

А. Мишель, М. Шааф

*Симметрия
в квантовой физике*



Л. Мишель, М. Шааф

СИММЕТРИЯ В КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ

Л. Мишель, М. Шааф

СИММЕТРИЯ В КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ

Книга состоит из двух частей. Первая часть — лекции Л. Мишеля, которые содержат широкий обзор применения теории групп в современной теоретической физике (молекулярная, атомная, ядерная физика и физика элементарных частиц). С одной стороны, они позволяют математикам узнать, какие математические понятия играют наиболее существенную роль в фундаменте современной физики, а с другой — дают физикам изложение основ теории в несколько необычном для них аспекте с использованием самого современного математического языка.

Вторая часть — весьма подробный обзор М. Шаафа, посвященный наиболее важной для физики элементарных частиц и довольно интересной с математической точки зрения группе — группе движений 4-мерного псевдоэвклидова пространства (неоднородная группа Лоренца, или группа Пуанкаре). Основное содержание этой статьи — неприводимые унитарные представления группы Пуанкаре и ее подгрупп.

В качестве приложения в книгу включен перевод с итальянского классической работы Э. Майорана (1932), в которой были заложены основы теории бесконечномерных унитарных представлений группы Лоренца и теории релятивистски-инвариантных уравнений.

Книга полезна физикам-теоретикам, научным работникам, аспирантам, студентам старших курсов, а также математикам, занимающимся теорией групп

Книга состоит из двух частей. Первая часть — лекции Л. Мишеля, которые содержат широкий обзор применения теории групп в современной теоретической физике (молекулярная, атомная, ядерная физика и физика элементарных частиц). С одной стороны, они позволяют математикам узнать, какие математические понятия играют наиболее существенную роль в фундаменте современной физики, а с другой — дают физикам изложение основ теории в несколько необычном для них аспекте с использованием самого современного математического языка.

Вторая часть — весьма подробный обзор М. Шаафа, посвященный наиболее важной для физики элементарных частиц и довольно интересной с математической точки зрения группе — группе движений 4-мерного псевдоевклидова пространства (неоднородная группа Лоренца, или группа Пуанкаре). Основное содержание этой статьи — неприводимые унитарные представления группы Пуанкаре и ее подгрупп.

В качестве приложения в книгу включен перевод с итальянского классической работы Э. Майорана (1932), в которой были заложены основы теории бесконечномерных унитарных представлений группы Лоренца и теории релятивистски-инвариантных уравнений.

Книга полезна физикам-теоретикам, научным работникам, аспирантам, студентам старших курсов, а также математикам, занимающимся теорией групп

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Две статьи очередного выпуска сборника «Новости фундаментальной физики», взяты из серии «Лекционные заметки по физике» (*Lectures Notes in Physics*). Статья Л. Мишеля представляет собой обработку лекций, прочитанных в школе в Сиетле в 1969 г., а М. Шаафа — обзор, написанный специально для этого издания (также в 1969 г.).

Обе статьи интересны тем, что они используют современный язык теории групп, достаточно сильно отличающийся от языка, на котором написаны книги, вышедшие еще несколько лет назад.

Статьи различны по своему уровню и целям. Первая из них — обзор приложений теории групп в атомной физике и физике элементарных частиц, адресованный скорее математикам. Она отвечает задачам школы в Сиетле, где физики и математики по традиции обсуждают проблемы, общие для обеих наук.

Вторая статья носит более специальный характер. В ней очень подробно и на современном математическом языке изложены основные идеи представления группы Пуанкаре. Эта статья полезна физикам, так как она поможет им понимать математическую литературу и пользоваться ею.

К сожалению, автор, интенсивно используя работы советских математиков (они лежат, по существу, в основе обзора), совсем не знает работ советских физиков. Поэтому остались неизвестными многие результаты как по основным вопросам представления группы Пуанкаре и группы Лоренца, так и по гармоническому анализу на группе Лоренца¹⁾. Читатель, однако, найдет много работ на эту тему в современных журналах по математической физике.

¹⁾ Можно указать несколько работ, в которых имеются дальнейшие ссылки: Ю. М. Широков, *Элементарные частицы и атомное ядро*, ЭЧАЯ, 3, 606 (1972); Г. И. Кузнецов, М. А. Либерман, Я. А. Смородинский, ЭЧАЯ, 2, 105 (1971); P. Winternitz, *Lectures in Theoretical Physics*, ed. by A. O. Barut, W. E. Brittin (Colorado, 1971), vol. 13; G. Feldmann, P. T. Mathews, *Ann. Phys.*, 55, 506 (1969); И. А. Вердиев, *Ann. Phys.*, 72, 139 (1972).

В качестве приложения мы включили в сборник старую статью Этторе Майорана, которая почти неизвестна нашему читателю, так как была опубликована на итальянском языке задолго до того, как теория групп стала привычной для физиков. В этой работе были впервые найдены ковариантные уравнения для частиц с произвольным спином, причем автор использовал открытые им бесконечномерные представления группы Лоренца. Уравнения Майорана были потом открыты вновь, когда математики занялись представлениями некомпактных групп, а физики освоились с уравнением Дирака.

Этторе Майорана был необычайно талантливым учеником Ферми, к несчастью, погибшим очень рано. Публикуемая статья представляет собой хороший образец его научного творчества.

Работа Майорана написана на «старом» физическом языке — языке, который, конечно, будет жить еще долго. О роли статьи Э. Майорана см. *D. M. Fradkin, Am. Journ. Phys., 34, 314 (1968)*.

Вместе с этой работой статьи сборника иллюстрируют разные способы изложения современной теории; этим они и будут полезны читателям.

Статью Л. Мишеля перевел А. М. Переломов, статьи М. Шаафа и Э. Майорана — М. С. Маринов.

Я. Смородинский

Применение теории групп в квантовой физике

Алгебраические аспекты

ВВЕДЕНИЕ

Я думаю, уместно воспользоваться случаем и начать с того, что писал 38 лет назад Дирак во вступлении к той самой статье, в которой он предсказал существование «антиэлектрона», названного впоследствии позитроном²⁾.

«Постоянный прогресс физики требует для теоретической формулировки ее законов все новых и новых разделов математики. Это понятно и даже закономерно. И все же ученые прошлого века не могли предвидеть того пути, по которому пойдет математика. Можно было ожидать, что математический аппарат, все время усложняясь, будет, однако, опираться на незыблемую основу аксиом и определений. На самом же деле современная физика требует все более абстрактной математики и развития ее основ. Так, неевклидова геометрия и некоммутативная алгебра, считавшиеся одно время просто плодом воображения или увлечения логическими рассуждениями, теперь признаны весьма необходимыми для описания общей картины физического мира. Вполне вероятно, что этот процесс абстрагирования будет продолжаться и впредь, и что развитие физики должно сопровождаться скорее постоянным совершенствованием и обобщением аксиом, лежащих в основе математического аппарата, а не логическим развитием какой-либо одной математической схемы, опирающейся на неизменный фундамент.

В настоящее время в теоретической физике существуют кардинальные проблемы, ожидающие своего решения. Это, например, релятивистская формулировка квантовой механики и природа атомного ядра (за ними следуют более трудные, как, например, проблема жизни). Решение этих проблем, по всей видимости, потребует более решительного, чем когда-либо прежде, пересмотра основных наших концепций. Вполне вероятно, что этот пересмотр

¹⁾ Institut des Hautes Études Scientifiques, 91, — Bures-Sur-Yvette — France.

²⁾ Из статьи П. Дирака «Квантованные сингулярности в электромагнитном поле» [1].

приведет к столь большим изменениям, что попытки сформулировать экспериментальные данные непосредственно в математических терминах натолкнутся на необходимость таких новых идей, которые будут лежать за пределами понимания человеческого разума. Следовательно, теоретики будущего вынуждены будут использовать менее прямые методы. Наиболее действенный метод, который пока еще можно себе представить, заключается в использовании всех ресурсов чистой математики для совершенствования и обобщения формального математического аппарата, составляющего сейчас фундамент теоретической физики, причем каждый успех в этом направлении должен сопровождаться попыткой интерпретации новых математических особенностей в терминах физических категорий (с помощью процесса, подобного принципу идентификации Эддингтона). Небольшим шагом в этом направлении следует, по-видимому, считать недавнюю статью автора [2].

Математический формализм в то время встретился с серьезными трудностями, поскольку он предсказывал отрицательное значение кинетической энергии электрона. Преодолеть эту трудность было предложено с помощью принципа запрета Паули. Этот принцип разрешает находиться в каком-либо состоянии только одному электрону с оговоркой, что в физическом мире почти все состояния с отрицательной энергией уже заняты, так что наши обычные электроны с положительной энергией не могут перейти в эти состояния. Возникает необходимость физической интерпретации состояний с отрицательной энергией, которые с этой точки зрения реально существуют. Следует ожидать, что равномерно заполненное распределение состояний с отрицательной энергией полностью не наблюдаемо для нас. Но если вдруг одно из таких состояний в виде исключения окажется не занятым, то мы воспримем это как появление дырки. Показано, что такая дырка будет интерпретироваться нами как частица с положительной энергией и положительным зарядом. Было сделано предположение, что эта частица должна отождествляться с протоном. Последующие исследования, однако, показали, что она неизбежно должна иметь такую же массу, что и электрон [3], а также что при столкновении ее с электроном вероятность их аннигиляции значительно больше, чем этого требует общеизвестная стабильность материи [4—6].

Таким образом, по-видимому, мы должны отказаться от отождествления дырок с протонами и найти для них какую-либо другую интерпретацию. Вслед за Оппенгеймером [7] можно предположить, что в том мире, который мы знаем, все без исключения состояния электронов с отрицательной энергией заняты. Дырка, если бы таковая возникла, стала бы новым видом частицы, неизвестным экспериментаторам и имеющим с электроном одинаковую массу и противоположный по знаку заряд. Такую частицу можно назвать антиэлектроном. Из-за большой скорости комбинации ее с электронами типичны были бы попытки встретить хотя бы одну из этих частиц в природе. Но если бы удалось воспроизвести ее экспериментально в высоком вакууме, она вела бы себя в нем как совсем стабильная и стала бы доступной для наблюдения. Столкновение двух жестких γ -лучей (с энергией по крайней мере в полмиллиона электронвольт) могло бы привести к одновременному возникновению электрона и антиэлектрона. Вероятность этого события должна иметь тот же порядок, что и вероятность столкновения двух γ -лучей, если предположить, что они являются сферами того же радиуса, что и классический электрон. При достижимых в настоящее время интенсивностях γ -лучей эта вероятность, однако, пренебрежимо мала.

С вышеизложенной точки зрения протоны никак не связаны с электронами. Вероятно, протоны должны иметь свои собственные состояния с отрицательной энергией. Все эти состояния обычно заняты, а незанятые состояния проявляются как антипротоны.

Теперь напомним, что антипротоны впервые были обнаружены в 1955 г., т. е. 24 года спустя.

Уместно закончить это введение историей рождения предмета наших лекций. Менее чем через три года после первой статьи Гейзенберга [8] по квантовой механике появились две работы, посвященные применению теории групп в квантовой механике (статьи Вигнера и Хунда [9, 10]).

В нашей области Вигнер, несомненно, наиболее цитируемый автор. Позвольте только напомнить, что вместе с Дж. фон Нейманом он применил теорию групп к исследованию спектра атомов [11] и в 1931 г. опубликовал книгу [12], целиком посвященную этому вопросу.

Интересно, что два знаменитых математика, Герман Вейль и Ван-дер-Варден, тоже очень рано опубликовали книги, посвященные нашей проблеме [3, 13]. Интересная, но более элементарная монография Бауэра [14] продолжает список книг, достигающий сегодня нескольких десятков.

Для интересующихся математиков я бы рекомендовал все же две первые книги, но в их втором, переработанном и расширенном издании (Вейль [3] и Вигнер [12]).

Для читателей-математиков

Физика будет вводиться в эти заметки по мере необходимости. Однако удобно сразу дать некоторую информацию о физических константах, поскольку она может понадобиться в любой момент.

Мы будем изучать квантовые явления в атомной физике, ядерной физике и физике элементарных частиц. Ключевым числом, пришедшим из макроскопической области, является число Авогадро

$$A = 6,023 \cdot 10^{23}.$$

Оно равно числу атомов, которое содержит один грамм водорода. Атом водорода состоит из одного протона (масса m_p) и одного электрона (масса m_e)

$$\frac{m_p}{m_e} = 1836,5.$$

Обе частицы электрически заряжены и несут заряды $+e$ и $-e$. Абсолютное значение этого заряда равно

$$e = \frac{1F}{A} = \frac{96\,600}{6,02 \cdot 10^{23}} \text{ кулон.}$$

Здесь F — число Фарадея. Мы будем пользоваться более удобной системой единиц:

$$\hbar = (\text{постоянная Планка}) \times (2\pi)^{-1} = 1$$

и

$$c = (\text{скорость света}) = 1.$$

В этой системе $e = (137,04)^{-1/2}$, т. е.

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137,04}$$

и является безразмерным числом.

Чтобы завершить построение нашей системы единиц, мы должны выбрать еще одну единицу измерения. Для атомной физики наиболее подходит масса электрона m_e . Остальными единицами являются:

момент количества движения $m_e c$,

энергия $m_e c^2$,

длина $\hbar/m_e c = 3,86 \cdot 10^{-11}$ см,

время $\hbar/m_e c^2 = 1,28 \cdot 10^{-21}$ с.

Однако для практического измерения энергии частиц наиболее подходит электронвольт (эВ). Он равен энергии, которую получает частица с универсальным электрическим зарядом e , пересекая электрическое поле, создаваемое разностью потенциалов 1В.

Переход в прежнюю систему единиц осуществляется с помощью формул

$$m_e c^2 = 0,511 \cdot 10^6 \text{ эВ} \sim \frac{1}{2} \text{ МэВ},$$

$$m_p c^2 = 938,256 \text{ МэВ} \sim 1 \text{ ГэВ} = 10^9 \text{ эВ}.$$

Заметим, что $1 = \hbar \sim (10^{-13} \text{ см}) \cdot (200 \text{ МэВ})$.

До 1932 г. были известны только два вида взаимодействий: гравитационное и электромагнитное. В статическом приближении оба взаимодействия можно описать потенциалами, пропорциональными k/r , где r — расстояние между частицами. Таким образом, абсолютное отношение гравитационной энергии (энергии притяжения) к электростатической энергии (энергии отталкивания) взаимодействия двух протонов не зависит от расстояния между ними и равно

$$\frac{G' m_p^2}{e^2} = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{137}{175} \cdot 10^{-36}.$$

В этих лекциях мы вправе полностью пренебречь гравитацией¹⁾).

Энергия связи атомов, молекул, твердых тел и т. д. имеет электромагнитную природу. Эта энергия, реализованная в химической форме, будет иметь порядок величины

$$A \times 1 \text{ эВ} = 23 \text{ кал/моль},$$

что составляет около $10^{-9} - 10^{-11}$ от энергии покоя. Если бы энергия, получаемая нами от Солнца, являлась результатом химических реакций, то Солнце давало бы нам ее менее чем 10^5 лет!

Известны еще два других вида взаимодействия. Это ядерное взаимодействие (см. гл. 3 и 5), более сильное, чем электромагнитное, на расстоянии менее 10^{-13} см, и „слабое взаимодействие“, или взаимодействие Ферми (см. разд. 3.6 и гл. 5), действующее на очень малых расстояниях. Оба взаимодействия важны при изучении звезд и ядерных реакций, и связанные с ними энергии могут достигать 10^{-3} энергии покоя.

Для читателей-физиков

Все используемые здесь математические термины даются без определений. Безусловно, многие из них физикам известны (например, о понятии корневых векторов алгебры Ли см. лекции [15 — 18]). Некоторые термины (в основном использованные в гл. 1) заимствованы из словаря современной математики. Они не были абсолютно необходимы и использовались просто как синонимы других терминов, которые обычно применяют в физике. Физикам необходимо знать определенные математические термины.

Прекрасный и в то же время элементарный обзор современного математического языка дан в книге С. Мак-Лэйна и Дж. Биркхофа [19], особенно в гл. 1 (отметим также список обозначений), и книге Ленга [20].

¹⁾ Гравитационная энергия системы увеличивается, грубо говоря, пропорционально квадрату числа нуклонов N , в то время как в нейтральном веществе электростатическая энергия примерно пропорциональна N . Таким образом, гравитация становится важной только для таких больших масс, как астероиды, планеты (мы на Земле знаем это!) или звезды. Не случайно большая часть звезд имеет число нуклонов $\sim (\alpha')^{-3/2} = 10^{57}$.

1. Ковариантность в квантовой теории и математические методы ее описания

1.1. ЧТО ТАКОЕ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА?

Не прошло и двух лет после выхода цитированной выше первой статьи Гейзенберга по квантовой механике, как на этот вопрос был дан ответ в трех следующих друг за другом статьях фон Неймана [21]. На базе этих статей была написана книга „Математические основы квантовой механики“ [22] ¹⁾.

Две из первых книг физиков по квантовой механике переизданы, и я настоятельно советую их прочесть. Это книги Дирака „Принципы квантовой механики“ [24] и Паули „Общие принципы волновой механики“ [25] ²⁾.

Если вы их не читали, то еще не поздно это сделать. Сейчас же мы приведем лишь минимум сведений из квантовой механики.

а) Каждой физической системе соответствует комплексное сепарабельное гильбертово пространство \mathcal{H} . При этом физическое состояние представляется вектором $|x\rangle \in \mathcal{H}$, нормированным для удобства на единицу: $\langle x|x\rangle = 1$.

б) Каждой физической наблюдаемой a (например, энергии, электрическому заряду и т. д.) соответствует самосопряженный оператор A в пространстве \mathcal{H} . Спектр A совпадает с множеством возможных значений величины a .

в) Квантовая механика, вообще говоря, не предсказывает определенного значения величины a в состоянии $|x\rangle$. Она дает лишь математическое ожидание этой величины

$$\langle x|A|x\rangle = \text{Sp } AP_x, \quad (1.1)$$

где P_x — эрмитов оператор проектирования ($P_x^+ = P_x$) на одномерное пространство, натянутое на вектор $|x\rangle$. Заметим, что единичные собственные векторы оператора P_x (с собственным

¹⁾ Позднее совместно с Дж. Биркгофом он опубликовал статью „Логика квантовой механики“ [23]. Эта статья до сих пор не утратила своего значения.

²⁾ Имеются также книги математиков: Г. Макки „Лекции по математическим основам квантовой механики“ [26]; Л. Шварц „Применение обобщенных функций к изучению элементарных частиц в релятивистской квантовой механике“ [27].

значением 1) отличаются друг от друга лишь скалярным фазовым множителем. Все они приводят к одинаковым физическим предсказаниям и, следовательно, описывают одно и то же состояние.

Операторы P_x сами являются наблюдаемыми. В самом деле, величина

$$\text{Sp } P_x P_y = |\langle x | y \rangle|^2 \quad (1.2)$$

есть вероятность нахождения физической системы в состоянии $|x\rangle$ (или $|y\rangle$), если известно, что эта система находится в состоянии $|y\rangle$ (или $|x\rangle$). Искусство физика, занимающегося квантовой теорией, и заключается частично в том, чтобы закодировать наблюдаемые им явления векторами гильбертова пространства. При этом всегда приходится использовать „физические приближения“.

В тех случаях, когда состояние можно описать с помощью проектора ранга один (или, что то же самое, с помощью вектора, определенного с точностью до фазового множителя), мы говорим, что имеем чистое состояние и полную информацию о нем.

Обычно же известна лишь частичная информация о состоянии. В простейшем случае мы знаем только набор вероятностей c_i нахождения системы в ортогональных друг другу чистых состояниях P_i ($P_i P_j = \delta_{ij} P_j$), так что математическое ожидание величины a имеет вид

$$\sum c_i \text{Sp } A P_i = \text{Sp } A R, \quad (1.3)$$

где

$$R = \sum c_i P_i, \quad \text{Sp } R = \sum c_i = 1. \quad (1.3a)$$

Самосопряженный оператор R положительно определен, поскольку $c_i \geq 0$, и называется матрицей плотности¹⁾ смешанного состояния (состояния, не являющегося чистым) системы. При этом множество всех состояний образует выпуклую область, а чистые состояния являются крайними точками этой области.

Естественное обобщение этой конструкции заключается в следующем. Определим банахову алгебру \mathcal{B} с единицей I , генерируемую наблюдаемыми²⁾ (обычно это — C^* -алгебра).

¹⁾ Матрицу плотности ввел фон Нейман в 1927 г. в статьях, цитированных выше. (Несколько ранее матрица плотности была введена в работе Л. Д. Ландау [28]. — *Прим. перев.*)

²⁾ Еще на заре развития квантовой механики физики рассмотрели также неассоциативные алгебры, образованные наблюдаемыми, и ввели жордановы алгебры. Первой фундаментальной работой по этим алгебрам является статья П. Иордана, Дж. фон Неймана и Е. Вигнера „Об алгебраическом обобщении квантомеханического формализма“ [29].

Тогда состояние описывается линейным положительным функционалом ϕ на \mathcal{A} , т. е. $\phi(A^*A) \geq 0$. Для системы с конечным числом степеней свободы такое обобщение не очень существенно. Однако оно становится существенным для случая бесконечного числа степеней свободы как в квантовой теории поля, так и в статистической механике. Классическая статистическая механика может быть построена по тому же математическому шаблону, причем в этом случае алгебра является абелевой¹⁾.

1.2. ИНВАРИАНТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Мы будем считать, что для каждой рассматриваемой здесь физической теории существует „группа относительности“ G . Это значит, что G действует на физической системе S и существует изоморфизм между физикой системы S (гильбертовым пространством \mathcal{H} состояний S , алгеброй наблюдаемых $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})^2$) и физикой преобразований $\mathfrak{g}(S)$ — преобразований S при помощи элемента $\mathfrak{g} \in G$ (\mathfrak{g} может быть, например, вращением). Это „активная“ точка зрения на G -инвариантность. С „пассивной“ точки зрения группа преобразований устанавливает изоморфизм между физическим описанием одной и той же системы двумя наблюдателями, использующими разные системы координат, причем эти системы связаны преобразованием группы G .

Обозначим через P_{gx_i} (для любого $\mathfrak{g} \in G$) состояние, получающееся после соответствующего преобразования из состояния P_{x_i} . Мы назовем группу G — группой инвариантности, если все вероятности в уравнении (1.2) инвариантны

$$\forall |x\rangle \in \mathcal{H}, \quad \forall \mathfrak{g} \in G, \quad \text{Sp } P_{gx_1} P_{gx_2} = \text{Sp } P_{x_1} P_{x_2}, \quad (1.4)$$

¹⁾ Еще двадцать лет тому назад Сигал настаивал на использовании C^* -алгебр в квантовой физике. Ценность такого подхода (физическое приближение и ε -эквивалентность Фельда, введение правил суперотбора) показана в фундаментальной статье Хаага и Каствлера „Алгебраический подход к квантовой теории поля“ [30]. Большая часть работ по использованию C^* -алгебр в физике написана в строгом математическом стиле и опубликована в журнале „Communications in Mathematical Physics“. По статистической механике см. книгу Д. Рюэлла „Статистическая механика“ [31].

²⁾ Через $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ обозначено пространство линейных операторов, действующих в пространстве \mathcal{H} .

или

$$|\langle gx_1 | gx_2 \rangle|^2 = |\langle x_1 | x_2 \rangle|^2. \quad (1.4a)$$

Это значит, что группа G действует на \mathcal{H} изометрично.

В своей книге по теории групп Вигнер [12] доказал (см. приложение к гл. 20)¹⁾, что отображение $|x\rangle \rightarrow |gx\rangle$ является либо унитарным оператором $U(g)$, либо антиунитарным оператором $V(g)$ на \mathcal{H} . Напомним, что антиунитарный оператор V обладает следующими характеристическими свойствами:

$$|x\rangle, |y\rangle \in \mathcal{H}, V(\alpha|x\rangle + \beta|y\rangle) = \bar{\alpha}V|x\rangle + \bar{\beta}V|y\rangle, \quad (1.5)$$

$$\langle Vx | Vy \rangle = \overline{\langle x | y \rangle} = \langle y | x \rangle; \quad (1.5a)$$

$$\text{имеет обратный оператор.} \quad (1.5b)$$

Если дана изометрия на пространстве \mathcal{H} , то существует простой критерий²⁾ для решения вопроса, реализуется ли она унитарным U или антиунитарным V оператором. В том и другом случае операторы U и V определены с точностью до фазового множителя. При этом произведение двух антиунитарных операторов является унитарным оператором.

Пусть $\mathcal{V}(\mathcal{H})$ — группа как унитарных, так и антиунитарных операторов на \mathcal{H} , а $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ — подгруппа унитарных операторов.

Группа $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ является подгруппой индекса 2 группы $\mathcal{V}(\mathcal{H})$, и потому $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ — инвариантная подгруппа группы $\mathcal{V}(\mathcal{H})$. Мы предположим, что G действует на \mathcal{H} эффективно, т. е. единственным элементом, действующим на \mathcal{H} тривиально, является $1 \in G$. Преобразования $\mathcal{U}(g)$ [или $\mathcal{V}(g)$] для $g \in G$ генерируют подгруппу $\mathcal{S}(G)$ группы $\mathcal{V}(\mathcal{H})$, которая является расширением группы G при помощи группы U_1 (умножение векторов в пространстве \mathcal{H} на фазовый множитель; состояние при этом остается неизменным), т. е.

$$G \xrightarrow{f} \text{Aut } U_1,$$

где ядро отображения $\text{Ker } f$ является инвариантной подгруппой $G_+ \subset G$ индекса 2, которая действует как группа унитарных преобразований, а нетривиальный элемент образа отображения $\text{Im } f$ — это комплексное сопряжение $\alpha \rightarrow \bar{\alpha} = \alpha^{-1} \in U_1$.

¹⁾ Более прямое доказательство теоремы Вигнера было дано Баргманом [32]. Доказательства некоторых обобщений теоремы можно найти в работе Ульхорна [33]. В рамках аксиоматики Биркгофа и фон Неймана эквивалентная теорема была доказана Эмхом и Пироном [34].

²⁾ См. работу Баргмана [32]: для любой тройки векторов $|x\rangle, |y\rangle, |z\rangle$ величина $\langle x | y \rangle \langle y | z \rangle \langle z | x \rangle$ инвариантна относительно унитарного преобразования U и переходит в комплексно-сопряженную величину при антиунитарном преобразовании V .

Можно сказать также, что группа G_+ действует как линейное унитарное проективное представление, и для действия G (когда G строго содержит G_+) Вигнер предложил новый термин „проективное копредставление“. Как показал Вигнер, из физических соображений следует, что для преобразований, которые меняют направление времени, должны использоваться антиунитарные операторы. Это необходимо для того, чтобы энергия была положительной: в самом деле, сдвиг по времени на величину t представляется оператором e^{-itH} ; если $t \rightarrow -t$, то величина i должна переходить в $-i$, чтобы как H , так и e^{-itH} оставались инвариантными.

Непрерывные проективные линейные унитарные представления конечных групп и групп Ли хорошо известны. Например, для трехмерной группы вращений — группы $SO(3, R)$ — эти проективные представления находятся во взаимно однозначном соответствии с „линейными неприводимыми унитарными представлениями“ (в дальнейшем в данных лекциях для этого термина будет использовано сокращение НП) группы $SU(2)$ — группы, которая является универсальной накрывающей для $SO(3, R)$. Отсюда следует необходимость введения спиноров в квантовую физику.

В гл. 4 мы будем изучать инвариантность относительно групп преобразований, связанных с нерелятивистской (ньютонской) механикой и специальной теорией относительности¹⁾. В физике, однако, рассматриваются и другие группы инвариантности, например группа $S(n)$ — группа перестановок n тождественных частиц (n электронов в атоме). В ядерной физике и физике фундаментальных частиц мы встречаемся со многими „приближенными инвариантностями“. Соответствующей группой инвариантности в большинстве случаев является группа $U(n)$ или $SU(n)$ [группа унитарных $n \times n$ -матриц с определителем, равным единице в случае $SU(n)$], причем $n = 1, 2, 3, 4, 6$.

Термин „приближенная симметрия“ требует некоторого разъяснения. Пусть мы, например, изучаем инвариантность относительно группы G , где G — группа симметрии динамической системы, например группа симметрии кристалла (одна из кристаллографических групп). Этот пример затрагивает деликатный вопрос о групповой инвариантности в физике. Взаимодействие между атомами, несомненно, является трансляционно-инвариантным (и, быть может, инвариантно относительно большей группы преобразований). Почему же тогда

¹⁾ При переводе эта глава опущена.

атомы образуют кристалл, решетка которого инвариантна только относительно подгруппы группы трансляций? При возникновении такого явления, т. е. когда стабильное состояние имеет меньшую симметрию, чем симметрия физических законов, мы будем говорить, что имеем дело с нарушенной симметрией¹⁾.

Перейдем теперь к обсуждению математического аппарата, который мы часто будем использовать.

1.3. G-ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть G — данная группа. Если вам так больше нравится, можно сказать, что мы рассматриваем категорию, объектами которой являются векторные пространства \mathcal{E} (над данным полем K) с линейным действием группы G на \mathcal{E} [т. е. $G \ni x \rightarrow \rightarrow g(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$, где $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ — алгебра эндоморфизмов пространства \mathcal{E} , причем $xy \rightarrow g(x)g(y) = g(xy)$]. Морфизмами этой категории являются гомоморфизмы векторных пространств $\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{E}'$, совместимые с действием группы, т. е. для каждого $x \in G$ соответствующая диаграмма для гомоморфизмов векторных пространств является коммутативной. Мы назовем эти морфизмы G -гомоморфизмами G -векторных пространств.

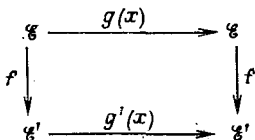


Диаграмма 1.

Конечно, можно было бы сказать, что мы изучаем бимодули (G - и K -модули), или еще проще, что мы интересуемся линейными представлениями группы G . При этом G -гомоморфизмы называют также „сплетающими“ операторами. Заметим, что G -морфизмы из \mathcal{E}_1 в \mathcal{E}_2 образуют векторное пространство, которое мы обозначим через $\text{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)^G$. В самом деле, это пространство является подпространством инвариантных векторов пространства $\text{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, а инвариантные векторы являются „сплетающими“ операторами для представлений группы G , действующих в пространствах \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 .

¹⁾ Этот небольшой раздел по групповой инвариантности носит чересчур эскизный характер. Значительно больше следовало бы сказать о симметрии физических законов (см., например, работу Вигнера [35]). Без этой симметрии не существовало бы рассматриваемой нами симметрии состояний. Конечно, многие из этих вопросов еще будут рассмотрены в данных лекциях.

Пусть даны G -векторные пространства $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$. Тогда все векторные пространства, которые могут быть образованы из них, также являются G -векторными пространствами, например: $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$, $\text{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, $\mathcal{L}(\mathcal{E}) = \text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$, векторное пространство тензорной алгебры на $\mathcal{E} : T(\mathcal{E}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}^{(n)}$, где $\mathcal{E}^{(0)} = K$, $\mathcal{E}^{(n)} = \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \otimes \dots \otimes \mathcal{E}$ (n множителей), и т. д.

Пусть дана физическая система, а \mathcal{H} — гильбертово пространство ее векторов состояний. Предположим, что \mathcal{H} есть G -векторное пространство. Тогда таким же является и $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Мы приходим к изучению объектов (категории G -векторных пространств) из рассмотренного выше пространства $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. В физической литературе они называются „тензорными операторами на \mathcal{H} “. (Заметное исключение в терминологии представляет книга У. Фано и Дж. Рака [36], посвященная этому вопросу.) По определению \mathcal{E}_i -тензорный оператор в физическом смысле слова есть G -морфизм (или сплетающий оператор) из \mathcal{E}_i в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Если представление группы G , действующее в пространстве \mathcal{E}_i , неприводимо, то соответствующий G -морфизм называется в физике „неприводимым тензорным оператором“. Если G действует на \mathcal{E}_i тривиально, то мы имеем „скалярный тензорный оператор“¹⁾.

Настало время специализировать поле K . Вообще говоря, это, конечно, поле комплексных чисел, так как \mathcal{H} — комплексное гильбертово пространство. Однако вещественность также встречается в физике. Так, например, часто \mathcal{E} — это вещественное векторное пространство, а „ \mathcal{E} -тензорный оператор“ — это G -го гомоморфизм T из вещественного векторного пространства \mathcal{E} в вещественное векторное пространство самосопряженных операторов на \mathcal{H} . Разумеется, всегда можно затем расширить поле от \mathbf{R} до \mathbf{C} .

Если G — группа Ли, то мы рассматриваем, конечно, только непрерывные дифференцируемые представления, так что G -векторное пространство является также \mathfrak{g} -модулем для алгебры Ли \mathfrak{g} группы G . Мы обозначим через \mathcal{S} векторное пространство алгебры \mathfrak{g} . Среди \mathcal{S} -тензорных операторов на $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ существует один особый оператор F' , который можно рассматривать также как представление алгебры Ли \mathfrak{g} на \mathcal{H} . Если представление группы G на \mathcal{H} унитарно, то оператор, $F = iF'$ имеет в качестве образа самосопряженные операторы удов-

¹⁾ Термин „скаляр“ часто используется физиками вместо термина „инвариант“.

летворяющие соотношениям

$$[F(a), F(b)] = (F(a)F(b) - F(b)F(a)) = iF(a \wedge b). \quad (1.6)$$

Если G является группой вращений, пространственных смещений, временных смещений и т. д., то F соответственно определяет наблюдаемые: момент количества движения, импульс, энергию и т. д. Величины из разд. 1.1, которые мы назвали там наблюдаемыми, являются элементами образа F , т. е., например, компонентой момента количества движения или импульса в данном направлении. Я надеюсь, теперь ясно, что G -морфизмы на $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ соответствуют физическим величинам тензорного характера относительно группы G (другие примеры: скорость, магнитный момент, электрический квадрупольный момент, тензор энергии — импульса, тензор моментов инерции и т. д.).

Пусть R и U (унитарное) суть представления группы G на \mathcal{E} и \mathcal{H} соответственно. По определению \mathcal{E} -тензорного оператора T ,

$$\forall x \in \mathcal{E}, \quad \forall g \in G, \quad U(g)T(x)U^{-1}(g) = T(R(g)x). \quad (1.7)$$

Если D и $F' = iF$ — соответствующие представления алгебры Ли

$$D(a) = \frac{d}{da} R(e^{aa})|_{a=0}, \quad iF = \frac{d}{da} U(e^{aa})|_{a=0}, \quad (1.8)$$

то эквивалентное определение \mathcal{E} -тензорного оператора T имеет вид

$$\forall x \in \mathcal{E}, \quad \forall a \in \mathfrak{g}, \quad [F(a), T(x)] = iT(D(a)x). \quad (1.9)$$

Короче говоря, чаще всего применение теории групп в квантовой физике сводится к изучению „тензорных операторов“ на G -векторном (гильбертовом) пространстве \mathcal{H} физической системы. Они образуют кольцо¹⁾ (и алгебру). Пусть T_1 и T_2 — соответственно \mathcal{E}_1 - и \mathcal{E}_2 -тензорные операторы на \mathcal{H} , тогда $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 \ni x \oplus y \rightarrow T_1(x) + T_2(y)$ определяет $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ -тензорный оператор;

$\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \ni x \otimes y \rightarrow T_1(x)T_2(y)$ определяет $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ -тензорный оператор.

Эти операторы мы обозначим соответственно через $T_1 \oplus T_2$ и $T_1 \otimes T_2$. Последний, вообще говоря, приводим и может быть

¹⁾ В случае бесконечномерного \mathcal{H} операторы $T(x)$ не ограничены, так что их произведение не всегда хорошо определено. Я не буду заострять здесь внимание на этой трудности, которая относится и ко всей квантовой механике. Этот вопрос рассмотрен в лекциях О'Рейферти [37].

разложен в прямую сумму неприводимых „тензорных операторов“.

Существует, наверное, много проблем, систематически еще не изученных физиками, хотя работе с этим кольцом (для фиксированных G, \mathcal{H} и действия G на \mathcal{H}) они и отдали очень много сил.

Например, если группа G — простая, T есть \mathcal{G} -тензорный оператор и $\forall x, y \in \mathcal{G}, [T(x), T(y)] = 0$, то, я думаю, отсюда следует, что $\dim \text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{H})^G = \infty^1$.

Конечно, подалгебра, порожденная одним элементом, хорошо известна: для данного \mathcal{G} -тензорного оператора T существует функториальный G -морфизм \hat{T} из тензорной алгебры $\mathcal{T}(\mathcal{G})$ на $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, который, кроме того, является гомоморфизмом алгебры. Если i есть каноническое вложение \mathcal{G} в $\mathcal{T}(\mathcal{G})$ ($\text{Im } i = \mathcal{G}^{(1)}$), то диаграмма 2 коммутативна

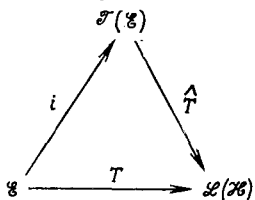


Диаграмма 2

В частном случае, когда T является представлением F (с точностью до множителя i [см. уравнение (1.6)]) алгебры \mathfrak{g} на \mathcal{H} , оно оказывается также представлением $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ — представлением универсальной накрывающей алгебры \mathfrak{g} .

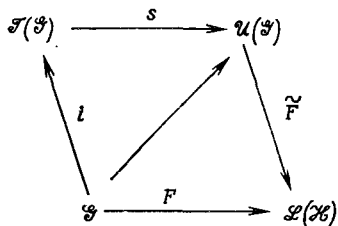


Диаграмма 3.

На диаграмме 3 $\hat{F} = \tilde{F} \cdot s$.

Замечательным „скалярным тензорным оператором“ является оператор Казимира.

¹⁾ Это было доказано К. Муром.

Пусть G есть полупростая группа Ли, и пусть $a \rightarrow D(a)$ — присоединенное представление алгебры Ли \mathfrak{g} , действующее в векторном пространстве \mathcal{G} :

$$D(a)b = a \wedge b, \quad [D(a), D(b)] = D(a \wedge b). \quad (1.10)$$

Симметричная билинейная форма Киллинга — Картана

$$\beta(a, b) = \text{Sp} [D(a), D(b)] \quad (1.11)$$

невырожденна. Следовательно, она определяет G -изоморфизм i' между \mathcal{G} и дуальным пространством \mathcal{G}' . Это также определяет изоморфизм $i' \otimes I$ (I — тождественное преобразование)

$$\mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \xleftarrow{i' \otimes I} \mathcal{G}' \otimes \mathcal{G} \xleftarrow{I} \text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{G}).$$

Здесь хорошо известный канонический гомоморфизм j является также G -гомоморфизмом. Тождественный оператор I на \mathcal{G} является инвариантным G -вектором $\in \text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{G})^G$. Так что

$$c = (i' \otimes I) \cdot j(1) \quad (1.12)$$

есть инвариантный вектор в $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \subset T(\mathcal{E})$ с фиксированной нормировкой, а $\hat{F}(c)$ — оператор Казимира на \mathcal{H} .

Физики и некоторые математики (см., например, Бурбаки [38]) иногда не используют эту каноническую нормировку для c . В физической литературе в настоящее время образы при отображении \hat{F} множества алгебраически независимых элементов центра $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ называются „операторами Казимира“.

Для того чтобы убедить физиков в том, что каноническая точка зрения, использованная здесь, является более предпочтительной, закончим этот раздел очень простой теоремой, подробно доказанной в физической литературе для частных случаев.

Теорема. Если G не имеет никакого нетривиального одномерного представления и если T — неинвариантный неприводимый \mathcal{E} -тензорный оператор в конечномерном пространстве \mathcal{H} , то $\forall a \in \mathcal{E}, \text{Sp} T(a) = 0$. В самом деле, поле (например, поле \mathbf{C}) является тривиальным одномерным G -векторным пространством, а „след“ $\in \text{Hom}(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \mathbf{C})^G$, поскольку $T \in \text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))^G$; следовательно (согласно нашей гипотезе),

$$\text{„Sp} T\text{“} = \text{„Sp“} \cdot T \in \text{Hom}(\mathcal{E}, \mathbf{C})^G = 0.$$

1.4. УНИТАРНАЯ ГРУППА $U(n)$ И ГРУППА ПЕРЕСТАНОВОК $S(n)$ ¹⁾

Дадим краткий обзор некоторых результатов теории неприводимых представлений (НП) групп $U(n)$ и $S(n)$. Этими результатами мы будем часто пользоваться в наших лекциях. НП группы $S(n)$ определяется разбиением числа n на неотрицательные целые числа

$$[\lambda_1^{\alpha_1}, \dots, \lambda_i^{\alpha_i}, \dots, \lambda_k^{\alpha_k}], \quad \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k > 0$$

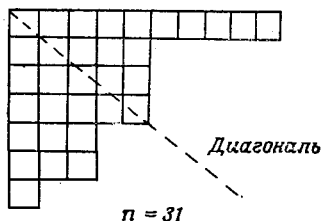
и

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i = n.$$

Существует более наглядное изображение разбиения $[\lambda_1^{\alpha_1} \dots \lambda_k^{\alpha_k}]$, называемое схемой Юнга. Это фигура из n клеток, содержащая α_1 строк по λ_1 клеток, α_2 строк по λ_2 клеток и т. д.

Пример разбиения $[\lambda_i^{\alpha_i}]$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 9, & \alpha_1 &= 1, \\ \lambda_2 &= 5, & \alpha_2 &= 3, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \lambda_3 &= 3, & \alpha_3 &= 2, \\ \lambda_4 &= 1, & \alpha_4 &= 1 \\ n &= 9 + (3 \times 5) + (2 \times 3) + 1 = 31. \end{aligned}$$

Схема Юнга содержит качественную информацию о НП; чем более она вытянута в горизонтальном (вертикальном) направлении, тем более симметричны (антисимметричны) векторы представления.

¹⁾ Представления групп $U(n)$ и $S(n)$ подробно рассмотрены в гл. V книги Вейля [39]. Соответствующий обзор для физиков был сделан Ициксоном и Науенбергом [40].

$\otimes U(k)$. Разлагая это линейное представление группы $U(k)$ на факториальные представления, получаем *те же самые* подпространства $\mathcal{H}_{[1]_\lambda}^{(n)}$. Поэтому тем же самым символом $[1]_\lambda$ можно обозначить соответствующее НП группы $U(k)$.

Суммируя, имеем

$$\text{для } S(n) \quad [1]_{\mathcal{H}^{(n)}} \sim \bigoplus_{\lambda} u_{\lambda} [1]_{\lambda}, \quad (1.15)$$

$$\text{для } U(k) \quad [1]_{\mathcal{H}^{(n)}} \sim \bigoplus_{\lambda} s_{\lambda} [1]_{\lambda}, \quad (1.15a)$$

где u_{λ} — размерность НП $[1]_{\lambda}$ группы $U(k)$, s_{λ} — размерность НП $[1]_{\lambda}$ группы $S(n)$.

Эта теорема является лейтмотивом книги Вейля, цитированной во введении, и неявно подразумевается в двух других книгах. Если $n > k$, то НП группы $U(k)$ соответствуют лишь те разбиения числа n , для которых $\sum \alpha_i \leq k$, т. е. схемы Юнга для НП группы $U(k)$ могут иметь произвольное число клеток, но число строк не должно превышать k . При этом $n=1$, \square соответствует k -мерному (фундаментальному) представлению группы $U(k)$, а $n=0$ — тривиальному (одномерному) представлению. Например, представление группы $U(2)$ задается разбиением $[\lambda_1, \lambda_2]$, где λ_1 и λ_2 — целые числа и $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$.

Представление, контраградиентное представлению $[\lambda_i^{\alpha_i}]$, имеет вид $[\lambda_i^{\alpha'_i}]$, где $\sum \alpha_i < k$, $\alpha'_i = k - \sum \alpha_i$, $\lambda'_1 = \lambda_1$, $\alpha'_j = \alpha_{k+2-j}$, $\lambda'_i = \lambda_i - \lambda_{k+1-i}$, $i, j > 1$. Короче говоря, схема Юнга $[\lambda_i^{\alpha'_i}]$,

будучи перевернута, дополняет схему $[\lambda_i^{\alpha_i}]$ до прямоугольника из k строк по λ_1 клеток.

Представления группы $SU(n)$. При ограничении НП группы $U(k)$ на подгруппу $SU(k)$ получается НП группы $SU(k)$. При этом те НП группы $U(k)$, схемы Юнга которых отличаются слева лишь на прямоугольный блок из столбцов длины k , дают при ограничении эквивалентные НП группы $SU(k)$. С учетом этого замечания можно однозначно задавать НП группы $SU(k)$ схемами Юнга. При этом мы получаем все неэквивалентные НП группы $SU(k)$.

Пример. Класс эквивалентности НП группы $SU(2)$, получающийся при ограничении НП $[\lambda_1, \lambda_2]$ группы $U(2)$, задается значением целого числа $(\lambda_1 - \lambda_2)$. Таким образом, его схема Юнга может быть представлена в виде горизонтальной строки

из $(\lambda_1 - \lambda_2)$ клеток. Для НП группы $SU(2)$ обычно используется символ

$$D_j \text{ с } j = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2), \quad (1.16)$$

где j называется спином представления. Размерность этого представления равна $2j + 1$. Оператор Казимира для этого представления при выборе нормировки, используемой физиками, имеет вид $j(j+1)I$ и равен удвоенному оператору, определенному уравнением (1.9). (Это связано с тем, что физики выбирают в качестве формы Киллинга — Картана $\frac{1}{2} \text{Sp}[D(a)D(b)]$.)

Напомним также известное разложение

$$D_{l_1} \otimes D_{l_2} = \bigoplus_{j=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} D_j. \quad (1.17)$$

Заметим, что все представления группы $SU(2)$ контраградиентны сами себе.

Представления присоединенной группы $SU(n)/Z_n$. Центром группы $SU(k)$ является Z_k — циклическая группа k элементов, так что присоединенной группой группы $SU(k)$ является группа $SU(k)/Z_k$. Представлениями этой группы являются те представления группы $SU(k)$, схемы Юнга которых содержат число клеток, кратное k . Например, группа $SU(2)/Z_2 = SO(3)$, а ее представления — это D_j с целыми значениями j . Соответствующие схемы Юнга содержат только одну строку из четного числа $(2j)$ клеток.

Присоединенное представление группы $SU(n)$ или ее присоединенная группа — это представление, действующее в пространстве ее алгебры Ли. Оно имеет размерность $n^2 - 1$, задается разбиением $[2, 1^{n-2}]$ и эквивалентно контраградиентному представлению.

Замечание относительно произвольной группы. Пусть $\mathcal{H}^{(1)}$ есть пространство линейного унитарного представления (оно может быть приводимым и $\dim \mathcal{H}^{(1)}$ может равняться бесконечности) для произвольной группы. Как мы видели, на пространстве $\mathcal{H}^{(n)} = \bigotimes^n \mathcal{H}^{(1)}$ действуют группы $S(n)$ и G . Подпространства $\mathcal{H}_{\lambda}^{(n)}$ примарных представлений группы $S(n)$, вообще говоря, не являются подпространствами примарных представлений группы G . Физикам было бы интересно познакомиться с методами выяснения природы G -представлений, действующих в различных пространствах $\mathcal{H}_{\lambda}^{(n)}$, особенно в некоторых слу-

чаях, например для $\mathcal{H}_{[n]}^{(n)}$ (бозоны) и $\mathcal{H}_{[1^n]}^{(n)}$ (фермионы). В качестве примера приведем результат, доказанный О. Бором [41].

Пусть $G = SO(3)$, $\mathcal{H}^{(1)}$ — пятимерное гильбертово пространство представления D_2 . Для любого n представление группы

$SO(3)$, действующее в пространстве $\mathcal{H}_{[n]}^{(n)} = \bigvee^n \mathcal{H}^{(1)}$, при разложении в прямую сумму НП не содержит представления D_1 . (Физически ядро со спином 0 в основном состоянии не имеет состояний со спином 1, соответствующих коллективным возбуждениям.)

Можно добавить к этому, что если НП группы G входит в $\mathcal{H}^{(n)}$ только один раз, то оно действует либо в пространстве $\mathcal{H}_{[n]}^{(n)}$, либо в пространстве $\mathcal{H}_{[1^n]}^{(n)}$.

1.5. ЕЩЕ ОБ АЛГЕБРАХ И ТЕНЗОРНЫХ ОПЕРАТОРАХ. ПСЕВДОКОРНИ ГРУППЫ $SU(n)$

Алгебра на векторном пространстве \mathcal{E} — это элемент $\text{Hom}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}, \mathcal{E})$. Алгебра является симметрической (соответственно, антисимметрической), если она представляет элемент $\text{Hom}(\mathcal{E} \vee \mathcal{E}, \mathcal{E})$ [соответственно, $\text{Hom}(\mathcal{E} \wedge \mathcal{E}, \mathcal{E})$]. Аналогично можно определить коалгебру, симметрическую и антисимметрическую, как элементы $\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$, $\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E} \vee \mathcal{E})$ и $\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E} \wedge \mathcal{E})$.

Если \mathcal{E} — пространство линейного представления группы G , то элементы $\text{Hom}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}, \mathcal{E})^G$ ($\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{E})^G$) — это алгебры (коалгебры), группы автоморфизмов которых содержат группу G .

Если G — компактная полупростая группа Ли, то для выполнения условия $\dim \text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{E})^G > 0$ необходимо, чтобы представление на \mathcal{E} имело невырожденный вес. Например, для пространства \mathcal{E} присоединенного представления $\dim \text{Hom} \times \times (\mathcal{E} \wedge \mathcal{E}, \mathcal{E})^G = 1$ для всех простых компактных групп Ли и соответствующая антисимметрическая алгебра совпадает с самой алгеброй Ли.

В гл. 5 будут рассмотрены два примера симметрических алгебр, однозначно определенных на вещественном пространстве НП группы $G = SU(3) \otimes SU(3)$ с $\dim \text{Hom}(\mathcal{E} \vee \mathcal{E}, \mathcal{E})^G = 1$. Для присоединенного представления простой компактной алгебры Ли $\dim \text{Hom}(\mathcal{E} \vee \mathcal{E}, \mathcal{E})^G = 0$ или 1. Последнее значение осуществляется, например, для группы $SU(n)$ при $n > 2$. Симметрической алгеброй для группы $SU(n)$ начали пользоваться в литературе по физике элементарных частиц после того, как

она была введена Гелл-Манном; мы рассмотрим лишь некоторые свойства этой алгебры.

Пусть \mathcal{G}_n — $(n^2 - 1)$ -мерное вещественное векторное пространство эрмитовых $n \times n$ -матриц со следом, равным нулю. Действие элемента $u \in SU(n)$ на пространстве \mathcal{G}_n (векторном пространстве алгебры Ли) дается формулой $x \xrightarrow{u} u x u^{-1} = u x u^*$. Эвклидово скалярное произведение

$$(x, y) = \frac{1}{2} \text{Sp}(xy) \quad (1.18)$$

является инвариантом. Закон умножения в алгебре Ли группы $SU(n)$ имеет вид

$$x \wedge y = -\frac{i}{2}(xy - yx) \equiv -\frac{i}{2}[x, y] \quad (1.19)$$

и соответственно для симметрической алгебры ¹⁾

$$x \vee y = \frac{1}{2}[x, y] - \frac{2}{n}(x, y)\mathbf{1}, \quad \{x, y\} = xy + yx. \quad (1.19a)$$

Заметим, что для $n=2$ этот закон тривиален: $x \vee y = 0$.

В физической литературе (главным образом для $n=3$) вводится ортонормированный базис $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, n^2 - 1$), а для структурных постоянных f_{ijk}, d_{ijk} пользуются традиционными обозначениями $e_i \wedge e_j = \sum_k f_{ijk} e_k$, $e_i \vee e_j = \sum_k d_{ijk} e_k$. Используем обозначения $F(a)$ и $D(a)$ для линейных отображений на \mathcal{G} :

$$F(a)x = a \wedge x, \quad D(a)x = a \vee x \quad (1.20)$$

[в матричном виде $F(e_j)_{ik} = f_{ijk}$, $D(e_j)_{ik} = d_{ijk}$].

Относительно скалярного произведения (1.18) отображение $F(a)$ антисимметрично, $D(a)$ симметрично. Отображения D и F являются тензорными операторами $\in \text{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{L}(\mathcal{G}))^{SU(n)}$, так что из теоремы, сформулированной в конце разд. 1.3, следует, что $\text{Sp} D(a) = 0$. Как известно, централизатор элемента x в алгебре Ли $SU(n)$, т. е. множество $\{y, y \wedge x = 0\}$, является подалгеброй Ли размерности $n - 1$ или выше. Если ее размерность равна $n - 1$, то это абелева подалгебра. Она называется подалгеброй Картана \mathcal{G}_x элемента x . (Все подалгебры

¹⁾ Эта алгебра не является юрдановой алгеброй. Однако можно начать с представления, имеющего размерность n^2 и реализуемого на эрмитовых $n \times n$ -матрицах. Соответствующая симметрическая алгебра является юрдановой алгеброй.

Картана могут быть преобразованы одна в другую при помощи преобразования группы G .) Подалгебра \mathcal{E}_x является линейной оболочкой $(n-1)$ линейно независимого вектора: $x, x \vee x, (x \vee x) \vee x = x \vee (x \vee x)$ и т. д. и является также подалгеброй относительно закона „ \vee “. Корни $SU(n)$ — это решения уравнения $r^n - (r, r) r^{n-2} = 0$. Мы нормируем их условием $(r, r) = 1$. В подалгебре Картана \mathcal{E} существует $n(n-1)$ нормированный корень r_k [если r является корнем, то $(-r)$ — тоже корень]. Для каждого $a \in \mathcal{E}$ спектр оператора $F(a)$ имеет $(n-1)$ нуль на подпространстве пространства \mathcal{E} , а на ортогональном к нему подпространстве \mathcal{E}^\perp :

$$\text{спектр } F(a)|_{\mathcal{E}^\perp} = \{i(a, r_k)\}. \quad (1.21)$$

Для $n > 2$ определим

$$\sqrt{\frac{n-2}{n}} q_k = r_k \vee r_k = (-r_k) \vee (-r_k). \quad (1.22)$$

Тогда

$$(q_k, q_k) = 1, \quad (1.22a)$$

и эти величины являются идемпотентами в \vee -алгебре:

$$q_k \vee q_k = \frac{n-4}{\sqrt{n(n-2)}} q_k. \quad (1.23)$$

Мы назовем их „псевдокорнями“ [они являются весами алгебры $SU(n)$], так как для любого $a \in \mathcal{E}$ они удовлетворяют условию

$$\text{спектр } D(a)|_{\mathcal{E}^\perp} = \left\{ \frac{n-2}{n} (q_k, a) = (a, r_k \vee r_k) \right\}, \quad (1.24)$$

причем все собственные значения имеют кратность по крайней мере 2.

Обозначим через $\lambda \in \text{Hom}(\mathcal{E} \wedge \mathcal{E}, \mathcal{E})^{SU(n)}$, $\nu \in \text{Hom}(\mathcal{E} \vee \mathcal{E}, \mathcal{E})^{SU(n)}$ гомоморфизмы векторных пространств

$$\lambda(x \otimes y) = x \wedge y, \quad \nu(x \otimes y) = x \vee y$$

и рассмотрим гомоморфизмы правые обратные к ним:

$$\lambda \circ \lambda' = \text{тождество на } \mathcal{E}, \quad \nu \circ \nu' = \text{тождество на } \mathcal{E}. \quad (1.25)$$

Заметим, что λ и λ' могут быть определены для любой полупростой алгебры Ли. Как мы уже сказали, λ' и ν' определяют коалгебры на \mathcal{E} . Если T есть \mathcal{E} -тензорный оператор, то, используя отображение \hat{T} диаграммы 2, можно определить \mathcal{E} -тензорные операторы

$$T \wedge T = \hat{T} \circ \lambda' \quad \text{и} \quad T \vee T = \hat{T} \circ \nu'. \quad (1.26)$$

Действуя последовательно, получаем

$$(\dots ((T_{\tau_1} T)_{\tau_2} T) \dots)_{\tau_k} T, \quad (1.26a)$$

где τ_i — это либо \wedge , либо \vee . Для физиков, которые привыкли пользоваться координатами, в пространстве октета группы $SU(3)$ получаем ¹⁾

$$\lambda'(e_i) = -\frac{1}{3} \sum_{j,k} f_{ijk} e_j \otimes e_k, \quad \nu'(e_i) = \frac{3}{5} \sum_{j,k} d_{ijk} e_j \otimes e_k.$$

Если обозначить $T(e_i) = T_i$, то

$$(T \wedge T)_i = -\frac{1}{3} \sum_{j,k} f_{ijk} T_j T_k, \quad (T \vee T)_i = \frac{3}{5} \sum_{j,k} d_{ijk} T_j T_k.$$

Заметим, что когда группа G компактна, а $\dim \text{Hom}(\mathcal{E}_\tau \mathcal{E}, \mathcal{E})^a = 1$ (τ — или \wedge , или \vee), мы можем, конечно, определить величины $T \wedge T$, $T \vee T$ для любого вещественного неприводимого \mathcal{E} -тензорного оператора, так как существует НП группы G на \mathcal{E} , которое ортогонально и оставляет инвариантным евклидово скалярное произведение. В самом деле, в этом случае операторы $\lambda(\nu)$ сюръективны и осуществляют изоморфизм между $(\text{Кег } \lambda)^\perp$ и \mathcal{E} [между $(\text{Кег } \nu)^\perp$ и \mathcal{E}], так что мы можем определить операторы правые обратные к ним.

Рассмотрим более частный случай, когда G -морфизм T совпадает с самим F [см. уравнение (1.6)], т. е. с представлением (с точностью до множителя i) алгебры Ли на \mathcal{H} . При этом $F \wedge F = iF$. В теории элементарных частиц часто используется группа $SU(3)$, $F \vee F$ называют тогда оператором D -связи (см. разд. 5.16).

Следуя школьной традиции, обозначим закон композиции в алгебре Ли для группы $SU(2)$ значком \times (символизирующим векторное произведение):

$$[F(\mathbf{a}), F(\mathbf{b})] = iF(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad (1.27)$$

а структурные постоянные обозначим через e_{ijk} :

$$e_i \times e_j = \sum_k e_{ijk} e_k. \quad (1.28)$$

Таким образом, если \mathbf{A} — векторный оператор [$A(e_i) = A_i$], то

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{A})_i = \sum_{j,k} e_{ijk} A_j A_k = \frac{1}{2} e_{ijk} [A_j, A_k]. \quad (1.29)$$

¹⁾ Здесь величины f_{ijk} и d_{ijk} — структурные постоянные, введенные Гелл-Манном.

Замечание. Если даны два \mathcal{G} -тензорных оператора A и B , то можно определить такие операторы, как

$$A \vee B = A \otimes B \circ \nu', \quad A \wedge B = A \otimes B \circ \lambda'$$

и, в частности, $A \times B$. Если $A = B$, то это сводится к уравнению (1.26).

1.6. ЕЩЕ О ГРУППЕ $SU(2)$ И ЕЕ ТЕНЗОРНЫХ ОПЕРАТОРАХ

Для группы $SU(2)$ симметрическая алгебра \vee для присоединенного представления тривиальна: $\dim(\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}, \mathcal{G})^{SU(2)} = \dim(\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}, \mathcal{G})^{SU(2)} = 1$.

В самом общем случае, когда мы имеем три НП, действующие в пространствах $\mathcal{E}_{j_1}, \mathcal{E}_{j_2}, \mathcal{E}_{j_3}$,

$$\dim \text{Hom}(\mathcal{E}_{j_1} \otimes \mathcal{E}_{j_2}, \mathcal{E}_{j_3})^g = \Delta(j_1, j_2, j_3) = 0 \text{ или } 1, \quad (1.30)$$

где $\Delta(j_1, j_2, j_3) = 1$, если $|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2$ (условие треугольника) и $\Delta = 0$ в остальных случаях. Эквивалентную формулировку этого результата физики называют *теоремой Вигнера — Экарта*, а группы, обладающие свойством (1.30), Вигнер назвал просто приводимыми.

В этом разделе мы будем часто ссылаться на две книги: работу [42] — сборник репринтов и оригинальных статей под редакцией Биденхарна и ван Дама и работу [43] — сборник, посвященный памяти Ракá.

Во втором сборнике на стр. 131—136 Вигнер доказал следующую теорему для конечных групп.

Теорема. Пусть G — конечная группа, а H — ее подгруппа. Тогда следующие условия эквивалентны.

а) При ограничении на H произвольного НП группы G кратности, с которыми входят в разложение НП группы H , не превышают 1.

б) Кольцо классов элементов группы G , сопряженных относительно подгруппы H , является абелевым.

Разъясним условия „а“ и „б“ более подробно.

а) Пусть дано НП группы G в пространстве \mathcal{H} . Его ограничение на подгруппу H , вообще говоря, приводимо, и при разложении кратности входящих НП группы H не превышают 1. Иными словами, коммутант представления группы H (т. е. множество всех ограниченных элементов в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, коммутирующих со всеми операторами представления группы H , которое есть алгебра), является абелевой алгеброй.

б) Пусть дан элемент $a \in G$. Класс сопряженных элементов относительно H — это множество $A = \{hah^{-1}, \forall h \in H\}$. Если даны два таких класса A и B , то мы определим их произведение $A \cdot B$ как множество $\{ab, a \in A, b \in B\}$. Условие „б“ означает, что для любой пары классов справедливо равенство $A \cdot B = B \cdot A$. По-видимому, нетрудно распространить доказательство теоремы Вигнера на компактные группы.

Примерами пар групп и подгрупп, удовлетворяющих этой теореме, являются $S(n)$ и $S(n-1)$, $U(n)$ и $U(n-1)$ ¹⁾.

Используя закон умножения в группе, можно доказать, что прямое произведение $SU(2) \otimes SU(2)$ и диагональная подгруппа этой группы удовлетворяют условию „б“. Из теоремы Вигнера для них следует соотношение (1.30). Если это возможно, было бы интересно распространить доказательство Вигнера на локально компактные группы типа 1²⁾.

Другое свойство группы $SU(2)$, которое мы уже отмечали, заключается в том, что любое ее НП эквивалентно контраградиентному представлению. Для произвольного представления D_j это определяет изоморфизм C между пространством \mathcal{E}_j представления D_j и дуальным к нему пространством \mathcal{E}'_j : $\mathcal{E}_j \xrightarrow{C} \mathcal{E}'_j$. Изоморфизм C обладает каноническим свойством

$$\mathcal{E}_j \xrightarrow{C} \mathcal{E}'_j, \quad C^T = (-1)^{2j} C, \quad (1.31)$$

где C^T — матрица, транспонированная матрице C . Физики нормируют C условием

$$C^T C = 1. \quad (1.32)$$

Теперь мы подготовили вас к понятию об исчислении, разработанном независимо Вигнером и Рака́ и необходимым физикам для того, чтобы полностью использовать в атомной физике (а также в ядерной физике и многих других разделах квантовой физики) инвариантность относительно вращений. Многие из чисел в атомных спектрах (расстояния между соседями в семействе спектральных линий, относительные интенсивности линий

¹⁾ После этой лекции профессор Дж. Макки с помощью своей теории индуцированных представлений привел доказательство для компактных групп.

²⁾ В 1941 г. Вигнер доказал для конечных групп (статья перепечатана в сборнике [42]) другое свойство, эквивалентное свойствам „а“ и „б“. Пусть $\zeta(g)$ — число квадратных корней элемента g в конечной группе G , а $\nu(g)$ — число элементов группы G , коммутирующих с g . В конечной группе $\sum_{g \in G} [\nu(g)^2 - \zeta(g)^2] \geq 0$. Равенство осуществляется в том и только том случае, когда группа G является просто приводимой.

и т. д.) оказываются алгебраическими функциями коэффициентов, определенных Вигнером и Ракá. Поскольку эти коэффициенты весьма полезны, им посвящена обширная литература. Обнаружено, что они обладают неожиданными симметриями, и были выдвинуты касающиеся их недоказанные гипотезы. Однако язык этого физического фольклора, по-видимому, не известен математически мыслящему этнографу.

Для записи $3j$ -коэффициентов Вигнера физики выбирают базис в каждом из гильбертовых пространств \mathcal{E}_j , в котором действует представление D_j . Базис состоит из собственных векторов подгруппы $U(1)$ [картановской подгруппы группы $SU(2)$], упорядоченных в терминах уменьшения собственного значения μ (меняющегося от j до $-j$ через единицу). Очевидно, что большая часть этих свойств не зависит от выбора базиса. Рассмотрим элемент одномерного векторного пространства

$$(\mathcal{E}'_{j_1} \otimes \mathcal{E}'_{j_2} \otimes \mathcal{E}_{j_3})^a = \text{Hom}(\mathcal{E}_{j_1} \otimes \mathcal{E}_{j_2}, \mathcal{E}_{j_3})^a. \quad (1.33)$$

Обозначим его через

$$(\overset{\circ}{j}_1, \overset{\circ}{j}_2, \overset{\circ}{j}_3). \quad (1.34)$$

Изоморфизм \mathbf{C} и преобразование, обратное к нему, определенные формулами (1.31) и (1.32), преобразуют тензор (1.34) следующим образом:

$$(\overset{\circ}{j}_1, \overset{\circ}{j}_2, \overset{\circ}{j}_3) \in (\mathcal{E}'_{j_1} \otimes \mathcal{E}'_{j_2} \otimes \mathcal{E}'_{j_3})^a = \text{Hom}(\mathcal{E}_{j_1} \otimes \mathcal{E}_{j_2} \otimes \mathcal{E}_{j_3}, \mathbf{C})^a, \quad (1.35)$$

$$(\underset{\circ}{j}_1, \underset{\circ}{j}_2, \underset{\circ}{j}_3) \in (\mathcal{E}_{j_1} \otimes \mathcal{E}_{j_2} \otimes \mathcal{E}_{j_3})^a = \text{Hom}(\mathbf{C}, \mathcal{E}_{j_1} \otimes \mathcal{E}_{j_2} \otimes \mathcal{E}_{j_3})^a, \quad (1.36)$$

$$(\overset{\circ}{j}_1, \underset{\circ}{j}_2, \underset{\circ}{j}_3) \in (\mathcal{E}'_{j_1} \otimes \mathcal{E}_{j_2} \otimes \mathcal{E}_{j_3})^a = \text{Hom}(\mathcal{E}_{j_1}, \mathcal{E}_{j_2} \otimes \mathcal{E}_{j_3})^a, \quad (1.37)$$

и т. д.

Из уравнений (1.35), (1.36) видно, что величины $(\overset{\circ}{j}_1, \overset{\circ}{j}_2, \overset{\circ}{j}_3)$ соответственно $(\underset{\circ}{j}_1, \underset{\circ}{j}_2, \underset{\circ}{j}_3)$ принадлежат к одномерному представлению группы перестановок трех пространств, задаваемых числами j_1, j_2, j_3 ; вычисления показывают, что это представление имеет вид

$$\begin{aligned} \square\square\square & \text{ (симметричное), если } j_1 + j_2 + j_3 \text{ — четное число,} \\ \square & \text{ (антисимметричное), если } j_1 + j_2 + j_3 \text{ — нечетное число.} \end{aligned} \quad (1.38)$$

Композиция двух гомоморфизмов

$$\mathcal{E}_{j_1} \otimes \mathcal{E}_{j_2} \otimes \mathcal{E}_{j_3} \xrightarrow{(\overset{\circ}{j}_1, \overset{\circ}{j}_2, \overset{\circ}{j}_3)} \mathbf{C} \xrightarrow{(\underset{\circ}{j}_1, \underset{\circ}{j}_2, \underset{\circ}{j}_3)} \mathcal{E}_{j_1} \otimes \mathcal{E}_{j_2} \otimes \mathcal{E}_{j_3} \quad (1.39)$$

является элементом $\text{Hom}(\mathcal{E}_{j_1} \otimes \mathcal{E}_{j_2} \otimes \mathcal{E}_{j_3}; \mathcal{E}_{j_1} \otimes \mathcal{E}_{j_2} \otimes \mathcal{E}_{j_3})^a$, который мы обозначим через $(\overset{\circ}{j}_1 \overset{\circ}{j}_2 \overset{\circ}{j}_3) (\underset{\circ}{j}_1 \underset{\circ}{j}_2 \underset{\circ}{j}_3)$.

Вигнер доказал (см. [42] и уравнение (24.18b) книги [12], цитированной во введении), что

$$\int_{SU(2)} D_{l_1}(g) \otimes D_{l_2}(g) \otimes D_{l_3}(g) d\mu(g) = (j_1, j_2, j_3) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad (1.40)$$

где $d\mu(g)$ — инвариантная мера на группе $SU(2)$, такая, что $\int d\mu(g) = 1$.

Отсюда с точностью до знака можно также определить, какой элемент одномерного векторного пространства $(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{E}_3)^a$ выбран физиками для величины (j_1, j_2, j_3) .

Конечно, у тензоров часть индексов может быть свернута (что обозначается знаком \times); например, $(\overset{a}{a}, \overset{b}{b}, \overset{c}{c}) \overset{\times \circ \circ}{(cpq)}$ — составной гомоморфизм

$$\mathcal{E}_a \otimes \mathcal{E}_b \otimes \mathcal{E}_p \otimes \mathcal{E}_q \xrightarrow{(\overset{a}{a} \overset{b}{b} \overset{c}{c}) \otimes I_p \otimes I_q} \mathcal{E}_c \otimes \mathcal{E}_p \otimes \mathcal{E}_q \xrightarrow{(\overset{c}{c} \overset{p}{p} \overset{q}{q})} \mathbf{C}.$$

Обозначения Вигнера очень удобны!

Заметим, что уравнение (1.40) дает

$$\int_{SU(2)} \chi_{l_1}(g) \chi_{l_2}(g) \chi_{l_3}(g) d\mu(g) = \begin{matrix} \times & \times & \times \\ (j_1 & j_2 & j_3) \\ \times & \times & \times \end{matrix} = \Delta(j_1 j_2 j_3), \quad (1.41)$$

где χ_j — характер представления D_j .

При больших значениях j для компонент этих тензоров в описанном выше базисе существуют приближенные асимптотические выражения (см. библиографию в работе [42]). Редже (его статья перепечатана в сборнике [42]) для множества компонент $\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix}$ величин $(j_1 j_2 j_3)$ обнаружил группу симметрии $\sim \text{Aut}(S(3) \times S(3))$, состоящую из 72 элементов¹⁾.

В 1941 г. Ракá и Вигнер (обе статьи перепечатаны в [42]) ввели „6j-символы“ [численные функции шести НП группы $SU(2)$]²⁾.

Рассмотрим последовательность $SU(2)$ -гомоморфизмов

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_e &\xrightarrow{\begin{pmatrix} \circ & f & a \\ e & \circ & \circ \end{pmatrix}} \mathcal{E}_f \otimes \mathcal{E}_a \xrightarrow{I_f \otimes \begin{pmatrix} \circ & b & c \\ a & \circ & \circ \end{pmatrix}} \mathcal{E}_f \otimes \mathcal{E}_b \otimes \mathcal{E}_c \xrightarrow{\begin{pmatrix} \circ & \circ & d \\ f & b & \circ \end{pmatrix} \otimes I_c} \\ &\rightarrow \mathcal{E}_d \otimes \mathcal{E}_c \xrightarrow{\begin{pmatrix} \circ & \circ & e \\ a & d & \circ \end{pmatrix}} \mathcal{E}_e. \end{aligned} \quad (1.42)$$

¹⁾ Большая часть этих симметрий возникает естественно, см. статью Баргмана в [42]; относительно остальных симметрий см. работу Фламанды [44].

²⁾ Часто их называют „recoupling coefficients“. Они являются стандартными.

Поскольку \mathcal{E}_e есть пространство НП, этот $SU(2)$ -гомоморфизм должен быть кратен тождественному оператору на \mathcal{E}_e .

Его след определяет (с точностью до знака, который я здесь не гарантирую) $6j$ -символ

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\} = (-1)^{b+c-d+e+f} \begin{pmatrix} \times & f & a \\ e & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \times & b & c \\ a & \times & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \times & \times & d \\ f & b & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \times & \times & e \\ a & c & \times \end{pmatrix}. \quad (1.43)$$

Вигнер показал, что для фиксированных значений a, b, d и e ,

$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\}$ — матрица, ортогональная по индексам c и f . Он

также доказал соотношение (см. книгу [12], гл. 24).

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\}^2 &= \\ &= \int \int \int \chi_a(r) \chi_b(s) \chi_c(t) \chi_d(st^{-1}) \chi_e(tr^{-1}) \chi_f(rs^{-1}) d\mu(r) d\mu(s) d\mu(t). \end{aligned}$$

Асимптотически эта величина является быстро осциллирующей функцией нескольких переменных, но при усреднении по некоторой области одного аргумента, в том случае когда a, b, c, d, e и f представляют собой длины сторон тетраэдра, принимает асимптотическое значение

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\}^2 \rightarrow (24\pi V)^{-1},$$

где V — объем этого тетраэдра.

Понцано и Редже (первая статья сборника [43]) выдвинули гипотезу о точных асимптотических формулах для величин

$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\}$ вне зависимости от того, могут или не могут быть величины a, b, c, d, e и f длинами сторон тетраэдра.

Кроме того, Редже нашел (см. статью в [42]) наибольшую линейную группу, действующую на Z -модуле, порожденном символами $a/2, b/2, c/2, d/2, e/2, f/2$, и имеющую величину

$\left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\}$ в качестве инварианта. Это группа $S(3) \times S(4)$, в нее

входит также группа перестановок столбцов. Очень хорошие

и симметричные выражения для символов $(j_1 j_2 j_3)$ и $\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\}$

можно найти в статье Баргмана (последняя статья в [43]), где в качестве пространств НП группы $SU(2)$ были использованы гильбертовы пространства аналитических функций.

2. Атомная и молекулярная физика

2.1. ТЕОРИЯ ГРУПП И АТОМНАЯ ФИЗИКА

Приведем типичный пример применения теории групп в атомной физике. Только четная часть $f_+(\mathbf{r}) = 1/2(f(\mathbf{r}) + f(-\mathbf{r}))$ функции $f(\mathbf{r})$ [соответственно, симметричная часть $f_+(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 1/2(f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + f(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1))$ функции $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$] дает вклад в интеграл по всему пространству $\int f(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$ (соответственно, $\int f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \times \times d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2$). Этим объясняются два эмпирических факта (известных еще до 1926 г.): правило отбора Лапорта для атомных спектров и разбиение спектра гелия на два независимых подмножества (соответствующих ортогелию и парагелию). Конечно, эти примеры относятся к самым простым, поскольку оба они основаны на инвариантности относительно группы (Z_2) , состоящей из двух элементов. В дальнейшем мы будем использовать инвариантность относительно групп $SO(3)$, $S(n)$ и $U(2)$ для атомов и относительно подгрупп группы $SO(3)$ для молекул.

2.2. ПРИНЦИП СООТВЕТСТВИЯ

Мы имеем уже общее описание квантовой механики, теперь нам нужно понять, как изучить данную физическую систему. По-видимому, не существует аксиоматической формулировки этой проблемы, так что в данном случае физика еще находится на грани искусства! Однако если рассматриваемая система имеет конечное число степеней свободы и может быть описана с помощью классической гамильтоновой механики, то „принцип соответствия“ покажет нам, как можно описать эту систему в квантовом случае.

Пусть $\dot{h}(p_k, q_l)$ есть классический гамильтониан системы. Тогда уравнения Гамильтона имеют вид

$$\frac{dp_k}{dt} = \dot{p}_k = -\frac{\partial h}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_l = \frac{\partial h}{\partial p_l}.$$

В квантовой механике соответствующие наблюдаемые P_k , Q_l образуют абстрактную алгебру с единицей

$$\begin{aligned} P_k Q_l - Q_l P_k &= [P_k, Q_l] = -i\hbar \delta_{kl} \mathbf{I}, \\ [P_k, P_l] &= 0 = [Q_k, Q_l], \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $2\pi\hbar$ — постоянная Планка.

В рассматриваемых нами случаях $h = h' + h''$, где h' является функцией p_k , а h'' — функцией q_l . Поэтому $H = H' + H''$, где H' и H'' — некоторые функции P_k и Q_l соответственно. Заметим, что до сих пор не существует синтетической формулировки квантовой механики, подобной формулировке классической механики в терминах симплектических многообразий (исключение составляют работы Костанта [45] и Сурьо [46])¹⁾. Мы знаем также, что соотношение между классической и квантовой трактовкой одной и той же проблемы не является простым (см., например, работу ван Хова [48] о сравнении групп автоморфизмов в этих двух случаях).

Оператор Гамильтона является генератором сдвигов во времени, так что

$$[H, Q_k] = i\hbar \dot{Q}_k, \quad [H, P_l] = i\hbar \dot{P}_l. \quad (2.2)$$

Представление алгебры, определенной уравнениями (2.1) и (2.2), получено независимо от Гейзенберга Шредингером, использовавшим понятие волны де Бройля. В самом деле, алгебра (2.1) может быть реализована самосопряженными операторами пространства $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, где \mathcal{H} — гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций $\psi(q_l)$. При этом

$$Q_k \psi = q_k \psi, \quad P_l \psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_l} \psi. \quad (2.3)$$

Величина ψ также является функцией времени t , и уравнение Шредингера принимает вид

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi. \quad (2.4)$$

При анализе рассмотренного выше представления возникают некоторые затруднения. С другой стороны, из теоремы фон Неймана [49] следует, что все неприводимые представления

¹⁾ См. также книгу Кириллова [47]. — Прим. перев.

алгебры, определенной уравнением (2.1), эквивалентны, если e^{iP_k} , e^{iQ_l} реализованы унитарными операторами¹⁾.

Открытие квантовой механики принадлежит также и Дираку, давшему очень четкую формулировку „принципа соответствия“²⁾. В классической гамильтоновой механике существует алгебра Ли скобок Пуассона (СП). Пусть f и g — две функции переменных p_k и q_l , тогда

$$\text{СП}(f, g) = \sum_l \left(\frac{\partial f}{\partial p_l} \frac{\partial g}{\partial q_l} - \frac{\partial f}{\partial q_l} \frac{\partial g}{\partial p_l} \right). \quad (2.5)$$

Алгебра Ли соответствующих квантовых наблюдаемых имеет вид

$$[F, G] = i\hbar \cdot \text{квантовая наблюдаемая СП}(f, g). \quad (2.5a)$$

Как известно, величина $|\psi|^2 \Pi dq_k$, где ψ — решение уравнения Шредингера (2.4), представляет собой плотность вероятности найти систему с координатами $\{q_k\}$. Это, конечно, очень привлекательно для физиков. Вам, как математикам, разумеется, приятнее работать с абстрактной алгеброй. Чтобы коротко, но наглядно продемонстрировать использование этой алгебры, докажем соотношения неопределенностей Гейзенберга.

Пусть A и B — самосопряженные операторы, соответствующие наблюдаемым a , b . Мы уже видели, что если $|x\rangle$ есть данное состояние изучаемой нами физической системы, то $\langle x|A|x\rangle$ есть среднее значение величины a в состоянии $|x\rangle$, а дисперсия этой величины в состоянии $|x\rangle$ дается формулой

$$(\Delta a)_x = |\langle x|(A - \langle x|A|x\rangle)^2|x\rangle|^{1/2} = |\langle x|\hat{A}^2|x\rangle|^{1/2} = \|\hat{A}x\|, \quad (2.6)$$

где

$$\hat{A} = A - \mathbf{I} \langle x|A|x\rangle. \quad (2.6a)$$

Но в силу неравенства Шварца

$$(\Delta a)_x (\Delta b)_x = \|\hat{A}x\| \cdot \|\hat{B}x\| \geq |\langle \hat{A}x, \hat{B}x \rangle| \geq \frac{1}{2} |\langle x|[A, B]|x\rangle|. \quad (2.7)$$

¹⁾ Для систем с бесконечным числом степеней свободы, с которыми мы встречаемся в статистической механике и теории поля, это далеко не так. Впервые бесконечное число НП соотношений (2.1) было найдено Фридрихом, а затем ван Ховом, Гордингом и Уайтманом, Сигалом и некоторыми другими физиками и математиками. Этому вопросу посвящена прекрасная, хоть и небольшая книга Гишарде [50] (см. также работу Дж. Макки [51]).

²⁾ Вначале выражение „принцип соответствия“ имело более ограниченный смысл.

Если A и B удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и величины P и Q , то мы получаем

$$(\Delta a)_x (\Delta b)_x \geq \frac{1}{2} \hbar. \quad (2.8)$$

2.3. ЧАСТИЦА С МАССОЙ m В СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

Пусть $V(r)$ — сферически симметричный потенциал. Тогда гамильтониан частицы имеет вид

$$H = \frac{1}{2m} \mathbf{P}^2 + V(r) \quad (2.9)$$

и инвариантен относительно ортогональной группы $O(3)$. В терминах разд. 1.3 H , \mathbf{P}^2 и $V(r)$ — „скалярные операторы“, \mathbf{P} , \mathbf{R} и $\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P}$ — (полярный и аксиальный) векторные операторы. Если \mathbf{a} , \mathbf{b} и т. д. — векторы трехмерного векторного пространства E_3 присоединенного представления группы $O(3)$, то перестановочные соотношения (2.1) можно записать в виде

$$[\mathbf{P}(\mathbf{a}), \mathbf{Q}(\mathbf{b})] = i\hbar \mathbf{I} \frac{1}{2} \beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = i\hbar (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mathbf{I}. \quad (2.10)$$

В этом соотношении β есть форма Киллинга — Картана, определенная уравнением (1.11)¹⁾.

Из (2.10) и выражения $\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P}$ для оператора момента количества движения, полученного из принципа соответствия (см. конец разд. 1.5), находим

$$[\mathbf{L}(\mathbf{a}), \mathbf{L}(\mathbf{b})] = i\hbar \mathbf{L}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}). \quad (2.11)$$

Это служит подтверждением того факта, что векторный оператор момента количества движения является представлением (с точностью до множителя i) алгебры Ли группы $O(3)$, действующим в нашем гильбертовом пространстве.

Некоторые физики пишут $\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}$ и $\mathbf{L} \cdot \mathbf{n}$ вместо $\mathbf{P}(\mathbf{a})$ и $\mathbf{L}(\mathbf{n})$. Однако не удивляйтесь, если во всех физических книгах вы увидите, что для ортонормированного базиса $\mathbf{Q}(e_i)$, $\mathbf{P}(e_j)$, $\mathbf{L}(e_k)$ используются векторные обозначения Q_i , P_j , L_k и пр.

Операторы, которые соответствуют наблюдаемым, являющимся интегралами движения, генерируют алгебру $\{H\}'$ — коммутант алгебры H . Следовательно, уравнение, которое может быть выведено из уравнения (2.10) и определения оператора \mathbf{L} :

¹⁾ См. также приложение о перестановочных соотношениях в конце этого раздела.

$\mathbf{a} \in E_3$, $[L(\mathbf{a}), H] = 0$, или символически $[\mathbf{L}, H] = 0$, (2.12) означает, с одной стороны, что гамильтониан инвариантен относительно вращений, а с другой стороны, что момент количества движения является интегралом движения.

Оператор Казимира для группы $O(3)$ (в нормировке, используемой физиками) имеет вид $\mathbf{L}^2 = \sum_{i=1}^3 L_i^2$, и, как хорошо известно, его значения для неприводимых представлений группы $SU(2)$ равны $j(j+1)\hbar^2$, где $2j$ — целое положительное число или нуль, а $2j+1$ — размерность представления. Для НП группы $SO(3)$ j принимает только целые значения. Если вектор состояния является собственным вектором оператора \mathbf{L}^2 с собственным значением $j(j+1)\hbar^2$, то для краткости мы будем говорить, что соответствующий момент количества движения равен $j\hbar$.

Приложение. О перестановочных соотношениях

Профессор Баргман указал мне, что я рассматривал группу инвариантности перестановочных соотношений только с точки зрения инвариантности относительно вращений [см. уравнение (2.10)]. Несомненно следует рассмотреть и общий случай, когда перестановочные соотношения имеют вид

$$[P_i, Q_j] = -i\hbar\delta_{ij}\mathbf{1} \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (2.10a)$$

Пусть $\mathbf{a} = (a_1 \dots a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1 \dots b_n) \in R^n$ и мы используем следующие обозначения для тензорных операторов: $P(\mathbf{a}) = \sum_i a_i P_i$,

$Q(\mathbf{b}) = \sum_j b_j Q_j$. Уравнение (2.10a) определяет $(2n+1)$ -мерную алгебру Ли, которая является центральным неабелевым расширением алгебры \mathfrak{g} пространства R^{2n} при помощи алгебры R^1 (центра алгебры \mathfrak{g}). Это расширение определяется антисимметричной билинейной формой на $R^{2n} = R^n \oplus R^n$:

$$\sigma(\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}, \mathbf{a}' \oplus \mathbf{b}') = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}' - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}', \quad (2.10б)$$

где $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a_i b_i$. Группой автоморфизмов алгебры \mathfrak{g} является симплектическая группа $Sp(n)$, оставляющая эту форму инвариантной.

Соответствующая односвязная группа G имеет с точностью до эквивалентности единственное унитарное НП (теорема фон Неймана). Шредингеровская реализация этого представления — это реализация операторами на пространстве \mathcal{L}^2 функций n

переменных: $x = (x_1 \dots x_n)$, $U_a = e^{iP(a)}$, $(U_a f)(x) = f(x + a)$, $V_b = e^{iQ(b)}$, $(V_b f)(x) = e^{ihb \cdot x} f(x)$. Здесь x , $a \in \mathcal{E}_n$, $b \in \mathcal{E}'_n$ — пространство дуальное к \mathcal{E}_n . В случае уравнения (2.10) $n=3$. Кроме того, группа вращений $SO(3)$ оставляет инвариантной симметричную линейную форму β на \mathcal{E}_3 и мы используем соответствующую идентификацию пространства \mathcal{E}_3 и дуального к нему пространства.

2.4. АТОМ ВОДОРОДА

Рассмотрим две частицы с массами m_1 и m_2 и электрическими зарядами Ze и $(-e)$ (Z — положительное целое число). Полный гамильтониан такой системы имеет вид

$$h_{\text{полн}} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} - \frac{Ze^2}{r}, \quad (2.13)$$

где $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

Введем в качестве новых переменных вместо \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 координаты центра масс

$$\mathbf{r}_0 = (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) (m_1 + m_2)^{-1} \quad (2.14)$$

и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$; пусть \mathbf{p}_0 и \mathbf{p} — сопряженные им величины. Тогда

$$h_{\text{полн}} = \frac{p_0^2}{2(m_1 + m_2)} + \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} \right) = h_{cm} + h, \quad (2.15)$$

где

$$m = m_1 m_2 (m_1 + m_2)^{-1}. \quad (2.15a)$$

Движение центра масс описывается оператором h_{cm} , а h соответствует внутренней энергии системы. Поэтому в квантовом случае для определения уровней энергии атома водорода необходимо найти спектр оператора

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{R}. \quad (2.16)$$

Впервые с квантовой точки зрения атом водорода рассмотрел Паули в 1926 г. [52] еще до опубликования уравнения Шредингера. Паули изучил абстрактную алгебру, генерируемую операторами \mathbf{R} , \mathbf{P} , H и уравнениями (2.1), (2.2) и (2.15). Момент количества движения $\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P}$ является интегралом движения. Другим интегралом движения служит вектор Рунге — Ленца

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} \times \mathbf{P} - \mathbf{P} \times \mathbf{L}) + \frac{\lambda}{R} \mathbf{R} \quad \text{с} \quad \lambda = mZe^2. \quad (2.17)$$

Заметим, что имеет место тождество

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathbf{L} \times \mathbf{P} - \mathbf{P} \times \mathbf{L}) &= (\mathbf{R} \cdot \mathbf{P}) \mathbf{P} - \mathbf{R} (\mathbf{P}^2) - i\hbar \mathbf{P} = \\ &= \mathbf{P} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}) - (\mathbf{P}^2) \mathbf{R} + i\hbar \mathbf{P}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

с помощью которого можно проверить, что

$$[\mathbf{A}, H] = 0, \quad [\mathbf{L}, H] = 0. \quad (2.19)$$

Напомним, что величина ε_{ijk} равна знаку перестановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$ или нулю, если какие-либо два индекса равны. Далее мы воспользуемся условиями Эйнштейна для суммирования, т. е. будем подразумевать, что по повторяющимся индексам производится суммирование. Находим

$$[L_i, L_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k, \quad [L_i, A_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} A_k, \quad (2.20)$$

$$[A_i, A_j] = -i\hbar 2mH \varepsilon_{ijk} L_k, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{A}^2 - 2mH (\mathbf{L}^2 + \hbar^2) = (Ze^2m)^2 \mathbf{I}. \quad (2.23)$$

Рассмотрим теперь связанные состояния атома водорода. Они соответствуют спектру оператора $H < 0$. Пусть P_- — проекционный оператор на эти состояния. Для произвольного оператора X введем обозначение $X^- = XP_-$. Из уравнений (2.19) следует, что когда X есть \mathbf{L} (а) или \mathbf{A} (б), то

$$P_- X P_- = X P_- = P_- X = X^-.$$

Кроме того, $(-2mH^-)$ является положительным оператором, имеющим обратный. Пусть $(-2mH^-)^{-1/2}$ — положительный квадратный корень из оператора, обратного к оператору $(-2mH^-)$. Определим оператор $K_i^- = A_i^- (-2mH^-)^{-1/2}$. Тогда уравнения (2.20) — (2.23) можно переписать в виде

$$\left[\frac{1}{\hbar} L_i^-, \frac{1}{\hbar} L_j^- \right] = \frac{i}{\hbar} \varepsilon_{ijk} L_k^-, \quad \left[\frac{1}{\hbar} L_i^-, \frac{1}{\hbar} K_j^- \right] = \frac{i}{\hbar} \varepsilon_{ijk} K_k^-, \quad (2.20a)$$

$$\left[\frac{1}{\hbar} K_i^-, \frac{1}{\hbar} K_j^- \right] = \frac{i}{\hbar} \varepsilon_{ijk} L_k^-, \quad (2.21a)$$

$$\mathbf{L}^- \cdot \mathbf{K}^- = \mathbf{K}^- \cdot \mathbf{L}^- = 0, \quad (2.22a)$$

$$\frac{1}{\hbar^2} \mathbf{K}^{-2} + \frac{1}{\hbar^2} \mathbf{L}^{-2} = \left(\frac{Ze^2m}{\hbar} \right)^2 (-2mH)^{-1}. \quad (2.23a)$$

Наконец определим операторы

$$\mathbf{J}^{(\pm)} = \frac{1}{2\hbar} \mathbf{L}^{(-)} \pm \frac{1}{2\hbar} \mathbf{K}^{(-)}, \quad (2.24)$$

после чего предыдущие уравнения дают

$$[J_i^{(\pm)}, J_j^{(\pm)}] = i\epsilon_{ijk} J_k^{(\pm)}, \quad [J_i^{(+)}, J_j^{(-)}] = 0, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{J}^{(+)^2} = \mathbf{J}^{(-)^2} = \frac{1}{4} \left(\left(\frac{Ze^2 m}{\hbar} \right)^2 (-2mH)^{-1} - 1 \right). \quad (2.26)$$

Спектр оператора $\mathbf{J}^{(+)^2}$ хорошо известен: $j(j+1) = (n^2 - 1)/4$, где $2j + 1 = n$ — положительное целое число. Таким образом, спектр энергий связанных состояний атома водорода имеет вид

$$e_n = -\frac{(Ze^2)^2}{\hbar} \frac{m}{2n^2} = -\frac{Z^2}{n^2} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{mc^2}{2} = \frac{-1}{2n^2} (Z\alpha)^2 mc^2, \quad (2.27)$$

где n — положительное целое число, а

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137.03 \dots} \quad (2.28)$$

есть постоянная тонкой структуры, безразмерная фундаментальная физическая константа.

Некоторые физические комментарии

Отношение энергии связи электрона к энергии покоя есть $(e_n/mc^2) = -(Z\alpha)^2/2n^2$. Значение любой физической наблюдаемой мы можем вычислять как произведение числа на величину, имеющую ту же размерность, что и исходная величина, и построенную из постоянных e , \hbar , m , c . Например: длина $\hbar/mc = 3,86 \cdot 10^{-11}$ см, энергия $mc^2 = 0,51 \cdot 10^6$ эВ, время $\hbar/mc^2 = 1,28 \cdot 10^{-21}$ с. Безразмерное число является функцией величины α . А это есть значение наблюдаемой величины в системе единиц, где $\hbar = m = c = 1$. Такой системой мы и будем в дальнейшем пользоваться; в этой системе α является значением величины e^2 . Например,

$$\left\langle \frac{1}{R} \right\rangle = Z\alpha \frac{mc}{\hbar} \sim \left(\frac{1}{2} 10^{-8} \text{ см} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{2} \text{ ангстрем} \right)^{-1}.$$

Заметим, что наше рассмотрение относится не только к связанному состоянию атома водорода p^+e^- ($m_p = 1836m_e$) (ядро может быть также ядром дейтерия $\sim 2m_p$), но и к позитронию e^+e^- ($m_1 = m_2$), мюонию μ^+e^- ($m_\mu = 207m_e$), μ -атому, π -атому, ионизованному иону гелия He^+ и т. д.

Еще о групповых аспектах

Состояния с энергией ϵ_n являются собственными состояниями операторов $\mathbf{J}^{(+)^2}$ и $\mathbf{J}^{(-)^2}$ и образуют пространство \mathcal{H}_n НП (j, j) группы $SO(4)$, причем \mathcal{H}_n имеет размерность

$$(2j + 1)^2 = n^2. \quad (2.29)$$

Алгебра Ли физических вращений (\mathbf{L}) является диагональю в алгебре Ли $SU(2) \oplus SU(2) = SO(4)$, так что представление группы вращений в пространстве \mathcal{H}_n НП $(j, j) = [(n-1)/2, (n-1)/2]$ группы $SO(4)$ сводится к

$$(j, j) | SO(3) = \bigoplus_{l=0}^{2j} D_l, \quad (2.30)$$

т. е.

$$l = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.30a)$$

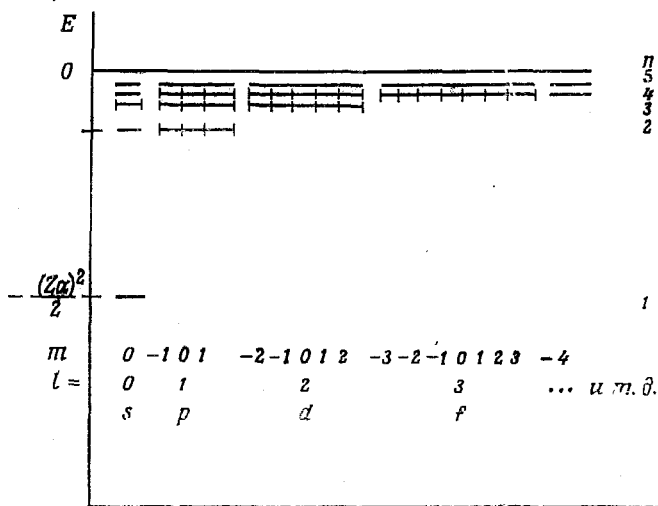
Заметим, что тривиальное представление для каждого n является только один раз, а из теоремы взаимности Фробениуса мы знаем, что представление

$$\bigoplus_{2j=0}^{\infty} (j, j) = U^{D_0} \quad (2.31)$$

является представлением группы $SO(4)$, индуцированным тривиальным представлением группы $SO(3)$. Иными словами, $P_- \mathcal{H} = \mathcal{L}_2$ (функций на S^3), поскольку сфера S^3 является однородным пространством $SO(4)/SO(3)$. (Этот факт был использован Фоком [53], см. также работу Хюльтена [54].) Из теории индуцированных представлений Макки следует, что равенство (2.31) характеризует также содержание представления группы $R^4 \square SO(4) = E_4$ (группы движений четырехмерного евклидова пространства), индуцированного тривиальным представлением группы $R^4 \square SO(3)$ (группы преобразований, оставляющих неизменным произвольно выбранный отличный от нуля вектор пространства R^4). Это неприводимое представление группы E_4 . Мы можем также рассматривать $P_- \mathcal{H}$ как пространство НП группы $SO(4, 1)$, полученного деформацией рассмотренного выше НП группы E_4 . Однако физический смысл генераторов группы E_4 (представляющих элементы алгебры Ли) или группы $SO(4, 1)$ не слишком понятен!

Спектром оператора H на пространстве $P_+ \mathcal{H}$ (пространстве положительных энергий) является полуось $(+0, \infty)$. Мы не можем говорить о собственных векторах оператора H для положительной энергии. Эти векторы описывают несвязанные состояния протона и электрона, и они необходимы при изучении рассеяния. Однако поскольку оператор $HP_+ = P_+H$ является положительным, можно определить оператор $\mathbf{K}^+ = \mathbf{A}P_+ \times$

$\times (2m\hbar P_+)^{-1/2}$. Операторы $1/\hbar LP_+$ и $1/\hbar K^+$ генерируют алгебру Ли группы $SO(3, 1)$. Это свойство впервые заметил и использовал Баргман [55]. Таким образом, $P_+ \mathcal{H}$ является прямым интегралом бесконечномерных унитарных НП группы $\bar{S}O(3, 1)$,



Фиг. 2.1. Состояния с наименьшей энергией на линейной энергетической шкале атома водорода.

Существует бесконечное число состояний, энергия которых лежит в интервале $-\epsilon, 0$. Это связано с медленным убыванием потенциала r^{-1} при $r \rightarrow \infty$. Собственные векторы абелевой алгебры, генерируемой операторами H, L^2 и $L(e_3)$, образуют ортогональный базис в гильбертовом пространстве связанных состояний. Полный набор индексов, определяющих такое состояние, задается квантовыми числами n, l, m , где n — положительное целое, l и m — целые числа, такие, что $0 \leq l \leq n-1, -l \leq m \leq l$. Собственные значения операторов $(mc^2)^{-1}H, \hbar^{-2}L^2, \hbar^{-1}L(e_3)$ соответственно равны $-(Z\alpha)^2/2n^2, l(l+1), m$.

т. е. группы Лоренца. Это также пространство НП неоднородной группы $SO(3, 1)$, которую мы назовем группой Пуанкаре (наше НП описывает частицу со спином 0 и фиксированной массой $m > 0$).

В атомах мы главным образом наблюдаем изучение или поглощение фотонов с частотой

$$\nu = \frac{1}{2\pi\hbar} (\epsilon_{n_1} - \epsilon_{n_2}). \quad (2.32)$$

Соответствующая длина волны

$$\frac{c}{\nu} = \pi (Z\alpha)^{-2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)^{-1}$$

приблизительно равна величине $(4/Z\alpha) \cdot 10^3$, умноженной на „размеры“ атома.

Все достаточно большие частоты, определяемые уравнением (2.32), мы уже видели в спектре атомарного водорода. Фактически существует „тонкая структура“, связанная с относительным расщеплением состояний с $l \neq 0$ порядка $\alpha^2 \sim 1/2 \cdot 10^{-4}$.

Теория предсказывает даже величину интенсивности спонтанного излучения фотонов. Так как длина волны света велика по сравнению с размерами атома, то свет представляет собой дипольное излучение¹⁾ и вероятность спонтанного излучения фотона при переходе из состояния $|x\rangle$ в состояние $|y\rangle$ ($E_x > E_y$) равна

$$\lambda_{xy} = \frac{4}{3} (E_x - E_y)^3 |\langle x | e\mathbf{R} | y \rangle|^2. \quad (2.33)$$

(Заметим, что $\langle x | e\mathbf{R} | x \rangle$ есть среднее значение электрического диполя в состоянии $|x\rangle$. Как мы увидим дальше, эта величина обращается в нуль.) Интенсивность излучения света N_x атомами в состоянии $|x\rangle$ равна

$$i_{xy} = N_x \frac{4}{3} (E_x - E_y)^4 e^2 \sum_k \text{Sp} (P_x R_k P_y R_k). \quad (2.34)$$

Из теоремы Вигнера — Экарта (см. начало разд. 1.6) следует, что для всех векторных операторов матричные элементы между двумя данными собственными состояниями $|x\rangle, |y\rangle$ оператора \mathbf{L}^2 коллинеарны.

Пример. Для собственных состояний $|x\rangle, |y\rangle$ оператора H

$$\frac{-i\hbar}{m} \langle x | \mathbf{P} | y \rangle = \langle x [H, \mathbf{R}] | y \rangle = (E_x - E_y) \langle x | \mathbf{R} | y \rangle. \quad (2.35)$$

¹⁾ Электромагнитные волны, предсказанные уравнениями Максвелла, были получены Герцем с помощью осциллирующего электрического диполя. Примером такого диполя мог бы служить заряд $(-e)$, вращающийся вокруг заряда $(+e)$ с заданной частотой ν . Согласно гипотезе Максвелла, свет представляет собой электромагнитные волны, а Селени искусными экспериментами доказал в 1913 г., что свет, испускаемый атомами, является дипольным излучением. [Высшие мультиполи соответствуют более сложному распределению заряда, для которого дипольный момент $\sum_i \mathbf{r}_i q_i = 0$ (см. ра-

боты Ми, Пуанкаре, Рэлея и т. д. о мультипольном разложении, представляющие прикладную теорию групп.) Неприятность заключалась в том, что классические атомы всегда должны излучать, быстро теряя свою энергию. Квадрупольное излучение в атомах может наблюдаться в исключительных случаях (редкоземельные элементы, атомы в межзвездном вакууме). Интенсивное излучение фотонов может быть индуцировано и самим электромагнитным полем. Примером служит лазер.

Рассмотрим теперь собственные состояния оператора L^2 [с собственными значениями $l(l+1)$]. Заметим, что

$$\langle x | L | y \rangle = 0, \text{ если } l_x \neq l_y, \quad (2.36)$$

тогда как для общего векторного оператора

$$\langle x | R | y \rangle = 0, \text{ если } l_x + l_y = 0 \text{ или } |l_x - l_y| > 1. \quad (2.37)$$

Однако надо учесть и операцию четности $\Pi(\mathbf{r}) = -\mathbf{r}$. Соответствующий оператор Π удовлетворяет условиям

$$\Pi^2 = 1, \quad \Pi R \Pi = -R, \quad \Pi P \Pi = -P, \quad (2.38)$$

и поскольку оператор L является аксиальным вектором,

$$\Pi L \Pi = L. \quad (2.39)$$

Собственные векторы оператора L^2 имеют определенную четность (собственное значение оператора Π). Рассмотрев реализацию этих векторов сферическими гармониками, находим

$$\Pi L^2 = (-1)^l L^2. \quad (2.40)$$

Таким образом, если состояния x и y имеют определенный момент количества движения, то

$$\langle x | R | y \rangle = -\langle x, | \Pi R \Pi |, y \rangle = -(-1)^{l_x + l_y} \langle x | R | y \rangle,$$

так что

$$\langle x | R | y \rangle = 0, \text{ если } l_x + l_y - \text{четное число}, \quad (2.41)$$

а это и есть правило отбора Лапорта, о котором мы упоминали в разд. 2.1. Система уравнений (2.37) и (2.41) эквивалентна следующему утверждению: отсутствие электрических дипольных переходов $\langle x | R | y \rangle = 0$ равносильно выполнению условия $|l_x - l_y| \neq 1$.

Подтверждается ли теория экспериментом?

И да и нет. С одной стороны, очень хорошо подтверждается, с другой — очень плохо. Теоретические значения энергий связи полностью подтверждаются с точностью 10^{-4} . Современная теория квантовой электродинамики дает поправку порядка $(Z\alpha)^4/n^3$ [т. е. относительную поправку порядка $(Z\alpha)^2/n \sim 10^{-4}$], так что энергии уровней с различными значениями l и одним и тем же n мало отличаются друг от друга¹⁾.

¹⁾ Расстояние между двумя уровнями с $n=2$, $l=1$ и $l=2$, предсказываемое квантовой электродинамикой, имеет порядок $Z^4 \alpha^5 2^{-3}$, т. е. $\sim 10^3$ МГц, что совпадает с экспериментальным значением с точностью до 10^{-1} МГц, т. е. $\sim 10^{-15} mc^2/\hbar$. Квантовая электродинамика не является точно сформулированным предметом для математиков. Уточненные предсказания для позитрония, мюония и т. д. также очень хорошо согласуются с экспериментом.

Гораздо хуже обстоит дело с подсчетом числа уровней. В этом можно убедиться, помещая атом водорода в постоянное электромагнитное поле (\mathbf{F} — электрическое поле, \mathbf{B} — магнитное поле). В этом случае к гамильтониану H нужно добавить оператор

$$H_{em} = -\frac{3e}{2} \mathbf{K} \cdot \mathbf{F} + \frac{e}{2mc} \mathbf{L} \cdot \mathbf{B}. \quad (2.42)$$

Влияние электрического поля \mathbf{F} (эффект Штарка) легко учесть, чего нельзя сделать для магнитного поля \mathbf{B} . В самом деле, уровни с одним и тем же значением l должны расщепляться на $2l + 1$ уровней, разделенных расстоянием $eB/2mc$. Расщепление действительно происходит, но на четное число уровней! Это обусловлено спином электрона, который мы пока не учитывали (см. разд. 2.6). Следует учесть также спин протона; при этом эффект будет иметь порядок

$$\left\langle \frac{e^2}{m_e m_p} \frac{1}{R^3} \right\rangle \sim \alpha (Z\alpha)^3 m_e m_p^{-1}.$$

2.5. АТОМ ГЕЛИЯ

Атом гелия имеет ядро с зарядом $Ze = 2e$ (и массой $\sim 4m_p$) и два электрона. Выделив движение центра масс, получим для гамильтониана, соответствующего внутренней энергии,

$$H = H_1 + H_2 + \frac{e^2}{R_{12}}, \quad (2.43)$$

где $H_i = P_i^2/2m - Ze^2/R_i$ — гамильтониан атома водорода, а оператор R_{12} соответствует величине $r_{12} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ — расстоянию между двумя электронами. Если мы пренебрегаем членом e^2/R_{12} (точность этого приближения больше 10%), то нашу проблему можно считать решенной. Мы будем рассматривать только связанные состояния. Пусть $\mathcal{H}^{(1)}$ есть гильбертово пространство связанных состояний атома водорода. Для нашего упрощенного атома гелия гильбертово пространство есть $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(1)}$ с гамильтонианом $H_0 \otimes I + I \otimes H_0$, где H_0 — гамильтониан атома водорода. Таким образом, энергия связи равна $-(Z\alpha)^2(1/n_1^2 + 1/n_2^2)/2$, т. е. равна сумме энергий связи двух электронов.

Будем считать член e^2/R_{12} возмущением. Этот член нарушает $SO(4)$ -инвариантность, так что электронные уровни с различными значениями l и одним и тем же n уже не обладают

одной и той же энергией. (Как мы увидим в разд. 2.6, для заданного n величина E увеличивается с ростом l .) Однако момент количества движения и четность по-прежнему сохраняются:

$$[L, H] = 0, \quad [\Pi, H] = 0, \quad (2.44)$$

и два электрона остаются неразличимыми:

$$[S_{12}, H] = 0, \quad (2.45)$$

где S_{12} — оператор перестановки двух электронов:

$$S_{12}^2 = I, \quad S_{12}(A \otimes B)S_{12} = B \otimes A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(1)}). \quad (2.45a)$$

Разложение тензорного произведения $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(1)}$ в прямую сумму симметрического и антисимметрического тензорных пространств

$$\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}^{(1)} \vee \mathcal{H}^{(1)} \oplus \mathcal{H}^{(1)} \wedge \mathcal{H}^{(1)}, \quad (2.46)$$

которое можно переписать также в виде

$$\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H}_{[2]} \oplus \mathcal{H}_{[1^2]}, \quad (2.46a)$$

дает разложение на пространства собственных векторов оператора S_{12} . Пусть x и y — состояния атома водорода. Возникает вопрос, какому из этих состояний, $x \vee y = 1/\sqrt{2}(x \otimes y + y \otimes x)$ или $x \wedge y = 1/\sqrt{2}(x \otimes y - y \otimes x)$, соответствует меньшее среднее значение положительного оператора e^2/R_{12} . Очевидно, мы должны взять состояние $x \wedge y$, поскольку волновая функция двух электронов в этом случае обращается в нуль при $R_{12} = 0$, когда $e^2/R_{12} \rightarrow \infty$ (тогда как функция $x \vee y$ обычно имеет максимум при $R_{12} = 0$). Эта симметрия приводит также к новому правилу отбора для дипольного излучения. Матричный элемент оператора дипольного перехода пропорционален выражению

$$\langle \psi | \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 | \psi' \rangle. \quad (2.47)$$

Поскольку вектор $\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2$ симметричен относительно перестановки индексов 1 и 2, то функции ψ и ψ' должны иметь один и тот же характер симметрии $\varepsilon = \varepsilon'$ ($\varepsilon^2 = 1$):

$$\begin{aligned} \langle \psi | \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 | \psi' \rangle &= \langle \psi | S_{12}(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2)S_{12} | \psi' \rangle = \\ &= \varepsilon \varepsilon' \langle \psi | \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 | \psi' \rangle. \end{aligned} \quad (2.47a)$$

Как мы уже отмечали в разд. 2.1, отсюда следует, что уровни энергии атома гелия в соответствии с их характером симме-

три делятся на две группы и электрические дипольные переходы происходят только внутри каждой группы. Напомним, что гелий получил свое название потому, что наблюдался на Солнце еще до того, как был обнаружен на Земле. Спектр его состоит как бы из двух спектров: из спектра ортогелия ($v = +1$) и спектра парагелия ($v = -1$). До появления квантовой механики это казалось совершенно непостижимым. Объяснение этого явления было дано Гейзенбергом в 1926 г. [56]. Получил объяснение также тот факт, что ортогелий имеет большее число уровней: это уровни типа $x \otimes x$, такие, как, например, самый нижний уровень ($n=1, l=0$ для каждого электрона). Наблюдения показывают, что соответствующее излучение парагелия [например, переходы $(1, 0) \vee (n, l) \rightarrow (1, 0) \vee (n', l')$ и $(1, 0) \wedge (n, l) \rightarrow (1, 0) \wedge (n', l')$ с $n' \neq 1, l' \neq 0$] почти в три раза интенсивнее, чем соответствующее излучение ортогелия. Чтобы объяснить это, следует принять во внимание спин электрона (см. также разд. 2.9).

2.6. ПРИНЦИП ПАУЛИ. СПИН ЭЛЕКТРОНА

Перейдем теперь к рассмотрению атомов с n электронами. Гамильтониан, соответствующий внутренней энергии, имеет вид

$$H^{(n)} = \sum_{i=1}^n H_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{e^2}{R_{ij}} c H_i = \frac{P_i^2}{2m} - \frac{Ze^2}{R_i}. \quad (2.48)$$

Разумеется, оператор $H^{(n)}$ инвариантен относительно группы $S(n)$ перестановок n электронов. Это справедливо как для оператора электрического диполя $e \left(\sum_i \mathbf{R}_i \right)$, так и для *всех* наблюдаемых. Тожественные частицы нельзя отличить друг от друга, и любое предсказание теории должно быть инвариантно относительно группы $S(n)$.

Когда мы рассматривали состояния Z (или n) неразличимых частиц, мы считали (и для атома гелия успешно), что гильбертово пространство является тензорным произведением гильбертовых пространств \mathcal{H} для каждой частицы. В случае n тождественных частиц рассмотрим снова $\mathcal{H}^{(n)} = \otimes^n \mathcal{H}^{(1)}$. На $\mathcal{H}^{(n)}$ действует группа $S(n)$ как представление $s \rightarrow S(s)$. Инвариантность всех наблюдаемых при действии группы $S(n)$ требует, чтобы они находились в коммутанте $\{S(s)\}'$ множества операторов $\{S(s), s \in S(n)\}$. Как мы уже видели, проекторы ранга

один, которые представляют физические состояния, являются такими наблюдаемыми, что $\forall s, S(s)P_x S(s) = P_x$ для любого представляющего состояние вектора $|x\rangle$. Для этого вектор $|x\rangle$

должен принадлежать либо пространству $\mathcal{H}_{[n]} = \bigvee^n \mathcal{H}^{(1)}$ (полностью симметрическому), либо пространству $\mathcal{H}_{[1^n]} = \bigwedge^n \mathcal{H}^{(1)}$ (полностью антисимметрическому). Пространства $\mathcal{H}_{[1^n]}$ других факториальных представлений группы $S(n)$ не имеют отношения к пространству физических состояний.

Для атома гелия мы использовали как пространство $\mathcal{H}_{[2]}$, так и пространство $\mathcal{H}_{[1^2]}$. Однако использование для атомов пространства $\mathcal{H}_{[n]}$ (при $n > 2$) противоречит законам природы. В самом деле, в основном состоянии любого атома все электроны обладали бы тогда одной и той же энергией связи $[\sim (Z\alpha)^2/2]$. Согласно экспериментальным данным, только два электрона имеют такую энергию связи. Энергия, необходимая для удаления первого, второго, ... k -го электронов из какого-либо нейтрального атома (энергия ионизации), возрастает нерегулярно от долей α^2 до $(Z\alpha)^2/2$. Кроме того, как мы увидим, появляются векторы из некоторых других пространств $\mathcal{H}_{[1^n]}^{(n)}$. Решение этой загадки заключается в том, что $\mathcal{H}^{(1)}$ не является гильбертовым пространством связанных состояний одного электрона в постоянном потенциале. Электрон имеет другую степень свободы — спин, и гильбертово пространство его состояний должно превратиться в новое пространство $\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{L}^{(1)} \otimes \mathcal{K}^{(1)}$, где $\mathcal{L}^{(1)}$ есть пространство $\mathcal{L}_2(R^3, t)$ (ранее обозначалось $\mathcal{H}^{(1)}$), а $\mathcal{K}^{(1)}$ — двумерное гильбертово пространство. Паули был первым, кто в 1924 г. [57] ввел понятие спина для обозначения внутреннего момента количества движения, а также понятие магнитного момента для ядер. Однако спин электрона, отображающий его внутренний момент количества движения, равный $\hbar/2$, был введен Гаудсмитом и Уленбеком в 1925 г. С его введением удалось объяснить число уровней энергии, появляющихся в эффекте Зеемана, но не величину этого расщепления. В самом деле, магнитный момент, создаваемый движущимся электрическим зарядом e с моментом количества движения \mathbf{j} (по закону Ампера!), равен

$$\frac{\mu}{e/2mc} = \frac{g\mathbf{j}}{\hbar}, \quad (2.49)$$

где $e\hbar/2mc$ — магнетон Бора. Для орбитального момента количества движения ($|\mathbf{j}/\hbar|$ — целое число) $g = 1$, однако для спина

$|\mathbf{j}/\hbar| = 1/2$ и $g=2$. Это казалось загадочным и было объяснено в том же 1925 г. Томасом как релятивистский эффект.

Как показал эксперимент, для электронов следует пользоваться статистикой Ферми, т. е. гильбертово пространство электронных состояний атома с n электронами имеет вид

$$\mathcal{H}_{[1^n]}^{(n)} = \bigwedge^n \mathcal{H}^{(1)} \subset \bigoplus_{\lambda} \left(\mathcal{L}_{[1^n]_{\lambda}}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{[1^n]_{\lambda}}^{(n)} \right), \quad (2.50)$$

где $\mathcal{H}^{(1)}$ — новое гильбертово пространство для одного электрона.

Поскольку $\dim \mathcal{H}^{(1)} = 2$, схема Юнга $[1^n]_{\lambda}^c$ имеет лишь две строки, длины которых $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$. Конечно, $\lambda_1 + \lambda_2 = n$, и далее мы покажем, что $\lambda_1 - \lambda_2$ есть химическая валентность.

Схема Юнга $[1^n]_{\lambda}$, входящая в $\mathcal{L}_{[1^n]_{\lambda}}^{(n)}$, симметрична относительно диагонали только что рассмотренной схемы Юнга $[1^n]_{\lambda}^c$ (фиг. 2.2). Она имеет два столбца $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$. Иными словами, она имеет λ_2 строк длиной 2 и $\lambda_1 - \lambda_2$ строк длиной 1. Это



Фиг. 2.2. Схема Юнга орбитальной части состояния n электронов: $\mathcal{L}_{[1^n]_{\lambda}}^{(n)}$.

Здесь $n=21$.

означает, что соответствующее ей состояние не может быть полностью симметричным более чем по двум электронам, т. е. что в каждом орбитальном состоянии могут находиться самое большее два электрона. При этом электроны должны иметь „различные спиновые состояния“, или, точнее, их спиновое состояние должно быть антисимметричным. В этом и заключается принцип Паули, открытый им в 1925 г.

2.7. ОБОЛОЧЕЧНАЯ СТРУКТУРА АТОМА. ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ТАБЛИЦА

Теперь мы можем описать основное состояние атома с n электронами. Его орбитальная часть представляет собой вектор пространства $\mathcal{H}^{(n)}$, который получается при заполнении всех состояний, обладающих наименьшей энергией, если в каждое орбитальное состояние помещать по два электрона. Разумеется,

атомы с $n > 1$ электронами уже не обладают двумя специфическими свойствами, обусловленными потенциалом $1/R$ ¹⁾. Число связанных состояний здесь конечно, и вырождение относительно группы $SO(4)$ уже не существует, т. е. состояния с одним и тем же n , но различными значениями l имеют разную энергию. Наблюдаемый порядок увеличения энергии состояний дается в табл. 2.1.

ТАБЛИЦА 2.1

Электронные состояния, перечисленные в порядке возрастания энергии

n	1	2	2	3	3	4	3	4	5	4	5	6	5	4	6	7	...
l	0	0	1	0	1	0	2	1	0	2	1	0	2	3	1	0	...
Спектроскопическое обозначение	1s	2s	2p	3s	3p	4s	3d	4p	5s	4d	5p	6s	5d	4f	6p	7s	...
$2(2l + 1)$	2	2	6	2	6	2	10	6	2	10	6	2	10	14	6	2	...
Полное число	2	4	10	12	18	20	30	36	38	48	54	56	66	80	86	88	...

Заметим, что для данного n с ростом l энергия увеличивается. Этот вывод, конечно, следует из вычислений, но его можно понять и качественно. Рассмотрим ядро с зарядом Ze и k электронами. При $r \rightarrow \infty$ электрон испытывает воздействие кулоновского потенциала $(Z - k)e/r$. Однако при приближении электрона к ядру действующий на него потенциал будет превышать этот кулоновский потенциал, поскольку на расстояниях $r \sim n(Z\alpha)^{-1} \hbar (mc)^{-1}$ действием остальных k электронов уже пренебречь нельзя. Это различие в потенциалах менее существенно, если электрон находится в состоянии с $l = 0$ (более сконцентрирован внутри сферы радиусом r), чем в том случае, когда он находится в состоянии с $l = 1$, $l = 2$ и т. д. (более сконцентрирован вблизи поверхности сферы радиусом r). Из табл. 2.1 видно также, что „ p -оболочки“ ($l = 1$) кончают заполняться 10-м, 18-м, 36-м, 54-м и 86-м электронами, а это как раз атомное число элементов, называемых „благородными газами“, неона, аргона, криптона, ксенона и радона.

Зная порядок увеличения энергии связи состояний (n, l), мы можем описать периодическую таблицу Менделеева в терминах электронных состояний. Используем спектроскопические

¹⁾ Вследствие электростатического отталкивания электронов друг от друга.

Периодическая таблица (до элемента 56)

	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$	$l=6$	$l=2, 2(2l+1)=10$	$l=3, 2(2l+1)=14$										
Электронное состояние	s	p						d			f								
$n=1$	1	1 2 3 4 5 6																	
$n=2$	H 1 He 2	B 5	C 6	N 7	O 8	F 9	Ne 10	Sc 21	Ti 22	V 23	Cr 24	Mn 25	Fe 26	Co 27	Ni 28	Cu 29	Zn 30	14 редкоземельных элементов от 58 до 71	
$n=3$	Li 3 Na 11	Al 13	Si 14	P 15	S 16	Cl 17	Ar 18	Y 39	Zr 40	Nb 41	Mo 42	Tc 43	Ru 44	Rh 45	Pd 46	Ag 47	Cd 48		
$n=4$	K 19 Ca 20	Ga 31	Ge 32	As 33	Se 34	Br 35	Kr 36	La 57	Hf 72	Ta 73	Mo 74	Tc 75	Ru 76	Rh 77	Pd 78	Ag 79	Cd 80		
$n=5$	Rb 37 Sr 38	In 49	Sn 50	Sb 51	Te 52	I 53	Xe 54												
$n=6$	Cs 55 Ba 56																		

обозначения

$$l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (2.51)$$

$$s, p, d, f, g, h, i.$$

Из табл. 2.1 находим порядок следования уровней (n, l): $1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 4s \sim 3d, 4p, 5s \sim 4d, 5p, 6s, 5d \sim 4f$ и т.д. Знак \sim указывает, что в грубом приближении энергии совпадают, так что обе оболочки заполняются одновременно. При этом для элемента с $l=2$ (d -оболочка) знак $+$ ($++$) указывает на то, что один или два электрона в d -оболочке взяты из s -оболочки. Теперь мы можем построить периодическую таблицу (табл. 2.2).

Состояние атома характеризуется символом, указывающим, какие электронные состояния заполнены; например, кислород имеет 8 электронов и обозначается $(1s)^2, (2s)^2, (2p)^4$. В общем случае электроны заполняют все состояния с низкой энергией и не полностью заполняют последнюю „оболочку“: так, в случае кислорода мы можем добавить в состояние $2p$ два (но не больше, чем два) электрона. Возникает вопрос: какое состояние является основным для атома с неполностью заполненной оболочкой? Это состояние можно охарактеризовать схемой Юнга (сделаем это для нескольких первых элементов).

ТАБЛИЦА 2.3

Схемы Юнга основных состояний атомов

$Z =$	1	2	3	4	5	6	7
Название	H	He	Li	Be	B	C	N
Схема Юнга орбитального состо- яния $L \begin{Bmatrix} z \\ \lambda \end{Bmatrix}$	$1s \square$	$1s \square \square$	$1s \square$ $2s \square$	$1s \square \square$ $2s \square \square$	$1s \square \square$ $2s \square \square$ $2p \square$	$1s \square \square \square$ $2s \square \square$ $2p \begin{Bmatrix} \square \\ \square \end{Bmatrix}$	$1s \square \square \square \square$ $2s \square \square$ $2p \begin{Bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{Bmatrix}$
Схема Юнга спинового состояния $K \begin{Bmatrix} z \\ \lambda \end{Bmatrix}^c$	\square	$\square \square$	$\square \square$	$\square \square$	$\square \square$	$\square \square \square$	$\square \square \square \square$

Теперь мы можем обобщить метод, использованный для гелия. Пусть даны k электронов в состоянии с одной и той же энергией [т. е. $k \leq 2(2l + 1)$]. Тогда состоянием с наименьшей энергией такой конфигурации из k электронов является состояние, наиболее антисимметричное по координатам ($k=2, k=3, \dots$),

т. е. наиболее симметричное по спиновым переменным ($k = 2, k = 3, \dots$). В табл. 2.3 это можно видеть на примере $2p$ -электронов для $k = 1, 2, 3$. При $k = 4$ невозможно иметь в $2l + 1 = 3$ -мерном гильбертовом пространстве полностью антисимметричный тензор; аналогично можно описать и все оставшиеся состояния в p -оболочках (табл. 2.4).

ТАБЛИЦА 2.4

Электронные состояния в pr -оболочке

Число электронов $k=1$	2	3	4	5	6	
Заполненные оболочки						
Орбитальное состояние						
Спиновые состояния						
Заполненные оболочки						
Валентность	1 (или 3)	2 (или 4)	3	2	1	0
$n = 2$	B	C	N	O	F	Ne
$n = 3$	Al	Si	P	S	Cl	Ar
$n = 4$	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr
$n = 5$	In	Sn	Sb	Te	I	Xe

Энергия ионизации для данной p -оболочки (энергия, необходимая для удаления одного электрона из p -оболочки), как мы и ожидали, увеличивается с ростом k , за исключением состояния с четырьмя электронами, которое является первым неполностью антисимметричным состоянием.

Хотя энергия ns -состояний меньше энергии np -состояний, однако первым возбужденным состоянием атомов с $k = 1$ или $k = 2$ является $k = 1, (ns)(np)^2; k = 2, (ns)(np)^3$, т. е. при этом один ns -электрон переходит в np -состояние. Это приводит к увеличению валентности на две единицы и дает большее число связанных молекул. О таблице Менделеева можно было бы еще многое сказать даже с точки зрения теории групп. Например, заметили ли вы, что все ферромагнитные элементы (Ni, Co, Fe, а также Mn в сплавах) находятся в неполностью заполненной $3d$ -оболочке? Или ... Но здесь мы остановимся.

2.8. АТОМНЫЕ СОСТОЯНИЯ В ДАННОЙ ОБОЛОЧКЕ. СПИН-ОРБИТАЛЬНАЯ СВЯЗЬ

Принцип Паули учитывает статистику Ферми и упрощает изучение атома. Вместо того чтобы изучать систему n электронов, мы можем в рамках хорошего приближения (для не слишком высоковозбужденных состояний) рассмотреть k электронов вне заполненной оболочки, обладающей моментом количества движения, равным нулю, и электрическим зарядом $(n - k)e$ (распределение заряда зависит от волновой функции электронов). Такую заполненную оболочку можно считать сферически-симметричным потенциалом, и гильбертово пространство состояний k электронов в nl -оболочке имеет вид

$$\mathcal{H}^{(k)} = \bigwedge^k (\mathcal{H}_{2l+1} \otimes \mathcal{H}_2). \quad (2.52)$$

В хорошем приближении электронное состояние есть антисимметричный разложимый тензор порядка k : $x \wedge y \wedge z \dots$ (k множителей).

Пример. Пусть $l=1$, $k=2$, $\dim \mathcal{H}^{(1)} = \dim (\mathcal{H}_3 \otimes \mathcal{H}_2) = 6$ и $\dim \mathcal{H}^{(2)} = 15 = \binom{6}{2}$, для $k=6$ $\dim \mathcal{H}^{(6)} = 1$ (полностью заполненная оболочка). Каждому разложимому тензору пространства $\mathcal{H}^{(k)}$ можно дать название или обозначить символом. Именно это делает спектроскопист, пользуясь полным набором наблюдаемых L^2 , S^2 , $J^2 = (L + S)^2$, J_z , т. е. орбитальным моментом количества движения l , спиновым моментом количества движения s , полным моментом количества движения j и его проекцией j_z на ось x_3 .

ТАБЛИЦА 2.5

Состояния $IS(np)^2$ в порядке возрастания их энергии

Спектроскопическое обозначение	3P_0	3P_1	3P_2	1D_2	1S_0
L и симметрия орбитального состояния	1 \boxplus	1 \boxplus	1 \boxplus	2 \boxplus	0 \boxplus
S и симметрия спинового состояния	1 \boxplus	1 \boxplus	1 \boxplus	0 \boxplus	0 \boxplus
Полный угловой момент J	0	1	2	2	0
Число состояний $= 2J + 1$	1	3	5	5	1 = 15
$\langle L \cdot S \rangle$	-2	-1	1	0	0

Замечание к табл. 2.5. Заметим, что, как уже подчеркивалось выше, антисимметричные по координатам состояния

типа \square (P -состояния) соответствуют меньшей энергии, чем состояния типа \square . В случае симметричных по координатам состояний для S -состояния отталкивание проявляется сильнее, чем для D -состояния, поэтому и расположено оно по энергии выше. Почему же P -состояния появляются в порядке увеличения J ? Причина заключается в небольшом эффекте спин-орбитальной связи, который можно объяснить следующим образом.

Орбитальное состояние с моментом количества движения $L\hbar$ создает магнитный момент $(e\hbar/2mc)\mathbf{L}$, тогда как спиновое состояние с моментом количества движения $S\hbar$ создает магнитный момент $g(e\hbar/2mc)\mathbf{S}$ с $g=2$ [см. уравнение (2.49)]. Матричный элемент взаимодействия этих магнитных моментов имеет вид ¹⁾

$$\frac{e^2}{2} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \rangle R^{-3}. \quad (2.53)$$

Для состояния $|j, l, s\rangle$ среднее значение оператора $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ можно легко вычислить с помощью формулы

$$J^2 = (\mathbf{L} + \mathbf{S})^2 = \mathbf{L}^2 + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S}^2. \quad (2.54)$$

Среднее значение в состоянии $|j, l, s, j_z\rangle$ (j_z — собственное значение оператора J_z) равно

$$\langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} (j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)), \quad (2.55)$$

где

$$|l-s| \leq j \leq l+s, \quad l \text{ и } j+s \text{ — целые неотрицательные числа.} \quad (2.56)$$

Это объясняет значение величины $\langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \rangle$ в табл. 2.5.

Мы уже видели, что для водорода $\langle n | R^{-3} | n \rangle \sim (Za/n)^3$, так что среднее значение энергии спин-орбитального взаимодействия имеет порядок

$$\langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \rangle \frac{(Za)^2}{2n^2} \frac{Za^2}{n} \sim \epsilon_n \frac{\langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \rangle}{n} Za^2 \sim 10^{-4} \epsilon_n.$$

В атоме натрия (принадлежащего группе щелочноземельных элементов) основное состояние $[(1s)^2(2s)^2(2p)^6]3s$ и состояние $[(3p)](3p)$ обладают наибольшим расщеплением по энергии $\sim 10^{-3}$, так что очень яркая $3p-3s$ желтая линия Na оказывается дублетом.

¹⁾ Это сокращенное обозначение для оператора $\mathbf{L} \otimes \mathbf{S}$, действующего в пространстве $\mathcal{H}_{2l+1}^{(k)} \otimes \mathcal{H}_{2s+1}^{(k)}$.

2.9. СПИН И ЭВКЛИДОВА ИЛИ ГАЛИЛЕЕВА ИНВАРИАНТНОСТЬ

В разд. 2.7 и 2.8 мы пользовались спином главным образом как новой степенью свободы для электрона. Эта новая степень свободы может принимать два дискретных значения (физики часто говорят, что спин направлен „вверх“ или „вниз“). Соответствующее гильбертово пространство \mathcal{H}_2 — пространство комплексных функций, определенных на множестве из двух элементов, — имеет размерность два. Гамильтониан атома (2.48) не зависит от этой спиновой степени свободы, т. е. имеет вид $H \otimes I$ и действует в пространстве $\oplus_{\lambda} \left(\mathcal{L}_{|\lambda}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{|\lambda}^{(n)} \right)$ [см. уравнение (2.50)]. Перестановки спинов n электронов представляются операторами вида $I \otimes S(s)$, коммутирующими с оператором H . Поэтому собственные состояния оператора H могут быть полностью определены схемой Юнга $[|\lambda]^c$. Простейшим примером является атом гелия ($n=2$). Множество состояний с $[|\lambda]^c = [2] = \square$ называется парагелием, а с $[|\lambda]^c = [1^2] = \square$ — ортогелием. Поскольку $\dim \mathcal{H}_{\square}^{(2)} = 3$, а $\dim \mathcal{H}_{\square}^{(2)} = 1$, состояния атома гелия [являющиеся тензорными произведениями $x \wedge y$ или $x \vee y$ различных ($x \neq y$) состояний атома водорода] имеют статистический вес (например, в распределении Больцмана, описывающем термодинамическое равновесие), равный 3 для парагелия и 1 для ортогелия. Это объясняет, почему спектральные линии в первом случае в три раза интенсивнее, чем во втором. Используя результаты разд. 1.4 о соотношении между унитарными группами и группами перестановок, можно рассмотреть действие группы $U(2)$ на двумерном пространстве $\mathcal{H}_2^{(1)}$. С помощью факториального представления $[|\lambda]^c$ можно определить действие этой группы на пространстве $\mathcal{H}_{|\lambda}^{(n)}$. Ее действие на пространстве $\mathcal{H}^{(n)} \subset \mathcal{L}_{|\lambda}^{(n)} \otimes \mathcal{H}_{|\lambda}^{(n)}$ имеет вид $I \otimes (\oplus_{|\lambda} D_{|\lambda} = I \otimes (\oplus_s D_s)$ и коммутирует с гамильтонианом $H \otimes I$.

Обе точки зрения формально эквивалентны и приводят к одинаковой классификации квантовых состояний, однако группа $SU(2) \subset U(2)$ имеет более глубокий смысл, который надо искать в эвклидовой или галилеевой инвариантности. Пусть G — некая группа, а \bar{G} — ее универсальная накрывающая, т. е. существует сюръективный гомоморфизм $\bar{G} \xrightarrow{\pi} G$. (Как мы

видели в разд. 1.2, группа \bar{G} является расширением группы относительности, которая действует как линейное представление на гильбертовом пространстве состояний.) Существует также сюръективный гомоморфизм $\bar{G} \xrightarrow{\varphi} SU(2)$. (В евклидовом случае, например, $\bar{G} = R^3 \square SU(2)$; \square равняется полупрямому произведению, а $SU(2)$ есть накрывающая группа группы вращений.) Это определяет действие группы \bar{G} на пространстве $\mathcal{H}^{(1)}$, причем одночастичные состояния $\psi(\mathbf{x}, t; \sigma) \in \mathcal{L}_2(\mathbf{x}, t) \otimes \mathcal{H}_\sigma$ преобразуются следующим образом:

$$(U(\bar{g})\psi)(\mathbf{x}t, \sigma) = \psi(\pi(\bar{g})^{-1} \cdot (\mathbf{x}, t); \varphi(\bar{g})^{-1} \cdot \sigma). \quad (2.57)$$

Физики часто предпочитают записывать $\mathcal{H}^{(1)}$ в эквивалентной форме гильбертова пространства квадратично-интегрируемых функций ψ_σ переменных (\mathbf{x}, t) со значением в двумерном гильбертовом пространстве \mathcal{H}_σ . Уравнение (2.56) при этом принимает вид

$$(U(\bar{g})\psi_\sigma)(\mathbf{x}, t) = \sum_{\sigma'=1, 2} D_{1/2}(\varphi(\bar{g}))_{\sigma\sigma'} \psi_{\sigma'}(\pi(\bar{g})^{-1} \cdot (\mathbf{x}, t)). \quad (2.58)$$

Резюмируя, можно сказать, что спин связан с евклидовой или галилеевой инвариантностью (по существу, с частью этой инвариантности, именно инвариантностью относительно вращений) и является внутренним моментом количества движения электрона. Значение $g=2$ для соответствующего внутреннего магнитного момента электрона обусловлено, однако, релятивистским эффектом.

Из сохранения момента количества движения следует только, что $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ (орбитальный момент + спин) является интегралом движения. В атомах величины \mathbf{L} и \mathbf{S} в хорошем приближении сохраняются по отдельности только потому, что гамильтониан H не зависит от спинов [см. уравнение (2.48)].

2.10. МОЛЕКУЛЫ



Взаимодействие, связывающее N атомных ядер и n электронов в одну нейтральную молекулу (или заряженный молекулярный ион), является, по существу, электростатическим (т. е. кулоновским). Вместо того чтобы решать прямо проблему $(N+n)$ тел, используем приближение Борна — Оппенгеймера, в котором (тяжелые) ядра считаются фиксированными. Возьмем, например, гамильтониан молекулы водорода (индексы $A=I, II$ относятся к двум протонам, $i=1, 2$ — к двум

электронам, $r_{At} = |\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_t|$ и т. д.)

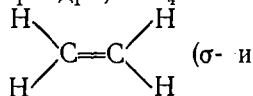
$$H = \frac{1}{2M} (\mathbf{p}_I^2 + \mathbf{p}_{II}^2) + \frac{1}{2m} (\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2) - e^2 \sum_{A, t} \frac{1}{r_{A, t}} + \frac{e^2}{d} + \frac{e^2}{r_{12}}, \quad (2.59)$$

где $d = |\mathbf{r}_I - \mathbf{r}_{II}|$ — расстояние между двумя ядрами водорода. В приближении Борна — Оппенгеймера оно считается параметром (кинетической энергией ядер будем пренебрегать). Если расстояние d очень велико, то собственное состояние гамильтониана (2.59) принадлежит пространству $\mathcal{H}^{(2)}$ — пространству тензорного произведения двух гильбертовых пространств для атомов водорода. Рассмотрим сначала зависимость от пространственных координат $\mathcal{L}^{(2)}(\bar{r}, \bar{r})$ и двумерное подпространство $h = (x \otimes y) \oplus (y \otimes x)$, где x, y — состояния атома водорода. Эти два состояния имеют одинаковую энергию $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y$. Однако оператор Гамильтона $H|_h$ в этом базисе для конечного значения d не является строго диагональным, поскольку каждый электрон испытывает также притяжение со стороны другого ядра, так что

$$H|_h = \begin{pmatrix} \varepsilon & \rho \\ \bar{\rho} & \varepsilon \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

(поскольку H — эрмитов оператор). Его собственные значения равны $\varepsilon \pm |\rho|$. Следовательно, двумя собственными состояниями оператора $H|_h$ являются состояния $1/2(x \wedge y)$ и $1/2(x \vee y)$, и разность их энергий равна $2|\rho|$. Если $d \rightarrow \infty$, то $|\rho| \rightarrow 0$. Аналогично ведет себя величина $e^2/d - |\rho|$. При $d \rightarrow 0$ имеем $e^2/d - |\rho| \rightarrow \infty$. Однако существует область, для которой $e^2/d - |\rho| < 0$, и значение d , при котором величина $e^2/d - |\rho|$ минимальна. Основное состояние — это состояние типа $x \otimes x$. Согласно статистике Ферми, спиновое состояние двух электронов в этом случае является антисимметричным. Подобная связь (ковалентная) существует между электронами незаполненной оболочки атомов и атомом водорода (или любого другого элемента щелочной группы). Число атомов, которые могут быть связаны с данным атомным (спиновым) состоянием λ_1  λ_2 , чтобы образовать замкнутую спиновую оболочку, является вполне определенной величиной, равной $\lambda_1 - \lambda_2$. Этот факт был обнаружен эмпирически еще до 1920 г., а число $\lambda_1 - \lambda_2$ было названо „валентностью“ атома. Квантовая механика дает для ковалентной связи как качественное, так и количественное объяснение [58]. Например, она объясняет, почему молекулы H_2 , H_2S и H_2Se имеют форму $\text{H}-\text{O}-\text{H}$

с углом $\geq 90^\circ$ (из-за отталкивания двух атомов водорода угол для этих молекул увеличивается от 90 до 108°). Она объясняет также, почему молекула NH_3 имеет форму триэдра, CH_4 —тетраэдра, а молекула C_2H_4 является плоской



π -электроны), объясняет мезомерию (например, бензола) и т. д. Теория групп весьма полезна и для объяснения спектра молекул! Теперь мы вынуждены оставить этот предмет и просто отсылаем читателей к элементарной, но очень элегантной книге Эйринга, Уолтера и Кимбалла [59].

Группой симметрии молекулы является подгруппа трехмерной ортогональной группы $O(3)$. Определяя экспериментально форму молекулы, мы определяем также ее группу симметрии G . За примером применения теории групп отошлем к статье Вигнера [60], посвященной характеристическим упругим модам колебаний молекулы (заданным классами эквивалентности G). В качестве иллюстрации Вигнер рассматривает молекулу CH_4 [группа G этой молекулы есть $S(4)$]. Из теоремы Яна—Теллера [61] следует, что электронное орбитальное состояние „непрямых“ молекул не может преобразовываться по НП группы G с размерностью, большей единицы. (Для молекул, атомы которых расположены на прямой линии, НП имеет размерность 2.)

Мы рассмотрим здесь только один очень важный пример.

2.11. ИЗМЕРЕНИЕ СПИНА И ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИСТИКИ ЯДЕР ПУТЕМ ИССЛЕДОВАНИЯ СПЕКТРА ДВУХАТОМНЫХ МОЛЕКУЛ

Гамильтониан H двухатомной молекулы можно разбить на четыре части:

$$H = H_{\text{электрон}} + H_{\text{колеб}} + H_{\text{вращ}} + H',$$

где в хорошем приближении величиной H' можно пренебречь. Гамильтониан $H_{\text{электрон}}$ определяет электронные состояния молекулы. Расстояние d между двумя ядрами в этом состоянии таково, что его энергия минимальна. Группа инвариантности молекулы есть $O(2)$ или, если оба ядра тождественны, $O(2) \times \times Z_2$. Обычно энергия связи таких состояний составляет доли α^2 , т. е. несколько электронвольт. Гамильтониан $H_{\text{колеб}}$ является, по существу, гамильтонианом гармонического осциллятора для малых колебаний относительно положения

равновесия, соответствующего расстоянию d . Расстояния между колебательными уровнями одинаковы и малы по сравнению с α^2 , и гамильтониан $H_{\text{вращ}}$ дает для каждого значения d энергии вращения, пропорциональные $l(l+1)$, где l — целое неотрицательное число. Эти энергии малы по сравнению с энергиями колебаний (вращательные полосы в спектре). Пусть два ядра молекулы идентичны. Какова симметрия состояния молекулы относительно группы перестановки $S(2)$ этих двух ядер? Симметрия зависит только от спинового состояния ядер. Если каждое ядро имеет спин j , то спиновое состояние ядер определяется НП группы $SU(2)$:

$$D_s, \quad 0 \leq s \leq 2j, \quad \square s = 2j, 2j-2, 2j-4, \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \square s = 2j-1, 2j-3, \dots,$$

и вращательным состоянием системы является состояние \square для четного l и состояние \square — для нечетного l .

Поскольку в очень хорошем приближении H не зависит от ядерного спина, то характер симметрии спинового состояния ядер является интегралом движения (часто время жизни его исчисляется неделями). Для гелия он нашел отражение в названии — орто- и парагелий. Из-за наличия связи спина и „статистики“ характер симметрии вращательного состояния является также интегралом движения. Таким образом, вращательный спектр молекулы делится на два независимых множества переходов — переходы между состояниями с четными l и между состояниями с нечетными l . В том и другом случаях переходы имеют квадрупольный характер $l+2 \rightarrow l$ с энергией фотонов (длиной волны в области радиоволн) порядка $(l+2)(l+3) - l(l+1) = 4l+6$.

Число ядерных спиновых состояний \square равно $(2j+1) \times \times (2j+2)/2 = (j+1)(2j+1)$. Число ядерных спиновых состояний \square равно $(2j+1)(2j)/2 = j(2j+1)$. Таким образом, если для молекулы относительная интенсивность спектральных линий вращения равна $(2j - \text{целое неотрицательное число}) / j(j+1)$ для отношения переходов l четное/ l нечетное, где j — ядерный спин, то статистика ядер будет $\{\square \times \square\} / \{\square \times \square\} = \square$, т. е. статистика Ферми. Если же относительная интенсивность равна $(j+1)/j$, то статистика ядер будет $\{\square \times \square\} / \{\square \times \square\} = \square$, т. е. статистика Бозе. Экспериментальное подтверждение нашли только статистика Ферми для полуцелых j (например, для электрона) и статистика Бозе для целых j . Суммируем эти важные экспериментальные данные:

$$\text{Статистика} = (-1)^{2j}. \quad (2.61)$$

Например, если существуют вращательные состояния только с четными l , то делаем вывод, что $j=0$ и имеет место статистика Бозе.

Исторически впервые Разетти [62] был измерен спин ядра N_{14} (молекула азота $N-N$). Разетти обнаружил, что $j=1$ и что справедлива статистика Бозе. Но тогда еще считали, что Вселенная состоит из протонов p^+ , электронов e^- и фотонов γ (единственные частицы, известные в то время) и что ядро N_{14} с зарядом $7e$ содержит 14 протонов и 7 электронов. Таким образом, ожидалось, что оно имеет полуцелый спин и статистику Ферми. Эти измерения послужили началом кризиса в физике.

3. Ядерная физика

Сильное и слабое взаимодействия

3.1. СОВОКУПНОСТЬ ИЗВЕСТНЫХ ЯДЕР

Ядра состоят из протонов p и нейтронов n . Обе частицы имеют близкие массы: $m_p = 1836,10 m_e = 938,25$ МэВ, $m_n = 939,55$ МэВ. Протон несет электрический заряд $+e$. Обе частицы имеют спин $1/2$. Ядро характеризуется количеством протонов Z и количеством нейтронов N , оно обозначается символом (Z, N) и содержит $A = Z + N$ нуклонов. Ядра имеют связанные возбужденные состояния, которые нестабильны. Основное состояние само может оказаться нестабильным, тогда одно ядро будет спонтанно превращаться в другое. При этом оно испытывает один из следующих типов распадов:

а) β^- -распад: $n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}$ ($\bar{\nu}$ — антинейтрино); $(Z, N) \rightarrow (Z + 1, N - 1) + e^- + \bar{\nu}$;

β^+ -распад: $(Z, N) \rightarrow (Z - 1, N + 1) + e^+ + \nu$, конкурирующий с e^- -захватом $(Z, N) + e^- \rightarrow (Z - 1, N + 1) + \nu$ (который требует меньшей энергии). Среднее время жизни τ может меняться от 10^{-3} с до 10^{20} лет.

б) α -распад¹⁾: $(Z, N) \rightarrow (Z - 2, N - 2) + (2, 2)$ для ядер с $A > 140$. Время жизни τ может иметь значение до 10^{20} лет.

И еще два гораздо более редких распада:

в) излучение нейтрона: $(Z, N) \rightarrow (Z, N - 1) + n$, τ менее нескольких секунд. Происходит редко.

г) Спонтанное деление на два меньших ядра $(Z, N) \rightarrow (Z_1, N_1) + (Z_2, N_2)$.

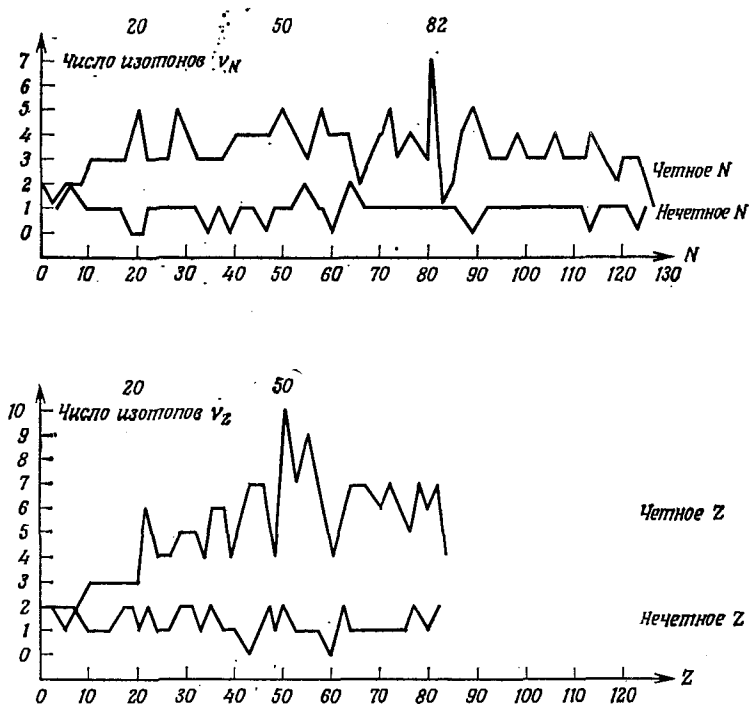
Будем называть ядро стабильным, если период его полураспада $\tau > 10^{20}$ лет. Известно 274 стабильных ядра. Это 165 ядер с Z четным и N четным, 4 ядра с Z нечетным и N нечетным ($Z = N = 1, 3, 5, 7$), 55 ядер (Z четное, N нечетное) и 50 ядер (Z нечетное, N четное).

На фиг. 3.1 приведено количество стабильных ядер при заданном числе Z (изотопы) и при заданном числе N (изотоны).

¹⁾ Та частица, которая была впервые названа α -частицей, оказалась не чем иным, как ядром гелия (2.2).

Хорошо видно заметное преобладание ядер с четными Z и четными N .

Следует отметить, что ядра с $Z=20$ и $Z=50$ ($N=82$) имеют значительно больше изотопов (или изотонов), чем их



Фиг. 3.1. Зависимость чисел ν_N и ν_Z стабильных ядер (Z, N) от Z и N .

Отметим, что не существует стабильных ядер с $Z=43, 61, > 83$; с $N=19, 21, 35, 39, 45, 61, 89, 115, 123, > 126$ и с $A=Z+N=5, 8, 147, > 203$. Самым тяжелым стабильным ядром является ${}^{126}_{82}\text{Pb}$ 208 с $Z=82, N=126$. Удивительной особенностью фиг. 3.1 является то, что ν_Z и ν_N почти всегда равны единице и лишь иногда принимают значения 2 или 0 (для нечетных Z или N). Значения этих величин носят менее регулярный характер для четных Z или N . При $Z=20=N, Z=50=N, N=82$ и $N=28$ наблюдаются относительные максимумы.

четные соседи. Это справедливо (хотя и не так удивительно) и для $N=20$ и $N=50$ (а также для $N=28$). Самое тяжелое стабильное ядро — это Pb_{208} с $Z=82, N=126$. Другое удивительное свойство распределения стабильных ядер по Z и N

заключается в том, что за исключением двух случаев $N - Z \geq 0$ и $N - Z$ является медленно растущей функцией $A = N + Z$:

$N - Z = -1$ для протона ($Z = 1$) и He^3 ($Z = 2$);

$N - Z = 0$ для 13 ядер;

$N - Z = 1$ для 16 ядер;

$N - Z$ в среднем увеличивается с ростом A ,

$(N - Z) \sim 6 \cdot 10^{-3} A^{2/3}$.

Ядерные силы — наиболее интенсивные силы в природе. Однако они не могут связать вместе более 208 нуклонов¹⁾. Причина заключается в том, что эти силы имеют малый радиус действия и, кроме того, нуклоны подчиняются статистике Ферми, которая для конденсированного состояния приводит к эффектам, аналогичным отталкиванию.

Известно более тысячи различных нестабильных ядер. Те из них, которые имеют время жизни $\tau > 0,1$ возраста Вселенной, были обнаружены в природе, другие еще только возникают в настоящее время (C^{14}). Все остальные созданы человеком, причем более половины из них имеют четные Z и N . Существует полуэмпирическая формула (формула Вейцзекера), дающая зависимость энергии связи основного состояния стабильных или нестабильных ядер от Z , N и $A = Z + N$:

$$B(Z, N) = Zm_p + Nm_n - m(Z, N) = U_v A - U_c Z(Z-1) A^{-1/3} - U_s A^{2/3} - U_t \frac{(Z-N)^2}{A} + U_p \frac{(-1)^Z + (-1)^N}{2} A^{-3/4} \quad (3.1)$$

(значения постоянных U даны в МэВ),

$U_v = 14,0$ МэВ, $U_c = 0,61$ МэВ; $U_s = 14,0$ МэВ;

$U_t = 84,2$ МэВ, $U_p = 34$ МэВ.

Постоянная U_v соответствует максимальной средней энергии связи нуклона. Член U_c учитывает кулоновское отталкивание Z протонов, равномерно распределенных в сфере, радиус которой пропорционален $A^{1/3}$. Член U_s относится к поверхностному эффекту, связанному с короткодействующим характером ядерных сил; U_t уменьшает величину $|Z - N|$, в то время как U_p соответствует эффекту спаривания тождественных нуклонов. Как видно, ядра с четными Z и N стабильнее и многочисленнее, чем ядра с нечетными Z и (или) нечетными N . Как

¹⁾ Было постулировано существование нейтронных звезд с радиусом от 10 до 100 км, содержащих $\sim 10^{57}$ нейтронов. Эти звезды, по-видимому, и наблюдаются сейчас в виде „пульсаров“. Они действительно представляют собой гигантские ядра, но их энергия связи обусловлена как ядерными, так и гравитационными силами.

правило, спин (момент количества движения) всех без исключения известных ядер с четными Z и N равен нулю.

Распределение ядерного спина для ядер с нечетным A рассматривается в разд. 3.4.

3.2. ИЗОСПИН

Вскоре после открытия нейтрона (1932 г.) Гейзенберг создал формальный язык для изучения ядра. Нейтроны и протоны рассматривались им как одни и те же частицы — нуклоны, имеющие пять степеней свободы: три меняющиеся непрерывно в пространстве (\mathbf{x}), одну спиновую (σ), принимающую два значения, и еще одну новую степень свободы. Эту новую величину Гейзенберг просто назвал пятой степенью свободы τ и различал с ее помощью нейтроны и протоны [63]. Поскольку, подобно спину, она может принимать два значения, то теперь она называется изоспином¹⁾.

Эти условные обозначения Гейзенберга оказались более чем полезными. Действительно, вскоре было установлено, что между протонами и нейтронами действуют одинаковые ядерные силы. Их различие (разные электрические заряды и магнитные моменты, небольшая разница в массах) приписывалось главным образом электромагнитным эффектам. В разумных пределах их действием можно пренебречь.

Обозначим гильбертово пространство состояний нашего нуклона через

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{L}_2(\mathbf{x}, t) \otimes \mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{H}_\tau, \quad (3.2)$$

тогда для A нуклонов оно будет иметь вид

$$\mathcal{H}^{(A)} = \mathcal{H}_{[1A]}^{(1)} = P_{[1A]} \otimes_{\lambda} \left((\mathcal{L}_2 \otimes \mathcal{H}_\sigma)_{[\lambda]}^{(A)} \otimes \mathcal{H}_{\tau[\lambda]}^{(A)} \right), \quad (3.3)$$

где $P_{[1A]}$ — проектор на $\mathcal{H}_{[1A]}^{(1)}$.

Для изучения ядра из A нуклонов удобно аппроксимировать сумму взаимодействий двух частиц средним потенциалом (равным сумме гамильтонианов отдельных частиц) и остаточным двухчастичным потенциалом, который еще является потенциалом

¹⁾ Хотя эта величина носит название изотопического спина с 1936 г., для нее более подходило бы название „изобарический спин“. Благодаря естественной эволюции языка это слово сократилось и превратилось в изоспин.

притяжения. Аналогия с изучением атомов¹⁾ позволяет сделать некоторые качественные выводы.

Воспользуемся тем же аргументом, что и в разд. 2.6 для атомов, но с учетом того, что остаточное взаимодействие имеет противоположный знак. Мы знаем, что в этом случае для основного состояния схема Юнга $[\lambda]$ в уравнении (3.3) должна быть как можно более симметрична, а $[\lambda]^c$ — антисимметрична, с одной оговоркой, что она имеет только две строки. Отсюда следует, что обе строки, насколько это возможно, равны друг другу:

$$\lambda_i \geq 0; \quad [\lambda]^c = [\lambda_1, \lambda_2], \quad 0 \leq \lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_{\text{мин}}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = A. \quad (3.4)$$

Если ядро имеет Z протонов и N нейтронов ($Z + N = A$), его состояния полностью симметричны по $\sup \{Z, N\}$ частицам, так что

$$\lambda_1 \geq \sup \{Z, N\} \quad (3.5)$$

и

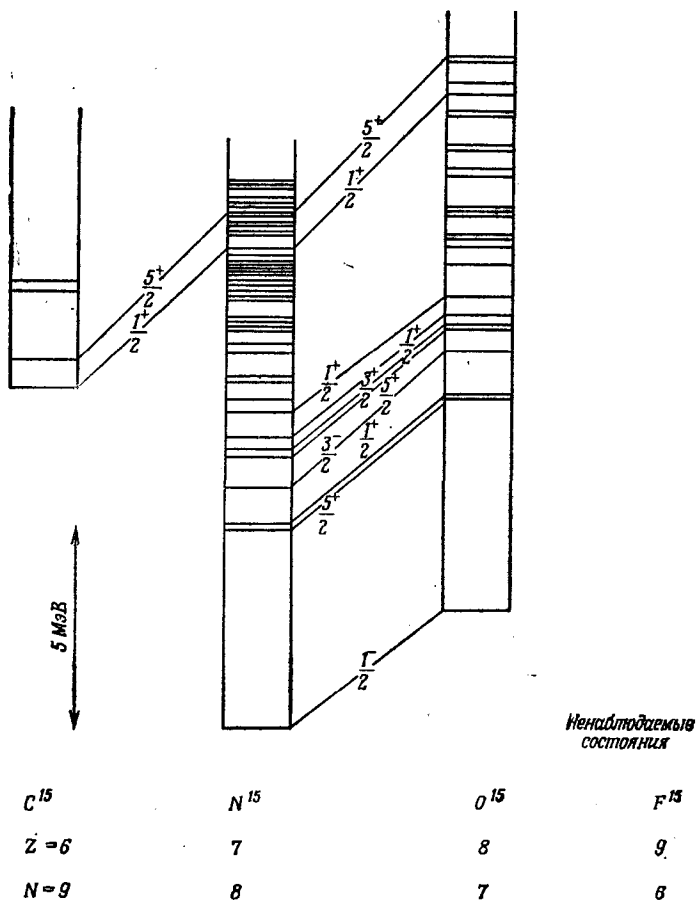
$$|Z - N| \leq \lambda_1 - \lambda_2. \quad (3.6)$$

Таким образом, уравнение (3.4) можно интерпретировать следующим образом: для наиболее стабильных ядер величина $|Z - N|$ принимает наименьшее возможное значение. Как мы уже видели, это хорошо подтверждается для легких ядер, у которых электромагнитное отталкивание протонов пренебрежимо мало. Если это отталкивание приходится учитывать, то $N - Z > 0$ становится медленно растущей функцией от $A = N + Z$. В приближении, когда n и p считаются тождественными, изобары (ядра с одним и тем же числом нуклонов $A = Z + N$) тоже должны быть тождественными. Рассмотрим фиг. 3.2. На ней представлен энергетический спектр известных состояний для $A = 15$, приведены известные значения спина и четности этих состояний. Поражает сходство спектров (по крайней мере, в нижней части схемы) для $1/2 |Z - N| = 1/2$ (т. е. для ядер N^{15} и O^{15}). Существенным отличием является скачок вверх по энергии примерно на 3 МэВ для ядра O^{15} , имеющего на один протон больше, чем ядро N^{15} . Пары соответствующих состояний называются „дублетами“ состояний с изоспином $1/2$.

Объясним подробно эту точку зрения, опирающуюся на соотношения между группами перестановок $S(n)$ и унитарными

¹⁾ Существует и различие. Атомы, обладающие n электронами, состоят из $(n + 1)$ частиц. При этом, как мы уже видели, легко исключить движение центра масс. Для этого за начало координат выбирают ядро, а все электроны рассматривают относительно него на равных основаниях. Метод исключения движения центра масс в ядерной физике более сложен.

группами $U(k)$, которые упоминались в разд. 1.4 и использовались в разд. 2.9.



Фиг. 3.2. Спектр состояний изобар с $A = 15$.

Состояния C^{15} имеют изоспин $\geq 3/2$. Для другого условного обозначения ядра используется химический символ соответствующего атома (это дает просто число Z) с числом нуклонов $A = Z + N$ в качестве индекса в правом верхнем углу.

Ядерное взаимодействие не делает различия между протонами и нейтронами. Для ядра отсюда следует свойство инвариантности относительно перестановки $[\equiv S(A)]$ его нуклонов. Это свойство можно интерпретировать следующим образом:

все наблюдаемые O ядерной физики, действующие в пространстве $\mathcal{H}^{(1)}$ (пространство одночастичных состояний нуклона), из уравнения (3.3) выражаются в форме уравнения (3.7), где

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{L}_2(\mathbf{x}, t) \otimes \mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{H}_\tau, \quad (3.2)$$

$$O = \mathcal{N} \otimes I, \quad (3.7)$$

$$U(2) = I \otimes U(2), \quad (3.8)$$

т. е. они соответствуют тривиальному действию в пространстве \mathcal{H}_τ , являющемся множителем в этом тензорном произведении и соответствующем гейзенберговой пятой степени свободы системы „протон — нейтрон“.

Действие группы $U(2)$ на $\mathcal{H}^{(1)}$, определенное уравнением (3.8), коммутирует с каждой наблюдаемой: $U(2) \subset \{O\}'$ — коммутант алгебры „одночастичных наблюдаемых“. Действие этой группы $U(2)$ можно распространить на любое гильбертово пространство состояний A частиц $\mathcal{H}^{(A)}$ ($A \geq 0$). Следовательно, когда в ядерной физике пренебрегают неядерными взаимодействиями, эта группа $U(2)$ является подгруппой группы инвариантности. Пространство $\mathcal{H}^{(A)}$ имеет одно и то же разложение на пространства факториальных представлений как для $S(A)$, так и для $U(2)$. Поэтому для соответствующих представлений мы используем одни и те же обозначения (схемы Юнга).

Поскольку кулоновским отталкиванием протонов можно пренебречь только для легких ядер, то ожидалось, что сохранение изоспина окажется неинтересным для более тяжелых ядер. Однако прогресс ядерной физики за последние пять лет показал, что для ядер с $A \leq 100$ понятие изоспина действительно является полезным. Обзор по этому вопросу, не содержащий технических деталей, дан в статье Кокера и Мура [64].

3.3. ИНВАРИАНТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ $U(4)$

В 1936 г. Вигнер [65] изучил приближение, в котором пренебрегают не только изоспиновой, но также и спиновой зависимостью ядерных сил. В этом случае уравнения (3.7) и (3.8) можно заменить на

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{L}_2(\mathbf{x}, t) \otimes \mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{H}_\tau, \quad (3.2)$$

$$O = \mathcal{N} \otimes I \otimes I, \quad (3.9)$$

$$U(4) = I \otimes U(4). \quad (3.10)$$

В этом приближении теория ядра инвариантна также относительно группы $U(4)$, действующей в четырехмерном простран-

стве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{H}_\tau$. Уравнение (3.3) для гильбертова пространства состояний A нуклонов можно тогда переписать в виде

$$\mathcal{H}^{(A)} = \mathcal{H}_{[1A]}^{(1)} = P_{[1A]} \otimes_\lambda (\mathcal{P}_{2[\lambda]} \otimes \mathcal{H}_{[\lambda]^c}), \quad (3.11)$$

где схема Юнга $[\lambda]$ задает представление группы $U(4)$.

Для наиболее стабильных состояний то свойство, что „остаточные“ двухчастичные силы являются силами притяжения (использованное в разд. 3.2), предполагает, что состояние $[\lambda]$ как можно более симметрично, а $[\lambda]^c$ соответственно антисимметрично, т. е. его схема Юнга имеет четыре строки почти одинаковой длины:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4 \geq 0 \quad (\text{с } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = A).$$

Для случая когда $A/4$ есть целое число, это означает $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = A/4$. Это НП группы $U(4)$ имеет размерность 1. Ограничение этого представления группы $U(4)$ (действующего в пространстве $\mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{H}_\tau$) на подгруппу $SU(2) \times SU(2)$ приводит к нулевому спину и нулевому изоспину для основного состояния. Как мы уже видели, равенство нулю спина справедливо для всех таких ядер, а равенство нулю изоспина — только для легких ядер ($Z < 17$), у которых кулоновское отталкивание протонов не слишком велико. Для ядер с $A = 4n + 2$ представление $[\lambda]^c$ для самых нижних состояний есть $\lambda_1 - 1 = \lambda_2 - 1 = \lambda_3 = \lambda_4 = n$. Оно имеет размерность $\binom{4}{2} = 6$. Его ограничение на подгруппу $SU(2) \times SU(2)$ разлагается непосредственно на сумму двух трехмерных представлений: одно со спином 1 и изоспином 0 и одно со спином 0 и изоспином 1. Этот способ дает правильные значения спина самого нижнего состояния Li^6 (спин 1), He^6 и Be^6 (спин 0) (фиг. 3.3). Эти два последних уровня вместе с третьим уровнем Li^6 (спин 0^+) образуют изоспиновый триплет. Остальные уровни, спины которых отмечены на фиг. 3.3, относятся к другому эквивалентному представлению $U(4)$ с орбитальным моментом количества движения $l = 2$. Таким образом полный момент количества движения может равняться $j = l = 2$ для состояний со спином 0 и изоспином 1 и $l - s \leq j \leq l + s$, т. е. $j = 3, 2, 1$ для состояний со спином 1 и изоспином 0. Такие состояния Li^6 не имеют соответствующих состояний в He^6 и Be^6 .

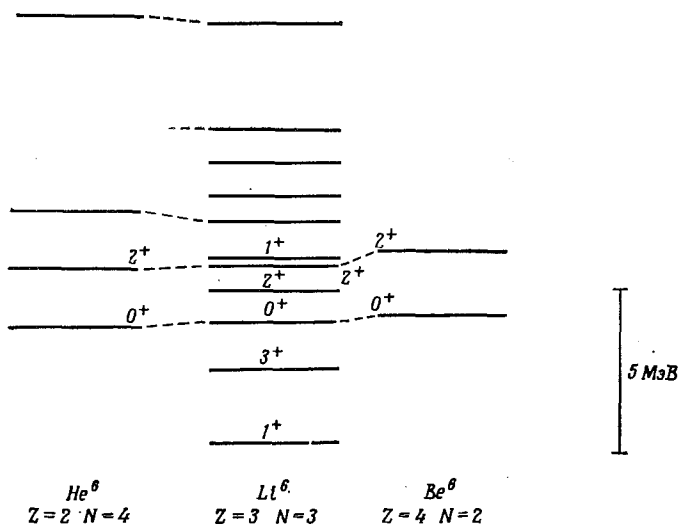
Состояния, принадлежащие НП группы $U(4)$, называются в физической литературе супермультиплетами. Инвариантность

относительно преобразований Галилея в теории супермультиплетов исследуется совершенно так же, как это делалось в разд. 2.9 для атомной физики.

Следует рассмотреть накрытие \bar{G} группы Галилея G , $\bar{G} \xrightarrow{\pi} G$ и гомоморфизм

$$\bar{G} \xrightarrow{\phi} SU(2) \times 1 \subset U(2) \times U(2) \subset U(4).$$

Группа инвариантности теории есть прямое произведение $G \times U(4)$, а \bar{G} есть подгруппа $\bar{G} \xrightarrow{i} G \times U(4)$ с $i(\bar{g}) = (\pi(\bar{g}), \phi(\bar{g}))$.

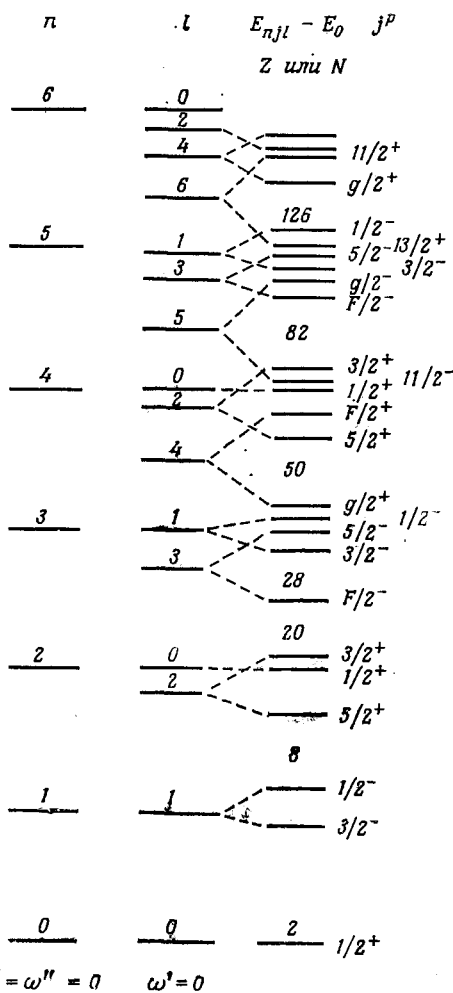


Фиг. 3.3. Спектр уровней ядер с шестью нуклонами.

Приближение независимости ядерных сил от спина и изоспина, приводящее к инвариантности относительно группы $U(4)$, является грубым, и нельзя было ожидать, что оно окажется полезным для ядер, у которых число нуклонов A не очень мало. Однако благодаря тому, что сохранение изоспина является хорошим приближением, инвариантность относительно $U(4)$ можно с пользой применять к ядрам с $A \leq 100$, что следует из изучения статистического распределения энергий их основных состояний [66].

3.4. ОБОЛОЧЕЧНАЯ МОДЕЛЬ

В разд. 3.1 мы видели, что ядра с Z или $N=8, 20, 50, 82$ и 126 оказываются более стабильными. Многие свойства ядер (например, энергия связи, приходящаяся на один нуклон, магнитный и квадрупольный моменты) для этих чисел являются выделенными. Изучение ядерных таблиц показывает, что для ядер с нечетным A четность и спин основного состояния меняются регулярным способом, который очень сильно напоминает заполнение оболочек (как в атомной физике). Основное состояние, спин j и четность (\pm) зависят только от величины нечетного числа Z или N . Таким образом, порядок расположения уровней с увеличением энергии остается одним и тем же как для протонов, так и для нейтронов. Этот же порядок можно получить и несколько модифицируя спектр трехмерного гармонического осциллятора $E_n = n\hbar\omega + E_0$ (где ω постоянна).



Фиг. 3.4. Спектр энергий гамильтониана, соответствующего уравнению (3.12) для одного нуклона.

Рассмотрим множество из девяти операторов $T_{ij} = P_i P_j + Q_i Q_j$. Здесь P_i и Q_j ($i=1, 2, 3$) удовлетворяют каноническим перестановочным соотношениям

$$[P_i, Q_j] = -i\hbar\delta_{ij}.$$

Использование этих соотношений для вычисления коммутаторов $[T_{ij}, T_{i'j'}]$ показывает, что величины T_{ij} образуют представление (с точностью до множителя $i\hbar$) алгебры Ли группы $U(3)$.

Центр этой алгебры

$$H = \text{Sp } T_{ij} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

есть гамильтониан гармонического осциллятора (в соответствующих единицах). Из условия $[H, T_{ij}] = 0$ следует, что инвариантность относительно группы $U(3)$ для трехмерного гармонического осциллятора аналогична инвариантности относительно группы $SO(4)$ для атома водорода (см. разд. 2.4). Спектр оператора H можно найти аналогичным способом.

Основное состояние $n=0$ имеет энергию E_0 . Число состояний с энергией E_n равно $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Их орбитальный момент количества движения l удовлетворяет соотношению $(-1)^l = (-1)^n$, $0 \leq l \leq n$. Это соответствует первому столбцу фиг. 3.4. Второй столбец дает спектр гамильтониана

$$\hbar^{-1}H^1 = \omega H - \omega' L^2 - 2\omega'' \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}, \quad (3.12)$$

имеющего положительные константы $\omega, \omega', \omega'', \omega > \omega'$ и $\omega > \omega''$. Используя уравнение (2.55) для $s = \frac{1}{2}$, при $l > 0, j = l + \varepsilon \frac{1}{2}, \varepsilon = \pm 1$, получаем энергетический спектр

$$l > 0, \quad E_{n, j, l} - E_{0, \frac{1}{2}, 0} = n\omega - \omega' l(l+1) - \varepsilon\omega'' \left(l + \frac{1}{2} \right), \quad (3.13)$$

$$\varepsilon = \text{sign}(j - l),$$

$$l = 0, \quad E_{n, j, l} - E_{0, \frac{1}{2}, 0} = n\omega. \quad (3.13a)$$

Гамильтониан H' — это гамильтониан одного нуклона в среднем потенциале, создаваемом всем ядром. Как и в разд. 2.7, мы можем теперь последовательно „заполнять“ оболочки для протонов и нейтронов. Такая оболочечная модель ядра была предложена в 1949 г. Гепперт-Майер и Иенсенем [67]. Она весьма успешно объясняет свойства низколежащих уровней ядер и их распады.

Подробнее о строении ядерных оболочек рассказывает книга де Шалита и Тальми [68].

Отметим, что состояние Z (или N) частиц описывается антисимметричным тензором, имеющим меньшую степень разложимости, чем в случае атомов (см. разд. 2.8). Смешивание конфигураций здесь еще более ярко выражено, т. е. состояния ядер описываются тензорами, которые являются линейными

комбинациями различных разложимых тензоров с одинаковыми квантовыми числами.

Расчеты в оболочечной модели требуют классификации состояний внутри „одной и той же оболочки“. Такие расчеты были проделаны в период с 1942 по 1949 г. Ракá, который ввел квантовое число „синьорити“ [69].

Часть проблемы заключается в том, чтобы однозначно охарактеризовать те НП D_j группы $SU(2)$, которые появляются при разложении в прямую сумму НП степени данного НП $\otimes^n D_j$ (где j — обычно целое число для атомов и полуцелое — для ядер). Метод заключается в нахождении цепочки подгрупп

$$H_0 = U(2j+1) \supset H_1 \supset \dots \supset H_k \supset SU(2) \text{ или } SO(3), \quad (3.14)$$

где $SU(2)$ ($2j$ — нечетное), или SO_3 ($2j$ — четное), есть подгруппа $U(2j+1)$, образованная матрицами D_j . Цепочка обладает следующими свойствами.

Последовательные ограничения представления $U(2j+1)$

$$\otimes^n \square = \otimes_{\lambda} s_{\lambda}[\lambda] \quad [\text{см. (1.15a)}]$$

[где \oplus_{λ} обозначает суммирование по всем схемам Юнга с n клетками, а s_{λ} есть размерность соответствующего НП $S(n)$] на разные подгруппы H_i ($0 \leq i \leq k$) должны в конце концов привести к прямой сумме НП $SU(2)$ с кратностью 1. Табл. 3.1 иллюстрирует простой пример $J=2$, $n=3$; НП группы $U(5)$ $\square\square\square$ и $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}$, суженные на $SU(2)$, приводят только к кратности 1.

ТАБЛИЦА 3.1

Разложение представления $\otimes^3 D_2$ (3 частицы в D -оболочке)

Представление группы $U(5)$	$(\square)^3 = \square\square\square \oplus 2 \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}$
Размерность	$5^3 = 35 + (2 \times 40) + 10$
НП группы $U(5)$, сужение на $SO(5)$	Сужение на $SO(3)$
$\square\square\square =$ одно НП	$\square\square\square = D_6 \oplus D_4 \oplus D_3 \oplus D_2 \oplus D_0$
$\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} = A \oplus B$	$A = D_5 \oplus D_4 \oplus D_3 \oplus D_2 \oplus D_1$
	$B = D_2$
$\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} =$ одно НП	$\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} = D_3 \oplus D_1$

Для НП \boxplus картина иная. Здесь необходима одна промежуточная группа $H_1 = SO(5)$.

Если пренебречь кратностью s_λ , каждое неэквивалентное НП группы $SO(3)$ или $SU(2)$ имеет разную генеалогию НП H_i . Согласно терминологии Рака, они обладают различными квантовыми числами „синьорити“. Чтобы иметь возможность различать „синьорити“, Ракá даже был вынужден ввести в число H_i особую группу Ли G_2 (в случае $J=3, n=7$)! Если J — полуцелое число, то обычно $H_1 = Sp(2J+1)$. Конечно, современные физики используют более совершенные модели ядер (см., например, [70]). В планы этих лекций не входит более детальное рассмотрение. Для общего обзора мы отсылаем интересующихся к статье Инглиса [71].

3.5. АДРОНЫ

Благодаря рассмотрению изоспина инвариантность относительно группы $SU(2)$, с которой встречаются при изучении свойств ядерного взаимодействия, не различающего протоны и нейтроны, более знакома физикам, чем инвариантность относительно группы $S(n)$. Тем не менее возникает вопрос, является ли инвариантность относительно $SU(2)$ более фундаментальной?

Если приходится иметь дело только с нуклонами, то ответ будет отрицательным, оба математических метода физически эквивалентны. Однако сильно взаимодействующих частиц существует гораздо больше; их, вообще говоря, нельзя переставлять с нуклонами, но им можно приписать изоспин. Возьмем в качестве примера π -мезон. В 1935 г. Юкава предсказал существование мезонов, которые в ядерном взаимодействии играют ту же роль, что и фотоны в электромагнитном взаимодействии. Он предсказал их электрический заряд $\pm e$, массу, время жизни, тип распада. Вскоре эти частицы были открыты, но при этом их ошибочно отождествили с μ -лептонами! Частица Юкава была открыта в 1947 г. и названа π^\pm . Еще в 1937 г. физики (например, Кеммер) показали, что для мезона необходимы 3 состояния заряда, а именно $+e, 0, -e$. В самом деле, для того чтобы при ядерном взаимодействии сохранялся изоспин, эти три состояния должны быть инвариантны относительно группы $SU(2)$. По теории Юкава, поле мезона связано с током нуклонов. Этот ток преобразуется под действием группы $SU(2)$ как тензорный оператор пространства представления $(D_{1/2})^2 = D_1 \oplus D_0$. Тогда простейшее $SU(2)$ -инвариантное взаимодействие Юкава, которое может включать электрически

заряженный мезон, имеет вид

$$\int \mathbf{j}(x) \cdot \boldsymbol{\phi}(x) dx, \quad (3.15)$$

где $\mathbf{j}(x)$ и $\boldsymbol{\phi}(x)$ — векторные операторы относительно группы изоспина $SU(2)$, а взаимодействие является скалярным произведением этих векторов. Предсказанный таким образом в 1937 г. π^0 -мезон был обнаружен в 1950 г.

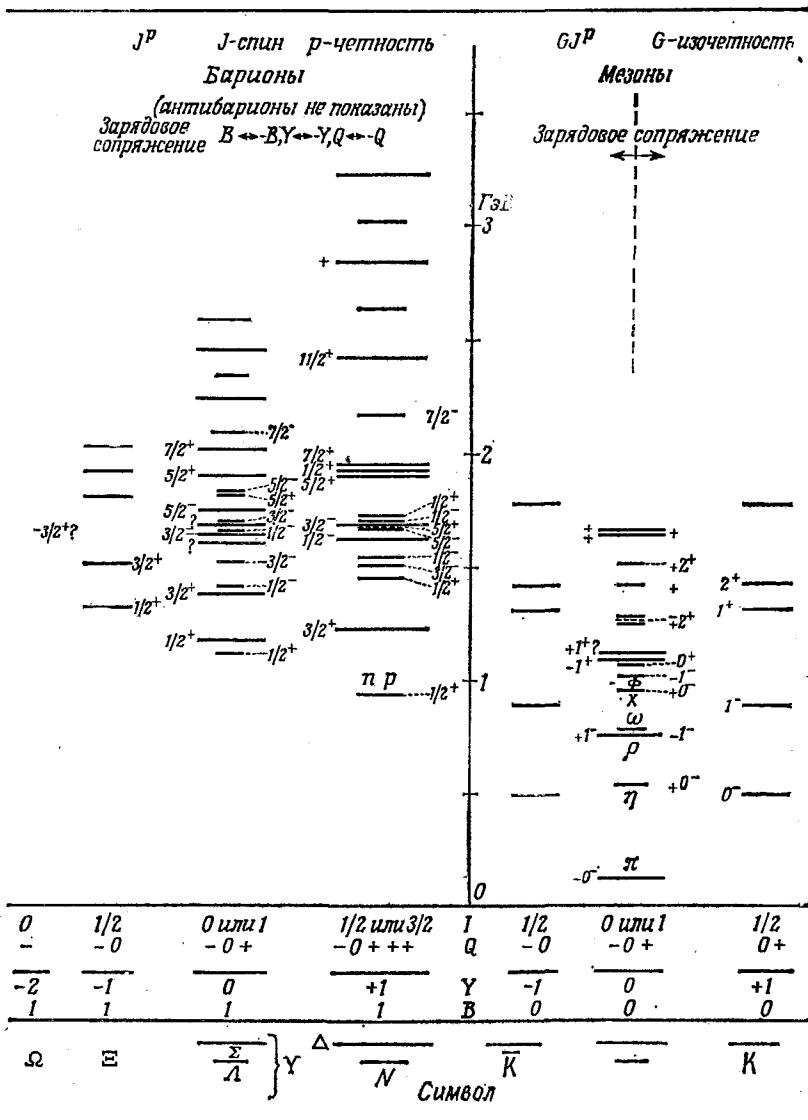
Уже в 1947 г. были обнаружены две другие частицы, обладающие сильным взаимодействием. Всем таким частицам было дано общее название „адроны“. Число вновь открытых адронов увеличилось от 15 в пятидесятые годы до 250 в шестидесятые годы. В табл. 3.2¹⁾ представлены спектр масс этих частиц, их спин и четность, если таковые известны. Различные столбцы этой таблицы соответствуют разным значениям квантовых чисел, сохраняющихся при ядерном взаимодействии, которое называют также сильным взаимодействием.

Существует заряд b , являющийся для сильного взаимодействия тем же, чем служит электрический заряд в электромагнитном взаимодействии. „Заряженные“ частицы имеют $b = \pm 1$ и называются барионами. „Нейтральные“ частицы с $b = 0$ называются мезонами. Оказывается, все барионы имеют полуцелый спин, а все мезоны — целый спин. Определить изоспин каждого бариона не представляет труда. Частицы внутри одного и того же изоспинового мультиплетта имеют одинаковые спин и четность, одинаковые массы с точностью 1% (для π -мезонов в порядке исключения точность составляет 3%), но разные электрические заряды. Сохранение изоспина позволяет предсказать некоторые недостающие члены мультиплетта, поиски которых затем всегда увенчивались успехом. Вместо того чтобы пользоваться величиной их электрического заряда q , $(2t + 1)$ состояний одного и того же изоспинового мультиплетта можно охарактеризовать значением t_3 , компонентой оператора изоспина в направлении третьей оси. Обе эти величины эквивалентны, однако не совпадают. Разность $(q - t_3)$ зависит от мультиплетта. Поскольку при сильном взаимодействии и q и t_3 сохраняются, их разность

$$y = 2(q - t_3) \quad (3.16)$$

¹⁾ Мы не вносили в табл. 3.2 новых данных, так как эта таблица носит чисто иллюстративный характер. Сводки данных по элементарным частицам публикуются ежегодно в журналах „Reviews of Modern Physics“ и „Nuclear Physics“. Последнюю сводку см. „Rev. Mod. Phys.“, 45, 2 (апрель), 1973. — Прим. ред.

Спектроскопия адронов (по данным журнала Rev. Mod. Phys. за январь 1969 г.)



является новым квантовым числом сильного взаимодействия, которое можно приписать каждому изоспиновому мультиплету ¹). Оно принимает целые значения и называется гиперзарядом. Чтобы включить это число, потребовалось расширить группу инвариантности $SU(2)$ до группы $U(2)$ ²). В разд. 5.1 будет дано дальнейшее расширение группы $U(2)$.

В табл. 3.2 мы опустили антибарионы, каждый из которых так относится к соответствующему бариону, как антипротон к протону (см. цитату из работы Дирака во введении). Антибарионы получаются из барионов инволюцией, называемой C . Она меняет знак зарядов b , q , y и оставляет инвариантными массу и спин. Каждому изоспиновому мультиплету со значениями t , y , b соответствует C -сопряженный мультиплет t , $-y$, $-b$. Поэтому для самосопряженных мультиплетов ($b=0$, $y=0$) необходимо новое квантовое число. Я ввел его в 1953 г. [74] и назвал „изочетностью“. В табл. 3.2 оно обозначено буквой G .

Если учесть все квантовые числа, введенные для адронов, то группу инвариантности следует записать в виде $(U_1 \times U_2) \square Z_2(C)$, где U_1 соответствует барионному заряду, $Z_2(C)$ — группа из двух элементов, порожденная преобразованием C , а \square означает полупрямое произведение. Действие C эквивалентно комплексному сопряжению матриц $U(1)$ и $U(2)$. Если $b=0=y$ и, согласно уравнению (3.16), t — целое число, то НП этой группы являются точными представлениями группы $SO(3) \square Z_2(C)$, которая изоморфна прямому произведению $SO(3) \times Z_2(C)$.

И наконец, следует обратить внимание на то, что все частицы в табл. 3.2, за исключением протона (и антипротона), нестабильны. Не указаны ни их времена жизни, ни типы распада. Большая часть этих частиц нестабильна даже относительно сильного взаимодействия и имеет время жизни от 10^{-23} до 10^{-22} с. Их часто называют не частицами, а резонансами, так как к ним не совсем подходит понятие частицы. Частицы, стабильные относительно сильного взаимодействия, занимают самые нижние состояния столбцов табл. 3.2 и первые возбужденные состояния столбца с $y=0$, $b=1(\Sigma)$ и $b=0(\eta)$. Однако, по-видимому, не столь уж важно, являются ли они стабильными или нестабильными. В самом деле, если бы разность масс между самыми нижними состояниями двух соседних столбцов барионов в табл. 3.2 ($\Delta y=1$) была больше m_k , то

¹) Соотношение (3.16) было предложено Гелл-Манном в 1953 г. [72] (см. также [73]).

²) Но не до группы $U_1 \times SU(2)$, что обусловлено соотношением $(-1)^y = (-1)^{2t}$, которое следует из (3.16) (см. работу автора [74]).

самое верхнее из этих нижних состояний было бы нестабильно относительно сильного взаимодействия. Частица Σ стабильна только потому, что $m_\Sigma - m_\Delta < m_\pi$. Если бы, например, удовлетворялось условие $m_\Delta - m_N < m_\pi$, то Δ тоже была бы стабильна. Стабильность η обусловлена тем фактом, что и η и π имеют спин 0, четность $(-)$ (инвариантность относительно \mathcal{P}) и что изочетность $\eta = +$, в то время как изочетность $\pi = -$.

3.6. ДРУГИЕ ЧАСТИЦЫ И ДРУГИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Известно всего девять „элементарных“ частиц, не являющихся адронами, т. е. не обладающих сильным взаимодействием.

Это фотон γ с нулевой массой и спином 1 и 8 лептонов μ^+ , μ^- ; e^+ , e^- (электроны) и соответствующие им нейтрино с нулевой массой ν_{μ^+} , ν_{μ^-} , ν_{e^+} , ν_{e^-} ; все они имеют спин $1/2$. Только частицы μ нестабильны:

$$\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \nu_{e^\pm} + \nu_{\mu^\pm},$$

поскольку $m_\mu = 207m_e$.

Все частицы обладают электромагнитным взаимодействием, даже если они не несут электрического заряда (например, при $q=0$ барионы имеют магнитные моменты), но гипотеза Ампера ¹⁾ о том, что любое электромагнитное взаимодействие осуществляется через электромагнитный ток $j^\mu(x)$, хорошо проверена. Гамильтониан взаимодействия имеет вид

$$H_{em} = e \int A^\mu(x) j_\mu(x) d^3x, \quad (3.17)$$

где $A^\mu(x)$ — поле фотона (вектор электромагнитного потенциала). В системе единиц $\hbar = c = 1$ универсальная постоянная e определяется величиной $e^2 = \alpha = 1/137,03 \dots$ (см. разд. 2.4). Электромагнитное взаимодействие примерно в 100 раз слабее сильного взаимодействия. Так же обстоит дело и с порядком величины разности масс в изоспиновом мультиплете.

Существует и другое универсальное взаимодействие, в котором участвуют все частицы (за исключением фотонов). Оно характеризуется универсальной постоянной G , введенной Ферми [75] и определяемой выражением

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = 1,01 \times 10^{-5} \times m_p^2. \quad (3.18)$$

Поскольку это взаимодействие гораздо слабее электромагнитного, оно называется просто „слабым“ взаимодействием.

¹⁾ Она называется гипотезой „минимальной связи“.

Еще в 1934 г. Ферми выдвинул гипотезу, что это взаимодействие имеет некоторую аналогию с электромагнитным взаимодействием. Например, существуют четыре электрически заряженных (\pm) „слабых“ тока адронов, образующих соответственно вектор и аксиальный вектор относительно группы Лоренца $v_{\mu(\pm)}(x)$, $a_{\mu(\pm)}(x)$. Они взаимодействуют с лептонами через ток лептонов $l_{(\pm)}^{\mu}(x)$. Гамильтониан взаимодействия имеет вид

$$H_w = \frac{G}{\sqrt{2}} \sum_{\varepsilon = \pm 1} \int l^{\mu}_{(\varepsilon)}(x) h_{\mu(\varepsilon)}(x) d^3\mathbf{x}, \quad (3.19)$$

где

$$h_{\mu(\varepsilon)}(x) = v_{\mu(\varepsilon)}(x) - a_{\mu(\varepsilon)}(x) \quad (\varepsilon = \pm 1). \quad (3.20)$$

Уравнение (3.19) действительно имеет некоторое сходство с уравнением (3.17). Тот факт, что h_{μ} является линейной комбинацией обычного вектора и аксиального вектора, объяснит нам нарушение четности в слабом взаимодействии.

Фейнман и Гелл-Манн обнаружили в 1958 г. [76] очень глубокие родственные связи между тремя взаимодействиями. Эти связи мы и будем теперь объяснять. Из унитарного представления группы $U(2)$ на гильбертовом пространстве адронов \mathcal{H} можно получить представление F алгебры Ли этой группы на \mathcal{H} . Операторы, соответствующие наблюдаемым y и t_3 , являются самосопряженными операторами:

$$Y = F(y) \quad \text{и} \quad T_3 = F(t_3). \quad (3.21)$$

Поскольку для всех состояний адронов $q = t_3 + 1/2y$ [уравнение (3.16)], это соотношение должно быть справедливым и для самосопряженных операторов, представляющих эти наблюдаемые, так что

$$F(q) = Q = \int j^0(x) d^3\mathbf{x} = T_3 + \frac{1}{2}Y. \quad (3.22)$$

Заметим, что из $\partial_{\mu} j^{\mu}(x) = 0$ следует, что Q не меняется с течением времени, т. е. $[H, Q] = 0$. Однако Q здесь — полный электрический заряд всей адронной части мира. Он не сохраняется, так как слабое взаимодействие может перенести его в лептонную часть мира. Он сохраняется только в том приближении, когда пренебрегают слабым взаимодействием.

Фейнман и Гелл-Манн сделали замечательное открытие: если пренебречь электромагнитным и слабым взаимодействиями, то векторная часть слабых токов адронов $v'_{\mu(\varepsilon)}(x)$ [см. уравнение (3.20)] и электрический ток адронов $j_{\mu}(x)$ являются образами одного и того же тензорного оператора для группы $U(2)$ — группы инвариантности сильного взаимодействия; соответственно для векторов t_{\pm} и q — векторного пространства

комплексифицированной алгебры Ли $U(2)$

$$t_{\pm} \wedge y = 0 = y \wedge t_3, \quad t_{\pm} \wedge t_3 = \pm t_{\pm}. \quad (3.23)$$

Отсюда следует, что

$$T_{\pm} = F(t_{\pm}) = \int v^{(\pm)}(x) d^3x. \quad (3.24)$$

Изоспиновая группа, формально и абстрактно введенная в разд. 3.2, становится физической реальностью, поскольку она генерируется пространственным интегралом адронных токов для слабого взаимодействия. Добавление электрического заряда дает полную группу $U(2)$. Если электромагнитным и слабым взаимодействиями пренебречь нельзя, то $\partial_{\mu} v^{\mu}(x)$ и $\partial_{\mu} j^{\mu}(x)$ не исчезают и представление $U(2)$ на \mathcal{H} становится: 1) зависящим от времени для физиков (причем соотношение $[P, Q] = i\hbar 1$ остается справедливым в любой момент времени, если учитывать временную зависимость P и Q), 2) неопределенным для математиков (как показали Кольман и другие физики). Заметили ли вы, что вместо v в уравнении (3.24) стоит v' ? Я несколько сократил рассказ. Гипотеза Фейнмана — Гелл-Манна в действительности нуждается в расширении группы $U(2)$ до группы $SU(3)$, как мы объясним дальше в разд. 5.1 и 5.3.

Чтобы перейти к $U(2)$, надо разложить h_{μ} в уравнении (3.19):

$$h_{\mu}(\epsilon)(x) = h'_{\mu}(\epsilon)(x) \cos \theta + h''_{\mu}(\epsilon)(x) \sin \theta, \quad (3.25)$$

где $h'(\epsilon)$ имеет гиперзаряд $y=0$, а $h''(\epsilon)$ имеет $y=\epsilon$, а θ есть угол Кабиббо [77]. Такое же разложение проводится отдельно для $v_{\mu}(\epsilon)(x)$ и для $a_{\mu}(\epsilon)(x)$ [уравнение (3.20)]. Угол θ равен 15° , так что слабые переходы с $|\Delta y|=1$ происходят медленнее, чем переходы с $|\Delta y|=0$ в $\text{tg}^2 \theta$ раз.

Им отвечают также разные „правила отбора“ по изоспину. Как мы только что сказали, v' есть векторный оператор для изоспиновой группы $SU(2)$. Это также верно для a' и h' . Следовательно, слабые переходы с $|\Delta Y|=0$ удовлетворяют условию $|\Delta T|=0$ или $|\Delta T|=1$, в то время как слабые переходы с $|\Delta Y|=1$ удовлетворяют условию $|\Delta T|=1/2$, т. е. h'' , v'' , a'' являются спинорными операторами относительно группы $SU(2)$.

Мы должны упомянуть еще о двух других зарядах, сохраняющихся при всех известных взаимодействиях (так же, как барионный и электрический заряды). Это два лептонных заряда, которые сохраняются, по-видимому, в отдельности: заряд e -типа с $\epsilon = \pm 1$ для e^e , ν_{e^e} и нуль для μ , ν_{μ} и заряд μ -типа с $\epsilon = \pm 1$ для μ^e , ν_{μ^e} и нуль для e , ν_e .

5. Внутренние симметрии адронов¹⁾

5.1. $SU(3)$ -СИММЕТРИЯ

5.1.а. Октеты

Табл. 3.2 „элементарных частиц“ напоминает аналогичные таблицы атомного и ядерного спектров.

До того как были обнаружены десятки барионов и десятки мезонов, физики занимались поисками еще большей симметрии, чем симметрия $U(2)$ (изоспин и гиперзаряд), описанная нами в разд. 3.5. Здесь не место и не время говорить о неудачных вариантах. Упомянем только о $U(3)$ -группе Сакаты [78], фундаментальное представление которой было ассоциировано с p , n , Λ — первыми тремя известными барионами.

Точно так же, как Гейзенберг, пренебрегая незначительной разницей масс нейтрона и протона (точнее, приписывая ее эффекту электромагнитной собственной массы), предложил считать их двумя состояниями одной и той же частицы со спином $1/2$, восемь известных барионов со спином $(1/2^+)$, а именно p , n , Λ^0 , Σ^- , Σ^0 , Σ^+ , Ξ^- , Ξ^0 , можно рассматривать как восемь состояний „одной и той же“ частицы, хотя разность масс здесь уже порядка не 0,15%, а 15%.

К 1961 г. было известно уже семь псевдоскалярных мезонов (0^-), одинаковым образом группирующихся по изоспину и гиперзаряду $y = 1$, $t = 1/2$, K^+K^0 ; $y = -1$, $t = 1/2$, K^-K^0 ; $y = 0$, $t = 1$, $\pi^+\pi^0\pi^-$, правда, с гораздо большим разбросом по массам.

Гелл-Манн и Неeman независимо друг от друга предложили использовать $SU(3)$ в качестве классифицирующей группы [79, 80]. Восемь барионов $(1/2^+)$ и восемь мезонов 0^- (предсказанный с $y = 0$, $t = 0$ псевдоскалярный мезон был открыт спустя несколько месяцев и назван η^0) образуют два октета (восьмерные пространства \mathcal{E}_8 присоединенного представления $SU(3)$; ему соответствует схема Юнга \square). Например, гильбертово пространство состояний одного бариона есть тензорное произведение $\mathcal{P}(m, 1/2^+) \otimes \mathcal{H}(\square)$, где $\mathcal{P}(m, 1/2^+)$ представляет собой пространство НП $(m, 1/2^+)$ группы Пуанкаре \mathcal{P} , а $\mathcal{H}(\square)$ есть

¹⁾ Гл. 4 при переводе опущена.

пространство октета \mathcal{E}_8 . В том случае, когда разностью масс барионов можно пренебречь, $SU(3)$ является точной симметрией. Можно сказать, что сильные взаимодействия разлагаются на две части: часть с сильным взаимодействием, инвариантным относительно $SU(3)$, и часть с полусильным взаимодействием, инвариантным лишь относительно подгруппы $U_2(T, Y)$. Это соответствует редукции¹⁾

$$\begin{array}{ccccccc} \square & \otimes & \cdot & \otimes & \square & \otimes & \blacksquare \\ \square & SU(3)|_{U(2)} = & \left(1, \frac{1}{2}\right) & (0, 0) & (0, 1) & \left(-1, \frac{1}{2}\right) & (y, t) \end{array} \quad (5.1)$$

$$8 = 2 + 1 + 3 + 2$$

Но можно ли рассматривать полусильное взаимодействие, нарушающее $SU(3)$ -инвариантность, как возмущение сверхсильного взаимодействия? При известной доле оптимизма, конечно, да. В этом случае вы считаете, что 15% (эффект разности масс барионов) мало по сравнению с 1.

Перейдем теперь к изучению расщепления масс в $SU(3)$ -мультиплете.

5.1.6. Массовый оператор

Простая гипотеза для массового оператора M заключается в том, что он может быть разложен на

$$M = M_0 + M'(y), \quad (5.2)$$

где M_0 — „скалярный“ тензорный оператор, а $M'(y)$ — образ y [алгебры Ли $SU(3)$] в октете (\mathcal{E}_8 -тензорном операторе). Пусть \mathcal{E} есть пространство НП группы $SU(3)$. Поскольку $SU(3)$ имеет ранг 2, т. е. два нулевых корня (которые являются нулевыми весами для представления \square)²⁾, то

$$\dim \text{Hom}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}_8, \mathcal{E})^{SU(3)} \leq 2; \quad (5.3)$$

¹⁾ Для $u \in U(2)$ зачерненный столбец означает $(\det u)^{-1}$, а \square означает $(\det u)$.

²⁾ Если $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$ представляют собой числа клеток в первой и второй строках схемы Юнга для НП группы $SU(3)$, то можно также воспользоваться для этого НП обозначением $(\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2)$. Контраградиентное НП (p, q) есть НП (q, p) , так что НП (p, p) контраградиентно само себе; например $\square = (1, 1)$, в то время как НП $\square\square = (3, 0)$ размерности 10 имеет в качестве контраградиентного НП $\square\square\square$, обозначаемое физиками $\bar{10}$.

точнее, размерность равна 2 (за исключением тривиального НП, имеющего нулевую размерность) и равна 1 для тех НП, схема Юнга которых имеет только одну строку [т. е. $(\lambda_1, 0)$] или две одинаковые строки $\lambda_1 = \lambda_2$ [т. е. $(0, \lambda_2)$]. Это, например, НП \square и контраградиентное к нему НП $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$, имеющие размерность 10 и обозначаемые поэтому символами 10 и $\bar{10}$. Это верно и для НП $\square = (1, 0)$ и $\square = (0, 1)$, обозначаемых 3 и $\bar{3}$, а также для НП $\square = (2, 0)$ и $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = (0, 2)$, обозначаемых 6 и $\bar{6}$.

Неравенство (5.3) можно интерпретировать иначе, сказав, что в гильбертовом пространстве \mathcal{H} НП $SU(3)$ существует самое большое два линейно независимых октетных тензорных оператора. Таким образом, в приближении, когда $U(2)$ является точной симметрией (т. е. можно пренебречь электромагнитным и слабым взаимодействиями), массы частиц в мультиплете зависят от трех параметров [один параметр — среднее значение M_0 , и не больше двух для $M'(y)$]. Из разд. 1.5 известно, что для каждого \mathcal{S} мы можем взять в качестве линейно независимых октетно-тензорных операторов F и $D = F \vee F$, где $x \rightarrow F(x)$ есть представление (с точностью до множителя i) алгебры Ли $SU(3)$ на гильбертовом пространстве \mathcal{H} состояний адронов. Оно удовлетворяет соотношению $F \wedge F = iF$. Точнее, для любых $p_1, p_2 \in \mathcal{H}$ -пространство НП $SU(3)$ в \mathcal{H} и для любого октетно-тензорного оператора T имеем

$$\langle p_1 | T(x) | p_2 \rangle = \langle p_1 | (\alpha F(x) + \beta D(x)) | p_2 \rangle. \quad (5.4)$$

В физической литературе α/β называется отношением F/D . Если октетная часть $M'(y)$ [см. уравнение (5.2)] массового оператора не имеет матричных элементов между двумя подпространствами \mathcal{H} , в которых действуют неэквивалентные НП $SU(3)$ ¹⁾, то отсюда следует, что

$$M = M_0 + M_1 F(y) + M_2 D(y), \quad (5.5)$$

где M_0, M_1, M_2 — $SU(3)$ -скалярные операторы. Операторы $F(y)$ и $D(y)$ коммутируют и их общие пространства собственных векторов суть $U(2)$ -мультиплеты, так что они являются функциями Y и $T(T+1)$ — генераторов центра обертывающей алгебры $U_y(2)$. По определению оператор $F(y)$ пропорционален Y , т. е.

¹⁾ Из этого правила есть исключение (см. разд. 5.1г) — векторные мезоны. Чтобы подчеркнуть основную идею, мы сделали здесь слишком много упрощений.

оператору гиперзаряда. Вычисления дают

$$D(y) = T^2 - \frac{1}{4} Y^2 - \frac{1}{3} K, \quad (5.6)$$

где K есть (квадратичный) оператор Казимира группы $SU(3)$. Таким образом, изменив для удобства определение скалярных операторов, массу состояния $SU(3)$ -мультиплета с гиперзарядом y и изоспином t можно записать в виде

$$m = m'_0 + m'_1 + m_2 \left(t(t+1) - \frac{1}{4} y^2 \right). \quad (5.7)$$

В применении к октету барионов N , Λ , Σ , Ξ это дает соотношение между массами четырех частиц

$$\frac{1}{2} (m_N + m_\Xi) = \frac{1}{4} (3m_\Lambda + m_\Sigma) \quad (5.8)$$

(соотношение масс Гелл-Манна — Окубо), которое хорошо подтверждается с точностью до нескольких МэВ (для масс более 10^3 МэВ)!

Для мезонов (нулевой барионный заряд) вследствие зарядового сопряжения между частицами и античастицами величина M'_1 должна быть равна нулю. Соотношение масс Гелл-Манна — Окубо для псевдоскалярных мезонов

$$m_K = \frac{1}{4} (m_\pi + 3m_\eta) \quad (5.9)$$

подтверждается только с точностью до 50 МэВ, т. е. примерно до $1/10$ массы K и η . Оптимистически настроенные физики находят хорошие оправдания для объяснения того факта, что это соотношение лучше удовлетворяется для m^2 , а не m .

5.1.в. Первый декуплет барионов

В 1961 г., когда в качестве группы симметрии было предложено использовать группу $SU(3)$, были известны только первые возбужденные состояния N и Σ : $\Delta (j^P = 3/2^+, t = 3/2)$ и $\Sigma^* (j^P = 3/2^+, t = 1)$ ¹⁾. Гелл-Манн, поместив их в представление 10, предсказал частицу $\Xi^* (j^P = 3/2^+, t = 1/2, y = -1)$, возбужденное состояние Σ и, наконец, частицу $\Omega (j^P = 3/2^+, t = 0, y = -2)$. Как мы уже видели в НП 10 (со схемой Юнга $\square\square$), масса должна линейно зависеть от двух параметров [один из

¹⁾ Их часто называют также Y^* . Мы обозначаем через j^P спин j и четность P .

них M_0 и только один входит в $M'(y)$, так что для этого декуплета соотношение Гелл-Манна — Окубо предсказывает массу m_y состояния с гиперзарядом y :

$$m_y = m_{\Sigma^*} - (m_{\Sigma^*} - m_{\Delta}) y. \quad (5.10)$$

Спустя несколько месяцев после этого (в 1962 г.), была обнаружена предсказанная частица Ξ^* с массой 1530 МэВ [ср. с предсказанным значением $[1385 + (1385 - 1236)] = 1534$ МэВ]. Позднее установили, что она имеет спин $3/2$ и ту же относительную четность, что и Σ^* . Так как частица Ω^- должна занимать самое нижнее адронное состояние с $b=1$ и $y=-2$, она должна быть стабильна по отношению к сильному и электромагнитному распаду. Таковую частицу настойчиво искали, но не находили. По крайней мере немедленно. Многие физики, потеряв надежду, пытались объяснить, почему Ω не существует. Однако в 1964 г. после двух с половиной лет лихорадочных поисков эта частица наконец была обнаружена. Масса Ω равна 1672 МэВ (ср. с предсказанным значением 1677 МэВ). Ее спин еще не измерен, так как до сегодняшнего дня удалось наблюдать не более двух десятков Ω -частиц. Если бы мы не искали частицу Ω там, где предсказано, неизвестно, когда бы еще мы обнаружили ее случайно.

5.1.г. Другие $SU(3)$ -мультиплеты

Имеющиеся на сегодняшний день экспериментальные данные свидетельствуют о деформированном виде $SU(3)$ -мультиплетов. Например, для барионов еще не известно ни одного возбужденного состояния Ω , хотя мультиплеты с $(5/2)^+$ и другие декуплеты, вероятно, существуют. Некоторые октеты были идентифицированы предварительно, хотя известно еще слишком мало возбужденных состояний Ξ и их квантовые числа пока не измерены.

По-видимому, мезоны предпочитают объединяться в нонеты. В самом деле, как добавление к октету 0^- известен мезон 0^- с $q=0$, $y=0$, $t=0$. Очень хорошо известен нонет 1^- (ρ , ω , ϕ , K^* , \bar{K}^*). Массовую формулу нельзя было применить к известному „октету“. Дело в том, что ω и ϕ являются ортогональными состояниями „смешанной конфигурации“ с $q=y=t=0$, $\omega = |1\rangle \cos \alpha + |8\rangle \sin \alpha$, $\phi = |8\rangle \cos \alpha - |1\rangle \sin \alpha$, где $|1\rangle$ есть $SU(3)$ -синглет, а $|8\rangle$ — вектор октета с $q=y=t=0$. Нонет 2^+ тоже надежно установлен. Вероятно, существует и октет 1^+ . Имеется некоторая возможность существования

27-плета ($\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right)$ барионов (в табл. 2.3 не обозначен, так как это еще предварительные экспериментальные данные). Надо отметить, что появляются только НП присоединенной группы $SU(3)/Z_3$.

5.1.д. Поперечные сечения и распады резонансов

$SU(3)$ -инвариантность предсказывает отношения вероятностей распадов резонансов на более легкие адроны (вероятности, измеренные по естественной ширине, и различные относительные вероятности). Это дает замечательно хорошие предсказания и объясняет такие странные явления, как малую относительную вероятность распада ϕ на 2π .

Для реакций с двумя октетными частицами $A + B \rightarrow C + D$ можно показать, что амплитуда рассеяния принадлежит к представлению

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (5.11) \\ \begin{array}{cccccccc} 8 & \otimes & 8 & & 27 & & 8 & 1 & 8 & 10 & \overline{10} \end{array} \end{array}$$

содержащему семь произвольных параметров. Еще меньше параметров в реакции $8 \otimes 8 \rightarrow 8 \otimes 10$. Путь уточнения разности масс пока не ясен и все предсказания в этой области не эффективны.

Антология оригинальных статей, посвященных $SU(3)$ -симметрии, была составлена Гелл-Манном и Нееманом [81]. Этому же вопросу посвящена книга Гурдэна [82].

5.2. ГЕОМЕТРИЯ $SU(3)$ -ОКТЕТА

Обсудим некоторые геометрические свойства присоединенного представления группы $SU(3)$. Формулами (1.18), (1.19), (1.19a) мы уже определили $SU(3)$ -инвариантное скалярное произведение (x, y) , произведение в алгебре Ли $x \wedge y$ и произведение в симметрической алгебре $x \vee y$ для любой пары элементов $x, y \in \mathcal{E}_{n^2-1}$ — вещественное векторное пространство присоединенного НП $SU(n)$. Ограничимся здесь рассмотрением случая $n=3$ и обозначим октетное пространство через \mathcal{E}_8 . Его элементы могут быть представлены в виде эрмитовых матриц 3×3 со следом, равным нулю. Они удовлетворяют уравнению

$$x^3 - (x, x)x - I \det x = 0, \quad (5.13)$$

для коэффициентов которого должно выполняться неравенство

$$4(x, x)^3 \geq 27(\det x)^2. \quad (5.14)$$

Мы находим, что

$$\det x = \frac{2}{3}(x, x \vee x). \quad (5.15)$$

Таким образом, (5.14) можно переписать в виде

$$(x, x)^3 \geq 3(x, x \vee x)^2. \quad (5.16)$$

Орбиты группы $SU(3)$ в пространстве \mathcal{E}_8 находятся во взаимно однозначном соответствии с парами вещественных чисел (x, x) , $(x, x \vee x)$, удовлетворяющих неравенству (5.16). В случае когда $(x, x)^3 > 3(x, x \vee x)^2$, x называется регулярным элементом \mathcal{E}_8 и его группа изотропии G_x есть $U(1) \times U(1)$. Ее алгебра Ли является подалгеброй Картана и порождается элементами x и $x \vee x$. Если же $(x, x)^3 = 3(x, x \vee x)^2$, то x называется исключительным элементом, а его группой изотропии является $U(2)$. Такой элемент x мы будем называть также q -вектором, или псевдокорнем. Далее мы будем пользоваться только нормированными векторами: $(x, x) = 1$. Векторы r , удовлетворяющие соотношению $(r \vee r, r) = 0$, являются корневыми векторами. Каждый псевдокорень имеет вид

$$q = \pm \sqrt{3} r \vee r \quad (5.17)$$

и удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{3} q \vee q = \mp q. \quad (5.18)$$

Назовем его положительным или отрицательным (нормированным) q -вектором. Обозначим через f_x, d_x линейные отображения

$$a \xrightarrow{f_x} x \wedge a, \quad a \xrightarrow{d_x} x \vee a.$$

Тогда

$$[f_a, f_b] = f_a \wedge b, \quad [f_a, d_b] = d_a \wedge b; \quad (5.19)$$

таким образом, для $\forall a, b$ из подалгебры Картана $\mathcal{C}_x f(a)$ в базисе z_k комплексифицированного пространства \mathcal{E}_8 могут быть диагонализированы одновременно. Поскольку алгебра \mathcal{C}_x остается стабильной при действии f_a и d_a слева, мы разложим

$$f_a = f_a'' \oplus f_a^\perp, \quad d_a = d_a'' \oplus d_a^\perp \quad \text{на } \mathcal{C}_x \oplus \mathcal{C}_x^\perp.$$

Тогда

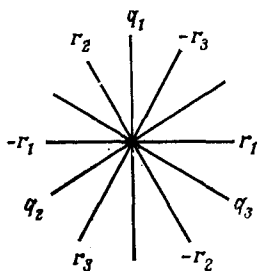
$$f_a'' = 0, \quad f_a^\perp z_k = i(r_k, a) z_k, \quad k = 1, \dots, 6, \quad (5.20)$$

$$d_a^\perp z_k = (r_k \vee r_k, a) z_k = \frac{1}{\sqrt{3}}(q_k, a) z_k, \quad k = 1, \dots, 6, \quad (5.20a)$$

где r_k — это шесть единичных корней алгебры \mathcal{C}_x , а $q_k = = \sqrt{3} r_k \vee r_k$ — три положительных единичных псевдокорня алгебры \mathcal{C}_x .

Два собственных значения d_a'' равны $\pm 1/\sqrt{3}$.

Лемма. Каждая двумерная плоскость пространства \mathcal{E}_8 содержит по крайней мере один корень. В самом деле, непрерывная нечетная функция $(x, x \vee x)$ от x на единичной окружности $(x, x) = 1$, расположенной в двумерной плоскости, проходит по крайней мере один раз через нуль. Существуют линейные многообразия корневых векторов.



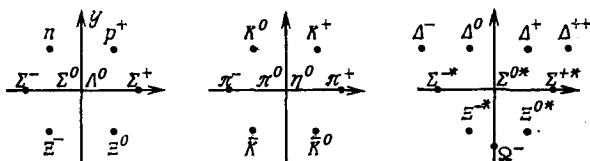
Фиг. 5.1. Корни $\pm r_i$ и псевдокорни $q_i = = \sqrt{3} r_i \vee r_i$ подалгебры Картана.

Группой Вейля группы $SU(3)$ является группа $S(3)$. Она переставляет между собой три q_i .

Пример. Пусть дан псевдокорень q . Используя одно и то же обозначение для подалгебры Ли группы $SU(3)$ и ее векторного пространства (подпространства \mathcal{E}_8), получаем

$$\mathcal{E}_8 = U_q(1) \oplus SU_q(2) \oplus U_2(q)^\perp,$$

где трех- и четырехмерные пространства $SU_q(2)$ и $U_2(q)^\perp$, содержат только корневые векторы. Октет частиц образует



Фиг. 5.2. Корни октетов частиц и веса декуплета.

$\Sigma_0, \Delta^0, \pi^0, \eta^0$ соответствуют двум нулевым корням.

ортонормированный базис комплексифицированного пространства \mathcal{E}_8 , в котором операторы f_a диагонализированы для всех $a \in \mathcal{C}_{(y, q)}$, т. е. алгебре Картана, определенной направлениями гиперзаряда и электрического заряда, так как Y и Q являются генераторами группы $U_y(2) \subset SU(3)$. Соотношение Гелл-Манна — Нишиджимы

$$Q = T_3 + \frac{1}{2} Y \quad (5.21)$$

между генераторами $U(2) \subset SU(3)$ на языке геометрии октета имеет вид $(y, -q)$ — единичные положительные псевдокорни $Q = -2/\sqrt{3} F(q)$, $Y = 2/\sqrt{3} F(y)$ ¹⁾, t_3 — корень, $T_3 = F(t_3)$. На фиг. 5.2 приведены соответствующие корни двух самых нижних октетов частиц, а также веса самого нижнего декуплета барионов.

5.3. $SU(3)$ -СИММЕТРИЯ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ И СЛАБОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

5.3.а. Электромагнитное взаимодействие

Как следует из уравнения (5.21), оператор Q электрического заряда есть генератор группы $U(2) \subset SU(3)$, так что он в свою очередь является генератором группы $SU(3)$ и, как мы уже видели,

$$Q = \frac{2}{\sqrt{3}} F(-q), \quad (5.26)$$

где q , как и раньше, есть псевдокорень. В литературе $SU_q(2)$ называется группой U -спина. Таким образом, мы можем говорить об U -спиновых мультиплетах, имеющих один и тот же электрический заряд $u = 1/2, p^+, \Sigma^+$; а также Ξ^-, Σ^- ; $u = 1, n, \Xi^0, 1/2\Sigma^0 + \sqrt{3}/2\Lambda^0$; $u = 0, \sqrt{3}/2\Sigma^0 - 1/2\Lambda^0$. Электрический заряд есть интеграл от временной компоненты электромагнитного тока

$$Q = e \int j^0(x) dx, \quad (5.27)$$

а $\partial^\mu j^\mu(x) = 0$, следовательно, Q есть сохраняющийся (в более общем случае \mathcal{P} -инвариантный) оператор. Конечно, $j^0(x)$ может иметь любую ковариантность относительно группы $SU(3)$ при условии, что интеграл неоктетной части исчезает. Самая простая гипотеза заключается в предположении, что электромагнитный ток $j^\mu(x)$ есть образ октетно-тензорного оператора в направлении $(-q)$:

$$e \frac{2}{\sqrt{3}} j^\mu(x; -q) \quad (5.28)$$

¹⁾ Множители $2/\sqrt{3}$ находятся из условия, что спектры Q и Y состоят из целых чисел. Уравнение (5.21) предполагает, что q и y — нормированные псевдокорни, имеющие противоположный знак. Выбор знака $(+y), (-q)$ в этом случае условен и соответствует фиг. 5.2.

[ср. с уравнением (5.26)]. Это позволяет сделать многие выводы. Магнитный момент частицы мультиплетета дается средним значением октетно-тензорного оператора в направлении $(-q)$. Он зависит только от двух констант для октета (и от одной для декуплетета), и частицы одного и того же u -спинового мультиплетета имеют один и тот же магнитный момент. Например, предсказывается равенство $\mu_{\Sigma^+} = \mu_{p^+}$, которое хорошо подтверждается. Сейчас осуществляются измерения μ_{Λ^0} , μ_{Σ^-} и μ_{Ξ^-} и вероятности распада $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$, которая определяется (поскольку это „магнитный дипольный“ переход) значениями μ в этом октете. Можно предсказать отношение вероятностей электромагнитного распада, например:

$$\frac{\text{Вероятность } \pi^0 \rightarrow 2\gamma}{\text{Вероятность } \eta^0 \rightarrow 2\gamma} = \frac{(t_3, q)^2}{(y, q)^2} \times \text{отношение фазовых объемов} = \\ = 3 \times \text{отношение фазовых объемов} \quad (5.29)$$

[при этом используется уравнение (5.26) и равенство $(y, t_3) = 0$]. Наблюдаемое соотношение распадов $\phi \rightarrow \mu^+ + \mu^-$, $\omega \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ служит хорошим подтверждением величины угла смешивания. Таким же образом можно успешно предсказать отношение сечений фоторождения.

Разности масс внутри мультиплетета $U_y(2)$, по-видимому, имеют электромагнитную природу. Они квадратично зависят от $j^\mu(x; -q)$, но в хорошем приближении можно считать, что важны только скалярная и октетная части, так что в этом случае массовый оператор (5.5) можно переписать, складывая электромагнитные эффекты:

$$M = M_0 + M_1 \frac{2}{\sqrt{3}} F(y) + M_2 D(y) + M_3 \frac{2}{\sqrt{3}} F(-q) + M_4 D(-q),$$

а внутри $SU(3)$ -мультиплетета значения масс даются выражением

$$m = m'_0 + m'_1 y + m'_2 \left(t(t+1) - \frac{1}{4} y^2 \right) + m'_3 q + m'_4 \left(u(u+1) - \frac{1}{4} q^2 \right), \quad (5.30)$$

которое для барионов хорошо подтверждается.

5.3.6. Слабое взаимодействие

Кабиббо обобщил на случай группы $SU(3)$ гипотезу Гелл-Манна и Фейнмана относительно связи векторной части слабого тока $v_\mu^\pm(x)$ с током лептонов $l^{\mp\mu}(x)$ (см. разд. 3.6) в предположе-

нии, что $v_{\mu}^{\pm}(x)$ и $j_{\mu}(x)$ являются образами *одного и того же* октетно-тензорного оператора [обозначим его $v_{\mu}(x)$] для трех различных направлений: $-q, c_{\pm}$. В явном виде

$$\begin{aligned} \text{электромагнитный ток} &= \frac{2}{\sqrt{3}} e v_{\mu}(x, -q), \\ \text{слабый ток} &= \frac{G}{\sqrt{2}} v_{\mu}(x; c_{\pm}) \end{aligned} \quad (5.31)$$

(где G — константа Ферми). Второе предположение Кабиббо заключается в том, что аксиально-векторные части слабого тока $a_{\mu}^{\pm}(x)$ являются образами другого октетно-тензорного оператора для того же направления c_{\pm} . Таким образом, полный слабый ток

$$h_{\mu}^{\pm}(x; c_{\pm}) = v_{\mu}^{\pm}(x; c_{\pm}) - a_{\mu}^{\pm}(x; c_{\pm}) \quad (5.32)$$

является также образом октетно-тензорного оператора. Следствия из этих предположений можно найти в оригинальной статье Кабиббо в антологии „Восьмеричный путь“ [81], стр. 207. Знак (\pm) соответствует здесь электрическому заряду тока, т. е.

$$[Q, h_{\mu}^{\pm}(x)] = \pm h_{\mu}^{\pm}(x). \quad (5.33)$$

Пользуясь тем, что Q есть генератор группы $SU(3)$, $Q = 2/\sqrt{3}F(-q)$, можно переписать это уравнение в виде (1.9):

$$-\frac{2}{\sqrt{3}} [F(q), h_{\mu}(x, c^{\pm})] = -\frac{2}{\sqrt{3}} h_{\mu}(x, q \wedge c^{\pm}) = \pm h_{\mu}(x, c_{\pm}). \quad (5.34)$$

Из (5.34) получаем уравнение

$$q \wedge c_{\pm} = \mp \frac{\sqrt{3}}{2} c_{\pm}, \quad (5.34a)$$

которое означает, что c_{\pm} являются собственными векторами оператора $F(q)$. Записав в уравнении (5.34a) $c_{\pm} = 1/\sqrt{2}(c_1 \pm ic_2)$, находим, что c_1 и c_2 — это единичные векторы, принадлежащие $U_q(2)$, так что, как видно уже из уравнения (5.21), они являются корневыми векторами. Уравнение (5.34a) эквивалентно уравнениям $q \wedge c_1 = c_2$, $q \wedge c_2 = -c_1$, откуда в свою очередь следует

$$\sqrt{3}c_1 \vee c_1 = \sqrt{3}c_2 \vee c_2 = \sqrt{3}c_3 \vee c_3 = c, \quad (5.35)$$

где

$$c_3 = c_1 \wedge c_2. \quad (5.35a)$$

Это означает, что c, c_1, c_2, c_3 образуют базис в $U_c(2)$. Отметим также, что $c, c_3 \in U_q(2)$. Псевдокорень c называется „слабым

гиперзарядом", или „гиперзарядом Кабиббо“. Для слабых взаимодействий он сохраняется. Он коммутирует с q , $c \wedge q = 0$, следовательно, $(c, q) = -1/2$. Однако с оператором y он не коммутирует. В самом деле, существуют слабые переходы, нарушающие закон сохранения гиперзаряда. Эта некоммутативность приводит к тому, что значение (y, c) не равно $(-1/2)$, а именно

$$(y, c) = 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta, \quad (5.36)$$

где θ — угол Кабиббо. Как мы уже видели в разд. (3.6), его экспериментальное значение равно 15° . Довольно хорошо подтверждается также, что v_μ^\pm и a_μ^\pm определяют одно и то же направление с слабого гиперзаряда¹⁾. Значение этого угла дается эмпирической формулой $\operatorname{tg} \theta = m_l/m_k$. Теория Кабиббо объяснила не только относительно меньшую вероятность²⁾ (множитель $\operatorname{tg}^2 \theta$!) слабых переходов с несохранением гиперзаряда y , но и то, почему сверхразрешенный ядерный β -распад с $\Delta T = 0$ происходит медленнее (множитель $\cos^2 \theta$), чем распад $\mu \rightarrow e + \nu + \bar{\nu}$.

„Вычисление“ этого угла θ представляет собой одну из ответственных проблем сегодняшней физики. Стоит отметить чисто алгебраическое соотношение, дающее зависимость q от y и c . Пусть имеются два некоммутирующих (положительных и нормированных) псевдокорня y и c , тогда всегда существует один-единственный псевдокорень, который коммутирует с ними обоими, это

$$\lambda q = \sqrt{3} y \vee c + \frac{1}{2} (y + c), \quad (5.37)$$

где

$$\lambda = -[1 - (y, c)]. \quad (5.37a)$$

Обычно наиболее часто используется следующая форма записи нелептонного слабого взаимодействия:

$$H_{\text{нелепт}} = \frac{G}{\sqrt{2}} \sum_{\varepsilon = \pm 1} \int h^\mu(x, c_\varepsilon) h_\mu(x, c_{-\varepsilon}) d^3x. \quad (5.38)$$

¹⁾ Точнее, угол c_ν и c_a с y остается одним и тем же, но c_ν и c_a могли бы составлять небольшой угол друг с другом. Это можно использовать как возможное объяснение нарушения CP -инвариантности.

²⁾ Точнее, это не просто вероятность, а относительная вероятность перехода, равная отношению вероятности перехода к объему фазового пространства. Фазовые пространства, которые должны быть в точности равны в $SU(3)$ -симметрии, фактически не равны друг другу.

Недостатком этой формы является то, что $H_{\text{нелепт}}$ есть образ приводимого тензорного оператора, содержащего в качестве некоторой компоненты НП „27“ группы $SU(3)$. Из выполнения правила $\Delta T = 1/2$ для слабых переходов с $|\Delta Y| = 1$ следует, что этой 27 компонентой можно пренебречь по сравнению с компонентой октета. Предложение Радикати [83]

$$H_{\text{нелепт}} = \frac{G}{\sqrt{2}} \int (h^\mu(x) \vee h_\mu(x)) (c) d^3x \quad (5.39)$$

делает $H_{\text{нелепт}}$ компонентой неприводимого октетно-тензорного оператора, направленной вдоль слабого гиперзаряда c . Это не противоречит известным экспериментальным данным.

5.4. КРИТИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ G -ИНВАРИАНТНОЙ ФУНКЦИИ НА МНОГООБРАЗИИ M^1)

Если группа G действует на многообразии M , то множество всех точек M , малые группы которых сопряжены друг другу, называется стратом. Таким образом, страт представляет собой объединение всех орбит одного и того же типа. Возникает частичное упорядочение всех подгрупп данной группы по модулю сопряжения. Это в свою очередь соответствует упорядочению (обратному) в стратах. Множество неподвижных точек образует минимальный страт (максимальная группа изотропии G). Если при действии G на M неподвижные точки отсутствуют, то может иметься несколько минимальных стратов.

Например, в разд. 5.2 мы уже видели, что при действии $SU(3)$ на единичной сфере S^7 октетного пространства существует открытый плотный общий страт, а именно $|(x \vee x, x)| < 1/\sqrt{3}$. Он содержит однопараметрическое семейство шестимерных орбит [малая группа $U(1) \times U(1)$], а минимальный страт состоит из двух четырехмерных орбит $(x \vee x, x) = \pm 1/\sqrt{3}$. В данном разделе мы предполагаем рассмотреть следующее:

а) гладкое ²⁾ действие компактной группы Ли G на гладком многообразии M . Это действие дается гладким отображением

$$G \times M \xrightarrow{\phi} M, \quad \text{где} \quad \phi(g_1, \phi(g_2, m)) = \phi(g_1 g_2, m);$$

¹⁾ В этой части лекций излагается совместная с Радикати работа, частично опубликованная в трудах конференции в Корал-Гейблс в 1968 г. [84], а частично размноженная в виде препринта.

²⁾ Термин „гладкий“ используется вместо термина „бесконечно дифференцируемый“.

б) вещественную гладкую функцию $M \xrightarrow{f} R$, которая G -инвариантна, т. е. эта функция постоянна на каждой G -орбите многообразия M :

$$g \in G, \quad m \in M, \quad f(\phi(g, m)) = f(m).$$

Дифференциал в точке $m_1 \in M_1$ гладкого отображения $M_1 \xrightarrow{\psi} M_2$ обозначается $d\psi_{m_1}$. Это линейное отображение [с $m_2 = \psi(m_1)$]

$$T_{m_1}(M_1) \xrightarrow{d\psi_{m_1}} T_{m_2}(M_2), \quad (5.40)$$

где $T_{m_i}(M_i)$ является касательной плоскостью к M_i в точке m_i . Таким образом, $df_p \in T'_p(m)$ — дуальное векторное пространство к $T_p(m)$. Назовем критической такую точку $p \in M$, для которой $df_p = 0$.

Стабилизатор G_m (малая группа, группа изотропии) в точке $m \in M$ является замкнутой и, следовательно, компактной подгруппой компактной группы G . Как известно ¹⁾, можно выбрать такие локальные координаты в окрестности V_p точки p , что действие G_p будет линейным. Пусть $\mathcal{E}_p(M)$ — векторное пространство, соответствующее этому линейному представлению G_p , тогда $V_p \subset \mathcal{E}_p(M)$. Поскольку группа G_p компактна, а многообразие M вещественно, то это действие можно сделать ортогональным. Таким образом, $\mathcal{E}_p(M)$ есть евклидово пространство. Мы можем в дальнейшем отождествить df_p с вектором пространства $\mathcal{E}_p(M)$, который будем называть $(\text{grad } f)_p$. G -орбита точки p — $G(p)$ есть образ $g \xrightarrow{\phi(p)} \phi(g, p)$; она является подмногообразием M . Касательная плоскость к G -орбите в точке p , обозначаемая $T_p(G(p))$, есть образ $d\phi_e^{(p)}$, где e — единичный элемент группы G . Группа изотропии G_p преобразует орбиту $G(p)$ саму в себя. Аналогично $T_p(G(p))$ есть инвариантное подпространство пространства $\mathcal{E}_p(M)$. Ортогональное подпространство $N_p(G(p)) = T_p(G(p))^\perp \subset \mathcal{E}_p(M)$ также инвариантно и называется „слоем“ в точке p . Отметим, что $(\text{grad } f)_p \in N_p$. В самом деле, по определению для $x \in T_p(M)$ справедливо $((\text{grad } f)_p, x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} [f(p + \alpha x) - f(p)] \alpha^{-1}$. Скобка равна нулю в том случае,

¹⁾ Рассмотрим риманову метрику на многообразии M . При действии группы G_p она преобразуется. Усредняя ее с помощью G -инвариантной меры, получаем G_p -инвариантную риманову метрику, причем группа G_p переводит друг в друга геодезические линии, выходящие из точки p . В окрестности V_p точки p следует выбрать геодезические координаты.

когда $p + \alpha x \in G(p)$ (т. е. орбите точки p), так что она остается равной нулю и в пределе, если $x \in T_p(G(p))$.

Отметим также, что $(\text{grad } f)_p$ является инвариантом относительно группы G_p . Пусть $g \in G_p$, тогда $(g \cdot (\text{grad } f)_p, x) = ((\text{grad } f)_p, g^{-1} \cdot x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-1} (f(p + \alpha g^{-1} \cdot x) - f(x))$ и, поскольку $g^{-1} \cdot p = p$, $f(p + \alpha g^{-1} \cdot x) = f(g^{-1} \cdot (p + \alpha x)) = f(p + \alpha x)$, то $\forall x \in \mathcal{E}_p(m) (g \cdot (\text{grad } f)_p, x) = ((\text{grad } f)_p, x)$. Если слой $N_p(G(p))$ не имеет векторов, инвариантных относительно G_p , то $(\text{grad } f)_p = 0$. Мы можем коротко суммировать это:

Теорема 1¹⁾. Пусть G есть компактная группа Ли, действующая гладко на гладком вещественном многообразии M . Если для $p \in M$ каноническое линейное представление G_p в слое N_p не содержит тривиального представления G_p , то $G(p)$ является критической орбитой для любой вещественнозначной G -инвариантной гладкой функции на M [здесь мы опять обозначаем одним и тем же символом, например символом $SU(2)$, векторное пространство подалгебры Ли и саму группу!].

Пример 1. Мы уже рассмотрели действие $SU(3)$ на сфере $S_7 \subset \mathcal{E}_8$. Пусть q есть единичный q -вектор, $G_q = U_2(q)$, $T_q(M) = \{q\}^\perp \subset \mathcal{E}_8$, $T_q(G(q)) = U_2(q)^\perp$, $N_q(G(q)) = SU_2(q)$ и $U_2(q)$ действует на T_q линейно, без неподвижных точек.

Пример 2. Пусть p есть изолированная неподвижная точка в M . Тогда в окрестности V_p точки p нет других неподвижных точек и в $N_p = \mathcal{E}_p(M)$ не существует вектора, инвариантного относительно $G = G_p$.

Это доказывает, что p — критическая точка для каждой G -инвариантной функции на M .

¹⁾ Радикати и я включили теорему 1 в более полную теорему:

Теорема 1'. Пусть G — компактная группа Ли, действующая гладко на вещественном многообразии M и $p \in M$. Тогда следующие три предложения эквивалентны:

а) орбита точки p является критической (для всякой G -инвариантной гладкой вещественнозначной функции f на M , $df_p = 0$);

б) орбита точки p изолирована в своем страте, т. е. \exists окрестность V_p точки p , такая, что если $x \in V_p$ и $x \notin G_p$, то G_x не сопряжена G_p ;

в) каноническое линейное представление G_p в слое N_p не содержит тривиального представления.

Теорема 1 есть просто выражение эквивалентности утверждений „в“ и „а“.

Предположим теперь, кроме того, что многообразие M компактно. Тогда существует один страт (называемый порождающим стратом), который является открытым плотным подмножеством в M . Минимальные страты замкнуты и компактны. Пусть C — связная компонента минимального страта, и пусть для $p \in C$ $F_p \subset \mathcal{E}_p$ есть линейное подпространство неподвижных точек относительно группы G_p . Поскольку группа G_p максимальна, то для точек пространства $V_p \cap F_p$ она является стабилизатором, так как эти точки принадлежат C . Для данной G -инвариантной вещественнозначной гладкой функции f обозначим $n = (\text{grad } f)_p$. Как мы уже видели, $n \in F_p$, так что для достаточно малых $|\varepsilon|$, $p + \varepsilon n \in C$ можно записать

$$(n, n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} (f(p + \varepsilon n) - f(p)), \quad (5.41)$$

так что если функция f постоянна на C , то каждая $p \in C$ является критической точкой функции. Если f не постоянна на C , то имеется по крайней мере одна орбита, где она максимальна, и одна орбита, где она минимальна. Пусть p — точка такой орбиты, а $n = (\text{grad } f)_p$. Тогда в уравнении (5.41)

$$f(p + \varepsilon n) - f(p) \left. \begin{array}{l} \geq 0, \text{ если } f \text{ минимальна в } p, \\ \leq 0, \text{ если } f \text{ максимальна в } p. \end{array} \right\}$$

Это означает, что величина (n, n) либо должна иметь знак ($\pm \varepsilon$) [(+) в минимуме, (-) в максимуме], что невозможно, либо должна быть равна нулю.

Теорема 2¹. Пусть G — компактная группа Ли, действующая гладко на вещественном компактном многообразии M , и пусть f — вещественнозначная гладкая G -инвариантная функция на M . Тогда f имеет по крайней мере одну критическую точку для каждой связной компоненты C каждого минимального страта.

Нас интересуют теперь функции на сфере частного вида: пусть G — компактная группа Ли, \mathcal{E} — вещественное векторное пространство, в котором действует линейное вещественно-неприводимое представление $g \rightarrow R(g)$. Таким образом, R (с точностью до эквивалентности) является ортогональным представлением и контраградиентно самому себе. Обозначим через (x, y) инвариантное евклидово скалярное произведение в \mathcal{E} . Предположим, что $\dim(\text{Hom } \mathcal{E} \vee \mathcal{E}, \mathcal{E})^G = 1$ (символ \vee обозначает симметрическое

¹) При доказательстве этой теоремы, сформулированной мной и Радикати, нам очень помогли А. Борель, К. Мур и Р. Том.

тензорное произведение). Как мы уже видели в разд. 1.5, существует единственная (с точностью до постоянного множителя) симметрическая алгебра:

$$x \otimes y \xrightarrow{\psi} x_T y, \quad \text{где } \psi \in \text{Hom}(\mathcal{E} \vee \mathcal{E}, \mathcal{E})^\sigma, \quad (5.42)$$

причем $x_T y = y_T x$.

Так как представление контраградиентно самому себе, а тензорное произведение ассоциативно, то

$$(x_T y, z) = (x, y_T z) = \{x, y, z\}. \quad (5.43)$$

Следовательно, инвариант $\{x, y, z\}$ является полностью симметричной G -инвариантной трilinearной формой на \mathcal{E} . Пусть $f(\{x, y, z\})$ — функция на единичной сфере $S = \{x \in \mathcal{E}, (x, x) = 1\}$. Используя λ в качестве множителя Лагранжа, получаем для критических точек f уравнение

$$\text{grad}[f(\{x, x, x\}) + \lambda(1 + (x, x))] = 3f'x_T x - 2\lambda x = 0, \quad (5.44)$$

где f' — производная функции f , зависящей от одной переменной (например, если $f = \{x, x, x\}$, то $f' = 1$). Иными словами, критические точки функции f определяются решениями уравнения $x_T x = \lambda x$, т. е. идемпотентами (или нильпотентами для $\lambda = 0$) симметрической алгебры.

5.5. СИММЕТРИЯ $SU(3) \times SU(3)$

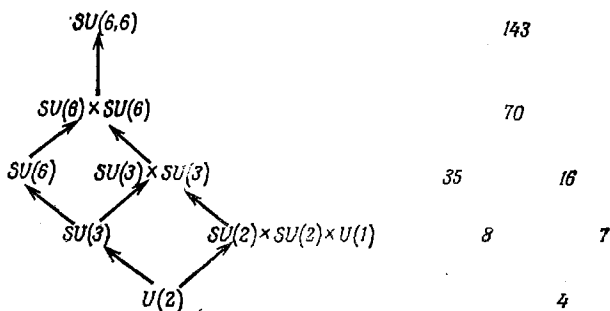
Для описания мира адронов использовались и симметрии более высокие, чем симметрия $SU(3)$. Конечно, эти симметрии являются более грубыми, но, как мы увидим, они еще могут быть полезными. Симметрия $SU(3) \times SU(3)$ — это симметрия, которая становится точной в случае пренебрежения массами 0^- -мезонов. Заметим, что, считая эти массы равными нулю, мы берем на себя почти такую же смелость, как и утверждая, что они равны между собой, что мы уже делали для группы $SU(3)$. На самом же деле приближение, в котором пренебрегают только массой π -мезона, гораздо лучше, чем приближение $SU(3)$ -симметрии ($m_\pi = 140$ МэВ, что меньше, чем разница масс 0^- -мезонов). Это приближение соответствует подгруппе $SU(2) \times SU(2) \times U(1)$ группы $SU(3) \times SU(3)$.

На фиг. 5.3 приводится схема групп симметрии, рассмотренных в физике адронов, но в этом разделе мы ограничимся рассмотрением группы $SU(3) \times SU(3)$ и ее подгрупп. (См. также лекции О'Райферти [37] о высших симметриях.)

На уровне средней линии (фиг. 5.3) появляется новая характерная особенность — смешение внутренней симметрии и пространственно-временной инвариантности. Оно очень мало для $SU(3) \times SU(3)$, так как это относится только к оператору четности. В рассматриваемом случае полная группа симметрии является полупрямым произведением

$$(\mathcal{P}_0 \times SU_3 \times SU_3) \square Z_2(P). \quad (5.49)$$

Здесь $Z_2(P)$ действует обычным образом на \mathcal{P}_0 и переставляет два SU_3 -множителя в группе $SU_3 \times SU_3$. Чтобы различать такие $SU(3)$ -множители, обозначим их $SU_3^{(+)} \times SU_3^{(-)}$. В физической



Фиг. 5.3. Группы симметрии и их размерности.

Схема групп симметрии, используемых в физике адронов. Стрелки означают вложение в качестве подгруппы.

литературе они известны как киральные группы (\pm). Группа (5.49) представляет основу для понимания связи оператора четности P с различного рода взаимодействиями. Это становится ясным из следующих рассуждений.

Диагональная подгруппа $SU(3)^d \subset SU_3^{(+)} \times SU_3^{(-)}$ есть группа инвариантности $SU(3)$ (разд. 5.1—5.3).

Обозначим вектор 16-мерного векторного пространства \mathcal{E}_{16} алгебры Ли $SU(3) \times SU(3)$ прямой суммой двух векторов

$$\tilde{a} = a_+ \oplus a_-, \quad (5.50)$$

где a_{\pm} принадлежит $SU_3^{(\pm)}$ -октету.

В терминах октетного скалярного произведения инвариантное эвклидово скалярное произведение (задаваемое формой Киллинга — Картана) имеет вид

$$(\tilde{a}, \tilde{b}) = (a_+ \oplus a_-, b_+ \oplus b_-) = \frac{1}{2} (a_+, b_+) + \frac{1}{2} (a_-, b_-). \quad (5.51)$$

Закон композиции в алгебре Ли (используем для него знак \wedge) имеет вид

$$\tilde{a} \wedge \tilde{b} = (a_+ \wedge b_+) \oplus (a_- \wedge b_-).$$

Поскольку $\dim \text{Hom}(\mathcal{E}_{16} \vee \mathcal{E}_{16}, \mathcal{E}_{16})^{SU(3) \times SU(3)} = 1$, то существует единственная каноническая симметрическая алгебра

$$\tilde{a} \vee \tilde{b} = (a_+ \vee b_+) \oplus (a_- \vee b_-). \quad (5.52)$$

Свойство ковариантности электромагнитного и слабого взаимодействий наиболее естественно распространяется на инвариантность $SU(3) \times SU(3)$ при следующем предположении: электрический ток $j_\mu(x)$, векторная часть $v_\mu^{(e)}(x)$, аксиальная векторная часть $a_\mu^{(e)}(x)$ (заряженного при $e = \pm 1$) слабого адронного тока $h_\mu^{(e)}(x) = v_\mu^{(e)}(x) - a_\mu^{(e)}(x)$ являются образом одного и того же \mathcal{E}_{16} тензорного оператора, который мы впредь будем обозначать $h_\mu(x, \tilde{a})$. При этом векторные токи соответствуют $SU(3)^d$, а аксиально-векторный ток соответствует антидиагонали в группе $SU(3) \times SU(3)$. Слабый ток имеет чистую киральность $(-)$. В явном виде электромагнитный ток равен

$$\frac{2}{\sqrt{3}} e h_\mu(x; -(q \oplus q)). \quad (5.53)$$

Слабые (заряженные) токи равны

$$\frac{G}{\sqrt{2}} (h_\mu(x; 0 \oplus c_1) \pm i h_\mu(x; 0 \oplus c_2)). \quad (5.53a)$$

Слабое адронное (не лептонное) взаимодействие, записанное в форме Радикати, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{G^2}{2} \int (h_\mu(x) \vee h^\mu(x))(c) d^3x = \\ = \frac{G^2}{2} \int (h_\mu(x) \vee h^\mu(x))(0 \oplus c) d^3x. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Генераторы группы $SU(3) \times SU(3)$ даются пространственным интегралом тока, т. е.

$$a \rightarrow F(\tilde{a}) = \int h_0(x; \tilde{a}) d^3x, \quad (5.55)$$

который в свою очередь есть представление (с точностью до i) алгебры Ли $SU(3) \times SU(3)$ в физическом гильбертовом пространстве

$$[F(\tilde{a}), F(\tilde{b})] = iF(\tilde{a} \wedge \tilde{b}). \quad (5.56)$$

В частом случае \mathcal{E}_{16} -тензорного оператора $h_\mu(x, \tilde{a})$

$$[F(\tilde{a}), h_\mu(x, \tilde{b})] = i h_\mu(x, \tilde{a} \wedge \tilde{b}), \quad (5.57)$$

что согласуется с уравнением (1.9). В том приближении, когда $SU(3) \times SU(3)$ является точной симметрией $\partial_\mu h^\mu(x, \vec{a}) = 0$, оператор $F(\vec{a})$ полностью определен. Но когда симметрия $SU(3) \times SU(3)$ нарушается, возникает трудность определения самосопряженного оператора $F(\vec{a})^1$.

Уравнение

$$\vec{a} \nabla \vec{a} = \lambda \vec{a} \quad (5.58)$$

для единичных векторов $\in S_{15} \subset \mathcal{E}_{16}$ имеет два типа решений. Один тип — это $1/\sqrt{2} \vec{a} = \pm c \oplus 0$ или $\pm 0 \oplus c$, где c — нормированный положительный псевдокорень, а $\lambda = \mp \sqrt{2/3}$. Это множество состоит из двух минимальных стратов, каждый из которых в свою очередь состоит из двух орбит. Таким образом, каждая из четырех орбит является критической орбитой для любой гладкой $SU(3) \times SU(3)$ -инвариантной функции на S_{15} , единичной сфере пространства \mathcal{E}_{16} . Стабилизаторами для этих двух стратов (с точностью до сопряжения) являются $SU_3^{(+)} \times U_c^{(-)}(2)$ и $U_c^{(+)}(2) \times SU^{(-)}(3)$. Решение другого типа представляет собой совокупность векторов $\pm (q_1 \oplus q_2)$, образующих две орбиты, которые входят в страт, состоящий из четырех отдельных орбит ($\pm q_1 \oplus \mp q_2$ для двух других орбит). Их стабилизатором является $(U_{q_1}(2) \times U_{q_1}(2))_{\square} Z_2$. Псевдокорни $\pm (q \oplus q)$ диагональной группы $SU^{(d)}(3)$ лежат на орбитах, в то время как псевдокорни антидиагонали ($\pm q \oplus \mp q$) находятся вне орбит. Это имеет непосредственное отношение к четности.

Весьма примечательно, что направление электрического заряда $-(q \oplus q)$ и направление слабого гиперзаряда $(0 \oplus c)$ определяются двумя решениями (по одному решению каждого типа) уравнения (5.58).

$SU(3) \times SU(3)$ -инвариантность нарушается не только электромагнитным и слабым взаимодействиями, но и полусильным U_2 -инвариантным взаимодействием. Существуют два разных интересных промежуточных приближения симметрии сильных взаимодействий между U_2 и $SU(3) \times SU(3)$. Они соответствуют четвертой строке фиг. 5.3. Это группа $SU(3)$, уже изученная ранее, и группа $SU(2) \times SU(2) \times U_1$, из которой следует правило сумм Адлера — Вайсбергера. В обоих случаях гамильтониан $H_{\text{сильн}}$ в хорошем приближении является суммой

$$H_{\text{сильн}} = H_0 + H_1(\underline{m}), \quad (5.59)$$

¹⁾ См. лекции О'Райферти [37].

где оператор H_0 инвариантен относительно $SU(3) \times SU(3)$, а $H_1(\underline{m})$ является образом \underline{m} $SU(3) \times SU(3)$ -тензорного оператора для представления $(3, \bar{3}) \otimes (\bar{3}, 3)$ (вещественно неприводимого). Два соответствующих направления \underline{m} для этих двух приближений вновь являются идемпотентами или нильпотентами канонической симметрической алгебры. За подробным объяснением прошу обращаться к препринту моей и Радикати работы. Это 18-мерное неприводимое вещественное представление $SU(3) \times SU(3)$ в пространстве \mathcal{E}_{18} (которое обычно возникает в модели кварков) таково, что $\dim \text{Hom}(\mathcal{E}_{18} \vee \mathcal{E}_{18}, \mathcal{E}_{18})^{SU(3) \times SU(3)} = 1$. Таким образом, существует единственная каноническая симметрическая (вещественная) алгебра в \mathcal{E}_{18} , группой автоморфизмов которой является группа $SU(3) \times SU(3)$. Закон композиции в этой алгебре обозначим $\underline{m}_1 \top \underline{m}_2$.

Уравнение

$$\underline{m} \top \underline{m} = \lambda \underline{m} \quad (5.60)$$

имеет только два типа решений (для векторов на инвариантной единичной сфере $S_{17} \subset \mathcal{E}_{18}$), принадлежащих к двум минимальным стратам. Одному решению с $|\lambda| = 2/3$ соответствует стабилизатор $SU^d(3)$. Другому с $\lambda = 0$ соответствует $SU_y^{(+)}(2) \times SU_y^-(2) \times U_y^d(1)$.

Согласно теореме 1, этот последний случай ($\lambda = 0$) соответствует критической орбите для всех $SU(3) \times SU(3)$ -инвариантных функций на S_{17} [единичные векторы НП $(3, \bar{3}) \oplus (\bar{3}, 3)$]. Такая орбита является также минимальным стратом с размерностью 9. Страт, соответствующий $SU(3)^d$, тоже минимален: он представляет собой 9-мерное связное подмногообразие (многообразия S_{17}), состоящее из 8-мерных орбит. Из теоремы 2 следует, что каждая инвариантная функция имеет в этом страте по крайней мере две критические орбиты. Для всех функций от $(X, X \top X)$ двумя такими орбитами являются $X \top X = \pm 2/3 X$.

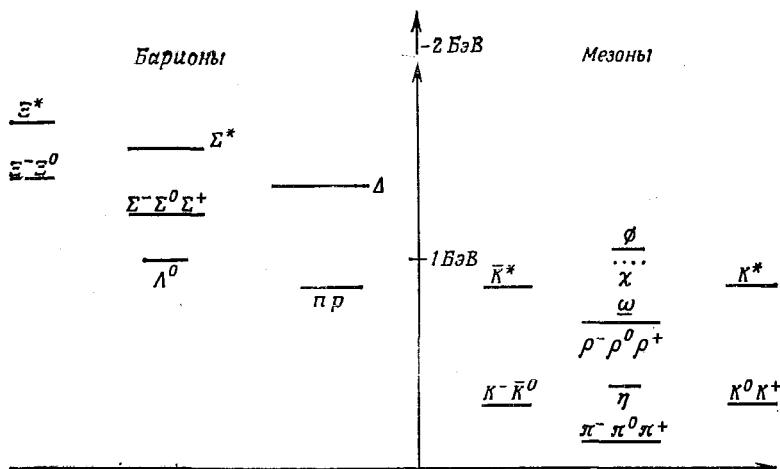
5.6. $SU(6)$, КВАРКИ, АЛГЕБРА ТОКОВ, „БУТСТРЭП“ И Т. Д.

В заголовке этого раздела собраны слова, ставшие за последние годы ключевыми в статьях, посвященных физике элементарных частиц¹⁾. Этот последний раздел главы — не заклю-

¹⁾ За последний год появились еще слова „венециано“ и „дуальность“. Увлечение причудливыми словами в физике элементарных частиц является уже социологическим фактом.

чение, а незаконченное описание очень быстро меняющейся физической картины адронного мира.

$SU(6)$ -симметрия. $SU(6)$ -симметрия была введена¹⁾ независимо Гюрши и Радикати [86] и Сакита [87] (только для мезонов). Было обращено внимание на тот факт, что разности масс между $SU(3)$ -мультиплетами не больше, чем разности масс внутри мультиплетов.



Фиг. 5.4. 56-плет барионов $[(8 \times 2) + (10 \times 4)]$ и 35-плет мезонов $[(8 \times 1) + (9 \times 3)]$ в схеме $SU(6)$ классификации адронов.

Обе группы авторов, вдохновленные вигнеровской теорией супермультиплетов для ядер $SU(4)$ -симметрией (см. разд. 3.3), распространили ее на область элементарных частиц, увеличив группу изоспина $SU(2)$ до группы $SU(3)$. Таким образом, при нерелятивистской трактовке пространство одночастичных состояний адронов является тензорным произведением

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{L}_2(R^3, t) \otimes \mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{H}_\lambda,$$

где \mathcal{H}_σ и \mathcal{H}_λ — двух- и трехмерные гильбертовы пространства соответственно. Действие центрального расширения \bar{G} группы Галилея и группы $SU(6)$ в пространстве $\mathcal{H}^{(1)}$ имеет вид [при

¹⁾ Фактически Гелл-Манн [88] впервые ввел группу $SU(6)$ в физику элементарных частиц, но в то время он не указал для нее физических приложений.

$\bar{G} \xrightarrow{\Psi} SU(2)$ см. разд. 2.9 и уравнения (2.57) и (2.58)]¹⁾

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{L}_2(R^3, t) \otimes \mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{H}_\lambda,$$

$$\bar{g} \in \bar{G} \rightarrow \pi(\bar{g}) \otimes \psi(\bar{g}) \otimes I, \quad (5.61)$$

$$u \in SU(6) \rightarrow I \otimes u.$$

Два самых нижних мультиплетов группы $SU(6)$ приведены на фиг. 5.4. Для барионов они принадлежат к НП $\square\square\square$ раз-

мерности 56, для мезонов — к НП $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array}$, т. е. к 35-мерному при-

соединенному НП группы $SU(6)$. Частица X^0 (не открытая еще в 1964 г.) является синглетом. Ниже приведено разложение этих НП на НП группы $SU_2 \times SU_3$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square\square\square \\ \hline \end{array} \Bigg|_{SU_2 \times SU_3} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline \square\square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square\square \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline \square\square\square \\ \hline \end{array}$$

$$2 \times 8 + 4 \times 10 = 56$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \Bigg|_{SU_2 \times SU_3} = \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline \square\square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline \square\square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square\square \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \end{array}$$

$$(1 \times 8) + (3 \times 8) + (3 \times 1) = 35$$

Массовая формула для произвольного $SU(6)$ -мультиплетов имеет вид

$$m = m_0 + m_1 y + m_2 \left(t(t+1) - \frac{1}{4} y^2 \right) + m_3 j(j+1) + m_4 q + m_5 \left(u(u+1) - \frac{1}{4} q^2 \right).$$

Если пренебречь электромагнитной разностью масс ($m_4 = m_5 = 0$), то формула с оставшимися четырьмя параметрами хорошо предсказывает массы восьми самых нижних $U(2)$ -мультиплетов барионов. Магнитный момент барионов зависит только от одного параметра μ_p , так что мы имеем соотношение

$$\mu_n = -\frac{2}{3} \mu_p, \quad (5.62)$$

которое подтверждается с точностью до 3% (это даже слишком хорошо!).

¹⁾ Для более подробного объяснения см. статью Мишеля [89].

Как применить $SU(6)$ -инвариантность к реакциям между частицами? Надо ввести некоторые физические и эмпирические правила (например, так называемую $SU(6)_w$ -симметрию), и симметрия может еще оказаться полезной.

Большие затруднения, однако, возникают при попытке согласования $SU(6)$ -симметрии с релятивистской инвариантностью ¹⁾.

Кварки. В науке существует естественная тенденция — пытаться объяснить Вселенную с помощью наименьшего количества разных типов „строительных блоков“. Такими „строительными блоками“ были четыре элемента древних греков, превратившихся к концу 19 в. в целую систему, состоящую почти из 90 химических элементов. В период с 1910 по 1929 г. (когда был измерен спин и определена статистика ядра N^{14} , см. разд. 2.10) были известны только три частицы p^+ , e^- , γ , необходимые для построения Вселенной. Но в 1931 г. к ним добавляется частица ν , в 1932 г. n и e^+ и т. д., так что теперь мы имеем уже целую спектроскопию адронов (см. табл. 3.2).

Возможно ли вообще возвращение к „простоте“? Гелл-Манн надеялся, что такими „строительными блоками“ станут частицы, которые он назвал кварками. Три кварка со спином $1/2$ образуют мультиплет 3 (фундаментальное НП \square) группы $SU(3)$ и мультиплет 6 (НП \square) группы $SU(6)$. Имеются также 3 антикварка, принадлежащих к контраградиентному НП

$$\bar{3} = \bar{\square} \text{ группы } SU(3) \quad \text{или} \quad \bar{6} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \text{ группы } SU(6).$$

Мезоны в табл. 3.2 состоят из одного кварка q и одного антикварка \bar{q} . Самые нижние связанные состояния системы $q + \bar{q}$ дают все ожидаемые состояния мезона. Барионы, представленные в той же таблице, состоят из трех кварков, которые для самых нижних состояний описываются схемой Юнга $\square\square\square$ для группы $SU(6)$ и поэтому для выполнения статистики Ферми должны обладать пространственной симметрией \square . Такой способ классификации, использованный нами в гл. 2 и 3, вероятно, неприемлем для сил притяжения. И, кроме того, как объяснить насыщение при числе 3; почему бы не быть также стабильными состояниями с 2, 4 или 5 кварками? ²⁾

¹⁾ Этим вопросом будет заниматься О'Райферти [37] при изучении двух верхних линий на диаграмме фиг. 5.3.

²⁾ Эти трудности можно преодолеть несколькими способами. Наиболее эффективным мне кажется путь, по которому идут О. Гринберг и его коллеги. Они ввели три типа кварков и получили замечательный адронный спектр.

Можно забыть об этих трудностях и заняться поиском кварков (они должны быть очень тяжелыми, стабильными и иметь дробные квантовые числа $b = 1/3$, и $q = 2/3$ или $-1/3$) или использовать их для расчетов (хорошие предсказания „кварковой модели“ дали, например, Далиц и Липкин). Пока кварки не найдены экспериментально, их можно рассматривать просто как физические названия для векторов ортонормированного базиса \square — фундаментального НП группы $SU(6)$, базиса, которым мы пользовались в своих вычислениях.

Алгебра токов. Пусть $\tilde{a} \rightarrow D(\tilde{a})$ — присоединенное НП алгебры Ли группы $SU(3) \times SU(3)$, действующее в пространстве \mathcal{E}_{16} . Любая \mathcal{E} -тензорно-операторная функция пространства времени $f(\mathbf{y}, \underline{m})$ будет удовлетворять уравнению (1.9) в любой **фиксированный** момент времени

$$[F(\tilde{a}), f(\mathbf{y}, \underline{m})] = if(\mathbf{y}, D(\tilde{a}) \underline{m}), \quad (5.63)$$

где $\underline{m} \in \mathcal{E}$. Уравнение (5.57) является частным случаем этого уравнения при $f(\mathbf{x}, \underline{m}) = h^\mu(\mathbf{x}, \tilde{b})$.

Заменим $F(\tilde{a})$ выражением (5.55). После перестановки символов $\left[\text{ и } \int \right]$ уравнение (5.63) принимает вид

$$\int d^3\tilde{x} [h^0(\mathbf{x}, \tilde{a}), f(\mathbf{y}, \underline{m})] = i \int d^3\tilde{x} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\tilde{y}, D(\tilde{a}) \underline{m})$$

для **любой** тензорно-операторной функции \tilde{x} . Очень соблазнительно приравнять подинтегральные выражения

$$[h^0(\mathbf{x}, \tilde{a}), f(\mathbf{y}, \underline{m})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{x}, D(\tilde{a}) \underline{m}). \quad (5.64)$$

Перепишем уравнение (5.56) в таком локальном виде

$$[h^0(\mathbf{x}, \tilde{a}), h^\mu(\tilde{y}, \tilde{b})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) h^\mu(\mathbf{x}, \tilde{a} \wedge \tilde{b}). \quad (5.65)$$

Это и называется в литературе алгеброй токов. В случае временной компоненты $\mu = 0$ говорят об алгебре токов зарядов. В случае пространственной компоненты ко второму члену нужно добавить член с δ -функцией, обычно называемый швингеровским членом (см. лекции О'Райферти [37]).

Очень немногие физические результаты требуют для своего объяснения локального вида алгебры токов и не могут быть выведены из уравнения (5.63). Однако физики все же предпочитают считать алгебру токов гипотезой. Им нравится аналогия с квантовой механикой, которая выражается алгеброй операторов p и q в данный момент времени (т. е. алгеброй Ли группы

Гейзенберга). Отметим также, что в рамках этой алгебры Ли [90] придал некий смысл симметрии относительно группы $SU(6)$. Существует целая антология по физике алгебры токов [91].

Бутстрэп. Когда появляется много частиц, все спешат выделить из них элементарные. Бутстрэп — это физическая концепция, которая рассматривает частицы на более демократической основе. Бутстрэп выражается нелинейными (просто квадратичными) уравнениями, инвариантными относительно группы симметрии адронов G [эта группа не больше, чем использованная нами группа $SU(3)$]. Такие уравнения обладают решениями, которые нарушают симметрию относительно группы G . В самом деле, с абстрактной точки зрения на групповую инвариантность эти уравнения имеют вид

$$a \vee a = \lambda a,$$

а ранее мы уже показали, что это приводит к выбору таких направлений в природе, которые нарушают симметрию группы $SU(3) \times SU(3)$.

ЛИТЕРАТУРА ¹⁾

1. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A130, 60 (1931).
2. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A126, 360 (1930).
3. Weyl O., Gruppentheorie und Quantenmechanik, Hirzel, Leipzig, 1928, 1931.
4. Тамм И. Е., Zs. Phys., 62, 545 (1930).
5. Oppenheimer J. R., Phys. Rev., 35, 939 (1930).
6. Dirac P. A. M., Proc. Camb. Phil. Soc., 26, 361 (1930).
7. Oppenheimer J. R., Phys. Rev., 35, 562 (1930).
8. Heisenberg W., Zs. Phys., 33, 879 (1925).
9. Wigner E. P., Zs. Phys., 43, 624 (1927).
10. Hund F., Zs. Phys., 43, 788 (1927).
11. von Neumann J., Wigner E., Zs. Phys., 47, 203; 49, 73; 51, 844 (1928).
12. Wigner E. P., Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren, Vieweg, Braunschweig, 1931 (см. перевод: Е. П. Вигнер, Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров, ИЛ, 1961).
13. van der Waerden, Die Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, Springer, Berlin, 1932 (см. перевод: Б. Л. Ван-дер-Верден, Метод теории групп в квантовой механике, Харьков, 1938).
14. Bauer E., Introduction à la Théorie des Groupes et ses Application à la Physique Quantique, Presses Universitaires de France, Paris, 1933 (см. перевод: Э. Бауэр, Введение в теорию групп и ее приложения к квантовой физике, ГТТИ, 1937).
15. Salam A., High Energy Physics and Elementary Particles, IAEA, Vienna, 1963.

¹⁾ Литература, отмеченная звездочкой, добавлена переводчиком. — Прим. ред.

- 16*. *Racah G.*, Group Theory and Spectroscopy, Princeton Lectures, 1951, Ergeb. Exact Naturwiss, 37, 28, 1965.
- 17*. *Behrends R. E., Dreitlein J., Fronsdal C., Lee W.*, Rev. Mod. Phys., 34, 1 (1962) (см. перевод в сб. «Теория групп и элементарные частицы»).
- 18*. *Желобенко Д. П.*, Компактные группы Ли и их представления, изд-во «Наука», 1970.
19. *Mac Lane S., Birkhoff G.*, Algebra, Macmillan, New York, 1967.
20. *Ленг С.*, Алгебра, изд-во «Мир», 1968.
21. *von Neumann J.*, Gottingen Nachrichten, 1, 245, 273 (1927).
22. *von Neumann J.*, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer, Berlin, 1932 (см. перевод: *И. фон Нейман*, Математические основы квантовой механики, изд-во «Наука», 1964).
23. *Birkhoff G., von Neumann J.*, Ann. Math., 37, 935 (1936).
24. *Dirac P. A. M.*, The Principles of Quantum Mechanics, Clarendon Press, Oxford, 1930 (см. перевод: *П. А. М. Дирак*, Принципы квантовой механики, ИЛ, 1960).
25. *Pauli W.*, Die Allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik, Springer, Berlin, 1933 (см. перевод: *В. Паули*, Общие принципы волновой механики, Гостехиздат, 1947).
26. *Mackey G. W.* The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, New York, 1963 (см. перевод: *Дж. Макки*, Лекции по математическим основам квантовой механики, изд-во «Мир», 1965).
27. *Schwartz L.*, Application of Distributions to the Study of Elementary Particles in Relativistic Quantum Mechanics, Univ. of Calif., 1961 (см. перевод: *Л. Шварц*, Применение обобщенных функций к изучению элементарных частиц в релятивистской квантовой механике, изд-во «Мир», 1964).
- 28*. *Ландау Л. Д.*, Zs. Phys., 45, 430 (1927).
29. *Jordan P., von Neumann J., Wigner E. P.*, Ann. Math., 35, 29 (1934).
30. *Haag R., Kastler D.*, Journ. Math. Phys., 5, 848 (1964).
31. *Ruelle D.*, Statistical Mechanics, Benjamin, New York, 1969 (см. перевод: *Д. Рюэль*, Статистическая механика, изд-во «Мир», 1971).
32. *Bargmann V.*, Journ. Math., Phys., 5, 862 (1964).
33. *Uhlhorn U.*, Arkiv for Fysik, 23, 307 (1963).
34. *Emch G., Piron C.*, Journ. Math. Phys., 4, 469 (1963).
35. *Wigner E. P.*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 51, 956 (1964) (см. перевод в сб. *Е. Вигнер*, Этюды о симметрии, изд-во «Мир», 1971, стр. 20).
36. *Fano U., Racah G.*, Irreducible Tensorial Sets, Academic Press, New York, 1959.
37. *O'Raiifeartaigh L.*, Lecture Notes in Physics, Springer Verlag, № 6, 1970, p. 144.
38. *Bourbaki N.*, Groupes et Algèbres de Lie, Hermann, Paris, 1960.
39. *Weyl H.*, The Classical Groups, Princeton, 1939 (см. перевод: *Г. Вейль*, Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, 1947).
40. *Itzykson C., Nauenberg M.*, Rev. Mod. Phys., 38, 95 (1966).
41. *Bohr A.*, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 26, № 14, 16 (1952).
42. Quantum Theory of Angular Momentum, Ed. by L. C. Biedenharn, H. van Dam, Academic Press, New York, 1965.
43. Spectroscopic and Group Theoretical Methods in Physics, Racah Memorial Volume, North Holland, 1968.
44. *Flamand G.*, Ann. Inst. H. Poincaré, 7, 353 (1967).
- 45*. *Kostant B.*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 170, Springer, New York, 1970 [см. перевод: УМН, 28, № 1, 163 (1973)].
- 46*. *Souriau J. M.*, Structures des Systems Dynamiques, Dunod Universite, Paris, 1970.
- 47*. *Кириллов А. А.*, Элементы теории представлений, изд-во «Наука», 1972.

- 48*. *van Hove L.*, Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. Mem., **37**, 610 (1951).
49. *von Neumann J.*, Math. Annalen, **104**, 570 (1937).
50. *Guichardet A.*, Algèbres d'Observables Associées aux Relations de Commutation, Armand Colin, Paris, 1969.
51. *Mackey G.*, Duke Math. Journ., **16**, 313 (1949).
52. *Pauli W.*, Zs. Phys., **36**, 336 (1926).
53. *Фок В. А.*, Zs. Phys., **98**, 145 (1935).
54. *Hulthen L.*, Zs. Phys., **86**, 21 (1933).
55. *Bargmann V.*, Zs. Phys., **99**, 576 (1936).
56. *Heisenberg W.*, Zs. Phys., **39**, 499 (1926).
57. *Pauli W.*, Zs. Phys., **31**, 765 (1925).
58. *Heitler W.*, *London F.*, Zs. Phys., **44**, 455 (1927).
59. *Eyring H.*, *Walter J.*, *Kimball G.*, Quantum Chemistry, Wiley New York 1944.
60. *Wigner E. P.*, Gottingen Nachrichten, 133 (1930).
61. *Jahn H. A.*, *Teller E.*, Proc. Roy. Soc., **A161**, 220 (1937).
62. *Rasetti F.*, Zs. Phys., **61**, 598 (1930).
63. *Heisenberg W.*, Zs. Phys., **77**, 1 (1932).
64. *Coker W. R.*, *Moore C. F.*, Physics Today, **22**, № 4, 53 (1969).
65. *Winger E. P.*, Phys. Rev., **51**, 106 (1937).
66. *Franzini P.*, *Radicati L. A.*, Phys. Lett., **6**, 322 (1963).
67. *Goepfert Mayer M.*, *Jensen J. H. D.*, Elementary Theory of Nuclear Shell Structure, Wiley, New York, 1955 (см. перевод: *М. Геннерт-Майер, И. Г. Иенсен*, Элементарная теория ядерных оболочек, ИЛ, 1958).
68. *de Shalit A.*, *Talmi I.*, Nuclear Shell Theory, Academic Press, London, 1963.
69. *Racah G.*, Phys. Rev., **76**, 1352 (1949).
70. *Bohr A.*, *Mottelson B.*, Nuclear Structure, Benjamin, New York, 1969 (см. перевод: *О. Бор, Б. Моттelson*, Структура атомного ядра, т. 1, изд-во «Мир», 1971).
71. *Inglis D. R.*, Physics Today, **22**, № 6, 29 (1969).
72. *Gell-Mann M.*, Phys. Rev., **92**, 833 (1953).
73. *Nakano T.*, *Nishijima K.*, Progr. Theor. Phys., **10**, 587 (1953).
74. *Michel L.*, Nuovo Cim., **10**, 319 (1953).
75. *Fermi E.*, Zs. Phys., **88**, 61 (1934).
76. *Feynman R. P.*, *Gell-Mann M.*, Phys. Rev., **109**, 193 (1958).
77. *Cabibbo N.*, Phys. Rev. Lett., **10**, 531 (1963).
78. *Sakata S.*, Progr. Theor. Phys., **16**, 686 (1956).
79. *Gell-Mann M.*, Phys. Rev., **125**, 1067 (1962).
80. *Ne'eman Y.*, Nucl. Phys., **26**, 222 (1961).
81. *Gell-Mann M.*, *Ne'eman Y.*, The Eightfold Way, Benjamin, 1964.
82. *Gourdin M.*, Unitary Symmetry, North-Holland, 1967.
83. *Radicati L.*, Old and New Problems in Elementary Particle Physics, Academic Press, New York, 1968.
84. *Michel L.*, *Radicati L.*, Proc. 5-th Coral Gables Conference, Symmetry Principles at High Energy, Benjamin, New York, 1968.
85. *Michel L.*, *Radicati L.*, Evolution of Particle Physics, E. Amaldi Festschrift, Academic Press, New York, 1970.
86. *Gürsey F.*, *Radicati L.*, Phys. Rev. Lett., **13**, 299 (1964).
87. *Sakita B.*, Phys. Rev., **136B**, 1756 (1964).
88. *Gell-Mann M.*, Physics, **1**, 63 (1964).
89. *Michel L.*, Proc. 2-nd Coral Gables Conference, Symmetry Principles at High Energy, Freeman and Co., San Francisco, 1965.
90. *Lee B. M.*, Phys. Rev. Lett., **17**, 145 (1965).
91. *Adler S. L.*, *Dashen R. F.*, Current Algebras, Benjamin, New York, 1968.

Редукция произведения двух неприводимых унитарных представлений группы Пуанкаре

ВВЕДЕНИЕ

Использование симметрии физической задачи позволяет уменьшить число независимых матричных элементов наблюдаемых. Классическим примером такой редукции является теорема Вигнера — Эккарта, применимая к наблюдаемым, которые преобразуются как тензоры при пространственных вращениях. В S -матричной теории элементарных частиц принцип инвариантности оператора рассеяния относительно преобразований из группы Пуанкаре приводит к разложению элементов S -матрицы, обобщающему разложение по парциальным волнам (см. работу [1]). При этом требуется разложить произведение представлений группы Пуанкаре \tilde{P} на неприводимые и найти соответствующие коэффициенты Клебша — Гордана. Вначале эта задача была решена для так называемых физических представлений группы \tilde{P} , т. е. для частиц, четырехмерные импульсы которых лежат внутри [1] или на границе [2] светового конуса. Однако в последние годы все возрастающее значение в S -матричной теории элементарных частиц приобретают так называемые нефизические представления, отвечающие светоподобным, пространственно-подобным или нулевым импульсам. Например, в связи с постулатами аналитичности и перекрестной симметрии возрос интерес к так называемым перекрестным парциальным разложениям амплитуд двухчастичного рассеяния, в которых входящая частица связывается с выходящей [3, 4]. При этом роль полного импульса играет переданный импульс, который в большинстве случаев является пространственно-подобным, что приводит к „нефизическим“ представлениям группы

¹⁾ Sektion Physik der Universität München.

Пуанкаре с мнимой массой. Йоос [5] особо отмечал выявляющуюся при этом связь между теорией полюсов Редже и теорией групп. С другой точки зрения интерес к „нефизическим“ представлениям группы возник в связи с предположением Фейнберга [6] о существовании „таххионов“, движущихся быстрее света. Поэтому в настоящее время привлекла внимание также и проблема приведения для произведения „нефизических“ представлений группы \tilde{P} .

Мы называем группой Пуанкаре \tilde{P} квантовомеханическую неоднородную группу Лоренца; она является универсальной накрывающей группой для группы преобразований пространства-времени, которая, согласно Баргману [7], может быть получена как векторное представление группы \tilde{P} ¹⁾. Всюду в этой статье рассматривается только связная часть группы Пуанкаре, так что мы можем опустить точное определение „собственная ортохронная“. Теория представлений группы \tilde{P} в основном была построена Вигнером в его знаменитой статье 1939 г. [8]. Общая математическая теория, теория индуцированных представлений локально-компактных групп, была развита позднее Макки [9] (см. также его обзорную статью [10]). Работа Вигнера воспринимается теперь как естественное приложение этой теории.

До сих пор теория представлений группы Пуанкаре рассматривается в учебниках по квантовой теории поля лишь в весьма ограниченном объеме, между тем имеется несколько конспектов лекций и оригинальных статей (см., например, работы Эмха [11], Гийо и Пти [12]), в которых она выводится из теории Макки. Поэтому в гл. 1 мы приводим обзор построения неприводимых унитарных представлений группы \tilde{P} лишь в виде ряда рецептов. Несколько более подробно мы рассмотрим представления с пространственно-подобными импульсами, так как они обычно недостаточно аккуратно излагаются в физической литературе. Теория представлений соответствующей малой группы $SU(1, 1)$ [или ее изоморфного образа $SL(2, \mathbb{R})$] была построена Баргманом [13]. Эта теория изложена в гл. 1 методом, основанным на результатах Гельфанда, Граева и Виленкина [14].

В гл. 2 вычислены матричные элементы представлений малых групп в различных базисах в пространствах представлений, для которых представления малой группы при сужении

¹⁾ В этой статье рассматриваются только непрерывные представления.

на некоторую ее подгруппу становятся диагональными. Эти матричные элементы как функции на данной малой группе являются в некотором обобщенном смысле базисом в гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых функций на малой группе или на некотором пространстве классов сопряженных элементов этой малой группы. Соответствующие теоремы разложения также выведены в гл. 2. Некоторые аналитические свойства матричных элементов малых групп, установленные при этом, также могут представлять интерес при рассмотрении аналитических свойств элементов S -матрицы. Теоремы разложения необходимы при решении проблемы приведения для произведения любых двух неприводимых унитарных представлений группы \tilde{P} с ненулевыми импульсами. Метод приведения с помощью спин-орбитальной связи, использованный Йоосом [1], приспособлен, по существу, для произведения представлений с импульсами, лежащими внутри светового конуса. Между тем Мусса и Стора [2], исходя из теории Макки, пришли к методу приведения, использующему так называемую связь спиральностей, который применим ко всем случаям, исключая произведение двух представлений с пространственно-подобными или нулевыми импульсами. Наш метод, пригодный также и в этих случаях, построен в духе подхода Мусса и Стора, но в несколько большей степени использует геометрические идеи.

Задача приведения для произведения двух неприводимых унитарных представлений группы \tilde{P} , по крайней мере одно из которых отвечает нулевому импульсу, сводится к задачам приведения для некоторых унитарных представлений малых групп, решения которых в большинстве случаев имеются в литературе.

1. Неприводимые унитарные представления группы Пуанкаре

Элементами группы Пуанкаре \tilde{P} являются пары (A, a) , где A принадлежит группе $SL(2, \mathbb{C})$ комплексных унитарных матриц 2×2 , и a принадлежит вещественному четырехмерному векторному пространству \mathbb{R}^4 . Закон композиции для этой группы имеет вид

$$(A, a)(A', a') = (AA', a + \Lambda(A)a'). \quad (1.1)$$

Здесь оператор $\Lambda(A)$ определяется накрывающим гомоморфизмом $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow L_+^\uparrow$, где L_+^\uparrow — собственная ортохронная группа Лоренца, реализуемая в пространстве \mathbb{R}^4 обычным образом. Явный вид матрицы $\Lambda(A)$ дается соотношением

$$A \rightarrow \Lambda(A): \Lambda(A)_\nu^\mu = \frac{1}{2} \text{Sp}(\tilde{\sigma}^\mu A \sigma_\nu A^+), \quad (1.2)$$

$$(\sigma_\mu) \equiv (\mathbf{I}_2, \sigma), \quad \tilde{\sigma}_\mu \equiv (-\mathbf{I}_2, \sigma),$$

где \mathbf{I}_2 — единичная матрица 2×2 ; $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ — матрицы Паули:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Как видно из формулы (1.1), \tilde{P} является полупрямым произведением $SL(2, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{R}^4$ с заданием операции Λ из группы $SL(2, \mathbb{C})$ в пространстве \mathbb{R}^4 . Группа $\check{S}L(2, \mathbb{C}) = (SL(2, \mathbb{C}), 0)$ является подгруппой группы \tilde{P} , а $\check{\mathbb{R}}^4 = (\mathbf{I}_2, \mathbb{R}^4)$ — абелевой инвариантной подгруппой группы \tilde{P} .

1.1. ПОСТРОЕНИЕ НЕПРИВОДИМЫХ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ \tilde{P}

Неприводимые унитарные представления группы \tilde{P} , согласно Макки [9], строятся путем выполнения следующих действий.

I. Устанавливаем группу характеров абелевой инвариантной подгруппы $\check{\mathbb{R}}^4$. Имеем ¹⁾

$$(\mathbf{I}_2, a) \rightarrow \chi^p(a) = e^{ipa}, \quad pa \equiv -p^0 a^0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}, \quad p \in \mathbb{R}^4. \quad (1.1.1)$$

¹⁾ В этой статье используется метрика $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

Таким образом, группой характеров является „импульсное пространство“ \mathbf{R}^4 . Использование индефинитного скалярного произведения $p \cdot a$ не обязательно, однако это облегчает выполнение последующих шагов.

II. Устанавливаем орбиты группы $SL(2, \mathbf{C})$ на группе характеров \mathbf{R}^4 , т. е. классы в пространстве \mathbf{R}^4 , задаваемые следующим соотношением эквивалентности: p и p' принадлежат одной и той же орбите $\Omega(p)$, если существует такой элемент $A \in SL(2, \mathbf{C})$, что $\chi^{p'}(a) = \chi^p(\Lambda(A)^{-1}a)$ для любого $a \in \mathbf{R}^4$. Согласно формуле (1.1.1), мы имеем $\chi^p(\Lambda(A)^{-1}a) = \chi^{\Lambda(A)p}(a)$ и потому $\Omega(p) = = L_{\uparrow}^p$, т. е. орбитой вектора p является „массовая оболочка“, на которой он лежит.

III. Разбиением пространства \mathbf{R}^4 на орбиты мы характеризуем выбором следующего множества Ω , состоящего из представителей, т. е. „стандартных импульсов“ $\overset{\circ}{p}$:

$$\mathbf{R}^4 = \bigcup_{\overset{\circ}{p} \in \Omega} \Omega(\overset{\circ}{p}), \quad \Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Omega^0 \cup \Omega_0^+ \cup \Omega_0^- \cup \Omega_0^0,$$

$$\Omega^{\pm} \equiv \{\pm me_{(0)} : m > 0\}, \quad \Omega^0 \equiv \{ne_{(3)} : n > 0\},$$

$$\Omega_0^{\pm} \equiv \{\pm e_{(0)} + e_{(3)}\}, \quad \Omega_0^0 \equiv \{0\}.$$
(1.1.2)

Здесь $\{e_{(\mu)}\}$ — „ортонормированный“ базис в пространстве \mathbf{R}^4 :

$$e_{(\mu)} \cdot e_{(\nu)} = g_{\mu\nu}, \quad e_{(\mu)} e^{(\mu)} = \mathbf{I}_4.$$
(1.1.3)

IV. Для каждого $\overset{\circ}{p} \in \Omega$ устанавливается малая группа $G(\overset{\circ}{p})$, т. е. подгруппа $SL(2, \mathbf{C})$, для которой $\chi^{\overset{\circ}{p}}(\Lambda(A)^{-1}a) = \chi^{\overset{\circ}{p}}(a)$ при любом $A \in G(\overset{\circ}{p})$ и $a \in \mathbf{R}^4$. Последнее условие, согласно формулам (1.1.1) и (1.2), эквивалентно следующему:

$$A \in G(\overset{\circ}{p}) \Leftrightarrow A(\overset{\circ}{p} \cdot \sigma) A^{\dagger} = \Lambda(A)\overset{\circ}{p} \cdot \sigma = \overset{\circ}{p} \cdot \sigma.$$
(1.1.4)

В силу формулы (1.1.2) существуют только следующие четыре различные малые группы:

$$\overset{\circ}{p} \in \Omega^+ \cup \Omega^- : G(\overset{\circ}{p}) = SU(2);$$

$$A \in SU(2) \Leftrightarrow A_{21} = -A_{12}^*, \quad A_{22} = A_{11}^*;$$

$$\overset{\circ}{p} \in \Omega^0 : G(\overset{\circ}{p}) = SU(1, 1);$$

$$A \in SU(1, 1) \Leftrightarrow A_{21} = A_{12}^*, \quad A_{22} = A_{11}^*;$$
(1.1.5)

$$\overset{\circ}{p} \in \Omega_0^+ \cup \Omega_0^- : G(\overset{\circ}{p}) = E(2);$$

$$A \in E(2) \Leftrightarrow A_{21} = 0, \quad A_{22} = A_{11}^*;$$

$$\overset{\circ}{p} \in \Omega_0^0 : G(\overset{\circ}{p}) = SL(2, \mathbf{C}).$$

Группы $SU(2)$, $SU(1, 1)$ и $E(2)$ являются подгруппами $SL(2, \mathbf{C})$, унитарными: первая — относительно дефинитной метрики $\sigma_0 = \mathbf{I}_2$, вторая — относительно индефинитной метрики $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и третья — относительно вырожденной метрики $\sigma_0 + \sigma_3 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ соответственно. Группа $E(2)$ — изоморфна дважды накрывающей группе для группы евклидовых движений плоскости. В гл. 3 нам понадобится также малая группа, принадлежащая множеству представителей

$$\Omega^{\circ} \equiv \{ne_{(2)} : n > 0\}. \quad (1.1.6)$$

Согласно формуле (1.1.4), группа $G(\overset{\circ}{p})$ в этом случае является вещественной подгруппой $SL(2, \mathbf{R})$ группы $SL(2, \mathbf{C})$; она изоморфна $SU(1, 1)$;

$$\overset{\circ}{p} \in \Omega^{\circ} : G(\overset{\circ}{p}) = SL(2, \mathbf{R}); \quad A \in SL(2, \mathbf{R}) \Leftrightarrow A = A^*. \quad (1.1.7)$$

V. Левое фактор-пространство $SL(2, \mathbf{C})/G(\overset{\circ}{p})$ гомеоморфно орбите $\Omega(\overset{\circ}{p})$. Из левого класса смежности, соответствующего $p \in \Omega(\overset{\circ}{p})$, который состоит из всех элементов $A \in SL(2, \mathbf{C})$, таких, что $\Lambda(A)\overset{\circ}{p} = p$, выберем представитель $A(p)$. Если мы параметризуем массовые оболочки, принадлежащие $\overset{\circ}{p} \neq 0$, следующим образом:

$$p = \begin{cases} \pm m(\operatorname{ch} \chi e_{(0)} + \operatorname{sh} \chi e(\theta, \varphi)), & 0 \leq \chi < \infty \text{ для } p \in \Omega(\pm m e_{(0)}), \\ n(\operatorname{sh} \chi e_{(0)} + \operatorname{ch} \chi e(\theta, \varphi)), & -\infty < \chi < \infty \text{ для } p \in \Omega(n e_{(3)}), \\ \pm e^{\chi}(e_{(0)} + e(\theta, \varphi)), & -\infty < \chi < \infty \text{ для } p \in \Omega(\pm(e_{(0)} + e_{(3)})), \end{cases} \quad (1.1.8)$$

$$e(\theta, \varphi) \equiv \sin \theta (\cos \varphi e_{(1)} + \sin \varphi e_{(2)}) + \cos \theta e_{(3)}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

то в качестве соответствующих представителей можно выбрать

$$A(p) = \hat{A}(\theta, \varphi) \hat{A}(\chi),$$

$$\hat{A}(\theta, \varphi) \equiv \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2} \theta & -e^{-i\varphi} \sin \frac{1}{2} \theta \\ e^{i\varphi} \sin \frac{1}{2} \theta & \cos \frac{1}{2} \theta \end{pmatrix}, \quad (1.1.9)$$

$$\hat{A}(\chi) \equiv \begin{pmatrix} \exp \frac{1}{2} \chi & 0 \\ 0 & \exp \left(-\frac{1}{2} \chi\right) \end{pmatrix}.$$

Элемент $\hat{A}(\chi)$ выполняет чистое лоренцево преобразование в плоскости $(0, 3)$ со скоростью $\text{th } \chi$, $\hat{A}(\theta, \varphi)$ — кратчайший поворот, переводящий $e_{(3)}$ в направление \mathbf{p} . Случай $\overset{\circ}{p} = 0$ тривиален, так как фактор-пространство $SL(2, \mathbf{C})/\overset{\circ}{G}(0)$ состоит только из одного элемента.

VI. Для каждой малой группы устанавливаем систему представителей классов эквивалентности всех неприводимых унитарных представлений $\{U_{G(\overset{\circ}{p})}^{\rho}\}$. Индекс ρ характеризует различные классы. Пусть $\mathfrak{H}_{G(\overset{\circ}{p})}^{\rho}$ — гильбертово пространство, в котором действует представление $U_{G(\overset{\circ}{p})}^{\rho}$. Явный вид системы $\{U_{G(\overset{\circ}{p})}^{\rho}\}$ будет дан в пп. 1.2—1.5.

VII. Для подгруппы $\check{G}(\overset{\circ}{p}) \equiv G(\overset{\circ}{p}) \otimes R^4 \subset \tilde{P}$ теперь можно построить в пространстве $\mathfrak{H}_{G(\overset{\circ}{p})}^{\rho}$ представление

$$\check{G}(\overset{\circ}{p}) \ni (A, a) \rightarrow U_{\check{G}(\overset{\circ}{p})}^{\rho, \rho}(A, a) \equiv \chi^{\rho}(a) U_{G(\overset{\circ}{p})}^{\rho}(A). \quad (1.1.10)$$

VIII. Для $\overset{\circ}{p} \neq 0$ определяется мера на множестве $\Omega(\overset{\circ}{p})$, инвариантная относительно группы $SL(2, \mathbf{C})$:

$$\int_{\Omega(\overset{\circ}{p})} d\omega_{\overset{\circ}{p}}(p) \equiv \int_{\Omega(\overset{\circ}{p})} \frac{d^3 \mathbf{p}}{2|\overset{\circ}{p}|}. \quad (1.1.11)$$

С помощью этой меры определяется прямая интегральная сумма гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_{G(\overset{\circ}{p})}^{\rho}(p) \equiv \mathfrak{H}_{G(\overset{\circ}{p})}^{\rho}$:

$$\mathfrak{H}^{\rho, \rho} \equiv \bigoplus_{\Omega(\overset{\circ}{p})} \int \sqrt{d\omega_{\overset{\circ}{p}}(p)} \mathfrak{H}_{G(\overset{\circ}{p})}^{\rho}(p). \quad (1.1.12)$$

Пространство $\mathfrak{H}^{\rho, \rho}$ состоит из векторных функций $\psi: \Omega(\overset{\circ}{p}) \rightarrow \mathfrak{H}_{G(\overset{\circ}{p})}^{\rho}$ со скалярным произведением

$$\langle \psi | \varphi \rangle^{\rho, \rho} \equiv \int_{\Omega(\overset{\circ}{p})} d\omega_{\overset{\circ}{p}}(p) \langle \psi(p) | \varphi(p) \rangle_{G(\overset{\circ}{p})}^{\rho}, \quad (1.1.13)$$

где скобками $\langle | \rangle_{G(\overset{\circ}{p})}^{\rho}$ обозначено скалярное произведение в пространстве $\mathfrak{H}_{G(\overset{\circ}{p})}^{\rho}$. Для $\overset{\circ}{p} = 0$ имеем $\mathfrak{H}^{0, \rho} \equiv \mathfrak{H}_{G(0)}^{\rho}$; скалярное произведение

$$\langle \psi | \varphi \rangle^{0, \rho} \equiv \langle \psi | \varphi \rangle_{G(0)}^{\rho}. \quad (1.1.14)$$

IX. Представление (1.1.10) подгруппы $\check{G}(\check{\rho})$ при $\check{\rho} \neq 0$ в пространстве $\mathfrak{F}_{G(\check{\rho})}^{\check{\rho}}$ индуцирует следующее представление группы Пуанкаре ¹⁾:

$$\begin{aligned} (U^{\check{\rho}, \check{\rho}}(A, a)\psi)(p) &\equiv U_{\check{G}(\check{\rho})}^{\check{\rho}, \check{\rho}}(R(p; A), \Lambda(p)^{-1}a)\psi(\Lambda(A)^{-1}p) = \\ &= e^{i\rho \cdot a} U_{G(\check{\rho})}^{\rho}(R(p; A))\psi(\Lambda(A)^{-1}p), \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

$$\Lambda(p) \equiv \Lambda(A(p)), \quad p = \Lambda(p)\check{\rho}, \quad R(p; A) \equiv A(p)^{-1}AA(\Lambda(A)^{-1}p).$$

Для $\check{\rho} = 0$ вместо (1.1.15) мы имеем представление

$$U^{0, 0}(A, a)\psi = U_{G(0)}^0\psi \quad (1.1.16)$$

группы \check{P} в пространстве $\mathfrak{F}_{G(0)}^0$. При этом представление трансляционной нормальной подгруппы $\check{R}^4 \subset \check{P}$ тривиально.

Общие результаты Макки гарантируют, что

а) каждое неприводимое унитарное представление группы \check{P} эквивалентно одному из построенных выше представлений $U^{\check{\rho}, \check{\rho}}$;

б) два представления $U^{\check{\rho}, \check{\rho}}$ и $U^{\check{\rho}', \check{\rho}'}$, полученные указанным образом, эквивалентны в том и только в том случае, если $\check{\rho} = \check{\rho}'$, $\rho = \rho'$.

Таким образом, задача отыскания всех неприводимых унитарных представлений группы Пуанкаре \check{P} сводится к задаче построения всех неприводимых унитарных представлений малых групп.

1.2. НЕПРИВОДИМЫЕ УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $SU(2)$

Теория представлений группы $SU(2)$, универсальной накрывающей для группы вращений трехмерного пространства, была известна физикам уже вскоре после возникновения кван-

¹⁾ Выбор представителей $A(p)$ в формулах (1.1.8) и (1.1.9) приводит здесь к так называемым спиральным представлениям. Если $A = \exp\left(\frac{i}{2}\alpha\frac{\rho\sigma}{|\rho|}\right)$ — поворот вокруг оси импульса, то $R(p; A) = \exp\left(\frac{i}{2}\alpha\sigma_3\right)$ — поворот вокруг оси e_3 . Поэтому если, как обычно, выбрать базис представлений малых групп, в котором диагональны вращения вокруг оси $e_{(3)}$, то в индуцированном представлении группы \check{P} будут диагональными вращения вокруг оси импульса. При этом спиральность является проекцией углового момента на эту ось.

товой механики. Поэтому здесь мы будем кратки, используя ссылку на обзорную статью Баргмана [15].

Унитарное представление группы $SU(2)$ определяется в гильбертовом пространстве \mathfrak{H} целых аналитических функций двух комплексных переменных со скалярным произведением

$$\langle f | g \rangle \equiv \int_{\mathbb{C}^2} d\mu(z_1, z_2) f(z_1, z_2)^* g(z_1, z_2),$$

$$d\mu(z_1, z_2) \equiv \frac{1}{\pi^2} e^{-|z_1|^2 - |z_2|^2} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2,$$

$$(z_1, z_2) = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) \in \mathbb{C}^2 \quad (1.2.1)$$

следующим образом:

$$SU(2) \ni A \rightarrow U(A) : (U(A)f)(z_1, z_2) = f(z_1 A_{11} + z_2 A_{21}, z_1 A_{12} + z_2 A_{22}). \quad (1.2.2)$$

Разложим пространство \mathfrak{H} в прямую сумму конечномерных подпространств всех однородных полиномов степени $2l + \kappa$, $\mathfrak{H}_{SU(2)}^{\kappa, l}$:

$$\mathfrak{H} = \bigoplus_{\substack{\kappa=0,1 \\ l=0,1,\dots}} \mathfrak{H}_{SU(2)}^{\kappa, l}; \quad \mathfrak{H}_{SU(2)}^{\kappa, l} \equiv \{f \in \mathfrak{H} : f(az_1, az_2) = a^{2l+\kappa} f(z_1, z_2)\}. \quad (1.2.3)$$

Представление U разлагается в прямую сумму неприводимых представлений

$$SU(2) \ni A \rightarrow U_{SU(2)}^{\kappa, l}(A) \equiv U(A) | \mathfrak{H}_{SU(2)}^{\kappa, l}, \quad \kappa = 0, 1; \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2.4)$$

Каждое неприводимое унитарное представление группы $SU(2)$ эквивалентно одному из представлений $U_{SU(2)}^{\kappa, l}$. При этом $U_{SU(2)}^{\kappa, l}$ и $U_{SU(2)}^{\kappa', l'}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\kappa = \kappa'$ и $l = l'$.

Обычно вместо пары (κ, l) используют квантовое число углового момента $j = l + \frac{1}{2}\kappa$, принимающее целые и полуцелые значения. Мы предпочитаем указанные обозначения, так как они позволяют явно разделить целые ($\kappa = 0$) и полуцелые ($\kappa = 1$) спины.

1.3. НЕПРИВОДИМЫЕ УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $SU(1,1)$

Теория представлений некомпактной группы $SU(1,1)$ была создана в 1947 г. Варгманом [13]. С тех пор она почти не фигурировала в физической литературе. Поэтому мы изложим

эту теорию более подробно, чем теорию представлений группы $SU(2)$. В целом изложение следует книге Гельфанда, Граева и Виленкина [14], в которой можно найти также доказательства некоторых математических положений.

Пусть \mathcal{F} — линейное пространство функций, заданных на границе единичного круга $\{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| = 1\}$ и бесконечно дифференцируемых с топологией, определяемой точечной сходимостью. Известно, что любая функция $f \in \mathcal{F}$ может быть разложена по базису

$$\{e_\nu : e_\nu(\omega) = \omega^\nu, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad (1.3.1)$$

в сходящийся всюду ряд Фурье

$$f = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_\nu e_\nu, \quad f_\nu \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\omega}{\omega} e_\nu(\omega)^* f(\omega). \quad (1.3.2)$$

С помощью фурье-компонент мы определяем подпространства линейного пространства \mathcal{F} :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_+^{\kappa, n} &\equiv \{f \in \mathcal{F} : f_\nu = 0 \text{ при } \nu < n + \kappa + 1\}, \\ \mathcal{F}_-^{\kappa, n} &\equiv \{f \in \mathcal{F} : f_\nu = 0 \text{ при } \nu > -n - 1\}. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Из $\mathcal{F}_\pm^{\kappa, n}$ получаются подпространства

$$\mathcal{F}_0^{\kappa, n} \equiv \mathcal{F}_+^{\kappa, n} \cap \mathcal{F}_-^{\kappa, n}, \quad \mathcal{F}_\cup^{\kappa, n} \equiv \langle \mathcal{F}_+^{\kappa, n} \cup \mathcal{F}_-^{\kappa, n} \rangle. \quad (1.3.4)$$

Здесь $\langle \mathcal{M} \rangle$ — линейная оболочка пространства \mathcal{M} . Очевидно, $\mathcal{F}_\cup^{\kappa, n} = \{0\}$ при $n + \kappa + 1 > 0$, $\mathcal{F}_\cup^{\kappa, n} = \mathcal{F}$ при $n < 0$. (1.3.5)

Пространство \mathcal{F} или его подпространства указанного вида содержатся в гильбертовых пространствах всех неприводимых унитарных представлений, которые будут построены в дальнейшем, как плотные подпространства.

Операция преобразования из группы $SU(1,1)$ на границе единичного круга определена следующим образом:

$$SU(1, 1) \ni A : \omega \rightarrow \omega \bar{A} \equiv \frac{\omega A_{11} + A_{21}}{\omega A_{12} + A_{22}}. \quad (1.3.6)$$

Квазиинвариантная мера на границе единичного круга равна $d\omega/\omega$; производная Радона — Никодима равна

$$\frac{d\omega \bar{A}}{\omega \bar{A}} = |\omega A_{12} + A_{22}|^{-2} \frac{d\omega}{\omega}. \quad (1.3.7)$$

Непрерывное линейное представление группы $SU(1, 1)$ в пространстве \mathcal{F} для $\kappa \in \{0, 1\}$ и $l \in \mathbb{C}$ определяется следующим

образом:

$$SU(1, 1) \ni A \rightarrow V^{\kappa, l}(A);$$

$$(V^{\kappa, l}(A)f)(\omega) = |\omega A_{12} + A_{22}|^{-2l-\kappa-2} \left(\frac{\omega A_{12} + A_{22}}{|\omega A_{12} + A_{22}|} \right)^{\kappa} f(\omega \bar{A}). \quad (1.3.8)$$

Согласно Гельфанду и др. [14] (гл. VII, § 2), для нецелых l это представление является неприводимым в том смысле, что не существует нетривиального подпространства \mathcal{F} , инвариантного относительно представления $V^{\kappa, l}$. Для целых l подпространства $\mathcal{F}_{\pm}^{\kappa, l}$, $\mathcal{F}_{\cup}^{\kappa, l}$ и $\mathcal{F}_{\cap}^{\kappa, l}$ — инварианты относительно $V^{\kappa, l}$. При $l + \kappa + 1 > 0$ сужения

$$V_{\pm}^{\kappa, l} \equiv V^{\kappa, l} | \mathcal{F}_{\pm}^{\kappa, l} \quad (l + \kappa + 1 > 0, \text{ целое}) \quad (1.3.9)$$

оказываются неприводимыми подпредставлениями. Так как при этом $\mathcal{F}_{\cup}^{\kappa, l}$ (кроме случая $\kappa = 1, l = -1$) является собственным инвариантным подпространством, представление $V^{\kappa, l}$ естественным образом индуцирует представление в фактор-пространстве $\mathcal{F} / \mathcal{F}_{\cup}^{\kappa, l}$, которое, как можно доказать, является неприводимым. В силу изоморфизма

$$\mathcal{F} / \mathcal{F}_{\cup}^{\kappa, l} \approx \mathcal{F}_{\cap}^{\kappa, -l-\kappa-1} \quad (l + \kappa + 1 > 0, \text{ целое}) \quad (1.3.10)$$

мы можем рассматривать это представление также на элементах пространства $\mathcal{F}_{\cap}^{\kappa, -l-\kappa-1}$. Таким образом, кроме $V_{\pm}^{\kappa, l}$, мы приходим еще и к третьему неприводимому представлению, заданному определением

$$V_{\cap}^{\kappa, l} \equiv P_{\cap}^{\kappa, -l-\kappa-1} V^{\kappa, l} P_{\cap}^{\kappa, -l-\kappa-1} | \mathcal{F}_{\cap}^{\kappa, -l-\kappa-1} \\ (l + \kappa + 1 > 0, \text{ целое}), \quad (1.3.11)$$

т. е. к сужению на пространство $\mathcal{F}_{\cap}^{\kappa, -l-\kappa-1}$ представления $V^{\kappa, l}$, которое осуществляется с помощью проекционных операторов $P_{\cap}^{\kappa, -l-\kappa-1}$. При $l < 0$ мы имеем два варианта. Пространство $\mathcal{F}_{\cap}^{\kappa, l}$ (кроме случая $\kappa = 1, l = -1$) оказывается инвариантным подпространством пространства \mathcal{F} , и сужение

$$V_{\cap}^{\kappa, l} \equiv V^{\kappa, l} | \mathcal{F}_{\cap}^{\kappa, l} \quad (l < 0, \text{ целое}) \quad (1.3.12)$$

является неприводимым представлением группы $SU(1, 1)$. Так как в этом случае пространства $\mathcal{F}_{\pm}^{\kappa, l}$ включают $\mathcal{F}_{\cap}^{\kappa, l}$ в качестве нетривиального подпространства, то сужения представления $V^{\kappa, l}$ на $\mathcal{F}_{\pm}^{\kappa, l}$ не являются неприводимыми. Однако можно

доказать, что представления, естественным образом индуцируемые представлением $V^{\kappa, l}$ в фактор-пространствах $\mathcal{F}_{\pm}^{\kappa, l} / \mathcal{F}_{\bar{0}}^{\kappa, l}$, являются неприводимыми. В силу изоморфизмов

$$\mathcal{F}_{\pm}^{\kappa, l} / \mathcal{F}_{\bar{0}}^{\kappa, l} \approx \mathcal{F}_{\pm}^{\kappa, -l-\kappa-1} \approx \mathcal{F} / \mathcal{F}_{\mp}^{\kappa, l} \quad (l < 0, \text{ целое}) \quad (1.3.13)$$

мы можем рассматривать эти представления на элементах из пространств $\mathcal{F}_{\pm}^{\kappa, -l-\kappa-1}$. Так что, помимо $V_{\bar{0}}^{\kappa, l}$, имеются неприводимые представления

$$V_{\pm}^{\kappa, l} \equiv P_{\pm}^{\kappa, -l-\kappa-1} V^{\kappa, l} P_{\pm}^{\kappa, -l-\kappa-1} | \mathcal{F}_{\pm}^{\kappa, -l-\kappa-1} \quad (l < 0, \text{ целое}), \quad (1.3.14)$$

т. е. сужения на пространстве $\mathcal{F}_{\pm}^{\kappa, -l-\kappa-1}$ представления $V^{\kappa, l}$, осуществляемые с помощью операторов $P_{\pm}^{\kappa, -l-\kappa-1}$.

Таким образом, для целых l мы имеем разложение пространства \mathcal{F} в прямую сумму трех подпространств, на каждом из которых задано неприводимое представление группы $SU(1, 1)$:

$$\mathcal{F} = \begin{cases} \mathcal{F}_{+}^{\kappa, l} \oplus \mathcal{F}_{-}^{\kappa, l} \oplus \mathcal{F}_{\bar{0}}^{\kappa, -l-\kappa-1} & (l + \kappa + 1 > 0, \text{ целое}), \\ \mathcal{F}_{+}^{\kappa, -l-\kappa-1} \oplus \mathcal{F}_{-}^{\kappa, -l-\kappa-1} \oplus \mathcal{F}_{\bar{0}}^{\kappa, l} & (l < 0, \text{ целое}). \end{cases} \quad (1.3.15)$$

Здесь пара представлений, отвечающая l и $-l-\kappa-1$, определена на одном и том же подпространстве. Однако следует отметить, что представление $V^{\kappa, l}$ неразложимо и потому никаким способом не может быть представлено в виде прямой суммы подпредставлений $V_{\pm}^{\kappa, l}$, $V_{\bar{0}}^{\kappa, l}$. В случае $\kappa=1$, $l=-1$, когда области $l + \kappa + 1 > 0$ и $l < 0$ перекрываются, следует еще уточнить сформулированные выше утверждения. Здесь $\mathcal{F}_{\bar{0}}^{1, -1} = \{0\}$ и пространство \mathcal{F} распадается на прямую сумму $\mathcal{F}_{+}^{1, -1} \oplus \mathcal{F}_{-}^{1, -1}$. При этом мы имеем только два неприводимых представления $V_{\pm}^{1, -1}$, причем $V^{1, 1} = V_{+}^{1, -1} \oplus V_{-}^{1, -1}$.

Следующее утверждение относительно существования билинейных функционалов, инвариантных относительно пары представлений, которое доказано в книге Гельфанда и др. [14] (гл. VII, § 3) для группы $SL(2, \mathbf{R})$, изоморфной группе $SU(1, 1)$, можно считать основной теоремой теории представлений группы $SU(1, 1)$.

Билинейный функционал в пространстве \mathcal{F} вида

$$\langle f | Bg \rangle \equiv (2\pi i)^{-2} \oint \oint \frac{d\omega'}{\omega'} \frac{d\omega}{\omega} f(\omega') B(\omega', \omega) g(\omega) \quad (1.3.16)$$

с обобщенным интегральным ядром $B(\omega', \omega)$, которое инвариантно относительно пары представлений $V^{\kappa, l}$ и $V^{\kappa', l'}$, т. е.

удовлетворяет требованию

$$\langle V^{x', l'}(A) f | B V^{x, l}(A) g \rangle = \langle f | B g \rangle, \quad A \in SU(1, 1), \quad (1.3.17)$$

существует лишь при условии, что $x' = x$ и $l' = -l^* - x - 1$ или $l' = l^*$. В случае $l' = -l^* - x - 1$ ядро такого функционала равно (или пропорционально)

$$B(\omega', \omega) = 2\pi\delta\left(-i \ln \frac{\omega'}{\omega}\right). \quad (1.3.18)$$

(Исключение представляет случай $x = 1, l = -1$.) Если $l' = l^*, l - \text{нечелое}$, то такой функционал (также единственный с точностью до множителя) определяется ядром

$$B(\omega', \omega) = T^{x, l}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right), \quad (1.3.19)$$

где

$$T^{x, l}(\omega) \equiv \frac{\pi |1 - \omega|^{2l} (1 - \omega)^x}{\Gamma(2l + x + 1) \sin \pi(l + x + 1)}. \quad (1.3.20)$$

В случае $l' = l, l - \text{целое}$, в пространстве \mathcal{F} существуют ровно два (с точностью до множителя) инвариантных функционала:

$$B = T_+^{x, l} \quad \text{и} \quad B = T_-^{x, l}, \quad (1.3.21)$$

где операторы $T_{\pm}^{x, l}$ определяются „спектральным представлением“:

$$T_+^{x, l} e_\nu = \begin{cases} \frac{(\nu - l - x - 1)!}{(\nu + l)!} e_\nu & \text{при } \nu \geq -l, \\ 0 & \text{при } \nu < -l, \end{cases} \quad (1.3.22)$$

$$T_-^{x, l} e_\nu = \begin{cases} (-1)^x \frac{(-\nu - l - 1)!}{(-\nu + l + x)!} e_\nu & \text{при } \nu \leq l + x, \\ 0 & \text{при } \nu > l + x. \end{cases}$$

Поэтому оператор $T_{\pm}^{x, l}$ вырожден в пространстве $\mathcal{F}_{\mp}^{x, l}$; оба функционала вырождены в пространстве $\mathcal{F}_{\hat{n}}^{x, l}$. В этом подпространстве, нетривиальном при $l + x + 1 \leq 0$, существует (единственный с точностью до множителя) инвариантный функционал, определяемый „спектральным представлением“

$$\hat{T}_{\hat{n}}^{x, l} e_\nu = (-1)^{\nu+l+1} (\nu - l - x - 1)! (\nu - l - 1)! e_\nu, \quad (1.3.23)$$

$$l + x + 1 \leq \nu \leq -l - 1, \quad l + x + 1 \leq 0, \quad \text{целое.}$$

В случае $l' = l > 0, l - \text{целое}$, существует (единственный с точностью до множителя) инвариантный функционал

$$B = T_{\hat{n}}^{x, l}, \quad (1.3.24)$$

его определение:

$$T_{\hat{n}}^{\kappa, l} e_{\nu} = \begin{cases} (-1)^{\nu-l-\kappa} [(l+\kappa-\nu)!(l+\nu)!]^{-1} e_{\nu}, & -l \leq \nu \leq l+\kappa, \\ 0 & \text{при других } \nu \quad (l \geq 0, \text{ целое}). \end{cases} \quad (1.3.25)$$

Оператор $T_{\hat{n}}^{\kappa, l}$ вырожден в подпространствах $\mathcal{F}_{+}^{\kappa, l}$ и $\mathcal{F}_{-}^{\kappa, l}$. В каждом из них инвариантный функционал задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{T}_{+}^{\kappa, l} e_{\nu} &= \frac{(\nu-l-\kappa-1)!}{(\nu+l)!} e_{\nu}, \quad \nu \geq l+\kappa+1, \\ \hat{T}_{-}^{\kappa, l} e_{\nu} &= (-1)^{\kappa} \frac{(-\nu-l-1)!}{(-\nu+l+\kappa)!} e_{\nu}, \quad \nu \leq -l-1 \quad (l \geq 0, \text{ целое}). \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

Прежде чем использовать эту теорему для теории представлений группы $SU(1, 1)$, обсудим некоторые свойства функционала $T^{\kappa, l}$. Для нецелых l функционал $T^{\kappa, l}$, определяемый формулой (1.3.20), также диагонален в базисе $\{e_{\nu}\}$:

$$T^{\kappa, l} e_{\nu} = \frac{\Gamma(\nu-l-\kappa)}{\Gamma(\nu+l+1)} e_{\nu} = (-1)^{\kappa} \frac{\Gamma(-\nu-l)}{\Gamma(-\nu+l+\kappa+1)} e_{\nu}. \quad (1.3.27)$$

Отсюда сразу же следует, что оператор $T^{\kappa, -l-\kappa-1}$ является обратным для $T^{\kappa, l}$:

$$T^{\kappa, l} T^{\kappa, -l-\kappa-1} = I_{\mathcal{F}} = T^{\kappa, -l-\kappa-1} T^{\kappa, l}. \quad (1.3.28)$$

Используем символ Λ , чтобы обозначить сужение оператора на подпространство:

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\pm}^{\kappa, l} &\equiv T_{\pm}^{\kappa, l} | \mathcal{F}_{\pm}^{\kappa, -l-\kappa-1} \quad (l < 0, \text{ целое}), \\ \hat{T}_{\hat{n}}^{\kappa, l} &\equiv T_{\hat{n}}^{\kappa, l} | \mathcal{F}_{\hat{n}}^{\kappa, -l-\kappa-1} \quad (l \geq 0, \text{ целое}). \end{aligned} \quad (1.3.29)$$

Легко видеть, что операторы $\hat{T}_{\pm}^{\kappa, l}$ и $\hat{T}_{\hat{n}}^{\kappa, l}$ можно интерпретировать как „предельные значения“ оператора $T^{\kappa, z}$ с комплексным z :

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\pm}^{\kappa, l} &= \begin{cases} \lim_{z \rightarrow l} T^{\kappa, z} | \mathcal{F}_{\pm}^{\kappa, l-\kappa-1} & (l < 0), \\ \lim_{z \rightarrow l} T^{\kappa, z} | \mathcal{F}_{\pm}^{\kappa, l} & (l \geq 0), \end{cases} \\ \hat{T}_{\hat{n}}^{\kappa, l} &= \begin{cases} \lim_{z \rightarrow l} \frac{d}{dz} T^{\kappa, z} | \mathcal{F}_{\hat{n}}^{\kappa, l} & (l < 0), \\ -\text{Res}_{z=l} T^{\kappa, z} | \mathcal{F}_{\hat{n}}^{\kappa, -l-\kappa-1} & (l \geq 0). \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

Сужения операторов, отвечающие l и $-l - \kappa - 1$, также взаимно обратны:

$$\widehat{T}_{\pm}^{\kappa, l} \widehat{T}_{\pm}^{\kappa, -l - \kappa - 1} = \widehat{T}_{\pm}^{\kappa, -l - \kappa - 1} \widehat{T}_{\pm}^{\kappa, l} = \begin{cases} I_{\mathcal{F}_{\pm}^{\kappa, -l - \kappa - 1}} & (l < 0, \text{ целое}), \\ I_{\mathcal{F}_{\pm}^{\kappa, l}} & (l > 0, \text{ целое}), \end{cases} \quad (1.3.31)$$

$$\widehat{T}_{\bar{0}}^{\kappa, l} \widehat{T}_{\bar{0}}^{\kappa, -l - \kappa - 1} = \widehat{T}_{\bar{0}}^{\kappa, -l - \kappa - 1} \widehat{T}_{\bar{0}}^{\kappa, l} = \begin{cases} I_{\mathcal{F}_{\bar{0}}^{\kappa, l}} & (l < 0, \text{ целое}), \\ I_{\mathcal{F}_{\bar{0}}^{\kappa, -l - \kappa - 1}} & (l \geq 0, \text{ целое}). \end{cases}$$

В качестве первого следствия сформулированной выше теоремы покажем, что представления, отвечающие l и $-l - \kappa - 1$, эквивалентны. В силу соотношения

$$\langle V^{\kappa, l}(A) f | Bg \rangle = \langle f | V^{\kappa, -l - \kappa - 1}(A^{-1}) Bg \rangle, \quad (1.3.32)$$

справедливого для любого B в формуле (1.3.16), инвариантные функционалы, существующие в случае $l' = l^*$, определяют операторы, дающие связь между соответствующими представлениями. При $l' = -l^* - \kappa - 1$ оператор B пропорционален единице. Поэтому для нецелых l имеем

$$T^{\kappa, l} V^{\kappa, l} = V^{\kappa, -l - \kappa - 1} T^{\kappa, l}, \quad (1.3.33)$$

а для подпредставлений с целыми l получаем

$$\begin{aligned} \widehat{T}_{\pm}^{\kappa, l} V_{\pm}^{\kappa, l} &= V_{\pm}^{\kappa, -l - \kappa - 1} \widehat{T}_{\pm}^{\kappa, l}, \\ T_{\bar{0}}^{\kappa, l} V_{\bar{0}}^{\kappa, l} &= V_{\bar{0}}^{\kappa, -l - \kappa - 1} \widehat{T}_{\bar{0}}^{\kappa, l}. \end{aligned} \quad (1.3.34)$$

Вторым следствием основной теоремы является неприводимость в смысле Шура всех представлений $V^{\kappa, l}$. Так как в случае $l' = -l^* - \kappa - 1$ δ -функционал (1.3.18) является единственным инвариантным функционалом, то в силу соотношения (1.3.32) единственным оператором, коммутирующим с представлением $V^{\kappa, l}$, является единица. Исключение составляет случай $\kappa = 1$, $l = -1$, когда операторы $\pm T_{\pm}^{1, -1}$ осуществляют проекцию на подпространства $\mathcal{F}_{\pm}^{1, -1}$ и коммутируют с представлением $V^{1, -1}$ в силу соотношений (1.3.34). Это отвечает отмеченному выше разложению представления $V^{1, -1}$ в прямую сумму $V_{+}^{1, -1} \oplus V_{-}^{1, -1}$.

Наконец, основную теорему можно использовать для определения условий, при которых построенные выше представления

в пространстве \mathcal{F} и его подпространствах могут быть обобщены до унитарных представлений в гильбертовом пространстве. Для полученных таким образом унитарных представлений мы позднее кратко дадим доказательства их неприводимости.

Скалярное произведение в гильбертовом пространстве, для которого \mathcal{F} является плотным подпространством и в котором представление $U_{SU}^{x,l}$ при сужении на \mathcal{F} дает $V^{x,l}$, определяется как специальный билинейный функционал того вида, какой был описан в нашей теореме для случая $x' = x$, $l' = l$. Он симметричен и положительно определен:

$$\langle f | Bg \rangle = \langle g | Bf \rangle^*, \quad \langle f | Bf \rangle > 0 \quad \text{при } f \neq 0. \quad (1.3.35)$$

Согласно теореме, этот функционал существует только при условии, что $\text{Re } l = -1/2(1+x)$ или $\text{Im } l = 0$. В первом случае B является δ -функционалом, который, очевидно, симметричен и положительно определен. Во втором случае при нецелых l функционал $T^{x,l}$ симметричен, так как, согласно формуле (1.3.27), он имеет вещественные собственные значения. Однако он является положительно определенным только при $x=0$, $-1 < l < 0$, так как только в этом случае отношение собственных значений для векторов $e_{\nu+1}$ и e_{ν} , $(\nu-l-x)/(\nu+l+1)$, положительно при всех ν , а при $x=0$, $l = -1/2$ оператор $T^{x,l}$ равен единице. Для целых l рассмотрим функционалы $\hat{T}^{x,l}$ и $\hat{T}_{\pm}^{x,l}$, заданные на своих подпространствах. Эти функционалы симметричны, так как их собственные значения вещественны. В пространствах $\mathcal{F}_{\pm}^{x,l}$ (при $l < 0$) и $\mathcal{F}^{x,-l-x-1}$ (при $l+x+1 > 0$) положительно определенные функционалы существуют только при $x=0$, $l = -1$ и $x=0$, $l = 0$ соответственно, так как собственные значения имеют чередующиеся знаки. С другой стороны, в пространствах $\mathcal{F}_{\pm}^{x,l}$ (при $l+x+1 > 0$) и $\mathcal{F}_{\pm}^{x,l-x-1}$ (при $l < 0$) операторы $(\pm 1)^x \hat{T}_{\pm}^{x,l}$ являются положительно определенными при целых l и $x \in \{0, 1\}$. В указанных выше случаях инвариантные, симметричные и положительно определенные функционалы в пространстве \mathcal{F} или его подпространствах могут быть введены как скалярные произведения. Эти линейные пространства, снабженные соответствующими скалярными произведениями, являются гильбертовыми пространствами $\mathcal{H}_{SU}^{x,l}(1,1)$, в которых представления $V^{x,l}$ расширяются до унитарных представлений $U_{SU}^{x,l}(1,1)$. Таким образом, существуют следующие серии унитарных представлений группы $SU(1,1)$:

1. Основная серия состоит из представлений вида

$$\begin{aligned} (U_{SU(l, 1)}^{x, l}(A) f)(\omega) &= \\ &= \sqrt{\frac{d\omega\bar{A}/\omega\bar{A}}{d\omega/\omega}} \left| \omega A_{12} + A_{22} \right|^{-2l-x-1} \left(\frac{\omega A_{12} + A_{22}}{|\omega A_{12} + A_{22}|} \right)^x f(\omega\bar{A}), \quad (1.3.36) \\ x &= 0, 1; \quad l = -\frac{1}{2}(1+x) + i\xi, \quad -\infty < \xi < \infty, \end{aligned}$$

в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_{SU(l, 1)}^{x, l} \equiv \mathfrak{H}$ квадратично интегрируемых функций на границе единичного круга; скалярное произведение определено следующим образом:

$$\langle f | g \rangle_{SU(l, 1)}^{x, l} \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\omega}{\omega} f(\omega)^* g(\omega). \quad (1.3.37)$$

2. Дополнительная серия состоит из представлений вида

$$(U_{SU(l, 1)}^{0, l}(A) f)(\omega) = \frac{d\omega\bar{A}/\omega\bar{A}}{d\omega/\omega} \left| \omega A_{12} + A_{22} \right|^{-2l} f(\omega\bar{A}), \quad (1.3.38)$$

в гильбертовых пространствах $\mathfrak{H}_{SU(l, 1)}^{0, l}$ со скалярными произведениями

$$\langle f | g \rangle_{SU(l, 1)}^{0, l} \equiv \langle f | T^{0, l} g \rangle = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma(\nu-l)}{\Gamma(\nu+l+1)} f_{\nu}^* g_{\nu}. \quad (1.3.39)$$

3. Дискретная серия состоит из представлений вида

$$\begin{aligned} (U_{SU(l, 1)}^{x, l, \pm}(A) f)(\omega) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\omega'}{\omega'} P_{\pm}^{x, l_0} \left(\frac{\omega}{\omega'} \right) \left| \omega' A_{12} + A_{22} \right|^{-2l-x-1} \times \\ &\quad \times \left(\frac{\omega' A_{12} + A_{22}}{|\omega' A_{12} + A_{22}|} \right)^x f(\omega'\bar{A}) \quad (1.3.40) \\ x &= 0, 1, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad l_0 \equiv \max(l, -l-x-1), \end{aligned}$$

где $P_{\pm}^{x, l_0}(\omega/\omega')$ — ядро, отвечающее оператору проекции на подпространство $\mathfrak{F}_{\pm}^{x, l_0}$, $l_0 \equiv \max(l, -l-x-1)$. Представления действуют в гильбертовых пространствах $\mathfrak{H}_{SU(l, 1)}^{x, l, \pm}$, которые получаются путем введения в упомянутые пространства скалярных произведений вида

$$\begin{aligned} \langle f | g \rangle_{SU(l, 1)}^{x, l, \pm} &\equiv \langle f | (\pm 1)^x \hat{T}_{\pm}^{x, l} g \rangle = \\ &= \sum_{\nu=\max(-l, l+x+1)}^{\infty} \frac{(\nu-l-x-1)!}{(\nu+l)!} f_{\pm(\nu+x/2)+x/2}^* g_{\pm(\nu+x/2)+x/2}. \quad (1.3.41) \end{aligned}$$

При $l+x+1 > 0$ проекционный оператор в формуле (1.3.40) можно опустить.

4. **Единичные представления.** Это представления вида

$$\begin{aligned} (U_{SU}^{0,l,\Pi}(A) f)(\omega) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\omega'}{\omega'} P_{\Pi}^{0,0} \left(\frac{\omega}{\omega'} \right) |\omega' A_{12} + A_{22}|^{-2l-2} f(\omega' \bar{A}), \quad (1.3.42) \\ \kappa = 0, \quad l = 0, -1, \end{aligned}$$

в одномерном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_{SU}^{0,l,\Pi} \equiv \mathfrak{F}_{\Pi}^{0,0} \equiv \mathbb{C}$. Проекционный оператор $P_{\Pi}^{0,0}$ можно опустить при $l = -1$.

Основная и дополнительная серии пересекаются в точке $\kappa = 0, l = -1/2$, причем соответствующие представления в обеих сериях совпадают. Основная и дискретная серии пересекаются в точке $\kappa = 1, l = -1$. Представление $U_{SU}^{1,-1}(1)$ основной серии разлагается в прямую сумму представлений $U_{SU}^{1,-1,+}(1)$ и $U_{SU}^{1,-1,-}(1)$, принадлежащих дискретной серии. Соотношения эквивалентности (1.3.33) и (1.3.34) для унитарных серий могут быть распространены до соотношений унитарной эквивалентности. Следовательно, представления с l и $-l - \kappa - 1$ унитарно эквивалентны. Классы эквивалентности неприводимых унитарных представлений группы $SU(1,1)$ могут быть определены поэтому уже на половине указанных серий. Для параметра ρ , введенного в разд. 1.1 для характеристики классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений малых групп, можно выбрать следующие обозначения:

$$\rho \rightarrow (\kappa, l, \eta): \left\{ \begin{array}{ll} \kappa = 0, 1; \quad l = -\frac{1+\kappa}{2} + i\xi, \quad \xi \geq 0, \quad \eta = 0, & \text{основная серия;} \\ \kappa = 0; \quad -\frac{1}{2} < l < 0, \quad \eta = 0, & \text{дополни-} \\ & \text{тельная серия;} \\ \kappa = 0, 1; \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad \eta = \pm, & \text{диск-} \\ & \text{ретная серия;} \\ \kappa = 0; \quad l = -1, \quad \eta = \Pi, & \text{единичное пред-} \\ & \text{ставление.} \end{array} \right. \quad (1.3.43)$$

Здесь мы ввели $\eta = 0$ для единообразного обозначения гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_{SU}^{\kappa,l,\eta}$ и действующих в них представлений $U_{SU}^{\kappa,l,\eta}$. В дальнейшем мы будем обсуждать только представления с параметрами, указанными в формуле (1.3.43). Для таких представлений можно опустить проекционные операторы в формулах (1.3.40) и (1.3.42). Единичное представление в дальнейшем рассматриваться не будет.

Все представления указанных серий неприводимы, за исключением особого случая $\kappa=1$, $l=-1$ из основной серии. Доказательство этого утверждения основано на применении леммы Шура к унитарным представлениям в гильбертовых пространствах. Согласно этой лемме, представление неприводимо тогда и только тогда, когда любой ограниченный оператор, с ним коммутирующий, кратен единице. Пусть C — ограниченный оператор, коммутирующий с представлением $U_{SU(1,1)}^{\kappa,l,\eta}$. Так как оператор C коммутирует с сужением этого представления на диагональную подгруппу $H_1 \equiv \{A \in SU(1,1) : A_{12} = A_{21} = 0\}$, то оператор C также диагонален в базисе $\{e_\nu\}$. Для его собственных значений c_ν получаем соотношение

$$(c_\nu - c_{\nu'}) \langle e_{\nu'} | U_{SU(1,1)}^{\kappa,l,\eta}(A) e_\nu \rangle_{SU(1,1)}^{\kappa,l,\eta} = 0$$

для любого $A \in SU(1,1)$. Матричные элементы будут явно вычислены в разд. 2.3. Забегая вперед, отметим, что они, вообще говоря, отличны от нуля для любых ν и ν' . Следовательно, оператор C кратен единичному.

Представления с параметрами, указанными в формуле (1.3.43), являются представителями всех классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений группы $SU(1,1)$; иными словами, любое неприводимое унитарное представление группы $SU(1,1)$ эквивалентно одному из них. Подробное доказательство этого утверждения можно найти, например, в работе Такахаси [16].

Для дальнейшего удобно рассмотреть еще одну реализацию представлений дискретной серии. С этой целью совершим аналитическое продолжение элементов подмножества $\mathcal{F}_+^{\kappa,l}$ внутрь единичного круга $\{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$, сопоставляя элементу $f = \sum_{l+\kappa+1}^{\infty} f_\nu e_\nu$, $f \in \mathcal{F}_+^{\kappa,l}$, функцию $f' = \sum_{l+\kappa+1}^{\infty} f_\nu e'_\nu$, где $e'_\nu(z) \equiv z^\nu$. Вводя в полученное пространство скалярное произведение

$$\langle f' | g' \rangle_{SU(1,1)}^{\kappa,l,+} \equiv \int_{|z| < 1} d\mu^{\kappa,l}(z) f'(z)^* g'(z),$$

$$\langle e'_{\nu'} | e'_\nu \rangle_{SU(1,1)}^{\kappa,l,+} = \delta_{\nu\nu'} \frac{(\nu - l - \kappa - 1)!}{(\nu + l)!} \langle e_{\nu'} | e_\nu \rangle_{SU(1,1)}^{\kappa,l,+}, \quad (1.3.44)$$

$$d\mu^{\kappa,l}(z) \equiv \frac{dx dy (1 - |z|^2)^{2l+\kappa}}{\pi (2l + \kappa)! |z|^{2l+2\kappa+2}}, \quad z = x + iy,$$

мы приходим к гильбертову пространству $\mathfrak{H}_{SU(1,1)}^{\kappa,l,+}$, содержащему функции, голоморфные внутри единичного круга и

имеющие нуль порядка $l + \kappa + 1$ или более высокого в начале координат. Изоморфизм гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +}$ и $\mathfrak{H}_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +}$ осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +} \ni f &= \sum_{l+\kappa+1}^{\infty} f_v e_v \rightarrow f' = \sum_{l+\kappa+1}^{\infty} f_v e'_v \in \mathfrak{H}_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +}, \\ \mathfrak{H}_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +} \ni f' &\rightarrow f : f(\omega) = \lim_{z \rightarrow \omega} f'(z) \in \mathfrak{H}_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +}. \end{aligned} \quad (1.3.45)$$

Преобразование $z \rightarrow z\bar{A} = (zA_{11} + A_{21})/(zA_{12} + A_{22})$, принадлежащее группе $SU(1,1)$, внутри единичного круга можно рассматривать теперь как аналитическое продолжение соответствующей операции $\omega \rightarrow \omega\bar{A}$ на границе круга. Поскольку l — целое число, представление (1.3.40) можно записать в виде

$$(U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +}(A)f)(\omega) = (\omega A_{12} + A_{22})^{-l-1} (\omega^{-1} A_{21} + A_{11})^{-l-\kappa-1} f(\omega\bar{A}),$$

так что его можно аналитически продолжить внутрь единичного круга и получить представление

$$\begin{aligned} (U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +}(A)f')(z) &= \\ &= (zA_{12} + A_{22})^{-l-1} (z^{-1}A_{21} + A_{11})^{-l-\kappa-1} f'(z\bar{A}) \end{aligned} \quad (1.3.46)$$

в пространстве $\mathfrak{H}_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +}$. В силу формул (1.3.45) и (1.3.44) это представление унитарно эквивалентно представлению $U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +}$. Аналогичным образом можно реализовать $U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, -}$ путем аналитического продолжения вовне единичного круга. Мы, однако, воспользуемся другим способом, преобразовав прежде представление $U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, -}$ с помощью унитарного отображения

$$L_{\kappa}: \mathfrak{H}_{SU(1,1)}^{\kappa, l, -} \rightarrow \mathfrak{H}_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +}, \quad (L_{\kappa}f)(\omega) \equiv \omega^{\kappa} f(\omega^{-1}) \quad (1.3.47)$$

на представление

$$L_{\kappa} U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, -} L_{\kappa}^{-1} = U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +}, \quad U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +}(A) \equiv U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +}(A^*). \quad (1.3.48)$$

Теперь это представление можно продолжить внутрь единичного круга, и мы получим

$$U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, -} = U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +}, \quad U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +}(A) \equiv U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +}(A^*). \quad (1.3.49)$$

Отметим также антиунитарную эквивалентность представлений $U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +}$ и $U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, -}$. Используя антиунитарный оператор

$$K'_{\kappa}: \mathfrak{H}_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +} \rightarrow \mathfrak{H}_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +}, \quad (K'_{\kappa}f)(z) \equiv f(z^*)^*, \quad K'^2_{\kappa} = I_{\mathfrak{H}_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +}}, \quad (1.3.50)$$

мы получим

$$K'_\kappa U'^{\kappa, l, +}_{SU(1, 1)}(A) K'_\kappa = U'^{\kappa, l, +}_{SU(1, 1)}(A^*) = U'^{\kappa, l, -}_{SU(1, 1)}(A). \quad (1.3.51)$$

Заметим в заключение, что ядро, отвечающее единичному оператору в пространстве $\mathfrak{H}'_{SU(1, 1)}{}^{\kappa, l, +}$, имеет вид

$$\begin{aligned} K^{\kappa, l, +}(z', z) &\equiv \sum_{l+\kappa+1} \frac{(v+l)!}{(v-l-\kappa-1)!} e'_v(z') e'_v(z)^* = \\ &= \frac{(2l+\kappa+1)! (z'z^*)^{l+\kappa+1}}{(1-z'z^*)^{2l+\kappa+2}}. \end{aligned} \quad (1.3.52)$$

1.4. НЕПРИВОДИМЫЕ УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $E(2)$

Обозначим элементы группы $E(2)$ следующим образом:

$$E(2) \ni (e^{i\varphi/2}, z) = A, \quad e^{i\varphi/2} \equiv A_{11} = A_{22}^*, \quad z = A_{11}A_{12}. \quad (1.4.1)$$

Одновременно это задает параметризацию группы $E(2)$, причем

$$0 \leq \varphi < 4\pi, \quad z \in \mathbf{C}. \quad (1.4.2)$$

Закон композиции в группе $E(2)$ имеет вид

$$(e^{i\varphi/2}, z)(e^{i\varphi'/2}, z') = (e^{i(\varphi+\varphi')/2}, z + e^{i\varphi}z'), \quad (1.4.3)$$

так что группа $E(2)$ изоморфна полупрямому произведению группы вращений плоскости $SO(2)$ на аддитивную группу комплексных чисел \mathbf{C} , $SO(2) \otimes \mathbf{C}$, с d -операцией: $SO(2) \rightarrow \text{Aut } \mathbf{C}$, $d_\varphi(z) \equiv e^{i\varphi}z$. Поэтому все неприводимые унитарные представления группы $E(2)$ можно получить тем же методом, который был описан в разд. 1.1 для самой группы Пуанкаре.

I. Характеры абелевой инвариантной подгруппы $(1, \mathbf{C}) \subset E(2)$ равны

$$(1, z) \rightarrow \chi^\xi(z) = e^{i \text{Re}(\xi^*z)}, \quad \xi \in \mathbf{C}, \quad (1.4.4)$$

т. е. группа характеров совпадает с аддитивной группой \mathbf{C} .

II. Орбиты группы $SO(2)$ в группе характеров \mathbf{C} являются окружностями с центром в начале координат, $\omega(\xi) = SO(2)\xi$, так как $\chi^\xi(e^{-i\varphi}z) = \chi^\xi \exp(i\varphi)(z)$.

III. Разбиение группы \mathbf{C} на орбиты характеризуется следующим множеством представителей:

$$\mathbf{C} = \bigcup_{\rho \in \omega} \omega(\rho), \quad \omega = \omega^+ \cup \omega^0, \quad \omega^+ = \{\rho: \rho > 0\}, \quad \omega^0 = \{0\}. \quad (1.4.5)$$

IV. Малая группа $G(\rho)$ (где $\rho \in \omega$) определяется из условия $\chi^\rho(e^{-i\varphi}z) = \chi^\rho(z)$ для любых $e^{i/2 i\varphi} \in G(\rho)$ и $z \in \mathbf{C}$. В результате

$$\begin{aligned} \rho \in \omega^+ : G(\rho) &= \mathbf{Z}_2 \equiv \{1, -1\}, \\ \rho \in \omega^0 : G(\rho) &= G(0) = SO(2). \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

V. Левые классы смежности, $SO(2)/G(\rho)$, отвечающие $\xi \in \omega(\rho)$, $\rho > 0$, представляются величиной $\exp(i\varphi_\xi/2)$, где $\varphi_\xi \equiv \arg \xi$, $0 \leq \varphi_\xi < 2\pi$, так как очевидно $d_{\varphi_\xi}(\rho) = \xi$. Случай $\rho = 0$ тривиален.

VI. Неприводимые унитарные представления группы \mathbf{Z}_2 имеют вид

$$\mathbf{Z}_2 \ni \varepsilon \rightarrow U_{\mathbf{Z}_2}^\kappa(\varepsilon) = \varepsilon^\kappa, \quad \kappa = 0, 1. \quad (1.4.7)$$

Группа $G(0) \equiv SO(2)$ имеет представления

$$\begin{aligned} SO(2) \ni e^{i\varphi/2} &\rightarrow U_{SO(2)}^{\kappa, \mu}(e^{i\varphi/2}) = e^{i(\mu + \kappa/2)\varphi}, \\ \kappa &= 0, 1; \quad \mu = 0, \pm 1, \dots \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

VII. Таким образом, для группы $\check{G}(\rho) \equiv G(\rho) \oplus \mathbf{C} \subset E(2)$ мы получаем представления

$$\begin{aligned} \rho \in \omega^+ : \check{G}(\rho) \ni (\varepsilon, z) &\rightarrow U_{\check{G}(\rho)}^{0, \kappa}(\varepsilon, z) = \varepsilon^\kappa \chi^\rho(z), \quad \kappa = 0, 1, \\ \rho \in \omega^0 : \check{G}(0) \ni (e^{i\varphi/2}, z) &\rightarrow U_{\check{G}(0)}^{0, \kappa, \mu}(e^{i\varphi/2}, z) = e^{i(\mu + \kappa/2)\varphi}, \\ \kappa &= 0, 1; \quad \mu = 0, \pm 1, \dots \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

VIII. При $\rho > 0$ вводим гильбертово пространство

$$\mathfrak{H}_{E(2)}^{0, \kappa} \equiv \bigoplus \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{d\varphi}{2\pi}} \mathfrak{H}_{G(\rho)}^\kappa(\rho e^{i\varphi}) \quad (1.4.10)$$

как прямой интеграл одномерных гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_{G(\rho)}^\kappa(\xi) \equiv \mathbf{C}$. Скалярное произведение в этом пространстве есть

$$\langle f | g \rangle_{E(2)}^{0, \kappa} \equiv \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} f(\rho e^{i\varphi})^* g(\rho e^{i\varphi}). \quad (1.4.11)$$

При $\rho = 0$ интеграл отсутствует, так как $\omega(0)$ состоит из одной точки.

IX. Для $\rho > 0$ индуцированные представления группы $E(2)$ имеют вид

$$(\overline{U}_{E(2)}^{\rho, \kappa}(e^{i\varphi/2}, z)f)(\xi) = \varepsilon(\xi, \varphi)^\kappa e^{i \operatorname{Re}(\xi^* z)} f(e^{-i\varphi}\xi),$$

$$\kappa = 0, 1; \quad |\xi| = \rho;$$

$$\varepsilon(\xi, \varphi) = \begin{cases} +1, & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \varphi_\xi \text{ и } 2\pi + \varphi_\xi < \varphi < 4\pi, \\ -1, & \text{при } \varphi_\xi < \varphi \leq \varphi_\xi + 2\pi, \end{cases} \quad (1.4.12)$$

а при $\rho = 0$

$$U_{E(2)}^{\rho, \kappa, \mu}(e^{i\varphi/2}, z) = e^{i(\mu + \kappa/2)\varphi}, \quad \kappa = 0, 1; \quad \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.4.13)$$

Для описания безмассовых частиц обычно используют одномерные представления второго типа. При этом представление абелевой инвариантной подгруппы $(1, \mathbf{C}) \subset E(2)$ тривиально.

Не очень удобная форма представления $\overline{U}_{E(2)}^{\rho, \kappa}$ в формуле (1.4.12) может быть исправлена с помощью унитарного преобразования

$$\tau^\kappa: f \rightarrow \tau^\kappa f, \quad (\tau^\kappa f)(\xi) \equiv e^{i\kappa\varphi_\xi/2} f(\xi) \quad (1.4.14)$$

в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_{E(2)}^{\rho, \kappa}$. Представление

$$U_{E(2)}^{\rho, \kappa} \equiv \tau^\kappa \overline{U}_{E(2)}^{\rho, \kappa} \tau^{\kappa^\dagger}, \quad (1.4.15)$$

эквивалентное представлению $\overline{U}_{E(2)}^{\rho, \kappa}$, имеет явный вид

$$(U_{E(2)}^{\rho, \kappa}(e^{i\varphi/2}, z)f)(\xi) = \exp\left[\frac{i\kappa\varphi}{2} + i \operatorname{Re}(\xi^* z)\right] f(e^{-i\varphi}\xi),$$

$$\kappa = 0, 1; \quad |\xi| = \rho. \quad (1.4.16)$$

1.5. НЕПРИВОДИМЫЕ УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $SL(2, \mathbf{C})$

Неприводимые унитарные представления группы $SL(2, \mathbf{C})$ были впервые установлены Гельфандом и Наймарком [17]. Кратко опишем теорию представлений группы $SL(2, \mathbf{C})$; детали можно найти в монографии Наймарка [18].

Определим преобразование из группы $SL(2, \mathbf{C})$ в замкнутой комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$ следующим образом:

$$SL(2, \mathbf{C}) \ni A: z \rightarrow z\overline{A} \equiv \frac{zA_{11} + A_{21}}{zA_{12} + A_{22}}, \quad z \in \overline{\mathbf{C}}. \quad (1.5.1)$$

Квазиинвариантная мера в пространстве $\overline{\mathbf{C}}$ имеет вид (с точностью до эквивалентности)

$$d\mu(z) \equiv \pi^{-1}(1 + |z|^2)^{-2} dx dy, \quad z = x + iy, \quad (1.5.2)$$

и производная Радона — Никодима равна

$$\frac{d\mu(z\bar{A})}{d\mu(z)} = |zA_{12} + A_{22}|^{-4} \left(\frac{1 + |z|^2}{1 + |z\bar{A}|^2} \right)^2. \quad (1.5.3)$$

Неприводимые унитарные представления группы $SL(2, \mathbf{C})$ могут быть реализованы в пространстве комплексных функций на $\bar{\mathbf{C}}$ (см. [18]). Они имеют вид

$$(U_{SL(2, \mathbf{C})}^{\kappa, \lambda, \mu}(A)f)(z) = \sqrt{d\mu(z\bar{A})/d\mu(z)}^{1+i\lambda} \left(\frac{zA_{12} + A_{22}}{|zA_{12} + A_{22}|} \right)^{2\mu+\kappa} f(z\bar{A}), \quad (1.5.4)$$

$$\kappa \in \{0, 1\}; \mu \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}; \lambda \in \mathbf{R} \cup \{-it; 0 < t < 1\}.$$

Существуют следующие серии представлений:

1. **Основная серия.** Она состоит из представлений $U_{SL(2, \mathbf{C})}^{\kappa, \lambda, \mu}$ с $\lambda \in \mathbf{R}$, реализуемых в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_{SL(2, \mathbf{C})}^{\kappa, \lambda, \mu} \equiv \mathfrak{H}$ со скалярным произведением

$$\langle f | g \rangle_{SL(2, \mathbf{C})}^{\kappa, \lambda, \mu} \equiv \int_{\bar{\mathbf{C}}} d\mu(z) f(z)^* g(z). \quad (1.5.5)$$

2. **Дополнительная серия.** Она состоит из представлений $U_{SL(2, \mathbf{C})}^{0, \lambda, 0}$ с $\lambda = -it$, $0 < t < 1$, реализуемых в гильбертовых пространствах $\mathfrak{H}_{SL(2, \mathbf{C})}^{0, \lambda, 0}$ со скалярными произведениями

$$\langle f | g \rangle_{SL(2, \mathbf{C})}^{0, \lambda, 0} \equiv \int_{\bar{\mathbf{C}}} \int_{\bar{\mathbf{C}}} d\mu(z') d\mu(z) f(z')^* K_{\lambda}(z', z) g(z), \quad (1.5.6)$$

$$\Gamma(i\lambda) K_{\lambda}(z', z) \equiv \left(\frac{|z' - z|^2}{(1 + |z'|^2)(1 + |z|^2)} \right)^{-1+i\lambda}.$$

Представления $U_{SL(2, \mathbf{C})}^{\kappa', \lambda', \mu'}$ и $U_{SL(2, \mathbf{C})}^{\kappa, \lambda, \mu}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $(\kappa', \lambda', \mu') = (\kappa, \lambda, \mu)$ или $(\kappa', \lambda', \mu') = (\kappa, -\lambda, -\mu - \kappa)$.

Известные конечномерные неунитарные представления группы $SL(2, \mathbf{C})$ могут быть реализованы в линейных пространствах

$$L^{j_1, j_2} \equiv \left\{ f: \bar{\mathbf{C}} \rightarrow \mathbf{C}: f(z) = (1 + |z|^2)^{-j_1 - j_2} \sum_{n=0}^{2j_1} \times \right. \\ \left. \times \sum_{n=0}^{2j_2} a_{n'n} z^{n'} z^{*n}, a_{n'n} \in \mathbf{C} \right\}, j_1, j_2 = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$$

Они имеют вид, указанный в формуле (1.5.4) при $\lambda = -i(1 + j_1 + j_2)$ и $\mu + 1/2\kappa = j_1 - j_2$.

2. Матричные элементы неприводимых унитарных представлений малых групп и теоремы разложения для квадратично интегрируемых функций на классах смежности малых групп

В этой главе будут выведены необходимые для гл. 3 теоремы разложения для квадратично интегрируемых функций на некоторых классах смежности малых групп. Эти классы смежности определяются подгруппами

$$H_1 \equiv SU(2) \cap SU(1, 1) = SU(2) \cap E(2) = E(2) \cap SU(1, 1),$$

$$H_2 \equiv SU(1, 1) \cap SL(2, \mathbf{R}). \quad (2.1)$$

Прежде всего мы решим проблему редукции для сужения представления малой группы U_G^0 , $G \equiv \{G(\dot{\rho}) : \dot{\rho} \in \Omega, H \subset G(\dot{\rho})\}$ на подгруппу H , $H \equiv \{H_1, H_2\}$, где ρ — параметр, пробегающий множество G всех классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений группы G . Так как все обсуждаемые здесь группы — группы типа I (по классификации Макки [10]), то проблема редукции имеет единственное решение, т. е. существует такое унитарное преобразование \check{A} , которое переводит сужение $U_G^0|_H$ в прямой интеграл неприводимых унитарных представлений χ^σ группы H :

$$\check{A} \mathfrak{H}_G^0 = \bigoplus_{\hat{H}} \int \sqrt{d\check{v}_\rho(\sigma)} \mathfrak{H}_G^0{}^\sigma, \quad \check{A} U_G^0|_H \check{A}^{-1} = \bigoplus_{\hat{H}} \int d\check{v}_\rho(\sigma) \chi^\sigma. \quad (2.2)$$

Здесь σ — параметр, пробегающий множество \hat{H} классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений группы H , \check{v}_ρ — мера на группе H , определяемая этим разложением, $\mathfrak{H}_G^0{}^\sigma$ — компонента пространства представлений $\check{A} \mathfrak{H}_G^0$, на которой действует представление χ^σ . Пусть

$$\{\Psi_{\tau\sigma}^\rho : \tau = 1, 2, \dots, \dim \mathfrak{H}_G^0{}^\sigma\}, \quad \langle \Psi_{\tau'\sigma'}^\rho | \Psi_{\tau\sigma}^\rho \rangle_{\mathfrak{H}_G^0{}^\sigma} = \delta_{\tau'\tau}, \quad (2.3)$$

— ортонормированный базис в пространстве $\mathfrak{H}_G^{\rho, \sigma}$. Тогда для $f \in \mathfrak{H}_G^{\rho}$ мы имеем разложение

$$\check{A}f = \bigoplus_{\check{H}} \int \sqrt{d\check{v}_{\rho}(\sigma)} \sum_{\tau} \Psi_{\tau\sigma}^{\rho} f_{\tau\sigma}. \quad (2.4)$$

Матричными элементами представления U_G^{ρ} относительно базиса, отвечающего подгруппе H , мы называем обобщенные интегральные ядра $U_G^{\rho}(A)_{\tau'\sigma', \tau\sigma}$, которые определены формулой

$$(U_G^{\rho}(A)f)_{\tau'\sigma'} = \int_{\check{H}} d\check{v}_{\rho}(\sigma) \sum_{\tau} U_G^{\rho}(A)_{\tau'\sigma', \tau\sigma} f_{\tau\sigma}. \quad (2.5)$$

(Для компактной группы H_1 прямые интегралы сводятся к прямым суммам, а матричные элементы существуют в обычном смысле.) Эти матричные элементы будут вычислены в разд. 2.2—2.5. В некотором обобщенном смысле они являются полными ортонормированными базисами в гильбертовых пространствах квадратично интегрируемых функций на малых группах. Это показано в разд. 2.6. В разд. 2.7 мы используем эти базисы для обобщенного фурье-анализа квадратично интегрируемых функций в пространствах классов смежности G/H .

Матричные элементы представлений группы $SU(2)$ в базисе, связанном с H_1 , — это элементы матрицы представлений группы вращений, хорошо известные в квантовой механике. Матричные элементы представлений группы $SU(1, 1)$ в базисе H_1 были вычислены впервые Баргманом [13]. Решение проблемы редукции для сужения представлений группы $SU(1, 1)$ на подгруппу H_2 посредством алгебры Ли дано в работе Мукунда [19]. Этот результат подтверждает высказанное Баргманом [13] утверждение относительно кратности спектров генераторов однопараметрических подгрупп группы $SU(1, 1)$. В разд. 2.5 мы даем глобальное решение проблемы редукции для сужения $U_{SU(1, 1)}^{\rho}|_{H_2}$ и вычисляем соответствующие обобщенные матричные элементы. Некоторые из них были вычислены ранее Виленкиным [20] и использованы при выводе формул для гипергеометрических функций ${}_2F_1$. Формула Планшереля для квадратично интегрируемых функций на группе $SU(2)$ содержится в знаменитой теореме Петера — Вейля для компактных групп Ли. Для некомпактной группы $SU(1, 1)$ эта формула была впервые явно доказана в работе Хариш-Чандра [21]. Представления, необходимые для этого разложения, были найдены ранее Баргманом [13]. В разд. 2.6 дано другое доказательство, использующее аналитические свойства матричных элементов,

которые представляют особый интерес для S-матричной теории элементарных частиц. Этот подход дает возможность одновременно рассматривать представления групп $SU(2)$ и $SU(1, 1)$. Использование матричных элементов группы $SU(2)$ для разложения квадратично интегрируемых функций на сфере отмечалось в работе Гельфанда, Минлоса и Шапиро [22]. Что касается установленных в разд. 2.7 теорем разложения для квадратично интегрируемых функций на однородных пространствах G/H , то другие литературные источники нам не известны.

2.1. НЕПРИВОДИМЫЕ УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП $H_1 = SU(2) \cap SU(1, 1)$ И $H_2 = SU(1, 1) \cap SL(2, \mathbf{R})$

Пересечением групп $G(e_{(0)}) = SU(2)$, $G(e_{(0)} + e_{(3)}) = E(2)$ и $G(e_{(3)}) = SU(1, 1)$ является группа

$$H_1 \equiv \left\{ C(\varphi) \equiv \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} : 0 \leq \varphi < 4\pi \right\}. \quad (2.1.1)$$

Очевидно, она изоморфна группе вращений евклидовой плоскости $SO(2)$. Ее неприводимые унитарные представления имеют вид

$$C(\varphi) \rightarrow U^{\kappa, \mu}(C(\varphi)) \equiv \chi^{\kappa, \mu}(\varphi) = e^{i(\mu + \kappa/2)\varphi}, \quad (2.1.2)$$

$$\kappa = 0, 1; \quad \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Они удовлетворяют условиям ортогональности и полноты:

$$\int_0^{4\pi} \frac{d\varphi}{4\pi} \chi^{\kappa', \mu'}(-\varphi) \chi^{\kappa, \mu}(\varphi) = \delta_{\kappa', \kappa} \delta_{\mu', \mu}, \quad (2.1.3)$$

$$\sum_{\kappa=0, 1} \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \chi^{\kappa, \mu}(\varphi) \chi^{\kappa, \mu}(-\varphi') = 4\pi \delta(\varphi - \varphi'). \quad (2.1.4)$$

Группы $G(e_{(2)}) = SL(2, \mathbf{R})$ и $G(e_{(3)}) = SU(1, 1)$ пересекаются на группе H_2 :

$$H_2 \equiv \left\{ D(\varepsilon, \xi) \equiv \varepsilon \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \xi/2 & \operatorname{sh} \xi/2 \\ \operatorname{sh} \xi/2 & \operatorname{ch} \xi/2 \end{pmatrix} : \varepsilon = \pm 1, \quad -\infty < \xi < \infty \right\}. \quad (2.1.5)$$

В силу закона композиции

$$D(\varepsilon', \xi') D(\varepsilon, \xi) = D(\varepsilon' \varepsilon, \xi' + \xi) \quad (2.1.6)$$

группа H_2 изоморфна прямому произведению циклической группы второго порядка Z_2 на аддитивную группу вещественных чисел $\mathbf{R} : Z_2 \otimes \mathbf{R}$. Неприводимые унитарные представления группы H_2 имеют вид

$$D(\varepsilon, \xi) \rightarrow U^{\kappa, \lambda}(D(\varepsilon, \xi)) \equiv \chi^{\kappa, \lambda}(\varepsilon, \xi) = \varepsilon^\kappa e^{i\lambda\xi}, \quad (2.1.7)$$

$$\kappa = 0, 1; \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

Они удовлетворяют условиям ортогональности и полноты:

$$\frac{1}{2} \sum_{\varepsilon=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{2\pi} \chi^{\kappa', \lambda'}(\varepsilon, -\xi) \chi^{\kappa, \lambda}(\varepsilon, \xi) = \delta_{\kappa'\kappa} \delta(\lambda' - \lambda) \quad (2.1.8)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\kappa=0, 1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{2\pi} \chi^{\kappa, \lambda}(\varepsilon, \xi) \chi^{\kappa, \lambda}(\varepsilon', -\xi') = \delta_{\varepsilon'\varepsilon} \delta(\xi' - \xi). \quad (2.1.9)$$

2.2. МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ НЕПРИВОДИМЫХ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ $SU(2)$ В БАЗИСЕ, СВЯЗАННОМ С ПОДГРУППОЙ H_1

Ортонормированный базис в пространстве $\mathfrak{F}_{SU(2)}^{\kappa, l}$ имеет вид

$$\left\{ \psi_\mu^{\kappa, l} : -l - \kappa \leq \mu \leq l, \psi_\mu^{\kappa, l}(z_1, z_2) \equiv \frac{z_1^{l+\kappa+\mu} z_2^{l-\mu}}{[(l+\kappa+\mu)! (l-\mu)!]^{1/2}} \right\}, \quad (2.2.1)$$

$$\langle \psi_{\mu'}^{\kappa, l} | \psi_\mu^{\kappa, l} \rangle_{SU(2)} = \delta_{\mu'\mu}.$$

Из формул (1.2.2) и (1.2.3) получаем

$$U_{SU(2)}^{\kappa, l}(C(\varphi)) \psi_\mu^{\kappa, l} = \chi^{\kappa, \mu}(\varphi) \psi_\mu^{\kappa, l}, \quad (2.2.2)$$

т. е. определение (2.2.1) дает базис, отвечающий группе H_1 . Неприводимое унитарное представление $\chi^{\kappa', \mu}$ группы H_1 содержится в представлении $U_{SU(2)}^{\kappa, l}$ только один раз и притом при условии, что $\kappa' = \kappa$ и $-l - \kappa \leq \mu \leq l$.

Матричные элементы представления $U_{SU(2)}^{\kappa, l}$ в указанном базисе получаются с помощью биномиального разложения из

формулы

$$\begin{aligned}
 (U_{SU(2)}^{\kappa, l}(A) \psi_{\mu}^{\kappa, l})(z_1, z_2) &= \\
 &= \frac{(z_1 A_{11} + z_2 A_{21})^{l+\kappa+\mu} (z_1 A_{12} + z_2 A_{22})^{l-\mu}}{[(l+\kappa+\mu)!(l-\mu)!]^{1/2}} = \\
 &= \sum_{\mu'=-l-\kappa}^l \psi_{\mu'}^{\kappa, l}(z_1, z_2) U_{SU(2)}^{\kappa, l}(A)_{\mu', \mu}; \\
 U_{SU(2)}^{\kappa, l}(A)_{\mu', \mu} &\equiv \langle \psi_{\mu'}^{\kappa, l} | U_{SU(2)}^{\kappa, l}(A) \psi_{\mu}^{\kappa, l} \rangle_{SU(2)}.
 \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

В результате

$$\begin{aligned}
 U_{SU(2)}^{\kappa, l}(A)_{\mu', \mu} &= (A_{11}/A_{11})^{\mu'+\mu+\kappa} (A_{12}/|A_{12}|)^{\mu'-\mu} \tilde{u}_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(|A_{12}|^2), \\
 \tilde{u}_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(x) &\equiv \\
 &\equiv \sqrt{\frac{\Gamma(1+l+\mu'+\kappa)\Gamma(1+l-\mu)}{\Gamma(1+l+\mu+\kappa)\Gamma(1+l-\mu')}} x^{(\mu'-\mu)/2} (1-x)^{(\mu'+\mu+\kappa)/2} \times \\
 &\times \frac{1}{\Gamma(\mu'-\mu+1)} {}_2F_1(\mu'-l, \mu'+l+\kappa+1; \mu'-\mu+1; x), \\
 &0 \leq x \leq 1.
 \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Здесь гипергеометрическая функция ${}_2F_1$ сводится к полиному, так как $\mu'-l$ — неположительное целое число. Имея в виду аналитическое продолжение матричных элементов $U_{SU(2)}^{\kappa, l}(A)_{\mu', \mu}$, которое обсуждается в разд. 2.6, перепишем формулу (2.2.4) в несколько измененном виде:

$$U_{SU(2)}^{\kappa, l}(A)_{\mu', \mu} = (A_{11}/A_{22})^{(\mu'+\mu+\kappa)/2} (A_{12}/A_{21})^{(\mu'-\mu)/2} \tilde{u}_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(-A_{12}A_{21}), \tag{2.2.5}$$

где $\tilde{u}_{\mu', \mu}^{\kappa, l}$ — однозначная аналитическая функция, заданная в комплексной плоскости z с разрезом вдоль вещественной оси от 0 до $+\infty$ и вещественная на отрицательной полуоси:

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(z) &\equiv \\
 &\equiv \sqrt{\frac{\Gamma(1+l+\mu'+\kappa)\Gamma(1+l-\mu)}{\Gamma(1+l+\mu+\kappa)\Gamma(1+l-\mu')}} (-z)^{(\mu'-\mu)/2} (1-z)^{(\mu'+\mu+\kappa)/2} \times \\
 &\times \frac{1}{\Gamma(\mu'-\mu+1)} {}_2F_1(\mu'-l, \mu'+l+\kappa+1; \mu'-\mu+1; z).
 \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Для функции

$$\tilde{u}'_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(z) \equiv \exp\{i\pi \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z) (\mu' - \mu)/2\} \tilde{u}_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(z), \tag{2.2.7}$$

очевидно, имеем равенство

$$\tilde{u}_{\mu}^{\chi, l}(x \pm i0) = \tilde{u}_{\mu}^{\chi, l}(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

и потому формула (2.2.5) при $A_{21} = A_{12}^* e^{\pm i\pi}$ совпадает с (2.2.4).

Чтобы вывести соотношения симметрии для матричных элементов (2.2.5), рассмотрим линейный оператор T_{χ} и антилинейный оператор K_{χ} в пространстве $\mathfrak{S}_{SU(2)}^{\chi, l}$:

$$\begin{aligned} (T_{\chi}f)(z_1, z_2) &= f(-z_2, z_1), & (K_{\chi}f)(z_1, z_2) &= f(-z_2^*, z_1^*)^*, \\ T_{\chi}\psi_{\mu}^{\chi, l} &= (-1)^{l+\mu+\chi} \psi_{-\mu-\chi}^{\chi, l} = K_{\chi}\psi_{\mu}^{\chi, l}. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Они удовлетворяют соотношению

$$T_{\chi}^2 = (-1)^{\chi} \mathbf{I}_{\mathfrak{S}_{SU(2)}^{\chi, l}} = K_{\chi}^2. \quad (2.2.9)$$

Оператор T_{χ} связывает представление $U_{SU(2)}^{\chi, l}$ с представлением, ему контраградиентным, а оператор K_{χ} коммутирует с этим представлением:

$$T_{\chi} U_{SU(2)}^{\chi, l}(A) T_{\chi}^{-1} = U_{SU(2)}^{\chi, l}(A^{-1T}), \quad K_{\chi} U_{SU(2)}^{\chi, l}(A) K_{\chi}^{-1} = U_{SU(2)}^{\chi, l}(A). \quad (2.2.10)$$

Отсюда следуют соотношения симметрии для матричных элементов вида (2.2.5):

$$\begin{aligned} U_{SU(2)}^{\chi, l}(A^{-1T})_{\mu'\mu} &= \\ &= (-1)^{\mu'-\mu} U_{SU(2)}^{\chi, l}(A)_{-\mu'-\chi, -\mu-\chi} = U_{SU(2)}^{\chi, l}(A^{\dagger})_{\mu\mu'}, \quad (2.2.11) \\ \tilde{u}_{\mu'}^{\chi, l}(z) &= \tilde{u}_{-\mu'-\chi, -\mu-\chi}^{\chi, l}(z) = \tilde{u}_{\mu\mu'}^{\chi, l}(z). \end{aligned}$$

Разумеется, эти соотношения могут быть получены также из таблицы формул для гипергеометрических функций. Приведенный здесь вывод является примером допускающего богатые обобщения метода обратного подхода: вывода формул для специальных функций из теории представлений групп.

2.3. МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ НЕПРИВОДИМЫХ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ $SU(1, 1)$ В БАЗИСЕ, СВЯЗАННОМ С ПОДГРУППОЙ H_1

Согласно формуле (1.3.8), в базисе $\{e_{\nu}\}$ в пространстве \mathcal{F} имеем

$$(V^{\chi, l}(C(\varphi))e_{\nu})(\omega) = \chi^{\chi, \nu-\chi}(\varphi) e_{\nu}(\omega). \quad (2.3.1)$$

Для унитарных неприводимых представлений $U_{SU(1, 1)}^{\chi, l, \eta}$, получаемых из $V^{\chi, l}$, отсюда очевидно следует, что представление $\chi^{\chi, \mu}$

группы H_1 содержится ровно один раз в представлении $U_{SU}^{\kappa, l, \eta}(1, 1)$, если $\kappa' = \kappa$ и если вектор $e_{\mu+\kappa}$ содержится в пространстве $\mathfrak{H}_{SU}^{\kappa, l, \eta}(1, 1)$. Таким образом, $\{e_\nu\}$ есть базис, принадлежащий группе H_1 . Однако в силу формул (1.3.36) — (1.3.41) элементы базиса e_ν имеют различную нормировку в разных гильбертовых пространствах. Эта нормировка может быть записана в виде (кроме единичного представления)

$$\langle e_{\nu'} | e_\nu \rangle_{SU(1,1)}^{\kappa, l, \eta} = \sigma_{\nu'\nu} \left| \frac{\Gamma(\nu - l - \kappa)}{\Gamma(\nu + l + 1)} \right|. \quad (2.3.2)$$

Поэтому в дальнейшем мы будем использовать ортонормированные базисы в гильбертовых пространствах представлений:

$$\left\{ \psi_\mu^{\kappa, l, \eta} = N_\mu^{\kappa, l} e_{\mu+\kappa} : \mu = \begin{cases} 0, \pm 1, \pm 2, \dots & \text{при } \eta = 0, \\ +1, +2, \dots & \text{при } \eta = +, \\ -1, -2, \dots & \text{при } \eta = -; \end{cases} \right. \quad (2.3.3)$$

$$|N_\mu^{\kappa, l}|^2 = \left| \frac{\Gamma(\mu + l + \kappa + 1)}{\Gamma(\mu - l)} \right|, \quad \langle \psi_\mu^{\kappa, l, \eta} | \psi_\mu^{\kappa, l, \eta} \rangle_{SU(1,1)}^{\kappa, l, \eta} = \delta_{\mu\mu}.$$

Нормировочный множитель $N_\mu^{\kappa, l}$ можно считать значением функции

$$N_\mu^{\kappa, l} \equiv \left[\frac{\Gamma(\mu + l + \kappa + 1)}{\Gamma(\mu - l)} \right]^{1/2} \quad (2.3.4)$$

в комплексной плоскости l , взятым в точках, отвечающих унитарным сериям. Функция $\Gamma(\mu + l + \kappa + 1)/\Gamma(\mu - l)$ имеет нули в точках $\mu, \mu + 1, \dots$ и полюсы в точках $-\mu - \kappa - 1, -\mu - \kappa - 2, \dots$. При $\mu \leq -1$ обе последовательности перекрываются и нули и полюсы, лежащие между μ и $-\mu - \kappa - 1$, компенсируются. На вещественной оси знаменатель положителен при $l < \mu$, а числитель положителен при $l > \mu - \kappa - 1$, т. е. в области между нулями и полюсами они имеют разные знаки. В точке $l = -1/2(1 + \kappa)$ функция $\Gamma(\mu + l + \kappa + 1)/\Gamma(\mu - l)$ принимает значение $+1$ при $\mu \geq 0$ и $(-1)^\kappa$ при $-\mu - \kappa \geq 0$. Если принять условие

$$N_\mu^{\kappa, l} \Big|_{l = -(1+\kappa)/2 \pm i0} = \begin{cases} 1 & \text{при } \mu \geq 0, \\ e^{\pm i\pi(\mu + \kappa/2)} & \text{при } \mu < 0, \end{cases} \quad (2.3.5)$$

то функция $N_\mu^{\kappa, l}$ будет однозначна в комплексной плоскости l с разрезом вдоль интервалов вещественной оси, на которых функция $\Gamma(\mu + l + \kappa + 1)/\Gamma(\mu - l)$ отрицательна. Приняв условия вида (2.3.5) для числителя и знаменателя по отдельности,

получим

$$\begin{aligned} [\Gamma(\mu + l + \kappa + 1)]^{1/2} > 0 \quad \text{при } l > -\mu - \kappa - 1, \\ [\Gamma(\mu - l)]^{1/2} > 0 \quad \text{при } l < \mu. \end{aligned}$$

Функция $N_{\mu}^{\kappa, l}$ обладает следующими свойствами симметрии:

$$\begin{aligned} (N_{\mu}^{\kappa, l})^* &= N_{\mu}^{\kappa, l^*}, \quad N_{\mu}^{\kappa, -l-\kappa-1} N_{\mu}^{\kappa, l} = 1, \\ N_{-\mu-\kappa}^{\kappa, l} &= N_{\mu}^{\kappa, l} e^{-i\pi \text{sign}(\text{Im } l)(\mu + \kappa/2)}. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Матричные элементы унитарных серий представлений группы $SU(1, 1)$ в базисе (2.3.3) имеют общий вид:

$$\begin{aligned} U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, \eta}(A)_{\mu\mu} &\equiv \langle \Psi_{\mu}^{\kappa, l, \eta} | U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, \eta}(A) \Psi_{\mu}^{\kappa, l, \eta} \rangle_{SU(1,1)}^{\kappa, l, \eta} = \\ &= N_{\mu}^{\kappa, l} (N_{\mu'}^{\kappa, l})^{-1} V_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(A), \\ V_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(A) &\equiv |N_{\mu'}^{\kappa, l}|^2 \langle e_{\mu'+\kappa} | V_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(A) e_{\mu+\kappa} \rangle_{SU(1,1)}^{\kappa, l, \eta} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\omega}{\omega} e_{\mu'+\kappa}(\omega)^* |\omega A_{12} + A_{22}|^{-2l-\kappa-2} \times \\ &\times \left(\frac{\omega A_{12} + A_{22}}{|\omega A_{12} + A_{22}|} \right)^{\kappa} e_{\mu+\kappa}(\omega \bar{A}). \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Здесь матричные элементы $V_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(A)$ существуют для любого $l \in \mathbf{C}$, так как в силу неравенства

$$0 < |A_{22}| - |A_{12}| \leq |\omega A_{12} + A_{22}| \leq |A_{22}| + |A_{12}|, \quad (2.3.8)$$

справедлива оценка

$$\begin{aligned} |V_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(A)| &\leq \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\omega}{\omega} |\omega A_{12} + A_{22}|^{-2\text{Re } l - \kappa - 2} \leq \\ &\leq (|A_{22}| + |A_{12}|)^{|2\text{Re } l + \kappa + 1}|. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Поэтому мы вычисляем матричные элементы при любом комплексном l . Для этого следует продолжить аналитически функцию $|\omega A_{12} + A_{22}|^{-2l-2\kappa-2}$ в обе стороны от единичного круга $\{\omega \in \mathbf{C}: |\omega| = 1\}$ в кольцо $\{\omega \in \mathbf{C}: |A_{21}/A_{11}| < |\omega| < |A_{22}/A_{12}|\}$. Перепишем эту функцию в виде

$$\begin{aligned} (\omega A_{12} + A_{22})^{-l-\kappa-1} (\omega^{-1} A_{21} + A_{11})^{-l-\kappa-1} &\equiv \\ \equiv \exp[-(l+\kappa+1) \ln(\omega A_{12} + A_{22})] \exp[-(l+\kappa+1) \ln(\omega^{-1} A_{21} + A_{11})], \end{aligned}$$

где \ln — главное значение логарифма. Тогда матричный элемент $V_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(A)$ принимает вид

$$V_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\omega}{\omega} \omega^{\mu - \mu'} (\omega A_{12} + A_{22})^{-l - \kappa - l - \mu} (\omega^{-1} A_{21} + A_{11})^{-l - 1 + \mu}. \quad (2.3.10)$$

Подынтегральная функция однозначна в комплексной плоскости ω с разрезами от 0 до $-A_{21}/A_{11}$ и от $-A_{22}/A_{12}$ до ∞ , если на луче $\{\omega = r A_{21}/A_{11}\}$ фиксировать фазы условием

$$\arg(\omega A_{12} + A_{22}) = \arg A_{22}, \quad \arg(\omega^{-1} A_{21} + A_{11}) = \arg A_{11}.$$

Контур интегрирования охватывает первый разрез. Подставляя

$$t = -A_{12}^{-1} (\omega A_{11} + A_{21})^{-1}, \quad (2.3.11)$$

получаем вместо интеграла (2.3.10) следующее выражение:

$$V_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(A) = A_{11}^{\mu' + \mu + \kappa} A_{12}^{\mu' - \mu} \times \\ \times \frac{-1}{2\pi i} \int_{(1^+, 0^+)} dt (-t)^{l + \kappa + \mu'} (1 - t)^{-l - \kappa - 1 - \mu} (1 + A_{21} A_{12} t)^{l - \mu'}, \quad (2.3.12)$$

где разрезы в плоскости t проведены от $(-A_{12} A_{21})^{-1}$ до $-\infty$ и от 1 до 0. Контур интегрирования $(1^+, 0^+)$ охватывает второй разрез в положительном направлении. Для фаз принимаем

$$\begin{aligned} \arg(-t) = \arg(1 - t) = \arg(1 + A_{12} A_{21} t) = 0 \\ \text{при } (-A_{12} A_{21})^{-1} < t < 0. \end{aligned}$$

Теперь можно показать, что следующий интеграл по двойной петле:

$$\frac{A_{11}^{\mu + \mu' + \kappa} A_{12}^{\mu' - \mu}}{4\pi \sin \pi (\mu' + l + \kappa + 1)} \int_{(1^+, 0^+, 1^-, 0^-)} dt t^{l + \kappa + \mu'} (1 - t)^{-l - \kappa - 1 - \mu} (1 + A_{12} A_{21} t)^{l - \mu'}, \quad (2.3.13)$$

где подынтегральная функция однозначна в плоскости t с разрезами от 0 до $(-A_{12} A_{21})^{-1}$ и от 1 до ∞ и при выборе фаз

$$\arg t = \arg(1 - t) = \arg(1 + A_{12} A_{21} t) = 0 \quad \text{при } 0 < t < 1,$$

совпадает с интегралом (2.3.12), так как сумма показателей при t и $(1 - t)$ в подынтегральной функции равна целому числу. Выражение (2.3.13) имеет вид интегрального представления Похгаммера для гипергеометрической функции $F = {}_2F_1$ (см., например, книгу Бейтмена и Эрдейи [23]). Итак, окончательно

получаем

$$V_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(A) = A_{11}^{\mu'+\mu+\kappa} (-A_{12})^{\mu'-\mu} \frac{\Gamma(\mu'+l+\kappa+1)}{\Gamma(\mu+l+\kappa+1)} \times \\ \times \frac{F(\mu'-l, \mu'+l+\kappa+1; \mu'-\mu+1; -A_{12}A_{21})}{\Gamma(\mu'-\mu+1)}. \quad (2.3.14)$$

В силу (2.3.7) для матричных элементов унитарных представлений имеем

$$U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, \eta}(A)_{\mu'\mu} = \\ = (A_{11}/A_{11})^{\mu'+\mu+\kappa} (A_{12}/A_{12})^{\mu'-\mu} a_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(-|A_{12}|^2) = \\ = (A_{11}/A_{22})^{(\mu'+\mu+\kappa)/2} (A_{12}/A_{21})^{(\mu'-\mu)/2} a_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(-A_{12}A_{21}), \quad (2.3.15)$$

$$a_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(x) = \\ = \left[\frac{\Gamma(\mu'-l)\Gamma(\mu'+l+\kappa+1)}{\Gamma(\mu-l)\Gamma(\mu+l+\kappa+1)} \right]^{1/2} (-1)^{\mu'-\mu} (-x)^{(\mu'-\mu)/2} (1-x)^{(\mu'+\mu+\kappa)/2} \times \\ \times \frac{F(\mu'-l, \mu'+l+\kappa+1; \mu'-\mu+1; x)}{\Gamma(\mu'-\mu+1)}, \quad -\infty < x \leq 0.$$

С целью вывода соотношений симметрии для матричных элементов (2.3.15) рассмотрим линейный оператор T_x и антилинейный оператор K_x , определенные в пространстве \mathcal{F} формулами

$$(T_x f)(\omega) \equiv \omega^x f(-\omega^{-1}), \quad (K_x f)(\omega) \equiv \omega^x f(-\omega)^*, \\ T_x e_\nu = (-1)^\nu e_{x-\nu} = K_x e_\nu. \quad (2.3.16)$$

Они удовлетворяют условиям

$$T_x^2 = (-1)^x \mathbf{I}_{\mathcal{F}} = K_x^2. \quad (2.3.17)$$

Для представлений $V^{\kappa, l}$ группы $SU(1, 1)$ в пространстве \mathcal{F} получаем

$$T_x V^{\kappa, l}(A) T_x^{-1} = V^{\kappa, l}(A^{-1T}), \quad K_x V^{\kappa, l}(A) K_x^{-1} = V^{\kappa, l^*}(A^{-1*}), \quad (2.3.18)$$

откуда с помощью формулы (1.3.32) имеем для матричных элементов

$$V_{-\mu'-\kappa, -\mu-\kappa}^{\kappa, l}(A^{-1T}) = (-1)^{\mu'-\mu} V_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(A) = V_{-\mu-\kappa, -\mu'-\kappa}^{\kappa, -l-\kappa-1}(A^*). \quad (2.3.19)$$

Из формул (2.3.7), (2.3.6) и соотношения эквивалентности (1.3.33) между представлениями $V^{\kappa, l}$ и $V^{\kappa, -l-\kappa-1}$ получаем сначала

только для основной и дополнительной серий свойства симметрии

$$U_{SU(1,1)}^{x,l,0}(A^{-1T})_{\mu'\mu} = U_{SU(1,1)}^{x,l,0}(A)_{-\mu'-x, -\mu-x} = U_{SU(1,1)}^{x,l,0}(A^\dagger)_{\mu\mu'},$$

$$(-1)^{\mu'-\mu} \hat{a}_{\mu'\mu}^{x,l}(x) = \hat{a}_{-\mu'-x, -\mu-x}^{x,l}(x) = \hat{a}_{\mu\mu'}^{x,l}(x). \quad (2.3.20)$$

Для вывода аналогичных соотношений для дискретной серии следует вначале сузить операторы T_x и K_x на подпространства \mathcal{F} . Согласно формуле (2.3.16), подпространства $\mathcal{F}_+^{x,n}$ и $\mathcal{F}_-^{x,n}$ переводятся операторами T_x и K_x друг в друга, так что вместо формул (2.3.18) мы имеем соотношения

$$\hat{T}_{\pm,x} V_{\pm}^{x,l}(A) \hat{T}_{\pm,x}^{-1} = V_{\mp}^{x,l}(A^{-1T}),$$

$$\hat{K}_{\pm,x} V_{\pm}^{x,l}(A) \hat{K}_{\pm,x}^{-1} = V_{\mp}^{x,l*}(A^{-1\dagger}), \quad (2.3.21)$$

где операторы $\hat{T}_{\pm,x}$ и $\hat{K}_{\pm,x}$ получаются при сужении операторов T_x и K_x на пространства представлений $V_{\pm}^{x,l}$. Итак, обобщение формул (2.3.20) дает при $\eta=0, \pm$:

$$U_{SU(1,1)}^{x,l,\eta}(A^{-1T})_{\mu'\mu} = U_{SU(1,1)}^{x,l,-\eta}(A)_{-\mu'-x, -\mu-x} = U_{SU(1,1)}^{x,l,\eta}(A^\dagger)_{\mu\mu'},$$

$$(-1)^{\mu'-\mu} \hat{a}_{\mu'\mu}^{x,l,\eta}(x) = \hat{a}_{-\mu'-x, -\mu-x}^{x,l,\eta}(x) = \hat{a}_{\mu\mu'}^{x,l,\eta}(x). \quad (2.3.22)$$

2.4. МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ УНИТАРНЫХ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ $E(2)$ В БАЗИСЕ, СВЯЗАННОМ С ПОДГРУППОЙ H_1

В этом случае можно ограничиться бесконечномерными представлениями группы $E(2)$ вида (1.4.16), так как в силу формул (1.4.13) остальные представления совпадают с неприводимыми унитарными представлениями группы H_1 .

Ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_{E(2)}^{0,x}$, согласно формуле (1.4.11), имеет вид

$$\{\psi_{\mu}^{0,x}, \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots : \psi_{\mu}^{0,x}(\xi) = (\xi/i\rho)^{-\mu}\},$$

$$\langle \psi_{\mu}^{0,x} | \psi_{\mu'}^{0,x} \rangle_{E(2)}^{0,x} = \delta_{\mu\mu'}. \quad (2.4.1)$$

Из формулы (1.4.16) следует

$$(U_{E(2)}^{0,x}(e^{i\varphi/2}, 0) \psi_{\mu}^{0,x})(\xi) = \chi^{x,\mu}(\varphi) \psi_{\mu}^{0,x}(\xi). \quad (2.4.2)$$

Поэтому базис $\{\psi_{\mu}^{\rho, \kappa}\}$ связан с подгруппой H_1 . Неприводимое представление $\chi^{\kappa, \mu}$ группы H_1 содержится в представлении $U_{E(2)}^{\rho, \kappa}$, $\rho > 0$, ровно один раз, если $\kappa' = \kappa$.

Матричные элементы

$$U_{E(2)}^{\rho, \kappa}(A)_{\mu' \mu} \equiv \langle \psi_{\mu'}^{\rho, \kappa} | U_{E(2)}^{\rho, \kappa}(A) \psi_{\mu}^{\rho, \kappa} \rangle_{E(2)}^{\rho, \kappa} \quad (2.4.3)$$

легко могут быть представлены в виде интеграла, приводящего к функциям Бесселя

$$U_{E(2)}^{\rho, \kappa}(A)_{\mu' \mu} = (A_{11} / |A_{11}|)^{\mu' + \mu + \kappa} (A_{12} / |A_{12}|)^{\mu' - \mu} u_{\mu' \mu}^{\rho, \kappa}(|A_{12}|^2), \quad (2.4.4)$$

$$u_{\mu' \mu}^{\rho, \kappa}(z) \equiv J_{\mu' - \mu}(\rho \sqrt{z}), \quad 0 \leq z < \infty.$$

Соотношение симметрии

$$(-1)^{\mu' - \mu} u_{-\mu' - \kappa, -\mu - \kappa}^{\rho, \kappa}(z) = u_{\mu' \mu}^{\rho, \kappa}(z) = u_{-\mu - \kappa, -\mu' - \kappa}^{\rho, \kappa}(z) \quad (2.4.5)$$

непосредственно следует из соотношения для функций Бесселя $J_{-n} = (-1)^n J_n$. Поэтому для матричных элементов $U_{E(2)}^{\rho, \kappa}(A)_{\mu' \mu}$ получаем

$$(-1)^{\mu' - \mu} U_{E(2)}^{\rho, \kappa}(A^*)_{\mu' \mu} = U_{E(2)}^{\rho, \kappa}(A)_{-\mu' - \kappa, -\mu - \kappa} = \\ = (-1)^{\mu' - \mu} U_{E(2)}^{\rho, \kappa}(A^{-1})_{\mu \mu'}. \quad (2.4.6)$$

2.5. МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ НЕПРИВОДИМЫХ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ $SU(1, 1)$ В БАЗИСЕ, СВЯЗАННОМ С ПОДГРУППОЙ H_2

Чтобы подойти к проблеме редукции для сужения неприводимых унитарных представлений группы $SU(1, 1)$ на ее некомпактную подгруппу $H_2 = SU(1, 1) \cap SL(2, R)$, начнем с чисто формальной проекционной техники. Оператор

$$P_{\lambda}^{\kappa, l, \eta} \equiv \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon = \pm} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{2\pi} \chi^{\kappa, \lambda}(\varepsilon, \xi) U_{SU(1, 1)}^{\kappa, l, \eta}(D(\varepsilon, \xi)) \quad (2.5.1)$$

обладает свойствами проекционного оператора

$$[P_{\lambda}^{\kappa, l, \eta}]^{\dagger} = P_{\lambda}^{\kappa, l, \eta}, \quad P_{\lambda'}^{\kappa, l, \eta} P_{\lambda}^{\kappa, l, \eta} = \delta(\lambda' - \lambda) P_{\lambda}^{\kappa, l, \eta}. \quad (2.5.2)$$

Так как

$$U_{SU(1, 1)}^{\kappa, l, \eta}(D(\varepsilon, \xi)) P_{\lambda}^{\kappa, l, \eta} = \chi^{\kappa, \lambda}(\varepsilon, \xi) P_{\lambda}^{\kappa, l, \eta}, \quad (2.5.3)$$

мы можем интерпретировать $P_\lambda^{x, l, \eta}$ как оператор, выделяющий из сужения $U_{SU(l, 1)}^{x, l, \eta} | H_2$ неприводимое унитарное представление $\chi^{x, \lambda}$.

Из определения (2.5.1) имеем

$$(P_\lambda^{x, l, \eta} f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{2\pi} e^{-i\lambda\xi} |\omega \operatorname{sh} \xi/2 + \operatorname{ch} \xi/2|^{-2l-2x-2} \times \\ \times (\omega \operatorname{sh} \xi/2 + \operatorname{ch} \xi/2)^x f(\omega \overline{D(\varepsilon, \xi)}) = \sum_{\tau=\pm} \varphi_{\tau\lambda}^{x, l}(\omega) f''_\tau(\lambda), \\ f''_\tau(\lambda) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\omega}{\omega} \varphi_{\tau\lambda}^{x, l, -l-x-1}(\omega) f(\omega), \quad (2.5.4)$$

$$\varphi_{\tau\lambda}^{x, l}(\omega) \equiv \begin{cases} \omega^{x/2} \left| \frac{\omega - \omega^{-1}}{2} \right|^{-l-x/2-1} \left| \frac{1-\omega}{1+\omega} \right|^{-l\lambda} & \text{при } \operatorname{sign} \operatorname{Im} \omega = \tau, \\ 0 & \text{в других случаях,} \\ \omega^{x/2} \equiv e^{i\lambda(\arg \omega)/2}, & -\pi \leq \arg \omega < \pi. \end{cases}$$

Подстановка

$$\xi \rightarrow \omega' = \omega \overline{D(\varepsilon, \xi)}, \quad (2.5.5)$$

использованная в формулах (2.5.4), указывает на следующее разбиение границы ∂K единичного круга на орбиты по отношению к подгруппе H_2 :

$$\partial K \equiv \{\omega \in \mathbf{C} : |\omega| = 1\} = \partial K_+ \cup \partial K_- \cup \{1\} \cup \{-1\}, \\ \partial K_\tau \equiv \{\omega \in \partial K : \operatorname{sign} \operatorname{Im} \omega = \tau\}, \quad \tau = \pm. \quad (2.5.6)$$

Из этого разбиения видно, что любое подпространство пространства $\mathfrak{F}_{SU(l, 1)}^{x, l, \eta}$, состоящее из функций, сосредоточенных на одной из орбит, инвариантно относительно сужения $U_{SU(l, 1)}^{x, l, \eta} | H_2$. Орбитами $\{1\}$ и $\{-1\}$, имеющими меру нуль в множестве ∂K , в дальнейшем будем пренебрегать.

Точное решение проблемы редукции будет дано сначала для основной серии. Прежде всего совершим унитарное отображение пространства представлений $\mathfrak{F}_{SU(l, 1)}^{x, l, 0}$ на гильбертово пространство $\mathfrak{F}_{SU(l, 1)}^{x, l, 0}$, состоящее из пар функций $f' = (f'_+, f'_-)$:

$$f'_\tau(q) \equiv (\operatorname{ch} q)^{-l-x/2-1} \left(\frac{1+i\tau e^{-q}}{1-i\tau e^{-q}} \right)^{-x/2} f \left(\frac{1+i\tau e^{-q}}{1-i\tau e^{-q}} \right), \quad (2.5.7) \\ \frac{1+i\tau e^{-q}}{1-i\tau e^{-q}} \in \partial K, \quad q \in \mathbf{R},$$

заданных на вещественной оси со скалярным произведением

$$\langle f' | g' \rangle_{SU(l, 1)}^{x, l, 0} = \sum_{\tau=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} f'_\tau(q)^* g'_\tau(q) = \langle f | g \rangle_{SU(l, 1)}^{x, l, 0}. \quad (2.5.8)$$

Преобразование Фурье

$$f'_\tau(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{-i\lambda q} f'_\tau(q), \quad f'_\tau(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{i\lambda q} f'_\tau(\lambda) \quad (2.5.9)$$

дает еще одно унитарное преобразование пространства $\mathfrak{H}_{SU(l, 1)}^{x, l, 0}$ на гильбертово пространство $\mathfrak{H}_{SU(l, 1)}^{x, l, 0}$, состоящее из пар функций $f'' = (f''_+, f''_-)$, заданных на вещественной оси со скалярным произведением

$$\langle f'' | g'' \rangle_{SU(l, 1)}^{x, l, 0} = \sum_{\lambda=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda f''_\lambda(\lambda)^* g''_\lambda(\lambda) = \langle f | g \rangle_{SU(l, 1)}^{x, l, 0}. \quad (2.5.10)$$

Мы можем придать пространству $\mathfrak{H}_{SU(l, 1)}^{x, l, 0}$ структуру прямого интеграла двумерных комплексных гильбертовых пространств:

$$\mathfrak{H}_{SU(l, 1)}^{x, l, 0} = \bigoplus_{-\infty}^{+\infty} \int \sqrt{d\lambda} \mathbf{C}^2. \quad (2.5.11)$$

Рассматривая преобразования, принадлежащие сужению $U_{SU(l, 1)}^{x, l, 0} | H_2$ в пространстве $\mathfrak{H}_{SU(l, 1)}^{x, l, 0}$, получаем

$$\left(U_{SU(l, 1)}^{x, l, 0} (D(\varepsilon, \xi)) f''_\tau \right) (\lambda) = \chi^{x, \lambda}(\varepsilon, \xi) f''_\tau(\lambda). \quad (2.5.12)$$

Это полностью решает проблему редукции для сужения $U_{SU(l, 1)}^{x, l, 0} | H_2$, так как сужение $U_{SU(l, 1)}^{x, l, 0} | H_2$ имеет вид прямого интеграла от неприводимых унитарных представлений $\chi^{x, \lambda}$ группы H_2 :

$$U_{SU(l, 1)}^{x, l, 0} | H_2 = \bigoplus_{-\infty}^{+\infty} \int d\lambda (\chi^{x, \lambda} \oplus \chi^{x, \lambda}), \quad (2.5.13)$$

причем каждое из представлений входит ровно два раза при условии, что $x' = x$. Этот результат согласуется с утвержде-

нием Баргмана [13] относительно спектра генератора, принадлежащего подгруппе H_2 . Переход к пространству $\mathfrak{H}_{SU(1,1)}^{x,l,0}$, который решает проблему редукции, был произведен в соответствии с эвристическим рассмотрением в начале этого раздела. Как легко видеть, фурье-образ f''_{τ} в формуле (2.5.9) совпадает с функцией f''_{τ} в формуле (2.5.4), которая, согласно (2.5.3), формально удовлетворяет соотношению (2.5.12). Функции $\Phi_{\tau\lambda}^{x,l}$, определенные в формуле (2.5.4), играют роль ядер интегральных операторов для отображения пространства представлений в пространство $\mathfrak{H}_{SU(1,1)}^{x,l,0}$. Унитарность этого отображения выражается формулами

$$\langle \Phi_{\tau\lambda'}^{x,l} | \Phi_{\tau\lambda}^{x,l} \rangle_{SU(1,2)}^{x,l,0} = \delta_{\tau'\tau} \delta(\lambda' - \lambda),$$

$$\sum_{\tau', \tau = \pm} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \Phi_{\tau\lambda}^{x,l}(\omega') \Phi_{\tau\lambda}^{x,l}(\omega)^* = 2\pi \delta\left(-\frac{i \ln \omega'}{\omega}\right). \quad (2.5.14)$$

Для дополнительной серии рассмотрим преобразование

$$f''_{\tau}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\omega}{\omega} \Phi_{\tau\lambda}^{0,l,-1}(\omega)^* f(\omega),$$

$$f(\omega) = \sum_{\tau = \pm} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \Phi_{\tau\lambda}^{0,l}(\omega) f''_{\tau}(\lambda), \quad (2.5.15)$$

содержащее комбинацию преобразований, аналогичных формулам (2.5.7) и (2.5.9). На мысль о возможности такого преобразования наводит формула (2.5.4). Таким образом, мы имеем унитарное отображение пространства $\mathfrak{H}_{SU(1,1)}^{0,l,0}$ на гильбертово пространство $\mathfrak{H}_{SU(1,1)}^{0,l,0}$ пар функций $f'' = (f''_+, f''_-)$ на вещественной оси со скалярным произведением

$$\langle f'' | g'' \rangle_{SU(1,1)}^{0,l,0} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \sum_{\tau', \tau = \pm} f''_{\tau'}(\lambda)^* T_{\tau'\tau}^{0,l}(\lambda) g''_{\tau}(\lambda) =$$

$$= \langle f | g \rangle_{SU(1,1)}^{0,l,0}, \quad (2.5.16)$$

$$T_{\tau', \tau}^{0,l}(\lambda) = \frac{|\Gamma(-l + i\lambda)|^2}{\pi} (\delta_{\tau'\tau} \operatorname{ch} \pi\lambda + \delta_{\tau', -\tau} \cos \pi l).$$

Форма скалярного произведения в этом пространстве $\mathfrak{H}_{SU(1,1)}^{0,l,0}$ следует из интегральной формулы

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\omega'}{\omega'} T^{\kappa,l}(\omega/\omega') \Phi_{\tau\lambda}^{\kappa,l}(\omega') = \sum_{\tau'=\pm} \Phi_{\tau'\lambda}^{\kappa,-l-\kappa-1}(\omega) T_{\tau\tau'}^{\kappa,l}(\lambda),$$

$$T_{\tau\tau'}^{\kappa,l}(\lambda) = \frac{\Gamma(-l-\kappa/2-i\lambda)\Gamma(-l-\kappa/2+i\lambda)}{\pi} \times \quad (2.5.17)$$

$$\times i^{\kappa} \begin{pmatrix} \cos \pi(i\lambda - \kappa/2) & (-1)^{\kappa} \cos \pi l \\ \cos \pi l & \cos \pi(i\lambda + \kappa/2) \end{pmatrix},$$

которая справедлива для всех l в полосе $\{z \in \mathbf{C} : -1 < \operatorname{Re}(z + \kappa/2) < 0\}$. Очевидно, что это пространство можно представить в виде прямого интеграла

$$\mathfrak{H}_{SU(1,1)}^{0,l,0} = \bigoplus \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{d\lambda} \mathbf{C}_l^2(\lambda), \quad (2.5.18)$$

где $\mathbf{C}_l^2(\lambda)$ — двумерное комплексное гильбертово пространство с метрикой, определяемой матрицей $T^{\kappa,l}(\lambda)$. Сужение представления $U_{SU(1,1)}^{0,l,0}|_{H_2}$, реализуемое в пространстве $\mathfrak{H}_{SU(1,1)}^{0,l,0}$, снова приобретает вид формул (2.5.12) и (2.5.13), так что проблема редукции для дополнительной серии имеет то же решение, что и для основной серии. Соотношения унитарности, соответствующие формулам (2.5.14), принимают вид

$$\langle \Phi_{\tau'\lambda'}^{0,l} | \Phi_{\tau\lambda}^{0,l} \rangle_{SU(1,1)}^{0,l,0} = T_{\tau\tau'}^{0,l}(\lambda) \delta(\lambda' - \lambda),$$

$$\sum_{\tau', \tau=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \Phi_{\tau'\lambda}^{0,l}(\omega') T_{\tau\tau'}^{0,-l-1}(\lambda) \Phi_{\tau\lambda}^{0,l}(\omega)^* = T^{0,-l-1}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right). \quad (2.5.19)$$

Переходя к дискретной серии, мы вначале модифицируем эвристическое рассуждение, приводящее к формуле (2.5.4). Из построения реализации этой серии, данной в формуле (1.3.46), следует, что элементы пространства $\mathfrak{H}_{SU(1,1)}^{\kappa,l,\eta}$, $\eta = \pm$, можно рассматривать как предельные значения функций, аналитических внутри или вне единичного круга. Если функция f в формуле (2.5.4) обладает такими предельными свойствами, то неудобно использовать интегральные ядра $\Phi_{\tau\lambda}^{\kappa,l}(\omega)$, сосредоточенные только на половине границы единичного круга. Поэтому мы построим линейные комбинации величин $\Phi_{\tau\lambda}^{\kappa,l}(\omega)$, которые

заведомо отражают поведение функции f . Определим две функции, однозначные и аналитические соответственно внутри и вне единичного круга:

$$\omega_{+, \lambda}^{x, l}(z) \equiv \frac{\Gamma(1+l+x/2+i\lambda)}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1-z}{\sqrt{2}}\right)^{-1-l-x/2-i\lambda} \left(\frac{1+z}{\sqrt{2}}\right)^{-1-l-x/2+i\lambda},$$

$$\omega_{-, \lambda}^{x, l}(z) \equiv z^x \omega_{+, \lambda}^{x, l}\left(\frac{1}{z}\right), \quad (2.5.20)$$

$$z^{-l-x-1} \omega_{+, \lambda}^{x, l}(z) \Big|_{z=0} = 2^{1+l+x/2} \frac{\Gamma(1+l+x/2+i\lambda)}{\sqrt{2\pi}}.$$

На множестве $\partial K_+ \cup \partial K_-$ они принимают значение

$$\omega_{\tau\lambda}^{x, l}(\omega) \equiv \lim_{z \rightarrow \omega} \omega_{\tau\lambda}^{x, l}(z) =$$

$$= \frac{\Gamma(1+l+x/2+i\lambda)}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\tau'=\pm} e^{i\tau'\tau(1+l+x/2+i\lambda)} \pi^{1/2} \varphi_{\tau'\lambda}^{x, l}(\omega). \quad (2.5.21)$$

Легко видеть, что $\omega_{+, \lambda}^{x, l}$ — однозначная аналитическая функция в комплексной плоскости z с разрезами на вещественной оси от $-\infty$ до -1 и от 1 до $+\infty$. Если использовать в формуле (2.5.4) вместо функций $\varphi_{\tau\lambda}^{x, l}(\omega)$ их линейные комбинации $\omega_{\tau\lambda}^{x, l}(\omega)$, то мы получим

$$(P_{\lambda}^{x, l, \eta} f)(\omega) = \sum_{\tau=\pm} \omega_{\tau\lambda}^{x, l}(\omega) \tilde{f}_{\tau}(\lambda), \quad (2.5.22)$$

$$\tilde{f}_{\tau}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{d\omega}{\omega} \omega_{\tau\lambda}^{x, l}(\omega)^{-l-x-1} f(\omega).$$

Требование, чтобы функция f была предельным значением функции, аналитической внутри ($\eta = +$) или вне ($\eta = -$) единичного круга, можно выразить в виде двух эквивалентных условий:

$$(P_{\lambda}^{x, l, \eta} f)(\omega) = \omega_{\eta\lambda}^{x, l}(\omega) \tilde{f}_{\eta}(\lambda), \quad \tilde{f}_{-\eta}(\lambda) \equiv 0. \quad (2.5.23)$$

Теперь несколько модифицируем интеграл в формуле (2.5.22), определяющей функцию $\tilde{f}_{\eta}(\lambda)$. Прежде всего совершим аналитическое продолжение соотношения (2.5.17) во всю комплексную плоскость l за вычетом точек $\pm i\lambda - 1/2x + n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где Γ -функция в ядре $T''^{x, l}(\lambda)$ имеет полюсы, а также точек $\pm i\lambda - 1/2x - 1 - n$, в которых матрица $T''^{x, l}(\lambda)$

вырождается. При всех остальных комплексных l справедливо равенство

$$\sum_{\tau'=\pm} T_{\tau'}^{\alpha, l}(\lambda) e^{i\tau'\tau(1+l+\kappa/2+i\lambda)\pi/2} = \frac{\tau^{\kappa}\Gamma(-l-\kappa/2+i\lambda)}{\Gamma(1+l+\kappa/2+i\lambda)} e^{i\tau'\tau(-l-\kappa/2+i\lambda)\pi/2}, \quad (2.5.24)$$

$$l \neq \pm i\lambda - \kappa/2 + n, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Используя формулу (2.5.21) для целых $l \geq 0$, мы получаем выражение для оператора $\hat{T}_{\eta}^{\alpha, l}$, который, согласно формулам (1.3.30), ограничен пространством $\mathcal{F}_{\eta}^{\alpha, l}$:

$$(\eta^{\kappa} \hat{T}_{\eta}^{\alpha, l} \omega_{\eta\lambda}^{\alpha, l})(\omega) = (P_{\eta}^{\alpha, l} \omega_{\eta\lambda}^{\alpha, l-\kappa-1})(\omega). \quad (2.5.25)$$

Здесь $P_{\eta}^{\alpha, l}$ — оператор проекции на пространство $\mathcal{F}_{\eta}^{\alpha, l}$. Таким образом, можно представить функцию $\hat{f}_{\eta}(\lambda)$ через скалярное произведение в пространстве $\mathfrak{H}_{SU(1,1)}^{\alpha, l, \eta}$, определенное в формуле (1.3.41):

$$\hat{f}_{\eta}(\lambda) = \langle \omega_{\eta\lambda}^{\alpha, l} | f \rangle_{SU(1,1)}^{\alpha, l, \eta}. \quad (2.5.26)$$

Точное решение проблемы редукции для дискретной серии будет дано только в случае $\eta = +$. Другая часть этой серии, согласно формуле (1.3.49), может быть реализована как $(U_{SU(1,1)}^{\alpha, l, +})^*$. Мы воспользуемся результатами приложения А. Там показано, что функции

$$\begin{aligned} K_{\mu}^{\alpha, l}(\lambda) &= \\ &= \frac{\Gamma(1+l+\kappa/2-i\lambda)}{\sqrt{2\pi}} 2^{1+l+\kappa/2} \left[\frac{(\mu+l+\kappa)!}{(\mu-l-1)!} \right]^{1/2} \frac{1}{\Gamma(2l+\kappa+2)} \times \\ &\times F(1+l-\mu, 1+l+\kappa/2+i\lambda; 2l+\kappa+2; 2), \quad (2.5.27) \\ &\mu = l+1, l+2, \dots, \end{aligned}$$

образуют ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_{+} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Согласно формуле (А.5), разложение функции $\omega_{+, \lambda}^{\alpha, l}(z)$ имеет вид

$$\omega_{+, \lambda}^{\alpha, l}(z) = \sum_{\mu=l+1} \psi_{\mu}^{\alpha, l, +}(z) K_{\mu}^{\alpha, l}(\lambda)^*, \quad (2.5.28)$$

где $\{\psi_{\mu}^{\alpha, l, +}\}$ — ортонормированный базис в пространстве представлений $\mathfrak{H}_{SU(1,1)}^{\alpha, l, +}$. Поэтому функция $\omega_{+, \lambda}^{\alpha, l}(z)$ является инте-

гральным ядром унитарного отображения пространства $\mathfrak{F}_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +}$ на $\tilde{\mathfrak{F}}_+$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_+(\lambda) &= \int_{|z| < 1} d\mu^{\kappa, l}(z) \omega_{+, \lambda}^{\kappa, l}(z)^* f'(z), \\ f'(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \omega_{+, \lambda}^{\kappa, l}(z) \tilde{f}_+(\lambda). \end{aligned} \quad (2.5.29)$$

Эти формулы соответствуют формулам (2.5.26) и (2.5.23). Представления из дискретной серии действуют в пространстве $\tilde{\mathfrak{F}}_+$ следующим образом:

$$(\tilde{U}_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +}(D(\epsilon, \xi)) \tilde{f}_+)(\lambda) = \chi^{\kappa, \lambda}(\epsilon, \xi) \tilde{f}_+(\lambda), \quad (2.5.30)$$

так что для сужения $\tilde{U}_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +} | H_2$ мы имеем разложение

$$\tilde{\mathfrak{F}}_+ = \bigoplus_{-\infty}^{+\infty} \int \sqrt{d\lambda} \mathbf{C}, \quad \tilde{U}_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +} | H_2 = \bigoplus_{-\infty}^{+\infty} d\tau \chi^{\kappa, \lambda}. \quad (2.5.31)$$

Таким образом, неприводимое унитарное представление $\chi^{\kappa', \lambda}$ группы H_2 содержится в сужении $U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +} | H_2$ один раз, только если $\kappa' = \kappa$. Унитарность преобразования, осуществляемого ядрами $\omega_{+, \lambda}^{\kappa, l}(z)$, выражается в виде соотношений [см. также формулу (A.8)]

$$\begin{aligned} \int_{|z| < 1} d\mu^{\kappa, l}(z) \omega_{+, \lambda'}^{\kappa, l}(z)^* \omega_{+, \lambda}^{\kappa, l}(z) &= \delta(\lambda' - \lambda), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \omega_{+, \lambda}^{\kappa, l}(z') \omega_{+, \lambda}^{\kappa, l}(z)^* &= K^{\kappa, l, +}(z', z), \end{aligned} \quad (2.5.32)$$

где $K^{\kappa, l, +}$ — воспроизводящее ядро в пространстве $\mathfrak{F}_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +}$, определенное в формуле (1.3.52). Для преобразования между пространствами $\mathfrak{F}_{SU(1,1)}^{\kappa, l, \eta}$ и $\tilde{\mathfrak{F}}_\eta = \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$, осуществляемого предельными значениями (2.5.21), получаем отсюда следующие соотношения унитарности:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\omega}{\omega} \omega_{\eta \lambda'}^{\kappa, l}(\omega)^* (\eta^\kappa \hat{T}_\eta^{\kappa, l} \omega_{\eta \lambda}^{\kappa, l})(\omega) &= \delta(\lambda' - \lambda), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \omega_{\eta \lambda}^{\kappa, l}(\omega') \omega_{\eta \lambda}^{\kappa, l}(\omega)^* &= \eta^\kappa \hat{T}_\eta^{\kappa, -l - \kappa - 1} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right). \end{aligned} \quad (2.5.33)$$

Единая формулировка решения проблемы редукции для сужения $U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, \eta} | H_2$ получается путем надлежащего унитарного отображения гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_{SU(1,1)}^{\kappa, l, 0}$ и $\tilde{\mathfrak{H}}_+ \oplus \tilde{\mathfrak{H}}_-$ на гильбертово пространство

$$\tilde{\mathfrak{H}} = \bigoplus \int_{-\infty}^{+\infty} V d\lambda \mathbf{C}^2, \quad \langle \tilde{f} | \tilde{g} \rangle \sim \sum_{\tau=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \tilde{f}_{\tau}(\lambda)^* \tilde{g}_{\tau}(\lambda), \quad \tilde{f}, \tilde{g} \in \tilde{\mathfrak{H}}. \quad (2.5.34)$$

Матрица второго порядка

$$N^{\kappa, l}(\lambda) \equiv \frac{\Gamma(1+l+\kappa/2+i\lambda)}{\sqrt{2\pi}} \times \begin{pmatrix} e^{i(1+l+\frac{\kappa}{2}+i\lambda)\frac{\pi}{2}} & e^{-i(1+l+\frac{\kappa}{2}+i\lambda)\frac{\pi}{2}} \\ e^{-i(1+l+\frac{\kappa}{2}+i\lambda)\frac{\pi}{2}} & e^{i(1+l+\frac{\kappa}{2}+i\lambda)\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} \quad (2.5.35)$$

несингулярна при любом комплексном l , за исключением точек $-i\lambda - 1/2\kappa + n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, так как

$$\det N^{\kappa, l}(\lambda) = \frac{i\Gamma(1+l+\kappa/2+i\lambda)}{\Gamma(-l-\kappa/2-i\lambda)}. \quad (2.5.36)$$

Следовательно, согласно формуле (2.5.24), имеем

$$T^{\kappa, l}(\lambda) N^{\kappa, l}(\lambda) = N^{\kappa, -l-\kappa-1}(\lambda) (\sigma_3)^{\kappa}, \quad (2.5.37)$$

$$l \neq \pm i\lambda - \frac{\kappa}{2} + n, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

Для значений l , отвечающих основной серии, матрица $N^{\kappa, l}(\lambda)$ унитарна:

$$[N^{\kappa, l}(\lambda)^{-1}]^{\dagger} = N^{\kappa, l}(\lambda), \quad l \in -\frac{1+\kappa}{2} + i\mathbf{R}. \quad (2.5.38)$$

Для значений l , отвечающих дополнительной серии, из формулы (2.5.37) получаем

$$[N^{0, l}(\lambda)^{-1}]^{\dagger} = N^{0, -l-1}(\lambda) = T^{\kappa, l}(\lambda) N^{0, l}(\lambda), \quad l \in (-1, 0). \quad (2.5.39)$$

Поэтому соотношение

$$f''(\lambda) = N^{\kappa, l}(\lambda) \tilde{f}(\lambda) \quad (2.5.40)$$

задает унитарное отображение пространств представлений основной и дополнительной серий $\mathfrak{F}_{SU(1,1)}^{x,l,0}$ со скалярными произведениями (2.5.10) и (2.5.16) на гильбертово пространство \mathfrak{F} вида (2.5.34). В дальнейшем для простоты мы используем матричные обозначения: функции f'' и \tilde{f} будут изображаться двухкомпонентными векторами-столбцами. Унитарное преобразование между пространствами представлений $\mathfrak{F}_{SU(1,1)}^{x,l,0}$ и $\tilde{\mathfrak{F}}$ в итоге имеет вид

$$\tilde{f}_\tau(\lambda) = \langle w_{\tau\lambda}^{x,l} | f \rangle_{SU(1,1)}^{x,l,0}, \quad f(\omega) = \sum_{\tau=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda w_{\tau\lambda}^{x,l}(\omega) \tilde{f}_\tau(\lambda), \quad (2.5.41)$$

где новое интегральное ядро равно

$$w_{\tau\lambda}^{x,l}(\omega) \equiv \sum_{\tau'=\pm} \Phi_{\tau'\lambda}^{x,l}(\omega) N_{\tau'\tau}^{x,l}(\lambda). \quad (2.5.42)$$

Вместо формул (2.5.14) и (2.5.19) условия унитарности принимают вид

$$\langle w_{\tau'\lambda'}^{x,l} | w_{\tau\lambda}^{x,l} \rangle_{SU(1,1)}^{x,l,0} = \delta_{\tau'\tau} \delta(\lambda' - \lambda),$$

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda w_{\tau\lambda}^{x,l}(\omega') w_{\tau\lambda}^{x,l}(\omega)^* = \\ = \begin{cases} 2\pi\delta\left(-i \ln \frac{\omega'}{\omega}\right), & l \in -\left(1 + \frac{x}{2}\right) + i\mathbf{R}, \\ T^0, \quad -l^{-1}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right), & l \in (-1, 0). \end{cases} \end{aligned} \quad (2.5.43)$$

В силу (2.5.37) интегральная формула (2.5.17) заменяется на

$$(T^{x,l} w_{\tau\lambda}^{x,l})(\omega) = \tau^x w_{\tau\lambda}^{x,l}{}^{-l-x-1}(\omega). \quad (2.5.44)$$

Для целых l (дискретная серия) выражения (2.5.42) очевидно совпадают с предельными значениями (2.5.21) аналитических функций, определяемых формулой (2.5.20). Как показано выше, эти функции осуществляют унитарное отображение пространств $\mathfrak{F}_{SU(1,1)}^{x,l,\eta}$ на гильбертовы пространства $\tilde{\mathfrak{F}}_\eta \equiv \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$. Эти отображения можно объединить с унитарным отображением между пространствами \mathfrak{F}' и $\tilde{\mathfrak{F}}$, где

$$\tilde{\mathfrak{F}} = \tilde{\mathfrak{F}}_+ \oplus \tilde{\mathfrak{F}}_- = \{(\tilde{f}_+, \tilde{f}_-) : \tilde{f}_\eta \in \tilde{\mathfrak{F}}_\eta\}. \quad (2.5.45)$$

Поэтому для дискретной серии пространство \mathfrak{F} оказывается пространством, в котором реализуется унитарно преобразованное представление $U_{SU(1,1)}^{x,l,+} \oplus U_{SU(1,1)}^{x,l,-}$. Следовательно, в случае дискретной серии формулу (2.5.41) можно дополнить следующей:

$$\tilde{f}_\eta(\lambda) = \langle \omega_{\eta\lambda}^{x,l} | f \rangle_{SU(1,1)}^{x,l,\eta}, \quad \tilde{f}_{-\eta}(\lambda) \equiv 0, \quad f \in \mathfrak{F}_{SU(1,1)}^{x,l,\eta}, \quad (2.5.46)$$

$$f(\omega) = \sum_{\tau=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \omega_{\tau\lambda}^{x,l}(\omega) \tilde{f}_\tau(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \omega_{\eta\lambda}^{x,l}(\omega) \tilde{f}_\eta(\lambda),$$

с условиями унитарности в виде (2.5.33).

Представление $U_{SU(1,1)}^{x,l,\eta}$, перенесенное в гильбертово пространство $\tilde{\mathfrak{F}}$, согласно формулам (2.5.41) и (2.5.46), может быть записано в виде

$$(U_{SU(1,1)}^{x,l,\eta}(A) f)_{\tau\lambda'}(\lambda') = \sum_{\tau=\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda U_{SU(1,1)}^{x,l,\eta}(A)_{\tau\lambda', \tau\lambda} \tilde{f}_\tau(\lambda) \quad (2.5.47)$$

с обобщенными интегральными ядрами

$$U_{SU(1,1)}^{x,l,\eta}(A)_{\tau\lambda', \tau\lambda} \equiv \langle \omega_{\tau\lambda'}^{x,l} | U_{SU(1,1)}^{x,l,\eta}(A) \omega_{\tau\lambda}^{x,l} \rangle_{SU(1,1)}^{x,l,\eta} \quad (2.5.48)$$

Поскольку

$$U_{SU(1,1)}^{x,l,\eta}(D(\epsilon, \xi))_{\tau\lambda', \tau\lambda} = \chi^{x,\lambda}(\epsilon, \xi) \delta_{\tau\lambda'} \delta(\lambda' - \lambda), \quad (2.5.49)$$

то мы обозначим эти ядра как матричные элементы представления группы $SU(1,1)$ в базисе, связанном с подгруппой H_2 . Очевидно, условия унитарности (2.5.43) и (2.5.33) играют роль обобщенных соотношений унитарности и полноты для этого „базиса“ $\{\omega_{\tau\lambda}^{x,l} : \tau = \pm, -\infty < \lambda < \infty\}$.

Вначале вычислим обобщенные матричные элементы (2.5.48) только для основной и дополнительной серий. Используя формулы (2.5.42), (2.5.44), (2.5.38) и (2.5.39), получаем

$$U_{SU(1,1)}^{x,l,\eta}(A)_{\lambda\lambda} = N^{x,l}(\lambda')^{-1} V_{\lambda'\lambda}^{x,l}(A) N^{x,l}(\lambda),$$

$$V_{\tau\lambda', \tau\lambda}^{x,l}(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\omega}{\omega} \omega^{-x} \varphi_{\tau'}^{x, -l-\lambda'-x-1}(\omega) | \omega A_{12} + A_{22} |^{-2l-2x-2} \times$$

$$\times (\omega A_{12} + A_{22})^x \varphi_{\tau\lambda}^{x,l}(\omega \bar{A}). \quad (2.5.50)$$

Для вычисления интегралов введем точки $\omega_\pm(A)$, лежащие на границе единичного круга:

$$\omega_\pm(A) \bar{A} = \pm 1, \quad \text{т. е.} \quad \omega_\pm(A) = \frac{\pm A_{22} - A_{21}}{\mp A_{12} + A_{11}}. \quad (2.5.51)$$

С помощью соотношения

$$z\bar{A} - z'\bar{A} = \frac{z - z'}{(zA_{11} + A_{22})(z'A_{11} + A_{22})}, \quad (2.5.52)$$

справедливого для любых значений $(z, z') \in \bar{\mathbf{C}} \times \bar{\mathbf{C}}$, $A \in SL(2, \mathbf{C})$, можно записать следующее интегральное представление матричного элемента:

$$\begin{aligned} V_{\tau'\lambda}^{\kappa, l}{}_{\tau\lambda}(A) = & |A_{11} - A_{12}|^{-1-l-\kappa/2-i\lambda} |A_{11} + A_{12}|^{-1-l-\kappa/2+i\lambda} \times \\ & \times \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{\tau'\tau}(A)} \frac{d\omega}{\omega} \varepsilon(\omega, A)^{\kappa} |\omega - 1|^{l+\kappa/2+i\lambda'} |\omega + 1|^{l+\kappa/2-i\lambda'} \times \\ & \times |\omega - \omega_+|^{-1-l-\kappa/2-i\lambda} |\omega - \omega_-|^{-1-l-\kappa/2+i\lambda}, \quad (2.5.53) \\ \omega_{\pm} \equiv & \omega_{\pm}(A), \quad \varepsilon(\omega, A) \equiv \omega^{-1/2} \frac{\omega A_{12} + A_{22}}{|\omega A_{12} + A_{22}|} (\omega\bar{A})^{1/2}. \end{aligned}$$

Так как функции $\Phi_{\tau\lambda}^{\kappa, l}$, по определению (2.5.4), отличны от нуля только на половине границы единичного круга, то контур интегрирования $\partial K_{\tau'\tau}(A)$ имеет положительное направление и принадлежит двум дугам, соединяющим точки $\tau'c - \tau'$ и ω_{τ} с $\omega_{-\tau}$. Обозначим для дальнейшего дугу, соединяющую в положительном направлении точки ω_1 и ω_2 и лежащую на границе единичного круга, через $\overline{\omega_1, \omega_2}$. Тогда

$$\partial K_{\tau'\tau}(A) = \overline{\tau', -\tau'} \cap \overline{\omega_{\tau}, \omega_{-\tau}}. \quad (2.5.54)$$

Довольно утомительное обсуждение знакового множителя $\varepsilon(\omega, A)$ вынесено в приложение Б. В результате имеем

$$\varepsilon(\omega, A) = \begin{cases} \text{sign Im}(A_{11} + A_{12}) & \text{при } \omega \in \overline{-1, \omega_-}, \\ -\text{sign Im}(A_{11} + A_{12}) & \text{при } \omega \in \overline{\omega_-, -1}. \end{cases} \quad (2.5.55)$$

Интеграл в формуле (2.5.53) сходится при $\omega_{\pm} \neq \pm 1$, $\omega_{-} \neq \pm 1$ и $-1 < \text{Re}(1 + 1/2 \kappa) < 0$. Последнее условие выполняется для основной и дополнительной серий. В силу двух первых условий интересующие нас матричные элементы в базисе H_2 существуют как функции в обычном смысле только на подмножестве $SU(1, 1) - S$, где

$$S \equiv \bigcup_{\tau', \tau = \pm} S_{\tau'\tau}, \quad S_{\tau'\tau} \equiv \{A \in SU(1, 1) : \omega_{\tau'}(A) = \tau\}. \quad (2.5.56)$$

Для точной характеристики множества особых точек $S \subset SU(1, 1)$ используем разложение группы $SU(1, 1)$, указанное Ивасава

(ср. с книгой Хельгасона [25]):

$$SU(1, 1) = H_1 N H'_2,$$

$$H'_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \xi/2 & \operatorname{sh} \xi/2 \\ \operatorname{sh} \xi/2 & \operatorname{ch} \xi/2 \end{pmatrix} : -\infty < \xi < \infty \right\} \approx H_2 / \{I_2, -I_2\},$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + i \frac{x}{2} & i \frac{x}{2} \\ -i \frac{x}{2} & 1 - i \frac{x}{2} \end{pmatrix} : -\infty < x < \infty \right\}, \quad (2.5.57)$$

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} : 0 \leq \varphi < 4\pi \right\}.$$

Легко найти подгруппу стабильности, отвечающую $\omega = 1$:

$$\{A \in SU(1, 1) : \overline{A^{-1}} = 1\} = N H_2 = S_{++}. \quad (2.5.58)$$

Используя элемент

$$\Gamma \equiv i\sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \in SU(1, 1), \quad (2.5.59)$$

мы получаем

$$S_{++} = N H_2, \quad S_{+-} = \Gamma N H_2, \quad S_{-+} = N H_2 \Gamma^{-1}, \quad S_{--} = \Gamma N H_2 \Gamma^{-1}. \quad (2.5.60)$$

Так как множество S обладает более низкой размерностью, чем вся группа $SU(1, 1)$, то матричные элементы в базисе, связанном с подгруппой H_2 , являются обыкновенными функциями почти для всех $A \in SU(1, 1)$ с точки зрения меры Хаара. Для более общего определения матричных элементов следует прибегнуть к теории обобщенных функций. Так, например, для $A \in H_2 = S_{++} \cap S_{--}$ матричный элемент определяется формулой (2.5.49). Множество особых точек S разделяет группу $SU(1, 1)$ на шесть отдельных связных частей, которые задаются следующими условиями:

$$\begin{aligned} I &\equiv \{A \in SU(1, 1) : \operatorname{Im} \omega_+ > 0, \operatorname{Im} \omega_- < 0\}, \\ I' &\equiv \{A \in SU(1, 1) : \operatorname{Im} \omega_+ < 0, \operatorname{Im} \omega_- > 0\}, \\ II &\equiv \{A \in SU(1, 1) : \operatorname{Im} \omega_+ > 0, \operatorname{Im} \omega_- > 0, \operatorname{Re} \omega_+ > \operatorname{Re} \omega_-\}, \\ II' &\equiv \{A \in SU(1, 1) : \operatorname{Im} \omega_+ < 0, \operatorname{Im} \omega_- < 0, \operatorname{Re} \omega_+ > \operatorname{Re} \omega_-\}, \\ III &\equiv \{A \in SU(1, 1) : \operatorname{Im} \omega_+ > 0, \operatorname{Im} \omega_- > 0, \operatorname{Re} \omega_+ < \operatorname{Re} \omega_-\}, \\ III' &\equiv \{A \in SU(1, 1) : \operatorname{Im} \omega_+ < 0, \operatorname{Im} \omega_- < 0, \operatorname{Re} \omega_+ < \operatorname{Re} \omega_-\}. \end{aligned} \quad (2.5.61)$$

Соотношения (Б.13) и (Б.18) из приложения Б позволяют определить эти части также другими условиями:

$$\begin{aligned}
 I &\equiv \{A \in SU(1, 1) : 0 < \text{Im}_+ \text{Im}_- < 1, \text{Re}_+ \text{Im}_+ < 0, \text{Re}_- \text{Im}_- < 0\}, \\
 I' &\equiv \{A \in SU(1, 1) : 0 < \text{Im}_+ \text{Im}_- < 1, \text{Re}_+ \text{Im}_+ > 0, \text{Re}_- \text{Im}_- > 0\}, \\
 II &\equiv \{A \in SU(1, 1) : \text{Im}_+ \text{Im}_- < 0, \text{Re}_+ \text{Im}_+ > 0, \text{Re}_- \text{Im}_- < 0\}, \\
 II' &\equiv \{A \in SU(1, 1) : \text{Im}_+ \text{Im}_- < 0, \text{Re}_+ \text{Im}_+ < 0, \text{Re}_- \text{Im}_- > 0\}, \\
 III &\equiv \{A \in SU(1, 1) : \text{Im}_+ \text{Im}_- > 1, \text{Re}_+ \text{Im}_+ > 0, \text{Re}_- \text{Im}_- < 0\}, \\
 III' &\equiv \{A \in SU(1, 1) : \text{Im}_+ \text{Im}_- > 1, \text{Re}_+ \text{Im}_+ < 0, \text{Re}_- \text{Im}_- > 0\},
 \end{aligned}
 \tag{2.5.62}$$

$$\text{Im}_\pm \equiv \text{Im}_\pm(A) \equiv \text{Im}(A_{11} \pm A_{12}), \quad \text{Re}_\pm \equiv \text{Re}_\pm(A) \equiv \text{Re}(A_{11} \pm A_{12}).$$

Нет необходимости вычислять по отдельности интегралы для каждой из шести частей, так как все интегралы могут быть получены путем использования условий симметрии из интегралов, записанных для частей I и II . С помощью элемента $\Gamma \in SU(1, 1)$, определяемого формулой (2.5.59), получим

$$\omega_\pm(\Gamma A) = -\omega_\pm A, \quad \omega_\pm(\Gamma \Gamma^{-1}) = \omega_\mp(A). \tag{2.5.63}$$

Операция $A \rightarrow \Gamma A$ связывает области I и I' , II и III' , II' и III ; операция $A \rightarrow \Gamma \Gamma^{-1}$ связывает области I и I' , II и III , II' и III' ; операция $A \rightarrow \Gamma A \Gamma^{-1}$ связывает II и II' , III и III' , оставляя инвариантными области I и I' . Таким образом, путем применения одной из этих операций можно перенести любой элемент $A \in SU(1, 1) - S$ в одну из частей I или II . Так как, согласно формулам (Б.15) и (Б.16), знаковый множитель $\varepsilon(\omega, A)$ удовлетворяет условию симметрии

$$\tau' \varepsilon(-\omega, \Gamma A) = \varepsilon(\omega, A) = \tau \varepsilon(\omega, \Gamma \Gamma^{-1}) \text{ при } \omega \in \partial K_{\tau' \tau}(A), \tag{2.5.64}$$

а при подстановке $\omega \rightarrow -\omega$ контур интегрирования $\partial K_{\tau' \tau}$ переводится в $\partial K_{-\tau', \tau}(A)$ и контур $\partial K_{\tau' \tau}(\Gamma \Gamma^{-1})$ совпадает с $\partial K_{\tau', -\tau}(A)$, то из формулы (2.5.63) мы получаем следующие условия симметрии для матричного элемента $V_{\tau' \lambda', \tau \lambda}^{x, l}(A)$:

$$\begin{aligned}
 V_{\tau' \lambda', \tau \lambda}^{x, l}(A) &= \tau'^x V_{-\tau', -\lambda', \tau \lambda}^{x, l}(\Gamma A) = \tau^x V_{\tau' \lambda', -\tau, -\lambda}^{x, l}(\Gamma \Gamma^{-1}) = \\
 &= (\tau' \tau)^x V_{-\tau', -\lambda', -\tau, -\lambda}^{x, l}(A^{-1 \dagger}).
 \end{aligned}
 \tag{2.5.65}$$

Согласно формуле (2.5.50), это приводит к следующим соотношениям для матричных элементов представления $U_{SU(1,1)}^{x,l,\eta}$:

$$\begin{aligned}
 U_{SU(1,1)}^{x,l,\eta}(A)_{\lambda\lambda} &= \Gamma^{x,l}(\lambda')^{-1} U_{SU(1,1)}^{x,l,\eta}(\Gamma A)_{-\lambda,\lambda} = \\
 &= U_{SU(1,1)}^{x,l,\eta}(A\Gamma^{-1})_{\lambda',-\lambda} \Gamma^{x,l}(\lambda) = \\
 &= \Gamma^{x,l}(\lambda)^{-1} U_{SU(1,1)}^{x,l,\eta}(A^{-1\tau})_{-\lambda',-\lambda} \Gamma^{x,l}(\lambda), \\
 \Gamma^{x,l}(\lambda) &\equiv N^{x,l}(-\lambda)^{-1} \sigma_1(\sigma_3)_x N^{x,l}(\lambda) = \\
 &= -\frac{\Gamma(-l-x/2+i\lambda)\Gamma(1+l+x/2+l\lambda)}{\pi} \times \\
 &\quad \times i^x \begin{pmatrix} \sin \pi \left(i\lambda - \frac{x}{2} \right) & (-1)^x \sin \pi l \\ \sin \pi l & \sin \pi \left(i\lambda + \frac{x}{2} \right) \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.5.66}$$

Легко видеть, что

$$U_{SU(1,1)}^{x,l,\eta}(\Gamma)_{\lambda\lambda} = \Gamma^{x,l}(\lambda) \delta(\lambda' + \lambda). \tag{2.5.67}$$

Эти соотношения позволяют вычислить матричные элементы для каждой из шести частей группы $SU(1,1)$, если они известны в областях I и II . Добавим также к формуле (2.5.66) несколько более удобное соотношение симметрии. Так как

$$\omega_{\pm}(A^*) = \frac{1}{\omega_{\pm}(A)}, \tag{2.5.68}$$

то операция $A \rightarrow A^* = \sigma_1 A \sigma_1$ переставляет области I и I' , II и II' , III и III' . Согласно формуле (Б.21), имеем

$$\varepsilon(\omega, A^*) = \varepsilon(\omega^{-1}, A). \tag{2.5.69}$$

Так как подстановкой $\omega \rightarrow \omega^{-1}$ контур $\partial K_{\tau'\tau}(A^*)$ переводится в $\partial K_{-\tau',-\tau}(A)$, то из формул (2.5.53) и (2.5.69) получаем соотношение

$$V_{\tau'\lambda',\tau\lambda}^{x,l}(A^*) = V_{-\tau',\lambda',-\tau\lambda}^{x,l}(A). \tag{2.5.70}$$

Используя для множителя $N^{x,l}(\lambda)$ в формуле (2.5.35) равенство

$$\sigma_1 N^{x,l}(\lambda) \sigma_1 = N^{x,l}(\lambda), \tag{2.5.71}$$

получаем из формулы (2.5.50) соотношение

$$U_{SU(1,1)}^{x,l,\eta}(A)_{\lambda\lambda} = \sigma_1 U_{SU(1,1)}^{x,l,\eta}(A^*)_{\lambda\lambda} \sigma_1. \tag{2.5.72}$$

В этом случае нельзя получить аналогов второго соотношения в формуле (2.5.66), так как операция $A \rightarrow A^* = \sigma_1 A \sigma_1$ в отличие от операции $A \rightarrow A^{-1\dagger} = \Gamma A \Gamma^{-1}$ не может быть представлена как внутренний автоморфизм в группе $SU(1, 1)$.

С помощью интегральной формулы

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\omega}{\omega} |\omega - \omega_1|^{a_1} |\omega - \omega_2|^{a_2} |\omega - \omega_3|^{a_3} |\omega - \omega_4|^{a_4} = \\ & = \frac{\Gamma(a_1 + 1) \Gamma(a_2 + 1)}{2\pi \Gamma(a_1 + a_2 + 2)} |\omega_2 - \omega_1|^{a_1 + a_2 + 1} |\omega_3 - \omega_1|^{a_1 + a_3 + 1} |\omega_3 - \omega_2|^{-a_1 - 1} \times \\ & \times |\omega_4 - \omega_1|^{a_4} F\left(-a_4, a_1 + 1; a_1 + a_2 + 2; \frac{(\omega_4 - \omega_3)(\omega_2 - \omega_1)}{(\omega_4 - \omega_1)(\omega_2 - \omega_3)}\right), \quad (2.5.73) \\ & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 2 = 0, \end{aligned}$$

матричные элементы $V_{\tau'\lambda', \tau\lambda}^{x, l}(A)$ можно выразить через гипергеометрическую функцию $F = {}_2F_1$. Используя функциональные соотношения для гипергеометрических и Γ -функций, можно суммировать результаты для элементов A , принадлежащих областям I или II , в виде

$$\begin{aligned} U_{SU(1, 1)}^{x, l, \eta}(A)_{\tau'\lambda', \tau\lambda} &= (-\varepsilon \operatorname{sign} \operatorname{Im}_+)^x \left\{ \frac{\delta_{\tau'\tau}}{2 \sin \pi i (\lambda' - \lambda)} \times \right. \\ & \times [a_{\lambda'\lambda}^{x, l} e^{\varepsilon \tau \pi (\lambda' - \lambda)/2} F_{\lambda'\lambda}^{x, l}(A) - e^{-\varepsilon \tau \pi (\lambda' - \lambda)/2} F_{-\lambda', -\lambda}^{x, l}(A^{-1\dagger})] + \\ & + \varepsilon (-1)^x \frac{\sin \pi l}{2\pi^2} b_{\lambda'\lambda}^{x, l} F_{\lambda'\lambda}^{x, l}(A) \times \\ & \times [i \tau \delta_{\tau'\tau} \sin \pi l e^{\varepsilon \tau \pi (\lambda' - \lambda)/2} - \varepsilon (i \varepsilon \tau)^x \delta_{\tau', -\tau} e^{-\varepsilon \tau \pi (\lambda' + \lambda)/2}] \Big\}, \quad (2.5.74) \end{aligned}$$

$\varepsilon = +1$ при $A \in I$, $\varepsilon = -1$ при $A \in II$,

$$\begin{aligned} 2a_{\lambda'\lambda}^{x, l} &= \frac{\Gamma(1 + l + x/2 - i\lambda') \Gamma(1 + l + x/2 + i\lambda)}{\Gamma(1 + l + x/2 + i\lambda') \Gamma(1 + l + x/2 - i\lambda)} + \\ & + \frac{\Gamma(-l - x/2 - i\lambda') \Gamma(-l - x/2 + i\lambda)}{\Gamma(-l - x/2 + i\lambda') \Gamma(-l - x/2 - i\lambda)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{\lambda'\lambda}^{x, l} &= \Gamma(1 + l + x/2 - i\lambda') \Gamma(1 + l + x/2 + i\lambda) \times \\ & \times \Gamma(-l - x/2 - i\lambda') \Gamma(-l - x/2 + i\lambda), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{\lambda'\lambda}^{x, l}(A) &= |\operatorname{Re}_- \operatorname{Im}_+|^{-i\lambda'} |\operatorname{Re}_- \operatorname{Im}_+|^{-i\lambda} \frac{1}{\Gamma(1 - i(\lambda' - \lambda))} \times \\ & \times F(-l - x/2 - i\lambda', 1 + l + x/2 - i\lambda'; 1 - i(\lambda' - \lambda); \operatorname{Im}_+ \operatorname{Im}_-), \\ & \operatorname{Im}_\pm \equiv \operatorname{Im}(A_{11} \pm A_{12}), \quad \operatorname{Re}_\pm \equiv \operatorname{Re}(A_{11} \pm A_{12}). \end{aligned}$$

Для дискретной серии матричные элементы получают следующим образом. Совершается аналитическое продолжение

интегралов (2.5.53) по l из полосы $-1 < \operatorname{Re}(l + 1/2\kappa) < 0$ в целые неотрицательные точки $l \geq 0$. С помощью формулы (2.5.50) можно показать, что при этом получаются матричные элементы дискретной серии. Так как точные формулы (2.5.74) имеют вид, аналитический по l , то их можно непосредственно применить для дискретной серии, считая число l целым и неотрицательным. Из-за множителя $\sin \pi l$ вторая скобка, содержащая недиагональные по τ, τ' члены, исчезает; при этом разложение представлений в пространстве \mathfrak{F} в прямую сумму частей, отвечающих $\eta = +$ и $\eta = -$, явно демонстрируется еще раз. Отметим, кроме того, что матрица $\Gamma^{x, l}(\lambda)$ в формуле (2.5.66) также становится диагональной для дискретной серии, так что условия симметрии (2.5.66) можно сформулировать для обеих частей порознь. Что касается формулы (2.5.72), то она выражает антиунитарную эквивалентность представлений $U_{SU(1,1)}^{x, l, +}$ и $U_{SU(1,1)}^{x, l, -}$, которая следует из формулы (1.3.51).

В разд. 2.2—2.4 мы дали решение проблемы редукции для сужения представления U_G^0 на компактную подгруппу H_1 , определив ортонормированный базис в пространстве \mathfrak{F}_G^0 , в котором сужение $U_G^0|_{H_1}$ распадается на прямую сумму. Теперь можно интерпретировать эти базисные элементы как ядра унитарного отображения пространства \mathfrak{F}_G^0 на гильбертово пространство \mathfrak{F}_{G, H_1}^0 комплексных последовательностей, определенных на множестве базисных элементов с конечной суммой квадратов модулей, на которых сужение $U_G^0|_{H_1}$ распадается в прямую сумму. Это замечание позволяет единым образом сформулировать наши результаты для компактной группы H_1 и для некомпактной группы H_2 . Пусть \hat{H} — множество всех классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений группы H , $H \in \{H_1, H_2\}$, $\sigma \in \hat{H}$; \hat{H}_0 — множество всех элементов $\sigma \in \hat{H}$, представленных в разложении сужения $U_G^0|_H$; χ^σ — неприводимое унитарное представление группы H ; $n(\rho, \sigma) \equiv n(\rho)$ — кратность представления χ^σ в сужении $U_G^0|_H$; $\hat{\nu}$ — мера Планшереля на множестве \hat{H} . Было построено преобразование эквивалентности \check{A} , унитарно отображающее пространство \mathfrak{F}_G^0 на гильбертово пространство

$$\check{A}\mathfrak{F}_G^0 = \mathfrak{F}_{G, H}^0 = \bigoplus_{\hat{\sigma}_\rho} \int \sqrt{d\hat{\nu}(\sigma)} \mathbf{C}^{n(\rho)}. \quad (2.5.75)$$

Пространство $\mathfrak{F}_{G, H}^0$ состоит из комплексных функций $\check{f} = \check{A}f$, $f \in H_G^0$ на множестве $\{1, 2, \dots, n(\rho)\} \times \hat{H}_0$ со скалярным про-

изведением

$$\langle \tilde{f} | \tilde{g} \rangle_{\tilde{G}, H}^{\circ} \equiv \int_{\hat{H}_0} d\hat{\nu}(\sigma) \sum_{\tau=1}^{n(\rho)} \tilde{f}_{\tau}(\sigma)^* \tilde{g}_{\tau}(\sigma) = \langle f | g \rangle_G^{\circ}. \quad (2.5.76)$$

Для представления $\tilde{U}_G^{\circ} = \tilde{A} U_G^{\circ} \tilde{A}^{-1}$ в пространстве $\tilde{\mathfrak{H}}_{G, H}^{\circ}$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{U}_G^{\circ}(Q) \tilde{f}_{\tau}(\sigma) &= \chi^{\sigma}(Q) \tilde{f}_{\tau}(\sigma), \quad Q \in H, \\ \tilde{U}_G^{\circ} | H &= \bigoplus \int_{\hat{H}_0} d\hat{\nu}(\sigma) \left[\bigoplus \sum_1^{n(\rho)} \chi^{\sigma} \right]. \end{aligned} \quad (2.5.77)$$

2.6. УСЛОВИЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ И ПОЛНОТЫ ДЛЯ НЕПРИВОДИМЫХ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП $SU(2)$, $SU(1, 1)$ И $E(2)$

Рассмотрим комплекснозначные функции комплексных переменных l и z :

$$\begin{aligned} u_{\mu' \mu}^{\kappa, l}(z) &\equiv N_{\mu' \mu}^{\kappa, l} (-z)^{(\mu' - \mu)/2} (1 - z)^{(\mu' + \mu + \kappa)/2} \times \\ &\times \frac{F(\mu' - l, \mu' + l + \kappa + 1; \mu' - \mu + 1; z)}{\Gamma(\mu' - \mu + 1)}, \\ N_{\mu' \mu}^{\kappa, l} &\equiv (-1)^{\mu' - \mu} \frac{N_{\mu}^{\kappa, l} \Gamma(\mu' + l + \kappa + 1)}{N_{\mu}^{\kappa, l} \Gamma(\mu + l + \kappa + 1)} = \\ &= (-1)^{\mu' - \mu} \left[\frac{\Gamma(\mu' + l + \kappa + 1) \Gamma(\mu' - l)}{\Gamma(\mu + l + \kappa + 1) \Gamma(\mu - l)} \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

где μ', μ — целые, $\kappa \in \{0, 1\}$, фактор $N_{\mu}^{\kappa, l}$ определен в формуле (2.3.4). Гипергеометрическая функция $F \equiv {}_2F_1$ является целой функцией в плоскости l и однозначной аналитической функцией в плоскости z , с разрезом от 1 до $+\infty$. При $z=0$ функция F равна 1. Учитывая наличие множителя $(-z)^{1/2(\mu' - \mu)} \times (1 - z)^{1/2(\mu' + \mu + \kappa)}$ следует добавить также разрезы от 0 до $+\infty$ и от 1 до $+\infty$. Множитель $N_{\mu' \mu}^{\kappa, l}$ есть однозначная аналитическая функция в плоскости l с бесконечным числом разрезов, концы которых находятся в целых точках на вещественной оси; при этом

$$N_{\mu' \mu}^{\kappa, l \pm i0} = e^{\pm i\pi \frac{\mu' - \mu}{2}} \sqrt{\frac{\Gamma(\mu' + l + \kappa + 1) \Gamma(-\mu + l + 1)}{\Gamma(\mu + l + \kappa + 1) \Gamma(-\mu' + l + 1)}} \quad (2.6.2)$$

при $l \geq \max(\mu', \mu, -\mu' - \kappa, -\mu - \kappa)$.

Эта формула выводится из поведения функции $N_{\mu}^{\kappa, l}$ в комплексной плоскости l в соответствии с соображениями, приведенными после формулы (2.3.4). Из условий симметрии (2.3.6) для этой функции имеем

$$N_{\mu'\mu}^{\kappa, l} = \frac{1}{N_{\mu\mu'}^{\kappa, l}} = N_{-\mu-\kappa, -\mu'-\kappa}^{\kappa, l} = N_{\mu'\mu}^{\kappa, -l-\kappa-1}, \quad (2.6.3)$$

и потому, используя функциональные соотношения для гипергеометрических функций (см. Бейтмен и др. [23], стр. 110), получаем

$$\begin{aligned} (-1)^{\mu'-\mu} u_{-\mu'-\kappa, -\mu-\kappa}^{\kappa, l}(z) &= u_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(z) = u_{-\mu-\kappa, -\mu'-\kappa}^{\kappa, l}(z), \\ u_{\mu'\mu}^{\kappa, -l-\kappa-1}(z) &= u_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(z). \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

Таким образом, в дальнейшем можно считать, что

$$-\mu' - \kappa \leq \mu \leq \mu', \quad \mu' \geq 0. \quad (2.6.5)$$

На отрицательной вещественной полуоси в плоскости z и при значениях l , отвечающих неприводимым унитарным представлениям группы $SU(1, 1)$, согласно формуле (2.3.15),

$$u_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(x) = \tilde{u}_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(x), \quad x \leq 0. \quad (2.6.6)$$

Функции $\tilde{u}_{\mu'\mu}^{\kappa, l}$ и $\tilde{u}_{\mu'\mu}^{\kappa, l}$, определяемые условиями

$$\begin{aligned} u_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(z) &\equiv e^{i\pi \operatorname{sign}(\operatorname{Im} l)(\mu'-\mu)/2} \tilde{u}_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(z) \equiv \\ &\equiv e^{i\pi(\operatorname{sign}(\operatorname{Im} l) - \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z))(\mu'-\mu)/2} \tilde{u}_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(z), \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

в соответствии с формулой (2.6.2) при целых l , отвечающих неприводимым унитарным представлениям группы $SU(2)$, совпадают с функциями, определяемыми формулами (2.2.6) и (2.2.7). Поэтому функция

$$U^{\kappa, l}(A)_{\mu'\mu} \equiv \left(\frac{A_{11}}{A_{12}} \right)^{(\mu'+\mu+\kappa)/2} \left(\frac{A_{12}}{A_{21}} \right)^{(\mu'-\mu)/2} u_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(-A_{12}A_{21}) \quad (2.6.8)$$

на группе $SL(2, C)$ дает аналитическую интерполяцию матричных элементов представлений подгрупп $SU(2)$ и $SU(1, 1)$. Действительно, при сужении на подгруппу $SU(2)$ из формул (2.6.7) и (2.2.5) получаем при целых $l \geq \mu'$

$$U^{\kappa, l \pm i0}(A)_{\mu'\mu} = e^{\pm i\pi(\mu'-\mu)/2} U_{SU(2)}^{\kappa, l}(A)_{\mu'\mu}, \quad A \in SU(2), \quad (2.6.9)$$

а при сужении на $SU(1, 1)$ из формул (2.6.6) и (2.3.15) получаем для значений l , отвечающих неприводимым унитарным представлениям группы $SU(1, 1)$,

$$U^{\kappa, l}(A)_{\mu'\mu} = U_{SU(1, 1)}^{\kappa, l, \eta}(A)_{\mu'\mu}, \quad A \in SU(1, 1). \quad (2.6.10)$$

Параметризация с помощью углов Эйлера дает специальную форму этой аналитической интерполяции. Полагая

$$A = A(\alpha, \zeta, \gamma) \equiv \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \zeta/2 & \operatorname{sh} \zeta/2 \\ \operatorname{sh} \zeta/2 & \operatorname{ch} \zeta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma/2} \end{pmatrix}, \quad (2.6.11)$$

$$0 \leq \alpha < 2\pi, \quad 0 \leq \gamma < 4\pi$$

$$\zeta \in S_{-\pi, \pi} \equiv \{ \zeta = \xi + i\beta : 0 < \xi < \infty, -\pi < \beta \leq \pi \} \cup \{ \zeta = i\beta : 0 \leq \beta \leq \pi \},$$

мы получаем параметризацию группы $SU(2)$ при $\xi \equiv \operatorname{Re} \zeta = 0$ и параметризацию группы $SU(1, 1)$ при $\beta \equiv \operatorname{Im} \zeta = 0$. Согласно формуле (2.6.8), имеем

$$U^{\kappa, l}(A(\alpha, \zeta, \gamma))_{\mu' \mu} = e^{i\alpha(\mu' + \kappa/2)} u_{\mu' \mu}^{\kappa, l}(-\operatorname{sh}^2 \zeta/2) e^{-i\gamma(\mu + \kappa/2)}. \quad (2.6.12)$$

Аналитическое продолжение, соединяющее подгруппы $SU(2)$ и $SU(1, 1)$, в этом случае происходит внутри полосы $S_{-\pi, \pi}$, которая функцией

$$z = -\operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} \zeta \quad (2.6.13)$$

отображается на комплексную плоскость z . При этом прямые $\xi = \operatorname{const}$ и полупрямые $\beta = \operatorname{const}$ отображаются соответственно на эллипсы с фокусами в 0 и 1 и на половины ветвей гипербол, ортогональных этим эллипсам и исходящих из интервала (0, 1). Здесь $z = x - i0$, $x \geq 1$ — образ прямой $\beta = \pi - 0$. Отрезку [0, 1] и отрицательной вещественной полуоси в z -плоскости отвечают соответственно отрезки прямых $\xi = 0$ и $\beta = 0$ из полосы $S_{-\pi, \pi}$.

Функция $u_{\mu' \mu}^{\kappa, l}$ в формуле (2.6.1) может быть выражена с помощью функции Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}$ (см., например, Бейтмен и др. [26], стр. 172) следующим образом:

$$u_{\mu' \mu}^{\kappa, l}(z) = \frac{N_{\mu'}^{\kappa, l}}{N_{\mu}^{\kappa, l}} (-z)^{(\mu' - \mu)/2} (1 - z)^{(\mu' + \mu + \kappa)/2} P_{l - \mu'}^{(\mu' - \mu, \mu' + \mu + \kappa)}(1 - 2z). \quad (2.6.14)$$

Мы используем эту формулу, чтобы, вводя функции Якоби второго рода, определить следующие функции:

$$v_{\mu' \mu}^{\kappa, l}(z) \equiv \frac{N_{\mu'}^{\kappa, l}}{N_{\mu}^{\kappa, l}} (-z)^{(\mu' - \mu)/2} (1 - z)^{(\mu' + \mu + \kappa)/2} Q_{l - \mu'}^{(\mu' - \mu, \mu' + \mu + \kappa)}(1 - 2z) =$$

$$= \frac{1}{2} \Gamma(1 + l - \mu') \Gamma(1 + l + \mu + \kappa) N_{\mu' \mu}^{\kappa, l} (-z)^{(\mu' - \mu)/2} (1 - z)^{(\mu' + \mu + \kappa)/2} \times$$

$$\times (-z)^{-\mu' - l - \kappa - 1} \frac{F(\mu' + l + \kappa + 1, \mu + l + \kappa + 1; 2l + \kappa + 2; 1/z)}{\Gamma(2l + \kappa + 2)}. \quad (2.6.15)$$

Функция $v_{\mu', \mu}^{\kappa, l}$ в комплексной плоскости z имеет разрез на вещественной оси от 0 до 1, связанный с функцией F , логарифмический разрез вдоль положительной вещественной полуоси из-за функции $(-z)^{-\mu' - l - \kappa - 1}$ при нецелых l , а также корневые разрезы от 0 до $+\infty$ и от 1 до $+\infty$, связанные с множителем $(-z)^{1/2(\mu' - \mu)}(1 - z)^{1/2(\mu' + \mu + \kappa)}$ при нецелых показателях степени. В плоскости l функция $v_{\mu', \mu}^{\kappa, l}$, кроме разрезов, связанных с множителем $N_{\mu', \mu}^{\kappa, l}$, имеет также полюсы, связанные с наличием в числителе Γ -функций. Других особенностей в конечной части плоскости l нет. При $\mu' = \mu = \kappa = 0$ имеем

$$v_{0,0}^{0,l}(z) = P_l(1 - 2z), \quad v_{0,0}^{0,l}(z) = Q_l(1 - 2z), \quad (2.6.16)$$

где P_l и Q_l — функции Лежандра I и II рода. Найдем теперь для функций $u_{\mu', \mu}^{\kappa, l}$ и $v_{\mu', \mu}^{\kappa, l}$ аналог формулы Гейне (Бейтмен и др. [23], стр. 169):

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) P_n(1 - 2z) Q_n(1 - 2z') = \frac{1}{z - z'}, \quad (2.6.17)$$

которая справедлива, если z лежит внутри некоторого эллипса с фокусами 0 и 1, а z' — вне этого эллипса. С этой целью обсудим прежде всего некоторые свойства функций $u_{\mu', \mu}^{\kappa, l}$ и $v_{\mu', \mu}^{\kappa, l}$.

Из формулы аналитического продолжения для гипергеометрических рядов (Бейтмен и др. [23], стр. 113) следует

$$\begin{aligned} (-1)^{\mu' - \mu} \frac{2 \sin \pi l}{\pi} v_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(z) &= e^{i\pi l \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z)} u_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(z) - \\ &- e^{i\pi(\mu + \kappa/2) \operatorname{sign}(\operatorname{Im} l)} e^{-i\pi \kappa \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z)/2} u_{\mu', -\mu - \kappa}^{\kappa, l}(1 - z). \end{aligned} \quad (2.6.18)$$

Из этой формулы и из соотношения симметрии (2.6.4) для функции $u_{\mu', \mu}^{\kappa, l}$ получаем

$$(-1)^{\mu' - \mu} v_{-\mu' - \kappa, -\mu - \kappa}^{\kappa, l}(z) = v_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(z) = v_{-\mu - \kappa, -\mu' - \kappa}^{\kappa, l}(z), \quad (2.6.19)$$

так что можно рассматривать только область (2.6.5). Из рекуррентных соотношений Гаусса (Бейтмен и др. [23], стр. 111) выводится рекуррентная формула

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[1 - 2z - \frac{(2\mu' + \kappa)(2\mu + \kappa)}{(2l + \kappa)(2l + \kappa + 2)} \right] u_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(z) &= \\ &= \frac{[(l - \mu')(l + \mu' + \kappa)(l - \mu)(l + \mu + \kappa)]^{1/2}}{(2l + \kappa)(2l + \kappa + 1)} u_{\mu', \mu}^{\kappa, l-1}(z) + \\ &+ \frac{[(1 + l - \mu')(1 + l + \mu' + \kappa)(1 + l - \mu)(1 + l + \mu + \kappa)]^{1/2}}{(2l + \kappa + 1)(2l + \kappa + 2)} u_{\mu', \mu}^{\kappa, l+1}(z). \end{aligned} \quad (2.6.20)$$

Здесь при $l > \mu'$ понимаются положительные значения корней. Согласно формуле (2.6.18), такая же формула справедлива для функций $v_{\mu'\mu}^{\kappa, l}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[1 - 2z - \frac{(2\mu' + \kappa)(2\mu + \kappa)}{(2l + \kappa)(2l + \kappa + 2)} \right] v_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(z) = \\ = \frac{[(l - \mu')(l + \mu' + \kappa)(l - \mu)(l + \mu + \kappa)]^{1/2}}{(2l + \kappa)(2l + \kappa + 1)} v_{\mu'\mu}^{\kappa, l-1}(z) + \\ + \frac{[(1 + l - \mu')(1 + l + \mu' + \kappa)(1 + l - \mu)(1 + l + \mu + \kappa)]^{1/2}}{(2l + \kappa + 1)(2l + \kappa + 2)} v_{\mu'\mu}^{\kappa, l+1}(z). \end{aligned} \quad (2.6.21)$$

Применяя обе рекуррентные формулы, получаем

$$\begin{aligned} 2(2l + \kappa + 1)(z - z') u_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(z) v_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(z') = \\ = K_{\mu'\mu}^{\kappa, l-1}(z, z') - K_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(z, z'), \end{aligned} \quad (2.6.22)$$

$$\begin{aligned} K_{\mu'\mu}^{\kappa, l-1}(z, z') \equiv \frac{[(l - \mu')(l + \mu' + \kappa)(l - \mu)(l + \mu + \kappa)]^{1/2}}{l + \kappa/2} \times \\ \times [u_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(z) v_{\mu'\mu}^{\kappa, l-1}(z') - u_{\mu'\mu}^{\kappa, l-1}(z) v_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(z')]. \end{aligned}$$

Суммирование по точкам $l = l_0, l_0 + 1, \dots, l_0 + N$ дает

$$\begin{aligned} 2(z - z') \sum_{l=l_0}^{l_0+N} (2l + \kappa + 1) u_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(z) v_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(z') = \\ = K_{\mu'\mu}^{\kappa, l_0-1}(z, z') - K_{\mu'\mu}^{\kappa, l_0+N}(z, z'). \end{aligned} \quad (2.6.23)$$

Из равенства $F(a, b; a; z) = (1 - z)^{-b}$ следует

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \mu' \pm i0} \frac{[(l - \mu')(l + \mu' + \kappa)(l - \mu)(l + \mu + \kappa)]^{1/2}}{l + \kappa/2} v_{\mu'\mu}^{\kappa, l-1}(z) = \\ = \frac{1}{u_{\mu'\mu}^{\kappa, \mu' \mp i0}(z)}, \end{aligned} \quad (2.6.24)$$

$$\begin{aligned} u_{\mu'\mu}^{\kappa, \mu' \mp i0}(z) = \\ = e^{\mp i\pi \frac{\mu' - \mu}{2}} + \sqrt{\frac{(2\mu' + \kappa)!}{(\mu' - \mu)!(\mu' + \mu + \kappa)!}} (-z)^{(\mu' - \mu)/2} (1 - z)^{(\mu' + \mu + \kappa)/2}. \end{aligned}$$

Так как

$$\lim_{l \rightarrow \mu' - 1 \pm i0} u_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(z) = 0,$$

то

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \mu' \pm i0} K_{\mu'\mu}^{\kappa, l-1}(z, z') = (-1)^{\mu' - \mu} \omega_{\mu'\mu}^{\kappa}(z) / \omega_{\mu'\mu}^{\kappa}(z'), \\ \omega_{\mu'\mu}^{\kappa}(z) \equiv (-z)^{(\mu' - \mu)/2} (1 - z)^{(\mu' + \mu + \kappa)/2}. \end{aligned} \quad (2.6.25)$$

Из асимптотического разложения Ватсона для гипергеометрической функции (Бейтмен и др. [23], стр. 88) при $|l| \rightarrow \infty$, $|\arg l| < \pi$ следует

$$u_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(-\operatorname{sh}^2 \zeta/2) = \frac{e^{i\pi \operatorname{sign}(\operatorname{Im} l) (\mu' - \mu)/2}}{(2\pi l \operatorname{sh} \zeta)^{1/2}} [e^{\zeta (l+1/2+\kappa/2)} + e^{i\pi \operatorname{sign}(\operatorname{Im} \zeta) (\mu' - \mu + 1/2)} e^{-\zeta (l+1/2+\kappa/2)}], \quad (2.6.26)$$

$$v_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(-\operatorname{sh}^2 \zeta/2) = \frac{e^{i\pi \operatorname{sign}(\operatorname{Im} l) (\mu' - \mu)/2}}{(2\pi l \operatorname{sh} \zeta)^{1/2}} e^{-\zeta (l+1/2+\kappa/2)}, \quad |\arg l| < \pi.$$

Отсюда и из свойства симметрии (2.6.4) получаем

$$\lim_{\operatorname{Re} l \rightarrow +\infty} K_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(-\operatorname{sh}^2 \zeta/2, -\operatorname{sh}^2 \zeta'/2) = \frac{(-1)^{\mu' - \mu} (e^{\zeta'} - e^{\zeta})}{2 (\operatorname{sh} \zeta' \operatorname{sh} \zeta)^{1/2}} \lim_{\operatorname{Re} l \rightarrow +\infty} e^{-(\zeta' - \zeta) (l+1/2+\kappa/2)} = 0 \quad \text{при } \zeta' > \zeta, \quad (2.6.27)$$

т. е. $K_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(z', z)$ исчезает при $\operatorname{Re} l \rightarrow +\infty$, если точка z лежит внутри эллипса, проходящего через точку z' и имеющего фокусы в точках 0 и 1, $z \in E(z')$. Учитывая, что произведение $u \cdot v$ не имеет разрывов в плоскости l , из формул (2.6.23), (2.6.25) и (2.6.27) получаем

$$\sum_{l=\mu'}^{\infty} (2l + \kappa + 1) u_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(z) v_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(z') = \frac{\omega_{\mu', \mu}^{\kappa}(z)}{2\omega_{\mu', \mu}^{\kappa}(z')} \frac{(-1)^{\mu' - \mu}}{z - z'}, \quad z \in E(z'). \quad (2.6.28)$$

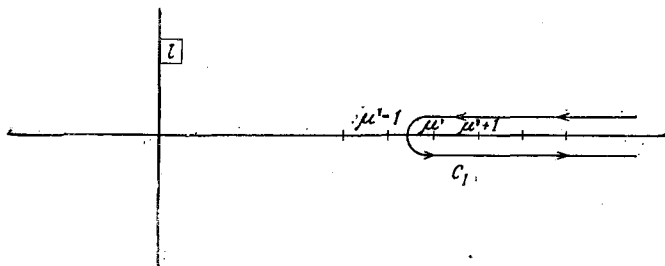
Здесь ряд сходится для всех $z \in E(z')$ и является в этой области разложением функции, стоящей в правой части. Очевидно, что формула (2.6.28) представляет собой обобщение формулы Гейне (2.6.17) и совпадает с ней при $\mu' = \mu = \kappa = 0$.

Формула (2.6.28) удобна для представлений группы $SU(2)$. Для группы $SU(1, 1)$ необходима модификация этой формулы, которую мы получим с помощью преобразования типа Зоммерфельда — Ватсона (см. книгу Зоммерфельда [27]). Прежде всего представим ряд (2.6.28) в виде интеграла по контуру C_1 , изображенному на фиг. 2.1:

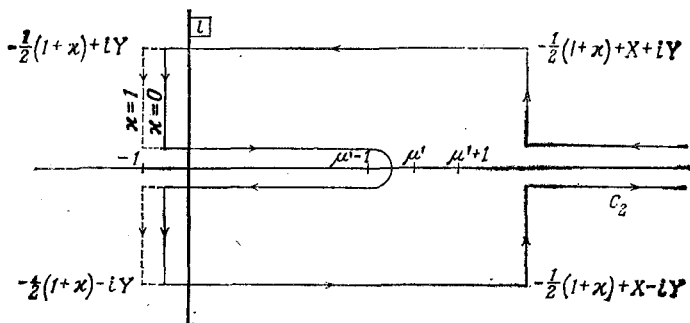
$$-\frac{i}{2} \int_{C_1} \frac{dl}{\sin \pi l} (2l + \kappa + 1) u_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(z) e^{-i\pi l \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z')} v_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(z'). \quad (2.6.29)$$

Так как, согласно формуле (2.6.2), функция $u_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(z) v_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(z)$ не имеет особенностей или разрывов при $\operatorname{Re} l > \mu' - 1$, то в силу

теоремы о вычетах интеграл (2.6.29) равен сумме ряда в формуле (2.6.28). Здесь множитель $(-1)^l$ переходит в $\exp[-i\pi l \times \times \text{sign}(\text{Im } z')]$ для нецелых l . При таком аналитическом продолжении удастся оценить подынтегральное выражение на C_2 ,



Фиг. 2.1.



Фиг. 2.2.

изображенном на фиг. 2.2. Контур C_1 может быть деформирован в контур C_2 , так как подынтегральное выражение может иметь полюсы лишь на вещественной оси. С помощью асимптотической формулы (2.6.26) при больших $|l|$ подынтегральное выражение можно представить в виде суммы двух экспонент с модулями

$$e^{-(\xi'-\xi)X} e^{-(\beta-\beta'+\pi \text{sign } \beta')Y - \pi |Y|}, \quad e^{-(\xi'+\xi)X} e^{-(\beta-\beta'+\pi \text{sign } \beta')Y - \pi |Y|}, \quad (2.6.30)$$

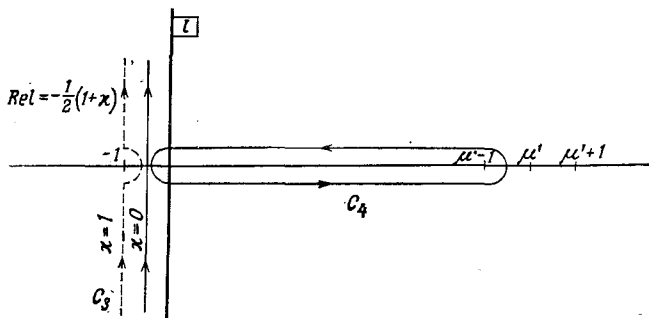
$$z = -\text{sh}^2 \zeta/2, \quad z' = -\text{sh}^2 \zeta'/2, \quad l + (1 + \kappa)/2 = X + iY, \quad \zeta, \zeta' \in S_{-\pi, \pi}.$$

Таким образом, при $X \rightarrow +\infty$ и $\xi' > \xi$, т. е. $z \in E(z')$, подынтегральное выражение экспоненциально падает. Чтобы получить такое поведение при $Y \rightarrow \pm \infty$, необходимо выполнение

условия

$$|\beta| < |\beta'|. \quad (2.6.31)$$

На плоскости z это условие можно представить следующим образом: среди гипербол с фокусами в точках 0 и 1 существует гипербола, проходящая между точками z и z' , причем z лежит по одну сторону от вещественной отрицательной полуоси, а z' — по другую. Иными словами, точка z принадлежит области $H(z')$, открытой части плоскости, содержащей вещественную отрицательную полуось и ограниченную гиперболой с фокусами в точках 0 и 1, проходящей через точку z' . Поэтому



Фиг. 2.3.

для $z \in E(z') \cap H(z')$ можно деформацией перевести контур C_2 в контур $-C_3 - C_4$, показанный на фиг. 2.3, и вместо ряда (2.6.28) получим

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \int_{C_3+C_4} \frac{dl}{\sin \pi l} (2l + \kappa + 1) u_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(z) e^{-i\pi l \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z')} v_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(z') = \\ = (-1)^{\mu'-\mu} \frac{1}{2} \frac{\omega_{\mu'\mu}^{\kappa}(z)}{\omega_{\mu'\mu}^{\kappa}(z')} \frac{1}{z-z'}, \quad z \in H(z'). \end{aligned} \quad (2.6.32)$$

Мы вывели эту формулу, предполагая, что $z \in H(z') \cap E(z')$. Однако интеграл существует для всех $z \in H(z')$ и является в этой области голоморфной функцией, поэтому равенство справедливо во всей области $H(z')$. Назовем равенство (2.6.32) обобщенной формулой Мелера. Действительно, с помощью соотношения

$$\begin{aligned} e^{-i\pi l \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z)} v_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(z) + e^{i\pi l \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z)} v_{\mu'\mu}^{\kappa, -l-\kappa-1}(z) = \\ = -(-1)^{\mu'-\mu} \pi \operatorname{ctg} \pi l e^{i\pi \left(\mu + \frac{\kappa}{2}\right) \operatorname{sign}(\operatorname{Im} l) - i\pi \kappa \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z)/2} u_{\mu', -\mu-\kappa}^{\kappa, l}(1-z), \end{aligned} \quad (2.6.33)$$

которое следует из формул (2.6.18) и (2.6.4), формула (2.6.32) при $\mu' = \mu = \kappa = 0$ приводится к хорошо известной формуле Мелера (Бейтмен и др. [23], стр. 176):

$$-\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{p \operatorname{th} \pi p}{\operatorname{ch} \pi p} P_{-1/2+ip} (1-2z) P_{-1/2+ip} (-(1-2z')) = \frac{1}{z-z'} \quad (2.6.34)$$

для конических функций $P_{-1/2+ip}$.

Мы используем обобщенные формулы Гейне и Мелера для вывода теорем разложения для некоторых голоморфных функций. Пусть f — функция вида

$$f(z) = \omega_{\mu'\mu}^{\kappa}(z) F(z),$$

$$\omega_{\mu'\mu}^{\kappa}(z) \equiv e^{i\pi \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z) (\mu' - \mu)/2} \omega_{\mu'\mu}^{\kappa}(z) = z^{(\mu' - \mu)/2} (1-z)^{(\mu' + \mu + \kappa)/2}, \quad (2.6.35)$$

где функция F голоморфна в области, содержащей $E(x_0)$, внутренность эллипса, проходящего через точку $x_0 < 0$, с фокусами в точках 0 и 1, а также его границу $\partial E(x_0)$. С помощью интегральной теоремы Коши и определения (2.6.7) получаем из ряда (2.6.28):

$$f(z) = \sum_{l=\mu'}^{\infty} (2l + \kappa + 1) \tilde{u}_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(z) \hat{f}(l),$$

$$\hat{f}(l) \equiv \frac{-1}{i\pi} \oint_{\partial E(x_0)} dz f(z) e^{-i\pi (\operatorname{sign}(\operatorname{Im} l) + \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z)) \frac{\mu' - \mu}{2}} v_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(z). \quad (2.6.36)$$

При стремлении точки z к отрезку $x \in [0, 1]$ мы можем стянуть контур интегрирования $\partial E(x_0)$ вокруг разреза подынтегральной функции между точками 0 и 1. Тогда с помощью соотношения

$$e^{-i\pi \operatorname{sign}(\operatorname{Im} l) (\mu' - \mu)/2} [e^{i\pi (\mu' - \mu)/2} v_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(x - i0) - e^{-i\pi (\mu' - \mu)/2} v_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(x + i0)] = -i\pi \tilde{u}_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.6.37)$$

которое следует из формул (2.6.18) и (2.6.7), вместо формулы (2.6.36) получаем

$$f(x) = \sum_{l=M}^{\infty} (2l + \kappa + 1) \tilde{u}_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(x) \hat{f}(l), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\hat{f}(l) \equiv \int_0^1 dx f(x) \tilde{u}_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(x), \quad M \equiv \max(\mu', \mu, -\mu' - \kappa, -\mu - \kappa),$$

$$\int_0^1 dx |f(x)|^2 = \sum_{l=M}^{\infty} (2l + \kappa + 1) |\hat{f}(l)|^2. \quad (2.6.38)$$

Чтобы записать эту формулу в виде, пригодном для всех значений μ' и μ , мы использовали здесь условия симметрии (2.6.4).

Пусть g — функция вида

$$g(z) = \omega_{\mu'\mu}^{\kappa}(z) G(z), \quad (2.6.39)$$

где функция G голоморфна в области, содержащей гиперболу $\partial H(x_0)$, проходящую через точку $x_0 \equiv (0, 1)$ и имеющую фокусы в точках 0 и 1, вместе с открытой областью плоскости, которая ограничена этой гиперболой и содержит вещественную отрицательную полуось. Пусть также функция G убывает при $\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty$ быстрее любой степени z . Тогда из (2.6.32) с помощью интегральной формулы Коши получаем

$$g(z) = -\frac{i}{2} \int_{C_3+C_4} dl (2l + \kappa + 1) \operatorname{ctg} \pi l \hat{u}_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(z) \hat{g}'(l), \quad (2.6.40)$$

$$\hat{g}'(l) \equiv \frac{(-1)^{\mu' - \mu}}{i\pi \cos \pi l} \int_{\partial H(x_0)} dz g(z) e^{-i\pi l \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z)} v_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(z).$$

Здесь перемена порядка интегрирования допустима благодаря заданному нами асимптотическому поведению функции G . Заметим, что интеграл по контуру $\partial H(x_0)$ не переходит в интеграл по замкнутому контуру из-за разреза, связанного с функцией $v_{\mu'\mu}^{\kappa, l}$, на интервале $(0, 1)$. Если точка z стремится к некоторой точке $x \equiv (-\infty, 0]$, то контур $\partial H(x_0)$ можно протянуть вокруг вещественной отрицательной полуоси. Так как функция $v_{\mu'\mu}^{\kappa, l}$ в этой области непрерывна, то из формулы (2.6.40) получим

$$g(x) = -\frac{i}{2} \int_{C_3+C_4} dl (2l + \kappa + 1) \operatorname{ctg} \pi l \hat{u}_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(x) \hat{g}'(l), \quad -\infty < x \leq 0, \quad (2.6.41)$$

$$\hat{g}'(l) \equiv \frac{2}{\pi} (-1)^{\mu' - \mu} \operatorname{tg} \pi l \int_{-\infty}^0 dx g(x) v_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(x).$$

Наличие нуля, связанного с множителем $(2l + \kappa + 1)$, позволяет нам выбрать прямую линию, проходящую через точку $l \equiv -1/2(1 + \kappa)$, в качестве контура C_3 на фиг. 2.3 также и при $\kappa = 1$. Поэтому в любом случае подстановка $l \rightarrow -l - \kappa - 1$ переводит C_3 в $-C_3$. Благодаря симметрии функции $u_{\mu'\mu}^{\kappa, l}$ относительно этой подстановки [см. формулу (2.6.4)] только симметричная часть функции g'

$$\hat{g}(l) \equiv \frac{\hat{g}'(l) - \hat{g}'(-l - \kappa - 1)}{2} \quad (2.6.42)$$

дает вклад в интеграл по контуру C_3 в формуле (2.6.41). Соотношение

$$v_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(z) - v_{\mu', \mu}^{\kappa, l-\kappa-1}(z) = (-1)^{\mu'-\mu} \pi \operatorname{ctg} \pi l u_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(z), \quad (2.6.43)$$

которое следует из формулы (2.6.18), дает

$$\hat{g}(l) = \int_{-\infty}^0 dx g(x) \hat{u}_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(x). \quad (2.6.44)$$

Точки $l=0, 1, \dots, \mu'-1$ окружены контуром C_4 . Функция $u_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(z) v_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(z')$, согласно формулам (2.6.1) и (2.6.15), имеет полюсы при $l=0, 1, \dots, \mu-1$ и $\mu \geq 1$ и регулярна во всех остальных случаях. Из формулы (2.6.18) сразу следует

$$\operatorname{Res}_{l \in \{0, 1, \dots, \mu-1\}} v_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(z) = \frac{(-1)^{\mu'-\mu}}{2} u_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(z), \quad \mu \geq 1, \quad (2.6.45)$$

так как функция $u_{\mu', \mu}^{\kappa, l-\mu-\kappa}(1-z)$ имеет нули в этих точках. Итак, для $l \in \{0, 1, \dots, \mu'-1\}$ имеем

$$\hat{g}'(l) = \hat{g}(l) = \begin{cases} \int_{-\infty}^0 dx g(x) \hat{u}_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(x) & \text{при } l=0, 1, \dots, \mu-1; \mu \geq 1, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (2.6.46)$$

Таким образом, суммируя все сказанное, напомним вместо формулы (2.6.41)

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-(1+\kappa)/2-i\infty}^{-(1+\kappa)/2+i\infty} dl (2l + \kappa + 1) \pi \operatorname{ctg} \pi l \hat{u}_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(x) \hat{g}(l) + \sum_{l=0}^N (2l + \kappa + 1) \hat{u}_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(x) \hat{g}(l), \quad -\infty < x \leq 0, \quad (2.6.47)$$

$$\hat{g}(l) \equiv \int_{-\infty}^0 dx g(x) \hat{u}_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(x),$$

$$\int_{-\infty}^0 dx |g(x)|^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-(1+\kappa)/2-i\infty}^{-(1+\kappa)/2+i\infty} dl (2l + \kappa + 1) \pi \operatorname{ctg} \pi l |\hat{g}(l)|^2 + \sum_{l=0}^N (2l + \kappa + 1) |\hat{g}(l)|^2,$$

$$N \equiv M - |\mu' - \mu| - 1; \quad M \equiv \max(\mu', \mu, -\mu' - \kappa, -\mu - \kappa).$$

Здесь снова были использованы свойства симметрии (2.6.4), чтобы записать результат в виде, пригодном при всех значениях μ' , μ . Подразумевается, что при $N < 0$ сумма равна нулю.

Можно вывести соотношения, дуальные к формулам разложения (2.6.38) и (2.6.47), которые, по существу, содержат условия ортогональности для функций $u_{\mu', \mu}^{\kappa, l}$. Прежде всего воспользуемся дифференциальными уравнениями

$$[\Delta_{\mu', \mu}^{\kappa, l} + (l + \kappa/2)(l + \kappa/2 + 1)] u_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(z) = 0,$$

$$[\Delta_{\mu', \mu}^{\kappa, l} + (l + \kappa/2)(l + \kappa/2 + 1)] v_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(z) = 0,$$

$$\Delta_{\mu', \mu}^{\kappa, l} \equiv z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} + (1-2z) \frac{d}{dz} - \frac{(\mu' - \mu)^2 + (2\mu' + \kappa)(2\mu + \kappa)z}{4z(1-z)}, \quad (2.6.48)$$

которые эквивалентны гипергеометрическим, чтобы найти соотношения, дуальные к обобщенным формулам Гейне и Мелера. Известные формулы дифференцирования гипергеометрических функций отвечают следующим соотношениям:

$$\frac{\Lambda_{\mu' - 1, \mu}^{\kappa, l, +} \omega_{\mu' - 1, \mu}^{\kappa, l}(z)}{(l - \mu' + 1)(l + \mu' + \kappa) N_{\mu' - 1, \mu}^{\kappa, l}} = \frac{\omega_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(z)}{N_{\mu', \mu}^{\kappa, l}} = \frac{\Lambda_{\mu' + 1, \mu}^{\kappa, l, -} \omega_{\mu' + 1, \mu}^{\kappa, l}(z)}{N_{\mu' + 1, \mu}^{\kappa, l}}, \quad (2.6.49)$$

$$\Lambda_{\mu', \mu}^{\kappa, l, \pm} \equiv \pm \sqrt{-z(1-z)} \frac{d}{dz} + \frac{(\mu' - \mu)(1-z) - (\mu' + \mu + \kappa)z}{2\sqrt{-z(1-z)}},$$

$$\omega_{\mu', \mu}^{\kappa, l} = \begin{cases} u_{\mu', \mu}^{\kappa, l} \\ v_{\mu', \mu}^{\kappa, l} \end{cases}$$

Используя эти соотношения и дифференциальное уравнение (2.6.48), можно доказать справедливость следующей формулы:

$$u_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(z) v_{\mu', \mu}^{\kappa, l'}(z) e^{-i\pi l' \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z)} = \frac{-e^{-i\pi l' \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z)}}{(l + l' + \kappa + 1)(l - l')} \times \\ \times \frac{d}{dz} \left\{ \sqrt{-z(1-z)} \left[\frac{N_{\mu', \mu}^{\kappa, l}}{N_{\mu' - 1, \mu}^{\kappa, l}} v_{\mu', \mu}^{\kappa, l'}(z) u_{\mu' - 1, \mu}^{\kappa, l}(z) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{N_{\mu', \mu}^{\kappa, l'}}{N_{\mu' - 1, \mu}^{\kappa, l'}} v_{\mu' - 1, \mu}^{\kappa, l'}(z) u_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(z) \right] \right\}. \quad (2.6.50)$$

С точки зрения теории групп операторы

$$\Lambda_{\mu', \mu}^{\kappa, l, \pm} \quad \text{и} \quad \Delta_{\mu', \mu}^{\kappa, l} = \Lambda_{\mu', \mu}^{\kappa, l, \pm} \mp \Lambda_{\mu', \mu}^{\kappa, l, \mp} - (\mu' + \kappa/2)(\mu' + \kappa/2 \mp 1)$$

являются дифференциальными операторами, связанными соответственно с элементами алгебры Ли и с оператором Казимира для группы $SU(2)$ или $SU(1, 1)$. Функция в левой части формулы (2.6.50) аналитична и однозначна в комплексной плоскости z с разрезом вдоль вещественной оси. Проинтегрируем теперь равенство (2.6.50) по открытым полудугам положительно ориентированного эллипса $\partial E(x_0)$, $x_0 < 0$, лежащим в верхней и нижней полуплоскостях [ср. с формулой (2.6.36)]. Используя соотношение

$$\begin{aligned} e^{i\pi((\mu' - \mu)/2 + l)} v_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(x - i0) - e^{-i\pi((\mu' - \mu)/2 + l)} v_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(x + i0) = \\ = i\pi (-1)^{\mu + \kappa + 1} e^{-i\pi \operatorname{sign}(\operatorname{Im} l) (\mu' - \mu)/2} \tilde{u}_{\mu', -\mu - \kappa}^{\kappa, l}(1 - x), \quad 0 < x < 1, \end{aligned} \quad (2.6.51)$$

которое следует из формулы (2.6.18), и формулу (2.6.7) в пределе $x_0 \rightarrow -0$, представим левую часть в виде интеграла

$$i\pi (-1)^{\mu + \kappa + 1} e^{i\pi(\operatorname{sign}(\operatorname{Im} l) - \operatorname{sign}(\operatorname{Im} l')) \frac{\mu' - \mu}{2}} \int_0^1 dx \tilde{u}_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(x) \tilde{u}_{\mu', -\mu - \kappa}^{\kappa, l}(1 - x). \quad (2.6.52)$$

Правая часть вычисляется подстановкой выражения в фигурных скобках в крайних точках контура интегрирования: $x_0 - i0$, $1 - x_0 + i0$, $1 - x_0 - i0$, $x_0 + i0$. В пределе $x_0 \rightarrow -0$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{-i(-1)^{\mu' - \mu}}{(l + l' + \kappa + 1)(l - l')} \frac{N_{\mu', \mu}^{\kappa, l}}{N_{\mu', \mu}^{\kappa, l'}} \frac{\Gamma(1 + l' - \mu)}{\Gamma(1 + l' + \mu + \kappa)} \times \\ \times \left[\frac{\Gamma(1 + l + \mu + \kappa)}{\Gamma(1 + l - \mu)} \sin \pi l - \frac{\Gamma(1 + l' + \mu + \kappa)}{\Gamma(1 + l' - \mu)} \sin \pi l' \right]. \end{aligned} \quad (2.6.53)$$

Поэтому последние две формулы приводят к соотношению

$$\begin{aligned} (l' + l + \kappa + 1) \int_0^1 dx \tilde{u}_{\mu', \mu}^{\kappa, l}(x) (-1)^{\mu' + \kappa} \tilde{u}_{\mu', -\mu - \kappa}^{\kappa, l'}(1 - x) = \\ = e^{-i\pi(\operatorname{sign}(\operatorname{Im} l) - \operatorname{sign}(\operatorname{Im} l')) (\mu' - \mu)/2} \frac{N_{\mu', \mu}^{\kappa, l}}{N_{\mu', \mu}^{\kappa, l'}} \frac{1}{\pi(l - l')} \times \\ \times \frac{\Gamma(1 + l' - \mu)}{\Gamma(1 + l' + \mu + \kappa)} \left[\frac{\Gamma(1 + l + \mu + \kappa)}{\Gamma(1 + l - \mu)} \sin \pi l - \frac{\Gamma(1 + l' + \mu + \kappa)}{\Gamma(1 + l' - \mu)} \sin \pi l' \right], \end{aligned} \quad (2.6.54)$$

которое можно интерпретировать как формулу, дуальную обобщенной формуле Гейне (2.6.28). Из (2.6.18) для целых $l \geq \mu'$, $-\mu' - \kappa$, μ , $-\mu - \kappa$ следует

$$(-1)^{\mu' + \kappa} \tilde{u}_{\mu', -\mu - \kappa}^{\kappa, l} (1 - x) = (-1)^l \tilde{u}_{\mu', \mu}^{\kappa, l} (x). \quad (2.6.55)$$

Отсюда и из формулы (2.6.2) сразу же выводится соотношение ортогональности

$$\int_0^1 dx \tilde{u}_{\mu', \mu}^{\kappa, l'} (x) \tilde{u}_{\mu', \mu}^{\kappa, l} (x) = \frac{\delta_{ll'}}{2l + \kappa + 1}, \quad (2.6.56)$$

$l, l' \geq M$, целое, $M \equiv \max(\mu', \mu, -\mu' - \kappa, -\mu - \kappa)$.

Для любой комплексной функции \hat{f} на точечном множестве $\{M, M + 1, M + 2, \dots\}$ с компактным носителем, таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \hat{f}(l) &= \int_0^1 dx \tilde{u}_{\mu', \mu}^{\kappa, l} (x) f(x), \quad l \in \{M, M + 1, M + 2, \dots\}, \\ f(x) &\equiv \sum_{l=M}^{\infty} (2l + \kappa + 1) \tilde{u}_{\mu', \mu}^{\kappa, l} (x) \hat{f}(l), \quad x \in [0, 1], \\ \int_0^1 dx |f(x)|^2 &= \sum_{l=M}^{\infty} (2l + \kappa + 1) |\hat{f}(l)|^2. \end{aligned} \quad (2.6.57)$$

Если интегрировать формулу (2.6.50) по полудугам положительно ориентированной гиперболы $\partial H(x_0)$, $x_0 \in (0, 1)$, лежащим соответственно в нижней и верхней полуплоскостях, то интеграл сходится только при $\operatorname{Re}[l' + 1/2(1 + \kappa)] > |\operatorname{Re}[l + 1/2(1 + \kappa)]|$. В этом случае левая часть в пределе $x_0 \rightarrow +0$ сводится к интегралу

$$2i \sin \pi l' \int_0^1 dx u_{\mu', \mu}^{\kappa, l} (x) v_{\mu', \mu}^{\kappa, l'} (x). \quad (2.6.58)$$

Правая часть (2.6.50) равна разности значений функции в фигурных скобках в граничных точках контура интегрирования и при $x_0 \rightarrow +0$ приводится к виду

$$i \sin \pi l' (-1)^{\mu' - \mu} N_{\mu', \mu}^{\kappa, l} / N_{\mu', \mu}^{\kappa, l'} \frac{1}{(l + l' + \kappa + 1)(l' - l)}. \quad (2.6.59)$$

Окончательный результат,

$$\int_{-\infty}^0 dx u_{\mu'\mu}^{\kappa, l'}(x) v_{\mu'\mu}^{\kappa, l'}(x) = \frac{1}{2} (-1)^{\mu' - \mu} N_{\mu'\mu}^{\kappa, l} / N_{\mu'\mu}^{\kappa, l'} \frac{1}{(l' + l + \kappa + 1)(l' - l)}, \quad (2.6.60)$$

$$\operatorname{Re} \left(l' + \frac{1 + \kappa}{2} \right) > \left| \operatorname{Re} \left(l + \frac{1 + \kappa}{2} \right) \right|,$$

можно рассматривать как формулу, дуальную обобщенной формуле Мелера (2.6.32). Теперь пусть $\mu \geq 1$ и $l \in \{0, 1, \dots, \mu - 1\}$. Если значение l' стремится к целому числу $\geq l$ из множества $\{0, 1, \dots, \mu - 1\}$, то из формул (2.6.60) и (2.6.45) немедленно следуют соотношения ортогональности

$$\int_{-\infty}^0 dx \hat{u}_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(x) \hat{u}_{\mu'\mu}^{\kappa, l'}(x) = \frac{\delta_{ll'}}{2l + \kappa + 1}, \quad l, l' \in \{0, 1, \dots, N\}, \quad (2.6.61)$$

$$N \equiv M - |\mu' - \mu| - 1, \quad N \geq 0,$$

$$M \equiv \max(\mu', \mu, -\mu' - \kappa, -\mu - \kappa).$$

Здесь ограничение $l' \geq l$ может быть опущено, так как формула симметрична; ее справедливость при всех μ', μ , таких, что $N \geq 0$, следует из условий симметрии (2.6.4). Пусть функция \hat{g} имеет вид $\hat{g}(l) = N_{\mu'\mu}^{\kappa, l} G(l)$, где $\hat{G}(l)$ — целая функция, стремящаяся к нулю при $\operatorname{Im} l \rightarrow \pm \infty$ быстрее, чем любая степенная функция, и симметричная относительно подстановки $l \rightarrow -l - \kappa - 1$. Пусть также l лежит на прямой $-\frac{1}{2}(1 + \kappa) + i\mathbf{R} = C_3$. Проинтегрируем соотношение (2.6.60), умноженное на функцию $(2l' + \kappa + 1)\hat{g}(l')$ по контуру $C_3 + \varepsilon$ снизу вверх и по контуру $C_3 - \varepsilon$ сверху вниз ($0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$), причем во втором интеграле функцию $v_{\mu'\mu}^{\kappa, l'}$ вследствие указанного ограничения на $\operatorname{Re} l'$ следует заменить функцией $v_{\mu'\mu}^{\kappa, l' - \kappa - 1}$. В правой части сумма вычетов дает

$$i\pi (-1)^{\mu' - \mu} [\hat{g}(l) + \hat{g}(-l - \kappa - 1)] = 2\pi i (-1)^{\mu' - \mu} \hat{g}(l),$$

а левая часть приводится к интегралу

$$\int_{-\infty}^0 dx u_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(x) \int_{-(1+\kappa)/2-l-\infty}^{-(1+\kappa)/2+l-\infty} dl' [(2l' + \kappa + 1 + 2\varepsilon) v_{\mu'\mu}^{\kappa, l'+\varepsilon}(x) \hat{g}(l' + \varepsilon) - (2l' + \kappa + 1 - 2\varepsilon) v_{\mu'\mu}^{\kappa, l'-\kappa-1+\varepsilon}(x) \hat{g}(l' - \varepsilon)]. \quad (2.6.62)$$

Можно изменить порядок интегрирования благодаря заданному асимптотическому поведению наших функций. Так как правая часть не зависит от ε , то из непрерывности в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ с помощью формулы (2.6.43) получают обобщенные условия ортогональности:

$$\hat{g}(l) = \int_{-\infty}^0 dx \hat{u}_{\mu\mu}^{\kappa,l}(x) g(x), \quad l \in C_3 = -\frac{1+\kappa}{2} + iR,$$

$$g(x) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} dl (2l + \kappa + 1) \pi \operatorname{ctg} \pi l \hat{u}_{\mu\mu}^{\kappa,l}(x) \hat{g}(l), \quad x \leq 0, \quad (2.6.63)$$

$$\int_{-\infty}^0 dx |g(x)|^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} dl (2l + \kappa + 1) \pi \operatorname{ctg} \pi l |\hat{g}(l)|^2.$$

Наконец, из формул (2.6.60) и (2.6.45) при $N \geq 0$ следует также

$$\int_{-\infty}^0 dx \hat{u}_{\mu\mu}^{\kappa,l}(x) \hat{u}_{\mu\mu}^{\kappa,l'}(x) = 0, \quad l \in C_3, \quad l' \in \{0, 1, \dots, N\}. \quad (2.6.64)$$

Легко видеть, что формулы (2.6.61) — (2.6.64) можно объединить:

$$\hat{g}(l) = \int_{-\infty}^0 dx \hat{u}_{\mu\mu}^{\kappa,l}(x) g(x), \quad l \in C_3 \cup \{0, 1, \dots, N\},$$

$$g(x) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} dl (2l + \kappa + 1) \pi \operatorname{ctg} \pi l \hat{u}_{\mu\mu}^{\kappa,l}(x) \hat{g}(l) + \\ + \sum_{l=0}^N (2l + \kappa + 1) \hat{u}_{\mu\mu}^{\kappa,l}(x) \hat{g}(l), \quad (2.6.65)$$

$$\int_{-\infty}^0 dx |g(x)|^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} dl (2l + \kappa + 1) \pi \operatorname{ctg} \pi l |\hat{g}(l)|^2 + \\ + \sum_{l=0}^N (2l + \kappa + 1) |\hat{g}(l)|^2.$$

Можно показать, что разложения (2.6.38) и (2.6.47), а также дуальные разложения (2.6.57) и (2.6.65), могут быть дополнены до унитарного отображения гильбертовых пространств $\mathcal{L}^2(0, 1)$ и $\mathcal{L}^2(-\infty, 0)$ соответственно на гильбертовы пространства $l_{\mu\mu}^{2,\kappa}$

со скалярным произведением

$$\langle \hat{f}' | \hat{f} \rangle_{\mu' \mu}^{\kappa} \equiv \sum_{l=M}^{\infty} (2l + \kappa + 1) \hat{f}'(l)^* \hat{f}(l) \quad (2.6.66)$$

и $\mathcal{H}_{\mu' \mu}^{\kappa}$ со скалярным произведением

$$\langle \hat{g}' | \hat{g} \rangle_{\mu' \mu}^{\kappa} \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} dl (2l + \kappa + 1) \pi \operatorname{ctg} \pi l \hat{g}'(l)^* \hat{g}(l) + \sum_{l=0}^N (2l + \kappa + 1) \hat{g}'(l)^* \hat{g}(l). \quad (2.6.67)$$

В первом случае наше утверждение следует из того факта, что системы функций

$$\{ \hat{f}_l : l = M, M + 1, \dots; \hat{f}_l(x) = \sqrt{2l + \kappa + 1} \tilde{u}_{\mu' \mu}^{\kappa, l}(x) \}$$

и

$$\{ \hat{f}_l : l = M, M + 1, \dots; \hat{f}_l(l') = \frac{\delta_{ll'}}{\sqrt{2l + \kappa + 1}} \}$$

удовлетворяют требованиям, при которых были выведены разложения (2.6.38) и (2.6.57) соответственно. Здесь \hat{f}_l является образом f_l , и наоборот. Как следует из теоремы Вейерштрасса, система функций $\{ \hat{f}_l \}$ образует полный ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{L}^2(0, 1)$, а система $\{ f_l \}$ представляет такой базис в пространстве $\mathcal{L}_{\mu' \mu}^{\kappa}$. Для второго случая мы не имеем простого аналитического доказательства. В дальнейшем пары формул (2.6.38), (2.6.57) и (2.6.47), (2.6.65) рассматриваются как унитарные преобразования и являются основой анализа Фурье в гильбертовых пространствах $\mathcal{L}^2(SU(2))$ и $\mathcal{L}^2(SU(1, 1))$, квадратично интегрируемых функций на группах $SU(2)$ и $SU(1, 1)$ соответственно.

Инвариантная мера Хаара на обеих группах в параметризации (2.6.11) и (2.6.13) равна

$$\int dA \equiv \int \frac{d\alpha}{2\pi} dz \frac{d\gamma}{4\pi}. \quad (2.6.68)$$

Здесь $z \in [0, 1]$ при $A \in SU(2)$ и $z \in (-\infty, 0]$ при $A \in SU(1, 1)$.

Нормировка выбрана таким образом, что $\int dA = 1$ для компактной группы $SU(2)$.

Любой элемент $f \in \mathcal{L}^2(G)$, $G \in \{SU(2), SU(1, 1)\}$ можно записать в виде функции параметров α, z, γ . Если периодически продолжить функцию f по параметрам α и γ :

$$f(A) = f(\alpha, z, \gamma) = f(\alpha, z, \gamma + 4\pi) = f(\alpha + 2\pi, z, \gamma + 2\pi), \quad (2.6.69)$$

то, разлагая в ряд Фурье по параметру γ , получим

$$f(\alpha, z, \gamma) = \sum_{\kappa=0,1} \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} f_{\mu+\kappa/2}(\alpha, z) e^{-i(\mu+\kappa/2)\gamma}, \quad (2.6.70)$$

$$f_{\mu+\kappa/2}(\alpha, z) = \int_0^{4\pi} \frac{d\gamma}{4\pi} e^{i(\mu+\kappa/2)\gamma} f(\alpha, z, \gamma),$$

где в силу условия периодичности (2.6.69)

$$f_{\mu+\kappa/2}(\alpha + 2\pi, z) = (-1)^\kappa f_{\mu+\kappa/2}(\alpha, z). \quad (2.6.71)$$

При этом для функции $f_{\mu+\kappa/2}$ можно записать ряд Фурье по параметру α :

$$f_{\mu+\kappa/2}(\alpha, z) = \sum_{\mu'=-\infty}^{+\infty} f_{\mu'\mu}^{\kappa}(\alpha, z) e^{-i(\mu'+\kappa/2)\alpha}, \quad (2.6.72)$$

$$f_{\mu'\mu}^{\kappa}(\alpha, z) = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} e^{i(\mu'+\kappa/2)\alpha} f_{\mu+\kappa/2}(\alpha, z).$$

Наконец, если для функции $f_{\mu'\mu}^{\kappa}(\alpha, z)$ использовать разложения (2.6.38) и (2.6.47), то мы получаем

$$f(\alpha, x, \gamma) = \sum_{\kappa=0,1} \sum_{\mu'} \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=M}^{\infty} (2l + \kappa + 1) \hat{f}_{\mu'\mu}^{\kappa, l} \times$$

$$\times e^{-i(\mu'+\kappa/2)\alpha} \hat{u}_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(x) e^{-i(\mu+\kappa/2)\gamma}, \quad (2.6.73)$$

$$\hat{f}_{\mu'\mu}^{\kappa, l} = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{4\pi} \frac{d\gamma}{4\pi} e^{i(\mu'+\kappa/2)\alpha} \hat{u}_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(x) \times$$

$$\times e^{i(\mu+\kappa/2)\gamma} f(\alpha, x, \gamma),$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad l \in \{M, M+1, \dots\},$$

$$M \equiv \max(\mu', \mu, -\mu' - \kappa, -\mu - \kappa);$$

$$f(\alpha, x, \gamma) = \sum_{\kappa=0,1} \sum_{\mu'} \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{i\pi} \int_{-(1+\kappa)/2}^{-(1+\kappa)/2 + i\infty} dl (2l + \kappa + 1) \pi \operatorname{ctg} \pi l \hat{f}_{\mu'\mu}^{\kappa, l} \times \right.$$

$$\times e^{-i(\mu'+\kappa/2)\alpha} \hat{u}_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(x) e^{-i(\mu+\kappa/2)\gamma} +$$

$$\left. + \sum_{l=0}^N (2l + \kappa + 1) \hat{f}_{\mu'\mu}^{\kappa, l} e^{-i(\mu'+\kappa/2)\alpha} \hat{u}_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(x) e^{-i(\mu+\kappa/2)\gamma} \right\}.$$

$$\hat{f}_{\mu'\mu}^{\kappa, l} = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^0 dx \int_0^{4\pi} \frac{d\gamma}{4\pi} e^{i(\mu'+\kappa/2)\alpha} \hat{u}_{\mu'\mu}^{\kappa, l}(x) e^{i(\mu+\kappa/2)\gamma} f(\alpha, x, \gamma),$$

$$-\infty < x \leq 0, \quad l \in \{-(1+\kappa)/2 + i[0, +\infty)\} \cup \{0, 1, \dots, N\},$$

$$N \equiv M - |\mu' - \mu| - 1.$$

Здесь сумму по $l \leq N$ следует опустить при $N < 0$. Заметим, что функции $\tilde{u}_{\mu'\mu}^{\kappa, l}$ и $\hat{u}_{\mu'\mu}^{\kappa, l}$ вещественны, так что, меняя порядок суммирования и используя формулы (2.2.4) и (2.3.15), выражение (2.6.73) можно переписать в следующем виде:

$$f(A) = \sum_{\kappa=0, 1} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + \kappa + 1) \sum_{\mu', \mu=-l-\kappa}^l \hat{f}_{\mu'\mu}^{\kappa, l} U_{SU(2)}^{\kappa, l}(A)_{\mu\mu'}^{\dagger},$$

$$\hat{f}_{\mu'\mu}^{\kappa, l} = \int_{SU(2)} dA U_{SU(2)}^{\kappa, l}(A)_{\mu'\mu} f(A),$$

$$A \in SU(2), \quad l \in \{0, 1, \dots\};$$

$$f(A) = \sum_{\kappa=0, 1} \left\{ \frac{1}{i\pi} \int_{-(1+\kappa)/2}^{-(1+\kappa)/2 + i\infty} dl (2l + \kappa + 1) \pi \operatorname{ctg} \pi l \times \right.$$

$$\times \sum_{\mu'\mu=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_{\mu'\mu}^{\kappa, l, 0} U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, 0}(A)_{\mu\mu'}^{\dagger} + \left. (2.6.74) \right.$$

$$+ \sum_{l=0}^{\infty} (2l + \kappa + 1) \left[\sum_{\mu', \mu=l+1}^{+\infty} \hat{f}_{\mu'\mu}^{\kappa, l, +} U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, +}(A)_{\mu\mu'}^{\dagger} + \right. \\ \left. + \sum_{\mu', \mu=-l-\kappa-1}^{-\infty} \hat{f}_{\mu'\mu}^{\kappa, l, -} U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, -}(A)_{\mu\mu'}^{\dagger} \right] \Bigg\}.$$

$$\hat{f}_{\mu'\mu}^{\kappa, l, \eta} = \int_{SU(1,1)} dA U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, \eta}(A)_{\mu'\mu} f(A),$$

$$A \in SU(1, 1), \quad l \in \{-(1+\kappa)/2 + i[0, +\infty)\} \cup \{0, 1, \dots\}.$$

Используя условия ортогональности и полноты для рядов Фурье (2.6.70) и (2.6.72) и для разложений (2.6.38) и (2.6.47), можно записать формулы Планшереля для групп $SU(2)$ и

$SU(1, 1)$:

$$\int_{SU(2)} dA |f(A)|^2 = \sum_{\kappa=0, 1} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + \kappa + 1) \sum_{\mu' \mu = -l - \kappa}^l |\hat{f}_{\mu' \mu}^{\kappa, l}|^2,$$

$$\int_{SU(1, 1)} dA |f(A)|^2 =$$

$$= \sum_{\kappa=0, 1} \left\{ \frac{1}{i\pi} \int_{-(1+\kappa)/2}^{-(1+\kappa)/2 + i\infty} dl (2l + \kappa + 1) \pi \operatorname{ctg} \pi l \times \right. \quad (2.6.75)$$

$$\times \sum_{\mu', \mu = -\infty}^{\infty} |\hat{f}_{\mu' \mu}^{\kappa, l, 0}|^2 + \sum_{l=0}^{\infty} (2l + \kappa + 1) \times$$

$$\left. \times \left[\sum_{-\mu', \mu = l+1}^{+\infty} |\hat{f}_{\mu' \mu}^{\kappa, l, +}|^2 + \sum_{\mu', \mu = -l - \kappa - 1}^{-\infty} |\hat{f}_{\mu' \mu}^{\kappa, l, -}|^2 \right] \right\}.$$

Эти формулы следует интерпретировать как условия унитарности для заданных формулами (2.6.74) преобразований между гильбертовыми пространствами $\mathcal{L}^2(G)$ и пространствами $\mathcal{L}^2(\hat{G})$, скалярное произведение в которых задано правой частью формул (2.6.75). Подчеркнем в этой связи, что разложения (2.6.74) не обладают точечной сходимостью, а сходятся в среднем относительно норм, заданных в соответствующих гильбертовых пространствах. Однако в пространствах $\mathcal{L}^2(G)$ и $\mathcal{L}^2(\hat{G})$ существуют плотные подпространства, сходимости в которых является точечной. Формулы (2.6.74) и (2.6.75) можно представить также в следующем виде:

$$f(A) = \sum_{\kappa=0, 1} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + \kappa + 1) \operatorname{Sp}(\hat{f}^{\kappa, l} U_{SU(2)}^{\kappa, l}(A)^{\dagger}), \quad A \in SU(2),$$

$$\hat{f}^{\kappa, l} = \int_{SU(2)} dA U_{SU(2)}^{\kappa, l}(A) f(A), \quad l \in \{0, 1, \dots\}, \quad (2.6.76)$$

$$\int_{SU(2)} dA |f(A)|^2 = \sum_{\kappa=0, 1} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + \kappa + 1) \operatorname{Sp}(\hat{f}^{\kappa, l} \hat{f}^{\kappa, l});$$

$$f(A) = \sum_{\kappa=0, 1} \left\{ \frac{1}{i\pi} \int_{-(1+\kappa)/2}^{-(1+\kappa)/2 + i\infty} dl (2l + \kappa + 1) \pi \operatorname{ctg} \pi l \times \right.$$

$$\times \operatorname{Sp}(\hat{f}^{\kappa, l, 0} U_{SU(1, 1)}^{\kappa, l, 0}(A)^{\dagger}) +$$

$$\left. + \sum_{l=0}^{\infty} (2l + \kappa + 1) \sum_{\eta=\pm} \operatorname{Sp}(\hat{f}^{\kappa, l, \eta} U_{SU(1, 1)}^{\kappa, l, \eta}(A)^{\dagger}) \right\}, \quad A \in SU(1, 1),$$

$$\hat{f}^{\kappa, l, \eta} = \int_{SU(1,1)} dA U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, \eta}(A) f(A),$$

$$l \in \left\{ -\frac{1+\kappa}{2} + i[0, +\infty) \right\} \cup \{0, 1, \dots\},$$

$$\int_{SU(1,1)} dA |f(A)|^2 =$$

$$= \sum_{\kappa=0,1} \left\{ \frac{1}{i\pi} \int_{-(1+\kappa)/2}^{-(1+\kappa)/2+i\infty} dl (2l + \kappa + 1) \pi \operatorname{ctg} \pi l \operatorname{Sp} \left([\hat{f}^{\kappa, l, 0}]^+ \hat{f}^{\kappa, l, 0} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{l=0}^{\infty} (2l + \kappa + 1) \sum_{\eta=\pm} \operatorname{Sp} \left([\hat{f}^{\kappa, l, \eta}]^+ \hat{f}^{\kappa, l, \eta} \right) \right\}.$$

Наконец, абстрактная формулировка этих соотношений имеет вид

$$f(A) = \int_{\hat{G}} d\hat{\mu}(\rho) \operatorname{Sp}(\hat{f}^\rho U_G^0(A)^+), \quad A \in G,$$

$$\hat{f}^\rho = \int_G dA U_G^0(A) f(A), \quad \rho \in \hat{G}, \quad (2.6.77)$$

$$\int_G dA |f(A)|^2 = \int_{\hat{G}} d\hat{\mu}(\rho) \operatorname{Sp}(\hat{f}^{\rho+} \hat{f}^\rho),$$

где \hat{G} — множество классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений группы G , $\rho \in \hat{G}$, а $\hat{\mu}$ — мера Планшереля на множестве \hat{G} , конкретный вид которой задан формулами (2.6.76). Легко видеть, что пространство $\mathcal{L}^2(\hat{G})$ имеет следующую структуру:

$$\mathcal{L}^2(\hat{G}) = \bigoplus_{\hat{G}} \int \sqrt{d\hat{\mu}(\rho)} \mathcal{L}^2(\mathfrak{H}_G^0), \quad (2.6.78)$$

где $\mathcal{L}^2(\mathfrak{H}_F^0)$ — гильбертово пространство всех операторов Гильберта — Шмидта в пространстве представления \mathfrak{H}_G^0 , т. е. пространство всех ограниченных линейных операторов в пространстве \mathfrak{H}_G^0 с конечной нормой относительно скалярного произведения

$$\langle \hat{f}'^\rho | \hat{f}^\rho \rangle_G \equiv \operatorname{Sp}(\hat{f}'^{\rho+} \hat{f}^\rho); \quad \hat{f}'^\rho, \hat{f}^\rho \in \mathcal{L}^2(\mathfrak{H}_G^0). \quad (2.6.79)$$

Это допускает следующую интерпретацию обобщенного преобразования Фурье (2.6.77). Каждой функции $f \in \mathcal{L}^2(G)$ соответ-

ствует операторное поле $f: \hat{G} \rightarrow \mathcal{L}^2(\hat{G})$, где почти для всех ρ (по мере $\hat{\mu}$) f^ρ — оператор Гильберта — Шмидта в пространстве $\mathfrak{H}_{\hat{G}}^\rho$, и интеграл

$$\int_{\hat{G}} d\hat{\mu}(\rho) \operatorname{Sp}(f^{\rho\dagger} f^\rho)$$

сходится. И наоборот: каждому такому полю операторов соответствует элемент пространства $\mathcal{L}^2(G)$. Это взаимное отображение пространств $\mathcal{L}^2(G)$ и $\mathcal{L}^2(\hat{G})$ унитарно.

В заключение отметим одну особенность, отличающую анализ Фурье на компактных топологических группах от анализа Фурье на некомпактных группах. В то время как для анализа Фурье квадратично интегрируемых функций на компактных группах необходимы, вообще говоря, все классы эквивалентности неприводимых унитарных представлений, для некомпактных групп это не так. В частности, для группы $SU(1, 1)$ Баргман [13] указал, что представления дополнительной серии не необходимы для разложения элементов пространства $\mathcal{L}^2(SU(1, 1))$. Это, однако, вовсе не исключает ту важную роль, которую играют такие представления для функционального анализа в более общих пространствах функций на группе $SU(1, 1)$, например в пространствах $\mathcal{L}^p(SU(1, 1))$, $1 \leq p \leq \infty$ (ср. с работой Кунце и Штейна [28]), а также в связи с некоторыми физическими проблемами (Хаджеоанну [4]). Тем не менее в гл. 3 мы будем пользоваться только анализом Фурье в пространствах $\mathcal{L}^2(G)$.

Приведем также основные результаты, относящиеся к обобщенному анализу Фурье в пространстве $\mathcal{L}^2(E(2))$ квадратично интегрируемых функций на группе $E(2)$. Определение меры Хаара на группе $E(2)$ имеет вид

$$\int dA = \int \frac{d \arg z}{2\pi} |z| |dz| \frac{d\varphi}{4\pi}, \quad A = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & ze^{-i\varphi/2} \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}. \quad (2.6.80)$$

Выполняется следующее обобщенное разложение Фурье:

$$f(A) = \sum_{\kappa=0, 1, 0}^{\infty} \int d\rho \operatorname{Sp}(f^{\rho, \kappa} U_{E(2)}^{\rho, \kappa}(A)^\dagger), \quad A \in E(2),$$

$$f^{\rho, \kappa} = \int_{E(2)} dA U_{E(2)}^{\rho, \kappa}(A) f(A), \quad \rho \in (0, \infty), \quad (2.6.81)$$

$$\int_{E(2)} dA |f(A)|^2 = \sum_{\kappa=0, 1, 0}^{\infty} \int d\rho \operatorname{Sp}(f^{\rho, \kappa\dagger} f^{\rho, \kappa}).$$

Сюда существенно входит преобразование Ханкеля для функций из пространства $\mathcal{L}^2(0, \infty)$ (см. книгу Титчмарша [29]):

$$f(|z|) = \int_0^\infty d\rho \rho \hat{f}(\rho) J_{\mu'-\mu}(\rho|z|),$$

$$\hat{f}(\rho) = \int_0^\infty d|z| |z| J_{\mu'-\mu}(\rho|z|) f(|z|). \tag{2.6.82}$$

2.7. РАЗЛОЖЕНИЯ КВАДРАТИЧНО ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ НА ПРОСТРАНСТВАХ КЛАССОВ СМЕЖНОСТИ $SU(2)/H_1$, $SU(1, 1)/H_1$ И $E(2)/H_1$

Параметризация (2.6.11) групп $SU(2)$ и $SU(1, 1)$ с помощью углов Эйлера, параметризация (1.41) группы $E(2)$ и разложение Ивасава (2.5.57) для группы $SU(1, 1)$ позволяют выбрать в качестве представителей классов смежности этих групп относительно их подгруппы H_1 [а также подгруппы H_2 для группы $SU(1, 1)$] следующие элементы:

$$A(i\beta, \varphi) : SU(2)/H_1 = \{A(i\beta, \varphi) H_1 : 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \beta \leq \pi\},$$

$$A(\xi, \varphi) : SU(1, 1)/H_1 = \{A(\xi, \varphi) H_1 : 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \xi < \infty\},$$

$$A'(x, \varphi) : SU(1, 1)/H_2 =$$

$$= \{A'(x, \varphi) H_2 : 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < x < \infty\},$$

$$A(z) : E(2)/H_1 = \{A(z) H_1 : z \in \mathbb{C}\};$$

$$A(\xi, \varphi) \equiv \begin{pmatrix} \text{ch } \xi/2 & e^{i\varphi} \text{sh } \xi/2 \\ e^{-i\varphi} \text{sh } \xi/2 & \text{ch } \xi/2 \end{pmatrix}, \tag{2.7.1}$$

$$A'(x, \varphi) \equiv \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2}(1 - ix/2) & -e^{i\varphi/2}ix/2 \\ e^{-i\varphi/2}ix/2 & e^{-i\varphi/2}(1 + ix/2) \end{pmatrix},$$

$$A(z) \equiv \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому любой элемент $A \in G$, $G \in \{SU(2), SU(1, 1), E(2)\}$ имеет однозначное разложение вида $A = R(q)Q$, где $Q \in H$, $H \in \{H_1, H_2\}$, $R(q)$ — представитель класса смежности из множества G/H , имеющий вид, указанный в формуле (2.7.1). Здесь q — параметр, характеризующий классы сопряженных элементов. Конкретный вид параметра q будет дан в формуле (3.1.18). Меры Хаара на группах $SU(2)$ и $SU(1, 1)$, заданные формулой (2.6.68), и на группе $E(2)$ [формула (2.6.80)] в параметризации

(2.7.1) имеют вид

$$\int dA = \int dR(q) \int dQ =$$

$$= \begin{cases} \int \frac{d\varphi}{2\pi} d\left(-\frac{\text{sh}^2 \xi}{2}\right) \int \frac{d\alpha}{4\pi} & \text{при } A = A(\xi, \varphi) C(\alpha), \\ \int \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{dx}{2} \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon} \int \frac{d\xi}{2\pi} & \text{при } A = A'(x, \varphi) D(\varepsilon, \xi), \\ \int \frac{d \arg z}{2} |z| |d| |z| \int \frac{d\alpha}{4\pi} & \text{при } A = A(z) C(\alpha). \end{cases} \quad (2.7.2)$$

Таким образом определяется разбиение меры Хаара на группе G на произведение квазиинвариантной (здесь даже инвариантной) меры на множестве G/H и меры Хаара на группе H . Выведем разложение Фурье, описанное в разд. 2.6, в том виде, который понадобится в гл. 3. В случае компактной подгруппы $H = H_1$ отсюда получается полный ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{L}^2(G/H_1)$.

Пусть σ — параметр, пробегающий множество \hat{H} всех классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений группы H ; $\hat{\nu}$ — мера Планшереля на множестве \hat{H} , определенная формулами (2.1.4) и (2.1.9). Пусть также τ — индекс базиса в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_G^{\rho, \sigma}$, входящем в пространство $\check{A}\mathfrak{H}_G^{\rho}$, на котором действует представление $\check{A}U_G^{\rho}|H\check{A}^{-1}$, умножаемое на неприводимое унитарное представление χ^{σ} группы H ; \hat{H}_{ρ} — множество параметров $\sigma \in H$, для которых представление χ^{σ} присутствует в редукции сужения $U_G^{\rho}|H$. Используя обобщенные матричные элементы $U_G^{\rho}(A)_{\tau'\sigma', \tau\sigma}$ в базисе, связанном с подгруппой H , запишем формулы разложения (2.6.77) для элементов пространства $\mathcal{L}^2(G)$ в виде

$$f(A) = \int_{\hat{G}} d\hat{\mu}(\rho) \sum_{\tau', \tau} \int_{\hat{H}_{\rho} \times \hat{H}_{\rho}} d\hat{\nu}(\sigma') d\hat{\nu}(\sigma) \hat{f}_{\tau'\sigma', \tau\sigma}^{\rho} U_G^{\rho}(A)_{\tau'\sigma', \tau\sigma}^*$$

$$\hat{f}_{\tau'\sigma', \tau\sigma}^{\rho} = \int_{\hat{G}} dA U_G^{\rho}(A)_{\tau'\sigma', \tau\sigma} f(A). \quad (2.7.3)$$

Здесь мы учли тот факт, что для меры $\tilde{\nu}_{\rho}$ на множестве \hat{H} , которая определена разбиением сужения $U_G^{\rho}|H$, упомянутым во введении к этой главе, всегда справедливо равенство

$$\int_{\hat{H}} d\tilde{\nu}_{\rho}(\sigma) = \int_{\hat{H}_{\rho}} d\hat{\nu}(\sigma). \quad (2.7.4)$$

Это следует из разд. 2.2—2.5. Так как $f \in \mathcal{L}^2(G)$, то функция на подгруппе H , определяемая тождеством $\hat{f}(A) = f(R(q)Q)$, почти для всех $R(q)$ лежит в пространстве $\mathcal{L}^2(H)$. Поэтому почти для всех $R(q)$ из анализа Фурье в пространстве $\mathcal{L}^2(H)$, заданного формулами (2.1.3), (2.1.4), (2.1.8) и (2.1.9), следует разложение

$$\begin{aligned} f(R(q)Q) &= \int_{\hat{H}} d\hat{\nu}(\sigma) f_{\sigma}(R(q)) \chi^{\sigma}(Q)^*, \\ f_{\sigma}(R(q)) &= \int_H dQ \chi^{\sigma}(Q) f(R(q)Q), \end{aligned} \quad (2.7.5)$$

$$\int_H dQ |f(R(q)Q)|^2 = \int_{\hat{H}} d\hat{\nu}(\sigma) |f_{\sigma}(R(q))|^2.$$

С помощью этих формул и соотношения

$$U_G^{\rho}(R(q)Q)_{\tau'\sigma', \tau\sigma} = U_G^{\rho}(R(q))_{\tau'\sigma', \tau\sigma} \chi^{\sigma}(Q), \quad (2.7.6)$$

которое выполняется для обобщенных матричных элементов, мы получаем из формулы (2.7.3) разложение

$$\begin{aligned} f_{\sigma}(R(q)) &= \int_{\hat{G}_{\sigma}} d\hat{\mu}(\rho) \int_{\hat{H}_{\rho}} d\hat{\nu}(\sigma') \sum_{\tau', \tau} \hat{f}_{\tau'\sigma', \tau\sigma}^{\rho} U_G^{\rho}(R(q))_{\tau'\sigma', \tau\sigma}^*, \\ \hat{f}_{\tau'\sigma', \tau\sigma}^{\rho} &= \int_{G/H} dR(q) U_G^{\rho}(R(q))_{\tau'\sigma', \tau\sigma} f_{\sigma}(R(q)). \end{aligned} \quad (2.7.7)$$

Здесь \hat{G}_{σ} — множество всех параметров $\rho \in \hat{G}$, для которых сужение $U_G^{\rho}|_H$ содержит представление χ^{σ} . Условие унитарности (2.6.77), записанное аналогично формуле (2.7.3), принимает вид

$$\int_G dA |f(A)|^2 = \int_{\hat{G}} d\hat{\mu}(\rho) \int_{\hat{H}_{\rho}} d\hat{\nu}(\sigma') \int_{\hat{H}_{\sigma}} d\hat{\nu}(\sigma) \sum_{\tau', \tau} |\hat{f}_{\tau'\sigma', \tau\sigma}^{\rho}|^2. \quad (2.7.8)$$

Используя (2.7.5), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\hat{H}} d\hat{\nu}(\sigma) \int_{G/H} dR(q) |f_{\sigma}(R(q))|^2 &= \\ &= \int_{\hat{H}} d\hat{\nu}(\sigma) \int_{\hat{G}_{\sigma}} d\hat{\mu}(\rho) \int_{\hat{H}_{\rho}} d\hat{\nu}(\sigma') \sum_{\tau', \tau} |\hat{f}_{\tau'\sigma', \tau\sigma}^{\rho}|^2. \end{aligned} \quad (2.7.9)$$

Таким образом, разложение Фурье (2.7.7) можно рассматривать как унитарное отображение, связывающее гильбертовы пространства

$$\mathcal{L}^2(\hat{H}) \oplus \mathcal{L}^2(G/H) = \bigoplus_{\hat{H}} \int \sqrt{d\hat{\nu}(\sigma)} \mathcal{L}^2\left(\frac{G}{H}\right) \quad \text{и} \quad \mathcal{L}^2(\hat{G})$$

со структурой

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2(\hat{G}) &= \bigoplus_{\hat{H}} \int \sqrt{d\hat{\nu}(\sigma)} \mathcal{L}^2(\hat{G})^\sigma, \\ \mathcal{L}^2(G)^\sigma &= \bigoplus_{\hat{G}_\sigma} \int \sqrt{d\hat{\mu}(\rho)} \left[\bigoplus_{\hat{H}_\rho} \int \sqrt{d\hat{\nu}(\sigma')} \left(\bigoplus_{\tau', \tau} \mathbf{c} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.7.10)$$

В случае компактной подгруппы $H = H_1$ из формул (2.7.7) можно получить некоторые дополнительные результаты. Здесь $\hat{H} = \hat{H}_1$ — дискретное множество всех пар чисел $\sigma = (\kappa, \mu)$, $\kappa \in \{0, 1\}$, $\mu \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, а $\int d\hat{\nu}(\sigma)$ — сумма по κ и μ ; индексы τ', τ отсутствуют. С помощью анализа Фурье на группе H_1 пространство $\mathcal{L}^2(G)$ разлагается в прямую сумму:

$$\mathcal{L}^2(G) = \bigoplus_{\kappa=0,1} \bigoplus_{\mu=-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}^2(G)^{\kappa, \mu}, \quad (2.7.11)$$

$$\mathcal{L}^2(G)^{\kappa, \mu} = \{f \in \mathcal{L}^2(G) : f(R(q)Q) = f(R(q))\chi^{\kappa, \mu}(Q)^*, Q \in H\}.$$

Выберем функцию $f \in \mathcal{L}^2(G)^{\kappa, \mu}$. Тогда в силу формул (2.7.5)

$$f_{\kappa', \mu'}(R(q)) = \delta_{\kappa' \kappa} \delta_{\mu' \mu} f(R(q)), \quad (2.7.12)$$

а в силу формул (2.7.7)

$$f_{\kappa' \mu', \kappa \mu}^\rho = \delta_{\kappa' \kappa} \delta_{\mu' \mu} \int_{G/H} dR(q) U_G^\rho(R(q))_{\kappa' \mu', \kappa \mu} f(R(q)). \quad (2.7.13)$$

Если представить разложение (2.7.10) пространства $\mathcal{L}^2(\hat{G})$ в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2(\hat{G}) &= \bigoplus_{\kappa=0,1} \bigoplus_{\mu=-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}^2(\hat{G})^{\kappa, \mu}, \\ \mathcal{L}^2(\hat{G})^{\kappa, \mu} &= \bigoplus_{\hat{G}_{\kappa, \mu}} \int \sqrt{d\hat{\mu}(\rho)} \bigoplus_{(\kappa, \mu) \in \hat{H}_{1, \rho}} \mathbf{c}, \end{aligned} \quad (2.7.14)$$

то легко убедиться, что при унитарном преобразовании (2.7.7), связывающем пространства $\mathcal{L}^2(G)$ и $\mathcal{L}^2(\hat{G})$, подпространства

$\mathcal{L}^2(G)^{\kappa, \mu}$ и $\mathcal{L}^2(\widehat{G})^{\kappa, \mu}$ унитарно отображаются друг в друга. Так как при любых (κ, μ) пространство $\mathcal{L}^2(G)^{\kappa, \mu}$, естественно, изоморфно пространству $\mathcal{L}^2(G/H_1)$, то вместо формул (2.7.7) и (2.7.9) можно написать

$$f(q) = \int_{\widehat{G}_{\kappa, \mu}} d\hat{\mu}(\rho) \sum_{(\kappa, \mu') \in \widehat{H}_{1, \rho}} \hat{f}_{\mu'\mu}^\rho U_G^\rho(R(q))_{\mu'\mu}^*,$$

$$\hat{f}_{\mu\mu'}^\rho = \int_{G/H} dR(q) U_G^\rho(R(q))_{\mu'\mu} f(q), \quad (2.7.15)$$

$$\int_{G/H} dR(q) |f(q)|^2 = \int_{\widehat{G}_{\kappa, \mu}} d\hat{\mu}(\rho) \sum_{(\kappa, \mu') \in \widehat{H}_{1, \rho}} |\hat{f}_{\mu'\mu}^\rho|^2.$$

Здесь элементы $\hat{f}_{\mu'\mu}^\rho$ и $U_G^\rho(R(q))_{\mu'\mu}$ определены следующим образом:

$$\hat{f}_{\kappa'\mu', \kappa\mu}^\rho = \delta_{\kappa'\kappa} \delta_{\kappa'\mu'} \hat{f}_{\mu'\mu}^\rho, \quad U_G^\rho(A)_{\kappa'\mu', \kappa\mu} = \delta_{\kappa'\kappa} \delta_{\kappa'\mu'} U_G^\rho(A)_{\mu'\mu} \quad \text{при } \rho \in \widehat{G}_{\kappa, \mu}. \quad (2.7.16)$$

Очевидно, что функции $U_G^\rho(A)_{\mu'\mu}$ — матричные элементы в базисе, связанном с подгруппой H_1 , которые были вычислены в разд. 2.2—2.4. Каждой паре чисел (κ, μ) соответствует полный ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{L}^2(G/H_1)$:

$$\{\mu Y_{\mu'}^\rho : \rho \in \widehat{G}_{\kappa, \mu}, (\kappa, \mu') \in \widehat{H}_{1, \rho}, \mu Y_{\mu'}^\rho(q) = U_G^\rho(R(q))_{\mu'\mu}\}. \quad (2.7.17)$$

Множества $\widehat{G}_{\kappa, \mu}$ и $\widehat{H}_{1, \rho}$ в различных случаях имеют вид

$$\underline{G = SU(2):}$$

$$\widehat{G}_{\kappa, \mu} = \{(\kappa', l) : \kappa' = \kappa, l \geq |\mu + \kappa/2| - \kappa/2\},$$

$$\widehat{H}_{1, (\kappa, l)} = \{(\kappa', \mu') : \kappa' = \kappa, -l - \kappa \leq \mu' \leq l\}; \quad (2.7.18)$$

$$\underline{G = SU(1, 1):}$$

$$\widehat{G}_{\kappa, \mu} = \{(\kappa', l, 0) : \kappa' = \kappa, l = -(1 + \kappa)/2 + i\xi, \xi \geq 0\} \cup$$

$$\cup \{(\kappa', l, \eta) : \kappa' = \kappa, 0 \leq l \leq \mu + \kappa/2 - \kappa/2 - 1, \eta = \text{sign}(\mu + \kappa/2)\},$$

$$\widehat{H}_{1, (\kappa, l, 0)} = \{(\kappa', \mu') : \kappa' = \kappa, -\infty < \mu' < \infty\},$$

$$\widehat{H}_{1, (\kappa, l, \pm)} = \{(\kappa', \mu') : \kappa' = \kappa, \text{sign}(\mu' + \kappa/2) = \pm,$$

$$|\mu' + \kappa/2| - \kappa/2 \geq l + 1\};$$

$$\underline{G = E(2):}$$

$$\widehat{G}_{\kappa, \mu} = \{(\rho, \kappa') : \kappa' = \kappa, \rho > 0\},$$

$$\widehat{H}_{1, (\rho, \kappa)} = \{(\kappa', \mu') : \kappa' = \kappa, -\infty < \mu' < \infty\}.$$

Так как пространство $SU(2)/H_1$, согласно формуле (2.7.1), гомеоморфно двумерной сфере, то формула (2.7.17) определяет обобщенную систему сферических гармоник при любых значениях κ и μ . В частности, при $\kappa = \mu = 0$ мы имеем функции, с точностью до нормировочного множителя совпадающие с обыкновенными сферическими гармониками $\{e^{i\mu'\varphi} P_l^{\mu'}(\cos\beta) : 0 \leq l, -l \leq \mu' \leq l\}$. Согласно формулам (2.7.1), пространство $SU(1, 1)/H_1$ гомеоморфно одной из полостей двуполостного гиперboloида в пространстве \mathbf{R}^3 . Соответствующие функции в формуле (2.7.17) ${}_{\mu}Y_{\mu'}^{\kappa, l, \eta}$ можно в этом случае интерпретировать как интегральные ядра преобразования Фурье на этой поверхности. Из математической литературы нам известен случай $\kappa = \mu = 0$, который приводит к коническим функциям Мелера $\{e^{i\mu'\varphi} P_{-\frac{1}{2}+i\rho}^{\mu'}(\operatorname{ch}\xi) : \rho \geq 0, -\infty < \mu' < \infty\}$. Что касается пространства $E(2)/H_1$, то здесь мы приходим к системе функций

$$\{ {}_{\mu}Y_{\mu'}^{\rho, \kappa}(z) = e^{i(\mu' - \mu) \operatorname{arg} z} J_{\mu' - \mu}(\rho |z|) : \rho > 0, -\infty < \mu' < \infty \},$$

где функции Бесселя $J_{\mu' - \mu}$ появляются при разложении Фурье на евклидовой плоскости в полярных координатах.

В случае некомпактной подгруппы $H = H_2$ мы имеем множество

$$\hat{H} = \{(\kappa, \lambda) : \kappa = 0, 1; -\infty < \lambda < \infty\} \text{ и } \int d\hat{\nu}(\sigma) = \sum_{\kappa} \int d\lambda;$$

индексы τ', τ принимают значения \pm . Здесь нельзя сформулировать анализ Фурье, аналогичный разложению в пространстве $\mathcal{L}^2(G/H_1)$. Унитарное преобразование (2.7.7), связывающее пространство

$$\bigoplus_{\hat{H}} \int \sqrt{d\hat{\nu}(\sigma)} \mathcal{L}^2(G/H) \text{ и } \bigoplus_{\hat{H}} \int \sqrt{d\hat{\nu}(\sigma)} \mathcal{L}^2(\hat{G})^{\sigma},$$

осуществляется обобщенными интегральными ядрами

$$\{ {}_{\lambda}Y_{\lambda'\tau'\tau}^{\rho} : \rho \in \hat{G}_{\kappa, \lambda}, (\kappa, \lambda') \in \hat{H}_{2, \rho}; \tau', \tau = \pm, \\ {}_{\lambda}Y_{\lambda'\tau'\tau}^{\rho}(q) = U_{SU(1, 1)}^{\rho}(R(q))_{\tau\lambda', \tau\lambda} \}. \quad (2.7.19)$$

Здесь мы имеем

$$\hat{G}_{\kappa, \lambda} = \{(\kappa', l, 0) : \kappa' = \kappa, l = -(1 + \kappa)/2 + i\xi, \xi \geq 0\} \cup \\ \cup \{(\kappa', l, +) : \kappa' = \kappa, l = 0, 1, \dots\} \cup \{(\kappa', l, -) : \kappa' = \kappa, l = 0, 1, \dots\}, \\ \hat{H}_{2, (\kappa, l, \eta)} = \{(\kappa', \lambda') : \kappa' = \kappa, -\infty < \lambda' < \infty\}. \quad (2.7.20)$$

Напомним, что, согласно формуле (2.5.74), для дискретной серии функция ${}_{\lambda}Y_{\lambda', \tau', \tau}^{\kappa, l, \eta}$ отлична от нуля только при $\tau' = \tau = \eta$.

3. Редукция произведения двух неприводимых унитарных представлений группы \tilde{P}

Прямое произведение двух неприводимых унитарных представлений $U^{\overset{\circ}{\rho}_1, \overset{\circ}{\rho}_1}$ и $U^{\overset{\circ}{\rho}_2, \overset{\circ}{\rho}_2}$ группы \tilde{P} определено как представление вида

$$\begin{aligned} ((U^{\overset{\circ}{\rho}_1, \overset{\circ}{\rho}_1} \otimes U^{\overset{\circ}{\rho}_2, \overset{\circ}{\rho}_2})(A, a)\psi)(p_1, p_2) &\equiv (U^{1,2}(A, a)\psi)(p_1, p_2) = \\ &= U_{\tilde{G}(\overset{\circ}{\rho}_1)}^{\overset{\circ}{\rho}_1, \overset{\circ}{\rho}_1}(R(p_1; A), \Lambda(p_1)^{-1}a) \otimes \\ &\otimes U_{\tilde{G}(\overset{\circ}{\rho}_2)}^{\overset{\circ}{\rho}_2, \overset{\circ}{\rho}_2}(R(p_2; A), \Lambda(p_2)^{-1}a)\psi(\Lambda^{-1}p_1, \Lambda^{-1}p_2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

(здесь $\Lambda = \Lambda(A)$) в гильбертовом пространстве

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}^{1,2} &\equiv \bigoplus_{\Omega(\overset{\circ}{\rho}_1) \times \Omega(\overset{\circ}{\rho}_2)} \int \sqrt{d\omega_{\overset{\circ}{\rho}_1}(p_1) d\omega_{\overset{\circ}{\rho}_2}(p_2)} \mathfrak{H}_{\tilde{G}(\overset{\circ}{\rho}_1)}^{\overset{\circ}{\rho}_1}(p_1) \otimes \mathfrak{H}_{\tilde{G}(\overset{\circ}{\rho}_2)}^{\overset{\circ}{\rho}_2}(p_2), \\ \mathfrak{H}_{\tilde{G}(\overset{\circ}{\rho}_i)}^{\overset{\circ}{\rho}_i}(p_i) &\equiv \mathfrak{H}_{G_i}^{\overset{\circ}{\rho}_i}, \quad G_i \equiv G(\overset{\circ}{\rho}_i), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

векторных функций $\psi: \Omega(\overset{\circ}{\rho}_1) \times \Omega(\overset{\circ}{\rho}_2) \rightarrow \mathfrak{H}_{\tilde{G}_1}^{\overset{\circ}{\rho}_1} \otimes \mathfrak{H}_{\tilde{G}_2}^{\overset{\circ}{\rho}_2}$ со скалярным произведением

$$\langle \psi | \varphi \rangle^{1,2} \equiv \int_{\Omega(\overset{\circ}{\rho}_1) \times \Omega(\overset{\circ}{\rho}_2)} d\omega_{\overset{\circ}{\rho}_1}(p_1) d\omega_{\overset{\circ}{\rho}_2}(p_2) \langle \psi(p_1, p_2) | \varphi(p_1, p_2) \rangle^{\overset{\circ}{\rho}_1, \overset{\circ}{\rho}_2}. \quad (3.3)$$

Скобки $\langle | \rangle^{\overset{\circ}{\rho}_1, \overset{\circ}{\rho}_2}$ означают скалярное произведение в пространстве $\mathfrak{H}_{\tilde{G}_1}^{\overset{\circ}{\rho}_1} \otimes \mathfrak{H}_{\tilde{G}_2}^{\overset{\circ}{\rho}_2}$. Согласно формуле (1.1.15), имеем

$$\begin{aligned} U_{\tilde{G}(\overset{\circ}{\rho}_1)}^{\overset{\circ}{\rho}_1, \overset{\circ}{\rho}_1}(R(p_1; A), \Lambda(p_1)^{-1}a) \otimes U_{\tilde{G}(\overset{\circ}{\rho}_2)}^{\overset{\circ}{\rho}_2, \overset{\circ}{\rho}_2}(R(p_2; A), \Lambda(p_2)^{-1}a) = \\ = e^{i(p_1+p_2) \cdot a} U_{G_1}^{\overset{\circ}{\rho}_1}(R(p_1; A)) \otimes U_{G_2}^{\overset{\circ}{\rho}_2}(R(p_2; A)). \end{aligned} \quad (3.4)$$

В разд. 3.1 для представления (3.1) при ненулевых импульсах $\overset{\circ}{\rho}_1 \neq 0$, $\overset{\circ}{\rho}_2 \neq 0$ мы построим унитарный оператор, преобра-

зующий это представление в прямой интеграл неприводимых унитарных представлений группы \tilde{P} . Неприводимые унитарные представления, входящие в это разложение, их кратности, а также соответствующие коэффициенты Клебша—Гордана подробно описаны в разд. 3.2. Редукция прямого произведения, когда хотя бы один из множителей имеет нулевой импульс, кратко рассмотрена в разд. 3.3.

3.1. РАЗЛОЖЕНИЕ НА НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

$$U^{\circ, \rho_1} \otimes U^{\circ, \rho_2} \quad \text{ПРИ } \rho_1 \neq 0 \neq \rho_2$$

Согласно формулам (3.1) и (3.4), представление $U^{1,2}$ обладает характером

$$\chi^p(a) = e^{i p \cdot a}, \quad p = p_1 + p_2 \quad (3.1.1)$$

на подгруппе трансляций $\check{R}^4 = (I_2, R^4)$ в группе \tilde{P} . Поэтому в представлении $U^{1,2}$ могут содержаться только представления $U^{\circ, \rho}$, для которых существуют такие $\rho_1 \in \Omega(\rho_1)$ и $\rho_2 \in \Omega(\rho_2)$, что полный импульс $p = p_1 + p_2$ принадлежит орбите $\Omega(\rho)$. В табл. 3.1 приведены орбиты („массовые оболочки“) $\Omega(\rho)$, на которых лежит полный импульс p , в то время как импульсы p_1 и p_2 пробегают орбиты $(\Omega(\rho_1))$ и $(\Omega(\rho_2))$. Парам (ρ_1, ρ_2) отвечают области $\Omega_k \subset \Omega$ [см. формулу (1.1.2)], в которых меняется стандартный вектор ρ . Случаи, не перечисленные в этой таблице, легко можно получить из соображений симметрии. Например, в случае V $m_2 > m_1$ получается перестановкой индексов 1, 2 и заменой p на $-p$, так как малые группы для векторов p и $-p$ совпадают. В дальнейшем будут детально разобраны только случаи I—IX. Краткое описание разложения для случаев X и XI дано в разд. 3.3.

Для данного вектора $p \in \Omega(\rho)$, $\rho \in \Omega_k$, $k \in \{I, \dots, IX\}$, существует двухпараметрическое множество пар импульсов

$$(\rho_1, \rho_2) \in \Omega(\rho_1) \times \Omega(\rho_2), \quad \rho_1 + \rho_2 = p.$$

Это множество мы будем описывать вектором q :

$$q = \alpha \rho_1 - (1 - \alpha) \rho_2, \quad \alpha \in \mathbf{R}, \quad (3.1.2)$$

который линейно независим от p и лежит в плоскости векторов ρ_1, ρ_2 . Так как параметр α можно выбрать произвольно

$$\text{I: } \overset{\circ}{p}_1 = m_1 e_{(0)}, \quad \overset{\circ}{p}_2 = m_2 e_{(0)}, \quad \overset{\circ}{p} \in \Omega_I \equiv \{m e_{(0)} : m \geq m_1 + m_2\},$$

$$\text{II: } \overset{\circ}{p}_1 = m_1 e_{(0)}, \quad \overset{\circ}{p}_2 = e_{(0)} + e_{(3)}, \quad \overset{\circ}{p} \in \Omega_{II} \equiv \{m e_{(0)} : m > m_1\},$$

$$\text{III: } \overset{\circ}{p}_1 = m_1 e_{(0)}, \quad \overset{\circ}{p}_2 = n_2 e_{(3)}, \quad \overset{\circ}{p} \in \Omega_{III} \equiv \{m e_{(0)} : m > 0\} \cup \{n e_{(3)} : n > 0\} \cup \{e_{(0)} + e_{(3)}\},$$

$$\text{IV: } \overset{\circ}{p}_1 = m_1 e_{(0)}, \quad \overset{\circ}{p}_2 = -e_{(0)} - e_{(3)}, \quad \overset{\circ}{p} \in \Omega_{IV} \equiv \{m e_{(0)} : 0 < m < m_1\} \cup \{n e_{(3)} : n > 0\} \cup \{e_{(0)} + e_{(3)}\},$$

$$\text{V: } \overset{\circ}{p}_1 = m_1 e_{(0)}, \quad \overset{\circ}{p}_2 = -m_2 e_{(0)}, \quad \overset{\circ}{p} \in \Omega_V \equiv \{m e_{(0)} : 0 < m \leq m_1 - m_2\} \cup \{e_{(0)} + e_{(3)}\} \cup \{n e_{(3)} : n > 0\} \\ \text{при } m_1 > m_2, \\ = \{n e_{(3)} : n > 0\} \cup \{0\} \quad \text{при } m_1 = m_2.$$

$$\text{VI: } \overset{\circ}{p}_1 = e_{(0)} + e_{(3)}, \quad \overset{\circ}{p}_2 = e_{(0)} + e_{(3)}, \quad \overset{\circ}{p} \in \Omega_{VI} \equiv \{m e_{(0)} : m > 0\} \cup \{e_{(0)} + e_{(3)}\},$$

$$\text{VII: } \overset{\circ}{p}_1 = e_{(0)} + e_{(3)}, \quad \overset{\circ}{p}_2 = n_2 e_{(3)}, \quad \overset{\circ}{p} \in \Omega_{VII} \equiv \{m e_{(0)} : m > 0\} \cup \{e_{(0)} + e_{(3)}\} \cup \{n e_{(3)} : n > 0\},$$

$$\text{VIII: } \overset{\circ}{p}_1 = e_{(0)} + e_{(3)}, \quad \overset{\circ}{p}_2 = -e_{(0)} - e_{(3)}, \quad \overset{\circ}{p} \in \Omega_{VIII} \equiv \{n e_{(3)} : n > 0\} \cup \{0\},$$

$$\text{IX: } \overset{\circ}{p}_1 = n_1 e_{(3)}, \quad \overset{\circ}{p}_2 = n_2 e_{(3)}, \quad \overset{\circ}{p} \in \Omega_{IX} \equiv \{m e_{(0)} : m > 0\} \cup \{-m e_{(0)} : m > 0\} \cup \{e_{(0)} + e_{(3)}\} \cup \\ \cup \{-e_{(0)} - e_{(3)}\} \cup \{n e_{(3)} : n > 0\} \quad \text{при } n_1 \neq n_2, \\ = \{m e_{(0)} : m > 0\} \cup \{-m e_{(0)} : m > 0\} \cup \{e_{(0)} + e_{(3)}\} \cup \\ \cup \{-e_{(0)} - e_{(3)}\} \cup \{n e_{(3)} : n > 0\} \cup \{0\} \quad \text{при } n_1 = n_2.$$

$$\text{X: } \overset{\circ}{p}_1 \neq 0, \quad \overset{\circ}{p}_2 = 0, \quad \overset{\circ}{p} \in \Omega_X \equiv \{\overset{\circ}{p}_1\},$$

$$\text{XI: } \overset{\circ}{p}_1 = 0 = \overset{\circ}{p}_2, \quad \overset{\circ}{p} \in \Omega_{XI} = \{0\}.$$

и вектор q удовлетворяет условию

$$(p \cdot q)^2 - p^2 q^2 = (p_1 \cdot p_2)^2 - p_1^2 p_2^2, \quad (3.1.3)$$

которое не зависит от α , то вектор q обладает, по существу, лишь двумя степенями свободы. Для дальнейшего положим, что

$$p^2 \neq 0 \neq q^2, \quad (3.1.4)$$

и выберем вектор q нормальным к p :

$$q \equiv \frac{1}{p^2} ((p_2 \cdot p) p_1 - (p_1 \cdot p) p_2), \quad p \cdot q = 0. \quad (3.1.5)$$

Ограничения (3.1.4) несущественны, так как пары векторов $(p_1, p_2) \in \Omega(\overset{\circ}{p}_1) \times \Omega(\overset{\circ}{p}_2)$, для которых $p^2 = 0$ или $q^2 = 0$, описывают многообразие более низкой размерности. Поскольку это многообразие меры нуль, то оно не играет роли в прямом интеграле для гильбертова пространства $\mathfrak{H}^{1,2}$.

Дискриминант $(p_1 \cdot p_2)^2 - p_1^2 p_2^2$ квадратного уравнения $(x p_1 + p_2)^2 = 0$ (с параметром x) положителен, равен нулю или отрицателен в зависимости от того, пересекает ли плоскость, в которой лежат векторы p_1 и p_2 , световой конус по двум линиям, касается ли она конуса или же лежит целиком в пространственно-подобной области. По той же причине, которая была указана выше, мы пренебрежем вторым случаем. Тогда величина $(p_1 \cdot p_2)^2 - p_1^2 p_2^2$ положительна в случаях I—VIII и не имеет определенного знака в случае IX, т. е. только в этом случае, согласно формуле (3.1.3), векторы p и q могут быть пространственно-подобными одновременно. Во всех остальных случаях вектор q пространственно-подобен, когда вектор p — времени-подобен, и наоборот.

Наиболее типичная ситуация отвечает случаю I, когда и p_1 , и p_2 лежат внутри верхнего светового конуса. При этом в системе центра масс вектор q совпадает с импульсом частицы 1:

$$\Lambda(p)^{-1} p = \overset{\circ}{p} = (m, 0), \quad \Lambda(p)^{-1} q = (0, p_1^{(p)}). \quad (3.1.6)$$

Формула (3.1.3) связывает q^2 с величинами m^2 , m_1^2 , m_2^2 , так что, по существу, вектор q описывает лишь направление вектора $p_1^{(p)}$.

Пусть пара $(\overset{\circ}{p}_1, \overset{\circ}{p}_2)$ принадлежит к одному из типов I—IX. Формулы (3.1.1) и (3.1.5) отображают множество $\Omega(\overset{\circ}{p}_1) \times \Omega(\overset{\circ}{p}_2)$ на область в пространстве (p, q) , состоящую из объединения массовых оболочек $\Omega(\overset{\circ}{p})$, отвечающих $\overset{\circ}{p} \in \Omega_k$, причем каждому

$p \in \Omega(\dot{p})$ принадлежит в q -пространстве двумерная поверхность

$$\Sigma(p) \equiv \{q : p \cdot q = 0, -p^2 q^2 = (p_1 \cdot p_2)^2 - p_1^2 p_2^2\}. \quad (3.1.7)$$

Пусть $dR(q)$ — элемент площади на поверхности $\Sigma(\dot{p})$, инвариантный относительно операции

$$G(\dot{p}) \equiv A : q \rightarrow \Lambda(A)q, \quad q \in \Sigma(\dot{p}) \quad (3.1.8)$$

из группы $G(\dot{p})$:

$$dR(\Lambda(A)q) = dR(q), \quad q \in \Sigma(\dot{p}), \quad A \in G(\dot{p}). \quad (3.1.9)$$

Существование таких элементов доказывается явным построением в формулах (3.1.20). Определим теперь элемент площади на поверхности $\Sigma(p)$:

$$dR_p(q) \equiv dR(\Lambda(p)^{-1}q), \quad q \in \Sigma(p). \quad (3.1.10)$$

В силу формулы (3.1.9) выполняется условие инвариантности

$$dR_{\Lambda p}(\Lambda q) = dR_p(q). \quad (3.1.11)$$

Пусть ρ — мера на множестве Ω , заданная следующим образом:

$$\rho(\mathfrak{M}) = \begin{cases} \int_{\mathfrak{M}} \left| \frac{\lambda(-m^2, p_1^2, p_2^2)}{16m^2} \right|^{1/2} dm & \text{при } \mathfrak{M} \subset \{\pm me_{(0)} : m > 0\} = \Omega^+ \cup \Omega^-, \\ \int_{\mathfrak{M}} \left| \frac{\lambda(n^2, p_1^2, p_2^2)}{16n^2} \right|^{1/2} dn & \text{при } \mathfrak{M} \subset \{ne_{(3)} : n > 0\} = \Omega^0, \\ 0 & \text{при } \mathfrak{M} \subset \{e_{(0)} + e_{(3)}\} \cup \{-e_{(0)} - e_{(3)}\} \cup \{0\} = \\ & = \Omega_0^+ \cup \Omega_0^- \cup \Omega_0^0, \end{cases} \quad (3.1.12)$$

$$\lambda(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx.$$

Тогда, используя инвариантную меру ω_p на множестве $\Omega(\dot{p})$, можно ввести инвариантную относительно группы $SL(2, \mathbf{C})$ меру на отображении произведения массовых оболочек $\Omega(\dot{p}_1) \times \times \Omega(\dot{p}_2)$ в пространстве (p, q) :

$$d\rho(\dot{p}) d\omega_p(p) dR_p(q) = d\rho(\dot{p}) d\omega_p(\Lambda p) dR_{\Lambda p}(\Lambda q). \quad (3.1.13)$$

Чтобы зафиксировать нормировку $dR_p(q)$, положим

$$d\rho(\overset{\circ}{p}) d\omega_{\overset{\circ}{\rho}}(\overset{\circ}{p}) dR_p(q) = d\omega_{\overset{\circ}{\rho}_1}(\overset{\circ}{p}_1) d\omega_{\overset{\circ}{\rho}_2}(\overset{\circ}{p}_2). \quad (3.1.14)$$

Легко видеть, что операция (3.1.8) из группы $G(\overset{\circ}{p})$ на поверхности $\Sigma(\overset{\circ}{p})$ транзитивна, так что поверхность $\Sigma(\overset{\circ}{p})$ можно характеризовать стандартным элементом $\overset{\circ}{q}$, для которого $\Sigma(\overset{\circ}{p}) = G(\overset{\circ}{p})\overset{\circ}{q}$. Будем выбирать эти стандартные элементы по схеме, приведенной в табл. 3.2.

ТАБЛИЦА 3.2

$$\text{I-VIII: } \overset{\circ}{p} \in \Omega^{\pm} \rightarrow \overset{\circ}{q} \in \Omega^0 = \{ne_{(3)} : n > 0\},$$

$$\overset{\circ}{p} \in \Omega^0 \rightarrow \overset{\circ}{q} \in \Omega^{\pm} = \{\pm me_{(0)} : m > 0\},$$

$$\text{IX: } \overset{\circ}{p} \in \Omega^{\pm} \rightarrow \overset{\circ}{q} \in \Omega^0.$$

$$\overset{\circ}{p} \in \Omega^0 \rightarrow \overset{\circ}{q} \in \begin{cases} \Omega^{\pm} & \text{при } (p_1 \cdot p_2)^2 - p_1^2 p_2^2 > 0, \\ \Omega^0 = \{ne_{(2)} : n > 0\} & \text{при } (p_1 \cdot p_2)^2 - p_1^2 p_2^2 < 0. \end{cases}$$

Подгруппа стабильности, $G(\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}) \subset G(\overset{\circ}{p})$, не меняющая $\overset{\circ}{q}$, имеет вид

$$G(\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}) = G(\overset{\circ}{p}) \cap G(\overset{\circ}{q}). \quad (3.1.15)$$

Согласно табл. 3.2, существуют только две такие подгруппы:

$$H_1 = G(e_{(0)}, e_{(3)}) = \left\{ C(\varphi) \equiv \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} : 0 \leq \varphi < 4\pi \right\}; \quad (3.1.16)$$

$$H_2 = G(e_{(3)}, e_{(2)}) = \left\{ D(\varepsilon, \xi) \equiv \varepsilon \begin{pmatrix} \text{ch } \xi/2 & \text{sh } \xi/2 \\ \text{sh } \xi/2 & \text{ch } \xi/2 \end{pmatrix} : \varepsilon = \pm 1, -\infty < \xi < \infty \right\},$$

которые были введены в разд. 2.1. Если $\overset{\circ}{p} \in \Omega^0$, $\overset{\circ}{q} \in \Omega^0$, то $G(\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}) = H_2$, в остальных случаях $G(\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}) = H_1$. Так как поверхность $\Sigma(\overset{\circ}{p})$ гомеоморфна пространству классов смежности $G(\overset{\circ}{p})/G(\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q})$, то каждому вектору $q \in \Sigma(\overset{\circ}{p})$ можно поставить в однозначное соответствие представитель одного из этих классов, $R(q) \in G(\overset{\circ}{p})$, такой, что

$$q = \Lambda(R(q))\overset{\circ}{q}. \quad (3.1.17)$$

Параметризуя поверхность $\Sigma(\overset{\circ}{p})$ формулами

$$q = \begin{cases} \sqrt{q^2} [\sin \beta (\sin \varphi e_{(1)} + \cos \varphi e_{(2)}) + \cos \beta e_{(3)}], \\ 0 \leq \beta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad \text{при } \overset{\circ}{p} \in \Omega^\pm, \quad \overset{\circ}{q} \in \Omega^0, \\ \pm \sqrt{-q^2} [\operatorname{ch} \xi e_{(0)} + \operatorname{sh} \xi (\cos \varphi e_{(1)} - \sin \varphi e_{(2)})], \\ 0 \leq \xi < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad \text{при } \overset{\circ}{p} \in \Omega^0, \quad \overset{\circ}{q} \in \Omega^\pm, \\ \sqrt{q^2} [x e_{(0)} + (\sin \varphi - x \cos \varphi) e_{(1)} + (\cos \varphi + x \sin \varphi) e_{(2)}], \\ -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad \text{при } \overset{\circ}{p} \in \Omega^0, \quad \overset{\circ}{q} \in \Omega^{0'}, \end{cases} \quad (3.1.18)$$

можно выбрать представители следующим образом:

$$R(q) = \begin{cases} A(i\beta, \varphi) & \text{при } \overset{\circ}{p} \in \Omega^\pm, \quad \overset{\circ}{q} \in \Omega^0, \\ A(\xi, \varphi) & \text{при } \overset{\circ}{p} \in \Omega^0, \quad \overset{\circ}{q} \in \Omega^\pm, \\ A'(x, \varphi) & \text{при } \overset{\circ}{p} \in \Omega^0, \quad \overset{\circ}{q} \in \Omega^{0'}. \end{cases} \quad (3.1.19)$$

Здесь $A(\xi, \varphi)$ и $A'(x, \varphi)$ — матрицы, определенные формулами (2.7.1). Элемент $dR(q)$ поверхности $\Sigma(\overset{\circ}{p})$ в точке q , согласно формулам (2.7.2) и (3.1.14), имеет вид

$$dR(q) = \begin{cases} \frac{d\varphi}{2\pi} d(\sin^2 \beta/2) & \text{при } \overset{\circ}{p} \in \Omega^\pm, \quad \overset{\circ}{q} \in \Omega^0, \\ \frac{d\varphi}{2\pi} d(-\operatorname{sh}^2 \xi/2) & \text{при } \overset{\circ}{p} \in \Omega^0, \quad \overset{\circ}{q} \in \Omega^\pm, \\ \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{dx}{2} & \text{при } \overset{\circ}{p} \in \Omega^0, \quad \overset{\circ}{q} \in \Omega^{0'}. \end{cases} \quad (3.1.20)$$

С помощью матриц $A(p)$, определенных формулой (1.1.9), мы можем теперь ввести операцию, которая одновременно переводит $\overset{\circ}{p}$ в p и $\overset{\circ}{q}$ в q :

$$A(p, q) \equiv A(p) R(\Lambda(p)^{-1} q), \quad \Lambda(p, q) \equiv \Lambda(A(p, q)), \quad (3.1.21)$$

где

$$\Lambda(p, q) \overset{\circ}{p} = p, \quad \Lambda(p, q) \overset{\circ}{q} = q. \quad (3.1.22)$$

Очевидно, что элементы $A(p, q)$ являются представителями классов смежности, образующих фактор-пространство $SL(2, \mathbf{C})/G(\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q})$. Импульсы p_1 и p_2 переводятся операцией $\Lambda(p, q)^{-1}$ в систему отсчета, задаваемую векторами $\overset{\circ}{p}$ и $\overset{\circ}{q}$. Обозначив

$$\hat{p}_1 \equiv \Lambda(p, q)^{-1} p_1, \quad \hat{p}_2 \equiv \Lambda(p, q)^{-1} p_2, \quad (3.1.23)$$

можно записать

$$\beta_1 + \beta_2 = \overset{\circ}{p}, \quad (p_2 \cdot p) \beta_1 - (p_1 \cdot p) \beta_2 = p^2 \overset{\circ}{q}. \quad (3.1.24)$$

В упомянутом выше важном случае $\overset{\circ}{p}_1, \overset{\circ}{p}_2 \in \Omega^+$ преобразование вида (3.1.23) переводит импульсы в систему центра масс и поворачивает их в направлении вектора $e_{(3)}$.

Для редукции представления $U^{1,2}$ в формуле (3.1) необходимо найти редукцию прямого произведения представлений малых групп: $U_{G_1}^{\overset{\circ}{p}_1}(R(p_1; A)) \otimes U_{G_2}^{\overset{\circ}{p}_2}(R(p_2; A))$. При этом возникают две трудности. Во-первых, группы $G_1 = G(\overset{\circ}{p}_1)$ и $G_2 = G(\overset{\circ}{p}_2)$, вообще говоря, различны; во-вторых, даже если $G_1 = G_2$, то в общем случае различаются аргументы $R(p_1; A)$ и $R(p_2; A)$. Поэтому мы найдем прежде всего унитарное преобразование представления $U^{1,2}$, приводящее к совпадающим аргументам представлений $U_{G_1}^{\overset{\circ}{p}_1}$ и $U_{G_2}^{\overset{\circ}{p}_2}$, принадлежащим, естественно, пересечению $G_1 \cap G_2$. Из формул (3.1.16) и (1.1.5) видно, что во всех случаях

$$G(\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}) \subset G_1 \cap G_2. \quad (3.1.25)$$

В частном случае $G_1 = G_2$ может существовать метод редукции, отличный от применяемого здесь общего подхода. Хорошо известным примером такого метода может служить схема спин-орбитальной связи, использованная Йоосом [1] в случае $\overset{\circ}{p}_1, \overset{\circ}{p}_2 \in \Omega^+$.

Выделим теперь из выражения (1.1.15) для преобразования $R(p_i; A)$ ($i=1, 2$) общий элемент, содержащийся в группе $G(\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q})$. Для этого запишем преобразование $R(p_i; A)$ в виде

$$R(p_i; A) = A(p_i)^{-1} A(p, q) Q(p, q; A) \times \\ \times A(\Lambda(A)^{-1} p, \Lambda(A)^{-1} q)^{-1} A(\Lambda(A)^{-1} p_i), \quad (3.1.26)$$

$$Q(p, q; A) \equiv$$

$$\equiv A(p, q)^{-1} A A(\Lambda(A)^{-1} p, \Lambda(A)^{-1} q) \in G(\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}).$$

Преобразование $A(p, q)^{-1} A(p_i)$ переводит стандартный импульс $\overset{\circ}{p}_i$ в стандартную систему отсчета (характеризуемую $\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}$), т. е., согласно формуле (3.1.23), мы имеем

$$\Lambda(p, q)^{-1} \Lambda(p_i) \overset{\circ}{p}_i = \beta_i = \Lambda(\beta_i) \overset{\circ}{p}_i. \quad (3.1.27)$$

Поэтому преобразование

$$R(p_i; A(p, q)) \equiv A(p_i)^{-1} A(p, q) A(\beta_i) \quad (3.1.28)$$

является элементом группы $G(\hat{\rho}_i)$, и можно записать

$$R(\rho_i; A) = R(\rho_i; A(\rho, q)) A(\hat{\rho}_i)^{-1} Q(\rho, q; A) \times \\ \times A(\hat{\rho}_i) R(\Lambda(A)^{-1} \rho_i; A(\Lambda(A)^{-1} \rho, \Lambda(A)^{-1} q))^{-1}. \quad (3.1.29)$$

Здесь мы использовали вытекающее из формулы (3.1.24) очевидное соотношение

$$\hat{\Lambda} \rho_i = \hat{\rho}_i \quad \text{при} \quad \Lambda \in L_+^{\uparrow}. \quad (3.1.30)$$

Согласно формуле (3.1.16), преобразование $Q(\rho, q; A)$ является либо вращением вокруг оси $e_{(3)}$ в плоскости (1, 2), либо преобразованием Лоренца в плоскости (0, 1). В первом случае $\hat{\rho}$ и \hat{q} лежат в плоскости (0, 3), так что преобразование $A(\hat{\rho}_i)$, согласно формулам (1.1.8) и (1.1.9), является преобразованием Лоренца со скоростью, направленной по оси $e_{(3)}$. Во втором случае $\hat{\rho}$ и \hat{q} лежат в плоскости (2, 3), и преобразование $A(\hat{\rho}_i)$ является вращением в этой плоскости. Следовательно, в обоих случаях операция $A(\hat{\rho}_i)$ коммутирует с элементами группы $G(\hat{\rho}, \hat{q})$. Именно поэтому представители $A(\rho)$ были выбраны согласно (1.1.9). Итак, формулу (3.1.29) можно привести к виду

$$R(\rho_i; A) = R(\rho_i; A(\rho, q)) Q(\rho, q; A) \times \\ \times R(\Lambda(A)^{-1} \rho_i; A(\Lambda(A)^{-1} \rho, \Lambda(A)^{-1} q))^{-1}. \quad (3.1.31)$$

В качестве первого шага к решению проблемы редукции унитарно отобразим пространство $\mathfrak{H}^{1,2}$, в котором действует представление,

$$\mathfrak{H}^{1,2} \rightarrow \mathfrak{H}'^{1,2}, \quad \psi \mapsto \psi': \\ \psi'(p, q) = \\ = U_{G_1}^{O_1}(R(\rho_1; A(\rho, q))^{-1}) \otimes U_{G_2}^{O_2}(R(\rho_2; A(\rho, q))^{-1}) \psi(p_1, p_2) \quad (3.1.32)$$

на другое гильбертово пространство $\mathcal{H}^{1,2}$

$$\mathfrak{H}'^{1,2} \equiv \bigoplus_{\Omega_k} \int \sqrt{d\rho(\hat{\rho})} \left[\bigoplus_{\Omega(\hat{\rho})} \int \sqrt{d\omega_{\hat{\rho}}(\rho)} \left(\bigoplus_{\Sigma(\rho)} \int \sqrt{dR_{\rho}(q)} \mathfrak{H}^{\rho_1, \rho_2}(p, q) \right) \right], \quad (3.1.33)$$

$$\mathfrak{H}^{\rho_1, \rho_2}(p, q) \equiv \mathfrak{H}_{G_1}^{O_1} \otimes \mathfrak{H}_{G_2}^{O_2}$$

со скалярным произведением

$$\begin{aligned} \langle \psi' | \varphi' \rangle^{1,2} &\equiv \\ &\equiv \int_{\Omega_k} d\rho(\overset{\circ}{\rho}) \int_{\Omega(\overset{\circ}{\rho})} d\omega_{\overset{\circ}{\rho}}(\rho) \int_{\Sigma(\rho)} dR_{\rho}(q) \langle \psi'(\rho, q) | \varphi'(\rho, q) \rangle^{\rho_1, \rho_2} = \langle \psi | \varphi \rangle^{1,2}. \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

При этом представление $U^{1,2}$ принимает вид

$$\begin{aligned} (U^{1,2}(A, a)\psi')(p, q) &\equiv (U^{1,2}(A, a)\psi)'(p, q) = \\ &= e^{ip \cdot a} U_{G_1}^{\rho_1}(Q(p, q; A)) \otimes U_{G_2}^{\rho_2}(Q(p, q; A)) \psi'(\Lambda(A)^{-1}p, \Lambda(A)^{-1}q). \end{aligned} \quad (3.1.35)$$

Очевидно, что представление $U^{1,2}$ является индуцированным представлением группы \tilde{P} , причем сужение

$$U_{\tilde{G}(\overset{\circ}{\rho}_1)}^{\overset{\circ}{\rho}_1, \overset{\circ}{\rho}_1} \otimes U_{\tilde{G}(\overset{\circ}{\rho}_2)}^{\overset{\circ}{\rho}_2, \overset{\circ}{\rho}_2} \Big| \tilde{G}(\overset{\circ}{\rho}, \overset{\circ}{q}), (\tilde{G})(\overset{\circ}{\rho}, \overset{\circ}{q}) \equiv G(\overset{\circ}{\rho}, \overset{\circ}{q}) \otimes \mathbf{R}^4 \subset \tilde{P}$$

играет роль индуцирующего представления. Оно, однако, вовсе не является неприводимым, так как, во-первых, сужение $U_{G_1}^{\rho_1} \otimes U_{G_2}^{\rho_2} \Big| G(\overset{\circ}{\rho}, \overset{\circ}{q})$, вообще говоря, приводимо, а, во-вторых, группа $G(\overset{\circ}{\rho}, \overset{\circ}{q})$ слишком „мала“ (см. работу Макки [9]). Оба эти соображения используются в дальнейшем в качестве ключа к решению проблемы редукции.

Прежде всего разложим сужение представления $U_{G_1}^{\rho_1} \otimes U_{G_2}^{\rho_2} \Big| G(\overset{\circ}{\rho}, \overset{\circ}{q})$ на неприводимые компоненты. В разд. 2.2—2.5 была решена проблема редукции для сужения

$$U_G^{\rho} \Big| H, H = G(\overset{\circ}{\rho}, \overset{\circ}{q}) \in \{H_1, H_2\}, G \in \{SU(2), SU(1, 1), E(2)\}$$

(см. последний абзац в разд. 2.5). При этом пространство \mathfrak{H}_G^{ρ} с помощью преобразования унитарной эквивалентности \check{A} отображалось на гильбертово пространство

$$\check{A}\mathfrak{H}_G^{\rho} = \tilde{\mathfrak{H}}_{G, H}^{\rho} \equiv \bigoplus \int_{\hat{H}_{\rho}} \sqrt{d\hat{\nu}(\sigma)} \mathbf{C}^{n(\rho)}, \quad (3.1.36)$$

в котором сужение $\tilde{U}_G^{\rho} \Big| H$ разлагается в прямой интеграл унитарных неприводимых представлений χ^{σ} группы H , каждое из которых входит $n(\rho)$ раз:

$$\tilde{U}_G^{\rho}(Q) \tilde{f}_{\tau}^{\rho}(\sigma) = \chi^{\sigma}(Q) \tilde{f}_{\tau}^{\rho}(\sigma), \quad \tilde{f}^{\rho} \in \tilde{\mathfrak{H}}_{G, H}^{\rho}. \quad (3.1.37)$$

Пусть $\tilde{\mathfrak{F}}_{G_i, H}^{\rho_i} = \ddot{A}_i \mathfrak{F}_{G_i}^{\rho_i}$, $i = 1, 2$, есть образ пространства $\mathfrak{F}_{G_i}^{\rho_i}$. Тогда прямое произведение $\ddot{A}_1 \otimes \ddot{A}_2$ унитарно отображает пространство $\mathfrak{F}_{G_1}^{\rho_1} \otimes \mathfrak{F}_{G_2}^{\rho_2}$ на гильбертово пространство

$$\begin{aligned} (\ddot{A}_1 \otimes \ddot{A}_2) (\mathfrak{F}_{G_1}^{\rho_1} \otimes \mathfrak{F}_{G_2}^{\rho_2}) &= \tilde{\mathfrak{F}}_{G_1, H}^{\rho_1} \otimes \tilde{\mathfrak{F}}_{G_2, H}^{\rho_2} \equiv \tilde{\mathfrak{F}}_{G_1, G_2, H}^{\rho_1, \rho_2} = \\ &= \bigoplus_{\hat{H}_{\rho_1}} \int V \overline{d\hat{v}(\sigma_1)} \oplus \int_{\hat{H}_{\rho_2}} V \overline{d\hat{v}(\sigma_2)} (\mathbf{C}^{n(\rho_1)} \otimes \mathbf{C}^{n(\rho_2)}), \end{aligned} \quad (3.1.38)$$

состоящие из комплекснозначных функций $\tilde{f} = (\ddot{A}_1 \times \ddot{A}_2) f$, $f \in \mathfrak{F}_{G_1}^{\rho_1} \otimes \mathfrak{F}_{G_2}^{\rho_2}$ со скалярным произведением

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f} | \tilde{g} \rangle &\sim^{\rho_1, \rho_2} \equiv \\ &\equiv \int_{\hat{H}_{\rho_1}} d\hat{v}(\sigma_1) \int_{\hat{H}_{\rho_2}} d\hat{v}(\rho_2) \sum_{\tau_1=1}^{n(\rho_1)} \sum_{\tau_2=1}^{n(\rho_2)} \tilde{f}_{\tau_1 \tau_2}(\sigma_1, \sigma_2)^* \tilde{g}_{\tau_1 \tau_2}(\sigma_1, \sigma_2) = \langle f | g \rangle^{\rho_1, \rho_2}. \end{aligned} \quad (3.1.39)$$

Для преобразованного представления

$$\tilde{U}_{G_1, G_2}^{\rho_1, \rho_2} \equiv (\ddot{A}_1 \otimes \ddot{A}_2) (U_{G_1}^{\rho_1} \otimes U_{G_2}^{\rho_2}) (\ddot{A}_1 \otimes \ddot{A}_2)^{-1} \quad (3.1.40)$$

в пространстве $\tilde{\mathfrak{F}}_{G_1, G_2, H}^{\rho_1, \rho_2}$ имеем

$$\tilde{U}_{G_1, G_2}^{\rho_1, \rho_2}(Q) \tilde{f}_{\tau_1 \tau_2}(\sigma_1, \sigma_2) = \chi^{\sigma_1}(Q) \chi^{\sigma_2}(Q) \tilde{f}_{\tau_1 \tau_2}(\sigma_1, \sigma_2), \quad Q \in H, \quad (3.1.41)$$

т. е. сужение $\tilde{U}_{G_1, G_2}^{\rho_1, \rho_2} | H$ разлагается в прямой интеграл неприводимых унитарных представлений группы H :

$$\chi^{\sigma_1}(Q) \chi^{\sigma_2}(Q) = \chi^{\sigma_1 + \sigma_2}(Q),$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 \equiv \quad (3.1.42)$$

$$\equiv \begin{cases} (\kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_2, \mu_1 + \mu_2 + \kappa_1\kappa_2) & \text{при } H = H_1, \quad \sigma_i = (\kappa_i, \mu_i); \\ (\kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_2, \lambda_1 + \lambda_2) & \text{при } H = H_2, \quad \sigma_i = (\kappa_i, \lambda_i). \end{cases}$$

С помощью подстановки

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \bar{\sigma} = \sigma_1, \quad (3.1.43)$$

можно определить унитарное отображение B

$$\tilde{f} \rightarrow f'' = B\tilde{f} : f''_{\tau_1 \tau_2}(\sigma, \bar{\sigma}) = \tilde{f}_{\tau_1 \tau_2}(\sigma_1, \sigma_2) \quad (3.1.44)$$

гильбертова пространства $\mathfrak{H}_{G_1, G_2, H}^{\rho_1, \rho_2}$ на пространство $\mathfrak{H}_{G_1, G_2, H}^{\rho_1, \rho_2}$ со скалярным произведением

$$\begin{aligned} \langle f'' | g'' \rangle^{\rho_1, \rho_2} &= \int_{\hat{H}^{\rho_1, \rho_2}} d\hat{\nu}(\sigma) \int_{\hat{H}_\sigma^{\rho_1, \rho_2}} d\hat{\nu}(\bar{\sigma}) \sum_{\tau_1=1}^{n(\rho_1)} \sum_{\tau_2=1}^{n(\rho_2)} f''_{\tau_1 \tau_2}(\sigma, \bar{\sigma})^* g''_{\tau_1 \tau_2}(\sigma, \bar{\sigma}) = \\ &= \langle \tilde{f} | \tilde{g} \rangle^{\sim \rho_1, \rho_2}. \end{aligned} \quad (3.1.45)$$

Здесь множество $\hat{H}_{\rho_1} \times \hat{H}_{\rho_2}$ при подстановке (3.1.43) отображается в множества \hat{H}^{ρ_1, ρ_2} и $\hat{H}_\sigma^{\rho_1, \rho_2}$. Заметим, что якобиан преобразования (3.1.43) всегда равен 1. Согласно формулам (3.1.41) и (3.1.44), для представления

$$U''_{G_1, G_2}{}^{\rho_1, \rho_2} \equiv B \tilde{U}_{G_1, G_2}{}^{\rho_1, \rho_2} B^{-1} \quad (3.1.46)$$

имеем

$$\begin{aligned} U''_{G_1, G_2}{}^{\rho_1, \rho_2}(Q) f''_{\tau_1 \tau_2}(\sigma, \bar{\sigma}) &= \chi^\sigma(Q) f''_{\tau_1 \tau_2}(\sigma, \bar{\sigma}), \\ U''_{G_1, G_2}{}^{\rho_1, \rho_2} | H &= \bigoplus \int_{\hat{H}^{\rho_1, \rho_2}} d\hat{\nu}(\sigma) \left[\bigoplus \int_{\hat{H}_\sigma^{\rho_1, \rho_2}} d\hat{\nu}(\bar{\sigma}) \left(\bigoplus \sum_{\tau_1=1}^{n(\rho_1)} \bigoplus \sum_{\tau_2=1}^{n(\rho_2)} \chi^\sigma \right) \right], \end{aligned} \quad (3.1.47)$$

т. е. сужение $U''_{G_1, G_2}{}^{\rho_1, \rho_2} | H$ разлагается в прямой интеграл неприводимых унитарных представлений группы H . Кратность представления χ^σ равна $n(\rho_1, \rho_2, \sigma) n(\rho_1) n(\rho_2)$, где $n(\rho_1, \rho_2, \sigma)$ — размерность гильбертова пространства квадратично интегрируемых по мере $\hat{\nu}$ комплекснозначных функций в пространстве $\hat{H}_\sigma^{\rho_1, \rho_2}$. Используем теперь составное отображение

$$B \circ (\tilde{A}_1 \otimes \tilde{A}_2) : \mathfrak{H}_{G_1}^{\rho_1} \otimes \mathfrak{H}_{G_2}^{\rho_2} \rightarrow \mathfrak{H}_{G_1, G_2}^{\rho_1, \rho_2},$$

чтобы унитарно отобразить гильбертово пространство $\mathfrak{H}^{1,2}$, определяемое формулой (3.1.33), на пространство

$$\mathfrak{H}^{1,2} \equiv \bigoplus \int_{\Omega_k} \sqrt{d\rho(\rho)} \left[\bigoplus \int_{\Omega(\rho)} \sqrt{d\omega_\rho(\rho)} \left(\bigoplus \int_{\Sigma(\rho)} \sqrt{dR_\rho(q)} \mathfrak{H}_{G_1, G_2, H}^{\rho_1, \rho_2} \right) \right]. \quad (3.1.48)$$

Оно состоит из функций $\psi''_{\sigma\bar{\sigma}\tau_1\tau_2}(p, q)$ со скалярным произведением вида

$$\begin{aligned} \langle \psi'' | \varphi'' \rangle^{1,2} &\equiv \int_{\Omega_k} d\rho(\rho) \int_{\Omega(\rho)} d\omega_\rho(p) \int_{\Sigma(p)} dR(q) \times \\ &\times \int_{\hat{H}^{\rho_1, \rho_2}} d\hat{\nu}(\sigma) \int_{\hat{H}^{\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2}} d\hat{\nu}(\bar{\sigma}) \sum_{\tau_1=1}^{n(\rho_1)} \sum_{\tau_2=1}^{n(\rho_2)} \psi''_{\sigma\bar{\sigma}\tau_1\tau_2}(p, q)^* \times \\ &\times \varphi''_{\sigma\bar{\sigma}\tau_1\tau_2}(p, q) = \langle \psi | \varphi \rangle^{1,2}. \end{aligned} \quad (3.1.49)$$

Согласно формулам (3.1.35) и (3.1.47), представление $U^{1,2}$ действует в пространстве $\mathfrak{F}^{1,2}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} (U^{1,2}(A, a) \psi'')_{\sigma\bar{\sigma}\tau_1\tau_2}(p, q) &\equiv (U^{1,2}(A, a) \psi)''_{\sigma\bar{\sigma}\tau_1\tau_2}(p, q) = \\ &= e^{i\rho \cdot a} \chi^\sigma(Q(p, q; A)) \psi''_{\sigma\bar{\sigma}\tau_1\tau_2}(\Lambda(A)^{-1}p, \Lambda(A)^{-1}q). \end{aligned} \quad (3.1.50)$$

Иными словами, представление $U^{1,2}$ имеет вид прямого интеграла представлений группы \tilde{P} , индуцируемых неприводимыми унитарными представлениями группы $\tilde{G}(p, q)$.

Последний шаг выполняется с помощью преобразования Фурье (2.7.7). Так как функция ψ'' в силу формулы (3.1.49) почти для всех $\bar{\sigma}$ и p является элементом пространства

$$\bigoplus_{\hat{H}^{\rho_1, \rho_2}} \int \sqrt{d\hat{\nu}(\sigma)} \mathcal{L}^2(\Sigma(p)),$$

а поверхность $\Sigma(p)$ гомеоморфна фактор-

пространству $G(\rho)/H$ и $\hat{H}^{\rho_1, \rho_2} \subset \hat{H}$, то с помощью формул

$$\hat{F}: \mathfrak{F}^{1,2} \rightarrow \hat{\mathfrak{F}}^{1,2}, \quad \hat{\psi}' = \hat{F}\psi'',$$

$$\begin{aligned} \hat{\psi}'_{\sigma\bar{\sigma}\tau_1\tau_2}(p) &= \int_{\Sigma(p)} dR_p(q) U_G^{\rho(\bar{\rho})}(R(\Lambda(p)^{-1}q))_{\tau'\sigma', \sigma\tau} \psi''_{\sigma\bar{\sigma}\tau_1\tau_2}(p, q), \\ \psi''_{\sigma\bar{\sigma}\tau_1\tau_2}(p, q) &= \\ &= \int_{\hat{\sigma}(\rho)_\sigma} d\hat{\mu}(\rho) \int_{\hat{H}_\rho} d\hat{\nu}(\sigma') \sum_{\tau', \tau} \hat{\psi}'_{\sigma\bar{\sigma}\tau_1\tau_2}(p) U_G^{\rho(\bar{\rho})}(R(\Lambda(p)^{-1}q))_{\tau'\sigma', \tau\sigma}, \end{aligned} \quad (3.1.51)$$

мы можем определить унитарное отображение гильбертова пространства $\mathfrak{H}''^{1,2}$ на пространство

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}^{1,2} &= \bigoplus \int_{\Omega_k} \sqrt{d\rho(\overset{\circ}{\rho})} \oplus \int_{G(\overset{\circ}{\rho})^{\rho_1, \rho_2}} \sqrt{d\hat{\mu}(\rho)} \hat{\mathfrak{H}}_{\rho, \rho}^{\prime 1,2}, \\ \hat{\mathfrak{H}}_{\rho, \rho}^{\prime 1,2} &\equiv \bigoplus \int_{\hat{H}_\rho^{\rho_1, \rho_2}} \sqrt{d\hat{\nu}(\sigma)} \oplus \int_{\hat{H}_\sigma^{\rho_1, \rho_2}} \sqrt{d\hat{\nu}(\bar{\sigma})} \oplus \sum_{\tau_1, \tau_2, \tau} \tilde{\mathfrak{H}}_{\rho, \rho}^{\circ, \rho} = \\ &= \mathfrak{H}_{\rho, \rho}^{\rho_1, \rho_2} \oplus \tilde{\mathfrak{H}}_{\rho, \rho}^{\circ, \rho}, \quad (3.1.52) \\ \tilde{\mathfrak{H}}_{\rho, \rho}^{\circ, \rho} &\equiv \bigoplus \int_{\Omega(\overset{\circ}{\rho})} \sqrt{d\omega_\rho(p)} \oplus \int_{\hat{H}_\rho} \sqrt{d\hat{\nu}(\sigma')} \oplus \sum_{\tau'} \mathbf{C}, \\ \mathfrak{H}_{\rho, \rho}^{\rho_1, \rho_2} &= \bigoplus \int_{\hat{H}_\rho^{\rho_1, \rho_2}} \sqrt{d\hat{\nu}(\sigma)} \oplus \int_{\hat{H}_\sigma^{\rho_1, \rho_2}} \sqrt{d\hat{\nu}(\bar{\sigma})} \oplus \sum_{\tau_1, \tau_2, \tau} \mathbf{C}. \end{aligned}$$

Здесь $\hat{G}(\overset{\circ}{\rho})^{\rho_1, \rho_2}$ — множество тех значений $\rho \in \hat{G}(\overset{\circ}{\rho})$, для которых сужение $U_{G(\overset{\circ}{\rho})}^\rho | H$ содержит представление χ^σ при $\sigma \in \hat{H}^{\rho_1, \rho_2}$, $\hat{H}_\rho^{\rho_1, \rho_2}$ есть множество тех $\sigma \subset \hat{H}^{\rho_1, \rho_2}$, для которых представление χ^σ содержится в сужении $U_{G(\overset{\circ}{\rho})}^\rho | H$. Эти члены появляются при перестановке порядка интегрирования

$$\int_{\hat{H}^{\rho_1, \rho_2}} d\hat{\nu}(\sigma) \int_{\hat{G}(\overset{\circ}{\rho})_\sigma} d\hat{\mu}(\rho) = \int_{\hat{G}(\overset{\circ}{\rho})^{\rho_1, \rho_2}} d\hat{\mu}(\rho) \int_{\hat{H}_\rho^{\rho_1, \rho_2}} d\hat{\nu}(\sigma). \quad (3.1.53)$$

Скалярное произведение в пространстве $\mathfrak{H}''^{1,2}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \hat{\psi}' | \hat{\phi}' \rangle^{-1,2} &= \\ &= \int_{\Omega_k} d\rho(\overset{\circ}{\rho}) \int_{\hat{G}(\overset{\circ}{\rho})^{\rho_1, \rho_2}} d\hat{\mu}(\rho) \int_{\hat{H}_\sigma^{\rho_1, \rho_2}} d\hat{\nu}(\sigma) \int_{\hat{H}_\sigma^{\rho_1, \rho_2}} d\hat{\nu}(\bar{\sigma}) \times \\ &\times \sum_{\tau_1, \tau_2, \tau} \langle \hat{\psi}'_{\sigma\bar{\sigma}\tau_1\tau_2\tau} | \hat{\phi}'_{\sigma\bar{\sigma}\tau_1\tau_2\tau} \rangle^{\circ, \rho} = \langle \psi | \varphi \rangle^{1,2}, \quad (3.1.54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \psi'_{\sigma\bar{\sigma}\tau_1\tau_2\tau} | \varphi'_{\sigma\bar{\sigma}\tau_1\tau_2\tau} \rangle^{\circ, \rho} &= \\ &= \int_{\Omega(\overset{\circ}{\rho})} d\omega_\rho(p) \int_{\hat{H}_\rho} d\hat{\nu}(\sigma') \sum_{\tau'} \hat{\psi}'_{\sigma\bar{\sigma}\tau_1\tau_2\tau}(p)^* \hat{\varphi}'_{\sigma\bar{\sigma}\tau_1\tau_2\tau}(p). \end{aligned}$$

С помощью соотношений

$$U_{G(\hat{\rho})}^{\rho} (R(\Lambda(p)^{-1}q)Q(p, q; A))_{\tau'\sigma', \tau\sigma} = U_{G(\hat{\rho})}^{\rho} (R(\Lambda(p)^{-1}q))_{\tau'\sigma', \tau\sigma} \chi^{\sigma}(Q(p, q; A)), \quad (3.1.55)$$

и

$$R(\Lambda(p)^{-1}q)Q(p, q; A) = R(p; A)R(\Lambda(\Lambda^{-1}p)^{-1}\Lambda^{-1}q), \quad \Lambda = \Lambda(A), \quad (3.1.56)$$

[последнее следует из формул (3.1.26), (3.1.21) и (3.1.15), а также интегральной формулы

$$\int_{\Sigma(\rho)} dR_{\rho}(q) = \int_{\Sigma(\Lambda^{-1}\rho)} dR_{\Lambda^{-1}\rho}(\Lambda^{-1}q), \quad (3.1.57)$$

которая вытекает из (3.1.11)] можно записать для произведения представлений группы \tilde{P} , перенесенного в пространство $\hat{\mathfrak{F}}^{\prime 1, 2}$, следующее разложение:

$$\begin{aligned} (\hat{U}^{\prime 1, 2}(A, a)\hat{\Psi}')_{\sigma\sigma'\tau_1\tau_2\tau}^{\rho\sigma'\tau'}(p) &= (U^{\prime 1, 2}(A, a)\Psi)_{\sigma\sigma'\tau_1\tau_2\tau}^{\rho\sigma'\tau'}(p) = \\ &= e^{ip \cdot a} \int_{\hat{H}_{\rho}} d\hat{v}(\sigma'') \sum_{\tau''} U_{G(\hat{\rho})}^{\rho} (R(p; A))_{\tau'\sigma', \tau''\sigma''} \hat{\Psi}'_{\sigma\sigma'\tau_1\tau_2\tau}^{\rho\sigma''\tau''}(\Lambda^{-1}p). \end{aligned} \quad (3.1.58)$$

Иными словами, в каждом гильбертовом пространстве $\hat{\mathfrak{F}}_{\rho, \rho}^{\circ}$, которое содержится в разложении (3.1.52) пространства $\hat{\mathfrak{F}}^{\prime 1, 2}$, представление $\hat{U}^{\prime 1, 2}$ принимает вид неприводимого унитарного представления группы \tilde{P} , принадлежащего к классу эквивалентности, характеризуемому парой (ρ, ρ) . В пространстве $\hat{\mathfrak{F}}_{\rho, \rho}^{\prime 1, 2}$ это представление реализуется с кратностью, которая определяется размерностью пространства $\hat{\mathfrak{F}}_{\rho, \rho}^{\circ}$. В целом пространство представления $\hat{\mathfrak{F}}^{\prime 1, 2}$ является прямым интегралом гильбертовых пространств $\hat{\mathfrak{F}}_{\rho, \rho}^{\prime 1, 2}$ по множеству классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений группы \tilde{P} , которое задается множествами Ω_k и $\hat{G}(\rho)^{\circ \rho_1, \rho_2}$.

Дадим еще другую форму этого решения проблемы редукции произведения представлений группы \tilde{P} с ненулевыми импульсами. В формуле (1.1.12) мы определили гильбертово пространство $\hat{\mathfrak{F}}_{\rho, \rho}^{\circ}$, в котором реализуется неприводимое унитарное

представление $U^{\hat{p}, \rho}$ группы \tilde{P} . Согласно формулам (3.1.52) и (3.1.36), пространство $\tilde{\mathfrak{H}}^{\hat{p}, \rho} = \tilde{A}\mathfrak{H}^{\hat{p}, \rho}$ — эквивалентно гильбертову пространству $\mathfrak{H}^{\hat{p}, \rho}$, которое входит в разложение сужения $U_{G(\hat{p})}^{\rho} | H$. Используя унитарное отображение вида

$$\hat{\Psi}_{\sigma\bar{\sigma}\tau_1\tau_2\tau}^{\rho}(p) \rightarrow \hat{\Psi}'_{\sigma\bar{\sigma}\tau_1\tau_2\tau}^{\rho}(p) = \tilde{A}^{-1}\hat{\Psi}_{\sigma\bar{\sigma}\tau_1\tau_2\tau}^{\rho}(p), \quad (3.1.59)$$

связывающее гильбертовы пространства $\mathfrak{H}'^{1,2}$ и

$$\mathfrak{H}^{1,2} = \bigoplus_{\Omega_k} \int \sqrt{d\rho(\hat{p})} \oplus \int_{\hat{G}(\hat{p})^{\rho_1, \rho_2}} \sqrt{d\hat{\mu}(\rho)} \mathfrak{H}_{\rho, \rho}^{\hat{1}, 2}, \quad \mathfrak{H}_{\rho, \rho}^{\hat{1}, 2} = \mathfrak{H}_{\rho}^{\rho_1, \rho_2} \oplus \mathfrak{H}^{\hat{p}, \rho}, \quad (3.1.60)$$

можно перевести представление $\hat{U}^{1,2}$ в следующее:

$$\begin{aligned} (\hat{U}^{1,2}(A, a)\hat{\Psi})_{\sigma\bar{\sigma}\tau_1\tau_2\tau}^{\rho}(p) &\equiv (U^{1,2}(A, a)\Psi)_{\sigma\bar{\sigma}\tau_1\tau_2\tau}^{\rho}(p) = \\ &= e^{ip \cdot a} U_{G(\hat{p})}^{\rho}(R(p; A)) \hat{\Psi}_{\sigma\bar{\sigma}\tau_1\tau_2\tau}^{\rho}(\Lambda(A)^{-1}p), \end{aligned} \quad (3.1.61)$$

$$\hat{U}^{1,2} = \bigoplus_{\Omega_k} \int d\rho(\hat{p}) \oplus \int_{\hat{G}(\hat{p})^{\rho_1, \rho_2}} d\hat{\mu}(\rho) \left[\mathbf{1}_{\mathfrak{H}_{\rho}^{\rho_1, \rho_2}} \oplus U^{\hat{p}, \rho} \right].$$

Это представление реализуется в пространстве $\mathfrak{H}^{1,2}$, и его можно считать окончательной формой решения проблемы редукции прямого произведения $U^{\hat{p}_1, \rho_1} \otimes U^{\hat{p}_2, \rho_2}$ при $\hat{p}_1 \neq 0 \neq \hat{p}_2$. Области Ω_k перечислены в табл. 3.1. Области $\hat{G}(\hat{p})^{\rho_1, \rho_2}$, а также кратность, с которой входит представление $U^{\hat{p}, \rho}$, определяемая размерностью пространства $\mathfrak{H}_{\rho}^{\rho_1, \rho_2}$, и коэффициенты Клебша — Гордана указаны в разд. 3.2.

3.2. ОБОБЩЕННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ КЛЕБША — ГОРДАНА ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЯ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ $U^{\hat{p}_1, \rho_1} \otimes U^{\hat{p}_2, \rho_2}$ ПРИ $\hat{p}_1 \neq 0 \neq \hat{p}_2$

Унитарные преобразования, заданные формулами (3.1.32), (3.1.38), (3.1.44) и (3.1.51), которые приводят к редукции прямого произведения двух представлений $U^{1,2} \equiv U^{\hat{p}_1, \rho_1} \otimes U^{\hat{p}_2, \rho_2}$, можно свести

в единое преобразование:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{\sigma\bar{\sigma}\tau'_1\tau'_2\tau}^{\rho\sigma'\tau'}(p) &= \int_{\Sigma(p)} dR_p(q) \int_{\hat{H}_{\rho_1}} d\hat{v}(\sigma_1) \int_{\hat{H}_{\rho_2}} d\hat{v}(\sigma_2) \times \\ &\times \sum_{\tau_1\tau_2} \left\langle \begin{matrix} \overset{\circ}{\rho\rho} \\ \rho\tau'\sigma' \end{matrix}; \begin{matrix} \sigma\bar{\sigma} \\ \tau\tau'_1\tau'_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \overset{\circ}{\rho_1\rho_1} \\ \rho_1\tau_1\sigma_1 \end{matrix}; \begin{matrix} \overset{\circ}{\rho_2\rho_2} \\ \rho_2\tau_2\sigma_2 \end{matrix} \right\rangle (\ddot{A}_{1,2}\psi)_{\tau_1\sigma_1, \tau_2\sigma_2}(p_1, p_2), \quad (3.2.1) \\ \ddot{A}_{1,2} &\equiv \bigoplus \int_{\Omega(\overset{\circ}{\rho_1}) \times \Omega(\overset{\circ}{\rho_2})} d\omega_{\overset{\circ}{\rho_1}}(p_1) d\omega_{\overset{\circ}{\rho_2}}(p_2) (\ddot{A}_1 \oplus \ddot{A}_2) \end{aligned}$$

с обобщенными коэффициентами Клебша — Гордана

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{matrix} \overset{\circ}{\rho\rho} \\ \rho\tau'\sigma' \end{matrix}; \begin{matrix} \sigma\bar{\sigma} \\ \tau\tau'_1\tau'_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \overset{\circ}{\rho_1\rho_1} \\ \rho_1\tau_1\sigma_1 \end{matrix}; \begin{matrix} \rho_2\rho_2 \\ \rho_2\tau_2\sigma_2 \end{matrix} \right\rangle &\equiv U_G^{\rho, \overset{\circ}{\rho}}(R(\Lambda(p)^{-1}q))_{\tau'\sigma', \tau\sigma} \times \\ &\times U_{G_1}^{\rho_1}(R(p_1; A(p, q))^{-1})_{\tau'_1\bar{\sigma}, \tau_1\sigma_1} U_{G_2}^{\rho_2}(R(p_2; A(p, q))^{-1})_{\tau'_2, \sigma-\bar{\sigma}, \tau_2\sigma_2}. \quad (3.2.2) \end{aligned}$$

Преобразования $A(p)$ и $R(\Lambda(p)^{-1}q)$ определяются по формулам (1.1.9), (1.1.8) и (3.1.19), (3.1.18) соответственно; $A(p, q)$ — по формуле (3.1.21), $R(p_i; A(p, q))$ — по формулам (3.1.28) и (3.1.23); зависимость векторов p и q от p_1 и p_2 дается формулами (3.1.1) и (3.1.5). Согласно (3.1.52) и (3.1.61), множество неприводимых унитарных представлений группы \hat{P} , входящих в представление $U^{1,2}$, определяется областями интегрирования Ω_k и $\hat{G}(\overset{\circ}{\rho})^{\rho_1, \rho_2}$; кратность, с которой представление $U^{\overset{\circ}{\rho}, \rho}$ входит в $U^{1,2}$, находится из условия

$$d_{\rho^{\rho_1, \rho_2}} \equiv \dim \mathfrak{F}_{\rho}^{\rho_1, \rho_2},$$

$$\mathfrak{F}_{\rho}^{\rho_1, \rho_2} = \bigoplus \int_{\hat{H}_{\overset{\circ}{\rho}}^{\rho_1, \rho_2}} \sqrt{d\hat{v}(\sigma)} \oplus \int_{\hat{H}_{\overset{\circ}{\sigma}}^{\rho_1, \rho_2}} \sqrt{d\hat{v}(\bar{\sigma})} \oplus \sum_{\tau, \tau'_1, \tau'_2} c. \quad (3.2.3)$$

Индексы $\sigma, \bar{\sigma}, \tau, \tau'_1, \tau'_2$ являются параметрами вырождения. В дальнейшем для каждого из случаев I—IX (см. табл. 3.1) мы выпишем неприводимые унитарные представления, входящие

в представление $U^{1,2}$, а также их кратности. Согласно формуле (3.2.2), коэффициенты Клебша — Гордана построены из матричных элементов представлений малых групп. Поэтому мы указываем формулы гл. 2, где дан явный вид этих матричных элементов. Будем использовать то обстоятельство, что индексы κ для появляющихся обычно классов эквивалентности ρ и σ совпадают, и часто будем писать $\sigma = \mu$ или $\sigma = \lambda$ вместо $\sigma = (\kappa, \mu)$ или $\sigma = (\kappa, \lambda)$.

I. $\overset{\circ}{\rho}_1 = m_1 e_{(0)}$, $\overset{\circ}{\rho}_2 = m_2 e_{(0)}$. Согласно табл. 3.1, область Ω_1

имеет вид

$$\Omega_1 = \{m e_{(0)} : m \geq m_1 + m_2\}. \quad (3.2.4)$$

Поэтому $G_1 = G_2 = G(\overset{\circ}{\rho}) = SU(2)$, $G(\overset{\circ}{\rho}, \overset{\circ}{q}) = H_1$. При $\rho_i = (\kappa_i, l_i)$, $i \in \{1, 2\}$ имеем

$$\widehat{H}_{1, \rho_i} = \{(\kappa'_i, \mu_i) : \kappa'_i = \kappa_i, -l_i - \kappa_i \leq \mu_i \leq l_i\}.$$

Индексы τ опущены. Области $\widehat{H}_1^{\rho_1, \rho_2}$ и $\widehat{H}_1^{\rho_1, \rho_2}$, определяемые подстановкой (3.1.43), заданы следующим образом:

$$\begin{aligned} \widehat{H}_1^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2} &= \\ &= \{(\kappa, \mu) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, -l_1 - \kappa_1/2 - l_2 - \kappa_2/2 \leq \\ &\leq \mu + \kappa/2 \leq l_1 + \kappa_1/2 + l_2 + \kappa_2/2\}, \\ \widehat{H}_1^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2} &= \\ &= \{(\bar{\kappa}, \bar{\mu}) : \bar{\kappa} = \kappa_1, \max(-l_1 - \kappa_1/2, \mu + \kappa/2 - l_2 - \kappa_2/2) \leq \\ &\leq \bar{\mu} + \kappa_1/2 \leq \min(l_1 + \kappa_1/2, \mu + \kappa/2 + l_2 + \kappa_2/2)\}. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Так как, кроме того,

$$\widehat{G}(\overset{\circ}{\rho})_{\kappa, \mu} = \widehat{SU}(2)_{\kappa, \mu} = \{(\kappa', l) : \kappa' = \kappa, l + \kappa/2 \geq |\mu + \kappa/2|\}, \quad (3.2.6)$$

то по формуле (3.1.53) получаем

$$\begin{aligned} \widehat{G}(\overset{\circ}{\rho})^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2} &= \{(\kappa, l) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, l \geq 0\}, \\ \widehat{H}_1^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2} &= \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, \\ &\max(-l - \kappa/2, -l_1 - \kappa_1/2 - l_2 - \kappa_2/2) \leq \\ &\leq \mu + \kappa/2 \leq \min(l + \kappa/2, l_1 + \kappa_1/2 + l_2 + \kappa_2/2)\}. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Кратность, с которой входит представление $U^{\overset{\circ}{p}, \kappa, l}$ в $U^{1,2}$, согласно формуле (3.1.52), равна

$$d_{\kappa l}^{\overset{\circ}{p}, l_1, \kappa_2 l_2} = \sum_{\mu = \max(-l - \kappa, -l_1 - l_2 - \kappa_2 \kappa_2 - \kappa)}^{\min(l, l_1 + l_2 + \kappa_1 \kappa_2)} [\min(l_1, \mu + l_2 + \kappa_2 - \kappa_1 \kappa_2) - \max(-l_1 - \kappa_1, \mu - l_2 - \kappa_1 \kappa_2) + 1] =$$

$$= \begin{cases} (2l + \kappa) + 1 \min(2l_1 + \kappa_1 + 1, 2l_2 + \kappa_2 + 1) \\ \quad \text{при } l + \kappa/2 \leq |l_2 + \kappa_2/2 - l_1 - \kappa_1/2|, \\ (2l_1 + \kappa_1 + 1)(2l_2 + \kappa_2 + 1) - \\ \quad -(l + \kappa/2 - l_1 - \kappa_1/2 - l_2 - \kappa_2/2)(l + \kappa/2 - l_1 - \kappa_1/2 - l_2 - \kappa_2/2 - 1) \\ \quad \text{при } |l_2 + \kappa_2/2 - l_1 - \kappa_1/2| \leq l + \kappa/2 \leq l_2 + \kappa_2/2 + l_1 + \kappa_1/2, \\ (2l_1 + \kappa_1 + 1)(2l_2 + \kappa_2 + 1) \text{ при } l + \kappa/2 \geq l_1 + \kappa_1/2 + l_2 + \kappa_2/2. \end{cases} \quad (3.2.8)$$

Коэффициенты Клебша — Гордана имеют вид

$$\langle \overset{\circ}{p} \kappa l; \mu \bar{\mu} \left| \overset{\circ}{p}_1 \kappa_1 l_1; \overset{\circ}{p}_2 \kappa_2 l_2 \right. \rangle = U_{SU(2)}^{\kappa, l} (R(\Lambda(p)^{-1} q))_{\mu \bar{\mu}} \times$$

$$\times U_{SU(2)}^{\kappa_1 l_1} (R(p_1; A(p, q))^{-1})_{\bar{\mu} \mu_1} U_{SU(2)}^{\kappa_2 l_2} (R(p_2; A(p, q))^{-1})_{\mu - \bar{\mu}, \mu_2}, \quad (3.2.9)$$

а матричные элементы группы $SU(2)$ выписаны в формуле (2.2.4).

$$\Pi. \overset{\circ}{p}_1 = m_1 e_{(0)}, \overset{\circ}{p}_2 = e_{(0)} + e_{(3)}. \text{ Область } \Omega_{\Pi} \text{ по табл. 3.1 имеет вид}$$

$$\Omega_{\Pi} = \{m e_{(0)} : m > m_1\}. \quad (3.2.10)$$

Поэтому $G_1 = G(\overset{\circ}{p}) = SU(2)$, $G_2 = E(2)$, $G(\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}) = H_1$. Классу $\rho_1 = (\kappa_1, l_1)$ отвечает

$$\hat{H}_{1, \rho_1} = \{(\kappa'_1, \mu_1) : \kappa'_1 = \kappa_1, -l_1 - \kappa_1 \leq \mu_1 \leq l_1\}.$$

Что касается представлений группы $E(2)$, то мы различаем два случая: а) $\rho_2 = (\kappa_2, \mu_0)$ и $\hat{H}_{1, \rho_2} = \{(\kappa_2, \mu_0)\}$ для одномерных представлений и

б) $\rho_2 = (\kappa_2, \rho)$ и $\hat{H}_{1, \rho_2} = \{(\kappa'_2, \mu_2) : \kappa'_2 = \kappa_2, -\infty < \mu_2 < \infty\}$

для бесконечномерных представлений. Подстановкой (3.1.43) получаем области

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \widehat{H}_{1, \kappa\mu}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 \mu_0} &= \\
 &= \{(\kappa, \mu) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, \mu_0 + \kappa_2/2 - l_1 - \kappa_1/2 \leq \\
 &\leq \mu + \kappa/2 \leq \mu_0 + \kappa_2/2 + l_1 + \kappa_1/2\}, \\
 \widehat{H}_{1, \kappa\mu}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 \mu_0} &= \{\bar{\kappa}, \bar{\mu}\} : \bar{\kappa} = \kappa_1, \bar{\mu} = \mu - \mu_0 - \kappa_1 \kappa_2\}, \\
 \text{б) } \widehat{H}_{1, \kappa\mu}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 \rho} &= \{(\kappa, \mu) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, -\infty < \mu < \infty\}, \\
 \widehat{H}_{1, \kappa\mu}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 \rho} &= \{\bar{\kappa}, \bar{\mu}\} : \bar{\kappa} = \kappa_1, -l_1 - \kappa_1 \leq \bar{\mu} \leq l_1\}.
 \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Так как

$$\widehat{G}(\overset{\circ}{\rho})_{\kappa, \mu} = \widehat{SU}(\overset{\circ}{2})_{\kappa, \mu} = \{(\kappa', l) : \kappa' = \kappa, l \geq |\mu + \kappa/2| - \kappa/2\}, \tag{3.2.12}$$

то соотношение (3.1.53) дает

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \widehat{G}(\overset{\circ}{\rho})^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 \mu_0} &= \{(\kappa, l) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, \\
 &l \geq \max(0, |\mu_0 + \kappa_2/2| - l_1 - \kappa_1/2 - \kappa/2)\}, \\
 \widehat{H}_{1, \kappa l}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 \mu_0} &= \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, \\
 &\max(-l - \kappa/2, \mu_0 + \kappa_2/2 - l_1 - \kappa_1/2) \leq \\
 &\leq \mu + \kappa/2 \leq \min(l + \kappa/2, \mu_0 + \kappa_2/2 + l_1 + \kappa_1/2)\}, \\
 \text{б) } \widehat{G}(\overset{\circ}{\rho})^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 \rho} &= \{(\kappa, l) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, l \geq 0\}, \\
 \widehat{H}_{1, \kappa l}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 \rho} &= \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, -l - \kappa \leq \mu \leq l\}.
 \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Согласно формуле (3.1.52), кратность представления равна

$$\begin{aligned}
 \text{а) } d_{\kappa l}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 \mu_0} &= \\
 &= \begin{cases} 2l + \kappa + 1 & \text{для } \kappa/2 \leq l + \kappa/2 \leq l_1 + \kappa_1/2 - |\mu_0 + \kappa_2/2|, \\ l + \kappa/2 + l_1 + \kappa_1/2 - |\mu_0 + \kappa_2/2| + 1 & \text{для } l_1 + \kappa_1/2 - \\ -|\mu_0 + \kappa_2/2| \leq l + \kappa/2 \leq l_1 + \kappa_1/2 + |\mu_0 + \kappa_2/2|, \\ 2l_1 + \kappa_1 + 1 & \text{для } l + \kappa/2 \geq l_1 + \kappa_1/2 + |\mu_0 + \kappa_2/2|; \end{cases} \tag{3.2.14} \\
 \text{б) } d_{\kappa l}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 \rho} &= (2l_1 + \kappa_1 + 1)(2l + \kappa + 1).
 \end{aligned}$$

Коэффициенты Клебша — Гордана имеют вид

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \left\langle \begin{matrix} \overset{\circ}{p}\kappa l \\ \rho\mu' ; \mu \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \overset{\circ}{p}_1\kappa_1 l_1 \\ \rho_1\mu_1 ; \rho_2 \end{matrix} ; \begin{matrix} \overset{\circ}{p}_2\kappa_2\mu_0 \\ \rho_2 \end{matrix} \right\rangle &= U_{SU(2)}^{\kappa_1 l_1} (R(\Lambda(p)^{-1}q))_{\mu'\mu} \times \\
 &\times U_{SU(2)}^{\kappa_1 l_1} (R(p_1; A(p, q))^{-1})_{\mu+\mu_0-\kappa_1\kappa_2, \mu_1} \times \\
 &\times U_{E(2)}^{\rho_2, \mu_0} (R(p_2; A(p, q))^{-1}), \tag{3.2.15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \left\langle \begin{matrix} \overset{\circ}{p}\kappa l \\ \rho\mu' ; \mu \bar{\mu} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \overset{\circ}{p}_1\kappa_1 l_1 \\ \rho_1\mu_1 ; \rho_2\mu_2 \end{matrix} ; \begin{matrix} \overset{\circ}{p}_2\kappa_2\rho \\ \rho_2\mu_2 \end{matrix} \right\rangle &= U_{SU(2)}^{\kappa_1 l_1} (R(\Lambda(p)^{-1}q))_{\mu'\mu} \times \\
 &\times U_{SU(2)}^{\kappa_1 l_1} (R(p_1; A(p, q))^{-1})_{\bar{\mu}\mu}, U_{E(2)}^{\rho_2, \mu_2} (R(p_2; A(p, q))^{-1})_{\mu-\bar{\mu}, \mu_2},
 \end{aligned}$$

причем матричные элементы группы $SU(2)$ даны в формуле (2.2.4), а матричные элементы группы $E(2)$ — в формулах (1.4.13) и (2.4.4).

III. $\overset{\circ}{p}_1 = m_1 e_{(0)}$, $\overset{\circ}{p}_2 = n_2 e_{(3)}$. Область Ω_{III} , согласно табл. 3.1, имеет вид

$$\Omega_{III} = \{m e_{(0)} : m > 0\} \cup \{n e_{(3)} : n > 0\} \cup \{e_{(0)} + e_{(3)}\}. \tag{3.2.16}$$

Напомним, что множества $\{\pm e_{(0)}, \pm e_{(3)}\}$ и $\{0\} \subset \Omega_k$ в дальнейшем можно не рассматривать, так как в интегральном разложении (3.1.60) пространства $\hat{\mathfrak{F}}^{1,2}$ они имеют нулевую меру.

III. 1. $\overset{\circ}{p} \in \{m e_{(0)} : m > 0\}$. При этом $G_1 = G(\overset{\circ}{p}) \doteq SU(2)$, $G_2 = SU(1, 1)$, $G(\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}) = H_1$. Для класса $\rho_1 = (\kappa_1, l_1)$ имеем $\hat{H}_{1, \rho_1} = \{(\kappa'_1, \mu_1) : \kappa'_1 = \kappa_1, -l_1 - \kappa_1 \leq \mu_1 \leq l_1\}$. Что касается представлений группы $SU(1, 1)$, то мы различаем 2 случая:

$$\text{а) } \rho_2 = (\kappa_2, l_2, 0), \quad \hat{H}_{1, \rho_2} = \{(\kappa'_2, \mu_2) : \kappa'_2 = \kappa_2, -\infty < \mu_2 < \infty\}$$

для основной и дополнительной серий и

$$\text{б) } \rho_2 = (\kappa_2, l_2, \pm),$$

$$\hat{H}_{1, \rho_2} = \{(\kappa'_2, \mu_2) : \kappa'_2 = \kappa_2, \pm(\mu_2 + 1/2\kappa_2) \geq l_2 + 1/2\kappa_2 + 1\} -$$

для дискретной серии. Подстановкой (3.1.43) получаем области

$$\text{а) } \hat{H}_{1, \kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2} = \{(\kappa, \mu) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_2, -\infty < \mu < \infty\},$$

$$\hat{H}_{1, \kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2} = \{(\bar{\kappa}, \bar{\mu}) : \bar{\kappa} = \kappa_1, -l_1 - \kappa_1 \leq \bar{\mu} \leq l_1\},$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \hat{H}_{1, \kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2 \pm} &= \{(\kappa, \mu) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_2, \\
 &\pm(\mu + \kappa/2) \geq l_2 + \kappa_2/2 - l_1 - \kappa_1/2 + 1\}, \tag{3.2.17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{1, \kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2 \pm} &= \{(\bar{\kappa}, \bar{\mu}) : \bar{\kappa} = \kappa_1, -l_1 - \kappa_1/2 \leq \pm(\bar{\mu} + \kappa_1/2) \leq \\
 &\leq \min(l_1 + \kappa_1/2, \pm(\mu + \kappa/2) - l_2 - \kappa_2/2 - 1)\}.
 \end{aligned}$$

Так как

$$\widehat{G}(\overset{\circ}{\rho})_{\kappa, \mu} = S\widehat{U}(2)_{\kappa, \mu} = \{(\kappa', l) : \kappa' = \kappa, l \geq |\mu + \kappa/2| - \kappa/20\}, \quad (3.2.18)$$

то из формулы (3.1.53) получаем

$$\begin{aligned} \text{а) } \widehat{G}(\overset{\circ}{\rho})^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2^0} &= \{(\kappa, l) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_2, l \geq 0\}, \\ \text{б) } \widehat{G}(\overset{\circ}{\rho})^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2 \pm} &= \{(\kappa, l) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_2, \\ & l \geq \max(0, l_2 + \kappa_2/2 - l_1 - \kappa_1/2 + 1)\}, \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

а область $\widehat{H}_{1, \rho}^{0, \rho}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \text{а) } \widehat{H}_{1, \kappa l}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2^0} &= \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, -l - \kappa \leq \mu \leq l\}, \\ \text{б) } \widehat{H}_{1, \kappa l}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2 \pm} &= \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, \max(-l - \kappa/2, \\ & l_2 + \kappa_2/2 - l_1 - \kappa_1/2 + 1) \leq \pm(\mu + \kappa/2) \leq l + \kappa/2\}. \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Согласно формуле (3.1.52), кратность представления равна

$$\begin{aligned} \text{а) } d_{\kappa l}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2^0} &= (2l_1 + \kappa_1 + 1)(2l + \kappa + 1), \\ \text{б) } d_{\kappa l}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2 \pm} &= \begin{cases} (2l + \kappa + 1)(l_1 + \kappa_1/2 - l_2 - \kappa_2/2) \text{ для} \\ \kappa/2 \leq l + \kappa/2 \leq l_1 + \kappa_1/2 - l_2 - \kappa_2/2 - 1, \\ \frac{1}{2}(l + \kappa/2 + l_1 + \kappa_1/2 - l_2 - \kappa_2/2) \times \\ \times (l + \kappa/2 + l_1 + \kappa_1/2 - l_2 - \kappa_2/2 + 1) \\ \text{для } l_1 + \kappa_1/2 - l_2 - \kappa_2/2 - 1 \leq l + \kappa/2 \leq \\ \leq l_1 + \kappa_1/2 + l_2 + \kappa_2/2 + 1, \\ (2l_1 + \kappa_1 + 1)(l + \kappa/2 - l_2 - \kappa_2/2) \text{ для} \\ l + \kappa/2 \geq l_1 + \kappa_1/2 + l_2 + \kappa_2/2 + 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

В обоих случаях коэффициенты Клебша — Гордана имеют вид

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{matrix} \overset{\circ}{\rho} \kappa l \\ \rho \mu' \end{matrix} ; \mu \bar{\mu} \left| \begin{matrix} \overset{\circ}{\rho}_1 \kappa_1 l_1 \\ \rho_1 \mu_1 \end{matrix} ; \begin{matrix} \overset{\circ}{\rho}_2 \kappa_2 l_2 \eta_2 \\ \rho_2 \mu_2 \end{matrix} \right\rangle &= \\ &= U_{SU(2)}^{\kappa, l}(R(\Lambda(\rho)^{-1} q))_{\mu', \mu} U_{SU(2)}^{\kappa_1, l_1}(R(\rho_1; A(\rho, q))^{-1})_{\mu \mu_1} \times \\ & \times U_{SU(1, 1)}^{\kappa_2, l_2, \eta_2}(R(\rho_2; A(\rho, q))^{-1})_{\mu - \bar{\mu}, \mu_2}, \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

причем матричные элементы даны в формуле (2.2.4) для группы $SU(2)$ и в формуле (2.3.15) — для группы $SU(1, 1)$.

III. 2. $\overset{\circ}{\rho} \in \{ne_{(3)} : n > 0\}$. Здесь $G_1 = SU(2)$, $G_2 = G(\overset{\circ}{\rho}) = SU(1, 1)$, $G(\overset{\circ}{\rho}, \overset{\circ}{q}) = H_1$. Для класса $\rho_1 = (\kappa_1, l_1)$ получаем

$$\hat{H}_{1, \rho_1} = \{(\kappa'_1, \mu_1) : \kappa'_1 = \kappa_1, -l_1 - \kappa_1 \leq \mu_1 \leq l_1\}.$$

Для представлений группы $SU(1, 1)$ снова имеем два случая:

а) $\rho_2 = (\kappa_2, l_2, 0)$; $\hat{H}_{1, \rho_2} = \{(\kappa'_2, \mu_2) : \kappa'_2 = \kappa_2, -\infty < \mu_2 < \infty\}$

для главной и дополнительной серий и

б) $\rho_2 = (\kappa_2, l_2, \pm)$; $\hat{H}_{1, \rho_2} = \left\{ (\kappa'_2, \mu_2) : \kappa'_2 = \kappa_2, \right.$
 $\left. \pm \left(\mu_2 + \frac{1}{2} \kappa_2 \right) \geq l_2 + \frac{1}{2} \kappa_2 + 1 \right\}$

для дискретной серии. Подстановка (3.1.43) дает

а) $\hat{H}_{1, \kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2 0} = \{(\kappa, \mu) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, -\infty < \mu < \infty\}$,
 $\hat{H}_{1, \kappa \mu}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2 0} = \{(\bar{\kappa}, \bar{\mu}) : \bar{\kappa} = \kappa_1, -l_1 - \kappa_1 \leq \bar{\mu} \leq l_1\}$, (3.2.23)

б) $\hat{H}_{1, \kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2 \pm} = \{(\kappa, \mu) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2,$
 $\pm (\mu + \kappa/2) \geq l_2 + \kappa_2/2 - l_1 - \kappa_1/2 + 1\}$,
 $\hat{H}_{1, \kappa \mu}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2 \pm} = \{(\bar{\kappa}, \bar{\mu}) : \bar{\kappa} = \kappa_1, -l_1 - \kappa_1/2 \leq$
 $\leq \pm (\bar{\mu} + \kappa_1/2) \leq \min(l_1 + \kappa_1/2, \pm (\mu + \kappa/2) - l_2 - \kappa_2/2 - 1)\}$.

Так как

$$\hat{G}(\overset{\circ}{\rho})_{\kappa, \mu} = \widehat{SU(1, 1)}_{\kappa, \mu} =$$

$$= \{(\kappa', l, 0) : \kappa' = \kappa, l = -(1 + \kappa)/2 + ip, p \geq 0\} \cup$$

$$\cup \{(\kappa', l, \eta) : \kappa' = \kappa, 0 \leq l \leq |\mu + \kappa/2| - \kappa/2 - 1,$$

$$\eta = \text{sign}(\mu + \kappa/2)\}, \quad (3.2.24)$$

то из формулы (3.1.53) получаем в обоих случаях

$$\hat{G}(\overset{\circ}{\rho})^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2 \eta_2} =$$

$$= \{(\kappa, l, 0) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, l = -(1 + \kappa)/2 + ip, p \geq 0\} \cup$$

$$\cup \{(\kappa, l, +) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, l \geq 0\} \cup$$

$$\cup \{(\kappa, l, -) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, l \geq 0\}. \quad (3.2.25)$$

Здесь дополнительная серия опущена, так как она имеет нулевую меру Планшереля на группе $SU(1, 1)$. Область $\hat{H}_{1, \rho}^{\rho_1, \rho_2}$

имеет вид

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \hat{H}_{1, \kappa/l\eta}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2 0} &= \\
 &= \begin{cases} \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, -\infty < \mu < \infty\} & \text{при } \eta = 0, \\ \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, \eta(\mu + \kappa/2) \geq l + \kappa/2 + 1\} & \text{при } \eta = \pm, \end{cases} \quad (3.2.26) \\
 \text{б) } \hat{H}_{1, \kappa/l 0}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2 \pm} &= \\
 &= \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, \pm(\mu + \kappa/2) \geq l_2 + \kappa_2/2 - l_1 - \kappa_1/2 + 1\}, \\
 \hat{H}_{1, \kappa/l \pm}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2 \pm} &= \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, \pm(\mu + \kappa/2) \geq \\
 &\geq \max(l_2 + \kappa_2/2 - l_1 - \kappa_1/2 + 1, l + \kappa/2 + 1)\}, \\
 \hat{H}_{1, \kappa/l \mp}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2 \pm} &= \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, l_2 + \kappa_2/2 - l_1 - \kappa_1/2 + 1 \leq \\
 &\leq \pm(\mu + \kappa/2) \leq -l - \kappa/2 - 1\}.
 \end{aligned}$$

Согласно формуле (3.1.52), кратности представлений равны

$$\begin{aligned}
 \text{а) } d_{\kappa l \eta}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2 0} &= \mathfrak{N}_0, \\
 \text{б) } d_{\kappa/l 0}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2 \pm} &= \mathfrak{N}_0, \\
 d_{\kappa/l \pm}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2 \pm} &= \mathfrak{N}_0, \\
 d_{\kappa/l \mp}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2 \pm} &= \\
 &= \frac{1}{2} (l_1 + \kappa_1/2 - l_2 - \kappa_2/2 - l - \kappa/2 - 1)(l_1 + \kappa_1/2 - l_2 - \kappa_2/2 - \\
 &\quad - l - \kappa/2) \text{ для } \kappa/2 \leq l + \kappa/2 \leq l_1 + \kappa_1/2 - l_2 - \kappa_2/2 - 2.
 \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

В обоих случаях коэффициенты Клебша — Гордана имеют вид

$$\begin{aligned}
 \left\langle \begin{matrix} \overset{\circ}{p} \kappa l \eta \\ \rho \mu' \end{matrix} ; \mu \bar{\mu} \left| \begin{matrix} \overset{\circ}{p}_1 \kappa_1 l_1 \\ \rho_1 \mu_1 \end{matrix} ; \begin{matrix} \overset{\circ}{p}_2 \kappa_2 l_2 \eta_2 \\ \rho_2 \mu_2 \end{matrix} \right. \right\rangle &= U_{SU(1, 1)}^{\kappa, l, \eta} (R(\Lambda(p)^{-1} q))_{\mu' \mu} \times \\
 \times U_{SU(2)}^{\kappa_1, l_1} (R(p_1; A(p, q))^{-1})_{\bar{\mu} \mu_1} U_{SU(1, 1)}^{\kappa_2, l_2, \eta_2} (R(p_2; A(p, q))^{-1})_{\mu - \mu_1, \mu_2}. & \\
 & \quad (3.2.28)
 \end{aligned}$$

Матричные элементы группы $SU(2)$ даны в формуле (2.2.4), а элементы группы $SU(1, 1)$ — в формуле (2.3.15).

IV. $\overset{\circ}{p}_1 = m_1 e_{(0)}$, $\overset{\circ}{p}_2 = -e_{(0)} - e_{(3)}$. В этом случае, согласно табл. 3.1, имеем область

$$\Omega_{IV} = \{m e_{(0)} : 0 < m < m_1\} \cup \{n e_{(3)} : n > 0\} \cup \{e_{(0)} + e_{(3)}\}. \quad (3.2.29)$$

IV. 1. $\overset{\circ}{\rho} \in \{me_{(0)} : 0 < m < m_1\}$. При этом $G_1 = G(\overset{\circ}{\rho}) = SU(2)$,

$G_2 = E(2)$, $G(\overset{\circ}{\rho}, \overset{\circ}{q}) = H_1$. Этот случай совпадает со случаем II, и мы можем использовать приведенные там результаты.

IV. 2. $\overset{\circ}{\rho} \in \{ne_{(3)} : n > 0\}$. Здесь $G_1 = SU(2)$, $G_2 = E(2)$, $G(\overset{\circ}{\rho}) =$

$= SU(1,1)$, $G(\overset{\circ}{\rho}, \overset{\circ}{q}) = H_1$. Для класса $\rho_1 = (\kappa_1, l_1)$ имеем $\hat{H}_{1, \rho_1} = \{(\kappa'_1, \mu_1) : \kappa'_1 = \kappa_1, -l_1 - \kappa_1 \leq \mu_1 \leq l_1\}$. Для представлений группы $E(2)$ различаем два случая: а) $\rho_2 = (\kappa_2, \mu_0)$; $\hat{H}_{1, \rho_2} = \{(\kappa_2, \mu_0)\}$ для одномерных представлений и б) $\rho_2 = (\kappa_2, \rho)$;

$$\hat{H}_{1, \rho_2} = \{(\kappa'_2, \mu_2) : \kappa'_2 = \kappa_2, -\infty \leq \mu_2 \leq \infty\}$$

для бесконечномерных представлений. Из подстановки (3.1.43) следует

$$а) \hat{H}_1^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 \mu_0} = \{(\kappa, \mu) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, \mu_0 + \kappa_2/2 - l_1 - \kappa_1/2 \leq \mu + \kappa/2 \leq \mu_0 + \kappa_2/2 + l_1 + \kappa_1/2\},$$

$$\hat{H}_{1, \kappa \mu}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 \mu_0} = \{(\kappa_1, \mu - \mu_0 - \kappa_1 \kappa_2)\}, \quad (3.2.30)$$

$$б) \hat{H}_1^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 \rho} = \{(\kappa, \mu) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, -\infty < \mu < \infty\},$$

$$\hat{H}_{1, \kappa \bar{\mu}}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 \rho} = \{(\bar{\kappa}, \bar{\mu}) : \bar{\kappa} = \kappa_1, -l_1 - \kappa_1 \leq \bar{\mu} \leq l_1\};$$

Так как

$$\begin{aligned} \hat{G}(\overset{\circ}{\rho})_{\kappa, \mu} &= \widehat{SU}(1, 1)_{\kappa, \mu} = \\ &= \{(\kappa', l, 0) : \kappa' = \kappa, l = -(1 + \kappa)/2 + ip, p \geq 0\} \cup \\ &\cup \{(\kappa', l, \eta) : \kappa' = \kappa, 0 \leq l \leq |\mu + \kappa/2| - \kappa/2 - 1, \\ &\eta = \text{sign}(\mu + \kappa/2)\}, \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

то из формулы (3.1.53) получаем

$$\begin{aligned} а) \hat{G}(\overset{\circ}{\rho})^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 \mu_0} &= \\ &= \{(\kappa, l, 0) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, l = -(1 + \kappa)/2 + ip, \\ &p \geq 0\} \cup \{(\kappa, l, +) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, \kappa/2 \leq l + \kappa/2 \leq \\ &\leq l_1 + \kappa_1/2 + \mu_0 + \kappa_2/2\} \cup \{(\kappa, l, -) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, \\ &\kappa/2 \leq l + \kappa/2 \leq l_1 + \kappa_1/2 - \mu_0 - \kappa_2/2\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{1, \kappa l 0}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 \mu_0} &= \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, \mu_0 + \kappa_2/2 - l_1 - \kappa_1/2 \leq \\ &\leq \mu + \kappa/2 \leq \mu_0 + \kappa_2/2 + l_1 + \kappa_1/2\}, \\ \hat{H}_{1, \kappa l \pm}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 \mu_0} &= \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, \max(l + \kappa/2 + 1, \\ &\pm (\mu_0 + \kappa_2/2) - l_1 - \kappa_1/2) \leq \pm (\mu + \kappa/2) \leq \\ &\leq \pm (\mu_0 + \kappa_2/2) + l_1 + \kappa_2/2\}, \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \hat{G}(\rho)^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 \rho} &= \\ &= \{(\kappa, l, 0) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_2, l = -(1 + \kappa)/2 + i\rho, \rho \geq 0\} \cup \\ &\cup \{(\kappa, l, +) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_2, l \geq 0\} \cup \{(\kappa, l, -) : \kappa = \\ &= \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_2, l \geq 0\}, \\ \hat{H}_{1, \kappa l 0}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 \rho} &= \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, -\infty < \mu < \infty\}, \\ \hat{H}_{1, \kappa l \pm}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 \rho} &= \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, \pm(\mu + \kappa/2) \geq l + \kappa/2 + 1\}. \end{aligned}$$

Кратности представлений, согласно формуле (3.1.52), равны

$$\begin{aligned} \text{а) } d_{\kappa l 0}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 \mu_0} &= 2l_1 + \kappa_1 + 1, \\ d_{\kappa l \pm}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 \mu_0} &= \begin{cases} 2l_1 + \kappa_1 + 1 \text{ для } \kappa/2 \leq l + \kappa/2 \leq \\ \leq -l_1 - \kappa_1/2 \pm (\mu_0 + \kappa_2/2) - 1, \\ \pm (\mu_0 + \kappa_2/2) + l_1 + \kappa_1/2 - l - \kappa/2 \text{ для} \\ \pm (\mu_0 + \kappa_2/2) - l_1 - \kappa_1/2 - 1 \leq l + \kappa/2 \leq \\ \leq \pm (\mu_0 + \kappa_2/2) + l_1 + \kappa_1/2 - 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

$$\text{б) } d_{\kappa l \eta}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 \rho} = \mathfrak{N}_0.$$

Коэффициенты Клебша — Гордана имеют вид

$$\begin{aligned} \text{а) } \left\langle \begin{matrix} \overset{\circ}{\rho} \kappa l \eta \\ \rho \mu' \end{matrix} ; \mu \left| \begin{matrix} \overset{\circ}{\rho}_1 \kappa_1 l_1 \\ \rho_1 \mu_1 \end{matrix} ; \begin{matrix} \overset{\circ}{\rho}_2 \kappa_2 \mu_0 \\ \rho_2 \end{matrix} \right. \right\rangle &= U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, \eta} (R(\Lambda(\rho)^{-1}q))_{\mu' \mu} \times \\ &\times U_{SU(2)}^{\kappa_1, l_1} (R(\rho_1; A(\rho, q))^{-1})_{\mu - \mu_0 - \kappa_1 \mu_2, \mu_1} \times \\ &\times U_E^{0, \kappa_2, \mu_0} (R(\rho_2; A(\rho, q))^{-1}), \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \left\langle \begin{matrix} \overset{\circ}{\rho} \kappa l \eta \\ \rho \mu' \end{matrix} ; \mu \bar{\mu} \left| \begin{matrix} \overset{\circ}{\rho}_1 \kappa_1 l_1 \\ \rho_1 \mu_1 \end{matrix} ; \begin{matrix} \overset{\circ}{\rho}_2 \kappa_2 \rho \\ \rho_2 \mu_2 \end{matrix} \right. \right\rangle &= U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, \eta} (R(\Lambda(\rho)^{-1}q))_{\mu' \mu} \times \\ &\times U_{SU(2)}^{\kappa_1, l_1} (R(\rho_1; A(\rho, q))^{-1})_{\bar{\mu} \mu_1} \times \\ &\times U_E^{0, \kappa_2} (R(\rho_2; A(\rho, q))^{-1})_{\mu - \mu, \mu_2}, \end{aligned}$$

Матричные элементы для группы $SU(1, 1)$ даны в формуле (2.3.15), для группы $SU(2)$ — в формуле (2.2.4) и для группы $E(2)$ — в формулах (1.4.13) и (2.4.4).

V. $\dot{\rho}_1 = m_1 e_{(0)}$, $\dot{\rho}_2 = -m_2 e_{(0)}$. Область Ω_V , согласно табл. 3.1, имеет вид

$$\Omega_V = \begin{cases} \{m e_{(0)} : 0 < m < m_1 - m_2\} \cup \{n e_{(3)} : n > 0\} \cup \\ \cup \{e_{(0)} + e_{(3)}\} & \text{при } m_1 > m_2, \\ \{n e_{(3)} : n > 0\} \cup \{0\} & \text{при } m_1 = m_2. \end{cases} \quad (3.2.35)$$

V. 1. $\dot{\rho} \in \{m e_{(0)} : 0 < m < m_1 - m_2\}$. Здесь $G_1 = G_2 = G(\dot{\rho}) = SU(2)$, $G(\dot{\rho}, \dot{q}) = H_1$, и можно использовать результаты для случая I.

V. 2. $\dot{\rho} \in \{n e_{(3)} : n > 0\}$. Здесь $G_1 = G_2 = SU(2)$, $G(\dot{\rho}) = SU(1, 1)$, $G(\dot{\rho}, \dot{q}) = H_1$. Для класса $\rho_i = (\kappa_i, l_i)$, $i \in (1, 2)$, имеем

$$\hat{H}_{1, \rho_i} = \{(\kappa'_i, \mu_i) : \kappa'_i = \kappa_i, -l_i - \kappa_i \leq \mu_i \leq l_i\}.$$

Подстановка (3.1.43) дает

$$\begin{aligned} \hat{H}_1^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2} &= \{(\kappa, \mu) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, \\ &\quad -l_1 - \kappa_1/2 - l_2 - \kappa_2/2 \leq \mu + \kappa/2 \leq l_1 + \kappa_1/2 + l_2 + \kappa_2/2\}, \\ \hat{H}_{1, \kappa \mu}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2} &= \{(\bar{\kappa}, \bar{\mu}) : \bar{\kappa} = \kappa_1, \\ &\quad \max(-l_1 - \kappa_1/2, \mu + \kappa/2 - l_2 - \kappa_2/2) \leq \\ &\quad \leq \bar{\mu} + \kappa_1/2 \leq \min(l_1 + \kappa_1/2, \mu + \kappa/2 + l_2 + \kappa_2/2)\}. \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

Теперь мы имеем

$$\begin{aligned} \hat{G}(\dot{\rho})_{\kappa, \mu} &= \widehat{SU}(1, 1)_{\kappa, \mu} = \\ &= \{(\kappa', l, 0) : \kappa' = \kappa, l = -(1 + \kappa)/2 + i\rho, \rho \geq 0\} \cup \\ &\quad \cup \{(\kappa', l, \eta) : \kappa' = \kappa, 0 \leq l \leq |\mu + \kappa/2| - \kappa/2 - 1, \\ &\quad \quad \eta = \text{sign}(\mu + \kappa/2)\}, \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

и потому, согласно формуле (3.1.53),

$$\begin{aligned} \hat{G}(\rho)^{\circ \kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2} &= \{(\kappa, l, 0) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, \\ l &= -(1 + \kappa)/2 + i\rho, \rho \geq 0\} \cup \{(\kappa, l, +) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, \\ &0 \leq l \leq l_1 + \kappa_1/2 + l_2 + \kappa_2/2 - \kappa/2 - 1\} \cup \\ &\cup \{(\kappa, l, -) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, \\ &0 \leq l \leq l_1 + \kappa_1/2 + l_2 + \kappa_2/2 - \kappa/2 - 1\}, \quad (3.2.38) \\ \hat{H}_{1, \kappa l_0}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2} &= \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, -l_1 - \kappa_1/2 - l_2 - \kappa_2/2 \leq \\ &\leq \mu + \kappa/2 \leq l_1 + \kappa_1/2 + l_2 + \kappa_2/2\}, \\ \hat{H}_{1, \kappa l \pm}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2} &= \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, l + \kappa/2 + 1 \leq \pm(\mu + \kappa/2) \leq \\ &\leq l_1 + \kappa_1/2 + l_2 + \kappa_2/2\}. \end{aligned}$$

Для кратностей из формулы (3.1.52) имеем

$$\begin{aligned} d_{\kappa l_0}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2} &= (2l_1 + \kappa_1 + 1)(2l_2 + \kappa_2 + 1), \\ d_{\kappa l \pm}^{\kappa_1 l_1, \kappa_2 l_2} &= \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

$$\begin{cases} (2l_0 + \kappa_0 + 1)(l_1 + \kappa_1/2 + l_2 + \kappa_2/2 - l - \kappa/2 - l_0 - \kappa_0/2), \\ 2l_0 + \kappa_0 \equiv \min(2l_1 + \kappa_1, 2l_2 + \kappa_2) \\ \text{для } 0 \leq l \leq |l_1 + \kappa_1/2 - l_2 - \kappa_2/2| - \kappa/2, \\ \frac{1}{2}(l_1 + \kappa_1/2 + l_2 + \kappa_2/2 - l - \kappa/2)(l_1 + \kappa_1/2 + l_2 + \kappa_2/2 - l - \kappa/2 + 1) \\ \text{для } |l_1 + \kappa_1/2 - l_2 - \kappa_2/2| \leq l + \kappa/2 \leq l_1 + \kappa_1/2 + l_2 + \kappa_2/2 - 1. \end{cases}$$

Коэффициенты Клебша — Гордана равны

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{array}{c} \rho \kappa l \eta \\ \rho \mu' \end{array} ; \mu \bar{\mu} \left| \begin{array}{c} \rho_1 \kappa_1 l_1 \\ \rho_1 \mu_1 \end{array} ; \begin{array}{c} \rho_2 \kappa_2 l_2 \\ \rho_2 \mu_2 \end{array} \right. \right\rangle &= \\ &= U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, \eta} (R(\Lambda(\rho)^{-1} q))_{\mu \bar{\mu}} U_{SU(2)}^{\kappa_1 l_1} (R(\rho_1; A(\rho, q))^{-1})_{\mu \mu} \times \\ &\quad \times U_{SU(2)}^{\kappa_2 l_2} (R(\rho_2; A(\rho, q))^{-1})_{\mu - \mu, \mu_2}, \quad (3.2.40) \end{aligned}$$

где матричные элементы для группы $SU(1, 1)$ даны в формуле (2.3.15), а для группы $SU(2)$ — в формуле (2.2.4).

VI. $\overset{\circ}{\rho}_1 = e_{(0)} + e_{(3)}$, $\rho_2 = e_{(0)} + e_{(3)}$. Согласно табл. 3.1, область Ω_{VI} имеет вид

$$\Omega_{VI} = \{m e_{(0)} : m > 0\} \cup \{e_{(0)} + e_{(3)}\}. \quad (3.2.41)$$

Поэтому $G_1 = G_2 = E(2)$, $G(\overset{\circ}{\rho}) = SU(2)$, $G(\overset{\circ}{\rho}, \overset{\circ}{q}) = H_1$. Различаем три случая: а) $\rho_i = (\kappa_i, \mu_i)$; $\hat{H}_{1, \rho_i} = \{(\kappa_i, \mu_i)\}$, $i \in \{1, 2\}$, для двух одномерных представлений;

б) $\rho_1 = (\kappa_1, \mu_1)$, $\rho_2 = (\kappa_2, \rho_2)$; $\hat{H}_{1, \rho_1} = \{(\kappa_1, \mu_1)\}$,
 $\hat{H}_{1, \rho_2} = \{(\kappa'_2, \mu_2) : \kappa'_2 = \kappa_2, -\infty < \mu_2 < \infty\}$,

для произведения одномерного и бесконечномерного представлений;

в) $\rho_i = (\kappa_i, \rho_i)$: $\hat{H}_{1, \rho_i} = \{(\kappa'_i, \mu_i) : \kappa'_i = \kappa_i, -\infty < \mu_i < \infty\}$,
 $i \in \{1, 2\}$,

для двух бесконечномерных представлений группы $E(2)$. Из подстановки (3.1.43) следует

а) $\hat{H}_1^{\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 \mu_2} =$
 $= \{(\kappa, \mu) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, \mu = \mu_1 + \mu_2 + \kappa_1 \kappa_2\}$,
 $\hat{H}_{1, \kappa \mu}^{\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 \mu_2} = \{(\bar{\kappa}, \bar{\mu}) : \bar{\kappa} = \kappa_1, \bar{\mu} = \mu_1\}$,
 б) $\hat{H}_1^{\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 \rho_2} = \{(\kappa, \mu) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, -\infty < \mu < \infty\}$, (3.2.42)
 $\hat{H}_{1, \kappa \mu}^{\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 \rho_2} = \{(\bar{\kappa}, \bar{\mu}) : \bar{\kappa} = \kappa_1, \bar{\mu} = \mu_1\}$,
 в) $\hat{H}_1^{\kappa_1 \rho_1, \kappa_2 \rho_2} = \{(\kappa, \mu) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, -\infty < \mu < \infty\}$,
 $\hat{H}_{1, \kappa \mu}^{\kappa_1 \rho_1, \kappa_2 \rho_2} = \{(\bar{\kappa}, \bar{\mu}) : \bar{\kappa} = \kappa_1, -\infty < \bar{\mu} < \infty\}$.

Так как очевидно, что

$$\widehat{G}(\overset{\circ}{\rho})_{\kappa, \mu} = \widehat{SU}(2)_{\kappa, \mu} = \{(\kappa', l) : \kappa' = \kappa, l \geq |\mu + \kappa/2| - \kappa/2\}, \quad (3.2.43)$$

то, согласно формуле (3.1.53), имеем

а) $\widehat{G}(\overset{\circ}{\rho})^{\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 \mu_2} = \{(\kappa, l) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2,$
 $l + \kappa/2 \geq |\mu_1 + \kappa_1/2 + \mu_2 + \kappa_2/2|\}$,
 $\hat{H}_{1, \kappa l}^{\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 \mu_2} = \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, \mu + \kappa/2 = \mu_1 + \kappa_1/2 + \mu_2 + \kappa_2/2\}$,
 б) $\widehat{G}(\overset{\circ}{\rho})^{\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 \rho_2} = \{(\kappa, l) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, l \geq 0\}$, (3.2.44)
 $\hat{H}_{1, \kappa l}^{\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 \rho_2} = \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, -l - \kappa \leq \mu \leq l\}$.
 в) $\widehat{G}(\overset{\circ}{\rho})^{\kappa_1 \rho_1, \kappa_2 \rho_2} = \{(\kappa, l) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, l \geq 0\}$,
 $\hat{H}_{1, \kappa l}^{\kappa_1 \rho_1, \kappa_2 \rho_2} = \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, -l - \kappa \leq \mu \leq l\}$.

По формуле (3.1.52) кратности равны

$$\begin{aligned}
 \text{а)} & \quad d_{\kappa l}^{\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 \mu_2} = 1, \\
 \text{б)} & \quad d_{\kappa l}^{\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 \rho_2} = 2l + \kappa + 1, \\
 \text{в)} & \quad d_{\kappa l}^{\kappa_1 \rho_1, \kappa_2 \rho_2} = \mathbf{N}_0.
 \end{aligned} \tag{3.2.45}$$

Коэффициенты Клебша — Гордана имеют вид

$$\begin{aligned}
 \text{а)} & \quad \left\langle \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho} \kappa l \\ \rho \mu \end{array} \middle| \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho}_1 \kappa_1 \mu_1 \\ \rho_1 \end{array}; \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho}_2 \kappa_2 \mu_2 \\ \rho_2 \end{array} \right\rangle = \\
 & \quad = U_{SU(2)}^{\kappa, l} (R(\Lambda(\rho)^{-1} q))_{\mu, \mu_1 + \mu_2 + \kappa, \kappa} \times \\
 & \quad \times U_{E(2)}^{0, \kappa_1, \mu_1} (R(\rho_1; A(\rho, q))^{-1}) U_{E(2)}^{0, \kappa_2, \mu_2} (R(\rho_2; A(\rho, q))^{-1}), \\
 \text{б)} & \quad \left\langle \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho} \kappa l \\ \rho \mu' \end{array}; \mu \middle| \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho}_1 \kappa_1 \mu_1 \\ \rho_1 \end{array}; \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho}_2 \kappa_2 \rho_2 \\ \rho_2 \mu_2 \end{array} \right\rangle = \\
 & \quad = U_{SU(2)}^{\kappa, l} (R(\Lambda(\rho)^{-1} q))_{\mu, \mu} U_{E(2)}^{0, \kappa_1, \mu_1} (R(\rho_1; A(\rho, q))^{-1}) \times \\
 & \quad \times U_{E(2)}^{0, \kappa_2, \mu_2} (R(\rho_2; A(\rho, q))^{-1})_{\mu - \mu_1, \mu_2}, \\
 \text{в)} & \quad \left\langle \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho} \kappa l \\ \rho \mu' \end{array}; \mu \bar{\mu} \middle| \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho}_1 \kappa_1 \rho_1 \\ \rho_1 \mu_1 \end{array}; \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho}_2 \kappa_2 \rho_2 \\ \rho_2 \mu_2 \end{array} \right\rangle = \\
 & \quad = U_{SU(2)}^{\kappa, l} (R(\Lambda(\rho)^{-1} q))_{\mu, \mu} U_{E(2)}^{0, \kappa_1, \mu_1} (R(\rho_1; A(\rho, q))^{-1})_{\mu \mu_1} \times \\
 & \quad \times U_{E(2)}^{0, \kappa_2, \mu_2} (R(\rho_2; A(\rho, q))^{-1})_{\mu - \bar{\mu}, \mu_2},
 \end{aligned} \tag{3.2.46}$$

причем матричные элементы группы $SU(2)$ даны в формуле (2.2.4), а элементы группы $E(2)$ — в формулах (1.4.3) и (2.4.4).

VII. $\rho_1 = e_{(0)} + e_{(3)}$, $\rho_2 = n_2 e_{(3)}$. Этот случай, согласно табл. 3.1, характеризуется областью

$$\Omega_{VII} = \{m e_{(0)} : m > 0\} \cup \{n e_{(3)} : n > 0\} \cup \{e_{(0)} + e_{(3)}\}. \tag{3.2.47}$$

VII. 1. $\overset{\circ}{\rho}_1 \in \{m e_{(0)} : m > 0\}$. Здесь $G_1 = E(2)$, $G_2 = SU(1, 1)$, $G(\overset{\circ}{\rho}) = SU(2)$, $G(\overset{\circ}{\rho}, \overset{\circ}{q}) = H_1$. Различаем два случая: а) $\rho_1 = (\kappa_1, \mu_1)$; $\hat{H}_{1, \rho_1} = \{(\kappa_1, \mu_1)\}$ для одномерного представления группы $E(2)$ и

$$\text{б)} \quad \rho_1 = (\kappa_1, \rho_1); \quad \hat{H}_{1, \rho_1} = \{(\kappa'_1, \mu_1) : \kappa'_1 = \kappa_1, -\infty < \mu_1 < \infty\}$$

для бесконечномерных представлений. Для $\rho_2 = (\kappa_2, l_2, \eta_2)$ имеем

$$\hat{H}_{1, \kappa_2 l_2 0} = \{(\kappa'_2, \mu_2) : \kappa'_2 = \kappa_2, -\infty < \mu_2 < \infty\},$$

$$\hat{H}_{1, \kappa_2 l_2 \pm} = \{(\kappa'_2, \mu_2) : \kappa'_2 = \kappa_2, \pm (\mu_2 + \kappa_2/2) \geq l_2 + \kappa_2/2 + 1\},$$

и поэтому подстановка (3.1.43) дает

$$\begin{aligned} \text{а) } \hat{H}_1^{\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 l_2 0} &= \{(\kappa, \mu) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, -\infty < \mu < \infty\}, \\ \hat{H}_1^{\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 l_2 \pm} &= \{(\kappa, \mu) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, \\ &\quad \pm (\mu + \kappa/2) \geq l_2 + \kappa_2/2 \pm (\mu_1 + \kappa_1/2) + 1\}, \\ \hat{H}_{1, \kappa \mu}^{\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 l_2 \eta_2} &= \{(\bar{\kappa}, \bar{\mu}) : \bar{\kappa} = \kappa_1, \bar{\mu} = \mu_1\}, \\ \text{б) } \hat{H}_1^{\kappa_1 \rho_1, \kappa_2 l_2 \eta_2} &= \{(\kappa, \mu) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, -\infty < \mu < \infty\}, \\ \hat{H}_{1, \kappa \mu}^{\kappa_1 \rho_1, \kappa_2 l_2 0} &= \{(\bar{\kappa}, \bar{\mu}) : \bar{\kappa} = \kappa_1, -\infty < \bar{\mu} < \infty\}, \\ \hat{H}_{1, \kappa \mu}^{\kappa_1 \rho_1, \kappa_2 l_2 \pm} &= \{(\bar{\kappa}, \bar{\mu}) : \bar{\kappa} = \kappa_1, \\ &\quad -\infty < \pm (\bar{\mu} + \kappa_1/2) \leq \pm (\mu + \kappa/2) - l_2 - \kappa_2/2 - 1\}. \end{aligned} \tag{3.2.48}$$

Легко видеть, что

$$\hat{G}(\overset{\circ}{\rho})_{\kappa, \mu} = \widehat{SU(2)}_{\kappa, \mu} = \{(\kappa, l) : \kappa' = \kappa, l \geq |\mu + \kappa/2| - \kappa/2\} \tag{3.2.49}$$

и потому, согласно формуле (3.1.53), имеем

$$\begin{aligned} \text{а) } \hat{G}(\overset{\circ}{\rho})^{\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 l_2 0} &= \{(\kappa', l) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, l \geq 0\}, \\ \hat{H}_{1, \kappa l}^{\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 l_2 0} &= \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, -l - \kappa \leq \mu \leq l\}, \\ \hat{G}(\overset{\circ}{\rho})^{\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 l_2 \pm} &= \{(\kappa, l) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, \\ &\quad l \geq \max(0, l_2 + \kappa_2/2 \pm (\mu_1 + \kappa_1/2) - \kappa/2 + 1)\}, \\ \hat{H}_{1, \kappa l}^{\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 l_2 \pm} &= \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, \max(-l - \kappa/2, l_2 + \kappa_2/2 \pm \\ &\quad \pm (\mu_1 + \kappa_1/2) + 1) \leq \pm (\mu + \kappa/2) \leq l + \kappa/2\}, \\ \text{б) } \hat{G}(\overset{\circ}{\rho})^{\kappa_1 \rho_1, \kappa_2 l_2 \eta_2} &= \{(\kappa, l) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, l \geq 0\}, \\ \hat{H}_{1, \kappa l}^{\kappa_1 \rho_1, \kappa_2 l_2 \eta_2} &= \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, -l - \kappa \leq \mu \leq l\}. \end{aligned} \tag{3.2.50}$$

Из формулы (3.1.52) находим кратности

$$\begin{aligned}
 \text{а) } d_{\kappa l}^{\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 l_2 0} &= 2l + \kappa + 1, \\
 d_{\kappa l}^{\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 l_2 \pm} &= \\
 &= \begin{cases} 2l + \kappa + 1 \\ \text{для } 0 \leq l \leq -l_2 - \kappa_2/2 \mp (\mu_1 + \kappa_1/2) - \kappa/2 - 1, \\ l + \kappa/2 - l_2 - \kappa_2/2 \mp (\mu_1 + \kappa_1/2) \\ \text{для } l + \kappa/2 \geq -l_2 - \kappa_2/2 \mp (\mu_1 + \kappa_1/2) - 1, \end{cases} \\
 \text{б) } d_{\kappa l}^{\kappa_1 \rho_1, \kappa_2 l_2 \eta_2} &= \mathbf{S}_0. \quad (3.2.51)
 \end{aligned}$$

Коэффициенты Клебша — Гордана равны

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \left\langle \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho} \kappa l \\ \rho \mu' \end{array}; \mu \left| \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho}_1 \kappa_1 \mu_1 \\ \rho_1 \end{array}; \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho}_2 \kappa_2 l_2 \eta_2 \\ \rho_2 \mu_2 \end{array} \right\rangle &= \\
 &= U_{SU(2)}^{\kappa, l} (R(\Lambda(\rho)^{-1} q))_{\mu, \mu} U_{E(2)}^{0, \kappa_1, \mu_1} (R(\rho_1; A(\rho, q))^{-1}) \times \\
 &\quad \times U_{SU(1, 1)}^{\kappa_2, l_2, \eta_2} (R(\rho_2; A(\rho, q))^{-1})_{\mu - \mu_1, \mu_2}, \quad (3.2.52) \\
 \text{б) } \left\langle \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho} \kappa l \\ \rho \mu' \end{array}; \mu \bar{\mu} \left| \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho}_1 \kappa_1 \rho_1 \\ \rho_1 \mu_1 \end{array}; \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho}_2 \kappa_2 l_2 \eta_2 \\ \rho_2 \mu_2 \end{array} \right\rangle &= \\
 &= U_{SU(2)}^{\kappa, l} (R(\Lambda(\rho)^{-1} q))_{\mu, \mu} U_{E(2)}^{0, \kappa_1} (R(\rho_1; A(\rho, q))^{-1})_{\bar{\mu}, \mu_1} \times \\
 &\quad \times U_{SU(1, 1)}^{\kappa_2, l_2, \eta_2} (R(\rho_2; A(\rho, q))^{-1})_{\mu - \bar{\mu}, \mu_2}.
 \end{aligned}$$

Матричные элементы группы $SU(2)$ даны в формуле (2.2.4), группы $E(2)$ — в формулах (1.4.13) и (2.4.4), группы $SU(1, 1)$ — в формуле (2.3.15).

VII.2. $\overset{\circ}{\rho} \in \{ne_{(3)} : n > 0\}$. Здесь $G_1 = E(2)$, $G_2 = G(\overset{\circ}{\rho}) = SU(1, 1)$, $G(\overset{\circ}{\rho}, \overset{\circ}{q}) = H_1$. Множества $\hat{H}_1^{\rho_1, \rho_2}$ и $\hat{H}_{1, \kappa, \mu}^{\rho_1, \rho_2}$ те же, что в случае VII.1 [см. формулы (3.2.48)]. Однако

$$\begin{aligned}
 \widehat{G}(\overset{\circ}{\rho})_{\kappa, \mu} &= \widehat{SU}(1, 1)_{\kappa, \mu} = \\
 &= \{(\kappa', l, 0) : \kappa' = \kappa, l = -(1 + \kappa)/2 + ip, p \geq 0\} \cup \\
 &\quad \cup \{(\kappa', l, \eta) : \kappa' = \kappa, 0 \leq l \leq |\mu + \kappa/2| - \kappa/2 - 1, \\
 &\quad \eta = \text{sign}(\mu + \kappa/2)\}, \quad (3.2.53)
 \end{aligned}$$

так что из формулы (3.1.53) следует

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \hat{G}(\rho)^{\kappa_1\mu_1, \kappa_2l_20} = & \\
 = \{(\kappa, l, 0) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_2, l = -(1 + \kappa)/2 + i\rho, \rho \geq 0\} \cup & \\
 \cup \{(\kappa, l, +) : \kappa = \kappa_1 - 2\kappa_1\kappa_2, l \geq 0\} \cup & \\
 \cup \{(\kappa, l, -) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_2, l \geq 0\}, &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{G}(\rho)^{\kappa_1\mu_1, \kappa_2l_2\pm} = & \\
 = \{(\kappa, l, 0) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_2, l = -(1 + \kappa)/2 + i\rho, \rho \geq 0\} \cup & \\
 \cup \{(\kappa, l, \pm) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_2, l \geq 0\} \cup & \\
 \cup \{(\kappa, l, \mp) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_2, 0 \leq l \leq -l_2 - \kappa_2/2 \mp & \\
 \mp (\mu_1 + \kappa_1/2) - 2\}, &
 \end{aligned}$$

$$\hat{H}_{1, \kappa l 0}^{\kappa_1\mu_1, \kappa_2l_20} = \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, -\infty < \mu < \infty\},$$

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{1, \kappa l 0}^{\kappa_1\mu_1, \kappa_2l_2\pm} = \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, \pm(\mu + \kappa/2) \geq l_2 + \kappa_2/2 \pm & \\
 \pm (\mu_1 + \kappa_1/2) + 1\}, &
 \end{aligned}$$

$$\hat{H}_{1, \kappa l \pm}^{\kappa_1\mu_1, \kappa_2l_20} = \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, \pm(\mu + \kappa/2) \geq l + \kappa/2 + 1\},$$

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{1, \kappa l \pm}^{\kappa_1\mu_1, \kappa_2l_2\pm} = \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, \pm(\mu + \kappa/2) \geq \max(l + \kappa/2 + 1, & \\
 l_2 + \kappa_2/2 + 1 \pm (\mu_1 + \kappa_2/2))\}, &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{1, \kappa l \mp}^{\kappa_1\mu_1, \kappa_2l_2\pm} = \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, l_2 + \kappa_2/2 + 1 \pm (\mu_1 + \kappa_1/2) \leq & \\
 \leq \pm(\mu + \kappa/2) \leq -l - \kappa/2 - 1\}, &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \hat{G}(\rho)^{\kappa_1\rho_1, \kappa_2l_2\eta_2} = \{(\kappa, l, 0) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_2, & \\
 l = -(1 + \kappa)/2 + i\rho, \rho \geq 0\} \cup & \\
 \cup \{(\kappa, l, +) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_2, l \geq 0\} \cup & \\
 \cup \{(\kappa, l, -) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_2, l \geq 0\}, &
 \end{aligned}$$

$$\hat{H}_{1, \kappa l 0}^{\kappa_1\rho_1, \kappa_2l_2\eta_2} = \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, -\infty < \mu < \infty\},$$

$$\hat{H}_{1, \kappa l \pm}^{\kappa_1\rho_1, \kappa_2l_2\eta_2} = \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, \pm(\mu + \kappa/2) \geq l + \kappa/2 + 1\}. \quad (3.2.54)$$

Согласно формуле (3.1.52), кратности равны

$$\begin{aligned}
 \text{а) } d_{\kappa l \eta}^{\kappa_1\mu_1, \kappa_2l_2\eta_2} = & \\
 = \begin{cases} -l - \kappa/2 - l_2 - \kappa_2/2 \mp (\mu_1 + \kappa_1/2) - 1 & \text{для } \eta_2 = -\eta = \pm, \\ \mathfrak{N}_0 & \text{в других случаях,} \end{cases} & \\
 \text{б) } d_{\kappa l \eta}^{\kappa_1\rho_1, \kappa_2l_2\eta_2} = \mathfrak{N}_0. & \quad (3.2.55)
 \end{aligned}$$

Коэффициенты Клебша — Гордана имеют вид

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \left\langle \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho} \kappa l \eta \\ \rho \mu' ; \mu \end{array} \middle| \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho}_1 \kappa_1 \mu_1 \\ \rho_1 \\ \overset{\circ}{\rho}_2 \kappa_2 l_2 \eta_2 \\ \rho_2 \mu_2 \end{array} \right\rangle = \\
 = U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, \eta} (R(\Lambda(\rho)^{-1} q))_{\mu' \mu} U_{E(2)}^{0, \kappa_1, \mu_1} (R(\rho_1; A(\rho, q))^{-1}) \times \\
 \times U_{SU(1,1)}^{\kappa_2, l_2, \eta_2} (R(\rho_2; A(\rho, q))^{-1})_{\mu - \mu_1, \mu_2}. \quad (3.2.56)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \left\langle \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho} \kappa l \eta \\ \rho \mu' ; \mu \bar{\mu} \end{array} \middle| \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho}_1 \kappa_1 \rho_1 \\ \rho_1 \mu_1 \\ \overset{\circ}{\rho}_2 \kappa_2 l_2 \eta_2 \\ \rho_2 \mu_2 \end{array} \right\rangle = \\
 = U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, \eta} (R(\Lambda(\rho)^{-1} q))_{\mu' \mu} U_{E(2)}^{\rho_1, \kappa_1} (R(\rho_1; A(\rho, q))^{-1})_{\bar{\mu} \mu_1} \times \\
 \times U_{SU(1,1)}^{\kappa_2, l_2, \eta_2} (R(\rho_2; A(\rho, q))^{-1})_{\mu - \bar{\mu}_1, \mu_2}.
 \end{aligned}$$

Матричные элементы группы $SU(1, 1)$ даны в формуле (2.3.15), группы $E(2)$ — в формулах (1.4.13) и (2.4.4).

VIII. $\overset{\circ}{\rho}_1 = e_{(0)} + e_{(3)}$, $\overset{\circ}{\rho}_2 = -e_{(0)} - e_{(3)}$. Согласно табл. 3.1, область Ω_{VIII} имеет вид

$$\Omega_{VIII} = \{n e_{(3)} : n > 0\} \cup \{0\}. \quad (3.2.57)$$

При этом $G_1 = G_2 = E(2)$, $G(\overset{\circ}{\rho}) = SU(1, 1)$, $C(\overset{\circ}{\rho}, \overset{\circ}{q}) = H_1$. Мы можем воспользоваться классификацией вариантов „а“, „б“ и „в“ в случае VI; области $\hat{H}_{1, \mu_1, \mu_2}^{\rho_1, \rho_2}$ и $\hat{H}_{1, \mu_1, \mu_2}^{\rho_1', \rho_2'}$ даны в формулах (3.2.42). Используя формулу (3.2.53), получаем из формулы (3.1.53)

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \hat{G}(\overset{\circ}{\rho})^{\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 \mu_2} = \\
 = \{(\kappa, l, 0) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, l = -(1 + \kappa)/2 + ip, \rho \geq 0\} \cup \\
 \cup \{(\kappa, l, \eta) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, 0 \leq l \leq \\
 \leq |\mu_1 + \kappa_1/2 + \mu_2 + \kappa_2/2| - \kappa/2 - 1, \\
 \eta = \text{sign}(\mu_1 + \kappa_1/2 + \mu_2 + \kappa_2/2)\},
 \end{aligned}$$

$$\hat{H}_{1, \kappa l \eta}^{\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 \mu_2} = \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, \mu + \kappa/2 = \mu_1 + \kappa_1/2 + \mu_2 + \kappa_2/2\},$$

$$\text{б) } \left. \begin{array}{l} \hat{G}(\overset{\circ}{\rho})^{\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 \rho_2} = \hat{G}(\overset{\circ}{\rho})^{\kappa_1 \rho_1, \kappa_2 \rho_2} = \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 = \{(\kappa, l, 0) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, l = -(1 + \kappa)/2 + ip, \rho \geq 0\} \cup \\
 \cup \{(\kappa, l, +) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, l \geq 0\} \cup \\
 \cup \{(\kappa, l, -) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, l \geq 0\}, \quad (3.2.58)
 \end{aligned}$$

$$\hat{H}_{1, \kappa l 0}^{\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 \rho_2} = \hat{H}_{1, \kappa l 0}^{\kappa_1 \rho_1, \kappa_2 \rho_2} = \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, -\infty < \mu < \infty\},$$

$$\hat{H}_{1, \kappa l \pm}^{\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 \rho_2} = \hat{H}_{1, \kappa l \pm}^{\kappa_1 \rho_1, \kappa_2 \rho_2} =$$

$$= \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, \pm(\mu + \kappa/2) \geq l + \kappa/2 + 1\}.$$

Согласно формуле (3.1.52), кратности равны

$$\begin{aligned}
 \text{а)} \quad & d_{\kappa l \eta}^{\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 \mu_2} = 1, \\
 \text{б)} \quad & d_{\kappa l \eta}^{\kappa_1 \mu_1, \kappa_2 \rho_2} = \mathfrak{N}_0, \\
 \text{в)} \quad & d_{\kappa l \eta}^{\kappa_1 \rho_1, \kappa_2 \rho_2} = \mathfrak{N}_0.
 \end{aligned} \tag{3.2.59}$$

Коэффициенты Клебша — Гордана равны

$$\begin{aligned}
 \text{а)} \quad & \left\langle \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho} \kappa l \eta \\ \rho \mu \end{array} \middle| \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho}_1 \kappa_1 \mu_1 \\ \rho_1 \end{array} ; \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho}_2 \kappa_2 \mu_2 \\ \rho_2 \end{array} \right\rangle = \\
 & = U_{SU(1,1)}^{\kappa_1, l, \eta} (R(\Lambda(\rho)^{-1} q))_{\mu, \mu_1 + \mu_2 + \kappa, \kappa} \times \\
 & \times U_E^{0, \kappa_1, \mu_1} (R(\rho_1; A(\rho, q))^{-1}) \times \\
 & \times U_E^{0, \kappa_2, \mu_2} (R(\rho_2; A(\rho, q))^{-1}), \tag{3.2.60}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б)} \quad & \left\langle \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho} \kappa l \eta \\ \rho \mu' \end{array} ; \mu \middle| \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho}_1 \kappa_1 \mu_1 \\ \rho_1 \end{array} ; \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho}_2 \kappa_2 \rho_2 \\ \rho_2 \mu_2 \end{array} \right\rangle = \\
 & = U_{SU(1,1)}^{\kappa_1, l, \eta} (R(\Lambda(\rho)^{-1} q))_{\mu' \mu} U_E^{0, \kappa_1, \mu_1} (R(\rho_1; A(\rho, q))^{-1}) \times \\
 & \times U_E^{\rho_2, \kappa_2} (R(\rho_2; A(\rho, q))^{-1})_{\mu - \mu_1, \mu_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в)} \quad & \left\langle \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho} \kappa l \eta \\ \rho \mu' \end{array} ; \mu \bar{\mu} \middle| \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho}_1 \kappa_1 \rho_1 \\ \rho_1 \mu_1 \end{array} ; \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho}_2 \kappa_2 \rho_2 \\ \rho_2 \mu_2 \end{array} \right\rangle = \\
 & = U_{SU(1,1)}^{\kappa_1, l, \eta} (R(\Lambda(\rho)^{-1} q))_{\mu' \mu} U_E^{0, \kappa_1} (R(\rho_1; A(\rho, q))^{-1})_{\bar{\mu} \mu_1} \times \\
 & \times U_E^{\rho_2, \kappa_2} (R(\rho_2; A(\rho, q))^{-1})_{\mu - \bar{\mu}, \mu_2}
 \end{aligned}$$

Матричные элементы группы $SU(1, 1)$ даны в формуле (2.3.15), группы $E(2)$ — в формулах (1.4.13) и (2.4.4).

IX. $\rho_1 = n_1 e_{(3)}$, $\rho_2 = n_2 e_{(3)}$. Согласно табл. 3.1, область Ω_{IX} имеет вид

$$\begin{aligned}
 \Omega_{IX} = & \{m e_{(0)} : m > 0\} \cup \{-m e_{(0)} : m > 0\} \cup \{n e_{(3)} : n > 0\} \cup \\
 & \cup \{e_{(0)} + e_3\} \cup \{-e_{(0)} - e_{(3)}\} \cup \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \text{ при } n_1 \neq n_2, \\ \{0\} \text{ при } n_1 = n_2. \end{array} \right. \tag{3.2.61}
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 G_i & = SU(1, 1), \quad \rho_i = (\kappa_i, l_i, \eta_i), \\
 \hat{H}_{1, \kappa_i l_i 0} & = \{(\kappa'_i, \mu_i) : \kappa'_i = \kappa_i, \quad -\infty < \mu_i < \infty\}, \\
 \hat{H}_{1, \kappa_i l_i \pm} & = \{(\kappa'_i, \mu_i) : \kappa'_i = \kappa_i, \quad \pm(\mu_i + \kappa_i/2) \geq l_i + \kappa_i/2 + 1\}, \\
 & i \in \{1, 2\}.
 \end{aligned}$$

IX.1. $\overset{\circ}{\rho} \in \{me_{(0)} : m > 0\} \cup \{-me_{(0)} : m > 0\}$. Здесь $G(\overset{\circ}{\rho}) = SU(2)$, $G(\overset{\circ}{\rho}, \overset{\circ}{q}) = H_1$. Мы различаем четыре случая:

- а) $\eta_1 = 0 = \eta_2$, б) $\eta_1 = 0, \eta_2 = \pm$,
в) $\eta_1 = \pm = \eta_2$ и г) $\eta_1 = \pm = -\eta_2$.

Подстановка (3.1.43) дает области

- а) $\hat{H}_1^{\kappa_1 l_1^0, \kappa_2 l_2^0} = \{(\kappa, \mu) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_2, -\infty < \mu < \infty\}$,
 $\hat{H}_{1, \mu}^{\kappa_1 l_1^0, \kappa_2 l_2^0} = \{(\bar{\kappa}, \bar{\mu}) : \bar{\kappa} = \kappa_1, -\infty < \bar{\mu} < \infty\}$,
 б) $\hat{H}_1^{\kappa_1 l_1^0, \kappa_2 l_2^\pm} = \{(\kappa, \mu) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_2, -\infty < \mu < \infty\}$,
 $\hat{H}_{1, \mu}^{\kappa_1 l_1^0, \kappa_2 l_2^\pm} =$
 $= \{(\bar{\kappa}, \bar{\mu}) : \bar{\kappa} = \kappa_1, \pm(\bar{\mu} + \kappa_1/2) \leq \pm(\mu + \kappa/2) - l_2 - \kappa_2/2 - 1\}$,
 в) $\hat{H}_1^{\kappa_1 l_1^\pm, \kappa_2 l_2^\pm} = \{(\kappa, \mu) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_2, \quad (3.2.62)$
 $\pm(\mu + \kappa/2) \geq l_1 + \kappa_1/2 + l_2 + \kappa_2/2 + 2\}$,
 $\hat{H}_{1, \mu}^{\kappa_1 l_1^\pm, \kappa_2 l_2^\pm} = \{(\bar{\kappa}, \bar{\mu}) : \bar{\kappa} = \kappa_1, l_1 + \kappa_1/2 + 1 \leq$
 $\leq \pm(\bar{\mu} + \kappa_1/2) \leq \pm(\mu + \kappa/2) - l_2 - \kappa_2/2 - 1\}$,
 г) $\hat{H}_1^{\kappa_1 l_1^\pm, \kappa_2 l_2^\mp} = \{(\kappa, \mu) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_2, -\infty < \mu < \infty\}$,
 $\hat{H}_{1, \mu}^{\kappa_1 l_1^\pm, \kappa_2 l_2^\mp} = \{(\bar{\kappa}, \bar{\mu}) : \bar{\kappa} = \kappa_1, \pm(\bar{\mu} + \kappa_1/2) \geq$
 $\geq \max(l_1 + \kappa_1/2 + 1, \pm(\mu + \kappa/2) + l_2 + \kappa_2/2 + 1)\}$.

Так как во всех случаях

$$\hat{G}(\overset{\circ}{\rho})_{\kappa, \mu} = \widehat{SU}(2)_{\kappa, \mu} = \{(\kappa', l) : \kappa' = \kappa, l \geq |(\mu + \kappa)/2| - \kappa/2\}, \quad (3.2.63)$$

то из формулы (3.1.53) следует

- а) } $\hat{G}(\overset{\circ}{\rho})^{\kappa_1 l_1 \eta_1, \kappa_2 l_2 \eta_2} = \{(\kappa, l) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_2, l \geq 0\}$,
 б) }
 г) }
 $\hat{H}_{1, \mu}^{\kappa_1 l_1 \eta_1, \kappa_2 l_2 \eta_2} = \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, -l - \kappa \leq \mu \leq l\}, \quad (3.2.64)$
 в) $\hat{G}(\overset{\circ}{\rho})^{\kappa_1 l_1^\pm, \kappa_2 l_2^\pm} = \{(\kappa, l) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_2, l + \kappa/2 \geq$
 $\geq l_1 + \kappa_1/2 + l_2 + \kappa_2/2 + 2\}$,
 $\hat{H}_{1, \mu}^{\kappa_1 l_1^\pm, \kappa_2 l_2^\pm} = \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, l_1 + \kappa_1/2 + l_2 + \kappa_2/2 + 2 \leq$
 $\leq \pm(\mu + \kappa/2) \leq l + \kappa/2\}$.

Согласно формуле (3.1.52), кратности равны

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} \text{а) } \\ \text{б) } \\ \text{г) } \end{array} \right\} d_{\kappa l}^{\kappa_1 l_1 \eta_1, \kappa_2 l_2 \eta_2} = \mathfrak{N}_0, \\
 & \text{в) } d_{\kappa l}^{\kappa_1 l_1 \pm, \kappa_2 l_2 \pm} = \frac{1}{2} (l + \kappa/2 - l_1 - \kappa_1/2 - l_2 - \kappa_2/2 - 1) \times \\
 & \quad \times (l + \kappa/2 - l_1 - \kappa_1/2 - l_2 - \kappa_2/2).
 \end{aligned} \tag{3.2.65}$$

Коэффициенты Клебша — Гордана имеют вид

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \begin{array}{l} \overset{\circ}{p\kappa l} \\ \rho\mu' \end{array}; \mu\bar{\mu} \left| \begin{array}{l} \overset{\circ}{\rho_1 \kappa_1 l_1 \eta_1} \\ \rho_1 \mu_1 \end{array}; \begin{array}{l} \overset{\circ}{\rho_2 \kappa_2 l_2 \eta_2} \\ \rho_2 \mu_2 \end{array} \right\rangle = \\
 & = U_{SU(2)}^{\kappa, l} (R(\Lambda(p)^{-1} q))_{\mu'\mu} U_{SU(1,1)}^{\kappa_1, l_1, \eta_1} (R(p_1; A(p, q))^{-1})_{\bar{\mu}\mu_1} \times \\
 & \quad \times U_{SU(1,1)}^{\kappa_2, l_2, \eta_2} (R(p_2; A(p, q))^{-1})_{\mu-\bar{\mu}, \mu_2}, \tag{3.2.66}
 \end{aligned}$$

где матричные элементы группы $SU(2)$ даны в формуле (2.2.4), а группы $SU(1, 1)$ — в формуле (2.3.15).

IX. 2. $\overset{\circ}{p} \in \{ne_{(3)} : n > 0\}$. Здесь $G(\overset{\circ}{p}) = SU(1, 1)$; этот случай в свою очередь делится на два.

IX. 2₁. $\overset{\circ}{q} \in \{me_{(0)} : m > 0\} \cup \{-me_{(3)} : m > 0\}$. Тогда $G(\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q}) = H_1$. Здесь справедлива классификация по четырем вариантам, данная в случае IX. 1; множества $\hat{H}_1^{\rho_1, \rho_2}$ и $\hat{H}_{1, \mu_1}^{\rho_1, \rho_2}$ указаны в формулах (3.2.62). Так как в любом случае

$$\begin{aligned}
 \hat{G}(\overset{\circ}{p})_{\kappa, \mu} &= \widehat{SU}(1, 1)_{\kappa, \mu} = \\
 &= \{(\kappa', l, 0) : \kappa' = \kappa, l = -(1 + \kappa)/2 = ip, p \geq 0\} \cup \\
 & \cup \{(\kappa', l, \eta) : \kappa' = \kappa, 0 \leq l \leq |\mu + \kappa/2| - \kappa/2 - 1, \\
 & \quad \eta = \text{sign}(\mu + \kappa/2)\}, \tag{3.2.67}
 \end{aligned}$$

то из формулы (3.1.53) следует

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} \text{а) } \\ \text{б) } \\ \text{г) } \end{array} \right\} \hat{G}(\overset{\circ}{p})^{\kappa, l, \eta_1, \kappa_2, l_2, \eta_2} = \{(\kappa, l, 0) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1, \kappa_2, \\
 & \quad l = -(1 + \kappa)/2 + ip, p \geq 0\} \cup \\
 & \quad \cup \{(\kappa, l, +) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, l \geq 0\} \cup \\
 & \quad \cup \{(\kappa, l, -) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, l \geq 0\},
 \end{aligned}$$

$$\hat{H}_{1, \kappa l_0}^{\kappa_1 l_1 \eta_1, \kappa_2 l_2 \eta_2} = \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, -\infty < \mu < \infty\},$$

$$\hat{H}_{1, \kappa l \pm}^{\kappa_1 l_1 \eta_1, \kappa_2 l_2 \eta_2} = \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, \pm(\mu + \kappa/2) \geq l + \kappa/2 + 1\}. \quad (3.2.68)$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \hat{G}(\overset{\circ}{\rho})^{\kappa_1 l_1 \pm, \kappa_2 l_2 \pm} &= \{(\kappa, l, 0) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, \\ & l = -(1 + \kappa)/2 + ip, p \geq 0\} \cup \\ & \cup \{(\kappa, l, \pm) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, l \geq 0\}, \\ \hat{H}_{1, \kappa l_0}^{\kappa_1 l_1 \pm, \kappa_2 l_2 \pm} &= \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, \pm(\mu + \kappa/2) \geq \\ & \geq l_1 + \kappa_1/2 + l_2 + \kappa_2/2 + 2\}, \\ \hat{H}_{1, \kappa l \pm}^{\kappa_1 l_1 \pm, \kappa_2 l_2 \pm} &= \{(\kappa', \mu) : \kappa' = \kappa, \pm(\mu + \kappa/2) \geq \\ & \geq \max(l + \kappa/2 + 1, l_1 + \kappa_1/2 + l_2 + \kappa_2/2 + 2)\}. \end{aligned}$$

В любом случае кратность, согласно формуле (3.1.52), равна

$$d_{\kappa l \eta}^{\kappa_1 l_1 \eta_1, \kappa_2 l_2 \eta_2} = \mathbf{N}_0. \quad (3.2.69)$$

Коэффициенты Клебша — Гордана имеют вид

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho} \kappa l \eta \\ \rho \mu' \end{array} ; \mu \bar{\mu} \middle| \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho}_1 \kappa_1 l_1 \eta_1 \\ \rho_1 \mu_1 \end{array} ; \begin{array}{c} \overset{\circ}{\rho}_2 \kappa_2 l_2 \eta_2 \\ \rho_2 \mu_2 \end{array} \right\rangle = \\ = U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, \eta} (R(\Lambda(\rho)^{-1} q))_{\mu' \mu} U_{SU(1,1)}^{\kappa_1, l_1, \eta_1} (R(\rho_1; A(\rho, q))^{-1})_{\bar{\mu} \mu_1} \times \\ \times U_{SU(1,1)}^{\kappa_2, l_2, \eta_2} (R(\rho_2; A(\rho, q))^{-1})_{\mu - \bar{\mu}, \mu_2}. \end{aligned} \quad (3.2.70)$$

Матричные элементы группы $SU(1, 1)$ даны в формуле (2.3.15)

IX.2.2. $\overset{\circ}{q} \in \{ne_{(2)} : n > 0\}$. Здесь $G(\overset{\circ}{\rho}, \overset{\circ}{q}) = H_2$. Для класса $\rho_i = (\kappa_i, l_i, \eta_i)$ имеем

$$\hat{H}_{2, \kappa_i l_i \eta_i} = \{(\kappa'_i, \lambda_i) : \kappa'_i = \kappa_i, \lambda_i \in \mathbf{R}\}, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Индексы τ принимают значения \pm . Подстановка (3.1.43) дает

$$\hat{H}_2^{\kappa_1 l_1 \eta_1, \kappa_2 l_2 \eta_2} = \{(\kappa, \lambda) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, -\infty < \lambda < \infty\}, \quad (3.2.71)$$

$$\hat{H}_{2, \kappa \bar{\lambda}}^{\kappa_1 l_1 \eta_1, \kappa_2 l_2 \eta_2} = \{(\bar{\kappa}, \bar{\lambda}) : \bar{\kappa} = \kappa_1, -\infty < \bar{\lambda} < \infty\}.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \hat{G}(\overset{\circ}{\rho})_{\kappa, \lambda} &= \widehat{SU(1, 1)}_{\kappa, \lambda} = \\ &= \{(\kappa', l, 0) : \kappa' = \kappa, l = -(1 + \kappa)/2 + ip, p \geq 0\} \cup \\ & \cup \{(\kappa', l, +) : \kappa' = \kappa, l \geq 0\} \cup \{(\kappa', l, -) : \kappa' = \kappa, l \geq 0\}, \end{aligned} \quad (3.2.72)$$

и потому, согласно формуле (3.1.53),

$$\begin{aligned} \hat{G}(\rho)^{\circ} \kappa_1 l_1 \eta_1, \kappa_2 l_2 \eta_2 &= \\ &= \{(\kappa, l, 0) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, l = -(1 + \kappa)/2 + i\rho, \rho \geq 0\} \cup \\ &\cup \{(\kappa, l, +) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, l \geq 0\} \cup \\ &\cup \{(\kappa, l, -) : \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1 \kappa_2, l \geq 0\}, \quad (3.2.73) \\ \hat{H}_{2, \kappa l \eta}^{\kappa_1 l_1 \eta_1, \kappa_2 l_2 \eta_2} &= \{(\kappa' \lambda) : \kappa' = \kappa, -\infty < \lambda < \infty\}. \end{aligned}$$

Кратность представления $U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, \eta}$ определяется, согласно формуле (3.1.52), счетной бесконечной размерностью гильбертова пространства $\mathfrak{H}_{\kappa l \eta}^{\kappa_1 l_1 \eta_1, \kappa_2 l_2 \eta_2}$:

$$d_{\kappa l \eta}^{\kappa_1 l_1 \eta_1, \kappa_2 l_2 \eta_2} = \aleph_0. \quad (3.2.74)$$

Коэффициенты Клебша — Гордана равны

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{array}{c} \rho \kappa l \eta \\ \rho \tau' \lambda' \end{array}; \begin{array}{c} \lambda \bar{\lambda} \\ \tau \tau' \tau_2' \end{array} \middle| \begin{array}{c} \rho_1 \kappa_1 l_1 \eta_1 \\ \rho_1 \tau_1 \lambda_1 \end{array}; \begin{array}{c} \rho_2 \kappa_2 l_2 \eta_2 \\ \rho_2 \tau_2 \lambda_2 \end{array} \right\rangle &= U_{SU(1,1)}^{\kappa, l, \eta} (R(\Lambda(\rho)^{-1} q))_{\tau \lambda', \tau \lambda} \times \\ &\times U_{SU(1,1)}^{\kappa_1, l_1, \eta_1} (R(\rho_1; A(\rho, q))^{-1})_{\tau_1 \lambda, \tau_1 \lambda_1} \times \\ &\times U_{SU(1,1)}^{\kappa_2, l_2, \eta_2} (R(\rho_2; A(\rho, q))^{-1})_{\tau_2, \lambda - \lambda, \tau_2 \lambda_2}. \quad (3.2.75) \end{aligned}$$

Здесь матричные элементы группы $SU(1, 1)$ в базисе, связанном с подгруппой H_2 , определяются формулами (2.5.74) и (2.5.62), а также условиями симметрии (2.5.66) и (2.5.72).

3.3. ЗАМЕЧАНИЯ О РЕДУКЦИИ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ \tilde{P} ,

$$U^{0, \rho_1} \otimes U^{\rho, \rho_2}$$

Согласно формулам (3.1), (3.4) и (1.1.16), представление $U^{1,2} \equiv U^{0, \rho_1} \otimes U^{\rho, \rho_2}$ имеет вид

$$(U^{1,2}(A, a) \psi)(\rho) = e^{i\rho \cdot a} U_{SL(2, c)}^{\rho_1}(A) \otimes U_{G(\rho)}^{\rho_2}(R(\rho; A)) \psi(\Lambda(A)^{-1} \rho). \quad (3.3.1)$$

Далее мы опишем построение, приводящее к редукции представления $U^{1,2}$. Однако задачи редукции для унитарных представлений малых групп, которые при этом появляются, не решены в явном виде. Известная нам литература по этому вопросу будет указана.

Пусть $\overset{\circ}{\rho}_2 \neq 0$. Тогда унитарным преобразованием

$$\psi \rightarrow \psi' : \psi'(p) = \left(U_{SL(2, \mathbb{C})}^{\overset{\circ}{\rho}_1} (A(p)^{-1}) \otimes \mathbf{I}_{\mathfrak{H}_{G(\overset{\circ}{\rho})}^{\overset{\circ}{\rho}_1}} \right) \psi(p) \quad (3.3.2)$$

представление $U^{1,2}$ переводится в представление $U'^{1,2}$, где

$$\begin{aligned} (U'^{1,2}(A, a)\psi')(p) &\equiv (U^{1,2}(A, a)\psi)'(p) = \\ &= e^{i p \cdot a} U_{SL(2, \mathbb{C})}^{\overset{\circ}{\rho}_1} (R(p; A)) \otimes U_{G(\overset{\circ}{\rho})}^{\overset{\circ}{\rho}_2} (R(p; A)) \psi'(\Lambda(A)^{-1}p), \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

которое имеет вид представления группы \tilde{P} , индуцированного представлением $U_{\tilde{P}}^{\overset{\circ}{\rho}_1, \overset{\circ}{\rho}_1} | \check{G}(\overset{\circ}{\rho}) \otimes U_{\check{G}(\overset{\circ}{\rho})}^{\overset{\circ}{\rho}_2, \overset{\circ}{\rho}_2}$, $\check{G}(\overset{\circ}{\rho}) = G(\overset{\circ}{\rho}) \otimes \mathbf{R}^4 \subset \tilde{P}$. К решению проблемы редукции для представления $U^{1,2}$ приводит выполнение следующих этапов.

1. С помощью унитарного преобразования $\check{A}^{\overset{\circ}{\rho}_1}$ пространство $\mathfrak{H}_{SL(2, \mathbb{C})}^{\overset{\circ}{\rho}_1}$ отображается на гильбертово пространство

$$\check{A}^{\overset{\circ}{\rho}_1} \mathfrak{H}_{SL(2, \mathbb{C})}^{\overset{\circ}{\rho}_1} = \otimes \int_{\hat{G}(\overset{\circ}{\rho})} \sqrt{d\tilde{\mu}_{\rho_1}(\rho)} \mathfrak{H}_{\rho}^{\overset{\circ}{\rho}_1} \otimes \mathfrak{H}_{G(\overset{\circ}{\rho})}^{\overset{\circ}{\rho}}, \quad (3.3.4)$$

в котором сужение $U_{SL(2, \mathbb{C})}^{\overset{\circ}{\rho}_1} | G(\overset{\circ}{\rho})$ разлагается в прямой интеграл от унитарных представлений группы $G(\overset{\circ}{\rho})$, входящих с кратностями, которые определяются размерностью пространства $\mathfrak{H}_{\rho}^{\overset{\circ}{\rho}_1}$.

$$\check{A}^{\overset{\circ}{\rho}_1} U_{SL(2, \mathbb{C})}^{\overset{\circ}{\rho}_1} | G(\overset{\circ}{\rho}) [\check{A}^{\overset{\circ}{\rho}_1}]^{-1} = \oplus \int_{\hat{G}(\overset{\circ}{\rho})} d\tilde{\mu}_{\rho_1}(\rho) \left(\mathbf{I}_{\mathfrak{H}_{\rho}^{\overset{\circ}{\rho}_1}} \otimes U_{G(\overset{\circ}{\rho})}^{\overset{\circ}{\rho}} \right). \quad (3.3.5)$$

Мера $\tilde{\mu}_{\rho_1}$ на множестве $\hat{G}(\overset{\circ}{\rho})$ классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений группы $G(\overset{\circ}{\rho})$ единственна с точностью до преобразования эквивалентности. Далее гильбертово пространство

$$\check{A}^{\overset{\circ}{\rho}_1} \mathfrak{H}_{SL(2, \mathbb{C})}^{\overset{\circ}{\rho}_1} \otimes \mathfrak{H}_{G(\overset{\circ}{\rho})}^{\overset{\circ}{\rho}_2} = \left[\oplus \int_{\hat{G}(\overset{\circ}{\rho})} \sqrt{d\tilde{\mu}_{\rho_1}(\rho)} \left(\mathfrak{H}_{\rho}^{\overset{\circ}{\rho}_1} \otimes \mathfrak{H}_{G(\overset{\circ}{\rho})}^{\overset{\circ}{\rho}} \right) \right] \otimes \mathfrak{H}_{G(\overset{\circ}{\rho})}^{\overset{\circ}{\rho}_2} \quad (3.3.6)$$

посредством преобразования

$$\begin{aligned} \psi' &= \left(\oplus \int_{\hat{G}(\overset{\circ}{\rho})} \sqrt{d\tilde{\mu}_{\rho_1}(\rho)} \psi_{\rho}^{\prime \overset{\circ}{\rho}_1} \right) \otimes \psi^{\overset{\circ}{\rho}_2} \rightarrow \tilde{\psi} \equiv \oplus \int_{\hat{G}(\overset{\circ}{\rho})} \sqrt{d\tilde{\mu}_{\rho_1}(\rho)} (\psi_{\rho}^{\prime \overset{\circ}{\rho}_1} \otimes \psi^{\overset{\circ}{\rho}_2}), \\ \psi_{\rho}^{\prime \overset{\circ}{\rho}_1} &\in \mathfrak{H}_{\rho}^{\overset{\circ}{\rho}_1} \otimes \mathfrak{H}_{G(\overset{\circ}{\rho})}^{\overset{\circ}{\rho}}, \quad \psi^{\overset{\circ}{\rho}_2} \in \mathfrak{H}_{G(\overset{\circ}{\rho})}^{\overset{\circ}{\rho}_2}, \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

унитарно отображается на гильбертово пространство

$$\tilde{\mathfrak{H}}^{1,2} \equiv \bigoplus \int_{\hat{G}(\hat{\rho})} \sqrt{d\tilde{\mu}_{\rho_1}(\rho)} \left(\mathfrak{H}_{\rho}^{\rho_1} \otimes \mathfrak{H}_{G(\hat{\rho})}^{\rho} \otimes \mathfrak{H}_{G(\hat{\rho})}^{\rho_2} \right) \quad (3.3.8)$$

(см. в связи с этим книгу Диксмие [30]). При этом представление $U^{1,2}$, заданное формулой (3.3.3), переходит в представление

$$\begin{aligned} (\tilde{U}^{1,2}(A, a)\tilde{\psi})(\rho) &\equiv (U^{1,2}(A; a)\psi)^\sim(\rho) = \\ &= e^{ip \cdot a} \bigoplus \int_{\hat{G}(\hat{\rho})} d\tilde{\mu}_{\rho_1}(\rho) \left[\mathbf{I}_{\mathfrak{H}_{\rho}^{\rho_1}} \otimes U_{G(\hat{\rho})}^{\rho}(R(\rho; A)) \otimes \right. \\ &\quad \left. \otimes U_{G(\hat{\rho})}^{\rho_2}(R(\rho; A)) \right] \tilde{\psi}(\Lambda(A)^{-1}\rho). \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

2. Посредством унитарного преобразования $\check{A}^{\rho\rho_2}$ произведение $\mathfrak{H}_{G(\hat{\rho})}^{\rho} \otimes \mathfrak{H}_{G(\hat{\rho})}^{\rho_2}$ отображается на гильбертово пространство

$$\check{A}^{\rho\rho_2} \left(\mathfrak{H}_{G(\hat{\rho})}^{\rho} \otimes \mathfrak{H}_{G(\hat{\rho})}^{\rho_2} \right) = \bigoplus \int_{\hat{G}(\hat{\rho})} \sqrt{d\tilde{\mu}_{\rho\rho_2}(\rho')} \mathfrak{H}_{\rho}^{\rho\rho_2} \otimes \mathfrak{H}_{G(\hat{\rho})}^{\rho'}, \quad (3.3.10)$$

в котором произведение представлений $U_{G(\hat{\rho})}^{\rho} \otimes U_{G(\hat{\rho})}^{\rho_2}$ разлагается в прямой интеграл неприводимых унитарных представлений $U_{G(\hat{\rho})}^{\rho'}$ группы $G(\hat{\rho})$, каждое из которых входит с кратностью, заданной размерностью пространства $\mathfrak{H}_{\rho}^{\rho\rho_2}$:

$$\bigoplus \int_{\hat{G}(\hat{\rho})} d\tilde{\mu}_{\rho\rho_2}(\rho') \left(\mathbf{I}_{\mathfrak{H}_{\rho}^{\rho\rho_2}} \otimes U_{G(\hat{\rho})}^{\rho'} \right). \quad (3.3.11)$$

Мера $\tilde{\mu}_{\rho\rho_2}$ на множестве $\hat{G}(\hat{\rho})$ вновь определена однозначно с точностью до эквивалентности. Поэтому с помощью преобразования

$$\bigoplus \int_{G(\hat{\rho})} d\tilde{\mu}_{\rho_1}(\rho) \left(\mathbf{I}_{\mathfrak{H}_{\rho}^{\rho_1}} \otimes \check{A}^{\rho\rho_2} \right)$$

гильбертово пространство $\tilde{\mathfrak{H}}^{1,2}$ в формуле (3.3.8) унитарно отображается на гильбертово пространство вида

$$\tilde{\mathfrak{H}}^{1,2} = \bigotimes \int_{\hat{G}(\hat{\rho})} \sqrt{d\tilde{\mu}_{\rho_1}(\rho)} \bigoplus \int_{\hat{G}(\hat{\rho})} d\tilde{\mu}_{\rho\rho_2}(\rho') \left(\mathfrak{H}_{\rho}^{\rho_1} \otimes \mathfrak{H}_{\rho}^{\rho\rho_2} \otimes \mathfrak{H}_{G(\hat{\rho})}^{\rho'} \right). \quad (3.3.12)$$

Переводя представление $U^{1,2}$ в формуле (3.3.9) в пространство $\hat{\mathfrak{F}}^{1,2}$, получаем

$$\begin{aligned} (\hat{U}^{1,2}(A, a) \hat{\psi})(p) &\equiv (U^{1,2}(A, a) \psi)^\Lambda(p) = \\ &= e^{ip \cdot a} \oplus \int_{\hat{G}(\hat{p})} d\tilde{\mu}_{\rho_1}(\rho) \oplus \int_{\hat{G}(\hat{p})} d\tilde{\mu}_{\rho_2}(\rho') \times \\ &\times \left[\mathbf{I}_{\mathfrak{F}_\rho^{\rho_1} \otimes \mathfrak{F}_\rho^{\rho_2}} \otimes U_{G(\hat{p})}^{\rho'}(R(p; A)) \right] \hat{\psi}(\Lambda(A)^{-1} p) = \\ &= \oplus \int_{\hat{G}(\hat{p})} d\tilde{\mu}_{\rho_1}(\rho) \oplus \int_{G(\hat{p})} d\tilde{\mu}_{\rho_2}(\rho') \times \\ &\times \left[\left(\mathbf{I}_{\mathfrak{F}_\rho^{\rho_1} \otimes \mathfrak{F}_\rho^{\rho_2}} \otimes U^{\rho_1, \rho'}(A, a) \right) \hat{\psi} \right](p). \quad (3.3.13) \end{aligned}$$

Иными словами, в пространстве $\hat{\mathfrak{F}}^{1,2}$ представление $U^{1,2}$ группы \tilde{P} разлагается в прямой интеграл от неприводимых унитарных представлений $U^{\rho_1, \rho'}$ этой группы.

Указанные выше преобразования эквивалентности: \dot{A}^{ρ_1} для сужения унитарных представлений группы $SL(2, \mathbb{C})$ на подгруппу $G(\hat{p})$ и \dot{A}^{ρ_2} для произведения представлений группы $G(\hat{p})$, частично можно найти в литературе. Для импульсов $\hat{p} \in \in \{\pm m e_{(0)} : m > 0\}$, таких, что $G(\hat{p}) = SU(2)$, редукция сужения $U_{SU(2, \mathbb{C})}^{\rho_1} | SU(2)$ проделана в книге Наймарка [18], а редукция произведения представлений группы $SU(2)$ приводит к общеизвестным рядам Клебша—Гордана для этой группы (см., например, статью Баргмана [15]). Для случая $\hat{p} \in \{n e_{(3)} : n > 0\}$, т. е. $G(\hat{p}) = SU(1, 1)$, редукция сужения $U_{SL(2, \mathbb{C})}^{\rho_1} | SU(1, 1)$ произведена в работах Рюля [31], Шарино, Толлера [32] и Мукунда [33]. Коэффициенты Клебша—Гордана для группы $SU(1, 1)$ вычислены в работе Хольмана и Биденхарна [34]. Для случая $\hat{p} \in \{\pm (e_{(0)} + e_{(3)})\}$, т. е. $G(\hat{p}) = E(2)$, эта проблема решена Шаафом [37].

В случае $\hat{p} = 0$ представление (3.3.1) имеет вид

$$U^{1,2}(A, a) \psi = U_{SL(2, \mathbb{C})}^{\rho_1}(A) \otimes U_{SL(2, \mathbb{C})}^{\rho_2}(A) \psi. \quad (3.3.14)$$

Таким образом, задача сводится к редукции произведения представлений группы $SL(2, \mathbb{C})$. Решение этой задачи дано в серии статей Наймарка [35].

Приложение А. Ортонормированный базис
в пространстве $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

Покажем, что для заданных $\kappa \in (0, 1)$, $l \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ определяется следующим образом:

$$K_{\mu}^{\kappa, l}(\lambda) = \frac{\Gamma(1+l+\kappa/2-i\lambda)}{\sqrt{2\pi}} 2^{1+l+\kappa/2} \left[\frac{(\mu+l+\kappa)!}{(\mu-l-1)!} \right]^{1/2} \frac{1}{(2l+\kappa+1)!} \times \\ \times F(1+l-\mu, 1+l+\kappa/2+i\lambda; 2l+\kappa+2; 2), \\ \mu = l+1, l+2, \dots \quad (\text{A.1})$$

В силу рекурсивных формул Гаусса для гипергеометрических функций (Бейтмен и Эрдейи [23], стр. 111) для функций $K_{\mu}^{\kappa, l}$ выполняются следующие соотношения:

$$2i\lambda K_{\mu}^{\kappa, l}(\lambda) = \sqrt{(\mu-l-1)(\mu+l+\kappa)} K_{\mu-1}^{\kappa, l}(\lambda) - \\ - \sqrt{(\mu-l)(\mu+l+\kappa+1)} K_{\mu+1}^{\kappa, l}(\lambda), \quad (\text{A.2}) \\ K_{l+1}^{\kappa, l}(\lambda) = \frac{\Gamma(1+l+\kappa/2-i\lambda)}{\sqrt{2\pi}(2l+\kappa+1)!} 2^{1+l+\kappa/2}, \quad K_l^{\kappa, l}(\lambda) \equiv 0.$$

Используя ортонормированный базис

$$\{\psi_{\mu}^{\kappa, l, +}; \psi_{\mu}^{\kappa, l, +}(z) = \\ = \left[\frac{(\mu+l+\kappa)!}{(\mu-l-1)!} \right]^{1/2} z^{\mu+\kappa}, \quad \mu = l+1, l+2, \dots \} \quad (\text{A.3})$$

в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_{SU(l,1)}^{\kappa, l, +}$ функций, голоморфных внутри единичного круга и имеющих нуль порядка $l+\kappa+1$ или выше при $z=0$, со скалярным произведением

$$\langle \psi | \varphi \rangle' \equiv \int_{|z|<1} \frac{dx dy}{\pi(2l+\kappa)!} (1+|z|^2)^{2l+\kappa} |z|^{-2l-2\kappa-2} \psi(z)^* \varphi(z), \quad (\text{A.4})$$

построим производящую функцию

$$w_{+, \lambda}^{\kappa, l}(z) = \sum_{\mu=l+1}^{\infty} \psi_{\mu}^{\kappa, l, +}(z) K_{\mu}^{\kappa, l}(\lambda)^*. \quad (\text{A.5})$$

Как можно показать с помощью рекуррентного соотношения (A.2), эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-z)^2 \frac{d}{dz} w_{+, \lambda}^{\kappa, l}(z) = [(l+\kappa+1)z^{-1} + (l+1)z + 2i\lambda] w_{+, \lambda}^{\kappa, l}(z), \quad (\text{A.6})$$

$$z^{-l-\kappa-1} w_{+, \lambda}^{\kappa, l}(z) \Big|_{z=0} = \frac{\Gamma(1+l+\kappa/2+i\lambda)}{\sqrt{2\pi}} 2^{1+l+\kappa/2},$$

решение которого имеет вид

$$w_{+, \lambda}^{x, l}(z) = \frac{\Gamma(1+l+x/2+i\lambda)}{\sqrt{2\pi}} z^{1+l+x} \times \\ \times \left(\frac{1-z}{\sqrt{2}}\right)^{-1-l-x/2-i\lambda} \left(\frac{1+z}{\sqrt{2}}\right)^{-1-l-x/2+i\lambda}. \quad (\text{A.7})$$

Интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda w_{+, \lambda}^{x, l}(z') w_{+, \lambda}^{x, l}(z)^*$$

по существу представляет собой преобразование Меллина квадрата модуля гамма-функции и дает ядро, отвечающее единичному оператору в пространстве $\mathfrak{H}_{SU(1,1)}^{x, l, +}$ [см. формулу (1.3.52)]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda w_{+, \lambda}^{x, l}(z') w_{+, \lambda}^{x, l}(z)^* = K^{x, l, +}(z', z) = \\ = \sum_{\mu=l+1}^{\infty} \psi_{\mu}^{x, l, +}(z') \psi_{\mu}^{x, l, +}(z)^*. \quad (\text{A.8})$$

Подставляя в левую часть формулу (A.5) и приравнивая коэффициенты разложения, получаем условия ортогональности и нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda K_{\mu}^{x, l}(\lambda)^* K_{\mu}^{x, l}(\lambda) = \delta_{\mu\mu}. \quad (\text{A.9})$$

Чтобы доказать полноту системы функций $\{K_{\mu}^{x, l} : \mu = l+1, l+2, \dots\}$ в пространстве $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$, покажем, что функция, ортогональная всем функциям $K_{\mu}^{x, l}$, равна нулю. Первый параметр гипергеометрической функции в формуле (A.1) принимает целые отрицательные значения. Таким образом, гипергеометрическая функция сводится к полиному по переменной λ степени $\mu-l-1$, который связан с полиномами Поллачека (см. работу [36]). Поэтому достаточно показать, что элемент пространства $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$, ортогональный всем функциям $f_n : f_n(\lambda) = \Gamma(1+l+1/2x-i\lambda)\lambda^n$, $n=0, 1, 2, \dots$, равен нулю. Пусть функция f ортогональна всем f_n . В силу асимптотического условия

$$|\Gamma(1+l+x/2-i\lambda)|^2 \approx |\lambda|^{2l+x+1} e^{-\pi|\lambda|}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad (\text{A.10})$$

функция

$$g_z : g_z(\lambda) = \Gamma(1+l+x/2-i\lambda) e^{iz\lambda} \quad (\text{A.11})$$

при всех z , лежащих в полосе $|\operatorname{Im} z| < 1/2\pi$, принадлежит пространству $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$. Тогда скалярное произведение

$$F(z) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda f(\lambda)^* \Gamma(1+l+\kappa/2-i\lambda) e^{iz\lambda} \quad (\text{A.12})$$

существует для всех z из этой полосы и является там голоморфной функцией. Из нашего предположения о виде функции f следует

$$\frac{d^n}{dz^n} F(0) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.13})$$

При этом $F \equiv 0$ и $f(\lambda) = 0$ почти для всех λ .

Приложение Б. Знаковый множитель $\varepsilon(\omega, A)$

Рассмотрим знаковый множитель в формуле (2.5.53):

$$\varepsilon(\omega, A) \equiv \omega^{-1/2} \zeta_A(\omega) (\omega \bar{A})^{1/2}, \quad \zeta_A(\omega) \equiv (\omega A_{12} + A_{22}) / |\omega A_{12} + A_{22}|. \quad (\text{B.1})$$

Здесь $\omega \in \partial K$, $A \in SU(1,1)$. Знак квадратного корня определен так:

$$\omega^{1/2} = e^{i \arg \omega / 2}, \quad -\pi \leq \arg(\omega) < \pi. \quad (\text{B.2})$$

В силу равенства

$$\varepsilon(\omega, A)^2 = \zeta_A(\omega)^2 \frac{\omega \bar{A}}{\omega} = 1, \quad (\text{B.3})$$

множитель $\varepsilon(\omega, A)$ принимает только значения ± 1 . Величина $\omega \bar{A}$, как и ω , пробегает границу единичного круга, причем в том же направлении, и принимает значение -1 при

$$\omega = \omega_- \equiv -(A_{22} + A_{21}) / (A_{11} + A_{12}), \quad \omega_- A = -1. \quad (\text{B.4})$$

Согласно формулам (Б.2) и (Б.3),

$$\arg(\omega \bar{A}) = \arg(\omega) - 2 \arg(\zeta_A(\omega)) + \begin{cases} -2\pi & \text{при } \pi \leq \arg(\omega) - 2 \arg(\zeta_A(\omega)), \\ 0 & \text{при } -\pi \leq \arg(\omega) - 2 \arg(\zeta_A(\omega)) < \pi, \\ 2\pi & \text{при } \arg(\omega) - 2 \arg(\zeta_A(\omega)) < -\pi. \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Так как $\arg(\omega\bar{A}) \geq \arg(\omega_- \bar{A}) = -\pi$ при $\arg \omega \geq \arg \omega_-$, то из формулы (Б.5) следует

$$\arg(\omega\bar{A}) = \arg(\omega) - 2 \arg(\xi_A(\omega)) + \begin{cases} -2\pi & \text{при } \pi \leq \arg(\omega) - 2 \arg(\xi_A(\omega)), \\ 0 & \text{при } -\pi \leq \arg(\omega) - 2 \arg(\xi_A(\omega)) < \pi. \end{cases} \quad (\text{Б.6})$$

Когда ω стремится к ω_- из области $\pi > \arg \omega \geq \arg \omega_-$, в обоих случаях

$$\arg(\omega_-) - 2 \arg(\xi_A(\omega_-)) = \begin{cases} +\pi, \\ -\pi. \end{cases} \quad (\text{Б.7})$$

Так как $-\pi \leq \arg \omega_- < \pi$, то из этого вытекает альтернатива

$$\begin{cases} -\pi \leq \arg(\xi_A(\omega_-)) < 0, \\ 0 \leq \arg(\xi_A(\omega_-)) < \pi. \end{cases} \quad (\text{Б.8})$$

Поэтому вместо равенства (Б.6) можно записать

$$\arg(\omega\bar{A}) = \arg(\omega) - 2 \arg(\xi_A(\omega)) + \begin{cases} -2\pi & \text{при } -\pi \leq \arg(\xi_A(\omega_-)) < 0, \\ 0 & \text{при } 0 \leq \arg(\xi_A(\omega_-)) < \pi, \end{cases} \quad (\text{Б.9})$$

если $\arg \omega_- \leq \arg \omega < \pi$. Это и фиксирует знак множителя $\varepsilon(\omega, A)$, и, согласно определению (Б.1), мы имеем

$$\varepsilon(\omega, A) = \begin{cases} +\text{sign Im}(A_{11} + A_{12}) & \text{при } \omega \in \overline{-1, \omega_-}, \\ -\text{sign Im}(A_{11} + A_{12}) & \text{при } \omega \in \overline{\omega_-, -1}. \end{cases} \quad (\text{Б.10})$$

Так как

$$\begin{aligned} \omega_{\pm}(\Gamma A) &= -\omega_{\pm}(A), \quad (\Gamma A)_{11} + (\Gamma A)_{12} = i(A_{11} + A_{12}), \\ \Gamma &= i\sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \in SU(1,1), \end{aligned} \quad (\text{Б.11})$$

то из формулы (Б.10) следует

$$\varepsilon(-\omega, \Gamma A) = \begin{cases} \text{sign Re}(A_{11} + A_{12}) & \text{при } \omega \in \overline{1, \omega_-}, \\ -\text{sign Re}(A_{11} + A_{12}) & \text{при } \omega \in \overline{\omega_-, 1}. \end{cases} \quad (\text{Б.12})$$

Используя соотношение

$$2 \text{Re}(A_{11} \pm A_{12}) \text{Im}(A_{11} \pm A_{12}) = \pm |A_{11} + A_{12}|^2 \text{Im} \omega_{\mp}, \quad (\text{Б.13})$$

получаем окончательно

$$\varepsilon(-\omega, \Gamma A) / \varepsilon(\omega, A) = \text{sign Im} \omega. \quad (\text{Б.14})$$

Это равенство можно записать в виде

$$\varepsilon(-\omega, \Gamma A) / \varepsilon(\omega, A) = \tau' \text{ при } \omega \in \partial K_{\tau'\tau}(A), \quad (\text{Б.15})$$

так как $\partial K_{\tau'\tau}(A) \subset \overline{\tau', -\tau'}$. Кроме того, поскольку

$$\omega_{\pm}(A\Gamma^{-1}) = \omega_{\mp}(A), \quad (A\Gamma^{-1})_{11} + (A\Gamma^{-1})_{12} = -i(A_{11} - A_{12}), \quad (\text{Б.16})$$

то, используя формулу (Б.10), получаем

$$\varepsilon(\omega, A\Gamma^{-1}) = \begin{cases} -\text{sign Re}(A_{11} - A_{12}) & \text{при } \omega \in \overline{-1, \omega_+} \\ \text{sign Re}(A_{11} - A_{12}) & \text{при } \omega \in \overline{\omega_+, -1}. \end{cases} \quad (\text{Б.17})$$

С помощью формул

$$\begin{aligned} \text{Re}(A_{11} + A_{12}) \text{Re}(A_{11} - A_{12}) - \text{Im}(A_{11} + A_{12}) \text{Im}(A_{11} - A_{12}) &= \\ &= \frac{1}{2} |A_{11}^2 - A_{12}^2|^2 \text{Re}(\omega_+ - \omega_-), \\ \text{Re}(A_{11} + A_{12}) \text{Re}(A_{11} - A_{12}) + \text{Im}(A_{11} + A_{12}) \text{Im}(A_{11} - A_{12}) &= 1, \end{aligned} \quad (\text{Б.18})$$

а также формулы (Б.13) можно показать, что точка -1 принадлежит дуге $\omega_{\tau}, \omega_{-\tau}$, если $\text{sign Re}(A_{11} - A_{12}) = -\tau \text{sign Im } \times \times (A_{11} + A_{12})$. Так как, кроме того, дугу $\omega_{\tau}, \omega_{-\tau}$, содержащую точку -1 , можно представить в виде

$$\overline{(-1, \omega_+ \cap -1, \omega_-)} \cup \overline{(\omega_+, -1 \cap \omega_-, -1)},$$

то из формул (Б.10) и (Б.17) следует

$$\varepsilon(\omega, A\Gamma^{-1}) / \varepsilon(\omega, A) = \tau \text{ при } \omega \in \overline{\omega_{\tau}, \omega_{-\tau}}, \quad (\text{Б.19})$$

или, поскольку $\partial K_{\tau\tau}(A) \subset \overline{\omega_{\tau}, \omega_{-\tau}}$, получаем эквивалентную формулу

$$\varepsilon(\omega, A\Gamma^{-1}) / \varepsilon(\omega, A) = \tau \text{ при } \omega \in \partial K_{\tau\tau}(A). \quad (\text{Б.20})$$

Наконец, из формулы (Б.10) следует условие симметрии

$$\varepsilon(1/\omega, A^*) = \varepsilon(\omega, A). \quad (\text{Б.21})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Joos H., Fortschr. Phys., 10, 65 (1962).
2. Moussa R., Stora P., Lectures in Theoretical Physics, VII A, eds. W. Brittin, A. O. Barut, Univ. of Colorado Press, Boulder, 1965.
3. Toller M., Nuovo Cim., 37, 631 (1965); 54A, 295 (1968).
4. Hadjeoannou F. T., Nuovo Cim., 44, 185 (1966).
5. Joos H., в книге Lectures in Theoretical Physics, VII A, eds. W. Brittin, A. O. Barut, Univ. of Colorado Press, Boulder, 1965.
6. Feinberg G., Phys. Rev., 159, 1089 (1967).
7. Bargmann V., Ann. Math., 59, 1 (1954).

8. *Wigner E. P.*, Ann. Math., **40**, 149 (1939).
9. *Mackey G. W.*, Ann. Math., **55**, 101 (1952); **58**, 193 (1953).
10. *Mackey G. W.*, Bull. Amer. Math. Soc., **69**, 628 (1963).
11. *Emch G.* в книге Lectures in Theoretical Physics, VIIA, eds. W. Brittin, A. O. Barut, Univ. of Colorado Press, Boulder, 1965.
12. *Guillot J. C., Petit J. L.*, Helv. Phys. Acta, **39**, 281 (1966).
13. *Bargmann V.*, Ann. Math., **48**, 568 (1947).
14. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.*, Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, М., 1962.
15. *Bargmann V.*, Rev. Mod. Phys., **34**, 829 (1962).
16. *Takahashi R.*, Jap. Journ. Math., **31**, 55 (1961).
17. *Гельфанд И. М., Наймарк М. А.*, Journ. Phys., **10**, 93 (1946).
18. *Наймарк М. А.*, Линейные представления группы Лоренца, М., 1958.
19. *Mukunda N.*, Journ. Math. Phys., **8**, 2210 (1967); **9**, 417 (1968).
20. *Виленкин Н. Я.*, Матем. сбор., **64**, 497 (1964).
21. *Harish-Chandra*, Proc. Natl. Acad. Sci., **38**, 337 (1952).
22. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.*, Представления группы вращений и группы Лоренца, М., 1958.
23. *Erdelyi A. et al.*, Higher Transcendental Functions, vol. 1, New York, McGraw-Hill, 1953 (см. перевод: *Г. Бейтмен, А. Эрдейи*, Высшие трансцендентные функции, т. 1, изд-во «Наука», 1966).
24. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.*, Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, 1959.
25. *Helgason S.*, Differential geometry and Symmetric Spaces, New York, Academic Press, 1962 (см. перевод: *С. Хельгасон*, Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, изд-во «Мир», 1964).
26. *Erdelyi A. et al.*, Higher Transcendental Functions, vol. 2, New York, McGraw-Hill, 1953 (см. перевод: *Г. Бейтмен, А. Эрдейи*, Высшие трансцендентные функции, т. II, изд-во «Наука», 1966).
27. *Sommerfeld A.*, Partielle Differentialgleichungen der Physik, Leipzig, Akadem. Verlagsges. Geest & Portig, 1962 (см. перевод: *А. Зоммерфельд*, Дифференциальные уравнения в частных производных физики, ИЛ, 1950).
28. *Kunze P. A., Stein E. M.*, Am. Journ. Math., **82**, 1 (1960).
29. *Titchmarsh E. C.*, Introduction to the Theory of Fourier Integrals, 2nd Ed., Oxford, Clarendon Press, 1948 (см. перевод: *Е. К. Титчмарш*, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948).
30. *Dixmier J.*, Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien (Algebres de von Neumann), Paris, 1957.
31. *Ruhl W.*, Comm. Math. Phys., **6**, 312 (1967).
32. *Sciarrino A., Toller M.*, Journ. Math. Phys., **8**, 1262 (1967).
33. *Mukunda N.*, Journ. Math. Phys., **9**, 50, 417 (1968).
34. *Holman W. J., Biedenharn L. C.*, Ann. Phys., **47**, 205 (1968).
35. *Наймарк М. А.*, Труды моск. матем. об-ва, **8**, 121 (1959); **9**, 237 (1960); **10**, 181 (1962).
36. *Pollaczek F.*, Compt. Rend. (Paris), **230**, 1563 (1950).
37. *Schaaf M.*, Zs. Phys., **229**, 336 (1969).

Релятивистская теория частицы с произвольным внутренним угловым моментом¹⁾

В теории электрона Дирака используется, как известно, волновая функция с четырьмя компонентами, две из которых, если рассматривается медленное движение, имеют величину, пренебрежимо малую по сравнению с двумя другими, удовлетворяющими в первом приближении уравнению Шредингера.

Аналогично частица с внутренним угловым моментом s ($\hbar/2\pi$) ($s = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$) описывается в квантовой механике совокупностью $2s + 1$ волновых функций, которые по отдельности удовлетворяют уравнению Шредингера. Такое представление, естественно, справедливо лишь постольку, поскольку мы пренебрегаем релятивистскими эффектами, а это возможно лишь для частицы, движущейся со скоростью, гораздо меньшей скорости света. Другой случай, в котором элементарная теория еще применима, — очевидно, случай, в котором скорость частицы, сравниваемая с c , остается почти постоянной по величине и направлению, и потому можно вернуться к рассмотрению медленного движения, выбрав подходящим образом систему отсчета.

Случай, когда скорость частицы, почти постоянная в достаточно обширной области пространственно-временного континуума, под действием слабого внешнего поля меняется при переходе из одной области в другую медленно, но в очень широких пределах, не может быть рассмотрен путем непосредственного применения нерелятивистского уравнения Шредингера.

Релятивистское обобщение упомянутой теории должно удовлетворять указанным ниже условиям, следующим в порядке возрастания степени точности теории.

¹⁾ Majorana E., Teoria relativistica di particelle con momento intrinseco arbitrario, Nuovo Cimento, 9, 335 (1932).

а) Теория позволяет изучать частицу, имеющую скорость, почти постоянную по величине и направлению, давая результаты, эквивалентные нерелятивистской теории, однако без необходимости перехода в определенную систему отсчета.

б) Теория позволяет изучать процессы, в которых скорость частицы под действием слабого внешнего поля меняется медленно, но в произвольно широких пределах.

в) Теория справедлива в самом общем случае независимо от неопределенности в скорости частицы.

Возможно, что точная теория, удовлетворяющая требованию „в“, будет несовместима с сохранением теперешней квантовой схемы. Теория электрона Дирака, продемонстрировавшая свою плодотворность для изучения таких существенно релятивистских явлений, как рассеяние жестких γ -лучей, очевидно неудовлетворительна с точки зрения п. „в“, как показывает известная трудность с переходом к состояниям с отрицательной энергией. Однако весьма вероятно, что теория, удовлетворяющая требованию „б“ и лишь частично требованию „в“, не сталкивается с существенными трудностями, причем ее физическое содержание может быть оправдано, по существу, в той же мере, как для уравнения Шредингера. Замечательный пример такого релятивистского обобщения как раз и дает теория Дирака, но поскольку эта теория применима лишь к частице с внутренним угловым моментом $s = 1/2$, я искал уравнения, аналогичные по форме уравнению Дирака, хотя и несколько более сложные, которые позволили бы рассматривать частицы с произвольным и, в частности, нулевым внутренним угловым моментом.

Волновое уравнение для материальной частицы в отсутствие поля, согласно Дираку, должно иметь вид

$$\left[\frac{W}{c} + (\alpha, p) - \beta mc \right] \psi = 0. \quad (1)$$

Уравнения этого типа представляют принципиальную трудность. Оператор β^{-1} должен фактически преобразовываться как временная компонента некоторого 4-вектора, и потому оператор β не может быть просто кратным единичной матрице, а должен иметь по меньшей мере два различных собственных значения, например β_1 и β_2 . Но отсюда следует, что энергия покоя частицы, которую можно найти из уравнения (1), полагая $P = 0$, должна иметь по меньшей мере два различных значения, т. е. $\beta_1 mc^2$ и $\beta_2 mc^2$. Согласно уравнению Дирака, возможные значения массы покоя, как известно, равны $+m$ и $-m$, откуда по релятивистской инвариантности следует, что энергия может

иметь два значения, различающихся знаком, для одного значения p : $W = \pm \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$.

Неопределенность в знаке энергии можно преодолеть, если использовать уравнения общего вида (1), но для волновой функции, имеющей бесконечно много компонент, которая *не может* быть разбита на конечные тензоры или спиноры.

1. Уравнение (1) можно вывести из вариационного принципа:

$$\delta \int \bar{\psi} \left[\frac{W}{c} + (\alpha, p) - \beta mc \right] \psi dV dt = 0. \quad (2)$$

Релятивистская инвариантность требует, в частности, чтобы форма $\bar{\psi}\beta\psi$ была инвариантна.

Если потребовать теперь, чтобы энергия покоя всегда была положительной, то все собственные значения β должны быть положительными, а форма $\bar{\psi}\beta\psi$ — положительно определенной. Тогда можно посредством *неунитарного* преобразования $\psi \rightarrow \varphi$ привести эту форму к единичной:

$$\bar{\psi}\beta\psi = \bar{\varphi}\varphi. \quad (3)$$

Подставляя в (2) выражение для ψ через φ , получаем

$$\delta \int \bar{\varphi} \left[\gamma_0 \frac{W}{c} + (\gamma, p) - mc \right] \varphi dV dt = 0, \quad (4)$$

откуда следует уравнение, эквивалентное (1),

$$\left[\gamma_0 \frac{W}{c} + (\gamma, p) - mc \right] \varphi = 0. \quad (5)$$

Теперь нам нужно найти закон преобразования φ под действием лоренцевых поворотов и такой вид матриц $\gamma_0, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$, чтобы соблюдалась релятивистская инвариантность вариационного принципа, и, следовательно, подинтегральная функция в (4) была инвариантна.

Приступая к установлению закона преобразования φ , заметим прежде всего, что инвариантность формы $\bar{\varphi}\varphi$ означает, что мы должны рассматривать только унитарные преобразования. Кроме того, чтобы избежать лишних усложнений, рассмотрим закон преобразования только для бесконечно малых преобразований Лоренца, интегрированием которых можно получить любое конечное преобразование. Введем инфинитезимальные

преобразования по переменным ct, x, y, z :

$$\begin{aligned}
 S_x &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; & S_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
 S_z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
 T_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & T_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
 T_z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};
 \end{aligned} \tag{6}$$

и обозначим

$$\begin{aligned}
 a_x &= iS_x; & a_y &= iS_y; & a_z &= iS_z; \\
 b_x &= -iT_x; & b_y &= -iT_y; & b_z &= -iT_z.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Операторы a и b должны быть эрмитовыми в унитарном представлении (справедливо и обратное утверждение); кроме того, поскольку инфинитезимальные преобразования должны быть интегрируемыми, то эти операторы должны удовлетворять следующим перестановочным соотношениям, которые можно вывести из формул (6) и (7):

$$\begin{aligned}
 (a_x, a_y) &= ia_z; & (a_x, b_x) &= 0; & (a_x, b_y) &= ib_z; \\
 (a_x, b_z) &= -ib_y; & (b_x, b_y) &= -ib_z.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Другие соотношения можно получить циклической перестановкой переменных x, y, z .

Простейшее решение системы (8) в эрмитовых операторах дают следующие бесконечные матрицы, в которых элементы нумеруются двумя индексами: j и m , причем следует различать две возможности: $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$; $m = j, j-1, \dots, -j$;

или же $j = 0, 1, 2, \dots$; $m = j, j - 1, \dots, -j$:

$$(j, m | a_x - ia_y | j, m + 1) = \sqrt{(j + m + 1)(j - m)},$$

$$(j, m | a_x + ia_y | j, m - 1) = \sqrt{(j + m)(j - m + 1)},$$

$$(j, m | a_z | j, m) = m,$$

$$(j, m | b_x - ib_y | j + 1, m + 1) = -\frac{1}{2} \sqrt{(j + m + 1)(j + m + 2)},$$

$$(j, m | b_x - ib_y | j - 1, m + 1) = \frac{1}{2} \sqrt{(j - m)(j - m - 1)}, \quad (\varepsilon)$$

$$(j, m | b_x + ib_y | j + 1, m - 1) = \frac{1}{2} \sqrt{(j - m + 1)(j - m + 2)},$$

$$(j, m | b_x + ib_y | j - 1, m - 1) = -\frac{1}{2} \sqrt{(j + m)(j + m + 1)},$$

$$(j, m | b_z | j + 1, m) = \frac{1}{2} \sqrt{(j + m + 1)(j - m + 1)},$$

$$(j, m | b_z | j - 1, m) = \frac{1}{2} \sqrt{(j + m)(j - m)}.$$

Принимая, что при инверсии относительно начала отсчета компонента $\varphi_{j,m}$ в зависимости от j попеременно не меняется или меняет знак, приходим к выводу, что \mathbf{b} есть полярный вектор, в то время как \mathbf{a} — аксиальный вектор.

Будем называть величину, на которую действуют операторы a и b , бесконечным тензором или бесконечным спинором индекса нуль в соответствии с тем, принимает j целые или полуцелые значения. Термин „индекса нуль“ означает, что инвариант

$$Z = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (10)$$

равен нулю.

Более общие бесконечные спиноры или тензоры могут быть определены для любой величины Z . Спиноры могут быть получены следующим простым образом. Рассматривается общее решение уравнения Дирака без внешнего поля и связанное с ним релятивистское преобразование

$$\psi(q, t) \rightarrow \psi'(q, t). \quad (11)$$

Тогда преобразование

$$\psi(q, 0) \rightarrow \psi'(q, 0) \quad (12)$$

является унитарным, и если вместо произвольной функции $\psi(q, 0)$ мы будем рассматривать только функции, отвечающие определенному собственному значению z_0 оператора (10), который обладает непрерывным спектром, простирающимся от $-\infty$ до $+\infty$, то мы найдем функции, которые преобразуются по формуле (12) как бесконечные спиноры, каждый из которых входит ровно два раза.

Операторы a_x и b_x имеют в представлении (12) вид

$$a_x = \frac{2\pi}{h} (yp_z - zp_y) + \frac{1}{2} \sigma_x, \quad b_x = \frac{2\pi}{h} x \frac{H}{c} + \frac{i}{2} \alpha_x;$$

аналогичные выражения можно записать для операторов a_y, a_z, b_y, b_z .

2. Теперь следует определить операторы $\gamma_0, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ так, чтобы форма (4) была инвариантной. Поскольку мы рассматриваем только унитарные преобразования, данные операторы преобразуются как эрмитовы формы, с которыми они связаны, и, следовательно, в силу инвариантности подынтегральной функции в уравнении (4) необходимо, чтобы они составляли ковариантный вектор ($\gamma_0, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z \sim ct, -x, -y, -z$).

Формы $\tilde{\varphi}\gamma_0\varphi$ и $-\tilde{\varphi}\gamma\varphi$, очевидно, интерпретируются как плотности заряда и тока. Операторы γ должны удовлетворять перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} (\gamma_0, a_x) &= 0, & (\gamma_0, b_x) &= i\gamma_x, \\ (\gamma_x, a_x) &= 0, & (\gamma_x, a_y) &= i\gamma_z, \\ (\gamma_x, a_z) &= -i\gamma_y, & (\gamma_x, b_x) &= i\gamma_0 \\ (\gamma_x, b_y) &= 0, & (\gamma_x, b_z) &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

а также другим соотношениям, которые можно получить циклической перестановкой x, y, z . Как легко показать, перестановочные соотношения (13) определяют матрицы $\gamma_0, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ с точностью до постоянного множителя. В результате получаем

$$\gamma_0 = j + \frac{1}{2},$$

$$(j, m | \gamma_x - i\gamma_y | j + 1, m + 1) = -\frac{i}{2} \sqrt{(j + m + 1)(j + m + 2)},$$

$$(j, m | \gamma_x - i\gamma_y | j - 1, m + 1) = -\frac{i}{2} \sqrt{(j - m)(j - m - 1)},$$

$$(j, m | \gamma_x + i\gamma_y | j + 1, m - 1) = \frac{i}{2} \sqrt{(j - m + 1)(j - m + 2)}, \quad (14)$$

$$(j, m | \gamma_x + i\gamma_y | j - 1, m - 1) = \frac{i}{2} \sqrt{(j + m)(j + m - 1)},$$

$$(j, m | \gamma_z | j + 1, m) = \frac{i}{2} \sqrt{(j + m + 1)(j - m + 1)},$$

$$(j, m | \gamma_z | j - 1, m) = -\frac{i}{2} \sqrt{(j + m)(j - m)}.$$

Остальные компоненты матриц $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ равны нулю. Заметим, что эрмитова форма $\tilde{\varphi}\gamma_0\varphi$ является положительно определенной, как того и требует физическая интерпретация,

Теперь мы хотим перейти от уравнений, записанных в форме (15), к уравнениям вида (1). Для этого достаточно положить

$$\varphi_{j, m} = \left(j + \frac{1}{2}\right)^{-1/2} \psi_{j, m}, \quad (15)$$

так как при этом форма, связанная с γ_0 , приводится к единичной. Таким образом, мы получаем уравнения в желаемой форме:

$$\left[\frac{W}{c} + (\alpha, p) - \beta mc\right] \psi = 0, \quad (16)$$

в которых $\beta = (j + 1/2)^{-1}$, а отличные от нуля компоненты α_x , α_y , α_z определяются выражениями

$$\begin{aligned} (j, m | \alpha_x - i\alpha_y | j + 1, m + 1) &= -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j + m + 1)(j + m + 2)}{(j + 1/2)(j + 3/2)}}, \\ (j, m | \alpha_x - i\alpha_y | j - 1, m + 1) &= -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j - m)(j - m - 1)}{(j - 1/2)(j + 1/2)}}, \\ (j, m | \alpha_x + i\alpha_y | j + 1, m - 1) &= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j - m + 1)(j - m + 2)}{(j + 1/2)(j + 3/2)}}, \\ (j, m | \alpha_x + i\alpha_y | j - 1, m - 1) &= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j + m)(j + m - 1)}{(j - 1/2)(j + 1/2)}}, \\ (j, m | \alpha_z | j + 1, m) &= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j + m + 1)(j - m + 1)}{(j + 1/2)(j + 3/2)}}, \\ (j, m | \alpha_z | j - 1, m) &= -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{(j + m)(j - m)}{(j + 1/2)(j + 1/2)}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Все решения уравнения (16), отвечающие плоской волне с положительной массой, могут быть найдены путем релятивистского преобразования из волны с нулевым импульсом. Для этой волны энергия равна

$$W_0 = \frac{mc^2}{j + 1/2}. \quad (18)$$

Таким образом, для полуцелых j имеем состояния, отвечающие значениям массы m , $1/2 m$, $1/3 m$, ..., а для целых j : $2m$, $2/3 m$, $2/5 m$, ...

Следует отметить, что частицы с различной массой имеют разные внутренние угловые моменты, причем внутренний угловой момент имеет определенное значение только в системе, в которой частица покоится.

Если принять, что совокупность состояний, отвечающих массе покоя $m/(s + 1/2)$, реализуется в природе, причем все остальные состояния не имеют смысла, то получим инвариантную теорию

частицы с угловым моментом s , которую можно считать удовлетворительной в отсутствие поля. Без труда можно проверить, что при медленном движении для частицы с внутренним моментом s заметно отличается от нуля только функция ψ_{sm} , подчиняющаяся уравнению Шредингера с массой $M = m/(s + 1/2)$, в то время как функции $\psi_{s+1,m}$ и $\psi_{s-1,m}$ порядка v/c , функции $\psi_{s+2,m}$ и $\psi_{s-2,m}$ порядка v^2/c^2 и т. д.

Так мы получаем только два волновых уравнения, одно из которых пригодно для описания частицы с нецелым угловым моментом, а другое — для частицы с нулевым или целым моментом.

Кроме состояний, имеющих положительные значения массы, имеются и другие, в которых энергия связана с импульсом соотношением вида

$$W = \pm \sqrt{c^2 p^2 - k^2 c^4} \quad (19)$$

и которые существуют не для всех положительных k , а только при $p \geq kc$. Эти состояния можно рассматривать как состояния с мнимой массой ik .

Функции „спина“, отвечающие плоской волне с $p \neq 0$, имеют особенно простой вид в случае частицы без внутреннего момента, если $p_x = p_y = 0$, $p_z = p$. При этом находим с точностью до нормировочного множителя

$$\begin{cases} \psi_{j,0} = \sqrt{j + \frac{1}{2}} \left(i \frac{\eta - j}{\epsilon} \right)^j & (j = 0, 1, 2, \dots), \\ \psi_{j,m} = 0 & \text{при } m \neq 0, \end{cases} \quad (20)$$

где

$$\epsilon = \frac{p}{Mc}, \quad \eta = \frac{\sqrt{M^2 c^2 + p^2}}{Mc} \quad (21)$$

и $M = 2m$ — масса покоя.

3. Рассмотрим теперь кратко введение в уравнение (16) электромагнитного поля.

Переход от уравнений без поля к уравнениям с внешним полем производится наиболее простым образом путем замены W и \mathbf{p} на $W - e\phi$, $\mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}$, где e — заряд частицы, а ϕ и \mathbf{A} — скалярный и векторный потенциалы. Но имеется и другая возможность. Можно, например, добавить инвариантные члены, аналогичные тем, которые были введены Паули¹⁾ в теории магнитного нейтрона, и пропорциональные напряженности поля вместо электромагнитных потенциалов, так чтобы не нарушить инвариантность уравнений, связанную с неопределенностью потенциалов.

¹⁾ См. Oppenheimer J. R., Phys. Rev., 41, 763 (1932).

Такой прием позволяет приписать частице с отличным от нуля угловым моментом любой магнитный момент. В случае электрона, например, посредством простой подстановки $W, \mathbf{p} \rightarrow W - e\phi, \mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}$ получается магнитный момент $+1/2\mu_0$ вместо $-\mu_0$.

Если захотеть привести нашу теорию к теории электронов, которая согласуется наилучшим образом с экспериментальными данными, следует изменить магнитный момент дополнительными членами. Но полученная таким образом теория электронов является бесполезным дублированием теории Дирака, которая остается более предпочтительной благодаря своей простоте и согласию с экспериментом. Преимуществом настоящей теории, напротив, является ее применимость к частицам с угловым моментом, отличным от $1/2$.

Уравнение с полем и добавочными членами, изменяющими внутренний магнитный момент, имеет вид

$$\left[\left(\frac{W}{c} - \frac{e}{c}\phi \right) + \left(\mathbf{a}, \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) \beta mc + \lambda(\mathbf{a}', \mathbf{H}) + \lambda(\mathbf{b}', \mathbf{E}) \right] \psi = 0, \quad (22)$$

где $\mathbf{a}' = (a'_x, a'_y, a'_z)$, $\mathbf{b}' = (b'_x, b'_y, b'_z)$, а \mathbf{E} и \mathbf{H} обозначают электрическое и магнитное поля.

Матрица a'_x получается из a_x (9) с помощью правила

$$(j, m | a'_x | j', m') = \frac{1}{V(j+1/2)(j'+1/2)} (j, m | a_x | j', m'), \quad (23)$$

и аналогично для $a'_y, a'_z, b'_x, b'_y, b'_z$.

Для частицы с внутренним угловым моментом $s = 1/2$ следует положить $\lambda = (2/c)\mu$, где μ — магнитный момент, естественно возникающий при введении электромагнитных потенциалов в волновое уравнение. Эта величина в нашем случае, как и следует, равна $-1/2eh/4\pi mc$. Для частицы без внутреннего углового момента естественно положить $\lambda = 0$.

Что касается практического решения волнового уравнения, напомним, что при медленном движении только функции $\psi_{j,m}$ являются конечными и удовлетворяют уравнению Шредингера, где j — внутренний угловой момент в единицах $\hbar/2\pi$.

Для частицы без углового момента, например, единственной существенной компонентой является ψ_{00} , в то время как ψ_{1m} порядка v/c , где v — скорость частицы, ψ_{2m} порядка v^2/c^2 и т. д. Так методом последовательных приближений можно исключить малые компоненты ψ -функции и, в частности, получить простое выражение для релятивистской поправки первого порядка.

Я весьма признателен проф. Э. Ферми за обсуждение настоящей теории.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора	5
---------------------------------	---

Л. МИШЕЛЬ

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ГРУПП В КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ

Введение	7
--------------------	---

1. Ковариантность в квантовой теории и математические методы ее описания	12
--	----

1.1. Что такое квантовая механика?	12
1.2. Инвариантность относительно группы преобразований	14
1.3. G -векторные пространства	17
1.4. Унитарная группа $U(n)$ и группа перестановок $S(n)$	22
1.5. Еще об алгебрах и тензорных операторах. Псевдокорни группы $SU(n)$	26
1.6. Еще о группе $SU(2)$ и ее тензорных операторах	30

2. Атомная и молекулярная физика	35
--	----

2.1. Теория групп и атомная физика	35
2.2. Принцип соответствия	35
2.3. Частица с массой m в сферически симметричном потенциале	38
2.4. Атом водорода	40
2.5. Атом гелия	47
2.6. Принцип Паули. Спин электрона	49
2.7. Оболочечная структура атома. Периодическая таблица	51
2.8. Атомные состояния в данной оболочке. Спин-орбитальная связь	56
2.9. Спин и эвклидова или галилеева инвариантность	58
2.10. Молекулы	59
2.11. Измерение спина и определение статистики ядер путем исследования спектра двухатомных молекул	61

3. Ядерная физика. Сильное и слабое взаимодействия	64
--	----

3.1. Совокупность известных ядер	64
3.2. Изоспин	67
3.3. Инвариантность относительно группы $U(4)$	70

3.4. Оболочечная модель	73
3.5. Адроны	76
3.6. Другие частицы и другие взаимодействия	80
5. Внутренние симметрии адронов	83
5.1. $SU(3)$ -симметрия	83
5.2. Геометрия $SU(3)$ -октета	88
5.3. $SU(3)$ -симметрия и электромагнитное и слабое взаимодействие	91
5.4. Критические орбиты G -инвариантной функции на многообразии M	95
5.5. Симметрия $SU(3) \times SU(3)$	99
5.6. $SU(6)$, кварки, алгебра токов, „бутстрэп“ и т. д.	103
Литература	108

М. ШААФ

**РЕДУКЦИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ НЕПРИВОДИМЫХ
УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ**

Введение	111
1. Неприводимые унитарные представления группы Пуанкаре	114
1.1. Построение неприводимых унитарных представлений группы \tilde{P}	114
1.2. Неприводимые унитарные представления группы $SU(2)$	118
1.3. Неприводимые унитарные представления группы $SU(1, 1)$	119
1.4. Неприводимые унитарные представления группы $E(2)$	131
1.5. Неприводимые унитарные представления группы $SL(2, C)$	133
2. Матричные элементы неприводимых унитарных представлений малых групп и теоремы разложения для квадратично интегрируемых функций на классах смежности малых групп	135
2.1. Неприводимые унитарные представления групп $H_1 = SU(2) \cap SU(1, 1)$ и $H_2 = SU(1, 1) \cap SL(2, R)$	137
2.2. Матричные элементы неприводимых унитарных представлений группы $SU(2)$ в базисе, связанном с подгруппой H_1	138
2.3. Матричные элементы неприводимых унитарных представлений группы $SU(1, 1)$ в базисе, связанном с подгруппой H_1	140
2.4. Матричные элементы унитарных неприводимых представлений группы $E(2)$ в базисе, связанном с подгруппой H_1	145
2.5. Матричные элементы неприводимых унитарных представлений группы $SU(1, 1)$ в базисе, связанном с подгруппой H_2	146
2.6. Условия ортогональности и полноты для неприводимых унитарных представлений группы $SU(2)$, $SU(1, 1)$ и $E(2)$	163
2.7. Разложения квадратично интегрируемых функций на пространствах классов смежности $SU(2)/H_1$, $SU(1, 1)/H_1$ и $E(2)/H_1$	185
3. Редукция произведения двух неприводимых унитарных представлений группы \tilde{P}	191
3.1. Разложение на неприводимые представления произведения	

представлений $U^{\rho_1, \rho_1} \otimes U^{\rho_2, \rho_2}$ при $\rho_1 \neq 0 \neq \rho_2$	192
3.2. Обобщенные коэффициенты Клебша — Гордана для разложения прямого произведения представлений $U^{\rho_1, \rho_1} \otimes U^{\rho_2, \rho_2}$ при $\rho \neq 0 \neq \rho_2$	206
3.3. Замечания о редукции прямого произведения представлений группы $\tilde{P}, U^{\rho_1, \rho_1} \otimes U^{\rho_2, \rho_2}$	229
Литература	237

Э. МАЙОРАНА

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ ЧАСТИЦЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ВНУТРЕННИМ УГЛОВЫМ МОМЕНТОМ	239
---	-----