) включает мир де Ситтера и асимптотические миры де Ситтера. Эти случаи имеют место при условии, что в эйнштейновых уравнениях свободного поля присутствует космологический член.

Выбор Ω для (8.15), который требуется произвести, чтобы сделать метрику ds регулярной на \mathcal{I} , имеет то важное свойство, что градиент Ω на \mathcal{I} не равен нулю [$\partial\Omega/\partial x^a = (1, 0, 0, 0)$ на \mathcal{I}] и таким образом определяет направление нормали к \mathcal{I} . Предположение регулярности \mathcal{I} удобно дополнять условием нетривиальности градиента Ω на \mathcal{I} , но при некоторых обстоятельствах это условие можно вывести из предположения регулярности.

Сформулируем более точно условия, которые должны быть удовлетворены. Мы требуем, чтобы пространство-время \mathcal{M} с метрикой ds^2 было продолжимо до конформного многообразия с границей $\bar{\mathcal{M}} \supset \mathcal{M}$ ($\text{int } \bar{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$; $\dot{\mathcal{M}} = \bar{\mathcal{M}} - \mathcal{M}$), причем так, чтобы выполнялись условия:

Существует гладкая (скажем, класса C^3 , по крайней мере) вещественная функция $\Omega (\geq 0)$ на $\bar{\mathcal{M}}$ и гладкая псевдориманова метрика $d\hat{s}^2$ на $\bar{\mathcal{M}}$ (совместимая с его конформной структурой), такая, что $ds^2 = \Omega^2 d\hat{s}^2$ на \mathcal{M} . (8.16)

На $\dot{\mathcal{M}}$ имеем $\Omega = 0$, $\hat{\nabla}_a \Omega \neq 0$. (8.17)

Каждая световая геодезическая в \mathcal{M} имеет две концевые точки на $\dot{\mathcal{M}}$. (8.18)

Если такое $\bar{\mathcal{M}}$ существует, мы будем называть \mathcal{M} *асимптотически простым*. Тогда $\dot{\mathcal{M}}$ определяется однозначно (как следует, например, из построения $\dot{\mathcal{M}}$ в терминах световых геодезических [34]). Мы пишем $\dot{\mathcal{M}} = \mathcal{I}$ для точек, находящихся на бесконечности \mathcal{M} .

Условие (8.18) обеспечивает включение всей бесконечности \mathcal{M} . Это условие обычно трудно проверить практически, и оно даже не выполняется в некоторых мирах, которые можно было бы трактовать как асимптотически *плоские*, но которые содержат ограниченные световые орбиты (т. е. световые геодезические, которые не уходят на бесконечность, как это имеет место при $r = 3t$ в решении Шварцшильда). Чтобы учесть такую возможность, будем называть пространство-время \mathcal{M} *асимптотически простым в слабом смысле*, если существует асимптотически простое \mathcal{M}_0 , такое, что для некоторого открытого подмножества \mathcal{K} множества $\bar{\mathcal{M}}_0$ (с $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{K}$) область $\mathcal{M}_0 \cap \mathcal{K}$ (с метрикой, индуцированной из \mathcal{M}_0) изометрична подмножеству \mathcal{M} . Другими словами, асимптотически простое в слабом смысле пространство-время содержит конформную бесконечность $\mathcal{I} = \mathcal{M}_0$ асимптотически простого пространства-времени, но может также содержать и другие «бесконечности».

Чтобы получить связь с асимптотической евклидовостью Бонди — Сакса, предположим, что \mathcal{M} является асимптотически простым в слабом смысле с конформной бесконечностью \mathcal{I} . Используя уравнения Эйнштейна (7.1), можно показать, что если вблизи \mathcal{I} тензор T_{ab} не становится пропорциональным g_{ab} с ненулевым коэффициентом, то

$$\mathcal{I} \text{ является пространственноподобным, временно-подобным или световым в зависимости от того, является ли космологическая постоянная } \lambda \text{ положительной, отрицательной или нулевой.} \quad (8.19)$$

(Если $\lambda \neq 0$, нет нужды предполагать условие $\hat{\nabla}_a \Omega \neq 0$ из (8.17), так как его можно вывести.) Если \mathcal{I} является пространственноподобным или световым, то оно представляет собой непересекающееся объединение двух гиперповерхностей \mathcal{I}^- , \mathcal{I}^{+1}). Точки

¹⁾ *Примечание к русскому изданию.* Только в том случае, когда \mathcal{I} является временноподобным, его нельзя разделить на \mathcal{I}^- и \mathcal{I}^+ . Если же \mathcal{I} является пространственноподобным или световым, ни одна точка \mathcal{I} не может принадлежать одновременно и \mathcal{I}^- и \mathcal{I}^+ .

\mathcal{I}^- отличаются от точек \mathcal{I}^+ тем, что их световые конуса будущего, а не прошлого, лежат в $\bar{\mathcal{M}}$. Поскольку мы интересуемся здесь больше асимптотической евклидовостью, чем космологией, предположим, что \mathcal{I} является световым. Отсюда следует¹⁾ (при условии, что \mathcal{M}_0 временно- и пространственноориентируемо и кроме того не содержит замкнутых временноподобных кривых, но это предположение, возможно, является излишним), что

$$\mathcal{I}^- \approx \mathcal{I}^+ \approx S^2 \times E^1, \quad (8.20)$$

где E^1 — световые образующие \mathcal{I}^\pm . Результат (8.20) означает, что, когда \mathcal{I} является световым, оно сильно напоминает бесконечность мира Минковского.

Чтобы двигаться дальше, нам нужно более строго представлять себе поведение T_{ab} вблизи \mathcal{I} . Для простоты вначале предположим, что $T_{ab} = 0$ (и $\lambda = 0$) в окрестности \mathcal{I} . Тогда мы можем сказать больше. Действительно,

$$\hat{\nabla}_{A(A'} \hat{\nabla}_{B')}^B \Omega = 0 \text{ на } \mathcal{I} \quad (8.21)$$

и вследствие (8.21) и (8.20) (ср. с [76]) получим

$$\hat{\Psi}_{ABCD} = 0 \text{ на } \mathcal{I}. \quad (8.22)$$

[Мы также можем получить $\hat{\nabla} \Omega \neq 0$ на \mathcal{I} , а не предполагать это в (8.17).] На основании (8.22) для главных световых направлений можно вывести *свойство последовательного вырождения*, которое было упомянуто в разд. 7. Аргументация будет приведена позже.

Тождества Бианки (8.2) в спинорной форме имеют вид

$$\nabla_{P'}^A \Psi_{ABCD} = \nabla_B^{Q'} \Phi_{CDQ'P'} - 2\epsilon_{B(C} \nabla_{D)P'} \Lambda. \quad (8.23)$$

Тогда при $T_{ab} = 0$ получаем

$$\nabla^{AP'} \Psi_{ABCD} = 0. \quad (8.24)$$

¹⁾ План доказательства этого результата приведен в приложении к [76]. Мне кажется, однако, что должен существовать другой, более простой вывод результата (8.20).

Уравнение (8.24) интересно тем, что оно обобщает уравнение свободного поля частиц нулевой массы в частном случае спина $s = 2$ на случай искривленного пространства. Для общего случая ненулевых спинов $s = 1/2, 1, 1 1/2, 2, \dots$ мы бы имели

$$\nabla^{AP'} \Phi_{AB \dots L} = 0, \quad (8.25)$$

где

$$\Phi_{AB \dots L} = \Phi_{(AB \dots L)} \quad (8.26)$$

есть спинор с $2s$ индексами. Для $s = 1/2$ уравнение (8.25) есть не что иное, как уравнение Вейля для нейтрино (уравнение Дирака для частиц нулевой массы). Для $s = 1$ выражение (8.25) есть спинорный вариант уравнений Максвелла в свободном пространстве

$$\nabla_{[a} F_{bc]} = 0, \quad \nabla^a F_{ab} = 0 \quad (8.27)$$

с максвелловским тензором

$$F_{ab} = -F_{ba} = \Phi_{AB} \epsilon_{A'B'} + \epsilon_{AB} \bar{\Phi}_{A'B'}. \quad (8.28)$$

В плоском пространстве-времени (8.25) является вполне удовлетворительным уравнением, решения которого имеют для *любого* значения s то же самое число «степеней свободы» (а именно, две), что и в двух случаях $s = 1/2, 1$. Однако в искривленном пространстве-времени мы имеем условие совместности [16, 84]

$$\begin{aligned} (2 - 2s) \Psi^{ABM} {}_{(C} \Phi_{D \dots L) ABM} &= \nabla_{P'}^{(B} \nabla^{A) P'} \Phi_{ABCD \dots L} = \\ &= \nabla_{P'}^B \nabla^{AP'} \Phi_{ABCD \dots L} = 0, \end{aligned} \quad (8.29)$$

так что при $s \geq 3/2$ уравнение (8.25) определяет связь между $\Phi_{AB \dots L}$ и спинором конформной кривизны Ψ_{ABCD} . Но в случае $\Phi_{ABCD} = \Psi_{ABCD}$ уравнение (8.29) удовлетворяется автоматически в силу условий симметрии. Мы оставим в стороне вопрос об уравнениях поля для высших спинов и займемся интерпретацией (8.25) только в случаях $s = 1/2$ (нейтрино), $s = 1$ (электромагнетизм) и $s = 2$ (гравитация).

Важным свойством (8.25) является его *конформная инвариантность*, если принять

$$\hat{\Phi}_{AB \dots L} = \Omega^{-1} \Phi_{AB \dots L} \quad (8.30)$$

Нам потребуются различные формулы конформных преобразований. Из $ds = \Omega ds$ мы имеем

$$\hat{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}, \quad \hat{g}^{ab} = \Omega^{-2} g^{ab} \quad (8.31)$$

и можем вывести ¹⁾

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_{AB} &= \Omega \epsilon_{AB}, & \hat{\epsilon}^{A'B'} &= \Omega \epsilon^{A'B'}, \\ \hat{\epsilon}^{AB} &= \Omega^{-1} \epsilon^{AB}, & \hat{\epsilon}^{A'B'} &= \Omega^{-1} \epsilon^{A'B'}. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Для скаляра χ получаем

$$\hat{\nabla}_a \chi = \nabla_a \chi. \quad (8.33)$$

Для величин с индексами имеем, например,

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_{AA'} \xi_B &= \nabla_{AA'} \xi_B - v_{BA'} \xi_A, & \hat{\nabla}_{AA'} \eta_{B'} &= \nabla_{AA'} \eta_{B'} - v_{AB'} \eta_{A'}, \\ \hat{\nabla}_{AA'} \xi^B &= \nabla_{AA'} \xi^B + \epsilon_A{}^B v_{CA'} \xi^C, & & \\ \hat{\nabla}_{AA'} \eta^{B'} &= \nabla_{AA'} \eta^{B'} + \epsilon_{A'}{}^{B'} v_{AC} \eta^C, & & \end{aligned} \quad (8.34)$$

где

$$v_{AA'} = \Omega^{-1} \nabla_{AA'} \Omega. \quad (8.35)$$

При обращении с величинами, имеющими более одного индекса, мы просто рассматриваем их как произведение, согласно правилу Лейбница. Другими словами, мы получаем по одному члену $v_{\chi\gamma'}$ для каждого индекса. Для проверки правильности (8.34) надо лишь показать, что удовлетворяются аксиомы (4.50) — (4.58).

После подстановки (8.30) в (8.25) с учетом (8.34) получаем выражение

$$\hat{\nabla}^{AP'} \hat{\phi}_{AB \dots L} = 0, \quad (8.36)$$

которое и доказывает конформную инвариантность. Однако применять это уравнение к гравитационному

¹⁾ Несколько иное, по сравнению с [76], определение конформного преобразования спиноров, принятое здесь, приводит к отличающимся формулам преобразования. Это различие обусловлено постановкой вопроса, принятой в разд. 3. В действительности формулы, полученные здесь, несколько проще тех, которые фигурируют в [76]; кроме того, устранены дробные степени Ω .

полю надо с осторожностью. Тензор Вейля конформно инвариантен, т. е. $\hat{C}^a{}_{bcd} = C^a{}_{bcd}$ и $\hat{C}_{abcd} = \Omega^2 C_{abcd}$. Следовательно,

$$\hat{\Psi}_{ABCD} = \Psi_{ABCD}. \quad (8.37)$$

Таким образом, если в соответствии с физической метрикой ds мы полагаем

$$\Phi_{ABCD} = \Psi_{ABCD}, \quad (8.38)$$

то, согласно (8.30) и (8.37), имеем

$$\hat{\Phi}_{ABCD} = \Omega^{-1} \hat{\Psi}_{ABCD}. \quad (8.39)$$

Именно поле $\hat{\Phi}_{ABCD}$ мы отождествляем с гравитационным полем, когда исследуем $\bar{\mathcal{M}}$, соответствующее метрике $d\hat{s}$.

Значение этого состоит в поведении поля на \mathcal{I} и в связи с этим поведением со свойством последовательного вырождения. Напомним, что согласно (8.22) Ψ_{ABCD} обращается в нуль на \mathcal{I} . Из (8.39) и условия гладкости получаем

$$\hat{\Phi}_{ABCD} \text{ непрерывно на } \mathcal{I}. \quad (8.40)$$

Теперь можно без всяких усилий вывести свойство последовательного вырождения для произвольного спина s , предполагая непрерывность $\hat{\Phi}_{AB\dots L}$ на \mathcal{I} .

Введем спиновую систему отсчета $o^A = \varepsilon_0^A$, $\iota^A = \varepsilon_1^A$. Для метрики $d\hat{s}$ положим

$$\hat{o}_A = o_A, \quad \hat{\iota}_A = \Omega \iota_A, \quad \hat{o}^A = \Omega^{-1} o^A, \quad \hat{\iota}^A = \iota^A; \quad (8.41)$$

это согласуется с (8.32) и (4.27). Мы сделали асимметричный выбор (8.41) для того, чтобы направить o_A вдоль световой геодезической η , причем o_A , ι_A переносятся параллельно (относительно ds) вдоль η :

$$\nabla_{oo'} o^A = 0, \quad \nabla_{oo'} \iota^A = 0. \quad (8.42)$$

Тогда из (8.34) и (8.41) следует

$$\hat{\nabla}_{oo'} \hat{o}^A = 0, \quad \hat{\nabla}_{oo'} \hat{\iota}^A = \Omega^{-1} \hat{o}^A \hat{\nabla}_{10'} \Omega. \quad (8.43)$$

Таким образом, o^A переносится параллельно вдоль η относительно метрики ds и достигает

определенного значения в точке $Q^\pm = \eta \cap \mathcal{I}^\pm$. На самом деле $\hat{\iota}^A$ также имеет определенное предельное значение в Q^\pm и направлено вдоль \mathcal{I}^\pm в точке Q^\pm (так что $\hat{V}_{10} \cdot \Omega = 0$ на \mathcal{I} ; ср. с [76]). Аффинный (относительно ds) параметр r на η , определенный как

$$\nabla_{00'} r = 1, \quad (8.44)$$

имеет асимптотическое поведение

$$r \sim \Omega^{-1}. \quad (8.45)$$

Далее, по предположению, все компоненты $\hat{\Phi}_{\eta\mathcal{I}^\pm} \dots \mathcal{I}$ относительно спиновой системы $\hat{o}^A, \hat{\iota}^A$ непрерывны в Q^\pm . Используя (8.30), (8.41), (8.45), мы сформулируем это на языке физических величин следующим образом:

$$\text{Существует } \lim_{r \rightarrow \pm \infty} \{r^{2s+1-i} \Phi_{(i)}\} \quad (i = 0, 1, \dots, 2s), \quad (8.46)$$

где $\Phi_{(i)}$ обозначает вырождение $\Phi_{00 \dots 01 \dots 1}$, содержащее i «единиц» и $(2s - i)$ «нулей». Уравнение (8.46) гласит, что r^{-k} (где $k = 1, 2, \dots, 2s$) часть $\Phi_{AB \dots L}$ вдоль η удовлетворяет соотношению

$$\Phi_{AB \dots DE \dots L} o^A o^B \dots o^D = 0, \quad (8.47)$$

содержащему k спиноров o^A . Условие (8.47) есть как раз условие того, что по крайней мере $2s - k + 1$ главных световых направлений $\Phi_A \dots L$ совпадают в направлении η . Это и есть свойство последовательного вырождения.

В случае гравитации свойство последовательного вырождения является характерной чертой асимптотической евклидовости Бонди — Сакса. Можно связать более непосредственно точный тип координат, используемых в подходе Бонди — Сакса, с конформной структурой, возникающей в рассматриваемом формализме. Это строго сделали Тамбурино и Виникур [104]. Поэтому в данном подходе мы можем определить асимптотическую евклидовость \mathcal{M} как асимптотическую простоту в слабом смысле в случае, когда $\lambda = 0$ и $T_{ab} = 0$ вблизи \mathcal{I} . Если же T_{ab} только стре-

мится к нулю некоторым образом при приближении к бесконечности, нам могут потребоваться добавочные условия типа (8.21) и (8.22), в дополнение к асимптотической простоте в слабом смысле. Если вблизи \mathcal{I} выполняются уравнения Эйнштейна — Максвелла, такие добавочные условия не нужны (за исключением, возможно, некоторых особых случаев), и свойство последовательного вырождения можно вывести для обоих полей — гравитационного и электромагнитного.

Возвратимся на короткое время к вопросу об энергии и импульсе, с которого мы начали. Если уходящая в будущее световая гиперповерхность \mathcal{N} пересекается с \mathcal{I}^+ по 2-поверхности \mathcal{R} (рис. 18), то мы

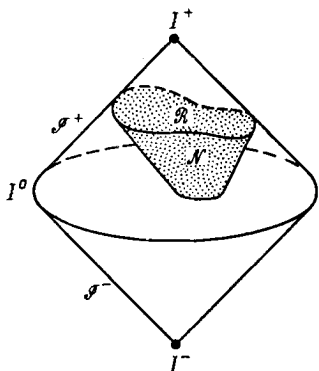


Рис. 18. Энергия-импульс по Бонди — Саксу является интегралом по $\mathcal{R} = \mathcal{N} \cap \mathcal{I}^+$.

можем вычислить интеграл по \mathcal{R} , чтобы получить полную энергию и импульс, содержащиеся на произвольной гиперповерхности, натянутой на \mathcal{R} . Если выбрать Ω так, чтобы метрика на \mathcal{R} была метрикой единичной сферы, то, интегрируя

$$\hat{\sigma}N - \Psi_2 \quad (8.48)$$

по \mathcal{R} , мы получим энергию (связанную с выбором Ω), а интегрируя (8.48) с надлежащим весовым фактором, получим импульсные компоненты. Здесь

$$\Psi_2 = \hat{\phi}_{0011} \quad (8.49)$$

на \mathcal{R} , так что Ψ_2 происходит от r^{-3} -части тензора Вейля. Величина $\hat{\sigma}$ является сдвигом $\hat{\Gamma}_{0001}$ гиперповерхности \mathcal{N} , вычисленным на \mathcal{R} (с δ^A и i^A , опре-

деляющими световые направления в \mathcal{N} и \mathcal{I} соответственно). Величина N является «функцией новостей» Бонди — Сакса, определенной здесь как

$$N = \hat{\Phi}_{110'0'}. \quad (8.50)$$

Хотя N представляет собой компоненту тензора Риччи, она сохраняет определенную конформную ковариантность благодаря указанному выше ограничению на Ω . Оказывается, полная конструкция энергии-импульса имеет правильные трансформационные свойства как «асимптотический 4-вектор».

По существу формула Бонди — Сакса для потери массы выражает тот факт, что если мы повторим интегрирование с новой световой гиперповерхностью, лежащей в будущем по отношению к предыдущей, то полученная масса всегда будет меньше или равна первоначальной. Масса, уносимая гравитационными волнами, равна интегралу от $N\bar{N}$ по части \mathcal{I}^+ , лежащей между двумя световыми гиперповерхностями; \bar{N} можно описать как интеграл от $\Psi_4 = \hat{\Phi}_{1111}$ вдоль образующих \mathcal{I}^+ . [Фактически это следует из (8.50).] В разложении по r величина Ψ_4 является r^{-1} -частью гравитационного поля; следовательно, эту величину можно рассматривать как уходящее поле излучения. По существу «функция новостей» является «интегралом по времени от уходящего гравитационного поля излучения». Оказывается, формула Бонди — Сакса для потери массы тесно связана с положительным фокусированием (7.39) на световой линии γ , которая лежит строго внутри \mathcal{I}^+ . При этом N играет роль σ в (7.39), а Ψ_4 — роль Ψ (см. [78]).

Можно отметить, что потеря массы имеет место *безотносительно* к наличию *приходящего* излучения (аналог Ψ_4 на \mathcal{I}^-). Предположение об асимптотической евклидовости на \mathcal{I}^+ *не исключает* приходящих волн (как когда-то считалось), хотя оно запрещает слишком большую концентрацию приходящих волн внутри \mathcal{I}^+ . Чтобы получить *прирост* массы вследствие приходящего излучения, мы должны обратить рассмотренную выше конструкцию и проделать вычисления на \mathcal{I}^- .

И, наконец, последнее замечание об энергии в общей теории относительности. Мы видим, что последовательно измеряемая масса всегда убывает и нет никакой гарантии, что масса не станет отрицательной! В том случае, когда все источники в конце концов уйдут на \mathcal{I}^+ в виде поля излучения нулевой массы покоя, можно сказать на основании формулы Бонди — Сакса, что полная масса всегда *была* положительной¹⁾. Насколько я знаю, еще не решен вопрос о том, является ли полная масса положительной в *общем* случае, когда мы предполагаем лишь подходящие, физически разумные неравенства на T_{ab} .

¹⁾ Брилл [14] получил некоторые результаты, относящиеся к положительной определенности полной массы системы, измеренной на пространственноподобной гиперповерхности. Брилл и Де-зер [14a] недавно предложили новый перспективный подход к этой проблеме.

9.

Горизонты

Рассматривая частные космологические модели, иногда полезно сделать конформное представление бесконечности, даже в тех случаях, когда пространство-время не является асимптотически простым в слабом смысле. Например, в обычных моделях Робертсона — Уолкера мы можем представить начальную сингулярность с бесконечной кривизной как несингулярную гиперповерхность, изображающую границу в прошлом. Это можно сделать, если предположить, что $\Omega = \infty$ в этой области. Природа таких граничных гиперповерхностей тесно связана с четырьмя типами *горизонтов*, которые могут встретиться в космологии: горизонт событий, горизонт частицы [88] и горизонты Коши [40, 42], будущий и прошедший. Ниже все они будут определены точно.

Прежде всего дадим некоторые определения. Под *кривой* я подразумеваю *образ*, получаемый при помощи отображения f класса C^1 (с необращающейся в нуль производной) действительного интервала ненулевой длины, причем я требую, чтобы каждая точка многообразия M имела окрестность \mathcal{L} , для которой $f^{-1} \bar{\mathcal{L}}$ не имеет некомпактной связной компоненты. Таким образом, предполагается существование *концевых точек* (в которых кривая должна быть гладкой и поэтому продолжимой), за исключением случаев, когда кривая продолжается неограниченно в том или в ином направлении. (В противном случае мы бы имели дело с открыто-замкнутой кривой.) Если рассматривается само отображение f , то кривая является *параметризованной*. Кривая называется временноподобной (соответственно — непространственноподобной), если все касательные векторы отображения f яв-

ляются временноподобными (соответственно — временноподобными или световыми). Непространственноподобная кривая имеет естественную ориентацию, называемую *ориентацией в будущее*, которая индуцируется временной ориентацией \mathcal{M} .

Если P и Q — две точки \mathcal{M} , то (см. [50]) обозначение $P \ll Q$ используется тогда, когда существует временноподобная кривая с начальной точкой P и конечной точкой Q . Обозначение $P < Q$ используется тогда, когда либо $P = Q$, либо существует непространственноподобная кривая от P до Q . Если $P < Q$ и $Q \ll R$ или $P \ll Q$ и $Q < R$, то $P \ll R$. Если $P < Q$ (и $P \neq Q$), тогда либо $P \ll Q$, либо существует световая геодезическая от P до Q (либо и то, и другое). Хронологическое *будущее* и *прошлое* точки P обозначаются соответственно как

$$I_+(P) = \{X : P \ll X\}, \quad I_-(P) = \{X : X \ll P\}. \quad (9.1)$$

Как легко видеть, они являются *открытыми* множествами. С другой стороны, множества

$$J_+(P) = \{X : P < X\}, \quad J_-(P) = \{X : X < P\} \quad (9.2)$$

не обязательно замкнуты. Примером может служить мир Минковского с выброшенной точкой, в котором P расположено на световом конусе выброшенной точки. В качестве другого примера можно рассмотреть плоскую волну [см. (9.23) — (9.31)]. Если \mathcal{X} — произвольное подмножество \mathcal{M} , то его хронологическое будущее и прошлое обозначаются соответственно как

$$I_+[\mathcal{X}] = \bigcup_{P \in \mathcal{X}} I_+(P), \quad I_-[\mathcal{X}] = \bigcup_{P \in \mathcal{X}} I_-(P). \quad (9.3)$$

Эти множества также являются открытыми. Их *замыканиями* являются:

$$\begin{aligned} \bar{I}_+[\mathcal{X}] &= \{X : I_+(X) \subset I_+[\mathcal{X}]\}, \\ \bar{I}_-[\mathcal{X}] &= \{X : I_-(X) \subset I_+[\mathcal{X}]\}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Доказательство (9.4) тривиально, и мы его не приводим. Из (9.4) получаем¹⁾ границы $I_{\pm}[\mathcal{K}]$

$$\begin{aligned} I_+[\mathcal{K}] &= \{X : I_+(X) \subset I_+[\mathcal{K}], X \notin I_+[\mathcal{K}]\}, \\ I_-[\mathcal{K}] &= \{X : I_-(X) \subset I_-[\mathcal{K}], X \notin I_-[\mathcal{K}]\}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Множество вида $I_+[\mathcal{K}]$ будем называть *полупространственноподобной границей* (сокращенно ППГ). Оно является *симметричным по времени*, так как

$$I_+[\mathcal{K}] = I_-[\mathcal{L}], \quad (9.6)$$

где \mathcal{L} есть дополнение $I_+[\mathcal{K}]$ в \mathcal{M} . И наоборот, (9.6) выполняется, если \mathcal{L} — произвольное подмножество \mathcal{M} , а \mathcal{K} является дополнением к $I_-[\mathcal{L}]$. Вообще, *полупространственноподобное множество* — это такое подмножество множества \mathcal{M} , у которого никакие две точки X, Y не удовлетворяют соотношению $X \ll Y$. Ясно, что множество ППГ — полупространственноподобное. Хотя множества ППГ не обязательно должны быть гладкими подмножествами \mathcal{M} , они обладают некоторыми привлекательными свойствами, которые будут играть важную роль в «сингулярных теоремах» в разд. 10 и 11. Пока мы просто отметим, что

Любое ППГ является трехмерным, класса C^0 , подмножеством \mathcal{M} (без границы) и представляет собой замкнутое множество. (9.7)

Чтобы убедиться в том, что ППГ локально гомеоморфно E^3 , рассмотрим малую окрестность в нормальных координатах x^a произвольной точки P , принадлежащей ППГ, причем $\nabla_a x^0$ временноподобно и $\nabla_a x^1$ пространственноподобно, $i \neq 0$. Любая кривая $x^1 = \text{const}$, $i \neq 0$, достаточно близкая к P , пересекает $I_+(P)$ и $I_-(P)$. Следовательно, она пересекает ППГ в определенной точке. Это дает локальный гомеоморфизм на открытое множество \mathbf{R}^3 чисел (x^1, x^2, x^3) (рис. 19).

¹⁾ Обозначение $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ подразумевает только, что \mathcal{A} является подмножеством \mathcal{B} , но не обязательно собственным подмножеством (так что $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$).

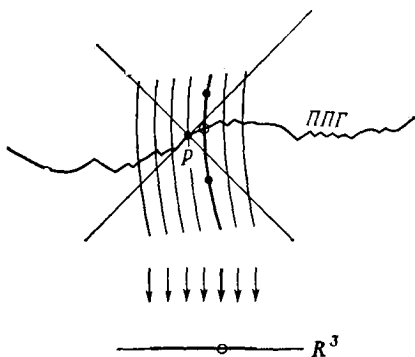


Рис. 19. Любая полупространственноподобная граница ППГ локально гомеоморфна E^3 .

Теперь мы можем определить четыре типа горизонтов. Пусть γ — произвольная временноподобная кривая в \mathcal{M} . Тогда (если соответствующее множество не пустое)

$$\text{Горизонт событий для } \gamma \text{ есть } \dot{I}_-[\gamma], \quad (9.7a)$$

$$\text{Горизонт частицы для } \gamma \text{ есть } \dot{I}_+[\gamma].$$

Если кривая γ имеет конечную точку F , то горизонт событий для нее есть просто $\dot{I}_-(F)$, и если γ имеет начальную точку P , горизонт частицы для нее есть $\dot{I}_+(P)$. Мы будем называть эти случаи *тривиальными*. Примером пространства-времени, *не содержащего* нетривиальных горизонтов события и частицы, является статический мир Эйнштейна, рассмотренный в разд. 8. Однако мир Минковского *обладает* нетривиальными горизонтами события и частицы, например, в случае, когда γ изображает мировую линию тела, движущегося с постоянным ускорением. [См. (2.8)–(2.10) и рис. 6. Если γ есть $Z = \text{const} > 0$, $X = Y = 0$, то $z = t$ обозначает горизонт событий для γ , а $z = -t$ есть горизонт частицы для γ .] С другой стороны, ни одна из временноподобных *геодезических* в пространстве-времени Минковского не имеет горизонта событий или частицы. Физически горизонт событий кривой γ разделяет наблюдаемые и ненаблюдаемые события для наблюдателя, мировая линия которого есть γ . Аналогично горизонт частицы разделяет области

Рис. 20. Если \mathcal{I}^+ пространственноподобно, всякая временноподобная кривая имеет горизонт событий.

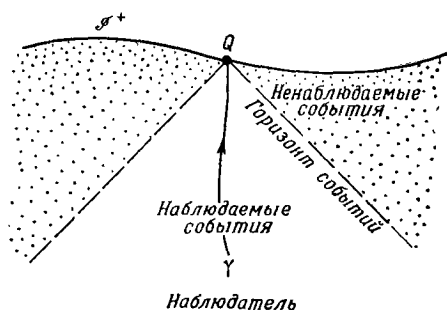
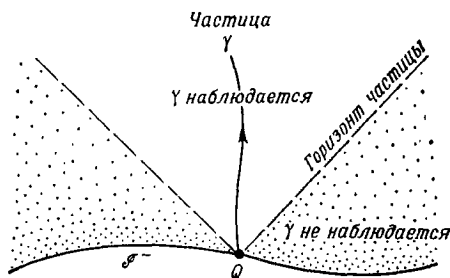


Рис. 21. Если \mathcal{I}^- пространственноподобно, всякая временноподобная кривая имеет горизонт частицы.



мира, из которых частица с мировой линией γ может или не может в принципе наблюдаться.

Примером пространства-времени с нетривиальным горизонтом событий или частицы для геодезической γ может служить \mathcal{M} , содержащее пространственноподобную конформную бесконечность \mathcal{I}^+ или \mathcal{I}^- . (Допускается $\Omega \neq 0$ или $\Omega = \infty$ на \mathcal{I} .) Если \mathcal{I}^+ — пространственноподобно, то всякая временноподобная геодезическая γ (в действительности всякая продолжаемая временноподобная кривая в \mathcal{M}), проходящая через некоторую точку \mathcal{M} , достаточно близкую к \mathcal{I}^+ , пересечет \mathcal{I}^+ в точке Q в $\bar{\mathcal{M}}$. Мы можем определить $\dot{I}_-(Q)$ (используя конформную структуру $\bar{\mathcal{M}}$); это и будет искомым горизонтом событий $\dot{I}_-[\gamma]$ (рис. 20). Совершенно аналогично, если \mathcal{I}^- — пространственноподобно, мы можем найти временноподобную геодези-

ческую γ с нетривиальным горизонтом частицы (рис. 21).

Чтобы определить горизонт Коши, предположим, что \mathcal{S} есть некоторое замкнутое полупространственноподобное множество. Определим *область зависимости* $D_+(\mathcal{S})$, $D_-(\mathcal{S})$ следующим образом:

$D_+(\mathcal{S})$ есть дополнение к объединению всех временноподобных кривых, продолжимых в прошлое и не пересекающих \mathcal{S} . (9.8)

$D_-(\mathcal{S})$ определяется просто как обращение во времени формулировки (9.8). Другими словами:

$X \in D_+(\mathcal{S})$ тогда и только тогда, когда всякая временноподобная кривая, проходящая через X , может быть продолжена в прошлое до пересечения с \mathcal{S} , (9.9)

и аналогичным образом для $D_-(\mathcal{S})$. [Принимаем $\mathcal{S} \subset D_+(\mathcal{S})$.] Легко видеть, что продолжимые в прошлое кривые, не пересекающие \mathcal{S} , охватывают открытое подмножество множества \mathcal{M} . Следовательно, из (9.8)

$D_+(\mathcal{S})$ и $D_-(\mathcal{S})$ есть замкнутые множества. (9.10)

Горизонтами Коши (рис. 22) являются «граница в будущем» множества $D_+(\mathcal{S})$ и «граница в прошлом» множества $D_-(\mathcal{S})$:

$H_+(\mathcal{S}) = \{X : X \in D_+(\mathcal{S}), I_+(X) \cap D_+(\mathcal{S}) = \emptyset\},$
 $H_-(\mathcal{S}) = \{X : X \in D_-(\mathcal{S}), I_-(X) \cap D_-(\mathcal{S}) = \emptyset\}.$ (9.11)

Легко получить, что

$H_+(\mathcal{S})$ и $H_-(\mathcal{S})$ есть полупространственноподобные замкнутые множества. (9.12)

Мы можем определить ¹⁾ *край* замкнутого полупространственноподобного множества \mathcal{S} как множе-

¹⁾ *Примечание к русскому изданию.* Это определение сформулировано не вполне корректно. Правильная формулировка содержится в [131]: край ахронального (полупространственноподобного) замкнутого множества \mathcal{S} определяется как множество точек $P \in \mathcal{S}$, таких, что если $R \ll P \ll Q$ и γ есть временноподобная кривая от R до Q , проходящая через P , то всякая окрестность γ содержит временноподобную кривую от R до Q , не пересекающую \mathcal{S} .

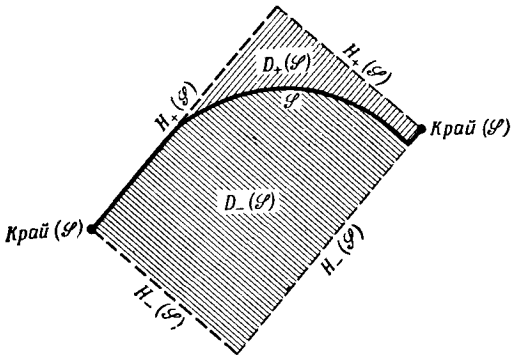


Рис. 22. Области зависимости и горизонты Коши для полупространственноподобного множества \mathcal{S} (в «тривиальном» случае).

ство точек $P \in \mathcal{S}$, таких, что для любого открытого множества \mathcal{L} , содержащего P , и для точек $R, Q \subset \mathcal{L}$, $R \ll P \ll Q$ существует временноподобная кривая в \mathcal{L} от R до Q , не пересекающая \mathcal{S} . Имеем:

$$\text{Край}(\mathcal{S}) \subset H_+(\mathcal{S}) \cap H_-(\mathcal{S}). \quad (9.13)$$

Множество «край (\mathcal{S})» всегда является замкнутым. Оно состоит из тех точек \mathcal{S} , в которых \mathcal{S} не локально гомеоморфно E^3 . Если $\text{край}(\mathcal{S}) = \emptyset$, мы можем назвать \mathcal{S} *бескраевым*. Если \mathcal{S} — гладкое полупространственноподобное множество, являющееся *гиперповерхностью* (без границы) в \mathcal{M} (так что касательные гиперплоскости всюду пространственноподобные или световые), то $\overline{\mathcal{S}}$ бескраевое тогда и только тогда, когда \mathcal{S} есть *замкнутое* подмножество в \mathcal{M} (т. е. \mathcal{S} является собственно вложенным.) И другой пример: всякое множество ППГ — бескраевое.

Горизонт Коши (если он существует) будем называть *нетривиальным*, если он представляет собой $H_+(\mathcal{S})$ или $H_-(\mathcal{S})$ некоторого замкнутого, бескраевого полупространственноподобного множества \mathcal{S} . Тривиальные горизонты Коши легко построить (в мирах без замкнутых временноподобных кривых), принимая

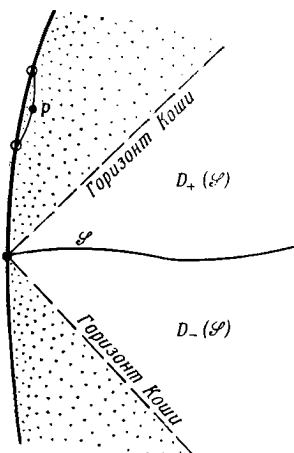


Рис. 23. Если \mathcal{S} временноподобно, то каждое полупространственноподобное множество имеет горизонт Коши.

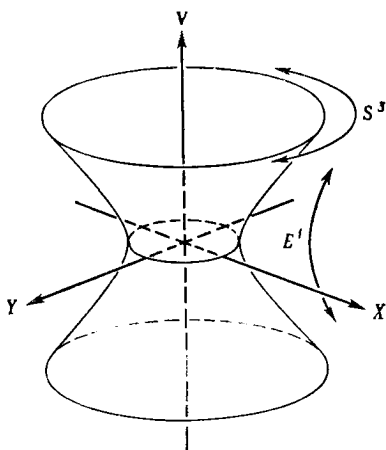


Рис. 24. Модель де Ситтера.

в качестве \mathcal{S} малый замкнутый кусок пространственноподобной гиперповерхности. Статический мир Эйнштейна не содержит нетривиальных горизонтов Коши. Однако мир Минковского содержит нетривиальные горизонты Коши. Например, если \mathcal{S} есть $x^0 = x^1$ в обычных координатах Минковского, то $H_{\pm}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$; если \mathcal{S} есть $x^0 = -[1 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^{1/2}$, то $H_-(\mathcal{S}) = \emptyset$, но $H_+(\mathcal{S})$ определяется как $x^0 = -[(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^{1/2}$.

Глобальной гиперповерхностью Коши (или ГГК) для \mathcal{M} называется полупространственноподобное множество \mathcal{S} (обычно — гладкая гиперповерхность), для которого $H_+(\mathcal{S})$ и $H_-(\mathcal{S})$ пусты. Другими словами, \mathcal{S} пересекает каждую продолжимую временноподобную кривую в \mathcal{M} . Эквивалентное условие того, чтобы полупространственноподобное множество \mathcal{S} было ГГК, состоит в том, что \mathcal{S} должно пересекать каждую продолжимую световую геодезическую в \mathcal{M} по непустому компактному множеству. Это вытекает из последующего рассмотрения структуры горизонтов Коши. Нетрудно видеть, что пересечение световой геодезиче-

ской с ППГ должно быть *связным*. Легко установить одно свойство пространства-времени, содержащего ГГК \mathcal{S} : топологически мир является произведением $\mathcal{S} \times E^1$, где E^1 могут быть представлены временноподобными кривыми. Труднее доказать¹⁾, что все \mathcal{S} топологического произведения также могут служить ГГК для \mathcal{M} . Оказывается также, что существование ГГК эквивалентно условию «глобальной гиперболичности» Лере²⁾.

Ясно, что обычные сечения «постоянного времени» статического мира Эйнштейна и мира Минковского являются ГГК. Все миры, которые обладают *временноподобной* конформной бесконечностью \mathcal{I} , не содержат ни одной ГГК (рис. 23). Всякая точка P вблизи \mathcal{I} лежит на временноподобных кривых, которые и в прошлом и в будущем достигают \mathcal{I} в некоторой окрестности P (с точки зрения $\bar{\mathcal{M}}$). Таким образом, любое \mathcal{S} , претендующее на роль ГГК, должно было бы проходить вблизи P . Поскольку это рассуждение применимо ко *всем* точкам вблизи \mathcal{I} , причем некоторые из них имеют между собой конечный временноподобный интервал, то отсюда видно, что искомого полупространственноподобного \mathcal{S} не существует.

Деситтеровский и антидеситтеровский миры являются точными примерами, в которых \mathcal{I} , соответственно, пространственноподобно и временноподобно. Чтобы описать эти модели, рассмотрим гиперболы в пятимерном псевдоевклидовом пространстве с двумя типами сигнатуры. Мир де Ситтера (рис. 24) определяется как

$$C^2 = -V^2 + W^2 + X^1 + Y^2 + Z^2, \quad (9.14)$$

где метрика есть

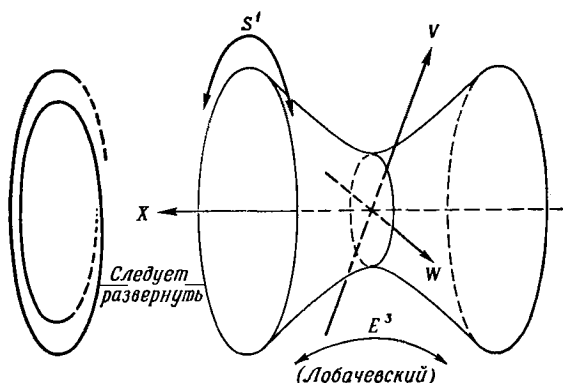
$$ds^2 = dV^2 - dW^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2. \quad (9.15)$$

Антидеситтеровский мир (рис. 25) является универсальным накрывающим многообразием

$$C^2 = V^2 + W^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 \quad (9.16)$$

¹⁾ Одно из доказательств этого факта дано Зейфергом [98].

²⁾ Это будет показано в другой работе.



Р и с. 25. Антидеситтеровская модель.

с метрикой

$$ds^2 = dV^2 + dW^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2. \quad (9.17)$$

Топологически мир де Ситтера есть $S^3 \times E^1$ и обладает сечениями S^3 , которые являются ГГК. Но каждая временноподобная кривая имеет горизонт частицы и горизонт событий. Мы можем представить пространство-время конформно на статической вселенной Эйнштейна в виде области между двумя параллельными пространственноподобными сечениями (рис. 26). Очевидным образом \mathcal{I}^+ и \mathcal{I}^- являются пространственноподобными. Модель стационарной вселенной есть просто «верхняя половина» модели де Ситтера (см., например, [97]), которую мы отрезаем, скажем, гиперплоскостью $V = W$ в (9.14) (рис. 27). При этом световая граница остается в прошлом, так что некоторые временноподобные кривые (например, мировые линии частиц среды) не обладают горизонтом частицы. Сечения $V - W = \text{const} > 0$ в (9.14) дают (плоские) гиперповерхности постоянного времени в стационарной модели. В отличие от деситтеровского и антидеситтеровского миров эта модель не является геодезически полной.

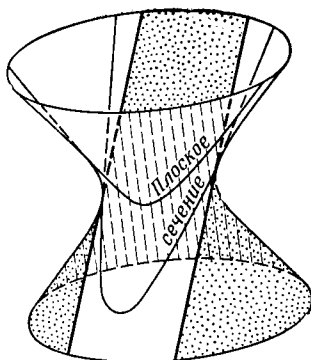
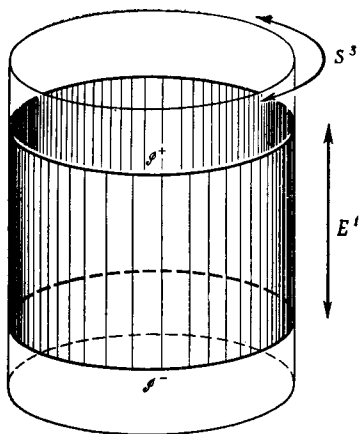


Рис. 26. Модель де Ситтера как конформная часть вселенной Эйнштейна. Модель Фридмана с $\lambda = 0$, $k > 0$ представляется аналогичным образом.

Рис. 27. Модель стационарной вселенной.

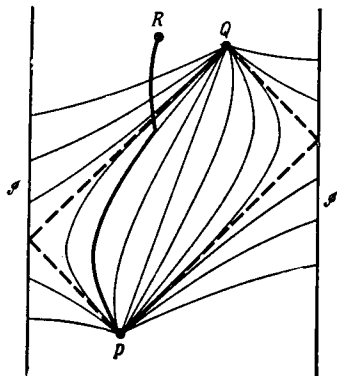
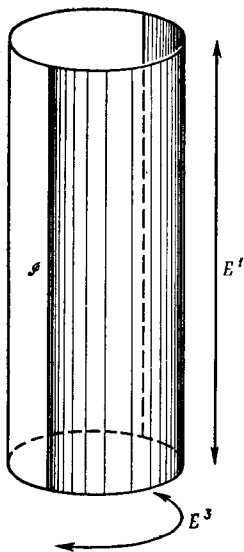
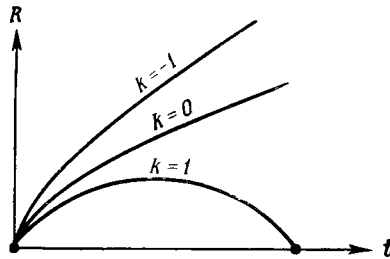


Рис. 28. Антидезиттеровская модель как конформная часть вселенной Эйнштейна.

Рис. 29. Точки P и R нельзя соединить геодезической.

Гиперсфера (9.16) имеет топологию $S^1 \times E^3$ и поэтому она неодносвязна. Она обладает замкнутыми временноподобными кривыми (S^1), которые могут быть разомкнуты в универсальном накрывающем многообразии. Тогда «развернутая» антидеситтеровская модель, представленная конформно на статической вселенной Эйнштейна $S^3 \times E^1$, становится просто полусферой S^3 , умноженной на E^1 (рис. 28). Ее топология есть E^4 , но *конформная* структура глобально отличается от пространства-времени Минковского. В данном случае мы имеем *временноподобное* \mathcal{P} , и поэтому каждое полупространственноподобное \mathcal{P} имеет горизонт Коши. С другой стороны, ни одна из продолжимых временноподобных геодезических не обладает горизонтом частицы или событий (хотя некоторые продолжимые временноподобные кривые обладают им). Существование горизонтов Коши связано с интересной чертой антидеситтеровской модели. Пусть P — произвольная точка на гиперсфере (9.16), а Q — диаметрально ей противоположная. Любая плоскость, проходящая через PQ , пересекает гиперсферу по «большому кругу», который является геодезической. Нетрудно видеть, что всякая временноподобная геодезическая на гиперсфере, проходящая через P , должна также проходить и через Q , но пространственноподобные и световые геодезические уходят через P на бесконечность и не попадают в Q . Мы можем перейти к «развернутому» антидеситтеровскому пространству (универсальное накрывающее пространство). Для простоты выберем P и Q как можно ближе друг к другу, причем так, чтобы $P \ll Q$ (рис. 29). Пусть точка R отделена от Q пространственноподобной геодезической. Тогда легко убедиться, что *не существует геодезической, соединяющей P и R* [17]. (От P до R можно дойти за два шага, используя ломаную временноподобную геодезическую.) Антидеситтеровская модель геодезически полна, так что ситуация здесь сильно отличается от случая положительно определенных метрик. Отсутствие геодезической, соединяющей P и R , тесно связано с тем фактом, что R лежит вне $H_+[I_+(P)]$, что будет видно из разд. 11.

Рис. 30. Различные типы поведения моделей Фрийдмана во времени при $\lambda = 0$.



В космологических приложениях наиболее часто изучаются модели Фрийдмана с метрикой

$$ds^2 = dt^2 - R^2 d\Sigma^2. \quad (9.18)$$

Здесь $d\Sigma^2$ обозначает метрику единичной 3-сферы ($k = 1$), или евклидова 3-пространства ($k = 0$), или единичного гиперболического 3-пространства (Лобачевского) ($k = -1$). Величина $R = R(t)$ удовлетворяет уравнениям

$$\frac{4}{3} \pi \rho R^3 = M = \text{const} > 0, \quad (9.19)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{KM}{2\pi R} + \frac{1}{3} \lambda R^2 - k, \quad (9.20)$$

которые соответствуют тензору энергии-импульса «пыли» (т. е. идеальной среды без давления):

$$T_{ab} = \rho(t) t_a t_b, \quad (9.21)$$

где

$$t_a = \nabla_a t. \quad (9.22)$$

Решения уравнения (9.20) при $\lambda = 0$ изображены на рис. 30 (их обращения во времени также являются решениями, но они не согласуются при $k \leq 0$ с наблюдаемым расширением вселенной). Отметим, что только в том случае, когда пространственные сечения обладают положительной кривизной (и, следовательно, они компактны), модель коллапсирует ко второй сингулярности $R = 0$. (Посредством отождествлений пространственные сечения можно сделать компактными и в случаях $k \leq 0$, однако это достигается ценой уменьшения глобальной изотропии.)

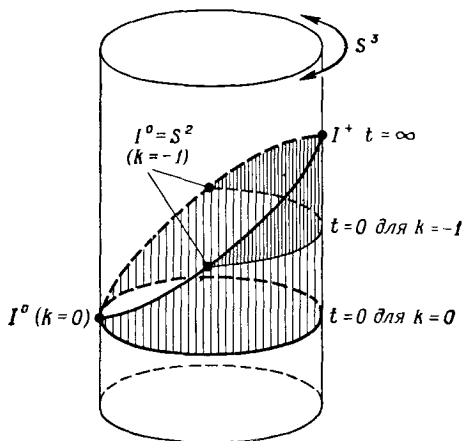


Рис. 31. Модели Фридмана с $k \leq 0$, $\lambda = 0$ как конформные части вселенной Эйнштейна.

Фридмановские модели также могут быть представлены как конформные подмножества статической вселенной Эйнштейна. Примем $\lambda = 0$. Случай $k > 0$ напоминает ситуацию для мира де Ситтера (рис. 26); отличие состоит лишь в том, что $\Omega = \infty$ на \mathcal{I}^\pm вместо $\Omega = 0$. Случаи $k \leq 0$ изображены на рис. 31. В обоих случаях \mathcal{I}^- пространственноподобно с $\Omega = \infty$, и \mathcal{I}^+ — световое с $\Omega = 0$. При $k = 0$ имеем $\bar{\nabla}_a \Omega = 0$ на \mathcal{I}^+ и I^0 является точкой. Но $\bar{\nabla}_a \Omega \neq 0$ при $k < 0$, и I^0 есть S^2 . Все фридмановские модели содержат ГГК и обладают горизонтами частицы для всех временно-подобных кривых.

Наконец, рассмотрим два примера, в которых отсутствуют ГГК, хотя и по разным причинам. Во-первых, рассмотрим волну с плоским фронтом, метрика которой [15, 28, 77]

$$ds^2 = 2\{du + H(v, x, y)dv\}dv - dx^2 - dy^2. \quad (9.23)$$

Область изменения действительных переменных u , v , x , y неограничена. Неисчезающие компоненты тензора кривизны для (9.23) определяются посредством

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}. \quad (9.24)$$

Метрика удовлетворяет уравнениям Эйнштейна в вакууме с $\lambda=0$ (и, таким образом, представляет собой чистую гравитационную волну), если

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)H = 0. \quad (9.25)$$

Но если условие (9.25) не налагается, то (9.23) описывает более общую ситуацию комбинированной гравитационно-электромагнитно-нейтринной волны. Все семь главных световых направлений при этом совпадают. Если H квадратично по x , y , то мы получаем частный случай *плоской волны*. Многие плоские волны геодезически полны [28, стр. 96].

Если $H = 0$ в некоторой области, то мы имеем там мир Минковского. Фактически мы можем выбрать H нулевым всюду кроме некоторого ограниченного интервала $v_0 < v < v_1$. Тогда мы получим волну типа «сэндвича» [10]. Экстремальным случаем является идеализированная ситуация, когда волна становится бесконечно малой по длительности (скажем, $v_0, v_1 \rightarrow 0$) и производит ненулевой результирующий эффект. Функция H становится дельта-функцией по v :

$$H(v, x, y) = \delta(v)h(x, y). \quad (9.26)$$

Подставляя (9.26) в (9.23), мы получаем метрику, которая не удовлетворяет условиям, обычно накладываемым на пространство-время с дельта-функцией в *кривизне* [как это получается в (9.24)], поскольку в данном случае компоненты *метрического* тензора включают дельта-функции. Можно преобразовать координаты так, чтобы новые компоненты метрического тензора были функциями класса C^0 от координат. Но приведенная форма удобней, так как ведет к конструкции многообразия, получаемой с помощью «ножниц и клея» [80]. Разделим мир Минковского с метрикой

$$ds^2 = 2 du dv - dx^2 - dy^2 \quad (9.27)$$

на $\mathcal{M}^- (v < 0)$ и $\mathcal{M}^+ (v > 0)$, выбрасывая световую гиперплоскость $v = 0$. Присоединим теперь границу $v = 0$ к каждой половине и отождествим две половины так, чтобы каждая из них выглядела «перевер-

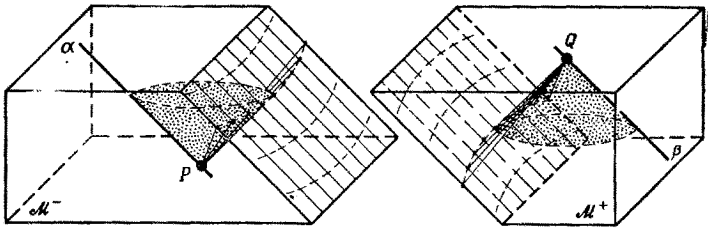


Рис. 32. Плоская волна с амплитудой в виде дельта-функции. Обе половины пространства плоские, но присоединены с перерыванием.

нудой» с точки зрения другой (рис. 32). Это достигается переходом

$$x \rightarrow x, \quad y \rightarrow y, \quad u \rightarrow u + h(x, y) \quad (9.28)$$

от \mathcal{M}^- к \mathcal{M}^+ на их общей границе $v = 0$. Скачок координат в (9.28) в точности соответствует (9.26), подставленному в (9.23).

Для простоты рассмотрим случай электромагнитной плоской волны. Тогда мы можем принять

$$h(x, y) = a(x^2 + y^2), \quad (9.29)$$

где $a = \text{const} > 0$. Световой конус точки $P \in \mathcal{M}^-$ с координатами $u = x = y = 0$, $v = -a^{-1}$ определяется уравнением

$$2u(v + a^{-1}) = x^2 + y^2. \quad (9.30)$$

Вследствие (9.28) и (9.29) это согласуется с

$$2u(v - a^{-1}) = x^2 + y^2 \quad (9.31)$$

при $v = 0$. Уравнение (9.31) дает световой конус точки $Q \in \mathcal{M}^+$ с координатами $u = x = y = 0$, $v = a^{-1}$. Это показывает, что световой конус точки P (в этом примере) опять фокусируется после прохождения через волну в точке Q . Однако имеется одна исключительная световая геодезическая α , проходящая через P , а именно $x = y = 0$, $v = -a^{-1}$, которая никогда не пересекает волну вообще. Соответственно, световая геодезическая β , проходящая через Q и определяемая как $x = y = 0$, $v = a^{-1}$, не переходит в другую половину пространства. Таким образом, две продолжимые световые геодезические α и β являются

предельной конфигурацией для последовательности *одиночных* световых геодезических, проходящих через P и Q . (Таким образом, пространство световых геодезических здесь не является хаусдорфовым.)

Пространственноподобная ГГК должна пересекать каждую световую геодезическую последовательности только один раз. Следовательно, она должна была бы встретить предельную пару α, β только в *одной* точке. Однако обе геодезические α, β не могут быть пересечены, как это требуется для ГГК. В терминах рис. 32 можно сказать, что любая бескраевая пространственноподобная гиперповерхность, проходящая через P , захватывается внизу светового конуса прошлого для точки Q и никогда не достигает β . Легко также установить отсутствие полупространственноподобной ГГК. (Рассмотренный пример можно конформно изобразить как часть статической вселенной Эйнштейна. В этом случае отсутствие ГГК вытекает не из пространственноподобности \mathcal{I} , а из того факта, что \mathcal{M} содержит световую геодезическую во *внутренней* области $\bar{\mathcal{M}}$.) В более общем случае конформных плоских волн, таких, как чисто гравитационные плоские волны, ГГК отсутствует в сущности по той же причине, что и в рассмотренном примере [77], но ситуация становится несколько сложнее из-за астигматизма при фокусировании.

В качестве последнего примера в этом разделе рассмотрим пустой мир Тауба — НУТ ¹⁾, описанный Мизнером [59, 61, 63, 105, 118*, 119*]. В данном случае пространство-время \mathcal{M} есть топологически $S^3 \times E^1$ (но конформно отличается от вселенной Эйнштейна). Имеется выделенное пространственноподобное сечение \mathcal{S} с максимальным собственным объемом, метрика которого есть метрика 3-сферы (рис. 33). Однако 4-мерная геометрия на \mathcal{S} не обладает полной вращательной симметрией S^3 . Тензор Вейля отличен от нуля, главные световые направления попарно совпадают {22} [ср. с (7.6)]. Ортогональное проектирова-

¹⁾ Мир НУТ — мир Ньюмана — Унти — Тамбурино. — *Прим. перев.*

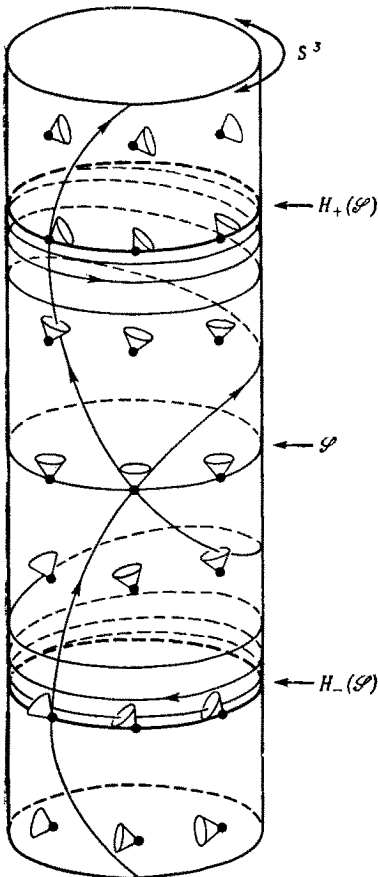


Рис. 33. Модель Тауба — НУТ.

ние на \mathcal{S} этих световых направлений дает нам нигде не исчезающее на \mathcal{S} поле линейного элемента. (В каждой точке \mathcal{S} два световых направления проектируются как диаметрально противоположные.) Эти линейные элементы тангенциальны к конгруэнции больших кругов на S^3 , которые образуют множество параллелей Клиффорда. Следовательно, эти круги образуют расслоение Хопфа S^3 . Остающаяся симметрия представляет собой транзитивную 4-параметрическую группу.

Будем передвигать наше сечение вверх параллельно самому себе на рис. 33, сохраняя эту симметрию. Мы получим похожие пространственноподобные сечения, но с меньшим объемом S^3 . Наконец, этот объем уменьшается до нуля [в соответствии с эффектом Райчаудури; ср. с (7.40) — (7.47)], но вместо сжатия в точку мы просто получим $H_+(\mathcal{S})$, которое является здесь компактной световой гиперповерхностью, порожденной световыми геодезическими, образующими множество параллелей Клиффорда на $H_+(\mathcal{S}) \approx S^3$.

Позади $H_+(\mathcal{S})$ сечения становятся временноподобными¹⁾ и поэтому содержат замкнутые временноподобные кривые, явно нарушая тем самым причинность.

Световые и временноподобные геодезические, направленные в будущее и берущие свое начало на \mathcal{S} , распадаются на два класса. Есть такие, которые попадают в часть \mathcal{M} , находящуюся за $H_+(\mathcal{S})$ [и, следовательно, пересекают $H_+(\mathcal{S})$ в определенной точке], и такие, которые навиваются спирально, асимптотически приближаясь к $H_+(\mathcal{S})$. Кривые второго класса имеют конечную аффинную длину в направлении будущего, так что модель не является геодезически полной. Мизнер показал, что довольно удивительным образом может быть реализовано альтернативное продолжение на $H_+(\mathcal{S})$ и за ним, отличное от изображенного на рис. 33. Кривые, которые прежде пересекали $H_+(\mathcal{S})$, теперь навиваются спирально, в то время как большинство геодезических, которые прежде навивались, теперь пересекают новое $H_+(\mathcal{S})$ и попадают в новое продолжение. Оба продолжения являются аналитическими, но могут быть осуществлены одновременно лишь ценой отказа от требования, чтобы \mathcal{M} было хаусдорфовым многообразием [59, 61, 118*]. Поведение модели на $H_-(\mathcal{S})$ в точности аналогично поведению на $H_+(\mathcal{S})$ (рис. 33). Модель оказывается чрезвычайно неустойчивой в окрестности $H_{\pm}(\mathcal{S})$ относительно малых возмущений в начальных условиях на \mathcal{S} . Однако поучительно то, что она проявляет специфические свойства, которые должны приниматься во внимание при изучении более общих ситуаций.

¹⁾ Эти сечения являются компактными лоренцовыми 3-многообразиями рассмотренного Авезом типа [3]. Всякая замкнутая временноподобная кривая γ этого 3-многообразия обладает любопытным свойством, а именно: хотя γ (что очевидно) не может быть непрерывно деформирована в точку, оставаясь временноподобной, для каждого сечения существует некоторое целое n , обладающее тем свойством, что кривая $n\gamma$ (т. е. γ , описанная умножением на n — для чего необходимо, чтобы γ была параметризована собственным параметром) может быть деформирована в $(n+1)\gamma$, оставаясь временноподобной. Следовательно, она может быть деформирована в кривую произвольно большой длины. Это является контрпримером результату Авеза [4]. Я благодарен Кундту и Зейферту, которые обратили на это мое внимание.

Гравитационный коллапс

Очень интересным в теории относительности и космологии является вопрос о существовании сингулярностей. Обычные модели «большого взрыва» в релятивистской космологии характеризуются наличием начальных состояний бесконечной кривизны и плотности (рис. 30). В такой начальной сингулярности неприменимо обычное представление о пространстве-времени как о гладком многообразии. Существование горизонта частиц для каждой мировой линии также приводит нас к серьезной проблеме. Разные, сильно искривленные части вселенной, сообщение между которыми было прежде невозможным, должны объединиться таким образом, чтобы их стыковка была непротиворечивой. Единственная предшествующая «причинная» связь между этими частями осуществлялась в самой сингулярности. В дополнение ко всем грандиозным, но по существу техническим проблемам, относящимся к физике ранних состояний высокой плотности, мы сталкиваемся с проблемой *первопричины*. Это вопрос о *начальных условиях* в существенно сингулярном состоянии [60, 119*].

Однако уместно спросить, не является ли начальная сингулярность в этих моделях скорее следствием использованных математических упрощений, чем действительной физической ситуацией, которую описывает модель. В частности, на практике бывает важно постулировать высокую степень симметрии (например, пространственную однородность) для возможности детального математического анализа модели. А при наличии такой симметрии почти неизбежен вывод о том, что в какой-то момент в прошлом вся материя во вселенной должна была быть одновременно

сжата в точку или по крайней мере в линию или в двумерную поверхность [6, 43, 47а, 99]. Возможные пути выхода из указанных затруднений состоят во введении достаточно большой космологической постоянной, в наличии «непонятной» материи (например, с отрицательной плотностью энергии: сюда относятся модели с непрерывным творением вещества в пространстве), в допущении достаточно большого вращения или в изменении законов физики, которые могли действовать на очень ранней стадии развития вселенной. Кроме того, можно принять во внимание квантовые эффекты гравитации, хотя они могли быть важны только при «нелепо» высоких плотностях (например, 10^{93} г/см³ или по крайней мере 10^{53} г/см³). Но гораздо более существенной представляется роль локальных неоднородностей материи и кривизны. Действительно, нет оснований ожидать, что вблизи сингулярности модель должна напоминать современный мир.

Возможно, ситуация будет более ясной для процесса, обращенного во времени. Представим себе, что вся материя во вселенной одновременно сжата в единственную «центральную точку» (или «линию» и т. д.). Тогда обращение плотности в бесконечность в этой точке (или линии, и т. д.) едва ли удивительно. Если же мы немного возмутим движение концентрирующегося вещества, так чтобы оно не фокусировалось строго в одну точку (линию и т. д.), то можно ожидать, что хотя плотность и становится очень высокой, но она не обращается в бесконечность¹⁾. Можно рассмотреть возможность того, что вселенная испытывает

¹⁾ В действительности может реализоваться иная ситуация, что особенно хорошо видно на примере пылевидной среды (уравнение состояния $p = 0$). В этом случае одновременная «фокусировка» (сингулярность) собираемого вещества действительно требует специального задания одной из произвольных функций, определяющих поле скоростей вещества. Однако отказ от этого специального выбора (произвольное возмущение первоначального поля скоростей) не устраняет сингулярность, а просто приводит к существенно неодновременной «фокусировке» (т. е. к такой «фокусировке», которая не может быть сделана одновременной никаким выбором системы отсчета) [130*]. — *Прим. перев.*

эффективный «отскок», т. е. наблюдаемое в настоящее время расширение вселенной можно было бы рассматривать как результат предшествующей фазы сжатия, причем переход от сжатия к расширению осуществляется через сконденсированную, чрезвычайно асимметричную и сложную промежуточную фазу.

Картина такого типа предлагалась многими авторами [54]. Детальное рассмотрение, проведенное Лифшицем и Халатниковым [53], также предполагает, что устранение сингулярности малыми возмущениями движения действительно может иметь место. Однако, как мы увидим в разд. 11, недавние исследования исключили большинство возможностей такого рода¹⁾. В настоящем разделе я остановлюсь на тесно связанном с этой проблемой явлении сингулярностей при гравитационном коллапсе. Существенное сходство между явлением гравитационного коллапса и обращенными во времени ранними стадиями космологических моделей типа «большого взрыва» особенно сильно подчеркивалось Уилером [113]. Есть, по-видимому, определенные преимущества в том, чтобы сосредоточить внимание на более локальном явлении коллапса, а не на глобальных космологических вопросах, поскольку для изучения локального явления нам не требуется знания всей крупномасштабной структуры вселенной (или требуется?). Если локальные законы физики сильно подвержены влиянию структуры вселенной как целого («принцип Маха»), мы по крайней мере могли бы ожидать, что локальное явление *менее чувствительно* к таким изменениям законов; и наконец, в отличие от вселенной как целого коллапс *не есть* нечто, данное нам только *однажды*, так что мы в состоянии эксплуатировать огромные теоретические возможности «мысленного эксперимента». По моему

¹⁾ Недавно Лифшиц, Халатников и Белинский [125*, 126*], а затем Мизнер [127*] открыли «колебательный» характер приближения к сингулярности в однородных космологических моделях IX типа Бианки. В дальнейших исследованиях Лифшиц, Халатников и Белинский [128*] приводят аргументы в пользу того, что решение будет иметь такой характер и в общем случае вблизи сингулярности. — *Прим. ред.*

мнению, более глубокие аспекты космологической проблемы не могут быть решены без одновременного более глубокого понимания того, что представляет собой коллапс.

Но что же строго понимается под «гравитационным коллапсом?» Идея гравитационного коллапса берет свое начало из классического изучения больших, сферически симметричных тел. Согласно работе Чандрасекара [21, 39], холодное, сферически симметричное (невращающееся) тело, достигшее конца термоядерной активности, не может сопротивляться действию гравитационных сил, если его масса намного больше солнечной¹⁾. Поэтому такое тело будет катастрофически коллапсировать. Его коллапс может быть остановлен только каким-либо механизмом, способным выбросить достаточно большую массу, чтобы тело попало ниже чандрасекаровского предела. Согласно некоторым подробным вычислениям (для ссылок см. [107]), для начальных масс между 1, 2 и 15 масс Солнца высокая интенсивность нейтринного излучения из коллапсирующего ядра звезды может быть достаточной для того, чтобы сбросить внешние слои звезды и оставить центральную *нейтронную* звезду. Холодная нейтронная звезда (которая по существу является огромным атомным ядром, удерживаемым гравитационными, а не ядерными силами) должна быть несколько *менее* массивной, чем Солнце (предел Оппенгеймера — Волкова [67]), хотя и во много раз меньшей, с диаметром всего лишь около 10 км. Полагают, что гигантский взрыв, сопровождающий этот процесс, объясняет по крайней мере один тип сверхновых [107].

Нейтронная звезда может существовать неограниченно долго, если не происходит аккреции. Но что произойдет при больших начальных массах? Например, наблюдаются звезды с массами порядка 60 сол-

¹⁾ Проблемы коллапса и его астрофизическое значение подробно описаны в книгах Я. Б. Зельдовича и И. Д. Новикова «Релятивистская астрофизика», изд-во «Наука», 1967 и «Теория тяготения и эволюция звезд», изд-во «Наука», 1971. — Прим. ред.

нечных. Согласно упомянутым вычислениям, есть указания на то, что ядро остается *слишком* массивным, чтобы образовать нейтронную звезду, и поэтому продолжает коллапсировать. Если предполагать, что поддерживается *точная* сферическая симметрия, то ядро будет сжиматься, проходя *через* радиус Шварцшильда $r = 2m$, до тех пор пока не достигнет сингулярности пространства-времени в центре, $r = 0$. Остальное вещество звезды, не выброшенное слишком далеко, будет следовать за ядром. Однако наблюдатель, расположенный на больших расстояниях от звезды, никогда не увидит коллапс внутрь сферы $r = 2m$. Коллапс звезды будет казаться ему замедленным, а радиус звезды будет достигать значения $r = 2m$ асимптотически.

Прежде чем обсуждать физическую реалистичность этой картины, рассмотрим решение уравнений Эйнштейна, на котором она основана, а именно решение Шварцшильда. Оно определяет сферически симметричное гравитационное поле вне коллапсирующей звезды. В обычных шварцшильдовских координатах имеем

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (10.1)$$

Пусть граница звезды определяется как $r = f(t)$. Тогда метрика (10.1) применима только вне этой границы, т. е. при $r \geq f(t)$ (с обычными неравенствами и отождествлениями для θ и ϕ). Граница звезды должна быть временноподобной: $|f'(t)| < 1 - 2m/r$, откуда следует, что она никогда не пересекает $r = 2m$ в (10.1) (рис. 34). На этом основании можно было бы подумать, что звезда всегда остается вне $r = 2m$. Но если мы вычислим полное собственное время частицы, находящейся на поверхности звезды, причем для простоты предположим, что звезда коллапсирует свободно, то мы обнаружим, что собственное время является *конечным*. Таким образом, наблюдатель, падающий вместе со звездой, по истечении этого

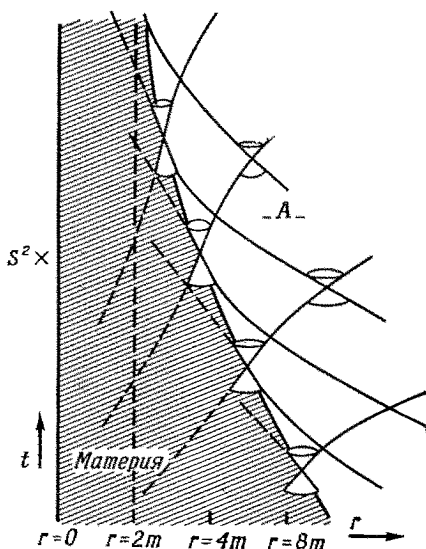
Рис. 34. Картина Шварцшильда.

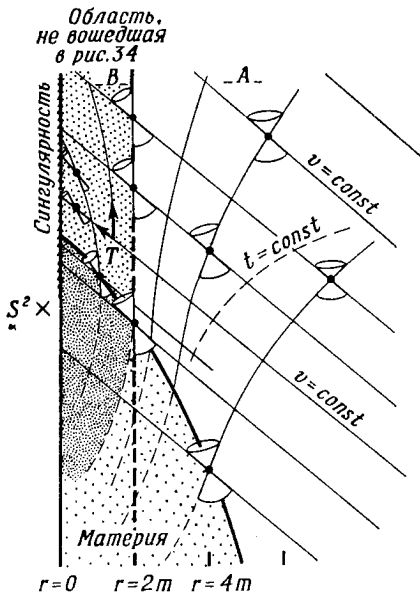
конечного времени должен быть либо уничтожен (например, вследствие бесконечных приливных сил или других форм сингулярности), либо он обнаружит, что находится в другой части вселенной, не покрываемой координатами (10.1).

В данном случае реализуется вторая возможность. В этом можно убедиться с помощью преобразования координат в (10.1), если ввести опережающий временной параметр $v = t + r + 2m \ln(r - 2m)$. Тогда метрика принимает форму Эддингтона — Финкельштейна [27, 32] [ср. с (8.14)]:

$$ds^2 = (1 - 2m/r) dv^2 - 2 dv dr - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (10.2)$$

При $r > 2m$ формы (10.1) и (10.2) в точности эквивалентны, но (10.2) обладает тем преимуществом, что метрика покрывает большую область, причем без всяких особенностей. В окрестности (световой) гиперповерхности $r = 2m$ метрика является совершенно регулярной. Эту гиперповерхность иногда называют сингулярностью Шварцшильда только потому, что более привычная форма (10.1) обладает координатной сингулярностью на $r = 2m$. Поверхность звезды пересекает $r = 2m$ при определенном значении v (хотя, конечно, неподходящий параметр t становится здесь бесконечным) и движется дальше в направлении $r = 0$.



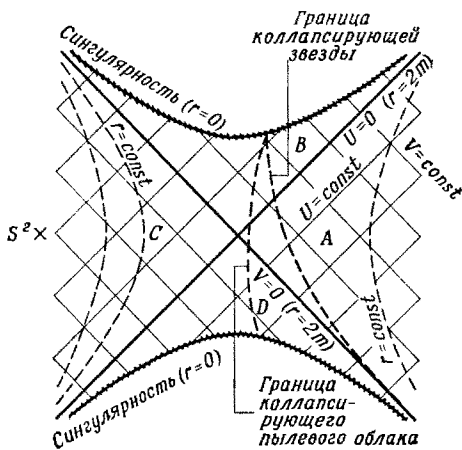


Р и с. 35. Картина Эддингтона — Фinkelштейна.

Но вследствие расположения световых конусов (рис. 35) внешний наблюдатель ничего не может увидеть в пустой области $r \leq 2m$. Это происходит потому, что в пустоте $r = 2m$ является световой гиперповерхностью, лежащей «выше» (т. е. в будущем от) всей внешней области.

Наблюдатель или сигнал могут пересечь гиперповерхность снаружи внутрь, но не наоборот. Гиперповерхность $r = 2m$ является *горизонтом событий*, причем более абсолютного характера, чем большинство из тех, которые рассмотрены в разд. 9. Действительно, эта гиперповерхность служит горизонтом событий для *всех* геодезических, уходящих на бесконечность.

Если проследить за поверхностью звезды внутри области $r = 2m$, то мы увидим, что она с неизбежностью достигает $r = 0$. Дело в том, что поверхность должна непрерывно двигаться во временноподобном направлении, а световые конуса наклоняются все больше и больше в сторону оси $r = 0$. Если мы опять вычислим полное собственное время частицы, находящейся на поверхности звезды (предполагая падение свободным или несвободным), вплоть до точки, в которой частица достигает $r = 0$, то мы обнаружим, что это время конечно. Но теперь нет никакой надежды



Р и с. 36. Картина Крускала.

продолжить решение дальше. Если вычислить скаляры кривизны, построенные из тензора Вейля, то мы найдем, что они стремятся к бесконечности при $r \rightarrow 0$. Таким образом наш наблюдатель, успешно сопровождавший звезду через $r = 2m$, теперь должен быть разорван бесконечными приливными силами в истинной сингулярности $r = 0$.

Эта схема была нарисована Оппенгеймером и Снайдером [68], когда они рассматривали динамику коллапсирующего однородного облака пылевых частиц. Пространство-время *внутри* такого пылевого облака также может быть точно и просто описано и оказывается не чем иным, как (частью) вселенной Фридмана (разд. 9). Это опять подчеркивает тесную связь между конечной сингулярностью при гравитационном коллапсе и конечной (или начальной) сингулярностью в релятивистской космологии.

Если мы хотим рассмотреть всю историю гравитационно связанного газового облака Оппенгеймера—Снайдера, а не только заключительные стадии гравитационного коллапса, то для этой цели даже метрическая форма (10.2) не годится, так как она не покрывает

вает всей пустой области. Поведение пылевого облака симметрично во времени. Так же как и вселенная Фридмана при $k = 1$ ($\lambda = 0$), облако расширяется из начальной сингулярности до максимального объема и затем сжимается до конечной сингулярности. Таким образом, следует ожидать, что возможна сшивка области, заполненной материей, с наружной пустой сферически-симметричной областью, которая также симметрична во времени. Мы можем изобразить эту область, используя U, V -координаты Крускала [50а], которые связаны с координатами Шварцшильда r, t (в области $r > 2m$) посредством соотношений

$$\frac{V}{U} = -e^{t/2m}, \quad VU = e^{r/2m} \left(1 - \frac{r}{2m}\right). \quad (10.3)$$

Тогда метрика принимает вид

$$ds^2 = f^2 dU dV - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (10.4)$$

где

$$f^2 = \left(\frac{32m^3}{r}\right) e^{-r/2m}. \quad (10.5)$$

Область, занятая материей, соединяется с областью Крускала вдоль временноподобной гиперповерхности. Эта гиперповерхность изображается временноподобной геодезической на (U, V) -плоскости Крускала (рис. 36). Другими словами, в этой модели рассматривается только часть диаграммы, лежащая вправо от этой геодезической. Левая часть рис. 36 должна быть заменена сферически симметричной частью ($\simeq D^3 \times E^1$) вселенной Фридмана (9.18), граница которой является опять-таки гиперповерхностью ($\simeq S^2 \times E^1$), образованной временноподобными геодезическими. Эти две части сшиваются достаточно гладко (ср. с [107]).

Один недостаток формы Крускала метрики Шварцшильда состоит в том, что (10.4) не дано «точно», а зависит от решения уравнения (10.3) для r . Форма Эддингтона — Финкельштейна (10.2) значительно

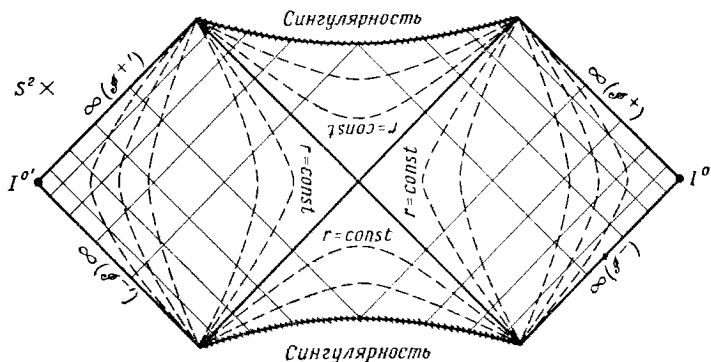


Рис. 37. Картина Крускала с кочформной бесконечностью.

проще и интересна тем, что из нее можно легко получить главные черты крускаловского продолжения. Чтобы достичь этого, заметим, что (10.2) покрывает две части A, B диаграммы Крускала (рис. 36) (с $2mV^2 = = e^{v/2m}$). Используя запаздывающий параметр u [ср. с (8.11)] вместо опережающего параметра v , мы можем аналогичным образом покрыть части A, D рис. 36 другой «координатной картой», причем A будет областью перекрывания. Совершенно аналогичным способом можно покрыть части C, B или C, D «координатной картой», имеющей форму (10.2). При желании в областях перекрывания B и D можно получить формулы преобразования. Для этого надо вернуться к форме (10.1) (при $0 < r < 2m$) как к промежуточной стадии. Этим методом нельзя получить одно свойство крускаловского продолжения, а именно регулярность пространства-времени на 2-сфере $U = V = 0$. Однако метод имеет большую эвристическую ценность в применении к другим, более сложным продолжениям, из которых наиболее известны решения Керра и Рейснера—Нордстрема [ср. с (10.18), (10.20)] [12, 18, 37]. В этой связи полезно также иметь вариант диаграммы Крускала, в котором представлена конформная бесконечность (например, с помощью координат $p = \text{arctg} [\text{Arsh } V]$, $q = \text{arctg} [\text{Arsh } U]$ (рис. 37).

Теперь вернемся к случаю коллапсирующей звезды. Может ли вообще описание, которое я дал, считаться физически реалистичным? Например, можно ли даже при сохранении точной сферической симметрии сказать, что мы знаем достаточно много о свойствах материи при плотностях (для рассмотренных случаев — несколько больше ядерной), при которых звезда, как предполагается, падает сквозь ее «шварцшильдовскую горловину»? Не может ли оказаться, что по некоторым причинам массивная звезда неизбежно сбрасывает достаточно много вещества при приближении к $r = 2m$, так что ее масса неизменно уменьшается ниже предела Чандрасекара или Оппенгеймера — Волкова, создавая тем самым условия для устойчивого, самоподдерживающегося состояния? Повидимому, в течение многих лет преобладала точка зрения, согласно которой звезда всегда в состоянии предохранить себя от коллапса каким-нибудь способом. Возможно, это происходило потому, что астрономы не чувствовали необходимости рассматривать самоподдерживающиеся тела с массами, во много раз превосходящими солнечную. Но открытие квазизвездных объектов (см., например, [90]) стимулировало возобновление интереса к гравитационному коллапсу.

Дело в том, что фантастическое количество энергии, излучаемое объектами, и их очень малые размеры предполагают, что массы отдельных объектов достигают порядка 10^6 или 10^8 солнечных масс. Далее, шварцшильдовский радиус сферически симметричного тела пропорционален его массе. Таким образом, характерная плотность, при которой тело пересекает $r = 2m$, должна быть обратно пропорциональна квадрату его массы. Для объекта в 10^6 — 10^8 солнечных масс эта плотность не является чрезмерно высокой. В самом деле, Фаулер подчеркивал, что для объекта в 10^{11} солнечных масс (масса галактики средних размеров) эта характерная плотность меньше плотности воздуха! И нет никаких оснований думать, что такой объект обязательно выбросит практически все вещество перед достижением $r = 2m$.

Далее, что можно сказать о роли отклонений от сферической симметрии? Например, можно ли *определить* аналог $r = 2m$ для асимметричного тела? И не может ли случиться, что наличие *вращения* всегда предотвращает наступление конечных стадий коллапса? Вопрос о вращении особенно важен. Например, если присутствует дифференциальное вращение, то существуют равновесные состояния для объектов с массами, значительно превосходящими чандрасекаровский предел [69]. Однако при наличии вязкости возможному конечному состоянию может соответствовать только однородное вращение. Устойчивость таких тел является решающим соображением [21a], и оказывается, что при определенных обстоятельствах вращающееся тело может коллапсировать. К счастью, известно решение уравнений Эйнштейна в вакууме, а именно решение Керра [12, 48], обобщающее решение Шварцшильда путем включения *углового момента*. Решение Керра содержит два произвольных параметра m и a , где m определяет массу, как и в решении Шварцшильда, а ma определяет угловой момент. Решение [приведенное точно в (10.18)] носит довольно специальный характер (например, квадрупольный момент должен быть равен $2ma^2$), но кажется вероятным, что по крайней мере главные черты геометрии пространства-времени, окружающего вращающееся коллапсирующее тело, можно получить из анализа этого решения. Одно из наиболее значительных свойств этого решения состоит в том, что при $a > m$ нет аналога «шварцшильдовской горловины», т. е. для внешних наблюдателей нет горизонта событий, который мог бы помешать получению сигналов из внутренних областей. С другой стороны, при $a < m$ такой горизонт *существует*, и решение качественно напоминает решение Шварцшильда в том отношении, что оно обладает похожей «горловиной», которая в состоянии в конце концов «проглотить» весь материал (сверх-)звезды. Есть, однако, и другие свойства решения, качественно отличающиеся от случая решения Шварцшильда. Некоторые из них будут ниже обсуждены, а пока я остановлюсь на вопросе «горловины» самой

по себе и дам определение, которое можно будет использовать как критерий ее существования.

Вернемся к решению Шварцшильда. Для удобства рассмотрим метрику в форме (10.2) и исследуем рис. 35. Мы хотим выделить свойство области V , которое характеризовало бы ее как «особую» в некотором смысле. Надо подчеркнуть, однако, что область V не имеет ничего особенного *локально*. Малая окрестность любой точки в области V является таким же хорошим решением вакуумных уравнений Эйнштейна, как и любая другая, и в ней нет ничего «сингулярного». Но создается впечатление, что вся область V с неизбежностью «схлопывается» некоторым образом к сингулярности пространства-времени в $r = 0$. Чтобы описать это схлопывание, нам надо подобрать частично *глобальный* аспект области V , но он не должен быть слишком глобальным, поскольку нам требуется свойство, которое не будет разрушаться малыми возмущениями метрики во «время» коллапса.

Выберем точку T в области V на рис. 35, которая лежит внутри $r = 2m$ (но вне области, занятой материей). Такая точка изображает пространственноподобную 2-сферу \mathcal{T} с площадью поверхности $4\pi r^2$ ($r < 2m$). Всякая система материальных частиц, мировые линии которых пересекают \mathcal{T} , должна двигаться дальше со скоростями, ограниченными скоростью света. Другими словами, если мы рассмотрим предельную ситуацию, когда вспышка света излучается на \mathcal{T} , то будут «уходящий» и «входящий» сигналы, изображаемые на рис. 35 двумя отрезками световых геодезических с начальной точкой в \mathcal{T} . Эти отрезки описывают световые гиперповерхности, проходящие через \mathcal{T} , которые образуют $I_+[\mathcal{T}]$. Существенно то обстоятельство, что *обе* части границы «сжимаются». Уменьшается не только площадь поверхности сферы, которая изображается точкой, движущейся по «входящей» световой геодезической, но уменьшается также площадь поверхности сферы, соответствующей «уходящему» сигналу. Именно это свойство поверхности \mathcal{T} я буду использовать, чтобы характеризовать ее как *ловушечную поверхность* [75].

Наличие ловушечной поверхности в области будет служить для нас указанием того, что в последующей истории этой области может случиться нечто «особенное». Точнее:

Ловушечная поверхность \mathcal{F} — это гладкая, компактная, пространственноподобная 2-поверхность, обладающая тем свойством, что световые геодезические, которые пересекают \mathcal{F} ортогонально, локально сходятся в направлении будущего ¹⁾. (10.6)

Эту сходимость удобно измерять величиной ρ из разд. 7. Световые геодезические, ортогонально пересекающие пространственноподобную 2-поверхность, всегда образуют световую гиперповерхность, так что по (7.28) мы имеем $\rho = \bar{\rho}$. Характерной чертой ловушечной поверхности является то, что

$$\rho > 0 \text{ на } \mathcal{F} \quad (10.7)$$

для обеих световых гиперповерхностей, проходящих через \mathcal{F} . По мере продвижения в будущее по каждой из этих гиперповерхностей площадь поверхности вначале уменьшается в каждой точке \mathcal{F} .

Теперь идея состоит в том, чтобы установить связь между существованием в пространстве-времени ловушечной поверхности и последующим развитием либо сингулярности [такой, как $r = 0$ в (10.2)], которая может включать бесконечную кривизну, либо каких-нибудь других свойств, весьма необычных с физической точки зрения. Прежде чем рассматривать строгие математические результаты, выясним, имеются ли вообще основания ожидать, что в реальной вселенной может образоваться ловушечная поверхность. В каждом конкретном случае коллапсирующей звезды или сверхзвезды это, очевидно, вопрос детального астрофизического рассмотрения. Скорость вращения, потеря массы вследствие гравитационного излучения и ухода нейтрино, точный характер асимметрии, тип уравнения состояния, магнитные поля и т. д. — все это

¹⁾ Удобно также предполагать, что \mathcal{F} есть полупространственноподобное множество, однако это не строго необходимо для доказательства теоремы 1.

может иметь отношение к делу. Но существенное обстоятельство, которое я хочу подчеркнуть, состоит в том, что не может быть *принципиальных* возражений против развития ловушечной поверхности. Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим следующий *мысленный эксперимент*.

Технически развитые (но, по-видимому, безрассудно храбрые) существа населяют галактику (предпочтительно эллиптическую), содержащую около 10^{11} звезд. С помощью ракет эти существа ухитрились изменить скорости звезд, причем так, что практически не осталось тангенциальной компоненты. Более того, радиальные скорости были подобраны так, что все звезды падают в направлении центра и должны достичь его окрестности почти в одно и то же время. (Масса-энергия, израсходованная в этой операции, была бы мала по сравнению с массой звезд.) Размер области, в которой должны собраться звезды, приблизительно в 50 раз больше размера солнечной системы. В таком объеме достаточно места для всех звезд, и они могут там собраться раньше, чем возникнет опасность столкновений. (Если угодно, они могут двигаться так, чтобы избежать столкновений вообще!) Но приведет ли это к развитию ловушечной поверхности? Неизбежность этого доказывается простыми рассуждениями. Рассмотрим вспышку (идеализированного) света, излученного в центре примерно в тот момент времени, когда звезды достигают границы критической области. Лучи, первоначально расходящиеся из центра, будут проходить вблизи достаточно большого числа звезд и вследствие фокусирования идеализированных световых лучей [7, 87] (т. е. световых геодезических) гравитационным полем каждой звезды (этот эффект является *наблюдаемым* эффектом в общей теории относительности) начнут сходиться опять. Теперь можно показать, что топологическая сфера, лежащая внутри наиболее удаленной границы световых лучей, будет ловушечной поверхностью.

Этот пример показывает также, что нет причин, по которым наблюдатель должен быть «уничтожен» после

того, как он попал в критическую область. В окрестности ловушечной поверхности кривизна все еще чрезвычайно мала, а пространство-время совершенно регулярно¹⁾. Действительно, локально нет ничего peculiarного в самой ловушечной поверхности. Даже в мире Минковского существует много поверхностей, которые являются «локально ловушечными». Другими словами, они удовлетворяют условиям (10.6), за исключением требования компактности. Чтобы построить такую поверхность, достаточно рассмотреть пересечение световых конусов прошлого двух пространственно разделенных точек.

Но каковы следствия существования ловушечных поверхностей? Я покажу, что если мы (времененно) предположим, что вселенная является *открытой* (т. е. пространственно некомпактной), то наших знаний законов физики недостаточно, чтобы вычислить, хотя бы *в принципе*, будущую историю коллапсирующей системы.

Чтобы предсказать будущее системы, мы обычно требуем, чтобы на пространственноподобной гиперповерхности были определены соответствующие данные Коши. Мы можем также принять, что локальные законы физики таковы, что сигналы распространяются вдоль временноподобных или световых кривых, но не вдоль пространственноподобных. Таким образом, если данные Коши известны на некотором пространственноподобном замкнутом множестве \mathcal{S} , то они могут определять поведение системы только в $D_+(\mathcal{S})$ и $D_-(\mathcal{S})$. Во внешних же областях информация может распространяться вдоль непространственноподобных кривых и не «регистрироваться» на \mathcal{S} . Теперь можно устроить состояние коллапса, исходя из совершенно разумных данных на пространственноподобной гиперповерхности \mathcal{S} , которые (поскольку мы рассматриваем локальную физическую ситуацию, а не космологическую) можно считать *эффективно* продолженными до бесконечности, безотносительно к тому, является

¹⁾ В [26] рассматривается слабо несферический коллапс и подтверждается вывод об образовании ловушечной поверхности.

ли вселенная действительно пространственно некомпактной. Таким образом, для *предсказуемости* мы требуем существования некомпактной пространственноподобной гиперповерхности \mathcal{C} , которая является глобальной гиперповерхностью Коши для \mathcal{M} , или точнее, для которой $D_+(\mathcal{C}) = I_+(\mathcal{C})$. Как мы увидим позже, вопрос о том, действительно ли космологическая природа пространства-времени подходит для локального процесса коллапса, отнюдь не тривиален.

Теорема I. Следующие требования к пространству-времени ¹⁾ \mathcal{M} несовместимы:

- (Ia) Существует некомпактная пространственноподобная гиперповерхность \mathcal{C} , для которой $D_+(\mathcal{C}) = I_+(\mathcal{C})$.
- (Iб) Существует ловушечная поверхность $\mathcal{T} \subset I_+(\mathcal{C})$.
- (Iв) $R_{ab}l^a l^b \leq 0$ для каждого светового вектора l^a .
- (Iг) \mathcal{M} полно относительно световых геодезических, направленных в будущее.

Требование (Iг) означает, что всякая световая геодезическая в \mathcal{M} может быть продолжена в будущее до сколь угодно больших значений (заданного) аффинного параметра. Физически мы можем представлять себе это как утверждение: «фотоны (или нейтрино, или гравитоны) не могут исчезать». Это представляется весьма разумным физическим требованием на пространство-время. В разд. II мы должны будем рассмотреть иной тип полноты, а именно полноту относительно временноподобных геодезических («частицы, находящиеся в инерциальном движении, не могут исчезать»). Возможны также и другие типы, такие, как «полнота относительно кривых с ограниченным ускорением». Это означает, что все продолжимые

¹⁾ Рассматриваемые здесь миры предполагаются ориентируемыми во времени (разд. 5). Однако все результаты (например, теоремы I, II, III) будут также применимы в соответствующей форме и без этого предположения. Для всякого неориентируемого во времени лоренцовского многообразия всегда существует дважды накрывающее многообразие, которое является ориентируемым во времени. (Рассмотрите пространство всех световых полуконусов на многообразии. Это дает искомое двойное накрывающее; ср. с [55].)

временноподобные кривые с ограниченной кривизной имеют бесконечную полную длину¹⁾ (т. е. «частицы, испытывающие ограниченные силы, не могут исчезать»). Все эти типы полноты *неэквивалентны*, что можно видеть на специально подобранных примерах [35, 52].

Однако, по-видимому, нет большой разницы в том, какое из определений применять. Возможно, определения неэквивалентны только в присутствии областей бесконечно большой кривизны. В любом случае доказательство существования таких областей приближает нас к цели — теоремам I, II, III. К сожалению, еще не установлены результаты, которые позволили бы *непосредственно* предсказать существование таких областей на основании «разумных» или «общих» физических предположений, хотя теорему I и особенно теоремы II и III можно трактовать как сильное косвенное указание на это [118*].

Условие $R_{ab}l^a l^b \leq 0$ есть просто (7.35) и является следствием уравнений Эйнштейна (7.1) (с λ -членом или без него) и положительности плотности энергии (7.34). (В «собственной тетраде» тензора T_{ab} положительная плотность означает, что $T_{00} \geq 0$, $T_{00} + T_{11} \geq 0$, $T_{00} + T_{22} \geq 0$, $T_{00} + T_{33} \geq 0$.) Это неравенство является необходимым с физической точки зрения, особенно потому, что его нарушение, по-видимому, приводит к серьезной проблеме, связанной с квантовой теорией поля, а именно к явной катастрофической неустойчивости вакуума. Но этот вопрос не вполне ясен.

Прежде чем приступать к доказательству теоремы I, будет полезно установить некоторые леммы относительно структуры полупространственноподобной границы. Напомним [ср. с (9.4)–(9.6)], что любая ППГ является подмножеством \mathcal{P} множества \mathcal{M} вида

$$\mathcal{P} = i_+[\mathcal{K}] \text{ или, что эквивалентно, } \mathcal{P} = i_-[\mathcal{L}], \quad (10.8)$$

где \mathcal{K} , $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$. Разделим \mathcal{P} на четыре части (некоторые из них могут быть пустыми): \mathcal{P}_N , \mathcal{P}_+ , \mathcal{P}_- и \mathcal{P}_0 ,

¹⁾ Термин «длина» будет часто использоваться здесь для обозначения «собственного времени» на временноподобной кривой.

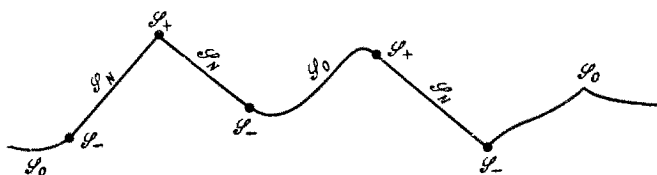


Рис. 38. Разные части полупространственноподобной границы. (Световые направления наклонены под углом 45° .)

определенные следующим образом. Если $X \in \mathcal{P}$, то могут существовать или не существовать точки $Y, Z \in \mathcal{P}$, отличные от X , для которых

$$I_+(X) \subset I_+(Y), \quad I_-(X) \subset I_-(Z). \quad (10.9)$$

Разные возможности определяют подмножества \mathcal{P}_N , \mathcal{P}_+ , \mathcal{P}_- , \mathcal{P}_0 согласно схеме

$$x \in \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} (\exists Z) \\ \mathcal{P}_N \end{array} & \begin{array}{c} (\exists Z) \\ \mathcal{P}_+ \end{array} \\ \hline \mathcal{P}_- & \mathcal{P}_0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} (\exists Y) \\ (\exists Y) \end{array} \quad (10.10)$$

Интуитивный смысл этих подмножеств состоит в том, что \mathcal{P}_N представляет собой световую часть \mathcal{P} , причем \mathcal{P}_+ и \mathcal{P}_- — образованы соответственно конечными и начальными токами \mathcal{P}_N , а \mathcal{P}_0 представляет собой пространственноподобную часть \mathcal{P} (рис. 38). Более точное утверждение содержится в следующей лемме, которая дает также несколько более удобное условие того, что точка лежит в \mathcal{P}_N , \mathcal{P}_+ или \mathcal{P}_- .

Лемма 1. Пусть $X \in \mathcal{P}$, где \mathcal{P} есть ППГ, определенная по (10.8). Пусть \mathcal{A} — открытое множество, содержащее X . Тогда условие

а) $I_+(X) \subset I_+[\mathcal{X} - \mathcal{A}]$ влечет за собой $X \in \mathcal{P}_N \cup \mathcal{P}_+$,

б) $I_-(X) \subset I_-[\mathcal{P} - \mathcal{A}]$ влечет за собой $X \in \mathcal{P}_N \cup \mathcal{P}_-$.

Кроме того, отрезок световой геодезической на \mathcal{P}

в) проходит через X , если $X \in \mathcal{P}_N$,

г) имеет X в качестве конечной точки, если $X \in \mathcal{P}_+$,

д) имеет X в качестве начальной точки, если $X \in \mathcal{P}_-$.

Чтобы доказать лемму I, предположим, во-первых, что $I_+(X) \subset I_+[\mathcal{H} - \mathcal{A}]$. Пусть \mathcal{B} — малый шар в нормальных координатах с центром в X и границей \mathcal{B} , где $\bar{\mathcal{B}} \subset \mathcal{A}$. Рассмотрим последовательность (X_n) точек с $X_n \in I_+(X) \cap \mathcal{B}$, которая сходится к X . Для каждого X_n существует $W_n \in \mathcal{H} - \mathcal{A}$ с $W_n \ll X_n$. В \mathcal{B} содержится связная часть световой кривой, соединяющей W_n и X_n с начальной точкой $Y_n \in \mathcal{B}$ и конечной точкой X_n . Так как \mathcal{B} компактно, существует точка Y на \mathcal{B} , такая, что последовательность (Y_n) сходится к Y . В нормальной координатной системе Y и X соединяются геодезической k , проходящей через X . Легко видеть, что k не может быть пространственно-подобной (для малого \mathcal{B}). Она не может быть и временноподобной, так как тогда мы имели бы $Y \ll X$, так что $W_n \ll Y_n \ll X$ для некоторого n , что противоречит $X \notin I_+[\mathcal{H}]$. Итак, k является световой геодезической. Следовательно, $I_+(X) \subset I_+(Y)$. Далее, $Y_n \in I_+[\mathcal{H}]$ и поэтому $Y \in \bar{I}_+[\mathcal{H}]$. Так как $X \notin I_+[\mathcal{H}]$, то $Y \notin I_+[\mathcal{H}]$ и $Y \in \mathcal{P}$. Это доказывает (а), (б) и половину (в). Доказательство (г), (д) и другой половины (в) совершенно аналогично. [Совпадение двух геодезических, полученных для (в), следует из того, что \mathcal{P} полупространственноподобно.]

Два отрезка световой геодезической на \mathcal{P} могут иметь общую точку X только в том случае, когда $X \in \mathcal{P}_+$ или $X \in \mathcal{P}_-$. Этот вывод верен также в случае сколь угодно близких отрезков световой геодезической на \mathcal{P} . Следующий результат делает это утверждение более точным.

Лемма II. Пусть \mathcal{P} есть ППГ, а k — отрезок световой геодезической, лежащий на \mathcal{P} , с конечной (соответственно — начальной) точкой P . Предположим, что некоторое открытое множество \mathcal{A} , содержащее $k - P$, пересекает \mathcal{P} по гладкой световой гиперповерхности \mathcal{A} , для которой сходимость ρ неограниченна вблизи P (мы выбираем касательный вектор l^a к k гладким в P). Тогда $P \in \mathcal{P}_+$ (соответственно \mathcal{P}_-).

Доказательство леммы II зависит от другого результата (изложенного, впрочем, более подробно, чем необходимо).

Лемма III. Пусть k — отрезок световой геодезической в \mathcal{M} и пусть \mathcal{N}_1 и \mathcal{N}_2 — гладкие световые гиперповерхности, проходящие через k , для которых $\mathcal{N}_1 \subset I_+[\mathcal{N}_2] \cup \mathcal{N}_2$. Тогда $\rho_2 - \rho_1 \geq |\sigma_2 - \sigma_1|$ на k (ρ_i, σ_i относятся к \mathcal{N}_i ; l^a одно и то же для каждого \mathcal{N}_i на k ; $i = 1, 2$).

Для доказательства леммы III¹⁾ рассмотрим две гладкие скалярные функции u_i ($i = 1, 2$) на \mathcal{M} , где $u_i = 0$ определяет \mathcal{N}_i (в некоторой окрестности k), причем u_i увеличивается в направлении будущего с неисчезающим градиентом на \mathcal{N}_i . Мы можем выбрать u_i так, чтобы $\nabla_a u_1 = \nabla_a u_2 = l_a$ на k . В достаточно малой окрестности k мы имеем $u_2 \geq u_1$. Следовательно, $X^a \nabla_a (u_2 - u_1) + \frac{1}{2} X^a X^b \nabla_a \nabla_b (u_2 - u_1) \geq 0$ на k для каждого множества компонент (X^a) с достаточно малым $|X^a|$. Пусть $\nabla_a u_i = l_{(i)a}$, так что $l_{(1)a} = l_{(2)a} = l_a$ на k . Выберем m_a на k комплексным, световым и ортогональным к l_a , причем $m_a \bar{m}^a = -1$. Полагая $X^a = \lambda m^a + \bar{\lambda} \bar{m}^a$, получим $\lambda^2 (\sigma_2 - \sigma_1) + 2\lambda \bar{\lambda} (\rho_2 - \rho_1) + \bar{\lambda}^2 (\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1) \geq 0$ [ср. с (7.33)]. Это должно выполняться при любых λ и, следовательно, $\rho_2 - \rho_1 \geq |\sigma_2 - \sigma_1|$.

Для доказательства леммы II предположим, что $P \in \mathcal{S}_N$ (где P — конечная точка k). Тогда k можно продолжить в будущее на \mathcal{S} до точки $R \in \mathcal{S}$. Световой конус прошлого $I_-(R)$ несингулярен в некотором открытом множестве \mathcal{G} , где $k - P \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{M}$ (для R , достаточно близкого к P). Теперь применяем лемму III, где $\mathcal{N}_2 = \mathcal{G} \cap I_-(R)$ и $\mathcal{N}_1 = \mathcal{G} \cap \mathcal{N}$. Но если $\rho = \rho_1$ неограниченно вблизи P (и положительно, так

¹⁾ *Примечание к русскому изданию.* Изложенное здесь доказательство не вполне строго. Исправленный вариант доказательства будет опубликован в [132*].

как Φ не является неограниченным в P), то $\rho_2 - \rho_1$ должно стать отрицательным вблизи P , нарушая неравенство из леммы III. Таким образом, лемма II доказана.

Из леммы I сразу вытекает следствие: если \mathcal{T} есть некоторое замкнутое подмножество \mathcal{M} и

$$\mathcal{P} = \dot{I}_+[\mathcal{T}], \quad (10.11)$$

то

$$\mathcal{P}_- \cup \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{T}. \quad (10.12)$$

Это следует из части (а) леммы I, поскольку при $X \in \mathcal{P} - \mathcal{T}$ некоторая окрестность \mathcal{L} точки X не будет пересекать \mathcal{T} , так что $\mathcal{K} - \mathcal{L} = \mathcal{K}$, где $\mathcal{K} = \mathcal{T}$. Из (10.12) и частей (в) и (г) следует, что каждая точка множества $\mathcal{P} - \mathcal{T}$ является конечной точкой отрезка световой геодезической на \mathcal{P} . В частности, этот результат применим к $\dot{I}_+(P)$ или к любому горизонту частицы. Этот результат можно также обратить во времени, так что при $\mathcal{P} = \dot{I}_-[\mathcal{T}]$ каждая точка множества $\mathcal{P} - \mathcal{T}$ является начальной точкой отрезка световой геодезической на \mathcal{P} . Это применимо, в частности, к $\dot{I}_-(P)$ или к любому горизонту событий.

Другое следствие леммы I относится к структуре горизонтов Коши. Этот результат не потребуется при доказательстве теоремы I, но будет использован в следующем разделе. Есть два простых пути для получения горизонта Коши как части ППГ. Рассмотрим первый из них. Пусть \mathcal{H} замкнуто и полупространственноподобно. Тогда множество $\text{int}\{D_-(\mathcal{H}) \cup I_+[\mathcal{H}]\}$ является объединением $I_+(P)$, где $P \in D_-(\mathcal{H})$. Граница этого множества есть ППГ, содержащая горизонт Коши $H_-(\mathcal{H})$ в качестве части [т. е. как пересечение ППГ с $D_-(\mathcal{H})$]. Второй путь можно описать следующим образом. Пусть, как и прежде, \mathcal{H} замкнуто и полупространственноподобно. Определим [42]

$$W_-(\mathcal{H}) = I_-(\mathcal{H}) - D_-(\mathcal{H}). \quad (10.13)$$

[$W_+(\mathcal{H})$ определяется аналогично.] Тогда $P \in W_-(\mathcal{H})$ тогда и только тогда, когда P является одновременно начальной точкой для продолжимой в будущее вре

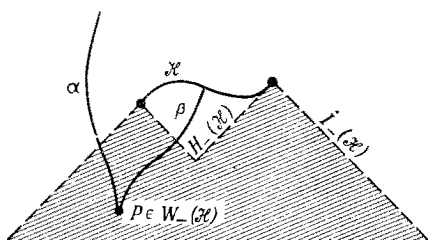


Рис. 39. Полупространственноподобная граница, содержащая горизонт Коши прошлого для \mathcal{H} .

менноподобной кривой α , не пересекающей \mathcal{H} , и начальной точкой для временноподобной кривой β , имеющей конечную точку на \mathcal{H} (рис. 39). Ясно, что $W_-(\mathcal{H})$ является открытым. А также, если $Q \ll P$ и $P \in W_-(\mathcal{H})$, то $Q \in W_-(\mathcal{H})$, так как \mathcal{H} полупространственноподобно. Следовательно,

$$W_-(\mathcal{H}) = I_-[W_-(\mathcal{H})] \quad (10.14)$$

и $\dot{W}_-(\mathcal{H})$ является ППГ. Легко проверить, что

$$H_-(\mathcal{H}) = \dot{W}_-(\mathcal{H}) \cap D_-(\mathcal{H}) \quad (10.15)$$

[из (9.5)], и опять горизонт Коши получен как часть ППГ.

Предположим, что $X \in \dot{W}_-(\mathcal{H})$, но $X \notin$ край (\mathcal{H}) [ср. с (9.13) и т. д.]. Тогда должна существовать либо α -кривая, либо β -кривая с начальной точкой X , но не обе, так как $X \notin W_-(\mathcal{H})$. (Это выполняется тривиальным образом, если мы определим существование вырожденной β -кривой, как только $X \in \mathcal{H}$.) Если не существует α -кривой, то $X \in H_-(\mathcal{H})$; если не существует β -кривой, то $X \in I_-(\mathcal{H}) - \mathcal{H}$. Предположим, что $X \in H_-(\mathcal{H})$, так что существует (возможно, вырожденная) β -кривая с началом в X . Тогда мы можем выбрать малую открытую окрестность \mathcal{A} точки X так, чтобы каждая точка из $\bar{\mathcal{A}} \cap I_-(\mathcal{H})$ была конечной точкой β -кривой (т. е. $I_-(\mathcal{H}) \cap \bar{\mathcal{A}} = \mathcal{H} \cap \bar{\mathcal{A}}$). Действительно, если $X \in \mathcal{H}$, то в силу $X \notin$ край (\mathcal{H}) существуют точки A, B вблизи X ($A \ll X \ll B$), такие, что всякая временноподобная кривая от A до B в окрестности X пересекает \mathcal{H} . В этом случае мы выбираем

$\bar{\mathcal{L}} \subset I_-(B) \cap I_+(A)$. Если $X \notin \mathcal{H}$, то выбираем $\bar{\mathcal{L}}$ внутри области прошлого для β -кривой, идущей из X . Любая точка U из $\mathcal{L} \cap I_-(X)$ лежит в $W_-(\mathcal{H})$, так что U является начальной точкой α -кривой, которая пересекает $\mathcal{L} \cap \bar{I}_-(\mathcal{H})$, скажем, в точке V . Теперь V является начальной точкой для β -кривой, и поэтому $V \in \mathcal{L} \cap W_-(\mathcal{H}) \subset W_-(\mathcal{H}) - \mathcal{L}$. Таким образом, условие (б) леммы I выполнено; следовательно:

Каждая точка множества $H_-(\mathcal{H}) - \text{край}(\mathcal{H})$ является начальной точкой отрезка световой геодезической на $H_-(\mathcal{H})$. (10.16)

Разумеется, то же самое относится к $\dot{I}_-(\mathcal{H}) - \mathcal{H}$. Заметим, что если $H_-(\mathcal{H})$ не пересекает край (\mathcal{H}) , то всякая точка $H_-(\mathcal{H})$ является начальной точкой для *продолжимой в будущее* световой геодезической на $H_-(\mathcal{H})$ [так как продолжая световую геодезическую в будущее, мы никогда не достигнем конечной точки на $H_-(\mathcal{H})$]. Это имеет место [ср. с (9.13)], когда \mathcal{H} есть *бескраевое полупространственноподобное замкнутое множество*. Ясно, что эти результаты применимы также и при их обращении во времени.

Другое следствие (10.16) состоит в том, что *если \mathcal{H} есть полупространственноподобное множество, которое пересекает каждую максимальную световую геодезическую в \mathcal{M} по непустому компактному множеству, то \mathcal{H} есть ГГК для \mathcal{M}* . В самом деле, если бы \mathcal{H} не было ГГК, то оно обладало бы непустым горизонтом Коши, образующие которого (световые геодезические) должны пересекать \mathcal{H} по компактному множеству. Согласно (10.16), концевая точка этого множества должна была бы принадлежать множеству край (\mathcal{H}) . Однако множество край (\mathcal{H}) пустое. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим $\dot{I}_-(\mathcal{H})$. Имеем $\mathcal{H} \subset \dot{I}_-(\mathcal{H})$, так как \mathcal{H} полупространственноподобно. Положим, что существует $P \in \dot{I}_-(\mathcal{H})$, но $P \notin \mathcal{H}$. Световая геодезическая γ , которая является образующей для $\dot{I}_-(\mathcal{H})$, проходит через P и содержит компактную часть \mathcal{H} . Пусть Q лежит на γ между P и этой частью.

Любая световая геодезическая η , проходящая через Q и отличная от γ , может пересечь $I_-[\mathcal{H}]$ только в Q . Таким образом, η не может пересечь \mathcal{H} и, следовательно, точки P не существует. Мы имеем $\mathcal{H} = I_-[\mathcal{H}]$, так что \mathcal{H} есть ППГ; итак, \mathcal{H} является бескраевым, что и требовалось доказать.

В качестве обратного утверждения отметим, что если \mathcal{H} есть некоторое полупространственноподобное множество и $P \in \text{int } D_-(\mathcal{H})$, то всякая продолжимая в будущее световая геодезическая γ , проходящая через P , должна встретить \mathcal{H} . Это следует из существования точки $Q \in D_-(\mathcal{H})$ с $Q \ll P$. Если бы γ не пересекала \mathcal{H} , мы могли бы двигаться строго ниже γ по продолжимой в будущее временноподобной кривой, что противоречит условию $Q \in D_-(\mathcal{H})$. Верен и обратный во времени результат, согласно которому всякая продолжимая в прошлое световая геодезическая, проходящая через произвольную точку $P \in \text{int } D_+(\mathcal{H})$, должна пересекать \mathcal{H} . Это нам вскоре потребуется.

Доказательство теоремы I. Положим $\mathcal{S} = I_+[\mathcal{T}]$, как в (10.11). Тогда, если $P \in \mathcal{S} - \mathcal{T}$, то существует световая геодезическая k , отрезок которой лежит на \mathcal{S} и имеет P в качестве конечной точки. Максимально продолжим геодезическую в прошлое. Она «проткнет» \mathcal{C} , поскольку $P \in \text{int } D_+(\mathcal{C})$. Так как $\mathcal{S} (\subset I_+[\mathcal{C}])$ замкнуто, существует точка $R \in \mathcal{S}$, являющаяся начальной точкой для $k \cap \mathcal{S}$. Она должна лежать на \mathcal{S}_- , поэтому $R \in \mathcal{T}$. Кроме того, k должна пересечь пространственноподобную 2-поверхность \mathcal{T} ортогонально в R , т. е. k лежит на одной из двух световых гиперповерхностей, пересекающихся локально на \mathcal{T} , поскольку они представляют собой локальную границу $I_+[\mathcal{T}]$. Таким образом, \mathcal{S} образовано отрезками \hat{k} световых геодезических, которые ортогональны \mathcal{T} в начальной точке и которые могут иметь конечную точку (где они встречаются с \mathcal{S}_+). В действительности всякий такой отрезок \hat{k} должен иметь конечную точку по лемме II, поскольку условие ловушечной поверхности (10.7) вместе со свойствами фо-

кусирования [ср. с (7.39)] и полноты относительно световых геодезических (Iг) означает, что ρ становится неограниченным в некоторой первой точке Q на \hat{k} или на продолжении k отрезка \hat{k} в будущее. (Фактически вторая возможность является более распространенной. Она соответствует появлению области пересечения, которая обычно возникает прежде, чем достигается *каустика*, где $\rho = \infty$.) Q меняется непрерывно при изменении k [ср. с (7.29), (7.33) и т. д.], так что конечные отрезки RQ образуют компактное множество. Таким образом, \mathcal{S} , будучи замкнутым подмножеством компактного множества, само является компактным. Итак, мы имеем [ср. с (9.7)]:

$$\mathcal{S} \text{ есть полупространственноподобное компактное топологическое 3-многообразие в } \mathcal{M}. \quad (10.17)$$

Далее, хорошо известна теорема (см., например, [101, стр. 201]), согласно которой любое пространство-время допускает гладкое временноподобное единичное векторное поле. Мы можем использовать интегральные кривые этого векторного поля, чтобы попытаться осуществить одно-однозначное отображение \mathcal{S} в \mathcal{C} (оба множества полупространственноподобные), так как, согласно (Iа), $\mathcal{S} \subset D_+(\mathcal{C})$. Однако это невозможно, хотя их размерности одинаковы, но \mathcal{S} компактно, а \mathcal{C} некомпактно. Тем самым (Iа), (Iб), (Iв) (Iг) несовместимы, и теорема I доказана.

В свете теоремы I уместно спросить, какое из ее условий наиболее вероятно нарушается в реальной вселенной. Первым кандидатом является, по-видимому, условие (Iа). Есть две причины, по которым (Iа) может не выполняться. Во-первых, вселенная может быть «замкнутой» (другими словами, пространственнокомпактной). Тогда, казалось бы, мы могли бы произвести замену \mathcal{C} компактной пространственноподобной гиперповерхностью, являющейся ГГК [т. е. с $I_+(\mathcal{C}) = D_+(\mathcal{C})$]. Однако доказательство теоремы I нарушится на конечной стадии, и результат не будет больше верен. Например, все условия выполняются в пространстве де Ситтера (9.14), (9.15), где \mathcal{C} есть се-

чение (9.14) посредством $V = -2a < 0$ ($a = \text{const}$) и \mathcal{F} есть $V = -a$, $W = 0$. С другой стороны, трудно поверить, что вопрос о том, является ли вселенная как целое открытой или замкнутой, существенно влияет на «локальную» коллапсирующую систему (размеры которой меньше по крайней мере в 10^{11} раз). В самом деле, исследование доказательства теоремы I показывает, что оно может быть доведено до конца и в случае компактного \mathcal{S} , но *при условии*, что (в хорошо определенном смысле) коллапсирующий объект не «проглотит» всю вселенную! Замкнутая вселенная типа модели Фридмана с $k = 1$, которая в конце концов сжимается до состояния высокой плотности, может, в принципе, удовлетворять этому условию. Решение проблемы сингулярностей указанным выше способом, по-видимому, исключается теоремой Хокинга [41], которая по существу утверждает, что «почти все» миры с *компактной* ГГК должны быть неполны, если они удовлетворяют более сильному, но «разумному» требованию к R_{ab} , вытекающему из (7.47).

Вторая причина, по которой (1a) может нарушаться, является более серьезной. Лапласовская идея о том, что будущее вселенной должно полностью определяться ее поведением в один момент «времени», предшествовала как теории относительности, так и квантовой теории. Мы уже привыкли к индетерминизму второй теории¹⁾, но почему же мы должны требовать детерминизма во всех случаях в общей теории относительности? Возможность того, что вселенная не должна обладать ГГК, весьма заманчива. Известен ряд физически интересных миров, не содержащих ГГК. Два примера были рассмотрены в разд. 9. Решения Керра [48] и Рейснера — Нордстрема (см., например, [62]), аналитические продолжения которых даны соответственно Бойером и Линдквистом [12] (см. также [18, 19]) и Грейвсом и Бриллом [37], больше

¹⁾ Слово «индетерминизм» здесь вряд ли уместно. В случае квантовой теории до тех пор, пока мы не переходим к «локализации» частицы и тому подобным операциям, а работаем с самой волновой функцией, все причинно определено. — *Прим. ред.*

подходят к обсуждению вопроса о коллапсе (хотя и содержат сингулярности).

Метрика Керра есть

$$ds^2 = dv^2 - \frac{2mr}{h} (dv + a \sin^2 \theta d\varphi)^2 - 2 dv dr + \\ + h d\theta^2 + 2a \sin^2 \theta dr d\varphi + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (10.18)$$

где m и a константы (m — масса, ma — угловой момент) и

$$h = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (10.19)$$

Метрика Рейснера — Нордстрема есть

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right) dv^2 - 2 dv dr - \\ - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (10.20)$$

где v — опережающее время, e — электрический заряд. Метрика (10.18) с $m > |a|$ и метрика (10.20) с $m > |e|$ отчасти подобны в том отношении, что они обладают не только горизонтом событий для внешних геодезических («шварцшильдовская горловина»), который определяется соответственно условием

$$r_+ = m + (m^2 - a^2)^{1/2}, \quad r_+ = m + (m^2 - e^2)^{1/2}, \quad (10.21)$$

но также вторым «горизонтом», на котором световые конусы наклоняются вторично:

$$r_- = m - (m^2 - a^2)^{1/2}, \quad r_- = m - (m^2 - e^2)^{1/2}. \quad (10.22)$$

Обе метрики имеют истинную сингулярность при $r=0$, но природа их несколько различна. В случае метрики Керра сингулярность имеет кольцевую структуру.

После прохождения кольца мы попадаем в область $r < 0$. (Как показал Картер [19], вблизи кольца встречаются замкнутые временноподобные кривые.) Отвлекаясь от поведения метрики вблизи (и на) сингулярности, мы можем изобразить общую картину, как на рис. 40. С помощью процедуры сшивания, аналогичной той, которая применяется в шварцшильдовском случае, можно получить «максимальное» аналитическое продолжение (рис. 41). Заштрихованная часть рис. 41 соответствует всему рис. 40. Вся

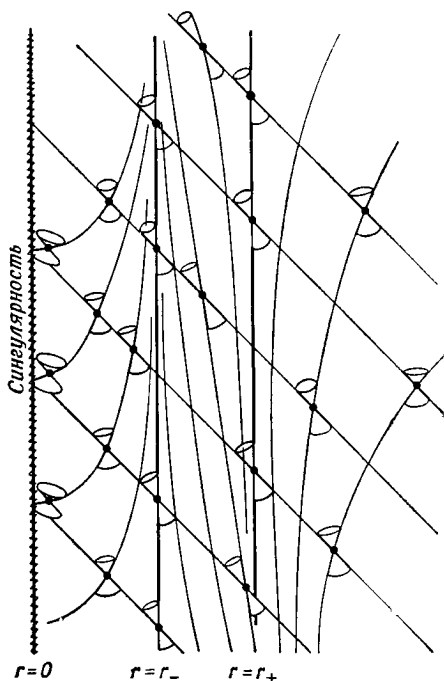
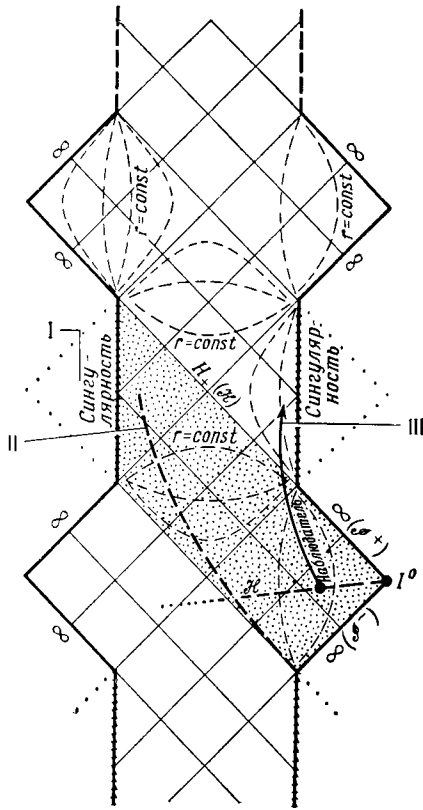


Рис. 40. Картина Керра, применимая также к метрике Рейснера — Нордстрема.

диаграмма рис. 41 может быть склеена (за исключением некоторых центральных точек) из перекрывающихся кусков, изометричных заштрихованной области. (Для этой цели необходимо отдавать себе отчет в существовании дискретной симметрии метрики, которая не видна из записей (10.18), (10.20); ср. с [12].)

Значение всего этого состоит в том, что наблюдатель, следующий внутрь со звездой, а после пересечения $r=r_+$, движущийся с ускорением наружу, может оказаться в части вселенной, которая причинно не определяется информацией, заданной на естественной начальной гиперповерхности \mathcal{H} . Действительно, наблюдатель пересекает $H_+(\mathcal{H})$. Область, в которую он попадает, содержит сингулярность, которую он может «видеть». Но поскольку он пересекает $H_+(\mathcal{H})$, мы, разумеется, не можем гарантировать, что пространство-время, в которое он попадает, является тем, которое мы для него построили. По существу, «другая вселенная» присоединяется к той, с которой он начал. То частное продолжение, которое мы выбрали, было получено путем *аналитического продолжения*, а не с помощью уравнений поля. (Но даже аналитическое

Рис. 41. Картина Картера—Бойера—Линдквиста, включающая картину Грейвса—Брилла. I — область, находящаяся «по ту сторону» кольца в решении Керра; II — граница звезды (ниже этой линии решение неприменимо); III — наблюдатель попадает в новую часть вселенной, не связанную причинно с \mathcal{H} .



продолжение не обеспечивает глобальной однозначности. Поразительным примером является рассмотренное в разд. 9 пространство-время Тауба—НУТ. Но в плоском пространстве-времени аналитическое продолжение также не подразумевает однозначности.

Трудность в том, что в общем случае неизвестно, когда надо отождествлять события, достигнутые по разным путям.) Даже если бы мы избежали сингулярности в «новой вселенной», остается принципиальная проблема типа той, которая имеется на ранних стадиях космологических моделей «большого взрыва». Причинно не связанные области должны объединиться таким образом, чтобы они «стыковались». Впечатляющим примером является решение Рейснера—Нордстрема, в котором «новая вселенная» должна содержать новые заряженные частицы

в точности того же полного заряда. (Это следует даже независимо от симметрии.)

Есть еще одна трудность, с которой сталкивается наш наблюдатель, пересекая $H_+(\mathcal{H})$. Когда он смотрит на вселенную, которую он «покидает», то, бросив на нее последний взгляд при пересечении $H_+(\mathcal{H})$, наблюдатель видит всю последующую историю остальной части его «прежней вселенной». Именно здесь космологические вопросы могут быть очень важны для наблюдателя. Если, например, вместе со звездой будет сжиматься неограниченное количество материи, то, вероятно, наблюдатель столкнется с бесконечной плотностью материи вдоль « $H_+(\mathcal{H})$ ». Даже если сжимается только конечное количество материи, может оказаться невозможным в общем случае избежать сингулярности кривизны на $H_+(\mathcal{H})$. В настоящее время этот вопрос не решен, но не исключено, что именно в этой области надо скорее (или с той же вероятностью?) искать сингулярность, чем в «центре». В этой связи интересен пример коллапсирующего заряженного облака пыли, предложенный Бардином [5] (ср. с [23а, 66а]). В данном случае сингулярность *не наступает* внутри $D_+(\mathcal{H})$, хотя сингулярность заряда должна быть создана в «новой вселенной» позади $H_+(\mathcal{H})$ (рис. 41). Волнующим вопросом является возможность приписать какую-либо реальность той ситуации, когда «новая вселенная» создается в результате коллапса. Мы можем рассматривать (10.17) как указание на то, что ловушечная поверхность приводит к появлению пространственнокомпактной вселенной, которая «отпочковывается» от старой. Однако все эти результаты покоятся на предположении, что $H_+(\mathcal{H})$ может сохраниться без появления сингулярностей кривизны при произвольном возмущении на \mathcal{H} . Мы должны также иметь в виду, что возможность избежать сингулярностей кривизны кажется маловероятной в свете теоремы III из следующего раздела.

11.

Сингулярности в космологии

Этот раздел посвящен двум важным теоремам Хокинга [40, 42]. В некоторых местах аргументация будет дана только в общих чертах; за подробностями мы отсылаем читателя к оригинальным статьям Хокинга. Цель теорем состоит в том, чтобы показать, что с точки зрения современных физических представлений в пространстве-времени существуют (или существовали) особые области, вероятно, включающие огромные кривизны, где, как следует ожидать, локальные физические законы сильно отличаются от тех, к которым мы привыкли. Теорема II интересна главным образом тем, что в ней нигде не сделано предположений, связанных с причинностью. Она применима только к пространственнокомпактной вселенной, удовлетворяющей условию (неравенству), которое может выполняться и в реальной вселенной, но которое невозможно проверить путем наблюдений. С другой стороны, теорема III содержит аналогичное условие, которое, согласно Хокингу и Эллису [44], вероятно, можно удовлетворить даже на основании имеющихся в настоящее время астрономических наблюдений. В обращенной во времени форме теорема III будет также применима к соответствующей ситуации гравитационного коллапса (такой, как слабо возмущенное коллапсирующее пылевое облако Оппенгеймера — Снайдера; см. разд. 10). В теореме III используется предположение причинности, но гораздо менее жесткого типа, чем условие (Ia) существования глобальной гиперповерхности Коши в теореме I. Фактически должны быть исключены замкнутые временноподобные кривые (т. е. $\approx S^1$), но мы будем использовать более сильный вариант этого требования.

Пусть $P \in M$. Тогда на M эквивалентны следующие условия относительно P [42, 50]:

Существуют сколь угодно малые окрестности точки P , каждая из которых не пересекает ни одной временноподобной кривой по несвязному множеству, (11.1)

т. е., грубо говоря, временноподобные кривые из окрестности P не могут покинуть и затем снова вернуться в окрестности P ;

Если $P < Q$ и каждая точка из $I_-(Q)$ хронологически предшествует каждой точке из $I_+(P)$, то $P = Q$ (11.2)

(ср. разд. 9) и

Утверждение (11.2) обратимо во времени. (11.3)

Если выполняется (11.1), (11.2) или (11.3), то мы говорим, что в P выполняется сильная причинность. Если это условие выполняется для всех $P \in M$, то мы говорим, что сильная причинность выполняется в M . Эквивалентность (11.1) — (11.3) установить нетрудно, поэтому мы опускаем доказательство. Приведенный Хокингом пример, для которого условие не выполняется, изображен на рис. 42. [Используя метрику и координаты Минковского, удаляем области $(x^0 > 1, x^1 \leq -1)$, $(x^0 < -1, x^1 \geq 1)$, $(x^0 = -x^1 = 1)$ и $(x^0 = -x^1 = -1)$; затем отождествляем $(1, x^1, x^2, x^3)$ с $(-1, -x^1, x^2, -x^3)$, $x^1 < -1$; P — начало координат. Если в P выполняется сильная причинность, мы называем окрестность \mathcal{A} точки P причинно выпуклой, при условии, что ни одна из временноподобных кривых не пересекает \mathcal{A} по несвязному множеству [ср. с (11.1)].

Если в P нарушается сильная причинность, произвольно малое возмущение метрики в окрестности P может привести к появлению замкнутых временноподобных кривых, которые в силу ряда причин являются крайне нежелательными с физической точки зрения. Таким образом, представляется весьма разумным предположение о том, что сильная причинность должна выполняться в каждой точке пространства-времени. Другим условием, более слабым, чем (11.1) —

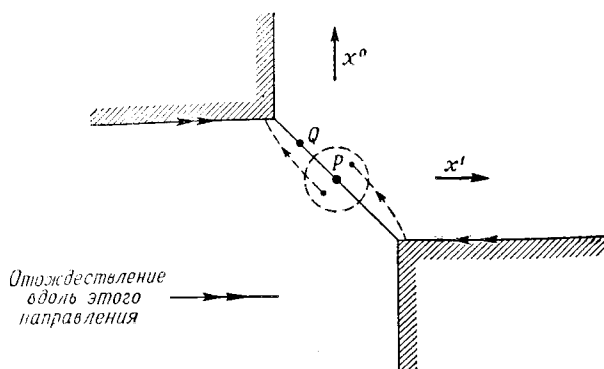


Рис. 42. Пространство, в котором отделимость прошлого и будущего выполняется, а сильная причинность не выполняется.

(11.3), но более сильным, чем отсутствие замкнутых временноподобных кривых, является условие *отделимости будущего* [50] в P

$$I_+(P) = I_+(Q) \text{ влечет за собой } P = Q. \quad (11.4)$$

Оно утверждает, что временноподобная кривая, проходящая через P в будущее, не может затем вернуться сколь угодно близко к точке P . Мы говорим, что \mathcal{M} удовлетворяет условию *отделимости прошлого* в P тогда и только тогда, когда для всех Q

$$I_-(P) = I_-(Q) \text{ влечет за собой } P = Q. \quad (11.5)$$

Картер¹⁾ предложил иерархию условий причинности, более сильных, чем (11.1). Опять-таки, нарушение любого из условий Картера могло бы привести к появлению замкнутых временноподобных кривых при слабом возмущении \mathcal{M} .

¹⁾ Одно из таких условий было бы нарушено, если бы существовали две точки $P, R \in \mathcal{M}$, такие, что для любой окрестности \mathcal{P} точки P и любой окрестности \mathcal{R} точки R всегда нашлась бы временноподобная кривая с начальной точкой в \mathcal{P} и конечной точкой в \mathcal{R} и другая временноподобная кривая с конечной точкой в \mathcal{P} и начальной точкой в \mathcal{R} . Такое поведение может иметь место без нарушения сильной причинности, в чем можно убедиться, если взять в качестве \mathcal{M} двулистное накрывающее многообразие для того многообразия, которое изображено на рис. 42 (Картер).

Условие того, чтобы сильная причинность выполнялась в каждой точке \mathcal{M} , фактически эквивалентно утверждению, что «топология Александрова» \mathcal{T}^* является хаусдорфовой [50], где открытые множества \mathcal{T}^* имеют в качестве базы множества $I_+(X) \cap I_-(Y)$. Это опять-таки эквивалентно утверждению, что \mathcal{T}^* согласуется с обычной топологией многообразия для \mathcal{M} . На рис. 42 приведен случай, когда упомянутое условие нарушается. В этом примере любое открытое в \mathcal{T}^* множество, содержащее P , пересекает любое открытое в \mathcal{T}^* множество, содержащее Q , так что свойство Хаусдорфа нарушается.

Теперь сформулируем теоремы.

Теорема II (теорема Хокинга). Следующие требования на пространство-время \mathcal{M} несовместимы:

- (IIa) Существует компактная пространственно-подобная гиперповерхность (без границы) \mathcal{H} .
- (IIб) Дивергенция θ единичной нормали к \mathcal{H} положительна в каждой точке \mathcal{H} .
- (IIв) $R_{ab}t^at^b \leq 0$ для каждого временноподобного вектора t^a .
- (IIг) \mathcal{M} полно относительно временноподобных геодезических, направленных в прошлое.

Можно рассматривать (IIa) и (IIб) как утверждения о том, что «вселенная является (или была) пространственнокомпактной и расширяющейся». Однако такое «расширение», какое подразумевается в (IIб), должно иметь место в *каждой* точке \mathcal{H} . Таким образом, в присутствии коллапсирующего объекта мы не можем обеспечить (IIб) для \mathcal{H} «в настоящее время». Поэтому, если бы это условие было выполненным, вероятно, \mathcal{H} следовало бы относить к ранним фазам расширения.

С учетом уравнений Эйнштейна (7.1) требование (IIв) является энергетическим условием (7.47), которое (если еще $\lambda = 0$) очень разумно с физической точки зрения.

Теорема III (теорема Хоккинга). Следующие требования на пространство-время \mathcal{M} несовместимы:

- (IIIa) Сильная причинность выполняется в каждой точке из $\bar{I}_-(P)$ для некоторой точки $P \in M$.
- (IIIб) Дивергенция всех временноподобных и световых геодезических, проходящих через P , изменяет знак где-то в прошлом от точки P .
- (IIIв) $R_{ab}t^at^b \leq 0$ для каждого временноподобного вектора t^a .
- (IIIг) \mathcal{M} полно относительно временноподобных и световых геодезических, направленных в прошлое.

Условие (IIIб) сформулировано несколько нестрого, поскольку дивергенция временноподобных геодезических измеряется величиной θ из (7.40), а дивергенция световых геодезических измеряется с помощью ρ из (7.18), (7.33). Область, в которой ρ изменяет знак, не есть в действительности предел области, в которой θ изменяет знак. Другая формулировка (IIIб) состоит в упоминании только временноподобных геодезических и в утверждении, что (соответствующее) изменение знака происходит внутри *компактной области*.

Я дам набросок доказательств теорем II и III, указывая также главные леммы. (Эти леммы и их доказательства по существу заимствованы у Хоккинга [40, 42], хотя приведенное здесь обсуждение несколько отличается от оригинального.)

Лемма IV. Если существует пространственноподобная гиперповерхность \mathcal{H} (без границы), являющаяся замкнутым подмножеством \mathcal{M} (т. е. собственно вложенным), то существует накрывающее многообразие \mathcal{M}^* для \mathcal{M} , где прообраз \mathcal{H} под накрывающей картой состоит из множества дискретных изометрических копий \mathcal{H} , каждая из которых является полупространственноподобной в \mathcal{M}^* .

Идея состоит в том, чтобы превратить \mathcal{H} [в (IIIa)] в полупространственноподобное множество, «развора-

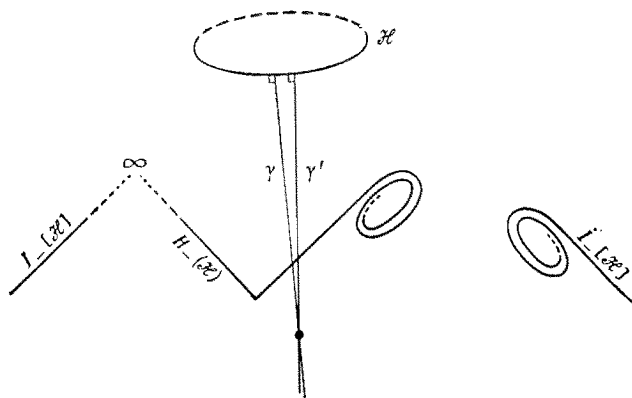


Рис. 43. Тип ситуаций в теореме II, который следует иметь в виду.

чивая» \mathcal{M} , но не настолько сильно, чтобы новое \mathcal{H} стало некомпактным. Для этой цели выбираем точку O в \mathcal{M} , затем каждому $P \in \mathcal{M}$ и каждому классу эквивалентности кривых, соединяющих O и P , число пересечений которых с \mathcal{H} есть заданное целое число, ставим в соответствие точку \mathcal{M}^* . (Число пересечений является гомотопическим инвариантом, поскольку \mathcal{H} не имеет краев.) Легко проверить, что \mathcal{M}^* обладает свойствами, требуемыми в лемме. [Эта конструкция позволяет эффективно получить \mathcal{M}^* из универсального накрывающего многообразия для \mathcal{M} , устанавливая отношение эквивалентности между элементами фундаментальной группы \mathcal{M} , а именно называя два таких элемента эквивалентными, если они дают равные числа пересечений с \mathcal{H} (см. также [34]).]

Без уменьшения общности мы можем теперь рассматривать \mathcal{M}^* как \mathcal{M} в теореме II, так что мы можем считать \mathcal{H} полупространственноподобным множеством. Чтобы мы могли рассматривать теоремы II и III параллельно, определим для теоремы III

$$\mathcal{H} = \dot{I}_-(P). \quad (11.6)$$

(Выполнение сильной причинности в P означает, что \mathcal{H} есть непустое множество, напоминающее световой

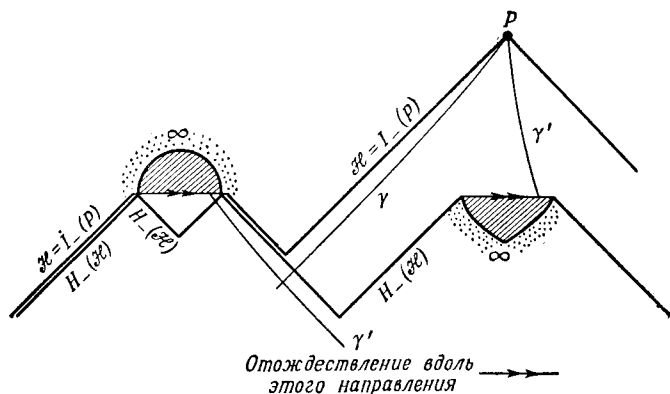


Рис. 44. Неприятный тип ситуации в теореме III, который следует иметь в виду.

конус в P .) Тогда в обоих случаях мы имеем $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}}$ как бескраевое полупространственноподобное множество.

Полезно иметь в виду некоторые типы ситуаций, которые могут возникнуть. В теореме II мы имеем дело с ситуацией типа той, которая изображена на рис. 43. Ни $H_-(\mathcal{H})$, ни $I_-(\mathcal{H})$ не могут встретить \mathcal{H} , поскольку \mathcal{H} является бескраевой и пространственноподобной гиперповерхностью. Каждая точка $H_-(\mathcal{H})$ лежит на продолжимой в будущее световой геодезической на $H_-(\mathcal{H})$. Геодезическая может уходить в бесконечность или (поскольку предположений причинности мы не делали) просто по винтовой линии в некоторой компактной области (ср. с рис. 33). Неприятный тип ситуаций, который может встречаться в теореме III, изображен на рис. 44. Здесь $H_-(\mathcal{H})$ может пересекать \mathcal{H} . [Именно эта возможность вынуждает нас ввести предположение причинности (IIIa).]

Лемма V. Если $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}}$ является бескраевым и полупространственноподобным¹⁾, то $\text{int } D_-(\mathcal{H})$ состоит

¹⁾ Примечание к русскому изданию. Условия на \mathcal{H} необходимо дополнить требованием, чтобы в каждой точке \mathcal{H} выполнялась сильная причинность (см. [131*]).

из всех точек $X \in I_-[\mathcal{H}]$, для которых множество $J_+(X) \cap \bar{I}_-[\mathcal{H}]$ является компактным и не содержит точек, в которых нарушается сильная причинность.

Обозначим множество таких точек X буквой \mathcal{X} [относительно $J_+(X)$ см. (9.2)]. Пусть $X \in \mathcal{X}$. Рассмотрим продолжимую в будущее временноподобную кривую с X как начальной точкой. Если кривая не пересекает \mathcal{H} , то в силу компактности $\mathcal{Y} = J_+(X) \cap \bar{I}_-[\mathcal{H}]$ она должна иметь точку накопления в \mathcal{Y} . Это невозможно, поскольку в \mathcal{Y} выполняется сильная причинность. Следовательно, $\mathcal{X} \subset D_-(\mathcal{H})$. Кроме того, $X \notin H_-(\mathcal{H})$, так как в противном случае, согласно (10.16), продолжимая в будущее световая геодезическая с начальной точкой X будет лежать в \mathcal{Y} , причем \mathcal{H} — бескраевое. (Такая световая геодезическая не может содержаться в компактном множестве, если во множестве выполняется сильная причинность.) Отсюда $\mathcal{X} \subset \text{int } D_-(\mathcal{H})$. Для доказательства обратного утверждения прежде всего напомним, что если $Z \in \text{int } D_-(\mathcal{H})$, то любая продолжимая в будущее *непространственноподобная* кривая, проходящая через Z , должна пересечь \mathcal{H} . Далее, сильная причинность не может нарушаться в любой точке $Z \in \text{int } D_-(\mathcal{H})$. [В противном случае мы могли бы использовать Q из (11.2), чтобы получить ZQ как световую геодезическую, вдоль которой нарушается сильная причинность и максимальное продолжение которой не пересекает \mathcal{H} .] Предположим теперь, что $\mathcal{Z}_0 = J_+(Z_0) \cap \bar{I}_-[\mathcal{H}]$ не является компактным для некоторого $Z_0 \in \text{int } D_-(\mathcal{H})$. Покроем \mathcal{Z} локально конечной системой причинно выпуклых открытых множеств \mathcal{U}_i , которые достаточно малы, чтобы выполнялось следующее требование. Любая точка U в \mathcal{U}_i должна быть центром открытого шара \mathcal{B}_U в нормальных координатах, содержащего $\bar{\mathcal{U}}_i$. Пусть $Z_0 \in \mathcal{U}_{i_0}$. Так как \mathcal{Z}_0 некомпактно, оно содержит последовательность точек W_j без точки накопления в \mathcal{Z}_0 . Существует непространственноподобная кривая от Z_0 до W_j , которая пересекает \mathcal{B}_Z , скажем, в V_j . Пусть V — точка накопления для V_j . Отрезок непространственноподобной гео-

геодезической Z_0V пересекает \mathcal{U}_{i_0} в единственной точке $Z_1 \in \mathcal{U}_{i_0}$. Тогда $\mathcal{Z}_1 = J_+(Z_1) \cap \bar{I}_-[\mathcal{H}]$ содержит последовательность точек W_j без точки накопления в \mathcal{Z}_1 и, следовательно, также некомпактно. Повторяя это рассуждение, получим последовательность $Z_0 < Z_1 < Z_2 < \dots$, которая лежит на непространственноподобной кривой γ . Из свойства локальной конечности системы \mathcal{U}_i следует, что Z_i не имеет точки накопления и поэтому γ есть продолжимая в будущее непространственноподобная кривая, проходящая через Z_0 и не пересекающая \mathcal{H} . Таким образом, $Z_0 \notin \text{int } D_-(\mathcal{H})$, т. е. $\text{int } D_-(\mathcal{H}) \subset \mathcal{R}$. Этим завершается доказательство леммы V.

Если \mathcal{A} и \mathcal{R} — подмножества или точки \mathcal{M} , определим $d(\mathcal{A}, \mathcal{R})$ как наименьшую верхнюю грань длин всех временноподобных кривых с начальной точкой (в) \mathcal{A} и конечной точкой (в) \mathcal{R} . Полагаем $d(\mathcal{A}, \mathcal{R}) = 0$, если таких кривых нет. В некоторых случаях мы будем иметь $d(\mathcal{A}, \mathcal{R}) = \infty$ (но, например, для ограниченных подмножеств мира Минковского d всегда конечно: временноподобная прямая линия, соединяющая две точки в мире Минковского, имеет максимальную длину по сравнению со всеми временноподобными кривыми, соединяющими эти точки).

Лемма VI. Если $\mathcal{H} = \bar{\mathcal{H}}$ — бескраевое и полупространственноподобное, то $d(X, \mathcal{H})$, где $X \in \text{int } D_-(\mathcal{H})$ ограничено и достигается на некоторой геодезической γ , соединяющей X и \mathcal{H} .

По лемме V мы знаем, что $\mathcal{U} = J_+(X) \cap \bar{I}_-[\mathcal{H}]$ компактно и поэтому может быть покрыто конечным числом малых открытых окрестностей \mathcal{B}_i в нормальных координатах. Так как на $\text{int } D_-(\mathcal{H})$ выполняется сильная причинность, мы можем сделать границы \mathcal{B}_i причинно выпуклыми. Обозначим через d_i наименьшую верхнюю грань длин временноподобных кривых в \mathcal{B}_i . Тогда из локального рассмотрения следует, что d_i конечно и достигается (фактически на геодезической).

Если γ — временноподобная кривая от X до \mathcal{H} , то ее длина не может превышать $d = \sum d_i$. Следова-

но, $d(X, \mathcal{H})$ конечно. Далее, из компактности следует, что максимум $d(X, Y)$ для $Y \in \mathcal{H}$ будет достигаться, скажем, при $Y = Y_0$. Чтобы построить γ максимальной длины от X до \mathcal{H} так, чтобы длина γ действительно равнялась $d(X, \mathcal{H})$, выберем нормальный координатный шар \mathcal{B} с центром Y_0 и выберем $Z = Z_0$ так, чтобы максимизировать $d(X, Z) = d(Z, Y_0)$, где $Z \in \mathcal{U}$ перемещается по компактной границе \mathcal{B} шара \mathcal{B} . Пусть γ — геодезическая с конечной точкой Y_0 , которая проходит через Z_0 и продолжается в прошлое до длины d . Повторим приведенную выше аргументацию, применяя ее к Z_0 вместо Y_0 и максимизируя $d(X, V) + d(V, Z_0)$. Мы получим V_0 , которое должно лежать на γ , так как временноподобная кривая с изломом всегда увеличивает свою длину при сглаживании излома. Продолжая этот процесс, мы видим, что γ должна заканчиваться в начальной точке X , что и доказывает лемму VI.

Лемма VII. Если \mathcal{H} — пространственноподобная гиперповерхность и γ — отрезок временноподобной геодезической от X до \mathcal{H} , максимизирующий $d(X, \mathcal{H})$, то γ пересекает \mathcal{H} ортогонально и не содержит точек (разве что за исключением X), сопряженных к \mathcal{H} .

Доказательство не отличается существенно от случая многообразия с положительно определенной метрикой [58]. Точка, сопряженная к \mathcal{H} на γ , есть фокальная точка конгруэнции Γ временноподобных геодезических, ортогональных к \mathcal{H} [т. е. точка, где θ из (7.40) становится бесконечным].

Мы можем также применять лемму VII в предельном случае к гиперповерхности \mathcal{H} из (11.6), требуемой в теореме III. В этом случае, если γ — отрезок временноподобной геодезической от X до \mathcal{H} , который максимизирует $d(X, \mathcal{H})$, то, чтобы быть «ортогональным» к \mathcal{H} , отрезок γ должен проходить через P . Всякая другая точка \mathcal{H} лежит на световой геодезической на \mathcal{H} , которая простирается в будущее до более далеких от X точек. Тогда мы интерпретируем лемму VII как утверждение о том, что γ проходит через

P и не содержит точек (разве что за исключением X), сопряженных к P (т. е. фокальных точек конгруэнции Γ временноподобных или световых геодезических, проходящих через P).

Теперь мы можем применить эти результаты к теоремам II и III. Пусть t^a обозначает поле единичных (направленных в будущее) касательных векторов к временноподобным γ из Γ . По (IIб) или (IIIб) мы имеем $\theta > 0$ в некоторой точке из $\bar{I}_-[\mathcal{H}]$ на каждой $\gamma \in \Gamma$. Тогда в силу (IIв) или (IIIв) и эффекта Райчаудури [ср. с (7.40) — (7.47), а также с (7.39)] мы получим фокальную точку $G(\theta = \infty, -\rho = \infty)$ где-то на каждой из $\gamma \in \Gamma$ в прошлом от \mathcal{H} . [В этом месте используется полнота относительно временноподобных (IIг), (IIIг) и световых (IIIг) геодезических, направленных в прошлое.] Если фокальных точек несколько, мы выбираем ближайшую к \mathcal{H} (и $\neq P$). Точка G будет изменяться непрерывно при переходе от одной геодезической γ к другой. В силу компактности \mathcal{H} (теорема II) или того факта, что временноподобные и световые направления в P образуют компактную систему (теорема III), мы получаем, что область \mathcal{G} , выметаемая сегментами γ от G до \mathcal{H} , будет компактной.

Согласно леммам VI и VII, мы имеем: $\text{int } D_-(\mathcal{H}) \subset \subset \mathcal{G}$ и, следовательно, $D_-(\mathcal{H}) \subset \mathcal{G} \cup \mathcal{H}$. В частности, $H_-(\mathcal{H}) \subset \mathcal{G} \cup \mathcal{H}$. В теореме II \mathcal{H} пространственно-подобно, поэтому $H_-(\mathcal{H}) \cap \mathcal{H} = \emptyset$. Горизонт Коши $H_-(\mathcal{H})$ как замкнутое подмножество компактного множества \mathcal{G} является компактным. Согласно (10.15) и (9.7), $H_-(\mathcal{H})$ есть, таким образом, компактное многообразие класса C^0 без границы. Согласно (IIг), мы можем продолжить каждую γ в прошлое до длин, больших, чем $\max d(G, \mathcal{H})$. Тогда, согласно леммам VI и VII, каждая γ пересекает $H_-(\mathcal{H})$. Положим $F = \gamma \cap H_-(\mathcal{H})$ и определим $p(F)$ как максимум длин сегментов от F до \mathcal{H} . (Для фиксированного F максимум достигается в силу компактности \mathcal{H} и системы Γ .) Нетрудно видеть, что $p(F)$ [с $F \in H_-(\mathcal{H})$] достигает своей минимальной величины. Пусть $F = F_0$ минимизирует $p(F)$. Световая геодезическая η на $H_-(\mathcal{H})$

имеет F_0 в качестве начальной точки. Пусть F_1 лежит строго в будущем относительно F_0 на η . Длина ломаной кривой от F_0 до \mathcal{H} , которая состоит из малого отрезка F_0F_1 геодезической η и максимальной кривой γ от F_1 до \mathcal{H} , не может быть меньше $p(F_0)$. Такая γ существует, поскольку $D_-(\mathcal{H}) \subset \mathcal{G}$. Сглаживая излом и сдвигая кривую с $H_-(\mathcal{H})$, мы получим временноподобную кривую ξ от F_0 до \mathcal{H} с длиной k , большей чем $p(F_0)$. Взяв B на ξ очень близко к F_0 , чтобы $d(B, \mathcal{H}) > p(F_0)$, и устремляя B к F_0 , получим предельное положение (соответствующей) γ , проходящей через B (при этом используем компактность \mathcal{H}). Это даст нам $p(F_0) \geq k > p(F_0)$, чем устанавливается требуемое в теореме II противоречие.

В теореме III \mathcal{H} не является пространственноподобным и поэтому $H_-(\mathcal{H})$ может пересечь \mathcal{H} (рис. 44)¹⁾. Таким образом, мы не можем предполагать, что $H_-(\mathcal{H})$ компактно, и изложенная выше аргументация неприменима. Взамен этого мы привлечем сильную причинность. Определим отношение \langle на $H_-(\mathcal{H})$ условием:

$$U \langle V \text{ тогда и только тогда, когда } I_-(U) \subset I_-(V), \quad (11.7)$$

[т. е. $U \in \bar{I}_-(V)$]. Тогда \langle является отношением порядка на $H_-(\mathcal{H})$ (более слабым, чем $<$). Положим $\mathcal{A} = \mathcal{G} \cap H_-(\mathcal{H})$. Тогда \mathcal{A} компактно, поскольку $H_-(\mathcal{H})$ замкнуто и \mathcal{G} компактно. Множество $\mathcal{K} = \mathcal{A} \cap \dot{\mathcal{G}} \subset \subset H_-(\mathcal{H}) - \text{int } \mathcal{G} \subset \mathcal{H}$. Пусть $U \subset \mathcal{A}$. Тогда продолжимая в будущее световая геодезическая α на $H_-(\mathcal{H})$ имеет начальную точку U . В силу компактности и сильной причинности α должна покидать \mathcal{A} , скажем, в $U_0 \in \mathcal{K}$, и мы будем иметь $U \langle U_0$. Но в окрестности $\alpha - \mathcal{A}$ есть временноподобные кривые, ведущие в P [так как $\alpha - \mathcal{A} \subset \mathcal{H} = \dot{I}_-(P)$]. Эти временноподобные кривые должны пересечь $H_-(\mathcal{H}) - \mathcal{H} \subset \mathcal{A}$ на их пути в P . В пределе по мере приближения этих кривых к α множество точек пересечения имеет точку накопления V на \mathcal{A} , и легко проверить, что $U_0 \langle V$

¹⁾ Примечание к русскому изданию. Более строгое доказательство изложенных в этом разделе утверждений см. в [131*].

(причем $U_0 \neq V$ вследствие сильной причинности). Подобным же образом V порождает V_0 на \mathcal{H} с $V \langle V_0$ и W с $V_0 \langle W$ ($V_0 \neq W$) и т. д. Последовательность точек $U_0 \langle V_0 \langle W_0 \langle \dots$ на \mathcal{H} должна иметь точку накопления в силу компактности \mathcal{H} . Мы должны были бы иметь нарушение сильной причинности в этой точке. Это доказывает теорему III.

Одно из замечательных свойств теоремы III состоит в том, что нам нет нужды делать какие-либо предположения, кроме сильной причинности, о природе вселенной как целого. Теорема относится только к световому конусу прошлого точки P и к его внутренности, а эти области в принципе могут наблюдаться из точки P . В обращенной по времени форме теорема применима к достаточно однородным моделям коллапса (хотя и не к столь общим, как те, которые укладываются в теорему I) и не требует информации о глобальной космологической картине. (Мы выбираем P в качестве центра и предполагаем, что коллапс подобен последней стадии решения Оппенгеймера — Снайдера.) Поскольку также нет нужды в наличии гиперповерхности Коши, это наталкивает на мысль, что даже если в общих ситуациях горизонт Коши (рис. 41) и существует, это, вероятно, не позволяет избежать сингулярностей где-либо в другом месте.

Когда речь идет о световом конусе прошлого точки P , мы, разумеется, ожидаем, что изменение знака дивергенции геодезических произойдет не раньше, чем будет охвачена существенная часть всей вселенной. Чтобы определить, где находится эта точка, необходимо знать плотность материи во вселенной, которая в настоящее время известна очень неуверенно. Кроме того, большая часть материи, сосредоточенной в галактиках, распределена очень неоднородно, что усложняет общий эффект. Не ясно, можно ли удовлетворить условию (IIIб) вообще на основании одних только наблюдений материальных объектов. Идея Хокинга и Эллиса [44] состоит в том, чтобы использовать плотность *излучения* во вселенной, которое в настоящее время имеет чрезвычайно изотропное рас-

пределение со спектром, близким к чернотельному при абсолютной температуре 3 К. Они утверждают, что этого излучения, благодаря его однородности, должно быть в конечном счете достаточно *самого по себе*, чтобы обеспечить выполнение условия (IIIб), если исключить маловероятный вариант, что присутствует большое количество ионизованного газа. Если этот газ присутствует, тогда *его* должно быть достаточно, чтобы вызвать требуемый эффект фокусирования.

Отсюда следует, что сингулярности¹⁾ (кривизны?) являются реальным свойством нашей вселенной при условии, что выполняются уравнения Эйнштейна. (В действительности уравнения Эйнштейна не так уж сильно используются. Например, если бы мы заменили теорию Эйнштейна теорией Бранса — Дикке [13], то выводы теорем I, II и III остались бы по существу неизменными.) Однако требуется больше результатов, если мы хотим получить какое-нибудь представление о структуре этих особых (вероятно, чрезвычайно искривленных) областей пространства-времени²⁾.

1) Под «сингулярностью» я понимаю особую (пекулярную) область, в которой локальная физика должна быть существенно изменена, возможно, вплоть до того, что представление о пространстве-времени как о гладком многообразии не будет больше адекватным (разд. I).

2) Следует подчеркнуть, что теоремы I, II, III позволяют доказать неполноту пространства-времени [разумеется, при условии, что требования (а), (б), (в) каждой из теорем выполнены.] Очень важно установить природу этой неполноты, поскольку в каждом конкретном случае она может быть разной. Как следует из текста, неполнота пространства-времени не всегда связана с сингулярностью кривизны (скажем, с обращением в бесконечность инвариантов тензора кривизны). Примером может служить упоминавшееся решение Тауба — НУТ. Инварианты тензора кривизны для этого решения всюду имеют определенные конечные значения, в том числе и на горизонтах $H_+(\mathcal{P})$ и $H_-(\mathcal{P})$, за которые не могут быть продолжены некоторые из геодезических. Неполнота имеет здесь, так сказать, метрический, а не топологический характер, т. е. она связана с неопределенностью метрики, а не с тем, что геодезические «натываются» на выброшенные точки. Иная ситуация имеет место для решения в пустоте, обобщающего решение Тауба (так называемая «модель перемешанного мира»; первоначально ее исследовали В. А. Белинский и И. М. Халатников [125*] и Ч. Мизнер [127*]). Этот мир также обладает неполнотой, однако можно показать, что в этом случае инварианты

И чтобы выяснить, какая физика может действовать в такой области, нам требуется гораздо более глубокое, чем в настоящее время, понимание взаимоотношений между материей, квантовой теорией и структурой пространства-времени.

В обычных обстоятельствах при решении практических задач общая теория относительности может стоять в стороне (почти в отрыве) от остальной физики. Но в пространственно-временной сингулярности дело обстоит совсем наоборот.

тензора кривизны вообще не стремятся к какому-либо определенному пределу при приближении к горизонту.

Неполнота пространства-времени может быть вызвана и совершенно «безобидными» причинами. Рассмотрим простейший пример. Метрика $ds^2 = dt^2 - t^2 dz^2$ (остальные два измерения нас сейчас не интересуют) удовлетворяет всем условиям одной из теорем Хокинга [40]. (Эта же метрика удовлетворяет первым трем условиям теоремы II, если гиперповерхность $t = \text{const}$ является компактной, для чего достаточно рассмотреть $-z_0 \leq z \leq z_0$ и отождествить линии $z = -z_0$ и $z = z_0$.) Следовательно, рассматриваемый мир неполон. Однако природа этой неполноты очень проста; здесь мы имеем дело с частью (полного) мира Минковского, а именно с внутренностью светового конуса точки $\tau = 0$, $\xi = 0$, где $ds^2 = d\tau^2 - d\xi^2$; $t \operatorname{ch} z = \tau$, $t \operatorname{sh} z = \xi$. Кривизна не только не имеет сингулярностей, но и вообще тождественно равна нулю. Интересное решение уравнений Эйнштейна с материей получил Шепли [129^{*}]. Рассмотренный им мир также неполон, однако плотность и скорость вещества не имеют на горизонте никаких сингулярностей. По-видимому, дальнейшие исследования позволят доказать, что в «достаточно общих» решениях причиной неполноты является все-таки бесконечная кривизна (или ее неаналитичность). — *Прим. перев.*

Литература¹⁾

1. Y. Aharonov, L. Susskind, *Phys. Rev.*, **158**, 1237 (1967)
2. R. A. Alpher, R. C. Herman, *Nature*, **162**, 774 (1948)
3. A. Avez, *Compt. Rend.*, **254**, 3984 (1962).
4. A. Avez, *Inst. Fourier*, **105** (1963).
5. J. Bardeen, Тезисы Международной конференции по гравитации и общей теории относительности, Тбилиси, 1968.
6. C. Behr, *Z. Astrophys.*, **60**, 286 (1965).
- 6a. P. G. Bergmann, *Phys. Rev. Lett.*, **12**, 139 (1964).
7. B. Bertotti, *Proc. Roy. Soc. (Lond.)*, **A 294**, 195 (1966).
8. H. Bondi, *Nature*, **186**, 535 (1960).
9. H. Bondi, in «Lectures on General Relativity; 1964 Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics», Vol. I, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.
10. H. Bondi, F. A. E. Pirani, I. Robinson, *Proc. Roy. Soc. (Lond.)*, **A251**, 519 (1959).
11. H. Bondi, M. G. J. van der Burg, A. W. K. Metzner, *Proc. Roy. Soc. (Lond.)*, **A269**, 21 (1962).
12. R. H. Boyer, R. W. Lindquist, *J. Math. Phys.*, **8**, 265 (1967).
13. C. Brans, R. H. Dicke, *Phys. Rev.*, **124**, 925 (1961).
14. D. Brill, *Annals of Phys.*, **7**, 466 (1959).
- 14a. D. Brill, S. Deser, *Phys. Rev. Lett.*, **20**, 75 (1968).
15. H. W. Brinkmann, *Nat. Acad. Sci. (U. S.)*, **9**, 1 (1923).
16. H. A. Buchdahl, *Nuovo Cimento*, **10**, 96 (1958); **25**, 486 (1962).
17. E. Calabi, L. Markus, *Ann. Math.*, **75**, 63 (1962).
18. B. Carter, *Phys. Rev.*, **141**, 1242 (1966).
19. B. Carter, *Stationary Axi-symmetric Systems in General Relativity*, Ph. D. Dissertation, Cambridge University, 1967.
20. E. Cartan, *Ann. Ecole Norm. Sup.*, **40**, 325 (1923); **41**, 1 (1924).
21. S. Chandrasekhar, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **95**, 207 (1935).
- 21a. S. Chandrasekhar, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **57** (1967).
22. G. F. Chew, *Sci. Prog.*, **51**, 529 (1963).
23. R. Debever, *Compt. Rend.*, **249**, 1324, 1744 (1959).
- 23a. V. de la Cruz, W. Israel, *Nuovo Cimento*, **51A**, 745 (1967).
24. R. H. Dicke, *Phys. Rev.*, **125**, 2163 (1962).
25. R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. G. Roll, D. T. Wilkinson, *Astrophys. J.*, **142**, 414 (1965).
26. А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, *ЖЭТФ*, **49**, 170 (1965).

¹⁾ Ссылки со звездочкой добавлены переводчиками и редакторами. — *Прим. ред.*

27. A. S. Eddington, *Nature*, **113**, 192 (1924).
28. J. Ehlers, W. Kundt, in «Gravitation», ed. L. Witten, John Wiley and Sons, New York, 1962.
29. A. Einstein, *Ann. Phys.*, **94**, 769 (1916) (русский перевод: А. Эйнштейн, Собрание научных трудов, т. I, изд-во «Наука», М., 1965, стр. 452).
30. A. Einstein, J. Grommer, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, **2** (1927) (русский перевод: А. Эйнштейн, Собрание научных трудов, т. II, изд-во «Наука», М., 1966, стр. 198).
31. A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffmann, *Ann. Math.*, **39**, 65 (1938) (русский перевод: А. Эйнштейн, Собрание научных трудов, т. II, изд-во «Наука», М., 1966, стр. 450).
32. D. Finkelstein, *Phys. Rev.*, **110**, 965 (1958).
33. G. Gamow, *Nature*, **162**, 680 (1948).
34. R. P. Geroch, *J. Math. Phys.*, **8**, 782 (1967).
35. R. P. Geroch, *Singularities in the Spacetime of General Relativity*, Ph. D. Dissertation, Princeton University, 1967.
36. J. N. Goldberg, in «Gravitation», ed. L. Witten, John Wiley and Sons, New York, 1962.
37. J. C. Graves, D. R. Brill, *Phys. Rev.*, **120**, 1507 (1960).
38. Haefliger, см. A. Lichnerowicz, *Topics on Space-Times in «Battelle Rencontres, 1967 Lectures in Mathematics and Physics»*, ed. M. DeWitt and J. A. Wheeler, W. A. Benjamin, New York — Amsterdam, 1968, Ch. V, p. 115.
39. B. K. Harrison, K. S. Thorne, M. Wakano, J. A. Wheeler, *Gravitation Theory and Gravitational Collapse*, University of Chicago Press, Chicago, 1965 (русский перевод: Дж. Уилер, Б. Гаррисон, М. Вакано, К. Торн, Теория гравитации и гравитационный коллапс, изд-во «Мир», М., (1967).
40. S. W. Hawking, *Proc. Roy. Soc. (Lond.)*, **A294**, 511 (1966).
41. S. W. Hawking, *Proc. Roy. Soc. (Lond.)*, **A295**, 490 (1966).
42. S. W. Hawking, *Proc. Roy. Soc. (Lond.)*, **A300**, 187 (1967).
43. S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *Phys. Lett.*, **17**, 246 (1965).
44. S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *Astrophys. J.*, **152**, 25 (1968).
45. S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1962 (русский перевод: С. Хельгасон, Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, изд-во «Мир», М., 1964).
46. L. Infeld, B. L. van der Waerden, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, **9**, 380 (1933).
47. P. Jordan, J. Ehlers, R. K. Sachs, *Akad. Wiss.*, Mainz, **1** (1961).
- 47a. R. Kantowski, R. K. Sachs, *J. Math. Phys.*, **7**, 443 (1966).
48. R. P. Kerr, *Phys. Rev. Lett.*, **11**, 237 (1963).
49. A. Komar, *Phys. Rev.*, **104**, 544 (1963).
50. E. Kronheimer, R. Penrose, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **63**, 481 (1967).

- 50а. M. D. Kruskal, Phys. Rev., **119**, 1943 (1960).
51. N. H. Kuiper, Ann. Math., **50**, 916 (1949).
52. W. Kundt, Z. Phys., **172**, 488 (1963).
53. Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников, УФН, **30**, 391 (1963).
54. R. W. Lindquist, J. A. Wheeler, Rev. Mod. Phys., **29**, 432 (1957).
- 54а. S. MacLane, G. Birkhoff, Algebra, Macmillan, New York, 1967.
55. L. Markus, Ann. Math., **62**, 411 (1955).
56. R. F. Marzke, J. A. Wheeler, in «Gravitation and Relativity», ed. H. Y. Chiu and W. F. Hoffmann, Benjamin, New York, 1964 (русский перевод: Р. Марцке, Дж. Уилер, в сб. «Гравитация и относительность», изд-во «Мир», М., 1965, стр. 107.)
57. J. W. Milnor, Enseignement Math., (2) **9**, 198 (1963).
58. J. W. Milnor, Morse Theory, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, Princeton, 1963 (русский перевод: Дж. Милнор, Теория Морса, изд-во «Мир», М., 1965).
59. C. W. Misner, J. Math. Phys., **4**, 924 (1963).
60. C. W. Misner, Astrophys. J., **151**, 431 (1968).
61. Ч. В. Мизнер, А. Х. Тауб, ЖЭТФ, **55**, 233 (1968).
62. C. Møller, The Theory of Relativity, Oxford University Press, Oxford, 1952 (русский перевод: Кр. Мёллер, Теория относительности, изд-во «Наука», М., 1972).
63. E. T. Newman, L. Tamburino, T. Unti, J. Math. Phys., **4**, 915 (1963).
64. E. T. Newman, R. Penrose, J. Math. Phys., **3**, 566 (1962); **4**, 998 (1963).
65. K. Nomizu, Lie Groups and Differential Geometry, Herald Printing Co. Ltd., Токуо, 1956 (русский перевод: К. Номидзу, Группы Ли и дифференциальная геометрия, ИЛ, М., 1960).
66. G. Nordström, Ann. Phys., **42**, 533 (1913).
- 66а. И. Д. Новиков, Письма ЖЭТФ, **3**, 223 (1966).
67. J. R. Oppenheimer, G. Volkoff, Phys. Rev., **55**, 374 (1939).
68. J. R. Oppenheimer, H. Snyder, Phys. Rev., **56**, 455 (1939).
69. J. P. Ostriker, P. Bodenheimer, D. Lynden-Bell, Phys. Rev. Lett., **17**, 816 (1966).
70. W. T. Payne, Am. J. Phys., **20**, 253 (1952).
71. R. Penrose, Proc. Camb. Phil. Soc., **55**, 137 (1959).
72. R. Penrose, Ann. Phys., **10**, 171 (1960).
73. R. Penrose, in P. G. Bergmann's Aeronautical Research Lab. Tech. Documentary Rept. 63-56: Quantization of Generally Covariant Fields, Office of Aerospace Research, U. S. Air Force, 1963.
74. R. Penrose, in «Relativity, Groups, and Topology», ed. C. M. DeWitt and B. S. DeWitt, Gordon and Breach, New York, 1964.

75. R. Penrose, *Phys. Rev. Lett.*, **14**, 57 (1965).
76. R. Penrose, *Proc. Roy. Soc. (Lond.)*, **A284**, 159 (1965).
77. R. Penrose, *Rev. Mod. Phys.*, **37**, 215 (1965).
78. R. Penrose, in «*Perspectives in Geometry and Relativity*», Indiana University Press, Bloomington, 1966.
79. R. Penrose, *J. Math. Phys.*, **8**, 345 (1967).
80. R. Penrose, *Intern. J. Theor. Phys.*, **1**, 61 (1968).
- 80a. A. Penzias, R. Wilson, *Astrophys. J.*, **142**, 419 (1965).
- 80b. А. З. Петров, Уч. зап. Каз. ун-та, **114**, кн. 8, 55 (1954).
81. F. A. E. Pirani, *Phys. Rev.*, **105**, 1089 (1957) (русский перевод: Ф. Пирани, в сб. «Новейшие проблемы гравитации», ИЛ, М., 1961, стр. 257).
82. F. A. E. Pirani, in «*Lectures on General Relativity: 1964 Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics*», Vol. I, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.
83. F. A. E. Pirani, A. Schild, in «*Perspectives in Geometry and Relativity*», Indiana University Press, Bloomington, 1966.
84. J. Plebanski, *Acta Phys. Polon.*, **27**, 361 (1965).
85. R. V. Pound, G. A. Rebka, *Phys. Rev. Lett.*, **4**, 337 (1960) (русский перевод: Р. Паунд, Г. Ребка, в сб. «Новейшие проблемы гравитации», ИЛ, М., 1961, стр. 474).
86. A. K. Raychaudhuri, *Phys. Rev.*, **98**, 1123 (1955).
87. S. Refsdal, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **128**, 295 (1964).
88. W. Rindler, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **116**, 6 (1956).
89. I. Robinson, *J. Math. Phys.*, **2**, 290 (1961).
90. I. Robinson, A. Schild, E. L. Schucking, eds., *Quasi-Stellar Sources and Gravitational Collapse*, University of Chicago Press, Chicago, 1965.
91. H. S. Ruse, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **50**, 75 (1948).
92. H. Rudberg, *The Compactification of a Lorentz Space*, Thesis, University of Uppsala, Sweden, 1958.
93. R. K. Sachs, *Proc. Roy. Soc. (Lond.)*, **A264**, 309 (1961).
94. R. K. Sachs, in «*Recent Developments in General Relativity*», PWN/Pergamon, Warszawa/New York, 1962.
95. R. K. Sachs, *Proc. Roy. Soc. (Lond.)*, **A270**, 103 (1962).
96. A. Schild, *Am. J. Phys.*, **28**, 778 (1960).
- 96a. J. A. Schouten, *Ricci-Calculus*, Springer, Berlin, 1954.
97. E. Schrodinger, *Expanding Universes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1956.
98. H. J. Seifert, *Z. Naturforsch.*, **22a**, 1356 (1967).
99. L. C. Shepley, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **52**, 1403 (1964).
100. B. Spain, *Tensor Calculus*, Oliver and Boyd, London, 1960.
101. N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1951 (русский перевод: Н. Стинрод, Топология косых произведений, ИЛ, М., 1953).
102. K. Stellmacher, *Math. Ann.*, **123**, 34 (1951).
103. J. L. Synge, *Relativity: the General Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1960 (русский перевод: Дж. Синг, Общая теория относительности, ИЛ, М., 1963).
104. L. A. Tamburino, J. Winicour, *Phys. Rev.*, **150**, 1039 (1966).

105. A. H. Taub, *Ann. Math.*, **53**, 472 (1951).
106. J. Terrel, *Phys. Rev.*, **116**, 1041 (1959).
107. K. S. Thorne, *Relativistic Stellar Structure and Dynamics* in «1966, Les Houches Lectures», ed. C. M. DeWitt, Gordon and Breach, New York, 1967.
108. A. Trautman, in «Lectures on General Relativity; 1964 Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics», Vol. I, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.
109. A. Trautman, in «Perspectives in Geometry and Relativity», Indiana University Press, Bloomington, 1966.
110. B. L. van der Waerden, *Nachr. Ges. Wiss. Goettingen*, **100** (1929).
111. H. Weyl, *Nachr. Ges. Wiss. Goettingen*, **99** (1921).
112. J. A. Wheeler, *Geometrodynamics*, Academic Press, New York, 1962 (русский перевод: Дж Уилер, Гравитация, нейтринно и Вселенная, ИЛ, М., 1962).
113. J. A. Wheeler, in «Relativity, Groups, and Topology», ed. C. M. DeWitt and B. S. DeWitt, Gordon and Breach, New York, 1964.
- 113a. H. Whitney, *Bull. Am. Math. Soc.*, **43**, 785 (1937).
114. E. T. Whittaker, *Proc. Roy. Soc. (Lond.)*, **A158**, 38 (1937).
115. L. Witten, *Phys. Rev.*, **113**, 357 (1959).
- 116*. A. Lichnerowicz, *Topics on Space-Time*, in «Battelle Rencontres; 1967 Lectures in Mathematics and Physics», ed. C. M. DeWitt and J. A. Wheeler, W. A. Benjamin, Inc., New York — Amsterdam, 1968, Ch. V, p. 115.
- 117*. R. Bott, J. Mather, *Topics in Topology and Differential Geometry*, там же, Ch. XVIII, p. 460.
- 118*. R. Geroch, *The Structure of Singularities*, там же, Ch. VIII.
- 119*. Ch. Misner, *Relativistic Fluids in Cosmology*, там же, Ch. VI.
- 120*. R. A. Isaacson, *Phys. Rev.*, **166**, 1263, 1272 (1968).
- 121*. K. S. Thorne, *Astrophys. J.*, **158**, 1; 997 (1969).
- 122*. W. L. Burke, *Phys. Rev.*, **A2**, 1501 (1970).
- 123*. S. Chandrasekhar, F. P. Esposito, *Astrophys. J.*, **160**, 153 (1970).
- 124*. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, *Теория тяготения и эволюция звезд*, изд-во «Наука», М., 1971.
- 125*. В. А. Белинский, И. М. Халатников, *ЖЭТФ*, **56**, 1700 (1969).
- 126*. И. М. Халатников, Е. М. Лифшиц, *Phys. Rev. Lett.*, **24**, 76 (1970).
- 127*. C. W. Misner, *Phys. Rev. Lett.*, **22**, 1071 (1969).
- 128*. В. А. Белинский, Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников, *УФН*, **102**, 463 (1970).
- 129*. L. C. Shepley, *Phys. Lett.*, **A28**, 695 (1969).
- 130*. Л. П. Гришук, *ЖЭТФ*, **51**, 475 (1966); **53**, 1699 (1967).
- 131*. S. W. Hawking, R. Penrose, *Proc. Roy. Soc. London*, **A34**, 29 (1970).
- 132*. R. Penrose, *Techniques of differential topology in general relativity*, Pittsburgh notes, S. I. A. M., 1972.

Послесловие автора к русскому изданию

За пять лет, прошедших после написания этих заметок, проведены дальнейшие исследования по теории сингулярностей и достигнут существенный прогресс в понимании «черных дыр» (объектов, находящихся на поздних стадиях катастрофического коллапса). Эти исследования подтверждают уже известные результаты и опираются на них, давая нам значительно более полные представления по некоторым вопросам. Следует упомянуть, в частности, работы Лифшица, Халатникова и Белинского [Phys. Rev., **24**, 76 (1970); Успехи физ. наук, **102**, 463 (1970)], которые впервые построили общее решение с пространственно-временной сингулярностью и устранили тем самым все существовавшие противоречия между аналитическим и топологическим подходами к проблеме. Топологические методы, изложенные в этой книге, привели Хокинга и автора к другой теореме сингулярности [S. Hawking, R. Penrose, Proc. Roy. Soc. London, A314, 529 (1970); см. также R. Penrose, Techniques of Differential Topology in Relativity, S. I. A. M., 1972], которая оказалась весьма эффективной для объединения и улучшения описанных здесь теорем. Особого внимания заслуживает также метод В-границ Шмидта для изучения структуры сингулярностей (B. G. Schmidt, A new definition of singularities in general relativity, Universität Hamburg, 1970, preprint).

На развитие теории черных дыр в последние пять лет важное влияние оказали результаты, полученные Израэлем [W. Israel, Phys. Rev., **164**, 1776 (1967)], Картером [B. Carter, Phys. Rev. Lett., **26**, 331 (1971)], Хокингом [S. Hawking, Comm. Math. Phys., **25**, 546 (1972)] и другими, вследствие того, что, как оказалось,

в наиболее общем случае черная дыра описывается метрикой Керра (приведенной в этих заметках), а это ведет к значительно более полной картине явления, чем мы вправе были ожидать.

Рассматриваемая тема все еще быстро развивается, так как она стимулируется замечательными астрономическими наблюдениями таких явлений, как квазары, пульсары, галактические взрывы и реликтовое излучение. Но главным стимулом является возможное открытие Вебером гравитационных волн, идущих из галактического центра. Я почти не сомневаюсь, что методы, аналогичные тем, которые описаны в этих лекциях, будут тем более полезны, чем яснее мы будем сознавать, что сильные гравитационные поля играют важную роль в астрофизических процессах.

Поэтому мне очень приятно, что Н. Мицкевич и Л. Грищук, переведя эти заметки на русский язык, тем самым сделали их более доступными советским физикам и математикам, работающим в этой области.

Р. Пенроуз

Оглавление

От редакторов перевода	5
1. Введение	11
2. Сущность общей теории относительности	18
3. Метод абстрактных индексов	33
4. Пространства-времени со спинорной структурой	42
5. Истолкование спин-вектора	56
6. Явные формулы для кривизны	66
7. Уравнения Эйнштейна и фокусирование	72
8. Конформная бесконечность	89
9. Горизонты	111
10. Гравитационный коллапс	130
11. Сингулярности в космологии	161
Л и т е р а т у р а	176
Послесловие автора к рускому изданию	181

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и др. просим присылать по адресу:

129820, Москва, ГСП, И-110, 1-й Рижский пер., д. 2,
изд-во «Мир».

Р. ПЕНРОУЗ

Структура пространства-времени

Редактор *Р. Золина и М. Рутковская*

Художник *С. Бычков*. Художественный редактор *В. Варлашин*
Технический редактор *Е. Потопенкова*. Корректор *Е. Кочегарова*

Сдано в набор 13/XII 1971 г. Подписано к печати 4/VII 1972 г.
Бумага № 2 84×108¹/₃₂—2,88 бум. л. Печ. усл. л. 9,66. Уч.-изд. л. 8,40
Изд. № 27/6429. Цена 84 коп. Зак. № 1379

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров
СССР. Измайловский проспект, 29

рения, если он не учтет принцип эквивалентности, который дает ему законное право, приписать ускорение свободных частиц присутствию гравитационного поля.

Математически это выглядит так. Пусть покоящийся наблюдатель использует систему координат, соответствующую обычным пространственным переменным и времени x, y, z и t , и формулу для интервала

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2. \quad (74.5)$$

С другой стороны, пусть второй наблюдатель движется относительно первого с ускорением a по направлению оси x и использует координаты x', y', z' и t' , выражающиеся через нештрихованные:

$$x' = x - \frac{1}{2} at^2, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t, \quad (74.6)$$

в соответствии с обычным переходом к ускоренной системе отсчета, который вполне оправдан, по крайней мере, при малых скоростях. Подставляя (74.6) в (74.5), найдем, как выглядит формула интервала для второго наблюдателя:

$$ds^2 = -dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + (c^2 - a^2 t'^2) dt'^2 - 2at' dx' dy'. \quad (74.7)$$

Сравнивая теперь формулы (74.5) и (74.7), мы сразу замечаем их существенное различие, несмотря на тот факт, что обе формулы находятся в соответствии с общим ковариантным выражением интервала

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

так как в одном случае метрический тензор $g_{\mu\nu}$ составлен просто из постоянных $-1, c^2, 0$, а в другом — из значительно более сложных величин. Кроме того, это различие немедленно отражается в том, что экспериментальные результаты рассматриваемых наблюдателей также различны. Таким образом, хотя оба наблюдателя могут использовать для описания движения свободных частиц одни и те же заранее известные ковариантные уравнения (73.13)

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0,$$

первый наблюдатель, используя эти уравнения, придет к обычному результату

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{d^2 z}{ds^2} = \frac{d^2 t}{ds^2} = 0, \quad (74.8)$$

в то время как второй наблюдатель получит более сложный результат, который для частиц с пренебрежимо малыми скоростями

имеет вид

$$\frac{d^2 x'}{ds^2} = \frac{-a}{c^2 - a^2 t'^2}, \quad \frac{d^2 y'}{ds^2} = \frac{d^2 z'}{ds^2} = \frac{d^2 t'}{ds^2}. \quad (74.9)$$

Тем не менее, согласно принципу эквивалентности, второй наблюдатель может отнести это различие экспериментальных результатов (разные значения компонент метрического тензора) за счет гравитационного поля, а не какого-то абсолютного свойства своего состояния движения.

Итак, мы приходим к выводу, что принцип эквивалентности позволяет нам при желании интерпретировать изменения в численных значениях коэффициентов в уравнениях физики при переходах к новым системам координат как изменения гравитационного поля, а не как изменения абсолютного движения системы отсчета. Этого уже достаточно для сохранения идеи относительности любого движения. Таким образом, те изменения результатов, которые мы обычно считаем вызванными переходами от систем отсчета, находящихся в состоянии покоя, к ускоренным системам, могут быть отнесены за счет изменений гравитационного поля, которые возникают, когда система отсчета остается в покое, а остальная Вселенная ускоряется в противоположном направлении. Таким образом, как ускорение, так и скорость участвуют в картине относительности. Точно так же эффекты, сопровождающие переход от покоящейся системы к вращающейся, можно отнести только за счет относительного вращения осей системы и гравитирующих тел остальной Вселенной.

Ниже мы приведем еще примеры, подтверждающие справедливость идеи относительности всех видов движения; особенно поучительным оказывается так называемый парадокс часов (§ 79, в). Можно считать теперь, что после введения принципа эквивалентности полностью исключена сама возможность возникновения каких-либо противоречий.

в) *Обоснование принципа эквивалентности.* Хотя общая идея относительности любых движений дает нам основания принять принцип эквивалентности, можно оправдать его введение и более непосредственным образом. В отличие от принципа ковариантности, принцип эквивалентности нельзя принимать как неизбежную физическую аксиому, поскольку последний предполагает вполне определенную связь между системами координат и гравитационными полями, которая может быть или правильной, или неправильной. Следовательно, он отличается от принципа ковариантности и в том отношении, что с необходимостью должен приводить к вполне определенным физическим выводам, а окончательное подтверждение принципа эквивалентности должно вытекать из согласия этих выводов с опытами.

Простейший из этих выводов состоит в том, что гравитационное ускорение всех свободных тел, находящихся в одном и том

же гравитационном поле, должно быть одинаковым, поскольку наличие и величина этого ускорения должны зависеть лишь от выбора системы координат. Следовательно, открытие Галилея, состоящее в том, что все тела в пустоте падают с одинаковой скоростью, с большой точностью проверенное впоследствии для обычного вещества Этвешем, а для радиоактивного — Саузернсом, может рассматриваться как прямое подтверждение принципа эквивалентности*).

В дополнение к этим простым, но тем не менее очень общим и хорошо проверенным следствиям принципа эквивалентности, общая теория относительности приводит к ньютоновской теории гравитации в качестве первого (и очень точного) приближения, в чем мы убедимся в § 80. Следовательно, хорошо подтвержденные законы небесной механики также могут быть заложены в фундамент, на котором покоится общая теория относительности.

Наконец, наша уверенность в общей теории относительности получает подтверждение в трех, так называемых, решающих экспериментах (§ 83), которые позволяют отличить предсказания приближенной теории Ньютона от предсказаний более точной теории Эйнштейна. Итак, мы можем считать, что все постулаты теории выбраны весьма удачно.

Кроме чисто экспериментальных оправданий принципа эквивалентности, нам очень существенно и то, что предположение об отсутствии гравитационных эффектов для свободно падающего тела для нас интуитивно очень естественно; все, что мы получаем, таким образом, воспринимается нами как очень стройная, простая и эффективная картина. Конечно, одно только интуитивное восприятие естественности и логической простоты, ясности и эффективности, в которых мы узнаем безошибочно глубину мысли и гений Эйнштейна, не может само по себе обеспечить согласие с экспериментальными и наблюдаемыми фактами. Однако эти качества должны быть необходимыми свойствами всякого принципа, который человек хочет использовать как фундаментальный постулат в науке, и их присутствие в случае принципа эквивалентности служит существенным аргументом в его пользу.

г) *Обобщение законов специальной теории относительности с помощью принципа эквивалентности. Естественные и собственные координаты.* Согласно принципу эквивалентности мы всегда можем выбрать координаты так, чтобы эффекты гравитации исчезли в окрестности интересующей нас точки; при этом

*) Сейчас наиболее точные опыты, подтвердившие принцип эквивалентности, принадлежат Дикке и Брагинскому. Согласно этим опытам, ускорение разных тел в одном и том же гравитационном поле отличается во всяком случае не больше чем на 10^{-12} . (Прим. ред.)

размеры окрестности должны быть настолько малыми, чтобы пространственными и временными изменениями гравитации в ней можно было пренебречь. В отсутствие же гравитации можно считать, что выполняются законы специальной теории относительности. Следовательно, принцип эквивалентности можно также понимать как утверждение, что в малой окрестности какой-либо выбранной точки всегда возможен переход к координатам, в которых выражения физических законов, даваемые общей теорией относительности, сводятся к соответствующим выражениям специальной теории относительности, записанным в обычных пространственных и временной переменных x , y , z , и t , иначе говоря, в так называемых галилеевых координатах, введенных в § 20:

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct.$$

Такие координаты в данном случае могут быть названы *естественными координатами* для заданной точки. В этих координатах, в соответствии с формулами для интервала в специальной теории относительности, компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$ в выбранной точке определяются просто числами -1 , $+1$ и 0 , и первые производные от $g_{\mu\nu}$ по этим координатам равны в этой точке нулю. Однако вторые производные могут, вообще говоря, и отличаться от нуля, исключая простой случай плоского пространства — времени. Ниже мы убедимся, что предположение приближенной справедливости специальной теории относительности в малой окрестности какой-либо фиксированной точки пространства — времени эквивалентно приближенной замене искривленной поверхности касательной плоскостью в данной точке при геометрическом рассмотрении.

В каждой данной пространственно-временной точке можно ввести бесконечное множество различных систем естественных координат, которое может быть получено различными поворотами пространственных осей, а также лоренцевыми преобразованиями, отвечающими различным скоростям начала координат. Среди этих различных систем нас особенно часто будет интересовать такая, в которой наблюдатель с его измерительными приборами или какие-то отдельные предметы, например определенная частица вещества, покоятся, по крайней мере в данный момент, относительно пространственных осей. Такие системы могут быть названы *собственными системами координат* для наблюдателя или рассматриваемого предмета. Переход к ним, естественно, возможен всегда (см. § 18).

Таким образом, предоставленная принципом эквивалентности возможность использования естественных координат дает нам мощный способ формулирования общих законов физики. Действительно, мы можем теперь потребовать, чтобы физические

законы, будучи выраженными в естественных координатах, всегда принимали бы в заданной точке вид, заранее известный из специальной теории относительности. Это дает способ проверки пригодности различных ковариантных выражений в качестве общих физических законов, позволяющий отбрасывать те, что не согласуются с принципом эквивалентности. Этот способ, конечно, не обязательно приведет нас к однозначным результатам, поскольку возможно существование нескольких обобщений законов специальной теории относительности, обладающих требуемыми свойствами. Тем не менее во многих случаях самое простое из возможных обобщений приводит нас к разумному результату.

д) *Интервал и траектория в присутствии гравитационных полей.* При обсуждении принципа ковариантности (см. § 73, г и § 73, д) уже отмечалось, что ковариантные выражения специальной теории относительности для интервала и для траекторий свободных частиц и световых лучей применимы и в «кривом» пространстве — времени, связанном с постоянными гравитационными полями. Мы должны теперь показать, что это действительно согласуется с требованиями принципа эквивалентности.

Для того чтобы проверить это для случая интервала

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (74.10)$$

мы прежде всего должны доказать, что всегда существует преобразование, которое обращает в нуль первые производные от компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$ в любой выбранной точке. Это есть не что иное, как известная из дифференциальной геометрии теорема о возможности введения «геодезических» координат. Чтобы выполнить это, перенесем начало координат в интересующую нас точку, а затем перейдем от нештрихованных координат к штрихованным при помощи подстановки

$$x^\alpha = g_{\mu}^{\alpha} x'^{\mu} - \frac{1}{2} (\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha})_0 g_{\mu}^{\alpha} g_{\nu}^{\beta} x'^{\mu} x'^{\nu}, \quad (74.11)$$

где $(\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha})_0$ — символы Кристоффеля первого рода, заданные в начале координат. Теперь легко убедиться, что в начальной точке новой системы координат выполняется соотношение *)

$$\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^{\alpha}} = 0. \quad (74.12)$$

Обеспечив требуемое постоянство метрического тензора в начале координат, дальнейшее преобразование к координатам, в которых компоненты $g_{\mu\nu}$ в данной точке — это либо ± 1 , c^2 , 0, либо ± 1 , 0, можно произвести аналогичным способом. Следова-

*) См., например, монографию Эддингтона [56], гл. III, § 36.

тельно, выбор ковариантного выражения (74.10) в качестве выражения для интервала в общей теории относительности как при наличии, так и в отсутствие гравитационных полей согласуется с требованиями принципа эквивалентности.

Перейдем теперь к рассмотрению ковариантного выражения

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (74.13)$$

описывающего в специальной теории относительности траектории свободных частиц или световые лучи (73.13). Сразу видно, что опять-таки это выражение удобно принять как постулат, справедливый в общей теории относительности в присутствии гравитационных полей. Действительно, в естественных координатах символы Кристоффеля в (73.13) в выбранной нами точке обращаются в нуль согласно (74.12), и общая формула (74.13) сведется к выражению (73.11) из специальной теории относительности:

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} = 0. \quad (74.14)$$

Далее, дополнительное ограничение

$$ds=0, \quad (74.15)$$

накладываемое в специальной теории относительности при рассмотрении световых лучей, может быть, очевидно, приближенно принято как общее условие и при наличии гравитационных полей, а потому уравнения для геодезических линий (74.13) можно перенести и на случай движения частиц или световых лучей в гравитационном поле. Это является значительным шагом вперед в построении полной теории гравитации, который должен быть, конечно, оправдан со временем данными астрономических наблюдений.

Фундаментальный тензор $g_{\mu\nu}$ встречается как в формуле для интервала (74.10), так и в формуле для траектории (73.13). В формуле для интервала он появляется в виде набора метрических величин, которые определяют природу геометрии пространства — времени, связывая величины различных интервалов с соответствующими разностями координат. В уравнениях движения первые производные $g_{\mu\nu}$ по координатам появляются в символах Кристоффеля первого рода в определенной аналогии с производными ньютоновского гравитационного потенциала в прежних уравнениях движения. Отсюда следует двойственный характер фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$, ибо десять входящих в него независимых величин можно рассматривать либо как компоненты *метрического тензора*, либо как *гравитационные потенциалы* в теории тяготения Эйнштейна. Зависимость геометрии

рии пространства — времени, а следовательно, и свойств самого пространства от гравитации, возникающая из-за дуальности фундаментального тензора, — замечательный вывод общей теории относительности.

Несколько абстрактный характер формулы интервала (74.10) не должен затемнить ее прямую связь с наблюдаемыми свойствами материи. Любой интервал, выраженный формулой (74.10), будет либо пространственноподобным, либо времениподобным, либо сингулярным в зависимости от того, отрицательна, положительна или равна нулю величина ds^2 . Переходя к надлежащим образом выбранным собственным координатам x, y, z, t , выражение для любого пространственноподобного интервала можно привести к виду

$$-ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (74.16)$$

а выражение для любого времениподобного интервала — к виду

$$ds^2 = c^2 dt^2.$$

Это позволяет определить *собственные длины* прямо по метрическим отметкам, а *собственное время* отсчитывать по часам. Точно так же уравнения движения (74.13) имеют непосредственное отношение к экспериментальной ситуации, поскольку времениподобный интервал ds является собственным временем для локального наблюдателя, движущегося с данной частицей, и скорость изменения координат этой частицы с изменением ds может быть найдена путем непосредственных измерений.

§ 75. Зависимость гравитационного поля и метрики от распределения материи и энергии. Принцип Маха

В дополнение к принципам ковариантности и эквивалентности мы должны, очевидно, ввести в теорию гравитации некоторые дополнительные элементы. В самом деле, с помощью уже введенных двух принципов мы научились интерпретировать фундаментальный тензор $g_{\mu\nu}$ в метрическом смысле — им определяется геометрия пространства — времени — и в его гравитационном аспекте — им определяется движение частиц и световых лучей. Однако мы не касались пока действительной зависимости величин $g_{\mu\nu}$ от координат, если не считать весьма общего утверждения, что пространство — время является «плоским» в отсутствие внутреннего гравитационного воздействия и «кривым» при наличии постоянных гравитационных полей. Следовательно, мы должны теперь ввести третий принцип релятивистской теории гравитации, а именно: точную формулировку закона, отражающего зависимость метрического и гравитационного полей от состояния

пространства — времени, знание которой позволит вычислять гравитационные эффекты при заданных распределениях материи и энергии.

Согласно ньютоновской теории тяготения действие гравитации в какой-либо точке пространства в данный момент определяется расположением окружающей материи, и эта общая идея, соответствующим образом модифицированная, должна быть включена в релятивистскую теорию гравитации, поскольку ньютоновская теория в любом случае оказывается чрезвычайно точным первым приближением. В теории Ньютона зависимость гравитационного потенциала ψ от распределения плотности вещества ρ дается уравнением Пуассона:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 4\pi k \rho, \quad (75.1)$$

где k — гравитационная постоянная. В релятивистской теории гравитации его следует модифицировать: во-первых, из-за необходимости вычислять десять компонент метрического тензора (или гравитационных потенциалов) $g_{\mu\nu}$ вместо единственного гравитационного потенциала ψ в ньютоновской теории; во-вторых, специальная теория относительности дает нам соотношение между массой, энергией и импульсом, показывающее, что ковариантные выражения должны определяться всеми десятью компонентами тензора энергии — импульса $T_{\mu\nu}$, а не какой-нибудь единственной выделенной величиной, которую можно назвать плотностью материи.

Наша главная цель, следовательно, состоит в том, чтобы получить аналог уравнения Пуассона — ковариантное уравнение, связывающее $g_{\mu\nu}$ и $T_{\mu\nu}$ и приводящее в первом приближении к результатам ньютоновской теории. Однако, прежде чем приступить к полному разрешению этой задачи, целесообразно рассмотреть два специальных случая: случай, когда поля соответствуют специальной теории относительности, и случай полей в пустоте вблизи гравитирующих тел.

Общая гипотеза, что метрическое поле определяется распределением материи и энергии, может быть названа принципом Маха *).

*) Принципом Маха эту гипотезу назвал Эйнштейн [55], поскольку считал ее обобщением взглядов Маха, который полагал, что инерция должна быть следствием взаимодействия тел. В то время Эйнштейн думал, что принцип Маха необходим для введения Λ -члена в уравнения поля. Впоследствии, однако, выяснилось, что без этого члена можно обойтись.

Взгляды Маха, по-видимому, не выдержали экспериментальных проверок. Сейчас нет ни малейших указаний на какую-либо связь между распределением масс во Вселенной и массой какого-либо тела или частицы. (*Прим. ред.*)

§ 76. Поля, соответствующие специальной теории относительности. Тензор Римана — Кристоффеля

Специальную теорию относительности можно рассматривать как теорию, развитую в предположении о «плоском» пространстве — времени и в пренебрежении внутренними гравитационными полями; ее выводы, следовательно, будут приближенно справедливыми для так называемого *свободного* пространства на больших расстояниях от гравитирующих тел. Обратимся теперь к ковариантным условиям, приводящим к «плоскому» пространству — времени специальной теории относительности.

Начнем с того, что введем тензор Римана — Кристоффеля с помощью символов Кристоффеля первого рода

$$R_{\mu\nu\sigma}^{\tau} = \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\tau} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\tau} + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Gamma_{\mu\sigma}^{\tau} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\Gamma_{\mu\nu}^{\tau}. \quad (76.1)$$

В тензорном характере этого выражения легко убедиться. Далее, из определения символов Кристоффеля первого рода (73.14) видно, что $R_{\mu\nu\sigma}^{\tau}$ составлен лишь из компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и его первых и вторых производных по координатам. Более того, можно показать, что все тензоры, которые можно построить из фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$ без обращения к производным выше второго порядка, являются функциями $g_{\mu\nu}$ и $R_{\mu\nu\sigma}^{\tau}$.

Условие того, что пространство — «плоское», может быть получено приравниванием нулю тензора Римана — Кристоффеля, что приводит нас к ковариантному уравнению

$$R_{\mu\nu\sigma}^{\tau} = 0. \quad (76.2)$$

Это уравнение, очевидно, является *необходимым* условием, так как мы знаем, что в случае «плоского» пространства — времени всегда можно выбрать координаты, в которых компоненты $g_{\mu\nu}$ будут постоянными; следовательно, обратятся в нуль все величины в тензоре Кристоффеля. Можно также доказать, что равенство нулю тензора Римана — Кристоффеля есть *достаточное* условие для возможности выбора координат, в которых все компоненты $g_{\mu\nu}$ постоянны (впервые было показано Липшицем [57]).

Тензорное уравнение (76.2) выражает, таким образом, условия, необходимые для применимости специальной теории относительности и для отсутствия постоянных гравитационных полей, которые не могут быть исключены путем специального выбора системы координат. В действительности найдено, что плотность материи во Вселенной приближенно однородна (для расстояний

по крайней мере 10^8 световых лет), насколько это удалось установить в 100-дюймовый телескоп обсерватории Маунт Вильсон *).

Таким образом, нет никаких оснований считать, что имеется какая-либо область во Вселенной, в которой можно было бы преобразованием координат полностью избавиться от действия гравитационного поля. В самом деле, даже присутствие физической измерительной аппаратуры создает неисчезающее гравитационное поле. Другими словами, то, что мы называли до сих пор *свободным* пространством, в котором должна строго выполняться специальная теория относительности, в действительности в реальной Вселенной не существует и является лишь идеализацией. Тем не менее ясно, что законы специальной теории относительности приближенно верны в постоянном гравитационном поле на поверхности Земли и выполняются с очень высокой степенью точности в межгалактическом пространстве. Поэтому нам кажется вполне оправданным использование специальной теории относительности как абстрактной идеализации.

§ 77. Гравитационные поля в пустоте. Свернутый тензор Римана — Кристоффеля

Поскольку условие равенства нулю тензора Римана — Кристоффеля исключает присутствие постоянных гравитационных полей, мы должны, очевидно, изыскать более слабые ограничения на гравитационное поле в пустом пространстве в соседстве с гравитирующими телами.

Можно получить это условие, свернув тензор Римана — Кристоффеля, полагая $\sigma = \tau$ в (76.1) и суммируя по τ . Это дает нам тензор

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}, \quad (77.1)$$

который с помощью уравнения (37) из Приложения III, перестановки слагаемых и порядка суммирования по немym индексам может быть записан проще:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \ln \sqrt{-g} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \ln \sqrt{-g}. \quad (77.2)$$

В качестве полевых уравнений в пустом пространстве, но вблизи от гравитирующих масс, Эйнштейн предложил соотношение

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (77.3)$$

*) Расширение возможностей наблюдений не опровергает эту гипотезу и для расстояний до 10^{10} световых лет. (Прим. ред.)

Оно, очевидно, справедливо, если удовлетворяется условие «плоского» пространства — времени (76.2), но может выполняться и при менее строгих ограничениях.

Теоретическая оправданность выбора этого уравнения станет ясной из следующего параграфа, где мы получим его как предельный случай более общего выражения — уравнения для гравитационного поля при наличии материи; мы имеем также точное эмпирическое подтверждение справедливости уравнения (77.3) — данные по движению планет (см. § 83).

§ 78. Гравитационные поля при наличии материи и энергии

Займемся теперь разрешением фундаментальной проблемы, поставленной в § 75, а именно, получим ковариантное соотношение, связывающее гравитационные потенциалы $g_{\mu\nu}$ и компоненты тензора энергии — импульса $T_{\mu\nu}$. Такое соотношение можно расценивать как соответствующий релятивистский аналог уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 4\pi k\rho, \quad (78.1)$$

которое связывает в ньютоновской теории тяготения единственный гравитационный потенциал ψ с плотностью материи ρ и гравитационной постоянной k .

При решении этой фундаментальной проблемы у Эйнштейна имелось несколько наводящих соображений. Во-первых, согласно предварительной постановке проблемы (§ 75) можно ожидать, что релятивистский аналог уравнения Пуассона будет соотношением, связывающим все десять гравитационных потенциалов $g_{\mu\nu}$ с распределением материи и энергии, которое описывается десятью компонентами тензора энергии — импульса $T_{\mu\nu}$. Во-вторых, в соответствии с принципом ковариантности желательно выразить это соотношение в ковариантной форме, т. е. надо будет построить такой тензор второго ранга из $g_{\mu\nu}$ и его производных по координатам, что его можно будет затем приравнять тензору энергии — импульса. В-третьих, поскольку в уравнении Пуассона нет производных от ньютоновского потенциала выше второй, естественно предположить, что (хотя бы в первом приближении) искомым тензором также не будет содержать производных от $g_{\mu\nu}$ выше второй. И наконец, из принципа эквивалентности следует, что тензор энергии — импульса является величиной, дивергенция которой может быть сведена к нулю в любой заданной точке путем выбора естественной системы координат, так как в специальной теории относительности в галилеевых координатах

справедливо соотношение (37.9):

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0, \quad (78.2)$$

полученное нами при рассмотрении в § 37 механики сплошных сред.

Эти соображения оказались для Эйнштейна достаточными, чтобы написать в качестве релятивистского аналога уравнения Пуассона соотношение

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}. \quad (78.3)$$

Здесь $R_{\mu\nu}$ — свернутый тензор Римана — Кристоффеля; R — инвариант, полученный дальнейшим свертыванием этого тензора; Λ — так называемая космологическая постоянная, смысл которой обнаружится ниже; κ — константа, связанная с обычной постоянной гравитации некоторым множителем (что будет показано в § 80, где уравнение Пуассона будет получено из (78.3) в качестве первого приближения), и $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии — импульса, который определяют в общей теории относительности, придавая его компонентам в собственных координатах (а следовательно, и в любой системе естественных координат) значения, которые были бы в согласии со специальной теорией относительности.

Соотношение (78.3) вполне удовлетворяет всем перечисленным выше условиям. Оно приводит в случае слабых гравитационных полей к уравнению Пуассона в качестве первого приближения, как будет показано в § 80. Оно связывает десять гравитационных потенциалов $g_{\mu\nu}$ и их производные с компонентами тензора энергии — импульса $T_{\mu\nu}$. Это уравнение удовлетворяет принципу релятивистской ковариантности, так как записано в тензорном виде, а потому справедливо во всех системах координат, если справедливо в одной. Оно не содержит также производных от $g_{\mu\nu}$ выше второго порядка.

Кроме того, следует отметить, что введенное соотношение обеспечивает справедливость условия (78.2), записанного в естественных координатах самым общим образом. Действительно, легко показать, пользуясь определением тензора Римана — Кристоффеля, что соотношение

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} \right)_{;\nu} = 0 \quad (78.4)$$

является тождественным при любом значении постоянной Λ . Последнее же приводит к тому, что в качестве фундаментального уравнения механики, справедливого в любой системе координат,

мы имеем

$$(T^{\mu\nu})_{;\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\nu T^{\mu\alpha} = 0 \quad (78.5)$$

или в специальном случае естественных координат, когда символы Кристоффеля исчезают, получаем

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0. \quad (78.6)$$

В связи с этими уравнениями надо подчеркнуть два следующих обстоятельства. Во-первых, что можно показать, что

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} Rg^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}$$

с произвольной постоянной Λ есть наиболее общий тензор второго ранга, построенный лишь из $g_{\mu\nu}$ и его производных первого и второго порядка, свернутая ковариантная производная которого (78.4) должна тождественно равняться нулю. Во-вторых, что эти четыре тождественных соотношения должны выполняться, иначе решение десяти уравнений поля (78.3) для десяти компонент $g_{\mu\nu}$ не будет допускать четырехмерных преобразований координат — условие, которое нельзя нарушать.

Мы видим, что есть силы, которые заставляют нас принять, по крайней мере условно, уравнения Эйнштейна (78.3) в качестве уравнения поля релятивистской теории гравитации. Полное оправдание введения этих соотношений, естественно, зависит от соответствия их предсказаний результатам наблюдений. Чтобы решить этот вопрос, можно было бы сделать следующее: воспользоваться полевыми уравнениями (78.3) с какими-либо заданными распределениями материи и энергии для предсказания зависимости тензора $g_{\mu\nu}$ от используемых координат, а затем сравнить результаты этого предсказания с наблюдаемыми величинами $g_{\mu\nu}$. Теоретически наблюдаемые величины $g_{\mu\nu}$ могут быть, конечно, получены прямыми измерениями пространственноподобных и времениподобных интервалов и последующим применением формулы $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Практически, однако, такие прямые измерения не могут быть выполнены с точностью, достаточной хотя бы для того, чтобы различить «плоское» и «кривое» пространство. Источник наших точных знаний $g_{\mu\nu}$ — наблюдения за движениями астрономических тел с последующим извлечением $g_{\mu\nu}$ из выражения для траекторий

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (78.7)$$

Поднимая индексы, можно переписать полевые уравнения (78.3) в различных формах:

$$-\kappa T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (78.8)$$

$$-\kappa T_{\mu}^{\nu} = R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu}^{\nu} + \Lambda g_{\mu}^{\nu}, \quad (78.9)$$

$$-\kappa T^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}; \quad (78.10)$$

свертывая (78.9), мы, очевидно, получаем

$$\kappa T = R - 4\Lambda. \quad (78.11)$$

В пустом пространстве, когда равны нулю все компоненты тензора энергии—импульса, легко найти, используя (78.8) и (78.11), что полевые уравнения приобретают простой вид:

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (78.12)$$

Однако (как уже отмечалось в предыдущем § 77) в пустом пространстве движение планет описывается в действительности с громадной точностью более простыми уравнениями:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (78.13)$$

Следовательно, если использовать то, что (см., например, уравнение (82.10)) эффекты от Λ -члена возрастают с увеличением размеров рассматриваемой области, можно заключить, что теоретическая константа Λ (введенная выше лишь с целью получить наиболее общее выражение тензора второго ранга с исчезающей ковариантной производной (78.4)) либо действительно равна нулю, либо в любом случае настолько мала, что эффекты от нее пренебрежимы в области с размерами порядка Солнечной системы. Таким образом, во многих наших расчетах мы вполне оправданно можем считать, что $\Lambda = 0$, и записывать уравнения поля в более простом виде:

$$-\kappa T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (78.14)$$

и

$$\kappa T = R, \quad (78.15)$$

причем последнее уравнение есть результат свертки предыдущего.

С другой стороны, можно показать, что для больших областей эффекты должны возникать даже от очень малых величин Λ . Следовательно, имея в виду космологические задачи, мы все же не будем отвергать возможность того, что Λ , называемая обычно *космологической постоянной*, отлична от нуля.

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы рассматривать ряд простых применений общей теории относительности, причем часть из них будет особенно важной для иллюстрации соответствия между теоретическими выводами и данными наблюдений.

ЧАСТЬ II
ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ
ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 79. Простейшие следствия принципа эквивалентности

Мы уже отмечали, что, в отличие от принципа ковариантности, принцип эквивалентности нельзя считать неизбежной физической аксиомой. Напротив, его надо считать постулатом, следствия которого надо проверить наблюдениями и опытами. Рассмотрим некоторые простые качественные и полуколичественные следствия, вытекающие непосредственно из этого принципа, без обращения к полному аппарату общей теории относительности.

а) *Пропорциональность веса и массы.* Важнейшее из таких следствий принципа эквивалентности, уже упомянутое в § 74, в, состоит в том, что гравитационное ускорение всех тел, находящихся в одном и том же гравитационном поле, должно быть одинаковым, поскольку наличие ускорения и его величина зависят, согласно этому принципу, лишь от выбора системы координат. Этот вывод находится в прямом соответствии с фундаментальным открытием Галилея: различные тела падают в гравитационном поле Земли с одинаковыми ускорениями.

Поскольку гравитационное ускорение тела g у поверхности Земли связывается с помощью ньютоновского второго закона движения с его массой m и с гравитационной силой, действующей на это тело, т. е. с весом, при помощи уравнения

$$W = mg, \quad (79.1)$$

предыдущий вывод эквивалентен утверждению, что должна существовать постоянная пропорциональность между массами и весами различных тел. Прецизионная и исчерпывающая проверка этой пропорциональности была сделана для обычного вещества Этвешем [58], подобный же эксперимент с радиоактивными веществами был выполнен Саузерном [59]. Результаты обоих экспериментов находятся в полном согласии с теоретическими предсказаниями.

б) *Воздействие гравитации на ход часов.* Согласно принципу эквивалентности имеется соответствие между результатами, получаемыми равномерно ускоренным наблюдателем, проделывающим измерения вне гравитационных полей, и результатами,

которые получает покоящийся наблюдатель, проводящий те же эксперименты в однородном гравитационном поле. Поскольку нетрудно приближенно вычислить результаты, которые получает ускоренный наблюдатель, то мы имеем простой метод исследования некоторых эффектов гравитации.

Таким путем можно, например, найти разность скоростей хода часов, помещаемых в точках с различными значениями гравитационного потенциала. Представим себе наблюдателя, находящегося вне каких-либо внутренних гравитационных полей, который движется с постоянным ускорением g и снабжен двумя одинаково устроенными часами, размещенными друг от друга на расстоянии h вдоль линии, параллельной направлению ускорения. Допустим, что часы характеризуются естественным периодом τ_0 , и пусть световой сигнал посылается в конце каждого периода от одних часов к другим, что позволяет сравнивать их скорости хода.

Так как время, необходимое сигналу для того, чтобы пройти расстояние между часами, приближенно равно

$$t = h/c$$

(где c — скорость света), часы, расположенные впереди, будут приобретать дополнительную скорость в направлении движения, равную

$$v = gt = g(h/c)$$

к моменту времени, когда их достигнет свет, испущенный у задних часов. При сравнении скорости хода часов обнаружится, что из-за обычного эффекта Допплера период задних часов, измеренный с помощью световых сигналов, приближенно выражается в единицах периода передних часов как

$$\tau = \tau_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \tau \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right). \quad (79.2)$$

Согласно принципу эквивалентности этот результат можно интерпретировать как описывающий аналогичную ситуацию, когда эти же часы, разделенные расстоянием h , покоятся в однородном гравитационном поле g . Тогда из (79.2) немедленно следует соотношение

$$\tau_2 = \tau_1 \left(1 + \frac{\Delta\psi}{c^2}\right), \quad (79.3)$$

связывающее периоды τ_2 и τ_1 двух одинаково устроенных часов, если разность значений гравитационного потенциала между точками их нахождения равна $\Delta\psi = gh$. При этом часы, находящиеся в меньшем гравитационном потенциале, имеют больший период.

Далее, так как временные измерения можно производить, посылая свет с частотой, соответствующей какой-либо данной спектральной линии, то различные атомы одного и того же вещества могут играть роль одинаково устроенных часов — качество, необходимое для справедливости найденного соотношения. Следовательно, используя (79.3) вместе с соотношением между периодом и длиной волны света, мы сразу приходим к заключению, что должен наблюдаться сдвиг $\delta\lambda$, приближенно равный

$$\delta\lambda = \lambda \frac{\Delta\psi}{c^2}, \quad (79.4)$$

если первоначальная длина волны света равняется λ и он проходит разность гравитационных потенциалов $\Delta\psi$ при распространении из начала координат в точку наблюдения. Экспериментальная проверка этого эффекта будет рассмотрена более подробно в § 83, в связи с тремя так называемыми «решающими опытами» в теории относительности.

в) *Парадокс часов*. Предыдущего соотношения между скоростью хода часов и гравитационным потенциалом уже достаточно для разрешения известного парадокса часов. Последний возникает, когда поведение часов рассматривают в свете принципов специальной теории относительности, не принимая в расчет положений общей теории относительности.

Рассмотрим двое одинаково устроенных часов A и B , первоначально находящихся вместе и в покое. Затем мгновенно разогнать с помощью силы F_1 часы B до скорости u , с которой они начнут равномерно удаляться от часов A . При этом примем, что время, в течение которого они свободно движутся, много больше того, которое было необходимо для их ускорения. По истечении этого времени приложим к этим часам вторую силу F_2 , по направлению обратную первой, которая приведет их в состояние покоя, а затем заставит часы B двигаться по направлению к A со скоростью $-u$. И наконец, когда часы опять окажутся вблизи A , мгновенным воздействием третьей силы F_3 возвратим их в прежнее состояние покоя.

Так как по предположению временные интервалы, необходимые для ускорения и для замедления часов B , малы по сравнению со временем равномерного движения, можно написать, в соответствии с замедлением часов в специальной теории относительности (§ 9), соотношение

$$\Delta t_A = \frac{\Delta t_B}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \Delta t_B \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \dots \right). \quad (79.5)$$

Это выражение связывает измеренные величины Δt_A и Δt_B , для обоих часов, — интервалов времени, которые часы B затрачивают

на движение от часов A и возвращение обратно. Последнее выражение позволяет сделать вывод, что часы B должны отсчитать по окончании указанного эксперимента меньшее число делений, чем часы A . Тем не менее на первый взгляд этот результат, полученный совершенно корректно в рамках специальной теории относительности, оказывается несовместным с идеей относительности всякого движения. Действительно, согласно этой идее мы должны получить тот же результат, если считать, что часы B покоятся, а часы A движутся со скоростью $-u$ и возвращаются со скоростью $+u$. Поскольку весь расчет аналогичен, то теперь A оказываются часами, которые должны отсчитать меньшее количество делений.

Этот кажущийся парадокс легко разрешается, однако, в общей теории относительности, если учесть, что рассмотренные постановки данного опыта несимметричны. Действительно, часы A в первом варианте опыта ни разу не подвергаются воздействию каких-либо сил, в то время как на часы B последовательно воздействуют силы F_1 , F_2 и F_3 , изменяющие относительное движение часов. Для правильного описания эксперимента в случае, когда часы A считаются движущимися, а B покоящимися, надо предположить, что изменения в относительном движении часов происходят за счет мгновенных включений однородных гравитационных полей, которые, действуя на часы A , вызывают нужные изменения их скорости без введения каких-либо сил, в то время как действие прежних сил на часы B должно их удерживать в покое. Таким образом, мы приходим к правильному описанию того же эксперимента на новом языке, и нам легко вычислить соотношение между двумя измерениями временных интервалов Δt_A и Δt_B .

Прежде всего введем обозначения:

$$\Delta t_A = \tau_A + \tau'_A + \tau''_A + \tau'''_A \quad (79.6)$$

и

$$\Delta t_B = \tau_B + \tau'_B + \tau''_B + \tau'''_B, \quad (79.7)$$

где τ_A и τ_B — измеренные по двум часам A и B , соответственно, временные интервалы, в течение которых часы A движутся с одинаковой скоростью u ; τ'_A , τ''_A , τ'''_A и τ'_B , τ''_B , τ'''_B — интервалы, за которые происходят три изменения скорости часов A : в начале, в середине и в конце эксперимента — из-за мгновенных включений соответствующих гравитационных полей. Будем считать, что эти интервалы малы по сравнению со временем, в течение которого A находится в состоянии равномерного движения, в соответствии с предшествующим описанием эксперимента.

Так как теперь A — движущиеся часы, мы можем согласно специальной теории относительности записать с заданной

степенью точности:

$$\tau_A = \tau_B \left(1 - \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \dots \right), \quad (79.8)$$

в противоположность предыдущему соотношению (79.5), где B — движущиеся часы. Кроме того, поскольку как те, так и другие часы в начале и в конце эксперимента, когда включаются поля, находятся практически при одном и том же значении гравитационного потенциала, можно, очевидно, с достаточной степенью точности записать, что

$$\tau'_A = \tau'_B \quad \text{и} \quad \tau''_A = \tau''_B. \quad (79.9)$$

С другой стороны, в гравитационном поле, действующем в середине эксперимента и обращающем движение A , часы A и B находятся уже на большом расстоянии друг от друга. Поэтому в соответствии с нашим предыдущим рассмотрением справедливо соотношение

$$\tau'_A = \tau'_B \left(1 + \frac{\Delta\psi}{c^2} \right), \quad (79.10)$$

где $\Delta\psi$ — разность значений гравитационных потенциалов для A и B , взятых в один и тот же момент времени.

Эту разность легко задать через расстояние h , разделяющее часы, и гравитационное ускорение g в виде

$$\Delta\psi = hg.$$

Кроме того, можно, очевидно, положить

$$h = \frac{1}{2} u \tau_B,$$

так как $2h$ — суммарное расстояние, которое покрывается со скоростью u , а также записать, что

$$g = \frac{2u}{\tau_B},$$

поскольку $2u$ — полное изменение скорости за время τ_B .

Используя последние три соотношения, можно выразить (79.10) в более удобном виде:

$$\tau'_A = \tau'_B + \tau_B \frac{u^2}{c^2}, \quad (79.11)$$

а комбинируя это уравнение с предыдущими (79.6) — (79.9), получаем

$$\begin{aligned} \Delta t_A &= \tau_B \left(1 - \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \dots \right) + \tau'_B + \tau'_B + \tau_B \frac{u^2}{c^2} + \tau''_B = \\ &= \tau_B \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \dots \right) + \tau'_B + \tau'_B + \tau''_B. \end{aligned}$$

Или в заданном приближении с учетом того, что штрихованные величины малы по сравнению с τ_B , имеем

$$\Delta t_A = \Delta t_B \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} \right). \quad (79.12)$$

Сравнивая этот результат с предыдущим (79.5), видим, что независимо от того, движутся ли часы A или часы B , мы получаем с заданной степенью точности одинаковые выражения для относительных показаний двух часов. Чтобы решить эту проблему без приближений, надо привлечь уже полный аппарат общей теории относительности.

Описанное решение известного парадокса часов, возникающего в специальной теории относительности,— особенно поучительный пример того, как оправдывается представление об относительности всех видов движения, которое возникает, если принять общую теорию относительности.

Подобное же рассуждение может быть с успехом использовано для определения разности хода двух часов, когда одни помещены в центре вращающейся платформы, а другие — на ее краю. Если считать, что платформа вращается, то часы на периферии должны идти медленнее, чем часы в центре. Если, наоборот, считать, что платформа покоится, а остальное пространство вращается в противоположном направлении, более медленный ход периферических часов мы могли бы объяснить тем, что они находятся при более низком гравитационном потенциале, в соответствии с гравитационной интерпретацией центробежных сил. Общая идея относительности всех видов движения будет, таким образом, опять-таки сохранена, так как мы с одинаковым успехом можем считать, что вращается платформа или вращается остальное пространство*).

§ 80. Ньютонова теория как первое приближение

В качестве следующего приложения общей теории относительности покажем, что ньютонову теорию тяготения можно рассматривать как первое приближение к более строгому решению задач общей теории относительности; при этом окажется, что величина g_{44} из общей теории относительности тесно связана с гравитационным потенциалом ϕ теории Ньютона.

Чтобы убедиться в этом, покажем, что, во-первых, движение свободной частицы, определяемое ньютоновыми уравнениями, согласуется в первом приближении с предсказаниями релятивистских уравнений движения; во-вторых, что уравнение Пуас-

*) Экспериментально «парадокс часов» был продемонстрирован при облете вокруг Земли. См. добавление редактора после § 83. (Прим. ред.)

сона можно считать первым приближением к более общим уравнениям Эйнштейна. Ограничимся пока рассмотрением частиц, движущихся в очень слабых статических полях со скоростями, очень малыми по сравнению со скоростью света, ибо теория Ньютона была развита как раз для такого рода ситуаций. Тогда формула для интервала будет лишь слегка отличаться от соответствующей формулы специальной теории относительности, которая в галилеевых координатах выглядит так:

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2; \quad (80.1)$$

компоненты этой формы $g_{\mu\nu}$ будут близки к значениям из специальной теории относительности:

$$g_{11} \approx g_{22} \approx g_{33} \approx -1, \quad g_{44} \approx 1, \quad g_{\mu\nu} \approx 0 \quad (\mu \neq \nu), \quad (80.2)$$

и не будут зависеть от времени:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^4} = 0. \quad (80.3)$$

Кроме того, мы можем задать приближенно компоненты обобщенной скорости рассматриваемой частицы, положив

$$\frac{dx^1}{ds} \approx \frac{dx^2}{ds} \approx \frac{dx^3}{ds} \approx 0, \quad \frac{dx^4}{ds} \approx 1. \quad (80.4)$$

а) *Движение свободной частицы в слабом гравитационном поле.* Теперь легко найти характер движения свободной пробной частицы в таком слабом поле.

Из специальной теории относительности (§ 74, д) следует, что траектории свободных частиц, вообще говоря задаются уравнениями геодезических линий (74.13):

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0.$$

Для нашего упрощенного случая благодаря (80.4) они сводятся при $\sigma = 1, 2, 3$ к приближенным выражениям

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d(x^4)^2} + \Gamma_{44}^\sigma = 0. \quad (80.5)$$

Далее, используя определение символов Кристоффеля (73.14) и приближенные величины $g_{\mu\nu}$ (80.2), можно записать:

$$\Gamma_{44}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\sigma} \left(\frac{\partial g_{4\sigma}}{\partial x^4} + \frac{\partial g_{4\sigma}}{\partial x^4} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x^\sigma} \right),$$

где знаки суммирования опущены. Учитывая к тому же статическую природу полей (80.3), приходим к упрощенному

соотношению

$$\Gamma_{44}^{\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^{\sigma}}, \quad (80.6)$$

подстановка которого в (80.5) позволяет найти уравнение

$$\frac{d^2 x^{\sigma}}{d(x^4)^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^{\sigma}}. \quad (80.7)$$

Этот результат, однако, легко переписать в форме, близкой к ньютоновой теории тяготения, если ввести обычные пространственные и временные переменные через галилеевы координаты

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct \quad (80.8)$$

и связать ньютоновский потенциал ψ с g_{44} выражением

$$\frac{\psi}{c^2} = \frac{g_{44}}{2} = \text{const}$$

или

$$\frac{\psi}{c^2} = \frac{g_{44} - 1}{2}, \quad g_{44} = 1 + \frac{2\psi}{c^2}. \quad (80.9)$$

Аддитивная константа здесь должна быть выбрана так, чтобы потенциал ψ стремился к нулю в свободном пространстве на больших расстояниях от гравитирующих тел, где $g_{44} \approx 1$, как этого требует специальная теория относительности. Подставляя (80.8) и (80.9) в (80.7), мы можем записать этот результат в привычной ньютоновской форме:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (80.10)$$

б) *Уравнение Пуассона как приближение к уравнениям Эйнштейна.* В заключение, чтобы полностью оправдать предложенную выше интерпретацию ньютоновского потенциала ψ , мы должны также показать, что релятивистские уравнения Эйнштейна дают нам в первом приближении ту же самую зависимость ψ от распределения материи, что и уравнение Пуассона в ньютоновой теории тяготения.

Начнем с того, что если выражение для тензора энергии — импульса (37.8) из специальной теории относительности записать в координатах (x^1, x^2, x^3, x^4) , то все компоненты этого тензора в нашем случае приближенно обратятся в нуль, исключая компоненту

$$T^{44} = c^2 \rho,$$

если только мы имеем дело со слабым статическим полем и если тензор механических натяжений p_{ij} пренебрежимо мал по сравнению с плотностью энергии, как это бывает в обычных задачах.

Кроме того, вследствие особенно простого выбора значений компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$ (см. (80.2)), позволяющего поднимать и опускать тензорные индексы, мы в данном случае имеем

$$T^{44} = T_4^4 = T_{44} = T = c^2\rho, \quad (80.11)$$

в то время как все другие компоненты $T_{\mu\nu}$ тензора энергии — импульса равны нулю.

Далее, сопоставляя (80.11) с уравнениями (78.14) и (78.15), видим, что в нашем случае релятивистские уравнения дают простой результат:

$$-\kappa c^2\rho = R_{44} - \frac{1}{2}\kappa c^2\rho g_{44}, \quad (80.12)$$

или

$$R_{44} = -\frac{\kappa c^2\rho}{2}.$$

Рассмотрим теперь выражение (77.1) для $R_{\mu\nu}$. Учтем, что произведениями символов Кристоффеля можно пренебречь из-за слабости поля, а производные по времени равны нулю, поскольку мы рассматриваем статическое поле. Тогда можно переписать (80.12) так:

$$\frac{\partial}{\partial x^\sigma} \Gamma_{44}^\sigma = \frac{\kappa c^2\rho}{2}.$$

Подставляя сюда (80.6), переписываем последнее выражение в нужном виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{g_{44}}{2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{g_{44}}{2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{g_{44}}{2} \right) = \frac{\kappa c^2\rho}{2}. \quad (80.13)$$

Это уравнение уже полностью соответствует уравнению Пуассона (75.1) из ньютоновой теории тяготения, в чем легко убедиться, если снова, как и в (80.9), воспользоваться соотношением

$$\frac{\psi}{c^2} = \frac{g_{44}}{2} + \text{const}$$

и заменить κ на величину

$$\kappa = \frac{8\pi k}{c^4}, \quad (80.14)$$

где k — обычная гравитационная постоянная, а c — скорость света.

Итак, мы показали, что ньютонова теория — это первое приближение к более полной теории гравитации, следующей из общей теории относительности. Более того, поскольку, как можно показать, ньютонова теория является чрезвычайно точным

приближением для напряженностей полей, с которыми мы обычно сталкиваемся, можно считать, что все хорошо изученные законы небесной механики подтверждают и релятивистскую теорию гравитации.

§ 81. Единицы, используемые в релятивистских вычислениях

Соотношение (80.14) приписывает определенную величину константе κ в уравнениях Эйнштейна (78.3). Она выражается через обычную гравитационную постоянную k и скорость света c . Следовательно, из этих уравнений можно получить уже численные результаты, которые можно сравнить с результатами наблюдений. Используя величины [44]*)

$$c = 2,99796 \cdot 10^{10} \text{ см/сек} \text{ и } k = 6,664 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{сек}^2, \quad (81.1)$$

получаем

$$\kappa = \frac{8\pi k}{c^4} = 2,073 \cdot 10^{-48} \text{ сек}^2/\text{см} \cdot \text{г}. \quad (81.2)$$

Таким образом, численное значение κ зависит, во-первых, от выбора системы единиц (мы приняли систему СГС) и, во-вторых, от выбора размерности компонент тензора энергии — импульса $T^{\mu\nu}$ (которые заданы у нас в галилеевых координатах матрицей (37.8) и имеют размерность плотности энергии, а не плотности массы, как это иногда принимается).

Однако выбором новой системы единиц мы можем достичь некоторых упрощений в написании релятивистских уравнений и уничтожить всякий произвол в выборе размерности $T^{\mu\nu}$. Чтобы сделать это, можно сохранить сантиметры в качестве единицы длины, но выбрать единицы времени и массы так, чтобы скорость света в свободном пространстве c и гравитационная постоянная превратились в единицы

$$c = 1 \text{ и } k = 1. \quad (81.3)$$

При таком выборе единиц энергия и масса данной системы, в соответствии с (27.4), имеют одну и ту же численную величину:

$$E = m, \quad (81.4)$$

так что обе отмеченные выше возможности выбора размерности $T^{\mu\nu}$ ведут теперь к одинаковым численным результатам. Кроме того, постоянная κ определяется теперь просто как

$$\kappa = 8\pi, \quad (81.5)$$

*) Современные значения:
 $c = 2,99793 \cdot 10^{10} \text{ см/сек},$
 $k = 6,673 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{сек}^2.$

и релятивистское уравнение (78.8) может быть записано следующим образом:

$$-8\pi T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (81.6)$$

Все вычисления далее будут проводиться в этих единицах. Результаты, однако, всегда можно перевести в систему СГС с помощью следующих соотношений, связывающих длину, время и массу L , T и M в единицах СГС с их величинами l , t и m в новых единицах:

$$\begin{aligned} L &= l \text{ см}, \\ T &= \frac{t}{2,998 \cdot 10^{10}} = 3,335 \cdot 10^{-11} t \text{ сек}, \\ M &= \frac{(2,998 \cdot 10^{10})^2}{6,664 \cdot 10^{-8}} m = 1,349 \cdot 10^{28} m \text{ г}. \end{aligned} \quad (81.7)$$

§ 82. Интервал Шварцшильда

В качестве особенно важного применения общей теории относительности мы получим теперь выражение для линейного элемента (формула интервала) в пустом пространстве, окружающем гравитирующую точечную частицу. Полное решение этой проблемы было впервые получено Шварцшильдом [60] и имеет большое значение, поскольку с его помощью можно описывать гравитационное поле, окружающее Солнце, а также для вывода формул трех «решающих опытов», в которых обнаруживаются различия между предсказаниями ньютоновой теории тяготения и более точными предсказаниями общей теории относительности.

Метод решения этой проблемы хорошо известен, так что для наших целей будет достаточно лишь наметить его основные черты. Учитывая статический и сферически симметричный характер поля, окружающего гравитирующую точечную частицу, можно (§ 95) выбрать координаты r , θ , φ и t , в которых линейный элемент имеет простой вид:

$$ds^2 = -e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + e^{\nu} dt^2, \quad (82.1)$$

где λ и ν зависят только от r . Далее, компоненты тензора энергии — импульса T_{μ}^{ν} , соответствующие этой формуле интервала (см. ниже уравнение (95.3)), принимают значения

$$\begin{aligned} 8\pi T_1^1 &= -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \\ 8\pi T_2^2 &= 8\pi T_3^3 = -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} \right), \\ 8\pi T_4^4 &= e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \end{aligned} \quad (82.2)$$

$$8\pi T_{\mu}^{\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu),$$

где штрихи означают дифференцирование по r , а космологическая постоянная Λ положена равной нулю.

В пустом пространстве, окружающей рассматриваемую нами частицу, все компоненты тензора энергии — импульса, очевидно, равны нулю. Комбинируя первое и третье из полученных уравнений, мы приходим к результату

$$\lambda' = -v', \quad (82.3)$$

а комбинируя первое со вторым, получаем

$$v'' + v'^2 + \frac{2v'}{r} = 0. \quad (82.4)$$

Последнее уравнение, как легко убедиться, имеет решение

$$e^v = a + \frac{b}{r}, \quad (82.5)$$

где a и b — постоянные интегрирования.

Далее, следует ожидать, что на больших расстояниях от частицы, т. е. при $r \rightarrow \infty$, линейный элемент приобретает вид, соответствующий специальной теории относительности:

$$ds^2 = -dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + dt^2, \quad (82.6)$$

где $e^\lambda = e^v = 1$ в единицах, принятых в предыдущем параграфе. Тогда уравнение (82.5) может быть переписано так:

$$e^v = 1 - \frac{2m}{r}. \quad (82.7)$$

Здесь постоянная a положена равной единице, а постоянная b заменена на $-2m$, где m , как это будет видно из физического обсуждения, имеет смысл массы частицы*). Далее, согласно (82.3) мы имеем

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m}{r}. \quad (82.8)$$

Если подставить теперь два последних выражения в первое и третье из соотношений (82.2), то $T_1^1 = T_4^4$, как это и требуется обратятся в нуль.

*) Величина $2m$ или в обычных единицах

$$r_g = \frac{2km}{c^2}$$

называется *гравитационным радиусом*. Он играет важную роль масштаба. На расстояниях $r \gg r_g$ гравитационные эффекты малы (формулы часто разлагают по степеням r/r_g). Напротив, при $r \sim r_g$ релятивистские эффекты становятся определяющими. Для Земли $r_g = 0,886$ см, для Солнца $r_g = 2,96$ км (Прим. ред.).

Подставляя окончательно (82.7) и (82.8) в общее выражение (82.1), мы можем написать линейный элемент в окрестности притягивающей точечной частицы — решение Шварцшильда — в виде

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1-2m/r} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2. \quad (82.9)$$

Так как этот результат был получен с помощью выражений для компонент тензора (82.2), в которых было положено $\Lambda=0$, то это решение соответствует, согласно (78.12) и (78.13), уравнениям Эйнштейна для случая пустого пространства:

$$R_{\mu\nu}=0.$$

Легко, однако, использовать полное выражение для тензора энергии — импульса (см. (95.3)), не пренебрегая космологическим членом, и получить

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2\right) dt^2. \quad (82.10)$$

Это соответствует более общим уравнениям в пустом пространстве:

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}.$$

Сравнивая два выражения для линейного элемента (82.9) и (82.10), мы видим, что, как уже отмечалось в § 78, действие Λ -члена на поле, окружающее притягивающую точечную частицу, усиливается с увеличением размеров рассматриваемой области. Следовательно, поскольку движение планет в действительности описывается с большой точностью формулой (82.9), мы можем заключить, что Λ -член во всяком случае настолько мал, что не дает заметных эффектов в области порядка размеров Солнечной системы.

Частный вид линейного элемента Шварцшильда (82.9) зависит, конечно, от выбора системы координат; зачастую удобнее использовать его выражения в других системах координат. Подставляя \bar{r} вместо r с помощью соотношения

$$r = \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^2 \bar{r}, \quad (82.11)$$

получаем линейный элемент Шварцшильда в виде

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^4 (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + \frac{(1-m/2\bar{r})^2}{(1-m/2\bar{r})^2} dt^2, \quad (82.12)$$

а используя «прямоугольные координаты»

$$x = \bar{r} \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \bar{r} \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \bar{r} \cos \theta, \quad (82.13)$$

можно переписать его следующим образом:

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2) + \frac{(1-m/2r)^2}{(1+m/2r)^2} dt^2, \quad (82.14)$$

где теперь $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Эти новые координаты могут быть названы изотропными, поскольку формула для интервала симметрична по x , y и z . На больших расстояниях от центральной частицы, где члены порядка $(m/r)^2$ и выше пренебрежимы по сравнению с единицей, последнее выражение для линейного элемента Шварцшильда имеет приближенный вид:

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2m}{r}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2, \quad (82.15)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

§ 83. Три «решающих опыта» теории относительности *)

Зададимся теперь вопросом: насколько соответствует шварцшильдовское выражение для линейного элемента, найденное для притягивающей точечной частицы, астрономическим наблюдениям? Методы исследования этого соответствия хорошо известны, так что для наших целей будет достаточно лишь их беглого описания **).

Рассмотрим для начала движение планет в гравитационном поле Солнца. Если планеты принять за свободные частицы, их пространственно-временные траектории будут задаваться, согласно общей теории относительности (§ 74, д), уравнением геодезических линий (74.13):

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (83.1)$$

Так как поле, окружающее Солнце, можно рассматривать как создаваемое притягивающей точечной частицей, значения символов Кристоффеля, стоящих в (83.1), будут теми же, что и для шварцшильдовского элемента (82.9).

*) К трем классическим опытам сейчас добавился еще и четвертый — запаздывание сигнала от планеты при прохождении его вблизи диска Солнца. (Прим. ред.)

***) Мы следуем здесь изложению Эддингтона [56] (§ 58, § 59).

Именно, те из компонент, которые не обращаются в нуль, определяются (см. (95.2)) следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dr}, & \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{41}^4 &= \frac{1}{2} \frac{dv}{dr}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{22}^1 &= -re^{-\lambda}, & \Gamma_{32}^3 &= \operatorname{ctg} \theta, & \Gamma_{44}^1 &= \frac{e^{\nu-\lambda}}{2} \frac{dv}{dr}, \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 &= \operatorname{ctg} \theta, & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta e^{-\lambda}, & & (83.2) \\ \Gamma_{14}^4 &= \frac{1}{2} \frac{dv}{dr}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

При этом мы использовали шварцшильдовские значения λ и ν , задаваемые (82.7) и (82.8).

Подставляя выражения (83.2) в (83.1), находим четыре уравнения, соответствующие возможным значениям $\sigma=1, 2, 3, 4$, которым должно подчиняться движение планет:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dr} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - re^{-\lambda} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 - r \sin^2 \theta e^{-\lambda} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \\ + \frac{e^{\nu-\lambda}}{2} \frac{dv}{dr} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (83.3)$$

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0, \quad (83.4)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{d\varphi}{ds} \frac{d\theta}{ds} = 0, \quad (83.5)$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{dv}{dr} \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0. \quad (83.6)$$

Эти уравнения легко упростить, выбрав координаты так, чтобы планеты первоначально двигались в плоскости $\theta = (1/2)\pi$. Тогда $d\theta/ds$ и $\cos \theta$ оказываются равными нулю в начальный момент времени, а, значит, согласно (83.4) они равны нулю всегда. Следовательно, уравнения движения принимают более простой вид:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dr} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - re^{-\lambda} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \frac{e^{\nu-\lambda}}{2} \frac{dv}{dr} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = 0, \quad (83.7)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad (83.8)$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{dv}{ds} \frac{dt}{ds} = 0. \quad (83.9)$$

Эти уравнения несложно решить, так как первоначальное уравнение для линейного элемента (82.1) дает один интеграл,

а уравнения (83.8) и (83.9) легко могут быть проинтегрированы. Таким образом, мы получаем

$$e^{\lambda} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - e^{\nu} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + 1 = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{h}{r^2}, \quad \frac{dt}{ds} = ke^{-\nu}$$

в качестве первых интегралов рассматриваемых уравнений, причем h и k здесь — постоянные интегрирования. Комбинируя первое и третье из этих уравнений и подставляя величины (82.7) и (82.8) для λ и ν , получаем релятивистские уравнения движения планет:

$$\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - \frac{2m}{r} \left(1 + r^2 \frac{d\varphi^2}{ds^2} \right) = k^2 - 1, \quad (83.10)$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = h. \quad (83.11)$$

Здесь r и φ — введенные выше пространственные координаты, m и k — постоянные, а ds — элемент собственного времени, измеренного локальными часами, движущимися вместе с планетой.

Итак, мы получили релятивистские уравнения для орбит планет в виде, удобном для сравнения с ньютоновскими уравнениями, вытекающими из обычных законов сохранения энергии и момента количества движения. Они имеют вид

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \frac{2m}{r} = \text{const}, \quad (83.12)$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const}, \quad (83.13)$$

где m — масса Солнца, выраженная в единицах § 81; r и φ следует рассматривать как обычные полярные координаты, а dt — как обычный временной интервал, который использовался в дорелятивистском подходе, не учитывавшем влияние движения и кривизны на пространственные и временные измерения.

В самом деле, эффекты движения и кривизны должны быть ничтожными для малых скоростей планет и для почти «плоского» пространства — времени, окружающего*) Солнце, а дополни-

*) Согласно шварцшильдовскому линейному элементу пространственная геометрия вокруг Солнца должна определяться формулой интервала

$$du^2 = \frac{dr^2}{1-2m/r} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

вместо обычной формулы для плоского пространства

$$du^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

тельный член $r^2 d\varphi^2/ds^2$, стоящий в (83.10), должен быть очень мал по сравнению с единицей (как квадрат поперечной скорости планеты, поделенной на квадрат скорости света). Это обстоятельство отражает большую точность выводов обычной ньютоновской теории гравитации в небесной механике.

Имеются тем не менее три следствия, получаемые с помощью шварцшильдовского линейного элемента, которые позволяют обнаружить различие между релятивистской и ньютоновской теориями гравитации. Этими следствиями мы теперь и займемся.

а) *Движение перигелия.* Первый из трех решающих для теории относительности опытов связан с тем, что релятивистское уравнение (83.10) отличается от аналогичного уравнения Ньютона (83.12) дополнительным членом. Это приводит к орбитам планет с медленно вращающимся перигелием, в отличие от совершенно замкнутых эллиптических орбит старой теории.

Подставив (83.11) в (83.10), продифференцировав по φ и положив для простоты

$$u = 1/r, \quad (83.14)$$

получим в качестве релятивистского уравнения для орбитального движения планет

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2. \quad (83.15)$$

Это уравнение следует сравнить с аналогичным ньютоновским уравнением

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{h^2}. \quad (83.16)$$

Однако даже на поверхности Солнца член $2m/r$ приблизительно равен $4 \cdot 10^{-6}$, а на таких расстояниях, как расстояние до Земли, он еще меньше и равен примерно $2 \cdot 10^{-8}$. Следовательно, пространство вокруг Солнца достаточно плоское, так что шварцшильдовские значения координат r , θ и φ , задающие положение планет, практически не будут отличаться от соответствующих значений, найденных в пренебрежении пространственной кривизной.

Далее, соотношение между бесконечно малым собственным временем ds , измеряемым на планете, и координатным временем dt должно определяться при нашем выборе линейного элемента уравнением

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 1 - \left(\frac{1}{1-2m/r} \frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} + r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi^2}{dt^2} + \frac{2m}{r} \right),$$

где второй член очень мал по сравнению с единицей, так, например, для Земли он приблизительно равен $3 \cdot 10^{-8}$. Следовательно, при описании движения планет можно не различать также и два вида времени.

Наше настоящее рассмотрение — конкретная иллюстрация того факта, что отклонения компонент $g_{\mu\nu}$ от их галилеевых значений, очень малые с метрической точки зрения, могут быть, однако, очень важными с гравитационной точки зрения.

Поскольку дополнительный член $3mu^2$ в правой части (83.15), как легко видеть, используя (83.11), весьма мал по сравнению с m/h^2 , различие между релятивистским и ньютоновским уравнениями очень незначительно. Следовательно, за решение релятивистского уравнения (83.15) можно принять в первом приближении хорошо известное решение ньютоновского уравнения (83.16):

$$u = \frac{m}{h^2} \{1 + e \cos(\varphi - \omega)\}, \quad (83.17)$$

где e — эксцентриситет орбиты, а ω — долгота перигелия. Подставляя это решение в (83.15), получаем в качестве удовлетворительного второго приближения выражение

$$u = \frac{m}{h^2} \left\{ 1 + e \cos \left(\varphi - \omega - \frac{3m^2}{h^2} \varphi \right) \right\}. \quad (83.18)$$

Из вида его сразу следует, что за время одного полного оборота планеты долгота перигелия ее ньютоновского эллипса должна смещаться на величину

$$\delta\omega = \frac{6\pi m^2}{h^2}. \quad (83.19)$$

Меркурий — единственная из планет Солнечной системы, для которой предсказанное смещение оказывается настолько значительным, что его можно с уверенностью измерить. Предсказанное смещение долготы перигелия для Меркурия равно $42,9''$ за 100 лет, а наблюдаемое смещение равняется $43,5''$ [61]. Соответствие результатов можно считать вполне удовлетворительным.

б) *Гравитационное отклонение света.* Вторая из трех решающих проверок — это отклонение света при прохождении его через гравитационное поле вблизи Солнца.

Согласно общей теории относительности (см. § 74, д) траектории световых лучей, как и свободных частиц, должны определяться уравнениями геодезических линий с дополнительным условием $ds=0$ для интервала. Следовательно, если ввести это условие, наши предыдущие уравнения для планетных орбит будут применимы и в случае распространения световых лучей в поле притягивающей точечной частицы. Более того, из (83.11) видно, что это дополнительное условие может быть просто учтено, если положить $h=\infty$ в (83.15); это дает уравнения для траектории световых лучей вблизи притягивающей точечной частицы с массой m :

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3mu^2 \quad (83.20)$$

при

$$u = 1/r. \quad (83.21)$$

В отсутствие возмущающего члена $3mu^2$ решением (83.20) является прямая линия

$$r \cos \varphi = R, \quad (83.22)$$

которая проходит на расстоянии R от притягивающей точки. Подставив снова (83.22) в (83.20), получим второе приближение:

$$r \cos \varphi = R - \frac{m}{R} (r \cos^2 \varphi + 2r \sin^2 \varphi). \quad (83.23)$$

Переходя к декартовым координатам, что возможно в пространстве, близком к евклидову, которое окружает Солнце, мы можем переписать последнее выражение в виде

$$x = R - \frac{m}{R} \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (83.24)$$

Для больших значений y это дает

$$x = R - \frac{m}{R} (\pm 2y),$$

где верхний знак соответствует положительным y , нижний — отрицательным. Следовательно, угол между асимптотическими направлениями лучей равен

$$\theta = \frac{4m}{R}. \quad (83.25)$$

Лучи света, касающиеся солнечного диска, должны отклоняться согласно этой формуле на угол в 1,75 угловой секунды. Это предсказание можно проверить, определяя во время полного солнечного затмения видимое положение звезды, свет которой проходит вблизи солнечного диска. Результаты наблюдений прекрасно согласуются с теорией. Первая и очень точная проверка релятивистской теории была сделана английской экспедицией, наблюдавшей солнечное затмение 1919 года. Наиболее надежные в настоящее время данные получены Кэмпбелом и Трамплером (экспедиция Ликской обсерватории, 1922 г.); $1,72'' \pm 0,11''$ и $1,82'' \pm 0,15''$ для двух камер различных размеров [62].

Полезно отметить, что релятивистское выражение для отклонения света вблизи объекта с массой m (83.25) вдвое больше того, которое получается в *обычной* ньютоновской теории для частиц, распространяющихся со скоростью света.

Чтобы получить ньютоновский результат, рассмотрим частицу, летящую приблизительно параллельно оси y и встречающую массивную частицу m на расстоянии $x=R$. Ускорение в направлении оси x тогда равно

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{mx}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

или с точностью, достаточной для наших целей,

$$\frac{d^2x}{dy^2} = - \frac{mR}{(R^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Решив последнее уравнение и выбрав константы интегрирования так, чтобы $(dx/dy) = 0$ и $x = R$ при $y = 0$, получим приближенное выражение для траектории при больших y :

$$x = R - \frac{m}{R} (\pm y),$$

откуда видно, что угол между асимптотическими направлениями

$$\theta = \frac{2m}{R}$$

в два раза меньше предыдущего результата (83.25)*).

Из-за столь резкого расхождения результатов релятивистской и квазиньютоновской теорий описанный опыт становится особенно важным.

в) *Гравитационное смещение спектральных линий.* Третий решающий для общей теории относительности опыт — это нахождение зависимости длины волны света от гравитационного потенциала источника, его испускающего. Мы уже приближенно рассматривали такую задачу в § 79, б с помощью принципа эквивалентности. Используя шварцшильдовский линейный элемент, мы можем теперь более детально исследовать, насколько должно смещаться частота спектральной линии света, испущенного с поверхности Солнца или звезды. Сделать это очень легко.

С одной стороны, из шварцшильдовского линейного элемента (82.9) и условия $ds = 0$ для траектории света вытекает, что скорость света, излучаемого поверхностью звезды, задается в координатах r и t выражением

$$\frac{dr}{dt} = 1 - \frac{2m}{r} \quad (83.26)$$

и, как видно, не зависит от времени. Мы можем, следовательно, заключить, что последовательность световых импульсов, разделенных координатными периодами δt во время испускания с по-

*) Можно исходить из (83.17). Для луча, проходящего вблизи Солнца, $h = R$ и $e = R/m$. Тогда из (83.17), полагая $\omega = 0$,

$$r \cos \varphi = R - \frac{m^2}{R} = R - \frac{m}{R} (r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi).$$

Эта формула отличается от (83.23) отсутствием коэффициента 2 в скобках, что и приводит к вдвое меньшему эффекту. (*Прим. ред.*)

верхности звезды, должна разделяться теми же координатными периодами и при достижении покоящегося наблюдателя.

С другой стороны, из шварцшильдовского линейного элемента следует, что собственный период δs для покоящегося атома и его координатный период δt связаны соотношением

$$\delta s = \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} \delta t. \quad (83.27)$$

Однако, поскольку собственный период атома не должен зависеть от его положения и поскольку, как отмечалось выше, координатный период света в данном случае не изменяется при распространении, можно записать

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta t}{\delta s} = \frac{1}{\sqrt{1 - (2m/r)}} \approx 1 + \frac{m}{r} \quad (83.28)$$

для отношения наблюдаемых длин световых волн, соответствующих данной спектральной линии, испускаемой в одном случае с поверхности звезды на расстоянии r , а в другом — на большом расстоянии от звезды, вблизи местонахождения наблюдателя.

Для света, излучаемого с поверхности Солнца, это ведет к очень малому «красному смещению»:

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = 2,12 \cdot 10^{-6}. \quad (83.29)$$

А для очень плотного спутника Сириуса смещение должно быть примерно в 30 раз больше. Из работ Ст. Джона [63] и Адамса [64] следует, что согласно наблюдаемым теоретических результатов в обоих случаях удовлетворительно.

Итак, можно считать, что описанные решающие опыты подтверждают общую теорию относительности. Эти подтверждения особенно важны, если учесть, что в то время, когда Эйнштейн создал свою теорию, единственным достоверно известным из этих трех явлений было движение перигелия Меркурия, а два других эффекта гравитации никогда не наблюдались даже качественно, пока не были предсказаны общей теорией относительности.

Замечательно также то, что развитая Эйнштейном теория относительности ни в коем случае не является простым следствием попыток объяснения известного уже различия между наблюдаемой орбитой Меркурия и предсказываемой ньютоновской теорией. Общая теория относительности — сложное теоретическое здание, построенное на фундаментальных принципах, главным оправданием которых служит присущая им внутренняя логика и общность. Необычайный успех теории, созданной чисто умозрительным путем, опасность которого была столь очевидна еще со времен Галилея, делает честь гениальности ее создателя.

Подтверждения теории относительности, полученные в результате наблюдений, дают нам право рассматривать ее как убедительное расширение ньютоновской теории и побуждают перейти к дальнейшему развитию теории, несмотря на то, что опытные проверки окажутся сейчас не всегда возможными.

Добавления редактора. Классические три эффекта дополнены сейчас четвертым. Шапиро*) предложил измерять время прохождения радиосигнала до Земли при радиолокации от планеты или спутника Марса (см. ниже п. IV).

По существу, опыты такого типа дают возможность проверить только первый поправочный коэффициент к ньютоновской теории тяготения.

Если записать метрику в виде

$$ds^2 = \left\{ 1 - \frac{2x}{r} + 2\beta \left(\frac{x}{r} \right)^2 - \dots \right\} dt^2 - \left\{ 1 - 2\gamma \left(\frac{x}{r} \right)^2 + \dots \right\} \times \\ \times [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)],$$

где $x = \frac{1}{2} r_g$, $r_g = 2\gamma M_{\odot} / c^2$ — гравитационный радиус Солнца, то наблюдения могут дать только сведения о коэффициентах β и γ . Разные эффекты дают сведения о разных комбинациях β и γ , однако точность обработки и наблюдений пока еще недостаточна, чтобы определить их значения с хорошей точностью.

Приведем данные о результатах опытов, проведенных до 1972 г.

I

В связи с развитием радиолокационных методов измерения астрономических расстояний появилась возможность более точного сравнения наблюдаемого движения планет с теорией. Применение методов радиолокации восходит к Л. И. Мандельштаму и Н. Д. Папалекси**) (1944), которые обсуждали вопрос о радиолокации Луны.

Вопрос о движении перигелия Меркурия осложнился после того, как Дике обратил внимание на искажения гравитационного поля из-за возможной сплюснутости Солнца***). Поэтому сейчас необходимо из данных о движении планет извлекать сведения и о форме Солнца.

Последние данные о движении перигелия Меркурия, полученные Шапиро и др.****), показывают, что наблюдаемый эффект согласуется с предсказанным с точностью 2% в предположении, что поле Солнца сферически симметрично. Эффект сплюснутости довольно велик. Сплюснутость 10^{-4} привела бы к смещению перигелия на 7" в 100 лет.

Отметим, что движение перигелия, о котором сейчас идет речь, составляет лишь 10% от суммарного движения перигелия Меркурия 575" в 100 лет, связанного в основном (~534") с возмущением других планет. В частности, на долю возмущений Венерой приходится 278".

Для других планет измерения очень неточные, все же для Венеры и Земли можно констатировать грубое согласие с теорией.

II

Отклонение луча света в поле Солнца представляет собой эффект, который очень трудно выделить в чистом виде. Здесь наиболее четкие результаты по-

*) Ср. M. S. Longair, Rep. Progr. Phys. 34, 1125 (1972).

**) Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси, УФН 29, 251 (1946).

***) R. Dicke a. Goldberg, Phys. Rev. Lett, 18, 313 (1967).

****) I. I. Shapiro, G. H. Pettengill, M. E. Ash, R. P. Ingalls, D. B. Campbell, R. B. Dicke, Phys. Rev. Lett. 28, 1597 (1972).

лучаются при измерении отклонений сигнала, посланного с искусственного спутника Марса *). Согласно с теорией оказалось в пределах 5%.

Другой хороший способ состоит в наблюдении изменения углового расстояния двух радиосточников 2С 273 и 3С 273 **). Измерения дали согласие с теорией с ошибкой 15%. В другой работе ***) аналогичные измерения дали для углового отклонения $1,77'' \pm 0,20''$.

III

Гравитационное смещение спектральных линий для неподвижного источника лучше всего было измерено на Земле. Измерялась (методом Мессбауэра) частота γ -кванта, излучаемая радиоактивным источником, помещенным на высоте 20,5 м над поверхностью Земли ****). Согласно с теорией оказалось в пределах 10%. Этот эффект проверяет лишь ньютоновский член в метрике (он практически не чувствителен к величине β и вовсе не чувствителен к γ).

Интересно отметить измерение эффекта, произведенное на самолетах, которые совершили кругосветные рейсы: одни с востока на запад, другие с запада на восток *****)). Изменение хода атомных часов связано в этих опытах с эффектом специальной теории относительности и с влиянием ньютоновского потенциала. Формула, связывающая собственное время Δt с временем земного наблюдателя, имеет вид (с точностью до членов $1/c^2$)

$$\Delta t = \Delta t \left(1 + \frac{gh}{c^2} - \frac{2\Omega v + v^2}{2c^2} \right),$$

где Ω — угловая скорость вращения Земли, v — скорость самолета (>0 при движении на восток и <0 при движении на запад) и h — высота полета.

Опыт дал согласие с теорией (ошибка $\sim 15\%$).

IV

«Четвертый эффект» — изменение времени прохождения сигнала от Меркурия и Венеры до Земли (влияние поля Солнца *****) — дал согласие с формулой теории.

$$\Delta t \approx \frac{2r_{\odot}}{c} \left\{ 1 + \ln \frac{4r_e r_p}{R_{\odot}^2} \right\};$$

r_{\odot} — гравитационный радиус Солнца (1,5 км), R_{\odot} — радиус Солнца, r_e и r_p — расстояния от Солнца до Земли и до планеты, Δt — запаздывание сигнала, когда сигнал проходит вблизи края диска Солнца. Ошибка составляла 5%. Из этих опытов можно было оценить величину γ .

Современная обработка данных по движению перигелия Меркурия приводит к оценкам

$$\gamma = 1,0 \pm 0,1, \quad \beta = 1,1 \pm 0,2$$

(см. обзор Шапиро *****)).

*) D. Muhloman, R. Ekerö, Fomolont, Phys. Rev. Lett. 24, 1377 (1970).

**) G. Seilstadt, R. Sramex, K. Weiler, Phys. Rev. Lett. 24, 1373 (1970).

***) R. Paund, G. Rebka, Phys. Rev. Lett. 4, 337 (1960).

****) Hefele a. Keatring, Science 108, 000 (1972).

*****) I. I. Shapiro, M. E. Ash, R. P. Ingalls, W. B. Smith, D. B. Campbell, R. B. Dyce, R. F. Jungen, G. H. Pettengill, Phys. Rev. Lett. 26, 1132 (1971).

*****) I. I. Shapiro, Gen. Rel. Grav. 1, 135 (1972).

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

ЧАСТЬ I

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

§ 84. Основные уравнения релятивистской механики

В этой главе мы обратимся к более подробному изложению некоторых следствий релятивистской механики, которые либо будут существенны для нас в дальнейшем, либо кажутся нам особенно интересными. Все они содержатся, в конце концов, в уравнениях Эйнштейна

$$-8\pi T^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}, \quad (84.1)$$

которые дают связь распределения энергии и материи с геометрией пространства — времени в форме равенства тензора энергии — импульса $T_{\mu\nu}$ выражению, составленному из фундаментального метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и его производных. Задача релятивистской механики — исследовать с помощью этого уравнения законы, которые управляют тензором энергии — импульса, определяя тем самым поведение материи и энергии.

Для многих задач полное уравнение (84.1) не нужно. В правой его части стоит величина, тензорная дивергенция которой, как известно, тождественно равна нулю, откуда сразу следует, что

$$(T^{\mu\nu})_{;\nu} = 0. \quad (84.2)$$

С помощью одного этого простого уравнения уже можно сделать много важных заключений о поведении вещества и энергии. Прежде всего, поскольку уравнение (84.2), если его записать в естественных координатах:

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0, \quad (84.3)$$

совпадает по форме с фундаментальными уравнениями механики в специальной теории относительности, то естественно принять (84.2) в качестве фундаментальных уравнений механики в общей теории относительности.

Развернем это выражение, применяя правила ковариантного дифференцирования; тогда фундаментальные уравнения механики (84.3) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\nu} T^{\mu\alpha} = 0, \quad (84.4)$$

а опуская индекс μ , — в виде

$$\frac{\partial T_{\mu}^{\nu}}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\nu} T_{\mu}^{\alpha} = 0. \quad (84.5)$$

Далее, вводя вместо тензора энергии — импульса соответствующую тензорную плотность

$$\mathfrak{T}_{\mu}^{\nu} = T_{\mu}^{\nu} \sqrt{-g}, \quad (84.6)$$

последнее уравнение можно переписать с помощью известных преобразований (уравнение (47), Приложение III) в более простой форме:

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_{\mu}^{\nu}}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2} \mathfrak{T}^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (84.7)$$

или

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_{\mu}^{\nu}}{\partial x^\nu} + \frac{1}{2} \mathfrak{T}_{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (84.8)$$

§ 85. Свойства тензора энергии — импульса. Общее выражение в случае идеальной жидкости

Чтобы извлечь физические заключения из фундаментальных уравнений механики, мы должны их применить к какой-либо физической среде, для которой известна явная зависимость тензора энергии — импульса от наблюдаемых свойств среды. Для этого нам необходимо знать явное выражение тензора $T^{\mu\nu}$ через величины, которые измеряются на опыте с помощью обычных методов. Из принципа эквивалентности следует, что такие выражения можно получить путем ковариантного обобщения тензора энергии — импульса из специальной теории относительности.

В специальной теории относительности в случае чисто механической среды, когда состояния в каждой точке могут определяться механическими натяжениями p_{ij}^0 и плотностью ρ_{00} , измеряемыми локальным наблюдателем, мы нашли следующее

выражение для тензора энергии — импульса *):

$$T_0^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho_{xx}^0 & \rho_{xy}^0 & \rho_{xz}^0 & 0 \\ \rho_{yx}^0 & \rho_{yy}^0 & \rho_{yz}^0 & 0 \\ \rho_{zx}^0 & \rho_{zy}^0 & \rho_{zz}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{00}^0 \end{pmatrix}. \quad (85.1)$$

При этом была использована специальная система галилеевых координат, относительно которой в рассматриваемый момент времени вещество в данной точке покоилось. Из принципа эквивалентности, однако, следует, что и в общей теории относительности тензор энергии — импульса механической среды должен иметь тот же самый вид, если он записан в собственных координатах $(x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4)$ рассматриваемой точки. Таким образом, матрица (85.1) задает тензор энергии — импульса механической среды в общей теории относительности, определяя его компоненты в специальной системе — системе собственных координат. Чтобы получить выражение этого тензора в любой другой системе координат (x^1, x^2, x^3, x^4) , надо лишь применить правило преобразования тензоров:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_0^\beta} T_0^{\alpha\beta}, \quad (85.2)$$

позволяющее находить нужные компоненты с помощью производных, связывающих новую систему координат с первоначальной собственной системой; в итоге эти компоненты оказываются выраженными через собственные плотность ρ_{00} и натяжения ρ_{ij}^0 , измеряемые локальным наблюдателем обычными физическими методами. И наоборот, если известны компоненты тензора $T^{\mu\nu}$ в данной системе координат, можно вычислить собственные натяжения и плотность с помощью обратных преобразований.

Хотя соотношение (85.2) является общим выражением для тензора энергии — импульса механической среды, определяющим его в любой заданной системе координат, его конкретное содержание зависит от производных, связывающих эти координаты с некоторой системой собственных координат. В случае идеальной жидкости можно, однако, с помощью некоторых подстановок избавиться от явной зависимости от собственных координат и дать более прозрачное выражение для тензора энергии — импульса, зависящее от действительно используемых координат.

*) См. § 37. Напомним, что мы положили $c^2=1$ в согласии с выбором единиц, сделанным в § 81.

Идеальную жидкость мы определим как механическую среду, которая не сжимается под действием поперечных сил. Тогда единственной отличной от нуля компонентой тензора натяжений, определяемой локальным наблюдателем, будет та, что соответствует собственному гидростатическому давлению p_0 . Таким образом, тензор энергии — импульса будет задаваться в собственных координатах следующим простым набором компонент:

$$T_0^{11} = T_0^{22} = T_0^{33} = p_0, \quad T_0^{44} = \rho_{00}, \quad T^{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \quad (85.3)$$

Подставляя эти величины в общее выражение для тензора энергии — импульса (85.2), найдем

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_0^1} p_0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^2} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_0^2} p_0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^3} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_0^3} p_0 + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^4} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_0^4} \rho_{00}, \quad (85.4)$$

где $(x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4)$ — собственные координаты рассматриваемой точки, а (x^1, x^2, x^3, x^4) — интересующие нас координаты.

Это выражение можно упростить. Во-первых, свяжем компоненты контравариантного метрического тензора, соответствующие этим двум системам координат:

$$g^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_0^\beta} g_0^{\alpha\beta}.$$

Подставив сюда затем обычные простые значения компонент метрического тензора в собственных координатах, получим

$$g^{\mu\nu} = -\frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_0^1} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^2} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_0^2} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^3} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_0^3} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^4} \frac{\partial x^\nu}{\partial x_0^4}. \quad (85.5)$$

Во-вторых, мы можем написать для макроскопической скорости жидкости в выбранных координатах уравнение

$$\frac{dx^\mu}{ds} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^1} \frac{dx_0^1}{ds} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^2} \frac{dx_0^2}{ds} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^3} \frac{dx_0^3}{ds} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^4} \frac{dx_0^4}{ds},$$

которое, если учесть, что скорость не имеет пространственных компонент и имеет равную единице временную компоненту, сводится к равенству

$$\frac{dx^\mu}{ds} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x_0^4}. \quad (85.6)$$

Подставляя (85.5) и (85.6) в (85.4), получаем тензор энергии — импульса идеальной жидкости в очень полезном и общем виде:

$$T^{\mu\nu} = (\rho_{00} + p_0) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g^{\mu\nu} p_0. \quad (85.7)$$

Здесь ρ_{00} и p_0 — собственная макроскопическая плотность и дав-

ление жидкости, а величины dx^μ/ds — компоненты макроскопической скорости жидкости в используемой системе координат.

Так как поле излучения можно рассматривать как идеальную жидкость, характеризуемую плотностью и давлением с простым соотношением между ними (§ 65):

$$\rho_{00} = 3p_0, \quad (85.8)$$

то для них также можно использовать выражение (85.7), с учетом (85.8), в качестве тензора энергии — импульса этого излучения; dx^μ/ds при этом следует рассматривать как скорость наблюдателя относительно используемой системы координат, который не обнаруживает в среднем никакого потока энергии (смысл этого условия будет разъяснен ниже, в § 109).

Выражение для тензора энергии — импульса идеальной жидкости (85.7) окажется чрезвычайно полезным для наших дальнейших выводов. Для более сложных механических сред, в которых могут возникать поперечные натяжения, и для жидкостей, в которых существуют тепловые потоки, полученное выражение неприменимо. Кроме того, при наличии электромагнитных полей, более сложных, нежели изотропное поле излучения, мы должны будем использовать более общее выражение для тензора энергии — импульса, которое будет получено в следующей главе. Тем не менее с помощью моделей, имеющих свойства идеальной жидкости, может быть исследовано множество важных проблем.

§ 86. Механика идеальной жидкости

Чтобы понять физический смысл фундаментальных уравнений механики, обсужденных в § 84, применим их к случаю идеальной жидкости, воспользовавшись только что полученным выражением для тензора энергии — импульса. Из соображений простоты, для того чтобы глубже проникнуть в физическую сущность результатов, будем выражать их в собственных координатах рассматриваемой точки.

Очевидно, что в собственных координатах фундаментальные уравнения механики (84.4) примут вид

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (86.1)$$

из-за равенства нулю символов Кристоффеля. Далее, в собственных координатах компоненты метрического тензора задаются их галилсевыми значениями, и их первые производные исчезают в выбранной точке, так что мы можем записать:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \pm 1, 0, \quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (86.2)$$

Кроме того пространственные и временная компоненты скорости жидкости в интересующей нас точке имеют значения

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{ds} = \frac{dz}{ds} = 0, \quad \frac{dt}{ds} = 1. \quad (86.3)$$

И наконец, так как из общей формулы для интервала следует соотношение

$$1 = g_{11} \frac{dx}{ds} \frac{dx}{ds} + 2g_{12} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + \dots + g_{44} \frac{dt}{ds} \frac{dt}{ds},$$

то, продифференцировав обе его части, находим, что в выбранной точке должно выполняться условие

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{dt}{ds} \right) = 0, \quad (86.4)$$

поскольку все члены, кроме последнего, после дифференцирования и последующей подстановки (86.2) и (86.3) обращаются в нуль. Таким образом, в собственных координатах выбранной точки производные временной компоненты скорости исчезают, хотя производные пространственных компонент, вообще говоря, могут отличаться от нуля даже в этой точке.

Предыдущие уравнения и выражение (85.7) для тензора энергии — импульса идеальной жидкости

$$T^{\mu\nu} = (\rho_{00} + \rho_0) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g^{\mu\nu} \rho_0 \quad (86.5)$$

— это все, что необходимо нам для дальнейшего исследования.

Положив в (86.1) $\mu=1$ и используя (86.5), обнаружим, что остаются всего два члена:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial x} + (\rho_{00} + \rho_0) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dx}{ds} \right) = 0,$$

которые можно переписать с помощью (86.3) и (86.4) в виде

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial x} + (\rho_{00} + \rho_0) \frac{du_x}{dt} = 0, \quad (86.6)$$

где du_x/dt — ускорение жидкости, параллельное оси x . Если мы вспомним, как выглядит по предположению вклад в импульс, связанный с работой механических сил, таких, как давление (§ 35), и учтем также то, что в используемых координатах скорость жидкости в рассматриваемой точке равна нулю, то сразу становится очевидным, что полученный выше результат является простым следствием обычного соотношения между силой и скоростью изменения импульса. Подобные же уравнения можно, конечно, написать и для $\mu=2$ и 3.

Для случая $\mu=4$ при подстановке (86.5) в (86.1) остаются только следующие члены:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(\rho_{00} + p_0) \frac{dx}{ds} \frac{dt}{ds} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\rho_{00} + p_0) \frac{dy}{ds} \frac{dt}{ds} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[(\rho_{00} + p_0) \frac{dz}{ds} \frac{dt}{ds} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[(\rho_{00} + p_0) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \right] - \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0.$$

Согласно (86.3) и (86.4) их можно переписать в виде

$$\rho_{00} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial \rho_{00}}{\partial t} + p_0 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0.$$

Умножая последнее уравнение на величину

$$\delta v_0 = \delta x \delta y \delta z, \quad (86.7)$$

где δv_0 — собственный бесконечно малый объем жидкости, получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} (\rho_{00} \delta v_0) + p_0 \frac{d}{dt} (\delta v_0) = 0, \quad (86.8)$$

которое означает, что в собственных координатах скорость изменения энергии элементарного объема жидкости может быть определена, как мы и ожидали, по скорости, с которой совершается работа против внешнего давления.

Таким образом, в собственных координатах уравнения релятивистской механики для идеальной жидкости приведут к выражениям, которым можно дать простую физическую интерпретацию в терминах измеряемых величин. Более того, если локальный наблюдатель находится в жидкости в состоянии покоя и изучает достаточно малый ее элемент такой, что гравитационной кривизной можно пренебречь, то найденные им законы механики совпадут с теми, которые мы получаем из законов сохранения энергии — импульса. Используя, далее, естественные координаты, в которых жидкость уже не покоится в выбранной точке, легко получить результаты, находящиеся в согласии с более сложными выражениями для энергии, импульса и тензора натяжений движущейся жидкости, полученными в специальной теории относительности (глава III). Однако при использовании более общих координат физический смысл уравнений механики оказывается менее прозрачным, в чем мы не раз убедимся впоследствии.

Итак, как было показано выше, для локального наблюдателя, покоящегося в жидкости и исследующего элемент объема окружающей среды настолько малый, что гравитационной кривизной в нем можно пренебречь, механические свойства жидкости совпадут с теми, которые отвечают обычным законам сохранения энергии и импульса. Более того, следует подчеркнуть, что в силу принципа эквивалентности мы должны ожидать таких же заключений для локального наблюдателя, который измеряет электро-

магнитные и термодинамические свойства малого элемента жидкости. Однако не надо забывать, что в общей теории относительности собственные координаты приводят к простым соотношениям лишь в малой окрестности точки, в которой они введены. Не следует впадать в заблуждение, что закон сохранения энергии — импульса в форме, приданной ему специальной теорией относительности, должен быть справедлив и в общей теории относительности в области конечных размеров.

Это можно проиллюстрировать с помощью полученного выше соотношения (86.8), связывающего скорость изменения энергии, измеряемую локальным наблюдателем в малом элементе окружающей его жидкости, со скоростью, с которой производится работа над окружающей средой. Этот результат, найденный для отдельного элемента, согласуется с тем, что мы могли бы получить, используя обычные законы сохранения и передачи энергии. Надо отметить, однако, что это соотношение, очевидно, справедливо для каждого из элементарных объемов, на которые можно разделить полный объем, занимаемый жидкостью, при условии конечности размеров системы. В дальнейшем мы убедимся, что, если давление по всему объему положительно, это приводит к тому, что возможны состояния изолированных систем, в которых собственная энергия ($\rho_{00}dV_0$) *каждого* элемента объема жидкости уменьшается, когда система расширяется, и увеличивается, когда система сжимается.

Тот факт, что полная сумма собственных энергий элементов объема жидкости, составляющих изолированную систему, не обязательно постоянна, кажется на первый взгляд весьма странным. В ньютоновой теории тяготения нам пришлось бы вводить в этом случае потенциальную энергию гравитационного поля, чтобы обеспечить справедливость закона сохранения энергии. В следующих двух параграфах мы увидим, как надо учитывать аналогичным образом потенциальную гравитационную энергию и импульс в общей теории относительности.

Последний результат — несохранение полной суммы собственных энергий элементарных объемов жидкости — играет важную роль для релятивистской термодинамики. Ниже мы увидим (§ 131), что это снимает ограничение на возможность возрастания энтропии изолированной системы, которое налагает в классической термодинамике обычный закон сохранения энергии.

В заключение особо отметим, что согласно (86.8) идеальная жидкость была определена таким образом, что локальный наблюдатель приходил к выводу об адиабатичности ее поведения, так как собственная энергия элементарного объема изменялась из-за выполнения внешней работы, а не за счет теплового потока. Нам следует помнить это обстоятельство, когда мы используем модель идеальной жидкости.

§ 87. Уравнения механики в лагранжевой форме

Выше, в § 84, законы сохранения были выведены из фундаментальных уравнений релятивистской механики и имели вид, вполне удобный для большинства приложений. Тем не менее мы запишем эти уравнения в другой форме, для того чтобы получить для конечных систем аналогии законов сохранения энергии и импульса. Это можно сделать несколько длинным, но хорошо известным путем, который мы сейчас наметим*).

Прежде всего выразим лагранжиан \mathfrak{L} через символы Кристоффеля первого рода:

$$\mathfrak{L} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}]. \quad (87.1)$$

Поскольку комбинация символов Кристоффеля в квадратной скобке не является тензором, \mathfrak{L} не есть скалярная плотность. Однако, так как выражение (87.1) принято как определение \mathfrak{L} во всех системах координат, можно найти величину \mathfrak{L} в любой системе и можно построить не тензорные, но тем не менее ковариантные выражения, определяющие \mathfrak{L} .

Варьируя плотность \mathfrak{L} по величинам, от которых \mathfrak{L} зависит, можно после значительных упрощений записать вариацию в виде

$$\delta \mathfrak{L} = [-\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}] \delta (g^{\mu\nu} \sqrt{-g}) + \left[-\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \frac{1}{2} g_{\mu}^{\alpha} \Gamma_{\nu\beta}^{\beta} + \frac{1}{2} g_{\nu}^{\alpha} \Gamma_{\mu\beta}^{\beta} \right] \delta \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (g^{\mu\nu} \sqrt{-g}) \right\}. \quad (87.2)$$

Если теперь рассматривать \mathfrak{L} как функцию двух новых переменных, которые мы определяем формулами

$$g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \sqrt{-g}, \quad g_{\alpha}^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (g^{\mu\nu} \sqrt{-g}), \quad (87.3)$$

можно записать:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\Gamma_{\mu\alpha}^{\beta} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} \quad (87.4)$$

и

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} = -\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \frac{1}{2} g_{\mu}^{\alpha} \Gamma_{\nu\beta}^{\beta} + \frac{1}{2} g_{\nu}^{\alpha} \Gamma_{\mu\beta}^{\beta}. \quad (87.5)$$

С помощью этих двух выражений, дающих зависимость \mathfrak{L} от переменных $g^{\mu\nu}$ и $g_{\alpha}^{\mu\nu}$, мы получим несколько уравнений, содержащих \mathfrak{L} , которые будут полезны в дальнейшем. Так, сопоставляя (87.4) и (87.5) с выражением для свернутого тензора Римана —

*) Изложение следует книге Эддингтона [56] (§ 58, § 59).

Кристоффеля (77.1), нетрудно убедиться, что последний можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu}. \quad (87.6)$$

Эта формула обнаруживает формальное сходство с уравнениями движения в классической лагранжевой форме, оправдывая название, которое мы дали функции \mathfrak{L} . Далее, умножая выражения (87.4) и (87.5) на $g^{\mu\nu}$ и $g_{\alpha}^{\mu\nu}$ соответственно и производя некоторые упрощения, можно найти соотношения

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\mathfrak{L} \quad (87.7)$$

и

$$g_{\alpha}^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} = 2\mathfrak{L}. \quad (87.8)$$

С их помощью легко вычислить скалярную плотность \mathfrak{H} :

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} - g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} \right) - g_{\alpha}^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} - g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} \right) - \mathfrak{L}. \end{aligned} \quad (87.9)$$

Теперь мы уже можем написать фундаментальные уравнения механики в форме обычной дивергенции. Для этого нам надо преобразовать второй член в полученном ранее уравнении (84.8). Согласно первоначальным уравнениям поля (84.1) можно записать:

$$\begin{aligned} -\delta\pi \mathfrak{L}_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} &= \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} dg^{\mu\nu} = \\ &= R_{\mu\nu} \sqrt{-g} dg^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \sqrt{-g} g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} + \Lambda \sqrt{-g} g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} = \\ &= R_{\mu\nu} \sqrt{-g} dg^{\mu\nu} + R d\sqrt{-g} - 2\Lambda d\sqrt{-g} = \\ &= R_{\mu\nu} \sqrt{-g} dg^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} d\sqrt{-g} - 2\Lambda d\sqrt{-g} = \\ &= R_{\mu\nu} d(g^{\mu\nu} \sqrt{-g}) - 2\Lambda d\sqrt{-g}. \end{aligned} \quad (87.10)$$

При переходе от второй строки к третьей было использовано уравнение (39) из Приложения III. Подставив сюда величину

$R_{\mu\nu}$, записанную через лагранжеву функцию (87.6), и величину $g_{\beta}^{\mu\nu}$, определенную в (87.3), получим

$$\begin{aligned}
 -8\pi\mathfrak{E}_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} &= g_{\beta}^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}}\right)-2\Lambda\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^{\beta}}= \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(g_{\beta}^{\mu\nu}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}\right)-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}g_{\beta}^{\mu\nu}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}-g_{\beta}^{\mu\nu}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}}-2\Lambda\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^{\beta}}= \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(g_{\beta}^{\mu\nu}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}\right)-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}g_{\alpha}^{\mu\nu}-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g^{\mu\nu}}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}g^{\mu\nu}-2\Lambda\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^{\beta}}= \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(g_{\beta}^{\mu\nu}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}\right)-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x^{\beta}}-2\Lambda\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^{\beta}}= \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left[g_{\beta}^{\mu\nu}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}}-g_{\beta}^{\alpha\mathfrak{L}}-2g_{\beta}^{\alpha}\Lambda\sqrt{-g}\right]. \quad (87.11)
 \end{aligned}$$

Для дальнейшего использования этого результата введем новую величину, которую можно назвать псевдотензорной плотностью энергии и импульса:

$$t_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{16\pi} \left[g_{\beta}^{\mu\nu} \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha}^{\mu\nu}} + g_{\beta}^{\alpha\mathfrak{L}} + 2g_{\beta}^{\alpha}\Lambda\sqrt{-g} \right]. \quad (87.12)$$

В соответствии с этим определением и (87.11), мы, очевидно, можем написать:

$$\frac{\partial t_{\mu}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{1}{2}\mathfrak{E}_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}. \quad (87.13)$$

Подставляя теперь это выражение в (84.8), можно придать уравнениям механики вид обычной дивергенции:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\mathfrak{E}_{\mu}^{\nu} + t_{\mu}^{\nu}) = 0. \quad (87.14)$$

Это уравнение не является тензорным, так как величина t_{μ}^{ν} не настоящая тензорная плотность; дивергенция также здесь обычная, а не тензорная. Тем не менее определение плотности (87.12) t_{μ}^{ν} справедливо во всех системах координат, а последнее уравнение ковариантно и справедливо во всех системах координат. Таким образом, не возникает никаких сомнений в правильности этого замечательного результата Эйнштейна.

Заметим, что согласно определению t_{μ}^{ν} (87.12) и значениям величин, стоящих в нем и введенных предыдущими уравнениями этого параграфа, величина t_{ν}^{μ} в любой точке задается компонен-

тами метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ и его первыми производными в этой точке. Далее, если использовать *естественные координаты* в выбранной точке, видно, что выражение для t_{μ}^{ν} сводится к следующему:

$$8\pi t_{\mu}^{\nu} = g_{\mu}^{\nu} \Lambda \sqrt{-g}. \quad (87.15)$$

Объединение его с выражением для тензора энергии — импульса (84.1) приводит в этих координатах к соотношению

$$-8\pi (\mathfrak{E}_{\mu}^{\nu} + t_{\mu}^{\nu}) = \left(R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu}^{\nu} \right) \sqrt{-g}. \quad (87.16)$$

Однако, поскольку t_{μ}^{ν} не настоящая тензорная плотность, она не будет выглядеть столь же просто во всех других системах координат.

§ 88. Закон сохранения энергии — импульса для конечных систем

Новая формулировка законов механики позволяет получить важные выражения, которые можно рассматривать как релятивистские аналоги обычных законов сохранения энергии и импульса.

Начнем с того, что обозначим через x^1 , x^2 и x^3 координаты, соответствующие обычным пространственным координатам, а через x^4 — соответствующую обычной временной, и применим уравнение (87.14) к рассматриваемой конечной системе. Умножая затем (87.14) на $dx^1 dx^2 dx^3$ и, интегрируя при некотором заданном моменте «времени» x^4 по пространственному объему, занимаемому системой, после некоторой перегруппировки членов получим

$$\begin{aligned} \int \int \int \frac{\partial}{\partial x^4} (\mathfrak{E}_{\mu}^4 + t_{\mu}^4) dx^1 dx^2 dx^3 = & - \int \int \int \left[\frac{\partial}{\partial x^1} (\mathfrak{E}_{\mu}^1 + t_{\mu}^1) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x^2} (\mathfrak{E}_{\mu}^2 + t_{\mu}^2) + \frac{\partial}{\partial x^3} (\mathfrak{E}_{\mu}^3 + t_{\mu}^3) \right] dx^1 dx^2 dx^3. \end{aligned} \quad (88.1)$$

Пределы интегрирования здесь соответствуют размерам рассматриваемой области: от x^1 до x'^1 , от x^2 до x'^2 и т. д. — и считаются не зависящими от «времени» x^4 . Поэтому (88.1) можно переписать, если проинтегрировать соответствующим образом в нем правую часть, в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^4} \int \int \int (\mathfrak{E}_{\mu}^4 + t_{\mu}^4) dx^1 dx^2 dx^3 = & - \int \int \int \left[\mathfrak{E}_{\mu}^1 + t_{\mu}^1 \Big|_{x^1}^{x'^1} dx^2 dx^3 - \right. \\ & \left. - \int \int \left[\mathfrak{E}_{\mu}^2 + t_{\mu}^2 \Big|_{x^2}^{x'^2} dx^1 dx^3 - \int \int \left[\mathfrak{E}_{\mu}^3 + t_{\mu}^3 \Big|_{x^3}^{x'^3} dx^1 dx^2. \right. \right. \end{aligned} \quad (88.2)$$

В этой форме уравнение (88.2) справедливо в любой системе координат вследствие его прямой связи с ковариантным

уравнением (87.14). Интерпретация и использование полученного уравнения часто облегчаются, если выбрать координаты так, чтобы граница интегрирования x^1, x'^1 и т. д., которая должна охватывать интересующую нас область, проходила как раз по разделу системы и окружающей среды. Так, например, квазидекартовы координаты x, y, z с пределами интегрирования от x до x' , от y до y' , от z до z' , соответствующими действительной границе системы, предпочтительнее для наших теперешних целей, чем, скажем, полярные координаты r, θ и φ с пределами интегрирования от 0 до r , от 0 до π и от 0 до 2π , из которых лишь r на самом деле определяет границу. Упрощение при надлежащем выборе координат происходит потому, что правая часть (88.2) в этом случае определяется лишь величинами $\mathfrak{Z}_\mu^1, t_\mu^1$ и т. д., заданными на границе системы, и не зависит от их значений внутри системы.

Выберем координаты указанным образом. Тогда из уравнения (88.2) следует, что левая часть, т. е. скорость изменения пространственного интеграла со «временем» x^4 , равна сумме поверхностных интегралов в правой части, величина которой полностью определяется условиями, заданными на границе раздела системы и окружающей ее среды.

Таким образом, уравнение (88.2) записано в такой форме, что его можно рассматривать как выражение закона сохранения, если правую часть (88.2) считать определением потока, пересекающего границу. Далее, если взять предельный случай «плоского» пространства — времени, когда применима специальная теория относительности, уравнение (88.2) может быть переписано в галилеевых координатах следующим образом:

$$\frac{d}{dx^4} \iiint T_{\mu}^4 dx^1 dx^2 dx^3 = - \iiint |T_{\mu}^1|_{x^1}^{x'^1} dx^2 dx^3 - \\ - \iiint |T_{\mu}^2|_{x^2}^{x'^2} dx^1 dx^3 - \iiint |T_{\mu}^3|_{x^3}^{x'^3} dx^1 dx^2, \quad (88.3)$$

так как $t_\mu^v = 0$ согласно (87.15), $\Lambda = 0$ для «плоского» пространства, а \mathfrak{Z}_μ^v должно быть равно T_{μ}^v , поскольку $V - \overline{g} = 0$ в выбранных координатах. Сравнивая полученное уравнение с уравнением (38.10), мы увидим, что при $\mu = 1, 2, 3$ уравнение (88.3) полностью эквивалентно релятивистскому выражению — следствию закона сохранения трех компонент количества движения, а при $\mu = 4$ уравнение (88.3) совпадает с законом сохранения энергии *).

*) То, что индекс μ в (88.3) стоит внизу, а в (38.10) вверху, не существенно, поскольку из соотношения $(T^\mu)_\mu = 0$ следует и $(g_{\alpha\mu} T^{\alpha\nu})_\nu = (T^\nu)_\nu = 0$ ввиду равенства $(g_{\alpha\mu})_\nu = 0$ (см. уравнение (35) из Приложения III).

Итак, можно считать, что уравнение (88.2) в общей теории относительности является аналогом обычного закона сохранения энергии — импульса, если принять величину

$$J_{\mu} = \iiint (\mathfrak{E}_{\mu}^4 + t_{\mu}^4) dx^1 dx^2 dx^3 \quad (88.4)$$

при $\mu = 1, 2, 3$ за определение импульса данной области и при $\mu = 4$ за определение ее энергии. Согласно этому определению можно теперь рассматривать величины \mathfrak{E}_{μ}^4 в качестве плотностей энергии и импульса вещества, а t_{μ}^4 — как плотность потенциальной гравитационной энергии и импульса. Введение потенциальной энергии и импульса, необходимое для аналогии с обычными законами сохранения энергии и импульса, приводит к тому, что полная собственная энергия изолированной системы может не быть постоянной, как было замечено в конце § 86.

Итак, с помощью (88.4) мы ввели величины J_{μ} , которые можно рассматривать как энергию и импульсы конечной системы, не составляющие, однако, настоящего ковариантного вектора. Тем не менее эти величины определены во всех системах координат формулой (88.4) и уравнения, в которых фигурируют J_{μ} , являются ковариантными, т. е. справедливыми во всех системах координат.

Физический смысл величин J_{μ} наиболее легко понять, применив их для описания изолированной системы. Рассмотрим изолированную систему с границей, находящейся в окружающем пустом пространстве на достаточном удалении, так что можно пренебречь кривизной пространства — времени для точек на границе и вне ее. Область пространства внутри этой поверхности можно тогда рассматривать как трубу в окружающем «плоском» пространстве — времени, и мы можем выбрать координаты так, чтобы они непрерывным образом переходили в какие-то галилеевы координаты специальной теории относительности, заданные вне трубы.

Легко видеть, что при таком выборе координат общий закон сохранения энергии — импульса (88.2) для такой изолированной системы переписывается в простой форме:

$$\frac{dJ_{\mu}}{dx^4} = 0, \quad (88.5)$$

поскольку правая часть (88.2) равна нулю. Последнее же следует из формулы (87.16) и нашего предположения, что кривизной пространства — времени на поверхности цилиндра можно пренебречь.

Далее, можно показать, что величины J_{μ} не зависят от преобразований системы координат внутри цилиндра, при том условии, однако, что преобразованные системы координат совпадают с галилеевой системой, заданной вне цилиндра. В подтвержде-

ние просто заметим, что всегда можно ввести дополнительную третью систему координат, которая вне цилиндра совпадала бы с обычной галилеевой системой, а внутри цилиндра в один момент «времени» x^4 (определенного вне цилиндра) совпадала бы с первоначальной системой, а в некоторый более поздний момент «времени» x^4 совпадала бы с преобразованной системой. Тогда, поскольку величины J_μ согласно (88.5) не должны зависеть от x^4 во всех трех системах координат, мы можем сделать вывод, что эти величины идентичны для всех трех систем координат.

В дополнение можно показать, что величины J_μ преобразуются как компоненты четырехмерного вектора при линейных преобразованиях, соответствующих переходам к каким-либо новым наборам галилеевых координат вне цилиндра. Строгое доказательство этого утверждения довольно сложно, и мы не будем его здесь проводить (см. книгу Паули [38]).

Подытоживая предыдущее, мы видим, что в случае изолированной системы физический смысл величин J_μ можно понять из того, что (1) при предельном переходе они переходят в величины, которые в специальной теории относительности приняты как энергия и импульс; (2) они подчиняются законам сохранения, если мы вводим координаты, переходящие в галилеевы в «плоском» пространстве — времени вне системы; (3) они не зависят от выбора системы координат внутри области, в которой существенно кривизна пространства — времени; (4) они зависят от выбора галилеевых систем координат в окружающем «плоском» пространстве — времени таким же образом, как и величина $m_0 dx^\mu/ds$, которую можно рассматривать (см. 28.4) как определение импульса и энергии частицы в специальной теории относительности. Эти замечания должны помочь нам представить себе физическую природу введенных величин.

§ 89. Плотности энергии и импульса, записанные в виде дивергенций

Для некоторых наших дальнейших применений законов сохранения энергии — импульса удобно переписать и сами плотности энергии и импульса ($\mathfrak{E}_\mu^4 + t_\mu^4$) в виде дивергенций. Для этого объединим выражения (84.1) для \mathfrak{E}_μ^v и (87.12) для t_μ^v следующим образом:

$$8\pi (\mathfrak{E}_\mu^v + t_\mu^v) = -\mathfrak{R}_\mu^v + \frac{1}{2} g_\mu^\nu \mathfrak{R} - \frac{1}{2} g_\mu^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial g^{\alpha\beta}} + \frac{1}{2} g_\mu^v \mathfrak{E}. \quad (89.1)$$

Интересно отметить, что Λ -член при этом исчезает из последнего выражения, даже если космологическая постоянная и не точно равна нулю. Подстановки величин (87.6) и (87.9) в правую

часть преобразуют (89.1) к виду

$$\begin{aligned} 8\pi (\mathfrak{E}_\mu^{\nu} + t_\mu^{\nu}) = \\ = -g^{\alpha\nu} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial g_\gamma^{\mu\alpha}} + g^{\alpha\nu} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial g_\mu^{\alpha\alpha}} + \frac{1}{2} g_\mu^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial g_\gamma^{\alpha\beta}} \right) - \frac{1}{2} g_\mu^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial g_\nu^{\alpha\beta}}. \end{aligned}$$

Это можно записать и по-другому:

$$\begin{aligned} 8\pi (\mathfrak{E}_\mu^{\nu} + t_\mu^{\nu}) = \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(-g^{\alpha\nu} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial g_\gamma^{\mu\alpha}} + \frac{1}{2} g_\mu^{\nu} g^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial g_\gamma^{\alpha\beta}} \right) + \\ + g_\nu^{\alpha\nu} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial g_\gamma^{\mu\alpha}} + g^{\alpha\nu} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial g_\mu^{\alpha\alpha}} - \frac{1}{2} g_\mu^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial g_\nu^{\alpha\beta}}. \quad (89.2) \end{aligned}$$

Пользуясь затем определениями величин, входящих в это выражение, можно показать путем довольно длинных последовательных преобразований [65], что сумма последних трех членов в полученном выражении тождественно равна нулю.

В правой части, таким образом, остается лишь дивергенция, т. е.

$$8\pi (\mathfrak{E}_\mu^{\nu} + t_\mu^{\nu}) = \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(-g^{\alpha\nu} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial g_\gamma^{\mu\alpha}} + \frac{1}{2} g_\mu^{\nu} g^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial g_\gamma^{\alpha\beta}} \right). \quad (89.3)$$

Это соотношение окажется полезным при нахождении релятивистских плотностей энергии и импульса.

§ 90. Предельные значения некоторых величин на больших расстояниях от изолированной системы

В следующем параграфе с помощью уравнения (89.3) мы получим выражения для полной энергии и импульса изолированной материальной системы. Предварительно вычислим предельные (соответствующие большим расстояниям от системы) значения некоторых величин, стоящих в правой части этого выражения.

При вычислениях используем систему квазигалилеевых координат (x, y, z, t) , которую выберем так, чтобы наша материальная система все время находилась вблизи начала координат $x=y=z=0$ и чтобы интервал принимал галилееву форму на очень больших расстояниях от начала координат. Вследствие этого интервал на достаточном удалении от начала координат можно описывать приближенной шварцшильдовской формулой (82.15), а именно:

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2m}{r} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) + \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2, \quad (90.1)$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad m = \text{const}, \quad (90.2)$$

так как на достаточно больших расстояниях поле благодаря расположению системы сферически симметрично, а также статично в силу того, что система изолирована. Последнее означает, что мы считаем, что на этих расстояниях изменения, происходящие внутри системы, не влияют на метрику и что термодинамическими процессами, протекающими внутри системы, можно пренебречь. Будем опускать члены порядка (m/r) , считая их малыми по сравнению с единицей. Тогда легко убедиться в том, что символы Кристоффеля, соответствующие введенной метрике, имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\mu}^{\mu} &= -\frac{m}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x^{\mu}}, & \Gamma_{\mu\mu}^{\nu} &= \frac{m}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x^{\nu}}, \\ \Gamma_{\nu\mu}^{\mu} = \Gamma_{\mu\nu}^{\mu} &= \pm \frac{m}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x^{\nu}} \begin{cases} \mu = 4, \\ \mu \neq 4, \end{cases} & \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} &= 0, \end{aligned} \quad (90.3)$$

где μ , ν и σ — различные индексы. Заметим, что практически в соответствии с (90.2) часть этих величин исчезает, поскольку не зависит от r и $x^4 = t$.

С помощью этих выражений для символов Кристоффеля и выражения (87.5) для $\partial \mathfrak{L} / \partial g_{\alpha}^{\mu\nu}$ можно получить в явном виде величины, стоящие в правой части (89.3), которые будут необходимы нам в следующем параграфе. Вычислим их с той же степенью точности, что и символы Кристоффеля:

$$\begin{aligned} g^{\alpha 4} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_1^{\alpha 4}} &= \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_1^{14}} = -\Gamma_{14}^1 + \frac{1}{2} \Gamma_{4e}^e = 0, \\ g^{\alpha 4} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_2^{\alpha 4}} &= \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_2^{14}} = -\Gamma_{14}^2 = 0, \\ g^{\alpha 4} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_1^{\alpha 4\alpha}} &= \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_1^{44}} = -\Gamma_{44}^1 = -\frac{m}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x}, \\ g^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_1^{\alpha\beta}} &= -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_1^{11}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_1^{22}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_1^{33}} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_1^{44}} = \\ &= +\Gamma_{11}^1 - \frac{1}{2} \Gamma_{1e}^e - \frac{1}{2} \Gamma_{1e}^e + \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{44}^1 = \\ &= \frac{m}{r^2} \left\{ -\frac{\partial r}{\partial x} - \left(-\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \right) + \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial x} \right\} = \\ &= \frac{2m}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись симметрией относительно x , y , и z и заменив производные r по координатам направляющими косинусами радиуса-вектора, запишем эти выражения окончательно в виде

$$g^{\alpha 4} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g_1^{\alpha 4}} = g^{\alpha 4} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g_2^{\alpha 4}} = g^{\alpha 4} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g_3^{\alpha 4}} = 0, \quad (90.4)$$

$$g^{\alpha 4} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g_1^{\alpha 4}} = -\frac{m}{r^2} \cos(nx),$$

$$g^{\alpha 4} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g_2^{\alpha 4}} = -\frac{m}{r^2} \cos(ny), \quad (90.5)$$

$$g^{\alpha 4} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g_3^{\alpha 4}} = -\frac{m}{r^2} \cos(nz),$$

$$g^{\alpha \beta} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g_1^{\alpha \beta}} = \frac{2m}{r^2} \cos(nx),$$

$$g^{\alpha \beta} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g_2^{\alpha \beta}} = \frac{2m}{r^2} \cos(ny), \quad (90.6)$$

$$g^{\alpha \beta} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g_3^{\alpha \beta}} = \frac{2m}{r^2} \cos(nz).$$

Этот перечень формул дает нам на больших расстояниях от материальной системы предельные значения тех величин, которые будут нам необходимы, в следующем параграфе.

§ 91. Масса, энергия и импульс изолированной системы

С помощью найденных выше величин мы можем теперь получить выражения для энергии и компонент импульса изолированной системы. Исходя из (88.4) и (89.3), выразим энергию системы в виде

$$\begin{aligned} U = J_4 &= \iiint (\mathfrak{E}_4^4 + t_4^4) dx dy dz = \\ &= \frac{1}{8\pi} \iiint \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(-g^{\alpha 4} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g_\gamma^{\alpha 4}} + \frac{1}{2} g^{\alpha \beta} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial g_\gamma^{\alpha \beta}} \right) dx dy dz, \quad (91.1) \end{aligned}$$

что справедливо, если интегрирование производится по достаточно большому объему, окружающему рассматриваемую систему. Пусть этот объем имеет вид сферы радиуса r вокруг начала координат. Уславливаясь суммировать по дважды встречающемуся индексу γ и используя теорему Гаусса, преобразуем первые три члена суммы в поверхностные интегралы. Подставляя

в правую часть (91.1) предельные величины (90.5) и (90.6), соответствующие достаточно большим r , получаем

$$U = \frac{1}{8\pi} \int \int \frac{2m}{r^2} \{ \cos^2(nx) + \cos^2(ny) + \cos^2(nz) \} d\sigma + \\ + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int \int \int \left(-g^{\alpha 4} \frac{\partial \xi}{\partial g_4^{\alpha 4}} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial \xi}{\partial g_4^{\alpha\beta}} \right) dx dy dz. \quad (91.2)$$

Сразу видно, что первый член в этом выражении равен m . Второй член в этом выражении не может быть вычислен в явном виде, поскольку в нем производится интегрирование по всему объему сферы, включая область, окружающую начало координат, где вид интервала неизвестен. Тем не менее, так как U — постоянная, в соответствии с законами сохранения энергии для изолированной системы (88.5) и поскольку m — постоянная, по определению характеризующая статическое поле на больших расстояниях, очевидно, что второй член правой части (91.2) также должен быть постоянным, а следовательно, должен быть равен просто нулю, так как интеграл не может неограниченно изменяться с постоянной конечной скоростью. Таким образом, энергия изолированной системы выражается формулой Эйнштейна:

$$U = m. \quad (91.3)$$

Импульс системы в используемых координатах может быть определен подобным же образом. В соответствии с определениями (88.4) и (89.3) компоненты импульса в направлении оси x можно записать в виде

$$J_1 = \int \int \int (\mathfrak{I}_1^4 + \mathfrak{I}_1^4) dx dy dz = \frac{1}{8\pi} \int \int \int \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(-g^{\alpha 4} \frac{\partial \xi}{\partial g_4^{\alpha\nu}} \right) dx dy dz.$$

Поступим с этим выражением так же, как и с (91.1), т. е. отбросим нулевые члены, пользуясь (90.4), и в результате получим

$$J_1 = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int \int \int \left(-g^{\alpha 4} \frac{\partial \xi}{\partial g_4^{\alpha 4}} \right) dx dy dz = 0. \quad (91.4)$$

В итоге компоненты импульса J_1 , J_2 и J_3 и энергия $J_4 = U$ изолированной материальной системы, находящейся все время в начале квазигалилеевой системы координат, задаются набором

$$J_\mu = (0, 0, 0, m). \quad (91.5)$$

Три компоненты импульса оказываются равными нулю, конечно, из-за специального выбора системы координат, при котором

наша система покоится в начале координат. Величина m , полученная для энергии системы, также вполне понятна, она указывает, что полная энергия изолированного объекта — это величина, входящая в шварцшильдовское приближение, которое определяет гравитационное поле на больших расстояниях от объекта.

Воспользуемся теперь тем обстоятельством, отмеченным уже в конце § 88, что компоненты J_μ преобразуются подобно компонентам ковариантного вектора при линейных преобразованиях, соответствующих заменам одной системы галилеевых координат другой в окружающем «плоском» пространстве — времени. Тогда согласно (91.5) можно записать для J^μ более общее контрвариантное выражение:

$$J^\mu = m \frac{dx^\mu}{ds}, \quad (91.6)$$

в котором можно считать, что dx^μ/ds соответствует приближенно скорости системы как целого относительно используемой системы координат.

§ 92. Вычисление энергии квазистатической изолированной системы при помощи интеграла только по занимаемому ею пространству

Для некоторых целей оба найденных выше выражения для энергии изолированной системы

$$U = \iiint (\mathfrak{E}_4^4 + t_4^4) dx dy dz \quad \text{и} \quad U = m \quad (92.1)$$

могут оказаться неудобными. Недостаток первого выражения состоит в том, что интегрирование в нем должно производиться по объему значительно большему, чем действительные размеры системы, так как t_4^4 , вообще говоря, не равна нулю в пустом пространстве. Второе же выражение обладает тем недостатком, что оно не дает никаких рецептов для вычисления энергии по действительным распределениям материи и излучения внутри системы. Для частного класса систем (назовем их квазистатическими) можно получить другие выражения, в некоторых отношениях более удобные.

Подставляя в первое из двух выражений (92.1) плотность потенциальной энергии t_4^4 (87.12), получаем

$$U = \iiint \left(\mathfrak{E}_4^4 + \frac{\mathfrak{g}}{16\pi} - \frac{1}{16\pi} g_4^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial g_4^{\alpha\beta}} \right) dx dy dz.$$

Космологический член здесь опущен, так как мы будем применять эту формулу лишь к малым системам, относительно которых

допустимо утверждение, что они окружены «плоским» пространством — временем. Подставляя сюда выражение для \mathfrak{E} (87.9), имеем

$$U = \iiint \left[\mathfrak{E}_4^4 - \frac{\mathfrak{R}}{16\pi} + \frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial g_4^{\alpha\beta}} \right) - \frac{1}{16\pi} g_4^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial g_4^{\alpha\beta}} \right] dx dy dz.$$

Кроме того, взяв выражение для \mathfrak{R} в соответствии с (78.11):

$$\mathfrak{R} = 8\pi \mathfrak{E} = 8\pi (\mathfrak{E}_1^1 + \mathfrak{E}_2^2 + \mathfrak{E}_3^3 + \mathfrak{E}_4^4),$$

разложив третий член подынтегральной функции и объединив его с четвертым, перепишем выражение для U следующим образом:

$$\begin{aligned} U = & \iiint \frac{1}{2} (\mathfrak{E}_4^4 - \mathfrak{E}_1^1 - \mathfrak{E}_2^2 - \mathfrak{E}_3^3) dx dy dz + \\ & + \frac{1}{16\pi} \iiint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial g_1^{\alpha\beta}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial g_2^{\alpha\beta}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial g_3^{\alpha\beta}} \right) \right] dx dy dz + \frac{1}{16\pi} \iiint g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial g_4^{\alpha\beta}} \right) dx dy dz. \end{aligned} \quad (92.2)$$

Далее, введем теперь условия, что координаты (x, y, z, t) — квазигалилеева типа, как и в двух предыдущих параграфах, и что физическая система постоянно находится в начале координат. Тогда второй интеграл в правой части (92.2) легко вычислить с помощью теоремы Гаусса; при этом область интегрирования удобно выбрать в виде сферы достаточно большого радиуса, а значения на ее границе — в виде предельных величин (90.6). Величина этого интеграла оказывается равной $(1/2)t$ и согласно (91.3) равна также $(1/2)U$. Учитывая последнее, перепишем (92.2) так:

$$\begin{aligned} U = & \iiint (\mathfrak{E}_4^4 - \mathfrak{E}_1^1 - \mathfrak{E}_2^2 - \mathfrak{E}_3^3) dx dy dz + \\ & + \frac{1}{8\pi} \iiint g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial g_4^{\alpha\beta}} \right) dx dy dz. \end{aligned} \quad (92.3)$$

И наконец, определим квазистатическую систему как систему, в которой изменения происходят за «время» t , настолько большое, что в правой части (92.3) можно пренебречь вторым членом по сравнению с первым. Естественно, что это выполняется строго лишь для состояний медленно меняющихся или равновесных. Для энергии таких систем мы можем использовать простое выражение [65]:

$$U = \iiint (\mathfrak{E}_4^4 - \mathfrak{E}_1^1 - \mathfrak{E}_2^2 - \mathfrak{E}_3^3) dx dy dz. \quad (92.4)$$

Это выражение обладает тем значительным преимуществом, что интегрирование в нем можно производить лишь по области, действительно занимаемой веществом или электромагнитным полем, поскольку величины \mathfrak{E}_μ^ν равны нулю в пустом пространстве.

ЧАСТЬ II
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ

§ 93. Общие эйнштейновские решения уравнений поля
в случае слабых полей

Как упоминалось в начале этой главы, все законы релятивистской механики содержатся в уравнениях Эйнштейна

$$-8\pi T_\mu^\nu = R_\mu^\nu - \frac{1}{2} R g_\mu^\nu + \Lambda g_\mu^\nu, \quad (93.1)$$

которые связывают тензор энергии — импульса с геометрией пространства — времени. В первой части мы изучили те следствия механики, которые вытекают из условия равенства нулю тензорной дивергенции тензора энергии — импульса T_μ^ν , возникающего из-за того, что дивергенция правой части (93.1) равна нулю тождественно. Теперь мы перейдем к более общей проблеме решения десяти дифференциальных уравнений (93.1) и тем самым свяжем компоненты тензора энергии — импульса T_μ^ν с компонентами метрического тензора $g_{\mu\nu}$.

Для случая достаточно слабых полей эта проблема была полностью решена приближенным решением Эйнштейна для этих уравнений поля. В случае сильных полей мы не можем получить общего решения полевых уравнений, но, вводя специальные предположения относительно физической природы рассматриваемой системы, можем написать ряд упрощенных выражений, связывающих компоненты T_μ^ν с компонентами метрики $g_{\mu\nu}$ и ее производными. Эти выражения оказываются полезными при решении уравнений в некоторых частных случаях.

Приступим теперь к нахождению общего приближенного решения, впервые полученного Эйнштейном. Для этого рассмотрим слабое гравитационное поле, которое допускает введение координат, мало отличающихся от галилеевых. Компоненты метрического тензора в этом случае будут выглядеть следующим образом:

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (93.2)$$

где $\delta_{\mu\nu}$ — постоянные галилеевы значения $g_{\mu\nu}$: ± 1 и 0 , а $h_{\mu\nu}$ — малые добавки. Величины $h_{\mu\nu}$ и их производные по координатам

будем считать членами первого порядка, а квадратами их будем пренебрегать. Удобно также ввести величины

$$h_{\mu}^{\lambda} = \delta^{\lambda\alpha} h_{\mu\alpha}, \quad h = h_{\alpha}^{\alpha} = \delta^{\sigma\lambda} h_{\sigma\lambda}, \quad (93.3)$$

где $\delta^{\mu\nu}$ — галилеевы значения $g^{\mu\nu}$. Рассмотрим теперь выражение для свернутого тензора Римана — Кристоффеля (77.1). Естественно исключить из него члены высших порядков, что дает

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{1}{2} \delta^{\sigma\lambda} \left\{ \frac{\partial h_{\mu\lambda}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial h_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial h_{\mu\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \right\} \right) - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left(\frac{1}{2} \delta^{\sigma\lambda} \left\{ \frac{\partial h_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial h_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \right\} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \delta^{\sigma\lambda} \left(\frac{\partial^2 h_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 h_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 h_{\nu\lambda}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\lambda}} \right). \end{aligned}$$

Производя перегруппировки и замены немых индексов и используя определения (93.3), последнюю строку можно переписать так:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \delta^{\sigma\lambda} \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\lambda}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 h_{\mu}^{\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\alpha}} - \frac{\partial^2 h_{\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\alpha}} \right). \quad (93.4)$$

Покажем теперь, что это соотношение можно разбить на два следующих:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \delta^{\sigma\lambda} \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\lambda}} \quad (93.5)$$

и

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 h_{\mu}^{\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\alpha}} - \frac{\partial^2 h_{\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\alpha}} = 0. \quad (93.6)$$

Действительно, в соответствии с (93.5) и нашим первоначальным выражением для тензора энергии — импульса (93.1) мы можем, очевидно, опуская космологический член, написать:

$$\begin{aligned} -16\pi T_{\mu}^{\nu} &= 2R_{\mu}^{\nu} - g_{\mu}^{\nu} R = \delta^{\sigma\lambda} \frac{\partial^2}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\lambda}} \left(h_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} h \right) = \\ &= \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(h_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} h \right). \quad (93.7) \end{aligned}$$

Это «волновое уравнение» имеет хорошо известное решение, близкое к тому, что используется в теории запаздывающих потенциалов:

$$\left(h_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} h \right) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{[-16\pi T_{\mu}^{\nu}]}{r} dx dy dz. \quad (93.8)$$

Интегрирование здесь производится по всему пространственному объему; r является расстоянием от точки наблюдения, в которой мы вычисляем $\left(h_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}h\right)$, до соответствующего элемента объема $dx dy dz$; квадратные скобки указывают на то, что следует использовать значения T_{μ}^{ν} , соответствующие моменту времени более раннему, нежели интересующий нас. (при этом интервал между ними должен равняться времени, которое необходимо для того, чтобы сигнал, обладающий единичной скоростью, дошел от рассматриваемого объема интегрирования $dx dy dz$ до точки наблюдения).

Покажем теперь, что это решение совместно с условием (93.6). Дифференцируя (93.8), можно записать:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(h_{\mu}^{\alpha} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\alpha} h \right) = -4 \int \frac{[(\partial/\partial x^{\alpha}) T_{\mu}^{\alpha}]}{r} dx dy dz.$$

Согласно (93.7), однако, тензор энергии — импульса T_{μ}^{α} — величина первого порядка, а потому, в соответствии с фундаментальным соотношением (84.5), дивергенция тензора энергии — импульса является величиной второго порядка. Следовательно, с заданной степенью точности получаем

$$\frac{\partial h_{\mu}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^{\mu}}.$$

Подставляя в (93.6) последнее выражение и аналогичное выражение для ν , легко проверить, что найденное соотношение обеспечивает справедливость условия (93.6).

Итак, мы убедились в том, что полученное Эйнштейном выражение (93.8)

$$\left(h_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} h \right) = -4 \int \frac{[T_{\mu}^{\nu}]}{r} dx dy dz \quad (93.9)$$

действительно является приближенным решением уравнений поля. Это решение очень полезно в случае слабых полей, поскольку позволяет непосредственно вычислить малые отклонения $h_{\mu\nu}$ метрического тензора от его галилеевых значений, если тензор энергии — импульса известен как функция координат. Хотя методика, приводящая к решению (93.9), годна лишь в случае слабых полей, следует особо отметить, что она не налагает никаких ограничений на скорость вещества, создающего поле. Это большой шаг вперед по сравнению с рассмотрением на ньютоновском уровне, на котором были плохо известны и механизм, и скорость распространения гравитационных эффектов.

В соответствии с истолкованием правой части выражения (93.9) мы должны, очевидно, сделать вывод, что гравитационные эффекты в рассматриваемой системе координат распространяются с единичной скоростью, т. е. с той же скоростью, что и свет. Кроме того, поскольку (93.7) имеет вид «волнового уравнения», можно, очевидно, ожидать, что существуют гравитационные волны, которые распространяются и переносят энергию с той же самой скоростью. Процессы испускания и поглощения этих волн, переносящих, естественно, лишь крайне малые количества энергии, были исследованы Эйнштейном [66].

Тирринг и Лэнс [67] использовали решения (93.9) для обсуждения того, как влияет вращение центрального астрономического тела на окружающее его гравитационное поле и, следовательно, на движение спутников. Эффекты, вызываемые такими вращениями, оказались, однако, в действительности слишком малыми, чтобы представлять практический интерес для астрономов. Тирринг нашел еще одно применение этих решений в другой аналогичной задаче; он вычислил гравитационное поле внутри тонкой вращающейся материальной оболочки [68]. Результат оказался весьма интересным и прозрачным физически: вращение оболочки приводит, как и следовало ожидать, к возникновению сил, аналогичных центробежным и кориолисовым силам в обычной механике. В следующей главе эйнштейновские решения (93.8) будут использованы для нахождения гравитационных полей, создаваемых пучками и импульсами света.

§ 94. Интервалы для систем, обладающих сферической симметрией

Хотя у нас нет общего решения полевых уравнений Эйнштейна, исключая разобранный уже случай слабых полей, мы можем все же часто догадаться, какой вид должно иметь решение, руководствуясь характером рассматриваемой физической проблемы, а затем исследовать свойства этого предполагаемого решения. Так, например, если интересующая нас физическая система обладает пространственной сферической симметрией, координаты удобно выбрать так, чтобы форма интервала отражала свойства симметрии.

Приведем наиболее общий вид сферически симметричного интервала:

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - e^\mu (r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + e^\nu dt^2 + 2a dr dt. \quad (94.1)$$

Здесь λ , μ , ν и a — функции только r и t , а коэффициенты $-e^\lambda$, $-e^\mu$ и $+e^\nu$ заданы в экспоненциальной форме для того, чтобы пространственные координаты r , θ и φ явным образом отличались от временной t .

Эту общую форму сферически симметричного интервала легко, однако, упростить, сделав ряд преобразований. Начнем с того, что введем новую пространственную переменную r' , определив ее уравнением

$$r'^2 = e^{\mu} r^2. \quad (94.2)$$

Подставив ее в (94.1) и опустив штрих, легко убедиться, что интервал примет вид

$$ds^2 = -e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + e^{\nu} dt^2 + 2a dr dt, \quad (94.3)$$

где λ , ν и a — уже новые функции новых переменных r и t .

Попытаемся теперь исключить в (94.3) смешанные произведения. Для этого введем новую переменную t' с помощью уравнения

$$dt' = \eta (a dr + e^{\nu} dt), \quad (94.4)$$

где η — интегрирующий множитель, превращающий правую часть в полный дифференциал. В соответствии с (94.4) имеем

$$e^{\nu} dt'^2 + 2a dr dt = \frac{dt'^2}{\eta^2 e^{\nu}} - \frac{a^2}{e^{\nu}} dr^2. \quad (94.5)$$

Подставив это в (94.3) и опустив штрихи, придадим выражению для интервала простой стандартный вид:

$$ds^2 = -e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + e^{\nu} dt'^2, \\ \lambda = \lambda(r, t), \quad \nu = \nu(r, t), \quad (94.6)$$

где λ и ν — функции, зависящие только от введенных выше r и t [69].

Возможность исключения единственного смешанного произведения путем введения интегрирующего множителя (94.4) сильно упрощает рассмотрение задач со сферической симметрией.

Для наших целей, однако, более удобна несколько иная запись сферически симметричных интервалов. Она следует из (94.6), если ввести новую переменную r' с помощью соотношения

$$\frac{dr'}{r'} = e^{\frac{1}{2}\lambda} \frac{dr}{r}. \quad (94.7)$$

Используя эту подстановку и опуская штрихи, можно выразить интервал в виде

$$ds^2 = -e^{\mu} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + e^{\nu} dt^2, \\ \mu = \mu(r, t), \quad \nu = \nu(r, t), \quad (94.8)$$

где μ и ν — функции участвующих здесь r и t . Путем дальнейших очевидных преобразований приведем последнее выражение

к виду

$$ds^2 = -e^\mu(dx^2 + dy^2 + dz^2) + e^\nu dt^2, \quad (94.9)$$

$$\mu = \mu(r, t), \quad \nu = \nu(r, t), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Две последние системы координат могут быть названы изотропными.

§ 95. Статический сферически симметричный интервал

Приступим к более подробному обсуждению общих формул, предложенных выше в качестве решений уравнений поля. Чтобы получить из них решения в явном виде, необходимы точные выражения символов Кристоффеля и компонент тензора энергии — импульса через величины, в которых записаны интервалы.

Начнем наше рассмотрение с физических систем, которые являются и статическими, и сферически симметричными. Тогда согласно (94.6) мы можем выразить наш интервал в стандартной форме:

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - r d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + e^\nu dt^2, \quad (95.1)$$

$$\lambda = \lambda(r), \quad \nu = \nu(r).$$

Символы Кристоффеля первого рода, соответствующие этой форме интеграла, легко вычислить, используя их определение (73.14); в результате получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \lambda', & \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{32}^3 &= \text{ctg } \theta, & \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda}, \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta e^{-\lambda}, & \Gamma_{23}^3 &= \text{ctg } \theta, \\ & & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{41}^4 &= \frac{1}{2} \nu', \\ \Gamma_{14}^4 &= \frac{1}{2} \nu', & & & \Gamma_{44}^1 &= \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \nu', \end{aligned} \quad (95.2)$$

где штрих означает дифференцирование по r . Символы, содержащие все прочие наборы индексов, исчезают.

Используя эти величины для символов Кристоффеля, мы можем вычислить компоненты $R_{\mu\nu}$ свернутого тензора Римана — Кристоффеля, определяемого выражением (77.2), а компоненты $T_{\mu\nu}$ тензора энергии — импульса получить согласно его определению (81.6). Последний наиболее просто выражается в виде смешанного тензора. Неисчезающие его компоненты выглядят

следующим образом:

$$\begin{aligned} 8\pi T_1^1 &= -e^{-\lambda} \left(\frac{v'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda, \\ 8\pi T_2^2 = 8\pi T_3^3 &= -e^{-\lambda} \left(\frac{v''}{2} - \frac{\lambda' v'}{4} + \frac{v'^2}{4} + \frac{v' - \lambda'}{2r} \right) - \Lambda, \quad (95.3) \\ 8\pi T_4^4 &= e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda. \end{aligned}$$

При нахождении величин (95.2) и (95.3) мы использовали выражение для интервала (94.6).

Можно, конечно, провести аналогичные вычисления и для случая изотропного интервала (94.8):

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^{\mu} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + e^{\nu} dt^2, \\ \mu &= \mu(r), \quad \nu = \nu(r). \end{aligned} \quad (95.4)$$

Символы Кристоффеля, соответствующие этому интервалу, в случае статической системы имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \mu', & \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \mu', \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \mu', & \Gamma_{32}^3 &= \text{ctg } \theta, \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \mu', & \Gamma_{33}^1 &= - \left(r + \frac{1}{2} r^2 \mu' \right) \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{14}^4 &= \frac{1}{2} \nu', & \Gamma_{33}^2 &= - \sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \mu', & \Gamma_{41}^4 &= \frac{1}{2} \nu', \\ \Gamma_{22}^1 &= - \left(r + \frac{1}{2} r^2 \mu' \right), & \Gamma_{44}^1 &= \frac{1}{2} e^{\nu - \mu} \nu', \\ \Gamma_{23}^3 &= \text{ctg } \theta, \end{aligned} \quad (95.5)$$

где штрихи, как и прежде, означают дифференцирование по r , а все другие символы оказываются равными нулю.

Выпишем также неисчезающие компоненты тензора энергии — импульса, соответствующие этой форме интервала:

$$\begin{aligned} 8\pi T_1^1 &= -e^{-\mu} \left(\frac{\mu'^2}{4} + \frac{\mu' \nu'}{2} + \frac{\mu' + \nu'}{r} \right) - \Lambda, \\ 8\pi T_2^2 = 8\pi T_3^3 &= -e^{-\mu} \left(\frac{\mu''}{2} + \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\mu' + \nu'}{2r} \right) - \Lambda, \quad (95.6) \\ 8\pi T_4^4 &= -e^{-\mu} \left(\mu'' + \frac{\mu'^2}{4} + \frac{2\mu'}{r} \right) - \Lambda. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь систему, образованную из *идеальной жидкости*. Перепишем еще раз определение тензора энергии — импульса идеальной жидкости (85.7):

$$T^{\mu\nu} = (\rho_{00} + p_0) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g^{\mu\nu} p_0, \quad (95.7)$$

или с опущенным индексом:

$$T_\mu^\nu = (\rho_{00} + p_0) g_{\alpha\mu} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g_\mu^\nu p_0. \quad (95.8)$$

Поскольку, однако, мы ограничиваемся рассмотрением статической задачи, компоненты «скорости» жидкости для обонх исследуемых интервалов выглядят так:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad \frac{dt}{ds} = e^{-\frac{1}{2}\nu}. \quad (95.9)$$

Подставляя эти величины в (95.8), получаем компоненты тензора энергии — импульса:

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p_0, \quad T_4^4 = \rho_{00}, \quad (95.10)$$

которые можно для идеальной жидкости подставить в (95.3) и (95.6).

Прежде всего, найденное в случае идеальной жидкости равенство между радиальным натяжением T_1^1 и поперечными натяжениями $T_2^2 = T_3^3$ позволяет получить очень простое выражение для градиента давления. А именно, приравнявая T_1^1 и T_2^2 , взятые из (95.3), получаем

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} - \frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0.$$

Умножая это уравнение на $2/r$ и перегруппировывая члены, переписываем его в виде

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{r} - \frac{\nu'}{r^2} - \frac{2}{r^3} \right) - e^{-\lambda} \lambda' \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{2}{r^3} + e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu'}{r} \right) \frac{\nu'}{2} = 0.$$

Сравнивая последнее уравнение с (95.3) и (95.10), находим, что оно эквивалентно уравнению

$$\frac{dp_0}{dr} + (\rho_{00} + p_0) \frac{\nu'}{2} = 0, \quad (95.11)$$

которое является релятивистским аналогом ньютоновского

выражения для зависимости давления от гравитационного потенциала:

$$\frac{dp}{dr} + \rho \frac{d\psi}{dr} = 0.$$

Тот же результат (95.11) получается и в случае изотропных координат, если произвести те же операции: приравнять выражения T_1^1 и T_2^2 из (95.6), затем умножить полученное соотношение на $2/r$ и произвести соответствующую перегруппировку.

Таким образом, в случае сферически симметричной статической системы, состоящей из *идеальной жидкости*, мы можем придать интервалу стандартную форму:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + e^\nu dt^2, \\ \lambda &= \lambda(r), \quad \nu = \nu(r), \end{aligned} \quad (95.12)$$

причем

$$\begin{aligned} 8\pi p_0 &= e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} + \Lambda, \\ 8\pi p_0 &= e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} \right) + \Lambda, \\ 8\pi p_{00} &= e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda, \\ \frac{dp_0}{dr} &= - \frac{(\rho_{00} + p_0) \nu'}{2}, \end{aligned} \quad (95.13)$$

или в изотропной форме:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^\mu (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + e^\nu dt^2, \\ \mu &= \mu(r), \quad \nu = \nu(r), \end{aligned} \quad (95.14)$$

причем

$$\begin{aligned} 8\pi p_0 &= e^{-\mu} \left(\frac{\mu'^2}{4} + \frac{\mu' \nu'}{2} + \frac{\mu' + \nu'}{r} \right) + \Lambda, \\ 8\pi p_0 &= e^{-\mu} \left(\frac{\mu''}{2} + \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\mu' + \nu'}{2r} \right) + \Lambda, \\ 8\pi p_{00} &= -e^{-\mu} \left(\mu'' + \frac{\mu'^2}{4} + \frac{2\mu'}{r} \right) - \Lambda, \\ \frac{dp_0}{dr} &= - \frac{(\rho_{00} + p_0) \nu'}{2}. \end{aligned} \quad (95.15)$$

В заключение следует заметить, что, выражая интервал через распределения плотности и давления, надо помнить, что си-

стема (95.13) или (95.15) выражает лишь исходные три условия. Это позволяет нам при разрешении этих систем заменять более сложное из двух выражений для давления более простым и физически прозрачным выражением для градиента давления.

§ 96. Внешнее и внутреннее решения Шварцшильда

Прежде чем начать изучение интервалов более сложного вида, покажем, как использовать соотношения, найденные в предыдущем параграфе, для получения явных выражений рассмотренных в нем интервалов. В § 82 мы уже пользовались соотношениями (95.3), получив с их помощью выражения для интервала вблизи точечной притягивающей частицы. Можно, однако, убедиться, что оно равно применимо и к пустому пространству, окружающему конечную статическую сферически симметричную систему. Поэтому впредь будем называть этот результат *внешним решением Шварцшильда*.

Чтобы получить это внешнее решение, будем исходить из выражения для интервала (95.1):

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + e^\nu dt^2, \quad (96.1)$$

и положим равными нулю все компоненты тензора энергии — импульса (95.3), поскольку мы ищем решение для пустого пространства, окружающего сферу из вещества. Последнее дает нам три дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda &= 0, \\ -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} \right) - \Lambda &= 0, \quad (96.2) \\ e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda &= 0, \end{aligned}$$

которые, как легко проверить, имеют решение, позволяющее представить интервал в виде (§ 82)

$$\begin{aligned} ds^2 = - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \\ + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) dt^2, \quad (96.3) \end{aligned}$$

где $2m$ — константа.

Это решение справедливо повсюду в пустом пространстве вне сферы и должно переходить внутри сферы в другое решение, зависящее от свойств вещества, из которого состоит эта сфера.

Чтобы получить такое *внутреннее решение*, разберем вслед за Шварцшильдом частный случай (см. [60], стр. 424), когда рассматриваемая сфера заполнена несжимаемой идеальной жидкостью, имеющей постоянную собственную плотность ρ_{00} . Тогда в соответствии с (95.13) будем считать, что внутренность сферы описывается уравнениями

$$8\pi\rho_0 = e^{-\lambda} \left(\frac{v'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} + \Lambda, \quad (96.4)$$

$$8\pi\rho_{00} = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda, \quad (96.5)$$

$$\frac{d\rho_0}{dr} = - \frac{(\rho_{00} + \rho_0) v'}{2}. \quad (96.6)$$

Попытаемся их разрешить, используя условие постоянства плотности внутри сферы ρ_{00} и предполагая, что давление на границе сферы равно нулю.

Поскольку ρ_{00} и Λ постоянны, второе из уравнений, (96.5), нетрудно проинтегрировать. Напишем сразу результат (в справедливости которого легко убедиться, производя дифференцирование):

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{\Lambda + 8\pi\rho_{00}}{3} r^2 + \frac{C}{r}.$$

Здесь C — константа интегрирования; приравняем ее нулю, чтобы уничтожить особенность в начале координат, и перепишем решение в виде

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{r^2}{R^2}, \quad \text{где } R^2 = \frac{3}{\Lambda + 8\pi\rho_{00}}. \quad (96.7)$$

Далее, имея в виду найти выражение для v , проинтегрируем уравнение (96.6); результат благодаря постоянству ρ_{00} оказывается очень простым:

$$(\rho_{00} + \rho_0) = \text{const } e^{-\frac{1}{2}v}.$$

Комбинируя его затем с выражениями (96.4) для ρ_0 и (96.5) для ρ_{00} , получаем

$$e^{\frac{1}{2}v} e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} + \frac{v'}{r} \right) = \text{const},$$

а подставляя сюда величину $e^{-\lambda}$ из (96.7), приходим к уравнению

$$e^{\frac{1}{2}v} \left(\frac{2}{R^2} + \frac{v'}{r} - \frac{rv'}{R^2} \right) = \text{const},$$

которое, как мы убедимся в дальнейшем, имеет решение

$$e^{1/2 v} = A - B \sqrt{1 - r^2/R^2}, \quad (96.8)$$

где A и B — константы интегрирования.

Исходя из (96.7) и (96.8), мы можем теперь записать внутреннее решение Шварцшильда для жидкой сферы, имеющей постоянную плотность ρ_{00} , в следующем виде:

$$ds^2 = - \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + [A - B \sqrt{1 - r^2/R^2}]^2 dt^2, \quad (96.9)$$

или, производя подстановку

$$\sin \chi = \frac{r}{R}, \quad (96.10)$$

в виде выражения

$$ds^2 = -R^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2 + \sin^2 \chi + \sin^2 \theta d\varphi^2) + (A - B \cos \chi)^2 dt^2, \quad (96.11)$$

из которого следует, что пространственная геометрия внутри жидкости совпадает с геометрией четырехмерной сферической «поверхности».

Давление, соответствующее интервалу (96.9), легко найти с помощью (96.4). Выпишем результат:

$$8\pi p_0 = \frac{1}{R^2} \left(\frac{3B \sqrt{1 - r^2/R^2} - A}{A - B \sqrt{1 - r^2/R^2}} \right) + \Lambda. \quad (96.12)$$

Пренебрегая членами, содержащими Λ , которые во всяком случае могут быть существенными лишь на больших расстояниях от начала координат, мы можем затем приравнять нулю давление на границе сферы $r=r_1$ и сшить на этой границе внутреннее решение (96.9) с внешним решением (96.3), придавая стоящим в них константам следующие значения:

$$R^2 = \frac{3}{8\pi\rho_{00}}, \quad A = \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{r_1^2}{R^2}}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad m = \frac{4\pi}{3} \rho_{00} r_1^3. \quad (96.13)$$

Этим завершается исследование поставленной проблемы.

Для того чтобы найденное решение было действительным, должны выполняться неравенства

$$r_1^2 < R^2, \quad r_1^2 < \frac{3}{8\pi\rho_{00}}, \quad 2m < r_1, \quad (96.14)$$

которые накладывают верхний предел на возможные размеры сферы с данной плотностью и на массу сферы при данном радиусе. Эти ограничения, однако, настолько слабы, что до сих пор не привели ни к каким противоречиям с данными астрофизических наблюдений *).

§ 97. Энергия сферы из идеальной жидкости

Прежде чем закончить обсуждение свойств сферических жидких объемов, покажем, как получить одно весьма простое выражение для полной энергии сферы в квазистатическом случае [65]. Простейший способ решения этой задачи — представление интервала в изотропном виде:

$$ds^2 = -e^\mu(dx^2 + dy^2 + dz^2) + e^\nu dt^2, \quad (97.1)$$

$$\mu = \mu(r), \quad \nu = \nu(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Поскольку координаты x, y, z, t , в которых выражается этот интервал, являются квазигалилеевыми и становятся просто галилеевыми на большом удалении от начала координат, можно записать, согласно (92.4), выражение для энергии рассматриваемой сферы, описываемой интервалом (97.1), следующим образом:

$$U = \iiint (\mathfrak{T}_4^4 - \mathfrak{T}_1^1 - \mathfrak{T}_2^2 - \mathfrak{T}_3^3) dx dy dz =$$

$$= \iiint (T_4^4 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3) e^{\frac{1}{2}(3\mu+\nu)} dx dy dz. \quad (97.2)$$

Подставим сюда, далее, вместо компонент тензора энергии — импульса их выражения через плотность ρ_{00} и давление p_0 (95.10); получаем

$$U = \iiint (\rho_{00} + 3p_0) e^{\frac{1}{2}(3\mu+\nu)} dx dy dz. \quad (97.3)$$

И наконец, замечая, что собственный пространственный объем, соответствующий координатному интервалу $dx dy dz$, равняется

$$dV_0 = e^{\frac{3}{2}\mu} dx dy dz, \quad (97.4)$$

перепишем выражение для энергии статической идеальной жидкой сферы в простой, физически прозрачной форме:

$$U = \int (\rho_{00} + 3p_0) e^{\frac{1}{2}\nu} dV_0, \quad (97.5)$$

*) Более подробный анализ задачи Шварцшильда, в частности вопрос о физическом смысле так называемого «горизонта» $r=2m$, см.: Л. Ландау, Е. Лифшиц, Теория поля, § 100, «Наука», 1973. (Прим. ред.)

где интегрирование следует производить по всему объему рассматриваемой сферы.

Для достаточно слабых полей, т. е. полей, создаваемых сферами, малыми настолько, что ньютонова теория тяготения может рассматриваться как удовлетворительное приближение, выражение (97.5) сводится к соответствующему ньютоновскому аналогу. Убедимся в этом.

В случае слабых полей можно ввести согласно (80.9) обычный ньютоновский потенциал ψ^*):

$$\psi = \frac{1}{2} (g_{44} - 1) = \frac{1}{2} (e^\nu - 1) \approx \frac{1}{2} \nu,$$

и подставить его в выражение для энергии сферы (97.5). Тогда приближенно:

$$e^{1/2\nu} = 1 + \psi. \quad (97.6)$$

В результате получаем

$$U = \int (\rho_{00} + 3p_0) (1 + \psi) dV_0 = \\ = \int \rho_{00} dV_0 + \int \rho_{00} \psi dV_0 + 3 \int p_0 dV_0 + 3 \int p_0 \psi dV_0. \quad (97.7)$$

Это выражение можно, однако, переписать в более наглядной форме. Поскольку слабые поля ψ малы по сравнению с единицей, а p_0 для обычного вещества мало относительно ρ_{00} , мы можем пренебречь последним членом в (97.7) по сравнению с другими членами, а во втором и в третьем членах можем опустить нулевые индексы, которые означают, что соответствующие величины измеряются в собственной системе координат. В итоге имеем

$$U = \int \rho_{00} dV_0 + \int \rho \psi dV + 3 \int p dV. \quad (97.8)$$

Ньютоновская теория позволяет сделать дальнейшие преобразования. Интегрируя по полному объему сферы с радиусом r_1 , получаем

$$3 \int p dV = 3 \int_0^{r_1} 4\pi r^2 p dr = \left[4\pi r^3 p \right]_0^{r_1} - \int_0^{r_1} 4\pi r^3 dp = - \int_0^{r_1} 4\pi r^3 dp,$$

поскольку давление обращается в нуль на границе сферы r_1 . С другой стороны, полную радиальную силу, равную $-4\pi r^2 dp$ и действующую извне на сферический слой вещества dM_r , ограниченный радиусами r и $r+dr$, мы можем приравнять гравитационному притяжению, которое испытывает этот слой:

$$3 \int p dV = \int_0^r \frac{M_r}{r} dM_r.$$

*) Скорость света c в (80.9), как и раньше, положена равной единице.

Или окончательно, так как правая часть этого соотношения выражает, очевидно, работу, необходимую для того, чтобы перенести все вещество, содержащееся в этом слое, на бесконечность, можно воспользоваться обычным выражением для потенциальной энергии и написать:

$$3 \int \rho dV = - \int \frac{1}{2} \rho \psi dV, \quad (97.9)$$

Подставляя затем (97.9) в (97.8), получаем полную энергию сферического объема жидкости:

$$U = \int \rho_{00} dV_0 + \int \frac{1}{2} \rho \psi dV. \quad (97.10)$$

Таким образом, в ньютоновском приближении релятивистская формула для полной энергии жидкой сферы сводится к сумме полной собственной энергии и потенциальной гравитационной энергии обычной ньютоновской теории. Этот результат, естественно, укрепляет нашу уверенность в практических преимуществах эйнштейновского метода, использующего псевдотензорную плотность потенциальной гравитационной энергии и импульса t_{ν}^{μ} .

§ 98. Нестатический сферически симметричный интервал

Обратимся теперь к наиболее сложному случаю — *нестатическому* сферически симметричному интервалу. Предположим, что в соответствии с (94.6) можно записать решение в стандартной форме:

$$ds^2 = -e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + e^{\nu} dt^2, \\ \lambda = \lambda(r, t), \nu = \nu(r, t). \quad (98.1)$$

Символы Кристоффеля, соответствующие этому интервалу, имеют вид

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \lambda', \quad \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{11}^4 = \frac{1}{2} e^{\lambda - \nu} \dot{\lambda}, \quad \Gamma_{22}^1 = -re^{-\lambda}, \\ \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \text{ctg } \theta, \quad (98.2) \\ \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{14}^1 = \frac{1}{2} \dot{\lambda}, \\ \Gamma_{14}^4 = \frac{1}{2} \nu',$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{41}^1 &= \frac{1}{2} \dot{\lambda}, \\
 \Gamma_{32}^3 &= \operatorname{ctg} \theta, & \Gamma_{41}^4 &= \frac{1}{2} v', \\
 \Gamma_{33}^1 &= -r \sin \theta e^{-\lambda}, & \Gamma_{44}^1 &= \frac{1}{2} e^{v-\lambda} v', \\
 \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{44}^4 &= \frac{1}{2} \dot{v},
 \end{aligned} \tag{98.2}$$

где штрих означает дифференцирование по r , точка — по t ; все остальные символы исчезают.

Используя эти значения для символов Кристоффеля, можно вычислить неисчезающие компоненты тензора энергии — импульса *):

$$\begin{aligned}
 8\pi T_1^1 &= -e^{-\lambda} \left(\frac{v'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda, \\
 8\pi T_2^2 = 8\pi T_3^3 &= -e^{-\lambda} \left(\frac{v''}{2} - \frac{\lambda' v'}{4} + \frac{v'^2}{4} + \frac{v' - \lambda'}{2r} \right) + \\
 &\quad + e^{-v} \left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda} v}{4} \right) - \Lambda, \tag{98.3} \\
 8\pi T_4^4 &= e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda, \\
 8\pi T_4^1 &= -e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r}, \\
 8\pi T_1^4 &= e^{-v} \frac{\dot{\lambda}}{r}.
 \end{aligned}$$

Интересно сравнить эти выражения для компонент тензора энергии — импульса с соответствующими выражениями (95.3), полученными в статическом случае. Как указывал Лемэтр, разница только в том, что появляются дополнительные члены в компонентах поперечных тензоров натяжений T_2^2 и T_3^3 и новые отличные от нуля компоненты T_4^1 и T_1^4 . Грубо говоря, переход от статического случая к нестатическому соответствует появлению поперечной волны, связанной с радиальным потоком энергии.

*) Эти величины для символов Кристоффеля и для компонент тензора энергии — импульса были вычислены Б. Подольским и автором. Величины для T_{μ}^{ν} согласуются с результатами Лемэтра [69], рассматривавшего этот же интервал.

Можно, конечно, ввести в рассматриваемом нами случае сферической симметрии изотропные координаты и предположить, что решение согласно (94.8) имеет вид

$$ds^2 = -e^\mu (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + e^\nu dt^2, \\ \mu = \mu(r, t), \quad \nu = \nu(r, t). \quad (98.4)$$

Символы Кристоффеля, соответствующие этому интервалу, равны:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \mu', & \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \mu', \\ \Gamma_{11}^4 &= \frac{1}{2} e^{\mu-\nu} \dot{\mu}, & \Gamma_{22}^1 &= -\left(r + \frac{1}{2} r^2 \mu'\right), \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \mu', & \Gamma_{22}^4 &= \frac{1}{2} r^2 e^{\mu-\nu} \dot{\mu}, \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \mu', & \Gamma_{23}^3 &= \text{ctg } \theta, \\ \Gamma_{14}^1 &= \frac{1}{2} \dot{\mu}, & \Gamma_{24}^2 &= \frac{1}{2} \dot{\mu}, \\ \Gamma_{14}^4 &= \frac{1}{2} \nu', & & \\ \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \mu', & \Gamma_{41}^1 &= \frac{1}{2} \dot{\mu}, \\ \Gamma_{32}^3 &= \text{ctg } \theta, & \Gamma_{41}^4 &= \frac{1}{2} \nu', \\ \Gamma_{33}^1 &= -\left(r + \frac{1}{2} r^2 \mu'\right) \sin^2 \theta, & \Gamma_{42}^2 &= \frac{1}{2} \dot{\mu}, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{43}^3 &= \frac{1}{2} \dot{\mu}, \\ \Gamma_{33}^4 &= \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta e^{\mu-\nu} \dot{\mu}, & \Gamma_{44}^1 &= \frac{1}{2} e^{\nu-\mu} \nu', \\ \Gamma_{34}^3 &= \frac{1}{2} \dot{\mu}, & \Gamma_{44}^4 &= \frac{1}{2} \dot{\nu}, \end{aligned} \quad (98.5)$$

где штрих опять-таки означает дифференцирование по r , точка — по t , а символы со всеми прочими комбинациями индексов равняются нулю.

Неисчезающие компоненты тензора энергии — импульса, соответствующие этой форме интервала, выглядят следующим

образом*):

$$\begin{aligned}
 8\pi T_1^1 &= -e^{-\mu} \left(\frac{\mu'^2}{4} + \frac{\mu'v'}{2} + \frac{\mu' + v'}{r} \right) + e^{-\nu} \left(\ddot{\mu} + \frac{3}{4} \dot{\mu}^2 - \frac{\dot{\mu}\dot{v}}{2} \right) - \Lambda, \\
 8\pi T_2^2 &= 8\pi T_3^3 = -e^{-\mu} \left(\frac{\mu''}{2} + \frac{v''}{2} + \frac{v'^2}{4} + \frac{\mu' + v'}{2r} \right) + \\
 &\quad + e^{-\nu} \left(\ddot{\mu} + \frac{3}{4} \dot{\mu}^2 - \frac{\dot{\mu}\dot{v}}{2} \right) - \Lambda, \\
 8\pi T_4^4 &= -e^{-\mu} \left(\mu'' + \frac{\mu'^2}{4} + \frac{2\mu'}{r} \right) + \frac{3}{4} e^{-\nu} \dot{\mu}^2 - \Lambda, \\
 8\pi T_4^1 &= e^{-\mu} \left(\dot{\mu}' - \frac{\dot{\mu}v'}{2} \right), \\
 8\pi T_1^4 &= -e^{-\nu} \left(\dot{\mu}' - \frac{\dot{\mu}v'}{2} \right).
 \end{aligned} \tag{98.6}$$

§ 99. Теорема Биркгоффа

Выражение (98.3) для тензора энергии — импульса, соответствующее стандартной форме интервала (98.1), дает возможность получить без труда важную теорему, доказанную впервые Биркгоффом [70].

Рассмотрим сферически симметричное тело, окруженное пустым пространством, свободным от вещества и излучения. В этом пустом пространстве все компоненты тензора энергии — импульса (98.3) равны нулю, в частности, T_4^1 и $T_1^4 = 0$, откуда вытекает, что

$$\dot{\lambda} = 0. \tag{99.1}$$

Однако при условии $\dot{\lambda} = 0$ выражение для тензора энергии — импульса (98.3) становится по форме идентичным выражению (95.3), найденному в статическом случае; следовательно, в пустом пространстве, окружающем сферу, опять-таки справедливо внешнее решение Шварцшильда (§ 96)

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}, \tag{99.2}$$

где m , как и раньше, — постоянная, не зависящая от времени, так что остается справедливым (99.1).

*) Впервые эти величины для символов Кристоффеля и для компонент тензора энергии — импульса были вычислены Б. Подольским. Впоследствии эти результаты проверялись Динглем с помощью полученных им более общих формул, которые приведены у нас ниже, в § 100.

Таким образом, одного только условия сферической симметрии достаточно, чтобы получить внешнее статическое решение Шварцшильда в пустом пространстве, окружающем сферу, заполненную веществом *).

В сфере могут происходить сферически симметричные пульсации, не сопровождающиеся какими-либо потерями массы или энергии, в форме гравитационных волн. Реальная потеря энергии требует отказа от условия пустоты пространства вокруг сферы и допущения потоков вещества и излучения в нем.

§ 100. Более общая форма интервала

В заключение настоящей главы приведем символы Кристоффеля и компоненты тензора энергии — импульса, соответствующие более общему виду интервала, которые были вычислены Динглем [71].

Дингль исходил из следующей формы интервала:

$$ds^2 = -A(dx^1)^2 - B(dx^2)^2 - C(dx^3)^2 + D(dx^4)^2. \quad (100.1)$$

Здесь A , B , C и D — произвольные функции координат; все эти четыре функции должны быть существенно положительными, чтобы x^1 , x^2 , x^3 были пространственноподобными, а x^4 — времениподобными координатами. Эта форма интервала является более общей, нежели все рассмотренные нами ранее. Единственное предположение состоит в том, что можно избавиться от перекрестных произведений; но при этом не предполагается сферической симметрии.

Символы Кристоффеля, соответствующие такому интервалу, таковы:

$$\begin{array}{l|l|l|l} \Gamma_{11}^1 = +\frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial x^1} & \Gamma_{21}^1 = +\frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial x^2} & \Gamma_{31}^1 = +\frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial x^3} & \Gamma_{41}^1 = +\frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial x^4} \\ \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2B} \frac{\partial A}{\partial x^2} & \Gamma_{21}^2 = +\frac{1}{2B} \frac{\partial B}{\partial x^1} & \Gamma_{31}^2 = 0 & \Gamma_{41}^2 = 0 \\ \Gamma_{11}^3 = -\frac{1}{2C} \frac{\partial A}{\partial x^3} & \Gamma_{21}^3 = 0 & \Gamma_{31}^3 = +\frac{1}{2C} \frac{\partial C}{\partial x^1} & \Gamma_{41}^3 = 0 \\ \Gamma_{11}^4 = +\frac{1}{2D} \frac{\partial A}{\partial x^4} & \Gamma_{21}^4 = 0 & \Gamma_{31}^4 = 0 & \Gamma_{41}^4 = +\frac{1}{2D} \frac{\partial D}{\partial x^1} \\ \Gamma_{12}^1 = +\frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial x^2} & \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2A} \frac{\partial B}{\partial x^1} & \Gamma_{32}^1 = 0 & \Gamma_{42}^1 = 0 \\ \Gamma_{12}^2 = +\frac{1}{2B} \frac{\partial B}{\partial x^1} & \Gamma_{22}^2 = +\frac{1}{2B} \frac{\partial B}{\partial x^2} & \Gamma_{32}^2 = +\frac{1}{2B} \frac{\partial B}{\partial x^3} & \Gamma_{42}^2 = +\frac{1}{2B} \frac{\partial B}{\partial x^4} \end{array}$$

*) Теорема Биркгоффа представляет обобщение теоремы Ньютона о том, что поле сферического распределения масс эквивалентно полю точечного источника. (Прим. ред.)

$$\begin{array}{c}
 \Gamma_{12}^3 = 0 \\
 \Gamma_{12}^4 = 0 \\
 \Gamma_{13}^1 = +\frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial x^3} \\
 \Gamma_{13}^2 = 0 \\
 \Gamma_{13}^3 = +\frac{1}{2C} \frac{\partial C}{\partial x^1} \\
 \Gamma_{13}^4 = 0 \\
 \Gamma_{14}^1 = +\frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial x^4} \\
 \Gamma_{14}^2 = 0 \\
 \Gamma_{14}^3 = 0 \\
 \Gamma_{14}^4 = +\frac{1}{2D} \frac{\partial D}{\partial x^1}
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{c}
 \Gamma_{22}^3 = -\frac{1}{2C} \frac{\partial B}{\partial x^3} \\
 \Gamma_{22}^4 = +\frac{1}{2D} \frac{\partial B}{\partial x^4} \\
 \Gamma_{23}^1 = 0 \\
 \Gamma_{23}^2 = +\frac{1}{2B} \frac{\partial B}{\partial x^3} \\
 \Gamma_{23}^3 = +\frac{1}{2C} \frac{\partial C}{\partial x^3} \\
 \Gamma_{23}^4 = 0 \\
 \Gamma_{24}^1 = 0 \\
 \Gamma_{24}^2 = +\frac{1}{2B} \frac{\partial B}{\partial x^4} \\
 \Gamma_{24}^3 = 0 \\
 \Gamma_{24}^4 = +\frac{1}{2D} \frac{\partial D}{\partial x^2}
 \end{array}
 \right|
 \begin{array}{c}
 \Gamma_{32}^3 = +\frac{1}{2C} \frac{\partial C}{\partial x^3} \\
 \Gamma_{32}^4 = 0 \\
 \Gamma_{33}^1 = -\frac{1}{2A} \frac{\partial C}{\partial x^1} \\
 \Gamma_{33}^2 = -\frac{1}{2B} \frac{\partial C}{\partial x^3} \\
 \Gamma_{33}^3 = +\frac{1}{2C} \frac{\partial C}{\partial x^3} \\
 \Gamma_{33}^4 = +\frac{1}{2D} \frac{\partial C}{\partial x^1} \\
 \Gamma_{34}^1 = 0 \\
 \Gamma_{34}^2 = 0 \\
 \Gamma_{34}^3 = +\frac{1}{2C} \frac{\partial C}{\partial x^4} \\
 \Gamma_{34}^4 = +\frac{1}{2D} \frac{\partial D}{\partial x^3}
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{c}
 \Gamma_{42}^3 = 0 \\
 \Gamma_{42}^4 = +\frac{1}{2D} \frac{\partial D}{\partial x^3} \\
 \Gamma_{43}^1 = 0 \\
 \Gamma_{43}^2 = 0 \\
 \Gamma_{43}^3 = +\frac{1}{2C} \frac{\partial C}{\partial x^4} \\
 \Gamma_{43}^4 = +\frac{1}{2D} \frac{\partial D}{\partial x^3} \\
 \Gamma_{44}^1 = +\frac{1}{2A} \frac{\partial D}{\partial x^1} \\
 \Gamma_{44}^2 = +\frac{1}{2B} \frac{\partial D}{\partial x^3} \\
 \Gamma_{44}^3 = +\frac{1}{2C} \frac{\partial D}{\partial x^3} \\
 \Gamma_{44}^4 = +\frac{1}{2D} \frac{\partial D}{\partial x^4}
 \end{array}
 \right.$$

(100.2)

а компоненты тензора энергии — импульса T_{μ}^{ν} определяются формулами:

$$\begin{aligned}
 -8\pi T_1^1 = & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{BC} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial (x^3)^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial (x^2)^2} \right) - \frac{1}{BD} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial (x^1)^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial (x^2)^2} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{CD} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial (x^4)^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial (x^3)^2} \right) \right] - \\
 & - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{BC^3} \left\{ \frac{\partial B}{\partial x^3} \frac{\partial C}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial C}{\partial x^3} \right)^2 \right\} + \frac{1}{CB^3} \left\{ \frac{\partial C}{\partial x^3} \frac{\partial B}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial B}{\partial x^3} \right)^2 \right\} - \right. \\
 & - \frac{1}{BD^3} \left\{ \frac{\partial B}{\partial x^4} \frac{\partial D}{\partial x^4} - \left(\frac{\partial D}{\partial x^2} \right)^2 \right\} + \frac{1}{DB^3} \left\{ \frac{\partial D}{\partial x^2} \frac{\partial B}{\partial x^3} - \left(\frac{\partial B}{\partial x^4} \right)^2 \right\} - \\
 & - \frac{1}{CD^3} \left\{ \frac{\partial C}{\partial x^4} \frac{\partial D}{\partial x^4} - \left(\frac{\partial D}{\partial x^3} \right)^2 \right\} + \frac{1}{DC^3} \left\{ \frac{\partial D}{\partial x^3} \frac{\partial C}{\partial x^3} - \left(\frac{\partial C}{\partial x^4} \right)^2 \right\} - \\
 & - \frac{1}{BCD} \left\{ \frac{\partial C}{\partial x^3} \frac{\partial D}{\partial x^2} + \frac{\partial B}{\partial x^3} \frac{\partial D}{\partial x^3} - \frac{\partial B}{\partial x^4} \frac{\partial C}{\partial x^4} \right\} - \\
 & \left. - \frac{1}{ABC} \frac{\partial B}{\partial x^1} \frac{\partial C}{\partial x^1} - \frac{1}{ABD} \frac{\partial B}{\partial x^1} \frac{\partial D}{\partial x^1} - \frac{1}{ACD} \frac{\partial C}{\partial x^1} \frac{\partial D}{\partial x^1} \right] + \Lambda,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-8\pi T_2^2 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{AC} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial (x^3)^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial (x^1)^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{AD} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial (x^4)^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial (x^1)^2} \right) - \frac{1}{CD} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial (x^4)^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial (x^3)^2} \right) \right] - \\
&\quad - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{AC^2} \left\{ \frac{\partial A}{\partial x^3} \frac{\partial C}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial C}{\partial x^1} \right)^2 \right\} + \frac{1}{CA^2} \left\{ \frac{\partial C}{\partial x^1} \frac{\partial A}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial A}{\partial x^3} \right)^2 \right\} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{AD^2} \left\{ \frac{\partial A}{\partial x^4} \frac{\partial D}{\partial x^4} - \left(\frac{\partial D}{\partial x^1} \right)^2 \right\} + \frac{1}{DA^2} \left\{ \frac{\partial D}{\partial x^1} \frac{\partial A}{\partial x^1} - \left(\frac{\partial A}{\partial x^4} \right)^2 \right\} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{CD^2} \left\{ \frac{\partial C}{\partial x^4} \frac{\partial D}{\partial x^4} - \left(\frac{\partial D}{\partial x^3} \right)^2 \right\} + \frac{1}{DC^2} \left\{ \frac{\partial D}{\partial x^3} \frac{\partial C}{\partial x^3} - \left(\frac{\partial C}{\partial x^4} \right)^2 \right\} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{ACD} \left\{ \frac{\partial C}{\partial x^1} \frac{\partial D}{\partial x^1} + \frac{\partial A}{\partial x^3} \frac{\partial D}{\partial x^3} - \frac{\partial A}{\partial x^4} \frac{\partial C}{\partial x^4} \right\} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{ABC} \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial C}{\partial x^2} - \frac{1}{ABD} \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial D}{\partial x^2} - \frac{1}{BCD} \frac{\partial C}{\partial x^2} \frac{\partial D}{\partial x^2} \right] + \Lambda, \\
-8\pi T_3^3 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial (x^1)^2} \right) - \frac{1}{AD} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial (x^4)^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial (x^1)^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{BD} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial (x^4)^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial (x^2)^2} \right) \right] - \\
&\quad - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{AB^2} \left\{ \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial B}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial B}{\partial x^1} \right)^2 \right\} + \frac{1}{BA^2} \left\{ \frac{\partial B}{\partial x^1} \frac{\partial A}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial A}{\partial x^2} \right)^2 \right\} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{AD^2} \left\{ \frac{\partial A}{\partial x^4} \frac{\partial D}{\partial x^4} - \left(\frac{\partial D}{\partial x^1} \right)^2 \right\} + \frac{1}{DA^2} \left\{ \frac{\partial D}{\partial x^1} \frac{\partial A}{\partial x^1} - \left(\frac{\partial A}{\partial x^4} \right)^2 \right\} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{BD^2} \left\{ \frac{\partial B}{\partial x^4} \frac{\partial D}{\partial x^4} - \left(\frac{\partial D}{\partial x^2} \right)^2 \right\} + \frac{1}{DB^2} \left\{ \frac{\partial D}{\partial x^2} \frac{\partial B}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial B}{\partial x^4} \right)^2 \right\} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{ABD} \left\{ \frac{\partial B}{\partial x^1} \frac{\partial D}{\partial x^1} + \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial D}{\partial x^2} - \frac{\partial A}{\partial x^4} \frac{\partial B}{\partial x^4} \right\} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{ABC} \frac{\partial A}{\partial x^3} \frac{\partial B}{\partial x^3} - \frac{1}{ACD} \frac{\partial A}{\partial x^3} \frac{\partial D}{\partial x^3} - \frac{1}{BCD} \frac{\partial B}{\partial x^3} \frac{\partial D}{\partial x^3} \right] + \Lambda, \\
-8\pi T_4^4 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial (x^1)^2} \right) + \frac{1}{AC} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial (x^3)^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial (x^1)^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{BC} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial (x^3)^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial (x^2)^2} \right) \right] - \\
&\quad - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{AB^2} \left\{ \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial B}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial B}{\partial x^1} \right)^2 \right\} + \frac{1}{BA^2} \left\{ \frac{\partial B}{\partial x^1} \frac{\partial A}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial A}{\partial x^2} \right)^2 \right\} + \right. \\
&\quad + \frac{1}{AC^2} \left\{ \frac{\partial A}{\partial x^3} \frac{\partial C}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial C}{\partial x^1} \right)^2 \right\} + \frac{1}{CA^2} \left\{ \frac{\partial C}{\partial x^1} \frac{\partial A}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial A}{\partial x^3} \right)^2 \right\} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{BC^2} \left\{ \frac{\partial B}{\partial x^3} \frac{\partial C}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial C}{\partial x^2} \right)^2 \right\} + \frac{1}{CB^2} \left\{ \frac{\partial C}{\partial x^2} \frac{\partial B}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial B}{\partial x^3} \right)^2 \right\} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{ABC} \left\{ \frac{\partial B}{\partial x^1} \frac{\partial C}{\partial x^1} + \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial C}{\partial x^2} + \frac{\partial A}{\partial x^3} \frac{\partial B}{\partial x^3} \right\} + \\
& \quad + \frac{1}{ABD} \frac{\partial A}{\partial x^4} \frac{\partial B}{\partial x^4} + \frac{1}{ACD} \frac{\partial A}{\partial x^4} \frac{\partial C}{\partial x^4} + \frac{1}{BCD} \frac{\partial B}{\partial x^4} \frac{\partial C}{\partial x^4} \Big] + \Lambda, \\
& -8\pi AT_2^1 = -8\pi BT_1^2 = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{1}{D} \frac{\partial^2 D}{\partial x^1 \partial x^2} \right] + \\
& \quad + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{C^2} \frac{\partial C}{\partial x^1} \frac{\partial C}{\partial x^2} + \frac{1}{D^2} \frac{\partial D}{\partial x^1} \frac{\partial D}{\partial x^2} + \frac{1}{AC} \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial C}{\partial x^1} + \frac{1}{AD} \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial D}{\partial x^1} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{BC} \frac{\partial B}{\partial x^1} \frac{\partial C}{\partial x^2} + \frac{1}{BD} \frac{\partial B}{\partial x^1} \frac{\partial D}{\partial x^2} \right], \\
& -8\pi AT_3^1 = -8\pi CT_1^3 = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial x^1 \partial x^3} + \frac{1}{D} \frac{\partial^2 D}{\partial x^1 \partial x^3} \right] + \\
& \quad + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{B^2} \frac{\partial B}{\partial x^1} \frac{\partial B}{\partial x^3} + \frac{1}{D^2} \frac{\partial D}{\partial x^1} \frac{\partial D}{\partial x^3} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial x^3} \frac{\partial B}{\partial x^1} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{AD} \frac{\partial A}{\partial x^3} \frac{\partial D}{\partial x^1} + \frac{1}{CB} \frac{\partial C}{\partial x^1} \frac{\partial B}{\partial x^3} + \frac{1}{CD} \frac{\partial C}{\partial x^1} \frac{\partial D}{\partial x^3} \right], \\
& -8\pi BT_3^2 = -8\pi CT_2^3 = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2 \partial x^3} + \frac{1}{D} \frac{\partial^2 D}{\partial x^2 \partial x^3} \right] + \\
& \quad + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial A}{\partial x^3} + \frac{1}{D^2} \frac{\partial D}{\partial x^2} \frac{\partial D}{\partial x^3} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial B}{\partial x^3} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{AC} \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial C}{\partial x^3} + \frac{1}{DB} \frac{\partial D}{\partial x^2} \frac{\partial B}{\partial x^3} + \frac{1}{DC} \frac{\partial D}{\partial x^2} \frac{\partial C}{\partial x^3} \right], \\
& -8\pi AT_4^1 = +8\pi DT_1^4 = \\
& \quad = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial x^1 \partial x^4} + \frac{1}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial x^1 \partial x^4} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{B^2} \frac{\partial B}{\partial x^1} \frac{\partial B}{\partial x^4} + \frac{1}{C^2} \frac{\partial C}{\partial x^1} \frac{\partial C}{\partial x^4} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial x^4} \frac{\partial B}{\partial x^1} + \frac{1}{AC} \frac{\partial A}{\partial x^4} \frac{\partial C}{\partial x^1} + \frac{1}{DB} \frac{\partial D}{\partial x^1} \frac{\partial B}{\partial x^4} + \frac{1}{DC} \frac{\partial D}{\partial x^1} \frac{\partial C}{\partial x^4} \right], \\
& -8\pi BT_4^2 = +8\pi DT_2^4 = \\
& \quad = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2 \partial x^4} + \frac{1}{C} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2 \partial x^4} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial A}{\partial x^4} + \frac{1}{C^2} \frac{\partial C}{\partial x^2} \frac{\partial C}{\partial x^4} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial B}{\partial x^4} + \frac{1}{AD} \frac{\partial A}{\partial x^2} \frac{\partial D}{\partial x^4} + \frac{1}{CB} \frac{\partial C}{\partial x^2} \frac{\partial B}{\partial x^4} + \frac{1}{DC} \frac{\partial C}{\partial x^2} \frac{\partial D}{\partial x^4} \right], \\
& -8\pi CT_4^3 = +8\pi DT_3^4 = \\
& \quad = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial x^3 \partial x^4} + \frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial x^3 \partial x^4} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x^3} \frac{\partial A}{\partial x^4} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial B}{\partial x^3} \frac{\partial B}{\partial x^4} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{AC} \frac{\partial A}{\partial x^3} \frac{\partial C}{\partial x^4} + \frac{1}{AD} \frac{\partial A}{\partial x^3} \frac{\partial D}{\partial x^4} + \frac{1}{BC} \frac{\partial B}{\partial x^3} \frac{\partial C}{\partial x^4} + \frac{1}{BD} \frac{\partial B}{\partial x^3} \frac{\partial D}{\partial x^4} \right]. \quad (100.3)
\end{aligned}$$

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

ЧАСТЬ I

КОВАРИАНТНОЕ ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА

§ 101. Введение

В этой главе мы кратко рассмотрим обычное обобщение электродинамики в общей теории относительности, которое может быть сделано на основе электродинамики специальной теории, изложенной в главе IV. Мы рассмотрим также несколько приложений, которые нам понадобятся впоследствии.

Мы начнем с релятивистского обобщения электронной теории Лоренца, не обращая внимания на ее трудности, о которых мы уже говорили и которые связаны с тем, что теория Лоренца развивается на основе микроскопической точки зрения, игнорируя те ограничения на строгое микроскопическое рассмотрение, которые возникают в соответствии с современным состоянием квантовой теории.

После этого мы уделим немного внимания обобщению той макроскопической теории, которая была развита во второй части главы IV.

§ 102. Обобщенная электронная теория Лоренца. Уравнения поля

В специальной теории относительности мы показали (§ 46), что уравнения Максвелла — Лоренца можно записать с помощью двух векторов, заданных в галилеевых координатах: *обобщенного потенциала* φ^μ , определенного через обычный векторный потенциал \mathbf{A} и скалярный потенциал φ :

$$\varphi^\mu = (A_x, A_y, A_z, \varphi), \quad (102.1)$$

и *обобщенной плотности тока* J^μ , компоненты которой выража-

ются через собственную плотность заряда ρ_0 и скорость dx^μ/ds или, иначе, через плотность заряда ρ и плотность тока $\rho \mathbf{u}$, заданные в любой системе координат:

$$J^\mu = \rho_0 \frac{dx^\mu}{ds} = \left(\rho \frac{u_x}{c}, \rho \frac{u_y}{c}, \rho \frac{u_z}{c}, \rho \right). \quad (102.2)$$

Эти два вектора позволяют объединить уравнения Максвелла — Лоренца, заданные в галилеевых координатах, которые допустимы и в специальной теории относительности, записав их в виде двух уравнений:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x^\mu} \quad (102.3)$$

и

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = J^\mu. \quad (102.4)$$

Первое уравнение здесь выражает антисимметричный тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ через обобщенный потенциал Φ^μ , а второе связывает этот тензор с вектором тока.

Оба уравнения надо считать справедливыми в «плоском» пространстве — времени специальной теории относительности и записанными в галилеевых координатах. Из принципа эквивалентности, однако, следует, что в общей теории относительности соответствующие им уравнения должны иметь тот же самый вид, если они заданы в естественных координатах рассматриваемой точки. Следовательно, разумно предположить, что путем простой ковариантной формулировки приведенных выше уравнений специальной теории относительности можно получить обобщенные релятивистские уравнения. Займемся этим.

Поставленная задача очень проста. Определения обобщенного потенциала и тока (102.1) и (102.2) вообще не нуждаются в модификации, ибо, задав эти векторы в одной из систем координат, мы можем найти их по правилам тензорных преобразований во всех системах координат. А чтобы получить ковариантную формулировку самих уравнений, нам следует лишь заменить обычное дифференцирование ковариантным. Тогда в качестве уравнений электромагнитного поля в общей теории относительности получим

$$F_{\mu\nu} = (\Phi_\mu)_\nu - (\Phi_\nu)_\mu = \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x^\mu} \quad (102.5)$$

и

$$(F^{\mu\nu})_\nu = J^\mu. \quad (102.6)$$

Заметим, что по внешнему виду первое уравнение вообще не отличается от первоначального, так как оба члена, которые возникают при замене обычного дифференцирования ковариантным и содержат символы Кристоффеля, взаимно уничтожаются.

§ 103. Движение заряженной частицы

В дополнение к уравнениям поля надо ввести в теорию выражение, описывающее движение заряженных частиц. Оно естественно получается путем ковариантного обобщения пятого фундаментального уравнения Максвелла — Лоренца (41.4), дающего силу, которая действует на частицу, движущуюся в электромагнитном поле. Это уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \{\Gamma_{\alpha\beta}^\mu\} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} + \frac{e}{m_0} F_\alpha^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} = 0. \quad (103.1)$$

где e/m_0 — отношение заряда частицы к ее массе покоя, а $F_\alpha^\mu = g^{\mu\nu} F_{\nu\alpha}$ — введенный выше тензор электромагнитного поля. Мы убедимся ниже, что это уравнение учитывает совместное воздействие гравитационного и электромагнитного полей на частицу.

Чтобы показать, что полученное уравнение является разумным обобщением обычного способа задания силы, действующей на заряженную частицу, надо показать, во-первых, что, выражение (103.1) на самом деле записано ковариантным образом, т. е. что оно справедливо во всех системах координат, если оно справедливо в одной, и, во-вторых, что оно сводится в естественных координатах к обычному выражению для силы, действующей на движущуюся частицу.

Чтобы показать ковариантность выражения (103.1), заметим, что его можно переписать в виде

$$\left[\left(\frac{dx^\mu}{ds} \right)_\alpha + \frac{e}{m_0} F_\alpha^\mu \right] \left(\frac{dx^\alpha}{ds} \right) = 0, \quad (103.2)$$

из которого следует, что оно является тензорным уравнением ранга единица.

Чтобы показать, что в естественных координатах это выражение переходит в обычную формулу для электромагнитного поля, заметим, что символ Кристоффеля обращается в нуль из-за исчезновения гравитационных эффектов в свободно падающей системе отсчета. Используя выражение для тензора поля $F_{\mu\nu}$ в естественных координатах (46.9) и вспоминая, что в соответствии с (20.5) ds/dt можно рассматривать как множитель, характеризующий лоренцево сокращение $\sqrt{1-u^2}$ (где u — обычная скорость частицы в выбранных нами единицах), мы можем

написать вместо (103.1) четыре знакомых нам по форме уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 u_x}{\sqrt{1-u^2}} \right) &= eE_x + e(u_y H_z - u_z H_y), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 u_y}{\sqrt{1-u^2}} \right) &= eE_y + e(u_z H_x - u_x H_z), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 u_z}{\sqrt{1-u^2}} \right) &= eE_z + e(u_x H_y - u_y H_x), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-u^2}} \right) &= e(u_x E_x + u_y E_y + u_z E_z). \end{aligned} \quad (103.3)$$

В принятых нами здесь единицах мы узнаем в этих выражениях обычные уравнения, описывающие воздействие электромагнитного поля на импульс и энергию частицы.

§ 104. Тензор энергии — импульса

Для завершения перевода электродинамики Лоренца в релятивистский вид получим ковариантное выражение для электромагнитного тензора энергии — импульса. Его выражение через тензор поля $F_{\mu\nu}$ дается формулой

$$[T^{\mu\nu}]_{эм} = -g^{\nu\beta} F^{\mu\alpha} F_{\beta\alpha} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (104.1)$$

Легко убедиться, что это выражение действительно удовлетворяет всем необходимым требованиям. Очевидно, что оно ковариантно, поскольку является тензорным уравнением (ранга два). Далее, если использовать записанное в естественных координатах определение тензора поля $F_{\mu\nu}$ (46.9), можно найти, что (104.1) в этих координатах сводится к выражению для тензора энергии — импульса из специальной теории относительности, т. е. к формулам (46.20) и (46.21). Приведем для примера несколько типичных компонент $[T^{\mu\nu}]_{эм}$:

$$\begin{aligned} T^{11} &= -\frac{1}{2} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + H_x^2 - H_y^2 - H_z^2), \\ T^{12} &= -(E_x E_y + H_x H_y), \\ T^{14} &= (E_y H_z - E_z H_y), \\ T^{44} &= \frac{1}{2} (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 + H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) \end{aligned} \quad (104.2)$$

в системе единиц, где $c=1$.

Воспользуемся теперь обсужденной уже в § 45 возможностью объединения одноименных механических и электрических величин. Тогда закон сохранения энергии — импульса для системы,

обладающей и механическими и электрическими свойствами, запишется в виде ковариантного соотношения:

$$(T^{\mu\nu})_{;\nu} = ([T^{\mu\nu}]_{\text{мех}} + [T^{\mu\nu}]_{\text{эм}})_{;\nu} = 0, \quad (104.3)$$

являющегося аналогом выражения (46.22) из специальной теории относительности.

На этом закончим ковариантную формулировку электронной теории Лоренца, согласующуюся с требованиями общей теории относительности.

§ 105. Обобщенная макроскопическая теория

Как уже говорилось, электронная теория Лоренца не имеет вполне законченного вида из-за ее микроскопического характера. Поэтому интересно показать, что макроскопическую теорию, развитую во второй части главы IV, можно легко выразить в ковариантной форме, пригодной для общей теории относительности.

Аппарат макроскопической теории в специальной теории относительности строился с помощью двух антисимметричных тензоров поля $F^{\mu\nu}$ и $H^{\mu\nu}$ и вектора тока J^μ . Эти три тензора были определены в § 50 в системе галилеевых координат, относительно которой рассматриваемая электромагнитная среда в целом покоилась. В этих координатах указанные тензоры выражаются непосредственно через четыре известных максвелловских вектора: напряженность электрического поля \mathbf{E} , электрическое смещение \mathbf{D} , напряженность магнитного поля \mathbf{H} , магнитную индукцию \mathbf{B} , которые определяются наблюдателем, покоящимся относительно среды, а компоненты вектора тока определяются плотностью тока и электрического заряда, измеряемых тем же наблюдателем.

При построении макроскопической теории в рамках общей теории относительности можно, очевидно, непосредственно воспользоваться тензорами $F^{\mu\nu}$, $H^{\mu\nu}$ и J^μ , поскольку их можно ввести точно тем же способом, что и раньше, т. е. предположить, что локальный наблюдатель, использующий собственные координаты в выбранной точке, определяет компоненты соответствующих тензоров, которые затем по правилам тензорных преобразований можно перевести в любую нужную систему координат.

Прежде чем приступить к обобщению макроскопической теории, мы должны удостовериться в том, что уравнения в § 50 действительно заданы ковариантным образом. Для первого из двух уравнений это справедливо в его прежней форме

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (105.1)$$

из-за взаимного уничтожения символов Кристоффеля, которые

возникают при переходе к ковариантным производным, но исчезают ввиду антисимметрии тензора $F_{\mu\nu}$. Чтобы второе уравнение поля получить в ковариантной записи, достаточно обычное дифференцирование заменить ковариантным, т. е. написать

$$(H^{\mu\nu})_{;\nu} = J^{\mu}. \quad (105.2)$$

И наконец, чтобы замкнуть систему уравнений макроскопической теории, можно переписать в ковариантной форме и дополнительные уравнения, см. § 51:

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{ds} &= e F_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{ds}, \\ (g_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} + g_{\alpha\gamma} F_{\delta\beta} + g_{\alpha\delta} F_{\beta\gamma}) \frac{dx^{\alpha}}{ds} &= \\ &= \mu (g_{\alpha\beta} H_{\gamma\delta} + g_{\alpha\gamma} H_{\delta\beta} + g_{\alpha\delta} H_{\beta\gamma}) \frac{dx^{\alpha}}{ds}, \end{aligned} \quad (105.3)$$

$$J^{\alpha} - J_{\beta} \frac{dx^{\beta}}{ds} \frac{dx^{\alpha}}{ds} = \frac{\sigma}{c} g_{\beta\gamma} F^{\gamma\alpha} \frac{dx^{\beta}}{ds}.$$

Здесь ϵ , μ и σ — соответственно диэлектрическая постоянная, магнитная проницаемость и проводимость вещества, измеряемые локальным наблюдателем, а dx^{α}/ds и dx^{β}/ds — обозначения макроскопической скорости среды в рассматриваемой точке. При введении этих дополнительных уравнений мы подразумеваем, конечно, что справедливо обычное приближение, предполагающее, что электромагнитное состояние вещества можно полностью характеризовать в каждой точке, если задать распределения скалярных величин ϵ , μ и σ .

Итак, включение макроскопической теории электромагнетизма в общую теорию относительности оказалось формально простой операцией. Однако полученные уравнения не столь уж просты, и до сих пор они получили лишь ограниченное применение.

ЧАСТЬ II НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

§ 106. Сохранение электрического заряда

Теперь мы рассмотрим некоторые приложения релятивистской электродинамики, результаты которых мы используем в дальнейшем, однако они будут иметь ограниченную применимость вследствие несовершенства электронной теории Лоренца, которое мы уже отмечали выше.

Найдем для начала релятивистский аналог классического закона сохранения электрического заряда.

Вводя тензорные плотности (Приложение III, уравнение (48)), можно переписать второе из уравнений поля (102.6) в виде

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \mathfrak{J}^\mu, \quad (106.1)$$

а используя антисимметрию $\mathfrak{F}^{\mu\nu}$, получаем

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{F}^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial \mathfrak{J}^\mu}{\partial x^\mu} = 0. \quad (106.2)$$

Вместо плотности тока, однако, можно взять формулу (102.2), которая определяет J^μ , и переписать с ее помощью последнее уравнение так:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\rho_0 \frac{dx^\mu}{ds} \sqrt{-g} \right) = 0, \quad (106.3)$$

где ρ_0 — собственная плотность заряда, определяемая локальным наблюдателем, а dx^μ/ds — «скорость» этого заряда.

Чтобы показать наиболее простым образом, что это выражение означает сохранение электрического заряда, удобно рассмотреть его в системе естественных координат данной точки x, y, z и t . Тогда, поскольку тензор $g_{\mu\nu}$ в данной точке будет иметь галилеевы значения, его первые производные по координатам исчезнут, и можно воспользоваться соответствующими соотношениями

$$\sqrt{-g} = 1, \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{-g} = 0$$

и переписать (106.3) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_0 \frac{dt}{ds} \frac{dx}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_0 \frac{dt}{ds} \frac{dy}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 \frac{dt}{ds} \frac{dz}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0 \frac{dt}{ds} \right) = 0.$$

Поскольку dt/ds — множитель, характеризующий лоренцево сокращение, последнее соотношение можно переписать еще так:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (106.4)$$

где ρ — плотность заряда, а u_x, u_y, u_z — обычные компоненты скорости в выбранной системе отсчета.

Выражение (106.4) совпадает с обычным уравнением непрерывности для некоей «субстанции» с плотностью ρ . Таким образом, закон сохранения электрического заряда действительно содержится в исходной формуле, что и требовалось доказать.

§ 107. Гравитационное поле заряженной частицы

В качестве второго применения релятивистской электродинамики найдем гравитационное поле, создаваемое заряженной частицей.

Будем считать, что частица покоится в начале системы координат. Тогда, очевидно, можно выразить интервал в стандартной сферически симметричной форме:

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + e^\nu dt^2, \quad (107.1)$$

где λ и ν — функции только от r , исчезающие при больших значениях r . Для того чтобы отыскать λ и ν , рассмотрим сначала электрическое поле, окружающее частицу.

Так как потенциал ϕ_μ в нашем случае — функция только от координаты r , то, подставляя эту функцию в выражение (102.5), которое вводит через этот потенциал полевой тензор $F_{\mu\nu}$, найдем, что единственными ненулевыми компонентами этого тензора могут быть

$$F_{21} = -F_{12}, F_{31} = -F_{13}, F_{41} = -F_{14}.$$

Легко, кроме того, показать, что первые две компоненты также должны исчезать. В самом деле, подставляя F_{21} во второе из двух полевых уравнений (106.1), найдем, что в пространстве, окружающем частицу, справедливы соотношения

$$\frac{\partial g^{2\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial r} [g^{22} g^{11} F_{21} \sqrt{-g}] = \frac{\partial}{\partial r} \left(F_{21} e^{-\frac{1}{2}(\lambda-\nu)} \sin \theta \right) = 0,$$

откуда

$$F_{21} = \text{const} \cdot e^{\frac{1}{2}(\lambda-\nu)}.$$

Аналогичным образом можно получить выражение для F_{31} . Далее, известно, что на больших расстояниях от частицы, где λ и ν стремятся к нулю и становятся справедливыми обычные уравнения для электромагнитного поля, компонента F_{21} должна обращаться в нуль. (Это следует из ее определения через напряженность магнитного поля.) Поэтому константу в последнем выражении надо положить равной нулю, откуда вытекает, что F_{21} , а также и F_{31} равны нулю повсюду.

Чтобы найти единственную не исчезающую компоненту полевого тензора F_{41} , еще раз воспользуемся уравнением (106.1):

$$\frac{\partial g^{4\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial r} [g^{44} g^{11} F_{41} \sqrt{-g}] = \frac{\partial}{\partial r} \left(-F_{41} r^2 e^{-\frac{1}{2}(\lambda+\nu)} \sin \theta \right) = 0,$$

из которого следует:

$$-F_{41} = F_{14} = \frac{8}{r^2} e^{\frac{1}{2}(\lambda+\nu)}, \quad (107.2)$$

где ε — постоянная интегрирования. Обычное определение F_{41} через напряженность электрического поля, справедливое в нашем случае на большом удалении от частицы, позволяет отождествлять $4\pi\varepsilon$ с зарядом частицы в принятых нами хевисайдовых, релятивистских единицах.

Получив это выражение для ненулевой компоненты тензора поля, мы можем теперь подставить его в определение тензора энергии — импульса (104.1). В итоге найдем

$$T_1^1 = -T_2^2 = -T_3^3 = T_4^4 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{r^4}. \quad (107.3)$$

Сравнивая затем (107.3) с соответствующими выражениями тензора энергии — импульса, записанными через λ и ν в (95.3), приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\varepsilon^2}{r^4} &= -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \\ \frac{4\pi\varepsilon^2}{r^4} &= e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} \right), \\ \frac{4\pi\varepsilon^2}{r^4} &= e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}. \end{aligned} \quad (107.4)$$

Космологическая постоянная Λ здесь положена равной нулю, поскольку она не представляет сейчас интереса. Система уравнений (107.4), как легко убедиться, имеет решение, соответствующее интервалу

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{dr^2}{1 - 2m/r + 4\pi\varepsilon^2/r^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \\ &+ \left(1 - 2m/r + 4\pi\varepsilon^2/r^2 \right) dt^2. \end{aligned} \quad (107.5)$$

Это выражение замечательно тем, что показывает, какой вклад дает энергия электрического поля, окружающего заряд, в кривизну пространства — времени. Оказывается, что для любой реальной заряженной частицы на достаточном удалении от нее гравитационный эффект, возникающий за счет энергии электрического поля, пренебрежимо мал по сравнению с тем, что возникает из-за наличия у частицы собственной массы m . Действительно, если рассмотреть частицу с массой и зарядом, которые обычно приписывают электрону, то эти масса и заряд дают вклады в кривизну (в соответствующих единицах), относящиеся как

$$\frac{4\pi\varepsilon^2/r^2}{2m/r} = \frac{2\pi\varepsilon^2}{m r} = \frac{1,5 \cdot 10^{-13}}{r}$$

(r сюда следует подставлять в сантиметрах). Итак, мы видим, что «искривление» пространства — времени, вызываемое наличием заряда, пренебрежимо мало по сравнению с эффектом, обусловленным массой, исключая крайне малые расстояния от частицы.

§ 108. Распространение электромагнитных волн

Исследуем теперь механизм распространения электромагнитных возмущений. При этом мы будем рассматривать пространственное изменение компонент полевых тензоров $F_{\mu\nu}$, имеющих довольно прямой физический смысл, поскольку изменение компонент потенциала φ_μ интерпретировать гораздо сложнее.

Следуя методу Эддингтона [56], мы можем написать с помощью полевых уравнений (102.5) и (102.6) (после того, как продифференцируем их по ν) следующее выражение:

$$J_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha\nu}^\alpha = g^{\alpha\beta} F_{\mu\beta\alpha\nu} = g^{\alpha\beta} (\varphi_{\mu\beta\alpha\nu} - \varphi_{\beta\mu\alpha\nu}).$$

По известной теореме тензорного анализа (Приложение III, уравнение (43)) это можно переписать, если ввести тензор Римана — Кристоффеля, в виде

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu} = & g^{\alpha\beta} (\varphi_{\mu\beta\nu\alpha} - \varphi_{\beta\mu\nu\alpha}) - g^{\alpha\beta} (R_{\mu\nu\alpha}^{\epsilon} \varphi_{\epsilon\beta} + R_{\beta\nu\alpha}^{\epsilon} \varphi_{\mu\epsilon} - \\ & - R_{\beta\nu\alpha}^{\epsilon} \varphi_{\epsilon\mu} - R_{\mu\nu\alpha}^{\epsilon} \varphi_{\beta\epsilon}) = g^{\alpha\beta} (\varphi_{\mu\beta\nu} - \varphi_{\beta\mu\nu})_{,\alpha} - \\ & - g^{\alpha\beta} (R_{\mu\nu\alpha}^{\epsilon} F_{\epsilon\beta} - R_{\beta\nu\alpha}^{\epsilon} F_{\epsilon\mu}) = g^{\alpha\beta} (\varphi_{\mu\beta\nu} - \varphi_{\beta\mu\nu})_{,\alpha} - R_{\mu\nu\alpha\epsilon} F^{\epsilon\alpha} - R_{\nu}^{\epsilon} F_{\epsilon\mu}. \end{aligned}$$

Далее, вычитая из выражения для $J_{\mu\nu}$ аналогичное выражение для $J_{\nu\mu}$, получаем

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu} - J_{\nu\mu} = & g^{\alpha\beta} (\varphi_{\mu\beta\nu} - \varphi_{\nu\beta\mu} - \varphi_{\beta\mu\nu} + \varphi_{\beta\nu\mu})_{,\alpha} - \\ & - (R_{\mu\nu\alpha\epsilon} - R_{\nu\mu\alpha\epsilon}) F^{\epsilon\alpha} - R_{\nu}^{\epsilon} F_{\epsilon\mu} + R_{\mu}^{\epsilon} F_{\epsilon\nu}. \end{aligned}$$

Используя теперь свойства симметрии рассматриваемых тензоров и применяя уравнение (42) из Приложения III, находим

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu} - J_{\nu\mu} = & g^{\alpha\beta} (\varphi_{\mu\nu\beta} - \varphi_{\nu\mu\beta} + R_{\mu\beta\nu}^{\epsilon} \varphi_{\epsilon} + R_{\nu\mu\beta}^{\epsilon} \varphi_{\epsilon} + R_{\beta\nu\mu}^{\epsilon} \varphi_{\epsilon})_{,\alpha} - \\ & - 2R_{\mu\nu\alpha\epsilon} F^{\epsilon\alpha} - R_{\nu}^{\epsilon} F_{\epsilon\mu} + R_{\mu}^{\epsilon} F_{\epsilon\nu}. \end{aligned}$$

И наконец, воспользовавшись циклическими свойствами тензора Римана — Кристоффеля

$$R_{\mu\beta\nu}^{\epsilon} + R_{\nu\mu\beta}^{\epsilon} + R_{\beta\nu\mu}^{\epsilon} = 0,$$

приходим к окончательному результату:

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} (F_{\mu\nu})_{\alpha\beta} = & g^{\alpha\beta} (\varphi_{\mu\nu} - \varphi_{\nu\mu})_{,\beta\alpha} = J_{\mu\nu} - J_{\nu\mu} + \\ & + 2R_{\mu\nu\alpha\epsilon} F^{\epsilon\alpha} - R_{\mu}^{\epsilon} F_{\epsilon\nu} + R_{\nu}^{\epsilon} F_{\epsilon\mu}. \end{aligned} \quad (108.1)$$

Оператор $g^{\alpha\beta}(\quad)_{\alpha\beta}$, стоящий в левой части этого выражения, является обобщением оператора Даламбера из нерелятивистской теории

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

так что уравнение (108.1) можно рассматривать как аналог волнового уравнения из обычной электромагнитной теории.

Вводя *естественные* координаты в рассматриваемой точке и замечая, что производные от символов Кристоффеля в этих координатах не исчезают, в то время как сами символы равняются нулю, перепишем (108.1) в виде

$$g^{\alpha\beta} \left[\frac{\partial^2 F_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - F_{\epsilon\nu} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \Gamma_{\mu\alpha}^\epsilon - F_{\mu\epsilon} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \Gamma_{\nu\alpha}^\epsilon \right] = \\ = J_{\mu\nu} - J_{\nu\mu} + 2R_{\mu\nu\alpha\epsilon} F^{\epsilon\alpha} - R_\mu^\epsilon F_{\epsilon\nu} + R_\nu^\epsilon F_{\epsilon\mu}. \quad (108.2)$$

В естественных координатах, однако, компоненты тензора $F_{\mu\nu}$ задаются непосредственно через напряженности полей согласно (46.9) и (46.10). Следовательно, в отсутствие тока J_μ и в пределе исчезающе малых напряженностей волновое уравнение, записанное в естественных координатах, принимает свой обычный вид:

$$-\frac{\partial^2 F_{\mu\nu}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F_{\mu\nu}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_{\mu\nu}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_{\mu\nu}}{\partial t^2} = 0, \quad (108.3)$$

соответствующий единичной скорости распространения электромагнитных возмущений. Интересно отметить, однако, что этот результат получен лишь при исчезающе малых напряженностях полей, а следовательно, при исчезающе малых интенсивностях электромагнитных возмущений.

С помощью уравнения (108.3) можно дать новое подтверждение того, что путь светового луча можно определить в пространстве — времени геодезической линией, для которой $ds=0$. Решение уравнения (108.3), соответствующее плоской волне, имеет вид

$$F_{\mu\nu} = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (lx + my + nz - t), \quad (108.4)$$

где A — амплитуда, λ — длина волны, l , m и n — направляющие косинусы, причем первые и вторые производные от всех этих величин исчезают. Этой волне в терминах геометрической оптики отвечает луч, распространяющийся с единичной скоростью

$$-dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2 = 0,$$

при том условии, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

если описание производится в естественных координатах x, y, z и t . Этот результат, однако, можно переписать в виде, пригодном для всех систем координат, если принять, что во всех системах координат траектория светового луча является геодезической с дополнительным условием $ds=0$. Таким образом, наш первоначальный вывод получил дополнительное подтверждение.

§ 109. Тензор энергии — импульса изотропного излучения

Рассмотрим теперь некоторые вопросы, связанные с тензором энергии — импульса, для различных распределений электромагнитного излучения.

Известно, что случай неупорядоченного, хаотического электромагнитного излучения можно рассматривать с помощью механических величин, применяемых при описании идеальной жидкости. В § 85 мы уже указывали, что обычное выражение для тензора энергии — импульса идеальной жидкости*)

$$T^{\mu\nu} = (\rho_{00} + p_0) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g^{\mu\nu} p_0 \quad (109.1)$$

можно использовать и в случае равновесного электромагнитного излучения. Плотность и давление такого излучения, измеряемые локальным наблюдателем, относительно которого нет потока энергии, связаны простым соотношением:

$$\rho_{00} = 3p_0, \quad (109.2)$$

а величины dx^μ/ds , стоящие в (109.1), являются компонентами скорости этого наблюдателя относительно выбранной системы отсчета.

Рассматривая равновесное электромагнитное излучение как идеальную жидкость и находя таким образом тензор энергии — импульса этого излучения, мы поступаем не вполне корректно ввиду макроскопического характера такого подхода. Тем не менее интересно убедиться в том, что мы получим тот же самый результат, если соответствующим образом усредним [72] микроскопическое выражение для электромагнитного тензора энергии — импульса, найденное в § 104.

Введем для этого систему собственных координат, относительно которой в данный момент в рассматриваемой точке полный поток энергии равен нулю. В такой системе координат компоненты тензора энергии — импульса, если его рассматривать с микроскопической точки зрения, выражаются классическим образом через напряженности электрического и магнитного

*) Дальше Толмен использует термин «fluid» более широко. Иногда он переводится как «материя». (Прим. ред.)

полей, например (§ 104):

$$\begin{aligned} T^{11} &= -\frac{1}{2}(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + H_x^2 - H_y^2 - H_z^2), \\ T^{12} &= -(E_x E_y + H_x H_y), \\ T^{14} &= (E_y H_z - E_z H_y), \\ T^{44} &= \frac{1}{2}(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 + H_x^2 + H_y^2 + H_z^2). \end{aligned} \quad (109.3)$$

Чтобы можно было перейти от этих формул к соответствующим макроскопическим величинам, надо, чтобы в среднем были справедливы соотношения

$$E_x^2 = E_y^2 = E_z^2 \quad \text{и} \quad H_x^2 = H_y^2 = H_z^2, \quad (109.4)$$

в силу того что усредненные напряженности равновесного излучения не должны зависеть от направлений. Смешанные произведения окажутся равными нулю:

$$E_x E_y = E_y E_z = E_z E_x = 0 \quad \text{и} \quad H_x H_y = H_y H_z = H_z H_x = 0, \quad (109.5)$$

поскольку отсутствие фазовых соотношений делает положительные и отрицательные мгновенные значения такого типа произведений равновероятными; кроме того,

$$E_y H_z - E_z H_y = E_z H_x - E_x H_z = E_x H_y - E_y H_x = 0, \quad (109.6)$$

ибо система координат выбрана так, что в среднем поток энергии равняется нулю.

Применяя найденные правила усреднения к выражению для *макроскопического* тензора энергии — импульса (109.3), легко убедиться, что единственными его компонентами, не исчезающими после усреднения, будут

$$T^{11} = T^{22} = T^{33} = \rho_0, \quad T^{44} = \rho_{00}, \quad (109.7)$$

причем ρ_{00} и ρ_0 связаны соотношением

$$\rho_{00} = 3\rho_0, \quad (109.8)$$

в котором ρ_{00} — собственная макроскопическая плотность энергии в данной точке, т. е. усредненное выражение для плотности электромагнитной энергии в отсутствие вещества; три исчезающих компоненты максвелловских натяжений равны одной трети ρ_{00} каждая, т. е. давлению излучения ρ_0 .

Получив выражение для тензора энергии — импульса (109.7) в избранной системе координат, можно, конечно, записать его, пользуясь правилами тензорных преобразований, и в любой системе координат. Действительно, применяя тот же самый способ, который использовался в § 85 при получении общего выражения

для тензора энергии — импульса обычной идеальной жидкости, когда известны его компоненты в собственных координатах, мы сразу приходим к искомому выражению для тензора энергии — импульса равновесного излучения в виде

$$T^{\mu\nu} = (\rho_{00} + p_0) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g^{\mu\nu} p_0, \quad \rho_{00} = 3p_0, \quad (109.9)$$

где «скорость» dx^μ/ds надо теперь интерпретировать как скорость локального наблюдателя, для которого в среднем нет никакого потока энергии и которого поэтому можно считать движущимся вместе со всем излучением.

§ 110. Гравитационная масса изотропного излучения

Итак, мы показали, что выбор тензора энергии — импульса изотропного излучения, основанный на аналогии с идеальной жидкостью, вполне разумен. С помощью установленных формул мы можем теперь найти интересное свойство электромагнитного излучения — способность создавать гравитационное поле.

Рассмотрим статическую сферу, заполненную идеальной жидкостью. Интервал в этом случае можно задать так:

$$ds^2 = -e^{\mu} (dx^2 + dy^2 + dz^2) + e^{\nu} dt^2. \quad (110.1)$$

Будем считать в соответствии с § 91, что масса сферы m равняется ее энергии U , а последнюю, согласно § 97, выразим в виде интеграла по всему объему жидкости, т. е.

$$m = U = \int (\rho_{00} + 3p_0) e^{\frac{1}{2}\nu} dV_0, \quad (110.2)$$

где dV_0 — элемент собственного объема жидкости.

Как следует из наших рассуждений, последнее выражение применимо не только к жидкой сфере, но и к смеси вещества и излучения. Далее, величина m может рассматриваться как характеристика способности сферы создавать гравитационное поле, поскольку в соответствии с определением, данным в § 90, эта величина должна совпадать с постоянной, стоящей в шварцшильдовском выражении для интеграла в случае пустого пространства, окружающего сферу. Учтем теперь то обстоятельство, что давление p_0 неупорядоченного излучения составляет одну треть плотности энергии ρ_{00} , а давление в веществе в обычных условиях составляет лишь незначительную долю от его плотности. Мы приходим тогда к интересному заключению, что изотропное излучение внутри жидкой сферы дает *вдвое* больший вклад в гравитационное поле сферы по сравнению с таким же количеством энергии в форме вещества.

Интересно сравнить это заключение с фактом, уже упомянутым в конце § 83, б, что гравитационное отклонение света, проходящего вблизи притягивающей его массы, *вдвое* больше того, что следует из ньютоновской теории для частицы, движущейся со скоростью света. В последующих параграфах мы найдем аналогичные различия в свойствах вещества и излучения и для других эффектов.

§ 111. Тензор энергии — импульса направленного потока излучения

Рассмотрев изотропное излучение, перейдем теперь к случаю направленного потока излучения. Вводя естественные координаты в точке наблюдения, мы, как и прежде, можем выразить компоненты тензора энергии — импульса (рассматриваемого с микроскопической точки зрения) через напряженности электрического и магнитного полей. Такие выражения уже выписывались в § 104 и в § 109. Перепишем здесь выражение (109.3), опустив для удобства один из индексов тензора энергии — импульса:

$$\begin{aligned} T_1^1 &= \frac{1}{2}(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2 + H_x^2 - H_y^2 - H_z^2), \\ T_2^1 &= T_1^2 = (E_x E_y + H_x H_y), \\ T_4^1 &= -T_1^4 = (E_y H_z - E_z H_y), \\ T_4^4 &= \frac{1}{2}(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 + H_x^2 + H_y^2 + H_z^2). \end{aligned} \quad (111.1)$$

Считая теперь для простоты, что излучение распространяется в направлении оси x , а электрическая напряженность направлена в плоскости поляризации по оси y , получим, согласно обычной электромагнитной теории света, соотношения

$$E_x = E_z = H_x = 0, \quad E_y = H_z.$$

Подставляя их в (111.1), находим, что единственными ненулевыми компонентами тензора энергии — импульса будут

$$-T_1^1 = T_4^4 = T_4^1 = -T_1^4 = \frac{E_y^2 + H_z^2}{2}. \quad (111.2)$$

Таким образом, все компоненты оказались численно равными выражению для плотности электромагнитной энергии.

Результат (111.2), полученный для микроскопической картины плоскополяризованного излучения, очевидно, должен быть справедлив в среднем и для некогерентного неполяризованного излучения. Поэтому будем считать, что общие макроскопические выражения для тензора энергии — импульса потока излучения,

направленного вдоль оси x , имеют вид

$$-T_1^1 = T_4^4 = T_4^1 = -T_1^4 = \rho, \quad (111.3)$$

где ρ — плотность излучаемой энергии в рассматриваемой точке, в которой введены *естественные координаты*.

§ 112. Гравитационное поле направленного потока излучения

Полученное выше выражение для тензора энергии — импульса направленного потока излучения позволяет определить создаваемое этим излучением гравитационное поле. Это возможно, однако, лишь для достаточно слабых полей, когда справедливы эйнштейновские приближенные решения уравнений поля, приведенные в § 93.

Метрический тензор в этом случае выражается в виде

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (112.1)$$

где $\delta_{\mu\nu}$ — постоянные галилеевы значения $g_{\mu\nu}$: $\pm 1, 0$, а $h_{\mu\nu}$ — малые добавки первого порядка. Введем теперь величины

$$h_{\mu}^{\lambda} = \delta^{\lambda\alpha} h_{\mu\alpha}, \quad h = h_{\alpha}^{\alpha} = \delta^{\sigma\lambda} h_{\sigma\lambda}, \quad (112.2)$$

где $\delta^{\mu\nu}$ — галилеевы значения тензора $g_{\mu\nu}$. Приближенные решения уравнений поля при этом записываются следующим образом:

$$\left(h_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} h \right) = -4 \int \frac{[T_{\mu}^{\nu}]}{r} dx dy dz, \quad (112.3)$$

где интегрирование должно производиться по всему пространственному объему, r обозначает расстояние от элемента интегрирования $dx dy dz$ до точки, в которой мы хотим определить величину $\left(h_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\nu} h \right)$, а квадратные скобки означают, что величина T_{μ}^{ν} в элементе интегрирования относится к моменту времени более раннему, чем тот, для которого мы проводим вычисления, на интервал, равный времени, необходимому, чтобы сигнал прошел путь от объема $dx dy dz$ до точки наблюдения.

Далее, в приближении, которое мы используем, можно подставить в (112.3) выражение тензора T_{μ}^{ν} в естественных координатах (111.3), поскольку T_{μ}^{λ} — величина первого порядка, а выбранные координаты совпадают приближенно в каждой рас-

смаатриваемой точке с естественными координатами. Таким образом, для потока излучения, направленного по оси x , мы получим систему уравнений

$$\begin{aligned} h_1^1 - \frac{1}{2} h &= 4 \int \frac{[\rho] dV}{r}, \\ h_2^2 - \frac{1}{2} h &= h_3^3 - \frac{1}{2} h = 0, \\ h_4^4 - \frac{1}{2} h &= -4 \int \frac{[\rho] dV}{r}, \\ h_4^1 &= -h_1^4 = -4 \int \frac{[\rho] dV}{r}. \end{aligned} \quad (112.4)$$

Теперь с помощью (112.2) легко получить решение этих уравнений:

$$-h_{11} = -h_{44} = h_{14} = h_{41} = 4 \int \frac{[\rho] dV}{r}. \quad (112.5)$$

Остальные компоненты $h_{\mu\nu}$ равны нулю.

Найденное решение определяет гравитационное поле потока излучения, направленного по оси x , если поле достаточно слабое и использование эйнштейновских приближенных решений оправдано.

Вряд ли, однако, мы встретимся с нарушением этого условия в полях, создаваемых природными или искусственными пучками или импульсами излучения.

§ 113. Гравитационное воздействие пучка света

а) *Интервал в окрестности ограниченного пучка света.* Найденное выше выражение для гравитационного поля, создаваемого направленным потоком излучения, естественно попытаться применить для вычисления поля вблизи бесконечно длинного пучка света, протяженного, скажем, вдоль оси x от минус до плюс бесконечности. Это невозможно, однако, выполнить с помощью развитого метода, поскольку интегрирование в формуле (112.5) приводит в данном случае к бесконечным значениям $h_{\mu\nu}$, что вступает в противоречие с приближением, в котором получены решения уравнений.

Эта трудность, однако, не возникает, если рассматривать тонкий пучок излучения конечной длины l и постоянной линейной плотности ρ , который распространяется вдоль оси x от источника, находящегося в точке $x=0$, до поглотителя, расположенного в точке $x=l$. Из формулы (112.5) следует, что вклад излучения в гравитационный потенциал любой точки x, y, z ,

находящейся вблизи пучка, равняется

$$\begin{aligned}
 -h_{11} &= -h_{44} = h_{14} = h_{41} = 4 \int \frac{[\rho] dV}{r} = \\
 &= \int_{u=0}^{u=l} \frac{4\rho du}{[(x-u)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} = 4\rho \ln \frac{[(l-x)^2 + y^2 + z^2]^{1/2} + (l-x)}{[x^2 + y^2 + z^2]^{1/2} - x} \quad (113.1)
 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в том случае, когда пучок имеет *конечную длину* l , рассматриваемые величины могут быть сделаны сколь угодно малыми, если сделать малой плотность излучения ρ .

Следует отметить, что выражение (113.1) получено в предположении о *стационарности* пучка излучения, так что не было нужды явно вводить запаздывающие потенциалы. Отсюда, однако, следует, что полученное выражение неприменимо для моментов времени, близких к моментам возникновения или исчезновения пучка. Надо также помнить, что мы предположили, что излучение распространяется только вдоль оси x , пренебрегая дифракционными эффектами на границе пучка. И наконец, укажем, что рассматриваемое выражение дает вклад в поле лишь самого пучка излучения и пренебрегает вкладами от тел, являющихся источниками или поглотителями этого излучения. Последнее означает, что игнорируются также любые эффекты, возникающие вследствие изменений в движении или во внутреннем состоянии этих тел, которые могут быть связаны с потоком излучения. При выполнении всех этих условий можно считать, что формула (113.1) определяет гравитационное поле в окрестности пучка света конечной протяженности.

б) *Скорость пробного светового луча вблизи пучка.* Для того чтобы определить характер гравитационного поля вблизи пучка, рассмотрим сначала движение пробных световых лучей, а затем движение пробных частиц вблизи пучка.

Чтобы исследовать поведение пробных лучей, выпишем с помощью выражения (113.1) формулу интервала вблизи пучка:

$$ds^2 = -(1 - h_{11}) dx^2 - dy^2 - dz^2 + (1 + h_{11}) dt^2 - 2h_{11} dx dt.$$

Приравняв это выражение к нулю (как это следует делать для света) и поделив его затем на dt^2 , получим общее уравнение для скорости пробных лучей вблизи пучка:

$$(1 - h_{11}) \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} + 2h_{11} \frac{dx}{dt} = 1 + h_{11}. \quad (113.2)$$

Рассмотрим сначала случай, когда пробные лучи движутся параллельно оси x (а следовательно, и пучку). Тогда уравнение

для скорости имеет решения

$$\frac{dx}{dt} = +1 \text{ и } \frac{dx}{dt} = -\frac{1+h_{11}}{1-h_{11}}. \quad (113.3)$$

Рассматривая далее случай, когда пробные лучи распространяются параллельно оси y , т. е. в плоскости, перпендикулярной пучку, приходим к следующим решениям:

$$\frac{dy}{dt} = \pm \sqrt{1+h_{11}}. \quad (113.4)$$

Из выражений (113.3) видим, что пробные лучи света, движущиеся параллельно пучку в том же самом направлении, что и свет в пучке, обладают единичной скоростью в любой точке поля; напротив, скорость пробного луча, движущегося в любом другом направлении, определяется, как и следовало ожидать, ориентацией этого луча в гравитационном поле изучаемого пучка, поскольку величина h_{11} зависит от их взаимного пространственного расположения (см. (113.1)).

Можно также найти ускорение пробного луча в этом гравитационном поле. Дифференцируя выражение (113.2), получаем уравнение для ускорения в общем виде:

$$2\left(\frac{dx}{dt} - h_{11} \frac{dx}{dt} + h_{11}\right) \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt} \frac{d^2z}{dt^2} - \left(\frac{dx^2}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 1\right) \frac{dh_{11}}{dt} = 0. \quad (113.5)$$

Отсюда для частного случая, когда мгновенные значения компонент скорости пробного луча равняются

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0, \quad (113.6)$$

получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad (113.7)$$

т. е. скорость такого пробного луча остается единичной и параллельной пучку, а следовательно, в соответствии с общим выражением (113.2), все время остаются нулевыми компоненты скорости, перпендикулярные пучку.

Этот результат весьма любопытен, так как означает, что в частном случае параллельных и одинаково направленных лучей света гравитационное взаимодействие между лучами не возникает. Этот вывод согласуется с предположением, что изучаемый пучок света стационарен, и подтверждается свойствами параллельных лучей, которые приходят от удаленных астрономических объектов.

в) Ускорение пробных частиц вблизи пучка. Найдем теперь, как гравитационное поле пучка излучения воздействует на пробные частицы, находящиеся первоначально в покое вблизи пучка.

Ускорение такой пробной частицы определяется согласно общему уравнению геодезической (74.13):

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0.$$

В случае покоящейся частицы, т. е. при условиях

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{ds} = \frac{dz}{ds} = 0, \quad \frac{dt}{ds} = 1,$$

это уравнение принимает вид

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{44}^\sigma = 0.$$

Подставляя значения символов Кристоффеля, соответствующие гравитационному полю пучка (113.1), получаем в приближении, используемом при решении уравнений поля, следующие выражения:

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{44}}{\partial x}, \quad \frac{d^2 y}{ds^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{44}}{\partial y}, \quad \frac{d^2 z}{ds^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{44}}{\partial z}.$$

Далее, подставим сюда явное выражение для h_{44} из (113.1), справедливое в непосредственной близости с пучком. Тогда после некоторых преобразований получим для частицы, которая *вначале покоилась*, следующее выражение для параллельной пучку компоненты ускорения:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 2\rho \left\{ \frac{1}{[x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(l-x)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \right\}, \quad (113.8)$$

а для компоненты ускорения в плоскости, перпендикулярной пучку, находим

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{2\rho y}{y^2 + z^2} \left\{ \frac{x}{[x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} + \frac{l-x}{[(l-x)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \right\}. \quad (113.9)$$

Значения x , y , z в этих формулах задаются положением пробной частицы; напомним также, что световой пучок расположен вдоль оси x на отрезке от $x=0$ до $x=l$.

Если пробная частица расположена в точке, одинаково удаленной от обоих концов отрезка, вдоль которого распространяется свет, то общие выражения упрощаются. Ускорение в направлении, параллельном пучку, исчезает:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad (113.10)$$

а выражение для ускорения, направленного к пучку, принимает вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} = - \frac{2\rho l}{y \left[\left(\frac{1}{2} l \right)^2 + y^2 \right]^{3/2}}. \quad (113.11)$$

Полученные результаты для ускорения частицы в направлении, параллельном и перпендикулярном пучку света, замечательны по следующим причинам. Во-первых, оба выражения, и (113.8) и (113.9), ровно в *два раза* превосходят аналогичные результаты ньютоновской теории, если вместо пучка света взять материальный стержень, имеющий ту же плотность и ту же длину, что и пучок излучения. Это еще один пример (ср. с § 110), когда излучение создает более интенсивное гравитационное поле, нежели распределение вещества той же плотности.

Во-вторых, из формул (113.8) и (113.10) вытекает интересное следствие, а именно, что ускорение, параллельное пучку, направлено в сторону большего из отрезков, на которые делится его длина в том случае, когда частица расположена к одному из концов ближе, чем к другому. Если же частица помещена в точке, равноудаленной от обоих концов пучка, то ускорение равно нулю, а следовательно, если частица не расположена прямо на самом пути пучка, то нет никакого преобладающего гравитационного воздействия на нее в направлении распространения света. Таким образом, это воздействие отличается от эффекта светового давления, которое действует на частицу, находящуюся в пучке света, и направлено по потоку радиации; оно отлично и от комптоновского воздействия на электрон, расположенный в пучке, которое также преобладает в направлении распространения света.

§ 114. Гравитационное воздействие светового пакета

а) *Вид интервала вблизи траектории светового пакета, проходящего конечный отрезок пути.* Перейдем теперь к рассмотрению гравитационного поля вблизи траектории импульса излучения. Это более сложный случай, чем случай стационарного пучка, поскольку создаваемое поле не будет теперь статическим, и поэтому нам придется явно использовать запаздывающие потенциалы, чтобы найти гравитационное возмущение, производимое движущимся пакетом.

Рассмотрим пакет длиной λ с линейной плотностью ρ и с пренебрежимо малым поперечным сечением. Будем считать, что он распространяется по оси x от точки $x=0$ до $x=l$. Эти точки

могут рассматриваться либо как положения излучателя и поглотителя соответственно, либо просто как точки, ограничивающие некий изучаемый отрезок пути луча, в пренебрежении эффектами от различных его частей, лежащих вне изучаемого отрезка. Мы будем также пренебрегать (как и прежде) малыми гравитационными эффектами, которые могут возникать от излучателя или поглотителя, а также от возможных изменений их состояния. Такого рода ограничения оказываются необходимыми, чтобы обеспечить существование решения задачи. В частности, ниже мы придем к выводу, что метод, использованный нами для разрешения поставленной задачи, применим лишь в том случае, когда траектория импульса имеет конечную длину.

Выберем для простоты временную шкалу так, чтобы в момент времени $t=0$ передний фронт импульса пересекал точку $x=0$. Тогда в любой более поздний момент времени передний фронт находится в точке $x=t$, а задний фронт — в точке $x=t-\lambda$, поскольку скорость распространения света принята равной единице.

Зададим теперь в непосредственной близости от траектории пакета некоторую точку и вычислим с помощью уравнения (112.5) гравитационное поле, создаваемое импульсом в этой точке к моменту времени t . Поскольку в указанном выражении для гравитационного поля следует использовать запаздывающие потенциалы, то будем считать, что в точке $x=a$ находится передний фронт импульса, а в точке $x=b$ — задний в тот момент времени, когда пакет создает гравитационное возмущение, достигающее точки x, y, z в момент времени t . Тогда с помощью (112.5) находим, что гравитационные потенциалы в точке x, y, z в момент времени t равны

$$\begin{aligned}
 -h_{11} &= -h_{44} = h_{14} = h_{41} = 4 \int \frac{[\rho] dV}{r} = \\
 &= \int_{u=b}^{u=a} \frac{4\rho du}{[(x-u)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} = 4\rho \ln \frac{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{1/2} - (x-a)}{[(x-b)^2 + y^2 + z^2]^{1/2} - (x-b)}.
 \end{aligned}
 \tag{114.1}$$

Для того чтобы вычислить интеграл, надо задать координаты a и b как функции времени t . Сделать это при нашем выборе точки начала отсчета времени очень просто, так как значение $a=x$ определяет не только положение переднего фронта импульса, когда он порождает гравитационное возмущение, достигающее точки наблюдения в момент времени t , но означает также и момент времени, в который это возмущение создается. Следова-

тельно, $(t-a)$ — это интервал времени, за который гравитационное возмущение проходит расстояние от переднего фронта импульса до точки наблюдения. Поскольку поле распространяется с единичной скоростью, имеем

$$(t-a)^2 = (x-a)^2 + y^2 + z^2.$$

Разрешая это соотношение относительно a , получаем

$$a = \frac{t^2 - x^2 - y^2 - z^2}{2(t-x)}. \quad (114.2)$$

Точно так же для b получаем выражение

$$b = \frac{(t-\lambda)^2 - x^2 - y^2 - z^2}{2(t-\lambda-x)}. \quad (114.3)$$

При нашей постановке задачи эти формулы для a и b , определяющие положения переднего и заднего фронтов пакета, применимы лишь в том случае, когда фронты находятся внутри исследуемого отрезка $x = (0, l)$. Так как пакет начинает проходить этот отрезок пути в момент времени $t=0$ и поскольку величина $[x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$ определяет, очевидно, время, за которое гравитационное возмущение распространяется от начальной точки до точки наблюдения x, y, z , мы должны в соответствии с нашей договоренностью полностью пренебречь гравитационным возмущением, создаваемым импульсом за время, предшествующее моменту $t = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$; поэтому положим

$$b = 0 \begin{cases} \text{от } t = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2} \\ \text{до } t = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2} + \lambda. \end{cases} \quad (114.4)$$

Точно так же, поскольку мы не принимаем во внимание гравитационное воздействие, производимое импульсом, когда он уже прошел точку $x=l$, будем считать, что

$$a = l \begin{cases} \text{от } t = l + [(l-x)^2 + y^2 + z^2]^{1/2} \\ \text{до } t = l + [(l-x)^2 + y^2 + z^2]^{1/2} + \lambda, \end{cases} \quad (114.5)$$

и полностью пренебрежем гравитационным воздействием, создаваемым в более поздние моменты времени.

Подставив теперь найденные выражения для a и b в (114.1), получим явный вид гравитационных потенциалов в точке x, y, z

в заданный момент времени t :

$$\begin{aligned}
 -h_{11} &= -h_{44} = h_{14} = h_{41} = \\
 &= 4\rho \ln \frac{t-x}{[x^2+y^2+z^2]^{1/2}-x} \quad \text{от } t = [x^2+y^2+z^2]^{1/2} \\
 &\hspace{15em} \text{до } t = [x^2+y^2+z^2]^{1/2} + \lambda, \\
 &= 4\rho \ln \frac{t-x}{t-\lambda-x} \left\{ \begin{array}{l} \text{от } t = [x^2+y^2+z^2]^{1/2} + \lambda \\ \text{до } t = l + [(l-x)^2+y^2+z^2]^{1/2}, \end{array} \right. \quad (114.6) \\
 &= 4\rho \ln \frac{[(l-x)^2+y^2+z^2]^{1/2} + (l-x)}{t-\lambda-x} \left\{ \begin{array}{l} \text{от } t = l + \\ \hspace{1em} + [(l-x)^2+y^2+z^2]^{1/2} \\ \text{до } t = l + \\ \hspace{1em} + [(l-x)^2+y^2+z^2]^{1/2} + \lambda. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Из этих выражений видно, почему наши вычисления справедливы лишь для конечных отрезков траектории. В случае траектории неограниченной протяженности второе из выражений для гравитационного потенциала, которое должно быть, очевидно, справедливым для любых моментов времени, на самом деле обращается в бесконечность в момент времени $t=x$, когда импульс проходит через точку наблюдения; это вступает в противоречие с примененным нами приближенным методом решения уравнений поля. При рассмотрении конечного отрезка траектории эта трудность исчезает, так как гравитационное воздействие учитывается лишь с момента времени $t=0$, т. е. с момента появления импульса в изучаемой области, который соответствует времени получения сигнала в точке наблюдения, равному

$$t = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}.$$

Таким образом, никаких бесконечностей в данном случае возникнуть не может.

Предыдущие выражения получены в предположении, что излучение распространяется строго в направлении оси x , и, следовательно, не учитывают возможных дифракционных эффектов на границе пакета.

б) *Скорость пробного луча света вблизи пакета.* Чтобы изучить природу найденного выше гравитационного поля светового импульса, надо определить скорость распространения пробных лучей в этом поле. Мы могли бы, очевидно, избрать тот же самый метод, что применялся в § 113, б в случае стационарного пучка, и получили бы, естественно, те же самые выражения, что

и в указанном параграфе. Однако смысл их, конечно, был бы отличным от прежнего, поскольку h_{11} выражается теперь формулой (114.6), а не (113.1), что позволило бы получить правильную зависимость скорости от координат и времени. Для пробных лучей, движущихся параллельно траектории импульса (и в том же направлении, что и импульс), мы пришли бы, очевидно, к прежнему выводу о том, что скорость пробных лучей все время равна единице, т. е. к выводу об отсутствии гравитационного воздействия импульса на такие лучи.

в) *Ускорение пробных частиц вблизи пакета.* Теперь найдем гравитационное ускорение, получаемое пробной частицей, помещенной вблизи от траектории светового пакета. Если считать, что частица вначале покоится, ускорение, как и выше в § 113, в, будет определяться уравнением

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{44}^\sigma = 0.$$

Однако символы Кристоффеля в настоящем нестационарном случае выглядят несколько сложнее, чем в предыдущей задаче. Тем не менее нетрудно получить в заданном приближении уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{ds^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{41}}{\partial t} + \frac{\partial h_{11}}{\partial x} - \frac{\partial h_{44}}{\partial x} \right), \\ \frac{d^2 y}{ds^2} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{44}}{\partial y}, \quad \frac{d^2 z}{ds^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{44}}{\partial z}. \end{aligned}$$

Подставим в эти уравнения выражения для гравитационных потенциалов (114.6), считая для простоты, что пробная частица вначале покоится в точке $z=0$. Тогда ускорение, получаемое частицей в направлении траектории импульса, будет определяться формулами

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= 2\rho \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{[x^2 + y^2]^{1/2}} \right) \begin{cases} \text{от } t = [x^2 + y^2]^{1/2} \\ \text{до } t = [x^2 + y^2]^{1/2} + \lambda, \end{cases} \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= 2\rho \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t-\lambda-x} \right) \begin{cases} \text{от } t = [x^2 + y^2]^{1/2} + \lambda \\ \text{до } t = l + [(l-x)^2 + y^2]^{1/2}, \end{cases} \end{aligned} \quad (114.7)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} =$$

$$= -2\rho \left(\frac{1}{t-\lambda-x} + \frac{1}{[(l-x)^2 + y^2]^{1/2}} \right) \begin{cases} \text{от } t = l - \\ - [(l-x)^2 + y^2]^{1/2} \\ \text{до } t = l + \\ + [(l-x)^2 + y^2]^{1/2} + \lambda. \end{cases}$$

А для ускорения частицы в направлении, нормальном к траектории, получим

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{-2\rho y}{[x^2 + y^2]^{1/2} ([x^2 + y^2]^{1/2} - x)} \begin{cases} \text{от } t = [x^2 + y^2]^{1/2} \\ \text{до } t = [x^2 + y^2]^{1/2} + \lambda, \end{cases}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \quad \begin{cases} \text{от } t = [x^2 + y^2]^{1/2} + \lambda \\ \text{до } t = l + [(l-x)^2 + y^2]^{1/2}, \end{cases} \quad (114.8)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{2\rho y}{[(l-x)^2 + y^2]^{1/2} \{[(l-x)^2 + y^2]^{1/2} + (l-x)\}} \begin{cases} \text{от } t = l + \\ + [(l-x)^2 + y^2]^{1/2} \\ \text{до } t = l + \\ + [(l-x)^2 + y^2]^{1/2} + \lambda. \end{cases}$$

Из этих выражений видно, что ускорение, параллельное траектории импульса, сначала направлено в ту же сторону, что и движение импульса, а затем в противоположную. Ускорение же, нормальное к траектории импульса, сначала направлено в сторону траектории, а затем от нее. Выводы оказались не очень прозрачными, поэтому, для того чтобы лучше понять, как происходит процесс гравитационного взаимодействия, найдем полный эффект, создаваемый движением импульса на участке траектории от $x=0$ до $x=l$.

Проинтегрируем выражения (114.7) по соответствующему интервалу времени. Сложив затем полученные результаты и сократив довольно много членов, найдем, что *покоящаяся* пробная частица приобретает ускорение, параллельное направлению распространения пакета; после прохождения пакетом выделенного участка ускорение, параллельное этому направлению, равно

$$\int \frac{d^2 x}{dt^2} dt = 2\rho\lambda \left\{ \frac{1}{[x^2 + y^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(l-x)^2 + y^2]^{1/2}} \right\}. \quad (114.9)$$

Используя же (114.8), получим для компоненты ускорения в сторону траектории пакета выражение

$$\int \frac{d^2 y}{dt^2} dt = -\frac{2\rho\lambda}{y} \left\{ \frac{x}{[x^2 + y^2]^{1/2}} + \frac{l-x}{[(l-x)^2 + y^2]^{1/2}} \right\}. \quad (114.10)$$

Обе формулы относятся к эффекту гравитационного воздействия только выделенной части траектории пакета от $x=0$ до $x=l$.

Если частица помещена в точку, равноудаленную от обоих концов рассматриваемого отрезка, эти общие выражения упрощаются и становятся аналогичными выражениям (113.10) и (113.11), полученным для стационарного пучка:

$$\int \frac{d^2x}{dt^2} dt = 0 \quad (114.11)$$

и

$$\int \frac{d^2y}{dt^2} dt = - \frac{2\rho\lambda l}{y \left[\left(\frac{1}{2} l \right)^2 + y^2 \right]^{1/2}}. \quad (114.12)$$

Последние формулы, определяющие полное ускорение неподвижных пробных частиц в направлениях, параллельном и перпендикулярном траектории пакета, представляют значительный интерес.

Во-первых, так как они определяют полное ускоряющее воздействие пакета на частицу за время прохождения пакетом отрезка пути длиной l , можно получить среднее ускорение $\bar{a}_{\text{пак}}$, если поделить выражение (114.12) на l . Сравнивая этот результат с выражениями для мгновенных ускорений пробной частицы $a_{\text{пучка}}$, занимающей то же положение, но получающей ускорение от стационарного пучка, имеющего ту же длину l , мы получим следующий общий результат:

$$\frac{\bar{a}_{\text{пак}}}{a_{\text{пучка}}} = \frac{\lambda\rho_{\text{пак}}}{l\rho_{\text{пучка}}} = \frac{m_{\text{пак}}}{m_{\text{пучка}}}. \quad (114.13)$$

Этот результат представляется вполне разумным с точки зрения наших обычных физических представлений. Уже указывалось, что гравитационное воздействие пучка на пробную частицу в *два раза* сильнее того, что следует из ньютоновской теории, если пучок излучения заменить материальным твердым стержнем той же плотности и той же длины. Поэтому полученный результат можно рассматривать как еще один пример, в котором излучение обладает большей эффективностью в смысле гравитационных воздействий по сравнению с распределением покоящегося вещества, которое можно считать эквивалентным этому излучению.

Во-вторых, следует обратить особое внимание на то, что, как следствие формул (114.9) и (114.11), полное ускорение, параллельное траектории импульса, направлено в сторону большего из двух отрезков траектории, на которые она делится точкой, в которой находится пробная частица, и ускорение равно нулю, когда частица равноудалена от обоих концов траектории. В последнем случае, как и при рассмотрении стационарного пучка, если частица не находится на пути пакета и не испытывает ни

светового давления, ни комптоновского воздействия, на частицу не действуют никакие силы в направлении движения пакета, так как гравитационные воздействия от различных частей траектории сокращаются.

§ 115. Гравитационное взаимодействие световых лучей и частиц

Предыдущий материал излагался столь подробно [73] потому, что он позволяет почувствовать природу гравитационного взаимодействия световых лучей и частиц.

Наиболее существенной чертой полученных результатов является то, что гравитационное ускорение пробной частицы, которое она получает от некоторой части пучка света, в рассмотренном приближении оказывается в *два раза* больше того, что дает ньютоновская теория для твердого стержня при том условии, что средняя плотность вещества, заполняющего в последнем случае траекторию, совпадает с той, которая создается при прохождении света. С подобным различием результатов мы сталкиваемся не впервые. В § 83, б было найдено, что гравитационное отклонение лучей света при прохождении через поле, создаваемое притягивающей частицей, также примерно в *два раза* больше соответствующего результата ньютоновской теории, найденного при замене светового луча материальной частицей.

Такое двухкратное появление множителя 2 позволяет нам обсуждать вопрос о взаимном гравитационном взаимодействии частиц и световых лучей, оставаясь в значительной степени (в первом приближении) в рамках обычных представлений о законе сохранения импульса, не прибегая к помощи релятивистских законов сохранения, связанных с псевдотензором t_{μ}^{ν} , описывающим потенциальные гравитационные импульсы и энергию.

Смысл приближенного сохранения обычного импульса станет более прозрачным, если разобрать один простой пример. Выше с помощью уравнения (114.12) мы нашли выражение для полного ускорения, обязанного некоторому отрезку l траектории светового пакета, для пробной частицы, помещенной на расстоянии y от траектории, в точке, равноудаленной от обоих концов отрезка l . Умножив это выражение на массу частицы M и обозначив массу светового пакета через $m = \rho l$, получим полный импульс, приобретаемый частицей в направлении оси y :

$$\int M \frac{d^2 y}{dt^2} dt = - \frac{2mMl}{y \left[\left(\frac{1}{2} l \right)^2 + y^2 \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (115.1)$$

С другой стороны, в согласии с § 83 мы можем считать, что коли-

чество движения, полученное пакетом, равно удвоенной величине эффекта, вычисленного на простой ньютоновской основе. Отсюда, учитывая, что скорость света приравнена единице, находим

$$\int m \frac{d^2 y}{dt^2} dt = \int_0^l \frac{2mMy}{\left[\left(\frac{1}{2}l - x\right)^2 + y^2\right]^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{2mMl}{y \left[\left(\frac{1}{2}l\right)^2 + y^2\right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (115.2)$$

Выражения (115.1) и (115.2) совпадают по абсолютной величине и противоположны по знаку, и мы видим здесь пример приближенного выполнения закона сохранения импульса, которое возникает без всякого учета импульса гравитационного поля.

Другой важный факт, установленный нами,— это то, что покоящаяся частица, равноудаленная от обоих концов рассматриваемого отрезка световой траектории, но расположенная вне ее, не получает после прохождения света никакого ускорения в направлении движения пакета. С точки зрения сохранения импульса это есть всего лишь утверждение, обратное более просто, именно, что свет, проходящий через поле покоящейся частицы между двумя точками, равноудаленными от этой частицы, не изменяет свой полный импульс. Такая обратная формулировка весьма важна для анализа астрономических наблюдений, а потому заслуживает отдельного рассмотрения.

Гравитационное поле, создаваемое покоящейся частицей, описывается, очевидно, сферически симметричным статическим интервалом

$$ds^2 = g_{11}(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + g_{44} dt^2 \quad (115.3)$$

(см., например, формулу (82.12), где g_{11} и g_{44} — функции лишь от r). Если рассмотреть теперь луч света, проходящий через это поле, то, благодаря статическому характеру интервала, последовательные пакеты, распространяющиеся вдоль данной траектории, будут затрачивать одинаковое время Δt , чтобы пройти расстояние между двумя данными точками r_1, θ_1, φ_1 и r_2, θ_2, φ_2 . Тогда два следующих друг за другом пакета, отдельных временным интервалом δt при пересечении первой из точек, будут разделены тем же интервалом δt и при пересечении второй точки. Далее, если эти точки равноудалены от рассматриваемой частицы ($r_1 = r_2$), то очевидно, что этот координатный временной интервал δt связан с собственным временным интервалом $\delta t_0 = \sqrt{g_{44}} \delta t$, одинаковым для локальных наблюдателей, находящихся в этих двух точках. Поэтому период и частота света, измеряемые наблюдателями, покоящимися в гравитационном поле рассматриваемой частицы, не будут изменяться при прохождении света от одной точки к другой, если значения гравитационного потенциала g_{44} в них одинаковы,— вывод,

который справедлив вообще для любых статических полей. Вспоминая соотношение между частотой и величиной полного импульса в направлении движения $g = hv/c$, мы убеждаемся еще раз в том, что полный импульс в направлении движения остается в этом опыте постоянным.

Этот вывод, конечно, справедлив лишь для статических полей. Возникает, однако, законный вопрос: не влияет ли возникающее движение частицы (которая первоначально покоилась и начала двигаться лишь под воздействием света) в свою очередь на поле, через которое свет еще должен пройти, и не приведет ли этот эффект второго порядка к изменению полного импульса в направлении движения? Точный анализ этого эффекта второго порядка оказывается весьма сложным. Можно, однако, рассуждать более грубо, считая, что гравитационные и световые возмущения распространяются с одной и той же фундаментальной скоростью. Тогда гравитационному возмущению от падающего элемента светового пучка трудно успеть прийти к частице и, изменив ее движение, изменить тем самым гравитационное поле в тех точках, через которые этот же элемент проходит в дальнейшем. Поэтому во всяком случае мы должны ожидать, что вклады второго порядка в полный импульс и частоту света, проходящего через гравитационное поле частицы, должны быть крайне малы по сравнению с поперечными (относительно направления движения импульса) эффектами первого порядка.

В качестве следствия обычно отмечают, что частота света, дающего отчетливые изображения удаленных астрономических объектов, не должна заметно изменяться при прохождении луча через гравитационные поля тел, встречающихся на его пути. Это заключение оказывается важным для интерпретации красного смещения света от внегалактических туманностей, поскольку, как указал Цвикки [74], гравитационное воздействие на частоту света, нереальное в силу приведенных соображений, могло бы в противном случае давать другое объяснение красному смещению, отличное от общепринятого объяснения, основанного на разбегании галактик.

§ 116. Обобщенный эффект Доплера

Закончим настоящую главу схематическим описанием важной проблемы: как воздействуют гравитационные поля и движения источника и наблюдателя на результаты измерений длин волн света.

Во-первых, для этого нам нужно знать вид интервала в области пространства, где происходит распространение света от источника к наблюдателю. Мы можем записать его в общем виде:

$$ds^2 = g_{11}dx^2 + 2g_{12}dx dy + \dots + 2g_{34}dz dt + g_{44}dt^2. \quad (116.1)$$

Во-вторых, нам нужно знать положения источника (x_1, y_1, z_1) и наблюдателя (x_2, y_2, z_2) как функции времени t :

$$(x_1, y_1, z_1) = f_1(t), \quad (116.2)$$

$$(x_2, y_2, z_2) = f_2(t). \quad (116.3)$$

Так как скорость света можно вычислить, если приравнять выражение для интервала (116.1) нулю, а траектории источника и наблюдателя определить выражениями (116.2) и (116.3), то можно вычислить момент приема t_2 наблюдателем светового импульса, испускаемого источником в некоторый заданный момент времени t_1 , как функцию этого времени t_1 , т. е. найти зависимость

$$t_2 = f(t_1). \quad (116.4)$$

Далее, дифференцируя эту формулу, можно получить выражение для временного интервала δt_2 , разделяющего моменты приема двух пакетов, как функцию от t_1 и от величины временного интервала δt_1 , разделяющего моменты испускания этих пакетов:

$$\delta t_2 = \frac{dt(t_1)}{dt_1} \delta t_1. \quad (116.5)$$

С помощью выражения для интервала (116.1) можно, однако, выразить собственный период пульсаций источника, измеряемый локальным наблюдателем, который движется вместе с ним:

$$\delta t_1^0 = \left[g_{11} \frac{dx^2}{dt^2} + 2g_{12} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \dots + g_{44} \right]_{x_1, y_1, z_1, t_1}^{\frac{1}{2}} \delta t_1. \quad (116.6)$$

Здесь $dx/dt, dy/dt, dz/dt$ — компоненты скорости источника в момент испускания излучения. Точно так же собственный период пульсаций приходящего сигнала, измеряемый вторым наблюдателем, который перемещается вместе с приемником, должен выглядеть так:

$$\delta t_2^0 = \left[g_{11} \frac{dx^2}{dt^2} + 2g_{12} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \dots + g_{44} \right]_{x_2, y_2, z_2, t_2}^{\frac{1}{2}} \delta t_2, \quad (116.7)$$

где теперь dx/dt и т. д. — компоненты скорости этого наблюдателя в момент приема сигнала.

Подставим (116.6) и (116.7) в (116.5) и заметим, что собственный период δt_1^0 излучателя можно считать пропорциональным обычно измеряемой длине волны света λ , испускаемого светящимся веществом; наблюдаемый собственный период δt_2^0 сигнала, приходящего к поглотителю, можно принять пропорциональным наблюдаемой длине волны $\lambda + \delta\lambda$. Отсюда следует, что для наблюдателя, достаточно удаленного от источника, искомое

отношение длины волны поглощаемого света к первоначальной длине волны имеет вид *)

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta t_2^0}{\delta t_1^0} = \frac{df(t_1)}{dt_1} \frac{\left[g_{11} \frac{dx^2}{dt^2} + 2g_{12} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \dots + g_{44} \right]_{x_2, y_2, z_2, t_2}^{1,2}}{\left[g_{11} \frac{dx^2}{dt^2} + 2g_{12} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \dots + g_{44} \right]_{x_1, y_1, z_1, t_1}^{1,2}}. \quad (116.8)$$

Этому общему выражению для сдвига длины световой волны можно придать конкретный вид, конечно, лишь тогда, когда известен вид гравитационного поля, соответствующего выбору определенного конкретного интервала (116.1), а также явный вид выражений (116.2) и (116.3), задающих движение излучателя и детектора.

Нужно также подчеркнуть, что из полученного выражения следует, что относительное изменение длины волны будет одним и тем же в любой части спектра. Необходимо также отметить, что найденное отношение длин — наблюдаемая величина, которая имеет одно и то же численное значение вне зависимости от вида употребляемых при вычислениях координат. Так, окончательный результат будет неизменным, если, прежде чем начать вычисления, преобразовать интервал к новым переменным — обстоятельству, которое, вероятно, не всегда учитывается. И наконец, заметим, что хотя окончательное выражение дает величину сдвига как функцию времени излучателя t_1 , можно, конечно, найти сдвиг как функцию времени получения сигнала t_2 , если мы знаем функцию (116.4).

Наше окончательное выражение можно рассматривать как уравнение для обобщенного эффекта Допплера. Действительно, величина его зависит не только от непосредственного эффекта движения источника и наблюдателя, изменяющего время прохождения света от одного объекта до другого; она зависит также от косвенного влияния этого движения, изменяющего соотношение между координатным временным интервалом и собственным временным интервалом, и, кроме того, от воздействия гравитационных потенциалов на величину скорости, с которой распространяется свет. Ниже, в главе X, мы используем изложенное рассмотрение обобщенного эффекта Допплера.

*) Поскольку скорость света мы определяем из условия $ds=0$, то полученное выражение оправдано в § 108 лишь для слабых электромагнитных возмущений. Вывод, основанный непосредственно на волновой оптике, можно найти у Лауэ [75].

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕРМОДИНАМИКА

ЧАСТЬ I

**РАСШИРЕНИЕ ТЕРМОДИНАМИКИ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ****§ 117. Введение**

При построении классической термодинамики фактически мы столкнулись с двумя ограничениями. Во-первых, мы молчаливо подразумевали, что изучаемые термодинамические системы покоятся относительно наблюдателя, и, во-вторых, считали, что системы либо вообще не испытывают воздействия гравитационных полей, либо поля эти настолько слабы и ограничены в пространстве, что можно пользоваться ньютоновой теорией тяготения и старыми, дорелятивистскими представлениями о природе пространства и времени. Для того чтобы избавиться от первого из этих ограничений, т. е. распространить термодинамическую теорию на движущиеся системы, нужно воспользоваться правилами преобразований из специальной теории относительности, которые позволяют сравнивать результаты измерений, производимых наблюдателями, произвольно движущимися относительно друг друга. Для того чтобы убрать и второе ограничение, т. е. сделать возможным теоретическое исследование термодинамических эффектов, вызываемых гравитационными полями любой интенсивности, а также изучение термодинамических свойств систем, размеры которых настолько велики, что кривизной пространства — времени пренебрегать уже нельзя, необходимо использовать более точную теорию гравитации и представления о природе пространства — времени, развитые в общей теории относительности.

В главе V было изложено обобщение термодинамики, впервые сделанное Планком и Эйнштейном в специальной теории относительности. При этом была не только получена термодинамическая теория движущихся систем, но также с помощью лоренцевых преобразований теплоты, работы, температуры и энтропии удалось глубже понять природу этих термодинамических величин. Введение же четырехмерной формулировки второго

закона термодинамики было первым шагом в направлении ковариантного обобщения.

В этой главе мы рассмотрим обобщение термодинамики в общей теории относительности и некоторые применения построенной таким образом релятивистской термодинамики. Для этого надо только обобщить развитую нами выше термодинамику специальной теории относительности путем, который кажется весьма простым и естественным. Поскольку релятивистская термодинамика была получена непосредственно из классической, можно быть уверенным в полученных результатах. Мы окончательно утвердимся в этом мнении, когда увидим на конкретных примерах, что выводы релятивистской термодинамики и релятивистской механики согласуются друг с другом.

Поскольку способы обобщения классической термодинамики как на базе специальной, так и на базе общей теории относительности почти очевидны и даже тривиальны, можно было бы ожидать, что заключения релятивистской термодинамики не должны качественно отличаться от заключений классической теории. Однако мы увидим, что из-за существенных различий между классическими и релятивистскими пространственно-временными представлениями в релятивистской термодинамике появляются качественно новые выводы. Это происходит тогда, когда размеры исследуемых систем настолько велики, что гравитационная кривизна становится существенной.

§ 118. Релятивистский аналог первого закона термодинамики

Первый закон классической термодинамики мы обычно выражаем в виде требования

$$\Delta E = Q - A. \quad (118.1)$$

Это соотношение можно рассматривать, во-первых, как закон сохранения энергии, поскольку оно связывает полное изменение энергии системы с количеством энергии, переданным через границу системы. Во-вторых, в этом соотношении отражено наличие двух способов передачи энергии — путем переноса ее тепловым потоком и за счет выполнения работы. Последнее обстоятельство окажется особенно важным для дальнейших применений второго закона термодинамики.

В релятивистской термодинамике, по аналогии с тем, как выводится классический первый закон, мы должны прежде всего удовлетворить общим принципам релятивистской механики, что, как мы уже видели в главе VII, приводит к нужному обобщению классических законов сохранения энергии и количества движения [76].

Напомним, что все законы сохранения релятивистской механики содержатся в уравнениях Эйнштейна

$$-\delta\pi T^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}, \quad (118.2)$$

связывающих тензор энергии — импульса с геометрией пространства — времени. Далее, мы знаем, что тензорная дивергенция правой части этого выражения тождественно равняется нулю. Поэтому уравнения поля сразу приводят к уравнениям механики, записанным в привычной форме, а именно:

$$(T^{\mu\nu})_{;\nu} = 0 \quad (118.3)$$

и

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_{\mu}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{1}{2} \mathfrak{E}_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} = 0. \quad (118.4)$$

Используя псевдотензорную плотность потенциальной энергии и импульса t_{μ}^{ν} , перепишем это выражение так, чтобы по виду оно совпадало с выражением классического закона сохранения энергии — импульса:

$$\frac{\partial (\mathfrak{E}_{\mu}^{\nu} + t_{\mu}^{\nu})}{\partial x^{\nu}} = 0. \quad (118.5)$$

Потребуем теперь, чтобы все термодинамические процессы подчинялись законам механики в форме (118.5); тем самым мы введем в термодинамику вместо классических законов сохранения энергии и импульса — релятивистские. Заметим, что в классической термодинамике закон сохранения импульса не было нужды использовать явным образом, поскольку она ограничивалась рассмотрением лишь покоящихся систем.

Для полной аналогии с классическим первым законом термодинамики нам нужно еще установить и в релятивистском случае различие между тепловым потоком и совершаемой работой. Однако решение этого вопроса пока придется отложить, так как существо этого различия станет ясным лишь в ходе релятивистского обобщения второго закона термодинамики.

§ 119. Релятивистский аналог второго закона термодинамики

Начнем с того, что выпишем четырехмерную формулировку второго закона термодинамики, данную в § 71 в *галилеевых координатах*:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\varphi_0 \frac{dx^{\mu}}{ds} \right) \delta x \delta y \delta z \delta t \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}. \quad (119.1)$$

Здесь φ_0 — собственная плотность энтропии в заданной точке в интересующий нас момент времени, измеряемая локальным

наблюдателем, покоящимся относительно термодинамической жидкости или рабочего вещества; dx^μ/ds — компоненты макроскопической «скорости» жидкости в данной точке в используемых координатах; δQ_0 — собственная теплота, измеряемая локальным наблюдателем, которая поступает в изучаемый элемент жидкости при собственной температуре T_0 за интервал времени наблюдения, входящий в формулу четырехмерного объема $\delta x \delta y \delta z \delta t$, а два знака — равенства и неравенства — относятся к случаям обратимых и необратимых процессов соответственно.

Кроме того, чтобы получить релятивистский аналог второго закона, надо привлечь обе фундаментальные идеи общей теории относительности, выражаемые принципом ковариантности и принципом эквивалентности. Согласно принципу ковариантности выбираемые аксиомы должны быть записаны в виде, общем для всех систем координат, во избежание неявных предположений, которые могут быть связаны с определенным выбором системы координат. Согласно же принципу эквивалентности эти аксиомы следует выбирать так, чтобы они совпадали с соответствующими выражениями специальной теории относительности при введении естественных координат в рассматриваемой точке.

Из сказанного вытекает, что корректное выражение второго закона термодинамики в общей теории относительности можно получить, просто записав формулу, найденную в специальной теории относительности (119.1), в ковариантном виде [77]:

$$\left(\varphi_0 \frac{dx^\mu}{ds}\right)_\mu \sqrt{-g} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}. \quad (119.2)$$

Вводя вектор энтропии

$$S^\mu = \varphi_0 \frac{dx^\mu}{ds}, \quad (119.3)$$

придадим (119.2) более компактную форму:

$$\mathfrak{C}_\mu^\mu \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}. \quad (119.4)$$

Последнее выражение удовлетворяет, очевидно, принципу ковариантности, поскольку оно является тензорным выражением ранга нуль, ибо $(\varphi_0 dx^\mu/ds)_\mu$ есть скаляр как свернутая ковариантная производная от вектора; величина $\sqrt{-g} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4$ есть скаляр, так как представляет собой элемент четырехмерного объема, выраженный в естественной мере*), и, наконец, величина $\delta Q_0/T_0$ — также скаляр, что очевидно ввиду ее независимости от

*) $\sqrt{-g}$ есть якобиан преобразования от прямоугольных координат, в которых элемент объема равен $\delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4$. (Прим. ред.)

конкретного задания системы координат. Полученное выражение удовлетворяет также принципу эквивалентности, так как, будучи записанным в естественных координатах любой заданной точки, оно переходит в формулу (119.1) специальной теории относительности (свернутую ковариантную производную $(\varphi_0 dx^\mu/ds)_\mu$ для этого надо заменить обычной дивергенцией, а величину $\sqrt{-g}$ положить равной единице).

Итак, выражение (119.2) удовлетворяет всем условиям, выполнения которых, как мы теперь знаем, надо потребовать, а потому оно может быть принято в качестве формулировки релятивистского второго закона термодинамики. Отметим, что эта формулировка не является единственной, так как можно построить другие, более сложные ковариантные выражения, которые в случае плоского пространства — времени также переходят в формулировку второго закона в специальной теории относительности. Следовательно, введенное выражение (119.2) надо рассматривать как постулат, о полной справедливости которого можно судить лишь на основе результатов наблюдений.

Подчеркнем все же, что мы выбрали разумный путь, приняв непосредственную ковариантную формулировку второго закона специальной теории относительности: наш предыдущий опыт ковариантной формулировки релятивистских выражений для пространственно-временного интервала и геодезических линий вселил в нас уверенность, что, когда такая процедура возможна, она приводит к правильному результату. Отметим также, что теоретические следствия, вытекающие из постулированного в таком виде релятивистского закона, не противоречат остальным результатам теории относительности. В частности, мы найдем такие примеры, когда выводы релятивистской термодинамики можно проверить методами одной только релятивистской механики.

В заключение заметим, что для практических приложений обычно выгоднее использовать следующую, эквивалентную (119.2), форму:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\varphi_0 \frac{dx^\mu}{ds} \sqrt{-g} \right) \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}, \quad (119.5)$$

которая выводится с помощью уравнения (46) из Приложения III.

§ 120. К интерпретации релятивистского второго закона термодинамики

Так как мы приняли, что релятивистский первый закон термодинамики есть просто другое выражение законов релятивистской механики, особенно важно ясно понять релятивистскую формулировку второго закона, так как именно второй закон определяет

характер релятивистской термодинамики. Попробуем детально разобраться в этом вопросе.

Прежде всего отметим, что различие между обратимыми и необратимыми процессами сохраняется и в релятивистской термодинамике из-за наличия двух знаков — равенства и неравенства — в выражении второго закона, причем первый из них относится к случаю обратимых процессов, а второй — к случаю необратимых.

Знак неравенства указывает также на то, что в случае необратимых процессов имеется различие между прямым и обратным течением времени, как и в обычной термодинамике. Действительно, формулировка второго закона термодинамики зависит от знака, приписываемого приращению координатного времени dx^4 , стоящему в левой части неравенства. Следовательно, если пренебречь возможностью флуктуаций, можно сказать, что принцип возрастания энтропии указывает на выделенное направление течения времени в релятивистской термодинамике, так же как и в классической. Это — полезное замечание в связи с тем, что для наглядности принципов теории относительности время часто представляют как четвертую ось, перпендикулярную обычному пространству; при этом теряются соображения (независимо от того, фундаментальны они или нет), на которых мы основываем направленность течения времени.

Следует также все время помнить, что существенно *макроскопический* и *феноменологический* характер термодинамических построений должен оставаться неизменным и при релятивистском обобщении теории. Всем величинам в релятивистской формулировке второго закона (119.2) следует придавать лишь чисто макроскопический смысл в соответствии с определенными эмпирическими рецептами, которые могут быть даны для измерения этих величин.

Так, φ_0 есть энтропия на единицу объема жидкости, измеренная в данной точке в данный момент времени локальным наблюдателем. Это — безусловно макроскопическая плотность в согласии с нашими воззрениями на природу энтропии и характеризует лишь достаточно крупные элементы жидкости, без связи с каким-либо микроскопическим анализом на уровне атомов и излучения.

Другой пример — это величины dx^μ/ds , компоненты четырехмерного вектора макроскопической «скорости» жидкости в некоторой точке и в некоторый момент времени. Так, величину dx^0/ds находят, наблюдая движение макроскопически выделенной точки в жидкости и определяя скорость изменения ее координаты x с помощью часов, движущихся вместе с данной точкой; dx^4/ds определяется по скорости изменения времени подобной координаты x^4 в данной точке с помощью тех же самых часов.

Аналогично, g есть детерминант, образованный из компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$, измеренных макроскопически. Последнее особенно существенно, поскольку у нас сейчас просто нет никаких соображений о том, каков смысл этого тензора с точки зрения атомной теории. Кроме того, произведение вида $\delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4$ означает макроскопически бесконечно малый элемент четырехмерного объема.

Обращаясь, наконец, к правой части анализируемого выражения, заметим, что T_0 следует рассматривать как абсолютную температуру жидкости, измеряемую с помощью обычных способов локальным наблюдателем, покоящимся в данный момент в жидкости в выбранной точке; δQ_0 — теплота (измеряемая этим же локальным наблюдателем), которая втекает в элемент жидкости с собственным объемом δv_0 за бесконечно малое собственное время δt_0 . Эти величины выбраны так, чтобы они определяли тот же четырехмерный объем (в естественных координатах), что и произведение $\delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4$. Тогда δQ_0 и T_0 сохраняют макроскопический характер теплоты и температуры старой термодинамики.

Очень важно подчеркнуть чисто макроскопический и феноменологический характер релятивистской термодинамики, так как это поможет избежать сложностей и неопределенностей, связанных с атомной точкой зрения, особенно в наше время, когда развитие атомной теории еще не завершилось. Такой эмпирический подход придает нам уверенность в правильности теории.

§ 121. К интерпретации теплоты в релятивистской термодинамике

В процессе придания второму закону термодинамики, найденному в специальной теории относительности, такого общего вида, который был бы пригоден для общей теории относительности, трудно сохранить точный смысл величины δQ_0 , стоящей в правой части формулы и обозначающей количество поглощаемой теплоты, измеренное локальным наблюдателем. Способ определения δQ_0 , приведенный выше, не свободен от произвола; поэтому мы поговорим сейчас об интерпретации этой величины [78].

Выпишем для этого релятивистский второй закон в его первоначальном виде (119.2):

$$\left(\varphi_0 \frac{dx^\mu}{ds} \right)_\mu \sqrt{-g} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}. \quad (121.1)$$

Предполагая известным смысл всех других величин в этом выражении, покажем с помощью принципа ковариантности, что δQ_0

всегда есть скаляр, величина которого пропорциональна величине $\delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4$ и не зависит никоим образом от системы координат.

В самом деле, во-первых, стоящие в (121.1) величины $(\varphi_0 dx^\mu/ds)_\mu$ и T_0 с необходимостью скалярны и значения их никак не связаны с выбором системы отсчета, поскольку первая из них — свернутая ковариантная производная от вектора, а относительно второй четко указано, как она может быть измерена локальным наблюдателем. Во-вторых, заметим, что величина $\sqrt{-g} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4$ также скалярна и численное ее значение пропорционально бесконечно малому элементу объема $\delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4$ и не зависит от выбора координатной системы, поскольку она является выражением четырехмерного объема в естественной мере. Таким образом, последняя не рассмотренная еще в этом выражении величина δQ_0 в соответствии с принципом ковариантности также должна быть скаляром, с численным значением, пропорциональным бесконечно малому элементу объема $\delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4$, и не должна зависеть от используемой системы координат так, чтобы постулированный нами закон, удовлетворяя требованию ковариантности, имел одинаковый смысл во всех системах координат.

Показав, что величина δQ_0 скалярна и значение ее не зависит от выбора системы координат, можно теперь определить ее значение в любой удобной в данном случае системе координат. Для этого зададим рассматриваемую точку в естественных координатах x, y, z, t ; из принципа эквивалентности следует, что такие координаты можно ввести всегда. В естественных координатах термодинамические законы, сформулированные с помощью специальной теории относительности, остаются справедливыми в малой окрестности изучаемой точки. Ковариантное дифференцирование в этих координатах сводится к обычному дифференцированию, а величина $\sqrt{-g}$ равняется единице, так что левая часть в выражении второго закона (121.1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \left(\varphi_0 \frac{dx^\mu}{ds} \right)_\mu \sqrt{-g} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 = & \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi_0 \frac{dx}{ds} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_0 \frac{dy}{ds} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi_0 \frac{dz}{ds} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi_0 \frac{dt}{ds} \right) \right] \delta x \delta y \delta z \delta t. \quad (121.2) \end{aligned}$$

Подставим сюда очевидные выражения

$$\frac{dx}{ds} = u_x \frac{dt}{ds}, \quad \frac{dy}{ds} = u_y \frac{dt}{ds}, \quad \frac{dz}{ds} = u_z \frac{dt}{ds},$$

где u_x, u_y и u_z — компоненты скорости жидкости, записанные в

обычном виде. Тогда правая часть (121.2) переписывается так:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi_0 \frac{dt}{ds} u_x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_0 \frac{dt}{ds} u_y \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi_0 \frac{dt}{ds} u_z \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi_0 \frac{dt}{ds} \right) \right] \delta x \delta y \delta z \delta t.$$

Однако согласно специальной теории относительности энтропия инвариантна относительно преобразований Лоренца, а следовательно, плотность энтропии должна содержать множитель лоренцева сокращения ds/dt , так что можно положить

$$\varphi = \varphi_0 \frac{dt}{ds},$$

где φ — плотность энтропии жидкости в выбранной нами системе координат. Производя эту подстановку, получаем вместо приведенного выше выражения

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} (\varphi u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\varphi u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\varphi u_z) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] \delta x \delta y \delta z \delta t,$$

что можно переписать следующим образом:

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} u_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} u_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} u_z + \right. \\ \left. + \varphi \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \delta x \delta y \delta z \delta t,$$

или в виде

$$\left[\frac{d\varphi}{dt} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{u} \right] \delta x \delta y \delta z \delta t,$$

где под полной производной $d\varphi/dt$ подразумевается скорость изменения плотности энтропии в точке, движущейся вместе с жидкостью.

Вводя обозначение δv для объема жидкости, совпадающего в данный момент с координатным элементом пространства $\delta x \delta y \delta z$, получаем

$$\left[\frac{d\varphi}{dt} \delta v + \varphi \frac{d}{dt} (\delta v) \right] \delta t = \frac{d}{dt} (\varphi \delta v) \delta t,$$

откуда находим окончательно

$$\left(\varphi_0 \frac{dx^\mu}{ds} \right)_\mu \sqrt{-g} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 = \frac{d}{dt} (\varphi \delta v) \delta t \quad (121.3)$$

в качестве выражения левой части релятивистского второго закона (121.1) в естественных координатах для данной точки.

Отсюда видно, что левая часть выражения для второго закона отразит то возрастание за время δt , которое совершится с энтро-

пией малого элемента жидкости, занимающей пространственный объем $\delta x \delta y \delta z$. Далее, в соответствии с принципом эквивалентности к данной малой системе можно применить специальную релятивистскую термодинамическую теорию и связать возрастание энтропии в этой системе с теплотой и температурой посредством соотношения

$$\frac{d}{dt} (\varphi \delta v) \delta t \geq \frac{\delta Q}{T}, \quad (121.4)$$

где δQ — теплота, поглощаемая этим элементом жидкости за время δt при температуре T , причем все эти три величины заданы в выбранной нами системе отсчета. Далее, так как отношение теплоты к температуре инвариантно при преобразованиях Лоренца, то мы можем считать

$$\frac{\delta Q}{T} = \frac{\delta Q_0}{T_0}, \quad (121.5)$$

где δQ_0 и T_0 — поглощаемая теплота и температура, которые измеряются локальным наблюдателем в системе собственных координат данного элемента жидкости.

Кроме того, в силу лоренцева сокращения элемента объема и лоренцева удлинения времени можно написать

$$\delta v \delta t = \delta v_0 \delta t_0, \quad (121.6)$$

где δv_0 — объем рассматриваемого элемента жидкости, измеренный в системе собственных координат, а δt_0 — отрезок собственного времени, за который происходит передача теплоты.

Итак, собирая все выражения (121.3) — (121.6), мы получим в естественных координатах соотношение

$$\left(\varphi_0 \frac{dx^\mu}{ds} \right)_\mu \sqrt{-g} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}, \quad (121.7)$$

совпадающее по форме с постулированным выше релятивистским вторым законом. При этом величина δQ_0 , стоящая в правой части, означает, как и полагается, теплоту (измеряемую локальным наблюдателем в данной точке в определенный момент времени), которая втекает в элемент жидкости, занимающий собственный объем δv_0 , за интервал собственного времени δt_0 . Пространственные и временные интервалы при этом определены так, что

$$\delta v_0 \delta t_0 = \delta v \delta t = \sqrt{-g} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4. \quad (121.8)$$

Соотношение (121.7) выделено нами с помощью естественных координат. Тем не менее, если вспомнить, что величина δQ_0 , как мы ранее установили, является скаляром, этот вывод становится справедливым для любой системы координат. В самом деле, мы

не накладывали никаких ограничений на форму рассматриваемого элемента жидкости, так как поглощаемая теплота для рассматриваемых масштабов величин зависит лишь от произведения объема на временной интервал.

Далее, так как δQ_0 — это теплота, поглощаемая определенным элементом жидкости, то, как и в обычной термодинамике, тепловой поток надо рассматривать относительно интересующих нас жидкости или рабочего вещества, а не относительно выбранной системы пространственных координат.

И наконец, чтобы избежать неопределенностей, которые могут возникать при интегрировании выражения второго закона, отметим еще одно обстоятельство. Именно, при интегрировании второго закона каждый бесконечно малый элемент теплоты, входящий в рассматриваемую систему, должен быть поделен на температуру в месте пересечения им границы, отделяющей систему от окружающей среды, — условие, которое накладывается и в обычной термодинамике. Следовательно, мы можем рассматривать δQ_0 и T_0 как величины, измеряемые обычным образом наблюдателями, которые находятся на границе изучаемого элемента жидкости.

§ 122. О применении в термодинамике сопутствующих систем координат

В предыдущем параграфе мы нашли, что тепловой поток, вообще говоря, следует рассматривать относительно изучаемой жидкости, а не в какой-либо другой системе координат. В этом случае самое удобное для термодинамики — выбрать систему координат так, чтобы компоненты «скорости» потока были везде все время равны нулю, т. е.

$$\frac{dx^1}{ds} = \frac{dx^2}{ds} = \frac{dx^3}{ds} = 0. \quad (122.1)$$

Такие системы координат принято называть *сопутствующими*; ими везде можно воспользоваться, так как их можно реализовать, задавая пространственную систему в виде сетки, построенной из отрезков, соединяющих близкие частицы, и перемещающейся вместе с жидкостью.

В сопутствующей системе координат следствия релятивистского второго закона становятся особенно простыми и понятными. Начнем с того, что формулировку закона (119.5), данную нами в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\varphi_0 \frac{dx^\mu}{ds} \sqrt{-g} \right) \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}, \quad (122.2)$$

легко упростить, пользуясь тем обстоятельством, что соотношение

(121.1) справедливо для всех точек жидкости, именно:

$$\frac{\partial}{\partial x^4} \left(\varphi_0 \frac{dx^4}{ds} \sqrt{-g} \right) \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}. \quad (122.3)$$

Кроме того, поскольку все координаты взаимно независимы, перепишем последнее соотношение в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x^4} \left(\varphi_0 \sqrt{-g} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \frac{dx^4}{ds} \right) \delta x^4 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}. \quad (122.4)$$

Эта форма записи имеет значительные преимущества. Во-первых, приравнивая элемент четырехмерного объема, расположенный в окрестности точки наблюдения, к выражению объема, записанному в естественной мере:

$$\delta v_0 dt_0 = \delta v_0 ds = \sqrt{-g} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4, \quad (122.5)$$

легко найти, что (122.4) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^4} (\varphi_0 \delta v_0) \delta x^4 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}, \quad (122.6)$$

где δv_0 означает собственный объем элемента жидкости, постоянно пребывающего в данной бесконечно малой области пространства $\delta x^1 \delta x^2 \delta x^3$, причем величина этого объема может быть определена в некоторый момент времени локальным наблюдателем, движущимся с этим элементом. И, во-вторых, можно, очевидно, представить последнее соотношение еще так:

$$\frac{\partial}{\partial t_0} (\varphi_0 \delta v_0) \delta t_0 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}, \quad (122.7)$$

где

$$\delta t_0 = \frac{dt_0}{dx^4} \delta x^4, \quad (122.8)$$

т. е. δt_0 — бесконечно малое приращение собственного времени, которое соответствует в любой момент приращению временной координаты δx^4 .

Формулировка второго закона в виде (122.6) оказывается весьма полезной, потому что содержит выражение скорости изменения собственной энтропии любого данного элемента жидкости по временной координате x^4 , которая определена во всех частях данной системы. Такой подход особенно полезен при рассмотрении конечных систем.

Форма записи (122.7) еще раз показывает справедливость нашей интерпретации δQ_0 . Действительно, левая часть в соотношении (122.7) отражает возрастание энтропии (с точки зрения локального наблюдателя), которое происходит за время δt_0 в элементе жидкости объема δv_0 . Но тогда из обычных принципов

термодинамики, которыми должен пользоваться локальный наблюдатель, вытекает, что δQ_0 — это количество теплоты, поглощаемое за это время данным элементом, с точки зрения этого наблюдателя. Но, с другой стороны, в соответствии с выражениями (122.5) и (122.8) имеем

$$\delta v_0 \delta t_0 = \sqrt{-g} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4, \quad (122.9)$$

что совпадает с определением объема этого элемента (121.8) и промежутка времени, который затрачивает наблюдатель при измерении величины δQ_0 .

Из формулировки второго закона (122.7) легко также видеть, что локальный наблюдатель, изучающий термодинамические свойства элемента жидкости в непосредственной близости от него, должен использовать те же методы измерения энтропии, теплоты и температуры и критерии обратимости и необратимости, которые уже известны из классической термодинамики. Последнее подкрепляет нашу уверенность в справедливости релятивистской термодинамики и объясняет нам, почему существенной разницы в предсказаниях классической термодинамики и релятивистской можно ожидать лишь в приложениях к большим участкам Вселенной.

ЧАСТЬ II

ПРИМЕНЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ

§ 123. Применение первого закона термодинамики к изменениям статического состояния системы

Приступим к изучению следствий, вытекающих из релятивистской термодинамики. Так как мы будем интересоваться прежде всего условиями статического термодинамического равновесия, то начнем с того, что выясним, какие ограничения накладывают принципы релятивистской механики на протекающие термодинамические процессы, не связанные с изменениями в окружающей среде.

Рассмотрим систему вместе с окружающей ее средой, которая находилась вплоть до некоторого начального момента «времени» x^4 в заданном статическом состоянии, так что в ней не происходило никаких изменений до времени x^4 . Предположим, что затем в системе происходят изменения, не сказывающиеся на состоянии окружающей среды. Пусть в результате этих изменений к моменту «времени» x''^4 система переходит в новое статическое состояние, после чего состояние системы от времениподобной координаты x^4 опять не зависит.

Так как по предположению этот переход не вызывает никаких изменений в окружающей среде, очевидно, что а) отсутствует

передача энергии или импульса между системой и окружающей средой, и б) распределение энергии и импульса в окружающей среде остается неизменным. Легко показать, однако, что эти условия выполняются лишь в том случае, когда процессы, происходящие внутри системы, не изменяют значений гравитационных потенциалов $g_{\mu\nu}$ и их первых и вторых производных $\partial g_{\mu\nu}/\partial x_\alpha$ и $\partial^2 g_{\mu\nu}/\partial x_\alpha \partial x_\beta$ на границе системы и вне ее.

Для того чтобы показать, что этого ограничения достаточно, чтобы энергия и импульс не передавались в систему из окружающей ее пространства, воспользуемся законом сохранения энергии — импульса конечных систем (88.2):

$$\frac{d}{dx^4} \iiint (\mathfrak{E}_\mu^4 + t_\mu^4) dx^1 dx^2 dx^3 = - \iint \left| \mathfrak{E}_\mu^1 + t_\mu^1 \right|_{x^1}^{x^{11}} dx^2 dx^3 - \\ - \iint \left| \mathfrak{E}_\mu^2 + t_\mu^2 \right|_{x^2}^{x^{12}} dx^1 dx^3 - \iint \left| \mathfrak{E}_\mu^3 + t_\mu^3 \right|_{x^3}^{x^{13}} dx^1 dx^2. \quad (123.1)$$

Слева здесь стоит скорость изменения импульса и энергии системы ($\mu=1, 2, 3, 4$), правую же часть можно рассматривать как поток импульса и энергии через границу, отделяющую систему от окружающей среды, при том условии, что мы, как обычно, используем координаты, в которых пределы интегрирования совпадают с граничной поверхностью, отделяющей систему от окружающего пространства.

Вплоть до начального момента x'^4 , с которого начинаются изменения в системе, левая часть уравнения (123.1) равна нулю, так как система по предположению находится в это время в некотором заданном статическом состоянии. Следовательно, правая часть этого уравнения также равняется нулю вплоть до момента времени x'^4 . Однако правая часть постоянна вне зависимости от значения x'^4 , поскольку величины

$$-8\pi \mathfrak{E}_\mu^v = \mathfrak{R}_\mu^v - \frac{1}{2} \mathfrak{R} g_\mu^v + \Lambda g_\mu^v \sqrt{-g} \quad (123.2)$$

и

$$16\pi t_\mu^v = -g_\mu^{\alpha\beta} \frac{\partial g}{\partial g^{\alpha\beta}} + g_\mu^v \mathfrak{E} + 2\Lambda g_\mu^v \sqrt{-g} \quad (123.3)$$

полностью определяются значениями тензора $g_{\mu\nu}$ и значениями первых и вторых его производных, а по предположению эти величины постоянны на границе, задающей пределы интегрирования в правой части уравнения (123.1). Последнее приводит к тому, что обе части уравнения остаются все время равными нулю и не происходит никакой передачи энергии или импульса между системой и окружающей средой.

Покажем, что требования постоянства потенциалов и первых и вторых их производных достаточно, чтобы не происходило никаких изменений в распределении энергии и импульса окружающей среды. Напомним, что согласно (123.2) тензор энергии — импульса однозначно определяется значениями гравитационных потенциалов $g_{\mu\nu}$ и их первых и вторых производных. Следовательно, если все эти величины остаются постоянными во всех точках границ рассматриваемой системы, то не будут изменяться и распределения энергии и импульса в окружающей среде.

Итак, подводя итоги, устанавливаем, что согласно принципам релятивистской механики или, что то же, согласно первому закону релятивистской термодинамики термодинамическая система может переходить из одного статического состояния в другое, не вызывая при этом никаких изменений в окружающей среде, если на гравитационные потенциалы и их первые и вторые производные в точках на границе системы и вне ее наложены условия

$$\delta g_{\mu\nu} = \delta \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) = \delta \left(\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) = 0. \quad (123.4)$$

§ 124. Применение второго закона термодинамики к изменениям статического состояния системы

В предыдущем параграфе мы нашли условия, аналогичные тем, что накладывались в классической термодинамике обычным первым законом, при которых возможно изменение статического состояния системы, не вызывающее никаких изменений в окружающей среде. Выясним теперь, какие ограничения на возможные изменения статического состояния накладывает в этом случае второй закон.

Этот вопрос наиболее просто решается в системе сопутствующих координат, которую мы определили в § 122. Во всяком случае координатная система должна двигаться вместе с рассматриваемой термодинамической системой и до и после внутреннего перехода, так как по предположению начальное и конечное состояния — статические. Если же пользоваться сопутствующей системой отсчета и в течение перехода, можно выразить ограничения, накладываемые вторым законом, в следующем простом виде (см. (122.3)):

$$\frac{\partial}{\partial x^4} \left(\varphi_0 \frac{dx^4}{ds} \sqrt{-g} \right) \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}. \quad (124.1)$$

Согласно (122.6) левую часть этого выражения можно рассматривать как приращение собственной энтропии за промежуток «времени» δx^4 , которое измеряется локальным наблюдателем

в элементе жидкости, занимающем «пространственную» область $\delta x^1 \delta x^2 \delta x^3$, а в соответствии с соотношением (122.7) правая часть этого выражения определяется теплотой, измеряемой локальным наблюдателем, которая поступает в этот элемент жидкости в течение бесконечно малого отрезка собственного времени δt_0 , соответствующего интервалу δx^4 .

Если это выражение для данного элемента жидкости проинтегрировать по всему интервалу от x'^4 до x''^4 , в течение которого происходит изменение состояния, то получим

$$\int_{x'^4}^{x''^4} \frac{\partial}{\partial x^4} \left(\varphi_0 \frac{dx^4}{ds} \sqrt{-g} \right) \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq \int_{x'^4}^{x''^4} \frac{\delta Q_0}{T_0}. \quad (124.2)$$

Здесь в левой части стоит полное изменение энтропии в изучаемом элементе объема, определяемое локальным наблюдателем, а в правой части (в соответствии с определением, данным в конце § 121) — сумма по всем элементам теплоты, проходящим через границу в рассматриваемый объем, причем каждый из элементов поделен на значение граничной температуры, определенное в момент пересечения границы и измеренное наблюдателем, находящимся на границе.

Если теперь выполнить второе интегрирование по всем элементам жидкости, составляющим рассматриваемую систему, то ясно, что в правой части (124.2) мы должны получить нуль:

$$\int_{x'^4}^{x''^4} \iiint \frac{\partial}{\partial x^4} \left(\varphi_0 \frac{dx^4}{ds} \sqrt{-g} \right) \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq 0, \quad (124.3)$$

так как по предположению мы интересуемся лишь такими переходами, при которых в целом не происходит передачи теплоты через границу системы, а наш способ определения Q_0 и T_0 должен приводить к взаимному уничтожению вкладов от соседних элементов внутри системы.

Таким образом, релятивистское второе начало термодинамики накладывает на переходы системы из одного статического состояния в другое, происходящие без изменений в окружающей среде, следующее условие:

$$\left[\iiint \varphi_0 \frac{dx^4}{ds} \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3 \right]_{x''^4} \geq \left[\iiint \varphi_0 \frac{dx^4}{ds} \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3 \right]_{x'^4}. \quad (124.4)$$

Индексы x'^4 и x''^4 указывают на то, что значения интегралов берутся для начального и конечного состояний системы соответственно.

Для того чтобы подчеркнуть аналогию этого выражения с тем, что мы имели в классической термодинамике, мы можем

его интерпретировать как условие, наложенное на «энтропию» S , в соответствии с которым при переходах системы из одного статического состояния в другое ее энтропия может лишь возрасть или оставаться постоянной. Под величиной S при этом надо понимать полную проинтегрированную собственную энтропию всех элементов жидкости, составляющих систему:

$$S = \iiint \varphi_0 \frac{dx^4}{ds} \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (124.5)$$

§ 125. Условия статического термодинамического равновесия

Пользуясь формулами, выведенными в предыдущих двух параграфах, мы можем теперь выразить условия статического термодинамического равновесия в конечной системе, которая не взаимодействует с окружающей средой, в виде вариационного уравнения

$$\delta \iiint \varphi_0 \frac{dx^4}{ds} \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3 = 0 \quad (125.1)$$

с дополнительными условиями на границе системы

$$\delta g_{\mu\nu} = \delta \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) = \delta \left(\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) = 0. \quad (125.2)$$

Первое из этих уравнений — условие максимальности рассматриваемого интеграла, вытекающее из второго закона термодинамики, который утверждает (см. (124.4)), что эта величина может лишь возрасть, если она вообще изменяется при переходе системы из данного статического состояния в другое статическое состояние (при условии, что система не взаимодействует с окружающей средой). Второй же набор уравнений, как мы уже отмечали в § 123, выражает условие, достаточное для того, чтобы при изменении внутреннего состояния системы взаимодействие с окружающей средой действительно отсутствовало.

§ 126. Статическое равновесие в случае сферически симметричного распределения жидкости

Если в жидкой системе действуют только силы гравитационного притяжения, то состояние статического равновесия должно быть состоянием, обладающим сферической симметрией. Мы специально рассмотрим этот случай, применив к нему полученные выше критерии равновесия. Начнем с того, что перепишем выражение для интервала (94.9):

$$ds^2 = -e^\mu(dx^2 + dy^2 + dz^2) + e^\nu dt^2, \quad (126.1)$$

где

$$\mu = \mu(r), \quad v = v(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (126.2)$$

а изотропные координаты x, y, z, t выбраны так, чтобы пределы интегрирования, включающие всю интересующую нас область, лежали бы на реальной граничной поверхности, отделяющей эту область от окружающей среды. Такого рода координаты были использованы в § 123 для получения условий (125.2). Используя выбранную выше форму интервала, мы имеем

$$\sqrt{-g} = e^{\frac{3}{2}\mu + \frac{1}{2}v} \quad \text{и} \quad \frac{dt}{ds} = e^{-\frac{1}{2}v}; \quad (126.3)$$

второе соотношение следует из равенства нулю пространственных компонент «скорости» рассматриваемой жидкости. Подставляя эти соотношения в (125.1) и учитывая (125.2) и (126.2), получаем условие статического термодинамического равновесия в виде

$$\delta \iiint \varphi_0 e^{\frac{3}{2}\mu} dx dy dz = 0 \quad (126.4)$$

при дополнительных условиях на границе области интегрирования

$$\delta\mu = \delta\mu' = \delta\mu'' = \delta v = \delta v' = \delta v'' = 0, \quad (126.5)$$

где штрихи означают дифференцирование по радиусу

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

При нахождении условий равновесия мы вводим координаты x, y, z, t , поскольку, как отмечалось выше, они того же типа, что применялись при получении соотношений (125.2). Для упрощения дальнейших рассмотрений лучше перейти к полярным координатам r, θ, φ, t . Прежде всего перепишем в этих координатах выражение для интервала:

$$ds^2 = -e^\mu (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + e^v dt^2, \quad (126.6)$$

$$\mu = \mu(r), \quad v = v(r).$$

Выбирая затем область интегрирования в виде сферического слоя, заключенного между радиусами r_1 и r_2 , перепишем условие статического равновесия в случае сферического распределения жидкости следующим образом:

$$\delta \int_{r_1}^{r_2} 4\pi \varphi_0 e^{\frac{3}{2}\mu} r^2 dr = 0 \quad (126.7)$$

при дополнительных условиях

$$\delta\mu = \delta\mu' = \delta\mu'' = \delta v = \delta v' = \delta v'' = 0 \quad (\text{в точках } r_1 \text{ и } r_2). \quad (126.8)$$

Чтобы можно было применить критерий (126.7), надо задать в явном виде зависимость подинтегрального выражения от формы интервала и от состава жидкости.

Для этого, во-первых, перепишем выражения (95.15) для собственного давления p_0 и собственной макроскопической плотности ρ_{00} жидкости в соответствии с принятой выше формой интервала:

$$\begin{aligned} 8\pi p_0 &= e^{-\mu} \left(\frac{\mu'^2}{4} + \frac{\mu'v'}{2} + \frac{\mu' + v'}{r} \right), \\ 8\pi p_0 &= e^{-\mu} \left(\frac{\mu''}{2} + \frac{v''}{2} + \frac{v'^2}{4} + \frac{\mu' + v'}{2r} \right), \\ 8\pi \rho_{00} &= -e^{-\mu} \left(\mu'' + \frac{\mu'^2}{4} + \frac{2\mu'}{r} \right), \\ \frac{dp_0}{dr} &= -\frac{\rho_{00} + p_0}{2} v'. \end{aligned} \tag{126.9}$$

Во-вторых, воспользуемся формулой (51) из Приложения III, которая определяет бесконечно малый собственный пространственный объем жидкости, расположенный между радиусами r и $r+dr$:

$$v_0 = 4\pi e^{\frac{3}{2}\mu} r^2 dr. \tag{126.10}$$

С ее помощью выразим собственную энтропию этого сферического слоя жидкости, определяемую локальным наблюдателем, в следующем виде:

$$S_0 = 4\pi \rho_0 e^{\frac{3}{2}\mu} r^2 dr. \tag{126.11}$$

Обе величины, введенные с помощью (126.10) и (126.11), естественно, являются бесконечно малыми. Далее, отметим, что собственная энтропия элемента жидкости зависит от собственной его энергии, объема и состава тем же самым образом, что и в классической термодинамике (ср. с (60.4)). Следовательно, когда нам надо будет вводить вариацию выражения (126.11) в условие равновесия (126.7), мы сможем написать:

$$\delta S_0 = \frac{1}{T_0} \delta E_0 + \frac{p_0}{T_0} \delta v_0 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial n_1} \right)_{E_0, v_0} \delta n_1 + \dots + \left(\frac{\partial S_0}{\partial n_n} \right)_{E_0, v_0} \delta n_n, \tag{126.12}$$

где T_0 — собственная температура данного слоя жидкости, измеряемая локальным наблюдателем; E_0 — собственная энергия этого слоя; n_1, n_2 и т. д. — концентрации различных веществ, выраженные в молях, определяющие состав жидкости. Далее, согласно

(126.9) будем считать, что δE_0 в этом соотношении имеет вид

$$\begin{aligned} \delta E_0 &= \delta \left(4\pi\rho_{00} e^{\frac{3}{2}\mu} r^2 dr \right) = - \left[\frac{e^{\frac{1}{2}\mu}}{2} \left(\delta\mu'' + \frac{\mu'}{2} \delta\mu' + \frac{2}{r} \delta\mu' \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{\frac{1}{2}\mu}}{4} \left(\mu'' + \frac{\mu'^2}{4} + \frac{2\mu'}{r} \right) \delta\mu \right] r^2 dr = \\ &= \left[- \frac{e^{\frac{1}{2}\mu}}{2} \left(\delta\mu'' + \frac{\mu'}{2} \delta\mu' + \frac{2}{r} \delta\mu' \right) + 2\pi\rho_{00} e^{\frac{3}{2}\mu} \delta\mu \right] r^2 dr, \quad (126.13) \end{aligned}$$

а δv_0 , в соответствии со (126.10), равняется

$$\delta v_0 = \delta \left(4\pi e^{\frac{3}{2}\mu} r^2 dr \right) = 6\pi e^{\frac{3}{2}\mu} \delta\mu r^2 dr. \quad (126.14)$$

Тогда, подставляя найденные выражения в (126.11), окончательно находим

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial n_i} \right)_{E_0, v_0} \delta n_i = 4\pi \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial c_i^0} \right)_\mu \delta c_i^0 e^{\frac{3}{2}\mu} r^2 dr, \quad (126.15)$$

где $(\partial \Phi_0 / \partial c_i^0)_\mu$ — частная производная от собственной плотности энтропии по концентрации i -й компоненты, взятая при постоянной плотности энергии и постоянном удельном объеме; последнее обстоятельство в правой части обозначено подстрочным индексом μ , так как плотность энергии и удельный объем определяются величиной μ и ее производными.

Используя эти соотношения, мы можем переписать полученное ранее условие равновесия (126.7) в виде

$$\int_{r_1}^{r_2} \left[- \frac{e^{\frac{1}{2}\mu}}{2T_0} \left(\delta\mu'' + \frac{\mu'}{2} \delta\mu' + \frac{2}{r} \delta\mu' \right) + \frac{2\pi\rho_{00} + 6\pi\rho_0}{T_0} e^{\frac{3}{2}\mu} \delta\mu + \right. \\ \left. + 4\pi \sum_i \frac{\partial \Phi_0}{\partial c_i^0} \delta c_i^0 e^{\frac{3}{2}\mu} \right] r^2 dr = 0.$$

Упростим это выражение обычным способом: проинтегрируем его по частям и опустим члены, обращающиеся в нуль из-за граничных условий; в самом деле, подставляя

$$\delta\mu'' = \frac{d}{dr} (\delta\mu'), \quad \delta\mu' = \frac{d}{dr} (\delta\mu)$$

и используя граничные условия (126.8)

$$\delta\mu' = \delta\mu = 0 \quad (\text{при } r, \text{ равном } r_1 \text{ и } r_2),$$

нетрудно найти, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \left[-\frac{d}{dr} \left\{ e^{\frac{1}{2}\mu} r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{T_0} \right) \right\} + \frac{4\pi(\rho_{00} + 3\rho_0)}{T_0} e^{\frac{3}{2}\mu} r^2 \right] \delta\mu dr + \\ + \int_{r_1}^{r_2} 8\pi \sum_i \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial c_i^0} \right)_\mu \delta c_i^0 e^{\frac{3}{2}\mu} r^2 dr = 0. \quad (126.16)$$

Это и есть записанное в окончательном виде условие термодинамического равновесия для жидкой сферы.

В процессе получения этого выражения мы убедились в том, что вариации собственной энергии δE_0 и собственного объема δv_0 , появляющиеся в (126.12), обе внесли вклад в вариацию метрической переменной μ ; вариации же количества молей различных компонент δn_i , входящих в состав рассматриваемой жидкой оболочки, ограниченной радиусами r и $r+dr$, приводят к вариациям δc_i^0 , которые определяют изменения концентрации для каждого значения r . Так как E_0 и v_0 первоначально были введены как переменные, которые не зависят от значений n_i , определяющих состав, можно, очевидно, считать, что вариация $\delta\mu$ в уравнении (126.16) не зависит от δc_i^0 .

§ 127. Химическое равновесие в гравитирующей жидкой сфере

Теперь мы применим общее условие равновесия, полученное в предыдущем параграфе, к исследованию химического равновесия между реагирующими веществами, которые находятся внутри гравитирующей жидкой сферы. Поскольку вариации $\delta\mu$ и δc_i^0 в (126.16) следует рассматривать как независимые, ясно, что второй интеграл в этом выражении можно считать равным нулю, а это возможно лишь при условии

$$\sum_i \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial c_i^0} \right)_\mu \delta c_i^0 = 0, \quad (127.1)$$

которое должно выполняться для любого значения r . Индекс μ в этом выражении указывает на то, что дифференцирование производится при постоянных значениях плотности энергии и удельного объема. Сравнивая (127.1) с (60.15), убеждаемся в том, что полученное соотношение совпадает с классическим

условием химического равновесия, если считать, что плотность энтропии и значения концентраций измеряются локальным наблюдателем, покоящимся в рассматриваемой жидкости. Таким образом, с точки зрения локального наблюдателя, условие химического равновесия между реагирующими веществами в любой точке гравитирующей жидкой сферы не отличается от найденного ранее в классической термодинамике.

Это еще один пример того, как часто релятивистский анализ, проводимый методом введения локального наблюдателя, дает те же выводы, что и классическая теория. Правда, этого и следовало ожидать, поскольку в аксиоматическую основу общей теории относительности с самого начала был заложен принцип эквивалентности, и им вполне надежно можно руководствоваться в тех случаях, когда мы уверены, что рассматриваемое явление не зависит от производных от $g_{\mu\nu}$ выше первой.

Выяснение того обстоятельства, что положение в гравитационном поле прямо не влияет на условия химического равновесия, весьма важно, так как при рассмотрении моделей звезд это обычно принимают без доказательства. В качестве следствия этого обстоятельства, отметим, что полученные ранее критерии равновесия между водородом и гелием, а также между веществом и излучением применимы и к звездам. Следовательно, трудности, с которыми мы столкнулись при нахождении относительных концентраций, остаются и здесь. Мы убедимся в последней главе, что условия химического равновесия в статических космологических моделях подобны обсужденным в этом параграфе.

§ 128. Тепловое равновесие в гравитирующей жидкой сфере

Мы можем также использовать общее условие термодинамического равновесия, полученное в § 126, для исследования распределения температуры в жидкой сфере, которая пришла в состояние теплового равновесия. Воспользуемся опять-таки тем, что вариации $\delta\mu$ и δc_i^0 в (126.16) следует считать независимыми. Тогда можно сделать вывод, что первый интеграл в этом выражении равен нулю. Последнее, однако, может выполняться лишь при том условии, что во всех точках внутри сферы имеет место соотношение

$$\frac{d}{dr} \left\{ e^{\frac{1}{2}\mu} r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{T_0} \right) \right\} = \frac{4\pi(\rho_{00} + 3p_0)}{T_0} e^{\frac{3}{2}\mu} r^2. \quad (128.1)$$

Чтобы представить соотношение (128.1) в виде, удобном для интегрирования, преобразуем его правую часть: подставим из (126.9) в сумму $(\rho_{00} + 3p_0)$ выражение для ρ_{00} , а $3p_0$ заменим

первым выражением для p_0 и удвоенным вторым выражением для p_0 . В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left\{ e^{\frac{1}{2}\mu} r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{T_0} \right) \right\} &= \frac{1}{2}\mu \left(\frac{v''}{2} + \frac{v'^2}{4} + \frac{\mu'v'}{4} + \frac{v'}{r} \right) r^2 = \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}v}}{T_0} \frac{d}{dr} \left\{ e^{\frac{1}{2}\mu} r^2 \frac{d}{dr} \left(e^{\frac{1}{2}v} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (128.2)$$

Первый интеграл этого уравнения, очевидно, выглядит так:

$$e^{\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}v} r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{T_0} \right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\mu}}{T_0} r^2 \frac{d}{dr} \left(e^{\frac{1}{2}v} \right) + B,$$

где B — постоянная интегрирования. Это выражение можно переписать в эквивалентной форме:

$$\frac{d \ln T_0}{dr} = -\frac{1}{2} \frac{dv}{dr} - \frac{Be^{-\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}v}}{r^2 T_0}. \quad (128.3)$$

Соответствующие подстановки из (126.9) позволяют привести его к виду

$$\frac{d \ln T_0}{dr} = \frac{1}{\rho_{00} + p_0} \frac{dp_0}{dr} - \frac{Be^{-\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}v}}{r^2 T_0}.$$

Далее, если из физических соображений следует, что в центре сферы (при $r=0$) производные dT_0/dr и dp_0/dr равны нулю, а T_0 отлична от нуля и остальные функции r конечны, то ясно, что постоянную B следует приравнять нулю. Тогда последнее выражение для зависимости собственной температуры от координаты внутри статической жидкой сферы, находящейся в тепловом равновесии, задается следующими уравнениями:

$$\frac{d \ln T_0}{dr} = -\frac{1}{2} \frac{dv}{dr}, \quad (128.4)$$

$$\frac{d \ln T_0}{dr} = \frac{1}{\rho_{00} + p_0} \frac{dp_0}{dr}, \quad (128.5)$$

и после второго интегрирования в виде соотношения

$$T_0 e^{\frac{1}{2}v} = T_0 \sqrt{g_{44}} = C, \quad (128.6)$$

где C — еще одна постоянная интегрирования.

Любопытно было бы, конечно, исследовать, возможны ли физически интересные решения при отличной от нуля постоянной интегрирования B . Однако очевидно, что найденные простые соотношения вполне пригодны в случае обычных непрерывных распределений.

Первое, что мы отметим, подводя итоги,— это тот важный вывод, что собственная температура жидкости, измеряемая локальным наблюдателем, использующим обычные методы тепловых измерений, не может быть постоянной повсюду в жидкой сфере, которая находится в состоянии теплового равновесия; напротив, собственная температура зависит от значения гравитационного потенциала в данной точке, увеличиваясь по мере приближения к центру сферы. Этот вывод, конечно, очень отличается от классического, данного в § 61, согласно которому однородная температура есть необходимое условие теплового равновесия. Напомним, однако, что с точки зрения теории относительности все формы энергии обладают весом, так же как и массы. Тогда заключение о том, что необходим температурный градиент для того, чтобы отсутствовал тепловой поток из областей с более высоким гравитационным потенциалом в области с более низкими его значениями, кажется вполне естественным [79].

Второе обстоятельство, которое надо отметить,— это то, что реальное воздействие гравитации на вид равновесного распределения температуры должно быть крайне малым, исключая случай сверхсильных полей. Так, в поле с интенсивностью, равной интенсивности гравитационного поля Земли у ее поверхности, изменение температуры при перемещениях в радиальном направлении очень мало:

$$\frac{d \ln T}{dr} \approx - 10^{-18} \text{ см}^{-1}. \quad (128.7)$$

Таким образом, становится понятным, почему до сих пор не удалось получить никаких данных о влиянии гравитационного поля на тепловой поток.

В действительности не ясно, достаточно ли велики эти новые эффекты, чтобы их стоило учитывать, даже в теории звездных структур. В самом деле, нетрудно установить с помощью (128.5), что относительное повышение температуры по мере приближения к центру сферы, находящейся в состоянии теплового равновесия, меньше относительного повышения давления; оно даже много меньше для обычного вещества, плотность которого ρ_{00} велика по сравнению с давлением p_0 . Тем не менее возможно, что новые критерии теплового равновесия все же окажутся полезными в связи с неоднородными космологическими моделями, в которых происходят процессы теплового обмена между различными частями.

Третье замечание в связи с результатами этого параграфа состоит в том, что связь между температурой и гравитационным потенциалом можно получить с помощью одних только принципов механики для случая распределения абсолютно черного излучения. Так, для сферически симметричного распределения абсолютно черного излучения, которое можно представить себе, например, как излучение, окружающее гравитирующую сферу из плотного вещества, можно заключить из уравнений (126.9), что давление должно повышаться во внутренних слоях, чтобы компенсировать вес излучения. Уравнения механики (126.9) позволяют найти связь между скоростями возрастания этих величин, а именно:

$$\frac{dp_0}{dr} = - \frac{\rho_{00} + p_0}{2} \frac{dv}{dr}. \quad (128.8)$$

Излучение черного тела характеризуется, однако, еще и законом Стефана — Больцмана (§ 65), связывающим непосредственно механические величины, плотность и давление, с термодинамической величиной — температурой:

$$\begin{aligned} \rho_{00} &= aT_0^4 \\ p_0 &= \frac{a}{3} T_0^4, \end{aligned} \quad (128.9)$$

где a — так называемая постоянная Стефана. Подставляя эти выражения в (128.8), сразу получаем уже известное нам соотношение между температурой и гравитационным потенциалом:

$$\frac{d \ln T_0}{dr} = - \frac{1}{2} \frac{dv}{dr}. \quad (128.10)$$

Такая конкретная проверка общего соотношения, для получения которого привлекался весь аппарат релятивистской термодинамики, дополнительно убеждает нас, что обобщение термодинамики на основе общей теории относительности выполнено нами вполне корректным образом.

В заключение напомним, что все результаты этого параграфа найдены для специального случая статического сферически симметричного распределения жидкости. Заметим также, что за величину ν в условии теплового равновесия (128.10) можно принять ν , входящую в выражение (95.14), которое было принято для интервала специального вида. Можно также отождествить ее с ν из (95.12), так как в § 94 было показано, что величина ν не изменяется при переходе от одной формулы к другой.

§ 129. Тепловое равновесие в статическом поле общего типа

Выясним теперь, каковы условия теплового равновесия в более общем статическом поле, создаваемом, например, некоторой твердой структурой. В этом случае конечное стабильное состояние вовсе не обязано характеризоваться сферической симметрией [72]. Чтобы найти условия теплового равновесия в таком поле, предположим, что части системы, температуры которых мы хотим сравнить, находятся в тепловом контакте благодаря малым трубкам, которые содержат черное излучение, или же могут быть приведены в тепловой контакт неким другим способом без существенных изменений свойств системы. Такие трубки можно было бы называть радиационными термометрами; определяя изменение радиационного давления от одного конца трубки до другого, мы можем определить равновесное распределение температуры в системе.

Будем считать, что интервал задан общей, справедливой в статическом случае, формулой

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j + g_{44} dt^2, \quad (129.1)$$

причем условимся для пространственных координат пользоваться латинскими индексами, в прочих же случаях будем употреблять греческие индексы. В соответствии с обычным определением статической системы будем считать потенциалы g_{14} , g_{24} и g_{34} равными нулю, а остальные g_{ij} и g_{44} — зависящими неким произвольным образом от пространственных координат x^1 , x^2 и x^3 , но не от временной координаты t . Заметим также, что при нашем выборе интервала потенциал g_{44} обладает следующим простым свойством:

$$g^{44} = \frac{1}{g_{44}}. \quad (129.2)$$

Найдем, пользуясь формулами из § 109, тензор энергии — импульса черного излучения для поля, описываемого интервалом (129.1). Искомое выражение имеет, очевидно, вид

$$T^{\mu\nu} = (\rho_{00} + p_0) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g^{\mu\nu} p_0 \quad (129.3)$$

при дополнительном условии

$$\rho_{00} = 3 p_0. \quad (129.4)$$

Далее, замечая, что в случае статической системы полная макроскопическая скорость радиационного потока должна

равняться нулю, пишем

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{dx^j}{ds} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (129.5)$$

При данном выборе интервала четвертая компонента «скорости» имеет вид

$$\frac{dx^4}{ds} = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} = \sqrt{g^{44}}. \quad (129.6)$$

Подставив два последних выражения в (129.3), найдем единственные неисчезающие компоненты тензора энергии — импульса:

$$T^{ij} = -g^{ij}p_0, \quad T^{44} = g^{44}\rho_{00}. \quad (129.7)$$

Опуская индекс, получаем

$$\begin{aligned} T_j^i &= g_{j\alpha} T^{i\alpha} = -g_{j\alpha} g^{i\alpha} p_0 = -g_j^i p_0, \\ T_4^4 &= g_{44} T^{44} = g_{44} g^{44} \rho_{00} = \rho_{00}. \end{aligned}$$

Таким образом, единственными неисчезающими компонентами смешанного тензора энергии — импульса являются

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p_0, \quad T_4^4 = \rho_{00}. \quad (129.8)$$

Теперь мы полностью готовы к тому, чтобы с помощью законов релятивистской механики, записанных в их обычной форме

$$\frac{\partial \mathfrak{z}_{\mu}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{1}{2} \mathfrak{z}^{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} = 0,$$

вычислить давление в нашем радиационном термометре. Положив в последнем уравнении $\mu=1$ и подставив в него выражения (129.7) и (129.8), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^1} (-p_0 \sqrt{-g}) - \frac{1}{2} (-g^{ij} p_0 \sqrt{-g}) \frac{\partial g_{ij}}{\partial x} - \\ - \frac{1}{2} (g^{44} \rho_{00} \sqrt{-g}) \frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} = 0, \end{aligned}$$

что можно, очевидно, переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} \frac{\partial p_0}{\partial x^1} + p_0 \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^1} - \frac{1}{2} p_0 \sqrt{-g} \left(g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} + g^{44} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} \right) + \\ + \frac{1}{2} (\rho_{00} + p_0) \sqrt{-g} g^{44} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение, однако, легко упростить с помощью соотношения (39) из Приложения III:

$$g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} + g^{44} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^1} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^1},$$

которое позволяет сократить второй и третий члены в основном уравнении и приводит к результату

$$\frac{\partial p_0}{\partial x^1} + \frac{p_{00} + p_0}{2} g^{44} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} = 0.$$

Привлекая еще (129.2) и (129.4), получаем зависимость давления в радиационном термометре от координаты x^1 в следующем простом виде:

$$\frac{\partial \ln p_0}{\partial x^1} + 2 \frac{\partial \ln g_{44}}{\partial x^1} = 0. \quad (129.9)$$

Так как подобные соотношения легко найти и для других пространственных координат, можно обобщить эту зависимость радиационного давления от координат, выразив ее в чрезвычайно компактной форме:

$$p_0 (g_{44})^2 = \text{const.}$$

Если же подставить сюда давление p_0 , пользуясь законом Стефана — Больцмана

$$p_0 = \frac{1}{3} a T_0^4,$$

то немедленно найдем искомое выражение для зависимости собственной температуры от положения в произвольном статическом поле:

$$T_0 \sqrt{g_{44}} = C, \quad (129.10)$$

где величина C одинакова для всех частей системы.

Сделаем несколько замечаний, касающихся этого окончательного простого результата.

Во-первых, сравнивая его с (128.6), убеждаемся в том, что условия теплового равновесия в жидкой сфере можно рассматривать как частный случай общего выражения, найденного для произвольного статического поля. Поскольку первый результат был получен из принципов релятивистской термодинамики, а второй — с помощью лишь законов механики (не считая использования закона Стефана — Больцмана в окончательном выражении), их тождественность еще раз подтверждает справедливость новой термодинамики. Аналогичный факт отмечался в конце предыдущего параграфа.

Во-вторых, следует отметить, что избранный нами метод исследования позволил доказать постоянство произведения $T_0 \sqrt{g_{44}}$ лишь для точек, находящихся внутри радиационного термометра. Однако, так как T_0 и g_{44} — безусловно непрерывные функции от координат внутри термометра, этот результат можно распространить и на саму систему в областях ее контакта с термометром.

Отметим еще одно обстоятельство. Выше молчаливо допускалось, что в изучаемую систему можно ввести радиационный термометр, связывающий ее отдельные части, температуры которых мы хотим сравнить, не вызывая при этом существенных возмущений в самой системе. Однако было бы теперь весьма уместным подкрепить это предположение какими-нибудь доводами. Рассмотрим для примера гравитационную систему, содержащую твердые тела. Если мы желаем узнать внутреннюю их температуру с помощью описанного выше метода, в этих телах надо прорезать щели для введения радиационных термометров. Это неизбежно приведет к некоторым изменениям гравитационных потенциалов $g_{\mu\nu}$, которые непосредственно связаны с распределениями вещества и энергии в системе. Однако так как уравнения являются дифференциальными:

$$-\delta\pi T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu},$$

и выражают распределения вещества и энергии через тензор $g_{\mu\nu}$ и его первые и вторые производные, то вполне разумно предполагать, что термометры малых размеров не приводят к серьезным изменениям величин $g_{\mu\nu}$. Было бы, конечно, полезно продолжить исследование этого вопроса, так как могут существовать какие-то интересные исключения.

И наконец, заметим, что несмотря на то, что в гравитационной системе, находящейся в состоянии теплового равновесия, собственная температура T_0 изменяется от точки к точке, все же условие постоянства комбинированной величины $T_0 \sqrt{g_{44}}$, предложенное в качестве критерия теплового равновесия, имеет некоторое преимущество перед классическим принципом — простым условием постоянства температуры T_0 . В связи с этим напомним, что Эйнштейн в своих ранних работах, посвященных изучению природы гравитации, делал различие между так называемой истинной температурой (*wahre Temperatur*), которая должна быть постоянной по всей системе в состоянии теплового равновесия, и другой величиной, названной по предложению Эренфеста карманной температурой (*Taschentemperatur*), которая зависит от величины гравитационного потенциала. Это нововведение не сыграло в свое время большой роли, так как оно было сделано до того, как было закончено построение общей теории относительности. Тем не менее мы можем отметить, что эти величины

являются аналогами к введенным выше величинам $T_0\sqrt{g_{44}}$ и T_0 . Подводя итоги, заметим, что поскольку собственная температура T_0 имеет прямой физический смысл благодаря тому, что может непосредственно измеряться локальным наблюдателем, то, по-видимому, лучше не вводить различного вида температуры, давая им различные наименования, а принять T_0 в качестве фундаментальной величины, определяющей температуру в точке.

§ 130. О расширении в релятивистской термодинамике возможностей для протекания обратимых процессов с конечными скоростями

Теперь рассмотрим возможный в релятивистской термодинамике класс процессов, которые протекают с конечной скоростью, но являются обратимыми. Это еще один пример отличия релятивистской термодинамики от обычной, причем снова снимается ограничение, которое с классической точки зрения кажется неизбежным.

В § 62 уже обсуждалась основная последовательность аргументов, ведущих к заключению, что обратимые термодинамические процессы в классической термодинамике должны протекать бесконечно медленно. Дело в том, что именно эти условия обеспечивают максимальную эффективность, необходимую для того, чтобы и система, и окружающая среда могли вернуться к их первоначальным состояниям. В этом параграфе мы используем пример расширения идеального одноатомного газа для иллюстрации различия, которое может возникнуть между классической и релятивистской точками зрения на обратимость и скорость процесса.

Рассмотрим сначала процесс расширения некоторого количества идеального одноатомного газа, помещенного в цилиндр с подвижным поршнем, как это показано на рис. 4. Начнем с очевидного утверждения, что для того, чтобы процесс был обратимым, между цилиндром и окружающей средой должны отсут-

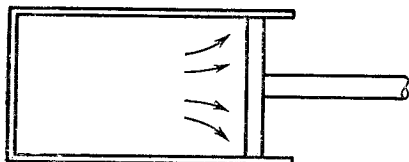


Рис. 4.

ствовать тепловые потоки с конечными скоростями; в противном случае возникнет конечный температурный градиент, который приведет к необратимой передаче теплоты из областей с более высокой температурой в области с более низкой температурой. Итак, расши-

рение в любом случае должно происходить адиабатически. Однако ясно, что даже при этом условии процесс расширения не будет протекать обратимым образом, если скорость его конечна: во-первых, из-за трения между поршнем и стенками;

во-вторых, из-за того, что газ, заполняющий пространство, освобождается поршнем с конечной скоростью, не сможет поддерживать на границе с поршнем столь же большое давление, какое он имел бы при бесконечно малой скорости процесса. Оба эти эффекта приводят к тому, что поршень проделывает работу, недостаточную для обратного процесса — сжатия газа.

Из сказанного следует, что процесс расширения газа в закрытом резервуаре с подвижными стенками не может одновременно быть обратимым и идти с конечной скоростью. Таким образом, аргументы оказались по существу неизменными, а выводы — прежними, не зависящими от того, используется классическая или релятивистская термодинамика.

Необратимость процесса расширения ограниченного количества газа, происходящего с конечной скоростью, есть следствие того, что расширяющаяся система не способна произвести над окружающей средой необходимую работу. Рассмотрим поэтому расширение ничем не ограниченного идеального газа, не имеющего вообще никакой окружающей среды, т. е. рассмотрим некоторое определенное количество газа, находящегося в неограниченном пространстве.

В этом случае мы обнаружим большое различие между классическими и релятивистскими выводами, обусловленное в основном тем, что классические представления не содержат полной теории гравитации.

Сделаем с классической точки зрения три критических замечания по поводу описанного выше процесса расширения неограниченного газа.

Во-первых, следует учесть, что классические представления сформировались под сильным впечатлением того, что обычно мы сталкиваемся с необратимостью как следствием конечной скорости процесса. Выше мы убедились в этом на примере расширения газа в цилиндре. Таким образом, возможность существования обратимых процессов при конечных скоростях большей частью не принималась всерьез. Во-вторых, согласно обычным классическим понятиям о неограниченном трехмерном евклидовом пространстве, наиболее естественно считать, что единственным способом расширения неограниченного никакими стенками газа является диффузия в окружающее пустое пространство. Но такой процесс при конечной его скорости приводит, как мы показали, к необратимому увеличению энтропии:

$$\Delta S = R \ln \frac{p_1}{p_2}, \quad (130.1)$$

для моля газа, который расширяется, не совершая внешней работы, так что давление в нем падает от значения p_1 до p_2 . Альтернативная возможность, модель Вселенной или космологическая

модель, полностью заполненная расширяющимся газом, с классической точки зрения не рассматривалась вообще. Однако исследование именно таких моделей оказывается интересным с точки зрения теории относительности. Такого сорта модель не изучалась в классическом подходе, по-видимому, потому, что немодифицированная ньютонова теория тяготения не допускает бесконечного однородного распределения газа в статическом состоянии [80], отчасти и потому, что ньютонова теория не способна дать определенного ответа на вопрос, какова скорость распространения гравитационного взаимодействия, и не может, следовательно, однозначным образом описать нестатические космологические модели.

Обратимся поэтому к релятивистскому рассмотрению процесса расширения ничем не ограниченного в пространстве газа. Заметим, что релятивистская механика, связывающая геометрические и гравитационные свойства тензора $g_{\mu\nu}$, приводит к совершенно определенным выводам относительно свойств космологических моделей, равномерно заполненных по всему объему расширяющейся или сжимающейся жидкостью. Эти модели, если считать, что они заполнены достаточно простой жидкостью, например идеальным одноатомным газом, позволяют проиллюстрировать новую релятивистскую возможность — обратимость процесса, протекающего с конечной скоростью.

Чтобы пояснить суть этой новой возможности, приведем, забегая вперед, результаты следующей главы: выпишем выражение для интервала в случае нестатической однородной модели Вселенной в виде

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + (r^2/4R_0^2)]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2, \quad (130.2)$$

где r, θ, φ — пространственные координаты, t — времениподобная координата, R_0 — постоянная, а зависимость интервала от времени определяется видом функции $g(t)$, стоящей в показателе экспоненты. Можно показать, что эта форма интервала соответствует космологической модели, *весь* пространственный объем которой заполнен однородным распределением жидкости. Используемые здесь координаты выбраны из множества сопутствующих систем. Напомним, что по определению, данному в § 122, сопутствующие системы координат обладают следующими свойствами. Элемент жидкости, занимающий в такой системе координатную область $\delta r \delta \theta \delta \varphi$, остается в этом элементе постоянно. Собственный объем элемента жидкости, равный

$$\delta v_0 = \frac{e^{\frac{3}{2} g(t)}}{[1 + (r^2/4R_0^2)]^3} r^2 \sin \theta \delta r \delta \theta \delta \varphi, \quad (130.3)$$

будет при этом, вообще говоря, меняться со временем из-за зависимости от $g(t)$. Если g растет со временем, все элементы жидкости будут расширяться с относительной скоростью, одинаковой во всех частях модели; если g со временем уменьшается, будет происходить сжатие. При этом, вообще говоря, эти изменения могут происходить с конечной скоростью.

Попробуем теперь выяснить, могут ли такие расширения и сжатия совершаться и обратимо, и с конечной скоростью. На рис. 5 символически изображено двумерное представление пространственноподобных координат, соответствующих интервалу (130.2). Оно поможет нам установить различие между свойствами процесса расширения газа в настоящей модели и в рассмотренном ранее классическом цилиндре.

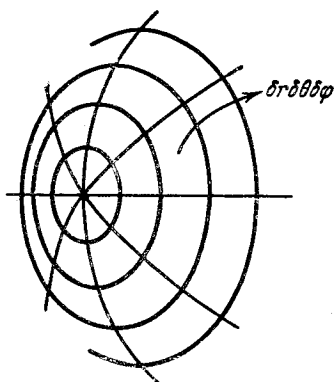


Рис. 5.

Применяя к модели релятивистский первый закон термодинамики, т. е. законы релятивистской механики, легко найти (§ 151), что энергетический баланс каждого элемента жидкости описывается знакомым уравнением для адиабатического расширения:

$$\frac{d}{dt} (\rho_{00} \delta v_0) + p_0 \frac{d}{dt} (\delta v_0) = 0; \quad (130.4)$$

изменение собственной энергии каждого элемента жидкости происходит за счет работы, совершаемой этим элементом над окружающей средой. Следовательно, каждый элемент рассматриваемой нами жидкости должен расширяться или сжиматься адиабатически, без теплопередачи между отдельными частями модели, что на самом деле ясно интуитивно, если вспомнить об однородности условий во всех частях модели.

Убедившись в адиабатическом характере рассматриваемого процесса, применим к данной системе релятивистский второй закон термодинамики (119.5), приравняв правую часть уравнения, пропорциональную поглощаемой теплоте, нулю. В результате получим, что для нашей модели в используемых сопутствующих координатах второй закон термодинамики описывается следующей простой формулой:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \varphi_0 \frac{e^{\frac{3}{2} g(t)}}{[1 + (r^2/4R_0^2)]^3} r^2 \sin \theta \right\} \delta r \delta \theta \delta \varphi \delta t \geq 0,$$

или, привлекая (130.3), перепишем ее в виде

$$\frac{d}{dt}(\varphi_0 \delta v_0) \geq 0. \quad (130.5)$$

Итак, применение релятивистского второго закона термодинамики к такого рода космологическим моделям показывает, что собственная энтропия каждого элемента жидкости, измеряемая локальным наблюдателем, может либо увеличиваться, либо оставаться постоянной. Поскольку знак равенства отвечает случай обратимых процессов, постоянство собственной энтропии каждого элемента жидкости становится необходимым требованием для обратимости процесса расширения в этих моделях, когда он протекает с конечной скоростью.

Это требование, по-видимому, выполняется, если жидкость заполняющая модель, имеет достаточно простое внутреннее строение.

Чтобы в этом убедиться, укажем прежде всего на то, что свойства модели должны быть таковы, чтобы исключить возможность возрастания энтропии, которое может происходить из-за недостаточно эффективного взаимодействия между элементами жидкости и их окружением. Энтропия рассматриваемой модели не будет возрастать, так как в модели отсутствуют тепловые потоки, которые могли бы приводить к необратимому теплообмену; нет трения поршня о стенки и тому подобных явлений, поскольку в данной модели вообще нет никаких резервуаров и движущихся частей; не возникает возрастания энтропии из-за перепада давления на границе расширяющегося элемента, так как по предположению давление однородно по всему объему модели. Итак, оказывается, что в такой системе нет необратимости, которая была бы следствием плохой связи какого либо ее элемента с окружающей средой.

Остается только возможность увеличения энтропии вследствие того, что необратимые процессы могут протекать внутри каждого из элементов жидкости — в реальном веществе, образующем эту жидкость. Для вещества с достаточно сложным строением при конечной скорости изменения объема такие необратимые процессы, несомненно, играли бы важную роль. Так, если рассмотреть двухатомный газ, молекулы которого могут диссоциировать при расширении, то очевидно, что химический процесс не может быть полностью компенсирован в процессе расширения, происходящем с конечной скоростью. Другими словами, реальная диссоциация нарушает условия равновесия, а следовательно, приводит к возрастанию энтропии. В действительности при конечной скорости изменения объема запаздывание даже в таком процессе, как передача энергии от вращательных степеней свободы к

трансляционным степеням в двухатомном газе, уже должно приводить к некоторой необратимости. Однако в том случае, когда жидкость состоит из достаточно простого вещества, эта возможность возрастания внутренней энтропии почти совсем или полностью закрывается.

Таким образом, если в качестве жидкости, заполняющей модель, взять идеальный одноатомный газ, как это предлагалось в начале этого параграфа, то возрастание энтропии за счет необратимых внутренних процессов станет невозможным при том условии, что мы пренебрегаем малыми передачами энергии между этим газом и небольшим количеством теплового излучения, которое всегда существует. Таким образом, в газе, состоящем из пылинок, испытывающих пренебрежимо малое тепловое давление, или в черном излучении, вообще не может возникать никаких необратимых процессов.

Релятивистские космологические модели, всюду заполненные веществом, дают пример безграничной модели, расширяющейся в пустое пространство без утечки веществ, а также и без трения, необратимых тепловых потоков и перепадов давления на стенках сосуда. Такой модели раньше не было. Анализируя ее с точки зрения релятивистской термодинамики, мы обнаружим новые возможности для процессов, протекающих с конечной скоростью и остающихся все же полностью обратимыми или для которых, во всяком случае, исчезают источники необратимости, которые с классической точки зрения кажутся неизбежными.

Новые результаты обусловлены применением как релятивистской механики, так и релятивистской термодинамики. Релятивистская механика позволяет изучить поведение космологических моделей как целого и определить из связи фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$ с плотностью, давлением и собственным объемом поведение отдельных элементов жидкости в модели. Если затем использовать второй закон релятивистской термодинамики, то можно выяснить характер поведения этих элементов жидкости: обратимость или необратимость протекающих в них процессов. В результате оказывается, что в однородных системах, имеющих повсюду одинаковые значения температуры и давления, возможности обратимого протекания процессов возрастают. Аналогичный анализ поведения неоднородных моделей также представляет определенный интерес.

Выполненные нами в этом параграфе исследования позволяют сделать важный вывод, что для того, чтобы изучать поведение Вселенной в целом, надо использовать релятивистскую, а не классическую термодинамику. Этим выводом мы будем руководствоваться в следующей главе при изучении важного класса космологических моделей. В §§ 170 и 171 будет показано, что термодинамическое условие обратимости, которое получается выбором

знака равенства в формулировке второго закона термодинамики, действительно согласуется с требованиями реального обращения процессов в космологических моделях. Более того, в § 173 мы докажем, что наблюдатель, изучающий обратимо расширяющуюся Вселенную, придет к совершенно ошибочным заключениям, если будет интерпретировать поведение окружающей его среды с помощью классической, а не релятивистской термодинамики.

§ 131. О возможности протекания необратимых термодинамических процессов, не приводящих к конечным состояниям с максимальной энтропией

В предыдущем параграфе мы показали, что по сравнению с классической теорией теория относительности открывает новые возможности для протекания обратимых термодинамических процессов. Тем не менее из дальнейшего обсуждения следовало, что необратимые процессы никоим образом не могут быть исключены в релятивистской термодинамике; действительно, некоторая степень необратимости оказывается полезной характеристикой реальных термодинамических процессов, протекающих в природе.

В случае необратимых процессов выводы релятивистской и классической термодинамики могут, однако, сильно различаться. Как было показано в § 63, в классической термодинамике неизбежно заключение о том, что необратимые процессы всегда приводят к состояниям с максимальной энтропией, из которых дальнейшие термодинамические переходы невозможны. В настоящем параграфе мы обсудим возникающую в релятивистском подходе возможность протекания необратимых процессов, не приводящих к максимальным значениям энтропии.

Эта новая возможность непрерывных необратимых изменений может быть обнаружена на примере введенных в предыдущем параграфе космологических моделей, обстоятельным изучением которых мы займемся в следующей главе. Для настоящих же целей достаточно знать, что имеется важный класс моделей (см. § 163) таких, что расширение их от любого данного конечного собственного объема обязательно влечет за собой, после достижения некоторого верхнего предела, обращение направления движения и возвращение к меньшему объему. Возможность такого поведения систем обнаруживается на основании принципов одной лишь релятивистской механики, а потому не зависит ни от природы, ни от степени сложности жидкости, заполняющей модель; единственное необходимое требование — это однородность распределения жидкости, заполняющей модель. Итак, утверждение состоит в том, что принципы одной лишь релятивистской механики позволяют ввести новый класс космологиче-

ских моделей, в которых непрерывно чередуются расширения и сжатия, безотносительно к термодинамической стороне процессов, протекающих внутри элементов жидкости, заполняющей модель.

В том случае, когда молекулы жидкости настолько просты, что собственная энтропия не будет повышаться за счет внутренних процессов, мы имеем условия идеальной обратимости, обсужденные в предыдущем параграфе. В следующей главе мы придем к выводу, что в такой модели должны чередоваться периоды расширения и сжатия.

Ясно также, что в том случае, когда молекулы жидкости имеют сложное строение, энтропия будет возрастать внутри каждого из элементов жидкости, заполняющей модель, в процессе сжатий и расширений. Так, если двухатомный газ может диссоциировать на составляющие элементы, то во время расширения будет развиваться диссоциация, а в процессе сжатия — рекомбинация. При конечной скорости изменения объема эти реакции будут запаздывать, а следовательно, протекать при неравновесных условиях и приводить к возрастанию энтропии. Зададимся теперь вопросом: приведет ли необратимость процессов к затуханию амплитуд сжатий и расширений?

С классической точки зрения затухание процессов расширения и сжатия кажется неминуемым, поскольку в классической термодинамике непрерывно развивающийся в системе необратимый процесс обязательно должен приводить к максимальному значению энтропии и, таким образом, к невозможности дальнейших изменений. В классической термодинамике мы определяем энтропию однородной жидкости с помощью уравнения (60.4), приведенного в § 60:

$$dS = \frac{1}{T} dE + \frac{p}{T} dv + \frac{\partial S}{\partial n_1} dn_1 + \dots + \frac{\partial S}{\partial n_n} dn_n, \quad (131.1)$$

где E — энергия, v — объем, а n_1, \dots, n_n — концентрации различных компонент в молях, выбранные в качестве независимых переменных, определяющих состояние системы. Если применить это уравнение к изолированной системе, испытывающей чередующиеся расширения и сжатия, изменение энергии dE в этом уравнении следует приравнять нулю на основании классического закона сохранения энергии, а также вследствие изолированности системы положить равной нулю работу $p dv$. Итак, из всех причин для увеличения энтропии такой системы остается возможной единственной — изменение состава вещества. Последнее же не может продолжаться бесконечно долго, поскольку данным значениям энергии и объема однородной жидкости соответствует максимально возможная величина энтропии, при которой

устанавливается химическое равновесие между различными компонентами. Таким образом, классическая термодинамика утверждает, что необратимое возрастание энтропии не может продолжаться долго, оно прекращается с достижением максимальной энтропии, после чего термодинамические изменения в системе больше не происходят.

Однако с точки зрения теории относительности это положение существенно модифицируется вследствие изменения смысла принципа сохранения энергии в релятивистской механике. Воспользуемся уравнением (131.1), которое по форме в релятивистской термодинамике не изменяется:

$$(d\varphi_0\delta v_0) = -\frac{1}{T_0} d(\rho_{00}\delta v_0) + \frac{p_0}{T_0} d(\delta v_0) + \\ + \frac{\partial(\varphi_0\delta v_0)}{\partial n_1^0} dn_1^0 + \dots + \frac{\partial(\varphi_0\delta v_0)}{\partial n_n^0} dn_n^0; \quad (131.2)$$

здесь собственная энтропия $(\varphi_0\delta v_0)$ каждого малого элемента жидкости, заполняющей модель, выражена через его собственную энергию $(\rho_{00}\delta v_0)$, объем δv_0 и концентрации различных компонент n_1^0, \dots, n_n^0 , выраженные в молях. Однако, согласно принципам релятивистской механики, мы не можем продолжать утверждать, что полная *собственная* энергия жидкости должна быть постоянной. Действительно, обычный принцип сохранения энергии не действует в теории относительности до тех пор, пока не введены понятия потенциальной энергии гравитационного поля и собственной энергии, непосредственно связанной с веществом и с излучением. В самом деле, согласно уравнению (130.4), написанному для космологической модели:

$$\frac{d}{dt}(\rho_{00}\delta v_0) + p_0 \frac{d}{dt}(\delta v_0) = 0, \quad (131.3)$$

очевидно, что собственная энергия *каждого* элемента жидкости, заполняющей модель, будет уменьшаться, когда модель проходит стадию расширения, и будет увеличиваться на стадии сжатия. Кроме того, процесс будет происходить так, что давление стремится быть ниже равновесного на стадии расширения и выше равновесного на стадии сжатия. Таким образом, можно ожидать, что собственная энергия каждого элемента жидкости, заполняющей модель, не будет оставаться постоянной, но может возрастать. Следовательно, ограничения, накладываемые классическим принципом сохранения энергии на процесс возрастания энтропии, исчезнут.

Итак, в релятивистской термодинамике нельзя уже предположить, что существует предельное максимальное значение энтропии системы, при достижении которого прекращается развитие необратимого процесса в жидкости и система приходит в стабильное состояние. Действительно, в результате проведенного в следующей главе более детального анализа мы найдем, что в некоторых случаях вместо постепенного затухания амплитуды последовательных необратимых расширений и сжатий в космологических моделях проявляется тенденция к постепенному увеличению верхнего предела, до которого расширяется система, однако после каждого расширения всегда следует обратный процесс — сжатие.

Чтобы вскрыть причины, приведшие к этой новой закономерности, укажем, что главным шагом был отказ от классического требования постоянного значения энергии, непосредственно связанной с жидкостью, составляющей систему. Если энергия системы не постоянна, например, система взаимодействует с окружающей средой, то и в классической термодинамике снимается ограничение на возможное возрастание энтропии. Рассмотрим для примера еще раз простой двухатомный газ, способный диссоциировать на составляющие элементы и заключенный в цилиндр с теплонепроницаемыми стенками и подвижным поршнем. Перемещая поршень то вперед, то назад, можно создавать поочередно сжатия и расширения, причем при расширении в газе будет развиваться процесс диссоциации, а при сжатии — противоположный процесс — рекомбинация. Однако, если эти процессы протекают с конечной скоростью, равновесие не будет сохраняться и среднее давление при расширении окажется меньше, чем это необходимо для того, чтобы восстановительный процесс, сопровождающий сжатие, мог привести систему в первоначальное состояние; для этого потребуется произвести еще некоторую дополнительную работу, увеличивающую энергию системы с развитием процесса. Таким образом, пока имеется приток внешней энергии, достаточной для того, чтобы процесс последовательных расширений и сжатий продолжался, как энергия, так и энтропия системы будут возрастать, причем последняя не будет ограничена никаким верхним значением. Итак, с классической точки зрения подобный процесс может прекратиться скорее из-за нехватки энергии извне, нежели из-за возрастания энтропии внутри жидкости в цилиндре. Однако, с другой стороны, в релятивистской теории можно построить такие космологические модели, в которых не будет возникать никаких ограничений на полную *собственную* энергию, а следовательно, и на величину полной энтропии. Таким образом, теория относительности открывает новую возможность протекания необратимых процессов, которые продолжаются бесконечно.

Полученные результаты особенно важны потому, что мы еще раз убедились в том, что, пытаясь понять поведение Вселенной в целом, мы должны применять релятивистскую, а не классическую механику.

§ 132. Заключение

В заключение этой главы представим некоторые оправдания, для, казалось бы, преждевременного изложения в двух последних параграфах материала о возможностях протекания обратимых процессов с конечными скоростями и необратимых процессов, которые не оканчиваются состояниями с максимальной энтропией. В самом деле, эти новые свойства можно вполне понять лишь на примере космологических моделей, изучаемых в следующей главе. Поэтому в третьей части главы X мы вернемся к вопросам, затронутым в § 130 и § 131. Материал этот был, однако, введен для того, чтобы в единой форме изложить различия между классической и релятивистской термодинамикой. Как указывалось в начале этой главы, из дальнейшего станет ясным, что при включении термодинамики в общую теорию относительности возникают качественно новые возможности, которые обязаны в основном новому пониманию природы пространства и времени, а не каким-то фундаментальным изменениям постулатов термодинамики.

Остается еще указать на ряд возможных модификаций релятивистской термодинамики, которые следовало бы выполнить.

Желательно дальнейшее изучение законов, управляющих тепловым потоком, и нахождение явного выражения для тензора энергии — импульса теплопроводной жидкости. Надо также исследовать термодинамическое поведение *неоднородных* космологических моделей, в которых имеются тепловые потоки между различными частями. Эти результаты могут оказаться важными для интерпретации поведения реальной Вселенной.

Следует также изучить термодинамические флуктуации, которые могут играть весьма важную роль на определенных стадиях космологической эволюции. Наконец, было бы целесообразно рассмотреть с точки зрения общей теории относительности внутреннюю связь между термодинамикой и статистической механикой. Последнее, конечно, выходит за рамки макроскопического подхода, принятого в этой книге.

КОСМОЛОГИЯ

ЧАСТЬ I

СТАТИЧЕСКИЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

§ 133. Введение

В последней главе мы займемся космологией. Основой для наших исследований послужат релятивистская механика и термодинамика. Здесь мы вступаем на увлекательный путь, на котором нас ждут опасные, но интересные проблемы.

Главная опасность хотя и не является довлеющей, тем не менее ставит под сомнение справедливость всех наших выводов; суть ее в том, что релятивистская теория гравитации может оказаться неприменимой не только ко Вселенной в целом, но даже и к небольшой ее части, размеры которой ограничены пределом видимости 100-дюймового телескопа Маунт Вильсон и составляют несколько сотен миллионов световых лет*). Три так называемых «решающих эксперимента», конечно, убеждают нас в том, что теория относительности имеет реальные преимущества перед ньютоновой теорией тяготения и что она дает приемлемую основу для изучения полей в «пустом» пространстве вокруг звезды вплоть до расстояний порядка размеров Солнечной системы. Однако экстраполяция этой теории на всю Вселенную в целом, которая отнюдь не является пустой, а заполнена веществом и излучением, представляет собою рискованный шаг. Оправдание обобщения теории надо искать, во-первых, в том, что теория относительности обладает замечательной внутренней логической стройностью и непротиворечивостью и уже по этой причине должна быть, по всей вероятности, применимой к широкому кругу явлений. И, во-вторых, в том, что звезды большей частью скапливаются, образуя туманности, которые в свою очередь имеют тенденцию к скоплению. Это указывает на то, что гравитационное взаимодействие распространяется на большие расстояния, что и предска-

*) Сейчас пределы видимой Вселенной доходят до нескольких миллиардов световых лет. (Прим. ред.)

зывается релятивистской теорией. Наконец, теория относительности практически является единственной теорией гравитации, применимой к явлениям в больших областях Вселенной. Поэтому, если мы вообще собираемся заниматься космологией, то мы должны пользоваться этой теорией.

Другая трудность, которая возникает при построении тех или иных космологических теорий, состоит в том, что мы слишком мало знаем как о Вселенной в целом, так и о ее частях. По подсчетам Хаббла, внутри области радиусом $3 \cdot 10^8$ световых лет содержится около 10^8 туманностей! Эти туманности имеют некоторую тенденцию группироваться в пространстве, хотя в целом распределяются довольно равномерно с плотностью около одной туманности на 10^{18} кубических световых лет. Каждая из них устроена примерно так же, как и наша Галактика. Из анализа красного смещения в спектрах этих туманностей можно заключить, что они взаимно разбегаются. Их видимые диаметры, светимости и цвета позволяют оценить количество пылевидного вещества, мешающего наблюдению. Таким образом, мы имеем довольно обширный фактический материал, чтобы судить о структуре Вселенной вплоть до расстояний $3 \cdot 10^8$ световых лет и о наиболее вероятной ее эволюции за прошедшие $3 \cdot 10^8$ лет.

Тем не менее есть еще серьезные пробелы в том, что хотелось бы знать. Во-первых, хотя мы и можем попытаться приписать свойства нашей ближайшей окрестности Вселенной в целом, однако законных оснований для этого нет. Вселенная в целом вовсе не обязана обладать теми же свойствами, что и видимая нами ее часть. Поэтому, хотя мы в дальнейшем будем постоянно пользоваться однородными моделями, тем не менее всегда нужно помнить, что это делается скорее для того, чтобы достаточно четко сформулировать задачу и преодолеть математические трудности, чем для того, чтобы добиться наибольшего сходства с реальностью. Во-вторых, хотя мы достаточно хорошо знаем плотность распределения самих галактик вокруг нас, нам очень мало известно относительно плотности иных видов вещества и плотности излучения в огромных межгалактических пространствах. На самом деле, как вытекает из работ Хаббла, плотность материи в виде межгалактической пыли может оказаться в тысячи раз больше усредненной плотности галактик, не вызывая при этом эффектов, которые выходили бы за рамки наблюдаемых до сих пор*). Это очень сильно мешает нам делать однозначные выводы, так как в результате мы не можем сказать, является ли

*) Оценки средней плотности вещества во Вселенной все время возрастают и приближаются к той плотности, с которой начинается закрытая модель. (Прим. ред.)

реальная Вселенная пространственно открытой или закрытой, и вынуждены делать выбор между этими возможностями, исходя только из несколько сомнительных соображений метафизического характера.

Ввиду неопределенности данных наблюдений приходится поневоле ограничивать себя в основном анализом космологических *моделей*. От этих моделей необходимо требовать, чтобы они были построены в соответствии с теорией относительности, однако не обязательно требовать, чтобы они во всех своих деталях согласовывались с реальным миром. Мы будем разрешать себе изучение даже таких моделей, свойства которых существенно отличаются от свойств реального мира, лишь бы они помогали нам понять, как происходят те или иные явления, не требуя при этом отказа от общепризнанных теоретических принципов. С помощью таких моделей мы можем все-таки надеяться лучше понять природу в наибольших мыслимых масштабах, а это представляет самую интересную задачу, какую человеческий разум может поставить перед собой, и самую благородную цель, к которой он только может стремиться.

В I части настоящей главы мы рассмотрим статические космологические модели. Сначала будет показано, что единственно возможными однородными статическими моделями являются: первоначальная эйнштейновская Вселенная с однородным распределением материи, пустая Вселенная де Ситтера и пустое плоское пространство — время специальной теории относительности. Затем мы кратко обсудим эти варианты, чтобы показать, что они недостаточно удовлетворительно описывают реальный мир и поэтому от них следует отказаться. Во II части будет получено выражение для интервала ds^2 в нестатических космологических моделях, причем отправным пунктом для этого вывода послужат принципы релятивистской инвариантности. Далее будут изучены механические свойства нестатических моделей и типы их эволюции. В III части эволюция нестатических моделей будет рассмотрена на базе релятивистской термодинамики. Наконец, в IV части будет проведено сравнение свойств нестатических моделей со свойствами реального мира.

§ 134. Однородная статическая Вселенная

Покажем, что однородную статическую Вселенную можно описать только тремя способами, а именно, с помощью моделей Эйнштейна, де Ситтера и специальной теории относительности.

При выводе выражения для космологического интервала мы всякий раз будем подходить ко Вселенной с точки зрения крупных масштабов, пренебрегая различными локальными неоднородностями гравитационного поля или кривизны, имеющимися

в непосредственной близости от отдельных звезд или звездных систем. Это предположение позволит считать, что материя во Вселенной распределена непрерывно с собственной макроскопической плотностью ρ_{00} и давлением p_0 . Такое упрощение оправдано тем, что нам нужно прежде всего изучить поведение Вселенной в целом, а детали, связанные с локальными особенностями, можно присовокупить потом.

Так как в однородной статической Вселенной условия всюду одинаковы в любой момент времени, то систему координат в ней, очевидно, можно выбрать так, чтобы интервал был сферически симметричен вокруг любой наперед заданной точки отсчета. Это означает, что мы можем записать интервал в самом общем сферически симметричном виде:

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + e^\nu dt^2, \quad (134.1)$$

где λ и ν зависят только от r , как в (95.12). Давление же и плотность будут согласно (95.13) определяться уравнениями

$$8\pi p_0 = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} + \Lambda, \quad (134.2)$$

$$8\pi \rho_{00} = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda, \quad (134.3)$$

$$\frac{dp_0}{dr} = -\frac{p_0 + \rho_{00}}{2} \nu', \quad (134.4)$$

где Λ — космологическая постоянная, а штрих означает производную по r .

Уже из этих простых исходных данных можно вывести все возможные варианты статической однородной модели Вселенной, если учесть следующие три условия. Именно: *во-первых*, давление p_0 , измеряемое локальным наблюдателем, должно быть одинаково во всех точках пространства, так как предполагается, что модель однородна; *во-вторых*, по той же самой причине и собственная макроскопическая плотность вещества ρ_{00} должна быть всюду одинаковой; и, *в-третьих*, интервал ds^2 при малых r должен приводиться к виду, который он имеет в плоском пространстве — времени специальной теории относительности, где $\lambda = \nu = 0$, так как если мы пренебрегаем локальными гравитационными полями, то в малых областях пространства — времени должна быть, как было постулировано, справедлива специальная теория относительности.

Так как согласно первому условию p_0 должно иметь одно и то же значение во всем пространстве, то уравнение (134.4) может

быть удовлетворено, только если будет выполнено равенство

$$\frac{\rho_{00} + p_0}{2} v' = 0, \quad (134.5)$$

а это в свою очередь возможно только в трех случаях: когда либо v' , либо $(\rho_{00} + p_0)$, либо и то и другое равны нулю.

Этим трем вариантам:

$$v' = 0, \quad (134.6)$$

или

$$\rho_{00} + p_0 = 0, \quad (134.7)$$

или

$$v' = 0, \quad \rho_{00} + p_0 = 0, \quad (134.8)$$

и соответствуют, как мы сейчас покажем, три упоминавшиеся модели, т. е. модель Эйнштейна, модель де Ситтера и специальной теории относительности.

§ 135. Эйнштейновский интервал

Сначала мы можем найти выражение для интервала ds^2 в первом, т. е. эйнштейновском, случае:

$$v' = 0. \quad (135.1)$$

Интегрируя это уравнение и помня, что при малых r интервал ds^2 должен быть таким же, как в специальной теории относительности, т. е. $v = 0$, получаем единственное решение:

$$v = \text{const} = 0. \quad (135.2)$$

С другой стороны, подставляя (135.2) в уравнение для давления (134.2) и решая его, получим

$$e^{-\lambda} = 1 - (\Lambda - 8\pi p_0) r^2. \quad (135.3)$$

Если теперь для удобства определить новую константу R :

$$\Lambda - 8\pi p_0 = \frac{1}{R^2}, \quad (135.4)$$

то для интервала ds^2 можно написать окончательное выражение:

$$ds^2 = - \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + dt^2. \quad (135.5)$$

Это — одно из хорошо известных выражений для интервала ds^2 в статической эйнштейновской Вселенной [81], и мы в дальнейшем еще раз вернемся к нему, чтобы обсудить некоторые его свойства.

§ 136. Интервал в пространстве де Ситтера

Теперь рассмотрим выражение для деситтеровского интервала ds^2 . Оно соответствует случаю, когда выполняется равенство

$$\rho_{00} + \rho_0 = 0. \quad (136.1)$$

Сложив выражения (134.2) и (134.3) для ρ_{00} и ρ_0 и приравняв их сумму нулю:

$$8\pi(\rho_{00} + \rho_0) = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu'}{r} \right) = 0,$$

получим уравнение $\lambda' = -\nu'$. Так как λ и ν должны обе обращаться в нуль при $r=0$, чтобы интервал ds^2 при $r=0$ переходил в интервал специальной теории относительности, это возможно лишь при

$$\lambda = -\nu. \quad (136.2)$$

С другой стороны, ρ_{00} должна быть всюду одинаковой, т. е. константой, поэтому уравнение (134.3) легко интегрируется, и в результате получается решение, которое нетрудно проверить прямой подстановкой:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{\Lambda + 8\pi\rho_{00}}{3} r^2 + \frac{A}{r},$$

где A — постоянная интегрирования. И, опять используя тот факт, что при малых r выражение для ds^2 должно быть таким же, как в специальной теории относительности, где $\lambda = \nu = 0$, мы с необходимостью приходим к выводу, что $A = 0$. Отсюда, вспоминая (136.2), мы сразу получаем

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - \frac{\Lambda + 8\pi\rho_{00}}{3} r^2. \quad (136.3)$$

Это позволяет написать окончательный результат для интервала ds^2 . Определив для удобства новую постоянную R с помощью выражения:

$$\frac{\Lambda + 8\pi\rho_{00}}{3} = \frac{1}{R^2}, \quad (136.4)$$

перепишем ds^2 окончательно в виде

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dt^2. \quad (136.5)$$

В результате получено одно из хорошо известных выражений для деситтеровского интервала ds^2 [82], и мы впоследствии вернемся к нему, чтобы обсудить некоторые его свойства.

§ 137. Интервал в специальной теории относительности

Наконец, мы можем перейти к третьему варианту статической однородной Вселенной, в котором согласно (134.8) требуется выполнение обоих равенств:

$$v' = 0, \quad \rho_{00} + p_0 = 0. \quad (137.1)$$

Здесь, однако, мы можем считать, что справедливы и уравнение (135.2) эйнштейновской модели и уравнение (136.2) деситтеровской модели; поэтому в качестве полного решения можем взять

$$\lambda = v = 0, \quad (137.2)$$

что приводит к интервалу специальной теории относительности

$$ds^2 = -dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + dt^2, \quad (137.3)$$

который соответствует абсолютно пустому плоскому пространству—времени специальной теории относительности.

Итак, в согласии с § 134 мы описали все три возможные статически однородные Вселенные*), поэтому, когда в дальнейшем станет ясно, что ни один из этих вариантов не дает удовлетворительного отображения реальной Вселенной, нам придется обратиться к моделям более широкого класса.

Теперь можно сделать краткий обзор некоторых важнейших свойств эйнштейновского и деситтеровского интервалов (интервал специальной теории относительности является их частным случаем и получается при стремлении постоянной R к бесконечности). Это будет интересно не только с точки зрения истории, но и потому, что позволит глубже понять более адекватные модели, к которым нам придется обратиться в дальнейшем.

§ 138. Геометрия Вселенной Эйнштейна

Интервал, соответствующий Вселенной Эйнштейна:

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + dt^2, \quad (138.1)$$

бывает иногда полезно переписать в другом виде путем преобразования координат. Это нужно либо для того, чтобы

*) В доказательстве того, что интервалы Эйнштейна, де Ситтера и специальной теории относительности исчерпывают все возможные варианты *статического решения*, мы следуем работе Толмена [83]. Более раннее доказательство содержится в работе [84], а доказательство того, что нет никаких других дополнительных *стационарных решений* в смысле § 142, см. в [85].

получить более удобное выражение, либо для того, чтобы лучше понять порождаемую им геометрию пространства.

Так, подстановка

$$r = \frac{\rho}{1 + \rho^2/4R^2} \quad (138.2)$$

приводит выражение (138.1) к изотропному виду:

$$ds^2 = - \frac{1}{(1 + \rho^2/4R^2)^2} (d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2. \quad (138.3)$$

В свою очередь (138.3) с помощью очевидных преобразований можно переписать следующим образом:

$$ds^2 = - \frac{1}{(1 + \rho^2/4R^2)^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2) + dt^2. \quad (138.4)$$

Подстановка

$$r = R \sin \chi \quad (138.5)$$

в (138.1) приводит к выражению

$$ds^2 = -R^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2. \quad (138.6)$$

Наконец, если перейти к большему числу переменных с помощью уравнений

$$z_1 = R \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}, \quad z_2 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad (138.7)$$

$$z_3 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z_4 = r \cos \theta,$$

где

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = R^2, \quad (138.8)$$

то интервал ds^2 можно записать в виде

$$ds^2 = - dz_1^2 - dz_2^2 - dz_3^2 - dz_4^2 + dt^2. \quad (138.9)$$

Согласно последнему выражению наше исходное пространство — время можно рассматривать как погруженное в евклидово пространство большего числа измерений.

Тип геометрии, отвечающей каждому из выражений для интервала, не определяется полностью формулой интервала, так как при заданной дифференциальной форме интервала можно, вообще говоря, еще делать различные предположения относительно связности и идентификации точек. Однако, согласно полученной нами последней формуле для интервала, проще всего рассматривать пространственную часть эйнштейновской Вселенной как всю трехмерную сферическую поверх-

ность $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = R^2$, погруженную в четырехмерное евклидово пространство (z_1, z_2, z_3, z_4) . Тогда геометрия, соответствующая пространственноподобным переменным в эйнштейновском интервале, будет геометрией так называемого *сферического* пространства радиуса R . Если же противоположные точки сферы отождествить и ввести соответствующую связность, то пространственную геометрию можно будет считать геометрией так называемого *эллиптического* типа.

Если считать пространственную геометрию сферической, то согласно (138.6) можно вычислить собственный пространственный объем эйнштейновской Вселенной

$$v_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} R^3 \sin^2 \chi \sin \theta \, d\chi \, d\theta \, d\varphi = 2\pi^2 R^3 \quad (138.10)$$

и собственную кругосветную длину Вселенной *)

$$l_0 = 2\pi R. \quad (138.11)$$

При эллиптической геометрии соответствующие величины будут в два раза меньше, и эта разница могла бы в принципе служить критерием, позволяющим выявить, какого же типа геометрия имеется на самом деле.

Если кроме пространственноподобных координат учесть еще и времениподобные, то полную пространственно-временную геометрию Вселенной Эйнштейна можно рассматривать как геометрию четырехмерной цилиндрической поверхности, погруженной в пятимерное пространство.

Вероятно, исследование сущности геометрии, порождаемой эйнштейновским интервалом, интересно главным образом потому, что мы при этом получаем дополнительные аргументы для интуитивного понимания однородности модели. Например, из симметричной формулы интервала (138.9) непосредственно

*) Собственная кругосветная длина Вселенной определяется как

$$l_0 = \int_0^{2\pi} R_0 \, d\varphi$$

и является длиной большого круга трехмерной сферической поверхности в четырехмерном пространстве. Аналогичная собственная кругосветная длина двумерной сферической поверхности, погруженной в трехмерное пространство (иными словами, собственная кругосветная длина сферы), равна длине большого круга $2\pi R$. Если противоположные точки сферы отождествить (эллиптическое пространство), то отправляясь от Северного полюса, мы попадаем на Южный, который по определению совпадает с Северным. При этом собственная кругосветная длина оказывается в два раза меньше, т. е. πR . (Прим. перев.)

следует, что при переходе обратно к координатам r , θ , φ , t можно выбирать начало отсчета пространственных координат и времени где угодно, а это, конечно, согласуется с нашими исходными требованиями, чтобы модель была статична и однородна.

Заметим в заключение, что для многих практических нужд не нужно выходить за рамки тех результатов, которые можно получить обычными аналитическими методами непосредственно из дифференциальной формы для интервала, и нет никакой надобности рассматривать геометрию в целом.

§ 139. Плотность и давление материи в эйнштейновской Вселенной

Рассмотрим теперь физические свойства эйнштейновской Вселенной, исследуя законы, которым подчиняются давление и плотность материи в этой модели.

Возвращаясь к общей формуле интервала (134.1):

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + e^\nu dt^2, \quad (139.1)$$

и подставляя величины, найденные в § 135:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{r^2}{R^2} \text{ и } \nu = 0, \quad (139.2)$$

в формулы для плотности и давления (95.13), легко получаем

$$8\pi p_0 = -\frac{1}{R^2} + \Lambda \quad (139.3)$$

и

$$8\pi \rho_{00} = \frac{3}{R^2} - \Lambda. \quad (139.4)$$

Уравнения (139.3) и (139.4) через посредство двух констант R и Λ выражают собственное давление и собственную плотность материи, заполняющей пространство. Эти уравнения могут быть разрешены относительно этих двух констант следующим образом:

$$\Lambda = 4\pi (\rho_{00} + 3p_0) \quad (139.5)$$

и

$$\frac{1}{R^2} = 4\pi (\rho_{00} + p_0). \quad (139.6)$$

Так как плотность материи ρ_{00} , заполняющей модель, может быть только положительной, а давление p_0 тоже должно быть положительным (хотя при допущении в разумных пределах сил сцепления p_0 может быть отрицательным, но лишь в незначительной степени), то мы вправе сделать вывод, что Λ и R^2 должны быть существенно положительными величинами.

Если рассматривать Λ и R^2 в качестве свободных параметров, то с их помощью можно добиться того, чтобы в этой модели материя обладала любыми наперед заданными значениями давления и плотности.

Так, например, если мы предположим, что материя состоит из пылевидного вещества, не производящего никакого давления, скажем из свободных частиц (звезд), имеющих незначительное относительное движение (именно это первоначально и предполагал Эйнштейн), то мы должны будем заключить из приведенных выше уравнений, что

$$\Lambda = \frac{1}{R^2} \quad (139.7)$$

и

$$4\pi\rho_{00} = \frac{1}{R^2}, \quad (139.8)$$

и согласно (138.10) полная масса Вселенной при этом оказывается равной

$$M = \rho_{00}v_0 = \frac{1}{2} \pi R. \quad (139.9)$$

С другой стороны, если предположить, что пространство заполнено только излучением, для которого отношение плотности к давлению имеет максимальное значение (по сравнению с какими-либо другими видами материи):

$$\rho_{00} = 3p_0,$$

то можно получить, что

$$\Lambda = \frac{3}{2R^2} \quad (139.10)$$

и

$$4\pi p_0 = \frac{1}{4R^2}, \quad 4\pi\rho_{00} = \frac{3}{4R^2}. \quad (139.11)$$

На примере уравнений (139.8) и (139.11) еще раз видно, что, как было впервые упомянуто в § 110, излучение приводит к большему искривлению пространства, нежели обычное вещество с той же плотностью.

Наконец, если мы предположим, что пространство совершенно пустое, т. е. ρ_{00} и p_0 оба равны нулю, то

$$\Lambda = \frac{1}{R^2} = 0, \quad (139.12)$$

и эйнштейновская Вселенная в этом случае вырождается в плоское пространство — время специальной теории относительности.

Из результатов этого параграфа можно сделать несколько важных выводов. Во-первых, видно, что общая теория относительности в принципе позволяет строить модели со свойствами, похожими на свойства реальной Вселенной, хотя бы уже в том, что они могут содержать материю, распределенную однородно и с конечной плотностью. Во-вторых, поскольку R^2 должен быть, как легко видеть, положительным и конечным (за исключением вырожденного случая абсолютно пустой Вселенной), то радиус R должен быть действительным; а это значит, что эйнштейновская Вселенная неограничена, но тем не менее замкнута и обладает конечным объемом. Наконец, легко видеть, что космологическая постоянная Λ непременно должна быть больше нуля, если мы хотим, чтобы модель содержала хоть какое-нибудь количество материи. Это было, по-видимому, сильнейшим аргументом для Эйнштейна, когда он ввел в свое уравнение столь неожиданный, хотя формально и непротиворечивый, космологический член. Если мы в дальнейшем найдем модели, в которых для описания материи нет необходимости вводить Λ -член, то мы чаще всего будем полагать его равным нулю.

§ 140. Частицы и свет в эйнштейновской Вселенной

Продолжим исследование физических свойств эйнштейновской Вселенной. Рассмотрим движение частиц и распространение света в этой модели.

Согласно (74.13) движение свободных частиц в гравитационном поле, соответствующем эйнштейновскому интервалу

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1-r^2/R^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + dt^2, \quad (140.1)$$

определяется уравнением геодезической

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (140.2)$$

Будем главным образом интересоваться тем случаем, когда частицы, по крайней мере в первый момент, покоятся, т. е. пространственные компоненты «скорости» частицы dr/ds , $d\theta/ds$ и $d\varphi/ds$ равны нулю. Тогда уравнение геодезической приведется к следующему виду:

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{44}^\sigma \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = 0. \quad (140.3)$$

Однако, как следует из общих выражений (95.2) для символов Кристоффеля, символы вида Γ_{44}^σ в случае, когда метрика

определяется интервалом Эйнштейна (140.1), тождественно обращаются в нуль. Это приводит к заключению, что покоящиеся частицы будут иметь ускорение, тождественно равное нулю:

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d^2\theta}{ds^2} = \frac{d^2\varphi}{ds^2} = 0, \quad (140.4)$$

и, следовательно, будут и дальше оставаться в покое.

Этот вывод очень важен, так как от эйнштейновской Вселенной нельзя было бы ожидать, что она будет оставаться в предпологаемом статическом состоянии, если бы свободные частицы в ней не сохраняли состояния покоя. Тем не менее, как будет видно дальше, равенства (140.4) не являются достаточными условиями устойчивости эйнштейновской Вселенной.

Скорость света в эйнштейновской Вселенной можно найти, приравняв нулю выражение для интервала (140.1). Рассмотрим прежде всего распространение света в радиальном направлении от центра или к центру:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}. \quad (140.5)$$

Здесь нужно специально отметить, что для локального наблюдателя, расположенного неподвижно относительно системы пространственных координат, собственное время s и координатное время t , согласно выражению (140.1) для интервала ds^2 , совпадают.

Отсюда легко найти время, необходимое свету, чтобы, выйдя из начала координат, обойти всю Вселенную и вернуться обратно. Это время равно

$$t = 4 \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2/R^2}} = 2\pi R, \quad (140.6)$$

если пространство сферическое, и равно половине этой величины, если пространство эллиптическое. Интересно, что теоретически в этой модели оказывается возможной любопытная ситуация: свет может излучиться с поверхности звезды, обойти Вселенную и снова сфокусироваться в виде изображения той же звезды. Однако такую возможность не следует принимать слишком близко к сердцу, помня, что эйнштейновская модель идеализирована и не отражает реальную Вселенную достаточно правильно.

Самое важное следствие из формулы скорости света (140.5) — это то, что в однородной модели Эйнштейна нельзя

ожидать сколько-нибудь заметного систематического красного смещения света, приходящего от удаленных объектов. Действительно, рассмотрим наблюдателя (будем для удобства считать, что он находится в начале координат, $r=0$) и источник света (туманность). Пусть расстояние между ними равно r . Пусть в первый момент они покоятся относительно выбранной пространственной системы отсчета. Тогда благодаря статическому характеру модели они, как было показано выше, будут покоиться и дальше, так как у неподвижных частиц равна нулю не только скорость, но и ускорение. Согласно (140.5) «время» t_2 , когда наблюдатель увидит свет, испущенный источником во «время» t_1 , будет равно

$$t_2 = t_1 + \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2/R^2}} = t_1 + R \operatorname{arcsin} \frac{r}{R}.$$

Поэтому промежуток «времени» δt_2 между получением двух последовательных световых вспышек, благодаря постоянству r , будет равен интервалу δt_1 между их излучением:

$$\delta t_2 = \delta t_1. \quad (140.7)$$

Как это следует из вида интервала (140.1), для наблюдателей, расположенных неподвижно относительно пространственных координат, времениподобная переменная t совпадает с собственным временем, измеренным локальными наблюдателями в пространственных координатах. Поэтому равенство (140.7) означает также, что собственная частота принятого света должна быть равна собственной частоте испущенного при условии, что наблюдатель, расположенный неподвижно в начале отсчета, покоится и относительно излучающего источника. Иными словами, принятый свет будет иметь те же самые период и длину волны, что и свет земного эталона, используемого в качестве источника в лабораторном спектрометре.

Здесь мы на простом примере показали тот метод, который применяется при изучении обобщенного эффекта Допплера, который был коротко рассмотрен в конце VIII главы. Полученный результат свидетельствует о том, что в модели Эйнштейна частота наблюдаемого света никак не связана с расстоянием до источника (например, туманности). Конечно, здесь возможен небольшой доплер-эффект, возникающий из-за индивидуальных движений туманностей, но благодаря статичности модели следует ожидать, что эти эффекты будут одинаково часто как положительными, так и отрицательными, не отклоняясь далеко от среднего нулевого уровня.

§ 141. Сравнение свойств эйнштейновской модели с реальной Вселенной

Чтобы закончить краткое обсуждение свойств эйнштейновской Вселенной, сравним ее с реальной.

Самая привлекательная черта эйнштейновской Вселенной состоит в том, что она (§ 139), как и реальная, может содержать материю, распределенную однородно и с конечной плотностью. В этом отношении она лучше модели де Ситтера, которая, как мы покажем дальше в § 143, не может содержать материи вовсе. Однако следует тем не менее еще раз подчеркнуть, что это преимущество достигается благодаря введению лишнего космологического члена $\Lambda g_{\mu\nu}$ в первоначальные эйнштейновские уравнения поля. Этот шаг имеет прецедент в прошлом [86]: в ньютоновской теории тяготения было предложено таким же образом видоизменить уравнение Пуассона, чтобы оно могло описывать материю, однородно распределенную по всему плоскому пространству.

Если усреднить вещество, заключенное в видимых туманностях, по всему межгалактическому пространству (это должно быть сделано при замене картины реальной Вселенной моделью с однородным распределением материи), то, согласно оценкам Хаббла (§ 177), плотность усредненного таким образом вещества оказывается равной *)

$$\rho = (1,3 \div 1,6) \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3. \quad (141.1)$$

Но в § 139 мы нашли, что в эйнштейновской модели средняя плотность вещества, не создающего никакого заметного давления, выражается через радиус R и космологическую постоянную Λ следующим образом:

$$4\pi\rho_{00} = \frac{1}{R^2} = \Lambda. \quad (141.2)$$

Отсюда, пренебрегая плотностью невидимой материи, пренебрегая давлением и плотностью излучения в межгалактическом пространстве и переходя от граммов к гравитационным единицам (81.7), получаем

$$\Lambda = \frac{1}{R^2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-30}}{1,349 \cdot 10^{28}} \text{ см}^{-2},$$

или

$$\Lambda \approx 9,3 \cdot 10^{-58} \text{ см}^{-2}, \quad (141.3)$$

$$R \approx 3,3 \cdot 10^{-28} \text{ см} \approx 3,5 \cdot 10^{10} \text{ световых лет}. \quad (141.4)$$

*) Приведенная оценка почти сохранила свое значение до сего времени. Сейчас считается, что $\rho \leq 10^{-29} \text{ г/см}^3$. (Прим. ред.)

При этом плотность материи была положена равной 10^{-30} г/см³, что, по-видимому, является нижней границей для плотности, так как здесь не учитывается пыль и газ в необъятных пространствах между туманностями. Поэтому величину для Λ нужно рассматривать как нижний предел, а для R — как верхний.

Величина Λ оказывается достаточно малой и потому не противоречит известному движению планет Солнечной системы. Действительно, если бы мы взяли шварцшильдовский интервал ds^2 в полной форме:

$$ds^2 = - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2\right) dt^2,$$

то отношение первоначально отброшенного члена $\Lambda r^2/3$ к главному члену $2m/r$ на расстоянии орбиты Нептуна составляло бы только

$$\frac{\Lambda r^2/3}{2m/r} = \frac{\Lambda r^3}{6m} \approx \frac{9,3 \cdot 10^{-58} (4,5 \cdot 10^{14})^3}{6 \cdot 1,5 \cdot 10^5} \approx 10^{-19} \quad (141.5)$$

(здесь мы приняли гравитационную массу Солнца равной $1,5 \cdot 10^5$).

Что касается полученного значения радиуса R ($3,5 \cdot 10^{10}$ световых лет), то его величина тоже не дает никакого повода для беспокойства, так как наши телескопы могут проникать только до расстояний примерно $3 \cdot 10^8$ световых лет*).

Самой неудовлетворительной чертой эйнштейновской модели Вселенной является отсутствие красного смещения света от удаленных объектов, которое в реальной Вселенной, согласно Хабблу — Хьюмасону, имеет место и возрастает приблизительно пропорционально расстоянию до светящегося объекта. В основном именно этот дефект заставляет нас отказаться от статической модели при построении космологических теорий и обратиться к моделям нестатическим.

В дальнейшем мы обнаружим, что с указанным недостатком статической модели Эйнштейна связано то обстоятельство, что эйнштейновская Вселенная вообще не может быть стабильной. Конечно, как мы видели в § 140 (см. (140.4)), свободные частицы не будут ускоряться, если они находятся в покое. Однако, как будет показано в дальнейшем, эйнштейновская Вселенная станет неудержимо сжиматься, если вещество начнет переходить в излучение, или же, наоборот, станет неудержимо расширяться, если излучение начнет переходить в вещество. И мы

*) Сейчас астрономы регистрируют большие объекты (квазары) на расстояниях примерно до 10^{10} световых лет. (Прим. ред.)

увидим, что, вообще, гораздо легче построить большое разнообразие сжимающихся и расширяющихся моделей, чем статическую модель, так как для существования последней должны выполняться исключительно жесткие требования.

§ 142. Геометрия Вселенной де Ситтера

Так как эйнштейновская Вселенная, будучи полезной для понимания релятивистской космологии, все же не дает удовлетворительного описания реальной Вселенной, то приходится обратиться к изучению другой модели — модели де Ситтера, представляющей еще один вариант статической Вселенной.

Преобразованием координат первоначальное выражение для деситтеровского интервала

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1-r^2/R^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dt^2 \quad (142.1)$$

иногда полезно переписать в другом виде. Это бывает нужно либо для того, чтобы получить более удобное выражение, либо для того, чтобы лучше понять присущую ему внутреннюю геометрию.

После подстановки

$$r = R \sin \chi \quad (142.2)$$

получаем

$$ds^2 = -R^2 d\chi^2 - R^2 \sin^2 \chi d\theta^2 - R^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\varphi^2 + \cos^2 \chi dt^2. \quad (142.3)$$

Эта формула часто используется при изучении деситтеровской Вселенной.

Однако более интересный результат можно получить введением пяти переменных:

$$\alpha = r \sin \theta \cos \varphi, \quad \beta = r \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma = r \cos \theta,$$

$$\delta + \varepsilon = Re^{t/R} \sqrt{1 - r^2/R^2}, \quad \delta - \varepsilon = Re^{-t/R} \sqrt{1 - r^2/R^2}, \quad (142.4)$$

что позволяет переписать интервал в виде

$$ds^2 = -d\alpha^2 - d\beta^2 - d\gamma^2 - d\delta^2 + d\varepsilon^2$$

или, после еще одного преобразования:

$$z_1 = i\alpha, \quad z_2 = i\beta, \quad z_3 = i\gamma, \quad z_4 = i\delta, \quad z_5 = \varepsilon, \quad (142.5)$$

в виде

$$ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^2 + dz_4^2 + dz_5^2, \quad (142.6)$$

где для переменных z вследствие (142.4) должно выполняться соотношение

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = (iR)^2 \quad (142.7)$$

Это соотношение определяет пространство — время как четырехмерную поверхность в пятимерном многообразии и позволяет рассматривать геометрию Вселенной де Ситтера как геометрию на сфере, погруженной в пятимерное евклидово пространство. При этом, так же как и в эйнштейновском случае, мы получаем дополнительное подспорье для понимания существа однородности деситтеровской модели. Однако следует отметить, что формальная простота выражения для интервала (142.6) достигается за счет физики. В выражении (142.6) мы не можем уже физически отличать пространственноподобные интервалы, измеряемые с помощью линейки, от интервалов времениподобных, измеряемых с помощью часов.

Наконец, рассмотрим интересное и важное преобразование координат, открытое независимо Лемэтром [87] и Робертсоном [88] (Робертсон исследовал это преобразование наиболее полно). Оно имеет следующий вид:

$$r = \frac{\bar{r}}{\sqrt{1 - \bar{r}^2/R^2}} e^{-\bar{t}/R}, \quad \bar{t} = t + R \ln \sqrt{1 - r^2/R^2}, \quad (142.8)$$

и приводит к выражению для интервала

$$ds^2 = -e^{2\bar{t}/R} (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + d\bar{t}^2.$$

Если опустить черту над \bar{r} и \bar{t} и ввести для простоты

$$k = \frac{1}{R}, \quad (142.9)$$

то интервал можно переписать следующим образом:

$$ds^2 = -e^{2kt} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2, \quad (142.10)$$

или, после еще одного очевидного преобразования, несколько иначе:

$$ds^2 = -e^{2kt} (dx^2 + dy^2 + dz^2) + dt^2. \quad (142.11)$$

Из последней формулы видно, что гравитационные потенциалы $g_{\mu\nu}$ уже не являются не зависящими от координаты t . Это, однако, не должно особенно смущать, так как подобного рода зависимость статического интервала от времени возникает всегда при преобразовании системы отсчета, если новые координаты зависят не только от пространственноподобных, но и от времениподобных старых координат*). Однако, как показал

*) Другую нестатическую форму для интервала можно найти в работе [89].

Робертсон, в данном случае свойства пространства, определенного с помощью (142.10), в некотором смысле не зависят от нового времени t , так как преобразование

$$\bar{r} = r e^{kt_0}, \quad \bar{t} = t - t_0,$$

которое можно интерпретировать как изменение пространственного масштаба в комбинации со сдвигом начала отсчета времени подобной переменной, оставляет форму интервала неизменной.

Робертсон предложил называть выражения (142.10) и (142.11) для интервала *стационарными*, а не *статическими*. Это название, однако, не следует путать с другим термином (см. [36], стр. 244) «стационарный», введенным для обозначения интервала, в котором метрика $g_{\mu\nu}$ не зависит от координаты x_4 , причем компоненты g_{14} , g_{24} , g_{34} отличны от нуля (если эти компоненты равны нулю, то интервал называется статическим). В дальнейшем мы еще найдем применение робертсоновской формы интервала де Ситтера (§§ 144 г, 183 и 184).

§ 143. Отсутствие вещества и излучения в деситтеровской Вселенной

Теперь мы должны обратиться к физическим свойствам деситтеровской Вселенной, т. е. исследовать вопрос о веществе и излучении в этой модели. Определение модели де Ситтера, которое позволило в § 136 получить выражение деситтеровского интервала, было сформулировано в § 134 после исследования общих условий существования однородных статических моделей. Согласно этому определению модель де Ситтера — это такая модель, в которой собственное давление и плотность связаны соотношением

$$p_{00} + p_0 = 0. \quad (143.1)$$

Собственная плотность материи p_{00} по своей физической природе может быть только положительной или нулем. Давление в принципе может быть и отрицательным. Однако ни один из существующих видов материи, который мы здесь представляем себе как идеализированную жидкость, даже если примем во внимание внутренние силы сцепления, не может создать такое отрицательное давление, которое в принятых единицах хотя бы отдаленно приближалось по абсолютной величине к плотности. Следовательно, условие (143.1), очевидно, может выполняться только в том случае, если одновременно

$$p_{00} = 0 \text{ и } p_0 = 0. \quad (143.2)$$

А это означает, что Вселенная должна быть абсолютно пустой, т. е. она не может содержать заметного количества вещества или излучения.

Вследствие того, что ρ_{00} оказывается равной нулю, уравнение (136.4), связывающее космологическую постоянную и радиус Вселенной, упрощается. Постоянная R в деситтеровском интервале

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1-r^2/R^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dt^2 \quad (143.3)$$

выражается через космологическую постоянную следующим образом:

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\Lambda}{3}. \quad (143.4)$$

Поэтому деситтеровская модель может быть пространственно закрытой, если $\Lambda > 0$, может вырождаться в открытое плоское пространство специальной теории относительности, если $\Lambda = 0$, и может оказаться открытой, но искривленной, если Λ меньше нуля. В дальнейшем мы будем полагать Λ положительным и R действительным, что соответствует закрытой модели.

Интересно отметить в согласии со (143.4), что внешнее шварцшильдовское решение (96.3)

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2 \quad (143.5)$$

для статического поля в пустом пространстве вокруг материальной сферы переходит в деситтеровский интервал ds^2 абсолютно пустой Вселенной, если массу m материальной сферы, помещенной в начале координат, устремить к нулю. Выражение (143.5) интересно тем, что оно представляет собой конкретный, хотя и не бог весть какой важный, пример интервала в неоднородной модели.

§ 144. Пробные частицы и световые лучи в деситтеровской Вселенной

а) **Уравнения геодезической.** Как было показано, деситтеровский интервал отвечает абсолютно пустой модели; поэтому, если внести в нее такое количество вещества и излучения, какое имеется в реальном мире, это вызовет существенные искажения, о чем будет еще идти речь впереди (§ 183). Однако, чтобы изучить гравитационное поле внутри модели, в нее нужно

вносить лишь пробные частицы и световые лучи, что, конечно, не возбраняется.

Движение пробной частицы и распространение светового луча определяются уравнениями геодезической

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (144.1)$$

Взяв деситтеровский интервал в общем виде:

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + e^\nu dt^2, \quad (144.2)$$

где

$$e^{-\lambda} = e^\nu = 1 - \frac{r^2}{R^2}, \quad (144.3)$$

и подставив в уравнение геодезической символы $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ из формул (95.2), получим четыре уравнения при $\sigma=1, 2, 3, 4$:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dr} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r e^{-\lambda} \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - r \sin^2 \theta e^{-\lambda} \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \frac{dv}{dr} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{d\theta}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0,$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{dv}{dr} \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0.$$

Однако без ущерба для общности эти уравнения можно упростить, если так выбрать координаты, чтобы интересующее нас движение происходило первоначально в плоскости $\theta = \pi/2$. Тогда, согласно второму из приведенных выше уравнений, движение будет все время происходить в этой плоскости, и уравнения приводятся к следующему виду:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dr} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r e^{-\lambda} \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \frac{dv}{dt} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0,$$

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{dv}{ds} \frac{dt}{ds} = 0.$$

Первые интегралы, соответствующие этим уравнениям, легко получить, так как форма интервала (144.2) сама дает один

интеграл, а решения второго и третьего уравнений легко угадать. В результате получаем

$$e^{\lambda} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - e^{\nu} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + 1 = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{h}{r^2},$$

$$\frac{dt}{ds} = t e^{-\nu},$$

где h и k — постоянные интегрирования. Наконец, подставляя два последних уравнения в первое и вводя вместо величин λ и ν их выражения из (144.3), получаем уравнения движения в следующем виде:

$$\frac{dr}{ds} = \pm \sqrt{k^2 - 1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{h^2}{r^2} + \frac{h^2}{R^2}},$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{h}{r^2},$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{k}{1 - r^2/R^2}.$$
(144.4)

Легко видеть, что согласно этим уравнениям постоянная h может иметь как положительное, так и отрицательное значение в зависимости от направления движения. Что же касается параметра k , то он должен быть положительным для всех значений $r < R$, так как координатное время t возрастает с ростом собственного времени s . В случае же световых лучей константы h и k будут принимать бесконечные значения, так как для света $ds = 0$.

б) **Орбиты частиц.** Полученные выше интегралы уравнений геодезической можно использовать, чтобы выяснить, как будет происходить движение частиц во Вселенной де Ситтера.

Во-первых, исследуем *форму* орбиты. Сочетая первое из уравнений (144.4) со вторым, после некоторых выкладок легко получаем

$$d\varphi = \frac{h dr}{r^2 \sqrt{\frac{r^2}{R^2} + \left(k^2 - 1 + \frac{h^2}{R^2} \right) - \frac{h^2}{r^2}}}. \quad (144.5)$$

Непосредственное интегрирование этого уравнения дает аналитическое выражение для орбит, по которым движутся частицы в деситтеровской Вселенной. Мы можем, однако, сразу интуитивно оценить вид этих орбит, так как уравнение (144.5) очень хорошо известно в ньютоновской механике [90]. Там это

уравнение соответствует орбите, по которой движется частица в центральном поле с отталкивающей силой, пропорциональной радиусу. Отсюда ясно, что орбиты свободных частиц в пространстве де Ситтера, нарисованные в координатах r , θ , φ , будут заворачиваться таким образом, как если бы частицы отталкивались от центра.

Рассмотрим теперь *скорость* движения на орбите. Она, конечно, не будет такой же, как в упомянутом выше ньютоновом аналоге. Две компоненты скорости уже получены выше в качестве двух первых интегралов уравнения геодезической, но они выражены через посредство приращения собственного времени ds . Поскольку, однако, при сравнении модели с реальной Вселенной удобно вообразить себя расположенным в начале координат, а для наблюдателя, покоящегося в начале координат, собственное время, согласно выражениям (144.2) и (144.3) для интервала, совпадает с координатным временем t , то выгодно скорости различных частиц выражать через посредство координатного времени t . Для того чтобы сделать это, достаточно исключить ds из уравнений (144.4). Переход к координатному времени t позволяет выразить значение двух компонент орбитальной скорости следующим образом:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{1 - r^2/R^2}{k} \sqrt{k^2 - 1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{h^2}{r^2} + \frac{h^2}{R^2}} \quad (144.6)$$

и

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{h(1 - r^2/R^2)}{kr^2}. \quad (144.7)$$

Из этих уравнений видно, что радиальная скорость частицы обращается в нуль, когда

$$k^2 - 1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{h^2}{r^2} + \frac{h^2}{R^2} = 0, \quad (144.8)$$

а обе компоненты обращаются в нуль при

$$r = R. \quad (144.9)$$

Первое из этих уравнений определяет величину перигелия, т. е. расстояния, на которое частица ближе всего подходит к началу координат, а из второго уравнения следует, что частица вовсе прекращает свое движение на расстоянии R ; это расстояние в дальнейшем мы будем называть видимым горизонтом Вселенной.

В частном случае чисто радиального движения, когда $h=0$, уравнение для перигелия приводится к виду

$$r = R\sqrt{1 - k^2}, \quad (144.10)$$

т. е. перигелий существует, только если $k < 1$, для больших значений k частица проходит через центр.

Дифференцируя (144.6) и (144.7), мы можем найти также и *ускорение* частицы на орбите. После некоторых преобразований получаем

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{2r/R^2}{1-r^2/R^2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{1-r^2/R^2}{k}\right)^2 \left(\frac{r}{R} + \frac{h^2}{r^3}\right) \quad (144.11)$$

и

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{2h}{kr^3} \frac{dr}{dt}. \quad (144.12)$$

Согласно (144.11) радиальное ускорение частицы, которая имеет нулевую радиальную скорость, обязательно положительно в любой точке между $r=0$ и $r=R$. Поэтому свободная частица, достигнув однажды перигелия и начав двигаться от центра, обратно уже никогда не вернется. Для частицы же покоящейся в центре, $r=0$ и $h=0$, а значит, как легко видеть ускорение равно нулю. Следовательно, такая частица будет все время оставаться в центре. Этот результат отнюдь не противоречит ранее высказанному утверждению, что при выборе системы координат всегда удобно оставить за собой мест в начале отсчета.

в) **Поведение лучей света во Вселенной де Ситтера.** Рассмотрим теперь распространение света в этой модели. Как было отмечено при обсуждении интегралов уравнений геодезической (144.4), параметры h и k для светового луча должны быть бесконечны. В соответствии с этими значениями параметре уравнение орбиты (144.5) непосредственно преобразуется в уравнение светового луча деситтеровской модели

$$d\varphi = \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{k^2-1}{h^2} + \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2}}}, \quad (144.13)$$

которое по своей форме совпадает с уравнением траектории частицы в ньютоновской механике [90], когда центральные силы обращаются в нуль. Далее из уравнения может быть получен интеграл

$$r \cos \varphi + ar \sin \varphi = b$$

(a и b — константы), который показывает, что траекториям световых лучей в выбранных нами координатах соответствуют прямые линии. Это делает координаты удобными для интерпретации астрономических измерений расстояний.

Чтобы определить скорость света в модели, мы можем вернуться к формулам интервала (144.2) и (144.3) и положить

$ds^2=0$. При этом мы получаем общий результат:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \left\{ r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right\} = \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2. \quad (144.14)$$

В случае чисто радиального распространения света формула (144.14) упрощается:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (144.15)$$

Интегрируя это уравнение от $r=0$ до $r=R$, находим, что с точки зрения наблюдателя, находящегося в центре, свет от центра до $r=R$ будет идти бесконечно долго. Следовательно, наблюдатель, находящийся в центре, никогда не сможет получить никакой информации о том, что происходит на расстоянии R или за этим расстоянием, и будет иметь право говорить о *горизонте* Вселенной на этом расстоянии. Следует, однако, отметить, что наблюдатель, находящийся в другом месте, будет видеть свой горизонт несколько иначе, чем первый. Следовательно, о пространственно закрытом характере модели, упомянуто при обсуждении (143.4), следует говорить, только имея в виду опыт отдельного наблюдателя.

г) **Допплер-эффект в деситтеровской Вселенной.** Зная теперь, как происходит движение частиц и распространение света в деситтеровской Вселенной, мы можем определить, как зависит длина волны света, принятого в начале координат, от движения излучающих свет свободно движущихся частиц.

Согласно выражению (144.15) для скорости света, свет, испущенный частицей, находящейся на расстоянии r , в момент «времени» t_1 , достигнет начала координат в более поздний момент «времени» t_2 :

$$t_2 = t_1 + \int_0^r \frac{dr}{1 - r^2/R^2}.$$

Дифференцируя это выражение, получаем, что промежуток «времени» δt_2 между двумя принятыми световыми вспышками будет связан с промежутком «времени» их излучения δt_1 следующим образом:

$$\delta t_2 = \left(1 + \frac{1}{1 - r^2/R^2} \frac{dr}{dt}\right) \delta t_1, \quad (144.16)$$

где dr/dt — радиальная скорость частицы во время излучения.

С другой стороны, координатный интервал δt_1 определяет величину собственного временного интервала δt_1^0 для наблюдателя, движущегося вместе с излучающей частицей. Согласно

третьему уравнению (144.4) и при условии, что движение происходит в плоскости $\theta = \pi/2$,

$$\delta t_1^0 = \frac{1 - r^2/R^2}{k} \delta t_1. \quad (144.17)$$

В начале же координат собственный временной интервал между вспышками равен

$$\delta t_2^0 = \delta t_2. \quad (144.18)$$

Отсюда тем же методом, что и в § 116, комбинируя три только что полученных уравнения, получаем изменение длины волны $\delta\lambda$ света, принятого в центре:

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta t_2^0}{\delta t_1^0} = \frac{1 + \frac{1}{1 - r^2/R^2} \frac{dr}{dt}}{\frac{1 - r^2/R^2}{k}},$$

или

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{k}{1 - r^2/R^2} + \frac{k}{[1 - r^2/R^2]^2} \frac{dr}{dt}. \quad (144.19)$$

где первый член зависит от орбитального параметра частицы k и расстояния r от центра во время излучения, а второй член зависит, кроме того, и от радиальной скорости частицы во время излучения.

Так как упомянутый выше параметр k должен быть существенно положительной величиной, то изменение длины волны, как нетрудно видеть, может быть как в красную, так и в фиолетовую сторону, в зависимости от величины и знака скорости частицы dr/dt во время излучения. Когда скорость положительна, сдвиг происходит обязательно в сторону больших длин волн. Сдвиг же в противоположном направлении при отрицательной скорости будет происходить только в том случае, если второй член достаточно велик, чтобы скомпенсировать первый.

Например, в тот момент, когда частица находится в перигелии и не имеет радиальной компоненты движения, мы получим для величины красного смещения

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{k}{1 - r^2/R^2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{h^2}{r^2} - \frac{h^2}{R^2}}}{1 - r^2/R^2}, \quad (144.20)$$

где вместо k подставлено его значение из уравнения перигелия (144.8), а r — величина перигелия.

Таким образом, хотя в деситтеровской модели свет от удаленных объектов может испытывать как красное, так и фио-

летовое смещение, однако красное смещение все же несколько преобладает над фиолетовым. Это позволяет предположить, что с помощью деситтеровской модели нам в дальнейшем, во-первых, удастся объяснить, почему спектры ближайших к нам спиральных галактик испытывают, как было обнаружено Слайфером, преимущественно красное смещение, а не фиолетовое и, во-вторых, удастся получить линейную зависимость красного смещения от расстояния, которая была открыта благодаря фундаментальному труду Хаббла и Хьюмасаона.

Чтобы оценить перспективы, открывающиеся в этом направлении, недостаточно основываться только на выражении (144.19) для обобщенного доплер-эффекта. Дело в том, что указанная формула только в том случае позволяет правильно предсказывать, какова будет длина волны принятого света, если известны орбита источника и положение его на орбите во время излучения. Поэтому, для того чтобы делать предсказания, касающиеся реальной Вселенной, необходимо еще сделать какие-то предположения относительно орбит и расположения частиц в реальном мире.

На первый взгляд самой естественной с этой точки зрения может показаться гипотеза, согласно которой физические условия, наблюдаемые в непосредственной близости от нас, в целом почти не зависят от времени. По этой гипотезе, число частиц (туманностей), попадающих в данное время внутрь области, доступной наблюдению, примерно равно числу частиц, покидающих ее после того, как они достигли внутри нее своего перигелия.

Однако эта гипотеза динамического равновесия, как показал анализ, проведенный автором [91], не сулит надежд на разрешение поставленных задач. Конечно, согласно (144.19) и (144.20) красное смещение будет несколько преобладать над фиолетовым, так как красное смещение в спектрах движущихся частиц начинается до того, как они достигнут перигелия, и продолжается все время после. Тем не менее это едва ли может объяснить почти полное отсутствие фиолетового смещения, найденного только лишь у небольшого числа ближайших к нам туманностей, и вряд ли позволит получить ту довольно строгую линейную зависимость красного смещения от расстояния, которая следует из наблюдений.

Более обещающей казалась другая гипотеза, предложенная Вейлем [92] и исследованная им самим и Робертсоном [88]. Эта гипотеза позволяла надеяться получить линейную зависимость красного смещения от расстояния. Суть ее состоит в том, что туманности реальной Вселенной предполагаются лежащими на пучке геодезических, выходящих из общей точки в прошлом.

Чтобы по существу понять гипотезу Вейля, удобно перейти к координатам Робертсона, которые, как было показано в § 142,

приводят к очень простому выражению для интервала:

$$ds^2 = -e^{2kt} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2. \quad (144.21)$$

Записывая с помощью этих координат уравнение геодезической для покоящейся частицы:

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0,$$

где пространственные составляющие «скорости» $\frac{dr}{ds} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0$, а символы Кристоффеля определяются уравнениями (98.5), получаем, что ускорения равны нулю. Таким образом, если частицы покоятся относительно r , θ , и φ в первый момент, то они будут покоиться относительно этих координат и дальше.

Гипотеза Вейля состоит в следующем: предполагается, что туманности реальной Вселенной в совокупности представляют собой однородно распределенную систему свободных частиц, которые, совершая только малые индивидуальные движения, в целом покоятся относительно введенных нами сейчас пространственных координат. Нетрудно показать, что из вида интервала ds^2 равенство собственного времени и координатного времени следует не только для частиц, покоящихся в центре, но и вообще для всех частиц, покоящихся относительно координат r , θ , φ . Кроме того, видно, что любую из этих частиц можно считать центральной без какого-либо изменения формы интервала ds^2 . Следовательно, все покоящиеся туманности можно считать *эквивалентными* в том смысле, что наблюдатели, находящиеся на них, будут видеть явления, происходящие во Вселенной, примерно одинаково.

Хотя частицы предполагаются покоящимися относительно выбранной нами системы координат, тем не менее собственное расстояние между ними, измеряемое жесткой линейкой, будет, конечно, меняться со временем ввиду зависимости $g_{\mu\nu}$ от t . Поэтому свет, излучаемый частицами, должен испытывать *доплеровское смещение*.

Из формулы для интервала ds^2 можно получить радиальную скорость света в выбранных нами координатах:

$$\frac{dr}{dt} = \pm e^{-kt}.$$

Из этого выражения можно найти момент t_2 , когда свет достигнет начала координат, если момент испускания был t_1 ,

а излучающая частица закреплена на расстоянии r от центра:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-kt} dt = \int_0^r dr = r = \text{const.}$$

Дифференцируя это равенство, получаем уравнение

$$\delta t_2 = e^{k(t_2 - t_1)} \delta t_1,$$

связывающее промежуток времени δt_2 между двумя световыми вспышками, зафиксированными приемником, с промежутком времени δt_1 между этими же вспышками на источнике. Отсюда легко получить общее выражение для доплеровского смещения, если учесть тот факт, что t является собственным временем как для наблюдателя, расположенного в центре, так и для наблюдателя, расположенного около частицы:

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta t_2}{\delta t_1} = e^{k(t_2 - t_1)}. \quad (144.22)$$

Для не очень больших r это выражение можно записать приближенно:

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} \approx k(t_2 - t_1) \approx kr. \quad (144.23)$$

С другой стороны, как будет подробно показано в § 179 для общего случая нестатических однородных моделей, расстояние r в первом приближении пропорционально расстоянию, определенному астрономическими методами. Следовательно, распределение туманностей в модели де Ситтера, соответствующее гипотезе Вейля, приводит приблизительно к такому соотношению между красным смещением и расстоянием, какое наблюдается в реальном мире.

Однако следует отметить, что этот результат является в равной мере следствием как внутренних свойств деситтеровской Вселенной, так и нашего предположения относительно пространственно-временного распределения туманностей. Если в формулах преобразования координат (142.8) изменить знак перед членом $-t/R$ и перед $(R/2) \ln \sqrt{1 - r^2/R^2}$, то вместо робертсоновского выражения для интервала в модели де Ситтера получится аналогичное выражение, которое приведет не к разлетающимся, а к сближающимся галактикам, т. е. в этом случае вместо красного смещения можно получить доплеровское смещение в фиолетовую сторону. Однако гипотеза Вейля является очень привлекательной с той точки зрения, что она позволяет рассматривать

частицы (туманности) совершенно равноправно по отношению друг к другу, т. е. ни одна из туманностей не является выделенной и явления природы наблюдаются на всех туманностях совершенно одинаково.

§ 145. Сравнение модели де Ситтера с реальной Вселенной

Наиболее удовлетворительной чертой модели де Ситтера является то, что с ее помощью можно объяснить линейную зависимость красного смещения от расстояния, обнаруженную в реальной Вселенной Хабблом и Хьюмасоном. Для этого нужно только подходящим способом выбрать распределение движущихся частиц.

Уравнение (144.23) дает для красного смещения

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = Hr^* \quad (145.1)$$

а астрономические данные (см. § 177, г) позволяют получить приближенное численное значение для H^{**} :

$$H \approx 6 \cdot 10^{-28} \text{ см}^{-1} \approx 5,7 \cdot 10^{-10} \text{ (световых лет)}^{-1} \quad (145.2)$$

С другой стороны, из (142.9) и (143.4) можно H выразить следующим образом:

$$H \equiv k = \frac{1}{R} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}, \quad (145.3)$$

откуда

$$R = 1,66 \cdot 10^{27} \text{ см} \approx 1,75 \cdot 10^9 \text{ световых лет} \quad (145.4)$$

и

$$\Lambda = 1,08 \cdot 10^{-54} \text{ см}^{-2}. \quad (145.5)$$

Эти результаты можно сравнить с результатами (141.3), (141.4) в эйнштейновской модели. Легко видеть, что космологическая постоянная Λ в деситтеровской Вселенной значительно больше, чем в эйнштейновской. Тем не менее из уравнения (141.5) вытекает, что Λ по-прежнему достаточно мала и не может сколько-нибудь заметно влиять на планетарные орбиты. Вместе с тем расстояние R до горизонта деситтеровской Вселен-

*) За постоянной k из уравнения (144.23) в мировой литературе закрепилось название «постоянной Хаббла» и обозначение H . Поэтому, начиная с этого момента и ниже символ k переобозначен на H . (Прим. перев.)

**) Сейчас принято значение $1/H \approx 2 \cdot 10^{10}$ световых лет. С этим значением H получим $R = 2 \cdot 10^{26}$ см, $\Lambda = 7 \cdot 10^{-57}$ см². (Прим. ред.)

ной значительно меньше радиуса эйнштейновской Вселенной и, возможно, находится в опасном соседстве с тем радиусом порядка $3 \cdot 10^8$ световых лет, который является пределом видимости наших телескопов.

Наибольший же недостаток модели де Ситтера, который делает ее непригодной для реальной космологии, состоит в том, что, как было показано в § 143, точное выражение для интервала ds^2 соответствует абсолютно пустой Вселенной — без материи и без излучения. Существование материи и излучения в реальной Вселенной приводит к изменению выражения ds^2 для деситтеровского интервала. И, как мы покажем в § 183, эти изменения должны быть вполне серьезными.

Интересно отметить хорошие и плохие черты двух рассмотренных статических моделей. Эйнштейновская модель допускает наличие конечной концентрации материи во Вселенной, но не позволяет объяснить красное смещение света, приходящего от удаленных галактик.

В то же время деситтеровская модель хорошо объясняет с помощью гипотезы Вейля красное смещение, но не допускает существование какой-либо конечной концентрации материи в реальной Вселенной. Нестатические модели, к которым мы обратимся во второй части этой главы, позволяют сочетать хорошие стороны обеих только что рассмотренных моделей.

ЧАСТЬ II

НЕСТАТИЧЕСКИЕ ОДНОРОДНЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

§ 146. Преимущества нестатических моделей

Статические вселенные Эйнштейна и де Ситтера имеют, конечно, очень большое значение, поскольку на их примере выясняется, какого рода космологические модели можно строить в рамках общей теории относительности. Более того, из дальнейшего будет следовать, что модели Эйнштейна и де Ситтера, возможно, довольно хорошо соответствуют реальной Вселенной в начале и в конце ее эволюции. Однако на современном этапе эволюции реальную Вселенную, очевидно, нельзя описывать ни одной из указанных моделей, так как в модели Эйнштейна отсутствует красное смещение света, приходящего от удаленных туманностей, а в модели де Ситтера пространство не может содержать ни вещества, ни излучения.

Мы должны поэтому обратиться к более общим моделям, если мы хотим описать реальную Вселенную. Откажемся, например, от принятого ранее требования статичности и посмотрим, какими

свойствами будет обладать модель, у которой интервал ds^2 зависит от времениподобной координаты x^4 .

Есть несколько соображений в пользу такого шага. Во-первых, совершенно очевидно, что всякий отказ от ограничений приводит к большей общности и тем самым расширяет область применимости теории. Конечно, нестатические модели, к которым мы теперь обратимся, математически гораздо более сложны, чем статические, однако история познания Вселенной не дает никаких оснований *априорно* требовать от природы математической простоты. Во-вторых, если на уровне прежних знаний, когда наблюдению были доступны только звезды внутри нашей собственной Галактики, наши предшественники и имели все основания приписывать Вселенной статический характер, то теперь, после открытия красного смещения света, приходящего от внегалактических туманностей, у нас, наоборот, есть основания утверждать, что Вселенная отнюдь не является статической. Наличие красного смещения по меньшей мере означает, что внегалактические туманности не покоятся друг относительно друга, а, напротив, взаимно разбегаются. В-третьих, даже если бы можно было придумать какое-нибудь иное объяснение красному смещению, все равно в природе есть процессы, которые свидетельствуют о необходимости обратиться к изучению другой модели — модели де Ситтера, звезд. Излучение звезд происходит, по-видимому, за счет их массы, а изменение массы, если только оно не компенсируется каким-нибудь до сих пор неизвестным способом, приводит к изменению гравитационного поля со временем [93], т. е. обязательно к нестатической Вселенной. И наконец, в дальнейшем мы увидим, что даже такая модель, как статическая Вселенная Эйнштейна, не может находиться в статическом состоянии как угодно долго, но обязательно под действием возмущений начнет сжиматься или расширяться [94].

Отказываясь от статичности, мы приходим к большой группе однородных нестатических моделей*), теоретические основы которых были заложены Фридманом [84]. С космологической точки зрения эти модели были впервые рассмотрены Лемэтром [96].

§ 147. Предположения, лежащие в основе нестатических моделей

Начнем изучение новой группы моделей с того, что покажем, как вывести выражение для нестатического интервала. Первый вполне удовлетворительный вывод этого выражения принадле-

*) Превосходный обзор по статическим и нестатическим моделям, охватывающий период времени вплоть до 1932 г., можно найти в работе [95].

жит Робертсону [85]*), который построил свой вывод на двух простых геометрических предположениях: во-первых, в крупномасштабном приближении пространство — время можно разделить на собственное пространство и ортогональное ему космологическое время, т. е. выражение для интервала можно привести к виду

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j + dt^2 \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

и, во-вторых, в том же крупномасштабном приближении пространство — время является пространственно однородным и изотропным. Другой вывод был предложен автором этой книги (см. [93], § 146) на основании чисто физических предположений, но эти предположения оказались не самыми простыми и критичными. Ниже будет изложен несколько похожий вывод, в котором предполагается только пространственная изотропия. Это допущение, как будет видно с самого начала, имеет непосредственное отношение к наблюдениям.

Как следует из результатов Хаббла, крупномасштабные свойства Вселенной в пределах видимости 100-дюймового телескопа Маунт — Вильсон не зависят сколько-нибудь существенным образом от направления наблюдения. Это означает, что, с нашей точки зрения — точки зрения наблюдателей, размещенных на одной из галактик или туманностей, составляющих видимую часть Вселенной, — окружающий нас мир является пространственно изотропным. Примем, что и для любого наблюдателя, неподвижного в среднем относительно окружающей его материи, свойства Вселенной в больших масштабах не зависят от направления. Иными словами, предположим, что все физические явления, какие мог бы обнаружить любой из указанных выше наблюдателей, свидетельствуют о пространственной изотропности мира.

Этой единственной гипотезы нам будет вполне достаточно, чтобы, пользуясь принципами релятивистской механики, получить искомое выражение для интервала ds^2 . С принятием подобной гипотезы мы отказываемся от антропоцентрического взгляда на вещи, и, с этой точки зрения, гипотеза разумна, так как естественно считать, что наше местонахождение во Вселенной не является выделенным, т. е. что любые наблюдения, какие мы можем производить с Земли, с одинаковым успехом можно было бы производить и из любого другого аналогичного места во Вселенной. Однако следует все же сделать несколько замечаний относительно этой гипотезы, прежде чем приступить к изучению вытекающих из нее следствий.

Во-первых, нужно иметь в виду, что эта гипотеза представляет собой некоторый принцип, приблизительно справедливый

*) Более ранний вывод Фридмана не был полностью удовлетворительным. (Замечание, с которым нельзя согласиться. (Прим. ред.))

только по отношению к величинам, усредненным по областям достаточно протяженным, содержащим большое число туманностей. Во-вторых, пространственной изотропностью будут обладать, как уже говорилось, только те наблюдения, которые производятся наблюдателем, покоящимся относительно окружающей его материи. Для наблюдателей, движущихся относительно своего окружения, наблюдаемые явления, конечно, будут зависеть от направления относительного движения.

Однако самое главное, и это следует подчеркнуть,— принятое предположение нужно рассматривать только как рабочую гипотезу, соответствующую современному состоянию техники наблюдений, которую необходимо будет подвергнуть пересмотру, если потребуются учесть более тонкие детали в наблюдаемом нерегулярном распределении туманностей. Возможно даже, что ее придется изменить коренным образом, если более мощные телескопы обнаружат систематическое нарушение однородности в разных частях Вселенной. Гипотеза изотропии отнюдь не является таким фундаментальным законом природы, как принцип относительности. Скорее всего она представляет собою некое утверждение, позволяющее определить тот тип космологической модели, к изучению которого мы собираемся приступить*). При этом нужно все время иметь в виду, что гипотеза пространственной изотропии не обязательно должна согласоваться со всеми фактами в реальной Вселенной и что, даже если полученная с ее помощью модель окажется в состоянии объяснить некоторые космологические явления, все равно нужно быть всегда готовым внести в нее поправки, которые могут улучшить теорию или сделать ее применимой к более широкому кругу явлений. К этому замечанию мы еще вернемся впоследствии.

§ 148. Вывод формулы интервала из предположения о пространственной изотропии

Дадим теперь подробный вывод общей формулы интервала для того класса моделей, которые мы собираемся обсудить. Согласно гипотезе изотропии можно, очевидно, с самого начала так выбрать систему координат, чтобы интервал был сферически симметричен относительно начала отсчета. При этом начало отсчета можно поместить в какой угодно точке, лишь бы она была неподвижна относительно непосредственно окружающей ее материи. Кроме того, имея в виду дальнейшее, удобнее всего принять — и мы, очевидно, можем это сделать, — что наша система

*) Этот подход отличается от точки зрения Милна [97], который однородность Вселенной считает фундаментальным принципом, позволяющим вывести даже законы гравитации.

координат является сопутствующей, иными словами, ее пространственную часть можно представить в виде сетки, ячейки которой выбраны так, что они объединяют ближайшие частицы (туманности) модели и движутся вместе с ними. Наиболее общее сферически симметричное выражение для интервала в сопутствующей системе отсчета имеет вид

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - e^\mu (r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + e^\nu dt^2 + 2a dr dt. \quad (148.1)$$

Мы начнем наше исследование именно с этой формы интервала, вместо того чтобы брать за исходный пункт более простые выражения, выведенные в §§ 94 и 98. Дело в том, что мы выбрали сопутствующую систему координат, и поэтому потребуется специально обсудить, можно ли вводить какие-либо упрощения, не нарушая предположения о сопутствующем характере выбранной системы отсчета. Легко, однако, показать, что сопутствующую систему координат можно преобразовать таким образом, чтобы она не перестала быть сопутствующей и в то же время выражение для интервала приняло более простой вид — такой же, как в § 98.

Преобразования координат, которые не нарушают сопутствующего характера системы отсчета, должны сохранить следующие соотношения:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad (148.2)$$

ибо в сопутствующей системе координат пространственные компоненты «скорости» частиц должны равняться нулю.

Не нарушая соотношений (148.2), можно ввести новую времениподобную переменную t' , определяя ее соотношением

$$dt' = \eta (a dr + e^\nu dt). \quad (148.3)$$

Здесь η — интегрирующий множитель, который превращает правую часть (148.3) в полный дифференциал. Согласно (148.3) имеем

$$e^\nu dt'^2 + 2a dr dt = \frac{dt'^2}{\eta^2 e^\nu} - \frac{a^2}{e^\nu} dr^2. \quad (148.4)$$

Подставляя (148.4) в (148.1) и опуская штрихи, получаем новое выражение для интервала:

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - e^\mu (r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + e^\nu dt'^2, \quad (148.5)$$

где λ , μ , ν являются функциями r и нового t . Соотношения (148.2) выполняются по-прежнему, поскольку r , θ , φ — те же

самые переменные, что и прежде. В результате преобразования мы привели интервал к виду, который был исследован Динглем (§ 100).

Чтобы произвести дальнейшие упрощения, рассмотрим компоненты гравитационного ускорения, испытываемого свободной пробной частицей в нашей модели. Эти компоненты определяются из уравнений геодезической (74.13) и для случая частицы, покоящейся относительно r , θ и φ , равны

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = -\Gamma_{44}^1 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2, \quad \frac{d^2 \theta}{ds^2} = -\Gamma_{44}^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2, \quad \frac{d^2 \varphi}{ds^2} = -\Gamma_{44}^3 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2. \quad (148.6)$$

Так как эта пробная частица покоится относительно сопутствующей системы координат, то она должна также покоиться и относительно локального наблюдателя, который движется вместе с непосредственно окружающей его материей. Однако, согласно нашей гипотезе об изотропии пространства, физические результаты, получаемые таким наблюдателем, не должны зависеть от направления. Следовательно, ускорения могут быть равны только нулю*). Мы приходим к выводу, что три символа Кристоффеля в (148.6) должны также равняться нулю. Но из формул Дингля (100.2) тогда сразу же следует, что

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0.$$

Эти условия накладывают ограничения на величину v , которая входит в выражение для интервала (148.5). В частности, отсюда следует, что v зависит только от t , и это позволяет, не нарушая сопутствующего характера системы координат, ввести новую временную координату t' , определяемую следующим образом:

$$t' = \int e^{1/2 v} dt. \quad (148.7)$$

После этого преобразования выражение для интервала приводится к виду

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - e^\mu (r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt'^2, \quad (148.8)$$

откуда видно, что пространство—время удалось разделить на собственно пространство и ортогональное ему универсальное

*) То, что система координат является сопутствующей, не может в общем случае служить необходимым условием для равенства нулю ускорения, так как сила тяжести может быть уравновешена градиентом давления.

время t без привлечения дополнительных гипотез. Из выражения (148.8) следует также, что время, измеряемое локальным наблюдателем, расположенным неподвижно относительно окружающей его материи, совпадает с собственным временем:

$$t = t_0,$$

а измеряемые этим же наблюдателем собственные расстояния между имеющимися в модели частицами равны

$$\delta l_1 = e^{1/2\lambda} \delta r, \quad \delta l_2 = e^{1/2\mu} r \delta \theta, \quad \delta l_3 = e^{1/2\mu} r \sin \theta \delta \varphi$$

при условии, что в модели приращения координат остаются постоянными.

Далее, можно определить относительные скорости изменения собственных расстояний в зависимости от изменения собственного времени:

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \ln \delta l_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial t_0} \ln \delta l_2 = \frac{\partial}{\partial t_0} \ln \delta l_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial t},$$

откуда сразу же, если учесть, что мир для локального наблюдателя пространственно изотропен, следует очень полезное равенство:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{\partial \mu}{\partial t}. \quad (148.9)$$

Этот результат показывает, что формулу интервала можно упростить еще больше, если воспользоваться преобразованием

$$\frac{dr'}{r'} = e^{1/2(\lambda - \mu)} \frac{dr}{r}$$

или

$$\ln r' = \int e^{1/2(\lambda - \mu)} \frac{dr}{r}. \quad (148.10)$$

От этой подстановки система координат не перестает быть сопутствующей, так как если в первоначальной системе координат скорость частицы dr/ds равна нулю, то и в новой системе координат скорость частицы dr'/ds , определяемая выражением

$$\begin{aligned} \frac{1}{r'} \frac{dr'}{ds} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\int e^{1/2(\lambda - \mu)} \frac{dr}{r} \right] \frac{dr}{ds} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\int e^{1/2(\lambda - \mu)} \frac{dr}{r} \right] \frac{dt}{ds} = \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\int e^{1/2(\lambda - \mu)} \frac{dr}{r} \right] \frac{dr}{ds} + \frac{1}{2} \left[\int e^{1/2(\lambda - \mu)} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} - \frac{\partial \mu}{\partial t} \right) \frac{dr}{r} \right] \frac{dt}{ds}, \end{aligned}$$

тоже будет равна нулю согласно равенству (148.9). Подставляя (148.10) в (148.8) и опуская штрихи, получаем простое выражение, которое совпадает со вторым вариантом формулы интервала из § 98:

$$ds^2 = -e^{\mu} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2, \quad (148.11)$$

где μ теперь является функцией новых r и t .

Чтобы продолжить вывод, рассмотрим снова выражение для собственного расстояния

$$\delta l_0 = e^{\frac{1}{2}\mu} \delta r$$

между имеющимися внутри модели двумя частицами, разделенными постоянным координатным промежутком δr . Относительная скорость изменения расстояния δl_0 при изменении собственного времени равна

$$\frac{\partial \ln \delta l_0}{\partial t_0} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial t},$$

но, согласно предположению о пространственной изотропии, эта величина не должна, с точки зрения локального наблюдателя, ни возрастать, ни уменьшаться при изменении r . Отсюда следует:

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \ln \delta l_0}{\partial t_0} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mu}{\partial r \partial t} = 0, \quad (148.12)$$

а значит, μ представляет собой сумму двух функций, каждая из которых зависит только от одного из аргументов r или t :

$$\mu(r, t) = f(r) + g(t). \quad (148.13)$$

Подстановка (148.13) в (148.11) приводит к более конкретному выражению для интервала:

$$ds^2 = -e^{f(r)+g(t)} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2. \quad (148.14)$$

Чтобы сделать следующий шаг, можно воспользоваться известной теоремой римановой геометрии (теоремой Шура), из которой следует, что если подпространство (r, θ, φ) при постоянном t изотропно в каждой точке, то оно с необходимостью и однородно, а это позволяет заменить $e^{f(r)}$ решением известного вида. Однако, чтобы сделать результаты физически более наглядными, мы пойдем другим путем.

Рассмотрим выражение для тензора энергии — импульса (98.6), полученное в § 98 на основании формулы интервала ds^2 ,

определяемой уравнением (148.14). Легко видеть, что отличны от нуля только следующие компоненты:

$$\begin{aligned} 8\pi T_1^1 &= -e^{-\mu} \left(\frac{f'^2}{4} + \frac{f'}{r} \right) + \ddot{g} + \frac{3}{4} \dot{g}^2 - \Lambda, \\ 8\pi T_2^2 &= 8\pi T_3^3 = -e^{-\mu} \left(\frac{f''}{2} + \frac{f'}{2r} \right) + \ddot{g} + \frac{3}{4} \dot{g}^2 - \Lambda, \\ 8\pi T_4^4 &= -e^{-\mu} \left(f'' + \frac{f'^2}{4} + \frac{2f'}{r} \right) + \frac{3}{4} \dot{g}^2 - \Lambda, \end{aligned} \quad (148.15)$$

где

$$\mu(r, t) = f(r) + g(t),$$

штрихи означают производные по r , а точки — производные по t . Конечно, эти формулы дают компоненты тензора энергии — импульса в заданной системе координат (r, θ, φ, t) . Однако систему координат можно при желании изменить. Пусть в некоторой точке имеется неподвижный относительно (r, θ, φ) локальный наблюдатель. Собственную систему этого наблюдателя (x_0, y_0, z_0, t_0) можно выбрать таким образом, чтобы соотношения

$$dx_0 = e^{1/2\mu} dr, \quad dy_0 = e^{1/2\mu} r d\theta, \quad dz_0 = e^{1/2\mu} r \sin \theta d\varphi, \quad dt_0 = dt$$

выполнялись в окрестности этой точки. При этом, если согласно общим правилам преобразования тензоров привести указанные выше компоненты к собственным координатам наблюдателя, то окажется, что тензор энергии — импульса в новых координатах будет иметь тот же вид. Например:

$$T_{01}^1 = \frac{\partial x_0^1}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x_0^1} T_\beta^\alpha = e^{1/2\mu} e^{-1/2\mu} T_1^1 = T_1^1.$$

Следовательно, выражения (148.15) дают компоненты тензора энергии — импульса и в собственной системе координат, используемой локальным наблюдателем, неподвижным относительно окружающей его материи. А так как, по нашему предположению, мир является пространственно изотропным для всех наблюдателей подобного рода, то это значит, что измеряемые натяжения должны быть симметричны относительно направлений x , y и z . Иными словами,

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3, \quad (148.16)$$

откуда, с учетом (148.15), получаем уравнение, определяющее

вид функций $f(r)$:

$$\frac{f'^2}{4} + \frac{f'}{r} = \frac{f''}{2} + \frac{f'}{2r},$$

или

$$\frac{d^2f}{dr^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{df}{dr} \right)^2 - \frac{1}{r} \frac{df}{dr} = 0. \quad (148.17)$$

В качестве первого интеграла этого уравнения имеем

$$\frac{df}{dr} = c_1 r e^{\frac{1}{2}f},$$

где c_1 — постоянная интегрирования. В качестве второго интеграла получаем

$$e^{f(r)} = \frac{1}{[1 - c_1 r^2 / 4c_2]^2}, \quad (148.18)$$

где c_2 — вторая постоянная интегрирования.

Этим завершается наш вывод. Вернувшись к исходному выражению для интервала (148.14), включим постоянную $1/c_2^2$ в множитель $e^{g(t)}$ и обозначим, как обычно,

$$-\frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{R_0^2}, \quad (148.19)$$

где R_0^2 — постоянная, которая может быть положительной, отрицательной или бесконечной. В результате получаем окончательное выражение:

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2, \quad (148.20)$$

где $g(t)$ — все еще неопределенная функция времени t .

Мы привели такой длинный вывод, так как нам хотелось показать с помощью цепочки рассуждений, каждое звено которой имеет ясный физический смысл, что предположение о крупномасштабной пространственной изотропии Вселенной, которую обнаруживает наблюдатель, находящийся в покое относительно своей окрестности, вместе с принципами релятивистской механики приводят с необходимостью к указанному выражению для интервала. Поэтому, если мы в дальнейшем разочаруемся по каким-либо причинам, философским или наблюдательным, в результатах, полученных в рассматриваемой модели, то нам при-

дется либо видоизменить принципы релятивистской механики, либо отказаться от мысли, что все наблюдатели во Вселенной увидят все явления в больших масштабах не зависящими от направления.

§ 149. Общие свойства интервала

а) **Некоторые формулы для интервала.** Выражение для интервала ds^2 в нестатической модели

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2 \quad (149.1)$$

можно видоизменить путем преобразования координат. Это бывает удобно либо для приложений, либо для лучшего понимания внутренней геометрии модели.

С помощью очевидной подстановки

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (149.2)$$

получаем

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2) + dt^2, \quad (149.3)$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Это выражение наиболее убедительно показывает, что модель в каждой точке пространственно изотропна.

После подстановки

$$\bar{r} = \frac{r}{1 + r^2/4R_0^2} \quad (149.4)$$

интервал ds^2 принимает вид

$$ds^2 = - e^{g(t)} \left(\frac{d\bar{r}^2}{1 - \bar{r}^2/R_0^2} + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) + dt^2. \quad (149.5)$$

Это выражение интересно сравнить с одним из известных выражений для статического эйнштейновского интервала *). Подстановка

$$\bar{r} = R_0 \sin \chi \quad (149.6)$$

позволяет получить еще одно выражение:

$$ds^2 = - R_0^2 e^{g(t)} (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2. \quad (149.7)$$

*) При сравнении преобразования (149.4) с преобразованием (138.2), рассмотренным в связи с эйнштейновской моделью, следует отметить, что \bar{r} и \bar{r} в (149.4) аналогичны соответственно ρ и r в (138.2).

Наконец, переходя к большему числу измерений с помощью обозначений

$$\begin{aligned} z_1 &= R_0 \sqrt{1 - \bar{r}^2/R_0^2}, & z_2 &= \bar{r} \sin \theta \cos \varphi, \\ z_3 &= \bar{r} \sin \theta \sin \varphi, & z_4 &= \bar{r} \cos \theta, \end{aligned} \quad (149.8)$$

где

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = R_0^2, \quad (149.9)$$

получаем следующий результат:

$$ds^2 = -e^{g(t)} (dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^2 + dz_4^2) + dt^2, \quad (149.10)$$

который позволяет в каждый данный момент рассматривать нашу модель как поверхность, погруженную в евклидово пространство большего числа измерений.

б) **Внутренняя геометрия модели.** Как и в случае статической эйнштейновской Вселенной, тип геометрии еще не определяется видом интервала, так как еще можно делать различные предположения о связности и об идентификации точек.

Однако, судя по последнему выражению, проще всего пространственную часть нестатической Вселенной рассматривать в каждый данный момент t как полную трехмерную сферу, погруженную в четырехмерное евклидово пространство (z_1, z_2, z_3, z_4) и определяемую с помощью уравнения

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = R_0^2. \quad (149.11)$$

Так как согласно (149.10) координатному расстоянию dz_1 в момент t соответствует собственное расстояние

$$dl_0 = e^{1/2g(t)} dz_1, \quad (149.12)$$

а для других пространственных координат расстояние записывается аналогично, то радиус сферической поверхности должен быть, очевидно, равен

$$R = R_0 e^{1/2g(t)} \quad (149.13)$$

Эту величину часто называют *радиусом нестатической Вселенной*, а о геометрии этой Вселенной говорят как о геометрии четырехмерной сферы с радиусом, зависящим от времени. Следует, однако, отметить, что радиус R_0 , согласно определению (148.19), может быть в равной мере действительным, мнимым и бесконечным.

Если предположить, что радиус действителен, то полный собственный пространственный объем модели в некоторый

выбранный момент, согласно (149.7), равен

$$v_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} R_0^3 e^{3/2 g(t)} \sin^2 \chi \sin \theta d\chi d\theta d\varphi = 2\pi^2 R_0^3 e^{3/2 g(t)}, \quad (149.14)$$

а полная собственная кругосветная длина Вселенной равна

$$l_0 = 2\pi R_0 e^{1/2 g(t)}. \quad (149.15)$$

В случае, когда пространственная геометрия является эллиптической, а не сферической, полученные величины должны быть в два раза меньше.

Если радиус R_0 бесконечен или есть мнимая величина, модель является пространственно открытой, а не закрытой. Собственный объем в этом случае удобнее записать, исходя из выражения для интервала ds^2 (149.5):

$$v_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{3/2 g(t)}}{\sqrt{1 + \bar{r}^2/A^2}} \bar{r}^2 \sin \theta d\bar{r} d\theta d\varphi = \infty,$$

где A^2 — положительная постоянная, которая может принимать и бесконечное значение. Верхний предел интеграла по \bar{r} должен быть тоже взят бесконечным, поскольку знак интервала ds^2 при этом не меняется, т. е. физический смысл интервала ds^2 сохраняется при всех значениях \bar{r} . Вычисление интеграла показывает, что открытые модели имеют бесконечный собственный объем.

Симметричная форма, к которой нам удалось свести интервал (149.10) ценою перехода в пространство большего числа измерений, очень полезна для ясной демонстрации пространственной однородности модели, упоминавшейся уже в связи с (148.14). То, что предположение о пространственной изотропии во всех точках пространства и времени для покоящегося наблюдателя приводит к разделению на пространство и ортогональное к нему время и к однородности пространства, есть на самом деле интересное следствие теоремы Шура, известной в римановой геометрии. Именно благодаря этому результату изучаемые здесь модели Вселенной называются нестатическими *однородными* космологическими моделями.

в) **Сдвиг начала координат.** Поскольку модель пространственно однородна, начало координат можно выбрать в любой точке, и это не должно влиять на вид интервала. Действительно, нетрудно показать, что при перемещении начала координат из одной точки в другую вид интервала не меняется, но интереснее всего то, что координаты нового центра в старой системе отсчета оказываются связанными с координатами старого центра в новой

системе отсчета вполне естественным соотношением. Это мы сейчас и продемонстрируем [98].

Для дальнейшего изложения выберем систему координат $(\bar{r}, \theta, \varphi, t)$ в соответствии с третьей формулой интервала ds^2 (149.5):

$$ds^2 = -e^{g(t)} \left(\frac{d\bar{r}^2}{1 - \bar{r}^2/R_0^2} + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) + dt^2. \quad (149.16)$$

Рассмотрим *туманность*, покоящуюся в начале координат, и *наблюдателя*, закрепленного в точке $\bar{r}=a$. Затем переместим начало координат в точку, где находится наблюдатель.

В первоначальной системе координат S можно следующим образом фиксировать координаты туманности и наблюдателя:

Система S	\bar{r}	θ	φ
Туманность	0
Наблюдатель	a	0	0

(149.17)

Угловые координаты в начале отсчета, конечно, произвольны, для наблюдателя же удобнее всего угловые координаты выбрать так, чтобы $\theta=\varphi=0$. Этот выбор можно всегда сделать, так как отсчет углов можно начинать с произвольного направления.

Посмотрим теперь, что произойдет, если перейти к новой системе координат S' того же типа, что и S , но с началом отсчета, помещенным в точку, где находится наблюдатель. Чтобы произвести это преобразование, проще всего перейти к промежуточной системе координат, определяемой выражением интервала (149.10), согласно которому наше пространство можно трактовать как поверхность, погруженную в евклидово пространство с числом измерений на единицу большим. С помощью формул преобразования (149.8) мы сначала перейдем к новой системе координат S_z , в которой пространственные координаты для туманности и наблюдателя записываются следующим образом:

Система S_z	z_1	z_2	z_3	z_4
Туманность	R_0	0	0	0
Наблюдатель	$R_0 \sqrt{1 - a^2/R_0^2}$	0	0	a

(149.18)

Затем перейдем к системе координат S'_z . Соответствующее преобразование можно рассматривать как поворот в плоскости $z_1 z_4$:

$$\begin{aligned} z'_1 &= z_1 \cos \alpha + z_4 \sin \alpha, & z'_2 &= z_2, \\ z'_4 &= -z_1 \sin \alpha + z_4 \cos \alpha, & z'_3 &= z_3. \end{aligned} \quad (149.19)$$

где

$$\sin \alpha = \frac{a}{R_0}, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{a^2}{R_0^2}}. \quad (149.20)$$

В результате новые координаты туманности и наблюдателя будут

Система S'_z	z'_1	z'_2	z'_3	z'_4	(149.21)
Туманность	$R_0 \sqrt{1 - a^2/R_0^2}$	0	0	$-a$	
Наблюдатель	R_0	0	0	0	

Но последнее преобразование оставляет инвариантным выражение (149.10) и, кроме того, оставляет инвариантным и соотношение (149.9), которое выделяет в четырехмерном многообразии трехмерную поверхность, соответствующую физическому пространству. Следовательно, мы можем снова воспользоваться преобразованиями (149.8), чтобы перейти к системе координат S' , в которой выражение для интервала принимает прежний вид (149.16). Действуя таким образом, легко получаем координаты туманности и наблюдателя в системе S' :

Система S'	\bar{r}'	θ'	φ'	(149.22)
Туманность	a	π	..	
Наблюдатель	0	

Здесь значения всех угловых координат, за исключением одной безразличны.

Сравнивая таблицы (149.17) и (149.22), видим, что мы фактически перешли от первоначальной системы координат, где туманность находилась в центре $\bar{r}=0$, а наблюдатель — в $\bar{r}=a$, к новой системе координат, где выражение для интервала ds^2 осталось тем же (149.16), но в центре находится наблюдатель $\bar{r}'=0$, а туманность располагается в точке $\bar{r}'=a$. То, что соотношение между старыми и новыми координатами оказалось столь простым, конечно, следовало ожидать при подобного рода преобразовании. Однако мы сочли уместным привести здесь столь подробное доказательство, так как этот результат будет очень важен в дальнейшем.

г) **Физическая интерпретация интервала.** Согласно нашим общим правилам при физической интерпретации формул интервала в нестатической Вселенной мы должны каждому из предыдущих выражений для интервала сопоставить результаты измерений, производимых с помощью обыкновенной линейки и часов. Например, интервалу, записанному в первоначальном виде:

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2, \quad (149.23)$$

соответствует собственное расстояние dt_0 , которое, будучи измерено наблюдателем, расположенным неподвижно относительно r, θ, φ , окажется связанным с разностью координат следующим образом:

$$dt_0 = \frac{e^{1/2 g(t)}}{1 + r^2/4R_0^2} \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2}, \quad (149.24)$$

а интервал собственного времени dt_0 , измеряемый им с помощью своих часов, связан с интервалом координатного времени очень простым соотношением:

$$dt_0 = dt. \quad (149.25)$$

Конечно, для наблюдателей, движущихся относительно r, θ и φ , зависимость собственных расстояний и времени от разности координат будет более сложной.

Равенство (149.25) означает, что во всех приведенных выражениях для нестатического интервала координатное время t совпадает с собственным временем, которое отсчитывается по часам локального наблюдателя, расположенного неподвижно относительно среднего движения материи ближайшей к нему части Вселенной. Этот результат очень важен, так как, исходя из него, мы можем отождествить координату t с нашим собственным временем при текущих измерениях и при оценках протекшего и будущего времени. Собственно оценки временных масштабов, характеризующих астрономические процессы, производятся в терминах координаты t , и, если координату t путем простой подстановки заменить на другую времениподобную координату, никаких реальных изменений временных масштабов от этого не произойдет.

§ 150. Плотность и давление в нестатической Вселенной

Вплоть до настоящего момента мы никак не конкретизировали, какого вида материя должна заполнять нестатическую однородную модель. Мы только условились, как это принято в космологии, пренебрегать локальными особенностями, оперируя лишь большими масштабами. И, кроме того, предположили, что материя подчиняется уравнениям Эйнштейна

$$-8\pi T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu},$$

где, опять же с точки зрения больших масштабов, тензору энергии — импульса в интересующий момент времени и в выбранной точке пространства нужно приписать значение, усредненное соответствующим образом.

Теперь мы можем наделить материю, заполняющую модель, более конкретными свойствами. Предположим, что она представляет собою идеальную жидкость. С таким предположением имело смысл подождать до тех пор, пока не была установлена однородность модели. При неоднородном распределении можно было бы ожидать, что имеются потоки излучения из областей, содержащих большее количество светящегося вещества, в окружающее пространство. Поэтому материю нельзя было бы считать идеальной жидкостью, так как в случае идеальной жидкости этих потоков не может быть благодаря тому обстоятельству, отмеченному в § 86, что выражение для тензора энергии — импульса идеальной жидкости ограничивает круг возможных процессов. А именно, в идеальной жидкости могут происходить только адиабатические процессы без всякой передачи тепла, иными словами, не возможны никакие процессы, аналогичные передаче энергии с помощью теплового излучения от одной части материи к другой. Однако, установив, что изучаемые нами модели являются однородными, мы можем считать, что излучение, испускаемое туманностями, в любой наперед заданной достаточно большой области не возрастает и не убывает при обмене с окружающими областями, иными словами, мы можем сделать вполне определенное предположение, что материю реальной Вселенной, состоящую из туманностей и межгалактической пыли и излучения, можно с модельной точки зрения рассматривать как идеальную жидкость.

Отсюда сразу же вытекает, что для материи, заполняющей модель, мы можем воспользоваться тензором энергии — импульса идеальной жидкости, полученным в § 85:

$$T^{\mu\nu} = (\rho_{00} + p_0) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g^{\mu\nu} p_0, \quad (150.1)$$

где ρ_{00} и p_0 — собственные макроскопические плотность и давление, измеряемые локальным наблюдателем, расположенным неподвижно относительно жидкости, а dx^μ/ds — компоненты макроскопической «скорости» жидкости относительно рассматриваемой системы координат.

Если воспользоваться системой координат (r, θ, φ, t) , в которой интервал имеет вид

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2, \quad (150.2)$$

то выражения (150.1) можно значительно упростить. Так как указанная система координат является сопутствующей, то пространственные компоненты скорости должны равняться нулю:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0. \quad (150.3)$$

Временная же компонента скорости, как следует из вида интервала, равна

$$\frac{dt}{ds} = 1. \quad (150.4)$$

При этом отличными от нуля оказываются только следующие компоненты тензора энергии — импульса:

$$T^{11} = -g^{11}p_0, \quad T^{22} = -g^{22}p_0, \quad T^{33} = -g^{33}p_0, \quad T^{44} = p_{00}, \quad (150.5)$$

откуда, опуская индексы, получаем

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p_0, \quad T_4^4 = p_{00}. \quad (150.6)$$

С другой стороны, выражение (150.2) для интервала записано в стандартном виде. Это значит, что мы можем воспользоваться для тензора энергии — импульса формулами (98.6). Применяя эти формулы к данному конкретному выражению интервала и вводя с помощью (150.6) давление и плотность, легко находим

$$8\pi p_0 = -\frac{1}{R_0^2} e^{-g(t)} - \ddot{g} - \frac{3}{4} \dot{g}^2 + \Lambda \quad (150.7)$$

и

$$8\pi p_{00} = \frac{3}{R_0^2} e^{-g(t)} + \frac{3}{4} \dot{g}^2 - \Lambda, \quad (150.8)$$

где p_0 и p_{00} — локальные давление и плотность жидкости, заполняющей модель, а точки означают дифференцирование по времени.

В связи с этими уравнениями можно сделать несколько замечаний. Во-первых, можно видеть, что давление и плотность являются только функциями времени и в каждый момент t одинаковы во всех точках Вселенной. Это согласуется с пространственной однородностью модели, о чем мы уже говорили раньше. Во-вторых, легко видеть, что если считать $g(t)$ постоянной, не зависящей от времени, то давление и плотность оказываются такими же, как (139.3) и (139.4) в эйнштейновской Вселенной с радиусом $R = R_0 e^{1/2 g}$. Однако наиболее важным, по-видимому, является то, что в противоположность эйнштейновской модели, если $g(t)$ и в самом деле меняется со временем, то постоянная R_0 не обязана быть вещественной, а космологическая постоянная Λ не обязана быть положительной, чтобы плотность энергии p_{00} в модели была положительной, а давление p_0 — неотрицательным. Это особенно важно, так как освобождает нас от необходимости сохранять Λ -член и требовать, чтобы Вселенная была обязательно закрыта, предоставляя решение этого вопроса наблюдениям.

При интерпретации выражений (150.7) и (150.8) для плотности ρ_{00} и давления p_0 следует все время помнить, что эти величины относятся к идеальной жидкости, которая в рассматриваемых моделях заменяет материю и излучение реальной Вселенной. При такой замене естественно за ρ_{00} принять усредненную по достаточно большим областям Вселенной плотность суммарной энергии, заключенной внутри туманностей, в межгалактическом веществе и в межгалактическом излучении, при этом в плотность энергии, конечно, включается и наиболее достоверный в настоящее время вклад — энергия mc^2 , отвечающая массе туманностей. В качестве давления идеальной жидкости p_0 следует взять сумму трех парциальных давлений, возникающих, во-первых, из-за хаотического движения самих туманностей, во-вторых, из-за хаотического движения частиц вещества в межгалактических пространствах, и, в-третьих, из-за давления излучения, заполняющего огромные межгалактические пространства.

После того, как мы уяснили себе те факторы, которые создают давление p_0 и плотность ρ_{00} , мы можем приблизительно оценить парциальную плотность ρ_m энергии, которая относится непосредственно к собственной массе туманностей и других частиц вещества, присутствующих во Вселенной. Давление, отвечающее хаотическому движению огромных частиц — *туманностей*, составляет, согласно обычной кинетической теории, две трети от их кинетической энергии на единицу объема:

$$p = \frac{2}{3} \rho_k.$$

Эта величина, конечно, очень мала.

Межгалактическая *пыль* и другие частицы материи в межгалактических пространствах создают давление, которое изменяется в пределах от двух третей плотности кинетической энергии для медленных частиц,

$$p = \frac{2}{3} \rho_k,$$

до одной трети этой величины,

$$p = \frac{1}{3} \rho_k,$$

для частиц со скоростями, близкими к скорости света.

Наконец, *излучение* создает давление, которое в общем случае равно одной трети от плотности энергии,

$$p = \frac{1}{3} \rho_k.$$

Однако плотность кинетической энергии туманностей и медленных материальных частиц ничтожна по сравнению с плотностью

собственной массы частиц, следовательно, грубо говоря, мы можем принять, что

$$\rho_m = \rho_{00} - 3\rho_0, \quad (150.9)$$

где ρ_m составляет ту часть плотности энергии, которая непосредственно относится к массе туманностей и вещества, распыленного в огромных пространствах между ними. При этом уравнение (150.9) становится точным, когда давлением материи можно полностью пренебречь.

Комбинируя выражения (150.7) и (150.8), мы можем для плотности вещества во Вселенной написать следующее приближенное выражение

$$8\pi\rho_m = \frac{6}{R_0^2} e^{-g(t)} + 3\ddot{g} + 3\dot{g}^2 - 4\Lambda. \quad (150.10)$$

§ 151. Изменение энергии со временем

Подставляя компоненты тензора энергии — импульса (150.5) и (150.6) в общее уравнение релятивистской механики

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_\mu^\nu}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2} \mathfrak{T}^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (151.1)$$

для случая $\mu=4$ и имея в виду, что $g_{44}=1$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{00} \sqrt{-g}) + \frac{1}{2} p_0 \sqrt{-g} \left(g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial t} + g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial t} + g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial t} \right) = 0.$$

Или, подставляя вместо компонент метрического тензора их выражения из интересующей нас формулы интервала (150.2):

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2, \quad (151.2)$$

легко находим, что уравнение сводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_{00} r^2 \sin \theta e^{3/2 g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^3} \right) + p_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{r^2 \sin \theta e^{3/2 g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^3} \right) = 0. \quad (151.3)$$

Этому результату можно дать непосредственную физическую интерпретацию. Из выражения (151.2) следует, что в любой заданный момент времени t величина собственного объема, измеряемого локальным наблюдателем и отвечающего разности координат $\delta r \delta \theta \delta \varphi$ равна

$$\delta v_0 = \frac{r^2 \sin \theta e^{3/2 g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^3} \delta r \delta \theta \delta \varphi. \quad (151.4)$$

При этом, поскольку система отсчета является сопутствующей, то указанный элемент объема будет, с точки зрения локального наблюдателя, представляться объемом элемента жидкости, заключенного перманентно внутри рассматриваемой области координат. Поэтому, комбинируя (151.3) и (154.4), мы можем написать

$$\frac{d}{dt}(\rho_{00}\delta v_0) + \rho_0 \frac{d}{dt}(\delta v_0) = 0. \quad (151.5)$$

В результате получаем соотношение между изменением энергии $(\rho_{00}\delta v_0)$ элемента жидкости и работой, производимой данным элементом над окружающей средой при адиабатическом изменении объема.

Из уравнений (151.4) и (151.5) вытекает, что объем каждого элемента жидкости, заполняющей данную модель, должен возрастать со временем, если $g(t)$ — возрастающая функция времени, и уменьшаться, если $g(t)$ убывает. Более того, если ρ_0 — величина положительная и больше нуля, то и собственная энергия каждого элемента жидкости в данной модели будет либо убывать, если $g(t)$ возрастает, либо возрастать, если $g(t)$ убывает. Следовательно, за исключением частного случая, когда давление равно нулю, полная собственная энергия жидкости, вообще говоря, оставаться постоянной не будет, и закон сохранения энергии будет соблюден только при учете потенциальной энергии гравитационного поля, которую можно ввести тем же способом, как и в § 87.

Имея в виду дальнейшее, перепишем уравнение (151.3) в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}(\rho_{00}e^{\frac{1}{2}g(t)}) + \rho_0 \frac{d}{dt}(e^{\frac{1}{2}g(t)}) = 0. \quad (151.6)$$

Это, очевидно, можно сделать благодаря взаимной независимости координат r , θ , φ и t .

Справедливость последнего уравнения легко проверить прямой подстановкой выражений (150.7) и (150.8) для ρ_{00} и ρ_0 . Это и естественно, так как фундаментальное уравнение для компонент тензора энергии — импульса

$$-8\pi T^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}$$

содержит, как мы уже видели, всю ту информацию, которая содержится в уравнениях механики

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_{\mu}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{1}{2} \mathfrak{T}^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} = 0,$$

поскольку последние могут быть получены из него.

В дальнейшем нам часто будет удобно рассматривать (151.6) и (150.8) вместе, поскольку эти уравнения связывают давление и плотность жидкости с интервалом и позволяют уравнение второго порядка (150.7) заменить уравнением первого порядка (151.6).

§ 152. Изменение количества вещества со временем

С помощью приближенного выражения (150.9) для той части полной плотности энергии

$$\rho_m = \rho_{00} - 3p_0, \quad (152.1)$$

которая связана только с массой туманностей и межгалактического вещества, мы можем проследить изменение массы вещества, заключенного в модели, в зависимости от времени [99]. Подставляя (152.1) в (151.5), получаем

$$\frac{d}{dt} (\rho_m \delta v_0) + 3 \frac{d}{dt} (p_0 \delta v_0) + p_0 \frac{d}{dt} (\delta v_0) = 0. \quad (152.2)$$

Полагая, что

$$M = \rho_m \delta v_0 \quad (152.3)$$

представляет собой полную собственную массу туманностей и других частиц в заданном элементе объема, и используя (151.4), перепишем уравнение (152.2) в следующем виде:

$$-\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} = \frac{6p_0}{\rho_m} \frac{dg}{dt} + \frac{3}{\rho_m} \frac{dp_0}{dt}. \quad (152.4)$$

Этим уравнением и определяется относительная скорость изменения собственной массы вещества, находящегося внутри изучаемой модели.

Если предположить, что давление постоянно и равно нулю, то окажется, что и скорость изменения массы будет равна нулю, иными словами, будет выполняться закон сохранения вещества и одновременно закон сохранения полной собственной энергии, который уже упоминался для этого частного случая при обсуждении уравнения (151.5).

Точно так же закон сохранения вещества будет выполняться и в том случае, когда давление подчиняется условию

$$6p_0 \frac{dg}{dt} + 3 \frac{dp_0}{dt} = 0, \quad (152.5)$$

или в другом виде

$$3 \frac{d}{dt} (p_0 \delta v_0) + p_0 \frac{d}{dt} (\delta v_0) = 0. \quad (152.6)$$

Это условие, как будет видно дальше, выполняется в такой модели, которая содержит неизменное количество вещества, создающего пренебрежимо малое давление, и содержит излуче-

ние с давлением $p_r = p_r/3$. Эта модель будет рассмотрена позднее, в § 160.

Однако, вообще говоря, было бы желательно допустить некоторые изменения собственной массы вещества, заключенной внутри модели, так как изменения подобного рода в реальной Вселенной, по-видимому, происходят. Например, согласно эйнштейновскому соотношению между массой и энергией, туманности при излучении света теряют массу вне зависимости от того, как в конечном счете происходит это излучение, с помощью ли процессов разрушения, таких, как аннигиляция электронов и протонов, или же с помощью процессов синтеза, таких, как образование гелия из водорода, сопровождающееся уменьшением суммарной массы*). Точно так же, если происхождение космических лучей связано с аннигиляцией межгалактических частиц вещества или с синтезом более сложных атомов из атомов водорода, то в этом случае полное количество вещества во Вселенной тоже должно уменьшаться.

По некоторым причинам (см. §§ 165 и 184) очень удобно переписать уравнение (152.4) в таком виде, чтобы была видна прямая зависимость между скоростью уменьшения массы и изменением со временем функции $g(t)$. С помощью полученных ранее выражений (150.7) и (150.8) для ρ_{00} и p_0 после некоторых выкладок легко получаем

$$-\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} = \frac{3}{2} \left[\frac{\rho_{00} + \frac{5}{8} p_0}{\rho_m} - \frac{1}{4\pi\varphi_m} \left(\ddot{g} + \frac{\ddot{g}}{g} \right) \right] \dot{g}, \quad (152.7)$$

где точки означают дифференцирование по времени. Это уравнение для относительной скорости уменьшения массы вещества в модели показывает, что аннигиляция вещества с необходимостью приводит к нестатичности модели и к появлению зависимости g от t . Это соображение подкрепляет один из доводов, выдвинутых в § 146 в пользу нестатических моделей.

§ 153. Движение частиц в модели

Теперь мы можем рассмотреть движение свободных частиц в нестатической модели, интервал ds^2 которой равен

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2. \quad (153.1)$$

*) Этот вывод следует изменить, если окажется, что излучение звезд, согласно Бору, происходит благодаря нарушению внутренних законов сохранения энергии.

Гипотеза Бора и Слэтера возникла в связи с казавшимся парадоксальным явлением вынужденного излучения света. К ней возвращались и в связи с бета-распадом. С открытием нейтрино основания для этой гипотезы отпали. (Прим. ред.)

Согласно принципам релятивистской механики движение свободных частиц в модели определяется уравнениями геодезической

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (153.2)$$

А так как интервал (153.1) написан в стандартной форме, то мы можем в эти уравнения подставить символы Кристоффеля $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ в их общем виде (98.5).

Сначала исследуем тот случай, когда частица покоится относительно пространственных координат r , θ , φ . В этом случае

$$\frac{dr}{ds} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad \frac{dt}{ds} = 1 \quad (153.3)$$

и уравнения геодезической приводятся к виду

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{44}^\sigma = 0,$$

а так как все величины Γ_{44}^σ , как видно из выражения для интервала, равны нулю, то это значит, что все компоненты ускорения также равны нулю:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{d^2 \theta}{ds^2} = \frac{d^2 \varphi}{ds^2} = \frac{d^2 t}{ds^2} = 0, \quad (153.4)$$

т. е. частица будет все время оставаться в покое относительно пространственных координат, и измеряемое локальным наблюдателем приращение ds собственного времени будет в точности равно приращению координатного времени dt .

Конечно, тот вывод, что частицы, вначале покоившиеся относительно пространственных координат, не будут испытывать никакого гравитационного ускорения, которое привело бы их в состояние движения, согласуется с тем фактом, что мы выбрали сопутствующую систему отсчета, т. е. такую, в которой вещество, заполняющее модель, остается все время в покое относительно r , θ , φ . Этот результат справедлив только для гравитационного ускорения, но очевидно, что и другие виды ускорений, происходящих от столкновений или от радиационного давления, должны в среднем из-за однородности модели равняться нулю для частиц, покоящихся относительно выбранных нами пространственных координат. Нельзя забывать, однако, что, хотя частицы вещества в модели и остаются в покое относительно пространственных координат r , θ , φ , все же собственное расстояние между двумя такими частицами, измеряемое с помощью приложенной к ним жесткой линейки, будет меняться со временем, если меняется со временем $g(t)$.

Чтобы исследовать более общий случай, когда частицы обладают произвольной начальной скоростью, проще всего воспользоваться уравнением геодезической (153.2) для $\sigma=4$:

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^4 \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (153.5)$$

Подставляя сюда величины $\Gamma_{\mu\nu}^4$, из (98.5), с учетом формулы интервала (153.1) получаем

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{1}{2} e^{\mu} \dot{\mu} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} e^{\mu} \dot{\mu} r^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} e^{\mu} \dot{\mu} r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0,$$

где

$$e^{\mu} = \frac{e^{\xi(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2}.$$

Из вида самого интервала следует, что уравнение (153.5) можно переписать следующим образом:

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{1}{2} \frac{dg}{dt} \left[\frac{dt^2}{ds^2} - 1 \right] = 0$$

или

$$\frac{2 \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \left(\frac{dt}{ds} \right)}{\frac{dt^2}{ds^2} - 1} = - \frac{dg}{dt}.$$

Это уравнение можно легко проинтегрировать. В результате получаем

$$\frac{dt^2}{ds^2} - 1 = A e^{-\xi(t)}, \quad (153.6)$$

где A — постоянная интегрирования.

Для интерпретации этого результата мы можем снова вернуться к интервалу (153.1), из которого следует, что

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 1 - \frac{e^{\xi(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} \left(\frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} + r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi^2}{dt^2} \right),$$

т. е. движение частицы происходит по закону

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 1 - \frac{u^2}{c^2}, \quad (153.7)$$

где c — скорость света, а u — скорость частицы, которую локальный наблюдатель в ее окрестности, неподвижный относительно r , θ , φ , может измерить в окрестности частицы обычным обра-

зом, используя свои приращения собственного времени и собственного расстояния:

$$dt_0 = dt, \quad dl_0 = \frac{e^{1/2 g(t)}}{1 + r^2/4R_0^2} dr \quad \text{и т. д.} \quad (153.8)$$

Подставляя (153.7) в (153.6), получаем

$$\frac{u^2/c^2}{1 - u^2/c^2} = Ae^{-g(t)}. \quad (153.9)$$

Именно так будет зависеть от времени скорость свободно движущейся частицы, с точки зрения локальных наблюдателей, расположенных вдоль ее траектории неподвижно относительно усредненного движения вещества в их окрестности.

Из (153.9) вытекает, что если $g(t)$ возрастает со временем и, значит, собственные объемы элементов жидкости расширяются, то скорости свободных частиц будут со временем уменьшаться, и, наоборот, если модель сжимается, то скорости возрастают. Если применить этот результат к частицам, которые являются составными частями самой жидкости, и связать случайные скорости, которые могут иметь эти частицы, с их вкладом в полную плотность энергии и полное давление этой жидкости, то легко показать, что зависимость скорости (153.9) от времени находится в полнейшем согласии с определенной с помощью уравнения (151.6) связью между плотностью энергии и давлением.

С учетом (153.9) мы можем также определить и зависимость от времени энергии свободных частиц. Это представляет интерес в связи с космическими лучами в реальной Вселенной, так как по крайней мере часть этих лучей ведет свое происхождение от быстро движущихся частиц. Решая уравнение (153.9), получаем

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = E_0 \sqrt{1 + Ae^{-g(t)}}, \quad (153.10)$$

где E — полная энергия частицы, которая определяется формулой специальной теории относительности и включает собственную энергию покоя $E_0 = mc^2$. Из этого выражения видно, что измеряемая локальным наблюдателем, расположенным в среднем неподвижно относительно соседней материи, энергия таких частиц будет уменьшаться со временем, если $g(t)$ возрастает и модель расширяется.

Чтобы получить более полное представление об относительной скорости изменения энергии свободных частиц со временем, продифференцируем уравнение (153.10). В результате после некоторых выкладок получаем

$$-\frac{1}{E - E_0} \frac{d}{dt} (E - E_0) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E_0}{E}\right) \frac{dg}{dt}. \quad (153.11)$$

Это выражение определяет относительную скорость уменьшения кинетической энергии частиц ($E - E_0$), т. е. той энергии, которая ответственна за ионизацию в случае космических лучей.

Полученная формула имеет то преимущество, что она прямо выражает изменение энергии через производную $\dot{g} = dg/dt$, которая, как мы покажем дальше, тесно связана с возникающим в данной модели красным смещением света удаленных туманностей. Из (153.11) вытекает, что относительная скорость уменьшения кинетической энергии свободных частиц в модели меняется в пределах от \dot{g} в случае медленных частиц ($E \approx E_0$) до $\dot{g}/2$ для частиц со скоростями, близкими к скорости света, для которых $E \gg E_0$. Как будет показано в § 156, в предельном случае, когда частицы имеют нулевую массу покоя и движутся со скоростями, в точности равными скорости света, их движение соответствует распространению световых квантов, или фотонов.

С помощью уравнений геодезической мы можем исследовать как формы траекторий свободных частиц, так и их скорости. Для дальнейшего достаточно рассмотреть частицу, которая первоначально двигалась точно в радиальном направлении:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0. \quad (153.12)$$

Тогда из уравнений геодезической будет следовать, что

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{ds^2} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + 2\Gamma_{14}^2 \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} + \Gamma_{44}^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2\varphi}{ds^2} + \Gamma_{11}^3 \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + 2\Gamma_{14}^3 \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} + \Gamma_{44}^3 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 &= 0, \end{aligned}$$

а так как все шесть символов Кристоффеля согласно (98.5) равны нулю, то

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = \frac{d^2\varphi}{ds^2} = 0. \quad (153.13)$$

Отсюда мы можем заключить, что свободная частица, двигавшаяся первоначально по направлению от центра или к центру, будет и дальше двигаться точно в радиальном направлении. Совершенно очевидно, что этот результат является следствием пространственной изотропности модели и что он останется в силе и при переходе к выражению для интервала (149.5), так как координаты θ и φ не затрагиваются при таком преобразовании.

§ 154. Распространение лучей света в модели

Теперь можем рассмотреть распространение света в нашей модели, пользуясь по-прежнему интервалом, записанным в виде

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2. \quad (154.1)$$

Согласно принципам релятивистской механики уравнения геодезической (153.2) относятся к распространению света в той же мере, как и к движению частиц, с тем только отличием, что для световых лучей мы должны полагать $ds=0$.

Положив $ds=0$ в формуле интервала, мы можем тотчас написать общее выражение для скорости света в модели, предполагая, что свет распространяется в вакууме:

$$\frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} \left(\frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} + r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi^2}{dt^2} \right) = 1. \quad (154.2)$$

И если вспомнить, чему равны приращения собственного времени и собственного расстояния (153.8), то нетрудно увидеть, что скорость света в вакууме в любой точке пространства, измеренная обычным образом локальным наблюдателем, расположенным неподвижно относительно вещества, оказывается равной нормальному своему значению:

$$u=c. \quad (154.3)$$

В том частном случае, когда лучи распространяются в радиальном направлении, радиальная составляющая скорости согласно (154.2) равна

$$\frac{dr}{dt} = \pm e^{-1/2g(t)} [1 + r^2/4R_0^2]. \quad (154.4)$$

При этом ясно, что все, что было сказано относительно радиального движения частиц (153.13), имеет такое же отношение и к распространению света, т. е. свет, идущий из начала координат или к началу, будет сохранять радиальное направление распространения неизменным.

Интегрируя выражение (154.4) по t от t_1 до t_2 , т. е. по тому промежутку времени, который требуется свету, чтобы пройти расстояние от начала координат до любой заданной точки, получаем

$$\int_0^r \frac{dr}{1 + r^2/4R_0^2} = \int_{t_1}^{t_2} e^{-1/2g(t)} dt, \quad (154.5)$$

или

$$2R_0 \operatorname{arctg} \left(\frac{r}{2R_0} \right) = \int_{t_1}^{t_2} e^{-1/2g(t)} dt, \quad (154.6)$$

где интеграл в правой части может быть вычислен, только если задана функция $g(t)$ или если сделаны какие-то предположения о ее свойствах.

Если предположить, что $g(t)$ зависит линейно от t :

$$g(t) = 2Ht, \quad (154.7)$$

в интересующем нас интервале времени, то правая часть (154.6) легко интегрируется и мы получаем

$$r = 2R_0 \operatorname{tg} \frac{e^{-Ht_1} - e^{-Ht_2}}{2HR_0}. \quad (154.8)$$

Эта формула определяет промежуток времени (t_1, t_2) , который требуется свету, чтобы пройти в любом направлении расстояние от $r=0$ и до $r=r$, и она справедлива, когда промежуток времени достаточно мал, т. е. когда можно пренебречь производными по времени от g выше первого порядка. Этот результат может иметь отношение и к космическим лучам, приходящим из межгалактических пространств.

В случае закрытой модели расширяющейся Вселенной соотношение (154.6) между r и t_1 и t_2 может любопытным образом ограничить величину координатного расстояния, которое свет может пройти за конечное время. Представим себе — просто для иллюстрации — модель, в которой $g(t)$ имеет в точности линейную зависимость (154.7) от t при всех временах от мигуса до плюс бесконечности, а радиус имеет действительную величину $R = R_0 e^{Ht}$, меняющуюся от нуля до бесконечности между $t = -\infty$ и $t = +\infty$. Тогда, с одной стороны, из (154.8) очевидно, что свет, испущенный в заданной точке r , может быть зарегистрирован в начале координат в заданный момент t_2 при условии, что момент испускания t_1 , который может стремиться и к минус бесконечности, выбран достаточно рано. С другой стороны, очевидно, что свет, испущенный в начале координат во время t_1 , сможет пройти расстояние не большее, чем

$$r = 2R_0 \operatorname{tg} \frac{e^{-Ht_1}}{2HR_0}, \quad (154.9)$$

причем для этого ему понадобится время $t = \infty$. Следовательно, в зависимости от величин H и R_0 существует такое критическое стартовое время, после которого свет уже не в состоянии обойти модель целиком. Таким образом, при сделанных предположениях неподвижный наблюдатель, погруженный в жидкость, заполняющую модель, в принципе может получить информацию о состоянии ранних состояниях всех частей Вселенной, но узнать их поведение позднее определенной эпохи он не сможет, даже если будет ждать бесконечно долгое время. Конечно, все сказанное относится только к специальной модели, но для расширения кругозора иногда полезно обсудить и подобного рода возможности.

§ 155. Допплер-эффект в модели

Теперь мы можем рассмотреть влияние доплер-эффекта на свет, приходящий от удаленных объектов, считая по-прежнему, что наша модель задается интервалом

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2. \quad (155.1)$$

Так как нам понадобится сравнивать длины волн света от различных объектов, наблюдаемых из одного и того же места, то удобно *закрепить* наблюдателя в начале координат; тогда светящийся источник может находиться на каком угодно расстоянии r , которое при этом может меняться со временем. После этого уже нетрудно получить выражение для обобщенного доплер-эффекта, если следовать схеме, изложенной в § 116.

В соответствии с выражением для радиальной скорости света (154.4) можно записать (154.5):

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-1/2 g(t)} dt = \int_0^r \frac{dr}{1 + r^2/4R_0^2}. \quad (155.2)$$

Это уравнение связывает «время» t_1 испускания света источником, помещенным в r , и «время» t_2 , когда свет достигает начала координат. Дифференцируя это выражение по времени испускания t_1 , получаем уравнение, связывающее интервал «времени» δt_1 между двумя вспышками света на источнике с интервалом «времени» δt_2 между этими же вспышками, принятыми наблюдателем:

$$e^{-1/2 g_2} \delta t_2 - e^{-1/2 g_1} \delta t_1 = \frac{1}{1 + r^2/4R_0^2} \left(\frac{dr}{dt} \right) \delta t_1,$$

где g_1 и g_2 обозначают $g(t)$ соответственно в моменты t_1 и t_2 , а (dr/dt) — радиальная компонента координатной скорости источника во время излучения. Если учесть выражения для собственных расстояний и времен, отвечающих рассматриваемой формуле интервала, то предыдущее уравнение можно переписать в несколько ином виде:

$$e^{-1/2 g_2} \delta t_2 = e^{-1/2 g_1} \delta t_1 + e^{-1/2 g_1} \frac{u_r}{c} \delta t_1, \quad (155.3)$$

где c — скорость света, а u_r — радиальная компонента скорости источника, величина которой определяется обычным образом в системе локального наблюдателя, неподвижного относительно r , θ и φ .

Однако из формулы интервала ds^2 следует, что промежуток собственного времени δt_1^0 между двумя вспышками, измеренный наблюдателем, движущимся вместе с источником, будет связан с координатным временем δt_1 следующим образом:

$$\delta t_1^0 = \left\{ - \frac{e^{g_1}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} \left(\frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} + r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi^2}{dt^2} \right) + 1 \right\}^{1/2} \delta t_1,$$

откуда, опять же с учетом формулы интервала, получаем

$$\delta t_1^0 = \delta t_1 \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad (155.4)$$

где u есть полная скорость источника во время излучения, измеряемая обычным образом в системе локального наблюдателя, неподвижного относительно r , θ , φ . Далее, промежуток собственного времени δt_2^0 между двумя световыми вспышками, принятыми в центре наблюдателем, неподвижным относительно начала отсчета, очевидно, равен

$$\delta t_2^0 = \delta t_2. \quad (155.5)$$

Поэтому, подставляя (155.4) и (155.5) в (155.3) и приравнявая отношение собственных периодов испущенного и принятого света отношению соответствующих длин волн, мы получаем полное выражение для обобщенного доплер-эффекта:

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta t_2^0}{\delta t_1^0} = \frac{e^{1/2(g_2 - g_1)}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left(1 + \frac{u_r}{c} \right), \quad (155.6)$$

где $\lambda + \delta\lambda$, очевидно, представляет собой длину волны света, непосредственно наблюдаемого в начале координат, в то время как λ является длиной волны того же самого света, но для наблюдателя, находящегося в источнике и движущегося вместе с ним.

Наиболее важным фактором в этом выражении для обобщенного доплер-эффекта является $e^{1/2(g_2 - g_1)}$. Этот множитель своим происхождением обязан общему движению частиц (туманностей) в модели, которое происходит из-за того, что $g(t)$ меняется со временем. Другим важным фактором является множитель $(1 + u_r/c)$. Этот множитель отличен от единицы, когда существует индивидуальное движение рассматриваемого источника относительно среднего движения материи в его окрестности, и зависит только от радиальной компоненты его скорости. Последний важный множитель — это $\sqrt{1 - u^2/c^2}$, который возникает из-за обычного влияния скорости на ход движущихся часов (поперечный доплер-эффект).

При изучении на моделях Вселенной красного смещения света удаленных внегалактических туманностей обычно вполне достаточно считать, что движение туманностей совпадает со средним движением материи в их окрестности, т. е. что туманности покоятся относительно r , θ , φ . При этом в приведенной формуле остается только самый важный множитель, связанный с общим расширением модели:

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = e^{1/2(\xi_2 - \xi_1)}. \quad (155.7)$$

Отсюда относительное изменение длины волны получается равным

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = e^{1/2(\xi_2 - \xi_1)} - 1. \quad (155.8)$$

Этот результат можно сделать физически более наглядным, если ввести радиус модели

$$R = R_0 e^{1/2\xi}. \quad (155.9)$$

Тогда

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{R_2 - R_1}{R_1}, \quad (155.10)$$

где R_1 — радиус в момент испускания света источником, а R_2 — в момент, когда он достигает наблюдателя. Отсюда становится ясным, что красное смещение света удаленных объектов связано в рамках модели с общим ее расширением и, следовательно, с убеганием источника от наблюдателя.

Связь красного смещения с разбеганием можно сделать более ясной, если ввести полные собственные расстояния между источником и наблюдателем в моменты времени t_1 и t_2 . Согласно выражению для интервала эти расстояния равны

$$l_1 = e^{1/2\xi_1} \int_0^r \frac{dr}{1 + r^2/4R_0^2} \quad \text{и} \quad l_2 = e^{1/2\xi_2} \int_0^r \frac{dr}{1 + r^2/4R_0^2}, \quad (155.11)$$

а величина их измеряется числом метровых стержней, которые укладываются между координатой r и наблюдателем. Переписав (155.7) с помощью выражений (155.11), получим

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{l_2}{l_1} = 1 + \frac{l_2 - l_1}{l_1}, \quad (155.12)$$

где $(l_2 - l_1)$ — приращение собственного расстояния между наблюдателем и источником, произошедшее за тот промежуток времени, который требовался свету, чтобы пройти путь от источ-

ника до наблюдателя. Так как время распространения, выраженное в релятивистских единицах, и собственное расстояние l_1 в первом приближении равны друг другу, то последнее выражение можно записать в следующем приближенном виде:

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} \approx 1 + \frac{\delta l}{\delta t} \approx 1 + \frac{u}{c}, \quad (155.13)$$

где u , грубо говоря, равна скорости убегания источника. Мы видим, что в согласии с приведенными выражениями в нашей модели красное смещение света, идущего от удаленных галактик, должно быть интерпретировано как обычный доплер-эффект, возникающий из-за реального разбегания. При этом следует отметить, что вследствие изотропности модели разбегание галактик происходит не от какого-либо выделенного центра (например, от нас), а представляет собой всеобщее явление, т. е. красное смещение может быть наблюдено не только нами, но и в равной мере наблюдателями, неподвижными относительно своего окружения, в любой другой части Вселенной.

§ 156. Зависимость доплер-эффекта от расстояния

Чтобы исследовать, как меняется доплер-эффект при переходе ко все более удаленным источникам (туманностям), продифференцируем наше первоначальное выражение

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = e^{1/2 (g_2 - g_1)} - 1 \quad (156.1)$$

по r — координатному расстоянию до источника. При этом мы можем g_2 считать постоянным, так как g_2 представляет собой значение $g(t)$ в тот момент времени t_2 , когда свет достигает начала координат, а мы хотим сравнивать доплер-эффект от различных источников, наблюдаемых в один и тот же момент t_2 , который мы можем отмечать как «сейчас». С другой стороны, g_1 меняется с изменением r , так как чем дальше от нас находится источник, тем раньше должно произойти испускание света (t_1), чтобы свет успел к моменту t_2 достичь начала координат. Одним словом, дифференцируя (156.1), получаем

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\delta\lambda}{\lambda} \right) = -\frac{1}{2} e^{1/2 (g_2 - g_1)} \frac{dg_1}{dt} \frac{dt}{dr}, \quad (156.2)$$

где dt равно приращению времени излучения при увеличении координатного расстояния на dr .

Однако дифференциалы dt и dr связаны друг с другом посредством скорости света, которая в свою очередь определяется

выражением интервала

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2. \quad (156.3)$$

Поэтому выражение (156.2), определяющее зависимость доплер-эффекта от расстояния, можно представить в следующем виде:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\delta\lambda}{\lambda} \right) = \frac{e^{1/2 g_1}}{1 + r^2/4R_0^2} \frac{\dot{g}_1}{2}, \quad (156.4)$$

где \dot{g}_1 — скорость изменения $g(t)$ в момент испускания света.

Для дальнейшего удобно переписать этот результат еще и в координатах \bar{r} , θ , φ , которые связаны с координатами r , θ , φ преобразованием (149.4) и приводят выражение для интервала к виду (149.5):

$$ds^2 = - e^{g(t)} \left(\frac{d\bar{r}^2}{1 - \bar{r}^2/R_0^2} + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) + dt^2. \quad (156.5)$$

Из этого выражения для интервала видно, что доплер-эффект зависит от координатного расстояния \bar{r} следующим образом:

$$\frac{d}{d\bar{r}} \left(\frac{\delta\lambda}{\lambda} \right) = \frac{e^{1/2 g_1}}{\sqrt{1 - \bar{r}^2/R_0^2}} \frac{\dot{g}_1}{2}. \quad (156.6)$$

Поскольку, как будет показано дальше, обе координаты r и \bar{r} в первом порядке пропорциональны расстояниям, принятым в астрономии, то из приведенных формул вытекает, что между красным смещением и расстоянием имеется линейная зависимость вплоть до тех расстояний, где становятся важными более высокие производные от g_1 . Более полное обсуждение зависимости доплер-эффекта от расстояния станет возможно только в IV части настоящей главы, в которой $g(t)$ будет представлена в виде ряда по степеням t .

Чтобы закончить несколько затянувшееся рассмотрение доплер-эффекта в расширяющихся или сжимающихся моделях, покажем с расчетом на будущее, что длина волны или частота отдельного светового кванта, или фотона, измеряемая наблюдателями, выстроенными вдоль его пути, будет меняться со временем определенным образом при условии, что эти наблюдатели покоятся относительно r , θ , φ . Для этого обратимся к нашей точной формуле (155.6) для длины волны $(\lambda + \delta\lambda)$ света, испущенного в момент t_1 источником при произвольном его положении и скорости. Этот свет достигает наблюдателя, покоящегося

относительно выбранных координат, в момент t_2 . Если мы расставим несколько таких наблюдателей вдоль траектории фотона, то очевидно, что единственной величиной, меняющейся в этой формуле от наблюдателя к наблюдателю, будет g_2 , которая представляет собой $g(t)$ в моменты наблюдений.

Возьмем логарифмическую производную от (155.6) по времени, тогда для различных наблюдателей будем иметь

$$\frac{d \ln (\lambda + \delta \lambda)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dg_2}{dt} \quad (156.7)$$

или, переходя к частотам, запишем это выражение в более удобном виде:

$$-\frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dg}{dt}, \quad (156.8)$$

где ν — частота любого фотона, измеренная наблюдателем, покоящимся относительно системы координат r, θ, φ , а g есть значение функции $g(t)$, характеризующей модель как целое в интересующий нас момент времени.

§ 157. Временная эволюция закрытых моделей

Вывод выражения для нестатического интервала

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2$$

для однородных космологических моделей не накладывал непосредственно никаких ограничений на поведение этих моделей в зависимости от времени. Поэтому, чтобы определить характер эволюции, мы должны обсудить вид не конкретизировавшейся до сих пор функции $g(t)$. К этому мы теперь и приступим с нескольких сторон.

Согласно уравнениям (150.7) и (150.8) давление и плотность жидкости, заполняющей по нашему предположению модель, явно зависят от $g(t)$ и ее производных. Следовательно, можно считать, что временное поведение модели определяется свойствами этой жидкости. В этом параграфе, посвященном закрытым моделям Вселенной с вещественным R_0 , и в следующем параграфе, посвященном открытым моделям с R_0 бесконечным или мнимым, мы обсудим с общих позиций различные типы временного поведения, когда на свойства жидкости накладываются только самые общие ограничения, такие, как требование неотрицательности давления и плотности. В следующих параграфах этой части настоящей главы мы обсудим эволюцию Вселенной при более определенных предположениях относительно природы модели и

жидкости, заполняющей ее. В III части настоящей главы мы вернемся к термодинамическим аспектам тех изменений, которые могут иметь место в космологических моделях в зависимости от времени, и, наконец, в IV части, при сравнении с наблюдениями, мы будем иметь возможность подойти к эволюции более феноменологически, разлагая $g(t)$ в ряд по степеням t с коэффициентами, определяемыми по мере возможности из данных наблюдений по красному смещению, давлению и плотности реальной Вселенной.

а) **Общие черты эволюции (R вещественно, $\rho_{00} \geq 0$, $p_0 \geq 0$)*.** Для начала предположим, что модель закрыта и радиус R_3 действителен. Далее, предположим, что в веществе, заполняющем модель, нет сил, препятствующих растяжению, так что плотность ρ_{00} и давление p_0 из физических соображений могут быть только нулем или больше нуля.

В качестве уравнений, связывающих плотность и давление этого вещества с $g(t)$, удобно взять (151.6) и (150.8):

$$\frac{d}{dt} (\rho_{00} e^{3/2 g(t)}) + p_0 \frac{d}{dt} (e^{3/2 g(t)}) = 0, \quad (157.1)$$

$$8\pi\rho_{00} = \frac{3}{R_0^2} e^{-g(t)} + \frac{3}{4} \left(\frac{dg}{dt} \right)^2 - \Lambda.$$

Эти уравнения эквивалентны ранее полученным уравнениям (150.7) и (150.8). Их можно упростить, если ввести радиус модели

$$R = R_0 e^{1/2 g(t)}. \quad (157.2)$$

При этом первое из уравнений — уравнение для энергии — принимает вид

$$\frac{d}{dt} (\rho_{00} R^3) + p_0 \frac{d}{dt} (R^3) = 0, \quad (157.3)$$

откуда

$$\frac{d(\rho_{00} R^3)}{dR} = -3\rho_0 R^2 \quad (157.4)$$

и

$$\frac{d\rho_{00}}{dR} = -\frac{3(\rho_0 + \rho_{00})}{R}. \quad (157.5)$$

Таким образом, из предположений, сделанных относительно R , ρ_{00} и p_0 , следует, что величины $(\rho_{00} R^3)$ и ρ_{00} с увеличением

*) Содержание этого раздела следует работе [95].

R могут только уменьшаться или оставаться постоянными. Более того, из (157.5) видно, что при стремлении радиуса к бесконечности плотность жидкости стремится к нулю, и, следовательно, все бесконечно расширяющиеся модели в конце концов переобладают в модель де Ситтера.

Подставляя (157.2) во второе уравнение (157.1), получаем

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi\rho_{00}R^2}{3} + \frac{\Lambda R^2}{3} - 1.$$

Отсюда легко определить скорость изменения радиуса модели со временем:

$$\frac{dR}{dt} = \pm \sqrt{\frac{8\pi\rho_{00}R^2}{3} + \frac{\Lambda R^2}{3} - 1}. \quad (157.6)$$

Так как величина, стоящая под корнем, должна быть обязательно положительной или нулем, то при любом заданном значении космологической постоянной Λ должно выполняться неравенство

$$\frac{3}{R^2} - 8\pi\rho_{00} \leq \Lambda, \quad (157.7)$$

которое естественным образом ограничивает величину радиуса, если поведение модели должно быть действительным. При этом равенство

$$\frac{3}{R^2} - 8\pi\rho_{00} = \Lambda \quad (157.8)$$

указывает, при каком значении радиус R прекращает свое изменение во времени или начинает изменяться в обратном направлении.

б) **Зависимость критической функции от R .** Чтобы исследовать поведение критической величины

$$Q = \left(\frac{3}{R^2} - 8\pi\rho_{00}\right) = \frac{1}{R^2} \left(3 - \frac{8\pi\rho_{00}R^3}{R}\right) \quad (157.9)$$

как функции радиуса R по мере того, как R в условиях заданной модели меняется во времени, было бы желательно хотя бы приблизительно построить график зависимости $Q(R)$ от R .

Дифференцируя Q по R и приравнивая производную нулю, получаем

$$\frac{dQ}{dR} = -\frac{6}{R^3} - 8\pi \frac{d\rho_{00}}{dR} = 0,$$

или, используя (157.5),

$$\frac{dQ}{dR} = -\frac{6}{R^3} + \frac{24\pi(\rho_{00} + p_0)}{R} = 0. \quad (157.10)$$

Уравнение (157.10) выражает необходимое условие максимума, минимума или точки перегиба функции. Объединяя (157.10) с (157.9), получаем значение функции $Q(R)$ в этих точках:

$$Q = \frac{1}{R^2} + 8\pi p_0 \quad (> 0). \quad (157.11)$$

Дифференцируя второй раз, находим

$$\frac{d^2Q}{dR^2} = \frac{18}{R^4} - \frac{24\pi(\rho_{00} + p_0)}{R^2} + \frac{24\pi}{R} \frac{d\rho_{00}}{dR} + \frac{24\pi}{R} \frac{dp_0}{dR} \begin{cases} < 0, \\ = 0, \\ > 0, \end{cases}$$

или, используя (157.10) и (157.5),

$$\frac{dp_0}{dR} \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} \frac{\rho_{00} + p_0}{R}, \quad (157.12)$$

откуда в зависимости от знака ($<$), ($=$), ($>$) имеем достаточное условие того, что данная точка является соответственно максимумом, точкой перегиба или минимумом функции $Q(R)$. Причем из (157.12) видно, что рассматриваемая кривая могла бы

иметь точки перегиба или минимума только в том случае, если бы давление могло возрастать при расширении.

Опираясь на полученные результаты, можно теперь прикинуть ход кривой $Q(R)$ в зависимости от R , как показано на рис. 6, по мере того как R возрастает со временем.

Те участки кривой, относительно которых мы имеем достаточно полную информацию, изображены сплошной линией. Это — участки A , B и C . Они могут быть интерпретированы следующим образом. (A) Согласно

но (157.4) величина $\rho_{00}R^3$ с ростом R может только убывать или оставаться постоянной. Поэтому, исключая неинтересный для нас в настоящий момент случай абсолютно пустой модели, из (157.9) получаем, что Q возрастает асимптотически от $-\infty$ при $R=0$ до пересечения с осью $Q=0$ и затем продолжает возрастать по мере увеличения R . При этом никаких точек пере-

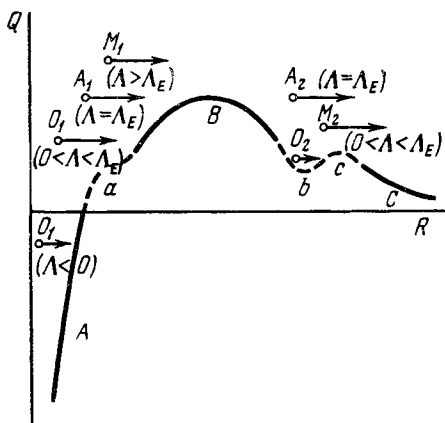


Рис. 6.

гиба или максимумов до пересечения с осью $Q=0$ быть не может, так как согласно (157.11) такие точки могут быть только при положительных значениях Q . (B) Если R продолжает возрастать, то кривая $Q(R)$ в конце концов должна достичь хотя бы одного максимума, так как из (157.9) следует, что рано или поздно $Q(R)$ будет убывать с возрастанием R . (C) Наконец, при стремлении R к бесконечности кривая $Q(R)$ согласно (157.9) асимптотически приближается к нулю, как $3/R^2$.

Те участки кривой a , b , c , относительно которых мы не можем сказать ничего определенного, показаны на чертеже штриховыми линиями. Эти участки могут содержать как точки перегиба, например, на участке a , так и точки минимума с последующими точками максимума, как изображено на участках b и c . Из (157.11) следует, что все подобные особенности могут находиться только в пределах между $Q=0$ и $Q=Q_{\text{макс}}$, где $Q_{\text{макс}}$ — наибольший из всех максимумов на кривой, расположенный на участке B на рис. 6. Более того, из (157.12) вытекает, что все такие точки могут существовать только в том случае, если допустить, что давление вещества на некоторых участках кривой может во время процесса расширения возрастать.

Пользуясь построенной кривой, можно сделать некоторые предсказания относительно развития модели во времени, когда космологическая постоянная Λ принимает разные значения. Так как Λ не меняется при расширении и имеет ту же размерность, что и Q , то ее можно представить горизонтальными линиями, как показано на рис. 6. При этом согласно (157.7) критическая величина

$$Q = \left(\frac{3}{R_0^2} - 8\pi\rho_{00} \right)$$

должна быть меньше, чем Λ во время расширения, если же она становится равной Λ , то развитие модели либо изменяет свое направление, либо прекращается вовсе. Поэтому различные виды движения, к обсуждению которых мы сейчас и переходим, будут соответствовать горизонтальным прямым $\Lambda = \text{const}$, лежащим выше критической кривой $Q(R)$, а характер движения будет определяться точками, где горизонталь пересекает критическую кривую.

в) $\Lambda > \Lambda_E$. **Монотонные Вселенные типа M_1 .** Наибольший максимум критической кривой Q приходится на участок B . Обозначим этот максимум Λ_E , поскольку в дальнейшем будет видно, что эту величину можно трактовать как значение Λ в некоторой статической эйнштейновской Вселенной.

При Λ , большем Λ_E , развитие Вселенной во времени определяется однозначно, так как при этом прямая $\Lambda = \text{const}$ с критической кривой не пересекается, и модель может только

расширяться, начиная от некоторого сингулярного состояния с радиусом $R_s \geq 0$, переходя при $R \rightarrow \infty$ в пустую Вселенную де Ситтера. Что же касается ее эволюции до сингулярного состояния, то в те времена модель сжималась в направлении от больших радиусов к R , равному R_s . Однако наших уравнений недостаточно, чтобы описать механизм перехода через сингулярное состояние, поскольку в той точке, где оно возникает (в нуле или в его окрестностях), идеализации, принятые при определенных модели, становятся несправедливыми.

Можно только сказать, что скорость, с которой модель выходит из сингулярного состояния, равна бесконечности. Это видно из выражения (157.6) для скорости расширения, если учесть условие (157.4), накладываемое на величину $(\rho_{00}R^3)$. Интегрируя выражение (157.6), находим, что любое конечное значение R может быть достигнуто за конечное время, однако для увеличения радиуса от конечного значения до бесконечности требуется бесконечное время.

Такую модель, которая расширяется от сингулярного состояния в прошлом до бесконечности в будущем без обращения своего движения, мы будем называть монотонной Вселенной первого рода (типа M_1). Для описания реальной Вселенной она плоха тем, что проводит только бесконечно малую часть своего полного времени жизни в состоянии, заметно отличающемся от абсолютно пустой деситтеровской Вселенной. Поэтому, если мы захотим принять, что наблюдаемая нами часть реальной Вселенной хорошо передает строение Вселенной в любом другом месте в какой угодно момент времени, то нам придется отказать от этой модели и исключить ее из нашего рассмотрения.

г) $\Lambda > \Lambda_E$. **Асимптотические Вселенные типа A_1 и A_2 .** Обратимся теперь к случаю, когда космологическая постоянная в точности равна максимальному значению Q (участок B на рис. 6). Этот максимум мы уже обозначили как Λ_E . Из (157.11) следует:

$$8\pi p_E = \Lambda_E - \frac{1}{R_E^2}, \quad (157.13)$$

где p_E и R_E — давление и радиус в точке максимума. Если мы рассмотрим статическую Вселенную ($dR/dt=0$) с этими значениями давления и радиуса, то согласно (157.8) должно быть также

$$8\pi p_E = \frac{3}{R_E^2} - \Lambda_E. \quad (157.14)$$

Однако, как видно из выражений (139.3), (139.4), это есть соотношение между давлением и плотностью в статической Вселенной Эйнштейна с радиусом R_E и космологической постоянной Λ_E . Отсюда следует, что статическая Вселенная Эйнштейна мо-

жет существовать при тех условиях, которые отвечают максимуму на кривой $Q(\dot{R})$. Однако, как мы увидим в дальнейшем, она при этом не может быть устойчивой.

Для нестатической модели $\Lambda = \Lambda_E$ возможны два типа поведения.

Во-первых, если модель находится первоначально в сингулярном состоянии с радиусом $R_s < R_E$, то она может расширяться, асимптотически переходя в эйнштейновскую Вселенную с радиусом $R = R_E$ и с dR/dt и d^2R/dt^2 , равными нулю, как это следует из (157.13), (157.14) и (150.7), (150.8). Что же касается ее предыдущей истории, во времена, предшествовавшие сингулярному состоянию, то в те времена она должна была бы сжиматься от больших радиусов к радиусу $R = R_s$. Такую модель, которая расширяется от сингулярного состояния и переходит в статическую эйнштейновскую Вселенную, мы будем называть асимптотической Вселенной первого рода, типа A_1 .

Второй тип эволюции при $\Lambda = \Lambda_E$ относится к тем моделям, которые монотонно расширяются, асимптотически перерождаясь из статической эйнштейновской Вселенной с радиусом $R = R_E$ в бесконечно далеком прошлом в пустую Вселенную де Ситтера в бесконечно далеком будущем. Модель такого вида мы будем называть асимптотической Вселенной второго рода, типа A_2 .

Для описания реальной Вселенной недостаток обеих рассмотренных моделей тот же, что и у модели типа M_1 , ибо они проводят только ничтожную часть времени своего существования в условиях, сходных с теми, которые имеются в реальной Вселенной. Однако модели типа A_2 обладают тем преимуществом, что они начинают расширяться не из сингулярного состояния, а из состояния с конечным объемом и в бесконечно далекий момент в прошлом. К этому вопросу мы еще вернемся в § 159 при обсуждении устойчивости статической Вселенной Эйнштейна, и в § 161, который специально посвящен рассмотренным моделям.

д) $0 < \Lambda < \Lambda_E$. **Монотонные Вселенные типа M_2 и осциллирующие Вселенные типов Q_1 и Q_2 .** Теперь мы обратимся к случаю, когда Λ лежит между нулем и Λ_E . Здесь возможны два типа движения. Кроме того, возможны и еще несколько вариантов, если кривая имеет более одного максимума, как показано на рис. 6 на участках b и c .

К первому типу относятся те модели, минимальный радиус которых R_1 превышает максимальное значение R_E , при котором происходит изменение направления движения от сжатия к расширению. Эти модели, имеющие минимальный радиус, расширяются без обращения своего движения до бесконечности, переходя в пустую деситтеровскую Вселенную. Модель подобного вида мы будем называть монотонной Вселенной второго рода, типа M_2 . Для описания реальной Вселенной она тоже плоха тем, что

почти все свое время проводит в условиях, не похожих на те, какие мы наблюдаем на самом деле.

Модели другого типа расширяются, будучи первоначально в сингулярном состоянии при $R_s < R_E$, и меняют направление своего движения после того, как их радиус достигнет максимального значения, определяемого критической кривой. После этого начинается сжатие, которое продолжается до тех пор, пока снова не начнется расширение из сингулярного состояния, которое из физических соображений не может находиться при радиусах, меньших чем $R=0$. Мы будем называть такие модели осциллирующими моделями первого рода, типа O_1 . Для описания реальной Вселенной они хороши тем, что проводят всю свою жизнь в условиях конечной плотности материи, если только не происходят необратимые процессы, которые могут изменить величину максимального радиуса (§ 175). Но эти модели имеют также и недостаток, так как обладают сингулярным состоянием на нижнем пределе сжатия, переход через которое нельзя описать в рамках имеющихся уравнений.

Если допустить существование еще одного максимума на кривой $Q(R)$ более низкого, нежели самый высокий максимум в точке R_E , с минимумом между ними, как показано на участках b и c на рис. 6, то откроется возможность для существования еще одного любопытного типа эволюции. Этот тип эволюции может иметь место, когда Λ лежит между минимумом и дополнительным максимумом кривой Q . При этом оказывается, что радиус модели может колебаться между минимальным и максимальным значениями, пересекаемыми на кривой $Q(R)$. При отсутствии необратимых процессов движение может быть строго периодическим и без всяких сингулярных состояний. Модель такого вида мы назовем осциллирующей Вселенной второго рода, типа O_2 . На первый взгляд, в качестве основы для реальной космологии она обладает огромными достоинствами, но, как показано в связи со (157.12), минимум на критической кривой мог бы существовать только в том случае, если бы при расширении модели давление материи в ней могло возрасти. Позднее мы еще вернемся к этому вопросу в § 172 и должны будем заключить, что подобные модели не имеют практического значения.

Если бы на кривой существовал второй максимум, то были бы возможны еще асимптотические Вселенные типа A_1 и A_2 для Λ , лежащего в интервале $0 < \Lambda < \Lambda_E$, но они были бы подобны тем, которые уже рассмотрены выше, в § 157, г.

е) $\Lambda \leq 0$. **Осциллирующие Вселенные типа O_1 .** Наконец, следует еще рассмотреть, как будут развиваться во времени закрытые однородные модели с вещественным радиусом R , если космологическая постоянная $\Lambda \leq 0$. В этом случае, как сразу следует из рис. 6, возможны только осциллирующие Вселенные типа O_1 ,

колеблющиеся между сингулярным состоянием, которое достигается на нижнем пределе радиуса, и состоянием с максимальным значением радиуса, отсекаемым на критической кривой. Достоинства и недостатки этих моделей были уже рассмотрены выше при обсуждении Вселенных типа O_1 .

В заключение следует особо отметить, что при $\Lambda=0$ описать замкнутую однородную Вселенную можно одним единственным образом — с помощью модели типа O_1 . Это очень важно, так как в настоящее время, очевидно, наиболее разумно полагать $\Lambda=0$. Причины для этого состоят в следующем. Во-первых, рассмотренные в § 139 рассуждения Эйнштейна о необходимости введения логически непротиворечивого, но вместе с тем неожиданного, космологического члена в исходные уравнения поля утрачивают теперь свою силу ввиду того, что в нестатических моделях материи можно приписывать конечную плотность, отличную от нуля, не прибегая при этом к Λ -члену. Во-вторых, в настоящее время не существует никакой теории, с помощью которой можно было бы хоть как-нибудь вычислить величину космологической постоянной. На этот счет есть только некоторые соображения, высказанные Эддингтоном [100]. И, наконец, в третьих, из наблюдений следует, что величина Λ должна быть достаточно мала, чтобы ею можно было пренебречь при релятивистском расчете планетарных орбит. Поэтому в дальнейшем мы будем уделять наибольшее внимание тем моделям, которые космологического члена не содержат.

§ 158. Зависимость эволюции от времени для открытых моделей

Чтобы сделать наше исследование более полным, рассмотрим также развитие во времени открытых моделей, т. е. моделей с мнимым или бесконечным радиусом R_0 . Здесь разнообразие типов не столь велико.

Как и прежде, исследование можно начать, отправляясь от исходных уравнений (151.6) и (150.8), определяющих зависимость плотности и давления от времени:

$$\frac{d}{dt} \left(\rho_{00} e^{3/2 g(t)} \right) + p_0 \frac{d}{dt} \left(e^{3/2 g(t)} \right) = 0 \quad (158.1)$$

и

$$8\pi\rho_{00} = \frac{3}{R_0^2} e^{-g(t)} + \frac{3}{4} \left(\frac{dg}{dt} \right)^2 - \Lambda. \quad (158.2)$$

Однако так как теперь радиус $R = R_0 e^{1/2 g(t)}$ является либо

бесконечной, либо мнимой величиной, не имеющей непосредственного физического смысла, то не имеет никакого смысла вводить его в рассмотрение.

Имея в виду дальнейшее, перепишем первое из уравнений следующим образом:

$$\frac{d(\rho_{00} e^{1/2 g})}{dg} = -\frac{3}{2} \rho_0 e^{1/2 g} \quad (158.3)$$

и

$$\frac{d\rho_{00}}{dg} = -\frac{3}{2} (\rho_{00} + \rho_0), \quad (158.4)$$

откуда видно, что если мы предполагаем, что в веществе внутри модели нет сил, противодействующих растяжению, то $\rho_{00} e^{1/2 g}$ и ρ_{00} могут только либо убывать, либо оставаться неизменными при возрастании g .

Второе уравнение, (158.2), можно записать в виде

$$\left(\frac{de^{1/2 g}}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi\rho_{00}}{3} e^g + \frac{\Lambda}{3} e^g - \frac{1}{R_0^2},$$

откуда с учетом того, что, согласно предположению, модель является открытой, т. е. R_0 либо равен бесконечности, либо мнимой величине, получаем

$$\frac{de^{1/2 g}}{dt} = \pm \sqrt{\frac{8\pi\rho_{00}e^g}{3} + \frac{\Lambda e^g}{3} + A^2}, \quad (158.5)$$

где A — действительная величина, равная нулю при R_0 , равном бесконечности.

Поскольку выражение под знаком радикала не может быть отрицательным согласно условию, что процессы в модели должны носить действительный характер, то на величину g возникает естественное ограничение:

$$-3A^2 e^{-g} - 8\pi\rho_{00} \leq \Lambda. \quad (158.6)$$

Причем равенство

$$-3A^2 e^{-g} - 8\pi\rho_{00} = 0 \quad (158.7)$$

определяет ту точку, в которой g перестает меняться со временем или начинает меняться в противоположном направлении.

Так же, как и раньше, можно построить график критической величины

$$Q = -3A^2 e^{-g} - 8\pi\rho_{00} = -\frac{1}{e^g} \left[3A^2 + \frac{8\pi\rho_{00} e^{1/2 g}}{e^{1/2 g}} \right] \quad (158.8)$$

в зависимости от $e^{1/2g}$, как показано на рис. 7. Согласно (158.8) Q всегда отрицательно и асимптотически приближается к значению $Q = -\infty$ по мере того, как $e^{1/2g}$ стремится к нулю (это следует из (158.3)). По мере же того, как $e^{1/2g}$ стремится к ∞ , величина Q асимптотически приближается к нулю. Причем во всей области изменения на кривой Q нет ни максимумов, ни минимумов, ни точек перегиба.

С помощью графика критической кривой легко показать, что возможны только два типа поведения. Первый тип может иметь место при $\Lambda \geq 0$. В этом случае модель монотонно расширяется с ростом $e^{1/2g}$ от сингулярного состояния до бесконечности, представляя таким образом Вселенную, обозначенную нами ранее как M_1 . Такая Вселенная в конце концов вырождается в пустое деситтеровское пространство или, если $\Lambda = 0$, в плоское евклидово пространство. Поведение другого типа возникает, когда $\Lambda < 0$.

В этом случае модель осциллирует между сингулярным состоянием и состоянием с максимальным значением $e^{1/2g}$, т. е. представляет собой Вселенную, обозначенную нами ранее O_1 .

Изучение закрытых моделей проще всего было исследовать, изучая поведение радиуса Вселенной

$$R = R_0 e^{1/2g(t)}$$

Поведение же открытых моделей лучше всего описывать в терминах самого $e^{1/2g(t)}$, так как R_0 в этом случае либо бесконечен, либо мнимый.

Однако следует отметить, что собственный объем любого заданного элемента жидкости в однородной модели, т. е. объем, измеряемый локальным наблюдателем, в обоих случаях пропорционален $e^{3/2g(t)}$. Поэтому изменение всех вышеприведенных величин со временем можно исследовать, изучая расширение и сжатия жидкости, заполняющей модель, и не заботиться о том, является ли данная модель закрытой и с конечным собственным объемом или открытой и с бесконечным собственным объемом.

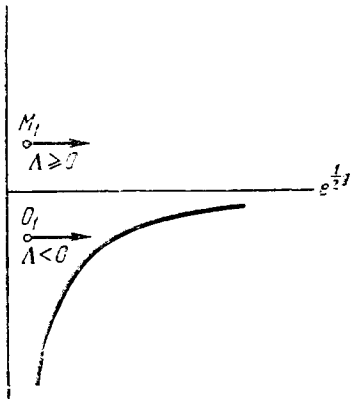


Рис. 7.

§ 159. Неустойчивость статической Вселенной Эйнштейна

Теперь мы обратимся к некоторым специальным чертам поведения однородных космологических моделей во времени. Прежде всего, вооружившись теми знаниями, которые мы приобрели к настоящему моменту относительно эволюции нестатических моделей, интересно исследовать устойчивость статической модели Эйнштейна.

Сначала посмотрим на проблему устойчивости Вселенной Эйнштейна с точки зрения графика критической величины $Q(R)$, представленного на рис. 6. Исследование критической кривой, проведенное выше, показывает, что условия для существования эйнштейновской Вселенной выполняются при тех радиусах, которые соответствуют максимуму, минимуму или точке перегиба критической кривой, при этом величина Λ должна быть равна соответствующему значению $Q(R)$. Это непосредственно следует из уравнения (157.11), определяющего $Q(R)$ в стационарной точке, и из условия постоянства радиуса (157.8), из которого получаются исходные уравнения для давления и плотности в статической Вселенной Эйнштейна

$$8\pi\rho_0 = -\frac{1}{R^2} + \Lambda$$

и

$$8\pi\rho_{00} = \frac{3}{R^2} - \Lambda.$$

Согласно рис. 6, статическая Вселенная Эйнштейна, соответствующая максимуму на критической кривой, будет нестабильна, так как если модель случайно начнет расширяться или сжиматься, то ее радиус и дальше будет изменяться в том же направлении. Вселенная Эйнштейна, относящаяся к точке перегиба, тоже будет неустойчива, ибо здесь тоже есть направление, в котором радиус может меняться, не пересекая критическую кривую.

С другой стороны, статическая Вселенная Эйнштейна, отвечающая минимуму на критической кривой, будет, очевидно, устойчивой, т. е. ее радиус не может измениться без того, чтобы не пересечь критическую кривую. Однако эта возможность не реальна, так как, согласно (157.12), давление жидкости в такой модели должно при расширении возрастать. Из физических же соображений ясно, что нельзя найти ни одной реальной жидкости, обладающей таким свойством в состоянии равновесия. Поэтому мы можем вообще сделать вывод, что статическая Вселенная Эйнштейна может находиться только в состоянии неустойчивого равновесия относительно изменения радиуса и если она, по каким-либо причинам, начнет однажды сжиматься или

расширяться, то она будет развиваться в том же направлении и дальше.

Теперь мы можем задать себе вопрос: какие изменения в статической эйнштейновской Вселенной могут привести к тому, что она вдруг из состояния покоя начнет сжиматься или расширяться? В том случае, когда давление жидкости, заполняющей модель, уменьшается при расширении и увеличивается при сжатии, на этот вопрос легко дать ответ, опираясь на общую формулу для давления в однородной нестатической модели:

$$8\pi p_0 = -\frac{e^{-g}}{R_0^2} - \ddot{g} - \frac{3}{4}\dot{g}^2 + \Lambda. \quad (159.1)$$

Предположим, что в начальный момент модель находится в статическом эйнштейновском состоянии, тогда выражение (159.1) в этот момент должно свестись к обычному выражению для давления в эйнштейновской Вселенной:

$$8\pi p_0 = -\frac{1}{R_0^2}e^{-g} + \Lambda; \quad (159.2)$$

при этом

$$\ddot{g} = 0 \quad \text{и} \quad \dot{g} = 0, \quad (159.3)$$

а $R_0 e^{1/2g}$ равняется радиусу статической эйнштейновской Вселенной. Поэтому, если в этой не расширяющейся и не сжимающейся в данный момент модели предположить наличие каких-нибудь процессов, которые приводят к изменению давления со временем, то, согласно (159.1) и (159.3), это изменение давления будет в свою очередь воздействовать на изменение $g(t)$, так как

$$-8\pi \frac{dp_0}{dt} = \frac{d^3g}{dt^3}. \quad (159.4)$$

Отсюда легко видеть, что если под действием какой-нибудь причины давление в модели упадет, то это тотчас же приведет к расширению, которое будет прогрессировать, так как, согласно предположению, расширение в свою очередь вызовет дальнейшее падение давления. И наоборот, увеличение давления приведет к прогрессирующему сжатию.

Следовательно, если в какой-то момент Вселенная была бы эйнштейновского типа и свободное излучение в ней стало бы переходить в вещество или свободно движущиеся частицы стали бы конденсироваться, то Вселенная тотчас же начала бы расширяться*). И наоборот, если бы вещество стало переходить в излучение, модель тотчас же начала бы сокращаться. Таким

*) Эти процессы были подробно исследованы Лемэтром [69].

образом, мы можем утверждать не только то, что равновесие статической эйнштейновской Вселенной неустойчиво, но что легко мыслимы те процессы, которые могут послужить толчком к прогрессирующему изменению радиуса модели в сторону от равновесного значения.

§ 160. Модели с постоянным количеством вещества

Теперь мы можем подробнее исследовать временное развитие некоторых конкретных моделей, которые выбраны специально для иллюстрации различных типов эволюции.

Рассмотрим сначала закрытые модели, содержащие смесь из постоянного количества несвязанного вещества (туманности, пыль), создающего ничтожное давление, и излучения, чье давление определяется плотностью. Для таких моделей общее выражение для радиуса в зависимости от времени было получено впервые Лемэтром [96].

Так как давление излучения составляет одну треть от плотности его энергии, то энергетическое уравнение (157.3) для этих моделей можно, очевидно, записать в виде

$$\frac{d}{dt}[(\rho_m + 3\rho_0)R^3] + \rho_0 \frac{d}{dt}(R^3) = 0, \quad (160.1)$$

где ρ_m — плотность вещества. Однако поскольку вещество должно само по себе сохраняться, то

$$\rho_m R^3 = \text{const} \quad \text{и} \quad \rho_0 R^4 = \text{const},$$

откуда, пользуясь обозначениями Лемэтра, получаем

$$8\pi\rho_m = \frac{\alpha}{R^3}, \quad 8\pi\rho_0 = \frac{\beta}{R^4}, \quad 8\pi\rho_{00} = 8\pi(\rho_m + 3\rho_0) = \frac{\alpha}{R^3} + \frac{3\beta}{R^4}, \quad (160.2)$$

где α и β — константы.

Подставляя эти выражения в общее уравнение (157.6), находим

$$\frac{dR}{dt} = \pm \sqrt{\frac{\Lambda R^2}{3} - 1 + \frac{\alpha}{3R} + \frac{\beta}{R^2}}. \quad (160.3)$$

Это уравнение в явном виде определяет зависимость радиуса от времени для тех моделей, в которых вещество сохраняется и создает пренебрежимо малое давление. Частный случай, когда $\beta=0$, был впервые исследован Фридманом. В этом случае равно нулю полное давление и сохраняется не только вещество, но и полная энергия.

Решение вышеприведенного уравнения было специально рассмотрено де Ситтером [101]. Несколько более общее уравнение, учитывающее давление вещества и приспособленное как к открытым, так и к закрытым моделям, было изучено Экманом [102]

§ 161. Модели, расширяющиеся из статического начального состояния

В том случае, когда расширяющаяся модель в начальном состоянии совпадает со статической Вселенной Эйнштейна, предыдущее уравнение, выражающее зависимость радиуса от времени, легко интегрируется.

Сопоставляя выражения для давления и плотности (160.2) с выражениями (139.3), (139.4) для давления и плотности в статической Вселенной Эйнштейна, находим, что в моделях подобного рода

$$8\pi p_E = \frac{\beta}{R_E^4} = -\frac{1}{R_E^2} + \Lambda \quad (161.1)$$

и

$$8\pi \rho_E = \frac{\alpha}{R_E^3} + \frac{3\beta}{R_E^4} = \frac{3}{R_E^2} - \Lambda, \quad (161.2)$$

где R_E — радиус начального статического состояния. Подставляя эти выражения в (160.3), после довольно длинных выкладок получаем простое уравнение:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{R - R_E}{\sqrt{3} R_E R} \sqrt{\left(1 + \frac{\beta}{R_E^2}\right) (R^2 + 2R_E R) + 3\beta}, \quad (161.3)$$

где осталось только два параметра: R_E и β .

Чтобы сделать это выражение удобным для интегрирования, выразим R в терминах относительного приращения к первоначальному значению R_E , т. е. обозначим

$$R = R_E (1 + x), \quad x = \frac{R - R_E}{R_E}. \quad (161.4)$$

Теперь (161.3) может быть переписано следующим образом:

$$\int dt = \frac{\sqrt{3} R_E}{\sqrt{1 + \beta/R_E^2}} \int \frac{(x+1) dx}{x \sqrt{X}}, \quad (161.5)$$

где ради краткости обозначено

$$\sqrt{X} = \sqrt{x^2 + 4x + C^2} \quad (161.6)$$

и

$$C^2 = 3 \left(1 + \frac{\beta/R_E^2}{1 + \beta/R_E^2} \right). \quad (161.7)$$

Интегрируя (161.5), получаем

$$t = \frac{\sqrt{3} R_E}{\sqrt{1 + \beta R_E^2}} \left[\ln(x + \sqrt{X} + 2) + \frac{1}{C} \ln \frac{x + \sqrt{X} - C}{x + \sqrt{X} + C} \right] + \text{const}, \quad (161.8)$$

откуда определяется x , а значит и $R = R_0 e^{1/2g(t)}$, как функция времени.

Так как второй член в этом выражении стремится к минус бесконечности, когда x стремится к нулю, а первый член стремится к плюс бесконечности, когда x стремится к бесконечности, отсюда видно, что модель должна монотонно расширяться, пережидаясь из статической эйнштейновской Вселенной с $R = R_E$ при $t = -\infty$ в пустую Вселенную де Ситтера при $t = \infty$, приближаясь к обоим этим состояниям асимптотически.

Влияние давления излучения на расширение определяется во всех вышеприведенных выражениях фактором β/R_E^2 . Легко видеть, однако, что это влияние должно быть заведомо мало, так как согласно (161.1) и (161.2) можно записать, что

$$\frac{\beta}{R_E^2} = \frac{2\rho_E}{\rho_E + p_E}, \quad (161.9)$$

где ρ_E и p_E — давление и плотность начального статического эйнштейновского состояния. Отсюда видно, что β/R_E^2 во всяком случае может принимать только значения между нулем (если модель содержит вещество без излучения) и $\frac{1}{2}$ (если модель содержит только излучение). Учитывая теперь то, каким образом эта величина входит в вышеприведенное выражение, мы можем утверждать, что процесс расширения первоначально определяется только радиусом R_E исходного статического состояния.

Этот факт специально исследован де Ситтером [101], который рассмотрел поведение во времени двух моделей, для которых

$$\beta = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\beta}{R_E^2} = \frac{1}{2}, \quad (161.10)$$

т. е. когда нет или излучения, или вещества, соответственно.

Для первого случая уравнение (161.8) приводится к виду

$$t = \sqrt{3} R_E \left[\ln(x + \sqrt{X} + 2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{x + \sqrt{X} - \sqrt{3}}{x + \sqrt{X} + \sqrt{3}} \right] + \text{const}, \quad (161.11)$$

а для второго — к гораздо более простому выражению:

$$t = \frac{R_E}{\sqrt{2}} \ln 4 (x^2 + 2x) + \text{const} = \frac{R_E}{\sqrt{2}} \ln (R^2 - R_E^2) + \text{const}. \quad (161.12)$$

Однако при одинаковых значениях R_E оба выражения дают очень похожие картины расширения, как видно из кривых *I* и *VII* на рис. 8, взятом из статьи де Ситтера. Отсюда ясно, что модель с нулевым давлением, которую Лемэтр рассматривал в 1927 г. с целью определить ее пригодность для описания реальной Вселенной, является хорошим представителем всего класса подобных моделей.

Иногда расширяющиеся Вселенные, которые в начальном состоянии совпадают со статической эйнштейновской Вселенной,

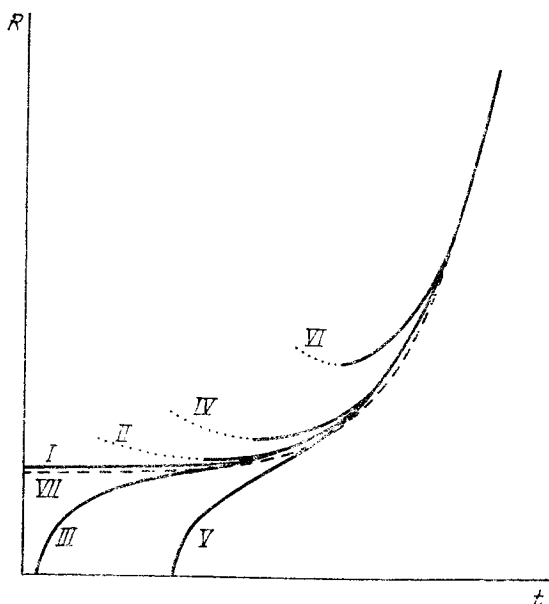


Рис. 8.

привлекали внимание космологов тем, что уравнения в этом случае не приводят к сингулярным состояниям, и тем, что у этих моделей есть бесконечный запас времени для прошлых космологических процессов. Однако после работ Эддингтона [94] и других [103, 69] стало ясно, что логарифмически бесконечный запас для прошедшего времени в подобных моделях не имеет практического значения из-за неустойчивости статической эйнштейновской Вселенной, о чем мы уже говорили в § 159.

§ 162. Монотонно расширяющиеся модели с нестатическим начальным состоянием

Для моделей, которые расширяются не от статического начального состояния, в общем случае нельзя получить простое функциональное соотношение между радиусом и временем, подобное уравнению (160.3), справедливому, когда количество вещества сохраняется. Однако можно провести численные расчеты. На рис. 8 представлены кривые зависимости радиуса от времени для некоторых моделей подобного рода, рассчитанные де Ситтером.

Кривые на этом рисунке могут быть разделены на четыре группы. Кривые *I* и *VII* относятся к уже упомянутому случаю, когда есть материя, но нет излучения и, наоборот, есть излучение, но нет материи, а модель расширяется от начального статического состояния. Кривые *II* и *IV* относятся к моделям типа M_2 , рассмотренным в § 157, д, которые сначала сжимаются до не-сингулярного минимального радиуса, отсекаемого на критической кривой, а затем монотонно расширяются, перерождаясь в пустую Вселенную де Ситтера. Кривые *III* и *V* относятся к моделям типа M_1 , рассмотренным в § 157, в. Эти модели монотонно расширяются от сингулярного состояния, радиус которого в данном случае был принят равным нулю. Наконец, кривая *VI* относится к предельному случаю абсолютно пустой Вселенной.

Что касается отражения реальной Вселенной, то вселенные первого рода, которые монотонно расширяются от сингулярного состояния, имеют то преимущество, что они проводят достаточно большой промежуток времени вне сингулярного состояния. Лемэтр [104] недавно отстаивал подобные модели и образно описывал начальное сингулярное состояние как состояние гигантского атома.

§ 163. Осциллирующие модели ($\Lambda=0$)

Поскольку, как мы уже говорили, разумно положить космологическую постоянную Λ равной нулю и полностью исключить ее из уравнений Эйнштейна, то следует обратить особое внимание на осциллирующие модели, которые в этом случае становятся единственно возможными для описания закрытой Вселенной. Поведение следующих двух моделей поддается исследованию наиболее легко.

Первая из этих моделей была предложена Фридманом [84] еще в 1922 г.; ею потом пользовался Эйнштейн [105]. В качестве вещества, заполняющего эту модель, берутся невзаимодействующие частицы, число которых сохраняется и давлением которых можно пренебречь. В этом случае в уравнениях (160.2) и (160.3)

нужно положить Λ и β равными нулю. В результате зависимость радиуса от времени будет определяться уравнением

$$\frac{dR}{dt} = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{3R} - 1}, \quad (163.1)$$

где α — постоянная, связанная с плотностью вещества и радиусом модели соотношением

$$8\pi\rho_m R^3 = \alpha = \text{const.} \quad (163.2)$$

Легко видеть, что интегралом уравнения (163.1) является циклоида в плоскости Rt :

$$R = \frac{\alpha}{6} (1 - \cos \psi), \quad t = \frac{\alpha}{6} (\psi - \sin \psi), \quad (163.3)$$

откуда следует, что радиус осциллирует между $R=0$, радиусом сингулярного состояния при $t=0$, и максимумом $R=\alpha/3$ при $t=\pi\alpha/6$.

В основе второй осциллирующей модели лежит предположение, что вещество внутри нее состоит исключительно из излучения черного тела [106]. В этом случае зависимость радиуса от времени с учетом (160.2), (160.3) определяется уравнением

$$\frac{dR}{dt} = \pm \sqrt{\frac{\beta}{R^2} - 1}, \quad (163.4)$$

где β — константа, связанная с радиусом и давлением излучения следующим соотношением:

$$8\pi p_0 R^4 = \beta = \text{const.} \quad (163.5)$$

Интеграл уравнения (163.4) легко найти:

$$R = \sqrt{\beta - t^2}, \quad (163.6)$$

причем максимум R приходится на $t=0$.

Как показано в § 157, осциллирующие модели существуют также и при $\Lambda \neq 0$. Их развитие во времени видно из рис. 9, взятого из той же работы де Ситтера [101]. Кривая IX представляет циклоиду для случая, когда Λ и давление равны нулю. Кривая VII относится к предельному случаю $\Lambda = \Lambda_E$, т. е. к модели типа A_1 , которая, расширяясь, асимптотически вырождается в статическую эйнштейновскую Вселенную. Этот случай занимает промежуточное положение между осциллирующими моделями типа O_1 и монотонно расширяющимися моделями типа M_1 . На рис. 9 представлен также ход эволюции еще нескольких, слегка различающихся по параметрам моделей, которые расширяются до бесконечности.

С точки зрения пригодности для описания реальной Вселенной осциллирующие модели с $\Lambda=0$ обладают тем недостатком,

что у них слишком мал промежуток времени, который они проводят вне сингулярного состояния. Кроме того, они пока еще не объясняют механизм перехода через сингулярное состояние.

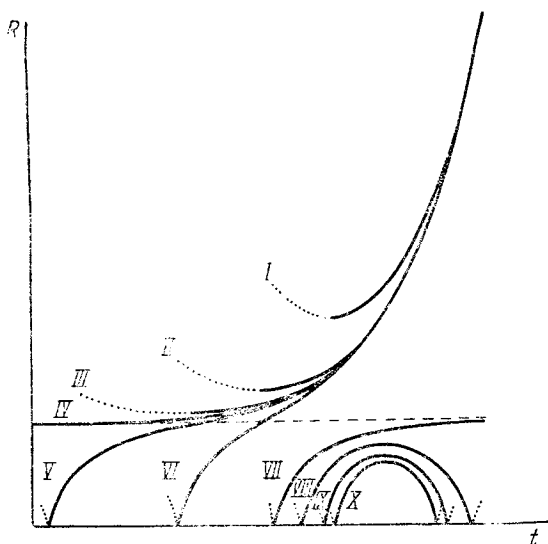


Рис. 9.

Чтобы оценить, сколько времени прошло после выхода модели из сингулярного состояния, удобнее всего воспользоваться выражением (150.7) для давления:

$$8\pi p_0 = -\frac{1}{R_0^2} e^{-g} - \ddot{g} - \frac{3}{4} \dot{g}^2 + \Lambda.$$

Положив $\Lambda=0$, перепишем его в следующем виде:

$$-\frac{\ddot{g}}{\dot{g}^2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{R_0^2} \frac{e^{-g}}{\dot{g}^2} + \frac{8\pi p_0}{\dot{g}^2}, \quad (163.7)$$

откуда ясно, что во всяком случае можно положить

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\dot{g}} \right) \geq \frac{3}{4}.$$

Интегрируя по времени расширения от значений (t_s, \dot{g}_s) при сингулярном состоянии до текущих (t, \dot{g}) , получаем

$$t - t_s \leq \frac{4}{3} \left(\frac{1}{\dot{g}} - \frac{1}{\dot{g}_s} \right),$$

откуда видно, что для осциллирующих моделей с $\Lambda=0$ во всяком случае можно написать, что

$$\Delta t \leq \frac{4}{3g}, \quad (163.8)$$

где Δt — время, прошедшее с момента выхода из сингулярного состояния, а значение \dot{g} берется в текущий момент и для реальной Вселенной может быть определено из красного смещения.

§ 164. Открытая модель Эйнштейна — де Ситтера ($\Lambda=0, R_0=\infty$)

Наиболее простая с математической точки зрения модель получается, если Λ в выражении (149.1) для интервала ds^2 положить равной нулю, а R_0 — бесконечности:

$$\Lambda=0, R_0=\infty, \quad (164.1)$$

как было предложено Эйнштейном и де Ситтером [107].

Интервал тогда запишется в следующем виде:

$$ds^2 = -e^{g(t)} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2 \quad (164.2)$$

или

$$ds^2 = -e^{g(t)} (dx^2 + dy^2 + dz^2) + dt^2,$$

а пространство — время станет плоским и пространственно неограниченным.

Далее, общие выражения для давления и плотности (150.7) и (150.8), после подстановки в них (164.1), приводятся к очень простому виду:

$$8\pi\rho_0 = -\ddot{g} - \frac{3}{4}\dot{g}^2 \quad (164.3)$$

и

$$8\pi\rho_{00} = \frac{3}{4}\dot{g}^2. \quad (164.4)$$

Первое из этих уравнений требует, чтобы ускорение \ddot{g} было всегда отрицательным, так как иначе давление будет отрицательным. Второе же уравнение позволяет сразу установить связь между плотностью и доплер-эффектом. Эти уравнения могут быть легко проинтегрированы в двух предельных случаях: когда жидкость состоит только из вещества с пренебрежимо малым давлением, либо когда она состоит только из излучения с давлением, пропорциональным плотности.

Если модель заполнена веществом с нулевым давлением, то из (164.3) получаем уравнение

$$\frac{d^2g}{dt^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{dg}{dt}\right)^2 = 0 \quad (164.5)$$

и интеграл этого уравнения

$$e^{3/4g} = at + b, \quad (164.6)$$

где a и b — постоянные. Используя (164.4), находим значение одной из констант:

$$a = \sqrt{6\pi\rho_{00}e^{3/2g}}. \quad (164.7)$$

Если же модель заполнена только излучением с давлением, равным одной трети от плотности энергии, выражения (164.3) и (164.4) позволяют получить следующее уравнение:

$$\frac{d^2g}{dt^2} + \left(\frac{dg}{dt}\right)^2 = 0, \quad (164.8)$$

которое имеет решение

$$e^g = at + b. \quad (164.9)$$

Постоянная a здесь принимает значение

$$a = \sqrt{\frac{32\pi}{3}\rho_{00}e^{2g}}. \quad (164.10)$$

Тем же методом, что и в конце предыдущего параграфа, легко получить промежуток времени, истекший с момента выхода из сингулярного состояния. В модели Эйнштейна — де Ситтера он во всяком случае не больше, чем

$$\Delta t \leq \frac{4}{3g}. \quad (164.11)$$

§ 165. Исследование отброшенных малых величин в рассмотренных моделях

Конкретные модели, на примере которых мы в предыдущих параграфах продемонстрировали различные типы эволюции, были нарочно упрощены предположениями, что давлением частиц вещества можно пренебречь и что полная масса вещества сохраняется. Однако совершенно очевидно, что, по крайней мере теоретически, эти предположения не являются обязательными. В принципе мы всегда могли бы предсказать ход эволюции, если бы имели достаточно полную информацию относительно свойств вещества, заполняющего модель.

В общем случае, для того чтобы найти зависимость ρ_{00} , p_0 и g от времени, необходимо иметь три уравнения. Два из них были

получены в § 150, и в наиболее удобном виде их можно записать так:

$$\frac{d}{dt}(\rho_{00}e^{3/2g}) + p_0 \frac{d}{dt}(e^{3/2g}) = 0 \quad (165.1)$$

и

$$\frac{d}{dt}(e^{1/2g}) = \pm \sqrt{\frac{8\pi\rho_{00}e^g}{3} + \frac{\Lambda e^g}{3} - \frac{1}{R_0^2}}, \quad (165.2)$$

а третье уравнение определяется свойствами жидкости.

Если процессы в жидкости обратимы, т. е. если давление жидкости является функцией энергии и объема, то в качестве третьего уравнения можно взять уравнение состояния. В общем виде это уравнение можно записать так:

$$p_0 = p_0(E, v) = p_0\left(\rho_{00}e^{3/2g}, e^{3/2g}\right), \quad (165.3)$$

где $e^{3/2g}$, как мы уже видели в (151.4), пропорционально собственному объему любого выбранного элемента жидкости. Если же в жидкости происходят необратимые процессы, то третье уравнение будет содержать как $g(t)$, так и производные $g(t)$. Во всяком случае при наличии трех уравнений и некоторых предположений относительно начальных условий и постоянных Λ и R_0 задача становится в принципе разрешимой.

Тот факт, что в наших иллюстративных примерах мы пренебрегли давлением, возникающим из-за хаотического движения частиц материи, вряд ли можно рассматривать как серьезный дефект по отношению к реальной космологии. На *современном* этапе эволюции нашей Вселенной мы имеем полное право считать, что хаотическое движение туманностей действительно создает пренебрежимо малое давление, так же как и идеальная жидкость, заполняющая нашу модель. То же самое, по-видимому, относится и к межгалактической пыли и к другим частицам, находящимся в межгалактических пространствах.

Однако тот факт, что мы приняли полную массу вещества в моделях постоянной, заслуживает несколько большего внимания, так как по отношению к реальной Вселенной это означает, что мы пренебрегаем реально имеющимся потоком излучения от туманностей в межгалактическое пространство. Согласно уравнению (152.7), для относительной скорости изменения массы вещества со временем можно записать следующее уравнение:

$$-\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} = \frac{3}{2} \left[\frac{\rho_{00} + \frac{5}{8} \rho_0}{\rho_m} - \frac{1}{4\pi\rho_m} \left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}}{g} \right) \right] \dot{g}, \quad (165.4)$$

или, обозначив для простоты

$$\gamma = 3 \left[\frac{\rho_{00} + \frac{5}{8} \rho_0}{\rho_m} - \frac{1}{4\pi\rho_m} \left(\ddot{g} + \frac{\dot{g}}{g} \right) \right], \quad (165.5)$$

переписать его несколько иначе:

$$-\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} = -\frac{1}{(\rho_m e^{3/2g})} \frac{d}{dt} (\rho_m e^{3/2g}) = \gamma \frac{\dot{g}}{2}, \quad (165.6)$$

где ρ_m — плотность вещества в модели.

Мы ничего не можем сказать о том, чему равна величина γ в реальной Вселенной в настоящее время, так как не знаем источника космических лучей, который тоже может быть связан с уменьшением полной массы вещества. Однако если предположить, что любая масса во Вселенной уменьшается с такой же скоростью, что и масса Солнца, то для γ нужно принять величину порядка

$$\gamma \approx 10^{-4}, \quad (165.7)$$

истинная же величина может оказаться еще меньшей. (Де Ситтер оценивает $\gamma \approx 2 \cdot 10^{-7}$.)

Точно так же мы не знаем и скорости изменения γ во времени. Тем не менее в разумном интервале времени можно положить γ постоянной. При этом уравнение (165.6) интегрируется и для плотности вещества получается

$$\rho_m = \rho_1 e^{-\frac{1}{2}(3+\gamma)g}, \quad (165.8)$$

где ρ_1 — постоянная. Для плотности излучения получается значение

$$\rho_r = 3\rho_0, \quad (165.9)$$

если пренебречь вкладом хаотического движения частиц в давление p_0 .

Подставляя эти два выражения в уравнение энергии (165.1), получаем

$$\frac{d}{dt} (\rho_1 e^{-1/2\gamma g} + 3\rho_0 e^{3/2g}) + p_0 \frac{d}{dt} (e^{3/2g}) = 0.$$

Выполняя указанные дифференцирования и снова подставляя (165.8) и (165.9), после некоторых преобразований находим от-

носительные скорости изменения давления и плотности излучения:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dt} = \frac{1}{\rho_r} \frac{d\rho_r}{dt} = - \left(2 - \frac{\gamma}{2} \frac{\rho_m}{\rho_r} \right) \dot{g}. \quad (165.10)$$

Интересно отметить, что, когда g положительно и модель расширяется, давление и плотность излучения убывают со временем, если только γ или ρ_m/ρ_r не слишком велики. Приписав величине γ значение (165.7), получим, что давление излучения перестанет возрастать, как только плотность излучения достигнет по сравнению с плотностью вещества величины

$$\rho_r = 2,5 \cdot 10^{-5} \rho_m. \quad (165.11)$$

Таким образом, как впервые было отмечено де Ситтером [101], теория расширяющейся Вселенной способна объяснить кажущееся исчезновение излучения, испускаемого звездами в межгалактическое пространство. Следует также отметить, что если давление при расширении уменьшается монотонно, то на критической кривой рис. 6 не может быть никаких минимумов, и поэтому никогда не может возникнуть осцилляторное решение второго рода (типа O_2).

Наконец, нужно сказать еще об одном упрощающем предположении, принятом при построении моделей, иллюстрирующих различные типы эволюции. Было предположено, что изменение плотности жидкости по мере того, как модель сжимается или расширяется, происходит обратимым образом, а всеми необратимыми процессами можно пренебречь. Поэтому следует еще рассмотреть, что произойдет, если эволюция космологических моделей будет носить необратимый характер, и чем такая эволюция отличается от термодинамически обратимого поведения во времени. К этому мы и приступим в III части настоящей главы.

§ 165*. Эффект неоднородности в космологических моделях*)

1. Введение. В приложениях релятивистской механики и релятивистской термодинамики к космологии обычно рассматриваются однородные модели Вселенной, заполненные идеальной жидкостью, которая в любой момент времени имеет одни и те же свойства во всем ее объеме. Такой подход оправдывается, конечно, тем, что однородные модели с математической точки зрения более просты по сравнению с неоднородными.

*) Перевод статьи: R. C. Tolman, Effect of Nonhomogeneity on Cosmological Models, Proc. Nat. Acad. Sci. 20, 169—176 (1934), сделанный В. М. Дубовиком, добавлен в русском издании (Прим. ред.)

Однородность распределения подтверждается наблюдаемым распределением межгалактических туманностей вплоть до расстояний порядка 10^8 световых лет, доступных стодюймовому телескопу обсерватории Маунт Вильсон*). Тем не менее следовало бы убедиться в тенденции к исчезновению неоднородностей со временем, чтобы иметь уверенность, что поведение Вселенной в очень отдаленных областях или за чрезвычайно большие периоды времени действительно можно описывать с помощью однородных моделей.

Цель этой статьи — расширить наши теоретические знания об эффектах неоднородности в космологических моделях. Для упрощения будут рассматриваться самые простые модели, заполненные пылевидными частицами (туманности), в которых давление пренебрежимо мало и распределено неоднородно, но сферически симметрично относительно некой начальной точки — начала координат. Это позволяет использовать выражения для интервала и результаты, эквивалентные тем, которые были получены Лемэтром [138] при исследовании механизма образования туманностей. Результаты нашего исследования подчеркивают возможную опасность заключений о реальной Вселенной на основании далеких экстраполяции свойств однородной модели.

2. Тензор энергии — импульса. Для наших исследований наиболее подходящей является система сопутствующих координат, в которой пространственные компоненты определяются координатной сеткой, связывающей соседние частицы и движущейся вместе с ними. Используя предположение о сферической симметрии и отсутствии давления (а следовательно, и градиентов давления), нетрудно, привести интервал в такой модели к обычной форме:

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - e^\omega (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2, \quad (1)$$

где λ и ω — функции r и t .

Рассмотрим тензор энергии — импульса, соответствующий нашей модели и нашему выбору интервала.

С одной стороны, поскольку вещество, заполняющее модель, по предположению пылевидное, не испытывающее никакого давления, мы можем записать тензор энергии — импульса в виде

$$T^{\alpha\beta} = \rho \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}, \quad (2)$$

где ρ — плотность вещества, измеряемая локальным наблюдателем, движущимся вместе с ним, а величины (dx^α/ds) и (dx^β/ds)

*) Крупномасштабная однородность не нарушается и для больших расстояний, вплоть до 10^{10} световых лет, на которых зарегистрированы квазары. (Прим. ред.)

являются компонентами скорости вещества относительно используемых координат. В системе сопутствующих координат, когда интервал задается формулой (1), исчезают все компоненты $T^{\alpha\beta}$, кроме одной:

$$T_4^4 = \rho, \quad T_\beta^\alpha = 0 \quad (\alpha \text{ или } \beta \neq 4). \quad (3)$$

С другой стороны, компоненты тензора энергии — импульса, соответствующие интервалу (1), могут быть получены из выражений, данных для этой общей формы Динглем [71]; комбинируя полученные результаты с условиями (3), легко получить систему уравнений, связывающих метрические переменные λ и ω с плотностью ρ :

$$8\pi T_1^1 = e^{-\omega} - e^{-\lambda} \frac{\omega'^2}{4} + \ddot{\omega} + \frac{3}{4} \dot{\omega}^2 - \Lambda = 0, \quad (4)$$

$$8\pi T_2^2 = 8\pi T_3^3 = -e^{-\lambda} \left(\frac{\omega''}{2} + \frac{\omega'^2}{4} - \frac{\lambda'\omega'}{4} \right) + \frac{\ddot{\lambda}}{4} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \frac{\ddot{\omega}}{2} + \frac{\dot{\omega}^2}{4} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\omega}}{4} - \Lambda = 0, \quad (5)$$

$$8\pi T_4^4 = e^{-\omega} - e^{-\lambda} \left(\omega'' + \frac{3}{4} \omega'^2 - \frac{\lambda'\omega'}{2} \right) + \frac{\dot{\omega}^2}{4} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\omega}}{2} - \Lambda = 8\pi\rho, \quad (6)$$

$$8\pi e^\lambda T_4^1 = -8\pi T_1^4 = \frac{\omega'\dot{\omega}}{2} - \frac{\dot{\lambda}\omega'}{2} + \dot{\omega}' = 0, \quad (7)$$

где штрихи означают дифференцирование по r , точки — дифференцирование по t , а Λ — космологическая постоянная.

3. Решение уравнений. Для того чтобы проанализировать эти уравнения, удобно прежде всего исключить λ . Очевидно, что первый интеграл уравнения (7) можно записать в виде

$$e^\lambda = \frac{e^{\omega\omega'^2/4}}{f^2(r)}, \quad (8)$$

где $f^2(r)$ — произвольная функция r , принимающая, однако, только положительные значения.

Подставляя (8) в (1), можно переписать теперь интервал в форме (3):

$$ds^2 = -\frac{e^{\omega\omega'^2/4}}{f^2(r)} dr^2 - e^\omega (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + dt^2. \quad (9)$$

Подставляя (8) в (4), получаем

$$e^\omega \left(\ddot{\omega} + \frac{3}{4} \dot{\omega}^2 - \Lambda \right) + \{1 - f^2(r)\} = 0. \quad (10)$$

Очевидно, что в качестве первого интеграла этого уравнения можно написать выражение

$$e^{3\omega/2} \left(\frac{\dot{\omega}^2}{2} - \frac{2}{3} \Lambda \right) + 2e^{\omega/2} \{1 - f^2(r)\} = F(r), \quad (11)$$

где $F(r)$ — еще одна произвольная функция r . Интеграл же этого уравнения имеет вид

$$\int \frac{de^{\omega/2}}{\sqrt{f^2(r) - 1 + \frac{1}{2} F(r) e^{-\omega/2} + \frac{\Lambda}{3} e^{\omega}}} = t + F(r), \quad (12)$$

где $F(r)$ — третья произвольная функция.

Подставляя (8) в (5), нетрудно убедиться, что полученный результат эквивалентен (10), так что в дальнейшем рассмотрении уравнения (5) нет необходимости.

И наконец, подставляя (8) в (6), получаем следующее выражение для плотности пылевидного вещества:

$$8\pi\rho = e^{-\omega} \left\{ 1 - f^2(r) - \frac{4f(r)f'(r)}{\omega'} \right\} + \frac{3}{4} \dot{\omega}^2 + \frac{\ddot{\omega}\omega'}{\omega'} - \Lambda. \quad (13)$$

Этот результат может быть записан в различных формах. Исключая $f^2(r)$ с помощью (10), получаем

$$8\pi\rho = -3\ddot{\omega} - 2\frac{\ddot{\omega}'}{\omega'} - \frac{3}{2} \dot{\omega}^2 - 2\frac{\dot{\omega}\omega'}{\omega'} + 2\Lambda, \quad (14)$$

или, привлекая (11), переписываем (13) в виде

$$8\pi\rho = \frac{e^{-3\omega/2}}{\omega'} \frac{\partial F(r)}{\partial r}. \quad (15)$$

Дифференцируя затем (15), находим

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} = -\frac{3}{2} \dot{\omega} - \frac{\dot{\omega}'}{\omega'}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial t^2} = -\frac{3}{2} \ddot{\omega} - \frac{\ddot{\omega}'}{\omega'} + \left(\frac{\dot{\omega}'}{\omega'} \right)^2 \quad (17)$$

или, используя (14), получаем

$$\frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial t^2} = 4\pi\rho - \Lambda + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{\omega}'}{\omega'} \right)^2. \quad (18)$$

4. Применения. У нас теперь есть все, чтобы исследовать поведение космологических моделей. С математической точки зрения из уравнений (10) — (12) следует, что можно выбрать три произвольные функции $f^2(r)$, $F(r)$ и $\dot{F}(r)$ так, чтобы они соответствовали любым заданным начальным значениям, ω , $\dot{\omega}$ и $\ddot{\omega}$ как функциям r при $t=0$, а затем, по крайней мере в принципе, определить с помощью уравнения (12) изменение ω в зависимости от r и t . С физической точки зрения это означает, что можно в рамках нашей модели выбрать в момент времени $t=0$ величину $e^{\omega} \omega'^2 / 4f^2(r)$ так, чтобы вид интервала (9) соответствовал любому заданному начальному соотношению между радиальной координатой r и реально измеряемым расстоянием от начала координат; кроме того, можно выбрать $\dot{\omega}$ так, чтобы выбор сопутствующих координат находился в соответствии с любым заданным начальным распределением (по r) измеряемой радиальной скорости вещества в модели, и, наконец, можно выбрать $\ddot{\omega}$ так, чтобы уравнение (14) находилось в соответствии с любым заданным начальным распределением плотности пылевидной материи как функции от r . Уравнения определяют тогда дальнейшее поведение материи в модели.

Посмотрим, что можно получить, действуя таким образом, в некоторых конкретных случаях.

а) **Статическая модель Эйнштейна.** Пусть при $t=0$ распределения заданы следующим образом:

$$e^{\omega} = r^2, \quad \dot{\omega} = 0, \quad \ddot{\omega} = 0. \quad (19)$$

В соответствии с выражениями (9) — (12) это дает интервал статической космологической модели Эйнштейна

$$ds^2 = - \frac{dr^2}{1 - \Lambda r^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + dt^2, \quad (20)$$

а согласно (14) получаем старое значение для однородной плотности в модели Эйнштейна

$$4\pi\rho = \Lambda, \quad (21)$$

которая остается статической в соответствии с (16) и (17).

б) **Искаженная модель Эйнштейна.** Пусть при $t=0$ распределения выглядят так:

$$e^{\omega} = r^2, \quad \dot{\omega} = 0, \quad \ddot{\omega} = \ddot{\omega}_0(r), \quad (22)$$

где $\ddot{\omega}_0$ есть начальная функция, зависящая от r . Тогда

в соответствии с (14), (16) и (18) при $t=0$ имеем

$$4\pi\rho = \Lambda - \frac{3}{2}\ddot{\omega}_0 - \frac{1}{2}\ddot{\omega}'r, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} = 0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial t^2} = 4\pi\rho - \Lambda. \quad (25)$$

Следовательно, в такой искаженной модели Эйнштейна уже не существует однородной плотности вещества, задаваемой (21), и, хотя плотность материи первоначально не зависит от времени, она будет возрастать в тех областях значений r , где она больше обычного эйнштейновского значения $\Lambda=4\pi\rho$, и будет уменьшаться в тех областях, где она меньше этого значения. Это указывает на еще один вид неустойчивости в модели Эйнштейна (в дополнение к той, что уже обсуждалась Эддингтоном и другими авторами*), так как уже начальное поведение характеризуется увеличением отличия от однородного распределения Эйнштейна. Кроме того, очевидно, что в областях, в которых плотность начинает возрастать, из общей формы уравнения (18) следует, что вблизи сингулярного состояния, характеризуемого бесконечным значением плотности, или же в районе нарушения наших упрощенных уравнений не начнется процесс обратной конденсации. Из уравнения (25) также следует, что в случае обычного плоского пространства, $\Lambda=0$, пылевидная материя, обладающая *любым* сферически симметричным стационарным распределением, начинает конденсироваться, что согласуется с интуитивными представлениями на уровне теории тяготения Ньютона.

в) **Нестатическая модель Фридмана.** Пусть при $t=0$ распределения заданы следующим образом:

$$e^{\omega} = e^{g_0} r^2, \quad \dot{\omega} = \dot{g}_0, \quad \ddot{\omega} = \ddot{g}_0, \quad (26)$$

где g_0 , \dot{g}_0 и \ddot{g}_0 — соответствующие мгновенные значения некоторой функции $g(t)$. Привлекая (9) — (12), можно получить известный интервал Фридмана для случая однородного распределения расширяющейся и сжимающейся материи:

$$ds^2 = - e^{g(t)} \left(\frac{dr^2}{1 - r^2/R_0^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) + dt^2, \quad (27)$$

где R_0 — константа, значения которой можно получить с помощью (10), а $g(t)$ имеет характерную зависимость от t для однородной

*) См. § 159. (Прим. ред.)

модели, не содержащей ничего, кроме пылевидной материи, испытывающей пренебрежимо малое давление.

Согласно формулам (14), (16), (18) начальные распределения и поведение материи в модели задаются формулами

$$4\pi\rho = \Lambda - \frac{3}{2}\ddot{g}_0 - \frac{3}{4}\dot{g}_0^2, \quad (28)$$

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} = -\frac{3}{2}\dot{g}_0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial t^2} = 4\pi\rho - \Lambda + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial t}\right)^2. \quad (30)$$

г) **Искаженная модель Фридмана.** Зададим распределения при $t=0$ в виде

$$e^{\omega} = e^{g_0 r^2}, \quad \dot{\omega} = \dot{g}_0, \quad \ddot{\omega} = \ddot{\omega}_0(r), \quad (31)$$

где g_0 и \dot{g}_0 введены так же, как и выше, но в начале $\ddot{\omega}$ — любая произвольная функция от r .

Используя (14), (16) и (18), при $t=0$ получаем

$$4\pi\rho = \Lambda - \frac{3}{2}\ddot{\omega}_0 - \frac{1}{2}\ddot{\omega}_0 r - \frac{3}{4}\dot{g}_0^2, \quad (32)$$

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} = -\frac{3}{2}\dot{g}_0, \quad (33)$$

$$\frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial t^2} = 4\pi\rho - \Lambda + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial t}\right)^2. \quad (34)$$

Сравнивая это первоначальное состояние с тем, что возникает в случае модели Фридмана, мы видим, что хотя скорость расширения или сжатия во всех частях модели выбрана такой же, как и раньше, однако плотность вещества и ее вторые производные по времени перестают быть одинаковыми во всех частях этой модели. Действительно, сравнивая (30) и (34), можно записать для обеих моделей при $t=0$

$$\frac{\partial^2 \ln \rho_D}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \ln \rho_F}{\partial t^2} = 4\pi(\rho_D - \rho_F), \quad (35)$$

где индексы указывают на различие между моделью Фридмана и ее искаженным вариантом. Следовательно, для тех значений r , где плотность в искаженной модели отличается от плотности в модели Фридмана, существует, хотя бы в начале, стремление к увеличению этого отличия. Из общей формы уравнения (18) очевидно, что в случаях, когда имеет место конденсация, расхождения значения плотности в различных частях модели будут возрастать до тех пор, пока не будет достигнуто сингулярное состояние, характеризующееся бесконечной плотностью, или состояние, в котором нарушаются упрощенные уравнения.

д) **Комбинация однородных распределений.** В заключение зададим для наших уравнений начальное распределение при $t=0$, соответствующее в данной зоне, скажем от 0 до r_a , условиям обычной модели Фридмана:

$$e^{\omega} = e^{g_1 r^2}, \quad \dot{\omega} = \dot{g}_1, \quad \ddot{\omega} = \ddot{g}_1, \quad (36)$$

а затем, от r_a до r_b , следует переходная зона, в которой величины меняются до значений, относящихся к следующей области, от r_b до r_c , соответствующих другой модели Фридмана, характеризующейся уравнениями

$$e^{\omega} = e^{g_2 r^2}, \quad \dot{\omega} = \dot{g}_2, \quad \ddot{\omega} = \ddot{g}_2. \quad (37)$$

Такое последовательное прибавление переходных зон и зон Фридмана можно продолжить любым произвольным образом.

Тогда согласно (9) — (12) пылевидная материя в каждой фридмановской зоне будет вести себя, как в некоторой обычной, полностью однородной модели, безотносительно к эволюции в других частях модели.

5. **Заключение.** Полученные результаты указывают на отсутствие каких-либо общих гравитационных механизмов, которые с необходимостью приводили бы к уничтожению неоднородностей в космологических моделях. Это доказано как обнаружением случаев, когда возмущение, уводящее от исходного однородного статического или нестатического распределения плотности, стремится возрасти со временем, так и существованием моделей с невзаимодействующими областями, поведение которых подтверждает сказанное для совсем непохожих однородных распределений.

Применительно к явлениям реальной Вселенной следует отметить, конечно, чрезвычайную упрощенность рассмотренных моделей. Во-первых, несмотря на то, что модели допускают неоднородность, в целях математического упрощения требуется, чтобы они оставались сферически симметричными относительно некоторого начала координат. Явления же в реальной Вселенной развиваются при наличии более существенных неоднородностей, чем рассмотренные. Во-вторых, материя, заполняющая модели, считалась пылевидной, испытывающей пренебрежимо малое давление. Следовательно, не учитывались такие эффекты, как тепловые потоки от одной части вещества к другой, которые в реальной Вселенной могли бы создавать *негравитационное* взаимодействие, стремящееся уничтожить неоднородности.

Ввиду отсутствия полного соответствия между нашими моделями и природой, мы не должны делать слишком категорических

утверждений относительно реальной Вселенной. Тем не менее из наших результатов следует по крайней мере то, что нужно соблюдать предельную осторожность, применяя к реальной Вселенной результаты смелых экстраполяций временного или пространственного характера, найденных для строго однородных моделей. Исходя из примера, в котором рассматривались зоны, соответствующие любой заданной однородной модели, можно, конечно, рассматривать явления, происходящие в нашей собственной окрестности на расстоянии, скажем, 10^8 световых лет и в *ограниченных периодах времени* порядка 10^8 лет так, как будто они описываются интервалом соответствующей однородной модели. Однако утверждение, что тот же самый интервал применим для описания всей Вселенной в целом или что однородная модель остается разумным приближением в периоды сильного сгущения материи, может оказаться несправедливым. Следовательно, на настоящей стадии теоретических исследований разумно учитывать возможность того, что в областях Вселенной, находящихся за пределами, достижимыми для современных телескопов, может происходить сжатие, а не расширение и может существовать материя с такой плотностью и на такой стадии эволюции, которые совершенно отличны от известных нам. Не следует также делать из рассматриваемых однородных моделей слишком категорических выводов относительно начального состояния всей Вселенной *).

ЧАСТЬ III

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕРМОДИНАМИКА НЕСТАТИЧЕСКИХ ОДНОРОДНЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

§ 166. Следствие первого закона релятивистской термодинамики

Мы должны теперь дать краткий обзор термодинамического поведения однородных космологических моделей с интервалом

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2 / 4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2. \quad (166.1)$$

*) Вопрос о поведении моделей Вселенной в эпоху больших плотностей сейчас изучен значительно полнее. По-видимому, существование особенности в решениях космологических уравнений доказано из весьма общих топологических соображений. Интересный обзор результатов дан в книге: Р. Пенроуз, Структура пространства — времени, «Мир», 1972. Эта книга, однако, требует хорошей геометрической подготовки. Очень важные результаты о поведении моделей вблизи особенностей Ли ф ш и ц а, Х а л а т н и к о в а, Б е л и н с к о г о изложены в их обзоре (УФН 102, 463 (1970)). Подготовленный читатель найдет в этих работах и дальнейшие литературные указания. В этом направлении сейчас идут самые интересные исследования. (Прим. ред.)

Из принципов релятивистской термодинамики, изложенных в главе IX, следует, что релятивистский аналог первого закона обычной термодинамики вытекает из уравнения для плотности тензора энергии — импульса релятивистской механики:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_\mu^{\nu}}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2} \mathfrak{E}^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (166.2)$$

Определяя компоненты тензора энергии — импульса с помощью уравнения для интервала ds^2 , в соответствии с (150.5) и (150.6), получаем, что отличны от нуля только следующие компоненты:

$$T^{11} = -g^{11}p_0, \quad T^{22} = -g^{22}p_0, \quad T^{33} = -g^{33}p_0, \quad T^{44} = p_{00}. \quad (166.3)$$

Опуская индексы, находим

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p_0, \quad T_4^4 = p_{00},$$

где p_0 и p_{00} — собственные макроскопические давление и плотность жидкости, т. е. те значения давления и плотности, которые получаются из измерений локального наблюдателя, закрепленного неподвижно в заданный момент времени в заданном месте.

Подставив (166.3) в (166.2), в случае $\mu=1$ получим

$$-\frac{\partial}{\partial r}(p_0 \sqrt{-g}) + p_0 \sqrt{-g} \left(g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} + g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} + g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} + g^{44} \frac{\partial g_{44}}{\partial r} \right) = 0,$$

где последний член в скобках можно прибавить потому, что g_{44} постоянно. Это уравнение с помощью соотношения (39) из Приложения III можно переписать иначе:

$$-\sqrt{-g} \frac{\partial p_0}{\partial r} - p_0 \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial r} + p_0 \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial r} = 0.$$

Поскольку для $\mu=2$ и 3 получаются подобные же уравнения, то единственная информация, которую мы можем извлечь из уравнения для плотности тензора энергии — импульса, состоит в том, что в модели с интервалом (166.1) давление не зависит от координат:

$$\frac{\partial p_0}{\partial r} = \frac{\partial p_0}{\partial \theta} = \frac{\partial p_0}{\partial \varphi} = 0. \quad (166.4)$$

Но этот результат заранее очевиден, поскольку наша модель пространственно однородна.

В случае же $\mu=4$ выражения (166.2) совместно со (166.3) приводят, так же как и в § 151, к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{00} \sqrt{-g}) + \frac{1}{2} p_0 \sqrt{-g} \left(g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial t} + g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial t} + g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial t} \right) = 0,$$

откуда, после подстановки значения $g_{\mu\nu}$ из интервала ds^2 , получается следующий важный результат:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_{00} \frac{r^2 \sin \theta e^{3/2 g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^3} \right) + p_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{r^2 \sin \theta e^{3/2 g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^3} \right). \quad (166.5)$$

Так как собственный объем элемента жидкости, заключенного в координатной области $\delta r \delta \theta \delta \varphi$ рассматриваемой нами сопутствующей системы отсчета, равен

$$\delta v_0 = \frac{r^2 \sin \theta e^{3/2 g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^3} \delta r \delta \theta \delta \varphi, \quad (166.6)$$

то (166.5) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} (\rho_{00} \delta v_0) + p_0 \frac{d}{dt} (\delta v_0) = 0. \quad (166.7)$$

Из этого уравнения, как было отмечено вначале, следует, что собственная энергия каждого элемента жидкости в системе отсчета локального наблюдателя меняется с изменением собственного объема данного элемента так же, как и при обычном адиабатическом сжатии или расширении жидкости.

Этот результат важен с термодинамической точки зрения, ибо показывает, что между элементами жидкости в рассматриваемой модели не происходит теплообмена. Однако и этот результат тоже можно считать следствием пространственной однородности модели.

§ 167. Следствие второго закона релятивистской термодинамики

Согласно § 119 закон релятивистской термодинамики, аналогичный обычному второму закону, можно сформулировать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\varphi_0 \frac{dx^\mu}{ds} \sqrt{-g} \right) \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4 \geq \frac{\delta Q_0}{T_0}, \quad (167.1)$$

где φ_0 — собственная плотность энтропии жидкости в заданный момент времени и в заданном месте, dx^μ/ds — компоненты макро-

скопической «скорости» этой жидкости, определенные в выбранной системе координат, T_0 — собственная температура, а δQ_0 — количество тепла, протекшего внутрь элемента жидкости $\delta x^1 \delta x^2 \delta x^3$ за время δx^4 , причем все величины отнесены к локальному наблюдателю. Знак равенства в этом выражении выполняется в обратимых процессах, а знак неравенства — в необратимых.

Пользуясь тем, что в моделях с интервалом в виде (166.1) в сопутствующей системе отсчета можно положить

$$\frac{dr}{ds} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad \frac{dt}{ds} = 1 \quad (167.2)$$

и что процессы в рассматриваемых моделях, как было показано в предыдущем параграфе, протекают адиабатически, т. е.

$$\delta Q_0 = 0, \quad (167.3)$$

можно переформулировать релятивистский второй закон следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \left(\varphi_0 \frac{r^2 \sin \theta e^{3 \int g(t)} dt}{[1 + r^2 / 4R_0^2]^3} \delta r \delta \theta \delta \varphi \right) \geq 0, \quad (167.4)$$

или

$$\frac{d}{dt} (\varphi_0 \delta v_0) \geq 0, \quad (167.5)$$

если учесть выражение (166.6) для собственного объема. Полученный результат показывает, что собственная энтропия каждого элемента жидкости может только возрастать или, в лучшем случае, оставаться постоянной во времени.

Соотношения (166.7) и (167.5) можно считать вполне удовлетворительными, ибо они гласят, что локальный наблюдатель, исследуя элемент жидкости в непосредственной близости от себя, обнаружит в нем те же самые закономерности, какие предсказываются классической термодинамикой для адиабатического расширения и сжатия.

§ 168. Условия термодинамического равновесия в статической Вселенной Эйнштейна

Термодинамические закономерности, установленные выше для нестатических моделей, можно использовать для исследования условий равновесия эйнштейновской Вселенной, ибо последняя является частным случаем, когда $g(t)$ не зависит от времени.

Условия термодинамического равновесия можно определить обычным образом, исследуя возможные изменения в малой области модели при изменении радиуса

$$R = R_0 e^{3/2 g} \quad (168.1)$$

и числа молей

$$n_1^0, n_2^0, \dots, n_n^0 \quad (168.2)$$

различных химических веществ, составляющих данный элемент жидкости, а значит, и всю жидкость.

Варьируя эти параметры, можно временно считать, что модель является нестатической, т. е. что энергия и энтропия каждого элемента жидкости изменяются согласно (166.6) и (167.5). Поскольку, однако, энтропия каждого элемента, согласно (167.5), может только либо возрасти, либо остаться постоянной во времени, то при наличии термодинамического равновесия должно выполняться условие

$$\delta(\varphi_0 v_0) = 0 \quad (168.3)$$

при дополнительном условии

$$\delta(\rho_{00} v_0) + p_0 \delta v_0 = 0, \quad (168.4)$$

где собственный объем рассматриваемого элемента жидкости v_0 равен

$$v_0 = \frac{r^2 \sin \theta e^{3/2 g}}{[1 + r^2/4R_0^2]^3} \delta r \delta \theta \delta \varphi. \quad (168.5)$$

Чтобы воспользоваться вышеприведенными условиями равновесия, запишем по аналогии с классической термодинамикой:

$$\delta(\varphi_0 v_0) = \delta S_0 = \frac{1}{T_0} \delta E_0 + \frac{p_0}{T_0} \delta v_0 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial n_1^0} \right)_{E_0, v_0} \delta n_1^0 + \dots \\ \dots + \left(\frac{\partial S_0}{\partial n_n^0} \right)_{E_0, v_0} \delta n_n^0. \quad (168.6)$$

Записать это соотношение, очевидно, можно потому, что измеряемая локальным наблюдателем собственная энтропия $S_0 = \varphi_0 v_0$, как нетрудно видеть, зависит от собственной энергии объема и химического состава, так же как и в классике.

Учитывая, кроме того, что собственная энергия $E_0 = \rho_{00} v_0$, и принимая во внимание (168.4) и (168.6), получаем в качестве

необходимого условия термодинамического равновесия статической Вселенной Эйнштейна следующее равенство:

$$\sum \left(\frac{\partial S_0}{\partial n_i^0} \right) \delta n_i^0 = 0. \quad (168.7)$$

Сравнивая это соотношение с (60.12), мы видим, что оно тождественно классическому условию химического равновесия между различными компонентами жидкости. Это означает, что относительное содержание различных материалов, которые могут переходить друг в друга, например водорода и гелия или даже вещества и излучения, в статической Вселенной Эйнштейна будет при термодинамическом равновесии точно такое же, как и в плоском пространстве — времени. Это очень важно, ибо любое влияние гравитационной кривизны на относительный состав в таких моделях имело бы большое значение для космологии*).

Хотя пару соотношений (168.3) и (168.4) или эквивалентную им пару (168.4), (168.7) можно рассматривать как необходимые условия термодинамического равновесия, однако вопрос о том, являются ли эти условия достаточными для того, чтобы равновесие было устойчивым, требует дополнительных исследований. Результаты § 159 показывают, что равновесие эйнштейновской Вселенной, вообще говоря, неустойчиво по отношению к малым изменениям радиуса; исключение могло бы возникнуть, только если бы заключенная в ней жидкость обладала свойством увеличивать давление при увеличении объема.

§ 169. Условия обратимости и необратимости в нестатических моделях

Второй закон термодинамики в форме (167.5), отнесенный к однородным космологическим моделям:

$$\frac{d}{dt} (\Phi_0 \delta v_0) \geq 0, \quad (169.1)$$

помогает отличить обратимые процессы в этих моделях от необратимых.

Для обратимых процессов в выражении (169.1) следует взять знак равенства, и критерием обратимости может служить постоянство собственной энтропии каждого элемента жидкости, заключенной в модели. Таким образом, чтобы определить, в какой мере возможны обратимые процессы в модели, нужно исследовать

*) Предположение о таком влиянии было впервые высказано Ленцем [108]. Однако см. [109, 110].

довагь причины, которые могут привести к возрастанию энтропии элемента жидкости.

Во-первых, как указывалось в § 130, энтропия не может возрастать из-за необратимой передачи тепла, так как вследствие однородности модели и согласно первому закону в модели нет никакого теплообмена. Во-вторых, энтропия не может возрастать и в результате такого процесса, как трение движущихся частей о стенки сосуда, которое имеет место при обычных адиабатических изменениях объема, ибо здесь нет никаких частей или стенок. И, в-третьих, энтропия не может возрастать из-за того, что давление в жидкости устанавливается не сразу всюду одинаковым, внутри и на границе каждого элемента, как это имеет место при обычных расширениях и сжатиях в цилиндре, где в результате движения поршня возникает градиент давления. Здесь этого не может быть, потому что вследствие однородности модели давление (см. 166.4) всюду одинаково.

Таким образом, мы видим, что хорошо известные источники роста энтропии, с которыми мы сталкиваемся в обычной инженерной практике, такие, как передача тепла с конечной скоростью и неидеальное взаимодействие рабочей жидкости с окружающей средой, в космологических моделях отсутствуют. Поэтому можно сделать вывод, что все изменения в модели будут обратимыми, если только к росту энтропии не приведут какие-нибудь физико-химические процессы, которые происходят внутри жидкости при расширении и сжатии.

Решение вопроса о том, возможно ли реально построить космологическую модель с обратимым поведением, зависит от того, удастся ли нам найти для нее жидкость с таким простым составом, чтобы в ней не происходило никаких внутренних процессов, приводящих к изменению энтропии какого-либо элемента объема. В § 130 главы, посвященной релятивистской термодинамике, мы уже отмечали, что имеется два вида такой жидкости. Это, во-первых, несвязанное вещество (пыль) с нулевым давлением и, во-вторых, излучение черного тела. В следующих двух параграфах мы подробно рассмотрим обратимое поведение моделей, заполненных этими жидкостями.

В том случае, когда модель содержит жидкость более сложного состава, изменение объема элемента жидкости, происходящее с конечной скоростью, будет сопровождаться, вообще говоря, внутренними процессами, которые могут привести к возрастанию энтропии рассматриваемого элемента. Это и приводит к знаку неравенства в формулировке второго закона (169.1), так как поведение модели в этом случае будет термодинамически необратимым. В § 131 мы уже приводили простой пример подобной модели. Это — двухатомный газ. При конечной скорости расширения и сжатия он диссоциирует или рекомбинирует

в условиях неравновесного состояния, что приводит к возрастанию энтропии. Последние параграфы этой части главы X мы специально посвятим изучению необратимых расширений и сжатий космологических моделей.

§ 170. Термодинамика модели, заполненной пылевидным веществом

Теперь мы рассмотрим модель, заполненную несвязанным (пылевидным) веществом, создающим пренебрежимо малое давление. Это будет пример Вселенной, развитие которой происходит с конечной скоростью и все же термодинамически обратимо. В такой модели собственная энтропия каждого данного элемента жидкости равна сумме энтропий отдельных, не меняющихся со временем частиц и остается постоянной даже при конечной скорости расширения и сжатия. Это означает, что соотношение (169.1) выполняется со знаком равенства и эволюция модели происходит термодинамически обратимо.

Поскольку мы предполагаем, что расширение и сжатие таких моделей происходит обратимо, то при наличии условий, вызывающих обращение направления развития, ничто не помешает модели вернуться к предыдущему состоянию. Пусть, например, космологическая постоянная Λ равна нулю, тогда модель является осциллирующей Вселенной типа O_1 . Согласно § 163 ее радиус будет попеременно возрастать и убывать со временем, описывая на плоскости Rt циклоиду

$$R = \frac{\alpha}{6} (1 - \cos \psi), \quad t = \frac{\alpha}{6} (\psi - \sin \psi), \quad (170.1)$$

где α — некоторая постоянная.

Иными словами, если Λ равна нулю, то эволюция будет происходить не только термодинамически обратимо, но и через какое-то конечное время модель изменит направление своего движения и станет эволюционировать обратно. И хотя мы ничего не знаем о механизме перехода через сингулярное состояние при $R=0$, тем не менее мы можем утверждать, что модель после максимального расширения снова вернется в состояние с первоначальным радиусом R и с той же самой скоростью dR/dt , как и прежде, но только с противоположным направлением.

§ 171. Термодинамика модели, заполненной излучением черного тела

В качестве второго примера Вселенной, развивающейся обратимо и с конечной скоростью, рассмотрим модель, заполненную только излучением черного тела. Здесь тоже почти сразу же очевидно, что энтропия любого элемента жидкости в элементар-

ном объеме $\delta r \delta \theta \delta \varphi$ будет оставаться постоянной. Действительно, поскольку здесь отсутствуют необратимости, порождаемые градиентами давления, трением одних частей о другие и необратимым взаимодействием излучения с какими-либо другими видами материи, то изменение собственного объема любого заданного элемента жидкости будет носить характер адиабатического расширения или сжатия, которое с точки зрения классической термодинамики не приводит к изменению энтропии.

Тем не менее ситуация здесь достаточно сложная, и желательно было бы рассмотреть ее более подробно. Сначала мы покажем, что расширение или сжатие приводит к изменению температуры в распределении излучения черного тела, а затем покажем, что совместное изменение объема и температуры любого элемента $\delta r \delta \theta \delta \varphi$ происходит так, что результирующее значение энтропии остается неизменным.

Излучение черного тела по определению есть такое излучение, которое находится в термодинамическом равновесии и распределено по закону Планка (65.6). В любой произвольно выбранный начальный момент t_1 это распределение можно записать в следующем виде:

$$dE_1 = \frac{8\pi h\nu_1^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu_1/kT_1} - 1} d\nu_1 d\nu_1, \quad (171.1)$$

где dE_1 есть то количество излучаемой энергии, которое локальный наблюдатель, расположенный неподвижно относительно координат r, θ, φ , может обнаружить в объеме $d\nu_1$ в диапазоне частот $d\nu_1$ и при температуре T_1 .

Через некоторое время, в момент t_2 , величина $g(t)$, которая определяет ход эволюции модели, изменится и станет равной не g_1 , а g_2 . При этом частота фотонов, которые ранее обладали указанной выше энергией, будучи измерена локальным наблюдателем, окажется, согласно (156.8), равной

$$\nu_2 = e^{1/2(g_1 - g_2)} \nu_1, \quad (171.2)$$

и, следовательно, энергия, будучи пропорциональной частоте, изменится аналогичным образом:

$$dE_2 = e^{1/2(g_1 - g_2)} dE_1. \quad (171.3)$$

Далее, так как собственный объем, согласно (151.4), тоже зависит от времени, то элемент объема, содержащий рассматриваемые

фотоны или, вернее, их эквиваленты, станет равным

$$dv_2 = e^{\frac{1}{2}(g_2 - g_1)} dv_1. \quad (171.4)$$

Подставляя эти три уравнения в (171.1), получаем, что излучение, будучи снова измерено локальным наблюдателем в момент времени t_2 , окажется распределенным по закону

$$dE_2 = \frac{8\pi h\nu_2^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu_2/kT_2} - 1} dv_2 dv_2, \quad (171.5)$$

где

$$T_2 = T_1 e^{\frac{1}{2}(g_1 - g_2)}, \quad (171.6)$$

т. е. расширение или сжатие модели приводит к изменению температуры излучения черного тела по закону (171.6). Именно это мы и хотели показать.

Так как энтропия излучения черного тела выражается через температуру и объем с помощью хорошо известной формулы (65.5):

$$S = \frac{4}{3} aT^3 v, \quad (171.7)$$

то энтропия каждого данного элемента $\delta r \delta \theta \delta \varphi$ будет оставаться постоянной, потому что согласно предыдущим уравнениям

$$S = \frac{4}{3} aT_1^3 \delta v_1 = \frac{4}{3} aT_2^3 \delta v_2 = \text{const.} \quad (171.8)$$

Таким образом, и в случае модели, заполненной только излучением черного тела, энтропия каждого элемента $\delta r \delta \theta \delta \varphi$ будет оставаться постоянной, а значит, расширение и сжатие даже при конечной скорости будут происходить обратимо. Более того, если мы, так же как и в предыдущем случае, положим космологическую постоянную Λ равной нулю, то придем к такого рода закрытым моделям, развитие которых во времени происходит не только обратимо, но в которых на самом деле расширение сменяется сжатием: зависимость радиуса таких моделей от времени определяется выражением (163.6):

$$R = \sqrt{\beta - t^2}, \quad (171.9)$$

где β — постоянная.

С точки зрения исследования обратимости модель, заполненная излучением черного тела, по-видимому, более интересна, чем модель, заполненная пылевидными частицами с нулевым давлением, поскольку в первой процессы расширения и сжатия носят чисто термодинамический характер, в то время как во второй

расширение и сжатие могут оказаться чисто механическими и поэтому обратимыми по совершенно естественной причине.

Точно так же, очевидно, нужно ожидать, что обратимо будет происходить и эволюция моделей, которые содержат смесь из пылевидных частиц и не взаимодействующего с ними излучения. Однако по мере уменьшения размеров частиц их тепловое движение перестает быть пренебрежимо малым и возникает некоторая необратимость, которая происходит из-за того, что при конечной скорости изменения объема перераспределение энергии между частицами и сопровождающим их излучением запаздывает, в результате чего термодинамическое равновесие полностью не успевает устанавливаться.

После всего вышесказанного, по-видимому, не имеет смысла обсуждать, каковы должны быть строгие — явно переальные — условия, при которых изменения объема с конечной скоростью могут происходить полностью обратимо. Важнее подчеркнуть тот факт, что в наших космологических моделях отсутствуют необратимые потоки тепла, трение и градиенты давления, которые являются настолько обычными источниками необратимости в термодинамических процессах, что мы даже забываем, насколько именно их присутствие важнее для необратимости, нежели сама по себе конечная скорость процессов *).

§ 172. Невозможность периодических движений без сингулярных состояний

После того, как мы рассмотрели примеры тех закрытых космологических моделей, радиус которых осциллирует термодинамически обратимо между минимальным значением, отвечающим сингулярному состоянию, и конечным максимумом, следует еще выяснить, не возможна ли чисто осцилляторная эволюция, когда объем любого элемента жидкости периодически меняется между конечным максимальным и несингулярным минимальным значениями. Это были бы периодические колебания второго рода, типа O_2 , и они, как было уже показано в § 157, д, не лишены правдоподобности. Однако теперь мы можем показать, что если заключенной в модели жидкости приписать разумные свойства, то никакие точно периодические движения подобного рода невозможны [106], и, более того, даже непериодические колебания указанного типа тоже невозможны.

Вспоминая, что зависимость интервала (166.1) от времени для рассматриваемых моделей определяется величиной $g(t)$, запишем условия периодичности колебаний модели между

*) Этот и более сложный пример обратимого поведения с конечной скоростью можно найти у Толмса [111, 112].

конечными максимумом и минимумом в следующем виде:

$$g_1 < g_2, \quad \dot{g}_1 = \dot{g}_2 = 0, \quad \ddot{g}_1 \geq 0, \quad \ddot{g}_2 \leq 0, \quad (172.1)$$

где точки означают дифференцирование по времени, а индексы 1 и 2 указывают, что соответствующие величины относятся к минимуму и максимуму соответственно. Эти выражения совместно с выражениями для собственной плотности и давления жидкости в модели

$$8\pi\rho_0 = \frac{3}{R_0^2} e^{-g} + \frac{3}{4} \dot{g}^2 - \Lambda \quad (172.2)$$

и

$$8\pi p_0 = -\frac{1}{R_0^2} e^{-g} - \ddot{g} - \frac{3}{4} \dot{g}^2 + \Lambda$$

позволяют установить, какими свойствами должна обладать жидкость, чтобы были возможны постулированные минимум и максимум. Так как мы хотим исследовать одновременно и открытые и закрытые модели, то следует рассмотреть три случая: $R_0^2 > 0$, $R_0^2 = \infty$ и $R_0^2 < 0$, соответствующие закрытым, плоским открытым и искривленным открытым моделям соответственно.

Для случая $R_0^2 > 0$ из предыдущего легко получается, что давление и плотность в точках минимума и максимума должны подчиняться соотношениям

$$\rho_1 > \rho_2, \quad p_1 < p_2. \quad (172.3)$$

Только при выполнении (172.3) возможны колебания рассматриваемого типа; но эти неравенства означают, что плотность жидкости должна *уменьшиться* в отношении $e^{3/2 g_1}$ к $e^{3/2 g_2}$ после возрастания объема от минимального значения к максимальному. Давление же при этом должно *возрасти*, в согласии с тем необходимым условием возникновения осцилляций типа O_2 в закрытых моделях с положительным давлением, которое было найдено в § 157, д.

Однако ясно, что для осуществления строго периодических колебаний между каким-либо минимумом и максимумом поведение каждого элемента жидкости должно быть термодинамически обратимым, так как иначе система не смогла бы снова и снова возвращаться в одно и то же состояние. Следовательно, в свете всего вышесказанного очевидно, что если мы не будем рассматривать жидкостей с нереальными свойствами, в которых давление при *обратимом* адиабатическом *расширении* *возрастает*, то строго периодические колебания нужно будет из рассмотрения исключить.

Если колебания не строго периодические, а происходят всего один или несколько раз между минимумами и максимумами, которые в свою очередь не обязательно неизменны, то требование термодинамической обратимости может быть отброшено. Подобного рода осцилляции могли бы оказаться совместимыми с вышеприведенными условиями, если бы, например, при расширении происходило резкое необратимое увеличение количества излучения так, чтобы в максимуме давление было достаточно высокое и могло бы привести к обращению движения. Тем не менее трудно себе представить, что давление затем при сжатии может снова упасть до такой величины, которая необходима для достижения второго минимума.

Для случая $R_0^2 = \infty$, к которому мы теперь обратимся, учет (172.1) и (172.2) приводит к равенству

$$\rho_1 = \rho_2, \quad (172.4)$$

а для случая $R_0^2 < 0$ необходимое условие для осцилляций рассматриваемого типа принимает вид

$$\rho_1 < \rho_2. \quad (172.5)$$

Однако из уравнения для энергии (151.6) следует, что приращение плотности при изменении g равно

$$d\rho_{00} = -\frac{3}{2}(\rho_{00} + \rho_0) dg. \quad (172.6)$$

Поэтому вышеприведенные условия могли бы выполняться только в неизвестной нам жидкости, в которой отрицательное давление может достигать величины, равной плотности ее энергии.

С учетом всего только что сказанного ясно, что, во всяком случае на современном теоретическом уровне, мы можем отбросить однородные модели, в которых элементы жидкости испытывают либо строго периодические расширения и сжатия, либо какие-нибудь другие последовательные изменения объема между конечными минимумом и максимумом. Однако все это ни в коей мере не исключает возможность существования первоначально изученных моделей, колеблющихся между нижним сингулярным радиусом и конечным максимумом.

§ 173. Интерпретация обратимого расширения обычным наблюдателем

В предыдущих параграфах мы выяснили, что расширения и сжатия в наших космологических моделях могут происходить с конечной скоростью и при этом либо полностью термодинамически обратимо, либо по крайней мере без тех источников

необратимости, какие обычно сопровождают процессы, протекающие с конечной скоростью в системах малых размеров. Оказывается, что те термодинамические процессы, которые неискушенный наблюдатель может принять за необратимые просто потому, что они идут с конечной скоростью, на самом деле могут быть обратимыми. Этой возможной ошибкой следует избегать, если мы хотим получить правильное представление о космологических явлениях.

Для конкретности рассмотрим самую простую, исследованную в § 171, модель, заполненную исключительно излучением черного тела, и пусть она в рассматриваемый момент времени обратимо расширяется, т. е. величина $g(t)$ в формуле интервала

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2 \quad (173.1)$$

возрастает со временем t .

Будем при этом четко разграничивать *результаты наблюдений*, получаемые *локальным наблюдателем*, неподвижным относительно среднего потока энергии, и *интерпретацию* этих результатов, которую он может предложить, опираясь на законы классической термодинамики, если этот обычный наблюдатель не знаком с релятивистской термодинамикой и ничего не знает о происходящем расширении модели.

Для удобства поместим нашего обычного наблюдателя в начало координат, и пусть он исследует содержимое Вселенной в малой области в непосредственной близости от себя с целью получить результаты, необходимые для интерпретации. При этом предположим, что, ничего не зная об общем расширении, он ограничивает область исследования не определенным элементом жидкости, а определяет ее прикладыванием измерительных стержней, описывая таким образом сферу с центром в начале координат и с постоянным собственным радиусом

$$l_0 = \text{const.} \quad (173.2)$$

Если взять сферу достаточно малого размера, с тем чтобы можно было пренебречь членами порядка $r^2/4R_0^2$ по сравнению с единицей, то координату r на границе сферы можно представить в виде

$$r = l_0 e^{-1/2g} \quad (173.3)$$

Она будет меняться со временем по закону

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{2} l_0 e^{-1/2 g} \frac{dg}{dt}. \quad (173.4)$$

При этом собственный объем сферы будет оставаться постоянным:

$$v_0 = \frac{4}{3} \pi l_0^3. \quad (173.5)$$

Далее, чтобы выяснить, какие результаты получит наш наблюдатель в этой области, мы воспользуемся энергетическим уравнением (166.7), переписанным для удобства в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\rho_{00} e^{3/2 g} \right) + p_0 \frac{d}{dt} \left(e^{3/2 g} \right) = 0, \quad (173.6)$$

и выражениями, связывающими собственную плотность, давление и температуру:

$$\rho_{00} = a T_0^4, \quad p_0 = \frac{a}{3} T_0^4. \quad (173.7)$$

Эти выражения справедливы для излучения черного тела, но мы как раз и предположили, что именно оно заполняет нашу модель.

Теперь легко видеть, какие выводы сделает наш наблюдатель. Он обнаружит вблизи себя, что плотность энергии и давление уменьшаются со скоростью:

$$\frac{1}{\rho_{00}} \frac{d\rho_{00}}{dt} = \frac{1}{p_0} \frac{dp_0}{dt} = -2 \frac{dg}{dt}, \quad (173.8)$$

температура в этой же области падает со скоростью:

$$\frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{dg}{dt}, \quad (173.9)$$

а число фотонов внутри очерченной им сферы из-за наличия потока через границу уменьшается со скоростью:

$$\frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{dg}{dt}. \quad (173.10)$$

Более того, очевидно, если наш наблюдатель поместит на границе своей сферы помощника и попросит его сравнивать частоты уходящих фотонов с частотами приходящих, то, поскольку помощник, согласно уравнению (173.4), не будет неподвижен относительно наблюдателя, он обнаружит, что частоты

приходящих фотонов сдвинуты в красную сторону относительно измерений наблюдателя, который неподвижен относительно координат r , θ , φ и относительно которого фотоны с различными частотами распределены изотропно.

Таким образом, наш обыкновенный наблюдатель обнаружит, что температура в непосредственной близости от него постоянно падает и что существует поток энергии, направленный от центра наружу, к областям Вселенной с, очевидно, еще более низкой температурой. Все это он будет склонен интерпретировать с классической точки зрения как доказательство общего убывания энергии. Отсюда он может сделать ошибочный вывод, что Вселенная эволюционирует необратимо. На самом деле более последовательное релятивистское рассмотрение показывает, что эволюция выбранной нами модели является полностью обратимой: при определенном значении Λ модель не только достигнет максимума расширения, но и возвратится в прежний объем, обладая при этом скоростью, противоположной первоначальной.

Конечно, наша модель очень идеализирована, так как не содержит ничего, кроме излучения черного тела. Однако эволюция модели будет обратимой и в том случае, когда внутри нее содержится не только излучение черного тела, но и пылевидное вещество, если только взаимодействием между ними можно пренебречь. При этом опять можно обнаружить, что во время расширения якобы существует поток излучения, направленный от локального наблюдателя. Более того, как показывает прямой расчет (расчет был произведен для модели, содержащей смесь излучения и идеального одноатомного газа) [112], даже в том случае, когда взаимодействие между веществом и излучением имеет место и они могут переходить друг в друга, все равно модель может расширяться обратимым образом, лишь бы только взаимодействие между веществом и излучением происходило (в противоположность нашим предположениям) достаточно быстро, чтобы успевало установиться равновесие. Оказывается, что в такой модели обратимое расширение сопровождается не только потоком излучения, направленным наружу, но, за исключением чрезвычайно высоких температур, и аннигиляцией материи.

Главное, что следует отметить в связи со всем вышесказанным, состоит в следующем: с помощью обратимо расширяющейся космологической модели довольно нетрудно имитировать процессы в реальной Вселенной, которые с точки зрения старых принципов легко принять за необратимые. Это, конечно, не означает, что в реальной Вселенной не имеют места необратимые процессы, просто каждый раз нужно к изучению космологии подходить с релятивистских, а не классических термодинамических позиций.

§ 174. Аналитическое исследование последовательных расширений и сжатий в закрытой модели с $\Lambda=0$.

Так как на самом деле необратимые термодинамические процессы в реальной Вселенной все же имеют место, то необратимому поведению космологических моделей тоже следует уделить внимание. Чтобы подготовиться к решению возникающих здесь проблем, рассмотрим эволюцию закрытых моделей с Λ , равной нулю, аналитически, допуская при этом как термодинамическую обратимость, так и необратимость. Мы выбрали именно эти модели главным образом потому, что, как уже указывалось раньше, естественнее всего положить Λ равным нулю. Кроме того, в закрытых моделях с нулевой Λ те новые релятивистские черты, которые мы собираемся изучать, проявляются наиболее выпукло.

Мы уже видели в § 157, е, что модели указанного типа могут только расширяться от нижнего сингулярного состояния до конечного максимума и затем сжиматься снова к малым объемам. Теперь мы исследуем это поведение более подробно [113].

Для рассматриваемых моделей формулу интервала можно записать в следующем виде:

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2, \quad (174.1)$$

а выражения для собственных давления и плотности взять из (150.7) и (150.8):

$$8\pi p_0 = - \frac{1}{R_0^2} e^{-g} - \ddot{g} - \frac{3}{4} \dot{g}^2 \quad (174.2)$$

и

$$8\pi \rho_0 = \frac{3}{R_0^2} e^{-g} + \frac{3}{4} \dot{g}^2, \quad (174.3)$$

где Λ мы приняли равной нулю, а R_0^2 , согласно предположению о том, что модель закрыта, следует считать больше нуля:

$$R_0^2 > 0. \quad (174.4)$$

Далее, из физических соображений следует, что

$$\rho_{00} \geq 0, \quad (174.5)$$

так как плотность материи в модели может быть только положительной или нулем. Точно так же следует принять, что

$$p_0 \geq 0, \quad (174.6)$$

так как мы будем рассматривать модель, заполненную смесью материи и излучения, в которой может существовать положительное давление, но которая не может противостоять растяжению.

а) **Верхняя граница расширения.** Предположив, что в начальный момент времени $t=0$ модель имеет конечный объем и конечную скорость расширения, т. е.

$$g = g_0, \quad \dot{g} = \dot{g}_0, \quad (174.7)$$

можно показать, что возрастание $g(t)$ будет происходить только до некоторого конечного предела, вне зависимости от того, является ли расширение обратимым или необратимым.

Учитывая уравнение (174.2) и неравенство (174.6), можно записать:

$$\ddot{g} + \frac{3}{4} \dot{g}^2 + \frac{1}{R_0^2} e^{-g} \leq 0; \quad (174.8)$$

если же умножить это выражение на величину $2e^{3/2g} \dot{g}$, которая является положительной, поскольку \dot{g} при расширении положительно, то неравенство преобразуется к следующему виду:

$$2e^{3/2g} \dot{g} \ddot{g} + \frac{3}{2} e^{3/2g} \dot{g}^3 + \frac{2}{R_0^2} e^{1/2g} \dot{g} \leq 0,$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(e^{3/2g} \dot{g}^2 \right) + \frac{4}{R_0^2} \frac{d}{dt} \left(e^{1/2g} \right) \leq 0. \quad (174.9)$$

Это неравенство выполняется все время, пока g возрастает.

Интегрируя (174.9) между $t=0$ и интересующим нас моментом $t=t$ и подставляя начальные значения g и \dot{g} из (174.7), получаем

$$e^{3/2g} \dot{g}^2 + \frac{4}{R_0^2} e^{1/2g} \leq e^{3/2g_0} \dot{g}_0^2 + \frac{4}{R_0^2} e^{1/2g_0} \quad (174.10)$$

или, вспоминая, что согласно (174.4) R_0^2 положительно, находим

$$e^{1/2g} \leq e^{1/2g_0} + \frac{R_0^2}{4} e^{3/2g_0} \dot{g}_0^2 - \frac{R_0^2}{4} e^{3/2g} \dot{g}^2 \quad (174.11)$$

все время, пока g возрастает. Следовательно, так как g_0 и \dot{g}_0 по предположению конечны, то g не может превосходить некоторого конечного верхнего предела, т. е.

$$g \leq \gamma, \quad (174.12)$$

где γ — конечная величина.

б) **Время, необходимое для достижения максимума.** С учетом полученного результата легко далее показать, что g достигнет максимального значения и начнет убывать за конечное время.

Учитывая неравенства (174.8) и (174.12), получаем

$$\ddot{g} \leq -\frac{1}{R_0^2} e^{-\gamma} - \frac{3}{4} \dot{g}^2,$$

или

$$\frac{d\dot{g}}{dt} \leq -\frac{1}{R_0^2} e^{-\gamma}, \quad (174.13)$$

откуда, интегрируя между $t=0$ и каким-либо интересующим нас моментом, находим

$$\dot{g} \leq \dot{g}_0 - \frac{1}{R_0^2} e^{-\gamma} t,$$

где \dot{g}_0 — начальное значение dg/dt . Отсюда, однако, следует, что $g(t)$ достигнет своего максимума за конечное время

$$t \leq R_0^2 e^{\gamma} \dot{g}_0 \quad (174.14)$$

и после этого начнет убывать.

в) **Время, нужное для полного сжатия.** Интересно также рассмотреть эволюцию модели после того, как она достигнет максимума и начнет сжиматься. Так как \dot{g} , очевидно, становится при этом отрицательным, то умножение (174.8) на отрицательную величину $2e^{3/2 g}$ и последующее интегрирование, как это делалось при выводе (174.10), приводит к выражению

$$e^{3/2 g} \dot{g}^2 + \frac{4}{R_0^2} e^{1/2 g} \geq e^{3/2 g_m} \dot{g}_m^2 + \frac{4}{R_0^2} e^{1/2 g_m},$$

где g_m и \dot{g}_m — значения g и \dot{g} при переходе через максимум в момент $t=t_m$. Но так как при переходе через максимум скорость равна нулю, то $\dot{g}_m=0$, и результат можно переписать в виде

$$e^{3/2 g} \dot{g}^2 \geq \frac{4}{R_0^2} \left(e^{1/2 g_m} - e^{1/2 g} \right).$$

Далее, поскольку \dot{g} , отрицательно, а R_0 действительно и положительно, что соответствует закрытой модели, то это неравенство

эквивалентно следующему:

$$e^{3/4 g} \frac{dg}{dt} \leq - \frac{2}{R_0} \sqrt{e^{1/2 g_m} - e^{1/2 g}}. \quad (174.15)$$

Полученное выражение легко проинтегрировать между моментом t_m , когда модель переходит через максимум, и каким-то более поздним моментом t ; при этом получается

$$t - t_m \leq R_0 \left\{ e^{1/4 g} \sqrt{e^{1/2 g_m} - e^{1/2 g}} - e^{1/2 g_m} \arcsin \frac{e^{1/4 g}}{e^{1/4 g_m}} + \frac{1}{2} \pi e^{1/2 g_m} \right\}. \quad (174.16)$$

Из этого выражения следует, что уже за конечное время

$$t - t_m \leq \frac{1}{2} \pi R_0 e^{1/2 g_m} \quad (174.17)$$

после прохождения максимума значение g уменьшится до минус бесконечности, если только раньше не возникнет сингулярное состояние.

г) **Поведение вблизи предельного сжатия.** Предыдущие рассуждения показывают, что модель, начиная расширяться в некоторый начальный момент с заданными значениями g_0 и \dot{g}_0 , достигнет через конечное время максимума и начнет сжиматься, причем сжатие будет происходить с достаточной скоростью, чтобы g могло уменьшиться до минус бесконечности за конечное время. Теперь мы должны выяснить, что же будет происходить на нижнем пределе сжатия.

Прежде всего, так как собственный объем любого элемента жидкости в модели всегда пропорционален $e^{3/2 g}$, то уже из физических соображений ясно, что наибольшее сжатие ограничено снизу значениями $e^{3/2 g} = 0$, $g = -\infty$. Далее, согласно (174.15), когда $e^{3/2 g}$ достигнет нулевого значения, мы будем иметь

$$\dot{g} = -\infty \quad (174.18)$$

и одновременно согласно (174.8)

$$\ddot{g} = -\infty. \quad (174.19)$$

Так что условия для аналитического минимума не удовлетворяются и теория не может описать процесс перехода модели через эту точку.

Следовательно, поскольку из физических соображений сжатие не может происходить дальше точки $e^{s/g} = 0$, то для того, чтобы фундаментальные уравнения, определяющие эволюцию модели, оставались справедливыми, необходимо заставить модель вновь расширяться от некоторого сингулярного состояния наибольшего сжатия. При этом сингулярное состояние, естественно, не обязательно должно наступать точно в точке $e^{s/g} = 0$, оно может наступить и в некоторой окрестности этой точки.

К сожалению, наши дифференциальные уравнения не в состоянии описать механизм перехода через предельное сжатие, хотя из физических соображений ясно, что какой-то механизм обязательно должен существовать. Как предполагал Эйнштейн [105], возможно, что идеализации — например, такие, как полная однородность модели, — на которых был основан весь анализ, могут стать вблизи максимального сжатия незаконными. Ситуация здесь подобна тому, как если бы мы пытались описывать поведение упругого мяча, прыгающего по полу, с помощью только уравнения движения в гравитационном поле:

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -g. \quad (174.20)$$

Этого уравнения вполне достаточно, чтобы описать движение мяча до наивысшей точки и его падение вниз, однако оно ничего не говорит нам о механизме отскакивания, когда мяч достигает пола. Здесь уже необходимо привлекать размеры и упругие свойства мяча, чтобы что-нибудь сказать о переходе через наименьшее состояние.

Таким образом, окончательный результат этого параграфа состоит в том, что при $\Lambda=0$ возможное поведение закрытой однородной модели, заполненной жидкостью, не способной противостоять растяжению, будет состоять в периодических сжатиях и расширениях. При этом во время расширения от сингулярного состояния, возникшего при предыдущем сжатии, до максимальных размеров $g(t)$ возрастает и затем возвращается вновь к сингулярному состоянию, после чего расширение должно повториться. Далее, если в любой заданный начальный момент времени величина g и скорость ее возрастания \dot{g} конечны, то конечным будет и максимальное значение g_m , и время, необходимое для полного завершения цикла сжатия и расширения. Наконец, следует отметить, что эти выводы были получены без всяких ссылок на обратимость или необратимость эволюции модели, поэтому они справедливы как для последовательности *тожде-*

ственных расширений и сжатий, соответствующих обратной эволюции, так и для последовательности *меняющихся* расширений и сжатий, отвечающих необратимой эволюции.

§ 175. Термодинамика необратимых колебаний

Как уже указывалось в главе IX, непрерывная последовательность необратимых расширений и сжатий для моделей, рассмотренных в предыдущем параграфе, может показаться очень странной с точки зрения классической термодинамики, которая утверждает, что изолированная система в результате необратимых процессов должна прийти к окончательному состоянию покоя, обладающему максимальной энтропией. Поэтому интересно посмотреть, что нового в этом отношении может дать для наших исследований релятивистская термодинамика [114].

Как следует из § 169, где были рассмотрены условия обратной и необратимой эволюции однородных моделей, последовательность необратимых расширений и сжатий сопровождается непрерывным ростом собственной энтропии каждого выбранного элемента жидкости в модели, что видно из знака неравенства в выражении

$$\frac{d}{dt} (\varphi_0 \delta v_0) > 0. \quad (175.1)$$

Таким образом, хотя модель во время расширения или сжатия может проходить через состояния, в которых в некоторый момент выполняются условия, соответствующие физико-химическому равновесию, тем не менее очевидно, что энтропия каждого элемента жидкости в конечном счете должна возрасти беспредельно, покуда происходят необратимые сжатия и расширения. Возможность беспредельного роста энтропии требует еще своего обоснования, поскольку в классической термодинамике мы привыкли к мысли о том, что энтропия любой изолированной системы имеет конечную верхнюю границу.

Чтобы исследовать этот вопрос, мы можем, очевидно, принять, что собственная энтропия любого малого элемента жидкости, измеряемая локальным наблюдателем, зависит от состояния так же, как и в классической термодинамике, т. е.

$$d(\varphi_0 \delta v_0) = \frac{1}{T_0} d(\rho_{00} \delta v_0) + \frac{p_0}{T_0} d(\delta v_0) + \\ + \frac{\partial(\varphi_0 \delta v_0)}{\partial n_1^0} dn_1^0 + \dots + \frac{\partial(\varphi_0 \delta v_0)}{\partial n_n^0} dn_n^0, \quad (175.2)$$

где собственная энергия элемента $\rho_{00} \delta v_0$, его собственный объем δv_0 и концентрации n_1^0, \dots, n_n^0 различных химических компо-

мент — независимые переменные, с помощью которых состояние определяется однозначно.

Используя это уравнение для изучения непрерывного роста энтропии, который должен иметь место при необратимых расширениях и сжатиях, мы замечаем, что поскольку, согласно § 166, из первого закона термодинамики следует:

$$\frac{d}{dt} (p_{00} \delta v_0) + p_0 \frac{d}{dt} (\delta v_0) = 0, \quad (175.3)$$

то непосредственная причина возрастания энтропии никак не связана с первыми двумя членами в правой части (175.2), поскольку их сумма всегда равна нулю. Поэтому внутренний механизм, с помощью которого энтропия на самом деле все время возрастает, обязан своим происхождением остальным членам в правой части, согласно которым химический состав необратимым образом стремится к равновесному значению.

На первый взгляд может показаться, что перераспределение концентраций может дать только ограниченное возрастание энтропии, так как классическая термодинамика приучила нас к мысли о существовании максимума энтропии в системе с заданной энергией и объемом. Однако рассматриваемый процесс отличается от классического случая изолированной системы тем, что собственная энергия любого выбранного элемента жидкости в модели не обязана оставаться постоянной. Действительно, из (175.3) следует, что собственная энергия каждого элемента жидкости уменьшается со временем при расширении и увеличивается со временем при сжатии. Следовательно, если давление при сжатии окажется больше, чем при предыдущем расширении, что возможно из-за отставания условий равновесия, то элемент жидкости может вернуться к своему первоначальному объему с возросшей энергией и, следовательно, также с возросшей энтропией.

Таким образом, хотя внутренний механизм возрастания энтропии в каждый момент времени связан с перераспределением концентраций — например, на последних стадиях расширения растет диссоциация, а на последних стадиях сжатия растет рекомбинация, — тем не менее непрерывное возрастание энтропии в продолжение долгого промежутка времени может происходить именно благодаря тому, что возрастает собственная энергия каждого элемента жидкости в модели.

Как показано в § 131 предыдущей главы, ситуация здесь аналогична классическому случаю цилиндра с теплоизолированными стенками и движущимся поршнем, в котором происходит непрерывная последовательность сжатий и расширений диссоциирующего газа. При этом энтропия и энергия непрерывно

возрастают до тех пор, пока хватает внешней энергии для очередного сжатия. В релятивистском же случае источником внешней энергии может служить потенциальная энергия гравитационного поля, связанная с плотностью эйнштейновского псевдотензора t_{μ}^{ν} . Аналогичным образом можно рассмотреть и необратимые расширения и сжатия смеси вещества и излучения. В этом случае отставание от равновесия на поздних стадиях расширения можно было бы объяснить двумя причинами: во-первых, часть вещества не успевает перейти в излучение, и, во-вторых, часть излучения не успевает высвободиться из вещества. Эти возможности могут быть интересными для описания реальной Вселенной.

Установив, что непрерывная последовательность необратимых расширений и сжатий в рассматриваемых моделях приводит к неуклонному возрастанию собственной энергии элементов жидкости, если они возвращаются к одному и тому же объему, мы должны теперь исследовать, как влияет рост энергии на характер все более и более поздних циклов. Это можно легко сделать, если воспользоваться выражением для плотности энергии (174.3) и переписать его в следующем виде:

$$8\pi\rho_0 e^{3/2g} = \frac{3}{R_0^2} e^{1/2g} + \frac{3}{4} e^{3/2g} \dot{g}^2, \quad (175.4)$$

где в левой части стоит величина, пропорциональная собственной энергии некоторого выбранного элемента жидкости с собственным объемом

$$\delta v_0 = \frac{r^2 \sin^2 \theta e^{3/2g}}{[1 + r^2/4R_0^2]^3} \delta r \delta \theta \delta \varphi. \quad (175.5)$$

Из этих формул видно, что объем любого элемента жидкости возвращается к прежнему значению тогда, когда возвращается к своему прежнему значению $g(t)$. При этом энергия при возвращении может увеличиться только в том случае, если увеличится квадрат скорости \dot{g}^2 . Теперь легко установить разницу между характером данного цикла и более поздних. Она показана на рис. 10, где поздний цикл имеет большие значения $|\dot{g}|$ при данном значении $e^{1/2g}$ и, следовательно, достигает большего максимума.

Так как величина плотности энергии в момент максимального расширения равна

$$8\pi\rho_0 = \frac{3}{R_0^2} e^{-g}, \quad (175.6)$$

а величина g в максимуме в конечном счете возрастает без предела, то отсюда видно, что плотность энергии в максимуме становится все меньше и меньше для все более поздних циклов. Следовательно, мы можем сделать вывод, что модель будет проводить все большую и большую часть своего периода в состоянии с более низкой плотностью, чем, например, та, которая наблюдается в реальной Вселенной в настоящее время, хотя к

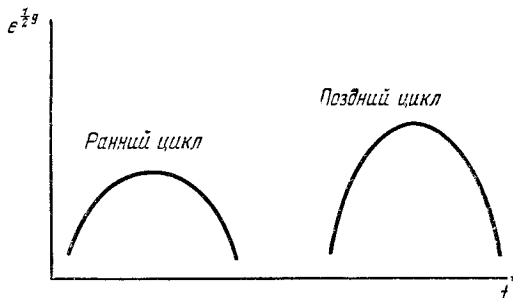


Рис. 10.

состояниям с большими плотностями модель всякий раз возвращаться все-таки будет. Следует, однако, иметь в виду, что полученные выше результаты, касающиеся плотности энергии в максимуме расширения, не распространяются, вообще говоря, на все необратимо осциллирующие модели с иными значениями Λ и R_0^2 .

В заключение этой части главы X нужно отметить следующее. Так как на современном этапе мы очень мало знаем о том, что реально происходит с окружающей нас частью Вселенной в течение длительного промежутка времени, то мы не можем ожидать, что приложение термодинамики к космологическим моделям позволит немедленно объяснить явления в реальном мире, однако приведенные выше исследования все же не лишены интереса, поскольку они демонстрируют, как важно для успешного решения проблем космологии пользоваться не классической термодинамикой, а релятивистской. Тем не менее следует упомянуть о двух результатах, непосредственно связанных с реальной космологией.

Во-первых, выше предполагалось, что современное состояние реальной Вселенной или той ее части, которая лежит в пределах наших наблюдений, возможно, является результатом необратимого расширения, начавшегося от более раннего состояния с чрезвычайно малым объемом, похожего на сингулярные состояния в однородных моделях. В этом сингулярном состоянии с очень малым объемом жидкость, заполняющая модель, должна бы иметь очень высокие плотность, давление и температуру;

условия термодинамического равновесия были бы сдвинуты в сторону большей роли эндотермических химических реакций по сравнению с теми, которые в основном происходят сейчас вокруг нас. При этом в главе V было показано, что реально имеющееся во Вселенной относительное содержание водорода и гелия, различных изотопов, а возможно, также и вещества и излучения свидетельствует о сильном преобладании эндотермических веществ, которого не должно было бы быть, если бы всегда были те же условия равновесия, что и сейчас. Следовательно, не лишено правдоподобия предположение, что существующие сейчас пропорции являются результатом медленных необратимых процессов, начавшихся еще на ранней стадии, когда материя была сильно сжата и имела высокие температуру и плотность.

Во-вторых, мы можем по-новому взглянуть на перспективы развития реальной Вселенной. Выше было найдено, что некоторый класс моделей может необратимо сжиматься и расширяться, никогда не достигая состояния с максимальной энтропией. Из этого, конечно, нельзя сделать категорический вывод, что реальная Вселенная никогда не достигнет состояния с максимальной энтропией, при котором невозможны дальнейшие изменения, тем не менее пример некоторых моделей должен оказать существенное влияние на наши термодинамические представления. По крайней мере, представляется разумным, если мы не будем больше догматически утверждать, что принципы термодинамики с необходимостью приводят к выводу о том, что Вселенная была создана в конечный момент в прошлом и будет деградировать к смерти в будущем.

ЧАСТЬ IV

РЕАЛЬНАЯ ВСЕЛЕННАЯ И ОДНОРОДНЫЕ НЕСТАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

§ 176. Введение

Можно указать три соображения в пользу того, почему мы столь подробно разбираем свойства нестатических однородных моделей *). Во-первых, попытка получения следствий из некоторой системы математических допущений (даже и без ссылок на их физические применения) сама по себе интересна и доставляет интеллектуальное удовлетворение. Во-вторых, мы основыв-

*) Со времени написания книги объем экспериментального материала сильно увеличился. Особенно много дало исследование квазизвездных объектов (квазаров), расстояние до которых доходит, по-видимому, до $(10-15) \cdot 10^9$ световых лет. Однако анализ Толмена был первым тщательным сравнением теории и наблюдений; в этом смысле его интересно прочесть и сейчас. Новые данные читатель найдет в упоминавшейся уже книге Вейнберга. (Прим. ред.)

ваем наши рассуждения на разумной физической теории и поэтому можем ожидать, что теоретическое поведение наших моделей поможет нам чувствовать себя более свободными в наших рассуждениях о принципиально возможном поведении реальной Вселенной. В-третьих, и это, по-видимому, самое главное, мы имеем право надеяться, что, построив модель, в которой удачно объясняются и связываются между собой явления, наблюдаемые в современной Вселенной, мы сможем позволить себе сделать осторожные экстраполяции как в будущее, так и в прошедшее и при этом получить не слишком ошибочные представления относительно прошлой и будущей истории окружающей нас части Вселенной.

Именно с этой стороны нестатические однородные модели будут нас теперь интересовать прежде всего. Раньше мы только мсльком упоминали, что с их помощью можно связать между собою различные явления в реальном мире. Теперь же мы займемся этим вопросом вплотную. Следует при этом оговорить, что по мере возможности мы будем придерживаться феноменологической точки зрения. Рассмотрим полученный для наших моделей интервал ds^2 . Будем считать, что выражение для него имеет только приближенный характер и перестает быть справедливым как на больших расстояниях, так и при больших временах. Далее, попытаемся получить какую-нибудь информацию о функции $g(t)$, которая появляется в выражении для интервала и определяет поведение моделей, не с помощью каких-либо гипотез относительно происхождения и дальнейшей судьбы Вселенной, а более скромным путем, разлагая функцию $g(t)$ в степенной ряд около текущего момента времени и определяя, насколько это нам удастся, максимальное возможное количество коэффициентов ряда, исходя из имеющихся данных наблюдений.

В следующем, довольно длинном параграфе, который разделен на несколько пунктов, мы прежде всего рассмотрим имеющиеся в нашем распоряжении данные наблюдений и покажем, как они позволяют нам судить о составе и о внутренней структуре реальной Вселенной. Единственными объектами вне нашей собственной Галактики, о которых мы хоть что-то знаем, являются туманности. Астрономические наблюдения позволяют нам определить их звездные величины, расстояния, спектры, диаметры, массы и характер их распределения по Вселенной. Точной информацией относительно природы и поведения этих объектов мы обязаны прежде всего работам Хаббла, а также Хаббла и Хьюмаса. Здесь мы не будем касаться проблем сбора материала наблюдений, но зато более подробно остановимся на их интерпретации. В следующих параграфах мы с помощью нестатических моделей попытаемся связать воедино все имеющиеся в нашем распоряжении данные наблюдений.

§ 177. Данные наблюдений

а) **Абсолютная звездная величина ближайших туманностей.** Важнейший вклад в науку о внегалактических туманностях внесла работа Хаббла и Хьюмасаона [115], в которой были определены звездные величины и расстояния до этих объектов. Их работа подразделяется на три части. Сначала определяется *средняя абсолютная величина* большого числа *ближайших туманностей* путем непосредственного наблюдения входящих в их состав отдельных звезд. Затем из наблюдений находят *видимые величины* более *удаленных туманностей*, объединенных в группы, или скопления. Наконец, с учетом предыдущих результатов вычисляются *расстояния* до скоплений.

В этом пункте мы рассмотрим, как определяются абсолютные звездные величины ближайших галактик, вопросы же, связанные с определением видимых величин и расстояний до наиболее удаленных туманностей, будут рассмотрены в следующих двух пунктах этого параграфа.

Звезды, отождествляемые внутри ближайших внегалактических туманностей, относятся к следующим типам: переменные звезды-цефеиды, неправильные переменные, гелиевые звезды (классов В₀ и О), звезды типа Р Лебеда и Новые звезды. Определив звездные величины и периоды цефеид и используя нуль-пункт нормировки зависимости период — светимость для цефеид из работы Шепли 1930 г. [116], Хаббл и Хьюмасаон нашли расстояние до восьми ближайших внегалактических туманностей*). Вместе с двумя Магеллановыми Облаками, расстояния до которых были найдены Шепли, имелось, таким образом, по крайней мере десять внегалактических объектов с достаточно хорошо определенными расстояниями. Причем эти расстояния были подтверждены при наблюдении звезд других типов, входящих в указанные туманности.

Зная расстояния до этих десяти объектов и принимая во внимание их полные наблюдаемые визуальные величины, измеренные Холечеком и исправленные Хопманом [117], а частично найденные из других источников, Хаббл и Хьюмасаон могли найти абсолютные визуальные величины этих туманностей, т. е. величины, которые они имели бы, будучи расположенными на стандартном расстоянии 10 пс. Оказалось, что абсолютные визуальные величины в среднем равны —14,7 с полным разбросом 5,0 и средней ошибкой 1,5.

Кроме тех галактик, в которых удается выделить звезды отдельных классов, Хаббл и Хьюмасаон определили также и абсо-

*) Включая также двух спутников туманности М 31, которые предполагаются находящимися на том же расстоянии, что и сама М 31.

плотные звездные величины тех туманностей, в которых удается установить только наличие звездной структуры. Для этой цели им понадобилась лишь светимость самых ярких звезд в туманностях. У восьми из десяти указанных выше объектов*) абсолютные звездные величины самых ярких звезд составляли в среднем $-6,1$ с разбросом всего лишь $1,8$ и средней ошибкой $0,4$. Так как разброс звездных величин самых ярких звезд значительно меньше, чем разброс звездных величин самих туманностей, естественно предположить, что самые яркие звезды в этих объектах имеют более или менее постоянную величину, независимо от того, в какой туманности они расположены. Справедливость этого предположения подтверждается еще и следующим фактом. Если составить разность между наблюдаемой звездной величиной всей туманности и звездной величиной самых ее ярких звезд, то окажется, что разброс разностей для различных галактик может быть целиком отнесен за счет разброса звездных величин галактик в целом. Поэтому кажется вполне оправданным взять число $-6,1$ как абсолютную величину самых ярких звезд, в какой бы туманности они ни были, а затем получить звездную величину туманности, добавляя разность между наблюдаемыми звездными величинами туманности и ее самых ярких звезд. Приняв во внимание указанные соображения, Хаббл и Хьюматон рассмотрели 40 объектов, в которых можно различить звездную структуру, и нашли, что средняя разность между наблюдаемыми суммарными звездными величинами туманностей и их самых ярких звезд составляет $-8,88$ с разбросом $4,9$ и средней ошибкой $0,77$.

Сложив среднюю абсолютную величину $-6,1$ для самых ярких звезд и $-8,88$ для средней разности звездных величин сорока туманностей и их самых ярких звезд, получим, что средняя абсолютная звездная величина туманности равна $-15,0$. Сопоставление с результатом $-14,7$, найденным для первых десяти туманностей, свидетельствует о справедливости сделанного предположения, и Хаббл и Хьюматон сделали вывод, что за среднюю абсолютную *визуальную* звездную величину внегалактических туманностей можно принять

$$M_{\text{виз}} = -14,9. \quad (177.1)$$

Для сравнения с более удаленными туманностями желательно было бы также знать среднюю абсолютную *фотографическую* звездную величину. Фотографические величины туманностей оказалось удобнее измерять с помощью внефокальных изображений, которые имеют размеры большие, нежели фокальные изо-

*) Два спутника М 31 исключаются как отдельные объекты.

бражения туманностей. Сравнивая фотовизуальные и фотографические величины внефокальных изображений шестидесяти туманностей в созвездии Девы, Хаббл и Хьюмасон определили средний показатель цвета для не очень далеких туманностей:

$$CI = 1,10 \pm 0,02.$$

Это значение оказалось в хорошем согласии с другими данными. Сложив его со (177.1), получим, для средней абсолютной фотографической звездной величины внегалактических туманностей, измеряемой методом внефокусных изображений, значение *)

$$M_{\text{фот}} = -13,8. \quad (177.2)$$

б) Поправки к видимым величинам более далеких туманностей. Теперь рассмотрим метод Хаббла и Хьюмасона определения фотографических звездных величин более далеких туманностей, внутри которых не удастся различить отдельные звезды. Для этого сначала познакомимся с некоторыми важными поправками, природу которых необходимо себе уяснить.

Так как *более далекие* туманности, как оказалось, имеют спектр, сдвинутый в красную сторону, то при сопоставлении их фотографических звездных величин с фотографическими величинами *более близких* туманностей, у которых нет заметного красного смещения, надо ввести соответствующие поправки. Эти поправки имеют следующую природу: во-первых, красное смещение приводит к фактическому уменьшению потока энергии, приходящего на границу земной атмосферы; во-вторых, оно меняет распределение энергии по спектру и тем самым приводит к изменению поглощения в земной атмосфере; в-третьих, изменение распределения энергии меняет соотношение между тепловой и визуальной эффективностями, и, наконец, в-четвертых, изменение распределения энергии меняет и соотношение между визуальной и фотографической эффективностями.

Для подробного изучения этих поправок воспользуемся эмпирическим соотношением между измеряемой обычным образом фотографической звездной величиной небесного тела и его болометрической величиной, т. е. такой величиной, которая бы следовала из калориметрических измерений *в отсутствие* поглощения в атмосфере.

*) Эта величина может потребовать пересмотра после того, как будут закончены работы по измерению фотографических величин, проводимые сейчас на Маунт Вильсон и в других местах. Шепли приводит для $M_{\text{фот}}$ значение [118]

$$M_{\text{фот}} = -14,5.$$

Это соотношение имеет вид

$$m_{\text{фот}} = m_{\text{бол}} + \Delta m_{\text{рад}} + HI + CI, \quad (177.3)$$

где $m_{\text{фот}}$ и $m_{\text{бол}}$ — фотографическая и болометрическая звездные величины; $\Delta m_{\text{рад}}$ — эмпирическая поправка, которую следует добавить к болометрической величине, чтобы получить радиометрическую величину, т. е. ту реальную величину, которая измеряется болометром в условиях земной атмосферы; HI — эмпирическое значение так называемого теплового показателя, его нужно прибавить к радиометрической величине, чтобы получить визуальную величину; CI — эмпирическое значение так называемого показателя цвета, которое нужно прибавить к визуальной величине, чтобы получить фотографическую величину.

Согласно этому уравнению фотографическая звездная величина далеких объектов возрастает благодаря красному смещению на

$$\Delta m_{\text{фот}} = \Delta m_{\text{бол}} + \Delta(\Delta m_{\text{рад}}) + \Delta(HI) + \Delta(CI), \quad (177.4)$$

ибо красное смещение приводит к изменению как болометрической величины, так и тех трех поправок, которые приводят к фотографической величине.

Для того чтобы найти прямое влияние красного смещения на изменение болометрической величины, требуется воспользоваться соотношением, являющимся определением звездной величины небесного объекта:

$$m - M = 2,5(\lg L - \lg l). \quad (177.5)$$

Здесь m — наблюдаемая, а M — абсолютная звездные величины небесного объекта, l — наблюдаемая светимость небесного объекта, а L — его светимость на стандартном расстоянии 10 пс.

Изменение светимости удаленного объекта, обусловленное красным смещением в спектре, может быть двояким. Прежде всего, очевидно, что частота и, следовательно, энергия каждого индивидуального фотона, приходящего к наблюдателю, уменьшаются в отношении $\lambda : (\lambda + \delta\lambda)$, где λ — исходная, а $(\lambda + \delta\lambda)$ — увеличившаяся в результате красного смещения длина волны. Во-вторых, если красное смещение обусловлено доплер-эффектом, то в том же отношении уменьшается и интенсивность фотонов, достигающих наблюдателя. Хаббл и Хьюмсон не стали приписывать красному смещению никакого конкретного механизма и предположили, что существует только первый из названных эффектов. Исходя из этого, они получили в соответствии со (177.5) следующее изменение болометрической величины, обусловленное красным смещением:

$$\Delta m_{\text{бол}} = 2,5 \lg \frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda}. \quad (177.6)$$

Если принять во внимание оба эффекта, то изменение болометрической величины нужно будет удвоить. Однако даже для скопления туманностей в созвездии Льва, имеющего наибольшее красное смещение из всех зафиксированных до сих пор, добавочная поправка не выходит за пределы вероятной ошибки.

Чтобы найти остальные слагаемые в правой части формулы (177.4), требуется определить влияние красного смещения на изменение видимой температуры туманности, ибо, как было замечено, атмосферное поглощение, тепловой показатель и показатель цвета тесно связаны с такой характеристикой объекта, как спектральный класс, и, следовательно, с его видимой температурой. Все туманности можно отнести приблизительно к спектральному классу dG3, т. е. принять, что их эффективная температура соответствует температуре излучения черного тела, равной 5760 °К. Если в результате какой-либо причины происходит относительное смещение всех длин волн, то произошедшее в результате этого изменение спектра приведет к спектральному распределению с температурой, согласно формуле Планка (65.6) равной

$$T = 5760 \frac{\lambda}{\lambda + \delta\lambda}. \quad (177.7)$$

Далее связь атмосферного поглощения, теплового показателя и показателя цвета со спектральным классом, а значит, и с эффективной температурой можно найти с помощью таблицы I, составленной Хабблом и Хьюмасоном для ранее изученных объектов*). Проведя графическую интерполяцию данных из таблицы I

Таблица I

Температура, °К	Спектральный класс	Поглощение в атмосфере	Тепловой показатель H_I	Показатель цвета C_I
6500	F5	0,44	0,30	0,62
6000	dG0	0,43	0,32	0,72
5600	dG5	0,41	0,39	0,83
5100	dK0	0,40	0,55	0,99
4400	dK5	0,48	1,10	1,26
3400	dM	0,53	1,40	1,76

и приняв во внимание приведенные выше уравнения, Хаббл и Хьюмасон, в соответствии с выражением (177.4), для каждого относительного смещения длин волн нашли отвечающее ему изменение фотографической звездной величины. Полученные результаты приведены в таблице II.

*) Температуры для различных классов взяты из [119]. Влияние атмосферы и теплового показателя определено в [120], а показатель цвета — в [121].

Таблица II

Поправки к фотографической звездной величине, обусловленные красным смещением

Скорость, км/сек	Расстояние, 10 ⁶ пс	$\delta\lambda/\lambda$	Температура, °K	Спектральный класс	$\Delta m_{\text{сол}}$	$\Delta(\Delta m_{\text{рад}} + HI)$	$\Delta(CI)$	$\Delta m_{\text{фот}}$
—	—	0,0000	5760	dG3,0	0,000	0,000	0,000	0,000
1 000	1,8	0,0033	5740	3,3	0,003	0,004	0,008	0,015
4 000	7,2	0,0133	5685	4,0	0,015	0,015	0,02	0,05
8 000	14,4	0,0267	5615	4,7	0,03	0,03	0,04	0,10
12 000	21,6	0,0400	5540	5,8	0,04	0,05	0,06	0,15
16 000	28,8	0,0533	5470	6,5	0,06	0,06	0,08	0,20
20 000	36	0,0667	5400	7,2	0,07	0,08	0,10	0,25
30 000	54	0,1000	5235	8,8	0,11	0,13	0,16	0,40
40 000	72	0,133	5080	dK0,2	0,14	0,20	0,21	0,55
50 000	90	0,167	4940	1,4	0,17	0,32	0,26	0,75
60 000	108	0,200	4800	2,3	0,20	0,44	0,31	0,95

В третьем столбце этой таблицы указаны реально наблюдаемые относительные красные смещения, а в первых двух столбцах, приведенных для удобства, указаны: скорости разбегания, отвечающие данному красному смещению при интерпретации с помощью обычного доплер-эффекта, и расстояния до туманностей, которые, как мы установим дальше, тоже тесно связаны с величиной красного смещения. В остальных столбцах даны соответственно: температура, найденная с учетом красного смещения по формуле (177.7); спектральный класс для данной температуры, определенный по таблице I; изменение болометрической величины, обусловленное красным смещением и вычисленное по формуле (177.6); небольшие суммарные изменения $\Delta m_{\text{рад}}$ и теплового показателя, найденные по таблице I; изменение показателя цвета, вычисленное по той же таблице, и, наконец, полное изменение фотографической звездной величины $\Delta m_{\text{фот}}$, обусловленное красным смещением и определенное с помощью (177.4) путем суммирования чисел из трех предыдущих столбцов. Учет поправки $\Delta m_{\text{фот}}$ со знаком минус позволяет исправить фотографическую звездную величину любой туманности и привести ее к такому значению, какое бы она имела, если бы свет от нее не испытывал никакого красного смещения.

В таблице III приведены средние фотографические звездные величины и красные смещения, найденные Хабблом и Хьюмасоном, для восьми скоплений туманностей и для двух групп, составленных из изолированных туманностей со сравнительно близкими величинами. Красное смещение выражено через соответствующую скорость разбегания. Приведенные средние значения

Таблица III

Скопление	Число туманностей	Диаметр скопления, град	Число измененных красных смещений	Среднее смещение, км/сек	Средняя $m_{\text{фот}}$	Поправка $-\Delta m_{\text{фот}}$	Расстояние, 10^6 лс
Дева	(500)	12	7	890	12,5		1,8
Пегас	100	1	5	3810	15,5		7,25
Рыбы	20	0,5	4	4630	15,4		7
Рак	150	1,5	2	4820	16,0		9
Персей	500	2,0	4	5230	16,4		11
Волосы Вероники	800	1,7	3	7500	17,0	-0,10	13,8
Большая Медведица	300	0,7	1	11800	18,0	-0,15	22
Лев	400	0,6	1	19600	19,0	-0,25	32
Группа I	16		16	2350	13,8	—	—
Группа II	21		21	630	11,6	—	—

фотографических величин для скоплений соответствуют наиболее часто встречающимся величинам, а для двух групп — усредненной величине. Предпоследний столбец таблицы содержит поправку $-\Delta m_{\text{фот}}$, которую, согласно предыдущей таблице, нужно прибавить к наблюдаемой фотографической звездной величине, чтобы учесть красное смещение. Можно показать, что в настоящее время этой поправкой можно пренебречь повсеместно, за исключением трех наиболее удаленных скоплений. Последний столбец содержит расстояния до скоплений, вычисленные методом, который мы рассмотрим ниже.

в) **Расстояния до туманностей, вычисленные с помощью видимых величин.** Считая, что туманности, входящие в скопление, действительно сосредоточены в сравнительно малой области, можно найти расстояние до скопления путем сравнения средних наблюдаемых фотографических звездных величин туманностей внутри скопления со средней абсолютной фотографической звездной величиной более близких туманностей. Подобным же образом можно вычислить и *среднее* расстояние до изолированных туманностей, которые были сгруппированы в таблице III.

Для этого Хаббл и Хьюмсон приняли два следующих предположения.

Во-первых, что средняя абсолютная звездная величина далеких туманностей такая же, как и у ближайших к нам. Это предположение — поскольку самое далекое скопление в созвездии Льва находится на расстоянии, немногим превышающем 10^8 световых лет, — означает не только то, что галактики в данный

момент времени в различных частях Вселенной на расстояниях до 10^8 световых лет приблизительно похожи друг на друга, но и то, что светимость туманности мало меняется за 10^8 световых лет.

Во-вторых, предполагается, что видимая светимость туманностей, с учетом красного смещения, обратно пропорциональна квадрату расстояния, т. е. имеет ту же зависимость, что и светимость стационарных источников в обычном евклидовом пространстве.

Чтобы извлечь следствия из этих предположений, воспользуемся опять уравнением

$$m - M = 2,5 \lg L - 2,5 \lg l. \quad (177.8)$$

Здесь m и M — наблюдаемая и абсолютная звездные величины небесного объекта, l — наблюдаемая светимость, а L — его же светимость на стандартном расстоянии 10 пс. При этом для светимости выполняется закон обратных квадратов

$$\frac{l}{L} = \frac{D^2}{d^2}, \quad (177.9)$$

где d и D — фактическое и стандартное расстояния.

Комбинируя оба уравнения и полагая $D = 10$, можно выразить расстояние d в парсеках через видимую и абсолютную звездные величины:

$$\lg d = 0,2(m - M) + 1. \quad (177.10)$$

Расстояние d можно выразить также и через фотографические звездные величины Хаббла и Хьюмасаона в следующем виде:

$$\lg d = 0,2(m_{\text{фот}} - \Delta m_{\text{фот}} - M_{\text{фот}}) + 1, \quad (177.11)$$

где $-\Delta m_{\text{фот}}$ — уже обсуждавшаяся поправка на красное смещение. Подставив в это уравнение значения абсолютных и видимых фотографических величин из (177.2) и из таблицы III, получим расстояния до различных скоплений, приведенные в последнем столбце таблицы III. Надежность полученных результатов можно приблизительно оценить по числу значащих цифр.

В дальнейшем, в § 179, мы вернемся к соотношению между светимостью и расстоянием, но без предположений о том, что пространство плоское, а туманности стационарны. Будет показано, что вычисленные расстояния d до туманностей связаны особенно просто с координатой \bar{r} , которая исходный нестатический интервал (149.1) позволяет записать в виде (149.5).

г) **Связь наблюдаемого красного смещения с звездной величиной и расстоянием.** Смещение спектра почти всех внегалактических туманностей в красную сторону было обнаружено в

пионерской работе Слайфера *) еще в 1922 г. при наблюдении близких к нам туманностей. И когда Хаббл [122] в 1929 г. стал вышеизложенным методом определять расстояния до туманностей, он обнаружил, что между красным смещением и расстоянием вплоть до расстояний $d=2 \cdot 10^6$ пс имеется линейная зависимость. Сейчас в нашем распоряжении есть более богатый материал наблюдений, собранный Хабблом и Хьюмасоном, и это позволяет с большей надежностью проверить зависимость красного смещения галактик от их наблюдаемых звездных величин и, следовательно, и от вычисленных расстояний.

Поскольку на практике имеют дело с видимыми величинами и красными смещениями, то их мы и рассмотрим прежде всего. В таблице III собраны данные для восьми скоплений и двух групп изолированных туманностей. Соотношение между видимой звездной величиной и красным смещением показано на рис. 11,

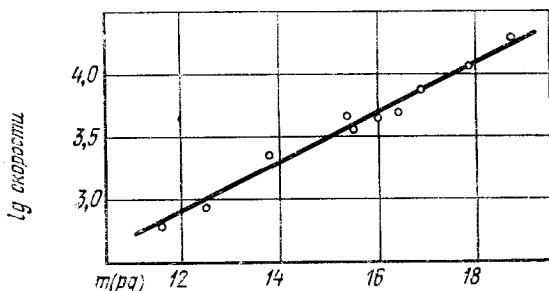


Рис. 11.

взятом из работы Хаббла и Хьюмасона. По оси ординат отложен логарифм красного смещения, выраженного через скорость v , а по оси абсцисс — наблюдаемые звездные величины. Видно, что представленная на графике зависимость очень близка к линейной, и ее можно хорошо аппроксимировать функцией

$$\lg v = 0,2 m + 0,507. \quad (177.12)$$

При этом во всей интересующей нас области среднее отклонение от указанного закона составляет 0,031 для $\lg v$ и 0,15 для m .

Уравнение (177.10), связывающее звездную величину с расстоянием, позволяет также установить зависимость красного смещения от расстояния d . Эта зависимость показана на рис. 12, где красное смещение снова выражено через скорость. Точки

*) См. таблицу, приведенную у Эддингтона (см. [56], стр. 162).

около начала отсчета относятся к ближайшим отдельным туманностям, а кружочки отображают данные из таблицы III.

Как видно из рис. 12, зависимость красного смещения от расстояния d тоже довольно близка к линейной. Уравнение (177.11)

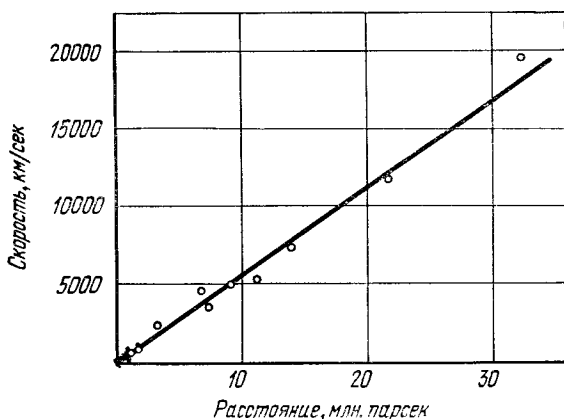


Рис. 12.

совместно со (177.12) после подстановки $M_{\text{фот}} = -13,8$ приводят к следующему отношению:

$$\frac{v}{d} = 5,58 \cdot 10^{-4} \frac{\text{км/сек}}{\text{пс}}. \quad (177.13)$$

Для дальнейшего удобно выразить красное смещение через относительное изменение длин волн. Согласно (177.13):

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = 1,86 \cdot 10^{-9} d, \quad (177.14)$$

если расстояние d выражено в парсеках, или

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = 5,71 \cdot 10^{-10} d, \quad (177.15)$$

если d выражено в световых годах. Полагают, что ошибка в окончательном результате во всяком случае меньше 20% и, возможно даже, не превышает 10%.

Чтобы оценить значение этого замечательного открытия, установившего линейную зависимость красного смещения от расстояния, уместно посмотреть, с какой степенью точности выполняется равенство красных смещений отдельных галактик, принадлежащих к одному и тому же скоплению. В качестве примера рассмотрим скопление в созвездии Волосы Вероники. Оно удобно тем, что имеет значительно больший разброс красных смещений, чем какие-либо другие (более близкие) скопления, в которых было произведено более одного измерения. К тому

времени, когда Хаббл и Хьюмасон составляли таблицу III, было измерено красное смещение четырех туманностей, принадлежащих этому скоплению. Три из них имеют смещения 6700, 7600, 7900 км/сек, что в среднем, после учета поправок на движение Солнца, составляет 7500 км/сек. Четвертая же туманность обнаружилась смещение 5000 км/сек и была исключена из рассмотрения, как наложившийся объект и не принадлежащий к данному скоплению. После этого Хьюмасон определил красные смещения еще пяти членов скопления: 6600, 6900, 6900, 7000 и 8500 км/сек. Полный разброс составляет 1900 км/сек, однако, он, по-видимому, преувеличен, так как каждое измерение производилось с одной-единственной спектрограммой с плохой дисперсией: 875 \AA на миллиметр.

Интересно также проследить постоянство относительного красного смещения разных линий вдоль спектра одной и той же туманности. Для этой цели Хаббл любезно предоставил в распоряжение автора данные по десяти линиям в спектре NGC 1275 в скоплении Персея. Несмещенные длины волн этих линий располагаются в диапазоне от $\lambda=3727$ до $\lambda=5007$. Максимальное и минимальное значения $\delta\lambda/\lambda$ приходятся на $\lambda=4363$ и на $\lambda=5007$ соответственно и отличаются только на 14% от их среднего. Обе эти линии, однако, обозначены как «слабые». Для первой и последней линий в спектре, обозначенных как «яркие» и разделенных более широким интервалом, $\lambda=3727$ и $\lambda=4861$, значения $\delta\lambda/\lambda$ отличаются от среднего только на 3%. В пределах точности измерения $\delta\lambda/\lambda$ можно считать не зависящим от λ .

д) **Соотношение между видимым диаметром, звездной величиной и расстоянием.** Пусть имеется евклидово пространство, заполненное стационарными туманностями с одинаковыми диаметрами; тогда очевидно, что угол $\delta\theta$, под которым виден диаметр одного из объектов, будет обратно пропорционален расстоянию d до него, т. е. *)

$$\delta\theta = \frac{\text{const}}{d}. \quad (177.16)$$

Это соотношение позволяет преобразовать выражение (177.10) к виду

$$\lg \delta\theta = -0,2m + c, \quad (177.17)$$

где c — постоянная. Полученное равенство связывает две непосредственно измеряемые величины: видимый диаметр и видимую звездную величину.

*) Мы не будем делать различия между хордой, стягивающей угол, и углом, опирающимся на эту хорду.

Как было обнаружено Хабблом [123], данные, относящиеся к галактикам одного типа, удовлетворяют соотношению (177.17) с приблизительно постоянным s . Галактики же разных типов, как и следовало ожидать, требуют разных s . Правда, эти значения s различаются между собой не очень сильно, однако в случае правильных галактик обнаруживают интересную закономерность при переходе от эллиптических к спиральным и дальше к спиральным с перемычкой галактикам. Приведя все туманности к стандартному типу, мы можем, как показано на рис. 13, связать все имеющиеся данные единым образом. На рис. 13 по оси

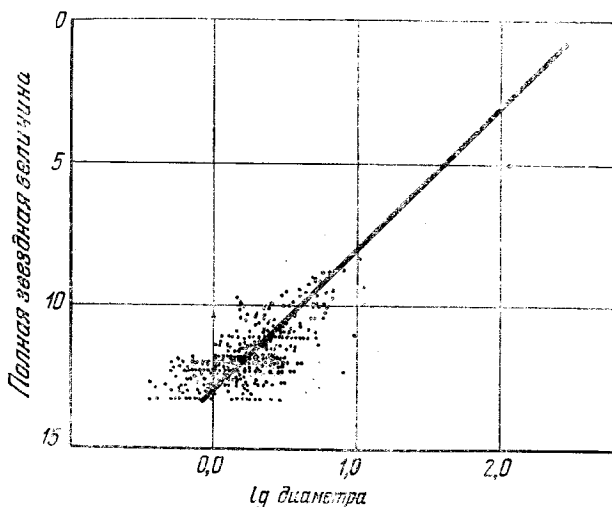


Рис. 13.

абсцисс отложены логарифмы видимых диаметров, а по оси ординат — полные визуальные звездные величины туманностей. Две самые верхние точки на графике относятся к Магеллановым Облакам. Прямая линия на рис. 13 описывается уравнением

$$\lg \delta\theta = -0,2m + 2,6, \quad (177.18)$$

где $\delta\theta$ — максимальный видимый диаметр, выраженный в угловых минутах, а m — наблюдаемая визуальная звездная величина. Полученное уравнение, разумеется, справедливо только для галактик, приведенных к стандартному типу.

Распределение точек на рис. 13 достаточно убедительно свидетельствует о том, что рассматриваемые нами объекты действительно являются внегалактическими.

Из уравнения (177.16) видно, что определять расстояния до туманностей можно не только с помощью видимых последних величин, но и с помощью видимых диаметров. Однако последнее практически менее удобно, во-первых, потому, что формы галактик неодинаковы, и, во-вторых, из-за того, что определение видимых диаметров сильно зависит от времени экспозиции, гораздо более сильно, чем для видимых величин, для которых основную роль играет высокая светимость центральных областей туманностей.

В § 180 мы еще раз обсудим связь между светимостью и видимым диаметром, не требуя евклидовости пространства и стационарности наблюдаемых объектов.

е) **Диаметры и массы туманностей.** Диаметры туманностей можно вычислить, исходя из их видимых диаметров и из расстояний. В таблице IV приведены рассчитанные Хабблом средние максимальные диаметры туманностей нескольких типов. Если

Таблица IV

Класс	Диаметр, <i>пс</i>	Класс	Диаметр, <i>пс</i>
Эллиптические галактики		Нормальные спиральные галактики	
E_0	360	S_a	1450
E_1	430	S_b	1900
E_2	500	S_c	2500
E_3	590	Спиральные с перемычкой	
E_4	700	SB_a	1280
E_5	810	SB_b	1320
E_6	960	SB_c	2250
E_7	1130	Неправильные	1500

принять во внимание новое значение нуля-пункта в соотношении период — светимость для цефеид, то эти диаметры нужно уменьшить примерно на 15%. Следует, однако, отметить, что полученные значения зависят от времени экспозиции, поэтому в них остается некоторая неопределенность. Оценки размера нашей собственной системы [124], произведенные по шаровым звездным скоплениям, дают примерно от 20 000 до 50 000 *пс*. Хабблом [125] в туманности Андромеды были найдены объекты, очень похожие на шаровые звездные скопления. Не исключено, что туманность Андромеды имеет приблизительно такие же размеры, как и наша собственная Галактика.

Массы туманностей можно оценить, исходя из сопоставления их диаметров и скоростей вращения. Последние же можно найти спектроскопически, если предположить, что вращение галактики происходит вокруг ядра. Массу можно также оценить методом Опики, предположив, что коэффициент излучения вещества в спиральных галактиках такой же, как и у нашей собственной. Полагаясь на довольно скудные данные, Хаббл [126] оценивает среднюю массу туманностей как

$$m = (6 \div 10) \cdot 10^8 \odot, \quad (177.19)$$

где \odot — масса Солнца:

$$\odot = 1,983 \cdot 10^{33} \text{ г}. \quad (177.20)$$

ж) **Распределение туманностей в пространстве.** Пусть имеется обычное евклидово пространство, равномерно заполненное стационарными туманностями. Тогда, очевидно, можно ожидать, что число туманностей N внутри сферы радиуса d пропорционально кубу радиуса, т. е.

$$N = \text{const} \cdot d^3, \quad (177.21)$$

откуда, совместно с выражением (177.10), получаем

$$\lg N = 0,6m + C, \quad (177.22)$$

где m — наибольшая звездная величина туманностей в рассматриваемой области, а C — постоянная.

Если подставить в это уравнение реально наблюдаемые значения, то можно обнаружить два интересных факта.

Во-первых, оказывается, что в плоскости Млечного Пути есть «зона избегания» не очень правильной формы со средней шириной 15° , где галактики почти полностью отсутствуют. Это, несомненно, происходит из-за того, что внутри нашей собственной Галактики имеется поглощающий слой вещества. В частности, известны темные облака материи на Млечном Пути, которые целиком закрывают от нас все звезды, кроме ближайших из нашей собственной системы. Это объяснение еще более подтверждается открытием Хаббла [126], который показал, что число туманностей в единице телесного угла возрастает от зоны избегания до галактического полюса именно таким образом, как и следовало бы ожидать, если бы наблюдения проводились сквозь толщу поглощающего вещества.

Второй интересный факт состоит в том, что туманности распределены нерегулярно. Это обнаруживается с полнейшей определенностью, если только при усреднении не использовать чересчур большие интервалы по углу и расстоянию. Указанная нерегулярность, во всяком случае частично, связана с тем, что галактики имеют тенденцию собираться в скопления. Так, Шепли

и Эймс [127] обнаружили, что полное число туманностей вплоть до 13-й звездной величины в северном полушарии примерно в 2 раза больше, чем в южном. Эту разность, однако, можно полностью отнести за счет сильно населенного скопления в созвездии Девы в северном полушарии, содержащего большое число туманностей в этом интервале звездных величин. Помимо этой неоднородности, вызванной скоплениями, Шепли [128] обнаружил также и неоднородность в распределении туманностей вплоть до звездной величины 18,2. После приведения к однородным условиям оказалось, что в северном полушарии таких туманностей тоже больше, чем в южном. Однако число туманностей вплоть до 20-й звездной величины по подсчетам Хаббла [126], оказывается одинаковым в обеих полушарах.

Учитывая возможность поглощения внутри Млечного Пути и неоднородности, связанные с недостаточно широким усреднением, Хаббл нашел, что распределение внегалактических туманностей достаточно хорошо описывается выражением

$$\lg N = 0,6m - 9,12, \quad (177.23)$$

где N — число туманностей на квадратный градус, а m — исправленная видимая фотографическая звездная величина.

Вопрос о распределении туманностей будет обсуждаться еще раз в § 181, но без ограничительных требований стационарности галактик и евклидовости пространства.

з) **Плотность вещества во Вселенной.** Для того чтобы найти усредненную по всему пространству плотность вещества, Хаббл [126] воспользовался наилучшей из существующих оценкой средней массы туманностей и плотности их распределения и в результате получил *)

$$\rho = (1,3 \div 1,6) \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3. \quad (177.24)$$

Приведенное число является, разумеется, только нижним пределом для реальной плотности, поскольку пока неизвестно, сколько вещества имеется во Вселенной в других формах: в виде пыли, газа или движущихся частиц, связанных с космическими лучами. По оценкам Хаббла, плотность внегалактической пыли может быть в тысячу раз больше приведенной выше цифры и при этом до сих пор никак не проявиться.

Кроме вещества, внегалактическое пространство содержит и неизвестное нам количество излучения, которое пополняется за счет высвечивания самих туманностей и за счет источника, порождающего космические лучи. Однородно распределенное излучение черного тела при температуре около 19°К имеет плотность 10^{-30} г/см^3 .

*) Новые данные приведены на стр. 495, 496. (Прим. ред.)

Так как, кроме туманностей, вещество в пространстве присутствует и в другой форме, то полное распределение вещества может оказаться гораздо более однородным, чем это можно заключить из того факта, что туманности имеют тенденцию собираться в скопления.

Для дальнейшего удобно перевести (177.24) в релятивистские единицы § 81:

$$8\pi\rho = \frac{8\pi \cdot 10^{-30}}{1,349 \cdot 10^{28}} \approx 1,86 \cdot 10^{-57} \text{ см}^{-2}, \quad (177.25)$$

или, переходя к световым годам,

$$8\pi\rho \approx 1,7 \cdot 10^{-21} (\text{лет})^{-2}. \quad (177.26)$$

§ 178. Координаты туманности и светимость

Теперь нам предстоит перейти к интерпретации вышеприведенных данных наблюдений при помощи наших нестатических моделей. Однако сначала придется вывести несколько соотношений, которые облегчат сравнение свойств моделей с наблюдениями. Общее же сопоставление моделей с реальной Вселенной отложим до § 185.

В настоящем параграфе будет рассмотрена связь между координатами местонахождения туманности и ее наблюдаемой светимостью. Имея дело с нестатической моделью, можно ожидать, что подобная связь существует.

Проще всего подойти к этому вопросу, основываясь на интервале не в первоначальном виде

$$ds^2 = - \frac{e^{g(t)}}{[1 + r^2/4R_0^2]^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2, \quad (178.1)$$

а в виде

$$ds^2 = - e^{g(t)} \left(\frac{\bar{d}r^2}{1 - \bar{r}^2/R_0^2} + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) + dt^2, \quad (178.2)$$

который был получен в § 149 с помощью преобразования

$$\bar{r} = \frac{r}{1 + r^2/4R_0^2}. \quad (178.3)$$

Так как это преобразование затрагивает только координату r , то все те первоначальные выражения, которые не зависят от r , например, формулы для давления, плотности, остаются неизменными.

Чтобы получить искомое соотношение между координатами и наблюдаемой светимостью [98], удобнее всего для начала

поместить туманность в центре, а наблюдателя — на заданном, интересующем нас координатном расстоянии \bar{r} . Пусть они оба покоятся относительно выбранных пространственных координат, тогда, согласно нашему определению, они будут покоиться и относительно материи в непосредственной близости от них. Примем, что наблюдаемая светимость l источника равна количеству энергии, принимаемой наблюдателем в единицу времени на единицу площади поверхности, при условии, что между источником и наблюдателем нет никакого поглощения и что наблюдатель при этом пользуется своими собственными эталонами.

Чтобы вычислить эту светимость, поступим следующим образом. Обозначим момент времени, когда туманность, расположенная в центре, испускает свет, через t_1 , а момент времени, когда этот свет достигнет наблюдателя, расположенного на координатном расстоянии \bar{r} от центра, через t_2 . Используя скорость света, которая определяется с помощью выражения для интервала (178.2), можно связать оба значения t с пройденным расстоянием уравнением

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{1}{2}g(t)} dt = \int_0^{\bar{r}} \frac{d\bar{r}}{\sqrt{1-\bar{r}^2/R_0^2}}$$

Продифференцируем обе части этого выражения. Учитывая, что пределы интегрирования в правой части постоянны, получаем

$$\frac{\delta t_2}{\delta t_1} = e^{\frac{1}{2}(g_2 - g_1)}. \quad (178.4)$$

Это уравнение связывает промежуток времени δt_1 между двумя электромагнитными возмущениями на источнике с промежутком δt_2 между этими же возмущениями у наблюдателя через посредство функции $g(t)$, которая принимает значения g_1 и g_2 в моменты t_1 и t_2 соответственно.

Предполагая, что δt_1 — это промежуток времени между двумя последовательными волновыми максимумами, испускаемыми источником, и замечая, что координатное время t совпадает с собственным временем как источника, так и наблюдателя, перепишем выражение (178.4) в виде

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{\nu}{\nu + \delta\nu} = e^{\frac{1}{2}(g_2 - g_1)}, \quad (178.5)$$

где λ и ν — длина волны и частота света на источнике, а $(\lambda + \delta\lambda)$ и $(\nu + \delta\nu)$ — соответствующие значения у наблюдателя. Полученное выражение, как и следовало ожидать, совпадает с результатом (155.7), найденным ранее для доплер-эффекта.

Далее, предполагая, что δt_1 в уравнении (178.4) есть промежуток времени между испусканием двух последовательных фотонов, которые уносят энергию от туманностей, получаем

$$\frac{z_2}{z_1} = e^{-\frac{1}{2}(g_2 - g_1)}. \quad (178.6)$$

Здесь z_1 — число фотонов, покидающих источник за единицу времени, а z_2 — число фотонов, попадающих в единицу времени на поверхность сферы с координатным радиусом \bar{r} вокруг начала координат.

И наконец, согласно выражению для интервала (178.2) полная собственная площадь поверхности сферы с координатным радиусом \bar{r} , через которую фотоны пройдут в момент времени t_2 , равна

$$A_0 = 4\pi\bar{r}^2 e^{g_2}. \quad (178.7)$$

Отсюда, если предположить, что средняя энергия фотонов, испускаемых туманностью, равна $h\nu_1$, из последних трех уравнений, в согласии с приведенным выше определением, получаем следующее выражение для наблюдаемой светимости:

$$l = \frac{z_1 h\nu_1 e^{g_1 - g_2}}{4\pi\bar{r}^2 e^{g_2}} = \frac{z_1 h\nu_1}{4\pi\bar{r}^2 e^{g_2}} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta\lambda} \right)^2. \quad (178.8)$$

Полученный результат относится к простому случаю, когда туманность находится в центре, а наблюдатель — на координатном расстоянии \bar{r} . Однако в § 149, в было показано, что преобразование к новой системе координат с тем же выражением интервала (178.2), как и раньше, но с наблюдателем, перемещенным в центр, приведет к тому, что туманность окажется на координатном расстоянии \bar{r} . Поэтому мы можем заключить, что формула (178.8) справедлива также и в том случае, когда наблюдатель находится в центре, а туманность — в \bar{r} .

Такая конфигурация более удобна, если мы желаем сравнивать наблюдаемые светимости галактик, находящихся на разных расстояниях \bar{r} , но наблюдаемых в начале координат в один и тот же момент t_2 . Считая, что собственные светимости и, следовательно, z_1 и ν_1 для различных туманностей одинаковы, мы немедленно получаем из (178.8)

$$\frac{l}{l'} = \frac{\bar{r}'^2 (1 + \delta\lambda'/\lambda')^2}{\bar{r}^2 (1 + \delta\lambda/\lambda)^2}, \quad (178.9)$$

где l/l' — отношение наблюдаемых светимостей двух тождественных туманностей, помещенных на координатных расстояниях \bar{r}

и \bar{r}' , а $\delta\lambda/\lambda$ и $\delta\lambda'/\lambda'$ — их относительные красные смещения, наблюдаемые в центре.

С помощью преобразования (178.3) отношение светимостей можно выразить через прежние координаты r :

$$\frac{l}{l'} = \frac{r'^2 (1 + r^2/4R_0^2) (1 + \delta\lambda'/\lambda')^2}{r^2 (1 + r'^2/4R_0^2)^2 (1 + \delta\lambda/\lambda)^2}. \quad (178.10)$$

Новое выражение имеет гораздо более сложный вид, чем старое (178.9). Именно поэтому мы для решения задачи и выбрали координатную систему $(\bar{r}, \theta, \varphi, t)$ вместо координатной системы (r, θ, φ, t) , в которой было записано первоначальное выражение для интервала.

Следует отметить, что при выводе соотношений между светимостью и координатами местонахождения мы, кроме однородности модели, предположили постоянство средних собственных светимостей туманностей во всем интервале времени порядка 10^8 лет. Этот интервал времени будет всюду фигурировать в реальных приложениях.

Разрешая (178.9) относительно \bar{r} , получаем зависимость координатного расстояния от светимости:

$$\bar{r} = \frac{\text{const}}{\sqrt{l}} \frac{\lambda}{\lambda + \delta\lambda}. \quad (178.11)$$

§ 179. Координаты туманности и астрономическое расстояние до нее

Чтобы выразить астрономическое расстояние d , вычисленное по формуле Хаббла и Хьюмаса, через координату \bar{r} местонахождения туманности, нужно воспользоваться уравнением (178.9), связывающим координату \bar{r} со светимостью. Но прежде всего светимости нужно выразить через звездную величину, так как астрономические расстояния определяются через последнюю.

Находя из (178.9) отношение \bar{r}/\bar{r}' координат двух туманностей и логарифмируя, получаем

$$\lg \frac{\bar{r}}{\bar{r}'} = 0,5 \lg \frac{l'}{l} + \lg \frac{1 + \delta\lambda'/\lambda'}{1 + \delta\lambda/\lambda}. \quad (179.1)$$

Вспоминая определение звездных величин через светимость, находим

$$m - m' = 2,5 \lg \frac{l'}{l},$$

откуда ясно, что уравнение (179.1) можно переписать в виде

$$\lg \frac{\bar{r}}{r'} = 0,2(m_{\text{бол}} - m'_{\text{бол}}) + \lg \frac{1 + \delta\lambda/\lambda}{1 + \delta\lambda/\lambda}, \quad (179.2)$$

где $m_{\text{бол}}$ и $m'_{\text{бол}}$ — наблюдаемые болометрические звездные величины. Их определение и выражение через светимость были даны в предыдущем параграфе.

Чтобы сравнить равенство (179.2) с выражением Хаббла и Хьюмаса, нужно с помощью эмпирического соотношения перейти от болометрических величин к фотографическим. При этом получается

$$\lg \frac{\bar{r}}{r'} = 0,2 [m_{\text{фот}} - \Delta m_{\text{рад}} - (HI) - (CI) - m'_{\text{фот}} + \Delta m'_{\text{рад}} + (HI)' + (CI)'] + \lg \frac{1 + \delta\lambda/\lambda}{1 + \delta\lambda/\lambda}. \quad (179.3)$$

Полагая координату r' одной из туманностей равной стандартному расстоянию 10 *пс*, выбирая для удобства такие единицы, в которых \bar{r}' равно 10, и учитывая, что красное смещение на расстоянии 10 *пс* пренебрежимо мало, перепишем равенство (179.3) в следующем виде:

$$\lg \bar{r} = 0,2 \{m_{\text{фот}} - \Delta(\Delta m_{\text{рад}}) - \Delta(HI) - \Delta(CI) - M_{\text{фот}}\} - \lg \frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} + 1, \quad (179.4)$$

где $m'_{\text{фот}}$ заменена на абсолютную фотографическую величину. Вспомянув (177.4) и (177.6) и выражение Хаббла и Хьюмаса для поправки $\Delta m_{\text{фот}}$, обусловленной красным смещением, переписываем последний результат в ином виде:

$$\lg \bar{r} = 0,2(m_{\text{фот}} - \Delta m_{\text{фот}} - M_{\text{фот}}) + 1 - 0,5 \lg \frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda}. \quad (179.5)$$

Полученное соотношение для \bar{r} уже можно сравнить с выражением Хаббла и Хьюмаса (177.11) для астрономического расстояния

$$\lg d = 0,2(m_{\text{фот}} - \Delta m_{\text{фот}} - M_{\text{фот}}) + 1. \quad (179.6)$$

Из выражения (179.5) и (179.6) вытекает:

$$\bar{r} = d \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + \delta\lambda}}, \quad d = \bar{r} \sqrt{\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda}}. \quad (179.7)$$

Это как раз и есть искомое соотношение между астрономическим расстоянием d до туманности, определяемым по Хаббллу и Хьюмасону, и координатой ее местонахождения \bar{r} , где \bar{r} — такая координата, через которую интервал ds^2 записывается в виде (178.2), а масштаб выбран таким образом, что на стандартном расстоянии 10 пс \bar{r} в интересующий нас момент времени равняется 10.

Множитель $\sqrt{1 + \delta\lambda/\lambda}$ в этих выражениях обязан своим происхождением тому факту, что в расширяющихся моделях красное смещение связывается с эффектом Допплера, и поэтому в такой модели изменяется как частота прихода фотонов к наблюдателю, так и частота самих фотонов; Хаббл же и Хьюмасон признают только первый из указанных эффектов. Параметр R_0^2 не входит в эти выражения благодаря свойствам выбранной координатной системы $(\bar{r}, \theta, \varphi, t)$.

Так как для наиболее далекого скопления в созвездии Льва разность между \bar{r} и d составляет всего только три процента, то мы практически будем считать \bar{r} и d одинаковыми в пределах ошибок наблюдения, пока какие-либо новые данные не заставят нас принять во внимание различие между ними.

§ 180. Координаты и видимый диаметр

Теперь рассмотрим связь между координатами туманностей и их видимыми диаметрами [98], воспользовавшись снова интервалом

$$ds^2 = - e^{g(t)} \left(\frac{d\bar{r}^2}{1 - \bar{r}^2/R_0^2} + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) + dt^2. \quad (180.1)$$

Для определенности примем, что наблюдатель неподвижно связан с началом отсчета, а туманность находится на координатном расстоянии \bar{r} . Далее, пусть t_1 и t_2 — соответственно моменты времени, когда наблюдаемый свет испускается туманностью и достигает начала координат, распространяясь внутрь по радиусу, как было разобрано в § 154. Пусть диаметр интересующего нас объекта виден под углом $\delta\theta$; тогда из вида интервала вытекает, что

$$\delta l_0 = \frac{1}{r} e^{\frac{1}{2} g_1} \delta\theta, \quad (180.2)$$

где δl_0 — собственный диаметр туманности в момент t_1 излучения, g_1 — величина $g(t)$ в этот момент, а $\delta\theta$ — угловой диаметр туманности, наблюдаемый из начала координат.

Предполагая, что δl_0 одинаков для всех туманностей, которые видны из центра в момент t_2 , и учитывая, что величина g_2 функ-

ции $g(t)$ в момент наблюдения тоже одинакова для различных туманностей, находим

$$\delta\theta = \frac{\text{const}}{\bar{r}} e^{1/2(g_2 - g_1)}. \quad (180.3)$$

С помощью выражения для красного смещения (178.5) это равенство можно преобразовать к виду

$$\delta\theta = \frac{\text{const}}{\bar{r}} \frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda}. \quad (180.4)$$

Комбинируя (180.4) с уравнением (178.11), связывающим наблюдаемую светимость и координату местонахождения, получаем зависимость между наблюдаемым диаметром, светимостью и красным смещением:

$$\frac{\delta\theta}{\sqrt{l}} = \text{const} \left(\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} \right)^2. \quad (180.5)$$

Это соотношение позволяет на практике проверить, является ли правильной гипотеза о том, что красное смещение есть результат реального расширения.

Комбинируя (180.4) с уравнением (179.7), связывающим координатное расстояние \bar{r} с астрономическим расстоянием d , получаем

$$\delta\theta = \frac{\text{const}}{d} \left(\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} \right)^{3/2}. \quad (180.6)$$

Это равенство полезно сравнить с равенством (177.16), полученным ранее из предположений о стационарности туманностей и о евклидовости пространства.

§ 181. Распределение числа туманностей в пространстве

Перейдем теперь к вопросу о том, сколько туманностей можно насчитать внутри области с заданным радиусом \bar{r} , исходя из предположения, что модель однородна и расширяется. Чтобы ответить на этот вопрос, положим, что в единице собственного объема в некоторый выбранный момент t_0 находится n_0 туманностей, при этом $g(t)$ принимает значение g_0 . Тогда, умножая n_0 на собственный объем, отвечающий выражению для интервала в виде (180.1), очевидно, получаем, что число туманностей в области от \bar{r} до $\bar{r} + d\bar{r}$ равно

$$dN = n_0 d v_0 = \frac{4\pi n_0 e^{3/2 g_0} \bar{r}^2 d\bar{r}}{\sqrt{1 - \bar{r}^2/R_0^2}}. \quad (181.1)$$

Как было показано в § 153, частицы, которые покоились относительно пространственных координат (r, θ, φ) , а, следовательно, также и относительно $(\bar{r}, \theta, \varphi)$, остаются покоящимися все время. Поэтому не будет происходить увеличения или уменьшения числа туманностей из-за их среднего потока через границы при \bar{r} и $\bar{r} + \delta\bar{r}$, и поэтому (181.1) дает полное число туманностей в рассматриваемом интервале координат, одинаковое для любого момента времени. Иными словами,

$$dN = \text{const} \frac{\bar{r}^2 d\bar{r}}{\sqrt{1 - \bar{r}^2/R_0^2}}. \quad (181.2)$$

Отсюда видно, как изменяется число туманностей по мере перехода ко все более и более удаленным координатам. Следует отметить также, что это выражение вместе с уравнением (178.11), связывающим координаты местонахождения со светимостью и красным смещением, могло бы служить для прямой эмпирической проверки того, насколько однородно распределены галактики в реальном мире.

Зная величину R_0 , которая может быть как действительной, так и бесконечной и мнимой, мы можем проинтегрировать уравнение (181.2) и получить полное число объектов во всем объеме вплоть до любого наперед заданного \bar{r} . В дальнейшем будут установлены ограничения на возможные значения R_0^2 (см. (183.14)) и окажется, что \bar{r}^2/R_0^2 едва ли может превосходить 0,02 даже для самого удаленного скопления в созвездии Льва, расстояние до которого составляет несколько сот миллионов световых лет. Поэтому в большинстве случаев для полного числа туманностей внутри области с любым наперед заданным радиусом \bar{r} можно положить

$$N = \text{const} \cdot \bar{r}^3. \quad (181.3)$$

Подставляя сюда значение \bar{r} из уравнений (178.11), (179.7) и (180.4), можно получить еще несколько формул:

$$N = \text{const} \cdot \bar{r}^3,$$

$$N = \text{const} \cdot d^3 \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta\lambda} \right)^{3/2},$$

$$N = \frac{\text{const}}{l^{3/2}} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta\lambda} \right)^3, \quad (181.4)$$

$$N = \frac{\text{const}}{(\delta\theta)^3} \left(\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} \right)^3.$$

Эти соотношения определяют соответственно полное число га-

лактик внутри области вплоть до заданного значения координаты \bar{r} , астрономического расстояния d , болометрической светимости l или видимого диаметра $\delta\theta$; причем $\delta\lambda/\lambda$ равно максимальному красному смещению туманностей в указанной области*). Второе из этих выражений следует сравнить с выражением (177.21), полученным ранее исходя из предположения о стационарности туманностей и об евклидовости пространства.

§ 182. Расстояние до туманности и ее красное смещение

Теперь мы можем рассмотреть связь между координатами туманности и ее наблюдаемым красным смещением, пользуясь по-прежнему координатами $(\bar{r}, \theta, \varphi, t)$, которые, как было показано, являются очень удобными для проведения сопоставления с астрономическими наблюдениями. В этих координатах интервал одной модели записывается в виде

$$ds^2 = -e^{g(t)} \left(\frac{d\bar{r}^2}{1-\bar{r}^2/R_0^2} + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) + dt^2. \quad (182.1)$$

Исследование доплер-эффекта, проведенное в общем виде в § 155 (см. уравнение (155.8)), а для частного случая в § 178 (см. уравнение (178.5)), показывает, что относительное красное смещение длины волны света, испускаемого туманностью, наблюдаемой из начала координат, можно представить следующим образом:

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = e^{1/2(g_2 - g_1)} - 1, \quad (182.2)$$

где g_1 и g_2 — значения функции $g(t)$ соответственно в моменты времени t_1 , когда свет испускается туманностью, и t_2 , когда он достигает центра наблюдения.

При описании с помощью этого уравнения данных наблюдения, g_2 , очевидно, можно считать постоянным, поскольку все туманности, которые мы наблюдаем из нашего местоположения, принятого за начало отсчета, мы наблюдаем в один и тот же момент времени. С другой стороны, g_1 следует рассматривать как переменную, так как при переходе ко все более удаленным туманностям мы переходим ко всем более ранним временам излучения, т. е. значения g_1 оказываются разными. Отсюда ясно, что красное смещение будет по-разному зависеть от расстояния до туманности при различных видах функции $g(t)$.

*) В своих лекциях, прочитанных в Калифорнийском технологическом институте зимой 1932 г., профессор Эйнштейн указал, что эти выражения для числа туманностей можно использовать для проверки справедливости модели Эйнштейна — де Ситтера, в которой R_0^2 полагается равным ∞ , а $\Lambda = 0$.

Чтобы иметь дело с конкретным видом функции $g(t)$, можно, конечно, выбрать какую-нибудь модель с одним из типов эволюции, рассмотренных во второй части этой главы, и позаимствовать $g(t)$ у этой модели. Однако в настоящее время такой выбор пришлось бы делать на основе каких-то метафизических спекуляций. Поэтому для наших целей лучше всего пойти более феноменологическим путем и попытаться получить максимально возможную информацию относительно вида функции $g(t)$, проводя сравнительный анализ данных наблюдений.

Поскольку естественно считать, что $g(t)$ — непрерывная функция t , и поскольку красное смещение зависит от расстояния приблизительно линейным образом, то разумнее всего взять функцию $g(t)$ в виде разложения в ряд Тейлора по степеням t около текущего момента t_2 , который мы примем за начало отсчета времени [99], т. е. положим $t_2=0$. Тогда, пренебрегая пока степенями выше третьей, получаем

$$g(t) = 2(Ht + lt^2 + mt^3 + \dots), \quad (182.3)$$

где H, l, m — постоянные коэффициенты, а множитель 2 введен для того, чтобы избежать появления дробей в дальнейшем. Отсутствие в приведенном разложении постоянной, разумеется, не имеет принципиального значения, но вместе с тем, поскольку такой выбор означает, что при $t_2=0$ мы будем иметь удобное значение $g_2=0$, интервал (182.1) в окрестности начала координат в текущий момент времени тем самым приводится к такому же виду, как и в специальной теории относительности. Таким образом, красное смещение, наблюдаемое в начале координат, согласно (182.2) определяется выражением

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = e^{-1/2g_1} - 1 = e^{-(Ht_1 + lt_1^2 + mt_1^3 + \dots)} - 1, \quad (182.4)$$

где t_1 — момент в прошлом, когда наблюдаемый свет был испущен туманностью.

Для сравнения с астрономическими данными более удобно, однако, выразить красное смещение не через степени t_1 — времени испускания, а в виде ряда по степеням \bar{r} — расстояния до рассматриваемой туманности. Чтобы получить такое разложение, нам нужно знать значения последовательных производных по \bar{r} от $\delta\lambda/\lambda$ в точке $\bar{r}=0$.

Для первой производной согласно (182.4) мы можем написать

$$\frac{d}{d\bar{r}} \left(\frac{\delta\lambda}{\lambda} \right) = -\frac{1}{2} e^{-1/2g_1} \frac{dg_1}{dt_1} \frac{dt_1}{d\bar{r}}, \quad (182.5)$$

где $dt_1/d\bar{r}$ — изменение времени при изменении координатного расстояния до рассматриваемой туманности. Зная из вида интервала (182.1) выражение для скорости света, можно $dt_1/d\bar{r}$ представить следующим образом:

$$\frac{dt_1}{d\bar{r}} = - \frac{e^{1/2 g_1}}{\sqrt{1 - \bar{r}^2/R_0^2}} \quad (182.6)$$

откуда после подстановки в (182.5) находим первую производную по \bar{r} от $\delta\lambda/\lambda$:

$$\frac{d}{d\bar{r}} \left(\frac{\delta\lambda}{\lambda} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \bar{r}^2/R_0^2}} \frac{dg_1}{dt_1}, \quad (182.7)$$

что совпадает с равенством (156.6), полученным прежде.

Точно таким же образом можно получить выражения для более высоких производных от $\delta\lambda/\lambda$. Беря функцию $g(t)$ в виде (182.3) и полагая после дифференцирования $\bar{r}=0$, получаем

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{d\bar{r}} \left(\frac{\delta\lambda}{\lambda} \right) \right]_{\bar{r}=0} &= H, \\ \left[\frac{d^2}{d\bar{r}^2} \left(\frac{\delta\lambda}{\lambda} \right) \right]_{\bar{r}=0} &= -2l, \\ \left[\frac{d^3}{d\bar{r}^3} \left(\frac{\delta\lambda}{\lambda} \right) \right]_{\bar{r}=0} &= \frac{H}{R_0^2} + 2Hl + 6m, \end{aligned} \quad (182.8)$$

где особенно приятно отметить, что зависимость от пространственной кривизны, т. е. от R_0^2 , появляется только начиная с третьей производной.

С помощью найденных производных мы можем выразить зависимость красного смещения от координат туманности в виде ряда Тейлора — Маклорена:

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = H\bar{r} - l\bar{r}^2 + \left(\frac{H}{6R_0^2} + \frac{1}{3}Hl + m \right) \bar{r}^3 + \dots \quad (182.9)$$

Сопоставление с реальной Вселенной дает значение для первого коэффициента разложения (постоянной Хаббла).

$$H = 5,71 \cdot 10^{-10} \text{ (лет)}^{-1}, \quad (182.10)$$

которое согласуется с результатом Хаббла и Хьюмасона (177.15), поскольку в пределах ошибок измерений d можно заменить на \bar{r} .

Что касается коэффициентов при следующих членах разложения, то для них можно установить верхние и нижние границы,

исходя из того факта, что в пределах ошибок наблюдения красное смещение возрастает с расстоянием приблизительно линейно вплоть до самого далекого скопления в созвездии Льва, т. е. вплоть до расстояний 10^8 световых лет. Из графика зависимости красного смещения от расстояния (рис. 12) можно увидеть, что отклонение от линейности $\delta\lambda/\lambda = H\bar{r}$ не превосходит 1% при 10^7 световых лет, 3% при $3 \cdot 10^7$ световых лет и 18% при 10^8 световых лет. Это означает, что в качестве разумного верхнего предела для значений последующих коэффициентов можно взять

$$|l| < 5 \cdot 10^{-19} (\text{лет})^{-2} \quad (182.11)$$

и

$$\left| \frac{H}{6R_0^2} + \frac{1}{3}Hl + m \right| < 5 \cdot 10^{-27} (\text{лет})^{-3}, \quad (182.12)$$

безотносительно к знаку.

Эти верхние пределы приводят к следующему отклонению (в процентах) от простой формулы $\delta\lambda/\lambda = H\bar{r}$ при различных расстояниях (табл. V):

Таблица V

Расстояние, световой год	$1 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^7$	$3 \cdot 10^7$	$6 \cdot 10^7$	$10 \cdot 10^7$
$\frac{\text{член с } \bar{r}^2}{\text{член с } \bar{r}}$	0,9%	1,8%	2,6%	5,3%	8,8%
$\frac{\text{член с } \bar{r}^3}{\text{член с } \bar{r}}$	0,1%	0,4%	0,8%	3,2%	8,8%

§ 183. Связь плотности с пространственной кривизной и космологической постоянной

Сопоставим оценку (177.26) плотности вещества галактик, усредненного по всему пространству:

$$8\rho_r = 1,7 \cdot 10^{-21} (\text{лет})^{-2} \quad (\rho = 10^{-30} \text{ г/см}^3), \quad (183.1)$$

с выражениями (150.7), (150.8) и (150.10) для давления, полной плотности материи и плотности вещества соответственно. Возьмем функцию $g(t)$ в виде степенного ряда (182.3). Тогда в

заданный момент $t=0$ будем иметь

$$8\pi p_0 = -\frac{1}{R_0^2} - 4l - 3H^2 + \Lambda, \quad (183.2)$$

$$8\pi\rho_{00} = \frac{3}{R_0^2} + 3H^2 - \Lambda \quad (183.3)$$

и

$$8\pi\rho_m = \frac{6}{R_0^2} + 12l + 12H^2 - 4\Lambda, \quad (183.4)$$

где плотность вещества ρ_m , так же как и в § 150, принята равной $\rho_{00} - 3\rho_0$. Это приближение было бы полностью справедливо, если бы все давление в модели можно было приписать исключительно одному излучению.

С первого взгляда не ясно, какую пользу можно извлечь из выражений (183.2)—(183.4), поскольку слишком скудны имеющиеся в нашем распоряжении данные относительно реального мира и, кроме того, в написанные выражения входят сразу две неизвестные постоянные R_0^2 и Λ . Однако если учесть, что давление в рассматриваемой модели не должно быть отрицательным, а плотность вещества должна быть не меньше плотности вещества галактик реальной Вселенной, усредненного по всему пространству, то из выражений (183.2)—(183.4) можно извлечь полезные неравенства:

$$0 < -\frac{1}{R_0^2} - 4l - 3H^2 + \Lambda \quad (183.5)$$

и

$$1,7 \cdot 10^{-21} < \frac{6}{R_0^2} + 12l + 12H^2 - 4\Lambda. \quad (183.6)$$

Исключив из этих неравенств сначала Λ , а затем R_0^2 , подставив значение H и приняв во внимание найденные в предыдущем параграфе неравенства для l , легко получим довольно надежно следующие нижние пределы:

$$-1 \cdot 10^{-18} < \frac{1}{R_0^2}, \quad (183.7)$$

$$-2 \cdot 10^{-18} < \Lambda. \quad (183.8)$$

Верхние границы для этих величин, конечно, более неопределены. Однако кажется довольно естественным предположить, что полная плотность вещества и излучения едва ли может более чем

в 1000 раз превосходить плотность вещества, заключенного в туманностях. Отсюда следовало бы, что

$$\frac{3}{R_0^2} + 3H^2 - \Lambda < 1,7 \cdot 10^{-18}. \quad (183.9)$$

Далее, учитывая, что максимально возможное отношение давления к плотности имеет место только для излучения, получаем еще одно неравенство:

$$-\frac{3}{R_0^2} - 12l - 9H^2 + 3\Lambda < \frac{3}{R_0^2} + 3H^2 - \Lambda. \quad (183.10)$$

Совместное решение последних двух неравенств с учетом установленных ранее ограничений на H и l позволяет найти верхние границы для $1/R_0^2$ и Λ :

$$\frac{1}{R_0^2} < 2,1 \cdot 10^{-18}, \quad (183.11)$$

$$\Lambda < 5,7 \cdot 10^{-18}. \quad (183.12)$$

Далее, используя все результаты относительно постоянных $1/R_0^2$, H и l , из неравенства (182.12) найдем пределы возможных значений m :

$$-5,3 \cdot 10^{-27} < m < 5,2 \cdot 10^{-27}. \quad (183.13)$$

Чтобы в дальнейшем было удобно ссылаться на полученные результаты, соберем их вместе:

$$\begin{aligned} H &= 5,71 \cdot 10^{-10} \text{ (лет)}^{-1}, \\ -5 \cdot 10^{-19} &< l < 5 \cdot 10^{-19} \text{ (лет)}^{-2}, \\ -5,3 \cdot 10^{-27} &< m < 5,2 \cdot 10^{-27} \text{ (лет)}^{-3}, \\ -1 \cdot 10^{-18} &< \frac{1}{R_0^2} < 2,1 \cdot 10^{-18} \text{ (лет)}^{-2}, \\ -2 \cdot 10^{-18} &< \Lambda < 5,7 \cdot 10^{-18} \text{ (лет)}^{-2}. \end{aligned} \quad (183.14)$$

Исходя из результатов (183.14), нельзя с уверенностью утверждать, что именно модель де Ситтера лучше всего описывает реальную Вселенную. Согласно (142.10) интервал де Ситтера является предельным случаем рассматриваемого нами сейчас интервала (182.1), когда $1/R_0^2$, l , m , ... равны нулю. Однако в выражения для плотности и давления члены порядка Λ и $1/R$ входят аддитивно, результаты же (183.14) не позволяют утверждать, что последними по сравнению с первыми можно пренебречь.

§ 184. Связь между красным смещением и скоростью исчезновения вещества

В § 152 было получено выражение для относительной скорости, с которой полная масса вещества может уменьшаться либо в результате процесса излучения туманностей, либо в результате процесса синтеза и аннигиляции межгалактического вещества, который, возможно, и является причиной возникновения радиационной компоненты космических лучей*). Выражение (152.7), полученное для скорости, было приближенным только потому, что в нем плотность вещества ρ_m была заменена разностью между полной плотностью ρ_{00} и плотностью излучения, которая полагалась равной $3\rho_0$; в остальном же оно точное.

Используя наше представление функции $g(t)$ в виде ряда

$$g(t) = 2(Ht + lt^2 + mt^3 + \dots), \quad (184.1)$$

мы можем записать первоначальное выражение (152.7) для скорости уменьшения массы в виде

$$-\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} = 3 \left[\frac{\rho_{00} + \frac{5}{8} \rho_0}{\rho_m} - \frac{1}{4\pi\rho_m} \left(4l + \frac{6m}{H} \right) \right] \cdot H, \quad (184.2)$$

который не содержит коэффициентов разложения более высокого порядка, чем H , l , m . Этот результат, очевидно, может привести к дополнительным ограничениям на l и m .

Рассмотрим сначала случай идеально линейной функции $g(t)$, т. е. положим l , m равными нулю. Как следует из (182.9) и из числовых оценок, найденных для $1/R_0^2$, зависимость красного смещения от расстояния в этом случае тоже оказывается почти линейной. Если

$$l = m = 0, \quad (184.3)$$

то скорость уменьшения массы вещества не может быть меньше, чем

$$-\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} = 3H, \quad (184.4)$$

ибо знаменатель первого члена правой части (184.2) во всяком случае не меньше числителя. Однако если придать H его наблюдаемое числовое значение, то окажется, что масса вещества должна убывать слишком быстро. Это иллюстрируется таблицей VI, в которой величина $3H$ сравнивается с известными скоростями потери массы через излучение звездами различных типов**).

*) О современной теории происхождения космических лучей см., например, В. Л. Гинзбург и С. И. Сыроватский. Происхождение космических лучей, «Наука», 1963. (Прим. ред.).

***) Первые два столбца этой таблицы взяты из книги [129].

Таблица VI

Энерговыведение типичных звезд

Звезда	$E, \frac{\text{эрг}}{\text{г} \cdot \text{сек}}$	$-\frac{1}{M} \frac{dM}{dt}, (\text{лет})^{-1}$
H. D. 1337 A	15 000	$5,3 \cdot 10^{-10}$
V. D. 6° 1309 A	(11 000)	$3,9 \cdot 10^{-10}$
Корма A	1100	$3,9 \cdot 10^{-11}$
Бетельгейзе	(300)	$1,1 \cdot 10^{-11}$
Капелла A	48	$1,7 \cdot 10^{-12}$
Сириус A	29	$1,0 \cdot 10^{-12}$
Солнце	1,90	$6,6 \cdot 10^{-14}$
α Центавра B	0,90	$3,2 \cdot 10^{-14}$
60 Крюгер B	0,02	$7,0 \cdot 10^{-16}$
<i>3H</i>	50 000	$17,1 \cdot 10^{-10}$

Следовательно, если мы не хотим, чтобы средняя скорость перехода массы вещества в излучение была выше, чем у звезды H. D. 1337 A, которая имеет наибольшее из наблюдаемых отношение светимости к массе, то нам придется отказаться от предположения о строго линейной зависимости g от t . В принципе, однако, мы вполне можем себе представить, что большая скорость перехода межгалактического вещества в излучении связана с возникновением космических лучей.

Интересно отметить также следующее обстоятельство: если $g(t)$ не может быть строго линейной функцией t , то согласно (182.9) относительное красное смещение $\delta\lambda/\lambda$ тоже не может быть строго линейной функцией координатного расстояния \bar{r} до туманности.

Полезно отдавать себе отчет, что все вышеизложенные аргументы приводят к усложнению исходного деситтеровского интервала в пустой модели, который давал достаточно хорошее описание явлений в реальной Вселенной. Чтобы увидеть это, достаточно вспомнить, что, как было указано в предыдущем параграфе, деситтеровский интервал (142.10) является частным случаем используемого сейчас интервала (182.1) и получается, если положить $1/R_0^2$ равной нулю, а $g(t)$ — в точности равной $2Ht$. Однако если считать $g(t)$ линейной функцией, то, согласно последнему столбцу таблицы VI, скорость уменьшения вещества, которое существует реально, должна быть очень большой, несмотря на то что в первом приближении мы использовали пустую модель.

Показав, что l и m не следует считать в точности равными нулю, поскольку в противном случае нам пришлось бы до-

пустить слишком большую скорость убывания количества вещества, мы можем вернуться снова к (184.2) и посмотреть, какими должны быть l и m , чтобы скорость преобразования материи была достаточно мала и соответствовала реальным процессам. Можно довольно уверенно утверждать, что плотность излучения во Вселенной едва ли может быть большего порядка, чем плотность вещества; поэтому, если, как видно из (184.2), придать l и m достаточно большие значения, так чтобы можно было положить

$$4l + \frac{6m}{H} \approx 8\rho_m, \quad (184.5)$$

то можно добиться уменьшения скорости превращения вплоть до нуля:

$$-\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} = 0.$$

Однако, вспоминая (183.1), мы вряд ли можем решиться приписать $8\rho_m$ значение, превосходящее более чем в тысячу раз наблюдаемый минимум, соответствующий массе туманностей. При этом в качестве верхней границы, совместимой в пределах наблюдаемой точности с линейной зависимостью красного смещения от расстояния, можно будет принять

$$4l + \frac{6m}{H} \approx 1,7 \cdot 10^{-18}, \quad (184.6)$$

откуда согласно (183.14) следует:

$$4l \leq 2 \cdot 10^{-18}, \quad (184.7)$$

$$\frac{6m}{H} \leq 5,5 \cdot 10^{-17}. \quad (184.8)$$

Отсюда видно, что можно удовлетворить приближенному равенству (184.6) и получить достаточно малую, совпадающую с эмпирической, скорость перехода вещества в излучение, не вступая при этом в противоречие с уже установленными фактами. Нечего и говорить, что более точная информация относительно величин l и m была бы очень желательна.

§ 185. Соответствие между моделью и реальной Вселенной

Этим завершается вывод различных соотношений, необходимых для сравнения свойств нестатических однородных моделей с реальной Вселенной, и теперь мы можем приступить к их общему сопоставлению. Прежде всего следует сказать, что явных несоответствий между моделью и реальностью нет, а те отдельные сравнения, которые мы можем делать, позволяют считать

модель достаточно хорошей для описания реальной Вселенной, по крайней мере, в области до 10^8 световых лет.

Чтобы провести сопоставление, запишем интервал модели в наиболее удобном для нас виде:

$$ds^2 = -e^{2(Ht+lt^2+mt^3+\dots)} \left(\frac{d\bar{r}^2}{1-\bar{r}^2/R_0^2} + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) + dt^2, \quad (185.1)$$

где $g(t)$ представлена рядом Тейлора около текущего момента $t=0$, а наше местонахождение принимается за начало отсчета, т. е. $\bar{r}=0$. Далее, приняв за единицы измерения времени и расстояния соответственно год и световой год, мы (в соответствии со (183.14)) можем, с целью изучить согласие с наблюдениями, приписать различным постоянным следующие числовые значения:

$$\begin{aligned} H &= 5,71 \cdot 10^{-10} \text{ (лет)}^{-1}, \\ -5 \cdot 10^{-19} &< l < 5 \cdot 10^{-19} \text{ (лет)}^{-2}, \\ -5,3 \cdot 10^{-27} &< m < 5,2 \cdot 10^{-27} \text{ (лет)}^{-3}, \\ -1 \cdot 10^{-18} &< \frac{1}{R_0^2} < 2,1 \cdot 10^{-18} \text{ (лет)}^{-2}, \\ -2 \cdot 10^{-18} &< \Lambda < 5,7 \cdot 10^{-18} \text{ (лет)}^{-2}. \end{aligned} \quad (185.2)$$

Первое достоинство модели состоит в том, что она явно пространственно однородна и изотропна. Это находится в согласии с данными наблюдений, которые не дают оснований выделять в больших масштабах в пространстве какое-либо направление или приписывать какую-либо выделенную роль нашему местонахождению во Вселенной. Однако, как будет указано в следующем параграфе, более детальное исследование Вселенной может заставить нас отказаться от однородности и перейти к изучению неоднородных моделей.

Второе достоинство модели состоит в том, что она дает хорошее согласие с результатами Хаббла относительно связи между вычисленными астрономическими расстояниями до туманностей и их видимыми диаметрами и наблюдаемыми плотностями распределения. Чтобы показать это, возьмем соотношение между координатой туманности \bar{r} в модели и вычисленным, согласно Хабблу и Хьюмасону, расстоянием d до нее:

$$\bar{r} = d \sqrt{\lambda/(\lambda + \delta\lambda)}, \quad (185.3)$$

где $\delta\lambda/\lambda$ — наблюдаемое красное смещение света рассматриваемой туманности; кроме того, приведем ниже теоретические выражения для наблюдаемого диаметра $\delta\theta$ на заданном расстоянии и для числа туманностей N внутри сферы с радиусом, рав-

ным этому расстоянию, и эмпирические зависимости для тех же величин, полученные Хабблом при обработке данных наблюдений (слева — теоретические результаты, справа — эмпирические):

$$\delta\theta = \frac{\text{const}}{\bar{r}} \left(\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} \right), \quad \delta\theta = \frac{\text{const}}{d}, \quad (185.4)$$

$$N = \text{const} \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{r}^2 d\bar{r}}{\sqrt{1 - \bar{r}^2/R_0^2}}, \quad N = \text{const} \cdot d^3. \quad (185.5)$$

Поскольку $\delta\lambda/\lambda$ и \bar{r}^2/R_0^2 малы даже для туманностей, находящихся на расстоянии 10^8 световых лет, и не превышают ошибок наблюдений, то в пределах этих ошибок можно считать, что согласие между теорией и экспериментом вполне удовлетворительно.

Третье очень важное достоинство модели состоит в том, что она объясняет красное смещение света далеких галактик совершенно естественным образом, приписывая его взаимному разбеганию туманностей. Теория дает для красного смещения величину

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = H\bar{r} - \bar{t}\bar{r}^2 + \left(\frac{H}{6R_0^2} + \frac{1}{3}Hl + m \right) \bar{r}^3 + \dots \quad (185.6)$$

Из наблюдений же Хаббла и Хьюмасона вытекает:

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = Hd. \quad (185.7)$$

Как следует из § 182, интервал возможных числовых значений (185.2) для коэффициентов более высокого порядка таков, что в пределах точности эмпирической формулы оба эти выражения совпадают друг с другом.

Четвертым результатом в этой модели будет следствие из (185.6), что относительное красное смещение для любой туманности не должно зависеть от длины волны. Это согласуется с данными, приведенными в конце § 177, г.

Пятое свойство модели — необходимость присутствия в ней вещества. Числовые границы, приведенные в (185.2), таковы, что плотность вещества в модели не может быть меньше, чем 10^{-30} г/см³, что соответствует плотности, получающейся при усреднении вещества галактик по всему пространству, и, с другой стороны, полная плотность материи и излучения не более чем в 1000 раз превышает эту величину. Давление же при этом во всяком случае не отрицательно.

Шестой вывод состоит в том, что, как было показано, численные границы, допускаемые в (185.2), таковы, что скорости

перехода вещества в излучение, если это понадобится для объяснения других наблюдений, можно приписать любое значение, от нуля до значений больших, чем это известно для звезд с наибольшим отношением светимости к массе. При этом ее можно уточнять по мере поступления новых данных. Таким образом, модель допускает наличие потоков излучения от звезд, может при необходимости быть нестатической и не требует, чтобы величина потоков принимала слишком большое значение.

Кроме перечисленных выше прямых связей между моделью и реальном миром, не следует упускать из виду, что основой для модели послужила релятивистская теория тяготения, которая в областях меньших, чем рассматриваемые нами сейчас, уже сама по себе получила превосходное подтверждение. Более того, следует еще раз подчеркнуть, что из этой теории вытекает невозможность построить устойчивую статическую Вселенную, так что мы всегда должны ожидать либо красного, либо фиолетового смещения света от удаленных объектов.

Все вышесказанное дает основание предполагать, что хорошее соответствие между свойствами модели и реального мира и отсутствие каких-либо явных противоречий между ними позволяет с достаточным доверием относиться к возможности разумной теоретической интерпретации явлений в реальной Вселенной при помощи нашей модели.

Можно высказать и несколько пожеланий относительно будущих наблюдений.

Прежде всего, было бы очень хорошо проверить однородность в больших масштабах на еще больших расстояниях. Обнаружение значительного различия между ближайшими и далекими частями Вселенной или между северным и южным полушариями по отношению к плотности распределения туманностей или зависимости красного смещения от расстояния имело бы далеко идущие последствия, поскольку этот эмпирический факт потребовал бы перехода к неоднородным моделям.

Проверка точного теоретического соотношения (180.5) между видимыми диаметрами и светимостями

$$\frac{\delta\theta}{\sqrt{l}} = \text{const} \left(\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} \right)^2 \quad (185.8)$$

была бы хорошим подтверждением гипотезы о разбегании туманностей, так как такая связь не обязательно будет справедливой при других объяснениях красного смещения.

Эта проверка, конечно, довольно сложна из-за трудностей измерения диаметров.

Подобным же образом соотношение между светимостью и числом туманностей, которое задается с помощью двух

уравнений (178.11) и (181.2):

$$\bar{r} = \frac{\text{const}}{\sqrt{\bar{t}}} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta\lambda} \right), \quad (185.9)$$

$$N = \text{const} \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{r}^2 d\bar{r}}{\sqrt{1 - \bar{r}^2/R_0^2}}, \quad (185.10)$$

дает хороший способ проверки и теории разбегания, и гипотезы однородного распределения. Конечно, все проверки сильно осложняются при переходе ко все более отдаленным областям Вселенной, ибо, во-первых, может начать проявляться эффект поглощения в промежуточной области и, во-вторых, может оказаться несправедливым предположение о неизменности свойств туманностей в течение всего интересующего нас времени. Поэтому главным результатом такой проверки может оказаться оценка реальности такого рода эффектов.

Существенно также более подробно исследовать зависимость красного смещения от расстояния. В настоящее время мы даже не знаем знака следующего члена ряда в разложении функции $\delta\lambda/\lambda$ по степеням \bar{r} и поэтому ничего не можем сказать о том, возрастает ли скорость взаимного разбегания туманностей со временем или уменьшается. Возможно, что ответить на этот вопрос удастся с помощью строящегося сейчас двухсотдюймового рефлектора *).

Очень важно было бы обнаружить еще какие-либо другие виды вещества, кроме того, которое непосредственно видно в форме туманностей. Как уже указывалось, присутствие межгалактического газа иногда можно обнаружить по имеющемуся поглощению. Кроме того, может быть, скоро удастся получить больше сведений относительно источника и природы космических лучей. При наличии более полной информации о межгалактическом веществе можно будет значительно сузить пределы возможных значений $1/R_0^2$ и Λ .

По-видимому, на некоторые из этих вопросов и на многие другие, пока еще не столь четко поставленные, в ближайшем будущем мы получим более исчерпывающие ответы. Но прежде всего наблюдения, а не гипотезы должны определить окончательную структуру нашей космологической теории.

Добавления редактора. Астрономические наблюдения в последние годы дали очень много материала. Открытие квазаров, пульсаров (нейтронных звезд), поиски черных дыр (возможно, что рентгеновский источник X-1 в Лебедь и есть такая «дыра») дают новый материал для обсуждения космических моделей.

*) Этот вопрос так и остается пока без ответа. (Прим. ред.)

Наиболее важные данные получены о расстояниях до далеких галактик и о реликтовом излучении.

Для того чтобы оценить возможности современной астрономии, отметим, что в 1973 г. открыт квазар, удаляющийся со скоростью $v/c \approx 0,94$ (т. е. измерено красное смещение $z = (\lambda - \lambda_0) = 3,4$).

Расстояния до далеких астрономических объектов много раз подвергались критическому пересмотру. В результате для постоянной Хаббла принимаются все меньшие значения. Разные авторы дают значения от 50 до 100 км/сек·Мпс. Наименьшее значение дает Вокулер [133]: 50 км/сек·Мпс, наибольшее — Ван дер Берг [134]: 95 ± 15 км/сек·Мпс. Это отвечает «возрасту» $1,3 \div 2,0 \cdot 10^{10}$ лет.

Отклонение от линейного закона Хаббла принято характеризовать параметром q_0 , который связан со значением приведенной плотности

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho = \frac{\rho}{\rho_{кр}}$$

формулой

$$q_0 = \frac{1}{2} \Omega - \frac{1}{3} \frac{\Lambda}{H^2}.$$

Если считать $\Lambda = 0$, то анализ Сэндеджа [135] дает $q_0 = 1,03^{+0,43}_{-0,26}$. Разные оцен-

ки дают q_0 в интервале от 0,7 до 1,5. Напомним, что $q_0 = 1/2$ отвечает плоскому расширяющемуся миру, $q_0 > 1/2$ отвечает закрытому миру, $q_0 < 1/2$ — открытому.

С другой стороны, оценки плотности вещества во Вселенной не дают столь большого значения Ω . Считалось, что Галактики дают вклад $\rho = 3 \cdot 10^{31}$ г/см³. Однако Я. Эйнесто в 1974 г. из анализа движения спутников Галактик получил $\rho \geq 1,5 \cdot 10^{-30}$ г/см³ и $\Omega \sim 0,3$ (при $H = 50$ км/сек·Мпс). Кажется вероятным, что $\Omega \sim 1$.

Наиболее важным новым фактом является открытое реликтовое излучение — равновесное излучение, отвечающее температуре 2,7°К, и плотности 0,25 эв/см³ ($\Omega = 3 \cdot 10^{-5}$), что соответствует примерно 400 фотонам в 1 см³. Существование весьма изотропного излучения служит серьезным аргументом в пользу изотропной модели и ее расширения.

Отметим еще один эффект, связанный с этим излучением.

Реликтовое излучение благодаря его изотропии определяет в пространстве «абсолютную» инерционную систему координат (систему координат, в которой оно изотропно). Спектр реликтового излучения должен смещаться из-за суммарного движения: Земли вокруг Солнца, Солнца вокруг центра Галактики и самой Галактики. Это смещение должно обнаруживать 24-часовой период, за время которого наблюдатель проходит все направления в пространстве [136]. Такой период наблюдался Конклином [137], который оценил скорость движения Земли относительно реликтового излучения в 160 км/сек, что примерно в 5 раз больше, чем скорость движения Земли вокруг Солнца. Если более точные измерения подтвердят эти данные, то мы получаем очень полезную систему координат, фиксированную в процессе эволюции Вселенной.

§ 186. Несколько общих замечаний относительно космологических моделей

В этом параграфе мы сделаем несколько общих замечаний относительно однородности, пространственной кривизны и эволюции космологических моделей. В предыдущем параграфе мы указывали на ряд соответствий между наблюдаемыми явления-

ми и свойствами модели, построенной последовательным образом на принципах релятивистской механики. В этом параграфе мы, наоборот, столкнемся с недостаточностью имеющейся информации для однозначного определения всех тех характеристик, которые необходимы для построения разумной космологической картины.

а) **Однородность.** Прежде всего рассмотрим доводы и пользу пространственной изотропности и, следовательно, как было показано в § 148, в пользу пространственной однородности космологических моделей. Наиболее убедительное соображение состоит в том, что в результате этих предположений мы получаем математически хорошо определенные и разрешимые модели. Но главный довод состоит в том, что реальная Вселенная в больших масштабах действительно является в высокой степени однородной.

С другой стороны, с точки зрения малых масштабов туманности имеют явную тенденцию собираться в скопления. Следовательно, во всяком случае тонкие детали космической эволюции не могут быть охвачены однородной моделью. Так, например, можно думать, что нижнее сингулярное состояние с точно нулевым радиусом, возникающее при осцилляторном поведении, свойственно только определенному классу однородных моделей и не является обязательным для осцилляторного расширения и сжатия всей реальной Вселенной или ее частей.

Более того, даже с точки зрения больших масштабов мы, очевидно, ничего не можем сказать относительно условий в реальной Вселенной на расстояниях, больших чем 10^8 световых лет. Поэтому очень возможно, что за пределами видимости современных телескопов могут иметь место совершенно другие плотности распределения и даже может происходить сжатие вместо расширения.

С этой точки зрения было бы очень важно установить, какие силы контролируют поведение и взаимодействие различных частей Вселенной. Может оказаться, что этих сил недостаточно, чтобы установить однородное распределение повсюду. Это мнение высказывалось также и профессором Цвики в беседе с автором.

Хотя использование однородных моделей и следует считать, благодаря их математической простоте, правильным для получения первого приближения, эти модели не пригодны для исследования более тонких деталей и должны будут, вероятно, подвергнуться коренным изменениям, когда будут получены сведения о более удаленных частях Вселенной [130].

б) **Пространственная кривизна.** Считая, что однородная модель является удовлетворительным первым приближением к реальному миру, мы тем не менее, как видно из (185.2), ничего

не можем сказать относительно значения $1/R_0^2$: оно может быть как положительным, так и отрицательным и нулем. Имеющиеся данные наблюдений достаточно разнообразны, т. е. у нас нет достаточно информации, чтобы отдать предпочтение одному из трех вариантов модели: закрытой, пространственно плоской или открытой искривленной.

Даже если мы введем искусственное, но разумное предположение, что космологическая постоянная Λ равна нулю, все равно знак $1/R_0^2$ не может быть идентифицирован определенным образом. Предполагая, что $\Lambda=0$, можно выражение для плотности записать в следующем виде:

$$8\pi\rho_0 = \frac{3}{R_0^2} + 3H^2. \quad (186.1)$$

Выше нам представлялось необходимым ограничить область возможных значений $8\pi\rho_0$ диапазоном от $1,7 \cdot 10^{-21}$ до $1,7 \cdot 10^{-13}$. Поскольку $3H^2$ имеет приближенное значение $1 \cdot 10^{-18}$, то отсюда вытекает интересное следствие, что если полная плотность не слишком сильно превышает наблюдаемую плотность вещества, существующего в форме туманностей, то $1/R_0^2$ должно быть отрицательным, а модель — открытой.

Имеющиеся данные не противоречат и модели Эйнштейна — де Ситтера, которая рассматривалась в § 164 и получалась при $1/R_0^2$ и Λ , равных нулю. Если в модели Эйнштейна — де Ситтера приравнять нулю также и давление (уравнение (164.5)), то, как легко показать, это приведет к таким значениям \ddot{g} и \dot{g} , которые соответствуют l и m , лежащим внутри интервалов, указанных в (185.2), что согласуется с той точностью, с которой выполняется линейное соотношение между красным смещением и расстоянием.

Хотя у нас и нет достаточно информации, чтобы отдать предпочтение открытой или закрытой модели, все же в связи с этой проблемой можно сделать два замечания несколько нефизического свойства. Во-первых, может показаться убедительным, что, как утверждал, по крайней мере в частных беседах, профессор Лемэтр, гипотеза закрытой, т. е. конечной, модели — «оптимистическая» и поэтому ее следует принять, поскольку бесконечную Вселенную нельзя рассматривать во всей ее совокупности как объект, поддающийся научному исследованию. С другой стороны, однако, вся прошлая история науки не дает никакого основания надеяться, что ее поле деятельности может быть когда-либо ограничено. На самом деле целью науки всегда было стремление ко все расширяющемуся горизонту. Поэтому априорные доводы в пользу открытой модели могут казаться одинаково убедительными.

в) **Развитие во времени.** Данных наблюдений, подытоженных в (185.2), недостаточно также и для того, чтобы можно было решить, какого типа эволюцию следует приписать модели в течение длительных периодов времени. Конечно, мы можем с некоторой уверенностью утверждать, что находящаяся в непосредственной близости к нам часть Вселенной испытывает в настоящее время расширение. До тех пор, однако, пока мы ничего не знаем относительно знака второй производной красного смещения как функции координат, мы не сможем сказать, является ли скорость расширения возрастающей со временем, как было бы в случае модели, переходящей в конце концов в пустое пространство де Ситтера, или же скорость убывает со временем, как было бы в случае осциллирующей модели.

Действительно, если, например, принять давление в модели равным нулю, то возможны три абсолютно разные варианта — такие, что эволюция в настоящий момент не будет противоречить ни границам, установленным для плотности материи, ни, в пределах ошибок, линейной зависимости красного смещения от расстояния. Этими тремя вариантами являются: модель Лемэтра (161.11) с $\Lambda = \Lambda_E$ и $R_0^2 > 0$ (она расширяется от первоначально статического состояния); эйнштейновская модель (163.3) с $\Lambda = 0$ и $R_0^2 > 0$ (она осциллирует между нижним сингулярным состоянием и максимумом) и модель Эйнштейна — де Ситтера (164.6) с $\Lambda = 0$, $R_0^2 = \infty$ (она расширяется все время, начиная от сингулярного состояния). Итак, мы не можем отдать предпочтение ни одному из вариантов, рассмотренных во второй части этой главы, и должны примириться с тем, что все, чем мы до сих пор занимались, — это только исследование разных мыслимых возможностей, которые могут и не отвечать реальности.

В § 163 и § 164 мы показали, что для двух случаев: модели Эйнштейна и модели Эйнштейна — де Ситтера — время расширения, протекшее с момента выхода из сингулярного состояния, невелико. Оно определяется следующим образом:

$$\Delta t \leq \frac{4}{3g},$$

или через коэффициенты ряда Тейлора:

$$\Delta t \leq \frac{2}{3H}. \quad (186.2)$$

Поэтому для этих моделей период, прошедший со времени выхода из сингулярного состояния, не может значительно превышать возраст Земли, т. е. порядка 10^9 лет. Далее, из известной величины красного смещения и его приблизительной линейности вытекает, что вообще, грубо говоря, основная часть расширения

произошла за 10^9 — 10^{10} лет. Так как обычно для звездной эволюции принимают гораздо больший промежуток времени — порядка 10^{12} лет, то необходимо проанализировать вопрос о том, можно ли для космического расширения принять такой короткий промежуток времени или нет.

По поводу видимых трудностей, связанных с временными масштабами*), нужно, прежде всего, сказать, что рассмотренные нами однородные модели являются слишком сильно идеализированными, чтобы можно было рассчитывать с их помощью получить какую-либо адекватную информацию относительно конкретного состояния реальной Вселенной, скажем, 10^9 лет тому назад. Так что, как уже указывалось раньше в этом параграфе, следует считать, что выделенное сингулярное состояние с малым объемом, откуда в некоторых моделях начинается расширение, скорее является свойством, обусловленным однородностью моделей, нежели присуще самой реальной Вселенной. Более того, так как мы ничего не знаем о поведении Вселенной за пределами нашего ближайшего окружения с радиусом 10^8 световых лет, то, очевидно, никакая модель не поможет определить момент времени, когда началось расширение реальной Вселенной, достаточно точно. Мы можем только грубо оценить, что длительность расширения ближайшей к нам области может быть порядка 10^9 — 10^{10} лет.

Во-вторых, следует подчеркнуть, как указывал, например, де Ситтер [131], что момент начала расширения никоим образом не следует рассматривать как момент рождения Вселенной, и нет никаких причин ожидать, что длительность звездной эволюции и длительность расширения должны совпадать. Действительно, согласно де Ситтеру, неоднородная структура туманностей, их высокая скорость вращения и примерная дата рождения нашей собственной планетной системы являются звеньями одной цепи, свидетельствующими о близком расположении туманностей или галактик 10^9 — 10^{10} лет тому назад.

Сильное отличие времени звездной эволюции от времени расширения Вселенной означает только, что мы ничего не можем сказать относительно возникновения физической Вселенной. На самом деле очень трудно отрешиться от чувства, что для событий во Вселенной лучше всего взять временной интервал от минус бесконечности в прошлом до плюс бесконечности в будущем.

*) Не следует думать, будто расхождение временных масштабов можно устранить каким-либо трюком, типа введения новой времениподобной переменной вместо рассматриваемой координаты t . Из § 149, г вытекает, что координата t согласуется сама по себе с измерением времени по обычным часам, покоящимся в нашей собственной Галактике, и поэтому с ее помощью одинаково удобно и оценивать звездную эволюцию, и регистрировать приближения или удаления других туманностей.

Аргументы классической термодинамики против такой точки зрения должны подвергнуться, конечно, некоторым изменениям, поскольку релятивистская термодинамика открывает перед нами гораздо большее число типов поведения. Эти изменения будут еще более серьезными, если, как это подозревает Бор, в недрах звезд нарушается закон сохранения энергии *).

§ 187. Наша окрестность как образ Вселенной в целом

Из всего вышесказанного вытекает, что имеющихся в нашем распоряжении данных недостаточно для построения точной космологической модели, хорошо отражающей реальную Вселенную во всем пространстве и во все времена. Поэтому лучше всего считать, что интервал, который мы выбрали для исследования поведения Вселенной:

$$ds^2 = -e^{2(Ht + lt^2 + mt^3 + \dots)} \left(\frac{d\bar{r}^2}{1 - \bar{r}^2/R_0^2} + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) + dt^2, \quad (187.1)$$

является только первым приближением, пригодным для изучения событий, не очень удаленных от нас в пространстве и от текущего момента во времени.

Тогда мы сможем заключить, что расширение Вселенной, о котором мы знаем точно, что оно есть в настоящее время и вблизи нас, является тем процессом, который уже происходил в течение 10^8 лет в прошлом и будет, по-видимому, продолжаться примерно столько же времени в будущем. Более того, мы можем достаточно уверенно утверждать, что плотность распределения туманностей и скорость расширения не меняются и на расстояниях в несколько раз больших, чем изученные до сих пор 10^8 световых лет. Все же у нас нет хорошей модели для описания Вселенной в целом, и чтобы получить о ней какое-нибудь представление, мы можем опереться лишь на грубую экстраполяцию. Для этого мы, прежде всего, должны рассматривать ближайшую к нам часть Вселенной как достаточно хороший, хотя и не точный образец всех остальных частей во все времена и в любом месте.

Обнаружив, что распределение туманностей расширяется всюду в пределах видимости наших телескопов, мы можем считать, что взаимное движение материи является типичной чертой Вселенной. Тем не менее приписывать материи всюду ту же самую плотность и ту же стадию эволюции, что и в нашем собственном окружении, и исключать для всех времен и всех мест

*) Такая гипотеза была отброшена почти сразу после ее возникновения. (Прим. ред.)

всякую возможность движения в направлении сжатия, которое механически так же просто, как и расширение, — значит считать наше окружение на современном этапе не только хорошим образцом, но и, что совершенно не оправдано, точной копией Вселенной в целом.

Может показаться, что в том, как мы заканчиваем наше довольно сложное исследование свойств и эволюции различных космологических моделей, умаляя их применимость к реальному миру, содержится некоторая доля иронии. Нужно, однако, сказать, что изучение моделей все же принесло нам пользу, так как обогатило нас знаниями относительно мыслимых возможностей и дало нам приближенную теорию, которая уже сейчас довольно успешно связала между собой многие явления реального мира.

В заключение хотелось бы отметить, что в космологии нужно быть очень внимательным, чтобы не пойти по пути авантюристического образа мышления и не позволить себе удовольствия приписывать природе желаемое вместо действительного.

Прежде всего, проблемы космологии обширны и запутаны и к ним приходится подходить с очень скудной информацией. Поэтому нужно быть очень осторожным, чтобы привлекательные результаты некоторых простых математических моделей не заслонили больших сложностей реального мира. Во-вторых, очевидно, что прошлая история Вселенной и будущая судьба человека тесно связаны с изучаемыми нами проблемами. Поэтому нужно следить за тем, чтобы наши суждения не были заражены теологическими воззрениями и не были подвержены влиянию человеческих страхов и надежд. Открытие моделей, начинающих расширяться от сингулярного состояния с нулевым объемом, нельзя выдавать за доказательство того, что наша Вселенная была создана в какое-то определенное время в прошлом. Точно так же открытие моделей, которые могут расширяться и сжиматься необратимым образом, никогда не достигая окончательного состояния с максимальной энтропией и вечным покоем, нельзя выдавать за доказательство того, что реальная Вселенная всегда будет представлять собою сцену для будущей деятельности человека.

К проблемам космологии следует относиться с чувством уважения к их большому значению, с чувством благоговения перед их обширностью и восхищения перед человеческим разумом, пытающимся разрешить их. Однако решать их нужно только кропотливыми критическими и беспристрастными методами ученого.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Нижний индекс $_0$ и верхний индекс 0 , присоединенные к символу, обычно обозначают собственную величину, определяемую по измерениям локального наблюдателя. (Исключенне представляет только R_0 в выражении $R = R_0 e^{1/2 \int g(t) dt}$.)

Скалярные величины (светлый шрифт)

- a Постоянная Стефана — Больцмана.
- A Работа. Число молекул в моле.
- c Скорость света. Концентрация.
- d Астрономическое расстояние.
- e Электрический заряд. Основание натуральных логарифмов.
- E Энергия.
- F Свободная энергия.
- $g(t), g$ Функция, определяющая зависимость интервала однородных космологических моделей от времени.
- h Постоянная Планка.
- H Постоянная Хаббла.
- i $\sqrt{-1}$.
- k Постоянная Больцмана. Ньютоновская гравитационная постоянная.
- l Светимость небесного объекта.
- m Масса. Звездная величина небесного объекта.
- n Число молей.
- N Число молекул.
- p Давление.
- Q Количество тепла.
- r Радиальная координата.
- R Газовая постоянная.
- $R_0 e^{1/2 \int g(t) dt} := R$ Радиус космологической модели.
- S Энтропия.
- t Время.
- T Температура.
- u Скорость. Плотность излучения.
- U Энергия.
- v Объем. Скорость.
- δv_0 Элемент собственного пространственного объема.
- V Относительная скорость координатных осей.
- x, y, z Пространственные координаты.
- α Степень диссоциации.

- ϵ Диэлектрическая постоянная.
 η Интегрирующий множитель.
 θ, φ, χ Полярные координаты.
 $\delta\theta$ Видимый диаметр туманности.
 k Гравитационная постоянная, связывающая тензор энергии — импульса со свернутым тензором Римана — Кристоффеля.
 λ Длина волны.
 Λ Космологическая постоянная.
 μ Магнитная проницаемость.
 ν Частота.
 ρ Плотность.
 ρ_{00} Собственная макроскопическая плотность энергии.
 ρ_0 Собственная плотность электрического заряда.
 σ Электрическая проводимость.
 τ Период.
 φ Скалярный потенциал. Плотность энтропии.
 Φ Термодинамический потенциал.
 ψ Ньютоновский гравитационный потенциал.

Векторные величины (жирный шрифт)

- A** Векторный потенциал.
B Магнитная индукция.
C Плотность тока проводимости.
D Электрическая индукция.
E Напряженность электрического поля.
F Сила.
f Сила, действующая на единицу объема.
g Плотность импульса.
G Полный импульс.
H Напряженность магнитного поля.
J Плотность тока.
M Момент количества движения. Намагниченность.
P Электрическая поляризация.
s Плотность потока энергии.
u Скорость.

Тензоры (светлый шрифт с индексами)

Латинские индексы i, j, k принимают значения 1, 2, 3. Греческие индексы $\alpha, \beta, \dots, \mu, \nu, \dots$ принимают значения 1, 2, 3, 4.

- ds Инвариантный интервал.
 $\delta_{\mu\nu}$ Галилеев метрический тензор.
 F^{μ} Сила Минковского.
 $F^{\mu\nu}$ Микроскопический электромагнитный тензор.
 $F^{\mu\nu}, H^{\mu\nu}$ Макроскопические электромагнитные тензоры.
 $g_{\mu\nu}$ Фундаментальный метрический тензор.
 g Детерминант $|g_{\mu\nu}|$.
 $h_{\mu\nu}$ Отклонение $g_{\mu\nu}$ от галилеевых значений $\delta_{\mu\nu}$.
 J^{μ} Обобщенный ток. Компоненты импульса и энергии.
 P_{ij} Компоненты (абсолютного) натяжения.
 $R^{\tau}_{\mu\nu\sigma}$ Тензор Римана — Кристоффеля.
 $R_{\mu\nu}$ Свернутый тензор Римана — Кристоффеля.
 R Инвариантная кривизна.
 t_{ij} Компоненты (относительного) натяжения.
 $T^{\mu\nu}$ Тензор энергии — импульса.

Тензорные плотности (готический шрифт)

$\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ Плотность тензора электромагнитного поля.

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \sqrt{-g}.$$

$$\mathfrak{g}_{\alpha}^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (g^{\mu\nu} \sqrt{-g}).$$

\mathfrak{S}^{μ} Плотность вектора потока.

\mathfrak{L} Функция Лагранжа (псевдоскаляр).

\mathfrak{t}_{μ}^{ν} Плотность псевдотензора гравитационной энергии — импульса.

\mathfrak{E}_{μ}^{ν} Плотность тензора энергии — импульса материальной среды.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Единичные векторы, параллельные осям i, j, k . (1)

Единичный вектор нормали к поверхности π . (2)

Разложение вектора по компонентам:

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}. \quad (3)$$

Скалярное произведение векторов:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB \cos(\widehat{AB}). \quad (4)$$

Векторное произведение векторов:

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k}. \quad (5)$$

Нормальная компонента вектора:

$$A_n = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) = A \cos(\widehat{An}). \quad (6)$$

Векторный оператор дифференцирования:

$$\nabla = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (7)$$

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (8)$$

$$\text{div } \mathbf{A} = (\nabla \mathbf{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (9)$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = [\nabla \cdot \mathbf{A}] = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (10)$$

$$\text{div rot } \mathbf{A} = 0. \quad (11)$$

Лапласиан:

$$\Delta^2 = \nabla \nabla = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right). \quad (12)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{F} = \text{grad div } \mathbf{F} - \nabla^2 \mathbf{F}. \quad (13)$$

Теорема Гаусса:

$$\int_v (\nabla \cdot \mathbf{A}) dv = \int_S A_n d\sigma.$$

$$\int_v \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dv = \int_S \{ A_x \cos(nx) + A_y \cos(ny) + A_z \cos(nz) \} d\sigma. \quad (14)$$

Теорема Стокса:

$$\int_l \mathbf{A} \cdot ds = \int_s (\text{rot } \mathbf{A})_n d\sigma. \quad (15)$$

Формула Грина:

$$\int_v (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dv = \int_s (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi)_n d\sigma. \quad (16)$$

Еще одна интегральная формула:

$$\int_v (\mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A}) dv = - \int_s [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_n d\sigma. \quad (17)$$

Оператор Даламбера:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right). \quad (18)$$

Решение волнового уравнения:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = \omega, \quad \psi(x, y, z, t) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{[\omega]}{r} dv, \quad (19)$$

где $[\omega]$ — значение ω в той же точке, что и dv , и в момент времени $(t - r/c)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ III

НЕСКОЛЬКО ФОРМУЛ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

а) *Общие обозначения.*

Индексы $\alpha, \beta, \dots, \mu, \nu, \dots$ принимают значения 1, 2, 3, 4.

Нижние индексы — ковариантные, верхние индексы — контравариантные.

Координатные системы:

$$x^\mu = x^1, x^2, x^3, x^4, \quad x'^\mu = x'^1, x'^2, x'^3, x'^4 \text{ и т. п.}, \quad (2)$$

где

$$x'^\mu = x'^\mu(x^1, x^2, x^3, x^4).$$

Правило суммирования по немым индексам:

$$A^\alpha B_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=4} A^\alpha B_\alpha = A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 + A^4 B_4, \quad (3)$$

$$A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=4} \sum_{\beta=1}^{\beta=4} A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} = A^{11} B_{11} + A^{12} B_{12} + \dots + A^{44} B_{44}$$

и т. д. Один из двух немых индексов всегда ковариантен, а другой всегда контр-авариантен.

Определение тензора.

Множество 4^r компонент (ранг r равен полному числу индексов $\alpha, \beta, \dots, \mu, \nu, \dots$ и т. д.), которые определены в данной точке x^μ многообразия и при преобразовании координат преобразуются следующим образом:

$$T'_{\rho\sigma\dots}{}^{\mu\nu\dots} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\sigma} \dots T_{\gamma\delta\dots}{}^{\alpha\beta\dots} \quad (4)$$

Примеры

Тензор нулевого ранга (скалярный инвариант):

$$S' = S. \quad (5)$$

Контравариантный тензор первого ранга (вектор):

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} A^\alpha. \quad (6)$$

Ковариантный тензор первого ранга:

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} A_\alpha. \quad (7)$$

Смешанный тензор второго ранга:

$$T'^\nu{}_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} T^\alpha{}_\beta. \quad (8)$$

Симметричный тензор:

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \quad (9)$$

Антисимметричный тензор:

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}. \quad (10)$$

б) Фундаментальный метрический тензор и его свойства.

Метрический тензор:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}. \quad (11)$$

Бесконечно малое приращение координат:

$$dx^\mu = dx^1, dx^2, dx^3, dx^4. \quad (12)$$

Скалярный интервал ds , соответствующий dx^μ :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (13)$$

Детерминант, образованный из компонент $g_{\mu\nu}$:

$$g = |g_{\mu\nu}|. \quad (14)$$

Нормированный мипор:

$$g^{\mu\nu} = \frac{|g_{\mu\nu}|_{\text{minor}}}{g}. \quad (15)$$

Смешанный тензор:

$$g_{\mu}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu, \\ 0, & \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (16)$$

Галилеев тензор $g_{\mu\nu}$:

$$\delta_{\mu\nu} = \pm 1, 0. \quad (17)$$

Символы Кристоффеля:

$$[\mu\nu, \sigma] = \Gamma_{\mu\nu, \sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \right), \quad (18)$$

$$\{\mu\nu, \sigma\} = \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} \right).$$

Тензор Римана — Кристоффеля:

$$R_{\mu\nu\sigma}^{\tau} = \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\tau} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\tau} + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\mu\sigma}^{\tau} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \Gamma_{\mu\nu}^{\tau}. \quad (19)$$

Уравнение геодезической:

$$\delta \int ds = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2 x^{\sigma}}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} = 0. \quad (20)$$

в) *Тензорная алгебра.*

Поднимание, опускание и переименование индексов (примеры):

$$A^{\nu} = g^{\nu\alpha} A_{\alpha}, \quad (21)$$

$$A_{\mu} = g_{\mu\alpha} A^{\alpha}, \quad (22)$$

$$A^{\nu} = g_{\alpha}^{\nu} A^{\alpha}. \quad (23)$$

Свертка (примеры):

$$T = T_{\nu}^{\nu} = g_{\nu\alpha} T^{\nu\alpha} = T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 + T_4^4, \quad (24)$$

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}. \quad (25)$$

Сложение (примеры):

$$A_{\mu} = B_{\mu} + C_{\mu} = (B_1 + C_1), (B_2 + C_2), (B_3 + C_3), (B_4 + C_4). \quad (26)$$

Прямое произведение (примеры):

$$A_{\mu}^{\nu} = B_{\mu} C^{\nu} = \begin{pmatrix} B_1 C^1 & B_1 C^2 & B_1 C^3 & B_1 C^4 \\ B_2 C^1 & B_2 C^2 & B_2 C^3 & B_2 C^4 \\ B_3 C^1 & B_3 C^2 & B_3 C^3 & B_3 C^4 \\ B_4 C^1 & B_4 C^2 & B_4 C^3 & B_4 C^4 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Скалярное произведение (пример):

$$A = A_{\nu}^{\nu} = B_{\nu} C^{\nu} = B_1 C^1 + B_2 C^2 + B_3 C^3 + B_4 C^4. \quad (28)$$

Ковариантное дифференцирование (примеры):

$$(A^\mu)_{;\nu} = A^\mu_{;\nu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha\nu} A^\alpha, \quad (29)$$

$$(A_\mu)_{;\nu} = A_{\mu;\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A_\alpha, \quad (30)$$

$$(T^{\mu\nu})_{;\sigma} = T^{\mu\nu}_{;\sigma} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\mu_{\alpha\sigma} T^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\sigma} T^{\mu\alpha}, \quad (31)$$

$$(T^\nu_\mu)_{;\sigma} = T^\nu_{\mu;\sigma} = \frac{\partial T^\nu_\mu}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\nu_{\alpha\sigma} T^\alpha_\mu - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} T^\nu_\alpha, \quad (32)$$

$$(T^{\dots\nu\dots})_{;\sigma} = \frac{\partial T^{\dots\nu\dots}}{\partial x^\sigma} \begin{cases} + \Gamma^\nu_{\alpha\sigma} T^{\dots\alpha\dots} & \text{для каждого контравариантного индекса} \\ - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} T^{\dots\nu\dots} & \text{для каждого ковариантного индекса.} \end{cases} \quad (33)$$

Дивергенция:

$$(T^{\dots\nu\dots})_{;\nu}. \quad (34)$$

г) Разные формулы.

$$(g_{\mu\nu})_{;\sigma} = 0. \quad (35)$$

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\nu\mu}. \quad (36)$$

$$\Gamma^\sigma_{\alpha\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ln \sqrt{-g}. \quad (37)$$

$$T^{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta} = -T_{\alpha\beta} dg^{\alpha\beta}. \quad (38)$$

$$\frac{dg}{g} = g^{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} dg^{\alpha\beta}. \quad (39)$$

$$(\varphi_\mu)_{;\nu} - (\varphi_\nu)_{;\mu} = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x^\mu}. \quad (40)$$

$$(F_{\mu\nu})_{;\sigma} + (F_{\nu\sigma})_{;\mu} + (F_{\sigma\mu})_{;\nu} = \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu}$$

при условии, что $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$. (41)

$$\varphi_{\mu\nu\sigma} - \varphi_{\mu\sigma\nu} = \varphi_\varepsilon R^\varepsilon_{\mu\nu\sigma},$$

если

$$\varphi_{\mu\nu\sigma} = ((\varphi_\mu)_{;\nu})_{;\sigma} \quad \text{и} \quad \varphi_{\mu\sigma\nu} = ((\varphi_\mu)_{;\sigma})_{;\nu}. \quad (42)$$

$$(T^{\dots\mu\dots})_{;\nu\sigma} - (T^{\dots\mu\dots})_{;\sigma\nu} = \sum T^{\dots\varepsilon\dots} R^\varepsilon_{\mu\nu\sigma}, \quad (43)$$

где суммирование \sum производится по всем возможным значениям индекса μ .

д) Тензорные плотности.

$$\mathfrak{z} = T \sqrt{-g}. \quad (44)$$

$$\mathfrak{z}_{\mu}^{\nu \dots} = T_{\mu}^{\nu \dots} \sqrt{-g}. \quad (45)$$

$$(A^{\mu})_{\mu} \sqrt{-g} = \mathfrak{U}^{\mu}_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (A^{\mu} \sqrt{-g}) = \frac{\partial \mathfrak{U}^{\mu}}{\partial x^{\mu}}. \quad (46)$$

$$(T^{\nu})_{\nu} \sqrt{-g} = \mathfrak{z}_{\mu\nu}^{\nu} = \frac{\partial \mathfrak{z}_{\mu}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{1}{2} \mathfrak{z}^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial \mathfrak{z}_{\mu}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{1}{2} \mathfrak{z}_{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} \quad (47)$$

при условии, что $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$.

$$(F^{\mu\nu})_{\nu} \sqrt{-g} = \mathfrak{F}_{\nu}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathfrak{F}^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} \quad (48)$$

при условии, что $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$.

е) Четырехмерный объем. Собственный пространственный объем.

Когда пределы интегрирования определяются заданной четырехмерной областью, имеем инвариант

$$I = \iiint \sqrt{-g'} dx'^1 dx'^2 dx'^3 dx'^4 = \iiint \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4. \quad (49)$$

Когда область достаточно мала, так что можно пользоваться обычными координатами x, y, z, t или собственными координатами x_0, y_0, z_0, t_0 , тогда

$$\delta I = \iiint dx dy dz dt = \iiint dx_0 dy_0 dz_0 dt_0 = \iiint \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4. \quad (50)$$

Поэтому можно считать, что

$$\delta I = \delta v \delta t = \delta v_0 \delta t_0 = \delta v_0 \delta s = \sqrt{-g} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 \delta x^4, \quad (51)$$

где δv и δv_0 — элементы пространственного объема, а δt и $\delta t_0 = \delta s$ — элементы обычного и собственного времени соответственно.

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

ВАЖНЕЙШИЕ КОНСТАНТЫ*)

Константа	Данные автора	Данные 1974 г.
Постоянная Стефана — Больцмана a , эрг·см ⁻³ ·град ⁻⁴	$7,6237 \cdot 10^{-15}$	$7,565 \cdot 10^{-15}$
Число Авогадро A , моль ⁻¹	$6,064_{36} \cdot 10^{23}$	$6,0220943(61) \cdot 10^{23}$
Скорость света c , см·сек ⁻¹	$2,99796 \cdot 10^{10}$	$2,99792458(1, 2) \cdot 10^{10}$
Заряд электрона e , ед. СГСЭ	$4,770 \cdot 10^{-10}$	$4,803242(14) \cdot 10^{-10}$

*) Мы приводим здесь константы автора и для сравнения последние константы по данным 1974. (Прим. ред.)

Константа	Данные автора	Данные 1974 г.
Постоянная Планка h , эрг·сек	$6,547 \cdot 10^{-27}$	$6,582173(17) \cdot 10^{-27}$
Постоянная Больцмана k , эрг·град ⁻¹	$1,3708_9 \cdot 10^{-16}$	$1,380662(44) \cdot 10^{-16}$
Гравитационная постоянная Ньютона G , k , γ , дин·см ² /г ²	$6,664 \cdot 10^{-8}$	$6,6732(31) \cdot 10^{-8}$
Удельный заряд электрона, e/m , ед. СГСЭ·г ⁻¹	$5,279_{41} \cdot 10^{17}$	$5,27275(13) \cdot 10^{17}$
Газовая постоянная R , эрг·град ⁻¹ ·моль ⁻¹	$8,3136_0 \cdot 10^7$	$8,31441(20) \cdot 10^7$

Переход от релятивистских единиц к единицам СГС:

l, t, m в релятивистских единицах.

L, T, M в единицах СГС.

$$L = l, \text{ см.}$$

$$T = \frac{1}{2,998 \cdot 10^{10}} t = 3,335 \cdot 10^{-11} t, \text{ сек.}$$

$$M = \frac{(2,998 \cdot 10^{10})^2}{6,673 \cdot 10^{-8}} m = 1,347 \cdot 10^{28} m, \text{ г.}$$

1 парсек (пс) = 3,258 светового года = $3,084 \cdot 10^{18}$ см.

1 мегапарсек (Мпс) = 10^6 пс.

1 световой год = $9,463 \cdot 10^{17}$ см.

1 звездный год = $3,1558 \cdot 10^7$ сек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jüttner, Ann. der Physik **34**, 856 (1911).
2. Tolman, Phil. Mag. **28**, 583 (1914).
3. Tolman, The Theory of the Relativity of Motion, University of California Press, 1917.
4. Miller, Science **63**, 433 (1926).
5. Miller, Rev. Mod. Phys. **5**, 203 (1933).
6. Kennedy, Proc. Nat. Acad. **12**, 621 (1926).
7. Illingworth, Phys. Rev. **30**, 692 (1927).
8. Kennedy and Tordike, Phys. Rev. **42**, 400 (1932).
9. J. Laub, Über die experimentellen Grundlagen des Relativitätsprinzips', Jahrb. der Radioaktivität u. Elektronik **7**, 405 (1910).
10. Comstock, Phys. Rev. **30**, 267 (1910).
11. De Sitter, Proc. Amsterdam Acad. **15**, 1297 (1913); там же **16**, 395 (1913).
12. Tolman, Phys. Rev. **31**, 26 (1910).
13. J. J. Thomson, Phil. Mag. **19**, 301 (1910); Stewart, Phys. Rev. **32**, 418 (1911).
14. Ritz, Ann. de Chim. et Phys. **13**, 145 (1908).
15. Tolman, Phys. Rev. **35**, 136 (1913).
16. Marjorana, Phil. Mag. **35**, 163 (1918); там же **37**, 145 (1919).
17. La Rosa, Phys. Zeits. **13**, 1129 (1912).
18. Miller, Proc. Nat. Acad. **11**, 306 (1925).
19. Tolman, Phil. Mag. **23**, 375 (1912).
20. Lewis and Tolman, Phil. Mag. **18**, 510 (1909).
21. Gerlach, Handbuch der Physik, **XXII**, Berlin, 1926.
22. Tolman, Phil. Mag. **22**, 458 (1911).
23. Tolman, Phil. Mag. **25**, 150 (1913).
24. Hupka, Ann. der Physik **31**, 169 (1910).
25. Anderson, Science **76**, 238 (1932).
26. Blackett and Occhialini, Proc. Roy. Soc. **A139**, 69 (1933).
27. Anderson and Neddermeyer, Phys. Rev. **43**, 1034 (1933).
28. Oppenheimer and Plesset, Phys. Rev. **44**, 53 (1933).
29. Oliphant, Kinsey and Rutherford, Proc. Roy. Soc. **A141**, 722 (1933). См. также Bainbridge, Phys. Rev. **44**, 123 (1933).
30. Laue, Das Relativitätsprinzip, 2 Aufl., Braunschweig, 1913.
31. Laue, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **13**, 513 (1911).
32. Tolman, Phil. Mag. **21**, 296 (1911).
33. Born, Math. Ann. **68**, 526 (1910).
34. Dällenbach, Ann. der Physik **58**, 523 (1919).
35. Minkowski, Math. Ann. **68**, 472 (1910).
36. Weyl, Raum, Zeit, Materie, Berlin, 4. Aufl., 1921, p. 174.
37. Einstein und Laub, Ann. der Physik **28**, 445 (1909).
38. Pauli, Relativitätstheorie, Encyclopädie der math. Wiss., Band v. 2, Heft 4, Leipzig, 1921, § 35. (Перевод В. Паули, Теория относительности, Гостехиздат, 1947.)
39. M. Wilson and H. A. Wilson, Proc. Roy. Soc. **(A)89**, 99 (1914).

40. Gibbs, On the Equilibrium of Heterogeneous Substances, Collected Works, v. I, p. 87, New York, 1928.
41. Helmholtz, Berl. Ber. 1, 22 (1882).
42. Lewis, Journ. Amer. Chem. Soc. 35, 14 (1913).
43. Tolman, Statistical Mechanics, N. Y., 1927.
44. Birge, Phys. Rev. Suppl. 1, 1 (1929).
45. Tolman, Journ. Amer. Chem. Soc. 44, 1902 (1922).
46. Я. Б. Зельдович и И. Д. Новиков, Теория тяготения и эволюция звезд, «Наука», 1971 г.
47. Stern, Zeits. Elektrochem. 31, 448 (1925).
48. Tolman, Proc. Nat. Acad. 12, 670 (1926).
49. С. Вейнберг, Гравитация и космология, «Мир», 1974.
50. Planck, Berl. Ber. 1907. p. 542.
51. Planck, Ann. der Physik 26, 1 (1908).
52. Einstein, Jahrb. der Radioaktivität und Elektronik 4, 411 (1907).
53. Mosegeil, Ann. der Physik 22, 867 (1907).
54. Kretschmann, Ann. der Physik 53, 575 (1917).
55. Einstein, Ann. der Physik 55, 241 (1918).
56. Eddington, The Mathematical Theory of Relativity, Cambridge, 1923, p. 77. (Перевод: А. С. Эддингтон, Математическая теория относительности, Харьков — Киев, 1933.)
57. Lipschitz, Crelle's Journ. 70, 71 (1869).
58. Eötvös, Math. und Naturw. Ber. aus Ungarn 8, 65 (1890).
59. Southern, Proc. Roy. Soc. 84A, 325 (1910).
60. Schwarzschild, Berl. Ber. 1916, p. 189.
61. Chazy, Comptes Rendus 182, 1134 (1926).
62. Campbell and Trumpler, Lick Observatory Bull. 11, 41 (1923); 13, 130 (1928).
63. St. John, Astrophys. Journ. 67, 195 (1928).
64. Adams, Proc. Nat. Acad. 11, 382 (1925).
65. Tolman, Phys. Rev. 35, 875 (1930).
66. Einstein, Berl. Ber. 1918, p. 154.
67. Thirring and Lense, Phys. Zeits. 19, 156 (1918).
68. Thirring, Phys. Zeits. 19, 33 (1918); там же 22, 29 (1921).
69. Lemaître, Monthly Notices 91, 490 (1931).
70. Birkhoff, Relativity and Modern Physics, Harvard Univ. Press, 1923. См. p. 253, § 7.
71. Dingle, Proc. Nat. Acad. 19, 559 (1933).
72. Tolman and Ehrenfest, Phys. Rev. 36, 1791 (1930).
73. Tolman, Ehrenfest and Podolsky, Phys. Rev. 37, 602 (1931).
74. Zwicky, Proc. Nat. Acad. 15, 773 (1929).
75. Laue, Berl. Ber. p. 3 (1931).
76. Tolman, Proc. Nat. Acad. 14, 268 (1928).
77. Tolman, Proc. Nat. Acad. 14, 701 (1928).
78. Lemaître, J. Math. and Phys. (M.I.T.) 4, 188 (1925).
79. Tolman, Phys. Rev. 35, 904 (1930).
80. Neumann, Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, math.-nat. Kl. 26, 97 (1874); Seeliger, Astr. Nachr. 137, 129 (1895).
81. Einstein, Berl. Ber. 1917, p. 142.
82. de Sitter, Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam 19, 1217 (1917).
83. Tolman, Proc. Nat. Acad. 15, 297 (1929).
84. Friedmann, Zeits. f. Physik 10, 377 (1922).
85. Robertson, Proc. Nat. Acad. 15, 822 (1929).
86. Neumann, Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Prinzip der Fernwirkungen, Leipzig, 1896.
87. Lemaître, J. Math. and Phys. (M.I.T.) 4, 188 (1925).
88. Robertson, Phil. Mag. 5, 835 (1928).

89. Lanczos, Phys. Zeits. 23, 539 (1922).
90. Boltzmann, Vorlesungen über die Principe der Mechanik, Teil I, 20, уравнение (40).
91. Tolman, Astrophys. Journ. 69, 245 (1929).
92. Weyl, Phys. Zeits. 24, 230 (1923); Phil. Mag. 9, 936 (1930).
93. Tolman, Proc. Nat. Acad. 16, 320 (1930).
94. Eddington, Monthly Notices 90, 668 (1930).
95. Robertson, Rev. Mod. Phys. 5, 62 (1933).
96. Lemaître, Ann. Soc. Sci. Bruxelles 47A, 49 (1927).
97. Miln, Z. f. Astrophys. 6, 1 (1933).
98. Tolman, Proc. Nat. Acad. 16, 511 (1930).
99. Tolman, Proc. Nat. Acad. 16, 409 (1930).
100. Eddington, The Expanding Universe, Cambridge, 1933.
101. De Sitter, Bull. Astron. Inst. Netherlands 5, 211 (1930); там же 6, 141 (1931).
102. Heckmann, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1932, p. 97.
103. McCrea and McVittie, Monthly Notices 91, 128 (1930); там же 92, 7 (1931).
104. Lemaître, Revue des questions scientifiques, 1931, p. 391.
105. Einstein, Berl. Ber. 1931, p. 235.
106. Tolman, Phys. Rev. 38, 1758 (1931).
107. Einstein and de Sitter, Proc. Nat. Acad. 18, 213 (1932).
108. Lenz, Phys. Zeits. 27, 642 (1926).
109. Tolman, Proc. Nat. Acad. 14, 353 (1928).
110. Tolman, Proc. Nat. Acad. 17, 153 (1931).
111. Tolman, Phys. Rev. 37, 1639 (1931).
112. Tolman, Phys. Rev. 38, 797 (1931).
113. Tolman and Ward, Phys. Rev. 39, 835 (1932).
114. Tolman, Phys. Rev. 39, 320 (1932).
115. Hubble and Humason, Astrophys. Journ. 74, 43 (1931).
116. Shapley, Star Clusters, 1930, p. 189.
117. Hopmann, Astron. Nachr. 214, 425 (1921).
118. Shapley, Proc. Nat. Acad. 19, 591 (1933).
119. Russell, Dugan and Stewart, Astronomy, 1927.
120. Petit and Nicholson, Astrophys. Journ. 68, 279 (1928).
121. Seares, Astrophys. Journ. 55, 165 (1922).
122. Hubble, Proc. Nat. Acad. 15, 168 (1929).
123. Hubble, Astrophys. Journ. 64, 321 (1926).
124. Stebbins, Proc. Nat. Acad. 19, 222 (1933).
125. Hubble, Astrophys. Journ. 76, 44 (1932).
126. Hubble, Astrophys. Journ. 79, 8 (1934).
127. Shapley and Ames, Annals Harvard Observatory 88, 43 (1932).
128. Shapley, Proc. Nat. Acad. 19, 389 (1933).
129. Jeans, Astronomy and Cosmogoy, Cambridge, 1929.
130. Tolman, Proc. Nat. Acad. 20, 169 (1934).
131. De Sitter, Proc. Amsterdam Acad. 35, 596 (1932).
132. Teylor B. N., Parker W., Langenberg D., Rev. Mod. Phys. 41, 375 (1969).
133. G. de Vaucouleurs, Astroph. J. 159, 435 (1970).
134. S. Van der Bergh, Nature, 225, 503 (1970).
135. A. R. Sandage, Semaine d'Etude, Les Noyaux de Galaxies, Scripto Varia 35 (Vatican), p. 601, 1971.
136. J. M. Stewart a. D. W. Sciania, Nature 216, 748 (1967).
137. E. K. Conklin, Nature 222, 971 (1969).
138. Lemaître, Ann. de la Soc. Scient. de Bruxelles A53, 51 (1933).

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Авогадро 147, 510
Адамс 219
Андерсон 70
- Белинский 433
Бертело 152
Биркгофф 260, 261
Блэккет 70
Больцман 149, 150, 166, 321, 324, 503, 510
Бор 389, 501
Борн 33
Брагинский 187
- Вавилов 27
Ван дер Берг 496
Вейль 363, 364, 365
Вейнберг 13, 468
Вильсон Г. А. 128
Вильсон М. 128
Вокулер 496
- Галилей 17, 34, 187, 199, 219
Гаусс 240, 242, 506
Гельмгольц 135
Герц 128
Гиббс 135
Гинзбург 128
Грин 506
- Даламбер 275, 506
Джоуль 123, 164
Дикке 187, 220
Дингль 260, 261, 372, 427
Допплер 18, 200, 294, 296, 350, 361, 480
- Карно 166
Кауфман 66
Кемпбелл 217
- Кеннеди 23, 27, 28, 38
Кинсей 70
Комсток 29
Конклин 496
Кретчман 17, 176
Кристоффель 18, 181, 189, 190, 193, 194, 196, 197, 205, 207, 212, 226, 230, 231, 238, 244, 248, 249, 257, 258, 259, 260, 261, 267, 269, 274, 275, 284, 289, 348, 364, 372, 390, 504, 506
- Лагранж 505
Ландау 255
Ла-Роза 30
Лауэ 22, 71, 76, 296
Леви-Чивита 176
Лемэтр 258, 354, 368, 413, 414, 417, 418, 426, 498, 499
Ленц 438
Липшиц 193
Лифшиц 255, 433
Лоренц 18, 26, 27, 28, 32, 33, 34, 35, 36, 43, 46, 53, 79, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 107, 111, 112, 113, 128, 129, 159, 160, 265, 266, 267, 268, 269
Льюис 21, 134
Лэнс 246
- Майкельсон 23, 27, 28, 36, 38
Максвелл 96, 101, 113, 114, 115, 116, 118, 265, 266, 267
Мандельштам 220
Мах 17, 191, 192
Мессбауер 221
Миллер 27, 30
Милн 370
Минковский 16, 18, 23, 41, 64, 113, 504
Мозенгейл 169
Морли 23, 27, 28, 36, 38

- Неддермайер** 70
Нернст 133, 134
Нобл 95
Ньютон 29, 56, 187, 192, 204, 205, 215, 261, 430, 510
- Оккиалини** 70
Олифант 70
Ом 121
Оппенгеймер 70
Отт 165
- Папалекси** 220
Пенрозе 433
Планк 16, 17, 129, 133, 149, 151, 158, 165, 297, 441, 503, 510
Плэзит 70
Подольский 258, 260
Пойнтинг 103
Пуассон 192, 195, 196, 204, 206
- Резерфорд** 70
Рентген 128
Риман 193, 194, 196, 230, 244, 248, 274, 504, 506
Ритц 30
Риччи 176
Робертсон 354, 355, 363, 369
Роуланд 120, 128
- Сакур** 149, 153
Саузернс 187, 199
Ситтер де 20, 29, 30, 339, 341, 342, 343, 351, 353, 354, 355, 359, 360, 365, 366, 367, 403, 407, 414, 416, 417, 418, 419, 421, 422, 425, 483, 500
Скобельцын 128
Слайфер 363, 468
Слэтер 389
Смороднинский 36
Ст. Джон 219
Стефан 150, 321, 324, 503, 510
Стокс 506
Сэндедж 496
- Тирринг** 246
Толмен 13, 343, 443, 458
Торндайк 28, 38
Трамплер 217
Траутон 95
- Угаров** 36
- Финджеральд** 27, 28, 36
Фойгт 33
Фридман 368, 414, 418, 430, 431
- Хаббл** 338, 351, 352, 363, 366, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 478, 479, 480, 485, 492, 493, 496, 503
Халатников 433
Холечек 460
Хопман 460
Хьюматон 352, 363, 366, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 478, 479, 480, 485, 492
- Цвикки** 294, 497
- Шапиро** 220, 221
Шварцшильд 209, 211, 212, 252, 253, 254, 255, 260, 261
Шепли 460, 462, 473, 474
Штерн 155, 157
Шур 374, 379
- Эддингтон** 189, 212, 274, 409, 417, 430, 468
Эймс 474
Эйнесто 496
Эйнштейн 13, 15, 16, 17, 18, 20, 23, 26, 29, 33, 34, 42, 69, 99, 129, 158, 165, 173, 175, 176, 177, 187, 190, 194, 195, 197, 206, 208, 211, 219, 222, 232, 240, 243, 246, 297, 299, 325, 339, 341, 343, 345, 348, 349, 350, 352, 367, 368, 406, 407, 409, 412, 415, 418, 421, 422, 429, 430, 436, 438, 453, 483, 499
Эйхенвальд 128
Экман 414
Эренфест 325
Этвеш 187, 199
- Ютнер** 20

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Вектор Пойнтинга** 103
— тока 108, 116, 119, 265, 270
Второе начало термодинамики 132, 158, 169, 299, 301
Второй постулат теории относительности 29
- Геодезические линии** 180
Гравитационные волны 246
Граничные условия электродинамики 121, 122
- Давление жидкости** 225—227
Движение планет 212
Джоулево тепло 123, 124
Диаметр туманности видимый 470
— — —, связь с координатами туманности 480
— — —, вычисление 472
Допплер-эффeкт 465
- Евклидово пространство** 44
- Жидкость идеальная** 224, 225
- Замкнутая упругая система, статика** 92
Звездная величина 460, 463, 467, 470
— — абсолютная 460
— — болометрическая 463, 479
— — видимая 460—462, 466, 467, 468
— — визуальная 461, 470
— — фотографическая 463, 464, 465, 474, 479
Зона избегания 473
- Идеальная жидкость** 226
- Идеальный газ** 147
Излучение, масса 278
—, поток 279
—, тензор энергии — импульса 225, 276
— черного тела 150
— — —, динамика 169
Излучения поле неизотропное 226
Изотропия пространства 368, 370
Интервал 44, 177, 189
— в нестатической изотропной Вселенной 370
— де Ситтера 342
— Шварцшильда 209
— Эйнштейна 342
- Кеннеди — Торндайка опыт** 28, 38
Количество теплоты 134
— — —, релятивистская интерпретация 303
Конечное состояние системы 146, 332
Координатное расстояние туманности, зависимость от светимости, 478
— — —, связь с астрономическим расстоянием 478
Координаты галилеевы 50
— естественные 187
— собственные 46, 187
— сопутствующие 307, 371
Космические лучи 70, 389, 392, 424, 490
Космологическая постоянная 169, 198, 347, 351, 405—408, 418, 486
Космологические модели, общие замечания 19, 24, 338, 367, 496
— — — нестатические однородные 367
— — — —, временная эволюция закрытых моделей 401
— — — —, — — открытых моделей 409
— — — —, вывод выражения для интервала 370
— — — —, геометрия 378

- Космологические модели нестатические однородные, допущение о пространственной изотропии 368
 ———, изменение количества вещества со временем 388
 ———, — энергия со временем 386
 ——— Лемэтра с сохранением массы 414
 ———, механика 368
 ———, монотонно расширяющиеся из нестатического начального состояния 418
 ———, — статического начального состояния 415
 ———, обратимое и необратимое поведение 426, 438, 440, 445, 454
 ———, осциллирующее поведение 407, 408, 411, 418, 449, 454
 ———, открытая Эйнштейна — де Ситтера 421
 ———, отношение к реальной Вселенной 491
 ———, перенос начала координат 379, 477
 ———, периодическое поведение 407, 443
 ———, плотность вещества 385
 ———, — и давление 382
 ———, —, связь с кривизной пространства и космологической постоянной 486
 ———, поведение световых лучей 393
 ———, — частиц 389
 ———, превращение вещества в излучение 368, 423, 448, 456, 489
 ———, применение термодинамики 433
 ———, различные выражения интервала и их интерпретация 377, 381
 ——— с переходом вещества в излучение 448, 455, 489
 ——— Фридмана с сохранением энергии 414
 ———, эффект Допплера 396, 399
 ———, модель де Ситтера 342
 ———, ———, вывод вида интервала 342
 ———, ———, геометрия 353
 ———, ———, нулевые давление и плотность 355
 ———, ———, поведение частиц и света 356
 ———, ———, сравнение с реальной Вселенной 366, 488, 490
 ———, ———, эффект Допплера 361
 ——— статические 337
- Космологические модели статические, модель Эйнштейна 343
 ———, ———, вывод вида интервала 342, 343
 ———, ———, геометрия 343
 ———, ———, давление и плотность 346
 ———, ———, нестабильность 412
 ———, ———, поведение частиц и света 348
 ———, ———, сравнение с реальной Вселенной 351
 ———, ———, термодинамическое равновесие 436
 ———, ———, эффект Допплера 351
 Красное смещение 463, 468, 493
 ———, зависимость от расстояния 469, 470
 ——— относительное 465
- Лоренца сокращение 36
 Лоренца — Фицджеральда сокращение 36
 Лоренцевы повороты 45
- Макроскопическая плотность 79
 — электродинамика 261
 Максвелла уравнения 113
 Максвелла — Лоренца уравнения 96, 266
 Масса излучения 278
 — поперечная 67
 — продольная 67
 —, соотношение с энергией и импульсом 61
 — туманности, измерение 473
 — частицы 56
 — электрона 66
- Материальные уравнения электродинамики 114, 116, 120, 270
- Натяжения механические 72, 74, 80, 223
 — электромагнитные 103, 127
 Ньютонова теория 204
- Обратимость и необратимость 132, 300, 302, 438
 Оператор Даламбера 275
 Опыт Майкельсона — Морли 27
 Отклонение света в гравитационном поле 216, 292
 Относительность движений любого рода 184
 — равномерного прямолинейного движения 26

- Первый закон термодинамики 131,
158, 298
— постулат относительности 26
Перигелий, движение 215
Планка закон 151
— формула 464
Плотность вещества во Вселенной
474
Показатель цвета 462—465
Поле гравитационное 193—199
— — заряженной частицы 272
— — потока излучения 280
— — слабое 243
— — сферически симметричное 246,
248, 257
— электромагнитное 96, 108, 115, 117,
265, 269
Постоянная Стефана 150
— Хаббла 484, 496
Постоянные важнейшие 510, 511
Потенциал векторный 98
— гравитационный 190
— ньютонов 205
— обобщенный электродинамический
108, 265
— скалярный 98
— термодинамический 134
Преобразования Галилея 34
— Лоренца 32
— — для давления 160
— — — количества тепла 163
— — — лоренцева множителя 40
— — — массы 58
— — — механических плотностей и
натяжений 76, 79, 80
— — — объема 160
— — — работы 162
— — — силы 58
— — — скорости 38
— — — температуры 164—166
— — — ускорения 40
— — — электромагнитного поля 98,
118
— — — электромагнитных плотностей
и натяжений 104
— — — энергии 161
— — — энтропии 164
Принцип ковариантности 174
— Маха 191
— относительности 26
— эквивалентности 182
Псевдотензор потенциальной энергии
и импульса 232
Равновесие в мире Эйнштейна 412,
436
Равновесие между веществом и излу-
чением 154
— — водородом и гелием 151
— тепловое 142, 318, 322
— термодинамическое 136, 138, 313
— химическое 140, 317
Разбегание туманностей 493
Размерность пространства — времени
42
Расстужение времени 37
Римана — Кристоффеля тензор 193
— — — свернутый 194
Света и частиц взаимодействия 285
Светимость туманности 467, 477
— —, связь с координатами 475, 478
Свободная энергия 134
Сила Минковского 64
Символы Кристоффеля 181
Собственные величины, использование
20
— координаты 46, 187, 188
Сокращение длины 36
Сохранение массы, энергии и импуль-
са в общей теории относительности
233, 236, 268, 292
— — — — — для механической си-
стемы 70—74, 85—88
— — — — — частиц 55, 61, 62, 64
— — — — — электромагнитной си-
стемы 101—105
— момента количества движения 88
— электрического заряда 97, 121, 270
Среда, зависимость от свойств 223
— механическая 223
Стефана — Больцмана уравнение 150
Температура туманности видимая 464
Тензор метрический 49, 190
— Римана — Кристоффеля 193, 194
— электромагнитного поля 109, 115,
266
— энергии — импульса для вещества
82, 196, 223, 262—264
— — — — — идеальной жидкости 224
— — — — — излучения 225, 276, 280
— — — — — электромагнитного поля
112, 127, 268
Тензорный анализ 47—55, 506
Теорема Шура 374, 379
Тепловой показатель 463—465
Термодинамический потенциал 134
Туманности, диаметры и массы 272
—, звездные величины 460, 462
—, — — и видимый диаметр 470
—, — — и красное смещение 467
—, — — и расстояния 466

- Туманности, координаты и астрономическое расстояние 478
 —, — и видимый диаметр 480
 —, — и красное смещение 483
 —, — и светимость 475
 —, распределение в пространстве 473, 474, 481
 —, расстояния 466
- Уравнение Пуассона 192, 195, 206
 — Сакура — Тетроде 149
- Хаббла постоянная 484, 496
- Цикл Карно релятивистский 166
- Часов парадокс 201
- Часы, влияние потенциала на ход 199
- Электродинамика 96, 265
 Эмиссионная теория света 29
 Энергии — импульса тензор для вещества 83, 196, 224
 — — — — идеальной жидкости 225
 — — — — излучения 226, 276, 279
 — — — — электромагнитного поля 112, 127, 280
 Энергии несохранение 229
 Энергия в термодинамике 131
 Энтропия, вектор 172, 300
 — в термодинамике 132, 133
 Эффект Допплера 294, 465
 — — в модели де Ситтера 361
 — — — — Эйнштейна 351
 — — в нестатических моделях 396

СПИСОК ОПЕЧАТОК

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
18	11 сверху	t_{μ}^{ν}	t_{μ}^{ν}
21	26 снизу	t^{ν}_{μ}	t^{ν}_{μ}
46	ф. (18.2)	$dx' = \frac{dx - (V/c)cdt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$	$dx' = \frac{dx - (V/c)cdt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$
88	ф. (38.10)	$\begin{cases} x'_2 \\ x^2 \end{cases}$	$\begin{cases} x'^2 \\ x^2 \end{cases}$
103	6 снизу	$\dots - \frac{1}{\partial t} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] dv,$	$\dots - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] dv,$
119	ф. (52.14)	$\sqrt{1 - V/c^2}$	$\sqrt{1 - V^2/c^2}$
161		116	161
144	19 снизу	... не меньше c не меньше сил, необходимых для сжатия газа до прежнего состояния.
156	ф. (67.8)	$e^{-mc^2/kT}$	$e^{-mc^2/kT}$
221	5 сверху	работе ***)	работе *****)
221	5 снизу	****) Hefele a. Keating, Science 108,000 (1972).	****) I. C. Hafele a. R. Keating, Science 177, 166 (1972).
230	4 снизу	$g_{\alpha}^{\mu\nu}$	$g_{\alpha}^{\mu\nu}$
232	1 снизу	t^{ν}_{μ}	t^{ν}_{μ}
232	ф. (87.14)	t^{ν}_{μ}	t^{ν}_{μ}
253	3 снизу	$e^{1/2\nu}$	$e^{1/2\nu}$
260	15 снизу	$T_1^4 0$	$T_1^4 = 0$
277	ф. (109.7)	$\dots = T^{33} = \rho_0$	$\dots = T^{33} = p_0$
284	6 сверху	$\dots \frac{dx^{\nu}}{d} = 0$	$\dots \frac{dx^{\nu}}{ds} = 0$
289	3 снизу	$\dots + y]^{1/2}$	$\dots + y^2]^{1/2}$
290	22 снизу	$+(l-x)^2 + \dots$	$+[(l-x)^2 + \dots$
309	19 сверху	релятивистской	релятивистской
358	5 сверху	$\frac{dt}{ds} = e^{-\nu}$	$\frac{dt}{ds} = ke^{-\nu}$
368	22 сверху	обратиться к изучению другой модели — модели де-Ситтера	тельствуют о нестатичности Вселенной. Например, излучение
488	12 снизу	$< 5,2 \cdot 10^{-27}$	$< 5,2 \cdot 10^{-27}$
496	26 снизу	$\cdot 10^{31} \text{ г/см}^3$	$\cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3$

R. PENROSE

Structure of space-time

BATTELLE RENCONTRES
1967 Lectures in
Mathematics and Physics
Chapter VII

Edited by
CECILE M. DEWITT
University of North Carolina at Chapel Hill
and
JOHN A. WHEELER
Princeton University

W. A. BENJAMIN, INC., NEW YORK-AMSTERDAM
1968

Р. ПЕНРОУЗ

Структура пространства-времени

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО

Л. П. ГРИЩУКА и Н. В. МИЦКЕВИЧА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

акад. Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧА и И. Д. НОВИКОВА

С ПОСЛЕСЛОВИЕМ

Р. ПЕНРОУЗА

Издательство «Мир»

МОСКВА 1972