ИЗДАТЕЛЬСТВО • МИР •

GIAN-CARLO ROTA, *Editor*

ENCYCLOPEDIA OF MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS

Volume 4

Section: Special Functions
Richard Askey, *Section Editor*

Symmetry and Separation of Variables

Willard Miller, Jr.
School of Mathematics
University of Minnesota
Minneapolis, Minnesota

With a Foreword by
Richard Askey
University of Wisconsin

1977

Addison-Wesley Publishing Company
Advanced Book Program
Reading, Massachusetts

London · Amsterdam · Don Mills, Ontario · Sydney · Tokyo

У. Миллер, мл.

СИММЕТРИЯ И РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Перевод с английского
Г. П. Бабенко

под редакцией
К. И. Бабенко

Издательство «Мир»
Москва 1981

УДК 517.9

Монография по применению метода разделения переменных в уравнениях в частных производных и его связи с теорией групп (связи между алгеброй Ли симметрий уравнения, системами координат, в которой уравнение допускает разделение переменных, и свойствами получающихся при этом специальных функций), принадлежащая перу американского математика. Найдены все решения с разделенными переменными ряда классических уравнений математической физики (уравнения Лапласа, Гельмгольца, Клейна — Гордона, Шредингера), приведен большой справочный материал по специальным функциям.

Для математиков, физиков, инженеров, аспирантов и студентов.

Редакция литературы по математическим наукам

1702070000

$\text{М}\frac{20203\text{-}026}{041(01)\text{-}81}$ 26-81, ч. 1

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В прикладных областях исследователи часто имеют дело с конкретными дифференциальными уравнениями, допускающими нетривиальную группу преобразований. Многие важные классы решений уравнений гидродинамики, теории упругости, магнитной гидродинамики и т. п. были получены с использованием групповых свойств этих уравнений. Это решения типа простых волн в гидродинамике, типа бегущих волн, так называемые автомодельные решения и т. д.

С другой стороны, метод разделения переменных, широко применяемый для отыскания частных решений линейного дифференциального уравнения, самым тесным образом связан с групповыми свойствами уравнения. Хорошо известно, что очень многие классические специальные функции первоначально появились при решении волнового уравнения и уравнения Лапласа методом разделения переменных. В связи со сказанным естественно возникает задача изучения дифференциальных уравнений с групповой точки зрения. Такое изучение является в известном смысле вынужденным ввиду следующего обстоятельства. По мере развития самой математики и по мере увеличения числа тех областей естествознания и техники, где математика находит широкие приложения, росло число специальных функций и различных относящихся к ним фактов. В то же время происходила резкая переоценка роли отдельных классов функций, а это приводило к тому, что целые поколения математиков-прикладников были начисто лишены необходимых знаний в отдельных областях теории специальных функций. Учитывая, что для непосвященного читателя теория специальных функций представляется кошмарным набором сложных формул, возникает большое желание навести порядок во всем этом таком сложном, но и таком чрезвычайно важном разделе математики. К счастью, эта задача не представляется столь уж безнадежной, и здесь прежде всего могут помочь методы теории групп и алгебр Ли и их представлений.

В предлагаемой монографии развит один из возможных подходов к вопросу о разделении переменных в ряде классических уравнений математической физики, основанный на изучении алгебры Ли симметрий уравнения и на теории представлений этой алгебры Ли. В результате не только находятся все системы координат, в которых уравнение допускает разделение переменных, но и получается целый ряд соотношений из теории специальных функций. В частности, таким образом получаются различного рода производящие функции для различных классов специальных функций, теоремы сложения и т. п. Автор рассмотрел довольно большой набор специальных функций, включающий и функции, не принадлежащие к гипергеометрическому типу. Нам представляется, что специалисту по прикладной математике, использующему специальные функции, будет полезно владение изложенными в данной монографии алгебраическими навыками работы с ними, равно как и умение работать со специальными функциями с помощью ЭВМ. Но это уже иной аспект теории специальных функций.

Монография входит в известную «Энциклопедию математики и ее приложений», которая выпускается издательством «Эддисон — Уэсли» под общей редакцией Дж.-К. Роты [1]), и открывает серию, посвященную специальным функциям. Цели этого собрания книг и его структура описаны в следующих ниже предисловиях редактора Энциклопедии и редактора серии.

К. И. Бабенко

---

[1]) Переводы ряда монографий, входящих в эту энциклопедию, выпускаются издательствами «Наука» и «Мир». Готовятся к печати следующие монографии: Сантало Л. Интегральная геометрия и геометрические вероятности («Наука»), Эндрюс Г. Теория разбиений («Наука») и Минк X. Перманенты («Мир»).

ОТ РЕДАКТОРА ЭНЦИКЛОПЕДИИ

Математика состоит главным образом из фактов, которые можно представить и описать подобно любому явлению природы. Эти факты, иногда сформулированные явно в виде теорем, иногда упоминаемые по ходу доказательств, составляют основную часть приложений математики и будут существовать всегда, несмотря на изменчивость направлений и интересов в данной науке.

Цель настоящей Энциклопедии — постараться осветить все области математики. От каждого автора требуется ясное и четкое изложение материала, доступное для понимания широкого круга читателей, а также подробная библиография. Тома Энциклопедии объединяются в серии, которые соответствуют различным областям современной математики; порядок выхода книг в отдельных сериях не устанавливается. Число томов и серий время от времени будет пересматриваться и корректироваться.

Мы надеемся, что наше смелое предприятие будет способствовать еще более широкому применению математики не только там, где без нее нельзя обойтись, но даже в тех областях, где ее следовало бы применять и где из-за недостатка информации это пока почти не делается.

Всем, кто хоть раз пытался решить какое-либо дифференциальное уравнение, известно, что такое разделение переменных. Обычно этот метод представляется как множество всяческих ловких приемов, лежащих на грани математики.

Профессор Миллер в своей монографии дал первое систематическое изложение этого метода; в ней раскрыта тесная связь процесса разделения переменных с одним из основных разделов современной математики и математической физики, а именно с теорией алгебр Ли.

Этот том открывает серию, посвященную теории специальных функций, с которыми математикам приходится сталкиваться в приложениях.

Джан-Карло Рота

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА СЕРИИ

Этот том открывает серию книг, авторы которых пытаются показать, как и почему во многих приложениях математики появляются специальные функции. Элементарные трансцендентные функции, такие, как экспоненциальная функция, ее обратная (логарифмическая) и тригонометрические функции, входят в число рабочих инструментов не только математиков, но и большинства специалистов, использующих математику в своей работе. Было время, когда каждый математик в совершенстве знал теорию высших трансцендентных функций. Так, например, во второй половине девятнадцатого столетия появилось поразительное количество книг, посвященных эллиптическим функциям, а на выпускных экзаменах в университетах постоянно предлагались сложные задачи на доказательство различных фактов, относящихся к функциям Бесселя и функциям Лежандра. Теперь эти функции и другие исключительно полезные специальные функции известны не столь широкому кругу специалистов; это привело к тому, что возникающие в приложениях важные специальные функции вот уже в течение двадцати пяти с лишним лет изучаются людьми, не подозревающими, что многие открытые ими факты были установлены около ста лет тому назад,

За последние сорок лет нечто подобное произошло с так называемыми $(3-j)$-символами. С этими функциями приходится сталкиваться при исследовании разложения прямого произведения двух неприводимых представлений группы $SU(2)$. Поскольку гипергеометрические ряды известны не столь широко, как следовало бы, только недавно было обнаружено, что одно из соотношений ортогональности для $(3-j)$-символов является не чем иным, как соотношением ортогональности для некоторого семейства многочленов, полученным Чебышевым еще в 1875 г. Для этих многочленов Чебышев предложил несколько полезных формул, до сих пор не появившихся в физической литературе, к которой относится большинство работ, посвященных $(3-j)$-символам. Подобным же образом соотношение симметрии для $(3-j)$-символов, полученное Регге в 1958 г., было предложено в 1923 г. Уипплом, а еще ранее — в 1879 г. — Томэ. Первые операторы симметрии для этих функций были найдены в 1836 г. Куммером. Можно было бы не беспокоиться о том, что старые результаты забываются, если бы получать такие результаты было легко и просто и если бы это было по плечу каждому, кто в них нуждается. Однако довольно часто дело обстоит совсем иначе, а для соотношения симметрии Регге это можно утверждать с полной уверенностью. В период с 1930 по 1958 г. многие специалисты занимались изучением $(3-j)$-символов, но никто из них не смог получить эту симметрию.

От недостатка обмена информацией между математиками и специалистами, применяющими математику в своей работе, страдают обе стороны, что можно показать на простом примере. В 1942 г. Рака опубликовал важное соотношение ортогональности для функций, которые мы теперь называем $(6-j)$-символами или коэффициентами Рака. Он также установил важное представление для этих функций в виде однократной суммы, обычно же эти функции представляются в виде четырехкратных сумм. Подставляя представление в виде однократной суммы в соотношении ортогональности Рака и применяя к $(6-j)$-символу формулу преобразования Уиппла (кстати, Рака переоткрыл эту же формулу), можно получить новое семейство ортогональных многочленов, совершенно не упоминаемое в математической литературе. В действительности положение было намного хуже: это семейство ортогональных многочленов не только не было открыто, но имелся ряд теорем, которые, казалось бы, утверждали, что существующее множество ортогональных многочленов от одной переменной является полным множеством всех ортогональных многочленов от одной переменной, которые можно представить в явном виде. Такое утверждение, как показал Рака на примере предложенных им многочленов, было ошибочным.

Этот случай должен послужить хорошим уроком, и из него следует сделать очень важный вывод: для того чтобы математика не превратилась в разрозненный набор отдельных узких областей, необходимы тесные контакты между специалистами по ее различным разделам. Цель настоящей серии книг — попытаться показать, как различные разделы математики связаны между собой и как эту связь можно использовать для решения проблем, представляющих интерес для специалистов в различных областях.

В оставшейся части этого предисловия мы дадим краткий обзор современных взглядов на специальные функции. Поскольку имеется довольно много важных специальных функций, мы в своем обзоре будем рассматривать специальные функции примерно в том порядке, в котором они были открыты. Многих, возможно, удивит тот факт, что современный взгляд на некоторые вопросы почти не претерпел никаких изменений с того момента, когда были получены первые серьезные результаты. Мы придерживаемся современного стиля изложения, но большинство идей, которыми мы пользуемся, было предложено давным-давно.

В приложениях наиболее важными специальными функциями оказываются гипергеометрические функции. Обобщенный гипергеометрический ряд имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

причем a_{n+1}/a_n — рациональная функция от n. Эта рациональная функция, как правило, представляется в виде произведения

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+a_1)(n+a_2)\ldots(n+a_p)}{(n+b_1)(n+b_2)\ldots(n+b_q)}\,\frac{x}{n+1},$$

так что

$$a_n=\frac{(a_1)_n\ldots(a_p)_n}{(b_1)_n\ldots(b_q)_n}\,\frac{x^n}{n!}.$$

Сдвинутый факториал $(a)_n$ определяется соотношениями

$$(a)_n=a(a+1)\ldots(a+n-1),\qquad n=1,\ 2,\ \ldots,\qquad (a)_0=1,$$

и поэтому $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ можно записать в следующем виде:

$${}_pF_q\left(\begin{matrix}a_1,\ \ldots,\ a_p\\ b_1,\ \ldots,\ b_q\end{matrix}\,\middle|\,x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n\ldots(a_p)_n}{(b_1)_n\ldots(b_q)_n}\,\frac{x^n}{n!}.$$

Этот ряд сходится для всех комплексных x при $p\leqslant q$ и для $|x|<1$ при $p=q+1$. Имеют место следующие частные случаи:

$$\exp(x)={}_0F_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

$$(1-x)^{-a}={}_1F_0\left(\begin{matrix}a\\ -\end{matrix}\,\middle|\,x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}x_n\qquad(|x|<1),$$

$$\sin x=x\,{}_0F_1\left(\begin{matrix}-\\ {}^3/_2\end{matrix}\,\middle|\,\frac{-x^2}{4}\right),$$

$$\cos x={}_0F_1\left(\begin{matrix}-\\ {}^1/_2\end{matrix}\,\middle|\,\frac{-x^2}{4}\right),$$

$$\ln(1+x) = x\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1, & 1\\ & 2\end{matrix}\middle| -x\right) \qquad (|x| < 1),$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = x\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}{}^1/_2, & 1\\ & {}^3/_2\end{matrix}\middle| -x^2\right) \qquad (|x| < 1),$$

$$\arcsin x = x\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}{}^1/_2, & {}^1/_2\\ & {}^3/_2\end{matrix}\middle| x^2\right) \qquad (|x| < 1),$$

$$\cos \pi x = {}_2F_1\left(\begin{matrix}x, & -x\\ & {}^1/_2\end{matrix}\middle| 1\right).$$

Последняя формула имеет особенное значение, так как она наводит на мысль о том, что параметры, входящие в гипергеометрические ряды, не просто дают нам возможность отличать один ряд от другого, а могут играть более важную роль в изучении гипергеометрических рядов. Первым понял это, вероятно, Гаусс. Мы еще вернемся к результатам Гаусса, но сначала познакомимся с установленными Валлисом и Эйлером более ранними результатами, которые помогут нам понять, почему последняя формула справедлива.

Когда рассматривается биномиальное разложение, приходится сталкиваться с факториалом $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Наиболее простым обобщением $n!$ является сдвинутый факториал $(a)_n$, определенный нами выше. Ясно, что $n! = (1)_n$, но это не дает ответа на интересный вопрос, что же такое ${}^1/_2!$? На этот вопрос ответил Эйлер после того, как он ввел функцию $\Gamma(x)$. Первоначальное выражение, предложенное Эйлером, имело вид бесконечного произведения, но он дал и интегральное представление эквивалентное следующему:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

Вывод свойств функции $\Gamma(x)$ всегда начинается с исследования этого интеграла, но следует сказать несколько слов в защиту произведения Эйлера и других формул, определяющих гамма-функцию сразу для всех x, а не только для тех значений x, для которых $\operatorname{Re} x > 0$, как в указанном выше интеграле. Одна из таких формул имеет вид

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n},$$

где

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right).$$

Другая формула, полученная Эйлером, но обычно приписываемая Гауссу, записывается следующим образом:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x)_n}{(1)_n} n^{1-x}.$$

Применяя гамма-функцию, Эйлер вычислил интеграл, определяющий бета-функцию:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

и получил

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Легко видеть, что отсюда вытекает соотношение $\Gamma(^1/_2) = \sqrt{\pi}$ И действительно, первоначальная формула Эйлера для гамма-функции сводится при $x = {}^1/_2$ (после некоторых простых алгебраических преобразований) к бесконечному произведению Валлиса для π.

В девятнадцатом веке было предложено много различных интегральных представлений для функции $\Gamma(x)$, а Ганкель[1]) доказал, что эта функция не может удовлетворять никакому дифференциальному уравнению с алгебраическими коэффициентами. Она удовлетворяет разностному уравнению $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, но это условие не является достаточно строгим для того, чтобы определить $\Gamma(x)$. Естественное условие, в силу которого мы имеем единственное решение и которое было установлено Бором и Моллерупом, состоит в следующем: функция $\ln\Gamma(x)$ является выпуклой при $x > 0$. Современное поколение математиков проявляет большой интерес к структурным условиям, и данная теорема является прекрасным образцом результатов, которым современные математики дают высокие оценки. Теорема эта очень красива и полезна, но не следует забывать, что истинная причина, почему мы проявляем повышенный интерес к гамма-функции и детально изучаем ее, заключается в том, что она чрезвычайно полезна. Она встречается столь часто, что мы просто вынуждены заниматься ею. Это как раз один из многих примеров того, как математическая эстетика и полезность совместно указывают нам путь исследования. Почему это происходит, все еще остается тайной.

Изучение факториала и гамма-функции привело к развитию целого ряда основных математических идей, нашедших применение в различных областях науки. Одним из наиболее полез-

---

[1]) В отечественной литературе эта теорема называется теоремой Гёльдера. — *Прим. ред.*

ных достижений явилось введение понятия асимптотического разложения. Стирлинг нашел способ вычисления $n!$ при больших n. Полученный им ряд не сходится, но при помощи этого ряда можно получить очень точные значения $n!$. Используя формулу Эйлера

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x},$$

можно получить аналитическое продолжение гамма-функции из области $\operatorname{Re} x>0$ в область $\operatorname{Re} x<1$, $x\neq 0, -1, \ldots$. Та же формула вместе с одним из бесконечных произведений для $\Gamma(x)$ дает произведение Эйлера

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).$$

Это произведение, а также произведение, полученное нами выше для $1/\Gamma(x)$, и некоторые произведения для эллиптических функций и тэта-функций, о которых речь пойдет ниже, привели Вейерштрасса к его теореме о разложении целых функций в произведение, а логарифмическая производная от произведения Вейерштрасса привели Миттаг-Лефлера к его теореме разложения для мероморфных функций.

Вернемся к гипергеометрическому ряду. Гаусс показал, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}={}_2F_1\left(\begin{matrix}a, & b\\ & c\end{matrix}\middle|\,1\right)=\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)},\quad \operatorname{Re}(c-a-b)>0.$$

При $c={}^1/_2$, $a=x$, $b=-x$ эта формула принимает вид

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}x, & -x\\ & {}^1/_2\end{matrix}\middle|\,1\right)=\frac{[\Gamma({}^1/_2)]^2}{\Gamma({}^1/_2-x)\,\Gamma({}^1/_2+x)}=\sin\pi({}^1/_2+x)=\cos\pi x.$$

Первым функцию ${}_2F_1\left(\begin{matrix}a, & b\\ & c\end{matrix}\middle|\,x\right)$ в общем случае изучил Эйлер. Он получил дифференциальное уравнение второго порядка, которому эта функция удовлетворяет, дал формулу преобразования

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}a, & b\\ & c\end{matrix}\middle|\,x\right)=(1-x)^{c-a-b}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}c-a, & c-b\\ & c\end{matrix}\middle|\,x\right)$$

и интегральное представление

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}a, & b\\ & c\end{matrix}\middle|\,x\right)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}\int_0 (1-xt)^{-a}\,t^{b-1}\,(1-t)^{c-b-1}\,dt.$$

Пфафф, занимаясь посмертным изданием работ Эйлера, нашел еще две формулы преобразований. Он получил обе формулы для случая, когда ряд конечен, но одна формула легко переносится на случай бесконечного ряда. Это следующие формулы:

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a,\ b \\ c \end{matrix}\middle| x\right) = (1-x)^{-a}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} a,\ c-b \\ c \end{matrix}\middle| \frac{x}{x-1}\right) $$

и

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n,\ b \\ c \end{matrix}\middle| x\right) = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} -n,\ b \\ b-n+1-c \end{matrix}\middle| 1-x\right), $$

$$ n=0,\ 1,\ \ldots . $$

Используя первую формулу, Эйлер рассмотрел целый ряд примеров преобразований рядов, ускоряющих сходимость. Например, при $x=-1$ ряд ${}_2F_1\left(\begin{matrix} a,\ b \\ c \end{matrix}\middle| -1\right)$ сходится медленно, а ряд ${}_2F_1\left(\begin{matrix} a,\ c-b \\ c \end{matrix}\middle| \frac{1}{2}\right)$ — гораздо быстрее. В век, когда вычисления выполняются легко и сравнительно недорого, нам трудно представить себе, как желание что-либо вычислить могло стимулировать столько математических исследований. Эти формулы преобразований вместе с преобразованием Эйлера были первыми из немногих открытых за последние два столетия формул преобразований обобщенных гипергеометрических рядов. Еще одной формулой преобразований является полученная Регге формула симметрии для упомянутых ранее $(3-j)$-символов. Гаусс нашел правильное обобщение второй формулы преобразований Пфаффа на случай бесконечного ряда. Если в множителе

$$ \frac{(c-b)_n}{(c)_n} = \frac{\Gamma(n+c-b)\,\Gamma(c)}{\Gamma(n+c)\,\Gamma(c-b)} $$

$-n$ заменить на a, то, как можно догадаться, этот множитель примет вид

$$ \frac{\Gamma(c-a-b)\,\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}, $$

но это не единственное изменение: следует добавить еще один член.

Гаусс занимался исследованием результатов и иного вида. Он считал два гипергеометрических ряда смежными, если все их параметры, за исключением одного, совпадают, а несовпадающие параметры различаются на единицу. Он показал, что функция общего вида ${}_2F_1\left(\begin{matrix} a,\ b \\ c \end{matrix}\middle| x\right)$ и две смежные с ней функции ${}_2F_1$ линейно независимы. В силу симметрии функции

${}_2F_1\left(\begin{matrix}a,\ b\\ c\end{matrix}\middle|\,x\right)$ по a и b имеется девять таких соотношений. Эти соотношения для смежных функций можно итерировать и таким образом показать, что любые три функции ${}_2F_1\left(\begin{matrix}a+j,\ b+k\\ c+l\end{matrix}\middle|\,x\right)$, где j, k, l — целые числа, будут линейно независимыми. Поскольку

$$\frac{d}{dx}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,\ b\\ c\end{matrix}\middle|\,x\right)=\frac{ab}{c}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a+1,\ b+1\\ c+1\end{matrix}\middle|\,x\right),$$

легко видеть, что дифференциальное уравнение Эйлера для ${}_2F_1\left(\begin{matrix}a,\ b\\ c\end{matrix}\middle|\,x\right)$ можно представить в виде одного из этих итерированных соотношений для смежных функций. Это разностное уравнение было дано Гауссом в конце его единственной опубликованной работы по гипергеометрическим функциям. В своей второй работе, которая так и не была издана при его жизни, Гаусс, рассматривая это уравнение как дифференциальное уравнение, получил большую часть явных формул, которые можно вывести непосредственно из этого уравнения. К ним относятся квадратичные преобразования, играющие очень важную роль в целом ряде проблем. Чтобы лучше понять значение этих преобразований, необходимо напомнить еще о двух важных открытиях восемнадцатого века.

Первым из них было изучение эллиптических интегралов, которыми занимались Фаньяно, Эйлер, Ланден и Лежандр, а также введение Лагранжем и Гауссом понятия арифметико-геометрического среднего. Вторым открытием было введение Лежандром и Лапласом сферических функций и многочленов Лежандра. Исследование эллиптических интегралов привело к эллиптическим функциям, которыми последние три четверти девятнадцатого века интенсивно занимались Абель, Якоби, Эйзенштейн, Вейерштрасс, Эрмит и многие другие. Второе открытие непосредственно связано с некоторыми алгебраическими подходами к исследованию специальных функций, которые были разработаны за последние пятьдесят лет. Миттаг-Лефлер [7] дал прекрасный исторический обзор первых работ по эллиптическим интегралам. В этой работе описывается преобразование Ландена в том виде, в каком его дал Лагранж (в ссылке на Эннепера на с. 291 должна быть указана с. 357 оригинальной работы, а не с. 307); Миттаг-Лефлер приводит также квадратичные преобразования Гаусса эллиптических интегралов первого рода. Интерес Лагранжа к эллиптическим интегралам объяснялся его желанием вычислить величину некоего важного интеграла. Гаусс сначала исследовал последовательности $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1}=(a_nb_n)^{1/2}$; заметив, что они сходятся, он нашел величину, к которой они сходятся при $a_0=\sqrt{2}$, $b_0=1$, и наконец вычислил предел в общем виде. Используя этот результат, Гаусс получил еще два результата, а именно ввел лемнискатные функции, являющиеся специальными эллиптическими функциями, и ввел два квадратичных преобразования общего вида обыкновенной гипергеометрической функции ${}_2F_1(a, b; c; x)$ с различными ограничениями на один из параметров. Эти функции образуют очень важный подкласс функций ${}_2F_1$ общего вида, поскольку, будучи умноженными на соответствующую алгебраическую функцию, они в точности составляют класс гипергеометрических рядов, которые мы называем функциями Лежандра.

Многочлены Лежандра интенсивно изучались в восьмидесятых годах восемнадцатого века Лежандром и Лапласом. Эти многочлены были введены следующим образом. Функция $(c^2-2cr\cos\theta+r^2)^{-1/2}$ дает значение в точке P потенциала силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния от центра C; здесь r и c — расстояния от P и C до фиксированной точки O, а θ — угол между отрезками PO и OC. Разлагая эту функцию в степенной ряд по r, получаем

$$(c^2-2cr\cos\theta+r^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\,r^nc^{-n-1},$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n от x, называемый многочленом Лежандра. Лежандр и Лаплас вывели для этих многочленов следующие формулы:

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\,dx=0,\qquad m\neq n;\qquad \int_{-1}^{1}(P_n(x))^2\,dx=\frac{2}{2n+1}.\tag{L.1}$$

$$\int_{0}^{\pi}P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta=0,\qquad m\neq n;$$

$$\int_{0}^{\pi}[P_n(\cos\theta)]^2\sin\theta\,d\theta=\frac{2}{2n+1}.\tag{L.1a}$$

$$P_n(\cos\theta)=(1/\pi)\int_{0}^{\pi}[\cos\theta+i\sin\theta\cos\varphi]^n\,d\varphi.\tag{L.2}$$

$$P_n(\cos\theta)P_n(\cos\varphi)=(1/\pi)\int_{0}^{\pi}P_n(\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi\cos\Psi)\,d\Psi.\tag{L.3}$$

$$(1-x^2)\,y''-2xy'+n(n+1)\,y=0, \qquad y=P_n(x). \tag{L.4}$$

$$P_n(\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi\cos\Psi)=P_n(\cos\theta)\,P_n(\cos\varphi)+ \\ +2\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}P_n^k(\cos\theta)\,P_n^k(\cos\varphi)\cos k\Psi. \tag{L.5}$$

Присоединенные функции Лежандра определяются соотношениями

$$P_n^k(x)=(-1)^k(1-x^2)^{k/2}\frac{d^k}{dx^k}P_n(x), \qquad -1<x<1, \quad k=1,\ \ldots,\ n. \tag{L.6}$$

Еще раньше Лагранж получил эти же многочлены как решения разностного уравнения

$$(2n+1)\,xP_n(x)=(n+1)\,P_{n+1}(x)+nP_{n-1}(x). \tag{L.7}$$

Каждая из приведенных выше формул — только одна из обширного класса формул для специальных функций более общего вида. Чтобы продемонстрировать эти формулы, мы ниже приведем соответствующие результаты для тригонометрических функций, а затем укажем условия их применения. Поскольку $\cos n\theta$ — многочлен степени n от $\cos\theta$, рассмотрим функцию $T_n(\cos\theta)$, определяемую соотношением $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$:

$$\begin{gathered}\int_{-1}^{1}T_n(x)\,T_m(x)\,(1-x^2)^{-1/2}\,dx=0, \qquad m\neq n,\\ \int_{-1}^{1}[T_n(x)]^2(1-x^2)^{-1/2}\,dx=\begin{cases}\pi, & n=0,\\ \pi/2, & n=1,\ 2,\ \ldots.\end{cases}\end{gathered} \tag{T.1}$$

$$\begin{gathered}\int_{0}^{\pi}\cos n\theta\cos m\theta\,d\theta=0, \qquad m\neq n,\\ \int_{0}^{\pi}\cos^2 n\theta\,d\theta=\begin{cases}\pi, & n=0,\\ \pi/2, & n=1,\ 2,\ \ldots.\end{cases}\end{gathered} \tag{T.1a}$$

$$\cos n\theta=\frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}. \tag{T.2}$$

$$\cos n\theta\cos n\varphi={}^1\!/_2\,[\cos n(\theta+\varphi)+\cos n(\theta-\varphi)]. \tag{T.3}$$

$$(1-x^2)\,y''-xy'+n^2y=0, \qquad y=T_n(x). \tag{T.4}$$

$$u''(\theta)-n^2u(\theta)=0, \qquad u=\cos n\theta, \tag{T.4a}$$

$$\cos n(\theta + \varphi) = \cos n\theta \cos n\varphi - \sin n\theta \sin n\varphi. \tag{T.5}$$

$$\begin{gathered} \frac{d \cos n\theta}{d\theta} = -n \sin n\theta, \\ \frac{d \cos n\theta}{d \cos \theta} = \frac{dT_n(x)}{dx} = \frac{n \sin n\theta}{\sin \theta} = nU_{n-1}(x), \qquad x = \cos\theta. \end{gathered} \tag{T.6}$$

$$2 \cos\theta \cos n\theta = \cos(n-1)\theta + \cos(n-1)\theta. \tag{T.7}$$

$$\begin{gathered} xT_n(x) = {}^1/_2 T_{n+1}(x) + {}^1/_2 T_{n-1}(x), \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots, \\ xT_0(x) = T_1(x). \end{gathered} \tag{T.7a}$$

Соотношения ортогональности (L.1) и (T.1) являются фундаментальными. Поскольку $P_n(x)$ и $T_n(x)$ — многочлены, эти многочлены ортогональны. Для любого семейства многочленов от одной переменной, ортогонального относительно некоторой положительной меры, выполняется трехчленное рекуррентное соотношение

$$xp_n(x) = A_n p_{n+1}(x) + B_n p_n(x) + C_n p_{n-1}(x),$$

где $A_{n-1}C_n > 0$ и B_n — вещественная величина. Обратно, любое множество многочленов, удовлетворяющих этому рекуррентному соотношению, ортогонально относительно некоторой положительной меры, если $A_{n-1}C_n > 0$ и B_n — вещественная величина. Если $A_{n-1}C_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ и $A_N C_{N+1} = 0$, то эти многочлены ортогональны относительно положительной меры, носитель которой состоит лишь из конечного числа точек. Данное рекуррентное соотношение напоминает одно из соотношений Гаусса для смежных функций ${}_2F_1$; в ряде случаев можно показать, что это соотношение является вариантом одной из формул Гаусса или итерацией этих формул. В других случаях получаются иные гипергеометрические ряды: либо ${}_3F_2\left(\begin{matrix} a,\ b,\ c \\ d,\ e \end{matrix}\middle| 1\right)$, либо ${}_4F_3\left(\begin{matrix} -n,\ n+a,\ b,\ c \\ d,\ e,\ f \end{matrix}\middle| 1\right)$, где $a + b + c + 1 = d + e + f$, удовлетворяющие соотношениям для смежных функций более общего вида, которые приводят к ортогональным многочленам. Теперь переменная многочлена стоит на месте одного из параметров или нескольких параметров, а не является переменной степенного ряда. По этой причине, а также в силу нашего исключительного интереса к степенным рядам изучением и применением этих многочленов стали заниматься с некоторым опозданием.

Одна из причин, объясняющих полезность функций $\cos\theta$ и $\sin\theta$, состоит в их тесной связи с окружностью. Для доказательства формулы (T.5) самым простым способом надо сделать поворот окружности. Такое доказательство было дано Коши. Подобным же образом, чтобы доказать формулу сложения (L.5) для $P_n(x)$, надо рассмотреть группу поворотов, действующую на сфере в R^3.

Чтобы разобраться в ситуации, рассмотрим сначала окружность. Функцию $f(\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $f(0) = f(2\pi)$, можно разложить в ряд Фурье

$$f(\theta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta.$$

Это разложение можно использовать для построения гармонической функции $u(x, y)$ в круге $x^2 + y^2 < 1$, принимающей заданные значения на границе. Пусть

$$u(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta],$$

где $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Тогда $u(x, y)$ будет гармонической функцией, т. е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

и

$$\lim_{r \to 1^-} u(r \cos \theta, r \sin \theta) = f(\theta),$$

если функция $f(\theta)$ непрерывна при $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Подобная задача существует и для трех переменных, и решается она аналогичным образом. Прежде всего необходимо найти семейство функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

в шаре $x^2 + y^2 + z^2 < 1$. Для этого вводятся сферические координаты $x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, а затем находятся решения уравнения Лапласа вида $a(r) b(\theta) c(\varphi)$. Можно взять $a(r) = r^n$, $c(\varphi) = \cos k\varphi$ или $c(\varphi) = \sin k\varphi$ и $b(\theta) = P_n^k(\cos \theta)$. Функции $r^n \cos n\theta = \operatorname{Re}(x + iy)^n$ и $r^n \sin n\theta = \operatorname{Im}(x + iy)^n$ являются однородными многочленами от x и y степени n. Подобным образом $r^n P_n^k(\cos \theta) \cos k\varphi$ и $r^n P_n^k(\cos \theta) \sin k\varphi$, $k = 0, 1, \ldots, n$, являются однородными гармоническими линейно независимыми многочленами от x, y и z степени n. Существует $2n+1$ таких многочленов, и именно это число стоит в знаменателе в формуле (L.1). Подобным образом функции $r^n \cos n\theta$ и $r^n \sin n\theta$ линейно независимы при $n=1, 2$, и во всех этих случаях существуют обе функции; если же $n=0$, то имеется только одна из этих функций. Этим обстоятельством объясняется вид знаменателей в (T.1). Далее, при помощи этих однородных гармонических многочленов гармоническая функция в шаре $x^2+y^2+z^2<1$ с заданными граничными значениями строится точно так же, как и в случае окружности, поскольку функции $P_n^k(\cos\theta)\cos k\varphi$ и $P_n^k(\cos\theta)\sin k\varphi$, $k=0, 1, \ldots, n$, $n=0, 1, \ldots$, образуют полную ортогональную систему.

Формула (L.3) является основным функциональным уравнением, которому удовлетворяет зональная сферическая гармоника степени n на S^2 («зональная» означает «не зависящая от угла φ»); зональные сферические гармоники мы называем сферическими функциями. При более общей постановке вопроса необходимым условием возникновения таких сферических функций является наличие метрического пространства и группы G, действующей на этом пространстве. Это пространство должно быть однородно в том смысле, что в результате действия группы любая точка отображается в любую другую точку. Кроме того, это пространство должно обладать следующим свойством: если $d(x_1, y_1)=d(x_2, y_2)$, то имеется элемент $g\in G$, такой, что $g(x_1)=x_2$, $g(y_1)=y_2$. О таких пространствах говорят, что они двуточечно однородны. Кроме сферы в R^3 и сфер любой размерности, вещественные проективные пространства, комплексные проективные пространства, кватернионные проективные пространства, а также двумерное проективное пространство над числами Кэли являются компактными двуточечно однородными римановыми многообразиями. Во всех этих случаях сферические функции являются ортогональными многочленами от переменной, зависящей от расстояния. Каждый из этих ортогональных многочленов является также гипергеометрической функцией вида ${}_2F_1\left(\begin{matrix}-n,\ n+a\\ b\end{matrix}\middle|\, t\right)$ при некоторых a и b. Меру $\sin\theta\, d\theta$ в случае (L.1a) дает размер орбиты малой дуги $d\theta$, получающийся в результате поворота, при котором северный полюс неподвижен.

Имеются и другие компактные двуточечно однородные пространства. Для наглядности рассмотрим множество вершин единичного куба в R^N. В этом случае сферические функции также являются ортогональными многочленами, причем ортогональны они относительно симметрического биномиального распределения $\binom{N}{x} 2^{-N}$, $x = 0, 1, \ldots, N$, поскольку это распределение дает размер орбиты любой точки с x нулями и $N - x$ единицами, получаемый в результате действия на это пространство октаэдральной группы, оставляющей неподвижной точку $(0, 0, \ldots, 0)$. Эти ортогональные многочлены также являются гипергеометрическими функциями ${}_2F_1\left(\begin{matrix}-n, & -x \\ & -N\end{matrix}\middle|\, 2\right)$, $x, n = 0, 1, \ldots, N$, а связывающее их трехчленное рекуррентное соотношение является одним из соотношений Гаусса для смежных функций. Эти многочлены называются многочленами Кравчука (хотя введены они были почти сто лет тому назад Грэмом) и играют важную роль в теории кодирования, которой посвящен третий том настоящей Энциклопедии («Теория информации и кодирования»).

Дифференциальные уравнения (L.4), (T.4) и (T.4a) получаются при решении уравнения Лапласа методом разделения переменных. Формулы сложения (L.5) и (T.5) относятся к наиболее важным из известных для этих функций формул. Для большинства двуточечно однородных пространств, где для сферических функций найдены явные формулы, имеется формула сложения, являющаяся неким ортогональным разложением и содержащая функциональное уравнение в качестве постоянного члена. Например, проинтегрировав (L.5) по отрезку $[0, \pi]$ по мере $d\Psi$ и применив формулу (T.1a), мы получим (L.3). Наиболее естественный способ вывода формул сложения этого типа состоит в том, что мы используем действие группы на это пространство. Фактически этим же методом пользовались Лежандр и Лаплас двести лет тому назад.

Другим важным классом функций, введенным в восемнадцатом столетии, являются функции Бесселя. Функции Бесселя первого рода $J_\alpha(x)$ можно определить следующим соотношением:

$$J_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha+1)\, n!} = \frac{(x/2)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\, {}_0F_1\left(\begin{matrix} - \\ \alpha+1 \end{matrix}\middle|\, \frac{-x^2}{4}\right).$$

После элементарных трансцендентных функций эти функции изучались наиболее интенсивно и нашли применение во многих областях, где применяется математика. Они тесно связаны с функциями Лежандра, и изучением этой связи занимались многие ученые. Простым примером такой связи является формула Мелера

$$\lim_{n\to\infty} P_n(\cos(z/n)) = J_0(z).$$

Эту формулу можно интерпретировать следующим образом: будем рассматривать многочлены Лежандра как сферические функции на сфере большого радиуса и посмотрим, что происходит в окрестности северного полюса. Сфера при этом уплощается, и это наводит на мысль, что функция $J_0(z)$ должна играть ту же роль в R^2, что и функция $P_n(\cos\theta)$ на S^2. Аналоги зональных функций называются радиальными функциями, т. е. функциями, зависящими только от расстояния от начала координат. Пуассон установил следующий важный факт: если $f(x_1, x_2) = g\left((x_1^2 + x_2^2)^{1/2}\right)$ и

$$F(y_1, y_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\exp\left[i(x_1y_1 + x_2y_2)\right]dx_1\,dx_2$$

то

$$F(y_1, y_2) = G\left((y_1^2 + y_2^2)^{1/2}\right)$$

и

$$G(t) = 2\pi\int_0^{\infty} g(r)\,rJ_0(rt)\,dr.$$

Следующим важным этапом в исследовании специальных функций было введение Якоби и Абелем эллиптических функций и тэта-функций. (Исторический обзор можно найти в работе Миттаг-Лефлера.) После введения этих функций был сделан целый ряд открытий, которые позволили несколько изменить наш взгляд на этот предмет. Важным достижением было введение Гейне класса рядов, аналогичных гипергеометрическим рядам. Напомним, что гипергеометрическим рядом называется ряд $\sum a_n$, где a_{n+1}/a_n — рациональная функция от n. Ряды, введенные Гейне, имеют вид $\sum a_n$, где a_{n+1}/a_n — рациональная функция от q^n для некоторого фиксированного q. Роль, которую в гипергеометрическом ряде играет сдвинутый факториал $(a)_n$, теперь исполняет $(a; q)_n = (1-a)(1-aq)\ \dots\ (1-aq^{n-1})$.

Если $|q| < 1$, то $(a;\, q)_\infty = \prod_{n=0}^{\infty}(1-aq^n)$, а $(a;\, q_n) = (a, q)_\infty/(aq^n;\, q)_\infty$ определяется для нецелочисленных значений n, пока имеет место соотношение $aq^{n+k} \neq 1$, $k = 0, 1, \dots$. Эйлер вычислил два ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(q;\,q)_n} = \frac{1}{(x;\,q)_\infty}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{q^{\binom{n}{2}}x^n}{(q;\,q)_n} = (x;\,q)_\infty.$$

Эти равенства суть частные случаи q-биномиальной теоремы

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;\, q)_n}{(q;\, q)_n} x^n = \frac{(ax;\, q)_\infty}{(x;\, q)_\infty},$$

приписываемой различным ученым. Гейне получил этот результат, когда предложил основной аналог функции ${}_2F_1\left(\begin{matrix} a,\ b \\ c \end{matrix} \middle| x\right)$ в 1847 г., Коши опубликовал доказательство несколькими годами ранее, а Якоби ссылается на работу Швейнса 1820 г. Эта формула приводится в работе Швейнса, но последний ссылается на более раннюю работу Роте. К сожалению, я не знаком с работой Роте и не могу подтвердить, что эта теорема действительно была известна уже в 1811 г., как утверждает Швейнс; впрочем, вполне вероятно, что он прав, так как в 1811 г. Гаусс опубликовал формулы, связанные с этим результатом.

Одним из наиболее важных рядов является ряд

$$\sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} x^n = (q^2;\, q^2)_\infty (-qx;\, q^2)_\infty (-qx^{-1};\, q^2)_\infty,$$

сумма которого представляет собой известную тэта-функцию. Этот результат был не первым примером билатерального ряда (ряда, бесконечного в обоих направлениях), поскольку

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{1}{z-m} =$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z-m} - \frac{1}{{}^1/_2 - m}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{({}^1/_2 - z)}{(m-z)(m-{}^1/_2)}$$

и

$$\frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2},$$

тем не менее это было весьма плодотворным открытием. Первоначально Якоби, исследуя эллиптические функции в Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum (1829 г.), получил результаты для тэта-функций (как следствия результатов для эллиптических функций). Позднее он обратил эту процедуру и использовал тэта-функции, чтобы получить результаты для эллиптических функций. Функция $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} x^n$ появилась в работе Фурье, посвященной анализу уравнения теплопроводности, а Пуассон получил очень важное преобразование этой функции, но тот факт, что эта функция является фундаментальной, установил и объяснил Якоби. Недавно для этой функции были получены новые результаты, позволяющие применить к ней теоретико-групповые методы исследования, подобные тем, которые были указаны нами выше. Соответствующей группой является трехмерная группа Гейзенберга, т. е. группа матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & z & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(см. работу Картье [5], а также Ауслендера и Толимьери [1]).

Другими примерами аналогов гипергеометрических рядов являются многочлены, получающиеся как сферические функции на дискретных двуточечно однородных пространствах в результате действия на эти пространства некоторых групп Шевалле. Пока еще рано говорить, какое значение будут иметь эти функции, но я твердо уверен, что, развивая эту идею, мы получим важные результаты. В девятнадцатом столетии эллиптические функции были исследованы самым подробным образом и, казалось бы, заняли определенное место в математическом образовании. Усилия ученых постигнуть смысл этих функций породили много идей. Однако сами эти функции оказались не столь полезными, как можно было ожидать, и поэтому их место в общепринятых программах обучения математике заняли другие, представляющиеся более полезными понятия, и в течение десятилетий эллиптические функции были известны лишь ограниченному кругу ученых-теоретиков, некоторым специалистам, занимающимся прикладными вопросами, и немногим инженерам. В настоящее время каждый, кто изучает и применяет комбинаторный анализ, стремится узнать как можно больше об упомянутых выше аналогах гипергеометрических рядов. Сюда можно отнести специалистов в области статистики, занимающихся блочным планированием, и многих специалистов, которые изучают и применяют в своей работе вычислительные алгоритмы. Эти ряды играют важную роль в теории разбиений, которой посвящен второй том («Теория разбиений») настоящей Энциклопедии.

Большим вкладом в развитие учения о специальных функциях в прошлом столетии было введение дифференциальных уравнений более чем с тремя регулярными особыми точками. Риман заметил, что дифференциальное уравнение Эйлера

$$x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby = 0, \quad y = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right),$$

имеет регулярные особые точки в $x=0$, 1, ∞ и что при помощи дробно-линейного преобразования эти особые точки можно переместить в три произвольные точки. Полученное в результате дифференциальное уравнение определяется положением этих особых точек и некоторыми параметрами, характеризующими природу решений в окрестности этих точек. Риман показал простой способ получения результатов Гаусса, Куммера и некоторых результатов Якоби, относящихся к гипергеометрическим рядам, и нашел кубическое преобразование, которое до сих пор еще по-настоящему не понято. Однако истинная ценность его работы состоит в установлении того факта, что особые точки дифференциального уравнения дают гораздо больше информации о его решении, чем это предполагалось. Впоследствии были предложены и другие дифференциальные уравнения, например уравнения Хойна, Матье, Ламе и уравнения для сфероидальных волновых функций, часто получающиеся при разделении переменных в волновом уравнении или уравнении Лапласа, вследствие которого эти уравнения сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Решения этих уравнений являются интересными специальными функциями, значительно более сложными, чем гипергеометрические функции. До сих пор все еще непонятно, какой подход к изучению этих функций является наилучшим, и можно надеяться, что алгебраические методы, предлагаемые Миллером в его книге, дадут нам возможность действительно понять эти важные функции.

Аппель ввел гипергеометрические функции от двух переменных и установил для них результаты, аналогичные некоторым результатам, полученным для обычных гипергеометрических функций. Однако, несмотря на то что мы обладаем рядом методов, позволяющих плодотворно исследовать некоторые аспекты этой проблемы, истинное понимание гипергеометрических функций от двух переменных остается делом будущего.

Пинчерле, а впоследствии Меллин и Барнс предложили новый способ изучения гипергеометрических рядов и функций. Они проинтегрировали отношения гамма-функций и без труда получили аналитические продолжения гипергеометрических функций. Интегралы рассмотренного ими вида встречаются во многих работах, начиная с ранней работы Мелера, посвященной проблемам теории электричества с конической симметрией, и кончая работой Баргманна о представлениях группы Лоренца.

Пуанкаре, исследуя автоморфные функции, получил важные обобщения эллиптических функций. Было предложено несколько способов обобщения этих функций на несколько переменных. Одним из наиболее плодотворных из них оказался предложенный Зигелем метод, в котором используются функции матричного аргумента. Гамма-функции от матричного аргумента были введены несколько раньше Ингамом в связи с его работами по статистике. С точки зрения специальных функций, используемых в прикладной математике, основную пользу от автоморфных функций, возможно, мы получим в виде методов, которые могут быть применены для развития теории функций от многих переменных; хотя теория гипергеометрических функций и аналогичных им функций Гейне от нескольких переменных почти не разработана, мы имеем достаточно результатов, чтобы понять, что можно получить еще много фундаментальных результатов. Хорошим примером может служить недавно вышедшая работа Макдональда, посвященная соотношениям, подобным тройному произведению для тэта-функции, которые он получил из аффинных систем корней классических алгебр Ли. Как гипергеометрические функции от нескольких переменных можно рассматривать интегралы Фейнмана (см. [4]), а также $(3n-j)$-символы, применяющиеся для разложения тензорных произведений представлений группы $SU(2)$ [2]. И те и другие очень полезны и тем не менее еще мало исследованы. Таким образом, положение в этой области математики нисколько не отличается от положения в других областях этой науки; необходимо как можно быстрее ответить на все вопросы, связанные со специальными функциями от многих переменных.

До сих пор мы не дали определения термина «специальная функция». Я даю простое, но не инвариантное относительно времени определение: функция называется специальной, если она встречается настолько часто, что ей присваивается название. Имеется целый ряд очень важных специальных функций, которые не укладываются в изложенную выше схему, например дзета-функция Римана, которая играет основную роль в изучении простых чисел и в решении многих других теоретико-числовых проблем. Другим примером таких функций могут служить многочлены Бернулли и числа Бернулли. Числа Бернулли были введены в целях вычисления рядов, а теперь они часто встречаются в совершенно неожиданных ситуациях.

Гарри Бейтмен составил список более чем тысячи специальных функций. И, хотя многие из этих функций являются частными случаями гипергеометрических рядов и нет никаких оснований присваивать им особые названия, поскольку все установленные для этих функций факты являются частными случаями результатов, известных для гипергеометрических рядов более общего вида, совершенно очевидно, что многие функции заслуживают того, чтобы о каждой из них были написаны отдельные книги. Некоторые из этих функций обладают столь интересными свойствами и встречаются настолько часто, что каждое поколение математиков непременно заново начинает исследовать их и регистрировать полученные результаты, с тем чтобы ими могли пользоваться другие. Пока нельзя точно сказать, какие книги по специальным функциям выйдут в настоящей серии, но в настоящее время не существует надлежащего подхода к гипергеометрическим рядам и их аналогам, введенным Гейне. Имеется несколько работ [3, 6, 8], в которых применяется алгебраический подход к исследованию специальных функций, но ни в одну из них не включены очень интересные исследования унитарной группы, которые приводят к формулам сложения для многочленов Якоби и Лагерра и для круговых многочленов, образующих важный класс ортогональных многочленов от двух переменных. Дискретные ортогональные многочлены тоже рассматриваются неадекватным образом. Все это — материал для будущих книг.

Существует также ряд очень интересных приложений специальных функций к комбинаторным задачам, лишь частично рассмотренных в упомянутых выше втором и третьем томах настоящей Энциклопедии. И подождем дальнейших открытий. Опыт подсказывает, что нас ожидают удивительные открытия в этой области математики. Такие открытия можно предсказывать ретроспективно, но не заранее.

Ричард Аски,
Главный редактор серии
«Специальные функции»

Список литературы

1. Ауслендер, Толимьери (Auslander L., Tolimieri R.). Abelian harmonic analysis, theta functions and function algebras on a nilmanifold. — Lecture Notes in Mathematics, No. 436. — Berlin: Springer, 1975.
2. Биденхарн, ВанДам (Biedenharn L. C., VanDam H.). Quantum theory of angular momentum. — New York: Academic Press, 1965.
3. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. — М.: Наука, 1965.
4. Голубева В. А. Некоторые задачи аналитической теории интегралов Фейнмана. — Мат. заметки, 1976, т. 31, 139—207; УМН, 1976, т. 31, 135—202.
5. Картье (Cartier P.). Quantum mechanical commutative relations and theta functions. — In: Proc. Symp. Pure Math. IX. — Providence: Amer. Math. Soc., 1965, p. 363—387.
6. Миллер (Miller W., Jr.). Lie theory and special functions. — New York: Academic Press, 1968.
7. Миттаг-Лефлер (Mittag-Leffler G.). An introduction to the theory of elliptic functions. — Ann. of Math., Ser. 2, v. 24, 1923, 271—351. (Перевод работы, впервые опубликованной в 1876 г.)
8. Толмен (Talman J. D.). Special functions, a group theoretic approach. — New York: W. A. Benjamin, 1968.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

В этой книге рассматривается связь между операторами симметрии линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, системами координат, в которых это уравнение допускает решения с разделенными переменными, и свойствами получающихся при этом специальных функций. Книга рассчитана на широкий круг специалистов, занимающихся дифференциальными уравнениями в частных производных, специальными функциями и теорией групп Ли, т. е. специалистов в области теории групп, прикладных вопросов математики, теоретической физики и химии, а также инженеров. Мы продемонстрируем, как в старый метод разделения переменных вводятся некоторые современные теоретико-групповые приемы, применение которых может дать нам основу для теории специальных функций. В частности, мы покажем в явном виде, что все специальные функции, получающиеся в процессе разделения переменных в уравнениях математической физики, можно изучать при помощи теоретико-групповых методов. Это относится к функциям Ламе, Айнса, Матье и другим функциям, включая функции гипергеометрического типа.

Сейчас в истории применения теоретико-групповых методов к теории специальных функций наступил критический момент. Основные связи между группами Ли, специальными функциями и методами разделения переменных были выяснены совсем недавно. Теперь появилась возможность сконструировать некий теоретико-групповой алгоритм, который, будучи примененным к заданному дифференциальному уравнению, сможет дать рациональное описание возможных систем координат, допускающих решения с разделенными переменными, и различные теоремы разложений, связывающие решения с разделенными переменными (специальные функции), полученные в различных системах координат. Действительно, для большинства важных линейных уравнений решения с разделенными переменными являются общими собственными функциями множеств коммутирующих операторов второго порядка из универсальной обвертывающей алгебры алгебры Ли симметрий, соответствующей этому уравнению. Задача разложения одной системы решений с разделенными переменными по элементам другой сводится к задаче теории представлений алгебры Ли симметрий.

Несмотря на простоту, элегантность и полезность этого метода, он пока применялся к сравнительно немногим дифференциальным уравнениям. (Во время работы над настоящей книгой волновое уравнение $(\partial_{tt} - \Delta_3)\Psi = 0$ все еще интенсивно изучалось.) Кроме того, пока что доказано мало теорем, раскрывающих все возможности этого метода. Автор надеется, что настоящая работа, рассчитанная на широкий круг специалистов, сможет убедить читателя в исключительной полезности и уместности теоретико-групповых методов при изучении разделения переменных и специальных функций. Можно также надеяться, что эта работа вызовет у некоторых читателей интерес к данной области математики и что со временем мы получим от них ответы на многие еще не решенные задачи.

Идеи, связывающие группы Ли, специальные функции и разделение переменных, исходят из различных источников. Первая глубокая работа, в которой изучались связи теории представлений групп со специальными функциями, обычно приписывается Картану [65]. Однако первые подробные указания на использование этих связей в вычислительных целях, возможно, дают работы Вигнера. Вигнер начал работать в этой области еще в тридцатых годах, а в 1955 г. в конспектах лекций, прочитанных в Принстонском университете, он изложил полученные им результаты. Впоследствии эти результаты были обобщены и усовершенствованы в книге Толмена [122].

Следующий большой вклад в теорию вычислений внес Виленкин, который, начиная с 1956 г., выпустил целую серию работ, основные результаты которых изложены в его книге [37]. Этот энциклопедический труд создавался под сильным влиянием явных конструкций неприводимых представлений классических групп, предложенных Гельфандом и Наймарком (см., например, [44]). Виленкин (и Вигнер) получил специальные функции в виде матричных элементов операторов, определяющих неприводимые представления групп.

Еще одним предшественником нашей теории явился метод факторизации. Данный метод был предложен Шредингером, который применил его к решению не зависящего от времени уравнения Шредингера для ряда систем, представляющих определенный интерес с физической точки зрения (см., например, [141]). Это полезное орудие вычисления собственных функций и рекуррентных соотношений для решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка было разработано несколькими авторами, включая Инфельда и Халла

[51], которые дали обзор состояния теории на 1951 г. Совершенно независимая и несколько иная разработка этой теории дана в работе Инуи [50].

Автор настоящей книги также внес определенный вклад в развитие этой теории, показав в 1964 г. [81], что метод факторизации эквивалентен теории представлений 4-алгебр Ли.

Другой подход к решению проблем, рассматриваемых в настоящей книге, был предложен и разработан Вейснером в его замечательных работах [33—35], первая из которых появилась в 1955 г. Вейснер раскрыл теоретико-групповой смысл семейств призводящих функций для гипергеометрических функций, функций Эрмита и функций Бесселя. В этих статьях можно также найти примеры допускаюших разделение переменных систем координат, описанных при помощи операторов симметрии алгебры Ли. Теория Вейснера получила дальнейшее развитие и была связана с методом факторизации в монографии [83] автора настоящей книги, где рассматривалась главным образом теория локальных групп Ли, а не теория глобальных групп Ли, как в работах Толмена и Виленкина.

Необходимо также сказать несколько слов о монографии Трусделла [123], посвященной F-уравнению, в которой показан способ прямого получения производящих функций и интегральных представлений для специальных функций, если известны дифференциальные рекуррентные соотношения, которым эти специальные функции удовлетворяют. В 1968 г. было установлено, что метод Трусделла вполне соответствует теоретико-групповому подходу к изучению специальных функций [83].

Основная идея настоящей работы состоит в том, что системы координат, допускающие разделение переменных для линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, можно охарактеризовать при помощи систем операторов симметрии второго порядка для этих уравнений. Эта идея вполне естественна с квантовомеханической точки зрения. Кроме того, уже с тех пор, как появилась работа Ли, известно, что данная идея справедлива для некоторых простых систем координат, таких, как сферические, цилиндрические и декартовы, т. е. систем координат, связанных с некоей подгруппой.

Для некоторых важных уравнений Шредингера, например уравнения для атома водорода, известен способ операторной характеристики некоторых неподгрупповых систем координат [10, 71]. Но явное утверждение о связи между операторами симметрии и разделением переменных впервые появилось лишь в 1965 г. в работе Винтерница и Фриша [40], которые дали теоретико-групповую характеристику допускающих разделение переменных систем координат, соответствующих уравнениям на собственные значения для операторов Лапласа — Бельтрами на двумерных пространствах с постоянной кривизной. Эта работа была продолжена Винтернитцем и др. (см. [38, 39, 79, 108]). И наконец, автор настоящей книги в сотрудничестве с Бойером и Калнинсом дал теоретико-групповую классификацию систем координат, допускающих разделение переменных для целого ряда важных уравнений в частных производных, и исследовал связь между этой классификацией и теорией специальных функций. Интересной особенностью этой работы, которой мы обязаны Калнинсу, было открытие целого ряда допускающих разделение переменных систем координат, не указанных в работе [101], на которую обычно ссылаются все авторы. Другой особенностью этой работы является разработка теоретико-группового метода, позволяющего получать тождества для негипергеометрических специальных функций, таких, как функции Матье, Ламе, сфероидальные функции, функции Айнса, функции ангармонического осциллятора, а также для более известных гипергеометрических функций.

Для понимания настоящей книги необходимо некоторое знакомство с группами и алгебрами Ли (точнее, с гомоморфизмом и изоморфизмом групп и алгебр Ли); необходимые знания могут дать работы [45, 86]. Однако рассматриваемые нами примеры просты и должны быть понятны всем, кто хотя в какой-то мере знаком с теорией Ли. Предполагается также, что читатель имеет некоторый опыт в решении дифференциальных уравнений в частных производных методом разделения переменных, скажем, в прямоугольных, полярных и сферических координатах.

В силу недостатка места, времени и компетенции автора мы были вынуждены опустить некоторые темы; наиболее важное место среди них занимает теория сферических функций на группах. Этой теме, которая является обобщением теории сферических гармоник, посвящена обширная литература (см., например, [126, 131]). Кроме того, недавно при помощи сферических функций была получена формула сложения для многочленов Якоби [69, 138]. Но сферические функции всегда связаны с координатами подгрупп, поэтому для большинства даже элементарных уравнений, рассматриваемых в настоящей книге, они не могут охватить все специальные функции, получающиеся в процессе разделения переменных.

Краевые задачи также не рассматриваются, хотя при их решении метод операторов симметрии имеет большое значение (см. [19]). В последней работе, а также в работах [106, 144, 145] рассматривается применение метода операторов симметрии к решению нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных; этот вопрос нами не рассматривался, так как окончательного мнения по нему пока нет.

Я искренне благодарен Полю Винтернитцу за полезные обсуждения основных концепций, связывающих симметрию и разделение переменных. И в заключение я выражаю свою признательность Чарльзу Бойеру и Эрни Калнинсу, без творческого сотрудничества с которыми эта книга не была бы написана.

Уиллард Миллер, мл.

Глава 1

УРАВНЕНИЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

1.0. Введение

Основные идеи, связывающие группу симметрии некоторого линейного дифференциального уравнения в частных производных и системы координат, в которых данное уравнение допускает решения с разделяющимися переменными, можно легко продемонстрировать на конкретных примерах. Наиболее простым нетривиальным примером, подходящим для этой цели, очевидно, является приведенное волновое уравнение, или уравнение Гельмгольца,

$$(\Delta_2 + \omega^2)\Psi(x, y) = 0, \tag{0.1}$$

где ω — некоторая вещественная положительная константа и

$$\Delta_2\Psi = \partial_{xx}\Psi + \partial_{yy}\Psi.$$

(Здесь $\partial_{xx}\Psi$ — частная производная второго порядка от Ψ по переменной x.)

В этой главе мы дадим подробный анализ группы симметрии уравнения (0.1), решений с разделяющимися переменными этого уравнения, а также уравнений, с ним связанных; в дальнейшем этот анализ будет служить нам основой в подобных исследованиях гораздо более сложных задач.

На данном этапе мы рассмотрим только такие решения Ψ уравнения (0.1), которые определены на некотором открытом связном множестве $\mathscr{D}$ плоскости R^2 и аналитичны относительно вещественных переменных x, y. (Здесь $\mathscr{D}$, например, можно выбрать так, чтобы оно совпадало с этой плоскостью.) Множество всех таких решений Ψ образует векторное (комплексное) пространство $\mathscr{F}_0$, т. е. если $\Psi \in \mathscr{F}_0$ и $a \in \mathbb{C}$, то $(a\Psi)(x, y) \equiv a\Psi(x, y) \in \mathscr{F}_0$, и если Ψ_1, $\Psi_2 \in \mathscr{F}_0$, то $(\Psi_1 + \Psi_2)(x, y) \equiv \Psi_1(x, y) + \Psi_2(x, y) \in \mathscr{F}_0$. Фиксируя $\mathscr{D}$ в нашем анализе, назовем $\mathscr{F}_0$ *пространством решений* уравнения (0.1).

Пусть $\mathscr{F}$ — векторное пространство всех комплекснозначных функций, определенных и вещественно-аналитических на $\mathscr{D}$, и пусть Q — дифференциальный оператор в частных производных:

$$Q = \Delta_2 + \omega^2, \tag{0.2}$$

определенный на $\mathscr{D}$. Ясно, что $Q\Phi \in \mathscr{F}$ при $\Phi \in \mathscr{F}$, а $\mathscr{F}_0$ — такое подпространство векторного пространства $\mathscr{F}$, которое является ядром, или нуль-пространством, линейного оператора Q.

1.1. Группа симметрии уравнения Гельмгольца

Известно, что если $\Psi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x, y)$, является некоторым решением уравнения (0.1), то $\Psi^{\wedge}(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x} + \mathbf{a})$, где $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ — вещественный двумерный вектор, и $\Psi^{\wedge\wedge}(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}O)$, где

$$O(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

также будут решениями этого уравнения. (Точку $\mathbf{x}$ следует выбирать так, чтобы $\mathbf{x} + \mathbf{a}$ и $\mathbf{x}O$ лежали в $\mathscr{D}$, с тем чтобы $\Psi^{\wedge}$ и $\Psi^{\wedge\wedge}$ имели смысл при вычислении их в точке $\mathbf{x}$.) Таким образом, переносы в рассматриваемой плоскости и повороты относительно начала координат отображают решения уравнения (0.1) в решения. Эти переносы и повороты порождают группу $E(2)$ — группу движений евклидовой полости, или *евклидову группу*, элементы которой суть движения фигуры как твердого тела в данной плоскости. Как мы покажем в дальнейшем, использование евклидовой симметрии уравнения (0.1) дает возможность просто доказать многие факты относительно решений уравнения Гельмгольца. Ниже мы дадим доказательство того, что уравнение (0.1) допускает евклидову группу движений, и покажем, что в определенном смысле $E(2)$ представляет собой максимальную группу симметрии этого уравнения.

Линейный дифференциальный оператор

$$L = X(\mathbf{x})\partial_x + Y(\mathbf{x})\partial_y + Z(\mathbf{x}), \qquad X,\ Y,\ Z \in \mathscr{F}, \tag{1.1}$$

называется *оператором симметрии* для уравнения Гельмгольца, если

$$[L, Q] = R(\mathbf{x})Q, \qquad R \in \mathscr{F}, \tag{1.2}$$

где $[L, Q] = LQ - QL$ — коммутатор операторов L и Q, а аналитическая функция $R = R_L$ зависит от L. Напомним, что Q — оператор (0.2). (Соотношение (1.2) означает, что оператор справа и оператор слева, будучи примененными к любой функции $\Phi \in \mathscr{F}$, дают один и тот же результат.)

Пусть $\mathscr{G}$ — множество всех операторов симметрии уравнения Гельмгольца.

Теорема 1.1. *Оператор симметрии L отображает решения уравнения* (0.1) *в решения, т. е. если $\Psi \in \mathscr{F}_0$, то $L\Psi \in \mathscr{F}_0$.*

Доказательство. Если $\Psi \in \mathcal{F}_0$, мы имеем $\Psi \in \mathcal{F}$ и $Q\Psi = 0$. В силу (1.2) $QL\Psi = LQ\Psi - RQ\Psi = 0$ и, следовательно, $L\Psi \in \mathcal{F}_0$. ■

Кроме того, нетрудно показать, что если некоторый оператор L вида (1.1) отображает решения Ψ уравнения $Q\Psi = 0$ в решения, то L удовлетворяет соотношению коммутирования (1.2) для некоторого $R \in \mathcal{F}$. (Однако неизвестно, будет ли справедливо это утверждение для произвольного линейного дифференциального уравнения второго порядка.)

Теорема 1.2. *Множество $\mathcal{G}$ операторов симметрии является комплексной алгеброй Ли, т. е. если $L_1, L_2 \in \mathcal{G}$, то*

(1) $a_1L_1 + a_2L_2 \in \mathcal{G}$ *для всех* $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$,

(2) $[L_1, L_2] \in \mathcal{G}$.

Доказательство. Поскольку $L_1, L_2 \in \mathcal{G}$, эти операторы удовлетворяют уравнениям $[L_j, Q] = R_j(\mathrm{x})Q$, где $R_j \in \mathcal{F}$, $j = 1, 2$. Простым вычислением можно показать, что оператор первого порядка $L = a_1L_1 + a_2L_2$ удовлетворяет соотношению (1.2) при $R = a_1R_1 + a_2R_2$. Подобным же образом оператор $L = [L_1, L_2]$ — оператор первого порядка, удовлетворяющий соотношению (1.2) при $R = \tilde{L}_1R_2 - \tilde{L}_2R_1$, где в соответствии с (1.1) $L = \tilde{L} + Z(\mathrm{x})$. ■

Замечание. Не исключено, что $\mathcal{G}$ может быть бесконечномерной алгеброй Ли, хотя в рассмотренном нами примере $\dim \mathcal{G} = 4$.

А теперь в явном виде вычислим алгебру симметрии уравнения (0.1). Подставляя (0.2) и (1.1) в (1.2) и вычисляя коммутатор, находим

$$2X_x\partial_{xx} + 2(X_y + Y_x)\partial_{xy} + 2Y_y\partial_{yy} + (X_{xx} + X_{yy} + 2Z_x)\partial_x + \\ + (Y_{xx} + Y_{yy} + 2Z_y)\partial_y + (Z_{xx} + Z_{yy}) = -R(\partial_{xx} + \partial_{yy} + \omega^2). \quad (1.3)$$

Чтобы это операторное уравнение было справедливо при применении к произвольной функции $\Phi \in \mathcal{F}$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при ∂_{xx}, ∂_{yy} и т. д. в обеих частях уравнения были одинаковы:

$$\begin{aligned} &(\text{а})\quad 2X_x = -R = 2Y_y, && X_y + Y_x = 0, \\ &(\text{б})\quad X_{xx} + X_{yy} + 2Z_x = 0, && Y_{xx} + Y_{yy} + 2Z_y = 0, \qquad (1.4) \\ &(\text{в})\quad Z_{xx} + Z_{yy} = -R\omega^2. \end{aligned}$$

Из уравнений (1.4а) следует, что $X_x = Y_y$ и $X_y = -Y_x$. Следовательно, $X_{xx} + X_{yy} = Y_{xy} - Y_{xy} = 0$; подобным же образом $Y_{xx} + Y_{yy} = 0$. Сравнивая эти соотношения с уравнениями (1.4б), можно видеть, что $Z_x = Z_y = 0$, откуда $Z = \delta$ — константа. Из

(1.4в) вытекает, что $R=0$. Тогда из уравнений (1.4а) имеем $X=X(y)$, $Y=Y(x)$, причем $X'(y)=-Y'(x)$. Из последнего соотношения следует, что $X'=-Y'=\gamma\in\mathbb{C}$. Итак, общим решением уравнений (1.4) является

$$X=\alpha+\gamma y,\quad Y=\beta-\gamma x,\quad Z=\delta,\quad R=0, \tag{1.5}$$

и оператор симметрии L имеет вид

$$L=(\alpha+\gamma y)\partial_x+(\beta-\gamma x)\partial_y+\delta. \tag{1.6}$$

Ясно, что алгебра симметрии $\mathcal{G}$ четырехмерна и имеет базис

$$P_1=\partial_x,\quad P_2=\partial_y,\quad M=y\partial_x-x\partial_y,\quad E=1, \tag{1.7}$$

получаемый при $\alpha=1$ и $\beta=\gamma=\delta=0$ для P_1, $\beta=1$ и $\alpha=\gamma=\delta=0$ для P_2 и т. д. Легко проверить, что соотношениями коммутирования для этого базиса будут

$$[P_1,P_2]=0,\quad [M,P_1]=P_2,\quad [M,P_2]=-P_1 \tag{1.8}$$

и $[E,L]=0$ для всех $L\in\mathcal{G}$. Оператор симметрии E не представляет для нас никакого интереса, поэтому мы его не рассматриваем, а сосредоточим внимание на трехмерной алгебре Ли с базисом $\{P_1,P_2,M\}$ и соотношениями коммутирования (1.8). Кроме того, в силу некоторых соображений, смысл которых станет вскоре понятен, мы ограничимся рассмотрением *вещественной* алгебры Ли $\mathcal{E}(2)$ с базисом $\{P_1,P_2,M\}$, т. е. алгебры Ли, состоящей из всех элементов вида $\alpha P_1+\beta P_2+\gamma M$, где α, β, γ принадлежат полю вещественных чисел R. Алгебра $\mathcal{E}(2)$ изоморфна алгебре Ли евклидовой группы $E(2)$ плоскости R^2. Чтобы показать это, рассмотрим известную реализацию группы $E(2)$ как группы (3×3)-матриц. Элементы $E(2)$ имеют вид

$$g(\theta,a,b)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ a & b & 1\end{bmatrix},\quad \begin{matrix}a,\ b\in R,\\ 0\leqslant\theta<2\pi\,(\mathrm{mod}\,2\pi),\end{matrix} \tag{1.9}$$

а групповое произведение дается умножением матриц

$$g(\theta,a,b)\,g(\theta',a',b')=g(\theta+\theta',\ a\cos\theta'+b\sin\theta'+a',\ -a\sin\theta'+b\cos\theta'+b'). \tag{1.10}$$

Группа $E(2)$ действует как группа преобразований в данной плоскости. В самом деле, элемент группы $g(\theta,a,b)$ отображает точку $\mathbf{x}=(x,y)$ в R^2 в точку

$$\mathbf{x}g=(x\cos\theta+y\sin\theta+a,\ -x\sin\theta+y\cos\theta+b). \tag{1.11}$$

Легко проверить, что $\mathbf{x}(g_1g_2)=(\mathbf{x}g_1)g_2$ для всех $\mathbf{x}\in R^2$, $g_1, g_2\in E(2)$ и что $\mathbf{x}g(0,0,0)=\mathbf{x}$, где $g(0,0,0)$ — единичный элемент группы $E(2)$. Геометрически g соответствует повороту на угол θ по часовой стрелке относительно начала координат $(0,0)$ с последующим переносом на (a,b).

Вычисляя алгебру Ли матричной группы $E(2)$ обычным способом (см. приложение А), находим, что базис для данной алгебры Ли задается матрицами

$$M=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad P_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\quad P_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\tag{1.12}$$

с соотношениями коммутирования, тождественными (1.8). (Здесь коммутатор $[A,B]$ двух $(n\times n)$-матриц является *матричным коммутатором* $[A,B]=AB-BA$.) Следовательно, алгебра симметрии $\mathscr{E}(2)$ изоморфна алгебре Ли группы $E(2)$.

Из алгебры Ли с базисом (1.12), применяя экспоненциальное отображение, можно построить общий элемент группы (1.9). В самом деле, легко показать, что

$$g(\theta,\ a,\ b)=\exp(\theta M)\exp(aP_1+bP_2),\tag{1.13}$$

где

$$\exp(A)=\sum_{k=0}^{\infty}(k!)^{-1}A^k,\qquad A^0=E_n,\tag{1.14}$$

для любой $(n\times n)$-матрицы A (здесь E_n — единичная $(n\times n)$-матрица).

Используя классические результаты теории алгебр Ли (см. приложение А), можно действие $\mathscr{E}(2)$ на $\mathscr{F}$, задаваемое соотношениями (1.7), расширить до локального представления $\mathbf{T}$ группы $E(2)$ на $\mathscr{F}$. Так, из теоремы А.3 мы получаем операторы $\mathbf{T}(g)$, где

$$\begin{aligned}&\mathbf{T}(g(0,\ a,\ 0))\Phi(\mathbf{x})=\exp(aP_1)\Phi(\mathbf{x})=\Phi(x+a,\ y),\\&\mathbf{T}(g(0,\ 0,\ b))\Phi(\mathbf{x})=\exp(bP_2)\Phi(\mathbf{x})=\Phi(x,\ y+b),\\&\mathbf{T}(g(\theta,\ 0,\ 0))\Phi(\mathbf{x})=\exp(\theta M)\Phi(\mathbf{x})=\Phi(x\cos\theta+y\sin\theta,\\&\qquad\qquad -x\sin\theta+y\cos\theta)\end{aligned}\tag{1.15}$$

и $\Phi\in\mathscr{F}$. По аналогии с (1.13) общий оператор $\mathbf{T}(g)$ определяется так:

$$\mathbf{T}(g(\theta,\ a,\ b))\Phi(\mathbf{x})=\exp(\theta M)\exp(aP_1)\exp(bP_2)\Phi(\mathbf{x})=\Phi(\mathbf{x}g),\tag{1.16}$$

где точка $\mathbf{x}g$ задается соотношением (1.11). Итак, преобразование (1.11), определяемое элементом группы $E(2)$ как группы преобразований, в точности совпадает с преобразованием, индуцируемым производными Ли в (1.7). (Напомним, что если L — некоторая производная Ли, то по определению мы имеем

$$\exp(aL)\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} (a^k/k!)\,L^k\Phi(\mathbf{x}), \qquad \Phi \in \mathcal{F}; \tag{1.17}$$

см. (А.8).)

Следствием фундаментальных результатов теории алгебр Ли является тот факт, что для операторов $\mathbf{T}(g)$ выполняется свойство гомоморфизма

$$\mathbf{T}(gg') = \mathbf{T}(g)\,\mathbf{T}(g'), \qquad g,\ g' \in E(2); \tag{1.18}$$

впрочем, недоверчивый читатель может проверить это непосредственно. Применение формул (1.16), (1.18) требует определенной осторожности, так как для пары $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, $g \in E(2)$ элемент $\mathbf{x}g$ может и не лежать в $\mathcal{D}$ и, следовательно, функция $\Phi(\mathbf{x}g)$ не будет определена. При фиксированном же $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ элемент $\mathbf{x}g$ будет лежать в $\mathcal{D}$ при условии, что g находится в достаточно малой окрестности единичного элемента $g(0, 0, 0)$ группы $E(2)$. Следовательно, формулы (1.16) и (1.18) справедливы только локально.

Если L — оператор симметрии первого порядка уравнения Гельмгольца, т. е. L отображает решения в решения, то L^k также отображает решения в решения для каждого $k = 2, 3, 4, \ldots$. Кроме того, из (1.17) видно, что оператор $\exp(aL)$ также отображает решения в решения. Поскольку операторы $\mathbf{T}(g)$ состоят из произведений выражений вида $\exp(aL)$, $L \in \mathcal{E}(2)$, можно сделать вывод, что если $\Psi(\mathbf{x})$ — аналитическое решение уравнения $Q\Psi = 0$, то $\Psi'(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(g)\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}g)$ также будет аналитическим решением в области, которая является открытым множеством, состоящим из всех таких $\mathbf{x} \in R^2$, что $\mathbf{x}g \in \mathcal{D}$. (Если $\mathcal{D} = R^2$, то операторы $\mathbf{T}(g)$ будут определены глобально, и в этом случае определение области существования не требуется.) Основываясь на этих замечаниях, назовем $E(2)$ *группой симметрии* уравнения $Q\Psi = 0$.

Теперь легко видеть, почему мы ограничиваемся рассмотрением вещественной алгебры Ли с базисом P_1, P_2, M. Экспонента какого-либо элемента комплексной алгебры Ли, скажем iP_1, где $i = \sqrt{-1}$, является оператором симметрии уравнения Гельмгольца, но тем не менее $\exp(iP_1)\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(x + i, y)$, и мы получаем функцию, которая не определена для произвольной функции $\Phi \in \mathcal{F}$, поскольку Φ определено лишь для вещественных значений x и y. Итак, мы рассматриваем только такую алгебру Ли, экспоненты элементов которой таковы, что имеет место формула (1.16).

Аналогично тому, как мы определили операторы симметрии первого порядка для уравнения Гельмгольца, можно определить операторы симметрии второго порядка. Оператор второго порядка

$$S = A_{11}\partial_{xx} + A_{12}\partial_{xy} + A_{22}\partial_{yy} + B_1\partial_x + B_2\partial_y + C, \quad A_{jk},\ B_j,\ C \in \mathscr{F}, \tag{1.19}$$

называется *оператором симметрии* уравнения (0.1), если

$$[S, Q] = U(\mathbf{x})Q, \tag{1.20}$$

где $U(\mathbf{x})$ — дифференциальный оператор первого порядка

$$U = H_1(\mathbf{x})\partial_x + H_2(\mathbf{x})\partial_y + J(\mathbf{x}), \qquad H_j,\ J \in \mathscr{F}. \tag{1.21}$$

(Здесь U может зависеть от S.) Рассмотрим оператор симметрии первого порядка L как частный случай оператора симметрии второго порядка. При $S = L$ уравнение (1.20) выполняется, если $H_1 = H_2 = 0$. Поскольку коммутатор операторов второго порядка является оператором порядка $\leqslant 3$, мы требуем, чтобы U был оператором первого порядка.

Следующая теорема доказывается так же, как теорема 1.1.

Теорема 1.3. *Оператор симметрии второго порядка S отображает решения уравнения* (0.1) *в решения, т. е. если $\Psi \in \mathscr{F}_0$, то $S\Psi \in \mathscr{F}_0$.*

Нетрудно доказать, что если оператор S в (1.19) отображает решения Ψ уравнения $Q\Psi = 0$ в решения, то S удовлетворяет соотношению коммутирования (1.20) для некоторого U вида (1.21).

Пусть $\mathscr{S}$ будет векторным пространством всех операторов симметрии второго порядка S. Ясно, что $\mathscr{S}$ содержит алгебру симметрии первого порядка $\mathscr{G}$. Однако $\mathscr{S}$ не является алгеброй Ли при обычном определении оператора коммутирования, поскольку коммутатор $[S, S']$ двух операторов симметрии второго порядка, вообще говоря, является оператором третьего порядка и, следовательно, не является элементом векторного пространства $\mathscr{S}$. (Заметим, что $[S, S']$ все еще отображает решения в решения.)

Среди элементов векторного пространства $\mathscr{S}$ содержатся все операторы вида RQ, где R — произвольный элемент пространства $\mathscr{F}$. Действительно, оператор $S = RQ$ удовлетворяет соотношению (1.20), где $U = [R, Q]$ — дифференциальный оператор первого порядка. Можно непосредственно проверить, что RQ отображает решения Ψ уравнения $Q\Psi = 0$ в решения же. Поскольку $(RQ)\Psi = R(Q\Psi) = 0$, решение Ψ отображается в решение, тождественно равное нулю. Итак, операторы RQ являются симметриями тривиального вида и действуют как нулевой оператор в пространстве решений $\mathcal{F}_0$.

Множество всех тривиальных симметрий $\mathfrak{q} = \{RQ\colon R \in \mathcal{F}\}$ образует подпространство векторного пространства $\mathcal{S}$, и каждый элемент $\mathfrak{q}$ действует как нулевой оператор на $\mathcal{F}_0$. Впредь мы будем игнорировать это подпространство $\mathfrak{q}$ и будем рассматривать факторпространство нетривиальных симметрий $\mathcal{S}/\mathfrak{q}$. Итак, будем считать две симметрии S, S' в $\mathcal{S}$ тождественными ($S \equiv S'$), если $S' = S + RQ$ для некоторого $R \in \mathcal{F}$. Если S задается формулой (1.19), то $S \equiv S'$, где $S' = S - A_{22}Q$, и, следовательно, коэффициент при ∂_{yy} в выражении для S' равен нулю. Поэтому все симметрии S эквивалентны симметриям S', у которых коэффициенты при ∂_{yy} равны нулю. (Заметим, что операторы S и S' совпадают на пространстве решений $\mathcal{F}_0$.) Кроме того, два оператора S_1, S_2, у которых коэффициенты при ∂_{yy} равны нулю, совпадают на $\mathcal{F}_0$ тогда и только тогда, когда остальные их коэффициенты тождественны.

Вычисление всех нетривиальных симметрий выполняется просто. Подставляем выражения (1.19) (при $A_{22} = 0$) и (1.21) в формулу (1.20) и в полученном соотношении приравниваем коэффициенты при различных частных производных по x и y в правой и левой частях. В результате получаем уравнения, аналогичные (1.3) и (1.4), но более сложные. Здесь мы представляем только результаты нашего вычисления.

Факторпространство $\mathcal{S}/\mathfrak{q}$ представляет собой девятимерное комплексное векторное пространство с базисом

$$\begin{aligned} &(\text{а})\quad P_1,\ P_2,\ M,\ E,\\ &(\text{б})\quad P_1^2,\ P_1P_2,\ M^2,\ \{M, P_1\},\ \{M, P_2\}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Здесь $\{A, B\} = AB + BA$, где A, B — операторы на $\mathcal{F}$. Заметим, что если A и B — операторы симметрии первого порядка, то произведения AB и BA будут операторами симметрии второго порядка. Из (1.22) видно, что уравнение Гельмгольца допускает только эти нетривиальные симметрии и никаких иных, т. е. все операторы симметрии второго порядка являются квадратичными многочленами от элементов множества $\mathcal{G}$. (В действительности можно показать, что операторы нетривиальных симметрий любого порядка являются многочленами от элементов множества $\mathcal{G}$, но в этом нет никакой необходимости.) Вообще говоря, если $Q\Psi = 0$ — дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, у которого все нетривиальные операторы симметрии второго порядка являются квадратичными многочленами от элементов алгебры симметрии первого порядка $\mathcal{G}$, то мы называем такое уравнение *уравне-*

нием класса I. Если существует некоторый нетривиальный оператор симметрии второго порядка, который не может быть представлен квадратичным многочленом от операторов симметрии первого порядка, то такое уравнение называется *уравнением класса* II. На основании (1.22) можно сделать вывод, что уравнение Гельмгольца является уравнением класса I.

А теперь несколько замечаний относительно символа $\{\cdot, \cdot\}$. Рассмотрим оператор симметрии второго порядка MP_1. Заметим, что

$$MP_1 = {}^1/_2(MP_1 + P_1M) + {}^1/_2(MP_1 - P_1M) = {}^1/_2\{M, P_1\} + {}^1/_2[M, P_1].$$

Итак, мы представили MP_1 в виде суммы оператора в точности второго (не первого) порядка ${}^1/_2\{M, P_1\}$ и оператора первого порядка ${}^1/_2[M, P_1] = {}^1/_2P_2$. Аналогичным образом любое произведение AB элементов алгебры $\mathscr{E}(2)$ можно однозначно представить в виде суммы симметризованной части чисто второго порядка ${}^1/_2\{A, B\}$ и коммутатора ${}^1/_2[A, B]$, принадлежащего алгебре $\mathscr{E}(2)$. В (1.22а) дан базис для операторов первого порядка в $\mathscr{S}/\mathfrak{q}$, в (1.22б) — базис для подпространства операторов чисто второго порядка.

Чтобы подойти к пятимерному пространству, натянутому на базис (1.22б), с другой точки зрения, рассмотрим пространство $\mathscr{E}(2)^{(2)}$ симметризованных операторов второго порядка из алгебры $\mathscr{E}(2)$. Базис этого шестимерного пространства состоит из пяти операторов, указанных в (1.22б), и оператора P_2^2. Однако на $\mathscr{F}_0$ оператор $P_1^2 + P_2^2 \in \mathscr{E}(2)^{(2)}$ совпадает с оператором $-\omega^2$, т. е. является оператором умножения на постоянную $-\omega^2$. Итак, для того чтобы охарактеризовать элементы пространства $\mathscr{E}(2)^{(2)}$, действие которых на $\mathscr{F}_0$ отлично от указанного, нужно перейти к факторпространству $\mathscr{E}(2)^{(2)}/\{P_1^2 + P_2^2\}$, где $\{P_1^2 + P_2^2\}$ — подпространство пространства $\mathscr{E}(2)^{(2)}$, состоящее из всех элементов вида $a(P_1^2 + P_2^2)$, $a \in R$. Мы поступает так потому, что два оператора S_1, S_2 в $\mathscr{E}(2)^{(2)}$, такие, что $S_1 - S_2 = a(P_1^2 + P_2^2)$, имеют на $\mathscr{F}_0$ одни и те же собственные функции с соответствующими собственными значениями, отличающимися на величину $a\omega^2$.

До сих пор мы рассматривали $\mathscr{S}/\mathfrak{q}$ как пространство всех *комплексных* линейных комбинаций базисных операторов (1.22). А теперь покажем, что для описания связи между операторами симметрии и разделением переменных для вещественного уравнения Гельмгольца достаточно рассмотреть только *вещественные* линейные комбинации базисных операторов (1.22). Чтобы не вводить новый символ для обозначения вещественного девятимерного векторного пространства, мы сохраним символ $\mathscr{S}/\mathfrak{q}$, но теперь будем считать, что это векторное пространство определено над R, а не над $\mathbb{C}$.

Учитывая это замечание, мы видим, что пятимерное подпространство операторов чисто второго порядка в $\mathcal{S}/\mathfrak{q}$ изоморфно факторпространству $\mathcal{E}(2)^{(2)}/\{P_1^2+P_2^2\}$, т. е. мы можем отождествить операторы симметрии чисто второго порядка уравнения Гельмгольца с элементами чисто второго порядка в универсальной обвертывающей алгебре алгебры $\mathcal{E}(2)$ по модулю центра этой обвертывающей алгебры. Такая точка зрения будет использована при изучении орбит в разд. 1.2.

1.2. Разделение переменных для уравнения Гельмгольца

Метод разделения переменных для решения уравнений в частных производных, который легко продемонстрировать при решении некоторых важных задач, в общем виде оказывается весьма тонким, и описать его довольно трудно. Поэтому мы начнем с наиболее простых случаев, а затем постепенно перейдем к случаям, все более и более сложным.

Пока мы удовлетворимся несколько расплывчатым определением, утверждающим, что метод разделения переменных — это метод нахождения решений некоторого уравнения второго порядка в частных производных с n переменными, который состоит в сведении этого уравнения к некоторой системе из n (самое большее) обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Будем искать решения уравнения (0.1) в виде $\Psi(x,y)=X(x)Y(y)$. Тогда уравнение Гельмгольца примет вид

$$X''Y+XY''+\omega^2XY=0, \tag{2.1}$$

где штрих означает дифференцирование. Это уравнение можно записать в следующем виде:

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}-\omega^2, \tag{2.2}$$

где левая часть — функция только от x, а правая — функция только от y. (Следовательно, в (2.2) декартовы координаты x, y разделяются.) Это возможно лишь в том случае, когда обе части нашего уравнения равны некоторой константе $-k^2$, называемой *константой разделения*. Таким образом, уравнение (2.2) эквивалентно двум обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$X''(x)+k^2X(x)=0, \quad Y''(y)+(\omega^2-k^2)Y(y)=0. \tag{2.3}$$

Базисом решений первого уравнения (2.3) является $X_1=e^{ikx}$, $X_2=e^{-ikx}$ при $k\neq 0$, базисом решений второго уравнения является $Y_1 = \exp(i(\omega^2 - k^2)^{1/2}y)$, $Y_2 = \exp(-i(\omega^2 - k^2)^{1/2}y)$, если $\omega^2 - k^2 \neq 0$. Итак, мы находим решения $\Psi(x, y)$ уравнения (0.1) в виде

$$\Psi_k(\mathbf{x}) = \sum_{j,\, l=1}^{2} A_{jl} X_j(x) Y_l(y), \qquad (2.4)$$

где комплексные константы A_{jl} произвольны. Несмотря на то что Ψ_k — решения весьма частного вида уравнения (0.1), можно показать, что в сущности любое решение уравнения Гельмгольца можно представить в виде суммы или интеграла (по k) этих частных решений.

Заметим, что решение с разделенными переменными $\Psi_k = X_1Y_1 = \exp\{i[kx + (\omega^2 - k^2]^{1/2}y]\}$ является общим собственным вектором коммутирующих операторов $P_1 = \partial_x$ и $P_2 = \partial_y$:

$$P_1\Psi_k = ik\Psi_k, \quad P_2\Psi_k = i(\omega^2 - k^2)^{1/2}\Psi_k; \qquad (2.5)$$

подобное замечание можно сделать и относительно остальных решений с разделенными переменными X_jY_l. Итак, мы можем охарактеризовать решения с разделенными переменными в декартовых координатах, указав, что они являются общими собственными функциями операторов симметрии $P_1, P_2 \in \mathscr{E}(2)$ в $\mathscr{F}_0$.

Чтобы рассмотреть следующий пример, перейдем к полярным координатам r, θ:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad 0 \leqslant r, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi \,(\mathrm{mod}\, 2\pi). \qquad (2.6)$$

В этих координатах уравнение Гельмгольца принимает вид

$$\left(\partial_{rr} + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta} + \omega^2\right)\Psi(r, \theta) = 0. \qquad (2.7)$$

Будем искать решения вида $\Psi = R(r)\Theta(\theta)$. Подставляя это выражение в (2.7) и перегруппировывая члены, получаем

$$\left(r^2R'' + rR' + r^2\omega^2\right)R^{-1} = -\Theta''\Theta^{-1}. \qquad (2.8)$$

Поскольку правая часть соотношения (2.8) — функция только от θ, а левая — функция только от r, обе части этого соотношения должны быть равны некоторой константе k^2. Следовательно, уравнение (2.8) эквивалентно двум обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\Theta''(\theta) + k^2\Theta(\theta) = 0, \quad r^2R''(r) + rR'(r) + (r^2\omega^2 - k^2)\,R = 0. \qquad (2.9)$$

Первое уравнение имеет решения $\Theta = e^{\pm ik\theta}$, а второе, уравнение Бесселя, — решения $R = J_{\pm k}(\omega r)$, где $J_\nu(z)$ — функция Бесселя (см. формулу (Б.14)). Заметим, что решение с разделенными переменными $\Psi_k = J_k(\omega r)e^{ik\theta}$ является собственным вектором оператора $M \in \mathscr{E}(2)$. Действительно, в полярных координатах

$M = -\partial_\theta$, и, следовательно, $\Psi_k \in \mathscr{F}_0$ есть решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее также соотношению

$$M\Psi_k = -ik\Psi_k. \qquad (2.10)$$

Подобные замечания справедливы также и для остальных решений с разделенными переменными в полярных координатах.

В каждом из рассмотренных нами примеров мы видели, что решения с разделенными переменными характеризовались как собственные функции некоторого элемента алгебры симметрии $\mathscr{E}(2)$ с константой разделения k, играющей роль собственного значения.

Пусть дан произвольный оператор L в $\mathscr{E}(2)$; можно ли найти систему координат $\{u, v\}$, допускающую разделение переменных в уравнении Гельмгольца, т. е. такую, что решения с разделенными переменными являются собственными функциями оператора L? Проводимое ниже рассуждение показывает, что это возможно. Если L — ненулевой оператор вида

$$L = A(\mathbf{x})\,\partial_x + B(\mathbf{x})\,\partial_y, \qquad A,\ B \in \mathscr{F},$$

то в окрестности некоторой фиксированной точки $\mathbf{x}_0 \in \mathscr{D}$ всегда можно найти такие новые координаты u, v, что $L = \partial_u$. Непосредственное введение (неединственных) координат u, v см. в [1] либо в [142]. (Здесь и далее при анализе координат мы требуем, чтобы новые координаты $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$ были вещественными аналитическими функциями от x и y, причем обратные функции $x(u, v)$ и $y(u, v)$ также являются вещественными и аналитическими. Новая система координат может быть определена только в окрестности некоторой точки $\mathbf{x}_0$ и не обязательно должна покрывать всю плоскость (x, y).)

Представляя оператор Лапласа Δ_2 в координатах u, v, находим, что

$$Q = \Delta_2 + \omega^2 = B_{11}\partial_{uu} + B_{12}\partial_{uv} + B_{22}\partial_{vv} + C_1\partial_u + C_2\partial_v + \omega^2, \qquad (2.11)$$

где функции B_{ij}, C_j аналитичны в окрестности точки $\mathbf{x}_0$. Допустим, что L — оператор симметрии, т. е. $L \in \mathscr{E}(2)$; тогда $[L, Q] = 0$. Подставляя в это выражение $L = \partial_u$ и правую часть (2.11) вместо Q и вычисляя коммутатор, находим, что функции B_{ij}, C_j не зависят от u. Уравнение $Q\Psi = 0$ будет иметь решения с разделенными переменными вида $\Psi_k = e^{iku}V(v)$, где V удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$B_{22}V'' + (ikB_{12} + C_2)\,V' + (-k^2B_{11} + ikC_1 + \omega^2)\,V = 0. \qquad (2.12)$$

Решения Ψ_k характеризуются уравнением на собственные значения

$$L\Psi_k = ik\Psi_k. \qquad (2.13)$$

Таким образом, мы нашли решения с разделенными переменными уравнения (0.1), удовлетворяющие соотношению (2.13), и добились разделения переменных в том смысле, что множители каждого решения с разделенными переменными удовлетворяют некоторому обыкновенному дифференциальному уравнению.

Следует заметить, что для каждого $g \in E(2)$ функция $\mathbf{T}(g)\Psi_k$, где $\mathbf{T}(g)$ задается соотношением (1.16), является решением уравнения Гельмгольца, которое также удовлетворяег уравнению на собственные значения

$$L^g(\mathbf{T}(g)\Psi_k) = ik\mathbf{T}(g)\Psi_k, \tag{2.14}$$

если Ψ_k удовлетворяет (2.13). Здесь

$$L^g = \mathbf{T}(g)L\mathbf{T}(g^{-1}) \tag{2.15}$$

— оператор симметрии, поскольку он является произведением трех операторов, коммутирующих с Q. Кроме того, L^g — дифференциальный оператор первого порядка. В самом деле, если

$$L = A(\mathbf{x})\partial_x + B(\mathbf{x})\partial_y, \tag{2.16а}$$

то прямым вычислением получаем

$$L^g = A(\mathbf{x}')\partial_{x'} + B(\mathbf{x}')\partial_{y'}, \tag{2.16б}$$

где $(x', y') = \mathbf{x}' = \mathbf{x}g$. (При помощи цепного правила L^g можно представить в исходных переменных x, y.) Итак, $L^g \in \mathscr{E}(2)$. Если Ψ_k — решение с разделенными переменными в системе координат $\mathbf{u} = (u, v)$, то $\mathbf{T}(g)\Psi_k$ будет решением с разделенными переменными в системе координат $\mathbf{u}' = \mathbf{u}g$, получающейся в результате евклидова преобразования координат в плоскости (x, y). Поскольку допускающие разделение переменных координаты $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}'$ могут быть отображены друг в друга преобразованием из группы симметрии $E(2)$, мы считаем эти системы координат *эквивалентными.* Заметим также, что координаты и собственные функции, соответствующие оператору L, тождественны координатам и собственным функциям, соответствующим оператору cL, где c — ненулевая вещественная константа. Таким образом, оператор $L \in \mathscr{E}(2)$ и все операторы cL_g, $g \in E(2)$, приводят к эквивалентным координатам, допускающим разделение переменных.

Действие $L \to L^g$ группы $E(2)$ на $\mathscr{E}(2)$, являющееся *сопряженным представлением,* разбивает $\mathscr{E}(2)$ на *орбиты* одномерных подпространств. Мы говорим, что $K \in \mathscr{E}(2)$ лежит на той же орбите, что и L, если $K = cL^g$ для некоторого ненулевого $c \in R$ и некоторого $g \in E(2)$. (Заметим, что $L^{gg'} = (L^{g'})^g$.)

Для того чтобы при помощи формул (2.12), (2.13) найти все возможные неэквивалентные системы координат, допускающие разделение переменных, и соответствующие решения с разделенными переменными, мы должны, руководствуясь приведенными выше замечаниями, разбить алгебру $\mathscr{E}(2)$ на орбиты действием группы симметрии $E(2)$. Анализ получаемых орбит выполняется в явном виде при помощи формул (2.16). Другим полезным выражением является

$$\exp(aK)L\exp(-aK)=L+a[K, L]+\frac{a^2}{2}[K, [K, L]]+\ldots$$
$$\ldots+\frac{a^n}{n!}[K, [\ldots, [K, L]]\ldots]+\ldots=e^{a\,\mathrm{Ad}\,K}(L), \quad (2.17)$$

где K — производная Ли на алгебре симметрии $\mathscr{E}(2)$, $a\in R$, а $\mathrm{Ad}\,K$ — линейный оператор на $\mathscr{E}(2)$, определяемый соотношением $\mathrm{Ad}\,K(L)=(K, L)$. Доказательство см. в [134].

Теперь определим сопряженное действие группы симметрии $E(2)$ на базис P_1, P_2, M алгебры $\mathscr{E}(2)$. Если $g_1=\exp(aP_1)$ (перенос), мы имеем

$$P_1^{g_1}=P_1, \quad P_2^{g_1}=P_2, \quad M^{g_1}=M-aP_2; \quad (2.18)$$

если $g_2=\exp(bP_2)$ (перенос), мы имеем

$$P_1^{g_2}=P_1, \quad P_2^{g_2}=P_2, \quad M^{g_2}=M+bP_1; \quad (2.19)$$

если $g_3=\exp(\alpha M)$ (поворот), мы имеем

$$P_1^{g_3}=\cos(\alpha)P_1+\sin(\alpha)P_2,$$
$$P_2^{g_3}=-\sin(\alpha)P_1+\cos(\alpha)P_2, \quad M^{g_3}=M \quad (2.20)$$

Пусть

$$L=c_1P_1+c_2P_2+c_3M\in\mathscr{E}(2), \quad (2.21)$$

и пусть $c_3\neq 0$. Тогда из (2.18) и (2.19) следует, что $L^{g_1g_2}=c_3M$, если a и b выбираются так, что $a=c_2/c_3$, $b=-c_1/c_3$. Следовательно, L лежит на той же орбите, что и M. С другой стороны, если $c_3=0$ и $c_1^2+c_2^2>0$, то легко видеть, что g_3 можно выбрать так, что $L^{g_3}=(c_1^2+c_2^2)^{1/2}P_2$. Следовательно, L будет лежать на той же орбите, что и P_2.

В заключение заметим, что при сопряженном действии группы симметрии $E(2)$ на $\mathscr{E}(2)$ имеются только две орбиты, а именно орбиты, содержащие операторы

$$M, \quad P_2 \quad (2.22)$$

соответственно. Ненулевой оператор $L\in\mathscr{E}(2)$, определяемый формулой (2.21), лежит либо на первой, либо на второй орбите в зависимости от того, какое из соотношений $c_3\neq 0$ или $c_3=0$ имеет место. Таким образом, при помощи формул (2.12), (2.13) для уравнения Гельмгольца можно получить только две системы координат, допускающие разделение переменных, а именно полярную и декартову системы координат. Эти системы называются *координатами подгрупп*, так как они соответствуют диагонализации образующих для подгруппы поворота и подгруппы переноса группы симметрии $E(2)$.

А теперь найдем в явном виде системы координат, допускающие разделение переменных в уравнении

$$(\partial_{xx}+\partial_{yy}+\omega^2)\Psi=0, \tag{2.23}$$

и покажем, что, кроме систем координат, называемых координатами подгрупп, существуют и другие системы. Пусть $\{u, v\}$ — некоторая система координат, допускающая разделение переменных. Тогда $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$; следовательно, $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ и якобиан $J=v_xu_y-u_xv_y=(y_ux_v-x_uy_v)^{-1}$ отличен от нуля. Записывая (2.23) в системе $\{u, v\}$, получаем

$$\begin{aligned}\{(u_x^2+u_y^2)\partial_{uu}+(u_{xx}+u_{yy})\partial_u+2(u_xv_x+u_yv_y)\partial_{uv}+\\ +(v_x^2+v_y^2)\partial_{vv}+(v_{xx}+v_{yy})\partial_v+\omega^2\}\Psi=0.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Теперь требуется выполнить разделение переменных в уравнении (2.24) в системе координат $\{u, v\}$. Необходимо рассмотреть два случая в зависимости от того, будет ли коэффициент при ∂_{uv} равен нулю или нет.

Случай I. $u_xv_x+u_yv_y=0$

Взаимозаменяя по мере необходимости u и v и используя тот факт, что $J\neq 0$, будем полагать, что существует ненулевая функция $\mathcal{R}$, такая, что $v_y=\mathcal{R}u_x$, $v_x=-\mathcal{R}u_y$. Поскольку в (2.24) входит член ω^2, для разделения переменных необходимо, чтобы

$$u_x^2+u_y^2=\frac{\mathcal{U}(u)}{\mathcal{U}_1(u)+\mathcal{V}_1(v)},\qquad v_x^2+v_y^2=\frac{\mathcal{V}(v)}{\mathcal{U}_1(u)+\mathcal{V}_1(v)}, \tag{2.25}$$

где $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}_1+\mathcal{V}_1$ и $\mathcal{V}$ — ненулевые функции. Кроме того, поскольку $v_x^2+v_y^2=\mathcal{R}^2(u_x^2+u_y^2)$, мы имеем $\mathcal{R}^2=\mathcal{V}/\mathcal{U}$, т. е. $\mathcal{R}$ — отношение функции от u к функции от v.

Предположим, что $\tilde{u}=\tilde{u}(u)$, $\tilde{v}=\tilde{v}(v)$ — вещественные аналитические функции от u и v соответственно, причем $d\tilde{u}/du\neq 0$, $d\tilde{v}/dv\neq 0$. Тогда $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ будет определять некоторую систему координат, которую мы по вполне понятным причинам считаем эквивалентной первоначальной системе $\{u, v\}$. Если в (2.24) выбрать координаты $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ так, чтобы

$$d\tilde{u}/du=\mathcal{U}^{-1/2},\qquad d\tilde{v}/dv=\mathcal{V}^{-1/2},$$

то соотношения (2.25) будут выполняться для системы координат $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ в плоскости $\{u, v\}$, причем в числителях справа мы будем иметь $\tilde{\mathscr{U}} = 1$, $\tilde{\mathscr{V}} = 1$ соответственно. Следовательно, можно без потери общности опустить знаки тильды и полагать, что координаты $\{u, v\}$ удовлетворяют (2.25), причем $\mathscr{U}(u) \equiv \equiv \mathscr{V}(v) \equiv 1$. Поэтому можно положить $\mathscr{R} \equiv 1$; тогда

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \tag{2.26}$$

и функции u, v удовлетворяют уравнениям Коши — Римана [2]. Это означает, что если комплексные переменные z, w определить соотношениями

$$z = x + iy, \quad w = u + iv, \tag{2.27}$$

то $w = f(z)$, где f — комплексная аналитическая функция. Более того, соотношения (2.25) принимают вид $|dw/dz|^2 = = (\mathscr{U}_1(u) + \mathscr{V}_1(u))^{-1}$, или

$$|dz/dw|^2 = \mathscr{U}_1(u) + \mathscr{V}_1(v), \tag{2.28}$$

или, наконец,

$$\partial_{uv}(|dz/dw|^2) = 0. \tag{2.29}$$

Воспользуемся соображениями, приведенными в [99]. Запишем уравнение (2.29) не в переменных u, v, а в переменных w и $\bar{w} = u - iv$. Используя тот факт, что $\partial_{uv} = i\partial_{ww} - i\partial_{\bar{w}\bar{w}}$ и $|dz/dw|^2 = (dz/dw)(d\bar{z}/d\bar{w})$, где первый множитель — функция только от w, а второй — функция только от $\bar{w}$, находим, что

$$\left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}}\right) \frac{d^2}{dw^2} \left(\frac{dz}{dw}\right) = \left(\frac{dz}{dw}\right) \frac{d^2}{d\bar{w}^2} \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}}\right),$$

откуда

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)^{-1} \frac{d^2}{dw^2} \left(\frac{dz}{dw}\right) = \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}}\right)^{-1} \frac{d^2}{d\bar{w}^2} \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}}\right),$$

где левая часть зависит только от w, а правая — только от $\bar{w}$. Следовательно, существует некоторая комплексная константа λ, такая, что

$$\frac{d^2}{dw^2} \left(\frac{dz}{dw}\right) = \lambda \frac{dz}{dw}, \quad \frac{d^2}{d\bar{w}^2} \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}}\right) = \lambda \frac{d\bar{z}}{d\bar{w}}. \tag{2.30}$$

Решения этих дифференциальных уравнений третьего порядка дают в случае I те системы координат, в которых уравнение Гельмгольца имеет решения с разделенными переменными.

Прежде чем решать эти уравнения, рассмотрим

Случай II. $u_x v_x + u_y v_y \neq 0$

Единственный способ разделения переменных в этом случае состоит в том, что мы должны потребовать (выполняя, если необходимо, замену одной из переменных, скажем u, на функцию от нее самой), чтобы все коэффициенты при частных производных ∂_{uu}, ∂_u, ∂_{uv}, ∂_{vv}, ∂_v в (2.24) были функциями только от v. Тогда, подставляя в (2.24) $\Psi(u, v) = e^{iku}\Phi(v)$, мы видим, что члены, зависящие от u, выносятся за скобки, а в скобках остается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (зависящее от k) для функции Φ. Ясно, что оператор ∂_u является оператором симметрии для уравнения Гельмгольца, и, следовательно, мы пришли к способу разделения переменных, описанному в (2.12) и (2.13). Как мы видели раньше, по модулю группы движений в евклидовой плоскости можно взять либо $\partial_u = P_2$, либо $\partial_u = M$, где P_2 и M заданы равенствами (1.7).

В первом случае мы имеем систему координат $\{u, v\}$, связанную с системой координат $\{x, y\}$ соотношением

$$\partial_y = u_y\partial_u + v_y\partial_v = \partial_u.$$

Таким образом, $u_y = 1$, $v_y = 0$ и $v(x, y)$ зависит только от x. Заменяя (в случае необходимости) v новой переменной $\tilde{v}(v)$, можно положить $v = x$. Интегрируя уравнение $u_y = 1$, мы получаем явные выражения для координат u, v:

$$u = y + h(x), \qquad v = x, \tag{2.31}$$

в которых переменные в (2.24) разделяются; для выполнения условия случая II необходимо потребовать, чтобы $h'(x) \neq 0$. Заметим, что эти координаты неортогональны, т. е. кривые $u = \text{const}$ не ортогональны кривым $v = \text{const}$ в смысле обычного евклидова скалярного произведения. Строя решения с разделенными переменными уравнения (0.1), соответствующие системе координат (2.31), читатель может легко проверить, что отличие между этими решениями и решениями в декартовых координатах незначительно.

Аналогичным образом, если $\partial_u = M$, то система координат, допускающая разделение переменных, имеет вид

$$u = \theta + h(r), \qquad v = r, \qquad h'(r) \neq 0, \tag{2.32}$$

где r, θ — полярные координаты. В этом случае координаты также неортогональны и лишь слегка отличаются от решений с разделенными переменными в полярных координатах.

Заметим, что в случае II имеется бесконечное множество систем координат, допускающих разделение переменных и соответствующих единственному оператору симметрии L, но все эти системы по существу идентичны. Некоторые авторы не считают эти системы по-настоящему допускающими разделение переменных и сохраняют термин «допускающие разделение переменных» для систем координат случая I. Однако с теоретико-групповой точки зрения я не вижу никаких причин, по которым такие системы следовало бы исключить из семейства систем координат, допускающих решения с разделенными переменными, хотя они могут и не представлять никакого интереса.

Прежде чем возвратиться к подробному исследованию систем координат для случая I, следует заметить, что все эти системы ортогональны. В самом деле, как читатель может легко проверить, ортогональность следует сразу же из соотношения $u_x v_x + u_y v_y = 0$.

Решим уравнения (2.30) для частного случая, когда $\lambda = 0$. Решение для dz/dw имеет вид

$$dz/dw = \beta + \gamma w, \qquad \beta, \gamma \in \mathbb{C}. \tag{2.33}$$

Если $\gamma = 0$, $\beta = c + id$, находим, что $z = \beta w + \alpha$, или

$$x = a + cu - dv, \quad y = b + du + cv, \quad \alpha = a + ib, \tag{2.34}$$

где $a, b, c, d \in R$. Легко видеть, что координаты u, v получаются из декартовых координат при помощи евклидовой группы движений и растяжения $x, y \to (c^2 + d^2)^{1/2}x, (c^2 + d^2)^{1/2}y$. Поскольку мы не различаем системы координат $\{u, v\}$ и $\{h(u), k(v)\}$ и поскольку системы, получаемые одна из другой при помощи евклидовой группы движений, мы считаем эквивалентными, можно видеть, что все системы, определенные в (2.34), эквивалентны декартовой системе координат.

Если в (2.33) $\gamma \neq 0$, то мы имеем решение

$$z = (\gamma/2) w^2 + \beta w + \alpha, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}.$$

Так же как и в предыдущем случае, выбирая подходящие коэффициенты растяжения и преобразования евклидовой группы, можно показать, что эта система эквивалентна системе, для которой $\gamma = 1$, $\beta = \alpha = 0$; следовательно,

$$x = {}^1/_2 (u^2 - v^2), \qquad y = uv. \tag{2.35}$$

Координаты u, v называются *параболическими*, так как координатные линии $u = [(x^2 + y^2)^{1/2} + x]^{1/2} = \text{const}$ и $v = \pm [(x^2 + y^2)^{1/2} - x]^{1/2} = \text{const}$ образуют два ортогональных семейства софокусных парабол. (По условию u может принимать только положительные значения, а v может быть как положительным, так и отрицательным. Поскольку обратная функция $w = (2z)^{1/2}$ неоднозначно определена на всей плоскости (x, y), мы делаем разрез по отрицательной части оси x (см. [99]).)

Подставляя выражения (2.35) в (2.24), мы получаем уравнение

$$\partial_{uu}\Psi + \partial_{vv}\Psi + (u^2 + v^2)\,\omega^2\Psi = 0, \tag{2.36}$$

в котором переменные, очевидно, разделяются. Действительно, полагая $\Psi = U(u)V(v)$, мы находим, что

$$U'' + (\omega^2 u^2 - k^2)U = 0, \quad V'' + (\omega^2 v^2 + k^2)V = 0, \qquad (2.37)$$

где k^2 — константа разделения. Оба уравнения (2.37) являются слегка видоизмененными формами уравнения параболического цилиндра, а решения с разделяющимися переменными Ψ_k являются произведениями функций параболического цилиндра (см. приложение В).

Умножая первое уравнение (2.37) на v^2V, а второе на u^2U и вычитая затем второе уравнение из первого, мы получаем следующее уравнение на собственные значения:

$$(u^2 + v^2)^{-1}(v^2\partial_{uu} - u^2\partial_{vv})\Psi_k = k^2\Psi_k.$$

Обозначим через S оператор в левой части этого выражения; решения Ψ_k уравнения Гельмгольца отображаются оператором S в другие решения, а именно в $k^2\Psi_k$. Поэтому можно предполагать, что $S \in \mathcal{S}/\mathfrak{q}$, т. е. S — оператор симметрии второго порядка. В самом деле, прямое вычисление дает

$$\{M, P_2\}\Psi_k = k^2\Psi_k, \qquad (2.38)$$

откуда $S = \{M, P_2\}$. Итак, мы охарактеризовали решения с разделяющимися переменными в параболических координатах как собственные функции оператора симметрии $\{M, P_2\}$. Константа разделения k^2 является собственным значением этого оператора. Подобным образом решения с разделяющимися переменными в декартовых координатах суть собственные функции оператора симметрии P_2^2.

Теперь найдем решения уравнений (2.30), когда $\lambda \neq 0$. Поскольку первое из этих уравнений является комплексным сопряжением второго, λ — вещественная величина. Больше того, выполняя, если необходимо, растяжение координат, можно положить $\lambda = 1$. Решение для dz/dw имеет вид

$$dz/dw = \alpha e^{w} - \beta e^{-w}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C};$$

следовательно,

$$z = \alpha e^{w} + \beta e^{-w} + \gamma, \qquad \gamma \in \mathbb{C}. \qquad (2.39)$$

Осуществляя (в случае необходимости) перенос и поворот координат в плоскости (x, y), можно положить $\gamma = 0$ и $\alpha \geqslant 0$. Если $\beta = 0$, $\alpha > 0$, мы полагаем $r = \alpha e^{u}$, $\theta = v$, с тем чтобы получить *полярную* систему координат

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi. \qquad (2.40)$$

(Ясно, что если координаты $\{u, v\}$ допускают решения уравнения Гельмгольца с разделяющимися переменными, то координаты $\{r, \theta\}$ также допускают такие решения.)

Если $\alpha\beta \neq 0$, то нашу систему координат можно повернуть в плоскости (x, y), с тем чтобы имело место неравенство $\alpha\beta > > 0$. Таким образом,

$$2\alpha = \exp(a - b + i\varphi), \qquad 2\beta = \exp(a + b - i\varphi),$$

и, полагая $d = e^a$, $\xi = u - b$, $\eta = v + \varphi$, мы получаем допускающие решения с разделяющимися переменными *эллиптические* координаты $\{\xi, \eta\}$:

$$x = d \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \qquad y = d \operatorname{sh} \xi \sin \eta. \tag{2.41}$$

(Можно было бы положительную константу d положить равной 1, но мы сохраняем величину d такой, чтобы она отвечала принятому выше условию.) Координатные линии $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$ описываются уравнениями

$$\frac{x^2}{d^2 \operatorname{ch}^2 \xi} + \frac{y^2}{d^2 \operatorname{sh}^2 \xi} = 1, \qquad \frac{x^2}{d^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{d^2 \sin^2 \eta} = 1$$

и являются софокусными эллипсами и гиперболами соответственно с фокусами в точках $(x, y) = (\pm d, 0)$. Позволяя ξ, η меняться в интервале $\xi \geqslant 0$, $0 \leqslant \eta < 2\pi$, мы можем получить любую точку в плоскости (x, y). Подставляя выражения (2.41) в (2.24), получаем

$$\partial_{\xi\xi}\Psi + \partial_{\eta\eta}\Psi + d^2\omega^2 (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)\,\Psi = 0. \tag{2.42}$$

Полагая далее $\Psi = U(\xi)\,V(\eta)$, находим уравнения, имеющие решения с разделенными переменными:

$$U'' + (d^2w^2 \operatorname{ch}^2 \xi + k^2)\,U = 0, \quad V'' - (d^2w^2 \cos^2 \eta + k^2)\,V = 0; \tag{2.43}$$

здесь k^2 — константа разделения. Эти уравнения являются вариантами уравнения Матье, а решения с разделенными переменными суть произведения функций Матье (см. приложение Б).

Умножая первое уравнение (2.43) на $V \cos^2 \eta$, а второе на $U \operatorname{ch}^2 \xi$ и складывая результаты, получаем следующее уравнение на собственные значения:

$$(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)^{-1} (\cos^2 \eta\, \partial_{\xi\xi} + \operatorname{ch}^2 \xi\, \partial_{\eta\eta})\, \Psi_k = k^2 \Psi_k,$$

где $\Psi_k = UV$. По аналогии с соответствующими результатами для декартовых и параболических координат можно предположить, что оператор S в левой части этого уравнения принадлежит $\mathcal{S}/\mathfrak{q}$. Прямое (но довольно утомительное) вычисление дает результат

$$\left(M^2 + d^2 P_1^2\right) \Psi_k = k^2 \Psi_k, \tag{2.44}$$

подтверждающий наше предположение. Итак, решения с разделенными переменными в эллиптических координатах являются собственными функциями оператора симметрии $M^2 + d^2P_1^2$ (или $M^2 - d^2P_2^2$), а константа разделения k^2 представляет собой соответствующее собственное значение. Подобным, но более простым вычислением можно показать, что решения с разделенными переменными в полярных координатах являются собственными функциями оператора симметрии M^2.

Итак, мы связали каждую из четырех ортогональных систем координат, допускающих разделение переменных в уравнении Гельмгольца, с оператором симметрии второго порядка. Кроме того, мы увидели, что под действием $E(2)$ системы, допускающие разделение переменных, распадаются на классы эквивалентности. Действительно, если Ψ_k — решение с разделенными переменными в переменных $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, то $\mathbf{T}(g)\Psi_k$ — решение с разделенными переменными в переменных $\mathbf{u}' = \mathbf{u}g$, получаемых в результате преобразования координат при помощи евклидовой группы. Мы считаем системы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}'$ эквивалентными. Рассмотрим эквивалентность на уровне операторов. Предположим, что $S \in \mathcal{S}/\mathfrak{q}$ — оператор симметрии второго порядка, связанный с координатами $\mathbf{u}$, $S\Psi_k = k^2\Psi_k$. Тогда $S^g = \mathbf{T}(g)S\mathbf{T}(g)^{-1}$ — соответствующий оператор, связанный с решением $\Psi_k^g = \mathbf{T}(g)\Psi_k$. Действительно, $S^g\Psi_k^g = k^2\Psi_k^g$. Более того, легко показать, что S^g представляет собой оператор симметрии второго порядка. Так, если $S = L_1L_2$, где L_j — операторы симметрии первого порядка, то $S^g = L_1^gL_2^g$, где L_j^g определено в (2.15).

Поскольку $S^{gg'} = (S^{g'})^g$, $g, g' \in E(2)$, действие $E(2)$ на $\mathcal{S}$, называемое *сопряженным представлением*, приводит к разбиению $\mathcal{S}$ на орбиты одномерных подпространств. Мы говорим, что S лежит на той же орбите, что и S', если $S = c(S')^g$ для некоторого ненулевого $c \in R$ и некоторого $g \in E(2)$. Далее, оператор $P_1^2 + P_2^2$ коммутирует со всеми элементами $\mathcal{E}(2)$, а следовательно, и со всеми операторами $\mathbf{T}(g)$. Таким образом, оператор $R(\mathbf{x})(P_1^2 + P_2^2) = W \in \mathfrak{q}$ удовлетворяет условию $W^g = R(\mathbf{x}g)(P_1^2 + P_2^2) \in \mathfrak{q}$ для $R \in \mathcal{F}$. Этим показано, что действие $E(2)$ на пространстве $\mathcal{S}/\mathfrak{q}$ определяется сопряженным представлением, в результате чего это пространство разбивается на орбиты.

Пусть $\mathcal{S}^{(2)}$ — пространство элементов чисто второго порядка в $\mathcal{S}/\mathfrak{q}$, т. е. пятимерное векторное пространство симметричных операторов второго порядка с базисом (1.22б). (Мы можем включить в это пространство также оператор P_2^2 при условии, что имеет место тождество $P_2^2 \equiv -P_1^2$, так как $P_1^2 + P_2^2$

соответствует нулевому оператору в $\mathscr{S}^{(2)}/\mathfrak{q}$.) На основании сказанного выше мы видим, что $E(2)$ действует на пространстве $\mathscr{S}^{(2)}$ при помощи сопряженного представления и в результате этого действия $\mathscr{S}^{(2)}$ разбивается на орбиты одномерных подпространств. Поскольку $\{L_1, L_2\}^g = \{L_1^g, L_2^g\}$, симметричные операторы второго порядка отображаются в симметричные операторы второго порядка.

Мы уже видели, что каждая из четырех ортогональных систем координат, допускающих разделение переменных для уравнения Гельмгольца, связана с оператором симметрии S вида

$$S = aP_1^2 + bP_1P_2 + cP_2^2 + dM^2 + e\{M, P_1\} + f(M, P_2),$$
$$a, \ldots, f \in R,$$

а следовательно, и с $\hat{S} \in \mathscr{S}^{(2)}$, где

$$\hat{S} = (a - c)P_1^2 + bP_1P_2 + dM^2 + e\{M, P_1\} + f\{M, P_2\}. \quad (2.45)$$

Если одна из систем координат $\{u, v\}$ подвергается евклидову преобразованию g, то она преобразуется в другую (эквивалентную) ортогональную систему координат, допускающую разделение переменных и связанную с оператором симметрии S^g. Далее, если две системы координат связаны с операторами S и S' соответственно, где $\hat{S} = (\hat{S})'$, то возникающая при разделении координат собственная функция Ψ_k, $S\Psi_k = k^2\Psi_k$, оператора S удовлетворяет соотношению $S'\Psi_k = [k^2 + (a - a')\omega^2]\Psi_k$. (Замечание: $(P_1^2 + P_2^2)\Psi_k = -\omega^2\Psi_k$.) Таким образом, операторы S и S' имеют одни и те же собственные функции, но спектр оператора S' получается сдвигом спектра оператора S на фиксированное расстояние $(a - a')\omega^2$. Ясно, что системы координат, допускающие разделение переменных для S и S', эквивалентны. Из этих замечаний и вычислений, выполненных нами ранее, видно, что каждая ортогональная система координат, допускающая разделение переменных, должна быть связана с одномерным подпространством операторов $\{c\hat{S}\}$ в $\mathscr{S}^{(2)}$ (поскольку $c\hat{S}$ и $\hat{S}$ при $c \neq 0$, $c \in R$ соответствуют одним и тем же координатам). Множество всех систем координат, получаемых из заданной системы координат в результате действия группы $E(2)$, должно быть ассоциировано с некоторой орбитой в $\mathscr{S}^{(2)}$.

Сделанные выше замечания подводят нас к задаче определения структуры орбит пространства $\mathscr{S}^{(2)}$. Предположим, что операторы симметрии первого порядка L_1, L_2, L_3 образуют базис в $\mathscr{E}(2)$. Для каждого $g \in E(2)$ можно найти (3×3)-матрицу G, такую, что

$$L_j^g = \sum_{k=1}^{3} G_{kj}L_k, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.46)$$

Отсюда сразу следует, что

$$\{L_{l_1}, L_{l_2}\}^g = \{L_{l_1}^g, L_{l_2}^g\} = \sum_{k_1, k_2=1}^{3} G_{k_1 l_1} G_{k_2 l_2} \{L_{k_1}, L_{k_2}\} \tag{2.47}$$

является элементом множества $\mathscr{S}$. (Заметим, что $L_l^2 = {}^1/_2 \{L_l, L_l\}$.) Теперь, используя (2.46) и (2.18)—(2.20), можно найти по одному представителю для каждой орбиты множества $\mathscr{S}^{(2)}$.

Любой оператор $\hat{S} \in \mathscr{S}^{(2)}$ можно единственным образом представить в виде (2.45), принимая $c = 0$. Предположим, что $d \neq 0$. Применяя переносы (2.18) и (2.19), можно $\hat{S}$ преобразовать к виду

$$a'P_1^2 + b'P_1P_2 + c'P_2^2 + dM^2,$$

т. е. можно выбрать эти переносы так, что коэффициенты при $\{M, P_1\}$ и $\{M, P_2\}$ обратятся в нуль. Далее, применяя соответствующий поворот (2.20), можно диагонализировать квадратичную форму P_jP_k, с тем чтобы получить

$$a''P_1^2 + c''P_2^2 + dM^2 \equiv (a'' - c'')\, P_1^2 + dM^2.$$

Возможны два случая: если $a'' = c''$, то $\hat{S}$ находится на той же орбите, что и M^2; если же $a'' \neq c''$, то $\hat{S}$ находится на той же орбите, что и $M^2 + r^2P_1^2$, $r > 0$.

Теперь предположим, что $d = 0$, а $e^2 + f^2 > 0$. Применяя подходящий поворот (2.20), можно допустить, что $e = 0$, $f \neq 0$. Выбирая затем надлежащие переносы (2.18) и (2.19), можно преобразовать $\hat{S}$ к виду $c\{M, P_2\}$. Таким образом, $\hat{S}$ будет находиться на той же орбите, что и $\{M, P_2\}$.

Предположим, наконец, что $d = e = f = 0$, $a^2 + b^2 > 0$. Тогда, выполнив соответствующий поворот, можно диагонализировать квадратичную форму $aP_1^2 + bP_1P_2$, с тем чтобы получить для $\hat{S}$ выражение

$$a'P_1^2 + b'P_2^2 \equiv (a' - b')\, P_1^2,$$

откуда следует, что $\hat{S}$ находится на той же орбите, что и P_1^2 (или P_2^2).

Мы показали, что $\mathscr{S}^2$ содержит точно четыре орбиты с представителями

$$M^2, \quad M^2 + r^2P_1^2, \quad \{M, P_2\}, \quad P_1^2. \tag{2.48}$$

Следовательно, между ортогональными системами координат, позволяющими получить решения с разделенными переменными для уравнения Гельмгольца, и орбитами в $\mathscr{S}^{(2)}$ существует взаимно однозначное соответствие (см. табл. 1).

Таблица 1

ОПЕРАТОРЫ И СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $(\Delta_2 + \omega^2)\Psi = 0$

	Оператор S	Система координат	Решения с разделенными переменными
1	P_2^2	Декартова x, y	Произведение экспоненциальных функций
2	M^2	Полярная $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$	Произведение функции Бесселя и экспоненциальной функции
3	$\{M, P_2\}$	Параболическая $x = {}^1/_2(\xi^2 - \eta^2),\ y = \xi\eta$	Произведение функций параболического цилиндра
4	$M^2 + d^2P_1^2$	Эллиптическая $x = d\,\mathrm{ch}\,\alpha\cos\beta,$ $y = d\,\mathrm{sh}\,\alpha\sin\beta$	Произведение функций Матье

1.3. Формулы разложения, связывающие решения с разделенными переменными

Теперь покажем, как можно использовать связь между решениями с разделенными переменными уравнения Гельмгольца и орбитами операторов симметрии для установления свойств решений с разделенными переменными. В этом методе используется преобразование Фурье, чтобы установить структуру гильбертова пространства на пространстве решений уравнения Гельмгольца.

Пусть $\Psi(x, y)$ — решение уравнения $(\Delta_2 + \omega^2)\Psi = 0$, и пусть

$$\Psi(x,\ y) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i(\omega_1 x_1 + \omega_2 y)\right] \tilde{h}(\omega_1,\ \omega_2)\, d\omega_1\, d\omega_2,$$

где $\tilde{h}$ — преобразование Фурье функции Ψ. Поступая формально, имеем

$$(\Delta_2 + \omega^2)\Psi = \iint (\omega^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2) \exp\left[i(\omega_1 x + \omega_2 y)\right] \times$$
$$\times\, \tilde{h}(\omega_1,\ \omega_2)\, d\omega_1\, d\omega_2 = 0$$

при условии, что $\tilde{h}(\omega_1, \omega_2) = \omega^{-1}\delta(\omega - s)h(\varphi)$, где $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака, s и φ — полярные координаты в плоскости (ω_1, ω_2), причем $\omega_1 = s\cos\varphi$, $\omega_2 = s\sin\varphi$, и $d\omega_1 d\omega_2 = s\,ds\,d\varphi$.

Интегрируя по s, находим

$$\Psi(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i\omega(x\cos\varphi + y\sin\varphi)]\,h(\varphi)\,d\varphi = I(h). \tag{3.1}$$

Элементы $g(\theta, a, b)$ группы $E(2)$ действуют на решения Ψ уравнения Гельмгольца посредством операторов $\mathbf{T}(g)$, определяемых выражениями (1.11) и (1.16). Используя (3.1), получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(g)\Psi(x, y) &= \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i\omega(x\cos(\varphi+\theta) + y\sin(\varphi+\theta) + \\ &\qquad + a\cos\varphi + b\sin\varphi)]\,h(\varphi)\,d\varphi = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i\omega(x\cos\varphi + y\sin\varphi)]\,\mathbf{T}(g)h(\varphi)\,d\varphi,\end{aligned}$$

где

$$\mathbf{T}(g)h(\varphi) = \exp[i\omega(a\cos(\varphi-\theta) + b\sin(\varphi-\theta))]\,h(\varphi-\theta). \tag{3.2}$$

(Чтобы интегрирование в (3.1) выполнялось по единичной окружности, должно выполняться равенство $h(\varphi) = h(\varphi + 2\pi)$.)

Итак, операторы $\mathbf{T}(g)$, действуя на Ψ, индуцируют операторы (которые мы также обозначаем через $\mathbf{T}(g)$), действующие на h и определяемые в (3.2). Легко видеть, что для операторов (3.2) выполняется свойство гомоморфизма $\mathbf{T}(g_1g_2) = \mathbf{T}(g_1)\mathbf{T}(g_2)$.

Теперь рассмотрим функции h как элементы гильбертова пространства $L_2(S_1)$ функций, интегрируемых с квадратом по Лебегу на единичной окружности S_1: $\omega_1^2 + \omega_2^2 = 1$ (т. е. $s = 1$, $-\pi \leqslant \varphi < \pi(\mathrm{mod}\, 2\pi)$). Таким образом, мы рассмотрим пространство всех измеримых функций h, таких, что $\int_{-\pi}^{\pi} |h(\varphi)|^2\,d\varphi < \infty$. (Читатели, не знакомые с интегрированием по Лебегу, могут в нашем дальнейшем анализе заменить интеграл Лебега интегралом Римана. Практически такая замена почти не влияет на процесс интегрирования.) На $L_2(S^1)$ определено скалярное произведение

$$\langle h_1, h_2\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} h_1(\varphi)\,\bar{h}_2(\varphi)\,d\varphi, \qquad h_j \in L_2(S_1). \tag{3.3}$$

(Детальный анализ концепций гильбертова пространства см. в [68] и [113].)

Любую функцию $h \in L_2(S_1)$ можно продолжить до некоторой функции, определяемой на вещественной прямой наложением условия периодичности $h(\varphi) = h(\varphi + 2\pi)$. Принимая это условие, мы видим, что операторы $\mathbf{T}(g)$, задаваемые (3.2), корректно определены на $L_2(S_1)$ и отображают это гильбертово пространство в себя. Простое вычисление дает

$$\langle \mathbf{T}(g) h_1, \mathbf{T}(g) h_2 \rangle = \langle h_1, h_2 \rangle$$

для всех $h_j \in L_2(S_1)$, т. е. операторы $\mathbf{T}(g)$ *унитарны.* (Унитарные операторы в гильбертовом пространстве рассматриваются в [113].) Итак, мы построили унитарное представление (ω) группы $E(2)$ в $L_2(S_1)$, отмеченное положительной константой ω. В [37] и [78] показано, что это представление неприводимо: нет такого собственного подпространства пространства $L_2(S_1)$, которое было бы инвариантно для всех операторов $\mathbf{T}(g)$. Этот факт нас здесь не интересует.

Поступая подобно тому, как в (3.1), (3.2), и интегрируя по частям, можно вычислить на $L_2(S_1)$ алгебру Ли операторов P_1, P_2, M, индуцированную операторами P_1, P_2, M (см. (1.7)), действующими на решения уравнения Гельмгольца. В результате имеем

$$P_1 = i\omega \cos \varphi, \qquad P_2 = i\omega \sin \varphi, \qquad M = -d/d\varphi. \tag{3.4}$$

Ясно, что эти операторы удовлетворяют соотношениям коммутирования (1.8) и образуют базис алгебры $\mathscr{E}(2)$. В строгом соответствии с (1.16) эти операторы новой алгебры Ли связаны с операторами $\mathbf{T}(g)$ (см. (3.2)) соотношением

$$\mathbf{T}(g) = \exp(\theta M) \exp(aP_1 + bP_2).$$

Поскольку операторы $\mathbf{T}(g)$ унитарны, операторы новой алгебры Ли являются косоэрмитовыми, т. е.

$$\langle Lh_1, h_2 \rangle = -\langle h_1, Lh_2 \rangle, \qquad h_j \in L_2(S_1), \tag{3.5}$$

для $L = c_1 P_1 + c P_2 + c_3 M$, $c_k \in R$, что можно легко проверить. Область определения оператора L должна быть точно установлена. Операторы P_j имеют смысл, если они применяются к любой функции $h \in L_2(S_1)$, оператор же M имеет смысл только в том случае, когда он применяется к некоторой дифференцируемой функции. Для ясности определим все операторы L нашей алгебры Ли на подпространстве $\mathscr{D}$ пространства $L_2(S_1)$, состоящем из всех бесконечно дифференцируемых функций $h(\varphi)$, обращающихся в нуль в окрестности $-\pi$ и π. Для $h_j \in \mathscr{D}$ соотношение (3.5) легко проверить.

Теперь рассмотрим пространство $\mathscr{H}$, состоящее из решений уравнения Гельмгольца Ψ, определяемых формулой (3.1): $\Psi =$

$= I(h)$ для некоторого $h \in L_2(S_1)$. Пространство $\mathscr{H}$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(\Psi_1, \Psi_2) \equiv \langle h_1, h_2 \rangle, \quad \Psi_j = I(h_j). \tag{3.6}$$

Заметим, что каждую функцию $\Psi(x, y)$ в $\mathscr{H}$ можно представить в виде скалярного произведения

$$\begin{gathered}\Psi(x, y) = I(h) = \langle h, H(x, y, \cdot) \rangle, \\ H(x, y, \varphi) = \exp[-i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] \in L_2(S_1).\end{gathered} \tag{3.7}$$

Можно проверить, что нет такой отличной от нуля функции $h \in L_2(S_1)$ (отличие от нуля означает, что $\|h\|^2 = \langle h, h \rangle > 0$), которая обладала бы тем свойством, что $\Psi = I(h)$ является тождественно нулевым решением уравнения Гельмгольца. Таким образом, различные функции h_1 и h_2 в $L_2(S_1)$ определяют различные решения Ψ_1 и Ψ_2 уравнения Гельмгольца. Следовательно, наше формальное введение структуры гильбертова пространства в $\mathscr{H}$ при помощи определения (3.6) корректно. Далее, операторы $\mathbf{T}(g)$ на $\mathscr{H}$, определенные в (1.16), унитарны, а операторы (1.7) алгебры Ли на пространстве $\mathscr{H}$ косоэрмитовы.

И наконец, линейное преобразование I является взаимно однозначным отображением $L_2(S_1)$ на $\mathscr{H}$, сохраняющим скалярное произведение, т. е. I — *унитарное преобразование* из $L_2(S_1)$ на $\mathscr{H}$. Существование этого обратимого отображения дает нам возможность перейти от задач в пространстве $\mathscr{H}$ к задачам в пространстве $L_2(S_1)$. Мы показали, в частности, что представление группы симметрии $E(2)$ в $\mathscr{H}$, определяемое операторами (1.16), является унитарно эквивалентным посредством I унитарному представлению $E(2)$ в $L_2(S_1)$, определенному операторами (3.2). Поскольку второе гильбертово пространство со многих точек зрения значительно проще первого, этот факт будет очень полезен в наших дальнейших вычислениях.

Мы уже показали, что решения уравнения Гельмгольца с разделенными переменными, соответствующие ортогональной системе координат $\{u, v\}$, являются собственными функциями некоторого оператора $S \in \mathscr{S}^{(2)}$, причем S — симметрический многочлен второго порядка от элементов алгебры $\mathscr{E}(2)$. Очевидно, что оператор S можно определить на области $D = I(\mathscr{D})$ в пространстве $\mathscr{H}$ или как эквивалентный оператор на области $\mathscr{D}$ в пространстве $L_2(S_1)$. Более того, S в области определения является симметрическим оператором. (Напомним, что некоторый оператор A, определенный на плотной области D гильбертова пространства $\mathscr{H}$, называется *симметрическим*, если $(A\Psi_1, \Psi_2) = (\Psi_1, A\Psi_2)$ для всех Ψ_1, $\Psi_2 \in D$, где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathscr{H}$.) В самом деле, если $S = \{L_1, L_2\} =$

$= L_1L_2 + L_2L_1$, $L_j \in \mathscr{E}(2)$, то, поскольку L_j косоэрмитовы и отображают D в себя, мы имеем

$$(S\Psi_1, \Psi_2) = (L_1L_2\Psi_1, \Psi_2) + (L_2L_1\Psi_1, \Psi_2) =$$
$$= -(L_2\Psi_1, L_1\Psi_2) - (L_1\Psi_1, L_2\Psi_2) = (\Psi_1, S\Psi_2).$$

Следовательно, каждый оператор S, характеризующий систему координат, допускающую разделение переменных, можно определить как симметрический оператор на D.

Симметрические операторы обладают целым рядом приятных свойств, из которых далеко не последнее место занимает тот факт, что их собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны, а их собственные значения вещественны. Так, если $S\Psi_j = \lambda_j\Psi_j$, $j = 1, 2$, где Ψ_j — отличные от нуля элементы области D и $\lambda_j \in \mathbb{C}$, то

$$\lambda_1(\Psi_1, \Psi_2) = (S\Psi_1, \Psi_2) = (\Psi_1, S\Psi_2) = \bar{\lambda}_2(\Psi_1, \Psi_2). \tag{3.8}$$

Полагая $\Psi_1 = \Psi_2$ и сравнивая левую и правую части соотношения (3.8), мы видим, что $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1$ и поэтому λ_1 (а следовательно, и λ_2) — вещественная величина. Далее, если $\Psi_1 \neq \Psi_2$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то сравнение правой и левой частей соотношения (3.8) дает $(\Psi_1, \Psi_2) = 0$, т. е. Ψ_1 *ортогонально* Ψ_2.

Из сказанного выше и известного процесса ортогонализации Грама — Шмидта вытекает, что S имеет счетное множество взаимно ортогональных собственных векторов $\{\Psi_j\}$, причем каждый собственный вектор можно нормировать таким образом, что он будет иметь единичную длину: $(\Psi_j, \Psi_j) = 1$, $S\Psi_j = \lambda_j\Psi_j$, $(\Psi_j, \Psi_l) = 0$ для $j \neq l$.

Теперь предположим, что $\Psi \in \mathscr{H}$ можно представить в виде бесконечной линейной комбинации нашей ортогональной последовательности собственных векторов:

$$\Psi = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\Psi_j, \qquad a_j \in \mathbb{C}. \tag{3.9}$$

Используя соотношения ортонормальности $(\Psi_j, \Psi_l) = \delta_{jl}$, получаем равенство Парсеваля

$$(\Psi, \Psi) = \sum_{j,\, l=0}^{\infty} a_j\bar{a}_l(\Psi_j, \Psi_l) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\bar{a}_j. \tag{3.10}$$

Коэффициенты a_j определяются однозначно:

$$(\Psi, \Psi_l) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\Psi_j, \Psi_l) = a_l. \tag{3.11}$$

Теперь возникает вопрос, является ли ортонормальное[1]) множество

---

[1]) В дальнейшем будет применяться сокращение о. н.

жество $\{\Psi_j\}$ о. н. *базисом* в $\mathscr{H}$, т. е. можно ли представить произвольный элемент $\Psi \in \mathscr{H}$ в виде суммы (3.9). Вообще говоря, это сделать нельзя, поскольку область D обычно слишком ограничена, чтобы обеспечить достаточное количество собственных векторов Ψ_j, необходимое для образования базиса. Однако существует хорошо разработанная теория расширений симметрических операторов, дающая возможность в значительной степени преодолеть эту трудность. (Симметрический оператор S' называется *расширением* оператора S, если область, на которой определен оператор S', строго содержит область, на которой определен оператор S, и оба оператора совпадают на общей области определения.) Мы не собираемся здесь входить в детали этой теории; она излагается во многих учебниках (см., например, [48, 113]).

Один из основных выводов этой теории состоит в том, что многие симметрические операторы (имеющие равные индексы дефекта) можно расширить до особых симметрических операторов, называемых *самосопряженными* (не единственным образом, если только индексы дефекта не равны $(0, 0)$), которые обладают тем свойством, что их собственные функции образуют базис в $\mathscr{H}$. Но за это свойство приходится расплачиваться, а именно мы должны рассматривать не только собственные векторы самосопряженного расширения, но и обобщенные собственные векторы. (Ниже мы приведем несколько примеров обобщенных собственных векторов.)

Бóльшую часть симметрических операторов, рассматриваемых в настоящей книге при описании процесса разделения переменных, можно расширить до самосопряженных операторов при помощи классических приемов. Для небольшого числа операторов, которые не поддаются расширению при помощи классических приемов, можно все-таки найти базисы собственных функций, но процесс нахождения базисов оказывается не стандартным и не единственным.

Установим связь между упомянутой выше теорией и разделением переменных чисто формально. Пусть S — симметрический оператор в D, соответствующий системе координат, допускающей разделение переменных для уравнения Гельмгольца. Мы скоро увидим, что любой такой оператор можно расширить до самосопряженного оператора S', определенного в области $D' \supseteq D$. Таким образом, каждое решение уравнения Гельмгольца $\Psi \in \mathscr{H}$ можно единственным образом разложить по собственным функциям оператора S'. Но собственные функции оператора S' — обязательно решения уравнения Гельмгольца с разделяющимися переменными в системе координат, соответствующей оператору S. Собственные значения оператора S' являются просто значениями константы разделения.

Использование технических возможностей нашего гильбертова пространства позволяет нам выполнять разложение произвольного решения уравнения Гельмгольца по элементам собственного базиса, составленного из решений с разделяющимися переменными. В действительности же все вычисления, необходимые для получения этих разложений, будут выполняться не в $\mathcal{H}$, а в более подходящем пространстве $L_2(S_1)$.

А теперь найдем спектральное разложение для каждого из четырех операторов S, перечисленных в табл. 1.

Орбита 2. $S = M^2$

Чтобы найти спектральное разложение для M^2, достаточно найти разложение для iM, $i = \sqrt{-1}$, и возвести в квадрат полученные собственные значения. (Заметим, что оператор iM — симметрический в области $\mathcal{D}$, поскольку оператор M косоэрмитов.) Оператор M на $L_2(S_1)$ имеет вид $M = -d/d\varphi$, и, следовательно, уравнение на собственные значения $iMf_\lambda = \lambda f_\lambda$ принимает вид

$$-i\frac{df_\lambda(\varphi)}{d\varphi} = \lambda f_\lambda(\varphi). \tag{3.12}$$

Для $f_\lambda \in \mathcal{D}$ это уравнение не имеет решений, отличных от нуля. Если же iM расширен на область $\mathcal{D}'$, состоящую из всех функций $f \in L_2(S_1)$, первые производные которых существуют и являются непрерывными на S_1, то легко проверить, что iM является симметрическим на $\mathcal{D}'$ и имеет нормированные собственные функции $\{f_n^{(2)}(\varphi)\}$:

$$f_n^{(2)}(\varphi) = e^{in\varphi}/(2\pi)^{1/2}, \quad iMf_n^{(2)} = nf_n^{(2)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3.13}$$

(Заметим, что для $f \in \mathcal{D}'$ имеет место условие периодичности $f(-\pi) = f(\pi)$, откуда вытекает, что решения $f_\lambda(\varphi) = ce^{i\lambda\varphi}$ уравнения (3.12) принадлежат области $\mathcal{D}'$ тогда и только тогда, когда $\lambda = n$.) Легко проверить, что

$$\langle f_n^{(2)}, f_m^{(2)}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\varphi}\,d\varphi = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m, \\ 1, & \text{если } n = m. \end{cases} \tag{3.14}$$

Из теории рядов Фурье известно, что множество $\{f_n^{(2)}\}$ является фактически о. н. базисом для пространства $L_2(S_1)$ [103]. Таким образом, любую функцию $f \in L_2(S_1)$ можно однозначно представить в виде

$$f(\varphi) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n f_n^{(2)}(\varphi), \quad c_n = \langle f, f_n^{(2)}\rangle, \tag{3.15}$$

где $\sim$ означает, что сумма сходится к f в смысле сходимости в гильбертовом пространстве

$$\lim_{m\to\infty}\left\langle f-\sum_{n=-m}^{m} c_n f_n^{(2)},\ f-\sum_{n=-m}^{m} c_n f_n^{(2)}\right\rangle=0$$

и необязательно сходится поточечно.

(В действительности iM не является самосопряженным на $\mathscr{D}'$, но легко показать, что дальнейшее расширение iM на область, где он будет самосопряженным, не дает новых собственных значений и собственных векторов. В дальнейшем мы будем сразу давать базис собственных функций, не всегда касаясь вопросов, связанных с областью определения оператора.)

Оператор $iM'=i(y\partial_x-x\partial_y)$ в $\mathscr{H}$, соответствующий оператору $iM=-id/d\varphi$ в $L_2(S_1)$, определен соотношением $M'=IMI^{-1}$, где унитарное преобразование I задано в (3.1). Следовательно, iM' унитарно эквивалентен iM, и поэтому iM' имеет тот же спектр, что и iM, а о. н. базис $\{f_n^{(2)}\}$ собственных функций оператора iM отображается посредством унитарного преобразования I в о. н. базис $\{\Psi_n^{(2)}\}$:

$$\Psi_n^{(2)}=I\left(f_n^{(2)}\right),\qquad n=0,\ \pm1,\ \ldots,\tag{3.16}$$

собственных функций оператора iM'. Таким образом, переходя к полярным координатам, получаем

$$\Psi_n^{(2)}(r,\ \theta)=I\left[\exp(in\varphi)/(2\pi)^{1/2}\right]=$$
$$=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left[i\omega r\cos(\varphi-\theta)\right]\exp(in\varphi)\,d\varphi.\tag{3.17}$$

Замена переменных $\alpha=\varphi-\theta$ дает

$$\Psi_n^{(2)}(r,\ \theta)=\exp(in\theta)R_n(r),$$
$$R_n(r)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(i\omega r\cos\alpha)\exp(in\alpha)\,d\alpha.\tag{3.18}$$

Хотя интеграл, входящий в $R_n(r)$, известен, мы проанализируем процесс его вычисления с самого начала, с тем чтобы продемонстрировать связь между теорией Ли и разделением переменных. Поскольку $\Psi_n^{(2)}$ — собственная функция оператора iM', отвечающая собственному значению n, то $\Psi_n^{(2)}$ — решение с разделенными переменными в полярных координатах и $R_n(r)$ удовлетворяет уравнению Бесселя (2.9) при $k=n$. Так как $R_n(0)$ конечно, $R_n(r)=c_nJ_n(\omega r)$, где c_n — постоянная величина (см.

приложение Б, разд. 5). Чтобы вычислить c_n, воспользуемся тем фактом, что коэффициент при r^n в разложении (Б.14) для $J_n(\omega r)$ имеет вид $(\omega/2)^n/n!$. Разлагая $\exp(i\omega r\cos\alpha)$ в степенной ряд по r, мы видим, что коэффициент при r^n в интегральном выражении (3.18) для $R_n(r)$ имеет вид

$$\frac{(i\omega)^n}{(2\pi)^{1/2}\,n!}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^n\alpha\exp(in\alpha)\,d\alpha=\frac{(2\pi)^{1/2}}{n!}\left(\frac{i\omega}{2}\right)^n.$$

(Это легко получается из соотношения $\cos\alpha=(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})/2$ и соотношений ортогональности (3.14).) Таким образом,

$$\Psi_n^{(2)}(r,\ \theta)=i^n\,(2\pi)^{1/2}\,J_n(\omega r)\exp(in\theta). \tag{3.19}$$

Следует также заметить, что $\Psi_{-n}^{(2)}$, согласно (3.17), является n-м коэффициентом разложения Фурье функции

$$\begin{aligned}\exp[i\omega r\cos(\varphi-\theta)]&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Psi_n^{(2)}(r,\ \theta)\,\bar f_n^{(2)}(\varphi)=\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}i^nJ_n(\omega r)\exp[in(\theta-\varphi)].\end{aligned} \tag{3.20}$$

Орбита 1. $S=P_2^2$

Здесь так же, как и в предыдущем случае, достаточно найти спектральное разложение для симметрического оператора iP_2. Оператор $iP_2=-\omega\sin\varphi$ определен и является самосопряженным во всем гильбертовом пространстве $L_2(S_1)$. Ясно, что iP_2 не имеет ни собственных значений, ни собственных функций в обычном смысле, так как если $iP_2f=\lambda f$, то $f(\varphi)=0$, за исключением самое большее двух значений φ_1,φ_2, где $\lambda=-\omega\sin\varphi_i$. Следовательно, $\langle f,\ f\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}|f(\varphi)|^2d\varphi=0$, и f не является собственной функцией. Но тем не менее iP_2 имеет обобщенные собственные функции $f_\alpha^{(1)}(\varphi)=\delta(\varphi-\alpha)$, $-\pi\leqslant\alpha<\pi$, где $\delta(\varphi-\alpha)=\delta_\alpha(\varphi)$ — *дельта-функция Дирака* (совсем и не функция), формально определяемая соотношением

$$\langle h,\ \delta_\alpha\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}h(\varphi)\,\delta(\varphi-\alpha)\,d\varphi=h(\alpha), \tag{3.21}$$

причем h — произвольная бесконечно дифференцируемая функция, принадлежащая $L_2(S_1)$. (Точные определения обобщенных собственных функций и анализ их связи со спектральной теорией см. в [42, 98].) Итак, мы имеем формальные соотношения

$$\begin{aligned} &iP_2 f_\alpha^{(1)} = -\omega \sin \alpha f_\alpha^{(1)}, \qquad -\pi \leqslant \alpha < \pi, \\ &\langle f_\alpha^{(1)}, f_{\alpha'}^{(1)} \rangle = \delta(\alpha - \alpha'). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Когда α пробегает полуинтервал $[-\pi, \pi)$, обобщенные собственные значения пробегают полуинтервал $(-\omega, \omega]$, покрывая дважды почти каждую точку. Мы говорим, что спектр оператора iP_2 непрерывен и покрывает полуинтервал $(-\omega, \omega]$ *с кратностью*, равной двум. Разложение произвольной функции $h \in L_2(S_1)$ по собственному базису $\{f_\alpha^{(1)}\}$ представляется интегралом

$$h = \int_{-\pi}^{\pi} c_\alpha f_\alpha^{(1)} d\alpha, \qquad c_\alpha = \langle h, f_\alpha^{(1)} \rangle = h(\alpha). \tag{3.23}$$

Равенство Парсеваля принимает вид

$$\langle h, h \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} c_\alpha \bar{c}_\alpha \, d\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} | h(\alpha) |^2 d\alpha.$$

(Тривиальность этих формул объясняется тем, что оператор iP_2 получен нами в таком виде, что его спектральное разложение очевидно.)

Соответствующий оператор iP_2 в $\mathscr{H}$ определяется соотношением $iP_2 = i\partial_y$ и унитарно эквивалентен оператору (3.22) в $L_2(S_1)$. Соответствующий базис обобщенных собственных функций $\{\Psi_\alpha^{(1)}\}$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha^{(1)}(x, y) = I(f_\alpha^{(1)}) &= \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i\omega(x \cos\varphi + y \sin\varphi)] \, \delta(\varphi - \alpha) \, d\varphi = \\ &= \exp[i\omega(x \cos\alpha + y \sin\alpha)], \qquad -\pi \leqslant \alpha < \pi. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Унитарная эквивалентность дает следующие соотношения:

$$iP_2 \Psi_\alpha^{(1)} = -\omega \sin \alpha \Psi_\alpha^{(1)}, \qquad (\Psi_\alpha^{(1)}, \Psi_{\alpha'}^{(1)}) = \delta(\alpha - \alpha'), \tag{3.25}$$

а теорема разложения,

$$\begin{aligned} &\Psi(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} c_\alpha \Psi_\alpha^{(1)}(x, y) \, d\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} c_\alpha \exp[i\omega(x \cos\alpha + y \sin\alpha)] \, d\alpha, \\ &c_\alpha (\Psi, \Psi_\alpha^{(1)}) = \langle h, f_\alpha^{(1)} \rangle = h(\alpha), \end{aligned} \tag{3.26}$$

где $\Psi \in \mathscr{H}$ соответствует функции $h \in L_2(S_1)$, сводится к формуле (3.1).

Орбита 3. $S = \{M, P_2\}$

Здесь оператор $\{M, P_2\} = -2i\omega \sin\varphi(d/d\varphi) - i\omega\cos\varphi$ определен на множестве бесконечно дифференцируемых функций из $L_2(S_1)$, обращающихся в нуль в окрестности $\varphi = 0$, $-\pi$ и π. Легко проверить, что оператор S в этой области симметрический (и самосопряженный). Чтобы найти его самосопряженное расширение, определим унитарное отображение $\mathbf{U}$ из $L_2(S_1)$ в $L_2(R) \oplus L_2(R)$ следующим соотношением:

$$\mathbf{U}f(\nu) = \mathbf{F}(\nu) = \begin{pmatrix} F_+(\nu) \\ F_-(\nu) \end{pmatrix} = |\sin\varphi|^{1/2} \begin{pmatrix} f_+(\cos\varphi) \\ f_-(\cos\varphi) \end{pmatrix}, \quad \cos\varphi = \operatorname{th}\nu. \tag{3.27}$$

Таким образом, каждая функция $f \in L_2(S_1)$ ассоциируется с двумерным вектором-столбцом с компонентами $F_\pm(\nu) = |\sin\varphi|^{1/2} f_\pm(\cos\varphi) \in L_2(R)$. В данном случае

$$f_-(\cos\varphi) = f(\varphi), \qquad -\pi \leqslant \varphi < 0,$$
$$f_+(\cos\varphi) = f(\varphi), \qquad 0 < \varphi \leqslant \pi,$$

и $L_2(R)$ — гильбертово пространство функций, интегрируемых с квадратом по Лебегу на вещественной прямой R, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 dx < \infty$, со скалярным произведением $\langle F, G\rangle' = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)\bar{G}(x)\,dx$. (Мы рассматриваем только те функции, которые в окрестности $\varphi = 0$ обращаются в нуль, так как коэффициент при производной в выражении для S при $\varphi = 0$ обращается в нуль, т. е. S в $\varphi = 0$ имеет особую точку.)

Введем

$$\mathscr{L} = L_2(R) \oplus L_2(R)$$

— гильбертово пространство векторнозначных функций $\mathbf{F}(\nu)$, интегрируемых с квадратом по Лебегу,

$$\mathbf{F}(\nu): \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} (|F_+(\nu)|^2 + |F_-(\nu)|^2)\,d\nu < \infty;$$

при этом скалярное произведение определяется соотношением

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{G}\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (F_+(\nu)\bar{G}_+(\nu) + F_-(\nu)\bar{G}_-(\nu))\,d\nu, \qquad \mathbf{F}, \mathbf{G} \in \mathscr{L}.$$

Легко проверить, что если $\mathbf{F}_j = \mathbf{U}f_j$, то

$$\langle f_1, f_2\rangle = \langle \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2\rangle;$$

следовательно, U — несомненно унитарное преобразование из $L_2(S_1)$ в $\mathcal{L}$. Оператор $\mathrm{U}S\mathrm{U}^{-1}$ в $\mathcal{L}$, который мы также обозначим через S, принимает вид $S\mathbf{F}(\nu)=2i\omega(d/d\nu)\mathbf{F}(\nu)$. (Теперь становится ясно, что, согласно квантовой теории, S унитарно эквивалентен двум экземплярам оператора импульса.) Чтобы сделать очевидным вычисление спектра оператора S, применим векторное преобразование Фурье

$$\mathcal{F}(\lambda)=\begin{pmatrix}\mathcal{F}_+(\lambda)\\ \mathcal{F}_-(\lambda)\end{pmatrix}=(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{F}(\nu)e^{i\nu\lambda}\,d\nu; \tag{3.28}$$

обратное преобразование дается формулой

$$\mathbf{F}(\nu)=(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}(\lambda)e^{-i\nu\lambda}\,d\lambda. \tag{3.29}$$

(О преобразовании Фурье см. [113].) Тогда, вводя скалярное произведение

$$(\mathcal{F},\ \mathcal{G})=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\mathcal{F}_+(\lambda)\bar{\mathcal{G}}_+(\lambda)+\mathcal{F}_-(\lambda)\bar{\mathcal{G}}_-(\lambda))\,d\lambda, \tag{3.30}$$

мы получаем гильбертово пространство $\mathcal{L}'$ векторнозначных функций $\mathcal{F}$, таких, что

$$(\mathcal{F},\ \mathcal{G})=\langle\mathbf{F},\ \mathbf{G}\rangle=\langle f,\ g\rangle,$$

и S в $\mathcal{L}'$ принимает вид

$$S(\mathcal{F}(\lambda)=2\lambda\omega\mathcal{F}(\lambda).$$

В заключение следует сказать, что оператор $S=\{M, P_2\}$ можно расширить до однозначно определенного самосопряженного оператора с непрерывным спектром, двукратно покрывающим вещественную ось. Обобщенные собственные функции оператора S в $\mathcal{L}'$ имеют вид

$$\mathcal{F}_\mu^+(\lambda)=\begin{pmatrix}\delta(\lambda-\mu)\\ 0\end{pmatrix},\quad \mathcal{F}_\mu^-(\lambda)=\begin{pmatrix}0\\ \delta(\lambda-\mu)\end{pmatrix}.$$

Переходя обратно в $L_2(S_1)$, мы получаем обобщенные собственные функции

$$f_{\mu+}^{(3)}(\varphi)=\begin{cases}(2\pi)^{-1/2}(1+\cos\varphi)^{-i\mu/2-1/4}(1-\cos\varphi)^{i\mu/2-1/4}, & 0<\varphi\leqslant\pi,\\ 0, & -\pi\leqslant\varphi<0,\end{cases}$$

$$f_{\mu-}^{(3)}(\varphi)=f_{\mu+}^{(3)}(-\varphi),\quad \{M,\ P_2\}f_{\mu\pm}^{(3)}=2\mu\omega f_{\mu\pm}^{(3)},\qquad -\infty<\mu<\infty,$$

$$\langle f_{\mu\pm}^{(3)},\ f_{\mu'\pm}^{(3)}\rangle=\delta(\mu-\mu'),\quad \langle f_{\mu\pm}^{(3)},\ f_{\mu'\mp}^{(3)}\rangle=0. \tag{3.31}$$

Решение уравнения Гельмгольца, соответствующее $f^{(3)}_{\mu+}$, имеет вид

$$\Psi^{(3)}_{\mu+}(x,\ y) = I\left(f^{(3)}_{\mu+}\right) = \int\limits_0^\pi \exp\left[i\omega\left(x\cos\varphi + y\sin\varphi\right)\right] f^{(3)}_{\mu+}(\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{t^{i\mu-1/2}}{(1+t^2)^{1/2}} \exp\left\{i\omega\left[x\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) + \frac{2yt}{1+t^2}\right]\right\} dt, \qquad (3.32)$$

$$\cos\varphi = (t^{-1} - t)/(t^{-1} + t).$$

Поскольку $\Psi^{(3)}_{\mu+}$ — собственная функция оператора $\{M, P_2\}$ в пространстве $\mathscr{H}$ с собственным значением $2\mu\omega$, в параболических координатах

$$x = {}^1/_2(\xi^2 - \eta^2), \qquad y = \xi\eta$$

она должна быть решением с разделенными переменными или, точнее, должна выражаться в виде суммы не более четырех линейно независимых решений с разделенными переменными. Эти четыре решения кратны $U_j(\xi)V_l(\eta)$, $j,\ l = 1,\ 2$, где U_j и V_l образуют базисы решений для уравнений параболического цилиндра (2.37) при $k^2 = 2\mu\omega$. Таким образом, интеграл (3.32) определяется с точностью до четырех констант, и эти константы можно найти, вычисляя интеграл для различных частных случаев (например, для $x = 0$). Подробное вычисление дает

$$\Psi^{(3)}_{\mu+}(\xi,\ \eta) = \left[\sqrt{2}\cos(i\mu\pi)\right]^{-1}\left[D_{i\mu-1/2}(\sigma\xi)\,D_{-i\mu-1/2}(\sigma\eta) + \right.$$
$$\left. + D_{i\mu-1/2}(-\sigma\xi)\,D_{-i\mu-1/2}(-\sigma\eta)\right], \qquad (3.33)$$

где $\sigma = \exp(\pi i/4)(2\omega)^{1/2}$, а $D_\nu(x)$ — функция параболического цилиндра (Б.9). Кроме того, имеем

$$\Psi^{(3)}_{\mu-}(\xi,\ \eta) = \Psi^{(3)}_{\mu+}(\xi,\ -\eta). \qquad (3.34)$$

Орбита 4. $S = M^2 + d^2P_1^2$

В этом случае $S = (d^2/d\varphi^2) - d^2\omega^2\cos^2\varphi$ на множестве $\mathscr{D} \subset L_2(S_1)$. Уравнение на собственные значения можно представить в виде $Sf = \lambda f$, или

$$d^2f/d\varphi^2 + (a - 2q\cos 2\varphi)\,f = 0, \qquad a = -\lambda - d^2\omega^2/2, \qquad q = d^2\omega^2/4. \qquad (3.35)$$

Уравнение (3.35) является уравнением Матье (Б.25). В этом случае S не имеет собственных функций в $\mathscr{D}$, но S можно единственным образом расширить до некоторого симметрического оператора в пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций f на S_1. Тогда задача на собственные значения для S сводится к обычной задаче Штурма — Лиувилля

[75, 103], и, как видно из приложения Б (разд. 8), имеется бесконечная счетная последовательность собственных значений λ_n, стремящихся к $-\infty$, причем кратность каждого собственного значения равна единице. Соответствующие собственные векторы имеют вид

$$f_{nc}^{(4)}(\varphi)=\pi^{-1/2}\mathrm{ce}_n(\varphi,\ q),\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$
$$f_{ns}^{(4)}(\varphi)=\pi^{-1/2}\mathrm{se}_n(\varphi,\ q),\qquad n=1,\ 2,\ \ldots. \tag{3.36}$$

Множество $\{f_{nc}^{(4)},\ f_{ns}^{(4)}\}$ образует о. н. базис в $L_2(S_1)$:

$$\langle f_{nt}^{(4)},\ f_{mt}^{(4)}\rangle=\delta_{mn},\quad t=s,\ c,\qquad \langle f_{nc}^{(4)},\ f_{ms}^{(4)}\rangle=0. \tag{3.37}$$

Решение уравнения Гельмгольца, соответствующее $f_{nc}^{(4)}$, имеет вид

$$\Psi_{nc}^{(4)}(x,\ y)=I\left(f_{nc}^{(4)}\right)=\pi^{-1/2}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left[i\omega\left(x\cos\varphi+y\sin\varphi\right)\right]\mathrm{ce}_n(\varphi,\ q)\,d\varphi. \tag{3.38}$$

При вычислении этого интеграла мы используем тот факт, что $\Psi_{nc}^{(4)}$ — собственная функция оператора $M^2+d^2P_1^2$ в $\mathscr{H}$. Следовательно, этот интеграл можно представить в виде суммы не более чем четырех членов, каждый из которых является решением с разделенными переменными в эллиптических координатах

$$x=d\,\mathrm{ch}\,\alpha\cos\beta,\qquad y=d\,\mathrm{sh}\,\alpha\sin\beta.$$

Далее, сравнивая (2.43) и (Б.25), мы находим при $k^2=\lambda=-a-d^2\omega^2/2$, что $\Psi_{nc}^{(4)}$ удовлетворяет уравнению Матье по переменной β. Исследование интеграла (3.38) показывает, что функция $\Psi_{nc}^{(4)}$ — периодическая по β с периодом, равным 2π; следовательно,

$$\Psi_{nc}^{(4)}(\alpha,\ \beta)=U(\alpha)\,\mathrm{ce}_n(\beta,\ q), \tag{3.39}$$

где $U(\alpha)$ удовлетворяет *модифицированному уравнению Матье*

$$d^2U/d\alpha^2+(-a+2q\,\mathrm{ch}\,2\alpha)U=0, \tag{3.40}$$

которое получается из уравнения Матье (Б.25) подстановкой $x=i\alpha$. В зависимости от того, будет в (3.40) $a=a_n$ или $a=b_n$, это уравнение имеет либо решение $\mathrm{Ce}_n(\alpha,q)=\mathrm{ce}_n(i\alpha,q)$, либо решение $\mathrm{Se}_n(\alpha,q)=i\,\mathrm{se}_n(i\alpha,q)$ (см. (Б.26)), которые являются соответственно четной и нечетной функциями от α и отличаются этим свойством симметрии. Исследование интеграла (3.38) показывает, что он является четным по α; следовательно,

$$\Psi_{nc}^{(4)}(\alpha,\ \beta)=C_n\mathrm{Ce}_n(\alpha,\ q)\,\mathrm{ce}_n(\beta,\ q),\qquad n=0,\ 1,\ \ldots, \tag{3.41a}$$

где C_n — константа, определяемая по значению интеграла (3.38) при частных значениях аргументов. Рассуждая подобным же образом, получаем

$$\Psi^{(4)}_{ns}(\alpha, \beta) = S_n \mathrm{Se}_n(\alpha, q)\, \mathrm{se}_n(\beta, q), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{3.41б}$$

где S_n — некоторая константа. Заметим, что формулу (3.38) можно теперь рассматривать как интегральное представление произведения функции Матье и модифицированной функции Матье. (Функции Ce_n и Se_n называются *модифицированными функциями Матье первого рода.*)

Мы определили спектры и собственные базисы для четырех операторов, характеризующих разделение переменных в уравнении (0.1), и, произведя их расширение, найдем спектры всех операторов в $\mathscr{S}^{(2)}$. Если два оператора в этом пространстве унитарно эквивалентны под сопряженным действием группы $E(2)$, то они имеют один и тот же спектр. Если один оператор является вещественным кратным другого оператора, то спектр первого оператора является тем же самым вещественным кратным спектра второго оператора. Таким образом, вычисляя спектр одного из четырех вышеуказанных операторов, мы фактически вычисляем спектр для всех операторов, находящихся на одной орбите с заданным оператором.

В задачах, связанных с решением уравнения Гельмгольца, большое значение имеет получение формул, дающих разложение базисной функции с разделяющимися переменными $\Psi^{(l)}_n$ в виде суммы или интеграла от базисных функций $\Psi^{(l)}_m$. Более общо, нам часто бывает необходимо применить евклидово преобразование к $\Psi^{(l)}_n$ и затем осуществить разложение по базису $\{\Psi^{(l)}_m\}$. Поскольку $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство, мы имеем

$$\mathbf{T}(g)\Psi^{(l)}_n = \sum_m \left(\mathbf{T}(g)\Psi^{(l)}_n, \Psi^{(l)}_m\right)\Psi^{(l)}_m, \tag{3.42}$$

где сумма заменяется интегралом, если $\Psi^{(l)}_m$ — собственные функции непрерывного спектра. Но по определению

$$\left(\mathbf{T}(g)\Psi^{(l)}_n, \Psi^{(l)}_m\right) = \left\langle \mathbf{T}(g) f^{(l)}_n, f^{(l)}_m \right\rangle, \tag{3.43}$$

и, следовательно, мы можем найти коэффициенты разложения в пространстве $L_2(S_1)$ вместо того, чтобы искать их в пространстве $\mathscr{H}$. Это в значительной мере упрощает задачу. Далее, поскольку операторы $\mathrm{T}(g)$ в (3.43) определяют унитарное представление группы $E(2)$, их можно перенести из левой части в правую часть скалярного произведения или разложить любым способом, упрощающим вычисление интеграла в $L_2(S_1)$; например,

$$\left\langle \mathbf{T}(g) f^{(l)}_n, f^{(l)}_m \right\rangle = \left\langle f^{(l)}_n, \mathbf{T}(g^{-1}) f^{(l)}_m \right\rangle.$$

При анализе выражений вида (3.42) полезно ввести новую терминологию (которая будет принята в дальнейшем тексте настоящей книги). Для $g = g(0, 0, 0)$ оператор $\mathbf{T}(g)$ является единичным оператором, а коэффициенты разложения $\langle f_n^{(j)}, f_m^{(l)} \rangle$ условимся называть *матричными элементами смешанных базисов* или сокращенно м. э. с. б.[1]). Для $j = l$ и произвольного $g \in E(2)$ формула (3.42) дает так называемую *теорему сложения* для базиса $\{\Psi_n^{(l)}\}$, а коэффициенты $T_{mn}^{(l)} = \langle \mathbf{T}(g) f_n^{(l)}, f_m^{(l)} \rangle$ называются *матричными элементами* оператора $\mathbf{T}(g)$ в базисе $\{\Psi_n^{(l)}\}$. Из соотношения $\mathbf{T}(gg') = \mathbf{T}(g)\mathbf{T}(g')$ сразу вытекает тот факт, что матричные элементы удовлетворяют тождествам

$$T_{mn}^{(l)}(gg') = \sum_k T_{mk}^{(l)}(g)\, T_{kn}^{(l)}(g'). \tag{3.44}$$

Из унитарности оператора $\mathbf{T}(g)$ следует соотношение

$$T_{mn}^{(l)}(g^{-1}) = \overline{T}_{nm}^{(l)}(g), \tag{3.45}$$

и наконец, для $g(0, 0, 0) = e$ имеем

$$T_{mn}^{(l)}(e) = \delta_{mn}. \tag{3.46}$$

Если в (3.42) $j \neq l$ и g — произвольный элемент группы, то коэффициенты разложения (3.43) будут также называться матричными элементами смешанных базисов (для отличия общего случая от частного, когда $g = e$, мы не будем пользоваться сокращением. — *Ред.*).

А теперь перейдем к рассмотрению некоторых разложений, представляющих особый интерес. Из (3.22) имеем

$$\langle f_n^{(j)}, f_\alpha^{(1)} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f_n^{(j)}(\varphi)\, \delta(\varphi - \alpha)\, d\varphi = f_n^{(j)}(\alpha), \qquad j = 2,\ 3,\ 4,$$

откуда

$$\Psi_n^{(j)}(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} f_n^{(j)}(\alpha)\, \Psi_\alpha^{(1)}(x, y)\, d\alpha, \tag{3.47}$$

где $\Psi_\alpha^{(1)}$ — так называемое решение уравнения Гельмгольца типа *плоской волны*, определяемое формулой (3.24). Заметим, что разложение по этим плоским волнам есть не что иное, как

---

[1]) В оригинале overlap functions. Фактически величины $\langle f_n^{(j)}, f_m^{(l)} \rangle$ являются матричными элементами оператора перехода от базиса $\{\Psi_n^{(j)}\}$ к базису $\{\Psi_m^{(l)}\}$. Однако, чтобы различать эти величины и величины $\langle T(g) f_n^{(l)}, f_m^{(l)} \rangle$, за которыми закреплен термин «матричные элементы», мы предлагаем термин м. э. с. б. — *Прим. ред.*

соотношение (3.1), выписанное в базисе собственных функций $\{\Psi_n^{(j)}\}$.

Кроме того, имеем разложение

$$\Psi_\alpha^{(1)}(x,\ y)=\sum_n \langle f_\alpha^{(1)},\ f_n^{(j)}\rangle\,\Psi_n^{(j)}=\sum_n \bar f_n^{(j)}(\alpha)\,\Psi_n^{(j)}, \tag{3.48}$$

где сумма заменяется интегралом, если $\{\Psi_n^{(j)}\}$— континуальный собственный базис. Теперь имеем разложение решения типа плоской волны по элементам иного собственного базиса. Например, решения (3.19), выраженные через функции Бесселя ($j=2$) и называемые решениями типа *цилиндрической волны*, при подстановке в (3.48) дают тождество (3.20). Для $j=3$ находим, что

$$\exp[i\omega(x\cos\alpha+y\sin\alpha)]=$$
$$=(2\pi\sin\alpha)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{ctg}(\alpha/2))^{i\mu}\,\Psi_{\mu+}^{(3)}(x,\ y)\,d\mu,\qquad 0<\alpha<\pi; \tag{3.49}$$

сходный результат мы имеем и при $-\pi<\alpha<0$. В результате несложного (но довольно утомительного) интегрирования мы получаем следующее соотношение:

$$\langle f_n^{(2)},\ f_{\mu+}^{(3)}\rangle=(2\pi)^{-1}\int_0^\pi e^{in\varphi}(1+\cos\varphi)^{i\mu/2-1/4}(1-\cos\varphi)^{-i\mu/2-1/4}\,d\varphi=$$
$$=\frac{\exp[(\pi/2)(i/2-\mu)]}{\pi\sqrt{2}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)\times$$
$$\times\left[\frac{(-1)^n\,\Gamma(^1/_2+i\mu)}{\Gamma(^1/_2+i\mu-n)}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}^1/_2+i\mu, & ^1/_2-n\\ 1+i\mu-n & \end{matrix}\middle|-1\right)-\right.$$
$$\left.-i\,\frac{\Gamma(^1/_2-i\mu)}{\Gamma(1-i\mu-n)}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}^1/_2-i\mu, & ^1/_2-n\\ 1-i\mu-n & \end{matrix}\middle|-1\right)\right],$$
$$\langle f_n^{(2)},\ f_{\mu-}^{(3)}\rangle=\langle f_{-n}^{(2)},\ f_{\mu+}^{(3)}\rangle, \tag{3.50}$$

которые дают м. э. с. б. для базиса Бесселя и базиса функций параболического цилиндра. Итак, мы имеем разложение

$$(2\pi)^{1/2}\,i^nJ_n(\omega r)\,e^{in\theta}=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\langle f_n^{(2)},\ f_{\mu+}^{(3)}\rangle\,\Psi_{\mu+}^{(3)}(x,\ y)+\right.$$
$$\left.+\langle f_n^{(2)},\ f_{\mu-}^{(3)}\rangle\,\Psi_{\mu-}^{(3)}(x,\ y)\right]d\mu \tag{3.51}$$

цилиндрической волны по базису из параболических цилиндрических волн. М. э. с. б. для базиса Матье ($j=4$) и базиса Бесселя находятся очень легко, так как функции Матье $\mathrm{ce}_n(\varphi,\ q)$,

$\mathrm{se}_n(\varphi, q)$ определяются своими коэффициентами A^n_m, B^n_m разложения в ряд Фурье на единичной окружности. Например, из (Б.26)

$$\mathrm{ce}_{2n+1}(\varphi, q) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} A^{(2n+1)}_{2m+1}\{\exp[i(2m+1)\varphi] + \exp[-i(2m+1)\varphi]\}.$$

Поскольку $f^{(4)}_{2n+1,c}(\varphi) = \pi^{-1/2}\mathrm{ce}_{2n+1}(\varphi, q)$, мы имеем

$$\langle f^{(4)}_{2n+1,c}, f^{(2)}_p\rangle = \begin{cases} A^{(2n+1)}_{2m+1}, & \text{если } |p| = 2m+1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3.52}$$

Остальные м. э. с. б. так же просты. Зная эти м. э. с. б., можно решение типа цилиндрической волны записать в виде бесконечной суммы решений Матье (3.41а), (3.41б) или решение Матье представить в виде бесконечной суммы цилиндрических волн (см. также [128]).

Теперь дадим пример теоремы сложения. Матричные элементы оператора $\mathbf{T}(g)$, определенного формулой (3.2), относительно базиса Бесселя $\{f^{(2)}_n\}$, заданного формулой (3.13), имеют вид

$$\mathbf{T}^{(2)}_{mn}(\theta, a, b) = \langle \mathbf{T}(g) f^{(2)}_n, f^{(2)}_m\rangle =$$

$$= (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\exp[i\omega(a\cos(\varphi-\theta) + b\sin(\varphi-\theta)) - in\theta + i(n-m)\varphi]\,d\varphi,$$

$$g = g(\theta, a, b). \tag{3.53}$$

Полагая $a = r\cos\alpha$, $b = r\sin\alpha$ и вводя новую переменную $\beta = \varphi - \theta - \alpha$, находим

$$T^{(2)}_{mn}(\theta, a, b) =$$

$$= (2\pi)^{-1}\exp[i(n-m)\alpha - im\theta]\int_{-\pi}^{\pi}\exp[i\omega r\cos\beta + i(n-m)\beta]\,d\beta.$$

Сравнивая этот интеграл с соотношениями (3.18), (3.19), мы в конечном счете получаем

$$\begin{gathered} T^{(2)}_{mn}[\theta, r, \alpha] = i^{n-m}\exp[i(n-m)\alpha - im\theta]\,J_{n-m}(\omega r), \\ a = r\cos\alpha, \quad b = r\sin\alpha, \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \end{gathered} \tag{3.54}$$

Подставляя эти матричные элементы в формулы (3.44)—(3.46), мы получаем ряд тождеств для функций Бесселя. (Более подробный анализ этих результатов см. в [37, 83, 122].) Оказывается, теорема сложения для базиса Бесселя является частным случаем соотношения (3.44) при $j=2$, так как

$$\Psi_n^{(2)}(r,\ \theta)=(2\pi)^{1/2}\,T_{0n}^{(2)}[0,\ r,\ \theta].$$

И наконец, заметим, что плоская волна (3.7), (3.24)

$$\overline{H}(x,\ y,\ \varphi)=\Psi_{\varphi}^{(1)}(x,\ y)=\exp\,[i\omega\,(x\cos\varphi+y\sin\varphi)],$$

которую мы рассматриваем как функцию от φ, принадлежит пространству $L_2(S_1)$. Действительно, простое вычисление дает

$$\langle\Psi^{(1)}(\mathbf{x}),\ \Psi^{(1)}(\mathbf{x}')\rangle=2\pi J_0\{\omega[(x-x')^2+(y-y')^2]^{1/2}\}. \tag{3.55}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\langle\Psi^{(1)}(\mathbf{x}),\ \Psi^{(2)}(\mathbf{x}')\rangle&=\sum_n\langle\Psi^{(1)}(\mathbf{x}),\ f_n^{(j)}\rangle\langle f_n^{(j)},\ \Psi^{(1)}(\mathbf{x}')\rangle=\\&=\sum_n\overline{\Psi}_n^{(j)}(-\mathbf{x})\,\Psi_n^{(j)}(-\mathbf{x}'),\end{aligned} \tag{3.56}$$

что следует из формулы (3.7) и свойства полноты базиса $\{f_n^{(j)}\}$. (И здесь сумму по n можно заменить интегралом.) Сравнивая соотношения (3.55) и (3.56), мы получаем для каждого $j=1,\ 2,\ 3,\ 4$ билинейное разложение функций $J_0\{\omega[(x-x')^2+(y-y')^2]^{1/2}\}$ по решениям уравнения Гельмгольца с разделенными переменными.

Другие примеры разложений по решениям уравнения Гельмгольца см. в работе [95].

1.4. Разделение переменных для уравнения Клейна — Гордона

Метод, рассмотренный в предыдущем разделе, дает совершенно иные результаты, если его применять к уравнению Клейна — Гордона в двумерном пространстве-времени:

$$(\partial_{tt}-\partial_{xx}+\omega^2)\,\Phi(t,\ x)=0. \tag{4.1}$$

Здесь x и t — вещественные переменные, а ω — положительная константа. Поскольку мы подробно анализировали метод разделения переменных в применении к уравнению Гельмгольца, мы довольно часто будем приводить только конечные результаты, опуская необходимые вычисления.

Отбрасывая тривиальный единичный оператор, находим, что алгебра симметрии уравнения (4.1) трехмерна с базисом

$$P_1=\partial_t,\qquad P_2=\partial_x,\qquad M=-t\partial_x-x\partial_t \tag{4.2}$$

и соотношениями коммутирования

$$[P_1,\ P_2]=0,\qquad [M,\ P_1]=P_2,\qquad [M,\ P_2]=P_1. \tag{4.3}$$

В качестве алгебры симметрии уравнения (4.1) мы берем *вещественную* алгебру Ли $\mathscr{E}(1, 1)$ с базисом (4.2). Используя элементы алгебры $\mathscr{E}(1, 1)$, запишем уравнение (4.1) в виде

$$(P_1^2 - P_2^2 + \omega^2)\Phi = 0. \tag{4.4}$$

Следовательно, на пространстве решений уравнения Клейна — Гордона $P_1^2 - P_2^2 \equiv -\omega^2$. Легко проверить, что любой элемент $L \in \mathscr{E}(1, 1)$ коммутирует с $P_1^2 - P_2^2$, т. е. этот оператор находится в центре обертывающей алгебры алгебры $\mathscr{E}(1, 1)$.

Группой симметрии уравнения (4.1) является $E(1, 1)$, изоморфная группе матриц

$$g(\theta, a, b) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\theta & -\operatorname{sh}\theta & 0 \\ -\operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}, \quad -\infty < \theta,\ a,\ b < \infty. \tag{4.5}$$

Групповое произведение имеет вид

$$g(\theta, a, b)\, g(\theta', a', b') =$$
$$= g(\theta + \theta',\ a \operatorname{ch}\theta' - b \operatorname{sh}\theta' + a',\ -a \operatorname{sh}\theta' + b \operatorname{ch}\theta' + b'). \tag{4.6}$$

Группа симметрии $E(1, 1)$ действует, как группа преобразований в плоскости (t, x): элемент группы $g(\theta, a, b)$ отображает точку $\mathbf{x} = (t, x)$ в точку

$$\mathbf{x}g = (t \operatorname{ch}\theta - x \operatorname{sh}\theta + a,\ -t \operatorname{sh}\theta + x \operatorname{ch}\theta + b). \tag{4.7}$$

(Заметим, что группа $E(1, 1)$ называется также *группой Пуанкаре* для двумерного пространства-времени. Это связная группа преобразований, сохраняющая расстояние s (специальной теории относительности) между двумя точками $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$ пространства-времени

$$s^2 = (t - t')^2 - (x - x')^2.$$

Читатель может легко проверить тот факт, что преобразования (4.7) обладают этим свойством.) Нетрудно проверить, что $\mathbf{x}(g_1 g_2) = (\mathbf{x}g_1)g_2$ для g_1, $g_2 \in E(1, 1)$ и что $\mathbf{x}g(0, 0, 0) = \mathbf{x}$.

Базис алгебры Ли матричной группы $E(1, 1)$ задается матрицами

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

причем соотношения коммутирования идентичны (4.3). Образующие алгебры Ли и матрицы (4.5) связаны (при помощи матричной экспоненты) следующим соотношением:

$$g(\theta, a, b) = \exp(\theta M) \exp(aP_1 + bP_2). \tag{4.9}$$

Соответствующее действие группы $E(1, 1)$ на пространство $\mathcal{F}$ аналитических функций f от t, x определяется соотношением

$$\mathbf{T}(g) f(\mathbf{x}) = \exp(\theta M) \exp(aP_1 + bP_2) f(\mathbf{x}),$$

где P_1, P_2, M даются (4.2). Взяв экспоненту производных Ли, как в приложении А, мы получим

$$\mathbf{T}(g) f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}g), \tag{4.10}$$

где $\mathbf{x}g$ определяется (4.7). Легко проверить, что

$$\mathbf{T}(gg') = \mathbf{T}(g)\mathbf{T}(g'), \quad g, g' \in E(1, 1), \quad \mathbf{T}(g(0, 0, 0)) = E, \tag{4.11}$$

где E — единичный оператор на $\mathcal{F}$.

Способ вычисления пространства $\mathcal{S}$ операторов симметрии второго порядка аналогичен способу, рассмотренному в разд. 1.1. Факторизуя по пространству $\mathfrak{q}$ тривиальных симметрий $f(\mathbf{x})(\partial_{tt} - \partial_{xx} + \omega^2)$, $f \in \mathcal{F}$, мы находим, что $\mathcal{S}/\mathfrak{q}$ девятимерно и имеет базис

$$\begin{aligned} &(\text{а}) \quad P_1, P_2, M, E, \\ &(\text{б}) \quad P_1^2, P_1P_2, M^2, \{M, P_1\}, \{M, P_2\}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

В части (а) представлены операторы симметрии первого порядка, в части (б) — операторы симметрии чисто второго порядка. Следовательно, уравнение Клейна — Гордона принадлежит классу I.

По аналогии с выражением (2.15) для уравнения Гельмгольца группа $E(1, 1)$ действует на алгебру Ли $\mathcal{E}(1, 1)$ операторов симметрии через *сопряженное представление*

$$L \to L^g = \mathbf{T}(g) L \mathbf{T}(g^{-1}), \qquad L \in \mathcal{E}(1, 1). \tag{4.13}$$

В результате этого действия $\mathcal{E}(1, 1)$ разбивается на орбиты. Чтобы установить структуру этих орбит, мы должны прежде всего определить сопряженное действие на базис P_j, M. Если $g_1 = \exp(aP_1)$, мы имеем

$$P_1^{g_1} = P_1, \qquad P_2^{g_1} = P_2, \qquad M^{g_1} = M - aP_2. \tag{4.14}$$

Если $g_2 = \exp(bP_2)$, то

$$P_1^{g_2} = P_1, \qquad P_2^{g_2} = P_2, \qquad M^{g_2} = M - bP_1, \tag{4.15}$$

и, наконец, если $g_3 = \exp(\alpha M)$, то

$$\begin{aligned} &P_1^{g_3} = \operatorname{ch} \alpha P_1 + \operatorname{sh} \alpha P_2, \\ &P_2^{g_3} = \operatorname{sh} \alpha P_1 + \operatorname{ch} \alpha P_2, \qquad M^{g_3} = M. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Пусть $L = c_1P_1 + c_2P_2 + c_3M \in \mathcal{E}(1, 1)$, $L \neq 0$. Рассуждая так же, как в разд. 1.2, можно показать, что если $c_3 \neq 0$, то L

находится на той же орбите, что и M; если $c_3=0$, $c_1^2>c_2^2$, то L находится на той же орбите, что и P_1; если $c_3=0$, $c_1^2<c_2^2$, то L находится на одной орбите с P_2; если $c_3=0$, $c_1=c_2$, то L находится на одной орбите с P_1+P_2; если $c_3=0$, $c_1=-c_2$, то L находится на одной орбите с P_1-P_2.

Чтобы упростить эти результаты, заметим, что операторы I_1, I_2 инверсии пространства и времени

$$I_1\Phi(t,\ x)=\Phi(t,\ -x),\qquad I_2\Phi(t,\ x)=\Phi(-t,\ x)\qquad \Phi=\mathcal{F},\tag{4.17}$$

отображают решения уравнения Клейна — Гордона в решения, и эти операторы симметрии нельзя представить в виде (4.10), т. е. I_j нельзя получить при помощи вычисления экспоненты операторов алгебры симметрии; то, что функции (4.17) являются решениями, устанавливается простой проверкой. Операторы I_j и $\mathbf{T}(g)$, $g\in E(1,1)$, порождают бо́льшую группу симметрии $\tilde{E}(1,1)$, так называемую *расширенную группу Пуанкаре.* Группа $\tilde{E}(1,1)$ уже не является связной группой, а ее связной компонентой, содержащей единицу, является группа $E(1,1)$. Алгебра Ли операторов симметрии не дает никакой информации о связных компонентах, отграниченных от единицы.

Поскольку $\tilde{E}(1,1)$ — группа симметрии, нам не нужно проводить различие между координатами, связанными преобразованием этой группы. Мы должны только определить орбиты в $\mathcal{E}(1,1)$, возникающие в результате сопряженного действия группы $\tilde{E}(1,1)$. Это легко выполнить. Из (4.17) находим $\left(I_j^2=E\right)$

$$P_1^{I_1}=I_1P_1I_1^{-1}=P_1,\qquad P_2^{I_1}=-P_2,\qquad M^{I_1}=-M,\tag{4.18}$$

$$P_1^{I_2}=-P_1,\qquad P_2^{I_2}=P_2,\qquad M^{I_2}=-M.\tag{4.19}$$

Таким образом, в результате сопряженного действия группы $\tilde{E}(1,1)$ алгебра $\mathcal{E}(1,1)$ распадается на четыре орбиты со следующими представителями:

$$M,\quad P_1,\quad P_2,\quad P_1+P_2.\tag{4.20}$$

Поскольку последние три представителя попарно коммутируют, их можно диагонализировать одновременно.

Пусть $\mathcal{S}^{(2)}$ — вещественное пятимерное векторное пространство операторов симметрии чисто второго порядка в $\mathcal{S}/q$. Базис $\mathcal{S}^{(2)}$ задается операторами (4.12б). Заметим, что в этом пространстве $P_1^2=P_2^2$, поскольку $P_1^2-P_2^2$ соответствует нулевому оператору. И здесь группа $\tilde{E}(1,1)$ действует на пространство $\mathcal{S}^{(2)}$ через сопряженное представление, разбивая его на непересекающиеся орбиты. Классификацию орбит проделал Калнинс [54]; здесь представлены только окончательные результаты.

Ниже мы даем перечисление представителей орбит:

$$P_2^2,\ P_1P_2,\quad (P_1+P_2)^2,\ M^2\pm\alpha P_2^2,\quad M^2-\alpha P_1P_2,\ M^2\pm\alpha(P_1+P_2)^2,$$
$$M^2,\ \{M,\ P_1\},\ \{M,\ P_2\},\quad \{M,\ P_1-P_2\},\ \{M,\ P_1-P_2\}+\alpha(P_1+P_2)^2. \tag{4.21}$$

Здесь $\alpha>0$; всего имеется тринадцать различных орбит. Соотнося эти операторы с системами координат, допускающими разделение переменных, мы обнаруживаем, что параметр α здесь выполняет точно такую же функцию, как и параметр d для эллиптических координат, отвечающих оператору $M^2+d^2P_1^2$ и представленных в табл. 1. Таким образом, α просто определяет масштаб координат; если координаты различаются только на величину α, свою для каждой системы, то фактически они не отличаются друг от друга. По этой причине мы впредь будем полагать $\alpha=1$.

В работе [54] Калнинс определил все системы координат, в которых уравнение Клейна — Гордона имеет решения с разделенными переменными, и соотнес эти системы с операторами симметрии (4.21) точно так, как мы сделали в разд. 1.2 для уравнения Гельмгольца. Результаты, полученные Калнинсом, даются нами в сокращенном виде.

Система 1. $S=P_2^2,\ P_1P_2,\ (P_1+P_2)^2$

Калнинс находит три системы координат, подобные декартовым, которые соответствуют указанным выше операторам. Однако мы рассмотрим только ту систему координат, в которой все три оператора диагонализируются одновременно. Такой системой является декартова система (t,x); решения с разделенными переменными в этой системе имеют вид

$$\Phi(t,\ x)=\exp[i(\alpha t+\beta x)],\qquad \alpha^2-\beta^2=\omega^2.$$

Система 2. $S_M=M^2$

Этот оператор связан с полярными координатами

$$t=u\operatorname{ch}v,\qquad x=u\operatorname{sh}v,\qquad 0\leqslant u<\infty,\qquad -\infty<v<\infty. \tag{4.22}$$

Уравнения с разделенными переменными имеют вид

$$\left(\frac{d^2}{du^2}+\frac{\tau^2}{u^2}+\omega^2\right)U=0,\qquad \left(\frac{d^2}{dv^2}+\tau^2\right)V=0, \tag{4.23}$$

а их решения — вид

$$\Phi_\tau=UV=\sqrt{u}\,J_\nu(\omega u)\,e^{i\tau v},\qquad S_M\Phi_\tau=-\tau^2\Phi_\tau, \tag{4.24}$$

где $J_\nu(z)$ — решение уравнения Бесселя (Б.16) при $\nu^2={}^1/_4-\tau^2$. Параметризация (4.22) выделяет только ту часть плоскости

(x, t), которая определяется соотношениями $t \pm x > 0$. Подобные координаты, в которых происходит разделение переменных, можно определить и в остальных трех квадрантах плоскости (x, t).

Система 3. $S_{D'} = \{M, P_2\} = u^2\partial_{vv} - v^2\partial_{uu}$

Этот оператор соответствует координатам

$$t = {}^1/_2\,(u^2 + v^2), \qquad x = uv, \qquad -\infty < u < \infty, \qquad 0 \leqslant v < \infty. \tag{4.25}$$

Уравнения с разделенными переменными имеют вид

$$\left(\frac{d^2}{du^2} + \omega^2 u^2 + \omega\lambda\right) U = 0, \qquad \left(\frac{d^2}{dv^2} + \omega^2 v^2 + \omega\lambda\right) V = 0, \tag{4.26}$$

а их решения — вид

$$\Phi_\lambda = UV =$$

$$= D_{(i\lambda-1)/2}\left(\varepsilon_1 (1 + i) \sqrt{\omega}\, u\right) D_{(i\lambda-1)/2}\left(\varepsilon_2 (1 + i) \sqrt{\omega}\, v\right), \tag{4.27}$$

$$S_{D'}\Phi_\lambda = -\omega\lambda\Phi_\lambda, \qquad \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 = \pm 1,$$

где $D_\nu(z)$ — функция параболического цилиндра (см. (B.9iii)).

Система 4. $S_D = \{M, P_1\} = u^2\partial_{vv} - v^2\partial_{uu}$

Теперь мы имеем

$$t = uv, \qquad x = {}^1/_2\,(u^2 + v^2), \qquad -\infty < u < \infty, \qquad 0 \leqslant v < \infty. \tag{4.28}$$

Все уравнения имеют такой же вид, как уравнения, представленные в системе 3, только здесь ω каждый раз заменяется на $i\omega$. (Заметим, что $\{M, P_1\}$ получается из $\{M, P_2\}$, если выполнить взаимную замену $x \leftrightarrow t$. В результате этой замены уравнение Клейна — Гордона отображается в новое уравнение подобного вида, в котором ω заменяется на $i\omega$.)

Система 5. $S_A = \{M, P_1 - P_2\} + (P_1 + P_2)^2 = (u + v)^{-1}\,(u\partial_{vv} - v\partial_{uu})$

Этот оператор соответствует следующим координатам:

$$t = {}^1/_2\,(u - v)^2 + u + v, \qquad x = -{}^1/_2\,(u - v)^2 + u + v, \tag{4.29}$$

$$-\infty < u, v < \infty;$$

решения с разделенными переменными принимают вид

$$\Phi_\lambda = UV = \varphi_{\varepsilon_1}(u)\,\varphi_{\varepsilon_2}(v), \qquad \varepsilon_j = \pm 1,$$

$$S_A\Phi_\lambda = \lambda\Phi_\lambda, \qquad \varphi_\varepsilon(z) = \left(z + \frac{\lambda}{\omega}\right)^{1/2} J_{\varepsilon/3}\left[\frac{2\omega}{3}\left(z + \frac{\lambda}{\omega}\right)^{3/2}\right].$$

Система 6. $S = M^2 - P_1P_2 = 4(\operatorname{sh} u - \operatorname{sh} v)^{-1}(\operatorname{sh} u\partial_{vv} - \operatorname{sh} v\partial_{uu})$

Координаты, в которых переменные разделяются, таковы:

$$2t = \operatorname{ch}\frac{u-v}{2} + \operatorname{sh}\frac{u+v}{2}, \quad 2x = \operatorname{ch}\frac{u-v}{2} - \operatorname{sh}\frac{u+v}{2}, \tag{4.30}$$
$$-\infty < u, \quad v < \infty,$$

а уравнения с разделенными переменными принимают вид

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \omega^2 \operatorname{sh} z + \lambda\right)\varphi(z) = 0, \quad z = u, \ v. \tag{4.31}$$

Это — вариант модифицированного уравнения Матье (3.40); следовательно, решения с разделенными переменными являются произведениями функций Матье. Здесь $S\Phi_\lambda = 4\lambda\Phi_\lambda$.

Система 7. $S_K = M^2 + (P_1 + P_2)^2 = (e^{2u} + e^{2v})^{-1}(e^{2v}\partial_{uu} + e^{2u}\partial_{vv})$

Координаты, допускающие разделение переменных, таковы:

$$t = \operatorname{sh}(u - v) + {}^1\!/_2 e^{u+v}, \quad x = \operatorname{sh}(u - v) - {}^1\!/_2 e^{u+v}, \tag{4.32}$$
$$-\infty < u, v < \infty.$$

Уравнения с разделенными переменными имеют вид

$$\left(\frac{d^2}{du^2} + \omega^2 e^{2u} + \nu^2\right)U = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dv^2} - \omega^2 e^{2v} - \nu^2\right)V = 0, \tag{4.33}$$

а их решения — вид

$$\Phi_{\nu^2} = J_{\pm\nu}(\omega e^u)\, J_{\pm\nu}(i\omega e^v), \quad S_K\Phi_{\nu^2} = \nu^2\Phi_{\nu^2}. \tag{4.34}$$

Система 8. $S_B = M^2 - (P_1 + P_2)^2 = (e^{2v} - e^{2u})^{-1}(e^{2v}\partial_{uu} - e^{2u}\partial_{vv})$

Этому оператору соответствуют координаты

$$t = \operatorname{ch}(u - v) + {}^1\!/_2 e^{u+v}, \quad x = \operatorname{ch}(u - v) - {}^1\!/_2 e^{u+v}, \tag{4.35}$$
$$-\infty < u, v < \infty,$$

очень похожие на координаты системы 7. Решения с разделенными переменными имеют вид

$$\Phi_{\nu^2} = J_{\pm\nu}(\omega e^u)\, J_{\pm\nu}(\omega e^v), \quad S_B\Phi_{\nu^2} = -\nu^2\Phi_{\nu^2}. \tag{4.36}$$

Как отмечает Калнинс, даже инверсия пространства-времени не дает возможности этим координатам покрыть всю плоскость (x, t).

Система 9. $S = M^2 + P_2^2 = (\operatorname{ch}^2 u + \operatorname{sh}^2 v)^{-1}(\operatorname{ch}^2 u\partial_{vv} + \operatorname{sh}^2 v\partial_{uu})$

Координаты, в которых переменные разделяются, таковы:

$$t = \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v, \quad x = \operatorname{ch} u \operatorname{sh} v, \quad -\infty < u, v < \infty. \tag{4.37}$$

Уравнения с разделенными переменными

$$\left(\frac{d^2}{du^2}+\frac{\omega^2}{2}\operatorname{ch}2u+\lambda\right)U=0,\quad \left(\frac{d^2}{dv^2}-\frac{\omega^2}{2}\operatorname{ch}2v+\lambda\right)V=0 \quad (4.38)$$

являются вариантами модифицированного уравнения Матье (3.40). Решения с разделенными переменными суть произведения функций Матье; здесь $S\Phi_\lambda=(\lambda-\omega^2/2)\Phi_\lambda$.

Система 10. $L=M^2-P_2^2=(\operatorname{sh}^2 a-\operatorname{sh}^2 b)^{-1}(\operatorname{sh}^2 a\partial_{bb}-\operatorname{sh}^2 b\partial_{aa})=$

$$=(\sin^2\alpha-\sin^2\beta)^{-1}(\sin^2\beta\partial_{\alpha\alpha}-\sin^2\alpha\partial_{\beta\beta})$$

Здесь мы имеем две системы координат, допускающие разделение переменных, которые покрывают непересекающиеся области плоскости (x, t). Первая из них:

$$\text{(i)}\quad t=\operatorname{ch}a\operatorname{ch}b,\quad x=\operatorname{sh}a\operatorname{sh}b,\quad -\infty<a<\infty,\quad 0\leqslant b<\infty. \quad (4.39)$$

Уравнения с разделенными переменными в этой системе имеют вид

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+\frac{\omega^2}{2}\operatorname{ch}2z+\lambda-\frac{\omega^2}{2}\right)\varphi(z)=0,\quad z=a,\ b. \quad (4.40)$$

Сравнение с уравнением (3.40) показывает, что решения с разделенными переменными в этом случае являются произведениями модифицированных функций Матье. Здесь $L\Phi_\lambda=\lambda\Phi_\lambda$.

Вторая система имеет вид

$$\text{(ii)}\quad t=\cos\alpha\cos\beta,\quad x=\sin\alpha\sin\beta,\quad 0<\alpha<2\pi,\quad 0\leqslant\beta<\pi. \quad (4.41)$$

Уравнения с разделенными переменными записываются так:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-\frac{\omega^2}{2}\cos 2z+\lambda+\frac{\omega^2}{2}\right)\varphi(z)=0,\quad z=\alpha,\ \beta. \quad (4.42)$$

Это — уравнение Матье, и решениями с разделенными переменными являются произведения функций Матье. Здесь $L\Phi_\lambda=\lambda\Phi_\lambda$. Заметим, что координаты (i) и (ii) покрывают плоскость (x, t) не полностью.

Этим мы завершили список систем координат, в которых возможно разделение переменных и которые соответствуют орбитам операторов симметрии второго порядка. Как показано в [54], все эти системы ортогональны в метрике Минковского $ds^2=dt^2-dx^2$, т. е. $ds^2=g_{11}(u, v)\,du^2+g_{22}(u, v)\,dv^2$ для всех систем координат $\{u, v\}$ (системы 1—10). Кроме того, для уравнения Клейна — Гордона эти системы являются единственными ортогональными системами координат, в которых возможно разделение переменных.

Таблица 2

ОПЕРАТОРЫ И КООРДИНАТЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА — ГОРДОНА

Операторы	Координаты	Решения с разделенными переменными
1 P_2^2, P_1P_2, $(P_1+P_2)^2$	t, x	Произведение экспоненциальных функций
2 $S_M = M^2$	$t = u\,\text{ch}\,v$, $x = u\,\text{sh}\,v$	Произведение экспоненциальной функции и функции Бесселя
3 $\{M, P_2\}$	$t = {}^1/_2\,(u^2+v^2)$, $x = uv$	Произведение функций параболического цилиндра
4 $S_D = \{M, P_1\}$	$t = uv$, $x = {}^1/_2\,(u^2+v^2)$	Произведение функций параболического цилиндра
5 $\{M, P_1 - P_2\} + (P_1+P_2)^2$	$t = {}^1/_2\,(u-v)^2 + u + v$, $x = -{}^1/_2\,(u-v)^2 + u + v$	Произведение функций Эйри
6 $M^2 - P_1P_2$	$t + x = \text{ch}\,[(u-v)/2]$, $t - x = \text{sh}\,[(u+v)/2]$	Произведение функций Матье
7 $S_K = M^2 + (P_1+P_2)^2$	$t + x = 2\,\text{sh}\,(u-v)$, $t - x = e^{u+v}$	Произведение функций Бесселя
8 $S_B = M^2 - (P_1+P_2)^2$	$t + x = 2\,\text{ch}\,(u-v)$, $t - x = e^{u+v}$	Произведение функций Бесселя
9 $M^2 + P_2^2$	$t = \text{sh}\,u\,\text{ch}\,v$, $x = \text{ch}\,u\,\text{sh}\,v$	Произведение функций Матье
10 $M^2 - P_2^2$	$t = \text{ch}\,u\,\text{ch}\,v$, $x = \text{sh}\,u\,\text{sh}\,v$ или $t = \cos u \cos v$, $x = \sin u \sin v$	Произведение функций Матье
11 $S_E = \{M, P_1 - P_2\}$		Решений с разделенными переменными нет

Однако существуют и неортогональные системы координат, допускающие разделение переменных; они получаются точно таким же способом, который мы рассматривали в разд. 1.2 для уравнения Гельмгольца. Кроме того, мы находим, что эти системы всегда соответствуют диагонализации оператора симметрии первого порядка и что одному и тому же оператору соответствует много различных систем. Мы не будем здесь останавливаться на неортогональных системах и отсылаем читателя к работе [54], где этот вопрос рассматривается подробно.

Результаты, полученные для ортогональных систем, представлены в табл. 2.

Заметим, что простые связи между системами координат, допускающими разделение переменных, и орбитами операторов симметрии второго порядка, установленные нами для уравнения Гельмгольца, нельзя полностью перенести на уравнение Клейна — Гордона. Во-первых, системы координат 5 и 10 никак не смогут покрыть плоскость (x, t) полностью. Во-вторых, мы показали, что двенадцать из тринадцати орбит (4.21) в $\mathscr{S}^{(2)}$ соответствуют системам, допускающим разделение переменных. Однако остается содержащая оператор $S_{\mathrm{E}} = \{M, P_1 - P_2\}$ орбита, которая, как мы покажем, не соответствует какой-либо системе координат, допускающей разделение переменных.

Итак, нельзя установить взаимно однозначное соответствие между системами координат, в которых переменные разделяются, и орбитами операторов симметрии. Во всех известных нам случаях заданная система координат, допускающая разделение переменных, соответствует некоторому оператору симметрии либо второго, либо меньшего порядка. Однако заданный оператор симметрии не обязательно соответствует какой-либо системе координат, в которой переменные разделяются. Одна из основных проблем данной теории и состоит в том, чтобы дать объяснение этому факту. В табл. 2 те операторы S, которые будут нам встречаться в дальнейшем довольно часто, снабжены для отличия нижними индексами (например, оператор S_{M}).

1.5. Формулы разложения для решений уравнения Клейна — Гордона

Метод установления связей между различными решениями уравнения Клейна — Гордона с разделенными переменными почти идентичен процедуре, примененной нами в разд. 1.3 к уравнению Гельмгольца. Так, по аналогии с (3.1) мы рассматриваем решения $\Phi(t, x)$ уравнения (4.1), которые можно представить в виде

$$\Phi(t, x) = \mathrm{l.\,i.\,m.} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\omega(t \operatorname{ch} y + x \operatorname{sh} y)]\, h(y)\, dy = I(h), \qquad (5.1)$$

где h принадлежит гильбертову пространству $L_2(R)$ функций, интегрируемых с квадратом по мере Лебега на вещественной прямой:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(y)|^2 dy < \infty.$$

Скалярное произведение в этом пространстве имеет вид

$$\langle h_1, h_2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(y)\bar{h}_2(y)\,dy, \qquad h_j \in L_2(R). \tag{5.2}$$

(Замечание. Интеграл (5.1) может и не сходиться поточечно для произвольного $h \in L_2(R)$. Обозначение l. i. m. будет объяснено ниже.)

Действие группы $E(1, 1)$ на решения уравнения Клейна — Гордона, определяемое операторами $\mathbf{T}(g)$ согласно формулам (4.7), (4.10), соответствует действию

$$\mathbf{T}(g)h(y) = \exp[i\omega(a\operatorname{ch}(y+\theta) + b\operatorname{sh}(y+\theta))]\,h(y+\theta), \tag{5.3}$$
$$h \in L_2(R), \qquad g(\theta, a, b) \in E(1, 1),$$

группы $E(1, 1)$ в $L_2(R)$; т. е. $\mathbf{T}(g)\Phi = I(\mathbf{T}(g)h)$, если $\Phi = I(h)$. Соответствующее действие алгебры Ли в $L_2(R)$ определяется операторами

$$P_1 = i\omega\operatorname{ch} y, \qquad P_2 = i\omega\operatorname{sh} y, \qquad M = \partial_y, \tag{5.4}$$

которые, конечно же, удовлетворяют соотношениям коммутирования (4.3).

В отличие от того, что имело место для уравнения Гельмгольца, функции Φ вида (5.1) могут и не являться истинными решениями уравнения Клейна — Гордона, поскольку они могут не быть дважды непрерывно дифференцируемыми по x и t. Например, если Φ определяется соотношением (5.1), то можно ожидать, что в результате формального дифференцирования под знаком интеграла мы получим соотношение $\partial_t\Phi = I(i\omega h\operatorname{ch} y)$. Однако для заданного h, интегрируемого с квадратом, выражение $h\operatorname{ch} y$ может и не быть интегрируемым с квадратом, и, следовательно, возможно, что интеграл $I(i\omega h\operatorname{ch} y)$ не будет сходиться. Однако если h содержится в плотном множестве $\mathscr{D}$, состоящем из всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем (т. е. функций, которые обращаются в нуль вне некоторого замкнутого ограниченного интервала вещественной прямой), то легко проверить, что соответствующие функции $\Phi = I(h)$, $h \in \mathscr{D}$, являются истинными бесконечно дифференцируемыми решениями уравнения Клейна — Гордона. Кроме того, операторы (5.4) корректно определены в $\mathscr{D}$.

Пусть $\mathscr{H}$ — пространство функций Φ вида $\Phi = I(h)$, $h \in L_2(R)$. Здесь $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\Phi_1, \Phi_2) \equiv \langle h_1, h_2 \rangle, \quad \Phi_i = I(h_i). \tag{5.5}$$

(Это определение имеет смысл, потому что можно проверить, что ни один ненулевой элемент h не может быть отображен интегралом I в нулевое решение уравнения Клейна — Гордона.) Назовем элементы пространства $\mathscr{H}$ *слабыми* решениями уравнения Клейна — Гордона. Из того что $\mathscr{D}$ — плотное подмножество пространства $L_2(R)$, легко следует, что каждое слабое решение Φ является в смысле гильбертова пространства пределом $\lim \Phi_i = \Phi$ некоторой последовательности истинных бесконечно дифференцируемых решений.

В рассматриваемом нами случае мы можем получить явные интегральные выражения для скалярного произведения в $\mathscr{H}$. Действительно, для $\Phi_i = I(h_i)$, $h_i \in \mathscr{D}$, можно легко проверить справедливость соотношений

$$(\Phi_1, \Phi_2) = i \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1 \partial_t \overline{\Phi}_2 \, dx \Big|_{t=t_0} = -i \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_t \Phi_1) \overline{\Phi}_2 \, dx \Big|_{t=t_0}, \tag{5.5'}$$

где интегралы не зависят от константы t_0. (Эти выражения хорошо известны в квантовой теории поля (см., например, [139]). Мы просто построили гильбертово пространство решений уравнения Клейна — Гордона с положительной энергией.) Но интегралы (5.5′) имеют смысл только в том случае, когда функции Φ_i дифференцируемы по t. Если в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ считать Φ пределом интегралов, взятых по конечным интервалам $[-n, n]$ (предел в среднем) при $n \to \infty$, то соотношение (5.1) приобретает четкий смысл.

Легко проверить, что операторы $\mathrm{T}(g)$, определяемые формулой (5.3), унитарны в $L_2(R)$ и определяют унитарное (даже неприводимое) представление группы $E(1, 1)$. Унитарное преобразование I, которое отображает $L_2(R)$ в $\mathscr{H}$, отображает операторы $\mathrm{T}(g)$ в операторы $I\mathrm{T}(g)I^{-1}$ (см. (4.10)) в пространстве $\mathscr{H}$. Операторы алгебры Ли (5.4) в области $\mathscr{D}$ являются косоэрмитовыми; отсюда следует, что элементы пространства $\mathscr{S}^{(2)}$, образованные из операторов (5.4) и определенные в $\mathscr{D}$, являются симметрическими. Следовательно, мы можем каждый из перечисленных в табл. 2 формальных операторов S связать с некоторым симметрическим оператором в $\mathscr{D}$, а затем попытаться расширить эту область, с тем чтобы получить самосопряженный оператор, спектральное разложение которого легко вычисляется. И наконец, используя преобразование I, мы можем отобразить полученные результаты в $\mathscr{H}$.

Заметим, что выражение (5.1) можно представить как скалярное произведение:

$$\Phi(t, x) = I(h) = \langle h, H(\cdot; t, x)\rangle,$$
$$H(y, t, x) = \exp[-i\omega(\bar{t} \operatorname{ch} y + \bar{x} \operatorname{sh} y)]. \tag{5.6}$$

Это представление не строго корректно, поскольку H как функция от y не принадлежит $L_2(R)$ при вещественных t, x. Но если мы позволим t и x принимать комплексные значения, такие, чтобы выполнялись неравенства $\operatorname{Im}(t \pm x) > 0$, то $H(y, t, x) \in L_2(R)$, и представление (5.6) становится справедливым. Кроме того, $\Phi(t, x)$ удовлетворяет уравнению $(\partial_{tt} - \partial_{xx} + \omega^2)\Phi(t, x) = 0$ для комплексных t и x. Все представленные в табл. 2 системы координат, допускающие разделение переменных, можно аналитически продолжить в область $\operatorname{Im}(t \pm x) > 0$, где мы получим разделение переменных для комплексного уравнения Клейна — Гордона. Интегралы $I(h)$, где h принадлежит одному из собственных базисов, соответствующих некоторому оператору S из табл. 2, абсолютно сойдутся благодаря экспоненциально затухающему коэффициенту, который содержится в функции H.

В представленном ниже списке собственных базисов мы ограничиваемся случаем, когда t и x вещественны, но результаты обычно получаются в предположении, что $\operatorname{Im}(t \pm x) > 0$, а затем обосновывается предельный переход к случаю, когда t и x вещественны.

Система 1. $S = P_2^2,\ P_1P_2,\ (P_1 + P_2)^2$

Чтобы вычислить общие собственные функции этих коммутирующих операторов, достаточно получить общие собственные функции операторов iP_1 и iP_2. Базисом обобщенных собственных функций для $L_2(R)$ является совокупность $\{f_\lambda^c(y)\}$:

$$f_\lambda^c(y) = \delta(y - \lambda) \qquad (-\infty < \lambda < \infty), \qquad iP_1 f_\lambda^c = -\omega \operatorname{ch} \lambda f_\lambda^c,$$
$$iP_2 f_\lambda^c = -\omega \operatorname{sh} \lambda f_\lambda^c, \qquad \langle f_\lambda^c, f_{\lambda'}^c\rangle = \delta(\lambda - \lambda'). \tag{5.7}$$

Здесь верхний индекс «с» означает, что функции рассматриваются в декартовых координатах. Соответствующий базис обобщенных собственных функций $\{\Phi_\lambda^c\}$ в $\mathscr{H}$ имеет вид

$$\Phi_\lambda^c(t, x) = I(f_\lambda^c) = \exp[i\omega(t \operatorname{ch} \lambda + x \operatorname{sh} \lambda)],$$
$$(\Phi_\lambda^c, \Phi_{\lambda'}^c) = \delta(\lambda - \lambda'). \tag{5.8}$$

Система 2. $S_M = M^2$

Здесь достаточно диагонализировать симметрический оператор $iM = i(d/dy)$ в $L_2(R)$. Спектральное разложение этого оператора точно соответствует теории преобразования Фурье в $L_2(R)$ (см. [48, 113]). Здесь мы просто приведем полученные результаты. Симметрический оператор iM в $\mathcal{D}$ имеет единственное самосопряженное расширение, которое мы также обозначим через iM. Базисом обобщенных собственных функций для $L_2(R)$ является множество $\{f_\lambda^M\}$, где

$$f_\lambda^M(y) = \frac{e^{i\lambda y}}{(2\pi)^{1/2}} \quad (-\infty < \lambda < \infty), \qquad iMf_\lambda^M = -\lambda f_\lambda^M, \qquad \langle f_\lambda^M, f_\mu^M\rangle = \delta(\lambda-\mu). \tag{5.9}$$

Таким образом, произвольную функцию $h \in L_2(R)$ можно единственным образом представить в виде

$$h(y) = (2\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda, \tag{5.10}$$

где

$$\tilde{h}(\lambda) = \langle h, f_\lambda^M\rangle = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} h(y) e^{-i\lambda y} dy, \tag{5.11}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{h}(\lambda)|^2 d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} |h(y)|^2 dy. \tag{5.12}$$

Заметим, что коэффициент разложения $\tilde{h}(\lambda)$ в формуле (5.11) является в точности *преобразованием Фурье* функции h, а (5.12) — равенство Парсеваля. Следовательно, iM имеет непрерывный спектр, полностью покрывающий вещественную ось.

Соответствующий базис обобщенных собственных функций $\{\Phi_\lambda^M\}$ в $\mathcal{H}$ состоит из функций

$$\Phi_\lambda^M(t, x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\omega(t\operatorname{ch} y + x\operatorname{sh} y) + i\lambda y]\, dy = \left(\sqrt{2}/\pi\right) e^{-i\lambda v} K_{i\lambda}(i\omega u), \tag{5.13}$$

где

$$t = u\operatorname{ch} v, \qquad x = u\operatorname{sh} v,$$

а

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left(e^{i\nu\pi/2} J_{-\nu}(ze^{i\pi/2}) - e^{-i\nu\pi/2} J_\nu(ze^{i\pi/2})\right) \tag{5.14}$$

— *функция Макдональда*. Заметим, что наш вывод соотношения (5.13) справедлив только при условии $t \pm x > 0$. Для других квадрантов плоскости (x, t) можно найти подобную параметризацию,

Система 3. $S_{D'} = \{M, P_2\}$

В области $\mathscr{D}$ имеем $\{M, P_2\} = 2i\omega \operatorname{sh} y (d/dy) + i\omega \operatorname{ch} y$. Можно показать, что индексы дефекта этого оператора не равны, и, следовательно, его нельзя расширить до самосопряженного оператора в некотором плотном подпространстве пространства $L_2(R)$. Оператор $\{M, P_2\}$ можно сделать самосопряженным, расширяя само гильбертово пространство $L_2(R)$, но эта процедура совершенно не единственна. Поскольку орбита 4 также связана с функциями параболического цилиндра, а исследовать ее значительно проще, чем данный случай, мы закончим на этом анализ орбиты 3.

Система 4. $S_D = \{M, P_1\}$

В $\mathscr{D}$ имеет место соотношение $S_D = 2i\omega \operatorname{ch} y (d/dy) + i\omega \operatorname{sh} y$. Чтобы найти спектральное разложение оператора S_D, выполним унитарное преобразование пространства $L_2(R)$ и проведем замену переменной таким образом, чтобы после преобразования имело место соотношение $S_D = 2i\omega (d/du)$, где u — новая переменная. В этом виде спектр оператора S_D определяется легко.

Отображение V: $L_2(R) \to L_2(\mu, R)$, определяемое соотношением

$$Vh(y) = (\operatorname{ch} y)^{1/2} h(y), \qquad h \in L_2(R),$$

является унитарным преобразованием пространства $L_2(R)$ в гильбертово пространство $L_2(\mu, R)$ функций, заданных на R, интегрируемых с квадратом по мере $d\mu(y) = dy/\operatorname{ch} y$ и со скалярным произведением

$$\langle f_1, f_2\rangle' = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) \bar{f}_2(y)\, d\mu(y).$$

Таким образом,

$$\langle h_1, h_2\rangle = \langle Vh_1, Vh_2\rangle',$$

и симметрический оператор VS_DV^{-1} на $L_2(\mu, R)$, который мы также обозначим через S_D, принимает вид $S_D = 2i\omega \operatorname{ch} y (d/dy)$. Теперь произведем замену переменной $e^y = \operatorname{tg}(u/2)$, $0 < u < \pi$. Тогда скалярное произведение в $L_2(\mu, R) \equiv L_2[0, \pi]$ примет вид

$$\langle f_1, f_2\rangle' = \int_0^{\pi} f_1(u) \bar{f}_2(u)\, du, \qquad f_j(y) \equiv f_j(u),$$

и $S_D = 2i\omega (d/du)$. Подпространство $\mathscr{D}$ пространства $L_2(R)$ отображается в пространство $\mathscr{D}' \subset L_2[0, \pi]$, состоящее из бесконечно дифференцируемых по u на отрезке $[0, \pi]$ функций, которые в окрестности граничных точек обращаются в нуль. Теория самосопряженных расширений оператора S_D в $\mathscr{D}'$ хорошо известна [9, 48]. Существует бесконечное множество расширений, определяемых параметром α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$. Для фиксированного α пространство $\mathscr{D}'$ расширяется до $\mathscr{D}'_\alpha$ — пространства всех функций f, непрерывных на отрезке $[0, \pi]$, непрерывно дифференцируемых на интервале $(0, \pi)$ и таких, что $f(0) = e^{i\alpha\pi} f(\pi)$. Легко проверить, что S_{D} — оператор, симметрический на $\mathscr{D}'_\alpha$ и имеющий о. н. базис собственных функций

$$f_n(u) = \pi^{-1/2} \exp(-i\lambda u/(2\omega)), \qquad \lambda = 2\omega(\alpha + 2n),$$
$$n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots .$$

Переходя обратно в $L_2(R)$, можно видеть, что S_{D}^{α}, где α фиксировано, имеет собственные функции

$$\begin{gathered} f_n^{\mathrm{D},\,\alpha}(y) = (2/\pi)^{1/2} e^{y/2} (1 - ie^y)^{\alpha+2n-1/2} (1 + ie^y)^{-\alpha-2n-1/2}, \\ S_{\mathrm{D}}^{\alpha} f_{n'}^{\mathrm{D},\,\alpha} = \lambda f_n^{\mathrm{D},\,\alpha}, \quad \left\langle f_n^{\mathrm{D},\,\alpha}, \ f_{n'}^{\mathrm{D},\,\alpha} \right\rangle = \delta_{nn'}, \qquad n = 0, \ \pm 1, \ \ldots . \end{gathered} \tag{5.15}$$

Кроме того, $\{f_\lambda^{\mathrm{D},\,\alpha}\}$ образует о. н. базис в $L_2(R)$.

Собственные функции операторов S_{D}^{α} и $S_{\mathrm{D}}^{\alpha'}$ связаны следующими соотношениями:

$$f_m^{\mathrm{D},\,\alpha'} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle f_m^{\mathrm{D},\,\alpha'}, \ f_n^{D,\,\alpha} \right\rangle f_n^{\mathrm{D},\,\alpha},$$

$$\left\langle f_m^{\mathrm{D},\,\alpha'}, \ f_n^{\mathrm{D},\,\alpha} \right\rangle = \frac{e^{i\beta\pi} - 1}{i\beta\pi}, \qquad \beta = \alpha' - \alpha + 2(m - n),$$

которые получаются простым вычислением в $L_2[0, \pi]$.

Базисные функции $f_n^{\mathrm{D},\,\alpha}$ не лежат ни в области определения оператора P_1, ни в области определения оператора P_2, но лежат в области определения оператора M. В результате простого вычисления получаем

$$M f_n^{\mathrm{D},\,\alpha} = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2i}{\pi} \frac{\alpha + m + n}{4(n - m)^2 - 1} f_m^{\mathrm{D},\,\alpha}. \tag{5.16}$$

Чтобы найти соответствующий базис обобщенных функций $\{\Phi_n^{\mathrm{D},\,\alpha}\}$ в $\mathscr{H}$,

$$\Phi_n^{\mathrm{D},\,\alpha}(t, x) = I\left(f_n^{\mathrm{D},\,\alpha}\right),$$

используем тот факт, что переменные в этом интеграле разделятся, если положить

$$t = uv, \qquad x = {}^1/_2 (u^2 + v^2).$$

В результате получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \Phi_n^{\mathrm{D},\,\alpha}(u, v) = 2 \exp[3\pi i(\alpha + 2n)/2]\, D_{-\alpha-2n-1/2}\left((2\omega)^{1/2} u\right) \times \\ \times D_{\alpha+2n-1/2}\left(i(2\omega)^{1/2} v\right). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Система 5. $S_A = \{M, P_1 - P_2\} + (P_1 + P_2)^2$

Этот оператор имеет в $\mathscr{D}$ индексы дефекта (0, 1); следовательно, никакое самосопряженное расширение в обычном смысле невозможно. Самосопряженное расширение (неоднозначное), получаемое в результате расширения гильбертова пространства $L_2(R)$ до $L_2(R) \oplus L_2(R)$, рассматривается в работе [56].

Системы 6, 9 и 10

Поскольку базисы Матье в приложениях встречаются крайне редко, рассматривать их здесь, несмотря на всю их несложность, мы не будем.

Система 7. $S_K = M^2 + (P_1 + P_2)^2$

В $\mathscr{D}$ этот оператор определяется соотношением $S_K = d^2/dy^2 - \omega^2 e^{2y}$ и имеет единственное самосопряженное расширение (его замыкание). Спектральное расширение оператора S_K не простое, но его можно получить при помощи известных формул интегрального преобразования Лебедева (см. [121]). Имеется базис обобщенных собственных функций

$$\begin{gathered} f_\lambda^K(y) = \pi^{-1}(2\lambda \operatorname{sh} \lambda)^{1/2} K_{i\lambda}(\omega e^y), \qquad 0 < \lambda < \infty, \\ S_K f_\lambda^K = -\lambda^2 f_\lambda^K, \qquad \langle f_\lambda^K, f_{\lambda'}^K \rangle = \delta(\lambda - \lambda'). \end{gathered} \tag{5.18}$$

Здесь $K_\nu(z)$ — функция Макдональда (5.14). Соответствующий базис обобщенных собственных функций $\{\Phi_\lambda^K\}$ в $\mathscr{H}$ задается соотношениями

$$\begin{gathered} \Phi_\lambda^K(u, v) = 2\pi^{-1}(\lambda \operatorname{sh} \lambda)^{1/2} K_{i\lambda}(\omega u) K_{i\lambda}(-i\omega v), \\ t = (u^2 - u^2v^2 - v^2)/(2uv), \qquad x = (u^2 + u^2v^2 - v^2)/(2uv), \\ |u/v| > 1 \end{gathered} \tag{5.19}$$

с аналогичными результатами в других областях плоскости (x, t).

Система 8. $S_B = M^2 - (P_1 + P_2)^2$

Этот оператор определяется в $\mathscr{D}$ соотношением $S_B = d^2/dy^2 + \omega^2 e^{2y}$ и имеет семейство самосопряженных расширений S_B^α, $0 < \alpha \leqslant 2$ (см. [121]). В данном случае S_B^α имеет как дискретный, так и непрерывный спектр. Собственные функции дискретного спектра задаются соотношениями

$$\begin{gathered} f_n^{B,\alpha}(y) = [2(\alpha + 2n)]^{1/2} J_{\alpha+2n}(\omega e^y), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \\ \langle f_n^{B,\alpha}, f_m^{B,\alpha} \rangle = \delta_{n,m}, \qquad S_B^\alpha f_n^{B,\alpha} = (2n + \alpha)^2 f_n^{B,\alpha}. \end{gathered} \tag{5.20}$$

Ограничиваясь для простоты случаем $\alpha = 2$, находим, что оператор S_{B}^2 также имеет непрерывный спектр на полуоси $\lambda < 0$ с обобщенными собственными функциями

$$\begin{gathered}\tilde{f}_\lambda^{\text{B}}(y) = {}^1/_2\left[\operatorname{sh}\left(\pi\sqrt{-\lambda}\right)\right]^{-1/2}\left[J_{i\sqrt{-\lambda}}(\omega e^y) + J_{-i\sqrt{-\lambda}}(\omega e^y)\right], \\ \langle\tilde{f}_\lambda^{\text{B}}, \tilde{f}_{\lambda'}^{\text{B}}\rangle = \delta(\lambda - \lambda'), \quad \langle f_n^{\text{B},2}, \tilde{f}_\lambda^{\text{B}}\rangle = 0, \quad S_{\text{B}}^2\tilde{f}_\lambda^{\text{B}} = \lambda\tilde{f}_\lambda^{\text{B}}.\end{gathered} \tag{5.21}$$

Функции $\{f_n^{\text{B},2}, \tilde{f}_\lambda^{\text{B}}\}$ образуют базис в $L_2(R)$.

Соответствующие базисные функции в $\mathscr{H}$ определяются следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}\Phi_n^{\text{B},\alpha} = 2\left[2(\alpha + 2n)\right]^{1/2} J_{\alpha+2n}(\omega u) K_{\alpha+2n}(-i\omega v), \qquad |u/v| < 1, \\ \tilde{\Phi}_\lambda^{\text{B}} = \left[\operatorname{sh}\left(\pi\sqrt{-\lambda}\right)\right]^{-1/2}\left[J_{i\sqrt{-\lambda}}(\omega u) + J_{-i\sqrt{-\lambda}}(\omega u)\right] \times \\ \times K_{i\sqrt{-\lambda}}(-i\omega v), \\ t = (u^2 + u^2v^2 + v^2)/(2uv), \quad x = (u^2 - u^2v^2 + v^2)/(2uv), \\ v > u > 0,\end{gathered} \tag{5.22}$$

с аналогичными выражениями в других областях плоскости (x, t).

Система 11. $S_{\text{E}} = \{M, P_1 - P_2\}$

Этот оператор в $\mathscr{D}$ определяется формулой $S_{\text{E}} = i\omega(2e^{-y}(d/dy) - e^{-y})$. Формальные решения уравнения $S_{\text{E}}f = \lambda f$ имеют вид $f(y) = ce^{y/2}\exp(-i\lambda e^y/2\omega)$. Оператор S_{E} имеет индексы дефекта (0, 1) и поэтому совсем не имеет естественных самосопряженных расширений. Как показано в [56], расширяя гильбертово пространство до $L_2(R) \oplus L_2(R)$, оператор S_{E} можно расширить (неоднозначно) до самосопряженного оператора. Этот самосопряженный оператор имеет непрерывный спектр, покрывающий вещественную ось, и обобщенные собственные функции в $L_2(R) \oplus L_2(R)$ образуют базис, а сужение этих функций до исходного пространства $L_2(R)$ имеет вид

$$f_\lambda^{\text{E}}(y) = \frac{e^{y/2}}{(4\pi\omega)^{1/2}}\exp\left(\frac{-i\lambda e^y}{2\omega}\right), \quad S_{\text{E}}f_\lambda^{\text{E}} = \lambda f_\lambda^{\text{E}}, \quad -\infty < \lambda < \infty. \tag{5.23}$$

Произвольный элемент $h \in L_2(R)$ можно однозначным образом разложить по элементам собственного базиса

$$h(y) \sim \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda) f_\lambda^{\text{E}}(y)\, d\lambda, \qquad c(\lambda) = \langle h, f_\lambda^{\text{E}}\rangle. \tag{5.24}$$

Но базис $\{f_\lambda^{\text{E}}\}$ не удовлетворяет условиям ортогональности в $L_2(R)$.

Замечание. Как показано в [56], расширения пространства $L_2(R)$ до $L_2(R) \oplus L_2(R)$, которые мы выполняли с тем, чтобы получить самосопряженные операторы, соответствующие орбитам 5 и 11, довольно обычны. До сих пор мы ограничивались рассмотрением гильбертова пространства $L_2(R)$, которое соответствует решениям уравнения Клейна — Гордона с положительной энергией. В релятивистской же квантовой теории часто используется гильбертово пространство $L_2(R) \oplus L_2(R)$, которое соответствует решениям как с положительной, так и с отрицательной энергией [139]. Расширенное гильбертово пространство инвариантно относительно расширенной группы Пуанкаре, включая инверсию пространства и времени, а исходное пространство не обладает этим свойством. Получить самосопряженные операторы, которые соответствовали бы всем орбитам, можно только в расширенном гильбертовом пространстве.

Переходя к $\mathcal{H}$, находим

$$\Phi_\lambda^{\mathrm{E}}(t, x) = I\left(f_\lambda^{\mathrm{E}}\right) = [-2i\omega^2(t+x) - 2i\lambda]^{-1/2} \times$$
$$\times \exp\left\{-\left[\omega^2(x^2 - t^2) - \lambda(x-t)/\omega\right]^{1/2}\right\}; \qquad (5.25)$$

аналогичные выражения получаются для иных значений t, x и λ. Несложный анализ показывает, что такие координаты u, v, в которых $\Phi_\lambda^{\mathrm{E}}(t, x) = \sum_{j=1}^{4} U_\lambda^{(j)}(u) V_\lambda^{(j)}(v)$, т. е. которые допускали бы решения с разделенными переменными, отыскать невозможно. Функции $\Phi_\lambda^{\mathrm{E}}$ все еще образуют базис для $\mathcal{H}$, состоящий из собственных функций оператора S_{E}, но это уже решения не с разделенными переменными.

Теперь рассмотрим некоторые м. э. с. б., вычисленные в пространстве $L_2(R)$, которые позволят нам связать разные базисы. В основном м. э. с. б. для уравнения Клейна — Гордона довольно сложны, поэтому мы приводим здесь только простейшие из них. Более подробно этот вопрос рассматривается в [56, 95].

Наиболее просто вычисляются матричные элементы, когда берется произвольный базис $\{f_\mu^{\mathrm{G}}\}$ и декартов базис $\left\{f_\lambda^{\mathrm{c}}(y) = \delta(y-\lambda)\right\}$. В самом деле,

$$\left\langle f_\mu^{\mathrm{G}}, f_\lambda^{\mathrm{c}} \right\rangle = f_\mu^{\mathrm{G}}(\lambda), \qquad (5.26)$$

а разложение функции Φ_μ^{G} по декартову базису имеет вид

$$\Phi_\mu^{\mathrm{G}}(t, x) = I\left(f_\mu^{\mathrm{G}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\mu^{\mathrm{G}}(\lambda) \Phi_\lambda^{\mathrm{c}}(t, x)\, d\lambda.$$

Матричные элементы для базисов M и (D, α) определяются соотношениями

$$\left\langle f_n^{D,\,\alpha},\ f_\lambda^M \right\rangle = \exp\left[\frac{\pi}{2}\left(\lambda + \frac{i}{2}\right)\right] \frac{\Gamma(1/2-\delta)}{\pi} \times$$

$$\times\left[\frac{\Gamma(1/2 - i\lambda)}{\Gamma(1-\delta-i\lambda)}\, {}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} 1/2-\delta,\ 1/2-i\lambda \\ 1-\delta-i\lambda \end{matrix}\right| -1\right)\right] +$$

$$+ \exp[-i\pi(\delta + 1/2)]\, \frac{\Gamma(1/2+i\lambda)}{\Gamma(1-\delta+i\lambda)}\, {}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} 1/2-\delta,\ 1/2+i\lambda \\ 1-\delta+i\lambda \end{matrix}\right| -1\right)\Bigg],$$

$$\left\langle f_{-n}^{D,\,\alpha},\ f_\lambda^M \right\rangle = \overline{\left\langle f_n^{D,\,\alpha},\ f_{-\lambda}^M \right\rangle}, \qquad \delta = \alpha + 2n < 0. \qquad (5.27)$$

Мы получаем представление произведения функций Бесселя в виде интеграла от функции Бесселя, используя м. э. с. б.

$$\left\langle f_n^{B,\,\alpha},\ f_\lambda^M \right\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+2n}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{i\lambda} \frac{\Gamma(\alpha/2 + n - i\lambda/2)}{\Gamma(1 + n + (\alpha + i\lambda)/2)}, \qquad (5.28)$$

и в виде интеграла от произведения функций Макдональда, если воспользуемся м. э. с. б.

$$\left\langle f_n^{B,\,\alpha},\ f_\mu^K \right\rangle = [(\alpha + 2n)\,\mu \operatorname{sh} \pi\mu]^{1/2}\, \frac{\Gamma(n + (\alpha+i\mu)/2)\,\Gamma(n + (\alpha - i\mu)/2)}{2\pi\Gamma(1+\alpha+2n)} \times$$

$$\times\, {}_2F_1\left(\left.\begin{matrix} n + (\alpha+i\mu)/2,\ n + (\alpha-i\mu)/2 \\ 1+\alpha+2n \end{matrix}\right| -1\right). \qquad (5.29)$$

В [95] приводятся некоторые матричные элементы операторов $\mathbf{T}(g)$ по базису D, но эти выражения сложны. Виленкин [37] вычисляет матричные элементы этих операторов относительно базиса M и получает сравнительно простые результаты:

$$\left\langle \mathbf{T}(g)\, f_\lambda^M,\ f_\mu^M \right\rangle = T_{\mu\lambda}(\theta, a, b) =$$

$$= (2\pi)^{-1} \exp(i\mu\theta) \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\omega(a \operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y) + iy(\lambda - \mu)]\, dy,$$

$$g = g(\theta, a, b), \qquad -\infty < \lambda, \mu < \infty, \qquad (5.30)$$

где g дается формулой (4.5). Теорема сложения для этих матричных элементов имеет вид

$$T_{\mu\lambda}(g_1 g_2) = \int_{-\infty}^{\infty} T_{\mu\nu}(g_1)\, T_{\nu\lambda}(g_2)\, d\nu. \qquad (5.31)$$

Существуют следующие частные случаи:

$$
\begin{gathered}
T_{\mu\lambda}(\theta,\ 0,\ 0)=e^{i\mu\theta}\,\delta(\mu-\lambda),\\
T_{\mu\lambda}(0,\ a,\ 0)=(i/2)\exp[(\lambda-\mu)\pi/2]\,H^{(1)}_{i(\mu-\lambda)}(\omega a),\\
T_{\mu\lambda}(\theta,\ -a,\ 0)=(-i/2)\exp[(\mu-\lambda)\pi/2]\,H^{(2)}_{i(\mu-\lambda)}(\omega a),\\
T_{\mu\lambda}(0,\ 0,\ b)=\pi^{-1}\exp[(\mu-\lambda)\pi/2]\,K_{i(\mu-\lambda)}(\omega b),\\
T_{\mu\lambda}(0,\ 0,\ -b)=\pi^{-1}\exp[(\lambda-\mu)\pi/2]\,K_{i(\lambda-\mu)}(\omega b),\\
T_{\mu\lambda}(0,\ a,\ a)=(2\pi)^{-1}\exp[(\mu-\lambda)\pi/2]\,\Gamma(i\lambda-i\mu)(\omega a)^{i(\mu-\lambda)},\\
T_{\mu\lambda}(0,\ -a,\ -a)=(2\pi)^{-1}\exp[(\lambda-\mu)\pi/2]\,\Gamma(i\lambda-i\mu)(\omega a)^{i(\mu-\lambda)},\\
T_{\mu\lambda}(0,\ -a,\ a)=(2\pi)^{-1}\exp[(\mu-\lambda)\pi/2]\,\Gamma(i\mu-i\lambda)(\omega a)^{i(\lambda-\mu)},\\
T_{\mu\lambda}(0,\ a,\ -a)=(2\pi)^{-1}\exp[(\lambda-\mu)\pi/2]\,\Gamma(i\mu-i\lambda)(\omega a)^{i(\lambda-\mu)},\\
a>0,\quad b>0,
\end{gathered}
\tag{5.32}
$$

где $H^{(j)}_\nu(x)$ — функции Ганкеля, которые можно выразить через функции Макдональда:

$$
\begin{aligned}
H^{(1)}_\nu(x)&=\frac{2}{\pi i}\exp\left(-\frac{\nu\pi i}{2}\right)K_\nu\left[\exp\left(\frac{-\pi i}{2}\right)x\right],\\
H^{(2)}_\nu(x)&=\frac{-2}{\pi i}\exp\left(\frac{\nu\pi i}{2}\right)K_\nu\left[\exp\left(\frac{\pi i}{2}\right)x\right].
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

Заметим, что теорему сложения (5.31) следует применять очень осторожно, так как интегралы в (5.30) и (5.31) не обладают абсолютной сходимостью. В самом деле, некоторые матричные элементы являются обобщенными функциями. Эта проблема осложняет наш анализ уравнения Клейна — Гордона, так как для большей части собственных базисов, допускающих разделение переменных, интеграл (5.1) не обладает абсолютной сходимостью. Причина этого затруднения состоит в том, что ядро $H(y,t,x)$ интегрального преобразования (5.6) не принадлежит $L_2(R)$. Чтобы выйти из положения, мы позволили t и x принимать комплексные значения, такие, что $\operatorname{Im}(t\pm x)>0$. Тогда $H(\cdot,t,x)\in L_2(R)$, и вычисление интегралов упрощается. Решения уравнения Гельмгольца $\Phi(t,x)=I(h)$ больше не принадлежат $\mathscr{H}$, но все полученные нами формулы разложения справедливы для этих решений в смысле поточечной сходимости.

Виленкин [37] использует аналогичную идею, чтобы придать смысл формуле (5.31). Он полагает, что ω — комплексное число, такое, что $\operatorname{Im}\omega>0$. Тогда интеграл (5.30) для матричных элементов $T_{\mu\lambda}(\theta,a,b)$ абсолютно сходится для всех $g(\theta,a,b)$, таких, что $a\pm b>0$. Кроме того, можно легко показать, что произведение $g_1g_2=g'$ двух таких элементов группы обладает тем же свойством $a' \pm b' > 0$. Для этого множества элементов группы можно дать строгое доказательство формулы (5.31) и вычислить матричные элементы, получив при этом результаты, аналогичные (5.32). Вместо того чтобы непосредственно доказывать справедливость формулы (5.31), Виленкин осторожно переходит от случая $\operatorname{Im}\omega > 0$ к пределу и получает соответствующие тождества для вещественного ω. (В этом разделе мы аналогичным образом получили собственные решения $\Phi(t, x)$ уравнения Клейна — Гордона для вещественных t, x, переходя от случая $\operatorname{Im}(t \pm x) > 0$ к пределу.) Тем не менее формула (5.31) дает правильные результаты.

1.6. Комплексное уравнение Гельмгольца

Рассмотрим уравнение Гельмгольца вида

$$(\partial_{xx} + \partial_{yy} + \omega^2)\Psi(x, y) = 0, \tag{6.1}$$

где x и y — комплексные переменные, ω — ненулевая комплексная константа, а Ψ — аналитическая функция от x и y. Вещественные уравнения Гельмгольца и Клейна — Гордона можно рассматривать как различные вещественные формы комплексного уравнения (6.1). Если x, y и ω — вещественные величины, то (6.1) — вещественное уравнение Гельмгольца; если же $x = t'$, $y = ix'$, а ω — вещественная величина, то (6.1) становится уравнением Клейна — Гордона

$$(\partial_{t't'} - \partial_{x'x'} + \omega^2)\Psi(t', x') = 0. \tag{6.2}$$

Алгебра симметрии уравнения (6.1) является *комплексной* алгеброй Ли $\mathscr{E}(2)^c$, натянутой на базис

$$P_1 = \partial_x, \quad P_2 = \partial_y, \quad M = y\partial_x - x\partial_y \tag{6.3}$$

с соотношениями коммутирования

$$[P_1, P_2] = 0, \quad [M, P_1] = P_2, \quad [M, P_1] = -P_1. \tag{6.4}$$

Заметим, что $\mathscr{E}(2)$ — алгебра симметрии вещественного уравнения Гельмгольца — является *вещественной* алгеброй Ли, натянутой на базис (6.3). Кроме того, вещественную алгебру Ли, натянутую на базис

$$\mathscr{P}_1 = P_1, \quad \mathscr{P}_2 = iP_2, \quad \mathscr{M} = iM \tag{6.5}$$

с соотношениями коммутирования

$$[\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2] = 0, \quad [\mathscr{M}, \mathscr{P}_1] = \mathscr{P}_2, \quad [\mathscr{M}, \mathscr{P}_2] = \mathscr{P}_1, \tag{6.6}$$

можно идентифицировать с алгеброй $\mathscr{E}(1, 1)$. Мы говорим, что $\mathscr{E}(2)$ и $\mathscr{E}(1, 1)$ — *вещественные формы* алгебры $\mathscr{E}(2)^c$.

Группой симметрии уравнения (6.1), которую мы получаем, беря экспоненты элементов алгебры симметрии, является комплексная эвклидова группа $E(2)^c$. Как и $E(2)$, группа $E(2)^c$ является группой (3×3)-матриц

$$g(\theta, a, b)=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}, \qquad (6.7)$$

где теперь θ, a, b — комплексные числа. Групповое произведение задается выражением (1.10), а действие $\mathbf{x}g$ группы $E(2)^c$ как группы преобразований определяется соотношением (1.11). Так же, как в разд. 1.1,

$$g(\theta, a, b)=\exp(\theta M)\exp(a, P_1+bP_2), \qquad (6.8)$$

и имеется локальное представление группы $E(2)^c$ в пространстве $\mathcal{F}$ комплексных аналитических функций от переменных x и y, определяемое операторами $\mathbf{T}(g)$:

$$\mathbf{T}(g)\Phi(\mathbf{x})=\Phi(\mathbf{x}g), \qquad g\in E(2)^c. \qquad (6.9)$$

Процедура определения пространства $\mathcal{S}$ операторов симметрии второго порядка очень похожа на процедуру, описанную в разд. 1.1. Факторизуя по пространству $\mathfrak{q}$ тривиальных симметрий $f(\mathbf{x})(\partial_{xx}+\partial_{yy}+\omega^2)$, $f\in\mathcal{F}$, находим, что $\mathcal{S}/\mathfrak{q}$ — *комплексное* девятимерное векторное пространство с базисом

$$\begin{aligned} &(\text{а})\quad P_1,\ P_2,\ M,\ E, \\ &(\text{б})\quad P_1^2,\ P_1P_2,\ M^2,\ \{M, P_1\},\ \{M, P_2\}. \end{aligned} \qquad (6.10)$$

(Напомним, что $E=1$.) В пункте (а) перечислены операторы симметрии первого порядка, а в пункте (б) — операторы симметрии чисто второго порядка. Мы видим, что наше уравнение принадлежит классу I: операторы симметрии второго порядка являются многочленами от операторов симметрии первого порядка.

По строгой аналогии с выражением (2.15) группа $E(2)^c$ действует на алгебру $\mathcal{E}(2)^c$ операторов симметрии через сопряженное представление

$$L\to L^g=\mathbf{T}(g)L\mathbf{T}(g^{-1}), \qquad L\in\mathcal{E}(2)^c, \qquad g\in E(2)^c,$$

и в результате этого действия $\mathcal{E}(2)^c$ разбивается на орбиты. Сопряженное действие на базис P_1, P_2, M дано в (2.18)—(2.20), где параметры a, b, α в данном случае являются произвольными комплексными числами.

Нам представляется полезным ввести две симметрии комплексного уравнения Гельмгольца, которые нельзя получить, взяв экспоненты элементов алгебры симметрии. Этими симметриями являются операторы R_j инверсии пространства:

$$R_1\Phi(x, y)=\Phi(-x, y), \quad R_2\Phi(x, y)=\Phi(x, -y), \quad \Phi\in\mathscr{F}. \tag{6.11}$$

Операторы R_j и $\mathrm{T}(g)$, $g\in E(2)^c$, порождают более обширную группу симметрий $\tilde{E}(2)^c$, связным компонентом которой, содержащим единицу, является группа $E(2)^c$. Сопряженное действие операторов R_j на $\mathscr{E}(2)^c$ определяется следующими соотношениями $(R_j^2=E)$:

$$P_1^{R_1}=R_1P_1R_1^{-1}=-P_1, \quad P_2^{R_1}=P_2, \quad M^{R_1}=-M, \tag{6.12}$$

$$P_1^{R_2}=P_1, \quad P_2^{R_2}=-P_2, \quad M^{R_2}=-M. \tag{6.13}$$

Вычисления, аналогичные тем, которые были проведены в разд. 1.2 и 1.4, показывают, что в результате сопряженного действия группы $\tilde{E}(2)^c$ алгебра $\mathscr{E}(2)^c$ разбивается на три орбиты с представителями

$$M, \quad P_1, \quad P_1+iP_2. \tag{6.14}$$

Поскольку последние два оператора коммутируют, их можно диагонализировать одновременно.

Пусть $\mathscr{S}^{(2)}$ — комплексное пятимерное векторное пространство операторов симметрии чисто второго порядка в $\mathscr{S}/\mathfrak{q}$. Базис этого пространства образован операторами (6.10б). Заметим, что в $\mathscr{S}^{(2)}$ имеет место соотношение $P_1^2=-P_2^2$, так как $P_1^2+P_2^2$ соответствует нулевому оператору. Группа $\tilde{E}(2)^c$ действует на $\mathscr{S}^{(2)}$ посредством сопряженного представления и разбивает это пространство на непересекающиеся орбиты. Прямым вычислением получаем точно восемь типов орбит со следующими представителями:

$$\begin{gathered} P_1^2, \quad (P_1+iP_2)^2, \quad M^2, \quad M^2-a^2P_2^2 \ (a\neq 0), \quad \{M, P_2\}, \\ M^2+(P_1+iP_2)^2, \quad \{M, P_1+iP_2\}+(P_1-iP_2)^2, \quad \{M, P_1+iP_2\}. \end{gathered} \tag{6.15}$$

Задачу о разделении переменных для комплексного уравнения Гельмгольца можно сформулировать аналогично задаче о разделении переменных для вещественного уравнения Гельмгольца, которую мы рассматривали в разд. 1.2. Но теперь новые координаты $\{u, v\}$ принимают значения из открытого множества в пространстве $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ упорядоченных пар комплексных чисел, а $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$ являются комплексными аналитическими функциями от x и y с ненулевым якобианом. Две системы координат, допускающие разделение переменных, считаются эквивалентными, если одну систему можно отобразить в другую при помощи элемента группы $\tilde{E}(2)^c$.

Таблица 3

ОПЕРАТОРЫ И КООРДИНАТЫ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Оператор S	Комплексные координаты	Решения с разделенными переменными
1 $P_1^2, (P_1 + iP_2)^2$	x, y	Произведение экспоненциальных функций
2 M^2	$x = r \cos\theta,\ y = r \sin\theta$	Произведение функции Бесселя и экспоненциальной функции
3 $M^2 - a^2P_2^2,\ a \neq 0$	$x = a \operatorname{ch} \alpha \cos\beta,$ $y = a \operatorname{sh} \alpha \sin\beta$	Произведение функций Матье
4 $\{M, P_2\}$	$x = {}^1/_2 (\xi^2 - \eta^2),\ y = \xi\eta$	Произведение функций параболического цилиндра
5 $M^2 + (P_1 + iP_2)^2$	$x = (u^2 + u^2v^2 - v^2)/(2uv),$ $y = i\,(u^2 - u^2v^2 + v^2)/(2uv)$	Произведение функций Бесселя
6 $\{M, P_1 + iP_2\} +$ $+ (P_1 - iP_2)^2$	$x = -{}^1/_4 (w - z)^2 + {}^1/_2 (w + z),$ $iy = -{}^1/_4 (w - z)^2 - {}^1/_2 (w + z)$	Произведение функций Эйри
7 $\{M, P_1 + iP_2\}$		Решений с разделенными переменными нет

Мы видели, что вещественные уравнения Гельмгольца и Клейна — Гордона являются вещественными формами комплексного уравнения Гельмгольца. Более того, легко проверить, что каждую вещественную систему координат, допускающую разделение переменных для этих вещественных уравнений, можно единственным образом расширить до комплексных аналитических координат, допускающих разделение переменных для комплексного уравнения. Таким образом, мы уже имеем значительное число систем координат, допускающих разделение переменных для уравнения (6.1). Соответствующие решения с разделенными переменными можно однозначно расширить до аналитических решений уравнения (6.1), и каждое из этих решений с разделенными переменными является собственной функцией некоторого оператора из $\mathcal{S}^{(2)}$. (Для определения диагонализированного оператора мы переносим в $\mathcal{S}^{(2)}$ при помощи (6.3), (6.4) результаты, приведенные в табл. 1, и при помощи (6.5), (6.6) результаты, приведенные в табл. 2.) И наконец, проведя довольно утомительные выкладки, можно видеть, что какихлибо нетривиальных ортогональных систем, допускающих разделение переменных, кроме тех, которые мы уже нашли, нет.

Таблица 4

КЛАССЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ РЕШЕНИЙ
С РАЗДЕЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

	Оператор S	Эквивалентные решения для вещественного уравнения Гельмгольца (табл. 1)	Эквивалентные решения для вещественного уравнения Клейна—Гордона (табл. 2)
1	$P_1^2, (P_1 + iP_2)^2$	1	1
2	M^2	2	2
3	$M^2 - a^2 P_2^2$	4	6, 9, 10
4	$\{M, P_2\}$	3	3, 4
5	$M^2 + (P_1 + iP_2)^2$		7, 8
6	$\{M, P_1 + iP_2\} + (P_1 - iP_2)^2$		5
7	$\{M, P_1 + iP_2\}$		11

Однако связи между представленными в табл. 1 и 2 системами координат, допускающими разделение переменных, и различными системами, допускающими разделение переменных для уравнения (6.1), неоднозначны. Это объясняется тем, что системы, вещественно-неэквивалентные под действием групп $E(2)$ и $\tilde{E}(1, 1)$, могут стать комплексно-эквивалентными в результате действия более обширной группы $\tilde{E}(2)^c$. Иначе говоря, несколько различных орбит групп $E(2)$ и $\tilde{E}(1, 1)$ пространства $\mathcal{S}^{(2)}$ могут принадлежать одной и той же орбите группы $\tilde{E}(2)^c$.

В табл. 3 представлены связи между операторами орбит группы $\tilde{E}(2)^c$ в $\mathcal{S}^{(2)}$ и системами координат, допускающими разделение переменных для комплексного уравнения Гельмгольца.

Коммутирующие операторы P_1^2 и $(P_1 + iP_2)^2$ принадлежат различным орбитам, но соответствуют одним и тем же координатам. В табл. 4 приведены различные решения с разделенными переменными вещественного уравнения Гельмгольца и вещественного уравнения Клейна — Гордона, соответствующие эквивалентным решениям комплексного уравнения Гельмгольца. Заметим, что три системы функций Матье для уравнения Клейна — Гордона и система функций Матье для вещественного уравнения Гельмгольца под действием группы $E(2)^c$ становятся эквивалентными и соответствуют одной системе 3. Для других систем координат имеются аналогичные, но менее одиозные эквивалентности.

1.7. Метод Вейснера для комплексного уравнения Гельмгольца

Несмотря на то что пространство решений уравнения (6.1), по-видимому, не допускает структуры гильбертова пространства, тождества для решений с разделенными переменными этого уравнения получить можно, и эту возможность предоставляет нам метод, предложенный Луи Вейснером [34, 83]. Основное внимание в этой процедуре направлено на решения, отвечающие орбите 2 с представителем M^2. Вводя в (6.1) комплексные полярные координаты $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, мы получаем уравнение

$$(\partial_{rr} + r^{-1}\partial_r + r^{-2}\partial_{\varphi\varphi} + \omega^2)\Psi = 0. \tag{7.1}$$

Ясно, что это уравнение допускает решения с разделенными переменными вида

$$J_{\pm m}(\omega r)\, s^m, \qquad s = e^{i\varphi}, \qquad m \in \mathbb{C}, \tag{7.2}$$

где $J_\nu(\omega r)$ — функция Бесселя. Кроме того, функция $\Psi = f(r)s^p$ является решением уравнения (7.1) тогда и только тогда, когда f удовлетворяет уравнению Бесселя

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + r^{-1}\frac{d}{dr} - r^{-2}p^2 + \omega^2\right) f = 0. \tag{7.3}$$

Теперь предположим, что Ψ — решение уравнения (7.1), такое, что для некоторого фиксированного $m \in \mathbb{C}$ функция $(rs)^{-m}\Psi(r, s)$ от комплексных переменных (r, s) является аналитической в окрестности точки $(0, 0)$. Разложением в степенной ряд по s

$$\Psi(r, s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r)\, s^{m+n}$$

находим, что в области сходимости этого ряда функция $f_n(r)$ является решением уравнения Бесселя (7.3) с $p = m + n$. Более того, поскольку $r^{-m}f_n(r)$ — функция, аналитическая при $r = 0$, из разд. 5 приложения Б следует, что

$$f_n(r) = c_n J_{m+n}(\omega r), \qquad c_n \in \mathbb{C}.$$

Следовательно,

$$\Psi(r, s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_{m+n}(\omega r)\, s^{m+n}, \tag{7.4}$$

где степенной ряд сходится в окрестности точки $(r, s) = (0, 0)$, т. е. Ψ является *производящей функцией* для функций Бесселя. Если Ψ известна, то константы c_n вычисляются обычным способом, т. е. или находится величина правой части соотношения (7.4) при частных значениях r, или при помощи операторных тождеств, которым удовлетворяет функция Ψ, получаются рекуррентные соотношения для c_n.

Имеет место интересное обратное свойство. Предположим, имеется сходящийся степенной ряд вида (7.4). Тогда сумма этого ряда должна быть решением комплексного уравнения Гельмгольца (7.1). Следовательно, решениями уравнения (7.1) (с соответствующими свойствами аналитичности) являются возможные производящие функции (7.4) для функций Бесселя. (Эти наблюдения можно легко распространить на производящие функции более общего вида, нежели разложение Лорана.)

Чтобы указанная выше процедура была действенной, необходимо найти эффективный способ получения явных аналитических решений уравнения (7.1). Как нам кажется, такой способ состоит в том, что находятся решения с разделенными переменными, соответствующие каждой из шести систем, перечисленных в табл. 3. В самом деле, если Φ — решение с разделенными переменными, соответствующее оператору симметрии S, $S\Phi = \lambda\Phi$, и $g \in E(2)^c$, то решение с разделенными переменными $\Psi = \mathbf{T}(g)\Phi$ соответствует оператору $S' = \mathbf{T}(g)S\mathbf{T}(g^{-1})$, лежащему на той же орбите: $S'\Psi = \lambda\Psi$. Теперь Ψ нужно подставить в соотношение (7.4), в результате чего мы получаем производящую функцию для $J_\nu(\omega r)$. Хотя Вейснер нигде явно не указывает на связь между операторами симметрии и разделением переменных, в работе [34], строя производящие функции для функций Бесселя, он дает операторную характеристику отдельным решениям с разделенными переменными для всех орбит, кроме орбит 3 и 6.

Прежде чем заняться исследованием этого вопроса, полезно определить действие операторов $\mathbf{T}(g)$ на функции от полярных координат. Перейдем к комплексным координатам r, s, где

$$x = r\cos\varphi = \frac{r}{2}(s + s^{-1}), \quad y = r\sin\varphi = \frac{r}{2i}(s - s^{-1}), \quad s = e^{i\varphi}. \qquad (7.5)$$

Далее, выберем новый базис $\{P^\pm, P^0\}$ для алгебры $\mathcal{E}(2)^c$, определив его через элементы старого базиса по формулам

$$P^+ = P_1 + iP_2, \quad P^- = -P_1 + iP_2, \quad P^0 = iM. \qquad (7.6)$$

Соотношения коммутирования для этого базиса имеют вид

$$[P^+, P^-] = 0, \quad [P^0, P^\pm] = \pm P^\pm. \qquad (7.7)$$

Из (6.3), (7.5) и (7.6) получаем

$$P^\pm = s^{\pm 1}(\pm\partial_r - (s/r)\partial_s), \quad P^0 = s\partial_s = -i\partial_\varphi. \qquad (7.8)$$

Поскольку для $\mathscr{E}(2)^c$ мы имеем новый базис, необходимо выбрать новую параметризацию группы $E(2)^c$:

$$g=\exp(\theta M)\exp(aP_1+bP_2)=\exp\left(\tau P^0\right)\exp\left(\alpha P^+ +\beta P^-\right), \qquad \theta=i\tau, \quad a=\alpha-\beta, \quad b=i(\alpha+\beta). \tag{7.9}$$

В координатах $\{\tau, \alpha, \beta\}$ групповое умножение определяется соотношением

$$g(\tau,\ \alpha,\ \beta)\, g(\tau',\ \alpha',\ \beta')=g(\tau+\tau',\ \alpha e^{-\tau'}+\alpha',\ \beta e^{\tau'}+\beta'); \tag{7.10}$$

операторы $\mathbf{T}(g)$, имеющие вид

$$\mathbf{T}(g)\Psi(r,\ s)=\Psi\left(r[1+2\alpha e^{\tau}s/r]^{1/2}[1-2\beta e^{-\tau}/rs]^{1/2},\ se^{\tau}[1-2\beta e^{-\tau}/rs]^{1/2}[1+2\alpha e^{\tau}s/r]^{-1/2}\right), \tag{7.11}$$

корректно определены для $|2\beta e^{-\tau}/rs|<1$, $|2\alpha e^{\tau}s/r|<1$.

Величина константы ω большого значения в нашем последующем анализе не имеет, и поэтому впредь мы будем полагать, что $\omega=1$.

Как следует из (7.2), для фиксированного $m\in\mathbb{C}$ собственные функции оператора P^0, которые также являются решениями уравнения (7.1), принимают вид $J_{\pm m}(r)s^m$. Для ясности возьмем собственную функцию

$$\Psi_m(r,\ s)=J_m(r)\,s^m, \qquad P^0\Psi_m=m\Psi_m. \tag{7.12}$$

Из соотношения коммутирования вытекает, что $[P^0, P^+]=P^+$, откуда $[P^0, P^+]\,\Psi_m=P^+\Psi_m$ или

$$P^0\left(P^+\Psi_m\right)=(m+1)\,P^+\Psi_m. \tag{7.13}$$

Поскольку P^+ — оператор симметрии, ясно, что $P^+\Psi_m$ либо равна нулю, либо является решением уравнения (7.1), т. е. является собственной функцией оператора P^0 с собственным значением $m+1$. Следовательно, $P^+\Psi_m$ — линейная комбинация функций (7.2), где m заменено на $m+1$. Из (Б.17) находим в явном виде

$$P^+\Psi_m(r,\ s)=-\Psi_{m+1}(r,\ s)=-J_{m+1}(r)\,s^{m+1}.$$

(Этот результат легко проверить, дифференцируя почленно степенной ряд (Б.14) для $J_m(r)$.) Аналогичным образом из соотношения коммутирования $[P^0, P^-]=-P^-$ вытекает равенство

$$P^0\left(P^-\Psi_m\right)=(m-1)\,P^-\Psi_m. \tag{7.14}$$

Таким образом, оператор P^- уменьшает собственное значение m на единицу. Из (Б.17) следует соотношение

$$P^-\Psi_m(r,\ s)=-\Psi_{m-1}(r,\ s)=-J_{m-1}(r)\,s^{m-1}.$$

Пусть теперь m_0 — комплексное число, такое, что $0 \leqslant \leqslant \operatorname{Re} m_0 < 1$; рассмотрим множество $\{\Psi_m\}$ всех собственных векторов (7.12), таких, что $m = m_0 + n$, $n = 0, \pm 1, \ldots$. Действие алгебры $\mathscr{E}(2)^c$ на это множество определяется соотношениями

$$P^0\Psi_m = m\Psi_m, \quad P^\pm\Psi_m = -\Psi_{m\pm1}, \quad m = m_0 + n. \tag{7.15}$$

Эти соотношения определяют представление алгебры $\mathscr{E}(2)^c$ (см. [83]). Кроме того, они указывают на тесную связь между рекуррентными формулами (Б.17) для функций Бесселя и теорией представлений алгебры $\mathscr{E}(2)^c$. Заметим также, что порядок m функции Бесселя $J_m(r)$ является теперь не целым числом, как в разд. 1.3, а произвольным комплексным числом.

Как показано в [83], представление алгебры Ли (7.15) можно расширить до представления *локальной* группы $E(2)^c$, локальной в том смысле, что групповые операторы $\mathbf{T}(g)$ и свойство представления $\mathbf{T}(gg') = \mathbf{T}(g)\mathbf{T}(g')$ корректно определены и имеют смысл только для групповых элементов g, g', лежащих в достаточно малой окрестности единичного элемента.

С одной стороны, действие операторов $\mathbf{T}(g)$ на базис функций Ψ_m можно определить из соотношения (7.11), когда значения α, β, τ достаточно близки к нулю. С другой стороны, можно записать

$$\mathbf{T}(g) = \exp(\tau P^0)\exp(\alpha P^+ + \beta P^-), \tag{7.16}$$

где P^0, $P^\pm$ определяются в (7.8), и, используя формулы (1.17), (7.15), представить $\mathbf{T}(g)\Psi_m$ в виде бесконечного ряда по функциям $\{\Psi_{m+n}\}$. Коэффициенты этого ряда полностью определены формулами (7.15); например,

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(g(\tau, 0, 0))\Psi_m(r, s) &= \Psi_m(r, e^\tau s) = \\ &= \exp(\tau P^0)\Psi_m(r, s) = e^{\tau m}\Psi_m(r, s).\end{aligned}$$

Несмотря на то что разложение $\mathbf{T}(g)\Psi_m$ по элементам нашего собственного базиса можно выполнить, используя непосредственно формулы (7.15), значительно удобнее было бы найти и применить для этой цели упрощенную модель этих выражений. Такая модель, аналогичная нашей модели $L_2(S_1)$ для пространства решений уравнения Гельмгольца, была построена в работе [83, гл. 3]. Образующие алгебры Ли являются производными Ли по одной комплексной переменной z; операторы

$$P^+ = -z, \quad P^- = -z^{-1}, \quad P_{\bullet} = r(d/dz) \tag{7.17}$$

и функции базиса $f_m(r) = z^m$, $m = m_0 + n$, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$P^0 f_m = m f_m, \quad P^\pm f_m = -f_{m\pm1}. \tag{7.18}$$

Ясно, что операторы (7.17) удовлетворяют соотношениям коммутирования (7.7). Операторы $\mathbf{T}(g)$, определяемые соотношением (7.16), где P^0, $P^{\pm}$ задаются формулами (7.17), действуют на пространство $\mathcal{F}_0$ функций $f(z)$, аналитических в проколотой окрестности точки $z=0$, т. е. не обязательно аналитических в точке $z=0$ и не обязательно однозначных (принимающих прежнее значение, когда переменная описывает замкнутый контур вокруг начала координат). Эти операторы легко вычисляются:

$$\mathbf{T}(g)f(z)=\exp(-\alpha e^{\tau}z-\beta e^{-\tau}/z)f(e^{\tau}z), \qquad f\in\mathcal{F}_0. \tag{7.19}$$

Для определения *матричных элементов* $T_{lj}(g)$ операторов $\mathbf{T}(g)$ относительно базиса $\{f_m, m=m_0+n\}$ мы имеем соотношение

$$\mathbf{T}(g)f_{m_0+j}(z)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}T_{lj}(g)f_{m_0+l}(z), \tag{7.20}$$

или (разделив обе части этого соотношения на z^{m_0}) соотношение

$$\exp(-\alpha e^{\tau}z-\beta e^{-\tau}/z+(m_0+j)\tau)z^j=\sum_{l=-\infty}^{\infty}T_{lj}(g)z^l, \tag{7.21}$$

$$g=g[\tau,\alpha,\beta], \qquad j=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots .$$

Заметим, что мы получили производящую функцию этих матричных элементов. Вычисляя в явном виде коэффициент при z^l в разложении в ряд Лорана левой части (7.21), получаем

$$T_{lj}(g)=\frac{\exp[(m_0+l)\tau]}{|j-l|!}(-1)^{j-l}\alpha^{(l-j+|j-l|)/2}\beta^{(j-l+|j-l|)/2}\times$$
$$\times{}_0F_1(|j-l|+1;\ \alpha\beta), \qquad l,\ j=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots . \tag{7.22}$$

Если $\alpha\beta=0$, то ${}_0F_1=1$ и матричные элементы становятся элементарными функциями, если же $\alpha\beta\neq0$, то матричные элементы тесно связаны с функциями Бесселя целого порядка. Действительно, если ввести новые параметры ρ, ω, определяемые соотношениями

$$\begin{gathered}\rho=2|\alpha\beta|^{1/2}\exp[i(\arg\alpha+\arg\beta+\pi)/2],\\ \omega=|\alpha/\beta|^{1/2}\exp[i(\arg\alpha-\arg\beta-\pi)/2],\\ -\pi<\arg\alpha,\arg\beta\leqslant\pi, \qquad \alpha=\rho\omega/2, \qquad \beta=-\rho/(2\omega),\end{gathered} \tag{7.23}$$

то мы получим

$$T_{lj}(g)=\exp[(m_0+j)\tau](-\omega)^{l-j}J_{l-j}(\rho). \tag{7.24}$$

(Заметим, что (7.21) — обобщение разложения (3.20).) Непосредственно из свойства, имеющего место для представления группы, получаем тождества

$$T_{lj}(gg')=\sum_{s=-\infty}^{\infty}T_{ls}(g)T_{sj}(g'), \tag{7.25}$$

которые выполняются для g, g', достаточно близких к единичному элементу. Кроме того, в работе [83, гл. 3] показано, что эти тождества фактически выполняются для *всех* комплексных значений шести параметров, причем групповое умножение определяется при помощи формулы (7.10). (Здесь необходимо сделать оговорку: если $m_0 \neq 0$, то мы не можем идентифицировать те групповые элементы, которые отличаются значением параметра τ на целое, кратное $2\pi i$, как это было в случае $E(2)^c$. Формулы (7.25) связаны с глобальными представлениями универсальной накрывающей группы группы $E(2)^c$, а не с самой группой $E(2)^c$.) Формулы (7.25) являются обобщением тождеств (3.44), (3.54) при $j=2$. Работа [83] содержит целый ряд примеров таких тождеств.

Матричные элементы (7.22) при g, достаточно близком к единичному элементу, единственным образом определяются соотношениями (7.18); следовательно, они должны быть такими же и для нашей модели уравнения Гельмгольца, определяемой соотношениями (7.8), (7.11), (7.12), (7.15). Отсюда

$$\mathbf{T}(g)\Psi_{m_0+j}(r, s) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} T_{lj}(g)\Psi_{m_0+l}(r, s), \qquad (7.26)$$

или

$$J_m[r(1+2\alpha s/r)^{1/2}(1-2\beta/sr)^{1/2}]\left(\frac{1-2\beta/(sr)}{1+2\alpha s/r}\right)^{m/2} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1)^n}{|n|!}\beta^{(-n+|n|)/2}\alpha^{(n+|n|)/2}\,{}_0F_1(|n|+1;\ \alpha\beta)J_{m+n}(r)s^n, \qquad (7.27)$$

$$m \in \mathbb{C}, \quad |2\alpha s/r| < 1, \quad |2\beta/(rs)| < 1.$$

Тот факт, что правая часть этого соотношения является разложением в ряд Лорана по s, дает нам возможность определить границы области, где разложение (7.27) имеет место. Такое разложение сходится в круговом кольце $\rho_1 < |s| < \rho_2$, где ρ_1 и ρ_2 определяются особыми точками функции, входящей в левую часть соотношения (7.27) [2].

Определенный интерес представляют некоторые частные случаи этого тождества. Если $\beta = 0$, $s = 1$, то (7.27) имеет вид

$$J_m\left[r(1+2\alpha/r)^{1/2}\right](1+2\alpha/r)^{-m/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)^n}{n!}J_{m+n}(r), \qquad (7.28)$$

$$|2\alpha/r| < 1,$$

если же $\alpha = 0$, $s = 1$, то (7.27) принимает вид

$$J_m\left[r(1+2\beta/r)^{1/2}\right](1+2\beta/r)^{m/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^n}{n!}J_{m-n}(r), \qquad (7.29)$$

$$|2\beta/r| < 1.$$

Заметим, что эти формулы представляют собой разложения экспоненты $\exp(\gamma P^{\pm})\Psi_m$ по элементам базиса $\{\Psi_{m_0+n}\}$. Поскольку операторы $P^{\pm}$ не принадлежат вещественной алгебре Ли $\mathscr{E}(2)$, получить эти формулы непосредственно, рассматривая вещественную группу $E(2)$, нельзя.

Если $\alpha\beta \neq 0$, то формула (7.27) сводится к формуле сложения Графа (см. [17])

$$J_m[r(1+\rho\omega/r)^{1/2}(1+\rho/(\omega r))^{1/2}]\left(\frac{1+\rho/(\omega r)}{1+\rho\omega/r}\right)^{m/2} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-\omega)^n J_n(\rho)J_{m+n}(r), \qquad |\rho\omega/r| < 1, \qquad |\rho/(\omega r)| < 1. \qquad (7.30)$$

Следует заметить, что формула (7.26) является частным случаем соотношения Вейснера (7.4), где $\Psi(r, s) = \mathbf{T}(g)\Psi_m(r, s)$, а g находится в достаточно малой окрестности единичного элемента. В этом частном случае можно, используя модель (7.17), вычислить непосредственно коэффициенты разложения c_n (см. (7.4)).

Вообще говоря, чтобы вычислить коэффициенты разложения, необходимо использовать всю действенность метода Вейснера. Рассмотрим, например, функцию $\mathbf{T}(g)\Psi_m$, где Ψ_m — собственная функция (7.12), а $g = g(0, 0, -1)$. Тогда можно записать

$$\mathbf{T}(g)\Psi_m = \exp(-P^-)\Psi_m =$$

$$= (r^2+2r/s)^{-m/2}J_m\left[(r^2+2r/s)^{1/2}\right](2+rs)^m = \Phi(r, s). \qquad (7.31)$$

Поскольку $z^{-m}J_m(z)$ — целая функция от z, функцию Φ можно разложить в ряд Лорана по s в окрестности точки $s = 0$:

$$\Phi(r, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n J_n(r)s^n, \qquad |rs| < 2. \qquad (7.32)$$

Чтобы найти коэффициенты этого разложения, прежде всего положим в (7.32) $r = 0$ и получим $c_0 = 1/\Gamma(m+1)$. Далее, поскольку $P^0\Psi_m = m\Psi_m$, мы имеем $L\Phi = m\Phi$, где $L = \exp(-P^-)P^0\exp(P^-) = P^0 - P^-$. Следовательно, $(P^0 - P^-)\Phi = m\Phi$, и, применяя L к каждому члену правой части (7.32), получаем $c_{n+1} = (m-n)c_n$ для всех n, откуда следует, что $c_n = 1/\Gamma(m-n+1)$ и

$$\left(r^2+\frac{2r}{s}\right)^{-m/2} J_m\left[\left(r^2+\frac{2r}{s}\right)^{1/2}\right](2+rs)^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{J_n(r)s^n}{\Gamma(m-n+1)},$$

$$|rs| < 2. \qquad (7.33)$$

Это тождество нельзя получить непосредственно при вычислении матричных элементов (7.22), так как здесь g фиксировано, а r и s — малые величины. Выбрав r достаточно большим, мы получили бы формулу (7.29).

Для того чтобы получить некоторые более сложные формулы, воспользуемся табл. 3 и потребуем, чтобы решение Ψ (7.4) комплексного уравнения Гельмгольца было собственной функцией оператора $S \in \mathscr{S}^{(2)}$, соответствующего одной из орбит, перечисленных в табл. 3. Разберем два примера, предлагаемых Вейснером в статье [34].

Рассмотрим случай, когда Ψ — решение комплексного уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее соотношению

$$\{M, P_1\}\Psi = i(4\lambda - 1)\Psi, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \qquad (7.34)$$

(Собственное значение обозначено через $i(4\lambda - 1)$ для большего удобства записи последующих формул.) Поскольку $\{M, P_1\}$ лежит на орбите 4 (табл. 3) и соответствует оператору 4 в табл. 2, то Ψ должно быть решением с разделенными переменными в параболических координатах $\{u, v\}$:

$$x = uv, \qquad iy = {}^1\!/_2\,(u^2 + v^2).$$

Полагая $\xi = -u^2$, $\eta = -v^2$ и сопоставляя координаты $\{\xi, \eta\}$ с координатами $\{r, s\}$, находим, что

$$\xi + \eta = -r(s - s^{-1}), \qquad \xi - \eta = 2ir \qquad (7.35)$$

и в Ψ переменные разделяются в системе координат $\{\xi, \eta\}$. Решения уравнений с разделенными переменными являются функциями параболического цилиндра Однако базис для решений с разделенными переменными удобнее было бы выбрать в виде

$$e^{-z/2}{}_1F_1\left(\begin{matrix}\lambda\\ 1/2\end{matrix}\middle|\, z\right), \qquad e^{-z/2}z^{1/2}{}_1F_1\left(\begin{matrix}\lambda + 1/2\\ 3/2\end{matrix}\middle|\, z\right), \qquad z = \xi,\ \eta.$$

Связь между этим базисом и базисом функций параболического цилиндра определяется соотношением (Б.9iii). Для ясности положим

$$\Psi = \exp\left[-\tfrac{1}{2}(\xi + \eta)\right]{}_1F_1\left(\begin{matrix}\lambda\\ 1/2\end{matrix}\middle|\, \xi\right){}_1F_1\left(\begin{matrix}\lambda\\ 1/2\end{matrix}\middle|\, \eta\right).$$

Выражая ξ и η через r и s при помощи соотношений (7.35) и выполняя разложение в ряд Лорана в окрестности $s = 0$, находим, что

$$\exp\left(\tfrac{r}{2}(s - s^{-1})\right){}_1F_1\left(\begin{matrix}\lambda\\ 1/2\end{matrix}\middle|\, \tfrac{r}{2s} - \tfrac{rs}{2} + ir\right){}_1F_1\left(\begin{matrix}\lambda\\ 1/2\end{matrix}\middle|\, \tfrac{r}{2s} - \tfrac{rs}{2} - ir\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n J_n(r)\, s^n. \qquad (7.36)$$

Полагая в (7.36) $s=2a/b$, $r=b$, устремляя b к нулю и применяя (Б.14), получаем соотношение

$$e^a\left[{}_1F_1\left(\begin{matrix}\lambda\\ 1/2\end{matrix}\middle|-a\right)\right]^2={}_1F_1\left(\begin{matrix}\lambda\\ 1/2\end{matrix}\middle|-a\right){}_1F_1\left(\begin{matrix}1/2-\lambda\\ 1/2\end{matrix}\middle|a\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{a^n}{n!}, \qquad (7.37)$$

где первое равенство вытекает из формулы преобразования для ${}_1F_1$. Поскольку соотношение (7.36) остается справедливым при замене $s\longleftrightarrow -s^{-1}$, мы имеем $c_n=c_{-n}$. Следовательно, чтобы вычислить $c_{\pm n}$, нужно произведение функций ${}_1F_1$ разложить в ряд по степеням переменной a и найти коэффициент при a^n. В результате этих операций получаем формулу

$$c_{\pm n}={}_3F_2\left(\begin{matrix}\lambda,\ n,\ -n\\ 1/2,\ 1/2\end{matrix}\middle|1\right),\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \qquad (7.38)$$

Подставляя (7.38) в (7.36), получаем нетривиальное тождество. Тождества для иных возможных выборов базиса приводятся в [34].

В качестве последнего примера рассмотрим случай, когда Ψ удовлетворяет уравнению Гельмгольца и соотношению

$$[(P^0)^2-(P^+)^2]\,\Psi=\nu^2\Psi. \qquad (7.39)$$

Этот оператор соответствует системе 5 в табл. 3, а Ψ является решением с разделенными переменными $\{u, v\}$, где

$$uv=x+iy=rs,\qquad (u^2+v^2)/(uv)=x-iy=rs^{-1},$$

т. е.

$$u={}^1\!/_2\,[(r^2+2rs)^{1/2}-(r^2-2rs)^{1/2}],$$
$$v={}^1\!/_2\,[(r^2+2rs)^{1/2}+(r^2-2rs)^{1/2}]. \qquad (7.40)$$

Квадратные корни мы выбираем здесь таким образом, что $v=r$ и $u=0$, если $s=0$. Решение с разделенными переменными Ψ принимает вид $J_{\pm\nu}(u)J_{\pm\nu}(v)$. Вообще говоря, функция $\exp(\alpha P^+)\Psi=\Psi'$ удовлетворяет уравнению

$$S'\Psi'=\nu^2\Psi',\qquad S'=(P^0)^2-\alpha\{P^0,\ P^+\}+(\alpha^2-1)(P^+)^2, \qquad (7.41)$$

и, как следует из (7.11), Ψ' принимает вид $J_{\pm\nu}(u')J_{\pm\nu}(v')$, где

$$u'={}^1\!/_2\,[(r^2+2(1+\alpha)rs)^{1/2}-(r^2-2(1-\alpha)rs)^{1/2}],$$
$$v'={}^1\!/_2\,[(r^2+2(1+\alpha)rs)^{1/2}+(r^2-2(1-\alpha)rs)^{1/2}]. \qquad (7.42)$$

Взяв произведение двух решений с индексом $+\nu$, мы видим, что Ψ' представляется степенным рядом по s

$$J_\nu(u')J_\nu(v') = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_{\nu+n}(r)\,s^{\nu+n}, \qquad |\alpha|<1, \qquad \nu \neq -1, -2, \ldots . \tag{7.43}$$

Полагая $r = a$, $s = b/a$, устремляя a к нулю и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях b в обеих частях полученного равенства, находим, что

$$c_n = \frac{2^{-\nu}[i(1-\alpha^2)^{1/2}]^n}{\Gamma(\nu+1)\,n!}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n,\ n+2\nu+1\\ \nu+1\end{matrix}\,\middle|\,\frac{\alpha+i(1-\alpha^2)^{1/2}}{2i(1-\alpha^2)^{1/2}}\right). \tag{7.44}$$

При $\alpha = -1$ мы имеем

$$J_\nu(^1/_2[r-(r^2-4rs)^{1/2}])\,J_\nu(^1/_2[r+(r^2-4rs)^{1/2}]) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-2\nu-2n)_n}{\Gamma(\nu+n+1)\,n!}\,J_{\nu+n}(r)\left(\frac{s}{2}\right)^{\nu+n}, \tag{7.45}$$

где $(a)_n$ — символ Похгаммера (Б.3).

Упражнения

1. Подставляя матричные элементы (3.54) в тождество (3.44), получить формулу сложения для функций Бесселя, известную как формула сложения Графа. (Обобщения и приложения этой формулы см. в [32, гл. 11]; см. также тождество (7.27).)

2. Используя решение $\Psi^{(j)}(\mathbf{x})$ с разделенными переменными уравнения Гельмгольца для $j = 2, 3, 4$, получить билинейные разложения функции Бесселя (3.55). Доказать, что разложение для $j = 2$ является частным случаем формулы сложения Графа. Показать, что разложение для $j = 4$ дает в результате интегральное тождество вида

$$2\int_{-\pi}^{\pi} J_0\{\omega[(x-x')^2+(y-y')^2]^{1/2}\}\,\mathrm{ce}_n(\beta', q)\,d\beta' = \\ = |C_n|^2\,\mathrm{Ce}_n(\alpha, q)\,\overline{\mathrm{Ce}_n}(\alpha', q)\,\mathrm{ce}_n(\beta, q), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

и аналогичный результат для функции se_n.

3. Доказать, что полной алгеброй симметрии уравнения Клейна — Гордона (4.1) является алгебра $\mathscr{E}(1, 1)\oplus\{1\}$, причем базис для $\mathscr{E}(1, 1)$ определяется в (4.2).

4. Показать, что в результате сопряженного действия группы $\tilde{E}(2)^c$ алгебра симметрии комплексного уравнения Гельмгольца $\mathscr{E}(2)^c$ разбивается точно на три орбиты.

5. Одним из преимуществ методов локальной теории Ли над методами глобальных групп является тот факт, что локальная теория применима к так называемым специальным функциям второго рода. Функции Бесселя второго

рода $Y_m(r)$ определяются соотношением

$$Y_m(r) = [J_m(r)\cos(m\pi) - J_{-m}(r)]/\sin(m\pi)$$

или пределом этого соотношения, когда m — целое число [32, гл. 3]. Показать, что $Y_m(r)$ удовлетворяют тому же дифференциальному уравнению и рекуррентным формулам (Б.16), (Б.17), что и функции $J_m(r)$. (Действительно, для любого комплексного m пара $J_m(r)$, $Y_m(r)$ образует базис решений уравнения Бесселя (7.3).) Показать на основании этого, что функции $\Psi_m(r, s) = Y_m(r)s^m$ удовлетворяют формулам (7.15), а следовательно, и тождествам (7.26), где матричные элементы $T_{lj}(g)$ определены в (7.22). Получить тождества для $Y_m(r)$, аналогичные соотношениям (7.28) — (7,30). (См. [32, гл. 11].)

6. Простые многочлены Бесселя $f_m(r)$ определяются соотношением

$$f_m(r) = {}_2F_0\left(\begin{matrix} -m,\ m+1 \\ - \end{matrix}\,\middle|\, -\frac{r}{2}\right), \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

причем $f_{-m}(r) = f_{m-1}(r)$ и $f_{-1}(r) = f_0(r) = 1$; см. (Б.18). Эти многочлены удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$r^2 f'_m(r) + (1 - mr) f_m(r) = f_{m-1}(r),$$

$$r^2 f'_m(r) + [1 + (m+1) r] f_m(r) = f_{m+1}(r).$$

Показать, что функции $\Psi_m(r, s) = f_m(r)s^m$ удовлетворяют соотношениям (7.15), где

$$P^0 = s\partial_s, \quad P^- = -s^{-1}\left(r^2\partial_r + 1 - rs\partial_s\right), \quad P^+ = -s\left(r^2\partial_r + r + 1 + rs\partial_s\right).$$

Учитывая указанное выше, доказать, что

$$\mathbf{T}(g)\Psi_j = \sum_{l=-\infty}^{\infty} T_{lj}(g)\Psi_l,$$

где матричные элементы T_{lj} определяются формулой (7.22) при $m_0 = 0$. Вычислить операторы $\mathbf{T}(g)$ и получить тождества для многочленов Бесселя, аналогичные соотношениям (7.27)—(7.30). (Более подробно этот вопрос рассматривается в [77, гл. 3].)

Глава 2

УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА И УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

2.1. Разделение переменных для уравнения Шредингера $(i\partial_t + \partial_{xx})\Psi(t, x) = 0$

При квантовомеханическом изучении нерелятивистских систем в двумерном пространстве-времени, состоящем в рассмотрении частицы (массы m) в поле с потенциалом $V(x)$, постулируется, что состояние системы в момент t полностью определяется волновой функцией $\Psi(t, x)$, которая является решением *временнóго уравнения Шредингера*

$$i\hbar\partial_t\Psi = -[\hbar^2/(2m)]\,\partial_{xx}\Psi + V(x)\Psi, \tag{1.1}$$

где $\hbar = h/(2\pi)$ и h — постоянная Планка (см. [72]). (Константы $\hbar$ и $\hbar^2/(2m)$ играют исключительно важную роль в физике, но в этой книге они оказываются досадной помехой, и поэтому мы выбираем основные единицы измерения так, чтобы $\hbar = \hbar^2/(2m) = 1$.) Наиболее важны те случаи уравнения Шредингера, в которых потенциальная функция $V(x)$ имеет вид, указанный в табл. 5. В случаях (1)—(4) переменная x принимает произвольные вещественные значения, в то время как в случаях (5)—(7) предполагается, что $x \geqslant 0$. (Последний вид уравнения Шредингера получается тогда, когда в пространстве-времени большей размерности вводится сферическая или полярная система координат. Так, в случаях (5)—(7) $x = r$ — радиальная координата [72].) Андерсон с соавторами [3] и Бойер [20] классифицировали все случаи уравнения Шредингера (1.1), которые допускают нетривиальную алгебру симметрии. (Ясно, что любое уравнение Шредингера допускает двумерную комплексную алгебру симметрии с базисом ∂_t и $E = 1$. Под словом «нетривиальная» мы понимаем, что алгебра симметрии по меньшей мере трехмерна.) Они показали, что такими уравнениями являются только те, для которых потенциал имеет вид (1)—(7). Эти потенциалы можно охарактеризовать в терминах групп симметрии.

Таблица 5

ПОТЕНЦИАЛЫ $V(x)$, ДОПУСКАЮЩИЕ НЕТРИВИАЛЬНУЮ АЛГЕБРУ СИММЕТРИИ

	$V(x)$	Название системы
(1)	0	Свободная частица
(2)	$kx^2,\ k>0$	Линейный гармонический осциллятор
(3)	$-kx^2,\ k>0$	Линейный репульсивный осциллятор
(4)	$ax,\ a\neq 0$	Движение в однородном внешнем поле (линейный потенциал)
(5)	$a/x^2,\ a\neq 0$	Изотропная свободная частица
(6)	$a/x^2+kx^2,\ a\neq 0,\ k>0$	Изотропный гармонический осциллятор
(7)	$a/x^2-kx^2,\ a\neq 0,\ k>0$	Изотропный репульсивный осциллятор

В следующих трех разделах мы изучим эти семь уравнений и обнаружим удивительные зависимости между ними и их связь с разделением переменных.

Запишем уравнение Шредингера для свободной частицы в виде

$$Q\Psi=0,\qquad Q=i\partial_t+\partial_{xx}. \tag{1.2}$$

Чтобы найти алгебру симметрии этого уравнения, будем следовать методу, описанному в разд. 1.1, т. е. найдем все линейные дифференциальные операторы

$$L=a(t,\ x)\partial_x+b(t,\ x)\partial_t+c(t,\ x)$$

(где a, b, c аналитичны в некоторой области $\mathscr{D}$ плоскости (x, t)), такие, что $L\Psi$ удовлетворяют уравнению (1.2), если Ψ аналитична в $\mathscr{D}$ и является решением уравнения (1.2). Чтобы L принадлежал алгебре симметрии, необходимо и достаточно выполнения соотношения

$$[L,\ Q]=R_L(t,\ x)\,Q, \tag{1.3}$$

где R_L — некоторая функция, аналитичная в $\mathscr{D}$. Приравнивая в обеих частях (1.3) коэффициенты при ∂_{xx}, ∂_t, ∂_x и 1, получим систему дифференциальных уравнений для функций a, b, c и R. Детали этих простых выкладок можно найти в работах [3, 18, 20]. Окончательный результат состоит в том, что операторы симметрии L образуют шестимерную комплексную алгебру Ли $\mathcal{G}_2^c$ с базисом

$$\begin{gathered} K_2 = -t^2\partial_t - tx\partial_x - t/2 + ix^2/4, \quad K_1 = -t\partial_x + ix/2, \\ K_0 = i, \quad K_{-1} = \partial_x, \quad K_{-2} = \partial_t, \quad K^0 = x\partial_x + 2t\partial_t + {}^1/_2, \end{gathered} \tag{1.4}$$

а соотношения коммутирования имеют вид

$$\begin{gathered} [K^0, K_j] = jK_j \quad (j = \pm 2, \pm 1, 0), \quad [K_{-1}, K_1] = {}^1/_2 K_0, \\ [K_{-1}, K_2] = K_1, \quad [K_{-2}, K_1] = -K_{-1}, \quad [K_{-2}, K_2] = -K^0. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Читатель должен по достоинству оценить выражение (1.3), поскольку оно дает возможность вычислить операторы симметрии для уравнения (1.2), не являющиеся очевидными. Более того, некоторые из этих операторов не являются чисто дифференциальными, но содержат и операторы умножения. Геометрический смысл операторов K_0, K_{-1}, K_{-2} очевиден, а оператор K^0 является производящим оператором преобразования растяжения $\Psi(t, x) \rightarrow \Psi(\alpha^2 t, \alpha x)$. Однако K_1 является производящим оператором преобразования Галилея (не очевидным оператором симметрии), геометрический же смысл K_2 автору неизвестен. Далее, K^0 и K_2 не коммутируют с Q, хотя они переводят решение в решение; таким образом, они отвечают тем операторам L в (1.3), для которых $R_L \neq 0$.

Так как x и t вещественны и так как мы хотим изучать экспоненты операторов симметрии (1.4), чтобы получить группу симметрии, мы ограничимся рассмотрением *вещественной* шестимерной алгебры Ли $\mathcal{G}_2$ с базисом (1.4). (Заметим, что мы не можем отбросить единичный оператор K_0, так как он появляется как коммутатор $2[K_{-1}, K_1]$.) Другим полезным базисом в $\mathcal{G}_2$ является базис $\{C_j, L_k, E\}$, где

$$\begin{gathered} C_1 = K_{-1}, \quad C_2 = K_1, \quad L_3 = K_{-2} - K_2, \\ L_1 = K^0, \quad L_2 = K_{-2} + K_2, \quad E = K_0. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Соотношения коммутирования принимают вид

$$\begin{gathered} [L_1, L_2] = -2L_3, \quad [L_3, L_1] = 2L_2, \quad [L_2, L_3] = 2L_1, \\ [C_1, C_2] = {}^1/_2 E, \quad [L_3, C_1] = C_2, \quad [L_3, C_2] = -C_1, \\ [L_2, C_1] = [C_2, L_1] = -C_2, \quad [L_1, C_1] = [L_2, C_2] = -C_1, \end{gathered} \tag{1.7}$$

где E — производящий оператор центра $\mathcal{G}_2$.

Чтобы разъяснить структуру $\mathcal{G}_2$, напомним некоторые факты о группе $SL(2, R)$ всех вещественных (2×2)-матриц A

с детерминантом, равным $+1$:

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}, \quad \alpha\delta-\gamma\beta=1, \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\in R. \tag{1.8}$$

Как известно [83, 134], алгебра Ли $sl(2, R)$ группы $SL(2, R)$ состоит из всех вещественных (2×2)-матриц A с нулевым следом

$$A=\begin{pmatrix}a & b \\ c & -a\end{pmatrix}, \quad a,\ b,\ c\in R. \tag{1.9}$$

Эта алгебра Ли трехмерна, и матрицы

$$\mathscr{L}_1=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad \mathscr{L}_2=\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \mathscr{L}_3=\begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{1.10}$$

образуют ее базис, а соотношения коммутирования имеют вид

$$[\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2]=-2\mathscr{L}_3, \quad [\mathscr{L}_3, \mathscr{L}_1]=2\mathscr{L}_2, \quad [\mathscr{L}_2, \mathscr{L}_3]=2\mathscr{L}_1. \tag{1.11}$$

Отсюда непосредственно следует, что операторы симметрии L_k образуют базис подалгебры алгебры $\mathscr{G}_2$, изоморфной алгебре $sl(2, R)$.

Кроме того, операторы C_1, C_2, E образуют базис подалгебры алгебры $\mathscr{G}_2$, изоморфной алгебре Вейля $\mathscr{W}_1$. Группа Вейля W_1 состоит из вещественных (3×3)-матриц вида

$$B(u, v, \rho)=\begin{pmatrix}1 & v & 2\rho+uv/2 \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad u,\ v,\ \rho\in R, \tag{1.12}$$

с групповым умножением матриц

$$B(u, v, \rho)B(u', v', \rho')= \\ =B(u+u', v+v', \rho+\rho'+(vu'-uv')/4). \tag{1.13}$$

Алгебра Ли $\mathscr{W}_1$ имеет базис

$$\mathscr{C}_1=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \mathscr{C}_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \mathscr{E}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

а соотношения коммутирования имеют вид

$$[\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2]={}^1/{}_2\mathscr{E}, \quad [\mathscr{C}_k, \mathscr{E}]=0. \tag{1.14}$$

Используя известные результаты теории Ли (теорема A.3), мы можем по дифференциальным операторам из $\mathscr{G}_2$ построить экспоненциальные отображения, чтобы получить локальную группу Ли G_2 операторов симметрии. Действие группы Вейля

W_1 задается операторами

$$\mathbf{T}(u,\ v,\ \rho) = \exp([\rho + uv/4]\,E)\exp(uC_2)\exp(vC_1),$$

причем

$$\mathbf{T}(u,\ v,\ \rho)\,\Phi(t,\ x) = \\ = \exp[i\rho + i(uv + 2ux - u^2t)/4]\,\Phi(t,\ x + v - ut), \qquad (1.15)$$

где Φ принадлежит пространству $\mathcal{F}$ функций, аналитических в области $\mathcal{D}$. Свойство группового умножения описывается соотношением (1.13). Действие $SL(2, R)$ дается соотношением

$$\mathbf{T}(A)\Phi(t,\ x) = \exp\left[i\,\frac{x^2\beta}{4(\delta + t\beta)}\right](\delta + t\beta)^{-1/2}\,\Phi\left(\frac{\gamma + t\alpha}{\delta + t\beta},\ \frac{x}{\delta + t\beta}\right), \qquad (1.16)$$

где $A \in SL(2, R)$ представлена в виде (1.8). Отметим, что

$$\mathbf{T}\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(\beta K_2), \qquad \mathbf{T}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} = \exp(\gamma K_{-2}),$$

$$\mathbf{T}\begin{pmatrix} e^{\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix} = \exp(\alpha K^0), \qquad \mathbf{T}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \exp(\theta L_3), \qquad (1.17)$$

$$\mathbf{T}\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi \\ \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix} = \exp(\varphi L_2).$$

Группа $SL(2, R)$ действует на W_1 посредством присоединенного представления

$$\mathbf{T}(A^{-1})\,\mathbf{T}(u,\ v,\ \rho)\,\mathbf{T}(A) = \mathbf{T}(u\delta + v\beta,\ u\gamma + v\alpha,\ \rho), \qquad (1.18)$$

откуда полная группа симметрии G_2 — *группа Шредингера* в двумерном пространстве-времени — получается как полупрямое произведение группы $SL(2, R)$ и W_1 [20, 58]:

$$g = (A,\ \mathrm{w}) \in G_2, \qquad A \in SL(2,\ R),$$
$$\mathrm{w} = (u,\ v,\ \rho) \in W_1, \qquad \mathbf{T}(g) = \mathbf{T}(A)\,\mathbf{T}(\mathrm{w}), \qquad (1.19)$$
$$\mathbf{T}(g)\,\mathbf{T}(g') = \mathbf{T}(AA')\,\{\mathbf{T}(A'^{-1})\,\mathbf{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{T}(A')\}\,\mathbf{T}(\mathrm{w}') = \mathbf{T}(gg').$$

Из нашей общей теории следует, что $\mathbf{T}(g)$ отображает решение Ψ уравнения (1.2) в решение $\mathbf{T}(g)\Psi$. Однако G_2 является лишь локальной группой симметрии, ибо мы сталкиваемся не только с проблемой области определения функции $\mathbf{T}(g)\Phi$, которая обсуждалась в разд. 1.1, но также и с тем фактом, что выражение (1.16) теряет смысл при $\delta + t\beta = 0$. Соотношение (1.16) получается вычислением экспоненты производной Ли только при $|t\beta/\delta| < 1$. При $|t\beta/\delta| > 1$ это соотношение все еще определяет некоторую симметрию, но не может быть непосредственно получено при помощи алгебры симметрии.

Группа Шредингера G_2 действует на алгебре Ли $\mathcal{G}_2$ симметрии операторов K посредством сопряженного представления

$$K \to K^g = \mathbf{T}(g)K\mathbf{T}(g^{-1}),$$

и это действие разбивает $\mathcal{G}_2$ на G_2-орбиты. Оператор $K_0 = i$, производящий оператор центра $\{K_0\}$ алгебры $\mathcal{G}_2$, с нашей точки зрения является тривиальным, поэтому мы просто определим структуру орбит факторпространства $\mathcal{G}'_2 = \mathcal{G}_2/\{K_0\}$. Получаются следующие результаты. Пусть ненулевой элемент $\mathcal{G}'_2$ имеет вид

$$K = a_2K_2 + a_1K_1 + a_0K^0 + a_{-1}K_{-1} + a_{-2}K_{-2},$$

и пусть $\alpha = a_2a_{-2} + a_0^2$. Прямые вычисления показывают, что α — инвариант сопряженного представления. В табл. 6 дано полное множество представителей орбит. Это значит, что K лежит на некоторой G_2-орбите, если оператор K вещественно кратен одному из пяти операторов, входящих в следующий список:

$$\begin{array}{lll} \text{Случай 1} & (\alpha < 0) & K_{-2} - K_2 = L_3; \\ \text{Случай 2} & (\alpha > 0) & K^0; \\ \text{Случай 3} & (\alpha = 0) & K_2 + K_{-1},\ K_{-2},\ K_{-1}. \end{array} \tag{1.20}$$

Отметим, что существует пять орбит.

Так как K_{-2} и K_{-1} коммутируют, их можно одновременно привести к диагональному виду. Более того, $K_{-2}\Psi = iK^2_{-1}\Psi$ для произвольного решения Ψ уравнения $Q\Psi = 0$. Поэтому мы ассоциируем с обеими этими орбитами одну и ту же систему координат $\{t, x\}$ и окончательно имеем четыре системы координат, в которых переменные разделяются.

Можно также определить операторы симметрии второго порядка для уравнения $Q\Psi = 0$ и показать, что уравнение Шредингера для свободной частицы является уравнением класса I. Однако все системы координат, допускающие разделение переменных в этом уравнении, оказываются ассоциированными с орбитами операторов симметрии первого порядка. Это связано с тем фактом, что уравнение Шредингера — уравнение первого порядка по t.

Для этого уравнения целесообразно (и необходимо) рассматривать решения с R-разделенными переменными. Чтобы разъяснить понятие R-разделимости, возьмем не обращающуюся в нуль аналитическую функцию $R(t, x) = \exp(i\mathcal{R}(t, x))$ и запишем решение Ψ уравнения Шредингера $Q\Psi = 0$ в виде $\Psi = R\Phi$. Составив дифференциальное уравнение для функции Φ, получим $Q'\Phi = 0$, где $Q' = R^{-1}QR$ — преобразованный дифференциальный оператор. Предположим, что новое уравнение $Q'\Phi = 0$ в системе координат $\{u, v\}$ имеет решение с разделенными переменными $\Phi_\lambda = U_\lambda(u) V_\lambda(v)$. Если $R = a(u) b(v)$, т. е. если в координатах $\{u, v\}$ функция R факторизуется, то $\Psi_\lambda = a(u) U_\lambda(u) b(v) V_\lambda(v)$ — решение уравнения $Q\Psi_\lambda = 0$ с разделенными переменными, и мы не получаем ничего нового. Однако если $R(u, v)$ не факторизуется, то мы получаем новое семейство решений $\Psi_\lambda = \exp(i\mathcal{R}(u, v)) U_\lambda(u) V_\lambda(v)$ с R-разделенными переменными. Таким образом, R-разделимость является обобщением обычной разделимости. Решения уравнения $Q\Psi = 0$ с R-разделенными переменными соответствуют обычным решениям с разделенными переменными эквивалентного уравнения $Q'\Phi = 0$, $Q' = R^{-1}QR$.

Мы не вводили понятие R-разделимости раньше потому, что уравнения, исследованные в гл. 1, не допускали R-разделенных переменных без того, чтобы переменные уже не были разделены в обычном смысле. Однако для операторов Шредингера ситуация меняется. Ясно, что в этом случае существование решений с R-разделенными переменными связано с существованием оператора симметрии K, который не коммутирует с Q, хотя и отображает решения в решения.

Калнинс и автор настоящей книги в работе [58] нашли все системы координат, которые допускают решения уравнения (1.2) с R-разделенными переменными, и доказали, что соответствующие решения $\Psi_\lambda = \exp(i\mathcal{R}(u, v)) U_\lambda(u) V_\lambda(v)$ с R-разделенными переменными можно охарактеризовать как собственные функции некоторого оператора $K \in \mathcal{G}_2$, $K\Psi_\lambda = i\lambda\Psi_\lambda$, $Q\Psi_\lambda = 0$. Соответствие между орбитами в $\mathcal{G}_2'$ и координатами, допускающими решения с R-разделенными переменными, указывается в табл. 6.

Во всех приведенных в табл. 6 случаях $v = t$. Как было указано выше, существует всего четыре типа систем координат, допускающих разделение переменных, и они соответствуют четырем нетривиальным G_2-орбитам в $\mathcal{G}_2'$. (Здесь мы отождествляем две орбиты с коммутирующими представителями K_{-1}, K_{-2}.) Однако таблица имеет шесть входов и каждая из шести систем координат кажется отличной от остальных. Объяснение этому факту связано с нашим определением эквивалентности координатных систем. Две системы координат рассматриваются как эквивалентные, если одна система может быть отображена в другую G_2-преобразованием $\mathbf{T}(g)$. Более того, такое преобразование, в частности (1.16), может иногда иметь довольно сложный вид, так что две эквивалентные системы могут выглядеть совсем по-разному. Так как физический смысл оператора K_2 неясен, довольно трудно интерпретировать физические или

Таблица 6

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ДОПУСКАЮЩИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $(i\partial_t + \partial_{xx})\Psi(t, x) = 0$ С R-РАЗДЕЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

	Оператор	Координаты $\{u, v\}$	Множитель $R = e^{i\mathcal{R}}$	Решение с разделенными переменными
1	K_{-1}, K_{-2}	$x = u$	$\mathcal{R} = 0$	Произведение экспоненциальных функций
2а	$K_{-2} - K_1$	$x = u + v^2/2$	$\mathcal{R} = uv/2$	Произведение функции Эйри и экспоненциальной функции
2б	$K_2 + K_{-1}$	$x = uv + 1/2v$	$\mathcal{R} = (u^2v - u/v)/4$	Произведение функции Эйри и экспоненциальной функции
3а	K^0	$x = u\sqrt{v}$	$\mathcal{R} = 0$	Произведение функции параболического цилиндра и экспоненциальной функции
3б	$K_2 + K_{-2}$	$x = u\,\lvert 1 - v^2 \rvert^{1/2}$	$\mathcal{R} = \pm u^2v/4$ (+, если $\lvert v \rvert > 1$, —, если $\lvert v \rvert < 1$)	Произведение функции параболического цилиндра и экспоненциальной функции
4	$K_2 - K_{-2}$	$x = u(1 + v^2)^{1/2}$	$\mathcal{R} = u^2v/4$	Произведение функции Эрмита и экспоненциальной функции

геометрические взаимоотношения между двумя системами координат, связанными с помощью экспоненты этого оператора.

Тем не менее имеется пятипараметрическая подгруппа группы G_2, физический смысл которой весьма прозрачен [74]. Эта подгруппа состоит из группы Галилея плюс растяжение, и ее алгебра Ли имеет базис $\{K_{-2}, K_{\pm1}, K_0, K^0\}$. Если мы посмотрим на системы координат с точки зрения упомянутой пятимерной подгруппы, то найдем, что вторая и третья G_2-орбиты расщепляются на две орбиты. Это отвечает наличию шести систем, приведенных в табл. 6. (Однако в основу классификации систем положен факт разделимости переменных, а не точность соответствия орбитам упомянутой пятипараметрической подгруппы, включающей группу Галилея плюс растяжение. В самом деле, 2а расщепляется на две орбиты $K_{-2} \pm K_1$, а 2б расщепляется на орбиты $K_2 \pm K_{-1}$. Эти подслучаи дают координаты, которые отличаются только знаком параметра, и мы не находим различия между ними.)

Можно описать эквивалентность орбит 2 и 3 в терминах оператора $J = \exp\,[(\pi/4)(K_2 - K_{-2})] = \exp((-\pi/4)L_3)$,

$$J\Phi(t, x) = \frac{2^{1/4}}{(1+t)^{1/2}}\exp\left(\frac{ix^2/4}{1+t}\right)\Phi\left(\frac{t-1}{t+1}, \frac{x\sqrt{2}}{t+1}\right). \quad (1.21)$$

Заметим, что $J^2 = \exp\,[(\pi/2)(K_2 - K_{-2})] = \exp(-(\pi/2)L_3)$ и

$$J^2\Phi(t, x) = \frac{\exp(ix^2/4t)}{\sqrt{t}}\Phi\left(-\frac{1}{t}, \frac{x}{t}\right), \quad J^8\Phi = -\Phi, \quad J^{16}\Phi = \Phi. \quad (1.22)$$

Прямое вычисление дает

$$J(K_{-2} + K_2)J^{-1} = K^0, \qquad J^2(K_1 - K_{-2})J^{-2} = K_{-1} + K_2, \quad (1.23)$$

что доказывает G_2-эквивалентность систем 2а, 2б и 3а, 3б.

Теперь покажем, что операторы (1.4) можно интерпретировать как алгебру Ли косоэрмитовых операторов в гильбертовом пространстве $L_2(R)$ комплекснозначных функций, интегрируемых с квадратом по Лебегу на вещественной прямой (гл. 1, (5.2)). С этой целью рассмотрим формальное ограничение операторов (1.4) на пространство решений уравнения (1.2). Тогда мы можем заменить в этих выражениях ∂_t на $i\partial_{xx}$ и рассматривать t как параметр. Легко видеть, что полученные операторы будут кососимметрическими, если их рассматривать на подпространстве $\mathscr{D} \subset L_2(R)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем. Более того, умножив каждый из этих операторов на i, получим оператор, допускающий единственное самосопряженное расширение. В самом деле, операторы (1.4) являются вещественными линейными комбинациями операторов

$$\mathscr{K}_2 = ix^2/4, \qquad \mathscr{K}_1 = ix/2,$$
$$\mathscr{K}_{-1} = \partial_x, \quad \mathscr{K}_{-2} = i\partial_{xx}, \quad \mathscr{K}_0 = i, \quad \mathscr{K}^0 = x\partial_x + 1/2, \quad (1.24)$$

и $i\mathscr{K}_j$, $i\mathscr{K}^0$ имеют единственное самосопряженное расширение. Если параметр t положить равным нулю, то K_j станет равным $\mathscr{K}_j$, а K^0 равным $\mathscr{K}^0$. Отсюда следует, что операторы, обозначаемые рукописными буквами, будут удовлетворять соотношениям коммутирования (1.5).

Согласно спектральной теории [112, гл. VIII], каждому косоэрмитовому оператору $\mathscr{H} \in \mathscr{G}_2$ соответствует однопараметрическая группа $U(\alpha) = \exp(\alpha\mathscr{H})$ унитарных операторов в $L_2(R)$. Эта группа в свою очередь действует на $\mathscr{G}_2$ согласно соотношению $\mathscr{K} \to U(\alpha)\mathscr{K}U(-\alpha)$. В частности, имеет место следующий результат, важнейший в квантовой механике:

$$\exp(a\mathcal{K}_{-2})f(x)= \\ = \text{l.\,i.\,m.}\,(4\pi ia)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-(x-y)^2/4ia]\,f(y)\,dy, \qquad (1.25) \\ f\in L_2(R),\quad a\neq 0.$$

(Здесь $(ia)^{1/2}=e^{\pi i/4}|a|^{1/2}$ при $a>0$ и $(ia)^{1/2}=e^{-\pi i/4}|a|^{1/2}$ при $a<0$. Доказательство (1.25) см. в [67].) Можно проверить, что

$$\begin{aligned}\exp(t\mathcal{K}_{-2})\,\mathcal{K}_j\exp(-t\mathcal{K}_{-2})&=K_j,\\ \exp(t\mathcal{K}_{-2})\,\mathcal{K}^0\exp(-t\mathcal{K}_{-2})&=K^0.\end{aligned} \qquad (1.26)$$

(Формальное доказательство легко получить на основании соотношений коммутирования (1.5), но строгое доказательство с точно установленными областями определения операторов значительно труднее.)

Далее, если $f\in L_2(R)$ и f принадлежит области определения косоэрмитова оператора $\mathcal{K}_{-2}$, то $\Psi(t,x)=\exp(t\mathcal{K}_{-2})f(x)$ удовлетворяет уравнению $\partial_t\Psi=\mathcal{K}_{-2}\Psi$ или $i\partial_t\Psi=-\partial_{xx}\Psi$ для почти всех t и удовлетворяет условию $\Psi(0,x)=f(x)$. Понятно, что $\exp(t\mathcal{K}_{-2})$ является известным в квантовой механике оператором сдвига по времени [72, 110]. Более того, это унитарный оператор, поскольку интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_1(t,x)\overline{\Psi}_2(t,x)\,dx=\langle\exp(t\mathcal{K}_{-2})f_1,\ \exp(t\mathcal{K}_{-2})f_2\rangle= \\ =\langle f_1,f_2\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)\bar f_2(x)\,dx \qquad (1.27)$$

не зависит от времени. Мы ввели структуру гильбертова пространства на совокупности решений уравнения (1.2), в точности согласующуюся с обычным гильбертовым пространством состояний, отвечающим свободной частице. Более того, соотношения (1.26), определяющие зависимости между операторами в момент времени $t=0$ (рукописные буквы) и операторами в момент времени t (обычные буквы), суть не что иное, как обычные соотношения связи между гейзенберговской и шредингеровской картинами в квантовой теории [110, 139]. Легко видеть, что унитарные операторы

$$\exp(\alpha K)=\exp(t\mathcal{K}_{-2})\exp(\alpha\mathcal{K})\exp(-t\mathcal{K}_{-2})$$

отображают элементы Ψ гильбертова пространства решений уравнения (1.2) в $\Phi=\exp(\alpha K)\Psi$, которые также являются решениями уравнения (1.2). Отсюда следует, что унитарные операторы $\exp(\alpha K)$ являются операторами симметрии уравнения (1.2).

Впоследствии мы увидим, что операторы $\mathscr{K}$ порождают глобальное унитарное представление накрывающей группы $\tilde{G}_2$ группы G_2, но не самой G_2. Принимая этот факт, допустим, что $\mathbf{U}(g)$, $g \in \tilde{G}_2$, — соответствующие унитарные операторы, и положим $\mathbf{T}(g) = \exp(t\mathscr{K}_{-2})\mathbf{U}(g)\exp(-t\mathscr{K}_{-2})$. Легко доказать, что $\mathbf{T}(g)$ — унитарные операторы симметрии уравнения (1.2) и что соответствующие инфинитезимальные операторы суть $K = \exp(t\mathscr{K}_{-2})\mathscr{K}\exp(-t\mathscr{K}_{-2})$.

Рассмотрим оператор $\mathscr{L}_3 = \mathscr{K}_{-2} - \mathscr{K}_2 = i\partial_{xx} - ix^2/4 \in \mathscr{G}_2$. Если $f \in L_2(R)$, то функция $\Psi(t, x) = \exp(t\mathscr{L}_3)f(x)$ удовлетворяет уравнению $\partial_t\Psi = \mathscr{L}_3\Psi$, или $i\partial_t\Psi = -\partial_{xx}\Psi + x^2\Psi/4$, и условию $\Psi(0, x) = f(x)$. Подобным образом унитарные операторы $\mathbf{V}(g) = \exp(t\mathscr{L}_3)\mathbf{U}(g)\exp(-t\mathscr{L}_3)$ являются операторами симметрии для последнего уравнения, т. е. уравнения Шредингера линейного гармонического осциллятора, фигурирующего в табл. 5 под номером (2). (В данном случае мы нормируем потенциал, приняв $k = {}^1/_4$.) Легко проверить, что соответствующие инфинитезимальные операторы $\exp(t\mathscr{L}_3)\mathscr{K}\exp(-t\mathscr{L}_3)$ можно представить в виде дифференциального оператора первого порядка по переменным x, t. (В частности, эти операторы будут вещественными линейными комбинациями базисных операторов (1.24) с коэффициентами, зависящими от t. Рассматривая действия этих операторов в пространстве решений уравнения Шредингера гармонического осциллятора, мы можем везде заменить $i\partial_{xx}$ на $\partial_t + ix^2/4$.)

Обратно, если K' — оператор симметрии первого порядка для уравнения Шредингера гармонического осциллятора, то можно показать что при $t = 0$ оператор K' сводится к вещественной линейной комбинации операторов (1.24). Отсюда следует, что каждая из алгебр операторов симметрии для уравнений с потенциалами (1) и (2) табл. 5 будет изоморфна алгебра $\mathscr{G}_2$ с базисом (1.24). Для уравнения свободной частицы операторы симметрии суть $K = \exp(t\mathscr{K}_{-2})\mathscr{K}\exp(-t\mathscr{K}_{-2})$, в то время как для уравнения гармонического осциллятора такими операторами являются $K' = \exp(t\mathscr{L}_3)\mathscr{K}\exp(-t\mathscr{L}_3)$. В обоих случаях операторы $\mathscr{K}$ одни и те же. Более того, при фиксированном $\mathscr{K}$ операторы K и K' унитарно эквивалентны, $K' = A(t)KA^{-1}(t)$, хотя унитарный оператор $A(t) = \exp(t\mathscr{L}_3)\exp(-t\mathscr{K}_{-2})$ зависит от t.

Продолжая подобным образом, рассмотрим оператор $\mathscr{L}_2 = \mathscr{K}_{-2} + \mathscr{K}_2 = i\partial_{xx} + ix^2/4 \in \mathscr{G}_2$. Если $f \in L_2(R)$, то функция $\Psi(t, x) = \exp(t\mathscr{L}_2)f(x)$ удовлетворяет уравнению $\partial_t\Psi = \mathscr{L}_2\Psi$, или $i\partial_t\Psi = -\partial_{xx}\Psi - x^2\Psi/4$, и условию $\Psi(0, x) = f(x)$.

Операторы $\mathbf{W}(g) = \exp(t\mathcal{L}_2)\mathbf{U}(g)\exp(-t\mathcal{L}_2)$ образуют группу унитарных операторов симметрии последнего уравнения, т. е. уравнения линейного репульсивного осциллятора ((3) в табл. 5); соответствующие инфинитезимальные операторы $\exp(t\mathcal{L}_2)\mathcal{K}\exp(-t\mathcal{L}_2)$ суть операторы первого порядка по x и t. Наконец, рассмотрим оператор $\mathcal{W} = \mathcal{K}_{-2} - \mathcal{K}_1 = i\partial_{xx} - ix/2 \in \mathcal{G}_2$. Если $f \in L_2(R)$, то функция $\Psi(t, x) = \exp(t\mathcal{W})f(x)$ удовлетворяет уравнению $\partial_t\Psi = \mathcal{W}\Psi$, или $i\partial_t\Psi = -\partial_{xx}\Psi + x\Psi/2$, и условию $\Psi(0, x) = f(x)$. Унитарные операторы $\mathbf{X}(g) = \exp(t\mathcal{W})\mathbf{U}(g)\exp(-t\mathcal{W})$ суть операторы симметрии для уравнения Шредингера с линейным потенциалом, а инфинитезимальные операторы $\exp(t\mathcal{W})\mathcal{K}\exp(-t\mathcal{W})$ имеют первый порядок по x и t.

Из (1.20) следует, что операторы $\mathcal{K}_{-2}$, $\mathcal{L}_3$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{K}_{-2} - \mathcal{K}_1$, отвечающие гамильтонианам свободной частицы, гармонического осциллятора, линейного репульсивного осциллятора и линейного потенциала, лежат на тех же самых G_2-орбитах, что и четыре представителя $\mathcal{K}_{-2}$, $\mathcal{L}_3$, $\mathcal{K}^0$ и $\mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_{-1}$ соответственно. Таким образом, эти четыре гамильтониана в точности соответствуют четырем системам координат, в которых уравнение (1.2) допускает разделение переменных. Мы видим, что эти гамильтонианы образуют полное множество представителей орбит в $\mathcal{G}_2$.

Отсюда следует, что уравнения Шредингера с потенциалами (1)—(4) в табл. 5 имеют изоморфные алгебры симметрии. Если мы подсчитаем операторы симметрии при $t = 0$, то в каждом случае получим алгебру Ли $\mathcal{G}_2$ с базисом (1.24). Хотя мы вначале получили эту алгебру симметрии, изучая уравнение Шредингера с потенциалом (1), можно равным образом получить ее, изучая уравнения с потенциалами (2), (3) или (4). Более того, в предыдущих абзацах мы видели, как построить (зависящие от времени) унитарные операторы в $L_2(R)$, которые отображают решения одного из этих уравнений в решения другого уравнения. Эти четыре уравнения могут и должны изучаться совместно.

Теперь можно сделать явной связь между орбитами и разделением переменных. Предположим, что $\Psi(t, x)$ — решение уравнения для свободной частицы

$$i\partial_t\Psi = -\partial_{xx}\Psi. \tag{1.28}$$

Ясно, что это уравнение допускает разделение в переменных $\{t, x\}$ и что эти переменные «естественным» образом ассоциированы с данным уравнением. Мы видим, что оператор $A(t) = \exp(t\mathcal{L}_3)\exp(-t\mathcal{K}_{-2}) = \exp(-t\mathcal{K}_{-2})\exp(t\mathcal{L}_3)$ отображает Ψ в $\Phi(t, x) = A(t)\Psi(t, x)$ — в решение уравнения для гармонического осциллятора

$$i\partial_t\Phi = -\partial_{xx}\Phi - x^2\Phi/4. \tag{1.29}$$

Это решение нетрудно записать в явном виде:

$$\Phi(t, x) = (\cos t)^{-1/2}\exp(-ix^2 \operatorname{tg}(t)/4)\Psi(\operatorname{tg} t, x/\cos t).$$

Но уравнение (1.29) «естественно» допускает разделение в переменных $\{t, x\}$, и поэтому мы можем найти решение Ψ уравнения (1.28) в виде

$$\begin{gathered}\Psi(t, x) = (1+v^2)^{-1/4}\exp(iu^2v/4)\Phi(\operatorname{arctg} v, u),\\ x = u(1+v^2)^{1/2}, \quad t = v.\end{gathered} \tag{1.30}$$

Так как уравнение (1.29) допускает разделение в переменных $\{\operatorname{arctg} v, u\}$, а значит, и в переменных $\{v, u\}$, отсюда следует, что в (1.28) переменные R-разделяются в координатах $\{v, u\}$, причем множитель $R = e^{i\mathscr{R}}$ определяется значением $\mathscr{R} = iu^2v/4$. (Множитель $(1+v^2)^{-1/4}$ может быть включен в соответствующий сомножитель при разделении переменных.) Таким образом, мы объяснили существование в табл. 6 координат 4, связанных с оператором $\mathscr{K}_{-2} - \mathscr{K}_2$. Подобными рассуждениями мы можем связать с каждым из четырех гамильтонианов «естественную» систему координат так, что они исчерпают возможные неэквивалентные по отношению к G_2 системы координат, допускающие решения с R-разделенными переменными.

Заметим, что если два оператора принадлежат одной и той же G_2-орбите, то первый оператор унитарно эквивалентен второму, умноженному на вещественную константу. Таким образом, два соответствующим образом нормированных оператора, принадлежащих одной и той же орбите, имеют тот же самый спектр. В частности, если $\mathscr{K}$, $\mathscr{K}' \in \mathscr{G}_2$, $\mathscr{K}' = \mathrm{U}(g)\mathscr{K}\mathrm{U}(g^{-1})$ и множество (возможно, обобщенных) собственных векторов $f_\lambda(x)$ самосопряженного оператора $i\mathscr{K}$ полно,

$$i\mathscr{K}f_\lambda = \lambda f_\lambda, \qquad \langle f_\lambda, f_\mu\rangle = \delta_{\lambda,\mu}, \tag{1.31}$$

где

$$\langle h_1, h_2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x)\bar{h}_2(x)\,dx, \qquad h_j \in L_2(R), \tag{1.32}$$

то для $f'_\lambda = \mathrm{U}(g)f_\lambda$ имеем

$$i\mathscr{K}'f'_\lambda = \lambda f'_\lambda, \qquad \langle f'_\lambda, f'_\mu\rangle = \delta_{\lambda,\mu} \tag{1.33}$$

и f'_λ образуют полное множество собственных векторов оператора $i\mathscr{K}'$ [98]. Из этого замечания следует, что если мы хотим вычислить спектр, соответствующий любому оператору $\mathscr{K} \in \mathscr{G}_2$, то достаточно вычислить спектр для четырех гамильтонианов, упомянутых выше. Более того, мы в состоянии выбрать другой оператор $\mathscr{K}$ таким образом, чтобы его спектральное разложение получалось особенно просто и чтобы он принадлежал той же G_2-орбите, что и данный гамильтониан. Спектральное разложение гамильтониана и соответствующее разложение по собственным функциям будет непосредственно получаться из разложения для $\mathscr{K}$ применением группового оператора $\mathbf{U}(g)$.

Как частный случай последнего замечания рассмотрим оператор $\mathscr{K}_{-2} = i\partial_{xx}$. Если $\{f_\lambda\}$ — базис обобщенных собственных векторов некоторого оператора $\mathscr{K} \in \mathscr{G}_2$, то $\{\Psi_\lambda = \exp(t\mathscr{K}_{-2}) f_\lambda\}$ — базис обобщенных собственных векторов оператора $K = \exp(t\mathscr{K}_{-2})\mathscr{K}\exp(-t\mathscr{K}_{-2})$, а Ψ_λ удовлетворяет уравнению Шредингера для свободной частицы (1.28). Аналогичное замечание справедливо и для остальных гамильтонианов.

Вычислим в явном виде спектральное разложение оператора $\mathscr{L}_3 = \mathscr{K}_{-2} - \mathscr{K}_2$. (Эти результаты известны, см. [52].) Уравнение для определения собственных функций имеет вид

$$i\mathscr{L}_3 f = \lambda f, \qquad (-\partial_{xx} + x^2/4) f = \lambda f,$$

и поэтому нормированные собственные функции запишутся в виде

$$f_n^{(4)}(x) = \left[n!\,(2\pi)^{1/2}\,2^n\right\}^{-1/2} \exp(-x^2/4)\, H_n\left(x/\sqrt{2}\right), \tag{1.34}$$

$$\lambda_n = n + {}^1/_2, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \quad \left\langle f_n^{(4)},\ f_m^{(4)}\right\rangle = \delta_{nm},$$

где $H_n(x)$ — многочлен Эрмита (Б.12). Функции $\{f_n^{(4)}\}$ образуют о. н. базис в $L_2(R)$.

Из (1.34) следует, что

$$\exp\left(2\pi\mathscr{L}_3\right) f_n^{(4)} = \exp\left[-2\pi i\left(n + {}^1/_2\right)\right] f_n^{(4)} = -f_n^{(4)},$$

и поэтому $\exp(2\pi\mathscr{L}_3) = -E$, где E — единичный оператор в $L_2(R)$. Однако если бы операторы $\exp(\alpha\mathscr{K})$ порождали глобальное унитарное представление G_2 в $L_2(R)$, то в силу (1.17) мы должны были бы иметь $\exp(2\pi\mathscr{L}_3) = E$. В самом деле, можно показать, что экспоненты операторов $\mathscr{K}$ приводят к глобальному неприводимому представлению односвязной накрывающей группы $\tilde{G}_2$ группы G_2.

Для описания этой накрывающей группы рассмотрим сначала топологию многообразия $SL(2, R)$ (см. (1.8)),

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2,\ R), \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Полагая

$$2a = \alpha + \delta + i(\gamma - \beta), \qquad 2b = -\alpha + \delta + i(\gamma + \beta), \tag{1.35}$$

мы замечаем, что комплексные числа a и b удовлетворяют тождеству

$$|a|^2 - |b|^2 = 1. \tag{1.36}$$

Обратно, если $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$ — два числа, удовлетворяющие соотношению (1.36), то по формулам (1.35) получаем единственную матрицу $A \in SL(2, R)$ с элементами $\alpha = a_1 - b_1$, $\beta = -a_2 + b_2$, $\gamma = a_2 + b_2$, $\delta = a_1 + b_1$. Из (1.36) следует, что топологически многообразие $SL(2, R)$ можно отождествить с гиперболоидом

$$a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2 = 1.$$

Баргманн [11] дает иную параметризацию $SL(2, R)$. Он полагает

$$\mu = b/a, \qquad \omega = \arg a, \qquad -\pi < \omega \leqslant \pi \,(\mathrm{mod}\, 2\pi). \tag{1.37}$$

Из (1.36) следует, что $|\mu| < 1$. Таким образом,

$$a = e^{i\omega}(1 - |\mu|^2)^{-1/2}, \qquad b = e^{i\omega}\mu(1 - |\mu|^2)^{-1/2}. \tag{1.38}$$

Мы можем записать $A \equiv (\mu, \omega)$, $|\mu| < 1$, $-\pi < \omega \leqslant \pi$, и параметризовать $SL(2, R)$ при помощи величин μ и ω. Групповое произведение можно представить следующим образом. Если $A = (\mu, \omega)$ и $A' = (\mu', \omega')$, то $AA' = (\mu'', \omega'')$, где

$$\begin{aligned} \mu'' &= (\mu + \mu' e^{-2i\omega})(1 + \bar{\mu}\mu' e^{-2i\omega})^{-1}, \\ \omega'' &= \omega + \omega' + [1/(2i)] \ln\left[(1 + \bar{\mu}\mu' e^{-2i\omega})(1 + \mu\bar{\mu}' e^{2i\omega})^{-1}\right], \end{aligned} \tag{1.39}$$

причем $\ln z$ означает главное значение логарифма ($\ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$, $r > 0$, $-\pi < \theta \leqslant \pi$), а ω' определяется по $\mathrm{mod}\, 2\pi$. Легко проверить, что μ, ω являются соответствующими параметрами группы Ли [120]. Мы можем топологически охарактеризовать $SL(2, R)$ как произведение открытого круга $|\mu| < 1$ и окружности $-\pi < \omega \leqslant \pi$, $\mathrm{mod}\, 2\pi$.

Универсальная накрывающая группа $\widetilde{SL}(2, R)$ группы $SL(2, R)$ — это группа Ли с элементами

$$\widetilde{SL}(2, R) = \{\{\mu, \omega\}\colon |\mu| < 1, -\infty < \omega < \infty\}.$$

Здесь разным значениям ω соответствуют различные элементы группы. Групповое умножение определяется по формулам (1.39), за исключением того, что теперь ω'' не определяется по $\mathrm{mod}\, 2\pi$. Имеется гомоморфизм $\widetilde{SL}(2, R)$ в $SL(2, R)$, определяемый соотношением $\{\mu, \omega\} \to \{\mu, \omega\}$, причем элементы $\{0, 2\pi n\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, группы $\widetilde{SL}(2, R)$ — это в точности те элементы, которые отображаются в единичный элемент $(0, 0)$ группы $SL(2, R)$.

Наконец, легко проверить, что элементы группы $\widetilde{SL}(2, R)$ можно представить в виде

$$\{\mu, \omega\} = \{0, \ -\theta/2\}\{r, 0\}\{0, \ \omega + \theta/2\}, \qquad \mu = re^{i\theta}, \qquad (1.40)$$

и если $r > 0$, $-\pi < \theta \leqslant \pi$, то это представление единственно.

Теперь непосредственно покажем, что экспоненты операторов $\mathscr{K}$ дают глобальное унитарное неприводимое представление односвязной накрывающей группы $\tilde{G}_2$ группы G_2. В самом деле, на основании известных рекуррентных формул для многочленов Эрмита легко убедиться в том, что операторы $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$, $\mathscr{L}_3$, действуя на базис $\{f_n^{(4)}\}$, определяют принадлежащее к дискретной серии приводимое представление алгебры $sl(2, R)$. (Мы докажем эти рекуррентные формулы в разд. 2.2.) Оператор Казимира $^1/_4(\mathscr{L}_1^2 + \mathscr{L}_2^2 - \mathscr{L}_3^2)$ принимает значение, равное $-^3/_{16}$. Как показал впервые Баргманн [11] (см. также [120]), это представление алгебры Ли продолжается до глобального унитарного приводимого представления $\widetilde{SL}(2, R)$.

Аналогично операторы $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{L}_3$, действуя на базис $\{f_n^{(4)}\}$, определяют неприводимое представление $(\lambda, l) = (-^1/_2, 1)$ алгебры Ли группы гармонического осциллятора S [83]. Это представление алгебры Ли, как известно, также порождает глобальное унитарное неприводимое представление группы S [81, 87]. Из соотношения (1.40) следует, что каждый оператор на $\widetilde{SL}(2, R)$ может быть записан в виде

$$\exp(-(\theta/2)\mathscr{L}_3)\exp(-\tau\mathscr{L}_1)\exp\{[\theta/2 + \omega]\mathscr{L}_3\},$$

где $2\tau = \ln[(1 + r)/(1 - r)]$, причем $\exp(\theta\mathscr{L}_3)$ принадлежит S; поскольку $\mathscr{L}$ — оператор первого порядка, экспоненту которого легко вычислить, можно проверить, что в общем случае соотношения (1.18) имеют место. (Для этого мы заменяем $\mathbf{T}(A)$ на $\exp(-(\theta/2)\mathscr{L}_3)\exp(-\tau\mathscr{L}_1)\exp\{[\theta/2 + \omega]\mathscr{L}_3\}$ и используем соотношения (1.35), (1.37), (1.38), (1.40), чтобы выразить α, β, γ, δ в правой части (1.18) через θ, τ, ω.) Формулы (1.19) определяют $\tilde{G}_2$ как полупрямое произведение $\widetilde{SL}(2, R)$ и W_1. Поэтому наше представление $\mathscr{G}_2$ продолжается до глобального унитарного представления $\mathbf{U}$ группы $\tilde{G}_2$, которое неприводимо, поскольку неприводимо $\mathbf{U}|S$.

Унитарные операторы $\mathbf{U}(g)$ в $L_2(R)$ легко вычислить. Оператор

$$\mathbf{U}(u, \ v, \ \rho) = \exp([\rho + uv/4]\mathscr{E})\exp(u\mathscr{C}_2)\exp(v\mathscr{C}_1),$$

определяющий представление W_1, принимает вид

$$\mathbf{U}(u, \ v, \ \rho)h(x) = \exp[i(\rho + uv/4 + ux/2)]h(x + v), \qquad (1.41)$$
$$h \in L_2(R).$$

Операторы $\mathbf{U}\{\mu, \omega\}$, $\{\mu, \omega\} \in \widetilde{SL}(2, R)$, более сложны. Здесь $\exp(a\mathscr{K}_{-2})$ дается формулой (1.25), и можно элементарно показать, что

$$\exp(b\mathscr{K}^0)\, h(x) = \exp(b/2)\, h(e^b x), \qquad \exp(c\mathscr{K}_2)\, h(x) = \\ = \exp(icx^2/4)\, h(x). \qquad (1.42)$$

Из соотношений (1.17), (1.39) следует, что

$$\exp(\varphi\mathscr{L}_2) = \exp(\operatorname{th}\varphi\mathscr{K}_2)\exp(\operatorname{sh}\varphi\operatorname{ch}\varphi\mathscr{K}_{-2})\exp[-\ln\operatorname{ch}\varphi\mathscr{K}^0],$$

и поэтому (1.25) и (1.42) дают

$$\exp(\varphi\mathscr{L}_2)\, h(x) = \\ = \frac{\exp[(ix^2/4)\operatorname{th}\varphi]}{(4\pi i\operatorname{sh}\varphi)^{1/2}}\,\mathrm{l.i.m.}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{-(x - y\operatorname{ch}\varphi)^2}{4i\operatorname{sh}\varphi\operatorname{ch}\varphi}\right] h(y)\,dy, \qquad (1.43)$$
$$\varphi \neq 0.$$

Аналогичные вычисления для $\exp(\theta\mathscr{L}_3)$ дают

$$\exp(\theta\mathscr{L}_3)\, h(x) = \\ = \frac{\exp[(ix^2/4)\operatorname{ctg}\theta]}{(4\pi i\sin\theta)^{1/2}}\,\mathrm{l.i.m.}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{-(y^2\cos\theta - 2xy)}{4i\sin\theta}\right] h(y)\,dy, \qquad (1.44\text{а})$$
$$0 < |\theta| < \pi,$$

$$\exp(2\pi\mathscr{L}_3)\, h(x) = -h(x). \qquad (1.44\text{б})$$

Из этих формул можно получить общий групповой оператор $\mathbf{U}(g)$.

Из (1.25) следует, что о. н. базис $\{f_n^{(4)}(x)\}$ отображается в о. н. базис функций $F_n^{(4)}(t, x) = \exp\left(t\mathscr{K}_{-2}\right) f_n^{(4)}(x)$,

$$F_n^{(4)}(t, x) = \left\{n!\, 2^n\left[2\pi\left(1 + t^2\right)\right]^{1/2}\right\}^{-1/2}\exp\left(\frac{i}{4}\frac{x^2 t}{1 + t^2} - \frac{x^2}{4(1 + t^2)} - \right. \\ \left. - i(n + 1/2)\operatorname{arctg} t\right) H_n\{x/[2(1 + t^2)]^{1/2}\}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad (1.45)$$

которые являются решениями уравнения (1.28). Этот результат можно вывести из формулы (1.30) или получить на основании строки 4 табл. 6. В самом деле, мы знаем, что в выражении (1.45) переменные $\{u, v\}$ R-разделяются, если принять $u = x/(1 + t^2)^{1/2}$, $v = t$, $\mathscr{R} = iu^2 v/4$. Применяя стандартные методы, изложенные в гл. 1, мы получим выражение (1.45).

Теперь исследуем спектральную теорию для орбит, содержащих операторы $\mathscr{K}_{-2} + \mathscr{K}_2$ (репульсивный осциллятор) и $\mathscr{K}^0$.

Спектральный анализ оператора $\mathscr{K}^0$ более элементарен, и сначала мы рассмотрим его. (Соответствующие результаты для оператора $\mathscr{K}_{-2} + \mathscr{K}_2$ будут следовать из полученных, если применить унитарный оператор $\mathcal{J} = \exp(-(\pi/4)\mathcal{L}_3)$ и соотношения (1.21), (1.23).) Уравнение на собственные значения имеет вид

$$i\mathcal{K}^0 f = \lambda f, \qquad \mathcal{K}^0 = x\partial_x + {}^1/_2.$$

Спектральное разложение этого оператора известно [37]. Чтобы получить его, разложим $L_2(R)$ в прямую сумму пространств $L_2(R_-) \oplus L_2(R_+)$ функций, интегрируемых с квадратом соответственно на отрицательной полуоси и положительной полуоси, а затем сделаем преобразование Меллина каждой компоненты. В результате оператор $i\mathcal{K}^0$ преобразуется в оператор умножения на независимую переменную трансформанты Меллина. Таким образом получаем, что спектр оператора непрерывен и двукратно покрывает всю вещественную ось. Обобщенные собственные функции имеют вид

$$\begin{aligned} &f_\lambda^{(3)\pm}(x) = (2\pi)^{-1/2} x_\pm^{-i\lambda-1/2}, && -\infty < \lambda < \infty, \\ &\langle f_\lambda^{(3)\pm}, f_\mu^{(3)\pm}\rangle = \delta(\lambda-\mu), && \langle f_\lambda^{(3)\pm}, f_\mu^{(3)\mp}\rangle = 0, \end{aligned} \tag{1.46}$$

где

$$x_+^\alpha = \begin{cases} x^\alpha, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x < 0; \end{cases} \qquad x_-^\alpha = \begin{cases} 0, & \text{если } x > 0, \\ (-x)^\alpha, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

При помощи соотношения (1.25) находим $F_\lambda^{(3)\pm}(t, x) = \exp(t\mathcal{K}_{-2}) f_\lambda^{(3)\pm}(x)$:

$$\begin{aligned} F_\lambda^{(3)\pm}(t, x) = \exp\left(-\frac{x^2}{8it} + \frac{\pi\lambda}{4} + \frac{i\pi}{8}\right) \frac{(2t)^{-i\lambda/2+1/4}}{(8\pi^2 it)^{1/2}} \times \\ \times \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\lambda\right) D_{i\lambda-1/2}\left(-\frac{xe^{-i\pi/4}}{(2t)^{1/2}}\right), \quad t > 0; \end{aligned} \tag{1.47}$$

здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция (приложение Б, разд. 1), а $D_\nu(z)$ — функция параболического цилиндра (приложение Б, разд. 4). (Это соотношение получается из формулы (1.25) изменением пути интегрирования: мы заменяем положительную вещественную полуось на луч, образующий с вещественной осью угол $\pi/4$, а также используем тот факт, что, согласно строке 3а табл. 6, в координатах $u = x/\sqrt{t}$, $v = t$ имеет место чистое разделение переменных.) Имеем также

$$F_\lambda^{(3)+}(t, x) = F_{-\lambda}^{(3)+}(-t, x), \qquad F_\lambda^{(3)-}(t, x) = F_\lambda^{(3)+}(t, -x). \tag{1.48}$$

Из формул (1.46) непосредственно следует, что $\{F_\lambda^{(3)\pm}\}$ образуют базис в $L_2(R)$, а соотношения ортогональности имеют вид

$$\langle F_\lambda^{(3)\pm}, F_\mu^{(3)\pm}\rangle = \delta(\lambda-\mu), \qquad \langle F_\lambda^{(3)\pm}, F_\mu^{(3)\mp}\rangle = 0 \tag{1.49}$$

для любого фиксированного t. Используя эти соотношения ортогональности и полноты для разложения произвольной функции $h \in L_2(R)$, получим вариант теоремы Черри для гильбертова пространства [17, 137], дающей разложение по функциям параболического цилиндра. Заметим, что наше разложение имеет простую связь со спектральным разложением оператора

$$K^0 = 2t\partial_t + x\partial_x + {}^1/_2 = 2it\partial_{xx} + x\partial_x + {}^1/_2.$$

Следующая орбита, которую мы рассмотрим, содержит операторы $\mathscr{K}_{-2} - \mathscr{K}_1$ (линейный потенциал) и $\mathscr{K}_2 + \mathscr{K}_{-1}$. Мы изучим второй оператор, поскольку спектральный анализ для него проще. (Соответствующие результаты для оператора $\mathscr{K}_{-2} - \mathscr{K}_1$ будут следовать из полученных, если применить унитарный оператор $\mathscr{T}^2 = \exp[-(\pi/2)\mathscr{L}_3]$ и соотношения (1.21)—(1.23).) Уравнение на собственные значения имеет вид

$$i(\mathscr{K}_2 + \mathscr{K}_{-1})f = \lambda f, \qquad \mathscr{K}_2 + \mathscr{K}_{-1} = ix^2/4 + \partial_x.$$

Спектральное разложение легко получить на основании теоремы об интегралах Фурье. Спектр оказывается непрерывным и заполняет всю вещественную ось. Обобщенные собственные функции образуют базис и имеют вид

$$\begin{gathered} f_\lambda^{(2)}(x) = (2\pi)^{-1/2}\exp[-i(\lambda x + x^3/12)], \qquad -\infty < \lambda < \infty, \\ \langle f_\lambda^{(2)}, f_\mu^{(2)}\rangle = \delta(\lambda - \mu). \end{gathered} \tag{1.50}$$

Мы находим, что

$$F_\lambda^{(2)}(t, x) = \\ = \exp\left[-\frac{i}{4}\left(\pi + \frac{1}{8v^2} - u^2v + \frac{u}{v} + \frac{4\lambda}{v}\right)\right]2^{1/6}\,\mathrm{Ai}\left[2^{2/3}\left(\frac{u}{2} + \lambda\right)\right], \\ x = uv + (2v)^{-1}, \quad t = v, \tag{1.51}$$

где $\mathrm{Ai}(z)$ — функция Эйри

$$\mathrm{Ai}(z) = \pi^{-1}(z/3)^{1/2}K_{1/3}(2z^{3/2}/3), \qquad |\arg z| < 2\pi/3. \tag{1.52}$$

Как обычно, мы выводим формулу (1.51), применяя R-разделение переменных к соотношению (1.25). Функции $\{F_\lambda^{(2)}\}$ суть базисные функции оператора

$$K_2 + K_{-1} = -it^2\partial_{xx} + (1 - tx)\partial_x - t/2 + ix^2/4.$$

Наконец, множество обобщенных собственных функций оператора $\mathscr{K}_{-1} = \partial_x$ полно; эти функции имеют вид

$$\begin{gathered} f_\lambda^{(1)}(x) = (2\pi)^{-1/2}e^{-i\lambda x}, \qquad -\infty < \lambda < \infty, \\ i\mathscr{K}_{-1}f_\lambda^{(1)} = \lambda f_\lambda^{(1)}, \quad \langle f_\lambda^{(1)}, f_\mu^{(1)}\rangle = \delta(\lambda - \mu). \end{gathered} \tag{1.53}$$

Далее,

$$F_\lambda^{(1)}(t,\ x) = \exp\left(t\mathcal{K}_{-2}\right) f_\lambda^{(1)}(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp\left(i\lambda^2 t - i\lambda x\right). \qquad (1.54)$$

Если $\{f_\lambda(x)\}$ — базис (обобщенных) собственных функций некоторого оператора $\mathcal{K} \in \mathcal{G}_2$ и $F_\lambda(t, x) = \exp(t\mathcal{K}_{-2}) f_\lambda(x)$, то $F_\lambda(\tau, x) = \exp([\tau - t]\mathcal{K}_{-2}) F_\lambda(t, x)$, и мы имеем в гильбертовом пространстве следующие разложения:

$$\begin{aligned} k(t,\ x - y) &= \int F_\lambda(t,\ x) \bar{f}_\lambda(y)\, d\lambda, \\ k(\tau - t,\ x - y) &= \int F_\lambda(\tau,\ x) \bar{F}_\lambda(t,\ y)\, d\lambda, \end{aligned} \qquad (1.55)$$

где областью интегрирования служит спектр оператора $i\mathcal{K}$, а функция

$$k(t,\ x) = (4\pi i t)^{-1/2} \exp\left(-x^2/(4it)\right)$$

является ядром интегрального оператора $\exp(t\mathcal{K}_{-2})$. Эти разложения известны как непрерывные аналоги производящих функций [124, 143].

Теперь мы вычислим м. э. с. б. $\langle f_\lambda^{(i)},\ f_\mu^{(j)}\rangle$, которые позволяют получить разложения собственных функций $f_\lambda^{(i)}$ по собственным функциям $f_\mu^{(j)}$. Поскольку $\langle \mathrm{U}(g) f_\lambda^{(i)},\ \mathrm{U}(g) f_\mu^{(j)}\rangle = \langle f_\lambda^{(i)},\ f_\mu^{(j)}\rangle$, те же самые выражения позволяют разложить собственные функции $\mathrm{U}(g) f_\lambda^{(i)}$ по собственным функциям $\mathrm{U}(g) f_\mu^{(j)}$. В частности, при $\mathrm{U}(g) = \exp(t\mathcal{K}_{-2})$ мы имеем $\langle F_\lambda^{(i)},\ F_\mu^{(j)}\rangle = \langle f_\lambda^{(i)},\ f_\mu^{(j)}\rangle$ при любом фиксированном t; это позволяет нам разложить функции одного базиса решений уравнения Шредингера для свободной частицы по элементам другого базиса.

Мы приведем здесь некоторые особо интересные м. э. с. б.

$$\begin{aligned} \langle f_n^{(4)},\ f_\lambda^{(3)\pm}\rangle &= 2^{3n/2 + i\lambda - 1/2} \frac{\Gamma(i\lambda/2 + 1/4 + n/2)}{2\pi (2^n n!)^{1/2}} \times \\ &\times \left\{ \begin{matrix} +1 \\ (-1)^n \end{matrix} \right\} {}_2F_1\left(\left. \begin{matrix} -n/2,\ (1-n)/2 \\ 3/4 - i\lambda/2 - n/2 \end{matrix} \right| \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \qquad (1.56)$$

Для определения $\langle f_n^{(4)},\ f_\lambda^{(2)}\rangle$ удобнее найти производящую функцию, чем явное выражение. Окончательный результат имеет вид

$$\begin{aligned} 2^{2/3} \exp\{-i[{}^1/_6 + \lambda + (2y)^{1/2}]\}\, \mathrm{Ai}\,\{2^{2/3}[{}^1/_4 - i\lambda - i(2y)^{1/2}]\} &= \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}\, iy)^n}{(n!)^{1/2}} \langle f_n^{(4)},\ f_\lambda^{(2)}\rangle. \end{aligned} \qquad (1.57)$$

Это выражение получается с использованием производящей функции для многочленов Эрмита, которая будет выведена в разд. 2.2:

$$\left\langle f_n^{(4)},\ f_\lambda^{(1)}\right\rangle = [n!\,(-2)^n\,\pi]^{-1/2}\exp(-\lambda^2)\,H_n\left[(2\lambda)^{1/2}\right], \tag{1.58}$$

$$\left\langle f_\lambda^{(2)},\ f_\mu^{(1)}\right\rangle = 2^{2/3}\mathrm{Ai}\,[2^{2/3}(\mu - \lambda)]. \tag{1.59}$$

Иные м. э. с. б. можно найти в [58].

Вычисление матричных элементов смешанных базисов $\left\langle \mathbf{U}(g)\,f_\lambda^{(i)},\ f_\mu^{(j)}\right\rangle$ позволяет установить значительно большее количество разложений, связывающих решения уравнения Шредингера. Например, имеем

$$\left\langle \exp(t\mathscr{K}_{-2})\,f_n^{(4)},\ f_\mu^{(3)+}\right\rangle = \left\langle f_n^{(4)},\ \exp(-t\mathscr{K}_{-2})\,f_\mu^{(3)+}\right\rangle =$$
$$= \frac{2^{3n/2+i\mu-1/2}\,(1+it)^{i\mu/2}}{(2\pi)^{3/4}\,(2^n n!)^{1/2}\,(1-it)^{n/2+1/4}}\exp\left[-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{arctg}\,t\right]\times$$
$$\times\Gamma\left(\frac{i\mu}{2}+\frac{1}{4}+\frac{n}{2}\right){}_2F_1\left(\left.\begin{matrix}-n/2,\ (1-n)/2\\ 3/4 - i\mu/2 - n/2\end{matrix}\right|\frac{1-it}{2}\right); \tag{1.60}$$

подобный результат справедлив и для $f_\mu^{(3)-}$. Это соотношение позволяет выразить многочлены Эрмита в виде интегралов от функций параболического цилиндра и, наоборот, разложить функции параболического цилиндра по многочленам Эрмита.

Матричные элементы $\left\langle \mathbf{U}(g)\,f_n^{(4)},\ f_m^{(4)}\right\rangle = \left\langle \mathbf{T}(g)\,F_n^{(4)},\ F_m^{(4)}\right\rangle$ легко вычисляются и представляют большой интерес. Однако в разд. 2.2 мы будем исследовать комплексное уравнение теплопроводности, применяя для этого метод Вейснера, и получим разложение многочленов Эрмита, которое будет содержать эти матричные элементы как частный случай.

Очень интересно вычислить матричные элементы по отношению к базису $\{f_\lambda^{(3)\pm}\}$ обобщенных собственных векторов оператора $\mathscr{K}^0$. В этом случае теорема сложения для матричных элементов будет иметь интегральный характер. Виленкин [37] вычислил эти матричные элементы для подгруппы группы $\tilde{G}_2$, алгебра Ли которой имеет базис $\{\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_{-1}, \mathscr{K}_0, \mathscr{K}^0\}$. Операторы группы суть $\mathbf{U}(a, b, c, \tau)$, причем

$$\mathbf{U}(a,\ b,\ c,\ \tau)\,h(x) = \exp(a\mathscr{K}_1)\exp(c\mathscr{K}_0)\exp(\tau\mathscr{K}^0)\exp(b\mathscr{K}_{-1})\,h(x) =$$
$$= \exp(\tau/2 + iax/2 + ic)\,h(e^\tau x + b), \tag{1.61}$$
$$a,\ b,\ c,\ \tau \in R, \quad h \in L_2(R).$$

(На основании (1.61) легко определить закон группового умножения.) Виленкин показал, что матричные элементы оператора $\mathbf{U}(a, b, c, \tau)$ в базисе $\{f_\lambda^{(3)\pm}\}$ можно выразить через конфлюентные гипергеометрические функции ${}_1F_1$; результирующая теорема сложения содержит много интересных интегральных тождеств для этих функций. Кроме того, в точности как в аналогичном случае группы $E(1, 1)$ (разд. 1.5), мы можем допустить, что параметр a в (1.61) принимает комплексные значения, и вывести более общие интегральные тождества. Относительно этих результатов см. [37], а также [82].

2.2. Уравнение теплопроводности
$(\partial_t - \partial_{xx})\Phi = 0$

Уравнение теплопроводности в двумерном пространстве-времени (при подходящем выборе масштабов) имеет вид

$$Q\Phi = 0 \qquad Q = \partial_t - \partial_{xx}, \tag{2.1}$$

где t, x — вещественные временная и пространственная переменные соответственно [109]. Ясно, что это уравнение можно получить из уравнения Шредингера (1.2) заменой t на $-it$, и поэтому алгебры симметрий этих уравнений тесно связаны. Действительно, простые вычисления показывают, что алгебра симметрий уравнения (2.1) шестимерна и ее базис состоит из операторов

$$\begin{aligned} &H_2 = t^2\partial_t + tx\partial_x + t/2 + x^2/4, \qquad H_1 = t\partial_x + x/2, \\ &H_0 = 1, \quad H_{-1} = \partial_x, \quad H_{-2} = \partial_t, \quad H^0 = x\partial_x + 2t\partial_t + {}^1\!/_2, \end{aligned} \tag{2.2}$$

для которых выполняются следующие соотношения коммутирования (H_0 коммутирует с любым оператором):

$$\begin{aligned} &[H^0, H_j] = jH_j, \quad j = \pm 2, \pm 1, 0, \quad [H_1, H_2] = [H_{-1}, H_{-2}] = 0, \\ &[H_{-1}, H_2] = H_1, \quad [H_{-1}, H_1] = {}^1\!/_2 H_0, \\ &[H_{-2}, H_1] = H_{-1}, \quad [H_{-2}, H_2] = H^0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Вещественную алгебру Ли с базисом (2.2) мы обозначим через $\mathcal{G}'_2$.

Как обычно, можно перейти к экспонентам элементов алгебры $\mathcal{G}'_2$, чтобы получить локальную группу Ли G'_2 операторов, действующих в пространстве $\mathcal{F}$ функций $\Psi(t, x)$, аналитических в некоторой данной области $\mathcal{D}$ плоскости (x, t). Операторы H_{-1}, H_1, H_0 образуют базис алгебры Вейля $\mathcal{W}_1$, и соответствующее действие группы Вейля W_1 задается операторами

$$\mathbf{T}(u, v, \rho) = \exp([\rho + uv/4]H_0)\exp(uH_1)\exp(vH_{-1}), \tag{2.4}$$

для которых справедливо правило умножения

$$\mathbf{T}(u, v, \rho)\mathbf{T}(u', v', \rho') = \\ = \mathbf{T}(u + u', v + v', \rho + \rho' + (vu' - uv')/4), \tag{2.5}$$

причем

$$\mathbf{T}(u, v, \rho)\Psi(t, x) = \\ = \exp[\rho + (uv + 2ux + u^2t)/4]\Psi(t, x + v + ut), \qquad \Psi \in \mathcal{F}.$$

Операторы H_2, H_{-2}, H^0 образуют базис подалгебры, изоморфной $sl(2, R)$, и соответствующее действие $SL(2, R)$ задается операторами

$$\mathbf{T}(A)\Psi(t, x) = \exp\left(-\frac{x^2\beta}{4(\delta + t\beta)}\right)(\delta + t\beta)^{-1/2}\Psi\left(\frac{\gamma + t\alpha}{\delta + t\beta}, \frac{x}{\delta + t\beta}\right), \tag{2.6}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, R).$$

Отметим, что

$$\begin{gathered} \mathbf{T}\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(-\beta H_2), \quad \mathbf{T}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} = \exp(\gamma H_{-2}), \\ \mathbf{T}\begin{pmatrix} e^{\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix} = \exp(\alpha H^0). \end{gathered} \tag{2.7}$$

Группа $SL(2, R)$ действует на W_1 посредством сопряженного представления

$$\mathbf{T}^{-1}(A)\mathbf{T}(u, v, \rho)\mathbf{T}(A) = \mathbf{T}(u\delta - v\beta, v\alpha - u\gamma, \rho). \tag{2.8}$$

Мы можем теперь определить группу симметрии G_2' как полупрямое произведение $SL(2, R)$ и W_1:

$$\begin{gathered} g = (A, \mathbf{w}) \in G_2', \quad A \in SL(2, R), \quad \mathbf{w} = (u, v, \rho) \in W_1, \\ \mathbf{T}(g) = \mathbf{T}(A)\mathbf{T}(\mathbf{w}), \\ \mathbf{T}(g)\mathbf{T}(g') = \mathbf{T}(AA')[\mathbf{T}^{-1}(A')\mathbf{T}(\mathbf{w})\mathbf{T}(A')]\mathbf{T}(\mathbf{w}') = \mathbf{T}(gg'). \end{gathered} \tag{2.9}$$

Ясно, что операторы $\mathbf{T}(g)$ отображают решения (2.1) в решения. Кроме того, G_2' действует на алгебру Ли $\mathcal{G}_2'$ дифференциальных операторов H посредством сопряженного представления

$$H \to H^g = \mathbf{T}(g)H\mathbf{T}^{-1}(g),$$

и это действие разбивает $\mathcal{G}_2'$ на G_2'-орбиты.

Нетрудно показать, что в результате сопряженного представления $\mathcal{G}_2'/\{H_0\}$ разбивается на пять орбит (так же как и в разд. 2.1, мы пренебрегаем центром алгебры $\mathcal{G}_2'$) с соответствующими представителями этих орбит H^0, $H_2 + H_{-2}$, $H_{-2} + H_1$, H_{-2}, H_{-1}. Поскольку на решениях уравнения теплопроводности $H_{-2} = (H_{-1})^2$, с этими пятью орбитами связаны только четыре системы координат, допускающие R-разделение переменных. Окончательные результаты представлены в табл. 7. (Дальнейшие подробности см. в работе [58].) Для каждой системы координат $\{u, v\}$ мы имеем $t = v$.

Особый интерес представляют собственные функции оператора H^0. Согласно табл. 7, эти собственные функции допускают

Таблица 7

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ДОПУСКАЮЩИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $(\partial_t - \partial_{xx})\,\Phi(t,\ x) = 0$ С R-РАЗДЕЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

	Оператор H	Координаты $\{u,\ v\}$	Множитель $R = e^{\mathfrak{R}}$	Решения с разделенными переменными
1	H_{-1}, H_{-2}	$x = u$	$\mathfrak{R} = 0$	Произведение экспоненциальных функций
2	$H_{-2} + H_1$	$x = u + v^2/2$	$\mathfrak{R} = -uv/2$	Произведение функции Эйри и экспоненциальной функции
3	H^0	$x = u\sqrt{v}$	$\mathfrak{R} = 0$	Произведение многочлена Эрмита и экспоненциальной функции
4	$H_2 + H_{-2}$	$x = u(1 + v^2)^{1/2}$	$\mathfrak{R} = u^2v/4$	Произведение функции параболического цилиндра и экспоненциальной функции

разделение переменных в координатах $u = x/\sqrt{t}$, $v = t$. Более того, решения $\Phi_n(t, x)$ уравнения теплопроводности, удовлетворяющие соотношению $H^0\Phi_n = (n + {}^1/_2)\Phi_n$, $n = 0,\ 1,\ \ldots$, являются *тепловыми многочленами*

$$\Phi_n(t,\ x) = \left(i\sqrt{t}/2\right)^n H_n\left(ix/2\sqrt{t}\right). \tag{2.10}$$

(Легко видеть, что эти функции являются многочленами от t и x.) Полная теория разложения решений уравнения теплопроводности по тепловым многочленам дана Розенблюмом и Уиддером [114].

Сама симметрия (2.6) не очень известна, однако один ее частный случай играет важную роль в теории уравнения теплопроводности. Если в (2.6) положить

$$A_0 = 2^{-1/2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_0^8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то мы получим симметрии

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(A_0)\,\Psi(t,\ x) &= \exp\left(-\frac{x^2}{4(1+t)}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{1+t}\right)^{1/2}\Psi\left(\frac{t-1}{t+1},\ \frac{(2x)^{1/2}}{t+1}\right), \\ \mathbf{T}\left(A_0^2\right)\Psi(t,\ x) &= \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)t^{-1/2}\Psi\left(-\frac{1}{t},\ \frac{x}{t}\right). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Симметрия $T(A_0^2)$ называется *преобразованием Аппеля* [4, 14]. Мы включаем это преобразование в группу Ли симметрий.

Известно, что если $f(x)$ — ограниченная непрерывная функция, заданная на вещественной оси, то существует единственное решение $\Psi(t, x)$ уравнения теплопроводности (2.1), ограниченное и непрерывное по t и x для всех $x \in R$, $t \geqslant 0$, непрерывно дифференцируемое по t, дважды непрерывно дифференцируемое по x для всех $x \in R$, $t > 0$ и такое, что $\Psi(0, x) = f(x)$ [109]. Это решение дается формулой

$$\Psi(t, x) = (4\pi t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x-y)^2/(4t)] f(y)\, dy = I^t(f). \tag{2.12}$$

Более того, имеет место соотношение

$$\Psi(t, x) = [4\pi(t-\tau)]^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4(t-\tau)}\right] \Psi(\tau, y)\, dy, \qquad t > \tau, \tag{2.13}$$

при помощи которого можно получить решение Ψ в момент t, если известно Ψ в более *ранний* момент времени $\tau < t$.

Некоторые теоремы разложения для решений уравнения (2.1) можно получить, используя не зависящую от времени форму

$$(\Psi, \Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t, x) \bar{\Phi}(-t, x)\, dx,$$

где Ψ, Φ — решения уравнения теплопроводности (см. [114]); тем не менее не все операторы (2.4)—(2.6) унитарны. По-видимому, для данной задачи нет подходящей структуры гильбертова пространства. Однако по аналогии с нашим исследованием уравнения Шредингера можно найти иную весьма полезную модель действия группы. Чтобы получить эту модель, рассмотрим операторы (2.2), ограничив их на пространство решений уравнения теплопроводности. Поэтому в соотношениях (2.2) можно заменить ∂_t на ∂_{xx} и рассматривать t $(t \geqslant 0)$ как фиксированный параметр. Теперь операторы H мы рассматриваем как операторы симметрии для фиксированного времени t. При $t = 0$ эти операторы имеют вид

$$\begin{aligned} &\mathscr{H}_2 = x^2/4, \quad \mathscr{H}_1 = x/2, \quad \mathscr{H}_0 = 1, \\ &\mathscr{H}_{-1} = \partial_x, \quad \mathscr{H}_{-2} = \partial_{xx}, \quad \mathscr{H}^0 = x\partial_x + {}^1/_2 \end{aligned} \tag{2.14}$$

и, будучи ограниченными на пространство $\mathscr{F}_0$ бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$ на R, имеющих компактный носитель, удовлетворяют обычным соотношениям коммутирования (2.3).

Эта процедура становится более понятной, если заметить, что (2.12) можно представить следующим образом:

$$\Psi(t, x) = I^t(f) = \exp(t\partial_{xx}) f(x) = \exp(t\mathscr{H}_{-2}) f(x), \quad f \in \mathscr{F}_0, \quad t > 0, \tag{2.15}$$

в результате чего получается аналогия с (1.25). Затем, интегрируя по частям, мы убеждаемся в том, что

$$H \exp(t\mathscr{H}_{-2}) = \exp(t\mathscr{H}_{-2}) \mathscr{H}, \tag{2.16}$$

где $H \in \mathscr{G}_2'$, а $\mathscr{H}$ получается из H в результате подстановки $t = 0$. (Точнее, если $\Psi(t, x) = I^t(f)$, то $H\Psi(t, x) = I^t(\mathscr{H}f)$.) Заметим, что (2.16) — аналог формулы (1.26) с той лишь разницей, что теперь мы избегаем неограниченных операторов $\exp(-t\mathscr{H}_{-2})$, $t > 0$. Теория, приводящая к (2.16), была, по-видимому, впервые разработана Хида [133].

Подобным образом можно установить соотношение

$$\exp(aH) \exp(t\mathscr{H}_{-2}) = \exp(t\mathscr{H}_{-2}) \exp(a\mathscr{H}). \tag{2.17}$$

Так же как и в предыдущем разделе, можно показать, что все уравнения

$$\partial_t \Psi(t, x) = (\partial_{xx} + ax\partial_x + b\partial_x + cx^2 + dx + e) \Psi(t, x), \tag{2.18}$$
$$a, \ldots, e \in R,$$

имеют алгебры симметрии, изоморфные алгебре $\mathscr{G}_2'$, и что в действительности все эти уравнения эквивалентны.

Приведем пример, предложенный Розенкрансом [115], который рассмотрел эту эквивалентность и показал, как ею можно воспользоваться для решения задачи Коши для каждого из уравнений (2.18). (Мы приведем формальные рассуждения; строгая проверка полученного результата не составит труда.)

Найдем ограниченное решение $\Phi(t, x)$ уравнения теплопроводности с линейным сносом

$$\partial_t \Phi = \partial_{xx}\Phi - kx\partial_x\Phi, \qquad k > 0 \tag{2.19}$$

для всех $t > 0$, такое, что $\Phi(0, x) = f(x)$, где функция $f(x)$ ограничена и непрерывна на вещественной оси. Формулу (2.19) можно представить в виде

$$\partial_t \Phi = (\mathscr{H}_{-2} - k\mathscr{H}^0 + (k/2)\mathscr{H}_0)\Phi, \quad \Phi(0, x) = f(x),$$

или

$$\Phi(t, x) = \exp[t(\mathscr{H}_{-2} - k\mathscr{H}^0 + (k/2)\mathscr{H}_0)] f(x).$$

Так как операторы $\mathscr{H}$ удовлетворяют тем же соотношениям коммутирования, что и операторы H, мы можем, используя выражения (2.7) и закон группового умножения в $SL(2, R)$, вычислить произведение экспонент операторов $\mathscr{K}_{-2}$, $\mathscr{K}^0$, $\mathscr{K}_0$. Находим

$$\exp\{t[\mathscr{K}_{-2} - k\mathscr{K}^0 + (k/2)\mathscr{K}_0]\} =$$
$$= \exp[(tk/2)\mathscr{K}_0]\exp(-tk\mathscr{K}_0)\exp\{[(1-e^{-2kt})/(2k)]\mathscr{K}_{-2}\} =$$
$$= \exp[(tk/2)\mathscr{K}_0]\exp\{[(e^{2kt}-1)/(2k)]\mathscr{K}_{-2}\}\exp(-tk\mathscr{K}^0). \quad (2.20)$$

Из (2.12), (2.15) и соотношения

$$\exp(-tk\mathscr{K}^0)\,h(x) = \exp(-tk/2)\,h(\exp(-tk)\,x)$$

(которое легко проверить) получаем решение задачи Коши для уравнения (2.19):

$$\Phi(t, x) = \left\{\frac{2\pi}{k}[1-\exp(-2kt)]\right\}^{-1/2} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{k[\exp(-tk)x - y]^2}{2[1-\exp(-2kt)]}\right\} f(y)\,dy. \quad (2.21)$$

Теперь изучим комплексное уравнение теплопроводности, т. е. уравнение (2.1) в предположении, что t и x принимают комплексные значения. Легко показать, что алгебра $\mathscr{G}_2^c$ симметрий этого уравнения шестимерна, причем ее базис дается формулами (2.2), а соотношения коммутирования имеют вид (2.3). Но теперь алгебра Ли образована всеми *комплексными* линейными комбинациями элементов базиса. Можно перейти к экспонентам элементов алгебры $\mathscr{G}_2^c$, чтобы получить локальную группу Ли G_2^c операторов, действующих на пространстве $\mathscr{F}$ функций $\Psi(t, x)$, аналитических в некоторой заданной области $\mathscr{D}$ комплексной плоскости (x, t). Действие этой группы определяется формулами (2.4)—(2.9), в которых параметры u, v, ρ могут принимать произвольные комплексные значения, а матрицы $A = \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ теперь могут быть произвольными элементами группы $SL(2, \mathbb{C})$ всех комплексных матриц с детерминантом, равным 1: $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Как обычно, операторы $\mathbf{T}(g)$, $g \in G_2$, отображают решения комплексного уравнения теплопроводности в решения. Кроме того, G_2^c действует на алгебру Ли $\mathscr{G}_2^c$ производных Ли посредством сопряженного представления

$$H \to H^g = \mathbf{T}(g)\,H\,\mathbf{T}^{-1}(g)$$

и разбивает $\mathscr{G}_2^c$ (так же как и $\mathscr{G}_2^c/\{H_0\}$) на G_2^c-орбиты. Нетрудно показать, что в $\mathscr{G}_2^c/\{H_0\}$ существуют в точности четыре орбиты с представителями H^0, $H_{-2}+H_1$, H_{-2}, H_{-1}. (Различные орбиты в $\mathcal{G}'_2/\{H_0\}$ с представителями H^0 и H_2+H_{-2} становятся эквивалентными, когда группа G'_2 при помощи комплексификации расширяется до группы G^c_2.) Поскольку $H_{-2}=(H_{-1})^2$, когда эти операторы действуют на решения комплексного уравнения теплопроводности, существуют только три допускающие R-разделение переменных системы координат, которые ассоциированы с четырьмя вышеуказанными орбитами. (Можно показать, что эти системы являются единственными R-разделимыми системами, допускаемыми комплексным уравнением теплопроводности. Теперь допустимая система координат $\{u, v\}$ такова, что функции $u(t, x)$, $v(t, x)$ являются комплексными аналитическими функциями от переменных t, x с ненулевым якобианом. Две системы координат, допускающие разделение переменных, считаются эквивалентными, если одну из них можно отобразить в другую с помощью некоторого элемента группы G^c_2.) Результаты приводятся в табл. 8, где $t=v$ для каждой системы координат $\{u, v\}$, допускающей разделение переменных.

аблица 8

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ДОПУСКАЮЩИЕ РЕШЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С R-РАЗДЕЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

	Оператор H	Координаты $\{u, v\}$	Множитель $R=e^{\mathcal{R}}$	Решения с разделенными переменными
1	H_{-1}, H_{-2}	$x=u$	$\mathcal{R}=0$	Произведение экспоненциальных функций
2	$H_{-2}+H_1$	$x=u+v^2/2$	$\mathcal{R}=-uv/2$	Произведение функции Эйри и экспоненциальной функции
3	H^0	$x=u\sqrt{v}$	$\mathcal{R}=0$	Произведение многочлена Эрмита и экспоненциальной функции

Заметим, что комплексное уравнение теплопроводности является комплексификацией как вещественного уравнения теплопроводности, так и уравнения Шредингера для свободной частицы. В вопросах разделения переменных комплексификация приводит к тому, что орбиты 1 и 2 табл. 6 и 7 соответствуют орбитам 1 и 2 табл. 8, в то время как орбиты 3 и 4 табл. 6 и 7 сливаются в одну орбиту 3 табл. 8.

Чтобы вывести тождества, связывающие решения от разделенных переменных комплексного уравнения теплопроводности, можно использовать метод Вейснера и рассмотреть разложение произвольной аналитической функции в ряд по функциям Эрмита (орбита 3 табл. 8). Подробные выкладки, выполненные Вейснером, можно найти в [35], а алгебраические связи с теорией Ли рассматриваются в [83]; поэтому здесь мы исследуем только некоторые вопросы теории этих разложений.

Из (2.10) и строки 3 табл. 8 видно, что решения уравнения (2.1) в виде многочленов Эрмита имеют место в координатах $\{s, z\}$, где

$$s = -i\sqrt{t}/2, \quad z = ix/(2\sqrt{t}). \tag{2.22}$$

В этих координатах операторы (2.2) принимают вид

$$H_2 = -2s^2(z\partial_z + s\partial_s + 1 - 2z^2), \quad H_1 = s(-\partial_z + 2z), \quad H_0 = 1,$$

$$H_{-1} = \frac{1}{4s}\partial_z, \quad H_{-2} = \frac{1}{8s^2}(z\partial_z - s\partial_s), \quad H^0 = s\partial_s + \frac{1}{2}, \tag{2.23}$$

а уравнение теплопроводности записывается в виде

$$(\partial_{zz} - 2z\partial_z + 2s\partial_s)\Phi(z, s) = 0. \tag{2.24}$$

Рассмотрим решения Φ уравнения (2.24), которые являются собственными функциями оператора H^0:

$$H^0\Phi = (n + {}^1/_2)\Phi \Rightarrow \Phi = f_n(z)s^n.$$

Подставляя эти решения в (2.24) и сравнивая полученные обыкновенные дифференциальные уравнения по переменной z с (Б.10), находим, что функции

$$\Phi_n(z, s) = H_n(z)s^n, \quad \tilde{\Phi}_n(z, s) = e^{z^2}H_{-n-1}(iz)s^n \tag{2.25}$$

образуют базис совместных решений, причем *функции Эрмита* $H_n(z)$ определяются соотношением

$$H_n(z) = 2^{n/2}\exp(z^2/2)D_n(\sqrt{2}z), \qquad n \in \mathbb{C}, \tag{2.26}$$

где $D_n(z)$ — функции параболического цилиндра. Если $n = 0, 1, \ldots$, то $H_n(z)$ — *многочлены Эрмита* (Б.12).

Чтобы понять значение полиномиальных решений, рассмотрим систему уравнений

$$H_{-1}\Phi = 0, \quad Q\Phi = 0,$$

решение которой $\Phi \equiv 1$ единственно с точностью до мультипликативной константы. Воспользуемся этим простым решением и знанием алгебры симметрий $\mathcal{G}_2^c$, чтобы построить другие решения. Если $\Phi(z, s)$ — аналитическая функция от переменных

(z, s), то, согласно стандартным фактам теории Ли,

$$\exp(\alpha H_1)\Phi(z, s) = \exp(2\alpha zs - \alpha^2 s^2)\Phi(z - \alpha s, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}(H_1)^n \Phi(z, s).$$

Более того, если Φ — решение комплексного уравнения теплопроводности, то $\exp(\alpha H_1)\Phi$ — также решение (в предположении, что это выражение имеет смысл). Полагая в предыдущей формуле $\Phi \equiv 1$, мы находим

$$\exp(2\alpha zs - \alpha^2 s^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}\Phi_n(z, s),$$
$$\Phi_0 = 1, \quad \Phi_n = (H_1)^n \Phi_0, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.27}$$

Теперь рассмотрим действие операторов симметрии H_j на Φ_n. Используя соотношение $[H_{-1}, H_1) = {}^1/_2 H_0$ и индукцию, находим $[H_{-1}, (H_1)^n] = (n/2)(H_1)^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Применяя это тождество к Φ_0, получаем

$$H_{-1}\Phi_n = (n/2)\Phi_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.28}$$

(Это выражение имеет смысл при $n = 0$, если положить $\Phi_n \equiv 0$ при $n < 0$.) Из определения Φ_n вытекает

$$H_1\Phi_n = \Phi_{n+1}, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{2.29}$$

и из соотношения $[H^0, H_1] = H_1$ получаем

$$H^0\Phi_n = (n + {}^1/_2)\Phi_n, \quad \Phi_n = f_n(z)s^n. \tag{2.30}$$

Из (2.30) следует, что $f_n(z)$ выражаются через функции Эрмита. В самом деле, сравнивая (2.28), (2.29) с рекуррентными соотношениями (Б.13), находим решение в виде многочленов Эрмита

$$\Phi_n(z, s) = H_n(z)s^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.31}$$

Подставляя (2.31) в (2.27) и полагая $s = 1$, получаем основную производящую функцию для многочленов Эрмита

$$\exp(2\alpha z - \alpha^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} H_n(z). \tag{2.32}$$

Используя соотношения коммутирования, получаем в дополнение к рекуррентным формулам (2.28), (2.29) для многочленов Эрмита следующие соотношения:

$$H_{-2}\Phi_n = (n/4)(n-1)\Phi_{n-2}, \quad H_2\Phi_n = \Phi_{n+2}, \quad H_0\Phi_n = \Phi_n, \tag{2.33}$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Можно получить целый ряд тождеств для многочленов Эрмита, если применить групповой оператор $\mathbf{T}(g)$, $g \in G_2^c$ (см. (2.9)) к элементу базиса Φ_m и полученный результат разложить по функциям базиса $\{\Phi_n\}$:

$$\mathbf{T}(g)\Phi_m(z, s) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{nm}(g)\Phi_n(z, s), \qquad m = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.34}$$

Эта процедура целесообразна при условии, что мы можем вычислить матричные элементы $T_{nm}(g)$. В случае, когда g близко к единичному элементу, эти матричные элементы можно вычислить, пользуясь непосредственно соотношениями (2.28)—(2.30) и (2.33), установленными при помощи алгебры Ли.

Чтобы выполнить эти вычисления, удобно построить более простую модель представления алгебры Ли. Возьмем $f_n(w) = w^n$ и введем операторы

$$\begin{gathered} H_{-1} = \frac{1}{2}\frac{d}{dw}, \quad H_1 = w, \quad H_2 = w^2, \\ H^0 = w\frac{d}{dw} + \frac{1}{2}, \quad H_0 = 1, \quad H_{-2} = \frac{1}{4}\frac{d^2}{dw^2}. \end{gathered} \tag{2.35}$$

Эти операторы удовлетворяют тем же соотношениям коммутирования, что и базис алгебры $\mathcal{G}_2^c$, а их действие на базисные функции $f_n(w)$ совпадает с действием на базис Φ_n, описываемым формулами (2.28)—(2.30) и (2.33). На основе этой модели определяем матричные элементы $T_{nm}(\alpha, \beta)$ и $R_{nm}(\alpha, \beta)$:

$$\exp(\alpha H_1)\exp(\beta H_2)f_m(w) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{nm}(\alpha, \beta) f_n(w), \tag{2.36а}$$

$$\exp(\alpha H_1)\exp(\beta H_{-1}) f_m(w) = \sum_{n=0}^{\infty} R_{nm}(\alpha, \beta) f_n(w). \tag{2.36б}$$

Иначе говоря, мы применяем операторы группы $\exp(\alpha H)\exp(\beta H')$ к базисной функции w^m и полученную функцию разлагаем в степенной ряд в окрестности точки $w = 0$. Эти матричные элементы не зависят от модели. Подсчитаем их, используя простую модель (2.35), а затем применим полученные результаты к уравнению теплопроводности. Элементарные факты теории Ли дают соотношения

$$\begin{gathered} \exp(\alpha H_1) f(w) = \exp(\alpha w) f(w), \quad \exp(\beta H_2) f(w) = \exp(\beta w^2) f(w), \\ \exp(\beta H_{-1}) f(w) = f(w + \beta/2). \end{gathered}$$

Таким образом, формулы (2.36) принимают вид

$$\exp(\alpha w + \beta w^2) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{nm}(\alpha, \beta)\, w^{n-m}, \tag{2.37а}$$

$$\exp(\alpha w)(w + \beta/2)^m = \sum_{n=0}^{\infty} R_{nm}(\alpha, \beta)\, w^n. \tag{2.37б}$$

Это известные производящие функции (2.32) и (7.30), причем

$$T_{nm}(\alpha, \beta) = \begin{cases} \dfrac{(-i\sqrt{\beta})^{n-m}}{(n-m)!} H_{n-m}\left(\dfrac{i\alpha}{2\sqrt{\beta}}\right), & n \geqslant m; \\ 0, & n < m; \end{cases} \tag{2.38}$$

$$R_{nm}(\alpha, \beta) = \left(\frac{\beta}{2}\right)^{m-n} L_n^{(m-n)}\left(\frac{-\alpha\beta}{2}\right),$$

где $L_n^{(\alpha)}(z)$ — многочлен Лагерра (см. (Б.9i)).

Теперь вычислим экспоненты оператора (2.23). В дополнение к формуле (2.27) получаем

$$\begin{aligned} &\exp(\alpha H_2)\Phi(z, s) = (1 + 4\alpha s^2)^{-1/2} \exp\left(\frac{4\alpha z^2 s^2}{1 + 4\alpha s^2}\right) \times \\ &\qquad \times \Phi\left[\frac{z}{(1 + 4\alpha s^2)^{1/2}}, \frac{s}{(1 + 4\alpha s^2)^{1/2}}\right], \qquad |4\alpha s^2| < 1, \\ &\exp(\beta H_{-2})\Phi(z, s) = \Phi\left[\frac{z}{(1 - \beta/4s^2)^{1/2}}, s\left(1 - \frac{\beta}{4s^2}\right)^{1/2}\right], \qquad |\beta/4s^2| < 1, \\ &\exp(\gamma H_{-1})\Phi(z, s) = \Phi(z + \gamma/4s, s), \\ &\exp(\delta H^0)\Phi(z, s) = \exp(\delta/2)\Phi(z, e^\delta s), \\ &\exp(\varphi H_0)\Phi(z, s) = e^\varphi \Phi(z, s). \end{aligned} \tag{2.39}$$

Подставляя (2.38) и (2.39) в (2.36), после некоторых упрощений находим

$$\begin{aligned} &(1 - s^2)^{-(m+1)/2} \exp\left[\frac{2zs\alpha - (z^2 + \alpha^2)s^2}{1 - s^2}\right] H_m\left(\frac{z - s\alpha}{(1 - s^2)^{1/2}}\right) = \\ &\qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s/2)^n}{n!} H_n(\alpha) H_{m+n}(z), \qquad |s| < 1, \end{aligned} \tag{2.40а}$$

$$\begin{aligned} &\exp(-s^2\alpha^2 - 2zs\alpha) H_m(z + s\alpha - \beta/s)\, s^m = \\ &\qquad = \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{m-n} L_n^{(m-n)}(-\alpha\beta) H_n(z)\, s^n. \end{aligned} \tag{2.40б}$$

Формула (2.40а) является обобщением теоремы Мелера [17], к которой она сводится в случае $m = 0$ $(H_0(z) = 1)$:

$$(1 - s^2)^{-1/2} \exp\left[\frac{2zs\alpha - (z^2 + \alpha^2) s^2}{1 - s^2}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s/2)^n}{n!} H_n(\alpha) H_n(z), \qquad |s| < 1. \tag{2.41}$$

При $\beta = 0$, $s = 1$ формула (2.40б) упрощается и сводится к соотношению

$$\exp(-\alpha^2 - 2z\alpha) H_m(z + \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n}{n!} H_{m+n}(z), \tag{2.42}$$

а при $\alpha = 0$, $s = 1$ эта формула приводит к соотношению

$$H_m(z - \beta) = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \beta^{m-n} H_n(z), \tag{2.43}$$

где $\binom{m}{n}$ — биномиальный коэффициент (см. (Б.1)). Вычисляя дополнительные матричные элементы $T_{mn}(g)$, $g \in G_2^c$, можно получить ряд новых производящих функций для многочленов Эрмита [35, 83].

Рассмотрим функции Эрмита — неполиномиальные решения комплексного уравнения теплопроводности, т. е. собственные функции $\Phi_n(z, s)$, (2.25), при $n \in \mathbb{C}$, $n \neq 0, 1, 2, \ldots$. В частности, исследуем собственные функции

$$\Phi_\lambda(z, s) = H_\lambda(z) s^\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{2.44}$$

где λ не является целым числом. Функция Φ_λ удовлетворяет уравнениям

$$H^0 \Phi_\lambda = (\lambda + {}^1/_2) \Phi_\lambda, \qquad Q\Phi_\lambda = 0. \tag{2.45}$$

Из соотношений коммутирования $[H^0, H_j] = jH_j$, $j = 0, \pm 1, \pm 2$, вытекает, что операторы H_j отображают решения уравнений (2.45), отвечающие собственному значению λ, в решения, отвечающие собственному значению $\lambda + j$. В самом деле, используя основные рекуррентные формулы (Б.13), нетрудно показать, что

$$\begin{gathered} H_{-1}\Phi_\lambda = (\lambda/2)\Phi_{\lambda-1}, \quad H_{-2}\Phi_\lambda = (\lambda/4)(\lambda - 1)\Phi_{\lambda-2}, \\ H_1\Phi_\lambda = \Phi_{\lambda+1}, \quad H_2\Phi_\lambda = \Phi_{\lambda+2}, \quad H_0\Phi_\lambda = \Phi_\lambda. \end{gathered} \tag{2.46}$$

Эти соотношения подобны соотношениям (2.28), (2.29), (2.33), за исключением того, что теперь λ — не целое число. Применяя операторы H_j к заданной функции Φ_λ, можно получить бесконечную последовательность решений $\Phi_{\lambda+n}$, где n пробегает все целые числа.

Для того чтобы изучить свойства преобразований этих решений под действием группы G_2^c, целесообразно рассмотреть операторы $\exp(\alpha H_1)\exp(\beta H_2)$, $\exp(\alpha H_1)\exp(\beta H_{-1})$ и $\exp(\alpha H_2)\exp(\beta H_{-2})$. (Действие произвольного элемента группы можно представить в виде произведения трех таких операторов и тривиального оператора $\exp(\gamma H^0)\exp(\delta H_0)$.) Матричные элементы определяются соотношениями

$$\exp(\alpha H_1)\exp(\beta H_2)\Phi_{\lambda+m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{T}_{nm}(\alpha, \beta)\Phi_{\lambda+n}, \tag{2.47а}$$

$$\exp(\alpha H_1)\exp(\beta H_{-1})\Phi_{\lambda+m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{R}_{nm}(\alpha, \beta)\Phi_{\lambda+n}, \tag{2.47б}$$

$$\exp(\alpha H_2)\exp(\beta H_{-2})\Phi_{\lambda+m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{S}_{nm}(\alpha, \beta)\Phi_{\lambda+n}. \tag{2.47в}$$

Из (2.46) легко видеть, что матричные элементы $\hat{T}_{nm}(\alpha, \beta)$ тождественны матричным элементам $T_{nm}(\alpha, \beta)$ (см. (2.38)), за исключением того, что теперь m и n могут принимать отрицательные целые значения. Таким образом, (2.47а) приводит к формуле, аналогичной (2.40а), в которой H_m заменено на $H_{\lambda+m}$, а H_{m+n} — на $H_{\lambda+m+n}$, причем m принимает любые целые значения. Теорема Мелера получает таким образом дальнейшее обобщение.

Для вычисления матричных элементов $\hat{R}_{nm}(\alpha, \beta)$ выберем более простую модель соотношений (2.46). Так, возьмем $h_{\lambda+m}(w) = w^m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$

$$H_1 = w, \quad H_{-1} = \frac{1}{2}\frac{d}{dw} + \frac{\lambda}{2w}, \quad H_0 = 1.$$

Тогда $[H_1, H_{-1}] = -{}^1/{}_2 H_0$, и в соответствии с (2.46)

$$H_1 h_{\lambda+m} = h_{\lambda+m+1}, \quad H_{-1} h_{\lambda+m} = \frac{\lambda+m}{2} h_{\lambda+m-1}.$$

В этой модели

$$\exp(\alpha H_1)\exp(\beta H_{-1}) h_{\lambda+m}(w) = \exp(\alpha w)(1 + \beta/2w)^{\lambda+m} w^m =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{R}_{nm}(\alpha, \beta) w^n. \tag{2.48}$$

Вычисляя коэффициент при w^n, находим

$$R_{nm}(\alpha, \beta) = (\beta/2)^{m-n} L_{\lambda+n}^{(m-n)}(-\alpha\beta/2), \tag{2.49}$$

где $L_\lambda^{(\nu)}(z)$ — обобщенная функция Лагерра

$$L_\lambda^{(\nu)}(z) = \frac{\Gamma(\nu+\lambda+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda+1)} {}_1F_1\left(\begin{matrix} -\lambda \\ \nu+1 \end{matrix}\middle| z\right). \tag{2.50}$$

Таким образом, (2.47б) принимает вид

$$\exp(-s^2\alpha^2 - 2zs\alpha)\, H_{\lambda+m}(z + s\alpha - \beta/s)\, s^m =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-\beta)^{m-n} L_{\lambda+n}^{(m-n)}(-\alpha\beta)\, H_{\lambda+n}(z)\, s^n, \qquad (2.51)$$

$$m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots.$$

Чтобы вычислить матричные элементы $\hat{S}_{nm}(\alpha, \beta)$, выберем иную модель:

$$h_{\lambda+m}(w) = \Gamma\left(\frac{\lambda+m+2}{2}\right) w^m, \quad H_2 = \frac{w^3}{2}\frac{d}{dw} + \frac{\lambda+2}{2} w^2,$$

$$H_{-2} = \frac{1}{2w}\frac{d}{dw} + \frac{\lambda-1}{2w^2}, \quad H^0 = w\frac{d}{dw} + \lambda + \frac{1}{2}.$$

Используя эти операторы, получаем

$$\exp(\alpha H_2)\exp(\beta H_{-2})\, h_{\lambda+m}(w) =$$

$$= \Gamma\left(\frac{\lambda+m+2}{2}\right) w^m (1 - \alpha w^2)^{-(\lambda+m+2)/2} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{\beta}{(1-\alpha\beta)\, w^2}\right)^{(\lambda+m-1)/2} (1 - \alpha\beta)^{(\lambda+m-1)/2} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{S}_{nm}(\alpha, \beta)\, \Gamma\left(\frac{\lambda+n+2}{2}\right) w^n,$$

$$|\alpha w^2| < 1, \quad |\beta| < |(1 - \alpha\beta)\, w^2|; \qquad (2.52)$$

таким образом,

$$S_{nm}(\alpha, \beta) = \frac{(1-\alpha\beta)^{(\lambda+m-1)/2}\, \alpha^{(n-m)/2}}{\Gamma((n-m+2)/2)} \times$$

$$\times {}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{\lambda+n+2}{2},\ \frac{1-\lambda-m}{2} \\ \frac{n-m+2}{2} \end{matrix} \middle| \frac{-\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\right], \quad \text{если } n - m \text{ четное,}$$

$$\hat{S}_{nm}(\alpha, \beta) = 0, \quad \text{если } n - m \text{ нечетное.} \qquad (2.53)$$

(Чтобы придать смысл этим выражениям при $m > n$, достаточно воспользоваться тем, что ${}_2F_1(a, b; c; z)/\Gamma(c)$ — целая функция от c.) Поэтому (2.47в) принимает вид

$$(1 + 4as^2)^{-(\lambda+m+1)/2}\left(1 - \alpha\beta - \frac{\beta}{4s^2}\right)^{(\lambda+m)/2} \exp\left(\frac{4az^2s^2}{1 + 4\alpha s^2}\right) \times$$

$$\times H_{\lambda+m}\left[z\,((1 + 4\alpha s^2)(1 - \alpha\beta - \beta/(4s^2)))^{-1/2}\right] s^m =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{S}_{nm}(\alpha, \beta)\, H_{\lambda+n}(z)\, s^n, \quad |\beta/(1 - \alpha\beta)| < |4s^2| < |\alpha|^{-1}. \qquad (2.54)$$

Теперь приведем пример простого применения метода Вейснера к случаю, когда коэффициенты разложений по многочленам

Эрмита нельзя вычислить только с использованием некоторой алгебры Ли. Рассмотрим функцию $\Psi(z, s) = \exp(-4H_{-2})\Phi_\lambda(z, s)$, где Φ_λ определяется формулами (2.25), (2.26), при условии, что $\lambda = n \in \mathbb{C}$. и $|s| < 1$; тогда

$$\Psi(z, s) = H_\lambda\left[\frac{sz}{(1+s^2)^{1/2}}\right](1+s^2)^{\lambda/2} = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)s^j, \quad |s| < 1. \tag{2.55}$$

(Заметим, что это разложение не является частным случаем (2.54).) Поскольку $Q\Psi = 0$, отсюда следует, что для любого j имеет место соотношение $Q(f_j(z)s^j) = 0$; следовательно, $f_j(z)$ является линейной комбинацией базисных функций Φ_j и $\tilde{\Phi}_j$ оператора H^0; см. (2.25). Более того, поскольку $H_\lambda(w)$ — целая функция от w, из (2.55) следует, что $f_j(z)$ содержит z в степени не выше z^j, откуда $f_j(z) = c_jH_j(z)$. Подставляя в (2.55) $z = w^{-1}$, $s = wv$ и затем устремляя w к нулю, получаем

$$H_\lambda(v) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(2v)^j.$$

Однако частный случай (2.51) при $\beta = -v$, $s = 1$, $m = 0$ дает

$$H_\lambda(z+v) = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\lambda}{j}H_{\lambda-j}(z)(2v)^j, \tag{2.56}$$

откуда $c_j = \binom{\lambda}{j}H_{\lambda-j}(0)$. Этот результат наводит на мысль, что существует более общая производящая функция. В самом деле, исследование выражения $\exp(4wH_{-1} - 4H_{-2})\Phi_\lambda$ приводит к производящей функции

$$(1+s^2)^{\lambda/2}H_\lambda\left(\frac{w+zs}{(1+s^2)^{1/2}}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\lambda}{j}H_{\lambda-j}(w)H_j(z)s^n, \tag{2.57}$$
$$|s| < 1.$$

Относительно вывода этого соотношения и многих других соотношений типа производящих функций для многочленов Эрмита см. [35]; некоторые из соотношений содержат разложения по базисам из функций Эйри.

2.3. Разделение переменных для уравнения Шредингера $(i\partial_t + \partial_{xx} - a/x^2)\Psi = 0$

Применим метод, изложенный в разд. 2.1, к уравнению Шредингера для изотропной свободной частицы

$$i\partial_t\Psi = -\partial_{xx}\Psi + \frac{a}{x^2}\Psi, \tag{3.1}$$

Здесь a — вещественная константа, отличная от нуля, t вещественно и $x > 0$. Как уже упоминалось в начале разд. 2.1, это уравнение получается, если при некоторых значениях $a > 0$ в уравнении Шредингера для свободной частицы, рассматриваемом в пространстве более высокой размерности, перейти к сферическим координатам и затем отделить угловые переменные (см., например, [72]). Здесь $x = r$ — радиальная координата, а параметр a принимает некоторые положительные значения. Мы покажем, что теоретико-групповой анализ уравнения (3.1) естественно приводит к уравнениям Шредингера для изотропного гармонического осциллятора и изотропного репульсивного осциллятора. Таким образом, наш анализ уравнений (1.2) и (3.1) охватит все семь потенциалов, перечисленных в табл. 5.

Прямые вычисления показывают, что комплексная алгебра симметрий уравнения (3.1) трехмерна и элементами базиса являются операторы

$$K_{-2} = \partial_t, \quad K_2 = -t^2\partial_t - tx\partial_x - t/2 + ix^2/4, \quad K^0 = 2t\partial_t + x\partial_x + {}^1/_2, \tag{3.2}$$

удовлетворяющие соотношениям коммутирования

$$[K^0, K_{\pm 2}] = \pm 2K_{\pm 2}, \quad [K_2, K_{-2}] = K^0.$$

Для иного базиса $\{L_j\}$, где

$$L_1 = K^0, \quad L_2 = K_{-2} + K_2, \quad L_3 = K_{-2} - K_2,$$

соотношения коммутирования принимают вид

$$[L_1, L_2] = -2L_3, \quad [L_3, L_1] = 2L_2, \quad [L_3, L_2] = -2L_1. \tag{3.3}$$

Сравнивая эти соотношения с (1.4), (1.5), (1.7), мы видим, что вещественной алгеброй Ли, порождаемой этим базисом, является $sl(2, R)$ и что действие соответствующей локальной группы $SL(2, R)$ на функции $\Phi(t, x)$ определяется оператором $\mathbf{T}(A)$ (см. (1.16)). Точное соответствие между группой и операторами алгебры Ли определяется соотношениями (1.17). (Заметим, однако, что в (1.16) мы должны требовать выполнения условия $x > 0$.)

Группа $SL(2, R)$ действует на $sl(2, R)$ посредством сопряженного представления и разбивает алгебру Ли на орбиты. Пусть

$$K = a_2K_2 + a_{-2}K_{-2} + a_0K^0 \in sl(2, R),$$

и пусть $\alpha = a_2a_{-2} + a_0^2$. Легко проверить, что α инвариантно относительно сопряженного действия и что K лежит на той же

$SL(2, R)$-орбите, что и один из следующих трех операторов:

$$\begin{aligned} &\text{Случай 1} \quad (\alpha < 0) \quad K_{-2} - K_2 = L_3; \\ &\text{Случай 2} \quad (\alpha > 0) \quad K^0; \\ &\text{Случай 3} \quad (\alpha = 0) \quad K_2. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Таким образом, имеется три орбиты.

Все системы координат, допускающие решения уравнения (3.1) с R-разделенными переменными, легко определяются в силу того, что системы, допускающие R-разделение переменных, должны также допускать R-разделение переменных и для уравнения свободной частицы (когда в (3.1) $a = 0$). Таким образом, возможными системами координат являются указанные в табл. 6 системы, которые должны удовлетворять дополнительному требованию, а именно должны допускать решения с R-разделенными переменными и тогда, когда к гамильтониану свободной частицы добавляется потенциал a/x^2. Мы видим, что при этом теряется только орбита 2 табл. 6. Результаты приводятся в табл. 9, причем, как обычно, $t = v$.

Заметим, что для каждой из орбит 1 и 2 мы привели по две системы координат: хотя эти системы и эквивалентны относи-

Таблица 9

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ДОПУСКАЮЩИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $(i\partial_t + \partial_{xx} - a/x^2)\,\Psi(t, x) = 0$ С R-РАЗДЕЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Оператор K	Координаты $\{u, v\}$	Множитель $R = e^{i\mathfrak{R}}$	Решения с разделенными переменными
1а K_{-2}	$x = u$	$\mathfrak{R} = 0$	Произведение функции Бесселя и экспоненциальной функции
1б K_2	$x = uv$	$\mathfrak{R} = u^2v/4$	Произведение функции Бесселя и экспоненциальной функции
2а K^0	$x = u\sqrt{v}$	$\mathfrak{R} = 0$	Произведение функции Уиттекера и экспоненциальной функции
2б $K_2 + K_{-2}$	$x = u\,[\pm(1 - v^2)]^{1/2}$	$\mathfrak{R} = \pm u^2v/4$	Произведение функции Уиттекера и экспоненциальной функции
3 $K_2 - K_{-2}$	$x = u\,(1 + v^2)^{1/2}$	$\mathfrak{R} = u^2v/4$	Произведение функции Лагерра и экспоненциальной функции

тельно $SL(2, R)$, они не эквивалентны относительно подгруппы «очевидных операторов симметрии», порожденной сдвигами по времени и растяжениями. Связь между этими операторами описывается соотношениями

$$J(K_2 + K_{-2})J^{-1} = K^0, \quad J^2K_{-2}J^{-2} = -K_2, \tag{3.5}$$

где J и J^2 даются формулами (1.21) и (1.22).

По аналогии с рассуждениями разд. 2.1 операторы (3.2) можно интерпретировать как операторы, образующие алгебру Ли кососимметрических операторов в гильбертовом пространстве $L_2(R_+)$ комплекснозначных интегрируемых с квадратом по Лебегу функций, определенных на положительной вещественной полуоси $0 < x < \infty$. Это достигается тем, что мы заменяем в выражениях (3.2) ∂_t на $i\partial_{xx} - ia/x^2$ и рассматриваем t как фиксированный параметр. Если полученные операторы умножить на i и рассматривать на множестве бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в R_+, то по теореме Вейля (см. [119]) эти операторы будут самосопряженными, если $a \geqslant {}^3/_4$. В дальнейшем в этом разделе будем считать последнее условие выполненным. Нетрудно видеть, что рассматриваемые операторы являются вещественными линейными комбинациями кососимметрических операторов

$$\mathscr{K}_{-2} = i\partial_{xx} - ia/x^2, \quad \mathscr{K}_2 = ix^2/4, \quad K^0 = x\partial_x + {}^1/_2, \tag{3.6}$$

к которым они сводятся при $t = 0$. Аналогичным образом кососимметрические операторы

$$\begin{gathered} \mathscr{L}_1 = \mathscr{K}^0 = x\partial_x + {}^1/_2, \quad \mathscr{L}_2 = \mathscr{K}_{-2} + \mathscr{K}_2 = i\partial_{xx} - ia/x^2 + ix^2/4, \\ \mathscr{L}_3 = \mathscr{K}_{-2} - \mathscr{K}_2 = i\partial_{xx} - ia/x^2 - ix^2/4 \end{gathered} \tag{3.7}$$

удовлетворяют соотношениям (3.3); L_j сводится к $\mathscr{L}_j$ при $t = 0$.

По аналогии с (1.26) находим, что

$$\begin{gathered} \exp(t\mathscr{K}_{-2})\,\mathscr{K}_j \exp(-t\mathscr{K}_{-2}) = K_j, \\ \exp(t\mathscr{K}_{-2})\,\mathscr{L}_j \exp(-t\mathscr{K}_{-2}) = L_j, \end{gathered} \tag{3.8}$$

где $\exp(t\mathscr{K}_{-2})$ — унитарный оператор в $L_2(R_+)$. Поэтому для произвольной $f \in L_2(R_+)$ функция $\Psi(t, x) = \exp(t\mathscr{K}_{-2})f(x)$ удовлетворяет уравнению $\partial_t\Psi = \mathscr{K}_{-2}\Psi$, или $i\partial_t\Psi = -\partial_{xx}\Psi + \Psi a/x^2$, и условию $\Psi(0, x) = f(x)$. Итак, унитарные операторы $\exp(K) = \exp(t\mathscr{K}_{-2})\exp(\mathscr{K})\exp(-t\mathscr{K}_{-2})$, $\mathscr{K} \in sl(2, R)$ отображают решения уравнения $\partial_t\Psi = \mathscr{K}_{-2}\Psi$ в решения.

Ниже мы докажем, что операторы $\mathscr{K}_{\pm 2}$, $\mathscr{K}^0$ порождают глобальное унитарное неприводимое представление универсальной накрывающей группы $\widetilde{SL}(2, R)$ группы $SL(2, R)$ при помощи операторов $\mathrm{U}(g)$, $g \in \widetilde{SL}(2, R)$, определенных на $L_2(R_+)$; соотношения (1.37)—(1.40) определяют параметризацию $SL(2, R)$.

Принимая это во внимание, мы видим, что операторы $\mathbf{T}(g) = \exp(t\mathscr{K}_{-2})\mathbf{U}(g)\exp(-t\mathscr{K}_{-2})$ определяют группу унитарных симметрий уравнения (3.1) с соответствующим инфинитезимальным оператором $K = \exp(t\mathscr{K}_{-2})\mathscr{K}\exp(-t\mathscr{K}_{-2})$. Это замечание устанавливает связь между нашей алгеброй Ли операторов $\mathscr{K}$ и уравнением Шредингера для изотропной свободной частицы.

Теперь рассмотрим оператор $\mathscr{L}_3 \in sl(2, R)$. Если $f \in L_2(R_+)$, то функция $\Psi(t, x) = \exp(t\mathscr{L}_3)f(x)$ удовлетворяет уравнению $\partial_t\Psi = \mathscr{L}_3\Psi$, или $i\partial_t\Psi = -\partial_{xx}\Psi + a\Psi/x^2 + x^2\Psi/4$, т. е. уравнению Шредингера для изотропного гармонического осциллятора. Унитарные операторы $\mathbf{V}(g) = \exp(t\mathscr{L}_3)\mathbf{U}(g)\exp(-t\mathscr{L}_3)$ являются симметриями этого уравнения, и соответствующие инфинитезимальные операторы $\exp(t\mathscr{L}_3)\mathscr{K}\exp(-t\mathscr{L}_3)$ можно записать в виде линейных дифференциальных операторов первого порядка по переменным x и t. Аналогичным образом, если $f \in L_2(R_+)$, то $\Psi(t, x) = \exp(t\mathscr{L}_2)f(x)$ удовлетворяет уравнению $\partial_t\Psi = \mathscr{L}_2\Psi$, или $i\partial_t\Psi = -\partial_{xx}\Psi + a\Psi/x^2 - x^2\Psi/4$, т. е. уравнению Шредингера для изотропного репульсивного осциллятора. Операторы $\mathbf{W}(g) = \exp(t\mathscr{L}_2)\mathbf{U}(g)\exp(-t\mathscr{L}_2)$ определяют группу симметрии этого уравнения; соответствующие инфинитезимальные операторы $\exp(t\mathscr{L}_2)\mathscr{K}\exp(-t\mathscr{L}_2)$ можно записать как дифференциальные операторы первого порядка по переменным x и t.

Из этих замечаний следует, что уравнения Шредингера с потенциалами (5)—(7) в табл. 5 имеют изоморфные алгебры операторов симметрии. Для каждого из этих уравнений алгебра операторов симметрии при $t = 0$ является алгеброй $sl(2, R)$ с базисом (3.6). Несмотря на то что эту алгебру мы впервые получили, рассматривая уравнение Шредингера с потенциалом (5), ее можно было бы также получить при изучении уравнения с потенциалом (6) или (7) табл. 5. Более того, мы показали, как отобразить решение одного из этих уравнений в решение другого.

Из (3.4) видно, что операторы $\mathscr{K}_{-2}$, $\mathscr{L}_3$, $\mathscr{L}_2$, соответствующие гамильтонианам изотропной свободной частицы, а также изотропных репульсивного и гармонического осцилляторов, лежат на тех же $SL(2, R)$-орбитах, что и три представителя орбит $\mathscr{K}_2$, $\mathscr{L}_3$ и $\mathscr{K}^0$ соответственно. Три наших гамильтониана соответствуют трем орбитам $sl(2, R)$. И в данном случае имеют место замечания к формулам (1.31)—(1.33) и инвариантность спектров операторов, лежащих на одной орбите; исключение составляет вид скалярного произведения

$$\langle h_1, h_2\rangle = \int_0^\infty h_1(x)\bar{h}_2(x)\,dx, \qquad h_j \in L_2(R_+). \tag{3.9}$$

Заметим, что если $\{f_\lambda\}$ — базис обобщенных собственных векторов некоторого оператора $\mathscr{K} \in sl(2, R)$, то $\{\Psi_\lambda(t, x) = \exp(t\mathscr{K}_{-2})f_\lambda(x)\}$ — базис собственных векторов оператора $K = \exp(t\mathscr{K}_{-2})\mathscr{K}\exp(-t\mathscr{K}_{-2})$; функция Ψ_λ удовлетворяет уравнению Шредингера для изотропной свободной частицы. Подобные замечания относятся и к остальным гамильтонианам.

Приведем сначала известные результаты, полученные для спектра оператора $\mathscr{L}_3$. Имеем уравнение для собственных функций

$$i\mathscr{L}_3 f = \lambda f, \quad (-\partial_{xx} + a/x^2 + x^2/4) f = \lambda f;$$

нормированные собственные функции имеют вид

$$\begin{gathered} f_n^{(3)}(x) = \left(\frac{n!\, 2^{-\mu/2}}{\Gamma(n+1+\mu/2)}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) x^{(\mu+1)/2} L_n^{(\mu/2)}\left(\frac{x^2}{2}\right), \\ \lambda = \lambda_n = -2n - \mu/2 - 1, \quad a = (\mu^2 - 1)/4, \quad \mu \geqslant 2, \\ n = 0, 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{3.10}$$

где $L_n^{(\alpha)}(z)$ — многочлен Лагерра (см. (Б.9i)). Функции $\{f_n^{(3)}\}$ образуют о. н. базис в $L_2(R_+)$ (см. [116]).

Используя известные рекуррентные формулы (4.9) для многочленов Лагерра, нетрудно проверить, что действие операторов $\mathscr{L}_j$ на базис $\{f_n^{(3)}\}$ определяет неприводимое представление алгебры $sl(2, R)$, принадлежащее к дискретной серии. Оператор Казимира будет иметь вид $^1/_2(\mathscr{L}_1^2 + \mathscr{L}_2^2 - \mathscr{L}_3^2) = -3/16 + a/4$ Известно [11, 120], что представление этой алгебры Ли расширяется до глобального унитарного неприводимого представления группы $\widetilde{SL}(2, R)$. Матричные элементы оператора $\mathbf{U}(g)$ в базисе $\{f_n^{(3)}\}$ можно найти в [120] или [88].

Теперь вычислим операторы $\mathbf{U}(g)$ непосредственно. Ясно, что

$$\exp(a\mathscr{K}^0)\, h(x) = \exp(a/2)\, h(e^a x),$$

$$\exp(a\mathscr{K}_2)\, h(x) = \exp(iax^2/4)\, h(x), \qquad h \in L_2(R_+).$$

Далее,

$$\exp(\beta\mathscr{L}_3)\, h(x) = \frac{\exp[\mp i\pi(\mu+2)/4]}{2|\sin\beta|} \text{ l. i. m.} \int_0^\infty (xy)^{1/2} \times$$

$$\times \exp\left(\pm\frac{i}{4}(x^2 + y^2)|\operatorname{ctg}\beta|\right) J_{\mu/2}\left(\frac{xy}{2|\sin\beta|}\right) h(y)\, dy,$$

$$0 < |\beta| < \pi, \tag{3.11}$$

где берется верхний знак при $\beta > 0$ и нижний знак при $\beta < 0$. Соотношение $\exp(\pi\mathscr{L}_3) = \exp[-i\pi(1 + \mu/2)]$ позволяет вычислить $\exp(\beta\mathscr{L}_3)$ при любом β. Для доказательства применим интегральный оператор (3.11) к $f_n^{(3)}$; далее, используя формулу

Хилле — Харди (4.27) и тот факт, что

$$\exp(\beta\mathscr{L}_3) f_n^{(3)} = \exp[-i\beta(2n + \mu/2 + 1)] f_n^{(3)},$$

проверим справедливость формулы (3.11). Поскольку (3.11) имеет место для элементов о. н. базиса и оператор $\exp(\beta\mathscr{L}_3)$ унитарен, соотношение (3.11) должно иметь место для всех $h \in L_2(R_+)$.

Формула группового умножения

$$\exp(\gamma\mathscr{K}_{-2}) = \exp(-\sin\theta\cos\theta\mathscr{K}_2)\exp(\ln\cos\theta\mathscr{K}^0)\exp(\theta\mathscr{L}_3),$$

где $\gamma = \operatorname{tg}\theta$, и соотношения (3.10), (3.11) позволяют получить формулу

$$\exp(\gamma\mathscr{K}_{-2}) h(x) = \frac{\exp[\mp i\pi(\mu+2)/4}{2|\gamma|} \text{ l. i. m.} \int_0^\infty (xy)^{1/2} \times$$
$$\times \exp\left(i\frac{x^2+y^2}{4\gamma}\right) J_{\mu/2}\left(\frac{xy}{2|\gamma|}\right) h(y)\,dy, \quad (3.12)$$

где берется верхний знак при $\gamma > 0$ и нижний знак при $\gamma < 0$. Аналогичные теоретико-групповые соотношения дают

$$\exp(\varphi\mathscr{L}_2) h(x) = \frac{\exp[\mp i\pi(\mu+2)/4]}{2|\operatorname{sh}\varphi|} \text{ l. i. m.} \int_0^\infty (xy)^{1/2} \times$$
$$\times \exp\left(\frac{i}{4}(x^2+y^2)\operatorname{cth}\varphi\right) J_{\mu/2}\left(\frac{xy}{2|\operatorname{sh}\varphi|}\right) h(y)\,dy. \quad (3.13)$$

Из (3.12) находим, что базисные функции $f_n^{(3)}(x)$ отображаются в о. н. базисные функции $\Psi_n^{(3)}(t, x) = \exp(t\mathscr{K}_{-2}) f_n^{(3)}(x)$:

$$\Psi_n^{(3)}(t, x) = (-2)^n \exp\left[\pm i\pi\frac{\mu+2}{4}\right]\left(\frac{x^2}{1+t^2}\right)^{(\mu+1)/4} \times$$
$$\times (t-i)^{-\mu/4-3/4-n}(t+i)^{\mu/4+1/4+n}\exp\left[\frac{x^2(it-1)}{4(1+t^2)}\right] L_n^{(\mu/2)}\left(\frac{x^2}{2(1+t^2)}\right),$$
$$t \neq 0; \quad (3.14)$$

эти функции суть решения уравнения (3.1) с R-разделенными переменными. (Формулу (3.14) можно получить на основании того, что функции $\Psi_n^{(3)}$ — решения с R-разделенными переменными вида 3 в табл. 9.)

Заметим, что $SL(2, R)$-орбита, содержащая оператор $\mathscr{L}_2$ (изотропный репульсивный осциллятор), также содержит оператор $\mathscr{K}^0$, и поэтому рассмотрим только спектральную теорию оператора $\mathscr{K}^0$. Эти результаты достаточно известны [37]. Уравнение для определения собственных функций имеет вид

$$i\mathscr{K}^0 f = \lambda f, \quad \mathscr{K}^0 = x\partial_x + {}^1/_2.$$

Известно, что спектр этого оператора непрерывен и однократно покрывает всю вещественную ось. Обобщенные собственные функции имеют вид

$$f_\lambda^{(2)}(x) = (2\pi)^{-1/2} x^{i\lambda - 1/2}, \quad -\infty < \lambda < \infty, \quad \langle f_\lambda^{(2)}, f_\zeta^{(2)} \rangle = \delta(\lambda - \zeta). \tag{3.15}$$

Используя (3.12) и разделяя переменные, находим функцию $\Psi_\lambda^{(2)}(t, x) = \exp(t\mathscr{H}_{-2})\, f_\lambda^{(2)}(x)$:

$$\Psi_\lambda^{(2)}(t, x) = (2\pi)^{-1/2}\,\Gamma\Big(\frac{i\lambda}{2} - \frac{\mu}{4} + \frac{1}{2}\Big) \exp\Big[-\frac{\pi}{4}\Big(\frac{i\mu}{2} + i - \lambda\Big)\Big] 2^{i\lambda - \mu/2 - 1} \times$$
$$\times t^{i\lambda/2 - 1/4} \Big(\frac{x^2}{t}\Big)^{(\mu+1)/4} L_{i\lambda/2 - (\mu+1)/2}^{(\mu/2)}\Big(\frac{ix^2}{4t}\Big), \qquad t > 0; \tag{3.16}$$

$$\Psi_\lambda^{(2)}(-t, x) = \overline{\Psi}_{-\lambda}^{(2)}(t, x).$$

Отсюда следует, что базисные функции удовлетворяют соотношению

$$\langle \Psi_\lambda^{(2)}(t, \cdot),\ \Psi_\zeta^{(2)}(t, \cdot) \rangle = \delta(\lambda - \zeta)$$

и что по ним можно осуществить разложение любого элемента $h \in L_2(R_+)$.

Наконец, орбита, содержащая $\mathscr{H}_{-2}$ и соответствующая уравнению для изотропной свободной частицы, содержит также оператор $\mathscr{H}_2$. Спектральная теория оператора $\mathscr{H}_2$ элементарна, поскольку в нашей реализации этот оператор уже диагонализирован. Обобщенные собственные функции имеют вид (символически)

$$f_\lambda^{(1)}(x) = \delta(x - \lambda), \qquad i\mathscr{H}_2 f_\lambda^{(1)} = (\lambda^2/4)\, f_\lambda^{(1)}, \qquad \lambda \geqslant 0. \tag{3.17}$$

Спектр непрерывен и однократно покрывает положительную вещественную полуось. Мы имеем $\Psi_\lambda^{(1)}(t, x) = \exp(t\mathscr{H}_{-2})\, f_\lambda^{(1)}(x)$, или

$$\Psi_\lambda^{(1)}(t, x) = \frac{\exp[\mp i\pi(\mu + 2)/4]}{2\,|t|} (x\lambda)^{1/2} \exp\Big(\frac{i(x^2 + \lambda^2)}{4t}\Big) J_{\mu/2}\Big(\frac{x\lambda}{2\,|t|}\Big), \tag{3.18}$$

причем $\langle \Psi_\lambda^{(1)}, \Psi_\zeta^{(1)} \rangle = \delta(\lambda - \zeta)$. Разложение по элементам базиса $\{\Psi_\lambda^{(1)}\}$ эквивалентно обратному преобразованию Ганкеля (см. [52]). Функции $\Psi_\lambda^{(1)}$ являются базисными функциями оператора K_2.

Для каждого из наших базисов существует непрерывный аналог производящей функции вида (1.55), где в данном случае

$$k(t, x, y) = \frac{\exp[\pm i\pi(\mu + 2)/4}{2\,|t|} (xy)^{1/2} \exp\Big[\frac{i(x^2 + y^2)}{4t}\Big] J_{\mu/2}\Big(\frac{xy}{2\,|t|}\Big) \tag{3.19}$$

(см. [58]).

Функции $\langle f_\lambda^{(i)}, f_\zeta^{(j)}\rangle$ имеют тот же самый смысл, что и аналогичные функции, описанные в разд. 2.1. В силу простоты базиса $\{f_\lambda^{(1)}\}$ имеется единственный нетривиальный случай:

$$\langle f_n^{(3)}, f_\lambda^{(2)}\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma(n+1+\mu/2)}{\pi n!}2^{\mu/2-2i\lambda-1}\right]^{1/2}\frac{\Gamma(-i\lambda/2+\mu/4+1/2)}{\Gamma(1+\mu/2)}\times$$
$$\times {}_2F_1\left(\begin{matrix}-n, i\lambda/2+\mu/4+1/2\\ 1+\mu/2\end{matrix}\middle| 2\right). \quad (3.20)$$

В частности, отметим, что функции $\langle f_\lambda^{(i)}, f_\zeta^{(j)}\rangle$ зависят от представителей $f_\lambda^{(i)}, f_\zeta^{(j)}$, выбранных на каждой орбите. Наиболее общий способ определить эти функции состоит в изучении матричных элементов смешанных базисов $\langle f_\lambda^{(i)}, \mathbf{U}(g) f_\zeta^{(j)}\rangle$, $g \in \widetilde{SL}(2, R)$. Некоторые из этих элементов подсчитаны в работе [22].

2.4. Комплексное уравнение $(\partial_\tau - \partial_{xx} + a/x^2)\Phi(\tau, x) = 0$

В этом разделе мы рассмотрим комплексификацию уравнения (3.1). Теперь переменные t и x могут принимать комплексные значения, а константа a может быть любым заданным комплексным числом. Введя новую переменную $\tau = it$, уравнение (3.1) можно записать в виде

$$(\partial_\tau - \partial_{xx} + a/x^2)\Phi(\tau, x) = 0. \quad (4.1)$$

Легко видеть, что комплексная алгебра симметрий уравнения (4.1) трехмерна и что в качестве элементов базиса можно взять операторы

$$J^+ = \tau^2\partial_\tau + \tau x\partial_x + \tau/2 + x^2/4,$$
$$J^- = -\partial_\tau, \quad J^0 = i\partial_\tau + {}^1\!/_2 x\partial_x + {}^1\!/_4, \quad (4.2)$$

для которых имеют место соотношения коммутирования

$$[J^0, J^\pm] = \pm J^\pm, \quad [J^+, J^-] = 2J^0. \quad (4.3)$$

Ниже мы покажем, что эта алгебра Ли изоморфна алгебре $sl(2, \mathbb{C})$. Поэтому, вычисляя экспоненты операторов (4.2), можно с помощью операторов $\mathbf{T}(A)$, $A \in SL(2, \mathbb{C})$, действующих на пространстве решений уравнения (4.1), получить локальное представление группы $SL(2, \mathbb{C})$. Более того, очевидно, что группа $SL(2, \mathbb{C})$ действует на алгебру симметрий $sl(2, \mathbb{C})$ посредством сопряженного представления и разлагает эту алгебру на $SL(2, \mathbb{C})$-орбиты. Непосредственные вычисления показывают, что в $sl(2, \mathbb{C})$ существуют точно две орбиты, представителями которых являются операторы J^- и J^0. (Две орбиты алгебры $sl(2, R)$ (см. (3.4)) с представителями $K_{-2} - K_2$ и K^0 принадлежат орбите в $sl(2, \mathbb{C})$ с представителем J^0, орбита же с представителем K_2 принадлежит комплексной орбите с представителем J^- (а также орбите с представителем J^+).) Подобным образом можно показать, что уравнение (4.1) допускает решения с R-разделенными переменными в точности в двух комплексных аналитических системах координат. (Как обычно, мы считаем две системы эквивалентными, если одну из них можно отобразить в другую при помощи одного из операторов $\mathrm{T}(A)$, $A \in SL(2, \mathbb{C})$.) В табл. 10 представлены системы координат, допускающие разделение переменных.

Таблица 10

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ДОПУСКАЮЩИЕ РЕШЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО УРАВНЕНИЯ $(\partial_\tau - \partial_{xx} + a/x^2)\,\Phi = 0$ С R-РАЗДЕЛЕННЫМИ ПЕГЕМЕННЫМИ

Оператор J	Координаты $\{u, v\}$	Множитель R	Решения с разделенными переменными
1 J^-	$x = u,\ \tau = v$	$R = 1$	Произведение функции Бесселя и экспоненциальной функции
2 J^0	$x = u\sqrt{v},\ \tau = v$	$R = 1$	Произведение многочлена Лагерра и экспоненциальной функции

Для того чтобы вывести соотношения, связывающие различного рода решения уравнения (4.1) с разделяющимися переменными, можно использовать метод Вейснера и рассмотреть разложение произвольной аналитической функции в ряд по функциям Лагерра (орбита 2). Эти результаты подробно описаны в [83, гл. 5], и поэтому наше изложение будет весьма кратким.

Как подсказывает соотношение (3.16) и строка 2 табл. 10, решения уравнения (4.1), выражающиеся через функции Лагерра, соответствуют координатам $\{s, z\}$, где

$$s = \tau, \qquad z = -x^2/4\tau. \tag{4.4}$$

Преобразуем для удобства уравнение (4.1), которое мы записываем в виде $Q\Psi = 0$, к эквивалентному виду $Q'\Psi' = 0$, где $\Psi' = R^{-1}\Psi = s^{1/4}z^{\beta}\Psi$ и $Q' = R^{-1}QR$. Алгебра симметрии нового уравнения образована операторами $J' = R^{-1}JR$, где J принадлежит алгебре симметрии уравнения (4.1). Явный вид этих операторов дается следующими соотношениями:

$$J'^{+} = s^2\partial_s + sz\partial_z - sz - ls, \quad J'^{-} = -\partial_s + \frac{z}{s}\partial_z - l/s, \quad J'^{0} = s\partial_s,$$
$$\beta = l + {}^1/_4, \quad a = 4({}^1/_{16} - l^2), \qquad l \in \mathbb{C}. \tag{4.5}$$

Дифференциальное уравнение $Q'\Psi' = 0$ запишется следующим образом:

$$[z\partial_{zz} - (2l + z)\partial_z + s\partial_s + l]\,\Psi'(z, s) = 0. \tag{4.6}$$

(Ниже штрих будет опущен, поскольку мы будем иметь дело только с операторами (4.5) и уравнением (4.6).)

Теперь рассмотрим решения Ψ уравнения (4.6), которые являются собственными функциями оператора J^0:

$$J^0\Psi = m\Psi \Rightarrow \Psi = f_m(z)\,s^m.$$

Подставив это решение в (4.6) и разделив результат на s^m, получим обыкновенное дифференциальное уравнение вида (Б.7). Таким образом, $f_m(z)$ являются конфлюентными гипергеометрическими функциями. В частности, функции вида

$$\Psi_m(z, s) = L_{m+l}^{(-2l-1)}(z)\,s^m \tag{4.7}$$

удовлетворяют этим уравнениям.

Заметим, что при $l \in \mathbb{C}$, $2l \neq 0, 1, 2, \ldots$, и $m = -l + n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, решения Ψ_m хорошо известны и сводятся к многочленам от z, т. е. многочленам Лагерра $L_n^{(-2l-1)}(z)$ (см. (Б.9i)). Чтобы выяснить значение этих полиномиальных решений, рассмотрим систему уравнений

$$J^{-}\Phi = 0, \qquad J^0\Phi = -l\Phi,$$

решение которой $\Phi(z, s) = s^{-l}$ единственно с точностью до мультипликативной константы. Легко проверить, что Φ также удовлетворяет уравнению (4.6). Зная алгебру симметрии уравнения (4.6), можно построить новые решения. Если $\Phi(z, s)$ — произвольная аналитическая функция от z и s, то простое следствие теории Ли дает соотношение

$$\exp(\alpha J^{+})\,\Phi(z, s) = (1 - \alpha s)^l \exp\left[-\frac{\alpha z s}{(1 - \alpha s)}\right]\Phi\left(\frac{z}{1 - \alpha s}, \frac{s}{1 - \alpha s}\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}(J^{+})^n\,\Phi(z, s), \qquad |\alpha s| < 1. \tag{4.8}$$

Кроме того, если Φ — решение уравнения (4.1), то $(J^{+})^n\Phi$ и $\exp(\alpha J^{+})\Phi$ — также решения, коль скоро они определены. Подставляя в (4.8) наше решение $\Phi = s^{-l}$, получаем

$$(1-\alpha s)^{2l} s^{-l} \exp[-\alpha z s/(1-\alpha s)] = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \Phi_n(z, s),$$
$$\Phi_n = (1/n!)(J^+)^n \Phi, \quad \Phi_0 = \Phi, \quad |\alpha s| < 1. \tag{4.8'}$$

На основании определения Φ_n и соотношений коммутирования (4.3) простое вычисление с применением индукции дает рекуррентные соотношения

$$J^0\Phi_n = (n-l)\Phi_n, \quad J^+\Phi_n = (n+1)\Phi_{n+1}, \quad J^-\Phi_n = (2l-n+1)\Phi_{n-1}, \tag{4.9}$$
$$\Phi_{-1} \equiv 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Далее, сравнивая эти результаты с рекуррентными формулами (Б.8) и учитывая, что $\Phi_0 = s^{-l}$, получаем

$$\Phi_n(z, s) = \Psi_{n-l}(z, s) = L_n^{(-2l-1)}(z) s^{n-l}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{4.10}$$

Таким образом, (4.8′) приводит к производящей функции для многочленов Лагерра:

$$(1-\alpha)^{2l} \exp[-\alpha z/(1-\alpha)] = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n L_n^{(-2l-1)}(z), \qquad |\alpha| < 1. \tag{4.11}$$

Для того чтобы вывести еще несколько тождеств для многочленов Лагерра, нужно найти операторы $\mathbf{T}(A)$, определяющие действие локальной группы симметрии $SL(2, \mathbb{C})$ на пространство решений уравнения (4.6). Напомним, что $SL(2, \mathbb{C})$ является комплексной группой Ли комплексных (2×2)-матриц A с детерминантом $+1$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc = 1. \tag{4.12}$$

Алгебра Ли $sl(2, \mathbb{C})$ этой группы, как известно, состоит из всех комплексных (2×2)-матриц A с нулевым следом

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}.$$

В качестве базиса алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ можно принять матрицы

$$\mathcal{J}^+ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}^0 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

удовлетворяющие следующим соотношениям коммутирования:

$$[\mathcal{J}^0, \mathcal{J}^\pm] = \pm \mathcal{J}^\pm, \quad [\mathcal{J}^+, \mathcal{J}^-] = 2\mathcal{J}^0.$$

Поскольку эти соотношения совпадают с соотношениями (4.3), алгебра симметрии уравнения (4.1) изоморфна алгебре $sl(2, \mathbb{C})$.

Простыми вычислениями (см. [83, разд. 1.4]) можно показать, что если $A \in SL(2, \mathbb{C})$ имеет вид (4.12) и $d \neq 0$, то

$$\begin{gathered} A = \exp(\beta \mathcal{J}^+) \exp(\gamma \mathcal{J}^-) \exp(\tau \mathcal{J}^0), \\ e^\tau = d^{-2}, \quad \beta = -b/d, \quad \gamma = -cd. \end{gathered} \tag{4.14}$$

Эти соотношения помогают параметризовать окрестность единицы в $SL(2, \mathbb{C})$. Теперь вычислим экспоненты операторов (4.5), с тем чтобы найти соответствующее локальное представление группы $SL(2, \mathbb{C})$ посредством операторов $\mathrm{T}(A)$, действующих на аналитические функции $\Phi(z, s)$. В соответствии с (4.14) имеем

$$\mathrm{T}(A) = \exp(-(b/d) J^+) \exp(-cdJ^-) \exp(-2(\ln d) J^0) \tag{4.15}$$

для элемента A, лежащего в малой окрестности единичного элемента. Результат вычисления $\exp(\alpha J^+)$ дается формулой (4.8). Аналогичные вычисления дают

$$\begin{aligned} &\exp(\gamma J^-)\Phi(z, s) = (1 - \gamma/s)^l \, \Phi\left(\frac{z}{1 - \gamma/s}, \; s - \gamma\right), \\ &\exp(\tau J^0)\Phi(z, s) = \Phi(z, e^\tau s). \end{aligned}$$

Взяв композицию этих операторов, получим

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(A)\Phi(z, s) = (d + bs)^l \left(a + \frac{c}{s}\right)^l \exp\left[\frac{bzs}{d + bs}\right] \times \\ \times \Phi\left(\frac{zs}{(as + c)(d + bs)}, \; \frac{as + c}{d + bs}\right), \qquad \left|\frac{c}{as}\right| < 1, \quad \left|\frac{bs}{d}\right| < 1, \end{aligned} \tag{4.16}$$

причем оператор $\mathrm{T}(A)$ определен для всех таких аналитических функций $\Phi(z, s)$, для которых правая часть имеет смысл. Заметим, что $\mathrm{T}(A)$ отображает аналитические решения уравнения (4.6) в решения же.

Применим оператор $\mathrm{T}(A)$ к Φ_m и результат разложим по элементам базиса $\{\Phi_n\}$:

$$\mathrm{T}(A)\Phi_m(z, s) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{nm}(A)\Phi_n(z, s). \tag{4.17}$$

Если матрица A близка к единичной, то матричные элементы $T_{nm}(A)$ можно определить непосредственно из соотношений (4.9). Вычисления упрощаются, если построить иную модель представления нашей алгебры Ли (4.9). Следуя [83, разд. 5.2], возьмем базисные функции в виде

$$f_n(w) = \frac{1}{n!}\Gamma(n - 2l)\, w^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

и введем следующие операторы:

$$J^+ = w^2 \frac{d}{dw} - 2lw, \qquad J^- = -\frac{d}{dw}, \qquad J^0 = w\frac{d}{dw} - l. \tag{4.18}$$

Легко проверить, что для этих операторов выполняются соотношения (4.3), а новые базисные функции и операторы удовлетворяют (4.9). Далее, применяя (4.15), можно показать, что соответствующее действие локальной группы $SL(2, \mathbb{C})$, определяемое операторами $\mathrm{T}(A)$, можно представить в виде

$$\mathrm{T}(A) f(w) = (bw + d)^{2l} f\left(\frac{aw + c}{bw + d}\right), \qquad |bw/d| < 1. \tag{4.19}$$

Матричные элементы определяются соотношениями

$$\mathrm{T}(A) f_m(w) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{nm}(A) f_n(w),$$

или

$$d^{2l-m}(1 + bw/d)^{2l-m}(aw + c)^m \Gamma(m - 2l)/m! =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} T_{nm}(A)\Gamma(n - 2l) w^n/n!, \qquad |bw/d| < 1. \tag{4.20}$$

Раскладывая левую часть формулы (4.20) в степенной ряд по w и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях w^n, получаем

$$T_{nm}(A) = \frac{a^n d^{2l-m} c^{m-n} \Gamma(m - 2l)}{\Gamma(m - n + 1)\Gamma(n - 2l)} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, m - 2l \\ m - n + 1 \end{matrix} \middle| \frac{bc}{ad}\right). \tag{4.21}$$

Более того, $\mathrm{T}(AA') = \mathrm{T}(A)\mathrm{T}(A')$, если A и A' принадлежат некоторой малой окрестности единицы группы $SL(2, \mathbb{C})$, и поэтому

$$T_{nm}(AA') = \sum_{k=0}^{\infty} T_{nk}(A) T_{km}(A').$$

Подставляя в (4.17) функции (4.10) и используя (4.21), получаем тождество

$$\left(1 + \frac{bs}{d}\right)^{2l-m}\left(1 + \frac{c}{as}\right)^m \exp\left[\frac{bzs}{d + bs}\right] \times$$
$$\times L_m^{(-2l-1)}\left[\frac{z}{1 + bc}\left(1 + \frac{c}{as}\right)^{-1}\left(1 + \frac{bs}{d}\right)^{-1}\right] =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{m!}\left(-\frac{sb}{d}\right)^{n-m} \Gamma(n-m+1)^{-1} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -m, n-2l \\ n - m + 1 \end{matrix} \middle| \frac{bc}{ad}\right) L_n^{(-2l-1)}(z),$$
$$|bs/d| < 1, \quad d = (1 + bc)/a, \tag{4.22}$$

справедливое для всех целых $m \geqslant 0$ и всех $l \in \mathbb{C}$, таких, что $2l \neq 0, 1, 2, \ldots$. (В формулах (4.21) и (4.22) используется тот факт, что ${}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha, \beta \\ \gamma\end{matrix}\middle| z\right)/\Gamma(\gamma)$ — целая функция от α, β, γ, и это позволяет придать им смысл, когда γ — отрицательное целое число.)

Если $a = d = s = 1$, $c = 0$, то последнее соотношение упрощается и принимает вид

$$(1-b)^{2l-m} \exp[-bz/(1-b)]\, L_m^{(-2l-1)}(z/(1-b)) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{n} b^n L_{m+n}^{(-2l-1)}(z), \qquad |b| < 1.$$

При $m = 0$ это выражение сводится к (4.11) с $\alpha = b$. Если $a = d = s = 1$, $b = 0$, то формула (4.22) упрощается и принимает вид

$$(1+c)^m L_m^{(-2l-1)}\left(\frac{z}{1+c}\right) = \sum_{n=0}^{m} \binom{m-2l-1}{n} c^n L_{m-n}^{(-2l-1)}(z).$$

Аналогичные соотношения можно вывести и для базисных функций (4.7), которые не являются многочленами от z, т. е. в случае, когда $m + l \neq 0, 1, 2, \ldots$. По поводу этих результатов см. [83, разд. 5.8].

Используя возможности метода Вейснера в полной мере, можно вывести более общие соотношения для функций Лагерра. Если $\Psi(z, s)$ — аналитическое решение уравнения (4.6), разлагающееся в сходящийся ряд Лорана

$$\Psi(z, s) = \sum_m f_m(z) s^m,$$

то его коэффициенты $f_m(z)$ суть конфлюентные гипергеометрические функции (функции Лагерра), т. е. линейные комбинации функций $L_{m+l}^{(-2l-1)}(z)$ и $z^{2l+1} L_{m-l-1}^{(2l+1)}(z)$, где $2l$ не является целым числом. Если дополнительно потребовать, чтобы функция Ψ была аналитической при $z = 0$, то $f_m(z) = c_m L_{m+l}^{(-2l-1)}(z)$, $c_n \in \mathbb{C}$. Таким образом,

$$\Psi(z, s) = \sum_m c_m L_{m+l}^{(-2l-1)}(z)\, s^m. \tag{4.23}$$

Формула (4.22) является примером подобного соотношения, и, воспользовавшись методами алгебр Ли, можно вычислить коэффициенты c_m в явном виде. Однако это уже неверно в случае $T(A)\Psi_p$, $p \in \mathbb{C}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а Ψ_p дается выражением (4.7). В этом случае мы имеем

$$s^{-l}(1-s)^{l-p}\exp\left[-\frac{zs}{1-s}\right]L_{p+l}^{(-2l-1)}\left(\frac{zs}{1-s}\right) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} c_{pn}L_n^{(-2l-1)}(z)\, s^{-l+n}, \qquad |s| < 1.$$

Это соотношение не имеет вид соотношения (4.22), поскольку A отграничено от единицы и p не обязательно целое число. Полагая $z = 0$, легко вычислить коэффициенты c_{pn}. В результате получаем производящую функцию для многочленов Лагерра

$$(1-s)^{l-p}\exp\left[-\frac{zs}{1-s}\right]L_{p+l}^{(-2l-1)}\left(\frac{zs}{1-s}\right) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}(-s)^n \frac{\Gamma(l-p+1)\,\Gamma(p-l)}{\Gamma(n-2l)\,\Gamma(l-p-n+1)\,\Gamma(l+p+1)} L_n^{(-2l-1)}(z), \qquad (4.24)$$

$$|s| < 1.$$

В качестве следующего примера рассмотрим (4.23), когда функция Ψ является собственной функцией оператора J^-. Поскольку оператор J^- лежит на орбите 1 (см. табл. 10), в качестве Ψ можно взять решение с разделяющимися переменными в координатах x, τ и выразить его через функции Бесселя (следует учесть переход от уравнения (4.1) к (4.6)). Таким образом, совместное решение Ψ уравнения (4.6) и уравнения $J^-\Psi = -\Psi$ имеет вид

$$\Psi(z, s) = s^{-l}e^{s}(zs)^{(2l+1)/2}J_{-2l-1}\left(2(zs)^{1/2}\right). \qquad (4.25)$$

Более того, функция

$$\Psi' = \mathbf{T}(A)\,\Psi(z, s) = s^{-l}(d+bs)^{-1}\exp\left[\frac{(a+bz)s+c}{d+bs}\right]\times \\ \times (zs)^{(2l+1)/2}J_{-2l-1}\left(\frac{2(zs)^{1/2}}{d+bs}\right), \qquad \left|\frac{bs}{d}\right| < 1,$$

где матрица A дается формулой (4.12), также удовлетворяет уравнению (4.6) и уравнению $(J^-)'\Psi' = -\Psi'$, в котором

$$(J^-)' = \mathbf{T}(A)\,J^-\mathbf{T}(A^{-1}) = -b^2J^+ + d^2J^- - 2bdJ^0.$$

Поскольку $w^{-m}J_m(w)$ — целая функция от w при любом $m \in \mathbb{C}$, функция $\Psi'(z, s)$ имеет лорановское разложение по степеням s следующего вида:

$$\Psi'(z, s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(A)\,L_n^{(-2l-1)}(z)\,s^n, \qquad |bs/d| < 1.$$

Полагая $z = 0$, находим

$$(d + bs)^{2l} \exp\left(\frac{as + c}{d + bs}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(A)\, \Gamma(n - 2l) \frac{s^n}{n!}, \qquad \left|\frac{bs}{d}\right| < 1;$$

сравнивая это выражение с (4.22) при $m = 0$, получаем

$$c_n(A) = \exp\left(\frac{ac}{1 + bc}\right) \frac{n!}{\Gamma(n - 2l)} a^{-2l} \left(-\frac{ab}{1 + bc}\right)^n L_n^{(-2l-1)}\left(\frac{a}{b(1 + bc)}\right),$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots, \quad 2l \neq 0, 1, 2, \ldots .$$

Полагая $c = 0$, получаем в результате соотношение

$$(1 + abs)^{-1} \exp\left[\frac{(a + bz)s}{a^{-1} + bs}\right] (a^2 zs)^{(2l+1)/2} J_{-2l-1}\left(\frac{2(zs)^{1/2}}{a^{-1} + bs}\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(n - 2l)} (-abs)^n L_n^{(-2l-1)}\left(\frac{a}{b}\right) L_n^{(-2l-1)}(z), \quad |abs| < 1. \quad (4.26)$$

Если $a = 1$, $b = 0$, то формула (4.26) принимает вид

$$e^s (zs)^{(2l+1)/2} J_{-2l-1}\left(2(zs)^{1/2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(-2l-1)}(z)\, s^n / \Gamma(n - 2l),$$

если же $a = iy^{1/2}$, $b = iy^{-1/2}$, то соотношение (4.26) сводится к формуле Хилле — Харди

$$(1 - s)^{-1} (-ysz)^{(2l+1)/2} \exp\left[-\frac{s(y + z)}{1 - s}\right] J_{-2l-1}\left(\frac{2i(ysz)^{1/2}}{1 - s}\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(n - 2l)} L_n^{(-2l-1)}(y)\, L_n^{(-2l-1)}(z)\, s^n, \qquad |s| < 1; \quad (4.27)$$

см. [17].

2.5. Разделение переменных для уравнения Шредингера $(i\partial_t + \partial_{xx} + \partial_{yy})\Psi = 0$

Применим рассмотренные в разд. 2.1 методы к временным уравнениям Шредингера с двумя пространственными переменными

$$i\partial_t \Psi = -\partial_{xx}\Psi - \partial_{yy}\Psi + V(x, y)\Psi, \quad (5.1)$$

где V — потенциал. Бойер [20] дал классификацию всех уравнений вида (5.1), которые допускают нетривиальную алгебру симметрии дифференциальных операторов первого порядка. Он показал, что (a) максимальная размерность для алгебры симметрии равна девяти; (б) этот максимум имеет место только для четырех потенциалов V, представленных в табл. 11; (в) алгебры максимальной размерности изоморфны. (В действительности существуют четыре класса таких потенциалов, которые соответствуют орбитам алгебры симметрии. В табл. 11 мы просто перечислили по одному представителю из каждого класса.) Нидерер [104] показал, что все четыре уравнения с максимальной алгеброй симметрии фактически эквивалентны. Мы проведем подробный анализ этой эквивалентности и свяжем ее с разделением переменных.

Таблица 11

ПОТЕНЦИАЛЫ $V\ (x,\ y)$ С МАКСИМАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

	V	Название системы
(1)	0	Свободная частица
(2)	$k\,(x^2 + y^2),\quad k > 0$	Гармонический осциллятор
(3)	$-k\,(x^2 + y^2),\ k > 0$	Репульсивный осциллятор
(4)	$ax,\ a \neq 0$	Движение в однородном внешнем поле (линейный потенциал)

Как и в разд. 2.1, начнем с анализа уравнения Шредингера для свободной частицы, которое мы запишем в следующем виде:

$$Q\Psi = 0, \qquad Q = i\partial_t + \partial_{x_1x_1} + \partial_{x_2x_2}, \qquad (x_1,\ x_2) = (x,\ y). \tag{5.2}$$

Комплексная алгебра симметрии $\mathcal{G}_3^c$ этого уравнения девятимерна и имеет базис

$$\begin{aligned}
&K_2 = -t^2\partial_t - t\left(x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2}\right) - t + i\left(x_1^2 + x_2^2\right)/4, \qquad K_{-2} = \partial_t,\\
&P_j = \partial_{x_j}, \quad B_j = -t\partial_{x_j} + ix_j/2, \quad j = 1,\ 2,\\
&M = x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1}, \quad E = i, \quad D = x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + 2t\partial_t + 1
\end{aligned} \tag{5.3}$$

и соотношения коммутирования вида

$$\begin{aligned}
&[D,\ K_{\pm 2}] = \pm 2K_{\pm 2}, && [D,\ B_j] = B_j, && [D,\ P_j] = -P_j,\\
&[D,\ M] = 0, && [M,\ K_{\pm 2}] = 0, && [P_j,\ M] = (-1)^{j+1} P_l,\\
&[B_j,\ M] = (-1)^{j+1} B_l, && [K_2,\ K_{-2}] = D, && [K_2,\ B_j] = 0,\\
&[K_{-2}, B_j] = -P_j, && [K_{-2},\ P_j] = 0, && [P_j,\ K_2] = B_j,\\
&[P_j,\ B_j] = {}^1\!/_2 E, && [P_j,\ B_l] = 0, && j,\ l = 1,\ 2,\ j \neq l,
\end{aligned} \tag{5.4}$$

причем оператор E лежит в центре алгебры $\mathscr{G}_3^c$. Ниже мы будем исследовать только *алгебру Шредингера* $\mathscr{G}_3$, т. е. вещественную алгебру Ли с базисом (5.3).

Еще один полезный базис для $\mathscr{G}_3$ дается операторами B_j, P_j, E, порождающими пятимерную алгебру Вейля $\mathscr{W}_2$, оператором M и тремя операторами L_1, L_2, L_3, где

$$L_1 = D, \quad L_2 = K_2 + K_{-2}, \quad L_3 = K_{-2} - K_2. \tag{5.5}$$

Для L_j выполняются соотношения коммутирования

$$[L_1, L_2] = -2L_3, \quad [L_3, L_1] = 2L_2, \quad [L_2, L_3] = 2L_1, \tag{5.6}$$

и поэтому они образуют базис алгебры Ли $sl(2, R)$; сравните с (1.11). Следовательно, $\mathscr{G}_3$ — полупрямое произведение алгебр $sl(2, R) \oplus o(2)$ и $\mathscr{W}_2$, где $o(2)$ — одномерная алгебра Ли, натянутая на M.

Используя стандартные формулы теории Ли, можно вычислить экспоненту операторов (5.3), с тем чтобы получить локальную группу Ли G_3 (*группу Шредингера*) операторов, действующих на пространство $\mathscr{F}$ локально аналитических функций от вещественных переменных t, x_j и отображающих решения уравнения (5.2) в решения. Необходимые вычисления выполняются с помощью формул (1.15)—(1.19).

Действие группы Вейля W_2 определяется операторами

$$\mathbf{T}(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \rho) = \exp(w_1 B_1) \exp(z_1 P_1) \exp(w_2 B_2) \exp(z_2 P_2) \exp(\rho E),$$
$$\mathbf{w} = (w_1, w_2), \quad \mathbf{z} = (z_1, z_2),$$

такими, что

$$\mathbf{T}(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \rho)\, \mathbf{T}(\mathbf{w}', \mathbf{z}', \rho') = \mathbf{T}(\mathbf{w} + \mathbf{w}', \mathbf{z} + \mathbf{z}', \rho + \rho' + {}^1/_2 \mathbf{w}' \cdot \mathbf{z}), \tag{5.7}$$

где

$$\mathbf{T}(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \rho)\, \Phi(t, \mathbf{x}) = \exp[i(2\mathbf{x} \cdot \mathbf{w} - t\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} + 4\rho)/4]\, \Phi(t, \mathbf{x} - t\mathbf{w} + \mathbf{z}),$$
$$\Phi \in \mathscr{F}.$$

Здесь $\mathbf{x} \cdot \mathbf{w} = x_1 w_1 + x_2 w_2$. Действие группы $SO(2)$ определяется операторами $\mathbf{T}(\theta) = \exp(\theta M)$,

$$\mathbf{T}(\theta)\, \mathbf{T}(\theta') = \mathbf{T}(\theta + \theta'),$$

где

$$\mathbf{T}(\theta)\, \Phi(t, \mathbf{x}) = \Phi(t, \mathbf{x}\Theta), \quad \Theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

И наконец, действие группы $SL(2, R)$ определяется операторами $\mathbf{T}(A)$,

$$\mathbf{T}(A)\, \Phi(t, \mathbf{x}) = \exp\left[\frac{i\beta \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{4(\delta + t\beta)}\right] (\delta + t\beta)^{-1}\, \Phi\left[\frac{\gamma + t\alpha}{\delta + t\beta}\ \ (\delta + t\beta)^{-1} \mathbf{x}\right],$$
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, R), \tag{5.9}$$

причем

$$\mathbf{T}(A)\,\mathbf{T}(B) = \mathbf{T}(AB), \qquad A,\ B \in SL(2,\ R).$$

Однопараметрические подгруппы группы $SL(2, R)$, порождаемые операторами $K_{\pm 2}$, L_1, L_2, L_3 соответственно, определяются формулами (1.17). Сопряженные действия групп $SO(2)$ и $SL(2, R)$ на W_2 определяются следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}\mathbf{T}^{-1}(A)\,\mathbf{T}(\mathbf{w},\ \mathbf{z},\ \rho)\,\mathbf{T}(A) = \mathbf{T}(\mathbf{w}',\ \mathbf{z}',\ \rho'),\\ \rho' = \rho + (\mathbf{w}'\cdot\mathbf{z}' - \mathbf{w}\cdot\mathbf{z})/4, \quad \mathbf{w}' = \delta\mathbf{w} + \beta\mathbf{z}, \quad \mathbf{z}' = \alpha\mathbf{z} + \gamma\mathbf{w}, \qquad (5.10)\\ \mathbf{T}^{-1}(\theta)\,\mathbf{T}(\mathbf{w},\ \mathbf{z},\ \rho)\,\mathbf{T}(\theta) = \mathbf{T}(\mathbf{w}\Theta,\ \mathbf{z}\Theta,\ \rho).\end{gathered}$$

Эти соотношения определяют G_3 как полупрямое произведение групп $SL(2, R) \oplus SO(2)$ и W_2:

$$\begin{gathered}g = (A,\ \theta,\ \mathbf{v}) \in G_3, \quad A \in SL\,(2,\ R), \quad \theta \in SO(2), \quad \mathbf{v}=(\mathbf{w},\ \mathbf{z},\ \rho) \in W_2;\\ \mathbf{T}(g) = \mathbf{T}(A)\,\mathbf{T}(\theta)\,\mathbf{T}(\mathbf{v}). \qquad (5.11)\end{gathered}$$

Группа G_3 действует на алгебру Ли $\mathcal{G}_3$ дифференциальных операторов посредством сопряженного представления

$$K \to K^g = \mathbf{T}(g)\,K\mathbf{T}^{-1}(g),$$

и в результате этого действия $\mathcal{G}_3$ разбивается на G_3-орбиты. Дадим классификацию структуры орбит факторалгебры $\tilde{\mathcal{G}} \cong \cong \mathcal{G}_3/\{E\}$, где $\{E\}$ — центр алгебры $\mathcal{G}_3$. Пусть $K \in \mathcal{G}_3$, и пусть a_2, a_0, a_{-2} суть коэффициенты при операторах K_2, D, K_{-2} в разложении оператора $K \neq 0$ по элементам базиса (5.3). Полагая, что $\alpha = a_2 a_{-2} + a_0^2$, находим, что α инвариантно относительно сопряженного представления.

Приведенный ниже список является полным множеством представителей орбит в том смысле, что каждый оператор $K \neq 0$ лежит на одной G_3-орбите в точности с одним из перечисленных в этом списке операторов:

$$\begin{array}{lll}\text{Случай 1} & (\alpha < 0) & K_{-2} - K_2 + \beta^2 M, \quad |\beta| \neq 1, \quad K_{-2} - K_2 + M + \gamma B_1,\\ \text{Случай 2} & (\alpha > 0) & D + \beta M, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (5.12)\\ \text{Случай 3} & (\alpha = 0) & K_2 + M, \quad K_2 + P_1, \quad K_2, \quad M, \quad P_1 + B_2, \quad P_1.\end{array}$$

Теперь рассмотрим задачу определения дифференциальных операторов S более высокого порядка, которые являются симметриями уравнения (5.2). Специальная структура уравнения (5.2) позволяет нам несколько упростить эту задачу. Поскольку мы всего лишь применяем оператор S к решениям Ψ уравнения $Q\Psi = 0$, без потери общности можно потребовать, чтобы S совсем не содержал производных по t. Иначе говоря, каждый раз, когда в S появляется оператор ∂_t, его можно заменить на

$i(\partial_{x_1x_1}+\partial_{x_2x_2})$. К этому вопросу можно подойти с иной точки зрения, заметив, что если S — оператор симметрии, то и $S'=S+XQ$, где X — произвольный дифференциальный оператор, также является оператором симметрии. Более того, для любого решения Ψ уравнения (5.2) выполняется соотношение $S'\Psi=S\Psi$. Имеется единственный такой выбор X, что оператор S' не содержит производных по t.

Учитывая сказанное выше, мы видим, что только операторы P_j, B_j, E, порождающие алгебру Вейля, и оператор M являются дифференциальными операторами порядка не выше первого по переменной x_j. Операторы $K_2=-i(B_1^2+B_2^2)$, $K_{-2}=i(P_1^2+P_2^2)$ и $D=-i[\{B_1,P_1\}+\{B_2,P_2\}]$ имеют второй порядок. (Эти равенства справедливы с учетом замены ∂_t на $i(\partial_{x_1x_1}+\partial_{x_2x_2})$.) Вообще говоря, можно вычислить все операторы симметрии S_2 порядка не выше второго по переменным x_1 и x_2:

$$S=\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}(\mathbf{x},t)\,\partial_{x_ix_j}+\sum_{j=1}^{2}b_j(\mathbf{x},t)\,\partial_{x_j}+c(\mathbf{x},t).$$

Довольно утомительные вычисления показывают, что такие операторы образуют двадцатимерное векторное пространство. Базис такого пространства образован оператором нулевого порядка E, пятью операторами первого порядка P_j, B_j, M и тремя перечисленными ранее операторами второго порядка $iK_{\pm2}$, iD плюс одиннадцать операторов второго порядка

$$B_1^2-B_2^2,\quad B_1P_1-B_2P_2,\quad P_1^2-P_2^2,\quad \{B_1,M\},\quad \{B_2,M\},\quad \{P_1,M\},$$
$$\{P_2,M\},\quad B_1B_2,\quad P_1P_2,\quad B_1P_2+B_2P_1,\quad M^2. \tag{5.13}$$

Следовательно, все симметрии второго порядка суть симметрические квадратичные формы от B_j, P_j, E и M.

Задача об R-разделении переменных для уравнения (5.2) была решена в [23]. Здесь мы рассмотрим только те системы, которые не просто допускают решения с R-разделенными переменными, но обладают еще и тем свойством, что любое допустимое решение состоит из произведения трех сомножителей, каждый из которых удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению по своей переменной. Поскольку (5.2) — уравнение с тремя переменными, теперь мы имеем две константы разделения, которые связаны с каждой системой координат, допускающей разделение переменных.

Связь между орбитами симметрий первого порядка (5.12) и системами координат, допускающими разделение переменных, теперь довольно слабая. Правда, можно найти новую (не единственную) систему координат $\{u, v, w\}$, соответствующую любому оператору симметрии первого порядка K и такую, что переменную u можно выделить из уравнения (5.2) (см. аналогичные рассуждения относительно уравнения Гельмгольца в разд. 1.2). Однако получающееся при этом уравнение относительно переменных v, w может и не допускать разделения этих переменных. Следовательно, диагонализация оператора симметрии K может соответствовать частичному, а не полному разделению переменных.

Рассмотрим результаты, полученные в [23]. Можно найти пару дифференциальных операторов K и S, соответствующих каждому R-разделению переменных для уравнения (5.2) и таких, что

1) K и S суть операторы симметрии уравнения (5.2) и $[K, S] = 0$;
2) $K \in \mathcal{G}_3$, т. е. K — оператор первого порядка по переменным x_1, x_2 и t;
3) S — оператор второго порядка по переменным x_1, x_2 и не содержит членов с ∂_t.

Для R-разделения переменных необходимо, чтобы одновременно выполнялись уравнения

$$Q\Psi = 0, \qquad K\Psi = i\lambda\Psi, \qquad S\Psi = \mu\Psi, \tag{5.14}$$

где собственные значения λ и μ — обычные константы разделения для решений Ψ с R-разделенными переменными.

Следовательно, K принадлежит алгебре симметрии $\mathcal{G}_3$, а оператор S можно представить как симметричную квадратичную форму относительно B_j, P_j, E и M. Таким образом, возможные системы координат, в которых уравнение (5.2) имеет решения с R-разделенными переменными, можно всегда охарактеризовать при помощи уравнений для собственных функций операторов не выше второго порядка в обертывающей алгебре алгебры $\mathcal{G}_3$. В табл. 12 перечислены возможные коммутирующие операторы K, S, системы координат $\{u, v, w\}$, допускающие R-разделение переменных, и решения с разделенными переменными.

Следует сказать несколько слов относительно обозначений, введенных нами для систем координат в табл. 12. Системы координат 13—17 не представляют для нас большого интереса, так как они являются следствием того факта, что в результате диагонализации P_1 уравнение Шредингера для свободной частицы (5.2) фактически сводится к уравнению (1.2). Остальные системы координат связаны с гамильтонианами свободной частицы, линейного потенциала, гармонического осциллятора и репульсивного осциллятора точно таким образом, как это описано в разд. 2.1. Каждая система в таблице обозначается через Ab^j. При этом прописная буква указывает тип гамильтониана, $F \leftrightarrow$ свободная частица, $L \leftrightarrow$ линейный потенциал, $O \leftrightarrow$ гар-

Таблица 12

ОПЕРАТОРЫ И КООРДИНАТЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ R-РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $(i\partial_t + \partial_{xx} + \partial_{yy})\Psi = 0$

	Операторы K, S	Координаты $\{u, v, w\}$	Множитель $e^{i\mathfrak{R}}$	Решения с разделенными переменными
1а	Fc^1 K_2, B^2	$x = uw$ $y = vw$	$\mathfrak{R} = (u^2 + v^2)\,w/4$	Экспоненциальная функция Экспоненциальная функция
1б	Fc^2 K_{-2}, P_1^2	$x = u$ $y = v$	0	Экспоненциальная функция Экспоненциальная функция
2а	Fr^1 K_2, M^2	$x = uw \cos v$ $y = uw \sin v$	$u^2 w/4$	Функция Бесселя Экспоненциальная функция
2б	Fr^2 K_{-2}, M^2	$x = u \cos v$ $y = u \sin v$	0	Функция Бесселя Экспоненциальная функция
3а	Fp^1 $K_2, \{B_2, M\}$	$x = w\,(u^2 - v^2)/2$ $y = uvw$	$(u^2 + v^2)^2\,w/16$	Функция параболического цилиндра Функция параболического цилиндра
3б	Fp^2 $K_{-2}, \{P_2, M\}$	$x = (u^2 - v^2)/2$ $y = uv$	0	Функция параболического цилиндра Функция параболического цилиндра

4а	Fe^1 $K_2, M^2 - B_2^2$	$x = w \operatorname{ch} u \cos v$ $y = w \operatorname{sh} u \, u \sin v$	$(\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 v) w/4$	Модифицированная функция Матье Функция Матье
4б	Fe^2 $K_{-2}, M^2 - P_2^2$	$x = \operatorname{ch} u \cos v$ $y = \operatorname{sh} u \sin v$	0	Модифицированная функция Матье Функция Матье
5а	Lc^1 $K_2 - 2aP_1 - 2bP_2,$ $B_2^2 + 2bEP_2$	$x = uw + a/w$ $y = vw + b/w$	$(u^2 + v^2) w/4 -$ $- (au + bv)/2w$	Функция Эйри Функция Эйри
5б	Lc^2 $K_{-2} + 2aB_1 + 2bB_2,$ $P_1^2 - 2aEB_1$	$x = u + aw^2$ $y = v + bw^2$	$(au + bv) w$	Функция Эйри Функция Эйри
6а	Lp^1 $K_2 - aP_1,$ $\{B_2, M\} - aP_2^2$	$x = (u^2 - v^2) w/2 + a/w$ $y = uvw$	$(u^2 + v^2)^2 w/16 -$ $- (u^2 - v^2) a/4w$	Функция ангармонического осциллятора Функция ангармонического осциллятора
6б	Lp^2 $K_{-2} - aB_1,$ $\{P_2, M\} + aB_2^2$	$x = (u^2 - v^2)/2 + aw^2/2$ $y = uv$	$(u^2 - v^2) aw/4$	Функция ангармонического осциллятора Функция ангармонического осциллятора
7	Oc $K_{-2} - K_2,$ $P_1^2 + B_1^2$	$x = u (1 + w^2)^{1/2}$ $y = v (1 + w^2)^{1/2}$	$(u^2 + v^2) w/4$	Функция Эрмита Функция Эрмита

Продолжение табл. 12

	Операторы K, S	Координаты $\{u, v, w\}$	Множитель $e^{i\mathcal{R}}$	Решения с разделенными переменными
8	Or $K_{-2}-K_2$, M^2	$x=u\ (1+w^2)^{1/2}\cos v$ $y=u\ (1+w^2)^{1/2}\sin v$	$u^2w/4$	Функция Лагерра Экспоненциальная функция
9	Oe $K_{-2}-K_2$, $M^2-P_2^2-B_2^2$	$x=(1+w^2)^{1/2}\operatorname{ch} u\cos v$ $y=(1+w^2)^{1/2}\operatorname{sh} u\sin v$	$(\operatorname{sh}^2 u+\cos^2 v)\ w/4$	Функция Айнса Функция Айнса
10а	Rc^1 D, $\{B_1, P_1\}$	$x=u\mid w\mid^{1/2}$ $y=v\mid w\mid^{1/2}$	0	Функция параболического цилиндра Функция параболического цилиндра
10б	Rc^2 $K_{-2}+K_2$, $P_1^2-B_1^2$	$x=u\mid w^2-1\mid^{1/2}$ $y=v\mid w^2-1\mid^{1/2}$	$\varepsilon\,(u^2+v^2)\ w/4$	Функция параболического цилиндра Функция параболического цилиндра
11а	Rr^1 D, M^2	$x=u\mid w\mid^{1/2}\cos v$ $y=u\mid w\mid^{1/2}\sin v$	0	Функция Уиттекера Экспоненциальная функция
11б	Rr^2 $K_{-2}+K_2$, M^2	$x=\mid w^2-1\mid^{1/2}u\cos v$ $y=\mid w^2-1\mid^{1/2}u\sin v$	$\varepsilon u^2w/4$	Функция Уиттекера Экспоненциальная функция

12а	Re^1 D, $M^2 - {}^1/_2 \{B_2, P_2\}$	$x = \| w \|^{1/2} \operatorname{ch} u \cos v$ $y = \| w \|^{1/2} \operatorname{sh} u \sin v$	0	Функция Айнса Функция Айнса
12б	Re^2 $K_{-2} + K_2$, $M^2 - P_2^2 + B_2^2$	$x = \| w^2 - 1 \|^{1/2} \operatorname{ch} u \cos v$ $y = \| w^2 - 1 \|^{1/2} \operatorname{sh} u \sin v$	$\varepsilon (\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 v)/4$	Функция Айнса Функция Айнса
13	$L1$ $P_1, B_2^2 - 2bEP_2$	$x = u$ $y = vw + b/w$	$wv^2/4 - bv/2w$	Экспоненциальная функция Функция Эйри
14	$L2$ $P_1, P_2^2 - 2aEB_2$	$x = u$ $y = v + aw^2$	avw	Экспоненциальная функция Функция Эйри
15	$O1$ $P_1, P_2^2 + B_2^2$	$x = u$ $y = v (1 + w^2)^{1/2}$	$wu^2/4$	Экспоненциальная функция Функция Эрмита
16	$R1$ $P_1, \{B_2, P_2\}$	$x = u$ $y = v \| w \|^{1/2}$	0	Экспоненциальная функция Функция параболического цилиндра
17	$R2$ $P_1, P_2^2 - B_2^2$	$x = u$ $y = v \| w^2 - 1 \|^{1/2}$	$\varepsilon v^2 w/4$	Экспоненциальная функция Функция параболического цилиндра

монический осциллятор, $R \leftrightarrow$ репульсивный осциллятор[1]); строчная буква указывает тип системы координат, используемой в каждом из этих гамильтонианов: $c \leftrightarrow$ декартовы координаты, $r \leftrightarrow$ радиальные (полярные) координаты, $p \leftrightarrow$ параболические и $e \leftrightarrow$ эллиптические координаты[2]). Индекс j служит для различения двух систем на одной и той же G_3-орбите.

В каждом случае $w = t$, а решение с разделенными переменными для переменной w является экспоненциальной функцией. В последнем столбце табл. 12 сначала дается решение для переменной u, а затем — решение для переменной v. Символ $\varepsilon = \pm 1$ показывает знак выражения $1 - w^2$, а функции ангармонического осциллятора суть решения дифференциального уравнения вида

$$f''(u) + (\lambda u^2 + a u^4 - \beta) f(u) = 0, \qquad a, \beta \in R. \tag{5.15}$$

С точки зрения группы симметрии галилеевых преобразований и растяжений существует 26 неэквивалентных систем координат. (Как указано в замечаниях к табл. 6, этот список 26 систем координат, неэквивалентных относительно группы симметрии галилеевых преобразований и растяжений, не является списком орбит, поскольку определенные пары орбит группы симметрии галилеевых преобразований и растяжений позволяют вычислить допускающие разделение переменных координаты, отличающиеся только знаком параметра.) Однако две системы координат можно считать эквивалентными, если под действием некоторого $g \in G_3$ первую систему можно преобразовать во вторую. С точки зрения операторов система координат, описанная операторами K, S, эквивалентна системе координат, описанной операторами K', S', если в результате сопряженного действия группы G_3 на обвертывающую алгебру алгебры $\mathcal{G}_3$ двумерное пространство, натянутое на K, S, может быть отображено в двумерное пространство, натянутое на K', S'. Согласно этому более общему отношению эквивалентности, не все из 26 вышеуказанных систем координат являются неэквивалентными. В самом деле, системы координат, обозначенные через Ab^1 и Ab^2, принадлежат одним и тем же двумерным орбитам; следовательно, имеется только 17 классов неэквивалентных орбит. (Для удобства в приложениях представители орбит 5, 6, 13, 14 содержат параметры a, b. При помощи симметрии растяжения некоторые из этих параметров можно нормировать так, чтобы они приняли значение ± 1.)

---

[1]) Первые буквы английских названий: free particle, linear potential, harmonic oscillator, repulsive oscillator соответственно. — *Прим. перев.*

[2]) Первые буквы английских названий: Cartesian, radial, parabolic, elliptic соответственно. — *Прим. перев.*

Эти эквивалентности можно описать при помощи оператора $J = \exp[\pi(K_2 - K_{-2})/4]$:

$$J\Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{\sqrt{2}}{(1+t)} \exp\left[i(1+t)^{-1}\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}{4}\right] \times$$
$$\times \Phi\left(\frac{t-1}{t+1}, \sqrt{2}(t+1)^{-1}\mathbf{x}\right), \qquad \Phi \in \mathcal{F}. \quad (5.16)$$

Заметим, что $J^2 = \exp[\pi(K_2 - K_{-2})/2]$ и что

$$\begin{gathered} J^2\Phi(t, \mathbf{x}) = t^{-1}\exp[i\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}/4t]\,\Phi(-t^{-1}, t^{-1}\mathbf{x}), \\ J^4\Phi(t, \mathbf{x}) = -\Phi(t, -\mathbf{x}), \quad J^8\Phi(t, \mathbf{x}) = \Phi(t, \mathbf{x}). \end{gathered} \quad (5.17)$$

Легко показать, что $J(K_{-2} + K_2)J^{-1} = D$, и, анализируя сопряженное действие оператора J на операторы второго порядка, можно доказать, что три системы координат Rc^2, Rr^2 и Re^2 эквивалентны относительно J трем системам Rc^1, Rr^1 и Re^1 соответственно.

Обозначая сопряженное действие оператора J^2 на $K \in \mathcal{G}_3$ через $K' = J^2KJ^{-2}$, находим $P'_j = -B_j$, $B'_j = P_j$, $K'_{-2} = -K_2$, $K'_2 = -K_{-2}$, $D' = -D$, $M' = M$, $E' = E$, откуда следует, что шесть пар вида Fa^1, Fa^2 или La^1, La^2 эквивалентны относительно J^2.

Теперь покажем, что операторы (5.3) можно представить как алгебру Ли кососимметрических операторов в гильбертовом пространстве $L_2(R_2)$ комплекснозначных функций, интегрируемых с квадратом по Лебегу в плоскости. Для этого предположим, что t — фиксированный параметр, и заменим в формулах (5.3) ∂_t на $i(\partial_{x_1x_1} + \partial_{x_2x_2})$. Тогда легко показать, что получающиеся в результате операторы, умноженные на i и ограниченные на множество бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в R_2, имеют единственные самосопряженные расширения. Действительно, эти операторы являются вещественными линейными комбинациями операторов

$$\begin{gathered} \mathcal{K}_2 = i(x_1^2 + x_2^2)/4, \quad \mathcal{K}_{-2} = i(\partial_{x_1x_1} + \partial_{x_2x_2}), \quad \mathcal{P}_j = \partial_{x_j}, \\ \mathcal{B}_j = ix_j/2, \quad \mathcal{M} = x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1}, \quad \mathcal{E} = i, \\ \mathcal{D} = x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + 1, \quad j = 1, 2. \end{gathered} \quad (5.18)$$

Заметим, что при $t = 0$ операторы (5.3) сводятся к виду (5.18). Таким образом, операторы (5.18) удовлетворяют тем же соотношениям коммутирования (5.4), что и операторы (5.3). Например, выполняется общее тождество

$$\exp(t\mathcal{K}_{-2})\,\mathcal{K}\exp(-t\mathcal{K}_{-2}) = K, \quad (5.19)$$

которое связывает операторы $\mathcal{K}$ (5.18) и K (5.3). Здесь $\exp(t\mathcal{K}_{-2})$ — унитарный оператор в $L_2(R_2)$, соответствующий сдвигу по времени в задаче о свободной частице. В [67] показано, что

$$\exp(a\mathscr{K}_{-2})\,f(\mathbf{x})=\text{l. i. m.}\,(4\pi ia)^{-1}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{4ia}\right]f(\mathbf{y})\,dy_1\,dy_2, \qquad (5.20)$$
$$f\in L_2(R_2).$$

Если $f\in L_2(R_2)$, то можно показать, что $\Psi(t,\mathbf{x})=\exp(t\mathscr{K}_{-2})f(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению $\partial_t\Psi=\mathscr{K}_{-2}\Psi$, или уравнению $i\partial_t\Psi=-\Delta_2\Psi$ (почти для всех t), каждый раз, когда f находится в области определения оператора $\mathscr{K}_{-2}$ и $\Psi(0,\mathbf{x})=f(\mathbf{x})$. Кроме того, унитарные операторы $\exp(\alpha K)=\exp(t\mathscr{K}_{-2})\exp(\alpha\mathscr{K})\exp(-t\mathscr{K}_{-2})$ отображают функцию Ψ в функцию $\Phi=\exp(\alpha K)\Psi$, которая также удовлетворяет уравнению $i\partial_t\Phi=-\Delta_2\Phi$ для каждой линейной комбинации $\mathscr{K}$ операторов (5.18). Таким образом, операторы $\exp(\alpha K)$ являются операторами симметрии уравнения (5.2).

Ниже мы увидим, что операторы (5.18) порождают глобальное унитарное неприводимое представление группы G_3 в $L_2(R_2)$. Принимая во внимание этот факт, будем считать, что $\mathbf{U}(g)$, $g\in G_3$, суть соответствующие унитарные операторы, и положим $\mathbf{T}(g)=\exp(t\mathscr{K}_{-2})\,\mathbf{U}(g)\exp(-t\mathscr{K}_{-2})$. Отсюда следует, что $\mathbf{T}(g)$ являются унитарными операторами симметрии соотношений (5.2) с соответствующими инфинитезимальными операторами $K=\exp(t\mathscr{K}_{-2})\mathscr{K}\exp(-t\mathscr{K}_{-2})$.

Теперь рассмотрим оператор $\mathscr{L}_3=\mathscr{K}_{-2}-\mathscr{K}_2=i\left[\Delta_2-{}^1/_4\left(x_1^2+x_2^2\right)\right]$. Если $f\in L_2(R_2)$, то $\Psi(t,\mathbf{x})=\exp(t\mathscr{L}_3)f(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению $\partial_t\Psi=\mathscr{L}_3\Psi$, или уравнению

$$i\partial_t\Psi=-\Delta_2\Psi+{}^1/_4\left(x_1^2+x_2^2\right)\Psi, \qquad (5.21)$$

и условию $\Psi(0,\mathbf{x})=f(\mathbf{x})$. Аналогичным образом унитарные операторы $\mathbf{V}(g)=\exp(t\mathscr{L}_3)\,\mathbf{U}(g)\,\exp(-t\mathscr{L}_3)$ являются операторами симметрии уравнения (5.21) — уравнения Шредингера для гармонического осциллятора, и соответствующие инфинитезимальные операторы $\exp(t\mathscr{L}_3)\mathscr{K}\exp(-t\mathscr{L}_3)$ можно представить как дифференциальные операторы первого порядка по t и $\mathbf{x}$. Аналогичные утверждения справедливы для оператора $\mathscr{L}_2=\mathscr{K}_{-2}+\mathscr{K}_2=i\left(\Delta_2+{}^1/_4\left(x_1^2+x_2^2\right)\right)$, который соответствует уравнению $\partial_t\Psi=\mathscr{L}_2\Psi$, или

$$i\partial_t\Psi=-\Delta_2\Psi-{}^1/_4\left(x_1^2+x_2^2\right)\Psi \qquad (5.22)$$

(уравнение Шредингера для репульсивного осциллятора), а также для оператора $\mathscr{K}_{-2}-\mathscr{B}_1=i(\Delta_2-x_1/2)$ с соответствующим уравнением вида $\partial_t\Psi=(\mathscr{K}_{-2}-\mathscr{B}_1)\Psi$, или

$$i\partial_t\Psi=-\Delta_2\Psi+{}^1/_2x_1\Psi \qquad (5.23)$$

(уравнение Шредингера для линейного потенциала).

Эти замечания показывают в явном виде эквивалентность уравнений (5.2) и (5.21)—(5.23). В самом анализе в качестве исходного уравнения мы взяли уравнение (5.2), но, взяв любое другое из этих уравнений, мы получили бы ту же самую алгебру симметрии (5.18).

Из табл. 12 видно, что, кроме координат 13—17, в сущности совпадающих с координатами, рассмотренными в разд. 2.1, каждая система координат, допускающая R-разделение переменных, соответствует G_3-орбите, которая содержит в точности один из гамильтоновых операторов $i\mathscr{K}_{-2}$, $i\mathscr{L}_3$, $i\mathscr{L}_2$ или $i(\mathscr{K}_{-2} - \mathscr{B}_1)$. Следовательно, каждая система координат, как и следовало ожидать, связана с одним из этих четырех гамильтонианов. Более того, замечания, относящиеся к соотношениям (1.29), (1.30), справедливы и здесь: система координат, допускающая R-разделение переменных для задачи о свободной частице, соответствует системе координат, точно допускающей разделение переменных для одного из трех других уравнений Шредингера, а именно для того уравнения, гамильтониан которого диагонализируется этой системой.

Рассмотрим пару коммутирующих самосопряженных операторов $i\mathscr{K}$, $\mathscr{S}$, где $\mathscr{K} \in \mathscr{G}_3$, а $\mathscr{S}$ — симметрический квадратичный оператор в обертывающей алгебре алгебры $\mathscr{G}_3$. Эти операторы имеют общее спектральное разложение, т. е. имеется полная система (обобщенных) собственных функций $f_{\lambda,\mu}(\mathbf{x})$ в $L_2(R_2)$, причем

$$i\mathscr{K} f_{\lambda,\mu} = \lambda f_{\lambda,\mu}, \quad \mathscr{S} f_{\lambda,\mu} = \mu f_{\lambda,\mu}, \quad \langle f_{\lambda,\mu}, f_{\lambda',\mu'} \rangle = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\mu\mu'}, \tag{5.24}$$

где

$$\langle h_1, h_2 \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} h_1(\mathbf{x})\,\bar{h}_2(\mathbf{x})\,dx_1\,dx_2, \qquad h_j \in L_2(R_2) \tag{5.25}$$

(см. [98]). Теперь предположим, что $i\mathscr{K}'$, $\mathscr{S}'$ — еще одна пара коммутирующих самосопряженных операторов, лежащих на той же G_3-орбите, что и пара $i\mathscr{K}$, $\mathscr{S}$. Тогда, перенормировав в случае необходимости эти операторы, мы получаем, что имеется некоторое $g \in G_3$, такое, что

$$\mathscr{K}' = \mathbf{U}(g)\,\mathscr{K}\,\mathbf{U}(g^{-1}), \qquad \mathscr{S}' = \mathbf{U}(g)\,\mathscr{S}\,\mathbf{U}(g^{-1}).$$

Следовательно, спектральное разложение пары, отмеченной штрихами, идентично спектральному разложению первой пары. В самом деле, для $f'_{\lambda,\mu} = \mathbf{U}(g) f_{\lambda,\mu}$ имеем

$$i\mathscr{K}' f'_{\lambda,\mu} = \lambda f'_{\lambda,\mu}, \quad \mathscr{S}' f'_{\lambda,\mu} = \mu f'_{\lambda\ \mu}, \quad \langle f'_{\lambda,\mu}, f'_{\lambda',\mu'} \rangle = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\mu\mu'}, \tag{5.26}$$

а $f'_{\lambda,\mu}$ образует полную о. н систему в $L_2(R_2)$.

В дальнейшем мы часто будем прибегать к спектральному разложению пары $i\mathscr{K}$, $\mathscr{S}$, где $i\mathscr{K}$ — один из четырех перечисленных выше гамильтонианов. Однако во многих случаях мы можем использовать унитарные операторы симметрии $\mathrm{U}(g)$ для того, чтобы построить эквивалентную пару $i\mathscr{K}'$, $\mathscr{S}'$, спектральное разложение которой вычисляется значительно проще, а эта информация даст нам в результате спектральное разложение исходной пары.

Чтобы продемонстрировать наши замечания на примере, рассмотрим оператор $\mathscr{K}_{-2} = i\Delta_2$. Если $\{f_{\lambda, \mu}\}$ — базис (5.24) обобщенных собственных функций для пары $\mathscr{K}$, $\mathscr{S}$, то $\{f'_{\lambda, \mu}(t, \mathbf{x}) = \exp(t\mathscr{K}_{-2}) f_{\lambda, \mu}(\mathbf{x})\}$ — соответствующий базис обобщенных собственных векторов для операторов

$$K = \exp(t\mathscr{K}_{-2})\,\mathscr{K} \exp(-t\mathscr{K}_{-2}), \qquad S = \exp(t\mathscr{K}_{-2})\,\mathscr{G} \exp(-t\mathscr{K}_{-2})$$

и $f'_{\lambda, \mu}(t, \mathbf{x})$ — также решения уравнения Шредингера для свободной частицы (5.2). Аналогичные рассуждения справедливы и для других гамильтонианов. Это проливает свет на взаимоотношения между моделями группы G_3 в случае двух переменных $(\mathbf{x})$ и в случае трех переменных $(\mathbf{x}, t)$.

Теперь вычислим в явном виде спектральные разложения пар коммутирующих операторов, перечисленных в табл. 12. Начнем с орбиты Oc и модели в случае двух переменных, т. е. определим спектральное разложение пары операторов $\mathscr{L}_3 = \mathscr{K}_{-2} - \mathscr{K}_2$, $\mathscr{P}_1^2 + \mathscr{B}_1^2$. Уравнения (5.24) имеют вид

$$[-\Delta_2 + (x_1^2 + x_2^2)/4] f = \lambda f, \qquad (\partial_{x_1 x_1} - x_1^2/4) f = \mu f.$$

Заметим, что эти уравнения допускают разделение в переменных x_1, x_2. Сравнивая эти уравнения с (1.34), находим известный о. н. базис собственных функций

$$f_{\lambda, \mu} = oc_{n, m}(\mathbf{x}) = (2^{m+n}\pi n!\, m!)^{-1/2} \exp(-\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}/4) \times$$
$$\times H_n(x_1/\sqrt{2})\, H_n(x_2/\sqrt{2}),$$
$$\mu = -n - {}^1/_2, \quad \lambda + \mu = m + {}^1/_2, \quad n, m = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$\langle oc_{n, m}, oc_{n'm'} \rangle = \delta_{nn'}\delta_{mm'}, \tag{5.27}$$

где $H_n(x)$ — многочлен Эрмита.

Здесь можно непосредственно показать, что, вычисляя экспоненты операторов (5.18), мы получаем глобальное унитарное неприводимое представление группы G_3. Действительно, из рекуррентных формул (2.28), (2.29), (2.33) для многочленов Эрмита можно видеть, что операторы $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$, $\mathscr{L}_3$, действуя на oc-базис, определяют унитарное представление алгебры $sl(2, R)$, которое является прямой суммой представлений из дискретной серии, а операторы $\mathscr{W}_2$ определяют унитарное неприводимое представление W_2. Из работы Баргманна [11, 120] следует, что это представление алгебры Ли расширяется до глобального представления группы G_3, которое неприводимо, поскольку его ограничение до W_2 также неприводимо.

Теперь вычислим унитарные операторы $\mathrm{U}(g)$ в $L_2(R_2)$. Операторы

$$\mathrm{U}(\mathbf{w},\ \mathbf{z},\ \rho) = \exp(w_1\mathscr{B}_1)\exp(z_1\mathscr{P}_1)\exp(w_2\mathscr{B}_2)\exp(z_2\mathscr{P}_2)\exp(\rho\mathscr{E}),$$

определяющие неприводимое представление группы W_2, будучи примененными к функции $h(\mathrm{x})$, дают

$$\mathrm{U}(\mathbf{w},\ \mathbf{z},\ \rho)\,h(\mathbf{x}) = \exp(i\rho + i\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}/2)\,h(\mathbf{x}+\mathbf{z}), \qquad h \in L_2(R_2). \quad (5.28)$$

Оператор $\mathrm{U}(\theta) = \exp(\theta\mathscr{M})$, будучи примененным к функции $h(\mathrm{x})$, дает

$$\mathrm{U}(\theta)\,h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}\Theta), \qquad (5.29)$$

где Θ определяется в (5.8). Операторы $\mathrm{U}(A)$, $A \in SL(2, R)$, вычисляются значительно сложнее. Мы имеем интегральный оператор $\exp(a\mathscr{K}_{-2})$, определяемый в (5.20); кроме того, нетрудно получить следующие соотношения:

$$\exp(b\mathscr{K}_2)\,h(\mathbf{x}) = \exp(ib\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}/4)\,h(\mathbf{x}), \quad \exp(c\mathscr{D})\,h(\mathbf{x}) = e^c h(e^c\mathbf{x}). \quad (5.30)$$

Выполняя групповое умножение в $SL(2, R)$, получаем следующее соотношение:

$$\exp(\varphi\mathscr{L}_2) = \exp(\operatorname{th}(\varphi)\,\mathscr{K}_2)\exp(\operatorname{sh}(\varphi)\operatorname{ch}(\varphi)\,\mathscr{K}_{-2})\exp(-\ln(\operatorname{ch}\varphi)\,\mathscr{D}),$$

откуда

$$\exp(\varphi\mathscr{L}_2)\,h(\mathbf{x}) = \frac{\exp(i\operatorname{cth}(\varphi)\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}/4)}{4\pi i\operatorname{sh}\varphi} \times$$

$$\times\ \text{l.i.m.}\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \exp\left[\frac{i}{4}\left(-\frac{2}{\operatorname{sh}\varphi}\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \operatorname{cth}(\varphi)\,\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}\right)\right] h(\mathbf{y})\,dy_1\,dy_2,$$

$$\varphi \neq 0. \qquad (5.31)$$

(Сокращение l. i. m в этой и двух последующих формулах является общепринятым.) Аналогичные вычисления дают

$$\exp(\theta\mathscr{L}_3)\,h(\mathbf{x}) = \frac{\exp(i\operatorname{ctg}(\theta)\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}/4)}{4\pi i\sin\theta} \times$$

$$\times\ \text{l.i.m.}\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \exp\left[\frac{i}{4}\left(-\frac{2}{\sin\theta}\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \operatorname{ctg}(\theta)\,\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}\right)\right] h(\mathbf{y})\,dy_1\,dy_2,$$

$$\theta \neq n\pi, \qquad (5.32)$$

$$\exp[\rho(\mathscr{K}_{-2} + a\mathscr{B}_1)]\,h(\mathbf{x}) = \frac{\exp[i(a\rho x_1/2 - a^2\rho^3/12)]}{4\pi i\rho} \times$$

$$\times\ \text{l.i.m.}\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \exp\left\{\frac{i}{4\rho}\left[(x_1 - a\rho^2 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right]\right\} h(\mathbf{y})\,dy_1\,dy_2,$$

$$\rho \neq 0. \qquad (5.33)$$

2.6. Базисы и матричные элементы смешанных базисов для уравнения Шредингера

Из (5.20) и (5.27) следует, что базисные функции $oc_{n,m}(\mathbf{x})$ отображаются в о. н. базисные функции $Oc_{n,m}(t, \mathbf{x}) = \exp(t\mathscr{K}_{-2}) oc_{n,m}(\mathbf{x})$, которые являются решениями уравнения Шредингера и имеют вид

$$Oc_{n,m}(t, \mathbf{x}) =$$
$$= (2^{m+n+1}\pi n! m!)^{1/2} \exp\left[\frac{i\pi(m+n-1)}{2} - \frac{(u^2+v^2)(1-iw)}{4}\right] \times$$
$$\times \left(\frac{w+i}{w-i}\right)^{(m+n)/2} (w-i)^{-1} H_m\left(u/\sqrt{2}\right) H_n\left(v/\sqrt{2}\right), \qquad (6.1)$$

причем

$$x_1 = u(1+w^2)^{1/2}, \qquad x_2 = v(1+w^2)^{1/2}, \qquad t = w.$$

Функции (6.1) соответствуют допускающей разделение переменных системе координат Oc из табл. 12.

Вычислим спектральное разложение для системы координат Or:

$$i(\mathscr{K}_{-2} - \mathscr{K}_2) f = \lambda f, \qquad \mathscr{M}^2 f = \mu f.$$

Базис собственных функций имеет вид

$$\begin{aligned} or^{+}_{n,m}(\mathbf{x}) &= [m!/2^m\pi(n+m)!]^{1/2} \exp(-r^2/4)\, r^m L_n^{(m)}(r^2/2) \cos m\theta, \\ or^{-}_{n,m}(\mathbf{x}) &= \operatorname{tg}(n\theta)\, or^{+}_{n,m}(\mathbf{x}), \end{aligned} \qquad (6.2)$$

где m, n — целые числа, $m \geqslant 1$, $n \geqslant 0$, и $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$. Собственные значения λ и μ связаны с m и n соотношениями $\lambda = 2n + m + 1$, $\mu = -m^2$. При $m = 0$ имеется добавочный собственный вектор

$$or^{+}_{\lambda,0}(\mathbf{x}) = (2/\pi n!)^{1/2} \exp(-r^2/4)\, L_n^{(0)}(r^2/2), \qquad (6.3)$$

где $L_n^{(\alpha)}(r)$ — многочлены Лагерра. Соотношения ортогональности записываются так:

$$\left\langle or^{\varepsilon}_{n,m}, or^{\varepsilon'}_{n',m'} \right\rangle = \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \delta_{nn'} \delta_{mm'}, \qquad \varepsilon, \varepsilon' = \pm.$$

Базисные функции $Or_{n,m}(t, \mathbf{x}) = \exp(t\mathscr{K}_{-2}) or_{n,m}(\mathrm{x})$ от трех переменных определяются соотношениями

$$Or^{+}_{n,m}(t, \mathbf{x}) = K\left(\frac{m!}{\pi^3 2^m (n+m)!}\right)^{1/2} \frac{(-1)^{m+n}}{2^{2m}} \frac{(w+i)^{m/2+n}}{(w-i)^{m/2+n+1}} \times$$
$$\times \exp\left[\frac{u^2(iw-1)}{4}\right] L_n^{m}\left(\frac{u^2}{2}\right) \cos mv,$$
$$Or^{-}_{n,m}(t, \mathbf{x}) = \operatorname{tg}(mv)\, Or^{+}_{n,m}(t, \mathbf{x}), \qquad m \geqslant 1. \qquad (6.4)$$

При $m=0$ имеем $K=\sqrt{2}$; в противном случае $K=1$. Кроме того,

$$x_1=(1+w^2)^{1/2}u\cos v,\qquad x_2=(1+w^2)^{1/2}u\sin v,\qquad t=w.$$

В уравнениях для системы координат Oe

$$i(\mathscr{K}_{-2}-\mathscr{K}_2)f=\lambda f,\qquad (\mathscr{M}^2-\mathscr{P}_2^2-\mathscr{B}_2^2)f=\mu f,$$

переменные разделяются в эллиптических координатах $x_1= \operatorname{ch}\zeta\cos\eta$, $x_2=\operatorname{sh}\zeta\sin\eta$. Мы получаем о. н. базис

$$\begin{aligned} oe^{+}_{p,\,m}(\mathbf{x})&=\pi^{-1}hc_p^m(i\zeta,\ {}^1/_2)\,hc_p^m(\eta,\ {}^1/_2),\\ oe^{-}_{p,\,m}(\mathbf{x})&=\pi^{-1}hs_p^m(i\zeta,\ {}^1/_2)\,hs_p^m(\eta,\ {}^1/_2),\end{aligned}\tag{6.5}$$

где

$$hc_p^m(\eta,\ {}^1/_2)=\exp(-{}^1/_4\cos 2\eta)\,C_p^m(\eta,\ {}^1/_2),$$

$$hs_p^m(\eta,\ {}^1/_2)=\exp(-{}^1/_4\cos 2\eta)\,S_p^m(\eta,\ {}^1/_2),$$

а m, p — целые числа, причем $0\leqslant m\leqslant p$, $(-1)^{m-p}=1$. Связь λ и μ с p и m определяется соотношениями $\lambda=p+1$, $\mu= =\lambda/2+a_p^m(1/2)$ или $\mu=\lambda/2+b_p^m(1/2)$; соотношения ортогональности имеют вид

$$\langle oe^{\varepsilon}_{p,\,m},\ oe^{\varepsilon'}_{p',\,m'}\rangle=\delta_{\varepsilon\varepsilon'}\delta_{pp'}\delta_{mm'},\qquad \varepsilon,\ \varepsilon'=\pm.$$

Функции $C_p^m(\eta,\ \zeta)$, $S_p^m(\eta,\ \zeta)$ являются многочленами Айнса [7], т. е. полиномиальными решениями уравнения Уиттекера — Хилла

$$\frac{d^2v}{d\eta^2}+\zeta\sin 2\eta\frac{dv}{d\eta}+(a-p\zeta\cos 2\eta)\,v=0\tag{6.6}$$

с периодом, равным 2π. Обстоятельный анализ этого уравнения был выполнен Арскоттом [8], и условные обозначения для решений и собственных значений, которые мы здесь используем, принадлежат именно ему. Через $C_p^m(\eta,\ \zeta)$ обозначаются многочлены порядка p от $\cos\eta$, соответствующие собственным значениям $a=a_p^m(\zeta)$, через $S_p^m(\eta,\ \zeta)$ — многочлены порядка p от $\sin\eta$, соответствующие собственным значениям $a=b_p^m(\zeta)$.

Базисные функции $Oe_{p,\,m}(t,\mathbf{x})=\exp(t\mathscr{K}_{-2})\,oe_{p,\,m}(\mathbf{x})$ от трех переменных определяются соотношением

$$\begin{aligned} Oe^{+}_{p,\,m}(t,\ \mathbf{x})=(\lambda_p^{m+}/\pi)\exp\left[iw(\operatorname{sh}^2u+\cos^2v)/4\right]\times\\ \times(w-i)^{(p/2)+1}(w+i)^{-p/2}\,hc_p^m(iu,\ {}^1/_2)\,hc_p^m(v,\ {}^1/_2),\end{aligned}\tag{6.7}$$

где

$$x_1=(1+w^2)^{1/2}\operatorname{ch}u\cos v,\qquad x_2=(1+w^2)^{1/2}\operatorname{sh}u\sin v,\qquad t=w.$$

Чтобы определить $Oe^{-}_{p,\,m}(t,\,\mathbf{x})$, в формуле (6.7) следует заменить фазовую постоянную λ_p^{m+}, $|\lambda_p^{m+}|=1$, на λ_p^{m-}, а функции $hc_p^m(\eta,\,\zeta)$ — на $hs_p^m(\eta,\,\zeta)$. Зная явный вид многочленов Айнса, можно вычислить константы $\lambda_p^{m\pm}$. Заметим, что формула $Oe_{p,\,m}=\exp(t\mathscr{H}_{-2})\,oe_{p,\,m}$ является нетривиальным соотношением, которому удовлетворяют произведения многочленов Айнса. Этот интеграл можно вычислить (способ вычисления аналогичен вычислению (3.38) в разд. 1.3), так как нам заранее известно, что этот интеграл является решением уравнения Шредингера с R-разделенными переменными u, v, w.

В остальных случаях, перечисленных в табл. 12, с каждой орбитой всегда связаны две системы координат. Для простоты мы всегда будем рассматривать только систему координат с верхним индексом 1. Соответствующие результаты для систем с индексом 2 получаются немедленно после применения унитарных операторов J или J^2 (см. (5.16) и (5.17)).

Система Fc определяется так:

$$i\mathscr{H}_2 f=-{}^1/_4\gamma^2 f,\qquad \mathscr{B}_1 f={}^1/_2 i\gamma\cos(\alpha)\,f$$

и имеет базис обобщенных собственных функций

$$\begin{gathered}fc_{\gamma,\,\alpha}(\mathbf{x})=r^{-1/2}\delta(r-\gamma)\,\delta(\theta-\alpha),\qquad 0\leqslant\alpha<2\pi,\quad 0\leqslant\gamma,\\ \langle fc_{\gamma,\,\alpha},\ fc_{\gamma',\,\alpha'}\rangle=\delta(\gamma-\gamma')\,\delta(\alpha-\alpha'),\quad x_1=r\cos\theta,\ x_2=r\sin\theta.\end{gathered}\tag{6.8}$$

Базисные функции от трех переменных $Fc_{\gamma,\,\alpha}(t,\mathbf{x})=\exp(t\mathscr{H}_{-2})\,fc_{\gamma,\,\alpha}(\mathbf{x})$ имеют вид

$$Fc_{\gamma,\,\alpha}(t,\,\mathbf{x})=\frac{\gamma^{1/2}}{4\pi it}\exp\left\{\frac{i\,[(x_1-\gamma\cos\alpha)^2+(x_2-\gamma\sin\alpha)^2]}{4t}\right\}.\tag{6.9}$$

Система координат Fr определяется уравнениями

$$i\mathscr{H}_2 f=-{}^1/_4\gamma^2 f,\qquad i\mathscr{M}f=-mf$$

с базисом

$$fr_{\gamma,\,m}(\mathbf{x})=(2\pi r)^{-1/2}\,\delta(r-\gamma)\,e^{im\theta},\qquad \langle fr_{\gamma,\,m},\ fr_{\gamma',\,m'}\rangle=\delta(\gamma-\gamma')\,\delta_{mm'},\tag{6.10}$$

где $0\leqslant\gamma$, $m=0,\,\pm1,\,\ldots$, а r, θ — полярные координаты. Базисными функциями от трех переменных являются

$$Fr_{\gamma,\,m}(t,\,\mathbf{x})=\left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^{1/2}\frac{i^{m-1}}{2t}\exp\left[\frac{i\,(r^2+\gamma^2)}{4t}\right]\exp(im\theta)\,J_m\left(\frac{-r\gamma}{2t}\right).\tag{6.11}$$

где $J_m(z)$ — функция Бесселя.

Система Fp определяется уравнениями

$$i\mathscr{H}_2 f=-{}^1/_4\gamma^2 f,\qquad \{\mathscr{B}_2,\ \mathscr{M}\}\,f=-\mu\gamma f,$$

причем базис собственных функций имеет вид

$$fp^{+}_{\gamma,\mu}(\mathbf{x})=\begin{cases}(2\pi r)^{-1/2}(1+\cos\theta)^{-i\mu/2-1/4}(1-\cos\theta)^{i\mu/2-1/4}\delta(r-\gamma), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\pi\leqslant\theta<0, \\ 0, \qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\end{cases}$$

$$fp^{-}_{\gamma,\mu}(\mathbf{x})=fp^{-}_{\gamma,\mu}(r,\ \theta)=fp^{+}_{\gamma,\mu}(r,\ -\theta), \tag{6.12}$$

где r, θ — полярные координаты, $0\leqslant\gamma$, $-\infty<\mu<\infty$, спектр непрерывен и имеет кратность, равную двум. Соотношения ортогональности записываются так:

$$\langle fp^{\pm}_{\gamma,\mu},\ fp^{\pm}_{\gamma',\mu'}\rangle=\delta(\gamma-\gamma')\,\delta(\mu-\mu'),\qquad \langle fp^{\pm}_{\gamma,\mu},\ fp^{\mp}_{\gamma',\mu'}\rangle=0.$$

Базисные функции от трех переменных определяются соотношениями

$$Fp^{+}_{\gamma,\mu}(t,\ \mathbf{x})=\frac{i\gamma^{1/2}\exp(i\gamma^2/4t)}{2^3\pi t\cos(i\mu\pi)}\exp\left(\frac{i(\xi^2+\eta^2)^2}{16t}\right)\times$$
$$\times\left[D_{-i\mu/2-1/2}\left(\sigma\xi t^{-1/2}\right)D_{i\mu/2-1/2}\left(\sigma\eta t^{-1/2}\right)+D_{-i\mu/2-1/2}\left(-\sigma\xi t^{-1/2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times D_{i\mu/2-1/2}\left(-\sigma\eta t^{-1/2}\right)\right],\qquad t>0,$$
$$Fp^{+}_{\gamma,\mu}(-t,\ \mathbf{x})=\overline{Fp}^{+}_{\gamma,\ -\mu}(t,\ \mathbf{x}),$$
$$Fp^{-}_{\gamma,\mu}(t,\ x_1,\ x_2)=Fp^{+}_{\gamma,\mu}(t,\ x_1,\ -x_2), \tag{6.13}$$

где $\sigma=\gamma^{1/2}\exp(i\pi/4)$ а ξ, η — параболические координаты

$$2x_1=\xi^2-\eta^2,\qquad x_2=\xi\eta.$$

Система Fe определяется уравнениями

$$i\mathscr{H}_2 f=-{}^1/_4\gamma^2 f,\qquad (\mathscr{M}^2+4\mathscr{B}_1^2-4\mathscr{B}_2^2)\,f=-\mu f$$

(эквивалентными уравнениям строки 4а табл. 12, так как $\mathscr{H}_2=-i\left(\mathscr{B}_1^2+\mathscr{B}_2^2\right)$). Базисные функции имеют вид

$$fe_{\gamma,\ n}(\mathbf{x})=(r\pi)^{-1/2}\delta(r-\gamma)\begin{cases}\mathrm{ce}_n(\theta,\ \gamma^2/2), & n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\\ \mathrm{se}_{-n}(\theta,\ \gamma^2/2), & n=-1,\ -2,\ \ldots,\end{cases}$$
$$\gamma\geqslant0,\qquad \langle fe_{\gamma,n},\ fe_{\gamma',n'}\rangle=\delta(\gamma-\gamma')\,\delta_{nn'}, \tag{6.14}$$

где $\mathrm{ce}_n(\theta, q)$, $\mathrm{se}_n(\theta, q)$ — периодические функции Матье (Б.26) и r, θ — полярные координаты. Все собственные значения $\mu=\mu_n$ дискретны и имеют кратность, равную единице. Базисные функции $Fe_{\gamma,n}(t,\mathbf{x})=\exp(t\mathscr{H}_{-2})fe_{\gamma,n}(\mathbf{x})$ записываются в виде

$$Fe_{\gamma,n}(t,\ \mathbf{x})=\frac{A_{\gamma,n}}{4\pi i\tau}\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{1/2}\exp\left[i\tau(\cos^2\sigma+\mathrm{sh}^2\rho+\gamma^2)\right]\times$$
$$\times\begin{cases}\mathrm{ce}_n(\sigma,\ \gamma^2/2)\,\mathrm{Ce}_n(\rho,\ \gamma^2/2), & n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\\ \mathrm{se}_{-n}(\sigma,\ \gamma^2/2)\,\mathrm{Se}_{-n}(\rho,\ \gamma^2/2), & n=-1,\ -2,\ \ldots,\end{cases} \tag{6.15}$$

где $A_{\gamma,\,n}$ — константа нормировки, $\mathrm{Se}_n(\rho, q)$ и $\mathrm{Ce}_n(\rho, q)$ — модифицированные функции Матье (3.40) (см. разд. 1.3) и

$$x_1 = -2\tau\,\mathrm{ch}\,\rho\cos\sigma, \qquad x_2 = -2\tau\,\mathrm{sh}\,\rho\sin\sigma, \qquad t = \tau.$$

Система Lc (преобразованная таким образом, что $b = 0$) определяется уравнениями

$$i(\mathscr{K}_2 + a\mathscr{P}_1)f = \lambda f, \qquad \mathscr{B}_2^2 f = -{}^1\!/_4\rho^2 f, \qquad a \neq 0,$$

с базисными функциями вида

$$lc_{\lambda,\,\rho}(\mathbf{x}) = \frac{\delta(x_2 - \rho)}{(2\pi\,|\,a\,|\,)^{1/2}}\exp\left[-ia^{-1}\left(\lambda x_1 + \frac{\rho^2 x_1}{4} + \frac{x_1^3}{12}\right)\right], \tag{6.16}$$
$$\langle lc_{\lambda,\,\rho},\, lc_{\lambda',\,\rho'}\rangle = \delta(\lambda - \lambda')\,\delta(\rho - \rho'), \qquad -\infty < \lambda, \rho < \infty.$$

Базисные функции от трех переменных имеют вид

$$Lc_{\lambda,\,\rho}(t,\,\mathbf{x}) =$$
$$= \frac{(9a)^{-1/3}}{8iw\,(2\pi\,|\,a\,|\,)^{1/2}}\exp\left[i\left((u^2 + v^2)\frac{w}{4} - \frac{au}{w} - \frac{\rho v}{2} - \frac{a}{3w^3} - \frac{\lambda}{w}\right)\right]\times$$
$$\times \mathrm{Ai}\left[(36a)^{-1/3}\left(\frac{u}{a} + \frac{\lambda}{a} + \frac{\rho^2}{4a}\right)\right], \tag{6.17}$$

где $\mathrm{Ai}(z)$ — функция Эйри ((1.52), разд. 2.1). В данном случае

$$x_1 = uw + a/w, \qquad x_2 = vw, \qquad t = w.$$

Система Lp определяется уравнениями

$$i(\mathscr{K}_2 + a\mathscr{P}_1)f = \lambda f, \qquad (\{\mathscr{B}_2,\, \mathscr{M}\} + a\mathscr{P}_2^2)f = \mu f,$$

причем базисные функции имеют вид

$$lp_{\lambda,\,n}(\mathbf{x}) = (2\pi\,|\,a\,|)^{-1/2}\,h_n(x_2)\exp\left[-i\,(\lambda x_1 + x_1 x_2^2/4 + x_1^3/12)/a\right],$$
$$\langle lp_{\lambda,\,n},\, lp_{\lambda',\,n'}\rangle = \delta(\lambda - \lambda')\,\delta_{nn'}, \qquad -\infty < \lambda < \infty, \tag{6.18}$$
$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots .$$

В данном случае функция ангармонического осциллятора $h_n(x)$ является решением уравнения

$$\frac{d^2h(x)}{dx^2} - \left(\frac{\mu}{a} + \frac{\lambda x^2}{a^2} + \frac{x^4}{4a^2}\right)h(x) = 0, \quad \lambda,\ a \text{ фиксированы}, \tag{6.19}$$

таким, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\,h_n(x)\,|^2\,dx = 1. \tag{6.20}$$

Собственные значения $\mu = \mu_n(\lambda)$ уравнения (6.19) при условии (6.20) являются дискретными (см. [102]) и имеют кратность, равную единице; предполагается, что эти собственные значения упорядочены таким образом, что $\mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots$. Функция ангармонического осциллятора $h_n(x)$ либо четна, либо нечетна для каждого значения n.

Обозначим общее решение уравнения (6.19) через $h_{\mu, \lambda, a}(x)$. Выполняя разделение переменных, легко показать, что базисные функции $Lp_{\lambda, n}(t, \mathbf{x}) = \exp(t\mathscr{K}_{-2})\, lp_{\lambda, n}(\mathbf{x})$ имеют вид

$$\begin{aligned} Lp_{\lambda, n}(t, \mathbf{x}) &= \\ &= C_{\lambda, n} w^{-1} \exp\left\{ i\left[\frac{(u^2+v^2)^2 w}{16} - \frac{a(u^2-v^2)}{4w} - \frac{a^2}{12w^2} - \frac{\lambda}{w}\right]\right\} \times \\ &\qquad \times h_{2\mu_n, \lambda, a/2}(u)\, h_{2\mu_n, \lambda, a/2}(iv), \end{aligned} \tag{6.21}$$

где обе функции h имеют ту же четность, что и функции $h_n(x)$, а $C_{\lambda, n}$ является константой нормировки. (Заметим, что поскольку уравнение (6.19) инвариантно по отношению замены $x \to -x$, то для каждого μ, λ, a это уравнение имеет как единственное четное решение по x, так и единственное нечетное решение с точностью до некоторой мультипликативной константы нормировки.) Кроме того,

$$x_1 = (u^2 - v^2)\, w/2 + a/w, \qquad x_2 = uvw, \qquad t = w.$$

Система Rc определяется уравнениями

$$i\mathscr{D} f = \rho f, \qquad \{\mathscr{B}_1, \mathscr{P}_1\} f = \mu f,$$

причем базисные собственные функции имеют вид

$$\begin{gathered} rc^{\varepsilon\varepsilon'}_{\lambda\mu}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-1} \left(x_1\right)_{\varepsilon}^{-i\lambda - 1/2} \left(x_2\right)_{\varepsilon'}^{-i\mu - 1/2}, \\ -\infty < \lambda,\ \mu < \infty, \quad \varepsilon, \varepsilon' = \pm, \quad \lambda = \rho - \mu; \end{gathered} \tag{6.22}$$

см. (1.46). Соотношения ортогональности имеют вид

$$\left\langle rc^{\varepsilon\varepsilon'}_{\lambda, \mu}, rc^{\overline{\varepsilon\varepsilon'}}_{\bar\lambda, \bar\mu} \right\rangle = \delta_{\varepsilon\bar\varepsilon} \delta_{\varepsilon'\bar\varepsilon'} \delta(\lambda - \bar\lambda)\, \delta(\mu - \bar\mu).$$

Собственные функции от трех переменных определяются соотношением

$$\begin{aligned} Rc^{++}_{\lambda\mu}(t, \mathbf{x}) &= (8\pi^2 i w)^{-1} \left[\exp(i\pi/4)(2w)^{1/2}\right]^{-i(\lambda+\mu)+1} \times \\ &\qquad \times \Gamma(1/2 - i\lambda)\, \Gamma(1/2 - i\mu) \exp\left[\frac{i(u^2+v^2)}{8}\right] \times \\ &\qquad \times D_{i\lambda - 1/2}\left(\frac{-u}{(2i)^{1/2}}\right) D_{i\mu - 1/2}\left(\frac{-v}{(2i)^{1/2}}\right), \qquad t > 0, \end{aligned} \tag{6.23}$$

где $x_1 = |w|^{1/2}u$, $x_2 = |w|^{1/2}v$, $t = w$. Остальные базисные функции от трех переменных определяются равенствами

$$\begin{aligned} Rc^{++}_{\lambda\mu}(u,\ v) &= \exp[\pi(i+\lambda+\mu)]\,Rc^{--}_{\lambda\mu}(-u,\ -v) = \\ &= \exp[\pi(i/2+\lambda)]\,Rc^{-+}_{\lambda\mu}(-u,\ v) = \\ &= \exp[\pi(i/2+\mu)]\,Rc^{+-}_{\lambda\mu}(u,\ -v). \end{aligned} \tag{6.24}$$

Система Rr определяется уравнениями

$$\mathscr{D}f = i\rho f, \qquad \mathscr{M}f = imf.$$

Собственные функции вида

$$\begin{gathered} rr_{\rho,\,m}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-1} r^{i\rho-1} e^{im\theta}, \quad -\infty < \rho < \infty, \ m = 0, \pm 1, \ldots, \\ x_1 = r\cos\theta, \qquad x_2 = r\sin\theta, \end{gathered} \tag{6.25}$$

удовлетворяют следующим соотношениям ортогональности:

$$\langle rr_{\rho,\,m},\ rr_{\rho',\,m'}\rangle = \delta_{mm'}\delta(\rho-\rho').$$

Базисные функции от трех переменных имеют вид

$$\begin{aligned} Rr_{\rho,\,m}(t,\ \mathbf{x}) = 2^{-m+i\rho-2} \exp\left[i\pi\frac{(3m-1+i\rho)}{4}\right]\pi^{-1} w^{i\rho/2-1/2} \times \\ \times\Gamma\left(\frac{m+i\rho+1}{2}\right)\frac{u^m}{\Gamma(m+1)}\ {}_1F_1\left(\left.\begin{matrix}(m+1-i\rho)/2\\ m+1\end{matrix}\,\right|\frac{iu^2}{4}\right)\exp(imv), \end{aligned} \tag{6.26}$$

где

$$x_1 = \sqrt{w}\,u\cos v, \qquad x_2 = \sqrt{w}\,u\sin v, \qquad t = w > 0.$$

Система Re определяется уравнениями

$$\mathscr{D}f = i\lambda f, \qquad (\mathscr{M}^2 + {}^1\!/_2\{\mathscr{B}_2,\ \mathscr{P}_2\})\,f = \mu f.$$

Ортонормальный базис собственных функций имеет вид

$$re^{+}_{\lambda m}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-1/2} r^{i\lambda-1} Gc_m(\theta,\ {}^1\!/_4,\ -\lambda), \tag{6.27а}$$

$$re^{-}_{\lambda m}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-1/2} r^{i\lambda-1} Gs_m(\theta,\ {}^1\!/_4,\ -\lambda), \tag{6.27б}$$

$$m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\quad -\infty < \lambda < \infty,$$

где $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$ и введены следующие обозначения:

$$Gc_m(\theta,\ {}^1\!/_4,\ -\lambda) = \exp[i\cos(2\theta)/16]\,gc_m(\theta,\ {}^1\!/_4,\ -\lambda),$$

$$Gs_m(\theta,\ {}^1\!/_4,\ -\lambda) = \exp[i\cos(2\theta)/16]\,gs_m(\theta,\ {}^1\!/_4,\ -\lambda).$$

Функции $gc_m(\theta, \alpha, \beta)$, $gs_m(\theta, \alpha, \beta)$ суть соответственно четное и нечетное неполиномиальные решения уравнения Уиттекера — Хилла

$$\frac{d^2g}{d\theta^2} + \left(\mu + \frac{\alpha^2}{8} + \alpha\beta\cos 2\theta - \frac{\alpha^2}{8}\cos 4\theta\right)g = 0 \tag{6.28}$$

с периодом, равным 2π. Нижний индекс m (число нулей на отрезке $[0, 2\pi]$) отмечает дискретные собственные значения $\mu = \mu_m$ оператора $\mathcal{M}^2 + {}^1/_2\{\mathcal{B}_2, \mathcal{P}_2\}$. Эти обозначения введены Урвином и Арскоттом [127]. Каждое из решений Gc_m и Gs_m можно представить в виде бесконечного тригонометрического ряда по $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$ соответственно, сходящегося для дискретных собственных значений μ_m. Соотношения ортогональности имеют вид

$$\left\langle re^{\pm}_{\lambda m},\ re^{\pm}_{\lambda' m'}\right\rangle = \delta(\lambda - \lambda')\,\delta_{mm'}, \qquad \left\langle re^{\pm}_{\lambda m},\ re^{\mp}_{\lambda' m'}\right\rangle = 0,$$

причем базисные функции от трех переменных определяются соотношениями

$$\begin{aligned} Re^{+}_{\lambda m}(t, \mathbf{x}) &= K^{\lambda +}_{m} w^{(i\lambda - 1)/2} Gc_m(iu, {}^1/_4, -\lambda)\, Gc_m(v, {}^1/_4, -\lambda), \\ Re^{-}_{\lambda m}(t, \mathbf{x}) &= K^{\lambda -}_{m} w^{(i\lambda - 1)/2} Gs_m(iu, {}^1/_4, -\lambda)\, Gs_m(v, {}^1/_4, -\lambda), \end{aligned} \tag{6.29}$$

где

$$x_1 = \sqrt{w}\,\mathrm{ch}\,u \cos v, \qquad x_2 = \sqrt{w}\,\mathrm{sh}\,u \sin v, \qquad t = w > 0.$$

В принципе константы $K^{\lambda\pm}_{m}$ можно вычислить; для этого нужно лишь выбрать частные значения параметров u, v, w. В самом деле, в процессе нахождения функций $Re^{\pm}$ при помощи разделения переменных мы получаем соотношения

$$K^{\lambda +}_{m} Gc_m(iu, {}^1/_4, -\lambda)\, Gc_m(v, {}^1/_4, -\lambda) = \exp\left[i\left(\mathrm{sh}^2 u + \cos^2 v\right)/4\right] \times$$
$$\times \int_{-\pi}^{\pi} Gc_m(\theta, {}^1/_4, -\lambda) \exp\left[-i(\mathrm{ch}\,u\ \mathrm{ccs}\ v \cos\theta + \mathrm{sh}\,u \sin v \sin\theta)^2/8\right] \times$$
$$\times D_{i\lambda - 1}\left(-[\mathrm{ch}\,u \cos v \cos\theta + \mathrm{sh}\,u \sin v \sin\theta]/(2i)^{1/2}\right) d\theta$$

и аналогичные соотношения для функций $Gs_n(\theta, {}^1/_4, -\lambda)$. Константы $K^{\lambda\pm}_{m}$ вычисляются при конкретных значениях аргументов; например, если $Gc_m(\theta, {}^1/_4, -\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} A^m_k \cos 2k\theta$, то

$$K^{\lambda +}_{m} = 2\pi D_{i\lambda - 1}(0)\, A^m_0 \left[Gc_m(\pi/2, {}^1/_4, -\lambda)\, Gc_m(0, {}^1/_4, -\lambda)\right]^{-1}.$$

На этом мы закончим определение базисов пространства решений уравнения Шредингера (5.2).

Так же как в разд. 2.1, можно показать, что эти результаты приводят к целому ряду теорем относительно расширения гильбертова пространства. Так, если $\{f_{\lambda\mu}\}$ — о. н. базис для $L_2(R_2)$, то $\{\mathbf{U}(g) f_{\lambda\mu}\}$ для любого $g \in G_3$ также является о. н. базисом. В частности, каждая из построенных выше моделей в случае трех переменных обеспечивает базис для $L_2(R_2)$ (а также базис решений уравнения (5.2)). Кроме того, для каждого базиса можно получить дискретные и непрерывные производящие функции.

Теперь определим некоторые м. э. с. б. $\langle Aa_{\lambda\mu}, Bb_{\lambda'\mu'}\rangle$, которые позволят нам разложить собственные функции $Aa_{\lambda\mu}$ по собственным функциям $Bb_{\lambda'\mu'}$. Полезность этих формул заключается в том, что они инвариантны под действием группы G, и, следовательно, эти же выражения позволят нам выполнить разложение $\mathrm{U}(g)Aa_{\lambda\mu}$ по $\mathrm{U}(g)Bb_{\lambda'\mu'}$, где результаты могут быть гораздо менее очевидными. Ниже мы вычислим некоторые представляющие определенный интерес м. э. с. б., используя для этого базисы по двум переменным. Вследствие инвариантности G_3 аналогичные результаты имеют место и для базисов по трем переменным.

Мы не рассматриваем здесь м. э. с. б., связанные с дискретным базисом *oe*. Этот базис представляет особый интерес, но определение таких м. э. с. б. связано с применением гильбертова пространства Баргманна — Сегала аналитических функций, рассматривать которое мы не будем. Подробные результаты можно найти в работе [24]; там же дается анализ интересной связи между многочленами Айнса и теорией представлений алгебры $SU(2)$. Для большинства остальных базисов мы даем м. э. с. б. с одним из дискретных базисов *oc* или *or*. (Принцип, по которому строятся нижеследующие вычисления, очевиден, поэтому все остальные м. э. с. б. читатель может определить сам.)

$$\langle fc_{\gamma,\alpha}, or^{\pm}_{nm}\rangle = \gamma^{1/2} or^{\pm}_{nm}(\gamma\cos\alpha,\ \gamma\sin\alpha); \tag{6.30}$$

$$\langle fr_{\gamma,p}, or^{\pm}_{nm}\rangle = \begin{cases} 0, \text{ если } p \neq \pm m; \\ \left[\dfrac{\gamma m!}{2^{m+1}(n+m)!}\right]^{1/2} \exp\left(\dfrac{-\gamma^2}{4}\right)\gamma^m L_n^{(m)}\left(\dfrac{\gamma^2}{2}\right), \\ \qquad \text{если берется знак } + \text{ и } p = \pm m \neq 0; \\ \dfrac{ip}{m}\left[\dfrac{\gamma m!}{2^{m+1}(n+m)!}\right]^{1/2} \exp\left(\dfrac{-\gamma^2}{4}\right)\gamma^m L_n^{(m)}\left(\dfrac{\gamma^2}{2}\right), \\ \qquad \text{если берется знак } - \text{ и } p = \pm m \neq 0; \\ \left(\dfrac{4\gamma}{n!}\right)^{1/2} \exp\left(\dfrac{-\gamma^2}{4}\right) L_n^{(0)}\left(\dfrac{\gamma^2}{2}\right), \\ \qquad\qquad \text{если } p = m = 0; \end{cases} \tag{6.31}$$

$$\langle fp^{+}_{\gamma\mu}, or^{\pm}_{nm}\rangle = \left[\frac{\gamma m!}{2^m\pi(n+m)!}\right]^{1/2} \exp\left(\frac{-\gamma^2}{4}\right)\gamma^m L_n^{(m)}\left(\frac{\gamma^2}{2}\right)\times$$
$$\times\exp\left[-\pi i\frac{1\mp 1}{4}\right](a_m \pm a_{-m});$$

$$\langle fp^{-}_{\gamma\mu}, or^{\pm}_{nm}\rangle = \langle fp^{+}_{\gamma\mu}, or^{\pm}_{n,-m}\rangle;$$

$$a_m = \exp\left[\pi\frac{i/2-\mu}{2}\right]\Gamma(m+{}^1/_2)\left[\frac{(-1)^m\,\Gamma({}^1/_2+i\mu)}{\Gamma(m+i\mu+{}^1/_2)}\times\right.$$

$$\times {}_2F_1\left(\begin{matrix} {}^1\!/_2 + i\mu, & {}^1\!/_2 + m \\ \multicolumn{2}{c}{m + i\mu + 1} \end{matrix}\middle| -1\right) - \frac{i\Gamma\,({}^1\!/_2 - i\mu)}{\Gamma\,(m - i\mu + 1)} \times$$

$$\times {}_2F_1\left(\begin{matrix} {}^1\!/_2 - i\mu, & {}^1\!/_2 + m \\ \multicolumn{2}{c}{m - i\mu + 1} \end{matrix}\middle| -1\right)\Bigg]; \qquad (6.32)$$

$$\langle fe_{\gamma,\,p},\ or^{+}_{nm}\rangle = \theta\,(p)\left(1 + (-1)^{m-p}\right) A^p_m \left[\frac{\gamma m!}{2^{m+2}\pi^2\,(n+m)!}\right]^{1/2} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{-\gamma^2}{4}\right) \gamma^m L^{(m)}_n\left(\frac{\gamma^2}{2}\right); \qquad (6.33)$$

здесь $\theta(x) = 1$, если $x \geqslant 0$, и $\theta(x) = 0$ в противном случае. Подобное выражение для $\langle fe_{\gamma,\,p}, or^{-}_{nm}\rangle$ получается при замене в (6.33) $\theta(p)$ на $\theta(-p)$ и A^p_m на B^p_m. Здесь A^p_m, B^p_m — коэффициенты в разложениях в тригонометрические ряды четной и нечетной функций Матье соответственно. Кроме того,

$$\langle lc_{\lambda,\,p},\ oc_{n,\,m}\rangle = \exp\left(-\rho^2/4\right)\left(2^{m-1}\pi m!\right)^{-1/2} H_m\left(\rho/\sqrt{2}\right) C_n, \qquad (6.34)$$

где константы C_n определяются из соотношения

$$2^{2/3}\exp\left[-i\left({}^1\!/_6 + \lambda + \rho^2/4 + \sqrt{2y}\right)\right] \mathrm{Ai}\left[2^{2/3}\left({}^1\!/_4 - i\lambda - i\rho^2/4 - i\,(2y)^{1/2}\right)\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left((2i)^{1/2}\,y\right)^n/n!\right] C_n$$

и все величины нормированы таким образом, что $a = -1$;

$$\langle lc_{\lambda,\,\rho},\ lp_{\mu,\,n}\rangle = (2\pi\ |a|)^{-1}\,\bar{h}_n(\rho)\,\delta\left[(\lambda - \mu)/a\right], \qquad (6.35)$$

$$\langle rc^{++}_{\lambda\mu},\ oc_{n,\,m}\rangle = \pi^{-2}\left(2^{m+n+3}n!m!\right)^{-1/2} \mathscr{L}^{\lambda}_m \mathscr{L}^{\mu}_n, \qquad (6.36)$$

где

$$\mathscr{L}^{\lambda}_m = \begin{cases} 2^{m+i\lambda-1/2}\Gamma\,(i\lambda/2 + 1/4)\,\Gamma\,((m+1)/2)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} -m/2, & i\lambda/2 + 1/4 \\ \multicolumn{2}{c}{1/2} \end{matrix}\middle| 2\right), \\ \hfill m \text{ четное} \\ 2^{m+i\lambda+1}\Gamma\,(i\lambda/2 + 1/4)\,\Gamma\,(m/2)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} (1-m)/2, & i\lambda/2 + 3/4 \\ \multicolumn{2}{c}{3/2} \end{matrix}\middle| 2\right), \\ \hfill m \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Остальные м. э. с. б. для rc^{+-}, rc^{-+} и rc^{--} вычисляются при помощи равенств (6.24).

Нетрудно убедиться, что имеют место следующие соотношения:

$$\langle rr^{+}_{\lambda m},\ or_{nm'}\rangle = \delta_{mm'}(2/n!)^{m/2-i\lambda}[(m+n)!/m!]^{1/2}\times$$

$$\times\Gamma((m+1-i\lambda)/2)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n, & (m+1-i\lambda)/2\\ & m+1\end{matrix}\middle|\,2\right), \qquad (6.37)$$

$$\langle rr^{-}_{\lambda m},\ or_{nm'}\rangle = -i(-1)^{\operatorname{sign} m}\langle rr^{+}_{\lambda m},\ or_{nm'}\rangle, \qquad (6.38)$$

$$\langle rr^{+}_{\lambda 0},\ or_{nm'}\rangle = \delta_{0m'}\left(2^{-1/2-i\lambda}/(n!)^{1/2}\right)\Gamma((1-i\lambda)/2)\times$$

$$\times{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n, & (1-i\lambda)/2\\ & 1\end{matrix}\middle|\,2\right); \qquad (6.39)$$

$$\langle oc_{n_1n_2},\ or^{\pm}_{nm}\rangle = K\delta_{n_1+n_2,\,2n+m}i^{n_1}\left(2^{2n+m+1}n!n_2!\,(n+m)!/n_1!\right)^{1/2}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}\Big[i^{m}\{\Gamma((n_1+n_2-m)/2)\,\Gamma((n_2-n_1+m)/2)\}^{-1}\times$$

$$\times{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n_1, & 1-(n_1+n_2+m)/2\\ & (n_2-n_1-m)/2\end{matrix}\middle|-1\right)\pm i^{-m}\{\Gamma((n_1+n_2-m)/2)\times$$

$$\times\Gamma((n_2-n_1+m)/2)\}^{-1}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n_1, & 1-(n_1+n_2-m)/2\\ & (n_2-n_1+m)/2\end{matrix}\middle|-1\right)\Big]. \qquad (6.40)$$

Для базиса *re* имеем

$$\langle re^{+}_{\lambda m},\ or^{+}_{nm'}\rangle = {}^1/_2\left(1+(-1)^{m-m'}\right)\overline{A}^{m}_{m'}\,(2\pi)^{1/2}\langle rr^{+}_{\lambda m'},\ or_{nm'}\rangle, \qquad (6.41)$$

$$\langle re^{-}_{\lambda m},\ or^{-}_{nm'}\rangle = {}^1/_2\left(1+(-1)^{m-m'}\right)\overline{B}^{m}_{m'}\,(2\pi)^{1/2}\langle rr^{-}_{\lambda m'},\ or_{nm'}\rangle, \qquad (6.42)$$

где $\overline{A}^{m}_{m'}$ и $\overline{B}^{m}_{m'}$ — коэффициенты в разложениях функций $gc_m(\theta, {}^1/_4, -\lambda)$ и $gs_m(\theta, {}^1/_4, -\lambda)$ соответственно в тригонометрические ряды (Б.26); см. [127].

2.7. Вещественное и комплексное уравнения теплопроводности $(\partial_t - \partial_{xx} - \partial_{yy})\Phi = 0$

Уравнение теплопроводности в трехмерном пространстве-времени, нормированное надлежащим образом, имеет вид

$$Q\Phi = 0, \qquad Q = \partial_t - \partial_{x_1x_1} - \partial_{x_2x_2}, \qquad (7.1)$$

где t, x_1, x_2 — вещественные переменные времени и пространства соответственно. Поскольку это уравнение можно получить из уравнения Шредингера (5.2), заменив в последнем t на $-it$, алгебры симметрии этих двух уравнений тесно связаны между собой. Алгебра симметрии уравнения (7.1) девятимерна и имеет базис

$$\begin{aligned}
&H_2 = t^2\partial_t + tx_1\partial_{x_1} + tx_2\partial_{x_2} + t + (x_1^2 + x_2^2)/4, \quad H_{-2} = \partial_t,\\
&P_j = \partial_{x_j}, \quad B_j = t\partial_{x_j} + x_j/2, \quad M = x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1}, \qquad (7.2)\\
&H^0 = x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + 2t\partial_t + 1, \quad H_0 = 1, \quad j = 1,\ 2.
\end{aligned}$$

Соотношения коммутирования алгебры симметрии этого уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
&[H^0, H_{\pm 2}] = \pm 2H_{\pm 2}, \quad [H^0, B_j] = B_j, \quad [H^0, P_j] = -P_j,\\
&[P_j, H_2] = B_j, \quad [P_j, B_j] = {}^1\!/_2 H_0, \quad [P_j, B_l] = 0,\\
&[H_{-2}, H_2] = H^0, \quad [H_{\pm 2}, M] = [H_2, B_j] = [H_{-2}, P_j] = [H^0, M] = 0,\\
&[B_j, M] = (-1)^{j+1} B_l, \quad [H_{-2}, B_j] = P_j, \quad [P_j, M] = (-1)^{j+1} P_l, \qquad (7.3)\\
&j,\ l = 1,\ 2, \quad j \neq l,
\end{aligned}$$

а H_0 принадлежит центру алгебры. Обозначим через $\mathcal{G}'_3$ вещественную алгебру Ли с базисом (7.2). Пятимерная подалгебра Вейля $\mathcal{W}_2$ алгебры $\mathcal{G}'_3$ натягивается на операторы B_j, P_j, H_0, и локальная теория Ли определяет соответствующее локальное действие группы

$$\mathbf{T}(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \rho)\Psi(t, \mathbf{x}) = \exp\left[\frac{1}{2}\mathbf{x}\cdot\mathbf{w} + \frac{t}{4}\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} + \rho\right]\Psi(t, \mathbf{x} + t\mathbf{w} + \mathbf{z}), \qquad (7.4)$$

где $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{w} = x_1w_1 + x_2w_2$ и w_j, z_j, $\rho \in R$. Эти операторы действуют на пространство $\mathcal{F}$ функций $\Psi(t, \mathbf{x})$, аналитических в некоторой заданной области $\mathcal{D}$ трехмерного пространства. Кроме того, эти операторы отображают решения уравнения теплопроводности в решения.

Аналогичным образом трехмерная подалгебра $sl(2, R)$ натягивается на операторы $H_{\pm 2}$, H_0, которые определяют операторы

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(A)\Psi(t, \mathbf{x}) = \exp&\left[-\frac{\beta}{4}(\delta + t\beta)^{-1}\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\right]\times\\
&\times(\delta + t\beta)^{-1}\,\Psi\left(\frac{\gamma + t\alpha}{\delta + t\beta}, (\delta + t\beta)^{-1}\mathbf{x}\right), \qquad (7.5)\\
A = &\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in SL(2, R), \qquad \Psi \in \mathcal{F},
\end{aligned}$$

характеризующие локальное представление группы $SL(2, R)$. Оператор M определяет локальное представление группы $SO(2)$:

$$\mathbf{T}(\theta)\Psi(t, \mathbf{x}) = \Psi(t, \mathbf{x}\Theta), \qquad \Theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}. \qquad (7.6)$$

При помощи выражений, аналогичных (5.10) и (5.11), локальную группу Ли G_3' операторов симметрии $\mathbf{T}$ можно представить в виде полупрямого произведения W_2 и $SL(2, R) \times SO(2)$.

Здесь необходимо указать в явном виде частный случай формул (7.5), когда

$$A_0 = 2^{-1/2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_0^8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а именно случай

$$\mathbf{T}(A_0)\Psi(t, \mathbf{x}) = \exp\left[-\frac{1}{4}(1+t)^{-1}\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\right]\frac{\sqrt{2}}{1+t}\Psi\left(\frac{t-1}{t+1}, \ \frac{\sqrt{2}}{t+1}\mathbf{x}\right),$$

$$\mathbf{T}\left(A_0^2\right)\Psi(t, \mathbf{x}) = \exp\left[-\frac{1}{4t}\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\right]t^{-1}\Psi\left(-t^{-1}, \ t^{-1}\mathbf{x}\right),$$

$$\mathbf{T}\left(A_0^4\right)\Psi(t, \mathbf{x}) = -\Psi(t, -\mathbf{x}) \tag{7.7}$$

(где $\mathbf{T}\left(A_0^2\right)$ — *преобразование Аппеля* [4, 14]), который будет полезен нам в дальнейшем.

Задача R-разделения переменных для уравнения теплопроводности (7.1) аналогична задаче для уравнения Шредингера для свободной частицы (5.2), и результаты, получаемые в этих задачах, подобны [55]. Решения уравнения (7.1) с R-разделенными переменными имеют вид

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \exp[\mathscr{R}(u, v, w)]\, U(u)\, V(v)\, W(w), \quad \mathscr{R} \text{ вещественно,} \tag{7.8}$$

где либо $\mathscr{R} \equiv 0$, либо $\mathscr{R} \not\equiv 0$ нельзя записать в виде суммы $\mathscr{R} = A(u) + B(v) + C(w)$. Необходимо, чтобы система $\{u, v, w\}$ была вещественной аналитической системой координат, такой, чтобы подстановка (7.8) в (7.1) сводила это дифференциальное уравнение в частных производных к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям, причем каждому из множителей U, V, W должно соответствовать одно уравнение. Две системы координат считаются эквивалентными, если в результате сопряженного действия группы G_3' из одной системы можно получить другую.

В работе [55] указывается, что каждому случаю R-разделения переменных для уравнения (7.1) можно поставить в соответствие пару дифференциальных операторов H, S, таких, что

1) H и S являются операторами симметрии уравнения (7.1) и $[H, S] = 0$;

2) $H \in \mathscr{G}_3'$, т. е. H — оператор первого порядка по x_1, x_2 и t;

3) S — оператор второго порядка по x_1, x_2 и не содержит членов с ∂_t.

Процедура R-разделения переменных определяется системой уравнений

$$Q\Phi = 0, \quad H\Phi = i\lambda\Phi, \quad S\Phi = \mu\Phi, \tag{7.9}$$

где собственные значения λ, μ — обычные константы разделения для решений Φ с R-разделенными переменными.

Из этих замечаний следует, что S можно всегда представить как симметричную квадратичную форму от B_j, P_j, E и M. Возможные системы координат и их характеристики представлены в табл. 13.

Для каждой системы координат, представленной в табл. 13, имеет место соотношение $w = t$ и решение с разделенными переменными от переменной w является экспоненциальной функцией. В последнем столбце таблицы сначала дается решение от переменной u, а затем решение от переменной v. Функции ангармонического осциллятора являются решениями дифференциального уравнения вида

$$f''(u) + (\lambda u^2 + au^4 - \beta) f(u) = 0. \qquad (7.10)$$

С точки зрения группы симметрии галилеевых преобразований и растяжений существуют 26 различных систем координат. Если же учитывать только G_3'-симметрию, то мы имеем всего лишь 17 систем. Легко показать, что две системы, обозначения которых различаются только верхними индексами, лежат на одной и той же G_3'-орбите. В самом деле, системы вида Fa^1 и Fa^2 либо вида La^1 и La^2 связаны оператором $\mathbf{T}(A_0^2)$, определенным в (7.7), а системы вида Ra^1 и Ra^2 связаны оператором $\mathbf{T}(A_0)$. Только эти системы и являются эквивалентными относительно G_3'.

Для рассматриваемого нами уравнения особый интерес представляют собственные функции коммутирующей пары H^0, M^2. Из табл. 13 видно, что соответствующие собственные функции разделяются в переменных $u = [(x^2 + y^2)/t]^{1/2} = rt^{-1/2}$, $v = \theta$, $w = t$, где $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Кроме того, решения $\Phi_{m,n}(t, \mathbf{x})$ уравнения теплопроводности (ограниченные в точке $\mathbf{x} = 0$), удовлетворяющие соотношениям

$$H^0\Phi_{m,n} = (m + 2n + 1)\Phi_{m,n}, \quad M\Phi_{m,n} = im\Phi_{m,n}, \qquad (7.11)$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = n, n-1, \ldots, n,$$

можно представить в виде многочленов Лагерра

$$\Phi_{m,n}(t, \mathbf{x}) = t^n \left(re^{i\theta}\right)^m L_n^{(m)}\left(-r^2/(4t)\right). \qquad (7.12)$$

Анализ разложений решений уравнения теплопроводности по многочленам Лагерра можно найти в работах [28] и [135].

Известно, что если $f(\mathbf{x})$ — ограниченная непрерывная функция, определенная в плоскости R_2, то существует единственное решение $\Phi(t, \mathbf{x})$ уравнения теплопроводности, ограниченное и непрерывное по $(t, \mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in R_2$, $t \geqslant 0$, непрерывно дифференцируемое по t, дважды непрерывно дифференцируемое по

Таблица 13

ОПЕРАТОРЫ И КООРДИНАТЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ R-РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $(\partial_t - \partial_{xx} - \partial_{yy})\,\Phi = 0$

	Операторы H, $\mathfrak{S}$	Координаты $\{u, v, w\}$	Множитель $e^{\mathcal{R}}$	Решения с разделенными переменными
1а	Fc^1 H_2, B_1^2	$x = uw$ $y = vw$	$\mathcal{R} = -(u^2+v^2)\,w/4$	Экспоненциальная функция Экспоненциальная функция
1б	Fc^2 H_{-2}, P_1^2	$x = u$ $y = v$	0	Экспоненциальная функция Экспоненциальная функция
2а	Fr^1 H_2, M^2	$x = uw \cos v$ $y = uw \sin v$	$-u^2 w/4$	Функция Бесселя Экспоненциальная функция
2б	Fr^2 H_{-2}, M^2	$x = u \cos v$ $y = u \sin v$	0	Функция Бесселя Экспоненциальная функция
3а	Fp^1 $H_2, \{B_2, M\}$	$x = (u^2 - v^2)\,w/2$ $y = uvw$	$-(u^2+v^2)^2\,w/16$	Функция параболического цилиндра Функция параболического цилиндра
3б	Fp^2 $H_{-2}, \{P_2, M\}$	$x = (u^2 - v^2)/2$ $y = uv$	0	Функции параболического цилиндра
4а	Fe^1 $H_2, M^2 - B_2^2$	$x = w \operatorname{ch} u \cos v$ $y = w \operatorname{sh} u \sin v$	$-(\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 v)\,w/4$	Модифицированная функция Матье Функция Матье

4б	Fe^2 $H_{-2}, M^2 - P_2^2$	$x = \operatorname{ch} u \cos v$ $y = \operatorname{sh} u \sin v$	0	Модифицированная функция Матье Функция Матье
5а	Lc^1 $H_2 - 2aP_1 - 2bP_2,$ $B_2^2 - 2bP_2H_0$	$x = uw + a/w$ $y = vw + b/w$	$-(u^2+v^2)w/4 +$ $+(au+bv)/2w$	Функция Эйри Функция Эйри
5б	Lc^2 $H_{-2} + 2aB_1 + 2bB_2,$ $P_1^2 + 2aB_1H_0$	$x = u + aw^2$ $y = v + bw^2$	$-(au+bv)w$	Функция Эйри Функция Эйри
6а	Lp^1 $H_2 - aP_1,$ $\{B_2, M\} - aP_2^2$	$x = (u^2 - v^2)w/2 + a/w$ $y = uvw$	$-(u^2+v^2)^2 w/16 +$ $+a(u^2-v^2)/4w$	Функция ангармонического осциллятора Функция ангармонического осциллятора
6б	Lp^2 $H_{-2} - 2aB_1,$ $\{P_2, M\} + 2aB_2^2$	$x = (u^2 - v^2)/2 + aw^2$ $y = uv$	$-a(u^2-v^2)w/2$	Функция ангармонического осциллятора Функция ангармонического осциллятора
7	Oc $H_{-2} + H_2,$ $P_1^2 + B_1^2$	$x = u(1+w^2)^{1/2}$ $y = v(1+w^2)^{1/2}$	$-(u^2+v^2)w/4$	Функция параболического цилиндра Функция параболического цилиндра
8	Or $H_{-2} + H_2, M^2$	$x = (1+w^2)^{1/2} u \cos v$ $y = (1+w^2)^{1/2} u \sin v$	$-u^2w/4$	Функция Уиттекера Экспоненциальная функция

Продолжение табл. 13

	Операторы H, S	Координаты $\{u, v, w\}$	Множитель $e^{\mathcal{R}}$	Решения с разделенными переменными
9	Oe $H_{-2}+H_2$, $M^2-P_2^2-B_2^2$	$x=(1+w^2)^{1/2}\operatorname{ch}u\cos v$ $y=(1+w^2)^{1/2}\operatorname{sh}u\sin v$	$-(\operatorname{sh}^2u+\cos^2v)\,w/4$	Функция Айнса Функция Айнса
10а	Rc^1 H^0, $\{B_1, P_1\}$	$x=\|w\|^{1/2}u$ $y=\|w\|^{1/2}v$	0	Функция Эрмита Функция Эрмита
10б	Rc^2 $H_{-2}-H_2$, $P_1^2-B_1^2$	$x=u\,\|1-w^2\|^{1/2}$ $y=v\,\|1-w^2\|^{1/2}$	$-\varepsilon(u^2+v^2)\,w/4$ $\varepsilon=\operatorname{sign}(1-w^2)$	Функция Эрмита Функция Эрмита
11а	Rr^1 H^0, M^2	$x=\|w\|^{1/2}u\cos v$ $y=\|w\|^{1/2}u\sin v$	0	Функция Лагерра Экспоненциальная функция
11б	Rr^2 $H_{-2}-H_2$, M	$x=\|1-w^2\|^{1/2}u\cos v$ $y=\|1-w^2\|^{1/2}u\sin v$	$-\varepsilon u^2w/4$	Функция Лагерра Экспоненциальная функция
12а	Re^1 H_0, $M^2-{}^1/_2\{B_2, P_2\}$	$x=\|w\|^{1/2}\operatorname{ch}u\cos v$ $y=\|w\|^{1/2}\operatorname{sh}u\sin v$	0	Многочлен Айнса Многочлен Айнса

12б	Re^2 $H_{-2} - H_2$, $M^2 - P_2^2 + B_2^2$	$x = \|1 - w^2\|^{1/2} \operatorname{ch} u \cos v$ $y = \|1 - w^2\|^{1/2} \operatorname{sh} u \sin v$	$-\varepsilon (\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 v)\, w/4$	Многочлен Айнса Многочлен Айнса
13	$L1$ P_1, $B_2^2 + 2bP_2H_0$	$x = u$ $y = vw + b/w$	$-v^2w/4 + bv/2w$	Экспоненциальная функция Функция Эйри
14	$L2$ P_1, $P_2^2 + 2aB_2H_0$	$x = u$ $y = v + aw^2$	$-avw$	Экспоненциальная функция Функция Эйри
15	$O1$ P_1, $P_2^2 + B_2^2$	$x = u$ $y = v(1 + w^2)^{1/2}$	$-v^2w/4$	Экспоненциальная функция Функция параболического цилиндра
16	$R1$ P_1, $\{B_2, P_2\}$	$x = u$ $y = v\|w\|^{1/2}$	0	Экспоненциальная функция Функция Эрмита
17	$R2$ P_1, $P_2^2 - B_2^2$	$x = u$ $y = v\|1 - w^2\|^{1/2}$	$-\varepsilon v^2w/4$	Экспоненциальная функция Функция Эрмита

x_1, x_2 для всех $\mathbf{x} \in R_2$, $t > 0$ и такое, что $\Phi(0, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ [109], а именно решение

$$\Phi(t,\ \mathbf{x}) = (4\pi t)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \exp\left[-(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})/(4t)\right] f(\mathbf{y})\, dy_1\, dy_2 = \\ = I^t(f), \qquad t > 0. \tag{7.13}$$

Построим иную модель алгебры симметрии (7.2) (аналогичную работу мы уже выполняли в разд. 2.2). Прежде всего ограничим операторы (7.2) на пространство решений уравнения теплопроводности, что даст нам возможность заменить в формулах для этих операторов ∂_t на Δ_2 и рассматривать $t \geqslant 0$ как фиксированный параметр. Теперь операторы (7.2) являются операторами симметрии в фиксированный момент времени t. При $t = 0$ операторы (7.2) принимают вид

$$\mathcal{H}_2 = (x_1^2 + x_2^2)/4, \quad \mathcal{H}_{-2} = \Delta_2, \quad \mathcal{P}_j = \partial_{x_j}, \quad \mathcal{B}_j = x_j/2, \\ \mathcal{M} = x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1}, \quad \mathcal{H}^0 = x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + 1, \\ \mathcal{H}_0 = 1, \quad j = 1,\ 2, \tag{7.14}$$

и, когда эти операторы действуют на пространство, скажем, $\mathcal{F}_0$ бесконечно дифференцируемых функций $f(\mathbf{x})$ в R_2 с компактным носителем, они удовлетворяют обычным соотношениям коммутирования (7.3).

Так же как в разд. 2.2, выражение (7.13) можно представить в виде

$$\Phi(t,\ \mathbf{x}) = I^t(f) = \exp(t\Delta_2) f(\mathbf{x}) = \exp(t\mathcal{H}_{-2}) f(x), \quad f \in \mathcal{F}_0, \quad t > 0, \tag{7.15}$$

и показать, что операторы H (7.2) и $\mathcal{H}$ (7.14) связаны соотношением

$$H \exp(t\mathcal{H}_{-2}) = \exp(t\mathcal{H}_{-2})\, \mathcal{H}, \tag{7.16}$$

где $H \in \mathcal{G}'_3$ и оператор $\mathcal{H}$ получается из H, если положить $t = 0$. Кроме того, имеет место соотношение

$$\exp(aH) \exp(t\mathcal{H}_{-2}) = \exp(t\mathcal{H}_{-2}) \exp(a\mathcal{H}), \tag{7.17}$$

и можно показать, что уравнения

$$\partial_t\Phi = \left(\Delta_2 + a_1\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + a_2\partial_{x_1} + a_3\partial_{x_2} + a_4\left(x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1}\right) + \right. \\ \left. + a_5x_1 + a_6x_2 + a_7\left(x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2}\right) + a_8\right)\Phi, \qquad a_j \in R, \tag{7.18}$$

имеют изоморфные алгебры симметрии и эквивалентны уравнению (7.1). Рассмотренные нами в разд. 2.2 способы решения задачи Коши применимы и для уравнений вида (7.18), Здесь полезно рассмотреть метод построения в явном виде решений уравнения теплопроводности, который с равным успехом применяется и при решении многих других уравнений, исследуемых в настоящей книге. Каждая система координат, допускающая R-разделение переменных для уравнения (7.1), связана с парой коммутирующих операторов, один из которых является оператором первого порядка. Диагонализируя этот оператор первого порядка, можно выделить соответствующую координату и тем самым свести уравнение теплопроводности к некоторому уравнению, в котором число переменных на единицу меньше, чем в исходном. Например, диагонализируя оператор симметрии ∂_t, мы выделяем переменную t и получаем решения

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \exp(-k^2 t) F(\mathbf{x}),$$

где F — любое решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta_2 F + k^2 F = 0. \tag{7.19}$$

Это довольно очевидное утверждение оказывается менее тривиальным, если учесть тот факт, что каждый оператор симметрии $\mathbf{T}(g)$, определяемый формулами (7.4)—(7.6), отображает Φ в другое решение $\mathbf{T}(g)\Phi$. Например, если $g = A_0$, где A_0 определено в (7.7), то

$$\mathbf{T}(A_0)\Phi(t, \mathbf{x}) = \exp[(-k^2(t-1) - {}^1\!/_2 \mathbf{x}\cdot\mathbf{x})/(t+1)] \times \\ \times 2^{1/2}(t+1)^{-1} F(2^{1/2}\mathbf{x}/(t+1)), \tag{7.20}$$

где F — произвольное решение уравнения Гельмгольца (7.19), является решением уравнения теплопроводности. Выбирая соответствующие групповые элементы g и решения F, можно построить такие решения уравнения теплопроводности, которые удовлетворяли бы целому ряду начальных и граничных условий. Примеры таких решений можно найти в работе Бейтмена [14].

Теперь рассмотрим комплексное уравнение теплопроводности, т. е. уравнение (7.1), где t, x_1, x_2 — комплексные переменные. Очевидно, что алгебра симметрии $\mathcal{G}_3^c$ этого уравнения девятимерна (и комплексна) и имеет базис (7.2). Вычисляя экспоненты операторов базиса, можно получить локальную группу Ли G_3^c операторов симметрии, действующую на пространстве $\mathcal{F}$ функций $\Psi(t, \mathbf{x})$, аналитических в некоторой области $\mathcal{D}$ комплексного пространства (t, x_1, x_2). Действие этой группы определяется соотношениями (7.4)—(7.6), где теперь параметры $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$ и ρ принимают произвольные комплексные значения, а матрицы $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ принадлежат группе $SL(2, \mathbb{C})$. Само собой разумеется, эти операторы отображают решения комплексного уравнения теплопроводности в решения же.

Задача R-разделения переменных для этого уравнения формулируется точно так же, как для комплексного уравнения теплопроводности $(\partial_t - \partial_{xx})\Phi = 0$ в разд. 2.2. Предполагается, что все системы, допускающие R-разделение переменных для нашего уравнения, соответствуют паре коммутирующих операторов симметрии в обертывающей алгебре алгебры $\mathcal{G}_3^c$. Ясно, что все перечисленные в табл. 12 и 13 вещественные системы, допускающие R-разделение переменных, можно аналитически продолжить, с тем чтобы получить системы, допускающие R-разделение переменных для комплексного уравнения теплопроводности. Следует заметить, что каждая система Aa табл. 12 комплексно эквивалентна системе Aa табл. 13, а системы Oc, Or, Oe комплексно эквивалентны системам Rc, Rr, Re соответственно.

Существуют и такие допускающие R-разделение переменных системы, которые не являются комплексными эквивалентами систем, представленных в табл. 12 и 13. Например, если диагонализировать оператор ∂_t, то уравнение (7.1) сведется к комплексному уравнению Гельмгольца; из табл. 3 находим решения с разделенными переменными для этого уравнения, которые являются произведениями функций Бесселя и, очевидно, не являются эквивалентами какого бы то ни было решения из табл. 12 и 13.

Задача разделения переменных для уравнения (7.1) полностью решена Э. Г. Калнинсом (информация получена неофициально), который нашел 38 нетривиальных систем, допускающих разделение переменных для этого уравнения, причем каждая система характеризуется парой коммутирующих операторов симметрии. Мы не будем заниматься анализом результатов, полученных Калнинсом, а просто воспользуемся готовыми системами, допускающими разделение переменных для уравнения (7.1), с тем чтобы применить метод Вейснера.

Выражения (7.12) наводят на мысль, что для решений уравнения (7.1) в виде многочленов Лагерра целесообразно ввести новые координаты

$$z = -\left(x_1^2 + x_2^2\right)/(4t), \qquad s = i\left(x_1 + ix_2\right)/2, \qquad \tau = t. \tag{7.21}$$

Тогда базисные функции (7.12) (соответствующим образом нормированные) примут вид

$$\begin{gathered} \Phi_{m,n}(t,\ s,\ z) = \tau^n s^m L_n^{(m)}(z), \qquad H^0\Phi_{m,n} = (m + 2n + 1)\,\Phi_{m,n}, \\ M\Phi_{m,n} = im\Phi_{m,n}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ . \end{gathered} \tag{7.22}$$

Эти выражения имеют смысл для любого $m \in \mathbb{C}$, такого, что m не является отрицательным целым числом. Поскольку многочлен Лагерра $L_n^{(m)}(z)$ можно представить в виде конфлюентной гипергеометрической функции (см. (Б.9i)), мы можем взять новое семейство собственных функций

$$\Psi_{m,n}(\tau, s, z) = \tau^n s^m \, {}_1F_1\left(\begin{matrix} n \\ m+1 \end{matrix}\middle| z\right), \quad \Phi_{m,n} = \binom{m+n}{n}\Psi_{m,n} \tag{7.23}$$

и линейно независимое семейство собственных функций

$$\Psi'_{m,n}(\tau, s, z) = \tau^n s^m z^{-m} \, {}_1F_1\left(\begin{matrix} -n-m \\ -m+1 \end{matrix}\middle| z\right). \tag{7.24}$$

Иначе говоря, $\Psi_{m,n}$ и $\Psi'_{m,n}$ образуют базис пространства решений уравнений на собственные значения (7.22) при фиксированных n и m.

В координатах τ, s, z операторы (7.2) принимают вид

$$\begin{gathered} H_2 = \tau^2\partial_\tau + \tau s\partial_s + \tau z\partial_z + \tau(1-z), \quad H_{-2} = \tau^{-1}(\tau\partial_\tau - z\partial_z), \\ H_{-1}^{-} = \partial_s + zs^{-1}\partial_z, H_{-1}^{+} = s\tau^{-1}\partial_z, H_1^{-} = \tau\partial_s + \tau zs^{-1}\partial_z - \tau zs^{-1}, \\ H_1^{+} = s\partial_z - s, \quad \tilde{H}^0 = s\partial_s, \quad H^0 = s\partial_s + 2\tau\partial_\tau + 1, \quad H_0 = 1, \end{gathered} \tag{7.25}$$

где

$$\begin{gathered} H_{-1}^{-} = -iP_1 - P_2, \quad H_{-1}^{+} = -iP_1 + P_2, \quad H_1^{-} = -iB_1 - B_2, \\ H_1^{+} = -iB_1 + B_2, \quad \tilde{H}^0 = iM. \end{gathered} \tag{7.26}$$

Заметим, что

$$[H^0, H_j^\alpha] = jH_j^\alpha, \quad [\tilde{H}_j^0, H_j^\alpha] = \alpha H_j^\alpha. \tag{7.27}$$

Из явных выражений (7.25) видно, что каждый из операторов алгебры Ли отображает многочлен по z в другой такой многочлен. Отсюда и из соотношений коммутирования (7.27) следует, что $H_j^\alpha\Psi_{m,n}$ равно произведению $\Psi_{m+(\alpha)1,\, n+[j-(\alpha)1]/2}$ на некоторую константу. Почленно дифференцируя степенной ряд (7.23), получаем

$$\begin{aligned} &H_2\Psi_{m,n} = (m-n+1)\Psi_{m,n+1}, && H_{-2}\Psi_{m,n} = n\Psi_{m,n-1}, \\ &H_{-1}^{-}\Psi_{m,n} = m\Psi_{m-1,n}, && H_{-1}^{+}\Psi_{m,n} = -n(m+1)^{-1}\Psi_{m+1,n-1}, \\ &H_1^{-}\Psi_{m,n} = m\Psi_{m-1,n+1}, && H_1^{+}\Psi_{m,n} = -(n+m+1)(m+1)^{-1}\Psi_{m+1,n}, \\ &\tilde{H}^0\Psi_{m,n} = m\Psi_{m,n}, && H^0\Psi_{m,n} = (m+2n+1)\Psi_{m,n}. \end{aligned} \tag{7.28}$$

Заметим, что первые шесть соотношений (7.28) точно соответствуют шести дифференциальным рекуррентным формулам (Б.8) для функций ${}_1F_1$. Таким образом, мы имеем рекуррентные формулы, определяющие действие алгебры симметрии комплексного уравнения теплопроводности.

Заметим также, что операторы $H_{\pm 2}$, H^0, образующие базис подалгебры $sl(2, \mathbb{C})$ алгебры $\mathcal{G}_3^c$, дают те же рекуррентные формулы для функций Лагерра, что и операторы $J^{\pm}, J^0$ (см. разд. 2.4, формулы (4.9)). Это объясняется тем, что уравнение (4.1) можно получить из уравнения (7.1), введя полярные координаты и отделив угловую переменную. Следовательно, все результаты разд. 2.4 можно получить как частные случаи результатов, относящихся к решению уравнения (7.1).

Кроме того, бóльшая часть гл. 4 работы [83] автора настоящей книги посвящена соотношениям для функций Лагерра, получаемым при исследовании подалгебры алгебры $\mathcal{G}_3^c$ с базисом $\{H_{-1}^-, H_1^+, \tilde{H}^0, H_0\}$ и соотношениями коммутирования $(H_{\pm 1}^{\pm} = H^{\pm}, \tilde{H}^0 = H^0)$ вида

$$[H^0, H^{\pm}] = \pm H^{\pm}, \quad [H^+, H^-] = H_0, \quad [H_0, H] = 0. \tag{7.29}$$

(См. также работу [77].) Итак, совершенно очевидно, что теория специальных функций, связанная с рассматриваемым нами уравнением теплопроводности, изобилует полезными результатами. Мы приведем здесь всего лишь несколько примеров, иллюстрирующих связь между операторами симметрии этого уравнения и тождествами, которым удовлетворяют решения с разделенными переменными.

Легко видеть, что основная производящая функция (4.11) для многочленов Лагерра появляется в том случае, когда решение $\exp(\alpha H_2)\Phi_{-2l-1,0}$ комплексного уравнения теплопроводности определяется двумя различными способами. Подобным образом, если мы применим оператор $\exp(\alpha H_1^-)$ к базисной функции $\Phi_{m,0}(\tau, s, z) = s^m$ и воспользуемся рекуррентной формулой $H_1^-\Phi_{l,n} = (n+1)\Phi_{l-1,n+1}$ и соотношением теории Ли

$$\exp(\alpha H_1^-)\Psi(\tau, s, z) = \exp(-\tau z\alpha/s)\Psi(\tau, s + \alpha\tau, z[1 + \alpha\tau/s]),$$

то получим производящую функцию

$$e^{-\alpha z}(1+\alpha)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n L_n^{(m-n)}(z), \qquad m \in \mathbb{C}, \quad |\alpha| < 1. \tag{7.30}$$

(Здесь мы полагаем $\tau = s$ и в обеих частях этого выражения выносим за скобки множитель s^m.)

Комбинируя (7.21) с (7.4)—(7.7), можно получить формулу, определяющую действие локальной группы симметрии G_3^c в координатах τ, s, z. В частности, преобразование Аппеля имеет простой вид

$$\mathbf{T}(A_0^2)\Phi(\tau, s, z) = \tau^{-1}e^z\Phi(-\tau^{-1}, s\tau^{-1}, -z). \tag{7.31}$$

Применяя этот оператор к базисной функции $\Psi_{m,\,n}$, определяемой выражением (7.23), где $m,\ n \in \mathbb{C}$ и m не является отрицательным целым числом, получаем

$$\mathbf{T}\left(A_0^2\right)\Psi_{m,\,n} = (-1)^n \tau^{-m-n-1} s^m e^z\, {}_1F_1\left(\begin{matrix} -n \\ m+1 \end{matrix}\,\middle|\, -z\right).$$

Это выражение является общей собственной функцией оператора H^0 и оператора M с собственными значениями $-m-2n-1$ и im соответственно. Кроме того, при $z=0$ правая часть последней формулы является функцией, аналитической по z. Следовательно, существует некоторая константа $c_{m,\,n}$, такая, что

$$\mathbf{T}\left(A_0^2\right)\Psi_{m,\,n} = c_{m,\,n}\Psi_{m,\,-m-n-1}.$$

Полагая в обеих частях этого равенства $z=0$, получаем соотношение $c_{m,\,n} = (-1)^n$, или

$$e^z\, {}_1F_1\left(\begin{matrix} -n \\ m+1 \end{matrix}\,\middle|\, -z\right) = {}_1F_1\left(\begin{matrix} m+n+1 \\ m+1 \end{matrix}\,\middle|\, z\right). \tag{7.32}$$

Последнее выражение является важной формулой преобразования функции ${}_1F_1$, которая рассматривается в приложении Б.

Уравнение теплопроводности можно представить в виде $\left(H_{-2} - P_1^2 - P_2^2\right)\Phi = 0$, или, что то же самое, в виде уравнения $\left(H_{-2} + H_{-1}^{+}H_{-1}^{-}\right)\Phi = 0$. Из (7.25) следует, что в координатах $\{\tau, s, z\}$ это уравнение принимает вид

$$\left(z\partial_{zz} + (s\partial_s - z + 1)\partial_z + \tau\partial_\tau\right)\Phi = 0. \tag{7.33}$$

Применив метод Вейснера, можно видеть, что любое решение Φ уравнения (7.33), аналитическое по переменным τ, s, z в некоторой области, такой, что Φ можно разложить в ряд Лорана по τ, s в окрестности $\tau=0$, $s=0$ и что $\Phi(\tau, s, 0)$ ограничено в этой области, должно удовлетворять тождеству

$$\Phi(\tau,\ s,\ z) = \sum_{m,\,n} a_{m,\,n} L_n^{(m)}(z)\,\tau^n s^m, \tag{7.34}$$

где $c_{m,\,n}$ — комплексные константы. Наоборот, равномерно сходящийся ряд вида (7.34) в некоторой области пространства $(\tau\ s, z)$ определяет решение комплексного уравнения теплопроводности. Мы приходим к выводу, что любую производящую функцию вида (7.34) можно получить как решение уравнения теплопроводности. Один из способов нахождения таких функций Φ состоит в том, чтобы определить их как общие собственные функции пары коммутирующих операторов в обертывающей алгебре алгебры $\mathscr{G}_3^c$. Например, уравнения

$$\{B_1,\ P_1\}\Phi = (4\alpha + 2)\Phi, \qquad H^0\Phi = (\lambda + 1)\Phi, \qquad \alpha,\ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{7.35}$$

соответствуют координатам u, v, w, которые определяются соотношениями

$$u = \tau^{-1/2}(s + \tau z/s), \qquad v = \tau^{-1/2}(-s + \tau z/s), \qquad w = \tau \tag{7.36}$$

(см. строку 10а табл. 13). В этих новых координатах мы имеем

$$H^0 = 2w\partial_w + 1, \qquad \{B_1, P_1\} = -8\left(\partial_{uu} - {}^1\!/_2 u\partial_u - {}^1\!/_4\right)$$

и решения $\Phi^{\alpha, \lambda}$ уравнений (7.35) можно записать в виде $\Phi^{\alpha, \lambda} = w^{\lambda/2}U(u)V(v)$, причем

$$2U'' - uU' + \alpha U = 0, \qquad 2V'' + vV' + (\alpha - \lambda)V = 0. \tag{7.37}$$

Сравнивая эти уравнения с (2.24) и (2.25), находим независимые решения $H_\alpha(u/2)$ и $\exp(u^2/4)H_{-\alpha-1}(iu/2)$ для U, а также $H_{\lambda-\alpha}(iv/2)$ и $\exp(-v^2/4)H_{\alpha-\lambda-1}(v/2)$ для V. Для определенности выберем решения следующего вида:

$$\Phi^{\alpha, \lambda}(u, v, w) = w^{\lambda/2}H_\alpha(u/2)\,H_{\lambda-\alpha}(iv/2). \tag{7.38}$$

Переходя в выражениях для операторов симметрии (7.25) алгебры $\mathcal{G}_3^c$ к координатам u, v, w и применяя затем эти операторы к функциям (7.38), можно получить семейство простых рекуррентных формул, которым удовлетворяют произведения функций Эрмита. Применим метод Вейснера к производящей функции (7.38) в случае, когда λ и $\alpha, \alpha \leqslant \lambda$, являются целыми положительными числами. В этом случае функции Эрмита, входящие в (7.38), являются многочленами Эрмита. Из (7.34) и (7.36) получаем

$$\tau^{\lambda/2}H_\alpha\left[2^{-1}(\tau^{-1/2}s + \tau^{1/2}z/s)\right]H_{\lambda-\alpha}\left[i2^{-1}(-\tau^{-1/2}s + \tau^{1/2}z/s)\right] = \\ = \sum_{k=0}^{\lambda} s^{\lambda-2k}\tau^k c_k L_k^{(\lambda-2k)}(z). \tag{7.39}$$

(Чтобы получить этот результат, мы воспользовались тем фактом, что $H_\alpha(x)$ — многочлен порядка α и что $H_\alpha(-x) = (-1)^\alpha H_\alpha(x)$.) Полагая $x = s\tau^{-1/2}$, находим

$$H_\alpha\left[2^{-1}(x + z/x)\right]H_{\lambda-\alpha}\left[i2^{-1}(-x + z/x)\right] = \\ = \sum_{k=0}^{\lambda} x^{\lambda-2k}c_k L_k^{(\lambda-2k)}(z). \tag{7.40}$$

Для того чтобы найти простую производящую функцию для коэффициентов c_k, мы полагаем $z = 0$ и используем тот факт, что $L_n^{(m)}(0) = \binom{m+n}{n}$, где $\binom{m+n}{n}$ — биномиальный коэффициент

(Б.1):

$$H_\alpha(x/2)\,H_{\lambda-\alpha}(-ix/2)=\sum_{k=0}^{\lambda}\binom{\lambda-k}{k}c_k x^{\lambda-2k}. \qquad (7.41)$$

Вычислив в явном виде коэффициенты при $x^{\lambda-2k}$ в левой части этого равенства, можно представить c_k в виде конечного гипергеометрического ряда ${}_3F_2$.

Полиномиальные функции (7.38) можно использовать как еще один (но менее полезный) базис для решений уравнения теплопроводности. Следовательно, можно вычислить матричные элементы групповых операторов $\mathbf{T}(g)$ по этому базису, разложить произвольное решение Φ по элементам этого базиса и т. д.

Если λ и α — комплексные числа, то можно получить тождества в виде бесконечных рядов, аналогичные (7.40), но несколько усложненные.

2.8. Заключительные замечания

В заключение этой главы укажем (не проводя подробного анализа) несколько важных результатов, тесно связанных с рассматриваемым нами вопросом.

В статье [39] Винтерниц, Смородинский, Улир и Фриш определили все потенциалы $V(x, y)$, такие, что не зависящее от времени уравнение Шредингера

$$(-\Delta_2+V(x,\ y))\,\Phi=\lambda\Phi \qquad (8.1)$$

допускает некоторый оператор симметрии первого или второго порядка. Они показали, что возможные операторы симметрии имеют вид $L+f(x, y)$, где $L\in\mathcal{E}(2)$ (см. (1.6), (1.7) разд. 1.1), для симметрий первого порядка и вид $S+f(x, y)$, где S — симметрический оператор второго порядка в обертывающей алгебре алгебры $\mathcal{E}(2)$, для симметрий второго порядка. В уравнениях, допускающих симметрии первого порядка, переменные разделяются в соответствующих системах координат (2.31) или (2.32); см. разд. 1.2. Уравнения, не допускающие симметрий первого порядка, но допускающие симметрии второго порядка, разделяются в одной из четырех систем координат, перечисленных в табл. 1. Последние уравнения относятся к классу II. Следует заметить, что при рассмотрении этого вопроса появляется алгебра Ли $\mathcal{E}(2)$, хотя она и *не является* алгеброй симметрии уравнения (8.1), за исключением тривиального случая, когда $V(x, y)$ — постоянная величина. Появление $\mathcal{E}(2)$ объясняется тем, что члены L и S операторов симметрии первого либо второго порядка уравнения (8.1), содержащие операторы дифференцирования, обязательно коммутируют с оператором Лапласа Δ_2; поэтому из результатов, приведенных в разд. 1.1, следует, что L и S должны принадлежать обертывающей алгебре алгебры $\mathscr{E}(2)$. Однако весь оператор симметрии, как правило, не будет принадлежать обертывающей алгебре алгебры $\mathscr{E}(2)$, поскольку функциональная часть $f(x, y)$ этого оператора не будет ни нулем, ни даже постоянной величиной. Здесь $f(x, y)$ будет зависеть от потенциала.

Так же как в разд. 1.1, разделение переменных, соответствующее симметриям первого порядка, выполняется довольно тривиальным образом. Интерес представляют уравнения класса II, допускающие симметрии второго порядка и не допускающие ни одной нетривиальной симметрии первого порядка. Такие уравнения допускают разделение переменных в одной или более из четырех систем координат, перечисленных в табл. 1. Каждая система координат, допускающая разделение переменных, определяется чисто дифференциальной частью оператора симметрии, т. е. той его частью, которая принадлежит обертывающей алгебре алгебры $\mathscr{E}(2)$. Таким образом, в результате появления оператора Δ_2 в (8.1) может быть не более четырех систем координат, допускающих разделение переменных для этого уравнения. Будут или не будут разделяться переменные для заданного уравнения (8.1), зависит от явного вида потенциала V. Установлено, что (8.1) разделяется в одной из четырех указанных выше систем координат тогда и только тогда, когда это уравнение допускает симметрию второго порядка $S+f(x, y)$, где чисто дифференциальный оператор S соответствует этой системе координат.

Все рассматриваемые в [39] интересные случаи уравнения (8.1) принадлежат классу II, но часто такие случаи возникают в результате частичного разделения переменных из уравнений класса I. Например, уравнение (8.1) получится из временного уравнения Шредингера (5.1), если выделить переменную времени, предположив, что $\Psi(x, y\ t)=e^{-i\lambda t}\Phi(x, y)$. Принадлежащие классу I уравнения гармонического осциллятора, репульсивного осциллятора и линейного потенциала, с которым мы сталкивались, рассматривая временное уравнение Шредингера, переходят в уравнения класса II, когда мы выделяем переменную t; см. [39]. Это происходит потому, что выделение переменной t приводит к значительному сокращению симметрии уравнения Шредингера.

Особый интерес представляет рассматриваемое в [39] уравнение класса II, которое соответствует потенциалу $V(x, y)=-\alpha/x^2-\beta/y^2$, где α, β — вещественные константы, такие, что $\alpha^2+\beta^2>0$. Этот потенциал приводится в работах [20] и [105], где авторы дают классификацию всех потенциалов $V(x, y)$, таких, что временно́е уравнение Шредингера допускает нетривиальные операторы симметрии первого порядка. В работе [21] Бойер исследует уравнение Шредингера

$$(i\partial_t+\partial_{xx}+\partial_{yy}-\alpha/x^2-\beta/y^2)\Psi=0 \qquad (8.2)$$

с точки зрения методов, развиваемых в настоящей книге. Он показал, что хотя это уравнение все еще принадлежит классу II, оно легко поддается изучению, поскольку его можно получить из принадлежащего классу I уравнения Шредингера для свободной частицы при помощи частичного разделения переменных. Бойер показал, что уравнение (8.2) допускает R-разделение переменных в 25 системах координат при $\alpha=0$, $\beta\neq 0$ и в 15 системах координат при $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$. Кроме того, он обнаружил, что каждая система координат, допускающая разделение переменных, соответствует паре коммутирующих операторов симметрии второго порядка уравнения (8.2). Полученные им тождества для специальных функций подобны тождествам, которые мы получили в разд. 2.5, но не совпадают с ними.

Армстронг [5, 6] применил методы, предложенные автором настоящей книги, и теорему Вигнера — Экхарта для изучения квантовомеханических систем, которые рассматривались нами в разд. 2.3 и которые допускают $SL(2, R)$ как динамическую группу симметрии. Он исследовал бесконечные семейства самосопряженных операторов в $L_2(R_+)$, которые неприводимо преобразуются под сопряженным действием группы $SL(2, R)$, и, пользуясь теорией групп, вычислил матричные элементы этих операторов по отношению к базису собственных векторов оператора L_3; см. также [100]. Дальнейшее развитие этой теории, которая с точки зрения применяемых методов идентична теории, излагаемой в настоящей книге, содержится в [87] и [88].

И наконец, в [26] при помощи теории групп и разделения переменных определяются все возможные «повышающие»[1]) операторы первого и второго порядка для гамильтонианов вида $H=-\Delta_2-V(x,y)$. (*Повышающий оператор* R для H определяется соотношением коммутирования $[H,R]=\mu R$, $\mu>0$. Если собственный вектор Ψ оператора H удовлетворяет соотношению $H\Psi=\lambda\Psi$, то формально $H(R\Psi)=(\lambda+\mu)R\Psi$, и, следовательно, R отображает собственный вектор, соответствующий собственному значению λ, в собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda+\mu$.) В [26] показано, что для того, чтобы H допускал повышающий оператор второго порядка, необходимо, чтобы уравнение (8.1) допускало разделение переменных в одной из четырех систем координат, перечисленных в табл. 1, и дан полный список возможных повышающих операторов.

---

[1]) Автор использует термин «raising operator». — *Прим. перев.*

Упражнения

1. Найти алгебру симметрии уравнения Шредингера (1.2) для свободной частицы.

2. Описать разложение алгебры Шредингера $\mathcal{G}_2$ на орбиты в результате сопряженного действия группы G_2.

3. Показать, что в результате сопряженного действия группы $SL(2, R)$ алгебра Ли $sl(2, R)$ распадается на три орбиты.

4. Формула (1.30) показывает в явном виде эквивалентность уравнений Шредингера для свободной частицы и для гармонического осциллятора. Вывести соответствующую формулу, показывающую эквивалентность уравнений для свободной частицы и для линейного потенциала.

5. Получить билинейные разложения (1.55) для фундаментального решения уравнения Шредингера

$$k(t, x-y) = (4\pi it)^{-1/2} \exp[-(x-y)^2/(4it)]$$

при помощи базисов $\{F_\lambda^{(j)}\}$, $j = 2, 4$. (Подробное обсуждение таких непрерывных аналогов производящих функций см. в [124, 143].)

6. Используя методы, рассмотренные в разд. 2.2, решить задачу Коши для уравнения

$$\partial_t\Phi = \partial_{xx}\Phi + x\Phi,$$

т. е. найти при $t > 0$ ограниченное решение $\Phi(x, t)$ этого уравнения, непрерывное при $t \geqslant 0$ и такое, что $\Phi(0, x) = f(x)$, где функция $f(x)$ ограничена и непрерывна на вещественной прямой.

7. Функции Эрмита $H_n(z)$, определяемые соотношениями (2.26), при $n = 0, 1, 2, \ldots$ являются многочленами, а при $n = -1, -2, \ldots$ называются функциями Эрмита второго рода. Показать, что функции Эрмита второго рода можно представить через функцию ошибок и ее производные [17]. Проверить, что функции $\Phi_n(z, s) = H_n(z)s^n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$H_1\Phi_n = \Phi_{n+1},\quad H^0\Phi_n = (n + {}^1/_2)\,\Phi_n,\quad H_{-1}\Phi_n = (n/2)\,\Phi_{n-1},$$
$$H_2\Phi_n = \Phi_{n+2},\quad H_{-2}\Phi_n = {}^1/_2 n\,(n-1)\,\Phi_{n-2},$$

где операторы H_j, определяемые формулами (2.23), образуют базис для алгебры симметрии комплексного уравнения теплопроводности. Доказать, что это представление не является неприводимым. Пользуясь простыми моделями, построенными в разд. 2.2, вычислить матричные элементы этого представления и получить соответствующие тождества для специальных функций; в частности, вывести тождество, связанное с выражением $\exp(\alpha H_1)\Phi_{-1}$.

8. Получить билинейное разложение фундаментального решения $k(t, x, y)$ (3.19) уравнения Шредингера для изотропной свободной частицы в элементах базиса многочленов Лагерра. Показать, что разложение является частным случаем формулы Хилле — Харди (4.27). Получить билинейное разложение решения в элементах континуального базиса $\{\Psi_\lambda^{(2)}\}$; см. (3.16).

9. Найти алгебру симметрии комплексного уравнения теплопроводности $\partial_t\Phi - \partial_{xx}\Phi - \partial_{yy}\Phi = 0$.

Глава 3

УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА И ЛАПЛАСА С ТРЕМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

3.1. Уравнение Гельмгольца $(\Delta_3+\omega^2)\Psi=0$

Вопрос о разделении переменных для уравнения Гельмгольца с тремя переменными или приведенного волнового уравнения

$$(\Delta_3+\omega^2)\Psi(x_1, x_2, x_3)=0, \quad \Delta_3=\partial_{x_1x_1}+\partial_{x_2x_2}+\partial_{x_3x_3}, \quad \omega>0, \tag{1.1}$$

изучен подробно, и возможные системы координат, допускающие разделение переменных для этого уравнения, известны [99, 101]. Впервые указания на связь между системами координат, допускающими разделение переменных для уравнения (1.1), и евклидовой группой симметрии $E(3)$ этого уравнения появились в работе [76]. Однако лишь в последнее время наблюдается систематическое использование этой связи с теорией групп для установления свойств решений уравнения Гельмгольца с разделенными переменными.

Пользуясь нашими обычными методами, находим, что (помимо тривиальной симметрии E) алгебра симметрии уравнения (1.1) шестимерна, имеет базис

$$\begin{gathered}P_j=\partial_j=\partial_{x_j}, \quad j=1,\ 2,\ 3,\\ J_1=x_3\partial_2-x_2\partial_3, \quad J_2=x_1\partial_3-x_3\partial_1, \quad J_3=x_2\partial_1-x_1\partial_2\end{gathered} \tag{1.2}$$

и удовлетворяет соотношениям коммутирования

$$[J_l, J_m]=\sum_n \varepsilon_{lmn}J_n, \quad [J_l, P_m]=\sum_n \varepsilon_{lmn}P_n, \quad [P_l, P_m]=0, \tag{1.3}$$
$$l,\ m,\ n=1,\ 2,\ 3,$$

где ε_{lmn} — тензор, такой, что $\varepsilon_{123}=\varepsilon_{312}=\varepsilon_{231}=1$, $\varepsilon_{132}=\varepsilon_{213}=\varepsilon_{321}=-1$, а все остальные компоненты равны нулю. В качестве алгебры симметрии уравнения (1.1) возьмем вещественную алгебру Ли $\mathscr{E}(3)$ с базисом (1.2). Уравнение Гельмгольца, записанное через операторы P, принимает следующий вид:

$$(P_1^2+P_2^2+P_3^2)\Psi=-\omega^2\Psi. \tag{1.4}$$

В рассматриваемом случае $\mathscr{E}(3)$ изоморфна алгебре Ли евклидовой группы $E(3)$ в трехмерном пространстве, а подалгебра

$so(3)$ с базисом $\{J_1, J_2, J_3\}$ изоморфна алгебре Ли соответствующей группы поворотов $SO(3)$. Чтобы показать это в явном виде, рассмотрим сначала известную реализацию группы $SO(3)$ как группы вещественных (3×3)-матриц A, таких, что $A^tA = E_3$ и $\det A = 1$ (см., например, [86, 130]); здесь через E_3 обозначается единичная (3×3)-матрица $(E_3)_{jl}=\delta_{jl}$ и $(A^t)_{jl} = A_{lj}, j, l = 1, 2, 3$. Алгебра Ли группы $SO(3)$ в этой реализации является пространством кососимметрических (3×3)-матриц $\mathscr{A}$ $(\mathscr{A}^t = -\mathscr{A})$; базис для этой алгебры Ли дается матрицами

$$\mathcal{J}'_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J}'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J}'_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad (1.5)$$

соотношения коммутирования в соответствии с (1.3) имеют вид $[\mathcal{J}'_l, \mathcal{J}'_m] = \sum\limits_n \varepsilon_{lmn}\mathcal{J}'_n$. Соответствующая параметризация группы $SO(3)$ при помощи *эйлеровых углов* (φ, θ, ψ) имеет вид

$$A(\varphi, \theta, \psi) = \exp(\varphi\mathcal{J}'_3)\exp(\theta\mathcal{J}'_1)\exp(\psi\mathcal{J}'_3), \qquad (1.6)$$
$$0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \psi < 2\pi.$$

По мере того как эйлеровы углы пробегают область своих значений, $A(\varphi, \theta, \psi)$ пробегает все элементы группы $SO(3)$. Координаты на групповом многообразии взаимно однозначны, за исключением тех элементов, для которых $\theta = 0, \pi$, а в этих случаях однозначно определена только сумма $\varphi + \psi$. Более подробное обсуждение этих координат можно найти во многих работах (например, [86, 122, 130]).

Евклидову группу $E(3)$ в трехмерном пространстве можно реализовать как группу вещественных (4×4)-матриц. Элементы $E(3)$ имеют вид

$$g(A, \mathbf{a}) = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & A & & 0 \\ & & & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \end{bmatrix}, \quad A \in SO(3), \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in R^3, \qquad (1.7)$$

а групповое произведение определяется произведением матриц

$$g(A, \mathbf{a})\, g(A', \mathbf{a}') = g(AA', \mathbf{a}A' + \mathbf{a}'). \qquad (1.8)$$

Группа $E(3)$ действует как группа преобразований в трехмерном пространстве R^3. Групповой элемент $g(A, \mathbf{a})$ отображает точку $\mathbf{x} \in R^3$ в точку

$$\mathbf{x}g = \mathbf{x}A + \mathbf{a} \in R^3. \qquad (1.9)$$

Из этого определения следует, что $\mathbf{x}(gg')=(\mathbf{x}g)g'$ для всех $\mathbf{x}\in R^3$, $g, g'\in E(3)$, и что $\mathbf{x}g(E_3, 0)=\mathbf{x}$, где $g(E_3, 0)$ — единичный элемент группы $E(3)$. Геометрически g соответствует повороту A относительно начала координат $(0, 0, 0)\in R^3$ с последующим переносом на вектор $\mathbf{a}$ [86].

Базис алгебры Ли матричной группы $E(3)$ дается матрицами

$$\mathscr{J}_l=\left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0\\ & \mathscr{J}'_l & & 0\\ & & & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right],\quad l=1,2,3;\quad \mathscr{P}_1=\left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0\\ & 0 & & 0\\ & & & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right],$$
$$\mathscr{P}_2=\left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0\\ & 0 & & 0\\ & & & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right],\qquad \mathscr{P}_3=\left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0\\ & 0 & & 0\\ & & & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right],\tag{1.10}$$

причем соотношения коммутирования идентичны соотношениям (1.3). Отсюда видно, что алгебра Ли $\mathscr{E}(3)$ с базисом (1.2) изоморфна алгебре Ли группы $E(3)$. Явное соотношение между порождающими элементами (1.10) алгебры Ли и элементами (1.7) группы $E(3)$ имеет вид

$$g(\varphi, \theta, \psi, \mathbf{a})\equiv g(A(\varphi, \theta, \psi), \mathbf{a})=$$
$$=\exp(\varphi\mathscr{J}_3)\exp(\theta\mathscr{J}_1)\exp(\psi\mathscr{J}_3)\exp(a_1\mathscr{P}_1+a_2\mathscr{P}_2+a_3\mathscr{P}_3).\tag{1.11}$$

Используя стандартную теорию Ли, можно при помощи производных Ли (1.2) расширить действие алгебры $\mathscr{E}(3)$ на пространство $\mathscr{F}$ функций, аналитических на некотором открытом связном множестве $\mathscr{D}\subseteq R^3$, до локального представления $\mathbf{T}$ группы $E(3)$ на $\mathscr{F}$. Мы имеем

$$\mathbf{T}(g)\Phi(\mathbf{x})=\{\exp(\varphi J_3)\exp(\theta J_1)\exp(\psi J_3)\times$$
$$\times\exp(a_1P_1+a_2P_2+a_3P_3)\}\Phi(\mathbf{x})=\Phi(\mathbf{x}g),\tag{1.12}$$

где $\mathbf{x}g$ дается соотношением (1.9). Таким образом, действие группы $E(3)$ как группы преобразований, определяемое соотношением (1.9), в точности совпадает с действием производных (1.2) алгебры Ли. Как обычно, имеет место соотношение

$$\mathbf{T}(gg')=\mathbf{T}(g)\mathbf{T}(g'),\qquad g,\ g'\in E(3),\tag{1.13}$$

и операторы $\mathbf{T}(g)$ отображают решения уравнения Гельмгольца в решения же.

Определяя пространство $\mathscr{S}$ симметрий второго порядка уравнения (1.1), мы видим, что это уравнение является уравнением класса I. В самом деле, факторизуя пространство $\mathfrak{q}$ тривиальных симметрий RQ, $R \in \mathscr{F}$, $Q = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + \omega^2$ (напомним, что RQ — нулевой оператор на пространстве решений уравнения (1.1)), находим, что факторпространство $\mathscr{S}/\mathfrak{q}$ 41-мерно и имеет базис, состоящий из единичного оператора E, 6 операторов первого порядка J_l, P_l и 34 симметризованных операторов чисто второго порядка. Пространство $\mathscr{E}(3)^2$ симметризованных операторов второго порядка натянуто на элементы $\{J_l, J_m\}$, $\{J_l, P_m\}$, $\{P_l, P_m\} = 2P_lP_m$, которые подчинены двум соотношениям $\mathbf{J}\cdot\mathbf{P} = J_1P_1 + J_2P_2 + J_3P_3 \equiv 0$ и $\mathbf{P}\cdot\mathbf{P} = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = -\omega^2$, причем последнее соотношение выполняется на пространстве решений уравнения (1.1) (см. [76]).

Группа $E(3)$ действует на $\mathscr{E}(3)$ посредством сопряженного представления и разбивает $\mathscr{E}(3)$ на три типа орбит с представителями

$$P_3, \quad J_3, \quad J_3 + aP_3, \quad a \neq 0. \tag{1.14}$$

Заметим, что $\exp(aP_3)$ — перенос вдоль оси x_3, $\exp(\varphi J_3)$ — поворот относительно этой оси, а $\exp(\varphi J_3 + \varphi a P_3) = \exp(\varphi J_3)\exp(\varphi a P_3)$ — поворот относительно оси x_3 с последующим переносом вдоль этой оси (*винтовое смещение*). Таким образом, мы получили на языке алгебры Ли формулировку теоремы о том, что любое евклидово преобразование является переносом, поворотом или винтовым смещением (см. [86]).

Поскольку (1.1) — уравнение с тремя переменными, с каждой системой координат, допускающей разделение переменных, связаны две константы разделения. Таким образом, можно предположить, что решения с разделенными переменными являются общими собственными функциями пары коммутирующих операторов симметрии в обертывающей алгебре алгебры $\mathscr{E}(3)$. Именно так и обстоит дело. Так же как и для уравнения Гельмгольца с двумя переменными, рассматриваемого в разд. 1.2, мы находим ряд довольно тривиальных систем координат, которые соответствуют диагонализации операторов первого порядка. Кроме того, имеется одиннадцать типов ортогональных систем координат, допускающих разделение переменных, каждая из которых соответствует паре независимых коммутирующих операторов S_1, S_2 в $\mathscr{E}(3)^2$. Соответствующие решения с разделенными переменными $\Psi = U(u)V(v)W(w)$ характеризуются уравнениями на собственные значения

$$(\Delta_3 + \omega^2)\Psi = 0, \quad S_1\Psi = \omega_1^2\Psi, \quad S_2\Psi = \omega_2^2\Psi, \tag{1.15}$$

где ω_1^2, ω_2^2 — константы разделения [76, 118]. (Можно показать, что нетривиальных решений с R-разделенными переменными не существует.)

С другой стороны, некоторая система координат, допускающая разделение переменных, связана с двумерным подпространством коммутирующих операторов в пространстве $\mathscr{E}(3)^2$, а операторы S_1, S_2 являются базисом (не единственным) для этого подпространства. Группа $E(3)$ действует на множество всех двумерных подпространств коммутирующих операторов в $\mathscr{E}(3)^2$ посредством сопряженного представления и разбивает это множество на орбиты эквивалентных подпространств. Как обычно, допускающие разделение переменных координаты, связанные с эквивалентными подпространствами, считаются эквивалентными, так как любую такую систему можно получить из любой другой при помощи евклидова преобразования. Как показано в [76], существует одиннадцать типов различных (нетривиальных) орбит, которые соответствуют в точности одиннадцати типам ортогональных разделяющих координат. Операторы, являющиеся представителями каждой орбиты, и соответствующие им системы координат перечислены в табл. 14.

Проведем краткий анализ каждой системы, представленной в табл. 14, с тем чтобы определить вид решения с разделенными переменными и смысл собственных значений коммутирующих операторов симметрии. Начнем с рассмотрения решений Ψ уравнения Гельмгольца, которые являются собственными функциями оператора P_3:

$$P_3\Psi=i\lambda\Psi,\qquad \Psi(x,\ y,\ z)=e^{i\lambda z}\Phi(x,\ y).$$

В этом случае можно отделить переменную z, после чего уравнение (1.1) примет вид

$$(\Delta_2+[\omega^2-\lambda^2])\Phi(x,\ y)=0, \tag{1.16}$$

т. е. станет уравнением Гельмгольца в двух переменных. Из результатов, полученных в разд. 1.2 (см. табл. 1), вытекает, что это приведенное уравнение допускает разделение переменных точно в четырех ортогональных системах координат. Соответствующими системами для неприведенного уравнения (1.1) являются системы 1—4 в табл. 14.

Теперь рассмотрим решения Ψ уравнения (1.1), которые являются собственными функциями оператора J_3:

$$iJ_3\Psi=m\Psi,\qquad \Psi(x,\ y,\ z)=e^{im\varphi}\Phi(r,\ z).$$

Здесь r, φ, z — цилиндрические координаты 2 и $J_3=-\partial_\varphi$. Отделяем переменную φ, и уравнение (1.1) сводится к уравнению

$$(\partial_{rr}+r^{-1}\partial_r-m^2/r^2+\partial_{zz}+\omega^2)\Phi=0. \tag{1.17}$$

Несмотря на то что это уравнение получается в результате разделения переменных из уравнения, принадлежащего классу I, само оно принадлежит классу II. Приведенное уравнение (1.17) имеет решения с разделенными переменными в пяти системах координат, соответствующих системам 2, 5—8.

Таблица 14

ОПЕРАТОРЫ И КООРДИНАТЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ

$(\Delta_3+\omega^2)\Psi=0 \quad ((x_1, x_2, x_3)=(x, y, z))$

	Коммутирующие операторы S_1, S_2	Координаты, допускающие разделение переменных
1	P_2^2, P_3^2	Декартовы x, y, z
2	J_3^2, P_3^2	Цилиндрические $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi,\ z=z$
3	$\{J_3, P_2\}, P_3^2$	Параболического цилиндра $x=(\xi^2-\eta^2)/2$, $y=\xi\eta,\ z=z$
4	$J_3^2+d^2P_1^2, P_3^2$, $d>0$	Эллиптического цилиндра $x=d\operatorname{ch}\alpha\cos\beta$, $y=d\operatorname{sh}\alpha\sin\beta,\ z=z$
5	$\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}, J_3^2$	Сферические $x=\rho\sin\theta\cos\varphi$, $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$, $z=\rho\cos\theta$
6	$\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}-a^2\left(P_1^2+P_2^2\right), J_3^2$, $a>0$	Вытянутого сфероида $x=a\operatorname{sh}\eta\sin\alpha\cos\varphi$, $y=a\operatorname{sh}\eta\sin\alpha\sin\varphi$, $z=a\operatorname{ch}\eta\cos\alpha$
7	$\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}+a^2\left(P_1^2+P_2^2\right), J_3^2$, $a>0$	Сплющенного сфероида $x=a\operatorname{ch}\eta\sin\alpha\cos\varphi$, $y=a\operatorname{ch}\eta\sin\alpha\sin\varphi$, $z=a\operatorname{sh}\eta\cos\alpha$
8	$\{J_1, P_2\}-\{J_2, P_1\}, J_3^2$	Параболические $x=\xi\eta\cos\varphi$, $y=\xi\eta\sin\varphi$, $z=(\xi^2-\eta^2)/2$
9	$J_3^2-c^2P_3^2+c\left(\{J_2, P_1\}+\{J_1, P_2\}\right)$, $c\left(P_2^2-P_1^2\right)+\{J_2, P_1\}-\{J_1, P_2\}$	Параболоидальные $x=2c\operatorname{ch}\alpha\cos\beta\operatorname{sh}\gamma$, $y=2c\operatorname{sh}\alpha\sin\beta\operatorname{ch}\gamma$, $z=c(\operatorname{ch}2\alpha+\cos 2\beta-\operatorname{ch}2\gamma)/2$
10	$P_1^2+aP_2^2+(a+1)P_3^2+\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}$, $J_2^2+a\left(J_1^2+P_3^2\right)$, $a>1$	Эллипсоидальные $x=\left[\frac{(\mu-a)(\nu-a)(\rho-a)}{a(a-1)}\right]^{1/2}$, $y=\left[\frac{(\mu-1)(\nu-1)(\rho-1)}{1-a}\right]^{1/2}$, $z=\left[\frac{\mu\nu\rho}{a}\right]^{1/2}$,

Продолжение табл. 14

	Коммутирующие операторы S_1, S_2	Координаты, допускающие разделение переменных
11	$\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}$, $J_1^2+bJ_2^2$, $1>b>0$	Конические $x=r\left[\frac{(b\mu-1)(b\nu-1)}{1-b}\right]^{1/2}$, $y=r\left[\frac{b(\mu-1)(\nu-1)}{b-1}\right]^{1/2}$, $z=r\,[b\mu\nu]^{1/2}$

Для сферических координат 5 уравнения с разделенными переменными ρ и θ имеют вид

$$P''+\frac{2}{\rho}P'+\left(\omega^2-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)P=0, \qquad (1.18\text{а})$$

$$\Theta''+\operatorname{ctg}\theta\Theta'+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0, \qquad (1.18\text{б})$$

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}\Psi=-l(l+1)\Psi.$$

Решения с разделенными переменными принимают вид

$$P(\rho)=\rho^{-1/2}J_{\pm(l+1/2)}(\omega\rho),\quad \Theta(\theta)=P_l^{\pm m}(\cos\theta), \qquad (1.19)$$

где $J_\nu(z)$ — функция Бесселя, а $P_l^m(\cos\theta)$ функция Лежандра (см. (Б.6iv)). Чтобы полностью покрыть пространство R^3, координаты ρ, θ, φ должны меняться в следующих интервалах:

$$0\leqslant\rho,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\varphi<2\pi.$$

Для координат вытянутого сфероида (или эллипсоида) 6 (см. табл. 14) уравнения с разделенными переменными η, α записываются так:

$$H''+\operatorname{cth}(\eta)H'+(-\lambda+a^2\omega^2\operatorname{sh}^2\eta-m^2/\operatorname{sh}^2\eta)H=0,$$

$$A''+\operatorname{ctg}(\alpha)A'+(\lambda+a^2\omega^2\sin^2\alpha-m^2/\sin^2\alpha)A=0, \qquad (1.20)$$

$$\left(\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}-a^2P_1^2-a^2P_2^2\right)\Psi=-\lambda\Psi.$$

Уравнения (1.20) — две формы *уравнения сфероидальной волны* [7, 80]. Соответствующие решения Ψ уравнения (1.1), ограниченные и однозначные в R^3, имеют вид

$$H(\eta)A(\alpha)e^{im\varphi}=Ps_n^{|m|}(\operatorname{ch}\eta,\ a^2\omega^2)\,Ps_n^{|m|}(\cos\alpha,\ a^2\omega^2)\,e^{im\varphi},$$
$$m \text{ — целое число},\quad n=0,\ 1,\ \ldots,\quad -n\leqslant m\leqslant n, \qquad (1.21)$$

где $Ps_n^m(z,\gamma)$ — функция сфероидальной волны. Дискретные собственные значения $\lambda_n^{|m|}(a^2\omega^2)$ являются аналитическими функциями от $a^2\omega^2$. При $a = 0$ уравнение сфероидальной волны сводится к уравнению (1.18б) для функций Лежандра, причем $Ps_n^{|m|}(\cos\alpha, 0) = P_n^{|m|}(\cos\alpha)$. Кроме того, $\lambda_n^{|m|}(0) = n(n+1)$. Переменные меняются в интервалах $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, $\eta \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Для координат сплющенного сфероида (или эллипсоида) 7 получаются следующие уравнения с разделенными переменными η, α:

$$H'' + \operatorname{th}(\eta)\, H' + (-\lambda + a^2\omega^2 \operatorname{ch}^2\eta + m^2/\operatorname{ch}^2\eta)\, H = 0,$$

$$A'' + \operatorname{ctg}(\alpha)\, A' + (\lambda - a^2\omega^2 \sin^2\alpha - m^2/\sin^2\alpha)\, A = 0, \qquad (1.22)$$

$$(\mathbf{J}\cdot\mathbf{J} + a^2P_1^2 + a^2P_2^2)\,\Psi = -\lambda\Psi.$$

Следует заметить, что эти уравнения также являются вариантами уравнения сфероидальной волны. Соответствующие решения Ψ уравнения (1.1), ограниченные и однозначные в R^3, имеют вид

$$\begin{gathered} Ps_n^{|m|}(-i\operatorname{sh}\eta,\ a^2\omega^2)\, Ps_n^{|m|}(\cos\alpha,\ -a^2\omega^2)\, e^{im\varphi}, \\ m \text{ — целое число}, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\quad -n \leqslant m \leqslant n, \end{gathered} \qquad (1.23)$$

с собственными значениями $\lambda_n^{|m|}(-a^2\omega^2)$.

Для параболических координат 8 уравнения с разделенными переменными ξ, η записываются так:

$$\Xi'' + \xi^{-1}\Xi' + (\omega^2\xi^2 - m^2/\xi^2 - \lambda)\,\Xi = 0,$$

$$H'' + \eta^{-1}H + (\omega^2\eta^2 - m^2/\eta^2 + \lambda)\, H = 0, \qquad (1.24)$$

$$(\{J_1, P_2\} - \{J_2, P_1\})\,\Psi = \lambda\Psi,$$

а решения с разделенными переменными имеют вид

$$\begin{gathered} \Xi(\xi) = \xi^m \exp(\pm i\omega\xi^2/2)\,{}_1F_1\left(\begin{matrix} i\lambda/4\omega + (m+1)/2 \\ m+1 \end{matrix}\,\middle|\, \mp i\omega\xi^2\right), \\ H(\eta) = \eta^m \exp(\pm i\omega\eta^2/2)\,{}_1F_1\left(\begin{matrix} -i\lambda/4\omega + (m+1)/2 \\ m+1 \end{matrix}\,\middle|\, \mp i\omega\eta^2\right). \end{gathered} \qquad (1.25)$$

Рассмотренные выше восемь систем координат — это единственные системы, для которых решения с разделенными переменными являются собственными функциями некоторого оператора второго порядка, т. е. квадрата оператора симметрии первого порядка. Анализ систем 9—11 выполняется не так просто.

Для параболоидальных координат 9 получаются уравнения с разделенными переменными α, β, γ:

$$A'' + (-q - \lambda c \operatorname{ch} 2\alpha + (\omega^2c^2/2)\operatorname{ch} 4\alpha)\, A = 0,$$

$$B'' + (q + \lambda c \cos 2\beta - (\omega^2c^2/2)\cos 4\beta)\, B = 0, \qquad (1.26)$$

$$\Gamma'' + (-q + \lambda c \operatorname{ch} 2\gamma - (\omega^2c^2/2)\operatorname{ch} 4\gamma)\,\Gamma = 0, \quad q = \mu - c^2\omega^2/2,$$

где

$$\begin{aligned} &(J_3^2 - c^2P_3^2 + c\{J_2, P_1\} + c\{J_1, P_2\})\Psi = -\mu\Psi, \\ &(cP_2^2 - cP_1^2 + \{J_2, P_1\} - \{J_1, P_2\})\Psi = \lambda\Psi. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Каждое из уравнений (1.26) можно преобразовать в уравнение Уиттекера — Хилла (6.28); см. разд. 2.6 [127]. Однозначные решения уравнения (1.1) определяются формулой

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha, \beta, \gamma) &= gc_n(i\alpha;\ 2c\omega,\ \lambda/2\omega)\, gc_n(\beta;\ 2c\omega,\ \lambda/2\omega) \times \\ &\times gc_n(i\gamma + \pi/2;\ 2c\omega,\ \lambda/2\omega), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad \mu = \mu_n, \end{aligned} \tag{1.28}$$

либо тем же самым выражением, но с gc_n, замененным на gs_n.

Для эллипсоидальных координат μ, ν, ρ, при $0 < \rho < 1 < \nu < a < \mu < \infty$ однозначно определяющих точку пространства, все уравнения с разделенными переменными принимают вид

$$\begin{aligned} &\left(4\,(h(\xi))^{1/2} \frac{d}{d\xi}\,(h(\xi))^{1/2} \frac{d}{d\xi} + \lambda_1\xi + \lambda_2 + \omega^2\xi^2\right) E(\xi) = 0, \\ &h(\xi) = (\xi - a)(\xi - 1)\,\xi, \qquad \xi = \mu,\ \nu,\ \rho, \end{aligned} \tag{1.29}$$

причем

$$\begin{aligned} &(\mathbf{J}\cdot\mathbf{J} + P_1^2 + aP_2^2 + (a+1)P_3^2)\Psi = \lambda_1\Psi, \\ &(J_2^2 + aJ_1^2 + aP_3^2)\Psi = \lambda_2\Psi. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Для удобства вычислений введем эквивалентные координаты α, β, γ, допускающие разделение переменных и определенные следующим образом:

$$\rho = \mathrm{sn}^2(\alpha, k), \quad \nu = \mathrm{sn}^2(\beta, k), \quad \mu = \mathrm{sn}^2(\gamma, k), \quad k = a^{-1/2}, \tag{1.31}$$

где $\mathrm{sn}(z, k)$ — эллиптическая функция Якоби (см. приложение B). Связь между α, β, γ и x, y, z дается соотношениями

$$\begin{aligned} x = ik^{-1}(k')^{-1}\,\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\gamma, &\quad y = -k(k')^{-1}\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\gamma, \\ z &= k\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}\,\gamma, \end{aligned} \tag{1.32}$$

где $\mathrm{cn}\,\alpha$ и $\mathrm{dn}\,\alpha$ — эллиптические функции, а $k' = (1 - k^2)^{1/2}$. Чтобы x, y, z имели вещественные значения, необходимо, чтобы α было вещественнозначным, β — комплекснозначным и таким, что $\mathrm{Re}\,\beta = K$, а γ — комплекснозначным и таким, что $\mathrm{Im}\,\gamma = K'$, где $K(k)$ определяется в (B.3) и $K' = K(k')$. Для того чтобы координаты x, y, z могли один раз пробегать все возможные вещественные значения, достаточно, чтобы α изменялось на отрезке $[-K, K]$, β — на отрезке $[K - iK',\ K + iK']$ (параллельном мнимой оси), а γ — на отрезке $[-K + iK',\ K + iK']$ (параллельном вещественной оси). В этих новых переменных уравнения с разделенными переменными принимают вид *уравнения эллипсоидальной волны*

$$\left\{\frac{d^2}{d\xi^2} + k^2\lambda_2 + k^2\lambda_1 \operatorname{sn}^2\xi + k^2\omega^2 \operatorname{sn}^4\xi\right\} E(\xi) = 0, \qquad \xi = \alpha,\ \beta,\ \gamma. \qquad (1.33)$$

Из свойств периодичности эллиптических функций следует, что если в (1.32) заменить ξ на $\xi + 4Kn + 4iK'm$, где m, n — целые числа, а ξ — одна из переменных α, β, γ, то x, y, z не изменятся. Таким образом, однозначными функциями от x, y, z будут только те решения $E(\xi)$ уравнения (1.33), которые являются двоякопериодическими и однозначными функциями от переменной ξ с вещественным периодом $4K$ и мнимым периодом $4iK'$. Эти двоякопериодические однозначные решения уравнения (1.33) называются *функциями эллипсоидальной волны* и обозначаются символом $\operatorname{el}(\xi)$ в предложенной Арскоттом системе обозначений [7, гл. X]. Существует восемь типов таких функций, причем каждую из них можно представить в виде

$$\operatorname{sn}^s z \operatorname{cn}^c z \operatorname{dn}^d z F(\operatorname{sn}^2 z), \qquad s,\ c,\ d = 0,\ 1,$$

где F — сходящийся степенной ряд от своего аргумента. Собственные значения счетны и дискретны.

Чтобы рассмотреть конические координаты r, μ, ν (система 11 табл. 14), для удобства положим $\mu = \operatorname{sn}^2(\alpha, k)$, $\nu = \operatorname{sn}^2(\beta, k)$, где $k = b^{1/2} > 0$; тогда

$$\begin{gathered} x = r(k')^{-1}\operatorname{dn}(\alpha,\ k)\operatorname{dn}(\beta,\ k), \qquad y = irk(k')^{-1}\operatorname{cn}(\alpha,\ k)\operatorname{cn}(\beta,\ k), \\ z = rk\operatorname{sn}(\alpha,\ k)\operatorname{sn}(\beta,\ k) \end{gathered} \qquad (1.34)$$

и переменные меняются в следующих интервалах: $0 \leqslant r$, $-2K < \alpha < 2K$, $\beta \in [K, K + 2iK')$ (см. [7]). Уравнения с разделенными переменными записываются так:

$$\begin{gathered} R'' + 2r^{-1}R' + (\omega - l(l+1)r^{-2})R = 0, \\ A'' + (\lambda - l(l+1)k^2\operatorname{sn}^2\alpha)A = 0, \\ B'' + (\lambda - l(l+1)k^2\operatorname{sn}^2\beta)B = 0, \\ \mathbf{J}\cdot\mathbf{J}\Psi = -l(l+1)\Psi, \qquad (J_1^2 + bJ_2^2)\Psi = \lambda\Psi. \end{gathered} \qquad (1.35)$$

Первое уравнение имеет решения вида $R(r) = r^{-1/2}J_{\pm(l+1/2)}(\omega r)$, что соответствует (1.18а). Два последующих уравнения являются *уравнениями Ламе*. Если α или β увеличить на целые, кратные $4K$ или $4iK'$, то x, y и z, как следует из (1.34), не изменятся. Таким образом, к однозначным функциям от x, y, z приводят только те решения $A(\alpha)$, $B(\beta)$ уравнений (1.35), которые являются двоякопериодическими и однозначными функциями от переменных α, β соответственно. Известно (см. [7]), что двоякопериодические решения уравнения Ламе существуют только в тех случаях, когда $l=0, 1, 2, \ldots$. Кроме того, для положительного целого числа l существует точно $2l+1$ таких решений, соответствующих $2l+1$ различным собственным значениям λ. Эти решения (в точности по одному для каждой пары собственных значений λ, l) можно представить в виде конечных рядов, называемых *многочленами Ламе*. Существует восемь типов многочленов Ламе, причем каждый из них имеет вид

$$\operatorname{sn}^s \alpha \operatorname{cn}^c \alpha \operatorname{dn}^d \alpha F_p(\operatorname{sn}^2 \alpha), \qquad s, c, d=0, 1, \qquad s+c+d+2p=l,$$

где $F_p(z)$ — многочлен от z порядка p. Более подробно эти функции будут рассмотрены в разд. 3.3.

3.2. Модель гильбертова пространства: сфера S_2

По аналогии с методами, рассмотренными в гл. 1, можно в пространство решений уравнения (1.1) ввести некоторую структуру гильбертова пространства таким образом, что решения с разделенными переменными будут являться собственными функциями самосопряженных операторов в обертывающей алгебре алгебры $\mathscr{E}(3)$. Используя результаты, полученные в разд. 1.3, можно показать, что если функцию $\Psi(\mathbf{x})$ можно представить в виде

$$\Psi(\mathbf{x}) = \iint_{S_2} \exp(i\omega\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{k}})\, h(\hat{\mathbf{k}})\, d\Omega(\hat{\mathbf{k}}) = I(h), \tag{2.1}$$

$$\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3), \qquad \hat{\mathbf{k}}=(k_1, k_2, k_3),$$

то она удовлетворяет уравнению $(\Delta_3+\omega^2)\Psi(\mathbf{x})=0$. В формуле (2.1) $\hat{\mathbf{k}}$ — единичный вектор ($\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}}=1$), пробегающий единичную сферу S_2: $k_1^2+k_2^2+k_3^2=1$, $d\Omega$ — обычная мера телесного угла на этой сфере и h — произвольная комплекснозначная измеримая функция на S_2 (относительно $d\Omega$), такая, что

$$\iint_{S_2} |h(\hat{\mathbf{k}})|^2\, d\Omega(\hat{\mathbf{k}}) < \infty.$$

Множество $L_2(S_2)$ таких функций h образует **гильбертово пространство** со скалярным произведением

$$\langle h_1, h_2\rangle = \iint_{S_2} h_1(\hat{\mathbf{k}})\, \bar{h}_2(\hat{\mathbf{k}})\, d\Omega(\hat{\mathbf{k}}); \tag{2.2}$$

в сферических координатах на S_2

$$\hat{\mathbf{k}}=(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta), \qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi, \qquad -\pi\leqslant\varphi<\pi,$$
$$d\Omega(\hat{\mathbf{k}}) = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \tag{2.3}$$

это произведение записывается в виде

$$\langle h_1, h_2\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} h_1(\theta, \varphi)\bar{h}_2(\theta, \varphi)\sin\theta\, d\theta.$$

Элементы $g(A, \mathbf{a})$ группы $E(3)$ действуют на решения рассматриваемого уравнения Гельмгольца посредством операторов $\mathbf{T}(g)$; см. формулы (1.9), (1.12). При помощи (2.1) мы находим, что

$$\mathbf{T}(g)\Psi(\mathbf{x}) = I(\mathbf{T}(g)h) \tag{2.4}$$

каждый раз, когда $\Psi = I(h)$, причем операторы $\mathbf{T}(g)$ в $L_2(S_2)$ определяются следующими соотношениями:

$$\mathbf{T}(g)h(\hat{\mathbf{k}}) = \exp(i\omega\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{k}}A)h(\hat{\mathbf{k}}A), \tag{2.5}$$
$$g = (A, \mathbf{a}), \qquad A \in SO(3), \quad \mathbf{a} \in R^3.$$

Таким образом, операторы $\mathbf{T}(g)$, действуя на Ψ, индуцируют операторы (которые мы также обозначаем $\mathbf{T}(g)$), действующие на h. Легко непосредственно проверить, что операторы (2.5) обладают свойством гомоморфизма $\mathbf{T}(g_1g_2) = \mathbf{T}(g_1)\mathbf{T}(g_2)$. Более того, эти операторы унитарны в $L_2(S_2)$:

$$\langle\mathbf{T}(g)h_1, \mathbf{T}(g)h_2\rangle = \langle h_1, h_2\rangle, \qquad h_j \in L_2(S_2).$$

Этот результат и соотношение (2.5) зависят от инвариантности меры при повороте: $d\Omega(\hat{\mathbf{k}}A) = d\Omega(\mathbf{k})$.

Аналогичным рассуждением можно показать, что образующие алгебры Ли в $L_2(S_2)$, индуцируемые образующими (1.2) на пространстве решений, определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
&P_1 = i\omega k_1 = i\omega\sin\theta\cos\varphi, \quad P_2 = i\omega k_2 = i\omega\sin\theta\sin\varphi,\\
&P_3 = i\omega k_3 = i\omega\cos\theta,\\
&J_1 = k_3\partial_{k_2} - k_2\partial_{k_3} = \sin\varphi\partial_\theta + \cos\varphi\operatorname{ctg}\theta\partial_\varphi,\\
&J_2 = k_1\partial_{k_3} - k_3\partial_{k_1} = -\cos\varphi\partial_\theta + \sin\varphi\operatorname{ctg}\theta\partial_\varphi,\\
&J_3 = k_2\partial_{k_1} - k_1\partial_{k_2} = -\partial_\varphi.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

По аналогии с (1.12) связь между этими операторами и групповыми операторами (2.5) определяется соотношением

$$\mathbf{T}(g) = \exp(\varphi' J_3)\exp(\theta' J_1)\exp(\psi' J_3)\exp(a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3),$$

где φ', θ', ψ' — эйлеровы углы для A. Кроме того, операторы (2.6) являются кососимметрическими эрмитовыми операторами на плотном подпространстве $\mathscr{D}$ пространства $L_2(S_2)$, состоящем из бесконечно дифференцируемых функций в S_2.

Мы показали, что операторы $\mathbf{T}(g)$ определяют унитарное (неприводимое) представление группы $E(3)$ на $L_2(S_2)$. Легко видеть, что элементы алгебры $\mathscr{E}(3)^2$ являются симметрическими на $\mathscr{D}$; ниже мы покажем в явном виде, что области определения этих элементов можно расширить, с тем чтобы определить самосопряженные операторы в плотных подпространствах пространства $L_2(S_2)$. Для каждой пары коммутирующих операторов, перечисленных в табл. 14, можно найти соответствующую пару коммутирующих самосопряженных операторов S, S' на $L_2(S_2)$ и получить спектральное разложение этой пары. Эти результаты будут использованы нами для получения информации относительно пространства $\mathscr{H}$, состоящего из решений Ψ уравнения Гельмгольца, таких, что $\Psi = I(h)$ для некоторого элемента $h \in L_2(S_2)$; см. (2.1). Через $\mathscr{H}$ мы обозначаем гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\Psi_1, \Psi_2) \equiv \langle h_1, h_2 \rangle, \qquad \Psi_j = I(h_j). \tag{2.7}$$

(Нетрудно показать, что не существует такого ненулевого элемента $h \in L_2(S_2)$, который при помощи оператора I можно было бы отобразить в нулевое решение уравнения Гельмгольца.) Следовательно, I является унитарным преобразованием из $L_2(S_2)$ в $\mathscr{H}$. Отсюда вытекает, что операторы $\mathbf{T}(g)$ в $\mathscr{H}$, определяемые формулами (1.9), (1.12), также унитарны.

Каждую функцию $\Psi(\mathbf{x})$ в $\mathscr{H}$ можно представить в виде скалярного произведения

$$\begin{gathered}\Psi(\mathbf{x}) = I(h) = \langle h, H(\mathbf{x}, \cdot)\rangle, \\ H(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}) = \exp(-i\omega\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{k}}) \in L_2(S_2).\end{gathered} \tag{2.8}$$

Так же как в разд. 1.3, существование унитарного отображения I дает нам возможность переходить в задачах от пространства $\mathscr{H}$ к пространству $L_2(S_2)$. В частности, если S и S' — пара коммутирующих операторов из табл. 14, мы можем представить эти операторы как пару коммутирующих самосопряженных операторов в $L_2(S_2)$ и определить базис собственных функций для $L_2(S_2)$:

$$Sf_{\lambda\mu} = \lambda f_{\lambda\mu}, \quad S'f_{\lambda\mu} = \mu f_{\lambda\mu}, \quad \langle f_{\lambda\mu}, f_{\lambda'\mu'}\rangle = \delta(\lambda-\lambda')\,\delta(\mu-\mu'). \tag{2.9}$$

Тогда функции $\Psi_{\lambda\mu}(\mathbf{x}) = I(f_{\lambda\mu})$ образуют в $\mathscr{H}$ соответствующий базис для операторов S, S', построенных из образующих (1.2):

$$S\Psi_{\lambda\mu} = \lambda\Psi_{\lambda\mu}, \qquad S'\Psi_{\lambda\mu} = \mu\Psi_{\lambda\mu}. \tag{2.10}$$

Последние выражения дают возможность вычислить интеграл для $\Psi_{\lambda\mu}$, так как они гарантируют, что $\Psi_{\lambda\mu}$ является решением уравнения Гельмгольца с разделенными переменными, ассоциированными с операторами S, S'. Более того, если Ψ — решение уравнения (1.1), такое, что $\Psi = I(h)$ для некоторого $h \in L_2(S_2)$, то имеет место разложение

$$\mathbf{T}(g)\Psi(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda, \mu} \langle \mathbf{T}(g)h, f_{\lambda\mu}\rangle \Psi_{\lambda\mu}(\mathbf{x}), \tag{2.11}$$

сходящееся как поточечно, так и в смысле гильбертова пространства.

Продолжим анализ нашей модели $L_2(S_2)$. Гармонический анализ, связанный с рассмотрением функций на сфере, сам по себе представляет значительный интерес. Как правило, такой анализ, при котором рассматриваются только сферические координаты 5 (см. табл. 14), дает в результате теоремы, касающиеся разложений по сферическим гармоникам. Мы же исследуем все представленные в табл. 14 одиннадцать систем координат на S_2. В некоторых случаях в нашем анализе мы будем использовать более простые модели представлений, нежели модель $L_2(S_2)$.

Поскольку подробный анализ системы сферических координат 5 можно найти во многих учебниках (см., например, [37, 43, 86, 130]), мы перечислим здесь без доказательств только наиболее важные результаты, относящиеся к этой системе. Все унитарные неприводимые представления группы $SO(3)$ конечномерны. Они обозначаются через D_l, $l = 0, 1, 2, \ldots$, причем $\dim D_l = 2l + 1$. Если $\{J_1, J_2, J_3\}$ — операторы в пространстве V_l представлений D_l, соответствующие образующим (1.5) алгебры Ли, то существует о. н. базис $\{f_m^{(l)}\colon m = l, l-1, \ldots, -l\}$ для V_l, такой, что

$$J^0 f_m^{(l)} = m f_m^{(l)}, \qquad J^{\pm} f_m^{(l)} = [(l \pm m + 1)(l \mp m)]^{1/2} f_{m\pm 1}^{(l)}, \tag{2.12}$$

где $J^{\pm} = \mp J_2 + iJ_1$, $J^0 = iJ_3$, причем $J^+ f_l^{(l)} \equiv J^- f_{-l}^{(l)} \equiv 0$. Если группа параметризована при помощи эйлеровых углов (1.6), то матричные элементы операторов $\mathbf{D}(A) = \exp(\varphi J_3)\exp(\theta J_1)\exp(\psi J_3)$ относительно о. н. базиса $\{f_m^{(l)}\}$,

$$\mathbf{D}(A) f_m^{(l)} = \sum_{n=-l}^{l} D_{nm}^l(A) f_n^{(l)},$$

определяются соотношением

$$D_{nm}^l(A) = i^{n-m}\left[\frac{(l+m)!\,(l-n)!}{(l+n)!\,(l-m)!}\right]^{1/2} \exp[i(n\varphi + m\psi)]\, P_l^{-n,\, m}(\cos\theta), \tag{2.13}$$

где

$$P_l^{-n,\,m}(\cos\theta) = \frac{(\sin\theta)^{m-n}(1-\cos\theta)^{l+n-m}\,2^{-l}}{\Gamma(m-n+1)} \times$$

$$\times\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} -l-n,\ m-l \\ m-n+1 \end{matrix}\,\middle|\, \frac{\cos\theta-1}{\cos\theta+1}\right) \qquad (2.14)$$

— обобщенная сферическая функция. (Матричные элементы (2.13) известны как *D-функции Вигнера* [36].) Матричные элементы D^l_{nm} обладают обычными свойствами гомоморфизма и унитарности:

$$\begin{aligned} D^l_{nm}(AA') &= \sum_{j=-l}^{l} D^l_{nj}(A)\,D^l_{jm}(A'), \qquad A,\ A' \in SO(3), \\ D^l_{nm}(A^{-1}) &= \bar{D}^l_{mn}(A). \end{aligned} \qquad (2.15)$$

Матричные элементы частного вида $D^l_{0m}(A)$ пропорциональны сферическим гармоникам

$$D^l_{0m}(\varphi,\ \theta,\ \psi) = i^m\left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2} Y_l^m(\theta,\ \psi), \qquad (2.16)$$

где

$$Y_l^m(\theta,\ \psi) = \left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}\right]^{1/2} P_l^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}, \qquad (2.17)$$

а $P_l^m(\cos\theta) = P_l^{0,\,-m}(\cos\theta)$ — присоединенная функция Лежандра.

Из (2.12) следует, что в V_l имеет место соотношение

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{J} = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = -l(l+1)E, \qquad (2.18)$$

где E — единичный оператор.

Теперь рассмотрим неприводимое представление T группы $E(3)$ в $L_2(S_2)$, которое определяется соотношением (2.5). Если ограничить T на подгруппу $SO(3)$, то оно становится приводимым и разбивается на прямую сумму

$$T\,|\,SO(3) \cong \sum_{l=0}^{\infty} \oplus D_l, \qquad (2.19)$$

т. е. $L_2(S_2)$ можно разложить на прямую сумму взаимно ортогональных подпространств V_l

$$L_2(S_2) \cong \sum_{l=0}^{\infty} \oplus V_l,$$

где $\dim V_l = 2l+1$ и действие операторов $\mathbf{T}(A)$ на инвариантное подпространство V_l унитарно эквивалентно D_l. Элементы h из подпространств V_l являются решениями уравнения $\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}h = -l(l+1)h$, которое в сферических координатах (2,3) имеет вид

$$(\partial_{\theta\theta} + \operatorname{ctg}\theta\,\partial_\theta + \sin^{-2}\theta\,\partial_{\varphi\varphi})\,h(\theta,\ \varphi) = -\,l\,(l+1)\,h(\theta,\ \varphi). \tag{2.20}$$

В этом уравнении $\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}$ является *оператором Лапласа на сфере* S_2. Из представленных выше результатов вытекает, что самосопряженное расширение этого оператора (которое мы также обозначаем через $\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}$) имеет дискретный спектр $-l(l+1)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, причем кратность каждого собственного значения равна $2l+1$.

Для V_l существует некоторый базис, состоящий из собственных функций $f_m^{(l)}(\theta,\ \varphi)$ оператора симметрии J^0, удовлетворяющего соотношениям (2.12), где

$$J^{\pm} = e^{\pm i\varphi}(\pm\,\partial_\theta + i\operatorname{ctg}\theta\,\partial_\varphi), \qquad J^0 = -\,i\partial_\varphi. \tag{2.21}$$

Действительно, из рекуррентных соотношений (2.12) и дифференциального уравнения (2.20) мы получаем

$$f_m^{(l)}(\theta,\ \varphi) = Y_l^m(\theta,\ \varphi), \qquad \langle Y_l^m,\ Y_{l'}^{m'}\rangle = \delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{2.22}$$

Нетрудно показать, что действие операторов P_j на этот базис описывается формулами

$$\begin{aligned}
P^0 f_m^{(l)} &= -\,\omega\left[\frac{(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+3)(2l+1)}\right]^{1/2} f_m^{(l+1)} - \\
&\quad -\,\omega\left[\frac{(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l-1)}\right]^{1/2} f_m^{(l-1)}, \\
P^+ f_m^{(l)} &= \omega\left[\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+3)(2l+1)}\right]^{1/2} f_{m+1}^{(l+1)} - \\
&\quad -\,\omega\left[\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l+1)(2l-1)}\right]^{1/2} f_{m+1}^{(l-1)}, \\
P^- f_m^{(l)} &= -\,\omega\left[\frac{(l-m+2)(l-m+1)}{(2l+3)(2l+1)}\right]^{1/2} f_{m-1}^{(l+1)} + \\
&\quad +\,\omega\left[\frac{(l+m)(l+m-1)}{(2l+1)(2l-1)}\right]^{1/2} f_{m-1}^{(l-1)},
\end{aligned} \tag{2.23}$$

где

$$P^0 = iP_3 = -\,\omega\cos\theta, \qquad P^{\pm} = \mp P_2 + iP_1 = -\,\omega e^{\pm i\varphi}\sin\theta \tag{2.24}$$

(см. [83]).

Матричные элементы операторов переноса $\mathbf{T}(E,\mathbf{a}) = \exp(a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3)$ определяются формулой

$$\begin{aligned}
T_{lm,\,l'm'}(\mathbf{a}) &= \langle \mathbf{T}(E,\ \mathbf{a})\, f_{m'}^{(l')},\ f_m^{(l)}\rangle = \\
&= \int_{S_2} \exp(i\omega\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{k}})\, Y_{l'}^{m'}(\hat{\mathbf{k}})\, \overline{Y}_l^m(\hat{\mathbf{k}})\, d\Omega(\hat{\mathbf{k}}),
\end{aligned} \tag{2.25}$$

или — в развернутом виде —

$$T_{lm,\,l'm'}(\mathbf{a}) = (4\pi)^{1/2} \sum_{s=0}^{\infty} \left[\frac{(2s+1)(2l+1)}{(2l'+1)}\right]^{1/2} i^s j_s(\omega a) \times$$

$$\times Y_s^{m'-m}(\alpha,\ \beta)\, C(s,\ 0;\ l,\ 0\,|\,l',\ 0)\, C(s,\ m'-m;\ l,\ m\,|\,l',\ m'), \qquad (2.26)$$

$$\mathbf{a} = (a \sin\alpha\cos\beta,\ a\sin\alpha\sin\beta,\ a\cos\alpha), \qquad a \geqslant 0,$$

а $C(\cdot)$ — коэффициент Клебша — Гордана для $SO(3)$ [37, 83, 122]. (Сумма в (2.26) фактически конечна, так как, за исключением ограниченного числа значений s, коэффициенты Клебша — Гордана обращаются в нуль.) *Сферические функции Бесселя* $j_n(z)$ определяются соотношением

$$j_n(z) = (\pi/2z)^{1/2} J_{n+1/2}(z), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (2.27)$$

Применяя интегральное преобразование I к нашему о. н. базису $\{f_m^{(l)}\}$ для $L_2(S_2)$, мы получаем о. н. базис $\{\Psi_m^{(l)} = I(f_m^{(l)})\}$ решений уравнения Гельмгольца, которые удовлетворяют следующим уравнениям на собственные значения:

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}\Psi_m^{(l)} = -l(l+1)\Psi_m^{(l)}, \qquad J_3\Psi_m^{(l)} = -im\Psi_m^{(l)}.$$

Эти собственные функции разделяются в представленной в табл. 14 системе сферических координат 5 и в явном виде даются соотношением

$$\Psi_m^{(l)}(r,\ \theta,\ \varphi) = 4\pi i^l j_l(\omega r) Y_l^m(\theta, \varphi),$$

$$l = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = l,\ l-1,\ \ldots,\ -l. \qquad (2.28)$$

Такие функции часто называются *сферическими* (*стоячими*) *волнами*. Они обязательно удовлетворяют рекуррентным соотношениям (2.12) и (2.23), в которых операторы теперь определяются формулами (1.2). Матричные элементы (2.13) и (2.26) можно использовать непосредственно для разложения функции $\mathbf{T}(g)\Psi_M^{(L)}$ по элементам сферического базиса. Рассматривая, например, частный случай, когда $g = (E, \mathbf{a})$, мы получаем теорему сложения для сферических волн:

$$\Psi_M^{(L)}(R,\ \Theta,\ \Phi) = \sum_{l,m} T_{lm,\,LM}(\mathbf{a})\,\Psi_m^{(l)}(r,\ \theta,\ \varphi), \qquad (2.29)$$

где R, Θ, Φ — сферические координаты для трехмерного вектора $\mathbf{R} = \mathbf{x} + \mathbf{a}$. Формула (2.29) впервые была опубликована в [129].

Легко показать, что решения, не принадлежащие нашему гильбертову пространству,

$$\Psi_m^{\prime(l)}(\rho,\ \theta,\ \varphi) = 4\pi i^l j_{-l-1}(\omega\rho) Y_l^m(\theta,\ \varphi), \qquad (2.30)$$

удовлетворяют рекуррентным соотношениям (2.12), (2.23), а следовательно, и любая их линейная комбинация $\alpha\Psi^{(l)}_m + \beta\Psi'^{(l)}_m$ также удовлетворяет этим рекуррентным соотношениям [122]. Таким образом, матричные элементы (2.13), (2.26) справедливы для всех этих базисных множеств, и формула разложения (2.29) имеет силу как для множества $\{\Psi'^{(l)}_m\}$, так и для базиса гильбертова пространства $\{\Psi^{(l)}_m\}$.

Определим с помощью нашей модели $L_2(S_2)$ спектральные разложения операторов, соответствующих системам 1—4 в табл. 14. Специфической особенностью этих систем является тот факт, что для них P_3 — диагональный оператор. Из (2.6) непосредственно следует, что ограниченный самосопряженный оператор $iP_3 = -\omega\cos\theta$ имеет непрерывный спектр, покрывающий отрезок $[-\omega, \omega]$, причем каждая точка этого отрезка имеет кратность, равную единице. Фиксируя собственное значение оператора iP_3, мы фиксируем координату θ. Оставшаяся координата φ все еще может меняться в интервале от $-\pi$ до π, пробегая при этом некоторую окружность в S_2. Оставшийся оператор симметрии второго порядка для каждой из систем 1—4 коммутирует с P_3; следовательно, функции на этих окружностях остаются инвариантными, и нам приходится иметь дело с одним из четырех случаев, исследованных нами в разд. 1.3. Повторяя рассуждения этого раздела, мы немедленно получаем следующие результаты.

1. Система декартовых координат

Уравнения на собственные значения имеют вид

$$iP_3 f^{(1)}_{\alpha,\gamma} = -\omega\cos(\gamma)\, f^{(1)}_{\alpha,\gamma}, \qquad iP_2 f^{(1)}_{\alpha,\gamma} = -\omega\sin(\gamma)\sin(\alpha)\, f^{(1)}_{\alpha,\gamma}, \tag{2.31}$$

причем базисные собственные функции задаются соотношениями

$$\begin{gathered} f^{(1)}_{\alpha,\gamma}(\theta, \varphi) = \frac{\delta(\varphi-\alpha)\,\delta(\theta-\gamma)}{(\sin\gamma)^{1/2}}, \qquad -\pi \leqslant \alpha < \pi, \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant \pi, \\ \left\langle f^{(1)}_{\alpha,\gamma}, f^{(1)}_{\alpha',\gamma'} \right\rangle = \delta(\alpha-\alpha')\,\delta(\gamma-\gamma'). \end{gathered} \tag{2.32}$$

Соответствующие решения уравнения Гельмгольца являются решениями типа плоской волны

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)}_{\alpha,\gamma}(\mathbf{x}) = I\left(f^{(1)}_{\alpha,\gamma}\right) = (\sin\gamma)^{1/2} \exp\left[i\omega\left(x_1 \sin\gamma\cos\alpha + {}\right.\right. \\ \left.\left. + x_2 \sin\gamma\sin\alpha + x_3\cos\gamma\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.33}$$

2. Система цилиндрических координат

Уравнения на собственные значения имеют вид

$$iP_3 f^{(2)}_{n,\gamma} = -\omega\cos(\gamma) f^{(2)}_{n,\gamma}, \quad iJ_3 f^{(2)}_{n,\gamma} = n f^{(2)}_{n,\gamma}, \tag{2.34}$$

а базисные собственные функции задаются соотношениями

$$\begin{gathered} f^{(2)}_{n,\gamma}(\theta,\ \varphi) = \frac{e^{in\varphi}\delta(\gamma-\theta)}{(2\pi\sin\gamma)^{1/2}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant \pi, \\ \left\langle f^{(2)}_{n,\gamma},\ f^{(2)}_{n',\gamma'} \right\rangle = \delta_{nn'}\delta(\gamma-\gamma'). \end{gathered} \tag{2.35}$$

Кроме того, имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \Psi^{(2)}_{n,\gamma}(\mathbf{x}) = I\left(f^{(2)}_{n,\gamma}\right) = i^n (2\pi\sin\gamma)^{1/2} J_n(\omega\sin(\gamma) r) \times \\ \times \exp\left[i(n\varphi + \omega z\cos\gamma)\right], \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Это решения уравнения Гельмгольца типа *цилиндрической волны.*

3. Система координат параболического цилиндра

Уравнения на собственные значения имеют вид

$$iP_3 f^{(3)}_{\mu\pm,\gamma} = -\omega\cos(\gamma) f^{(3)}_{\mu\pm,\gamma}, \quad \{J_3,\ P_2\} f^{(3)}_{\mu\pm,\gamma} = 2\mu\omega\sin(\gamma) f^{(3)}_{\mu\pm,\gamma} \tag{2.37}$$

а базисные собственные функции определяются соотношениями

$$f^{(3)}_{\mu+,\gamma}(\theta,\ \varphi) = \begin{cases} (2\pi\sin\gamma)^{-1/2}(1+\cos\varphi)^{-i\mu/2-1/4} \times \\ \qquad \times (1-\cos\varphi)^{i\mu/2-1/4}\delta(\theta-\gamma), \\ \qquad 0 < \varphi < \pi, \\ 0, \qquad -\pi < \varphi < 0, \end{cases} \tag{2.38}$$

$$f^{(3)}_{\mu-,\gamma}(\theta,\ \varphi) = f^{(3)}_{\mu+,\gamma}(\theta,\ -\varphi) \qquad -\infty < \mu < \infty, \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant \pi,$$

$$\left\langle f^{(3)}_{\mu\,\pm,\gamma},\ f^{(3)}_{\mu'\,\pm,\gamma'} \right\rangle = \delta(\mu-\mu')\delta(\gamma-\gamma'), \quad \left\langle f^{(3)}_{\mu\pm,\gamma},\ f^{(3)}_{\mu'\mp,\gamma'} \right\rangle = 0.$$

Соответствующие решения уравнения Гельмгольца имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi^{(3)}_{\mu+,\gamma}(\mathbf{x}) = I\left(f^{(3)}_{\mu+,\gamma}\right) = \left(\frac{\sin\gamma}{2}\right)^{1/2} \sec(i\mu\pi) \times \\ \times \left[D_{i\mu-1/2}(\sigma\xi) D_{-i\mu-1/2}(\sigma\eta) + D_{i\mu-1/2}(-\sigma\xi) D_{-i\mu-1/2}(-\sigma\eta)\right] \times \\ \times e^{i\omega z\cos\gamma}, \end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\Psi^{(3)}_{\mu-,\gamma}(\xi,\ \eta,\ z) = \Psi^{(3)}_{\mu+,\gamma}(\xi,\ -\eta,\ z), \quad \sigma = e^{i\pi/4}(2\omega\sin\gamma)^{1/2},$$

$$x = (\xi^2-\eta^2)/2, \quad y = \xi\eta, \quad z = z.$$

4. Система координат эллиптического цилиндра

Уравнения на собственные значения имеют вид

$$iP_3 f^{(4)}_{nt,\gamma} = -\omega\cos(\gamma)\, f^{(4)}_{nt,\gamma}, \quad \left(J_3^2 + d^2P_1^2\right) f^{(4)}_{nt,\gamma} = \lambda_{nt} f^{(4)}_{nt,\gamma}, \quad t = s, c; \qquad (2.40)$$

базисные собственные функции задаются соотношениями

$$\begin{aligned} f^{(4)}_{nc,\gamma}(\theta,\ \varphi) &= (\pi\sin\gamma)^{-1/2}\,\mathrm{ce}_n(\varphi,\ q)\,\delta(\theta-\gamma), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \\ f^{(4)}_{ns,\gamma}(\theta,\ \varphi) &= (\pi\sin\gamma)^{-1/2}\,\mathrm{se}_n(\varphi,\ q)\,\delta(\theta-\gamma), \quad n = 1, 2, \ldots, \\ q &= (d^2\omega^2/4)\sin^2\gamma, \qquad 0 \leqslant \gamma \leqslant \pi. \end{aligned} \qquad (2.41)$$

Собственные значения $\lambda_{n\pm}$ дискретны, имеют кратность, равную единице, и связаны с собственными значениями a уравнения Матье (Б.25) соотношением $a = -\lambda - {}^1/_2 d^2\omega^2\sin^2\gamma$. Множество $\{f^{(4)}_{nt,\gamma}\}$ образует базис для $L_2(S_2)$, удовлетворяющий соотношению

$$\left\langle f^{(4)}_{nt,\gamma},\ f^{(4)}_{n't',\gamma'}\right\rangle = \delta_{nn'}\delta_{tt'}\delta(\gamma-\gamma'), \qquad t,\ t' = s,\ c. \qquad (2.42)$$

Соответствующие решения уравнения Гельмгольца имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi^{(4)}_{nc,\gamma}(\mathbf{x}) &= C_n(\sin\gamma)^{1/2}\,\mathrm{Ce}_n(\alpha,\ q)\,\mathrm{ce}_n(\beta,\ q)\exp[i\omega z\cos\gamma], \\ &\qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \\ \Psi^{(4)}_{ns,\gamma}(\mathbf{x}) &= S_n(\sin\gamma)^{1/2}\,\mathrm{Se}_n(\alpha,\ q)\,\mathrm{se}_n(\beta,\ q)\exp[i\omega z\cos\gamma], \\ &\qquad n = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \qquad (2.43)$$

где Ce_n и Se_n — модифицированные функции Матье (см. уравнение (3.40) разд. 1.3), а C_n, S_n — константы, определяемые из интегральных уравнений $\Psi^{(4)}_{nt,\gamma} = I\left(f^{(4)}_{nt,\gamma}\right)$. Координаты эллиптического цилиндра α, β, z задаются соотношениями

$$x = d\,\mathrm{ch}\,\alpha\cos\beta, \qquad y = d\,\mathrm{sh}\,\alpha\sin\beta, \qquad z = z.$$

Спектральные разложения для систем 6—10 были впервые описаны в работе [25]; система 11 была изучена раньше — см. [108]. Результаты для этих систем приводятся ниже.

6. Система координат вытянутого сфероида

Уравнения на собственные значения имеют вид

$$\left(\mathbf{J}\cdot\mathbf{J} - a^2P_1^2 - a^2P_2^2\right) f^{(6)}_{n,m} = -\lambda_n^m f^{(6)}_{n,m}, \qquad iJ_3 f^{(6)}_{n,m} = m f^{(6)}_{n,m}, \qquad (2.44)$$

а о. н. базис собственных функций определяется формулой

$$f^{(6)}_{n,m}(\theta, \varphi) = \left[\frac{(n-|m|)!(2n+1)}{(n+|m|)!\,4\pi}\right]^{1/2} Ps_n^{|m|}(\cos\theta, a^2\omega^2)\,e^{im\varphi}. \quad (2.45)$$

(Первое уравнение для собственных значений (2.44) превращается во второе уравнение (1.20).) В формуле (2.45) $n = 0, 1, 2, \ldots, m = n, n-1, \ldots, -n$, а через $\lambda_n^m(\alpha^2\omega^2)$ обозначены дискретные собственные значения. В нормировке, принятой Мейкснером и Шефке [80], $\langle f^{(6)}_{n,m}, f^{(6)}_{n',m'}\rangle = \delta_{nn'}\delta_{mm'}$ Функции сфероидальных волн часто даются в виде их разложений по присоединенным функциям Лежандра:

$$Ps_n^{|m|}(x, a^2\omega^2) = \sum_{2k \geqslant |m|-n} (-1)^k a^{|m|}_{n,2k}(a^2\omega^2)\,P^{|m|}_{n+2k}(x) \quad (2.46)$$

(см. [7]). В самом деле, подставляя (2.46) в уравнение сфероидальной волны, легко получить рекуррентную формулу для коэффициентов $a^m_{n,2k}$.

Соответствующий базис для решений уравнения Гельмгольца имеет вид

$$\Psi^{(6)}_{n,m}(\mathbf{x}) = I\left(f^{(6)}_{n,m}\right) = C_n^m(a^2\omega^2)\,Ps_n^{|m|}(\operatorname{ch}\eta, a^2\omega^2) \times$$
$$\times Ps_n^{|m|}(\cos\alpha, a^2\omega^2)\,e^{im\varphi}, \quad (2.47)$$

где $C_n^m(a^2\omega^2)$ — константа, определяемая из интегрального уравнения. Этот результат легко получается из того факта, что $\Psi^{(6)}_{n,m}$ разделяется в координатах

$$x = a\operatorname{sh}\eta\sin\alpha\cos\varphi, \quad y = a\operatorname{sh}\eta\sin\alpha\sin\varphi, \quad z = a\operatorname{ch}\eta\cos\alpha.$$

(См. соответствующее доказательство формулы (3.38) в разд. 1.3.)

7. Система координат сплющенного сфероида

Уравнения на собственные значения записываются в виде

$$\left(\mathbf{J}\cdot\mathbf{J} + a^2P_1^2 + a^2P_2^2\right) f^{(7)}_{n,m} = -\lambda_n^m f^{(7)}_{n,m}, \quad iJ_3 f^{(7)}_{n,m} = m f^{(7)}_{n,m}; \quad (2.48)$$

о. н. базис собственных функций определяется соотношением

$$f^{(7)}_{n,m}(\theta, \varphi) = \left[\frac{(n-|m|)!\,(2n+1)}{(n+|m|)!\,4\pi}\right]^{1/2} Ps_n^{|m|}(\cos\theta, -a^2\omega^2)\,e^{im\varphi}, \quad (2.49)$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = n, n-1, \ldots, -n.$$

(Здесь первое уравнение для собственных значений (2.48) превращается во второе уравнение (1.22).) Дискретные собственные значения обозначаются через $\lambda_n^{|m|}(-a^2\omega^2)$.

Соответствующие решения уравнения Гельмгольца даются формулой

$$\begin{aligned}\Psi^{(7)}_{n,\,m}(\mathbf{x}) &= I\left(f^{(7)}_{n,\,m}\right) = \\ &= C_n^m\left(a^2\omega^2\right) Ps_n^{|m|}\left(-i\,\operatorname{sh}\eta,\ a^2\omega^2\right)\times \\ &\qquad \times Ps_n^{|m|}\left(\cos\alpha,\ -a^2\omega^2\right)e^{im\varphi},\end{aligned}\qquad(2.50)$$

где $C_n^m\left(a^2\omega^2\right)$ — константа, определяемая из интегрального уравнения, и

$$x = a\operatorname{ch}\eta\sin\alpha\cos\varphi,\qquad y = a\operatorname{ch}\eta\sin\alpha\sin\varphi,\qquad z = a\operatorname{sh}\eta\cos\alpha.$$

8. Система параболических координат

Уравнения на собственные значения имеют вид

$$\left(\{J_1,\ P_2\} - \{J_2,\ P_1\}\right) f^{(8)}_{\lambda,\,m} = 2\lambda\omega f^{(8)}_{\lambda,\,m},\qquad iJ_3 f^{(8)}_{\lambda,\,m} = m f^{(8)}_{\lambda,\,m}.\qquad(2.51)$$

Здесь $\{J_1, P_2\} - \{J_2, P_1\} = 2i\omega(\cos\theta + \sin\theta\partial_\theta)$ — оператор первого порядка, имеющий единственное самосопряженное расширение. Собственные функции определяются соотношением

$$\begin{aligned}&f^{(8)}_{\lambda,\,m}(\theta,\ \varphi) = (2\pi)^{-1}\frac{[\operatorname{tg}(\theta/2)]^{-i\lambda}}{\sin\theta}e^{im\varphi},\\ &\qquad m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\qquad -\infty < \lambda < \infty,\\ &\left\langle f^{(8)}_{\lambda,\,m},\ f^{(8)}_{\lambda',\,m'}\right\rangle = \delta(\lambda - \lambda')\,\delta_{mm'}.\end{aligned}\qquad(2.52)$$

Соответствующие решения уравнения Гельмгольца находятся по формуле

$$\begin{aligned}\Psi^{(8)}_{\lambda,\,m}(\mathbf{x}) &= I\left(f^{(8)}_{\lambda,\,m}\right) = \frac{i^m\sqrt{2}}{\xi\eta\omega}\Gamma\left(\frac{1-m+i\lambda}{2}\right)\times \\ &\quad\times\Gamma\left(\frac{1-m-i\lambda}{2}\right)\mathscr{M}_{i\lambda/2,\,-m/2}\left[\frac{\exp(-i\pi/2)\,\omega\xi^2}{\sqrt{2}}\right]\times \\ &\qquad\times\mathscr{M}_{i\lambda/2,\,-m/2}\left[\frac{\exp(i\pi/2)\,\omega\eta^2}{\sqrt{2}}\right]\exp(im\varphi),\end{aligned}\qquad(2.53)$$

причем

$$\mathscr{M}_{\alpha,\,\mu/2}(z) = \frac{z^{(1+\mu)/2}e^{-z/2}}{\Gamma(1+\mu)}\,{}_1F_1\left(\left.\begin{matrix}(1+\mu)/2-\alpha\\ 1+\mu\end{matrix}\right|z\right)\qquad(2.54)$$

является функцией Уиттекера [29] и

$$x = \xi\eta\cos\varphi,\qquad y = \xi\eta\sin\varphi,\qquad z = (\xi^2 - \eta^2)/2.$$

9. Система параболоидальных координат

Уравнения на собственные значения имеют вид

$$\begin{gathered}\left(J_3^2 - c^2P_3^2 + c\{J_2, P_1\} + c\{J_1, P_2\}\right) f_{nt\lambda}^{(9)} = -\mu_{n\pm} f_{nt\lambda}^{(9)},\\ \left(cP_2^2 - cP_1^2 + \{J_2, P_1\} - \{J_1, P_2\}\right) f_{nt\lambda}^{(9)} = 2\omega\lambda f_{nt\lambda}^{(9)},\end{gathered} \tag{2.55}$$

а базис собственных функций определяется следующим образом:

$$f_{nt\lambda}^{(9)}(\theta, \varphi) = (2\pi)^{-1/2} \frac{[\operatorname{tg}(\theta/2)]^{i\lambda}}{\sin\theta} \exp\left(-\frac{ic\omega}{2}\cos\theta\cos 2\varphi\right) \times$$

$$\times \begin{cases} gc_n(\varphi;\ 2c\omega, \lambda) \\ gs_n(\varphi;\ 2c\omega, \lambda) \end{cases}, \qquad t = c, s, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad -\infty < \lambda < \infty, \tag{2.56}$$

где gc_n и gs_n — соответственно четные и нечетные неполиномиальные решения уравнения Уиттекера — Хилла. Используемая здесь нормировка этих функций заимствована у Урвина и Арскотта [127]. Мы имеем

$$\left\langle f_{nt\lambda}^{(9)}, f_{n't'\lambda'}^{(9)}\right\rangle = \delta_{nn'}\delta_{tt'}\delta(\lambda - \lambda').$$

Соответствующие решения уравнения Гельмгольца определяются по формуле

$$\Psi_{nt\lambda}^{(9)}(\mathbf{x}) = K_n^t(\omega c, \lambda)\, gt_n(\beta;\ 2c\omega, \lambda)\, gt_n(i\alpha;\ 2c\omega, \lambda) \times$$

$$\times\, gt_n(i\gamma + \pi/2;\ 2c\omega, \lambda), \quad t = s, c, \tag{2.57}$$

где константы K_n^t находятся из интегрального уравнения $\Psi_{nt\lambda}^{(9)} = I\left(f_{nt\lambda}^{(9)}\right)$. Для данной системы

$$x = 2c\operatorname{ch}\alpha\cos\beta\operatorname{sh}\gamma, \quad y = 2c\operatorname{sh}\alpha\sin\beta\operatorname{ch}\gamma,$$

$$z = c(\operatorname{ch}2\alpha + \cos 2\beta - \operatorname{ch}2\gamma)/2.$$

10. Система эллипсоидальных координат

Возьмем эллиптические координаты на единичной сфере:

$$k_1 = \left[\frac{(s-a)(t-a)}{a(a-1)}\right]^{1/2}, \quad k_2 = \left[\frac{(s-1)(t-1)}{1-a}\right]^{1/2} \quad k_3 = \left[\frac{st}{a}\right]^{1/2},$$

$$0 < t < 1 < s < a. \tag{2.58}$$

Тогда уравнения на собственные значения

$$Sf = \lambda f, \quad S'f = \mu f, \quad S = P_1^2 + aP_2^2 + (a+1)P_3^2 + \mathbf{J}\cdot\mathbf{J}, \tag{2.59}$$

$$S' = J_2^2 + aJ_1^2 + aP_3^2,$$

принимают вид

$$\begin{gathered}\left[\frac{4}{s-t}\left(\partial_{\alpha\alpha}+\partial_{\beta\beta}\right)-\omega^2(s+t)-\omega^2(1+a)\right]f=\lambda f,\\ \left[\frac{4}{s-t}\left(t\partial_{\alpha\alpha}+s\partial_{\beta\beta}\right)-\omega^2 st\right]f=\mu f,\end{gathered}\qquad(2.60)$$

где

$$\partial_\alpha=\left[(a-s)(s-1)s\right]^{1/2}\partial_s,\qquad \partial_\beta=\left[(t-a)(t-1)t\right]^{1/2}\partial_t.$$

Можно найти решения этих уравнений вида $f(s,t)=E_1(s)E_2(t)$, где

$$\begin{gathered}\left(4\partial_{\alpha\alpha}-\omega^2s^2+\lambda's+\mu\right)E_1(s)=0,\\ \left(4\partial_{\beta\beta}+\omega^2t^2-\lambda't-\mu\right)E_2(t)=0,\quad \lambda'=-\omega^2(1+a)-\lambda.\end{gathered}\qquad(2.61)$$

Эти выражения являются алгебраическими формами уравнения эллипсоидальной волны (см. (1.29)); следовательно, E_j — эллипсоидальные функции. Кроме того, если положить $s=\mathrm{sn}^2(\eta,k)$, $t=\mathrm{sn}^2(\psi,k)$, где $k=a^{-1/2}$, то уравнения с разделенными переменными будут иметь форму Якоби

$$\left(\partial_{\xi\xi}-k^2\mu-k^2\lambda'\,\mathrm{sn}^2\xi+k^2\omega^2\,\mathrm{sn}^4\xi\right)E_j(\xi)=0,\qquad \xi=\eta,\ \psi,\quad j=1,2,\qquad(2.62)$$

уравнения эллипсоидальной волны (1.33). Новые координаты η, ψ обладают также тем свойством, что они допускают параметризацию не только первого октанта сферы S_2, но и всей этой сферы. В самом деле,

$$\begin{aligned}k_1&=(k')^{-1}\,\mathrm{dn}(\eta,k)\,\mathrm{dn}(\psi,k), & k_2&=ik(k')^{-1}\,\mathrm{cn}(\eta,k)\,\mathrm{cn}(\psi,k),\\ k_3&=k\,\mathrm{sn}(\eta,k)\,\mathrm{sn}(\psi,k), & k'&=(1-k^2)^{1/2},\end{aligned}\qquad(2.63)$$

и эти координаты покрывают S_2 в точности один раз, если η меняется в пределах $-2K<\eta<2K$, а $\psi\in[K,\ K+2iK')$, где $K=K(k)$ дается соотношением (B.3) и $K'=K(k')$.

Поскольку k_1, k_2 и k_3 не меняются при прибавлении к η или к ψ целых кратных $4K$ и $4iK'$, нас интересуют только те однозначные решения E_j уравнения (2.62), которые остаются фиксированными при этих преобразованиях, т. е. решения

$$E_j(\xi+4Kn+4iK'n)=E_j(\xi),\qquad n,\ m\text{ — целые числа.}$$

Как уже было указано в предыдущем разделе, эти двоякопериодические функции называются функциями эллипсоидальной волны. Подробный анализ этих функций был проведен Арскоттом [7]. Спектр операторов S и S' дискретный, каждая пара собственных значений обозначается через λ_{nm}, μ_{nm}. Соответствующие функции эллипсоидальной волны обозначаются через $\mathrm{el}_n^m(\xi)$, $\xi=\eta$, ψ, а собственные функции операторов S и S' —

через

$$f^{(10)}_{nm}(\eta, \psi) = \mathrm{el}\, p^m_n(\eta, \psi) = \mathrm{el}^m_n(\eta)\,\mathrm{el}^m_n(\psi), \tag{2.64}$$

где $n = 0, 1, \ldots$, а целое m принимает $2n+1$ значений. Предположим, что $\{\mathrm{el}\, p^m_n\}$ — о. н. базис:

$$\langle \mathrm{el}\, p^m_n, \mathrm{el}\, p^{m'}_{n'} \rangle = \delta_{nn'}\delta_{mm'}.$$

(Такой выбор базиса определяет решения (2.64) лишь с точностью до некоторого множителя, по абсолютной величине равного единице. По существу, единственная нормировка дана в [7]. Заметим также, что $d\Omega(\hat{\mathbf{k}}) = ik^2(\mathrm{sn}^2\,\eta - \mathrm{sn}^2\,\psi)\,d\eta\, d\psi$.) В общем случае эти функции довольно трудно поддаются изучению, и относительно их структуры известно очень мало.

Соответствующие решения уравнения Гельмгольца $\Psi^{(10)}_{nm}(\mathbf{x}) = I\left(f^{(10)}_{nm}\right)$ имеют вид

$$\Psi^{(10)}_{nm}(\mathbf{x}) = \mathrm{El}^m_n(\alpha, \beta, \gamma) = K^m_n(\omega, k)\,\mathrm{el}^m_n(\alpha)\,\mathrm{el}^m_n(\beta)\,\mathrm{el}^m_n(\gamma), \tag{2.65}$$

где константа K^m_n находится из нетривиального соотношения

$$\begin{aligned}\mathrm{El}^m_n(\alpha, \beta, \gamma) = \iint\limits_{S_2} \exp\Big[w\Big(&-\frac{1}{k(k')^2}\,\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\gamma\,\mathrm{dn}\,\eta\,\mathrm{dn}\,\psi + \\ &+\frac{k^2}{(k')^2}\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\gamma\,\mathrm{cn}\,\eta\,\mathrm{cn}\,\psi + \\ &+ ik^2\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{sn}\,\eta\,\mathrm{sn}\,\psi\Big)\Big]\,\mathrm{el}\,p(\eta, \psi)\,d\Omega(\hat{\mathbf{k}}),\end{aligned} \tag{2.66}$$

в котором произведение трех функций эллипсоидальной волны представлено в виде интеграла от произведения двух таких функций. Координаты α, β, γ связаны с x, y, z соотношениями (1.32). Интеграл (2.66) мы могли вычислить с точностью до некоторого постоянного множителя, так как заранее известно, что он разделяется в переменных α, β, γ.

3.3. Многочлены и функции Ламе на сфере

Несмотря на свою сложность, задача на собственные значения, соответствующая системе конических координат 11 (см. табл. 14), представляет особый интерес. Только для конических и сферических координат задача на собственные значения становится конечномерной, т. е. только в этих двух случаях эта задача сводится к нахождению собственных значений $(n \times n)$-матрицы.

Для функций f на сфере S_2 уравнения на собственные значения, соответствующие системе 11 в табл. 14, имеют вид

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}f=-l(l+1)f, \qquad (J_1^2+bJ_2^2)f=\lambda f, \qquad 1>b>0. \tag{3.1}$$

Из (2.19) следует, что

$$L_2(S_2)\cong\sum_{l=0}^{\infty}\oplus V_l,$$

где $\dim V_l=2l+1$ и V_l — пространство неприводимого представления D группы SO_3. Таким образом, $\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}$ имеет спектр $-l(l+1)$, $l=0, 1, 2, \ldots$, причем кратность каждого собственного значения равна $2l+1$. Поскольку $S=\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}$ и $S'=J_1^2+bJ_2^2$ коммутируют, отсюда следует, что относительно второго оператора подпространства V_l инвариантны. Следовательно, наши поиски собственных значений оператора S' можно ограничить $(2l+1)$-мерным пространством V_l. Это пространство имеет о. н. базис $\{f_m^l\}$ (см. (2.12)), и ограничение оператора S' на пространство V_l можно описать при помощи вещественной симметрической $[(2l+1)\times(2l+1)]$-матрицы $\mathscr{S}'$ в базисе $\{f_m^l\}$. Таким образом, $2l+1$ собственных значений матрицы $\mathscr{S}'$ являются собственными значениями оператора S' в V_l.

Существует и иной взгляд на эту проблему. Элементы h пространства V_l являются решениями дифференциального уравнения в частных производных $\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}h=-l(l+1)h$ (см. уравнение (2.20)). Легко показать, что алгебра симметрии $so(3)$ этого уравнения трехмерна (единичная симметрия E игнорируется) и имеет базис $\{J_1, J_2, J_3\}$; см. формулы (2.6). Соответствующей группой симметрии является $SO(3)$. Пространство $\mathscr{S}^{(2)}/\mathfrak{q}$ операторов симметрии второго порядка, по модулю кратных $\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}$, пятимерно и имеет базис J_2^2, J_3^2, $\{J_1, J_2\}$, $\{J_1, J_3\}$, $\{J_2, J_3\}$. В результате сопряженного действия группы $SO(3)$ это пространство разбивается на два типа орбит: тип орбит с представителем J_3^2 и тип орбит с представителем $J_1^2+bJ_2^2$, $1>b>0$. Кроме того, известно, что дифференциальное уравнение (2.20) для оператора Лапласа на S_2 допускает разделение переменных точно в двух системах координат [108]. Одной из этих систем является система сферических координат $\{\theta, \varphi\}$, в которой мы с самого начала записали уравнение (2.20) и которая соответствует диагонализации оператора J_3^2. Второй системой является система эллиптических координат $\{s, t\}$ (см. (2.58)), которая соответствует диагонализации оператора $J_1^2+bJ_2^2$. Теоретико-групповой подход к анализу системы эллиптических координат был впервые предложен в работе [108] (см. также [57]).

С какой бы точки зрения мы ни подходили к анализу этой системы, мы должны вычислить матрицу $\mathcal{S}'$ оператора

$$S' = J_1^2 + bJ_2^2 = {}^1/_4(b-1)\left((J^+)^2 + (J^-)^2\right) + {}^1/_2(b+1)\left((J^0)^2 - l(l+1)\right)$$

в базисе $\{f_m^{(l)}\}$ и найти $2l+1$ собственных значений λ этой матрицы. Как известно [68], эта задача эквивалентна нахождению корней характеристического уравнения

$$\det(\mathcal{S}' - \lambda\mathcal{E}) = 0, \tag{3.2}$$

где $\mathcal{E}$ является единичной $[(2l+1)\times(2l+1)]$-матрицей. Как показано в [108], при $l \leqslant 7$ собственные значения λ можно найти в явном виде как корни многочленов не выше четвертого порядка. Однако при $l \geqslant 8$ порядок многочленов выше четырех, и поэтому приближенные значения корней следует находить численными методами.

Для классификации этих собственных значений можно воспользоваться теорией групп. Заметим, что как уравнение Гельмгольца (1.1), так и уравнение Лапласа на сфере (2.20) инвариантны относительно полной группы поворотов $O(3)$. (Эта группа порождается группой $SO(3)$ и оператором инверсии пространства P: $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$. Матричной реализацией этой группы является группа всех вещественных (3×3)-матриц A, таких, что $AA^t = E_3$. Для этой группы $\det A = \pm 1$ и $\det A = +1$ тогда и только тогда, когда $A \in SO(3)$.) Элементы группы $O(3)$, не принадлежащие группе $SO(3)$ (поворотов и инверсий), отграничены от единицы, и их нельзя получить вычислением экспонент элементов алгебры Ли $so(3)$. Существование этих симметрий инверсии доказывается прямым вычислением.

Кроме оператора P, нас должны интересовать следующие операторы:

Z: $(x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$, отражение относительно плоскости (x, y);
X: $(x, y, z) \rightarrow (-x, y, z)$, отражение относительно плоскости (y, z);
Y: $(x, y, z) \rightarrow (x, -y, z)$, отражение относительно плоскости (x, z).

Перенося при помощи (2.1) действие этих операторов на сферу, мы получаем

$$Ph(\hat{\mathbf{k}}) = h(-\hat{\mathbf{k}}), \qquad Zh(\hat{\mathbf{k}}) = h(k_1, k_2, -k_3),$$
$$Xh(\hat{\mathbf{k}}) = h(-k_1, k_2, k_3),\ Yh(\hat{\mathbf{k}}) = h(k_1, -k_2, k_3),\ h \in L_2(S_2). \tag{3.3}$$

Очевидно, что квадрат каждого из коммутирующих операторов P, Z, X, Y, является единичным оператором E и что все эти операторы самосопряжены. Кроме того, каждый из этих операторов коммутирует с $S' = J_1^2 + bJ_2^2$ и $S = \mathbf{J}\cdot\mathbf{J}$. Отсюда следует, что существует о. н. базис для V_l, состоящий из общих собственных векторов операторов P, Z, X, Y и S'.

Возможными собственными значениями операторов $P, \ldots, Y$

являются ± 1. Для определения кратности этих собственных значений на V_l применим операторы (3.3) к явному базису $\{f_m^{(l)}(\theta, \varphi) = Y_l^m(\theta, \varphi)\}$; см. (2.22). В результате получаем

$$\begin{aligned} Pf_m^{(l)} &= (-1)^l f_m^{(l)}, & Zf_m^{(l)} &= (-1)^{l-m} f_m^{(l)}, \\ Xf_m^{(l)} &= f_{-m}^{(l)}, & Yf_m^{(l)} &= (-1)^m f_{-m}^{(l)}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Заметим, что на V_l имеет место соотношение $P = (-1)^l E$. Чтобы определить кратности остальных собственных пространств, определим собственные пространства

$$\mathscr{C}_l^{pq} = \{h \in V_l\colon\ Xh = ph, \quad XYh = qh\}, \quad p, q = \pm 1, \tag{3.5}$$

и положим $n_l^{pq} = \dim \mathscr{C}_l^{pq}$. Поскольку $Y = X(XY)$ и $Z = XYP$, мы имеем

$$Ph = (-1)^l h, \quad Zh = (-1)^l qh, \quad Xh = ph, \quad Yh = pqh \tag{3.6}$$

для любого $h \in \mathscr{C}_l^{pq}$. Кроме того,

$$V_l = \mathscr{C}_l^{++} \oplus \mathscr{C}_l^{+-} \oplus \mathscr{C}_l^{-+} \oplus \mathscr{C}_l^{--}.$$

Используя (3.4), можно определить размерности этих собственных пространств. Результаты вычислений представлены в табл. 15.

Таблица 15

РАЗМЕРНОСТИ n_l^{pq} СОБСТВЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ $\mathscr{C}_l^{pq}$

	n_l^{++}	n_l^{+-}	n_l^{-+}	n_l^{--}
l четное	$1 + l/2$	$l/2$	$l/2$	$l/2$
l нечетное	$(1 + l)/2$	$(1 + l)/2$	$(-1 + l)/2$	$(1 + l)/2$

Поскольку каждое собственное пространство инвариантно относительно S', собственные функции оператора S' можно классифицировать по их свойствам симметрии относительно операторов X и XY. Следовательно, о. н. базис для V_l, обозначаемый через $\{f_\lambda^{pq}\}$, определяется уравнениями

$$\begin{gathered} \mathbf{J} \cdot \mathbf{J} f_\lambda^{pq} = -l(l+1) f_\lambda^{pq}, \quad (J_1^2 + bJ_2^2) f_\lambda^{pq} = \lambda f_\lambda^{pq}, \\ X f_\lambda^{pq} = p f_\lambda^{pq}, \quad XY f_\lambda^{pq} = q f_\lambda^{pq}. \end{gathered} \tag{3.7}$$

(Можно показать, что вырождение отсутствует, т. е. что при фиксированных l, p, q, λ не существует двух линейно независимых решений уравнений (3.7).)

В эллиптических координатах на сфере (см. (2.63)) уравнения для собственных значений (3.1) разделяются и сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$E_j''(\xi)+(\lambda-l(l+1)k^2\operatorname{sn}^2\xi)E_j(\xi)=0,\quad j=1,2,\quad \xi=\eta,\psi,\quad k=b^{1/2}\tag{3.8}$$

где $f(\eta,\psi)=E_1(\eta)E_2(\psi)$. Как уже было указано при обсуждении уравнений (1.35), уравнение (3.8) является уравнением Ламе. Оно имеет $2l+1$ линейно независимых решений (многочлены Ламе), однозначных на S_2, причем каждое из них можно представить в виде

$$\operatorname{sn}^s\xi\operatorname{cn}^c\xi\operatorname{dn}^d\xi F_p(\operatorname{sn}^2\xi),\quad s,c,d=0,1,\quad s+c+d+2p=l,\tag{3.9}$$

где $F_p(z)$ — многочлен от z порядка p. Восемь типов таких многочленов соответствуют восьми случаям, перечисленным в табл. 15. Поскольку кратность каждого собственного пространства равна единице, собственные функции должны принимать вид $E(\eta)E(\psi)$, где $E(z)$ — многочлен Ламе.

До того как мы продолжим наш анализ оператора S' на $L_2(S_2)$, исследуем более простую модель от одной переменной спектрального разложения оператора S'. Возьмем $(2l+1)$-мерное пространство W_l многочленов $g(z)$ от комплексной переменной z, имеющих порядок не выше $2l$. Введем скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ на W_l, такое, что

$$(z^{l-m},z^{l-n})=(l-m)!\,(l+m)!\,\delta_{mn},\quad m,n=l,l-1,\ldots,-l,\tag{3.10}$$

или — в развернутом виде —

$$(2l+1)!\,(g_1,g_2)=\pi^{-1}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}dx\,dy\,(1+|z|^2)^{-2l-2}g_1(z)\bar g_2(z)=$$

$$=\pi^{-1}\int\limits_0^{\infty}r\,dr\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\,(1+r^2)^{-2l-2}g_1(re^{i\varphi})\bar g_2(re^{i\varphi})\tag{3.11}$$

для $g_j\in W_l$, причем $z=x+iy=re^{i\varphi}$, а областью интегрирования является вся комплексная плоскость. Пространство W_l инвариантно относительно операторов J_1, J_2, J_3, определяемых соотношениями

$$J_1=-\frac{i}{2}(1-z^2)\frac{d}{dz}-ilz,\quad J_2=\frac{1}{2}(1+z^2)\frac{d}{dz}-lz,$$
$$J_3=-iz\frac{d}{dz}+il\tag{3.12}$$

и удовлетворяющих соотношениям коммутирования $[J_j,J_k]=\sum\limits_p\varepsilon_{jkp}J_p$ алгебры $so(3)$. Кроме того, для этой модели $\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}=$

$=-l(l+1)$. Каждой функции $g \in W_l$ соответствует функция $G \in V_l$, которую мы находим из соотношений

$$
\begin{aligned}
&G(\hat{\mathbf{k}}) = (g, H(\hat{\mathbf{k}}, \cdot)) = I'(g),\\
&H(\hat{\mathbf{k}}, z) = (l!)^{-1}[(2l+1)/4\pi]^{1/2}[k_1(1-z^2)/2+ik_2(1+z^2)/2+k_3z]^l,
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

где $\hat{\mathbf{k}} \in S_2$. Оператор I' из W_l в V_l унитарен. В самом деле, из (3.10) следует, что

$$
g^l_m(z) = \frac{z^{l+m}}{[(l+m)!\,(l-m)!]^{1/2}}, \qquad m = l, l-1, \ldots, -l, \tag{3.14}
$$

является о. н. базисом для W_l. Поскольку

$$
\overline{H}(\hat{\mathbf{k}}, z) = \sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\theta, \psi)\, g_m^{-l}(z) \tag{3.15}
$$

(теоретико-групповое доказательство этого равенства см. в [37]), для $\hat{\mathbf{k}} = (\sin\theta\cos\psi, \sin\theta\sin\psi, \cos\theta)$ мы имеем

$$
I'\left(g^l_m\right) = Y_l^m(\theta, \varphi) = f^l_m, \tag{3.16}
$$

где сферические гармоники Y_l^m образуют о. н. базис пространства V_l. Из (2.12) и (2.22) следует, что операторы (3.12), действуя на W_l, индуцируют операторы (2.6) на V_l:

$$
J_jG(\hat{\mathbf{k}}) = I'(J_jg(z)), \qquad j = 1, 2, 3. \tag{3.17}
$$

Теперь рассмотрим задачу на собственные значения для S' на W_l, которая имеет вид $\left(J_1^2 + bJ_2^2\right)g(z) = \lambda g(z)$. Мы находим

$$
\begin{aligned}
S' = {} & [(1-k)z^2-(1+k)][(1+k)z^2-(1-k)]\frac{d^2}{dz^2} + \\
& + 2(2l-1)z[1+k^2-z^2(1-k^2)]\frac{d}{dz} + \\
& + 2l[1+k^2+(1-k^2)(2l-1)z^2], \qquad k = b^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Если положить $g(z) = (k')^l[(\alpha - z^2)(1-\alpha z^2)]^{l/2}\mathcal{G}(w)$, где $k' = (1-k^2)^{1/2}$, $\alpha = (1+k)/(1-k)$, и произвести замену переменной

$$
\operatorname{sn}(w, k) = -i(1+\alpha)z[(\alpha - z^2)(1-\alpha z^2)]^{-1/2}, \tag{3.18}
$$

то наше уравнение для собственных значений примет вид уравнения Ламе:

$$
\left[\frac{d^2}{dw^2} + \lambda - k^2l(l+1)\operatorname{sn}^2(w, k)\right]\mathcal{G}(w) = 0. \tag{3.19}
$$

Из (3.9) следует, что $2l+1$ многочленов Ламе, являющихся решениями этого уравнения, являются в точности решениями.

Таблица 16

КЛАССЫ СИММЕТРИИ МНОГОЧЛЕНОВ ЛАМЕ

$\operatorname{sn}^s w \operatorname{cn}^c w \operatorname{dn}^d w F_\rho (\operatorname{sn}^2 w)$, $s, c, d = 0{,}1$ $s + c + d + 2\rho = l$

	(p, q)	s	c	d	Размерность n_l^{pq}
l четное	$+, +$	0	0	0	$1 + l/2$
	$+, -$	1	1	0	$l/2$
	$-, +$	0	1	1	$l/2$
	$-, -$	1	0	1	$l/2$
l нечетное	$+, +$	1	0	0	$(1 + l)/2$
	$+, -$	0	1	0	$(1 + l)/2$
	$-, +$	1	1	1	$(-1 + l)/2$
	$-, -$	0	0	1	$(1 + l)/2$

которые соответствуют элементам $g(z) \in W_l$. Выясним, каким образом разбиение многочленов Ламе на восемь типов будет представлено в нашей новой модели. Из (3.4), (3.14) и (3.16) следует, что X и XY на W_l принимают вид

$$Xg(z) = z^{2l} g(z^{-1}), \quad XYg(z) = (-1)^l g(-z) \tag{3.20}$$

для $g \in W_l$.

Так же как и при рассмотрении собственных пространств $\mathscr{C}_l^{pq}$ пространства V_l (см. (3.5), (3.6)), можно потребовать, чтобы собственные функции $g(z) = (k')^l [(\alpha - z^2)(1 - \alpha z^2)]^{l/2} \mathscr{G}(w)$ тоже удовлетворяли уравнениям $Xg = pg$, $XYg = qg$, $p, q = \pm 1$. Используя эти соотношения совместно с (3.9) и табл. 15, мы получаем соотношения, связывающие показатели s, c, d в (3.9) и собственные значения p, q, перечисленные в табл. 16. Как показано в [7, гл. 9], многочлены Ламе в каждом классе симметрии можно снабдить целочисленным индексом $n = 0, 1, \ldots, n_l^{pq} - 1$, причем n — это число нулей многочлена в интервале $0 < w < K(k)$. Чтобы получить рекуррентные соотношения для коэффициентов многочлена $F_\rho(\operatorname{sn}^2 w)$, следует подставить в (3.19) выражения (3.9) и приравнять коэффициенты при независимых мономах эллиптических функций $\operatorname{sn}^s w \operatorname{cn}^c w \operatorname{dn}^d w \operatorname{sn}^{2j} w$. Полиномиальные решения получаются тогда и только тогда, когда λ является одним из $2l + 1$ различных собственных значений λ_{ln}^{pq}.

Мы показали, что эти собственные значения можно получить двумя различными способами: либо традиционным способом, отыскивая полиномиальные решения уравнения Ламе, как описано в работе Арскотта [7], либо решая характеристическое уравнение (3.2). При втором способе мы определяем в явном виде матрицу $\mathcal{S}'$ относительно о. н. базиса $\{f^{(l)}_m\}$. Таким образом, если найдено некоторое собственное значение, то соответствующий собственный вектор $f^{pq}_{\lambda n}$ можно выразить через коэффициенты $a^{pq}_{n,m}$ его разложения по элементам базиса $\{f^{(l)}_m\}$:

$$f^{pq}_n = \sum_m a^{pq}_{n,m} f^{(l)}_m. \tag{3.21}$$

(На практике для этих коэффициентов можно получить трехчленные рекуррентные формулы; см. [108].) С другой стороны, традиционный подход к решению уравнения Ламе дает трехчленные рекуррентные формулы для коэффициентов многочлена $F_\rho(\operatorname{sn}^2 w) = \sum_{j=0}^{\rho} b_j \operatorname{sn}^{2j} w$. Коэффициенты $a^{pq}_{n,m}$ представляют для нас особый интерес, так как они определяют матричные элементы смешанного базиса: базиса Ламе $\{f^{pq}_n\}$ и канонического базиса $\{f^{(l)}_m\}$. В литературе же, посвященной многочленам Ламе, даются таблицы только коэффициентов b_k.

При помощи нашей модели W_l можно получить соотношения, связывающие эти коэффициенты. Пусть $\{\Lambda^{pql}_n(z)\}$ — о. н. базис для W_l, который состоит из собственных функций оператора S', классифицированных по типу симметрии и числу нулей. Тогда из (3.21) вытекает, что

$$\Lambda^{pql}_n(z) = \sum_m a^{pq}_{n,m} g^{(l)}_m = \sum_m a^{pq}_{n,m} z^{l+m} \left[(l+m)!\,(l-m)!\right]^{-1/2}, \tag{3.22}$$

т. е. эти м. э. с. б. являются, по существу, коэффициентами при z^{l+m}, $-l \leqslant m \leqslant l$. С другой стороны,

$$\Lambda^{pql}_n(z) = (k')^l \left[(\alpha - z^2)(1 - \alpha z^2)\right]^{l/2} \operatorname{sn}^s w \operatorname{cn}^c w \operatorname{dn}^d w \sum_{j=0}^{\rho} b_j \operatorname{sn}^{2j} w, \tag{3.23}$$

где w связано с z соотношением (3.18). Разлагая (3.23) в степенной ряд по z и приравнивая коэффициенты при z^{l+m} в (3.22) и (3.23), каждый коэффициент $a^{pq}_{m,n}$ можно представить в виде конечной суммы коэффициентов b_j. С некоторыми деталями такого вычисления можно ознакомиться в [57].

Используя преобразование (3.13), полученные нами результаты можно отобразить в V_l. Если $\{\Lambda^{pql}_n\}$ — о. н. базис собственных функций оператора S' на W_l, то

$$f^{pq}_{ln} = c^{pq}_{ln} E^{p,q}_{ln}(\eta) E^{p,q}_{ln}(\psi) = I'\left(\Lambda^{pql}_n\right) = \left(\Lambda^{pql}_n, H(\hat{\mathbf{k}}, \cdot)\right), \tag{3.24}$$

где η, ψ — эллиптические координаты на S_2 (см. (2.63)), является о. н. базисом собственных функций оператора S' на V_l. В формуле (3.24) $E^{p,q}_{ln}(\xi)$ — многочлен Ламе, отвечающий тому же собственному значению и тому же типу симметрии, что и Λ^{pql}_n. Поскольку явная нормировка $E^{p,q}_{ln}$ и Λ^{pql}_n фиксирована, константа c определяется из двойного интеграла. (Интеграл в (3.24) вычисляется, так как нам заранее известно, что он удовлетворяет уравнению Ламе от переменных n и ψ, и легко проверить, что этот интеграл является периодической функцией η и ψ.) Соотношение (3.21) теперь можно рассматривать как разложение произведений многочленов Ламе по сферическим гармоникам.

Совокупность всех собственных функций (3.24) для $l = 0, 1, 2, \ldots$ образует о. н. базис в $L_2(S_2)$. Отображая этот базис в гильбертово пространство решений уравнения Гельмгольца посредством (2.1), находим, что

$$\Psi^{pq}_{ln}(\mathbf{x}) = I\left(f^{pq}_{ln}\right) = d^{pql}_n j_l(\omega r) E^{p,q}_{ln}(\alpha) E^{p,q}_{ln}(\beta) \qquad (3.25)$$

в конических координатах (1.34), причем $j_l(z)$ — сферическая функция Бесселя (см. (2.27)), а d — константа, определяемая, вообще говоря, из интеграла.

Следует заметить, что (3.24) и (3.25) можно рассматривать и как нелинейные интегральные уравнения, которым удовлетворяют многочлены Ламе. В связи с этим заметим, что в вычислении интеграла (5.16) в [57] имеется ошибка. Этот интеграл следует заменить выражением (3.24).

Нашу модель W_l можно также использовать для исследования многочленов Айнса; см. [24].

3.4. Формулы разложения для решений с разделенными переменными уравнения Гельмгольца

Из рассуждений, проведенных в гл. 1 и 2, становится ясно, что для того, чтобы получить разложение решения $\mathbf{T}(g)\Psi^{(j)}_\lambda(\mathbf{x})$ уравнения Гельмгольца по собственным функциям $\{\Psi^{(i)}_\mu\}$, достаточно найти коэффициенты разложения $\langle \mathbf{T}(g) f^{(j)}_\lambda, f^{(i)}_\mu \rangle$ в $L_2(S_2)$-модели:

$$\mathbf{T}(g)\Psi^{(j)}_\lambda(\mathbf{x}) = \sum_\mu \langle \mathbf{T}(g) f^{(j)}_\lambda, f^{(i)}_\mu \rangle \Psi^{(i)}_\mu(\mathbf{x}). \qquad (4.1)$$

Здесь мы дадим несколько наиболее простых для анализа коэффициентов разложения в случае, когда $\mathbf{T}(g)$ является единичным оператором.

Матричные элементы смешанных базисов $\langle f^{(j)}_\lambda, f^{(1)}_{\alpha,\gamma} \rangle$, связывающие произвольную систему $\{f^{(j)}(\hat{\mathbf{k}})\}$ с декартовой системой (2.32), очевидно, имеют вид

$$\langle f_\lambda^{(j)}, f_{\alpha,\gamma}^{(1)}\rangle = (\sin\gamma)^{1/2} f_\lambda^{(j)}(\sin\gamma\cos\alpha, \sin\gamma\sin\alpha, \cos\gamma). \qquad (4.2)$$

Кроме того, м. э. с. б., связывающие собственные функции для систем 1—4 в табл. 14, легко получаются из соответствующих м. э. с. б. для решений уравнения Гельмгольца $(\Delta_2+\omega^2)\Psi=0$, перечисленных в разд. 1.3. В самом деле, эти м. э. с. б. принимают вид

$$\langle f_{\lambda,\gamma}^{(j)}, f_{\mu,\gamma'}^{(i)}\rangle = \delta(\gamma-\gamma')\langle f_\lambda^{(j)'}, f_\mu^{(i)'}\rangle, \qquad 1\leqslant i, j\leqslant 4, \qquad (4.3)$$

где $\langle f_\lambda^{(j)'}, f_\mu^{(i)'}\rangle$ — соответствующий м. э. с. б., вычисленный в разд. 1.3 при помощи модели $L_2(S_1)$.

Матричные элементы $\langle f_m^{(l)}, f_{\lambda,m'}^{(8)}\rangle$ сферического и параболического базисов были подсчитаны в [96]:

$$\langle f_m^{(l)}, f_{\lambda,m'}^{(8)}\rangle = \delta_{mm'}\frac{(-1)^{(m+|m|)/2}}{(|m|!)^2}\left[\frac{(2l+1)(l+|m|)!}{4\pi(l-|m|)!}\right]^{1/2}\times$$
$$\times\Gamma\left(\frac{i\lambda+|m|+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-i\lambda+|m|+1}{2}\right)\times$$
$$\times{}_3F_2\left(\begin{matrix}|m|-l,\ |m|+l+1,\ (i\lambda+|m|+1)/2\\ |m|+1,\ |m|+1\end{matrix}\middle|\,1\right), \qquad (4.4)$$
$$m=0, \pm1, \ldots, \pm l.$$

Матричные элементы сферического базиса и базиса вытянутого сфероида имеют вид

$$\langle f_m^{(l)}, f_{n,m'}^{(6)}\rangle =$$
$$=\begin{cases}\delta_{mm'}(-1)^{(2m+l-n)/2}\left[\dfrac{(n-m)!\,(l+m)!\,(2n+1)}{(n+m)!\,(l-m)!\,(2l+1)}\right]^{1/2}a_{n,\,l-n}^m(a^2\omega^2), & \\ & m'\geqslant 0, \quad (4.5)\\ \delta_{mm'}(-1)^{(l-n)/2}\left[\dfrac{(n+m)!\,(2n+1)}{(n-m)!\,(2l+1)}\right]^{1/2}a_{n,\,l-n}^{|m|}(a^2\omega^2), & m'<0,\end{cases}$$

где коэффициенты $a_{n,\,2k}^{|n|}$ определяются по формуле (2.46).

Матричные элементы цилиндрического базиса и базиса вытянутого сфероида имеют вид

$$\langle f_{n,m}^{(6)}, f_{m',\gamma}^{(2)}\rangle = \left[\frac{(n-|m|)!\,(2n+1)}{(n+|m|)!\,2}\sin\gamma\right]^{1/2} Ps_n^{|m|}(\cos\gamma, a\omega^2)\,\delta_{mm'}, \qquad (4.6)$$

а матричные элементы базиса параболического цилиндра и базиса вытянутого сфероида — вид

$$\langle f_{n,m}^{(6)}, f_{\mu\pm,\gamma}^{(3)}\rangle = \left[\frac{(n-|m|)!\,(2n+1)}{(n+|m|)!\,2}\sin\gamma\right]^{1/2} Ps_n^{|m|}(\cos\gamma, a^2\omega^2)\langle f_m^{(2)}, f_{\mu\pm}^{(3)}\rangle, \qquad (4.7)$$

где м. э. с. б. $\langle f_m^{(2)}, f_{\mu\pm}^{(3)} \rangle$ определяются формулой (3.50) разд. 1.3. Матричные элементы базиса эллиптического цилиндра и базиса вытянутого сфероида записываются следующим образом:

$$\langle f_{n,m}^{(6)}, f_{n'\rho,\gamma}^{(4)} \rangle = \left[\frac{(n-|m|)!\,(2n+1)}{(n+|m|)!} \sin\gamma \right]^{1/2} Ps_n^{|m|}(\cos\gamma, \alpha^2\omega^2)\, A_{n'}^m, \tag{4.8}$$

где коэффициенты Фурье A_n^m определяются через функции Матье $\mathrm{pe}_n(\varphi, q)$, $p = s, c$:

$$\mathrm{pe}_n(\varphi, q) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_n^m e^{im\varphi}. \tag{4.9}$$

Соответствующие м. э. с. б. для координат сплющенного сфероида можно получить из м. э. с. б. (4.5)—(4.8), для чего необходимо произвести замену $a^2\omega^2 \to -a^2\omega^2$ в функциях сфероидальной волны.

Арскотт [7] дает способ вычисления матричных элементов смешанного базиса $\langle f_{nm}^{(10)}, f_{lm'}^{(11)} \rangle$, соответствующего эллипсоидальным и коническим координатам, при помощи трехчленного рекуррентного соотношения, которому удовлетворяют эти м. э. с. б. Остальные м. э. с. б. не так просты, как перечисленные выше.

Для всех множеств базисов рассмотренных выше решений уравнения Гельмгольца легко построить билинейную производящую функцию. Пусть $\{f_{\lambda\mu}(\mathbf{k})\}$ — один из одиннадцати базисов для построенного нами ранее пространства $L_2(S_2)$, и пусть $\{\Psi_{\lambda\mu}(\mathbf{x})\}$ — соответствующий базис для пространства решений уравнения $(\Delta_3 + \omega^2)\Psi(\mathbf{x}) = 0$. Тогда

$$\Psi_{\lambda\mu}(\mathbf{x}) = I(f_{\lambda\mu}) = \langle f_{\lambda\mu}, H(\mathbf{x}, \cdot) \rangle,$$

где $H(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}) = \exp[-i\omega\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{k}}] \in L_2(S_2)$ для каждого $\mathbf{x} \in R^3$. Вычисление в явном виде дает

$$\langle H(\mathbf{x}, \cdot), H(\mathbf{x}', \cdot) \rangle = 4\pi[\sin(\omega R)/\omega R], \quad R^2 = (\mathbf{x}-\mathbf{x}')\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{4.10}$$

С другой стороны,

$$\langle H(\mathbf{x}, \cdot), H(\mathbf{x}', \cdot) \rangle = \sum_{\lambda,\mu} \langle H(\mathbf{x}, \cdot), f_{\lambda\mu} \rangle \langle f_{\lambda\mu}, H(\mathbf{x}', \cdot) \rangle = \sum_{\lambda,\mu} \bar{\Psi}_{\lambda\mu}(\mathbf{x})\Psi_{\lambda\mu}(\mathbf{x}'), \tag{4.11}$$

и, сравнивая (4.10) и (4.11), можно показать, что $4\pi\sin(\omega R)/\omega R$ является билинейной производящей функцией для каждого из наших базисов.

И наконец, как показано в [37] и [96], каждый из наших одиннадцати базисов $\{\Psi_{\lambda\mu}\}$, рассматриваемый как функция от

$\omega, 0 < \omega < \infty$, можно использовать с тем, чтобы разложить произвольную функцию $f(\mathbf{x})$, интегрируемую с квадратом по мере Лебега в трехмерном пространстве R_3.

3.5. Модели негильбертовых пространств для решений уравнения Гельмгольца

Существует, очевидно, целый ряд решений уравнения Гельмгольца, которые интересны как с физической, так и с математической точки зрения и которые нельзя представить в виде $I(h)$ (см. формулу (2.1)) при $h \in L_2(S_2)$. Мы рассмотрим несколько теоретико-групповых методов получения таких решений, позволяющих установить связь между различными типами решений с разделяющимися переменными в негильбертовом пространстве. По сравнению с процедурами, рассмотренными выше, эти методы менее изящны, но обладают большей гибкостью. Ко всему прочему их можно применять для исследования дифференциальных уравнений, рассмотренных в гл. 1 и 2.

Для начала рассмотрим преобразование $I(h)$ (см. (2.1)), где область интегрирования является не вещественной сферой S_2, а комплексной двумерной римановой поверхностью. Положим, в частности,

$$\hat{\mathbf{k}} = (k_1, k_2, k_3) = \left(-(1/2)\left(t + t^{-1}\right)\left(1 + \beta^2\right)^{1/2},\right.$$
$$\left.(i/2)\left(t - t^{-1}\right)\left(1 + \beta^2\right)^{1/2}, i\beta\right), \qquad (5.1)$$

где t и β — комплекснозначные величины, и запишем

$$\Psi(\mathbf{x}) = \iint\limits_{S} d\beta\,(dt/t)\,h(\beta, t)\exp\left[-(i\omega/2)\left(1 + \beta^2\right)^{1/2} \times\right.$$
$$\left.\times \left\{x\left(t + t^{-1}\right) + iy\left(t^{-1} - t\right)\right\} - \omega\beta z\right] = I(h). \qquad (5.2)$$

Допустим, что поверхность интегрирования S и аналитическая функция h таковы, что интеграл $I(h)$ абсолютно сходится и под знаком интеграла возможно произвольное дифференцирование по x, y и z. Поскольку $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1$ даже при произвольных комплекснозначных β и t, $t \neq 0$, то $\Psi(\mathbf{x})$ является решением уравнения Гельмгольца

$$(\Delta_3 + \omega^2)\,\Psi(\mathbf{x}) = 0. \qquad (5.3)$$

Интегрируя по частям, находим, что операторы P_j, J_j (см. формулы (1.2)), действующие на пространстве решений уравнения

(5.3), соответствуют операторам

$$J^\pm = it^{\pm 1}\left(\mp(1+\beta^2)^{1/2}\partial_\beta + \frac{\beta t}{(1+\beta^2)^{1/2}}\partial_t\right), \quad J^0 = t\partial_t, \qquad (5.4)$$
$$P^\pm = \omega(1+\beta^2)^{1/2} t^{\pm 1}, \quad P^0 = -i\omega\beta,$$

действующим на аналитические функции $h(\beta, t)$, в предположении, что S и h выбираются таким образом, что граничные члены обращаются в нуль:

$$J^\pm\Psi = I(J^\pm h), \quad P^\pm\Psi = I(P^\pm h)$$

и т. д., причем, как обычно, $J^\pm = \mp J_2 + iJ_1$, $J^0 = iJ_3$, $P^\pm = \mp P_2 + iP_1$, $P^0 = iP_3$.

В качестве первого примера рассмотрим $h = (2\pi^3)^{-1/2}$ и проинтегрируем по контурам C_1 и C_2 в β- и t-плоскостях соответственно (рис. 1).

В этом случае h удовлетворяет уравнениям $\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}h = 0$, $J^0 h = 0$, и легко показать, что $\Psi(\mathbf{x}) = I(h)$ удовлетворяет тем же самым уравнениям при $z > 0$. Таким образом, $\Psi(\mathbf{x})$ не зависит от сферических координат θ, φ и является линейной комбинацией функций Бесселя $\rho^{-1/2}J_{1/2}(\omega\rho)$ и $\rho^{-1/2}J_{-1/2}(\omega\rho)$; см. формулы (1.19). Для того чтобы найти соответствующую линейную комбинацию, вычислим (5.2) в частном случае, когда $x = y = 0$. Тогда интеграл берется элементарно, и мы получаем

$$\Psi(0, 0, z) = (i/(\omega z))(2/\pi)^{1/2} e^{i\omega z}, \qquad z > 0.$$

Таким образом,

$$\Psi(\mathbf{x}) = -(\omega\rho)^{-1/2} H^{(1)}_{1/2}(\omega\rho), \qquad (5.5)$$

где $H^{(j)}_{n+1/2}(z)$ — функции Ганкеля первого ($j = 1$) и второго ($j = 2$) рода:

$$H^{(1)}_\nu(z) = (i\sin\pi\nu)^{-1}\left[J_{-\nu}(z) - J_\nu(z)e^{-i\pi\nu}\right],$$
$$H^{(2)}_\nu(z) = (i\sin\pi\nu)^{-1}\left[J_\nu(z)e^{i\pi\nu} - J_{-\nu}(z)\right], \qquad (5.6)$$
$$H^{(1,2)}_{n+1/2}(z) = \mp i(-1)^n\left(\frac{\pi z}{2}\right)^{-1/2} z^{n+1}\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^n \frac{e^{\pm iz}}{z},$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Решение (5.5) является *(бегущей) сферической волной.*

В общем случае положим

$$h = f^{(l)}_m(\beta, t) = \left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}\right]^{1/2} P^m_l(i\beta)(-t)^m, \qquad (5.7)$$
$$l = 0, 1, \ldots, \quad m = l, l-1, \ldots, -l,$$

где $P^m_l(z)$ — присоединенная функция Лежандра (это выражение имеет смысл для всех $\beta \in C_1$, так как из (Б.6iv) следует,

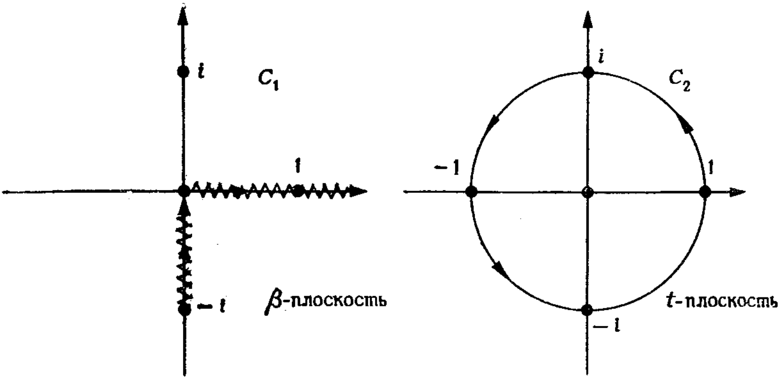

Рис. 1.

что $p_l^{-m}(z)$ при $m \geqslant 0$ является многочленом от $z = i\beta$, умноженным на дробь $[(i\beta - 1)/(i\beta + 1)]^{m/2}$, которая остается ограниченной на C_1 и обращается в нуль в точке $\beta = -i$). Кроме того,

$$P_l^{-m}(z) = (-1)^m (l-m)!\, P_l^m(z)/(l+m)!.$$

Из (2.17), (2.22) и (2.24) следует, что операторы (5.4), действующие на функции $\{f_m^{(l)}(\beta, t)\}$, удовлетворяют рекуррентным соотношениям (2.12) и (2.23). Следовательно, решения $\Psi_m^{(l)}(\mathbf{x}) = I\left(f_m^{(l)}\right)$ уравнения Гельмгольца также удовлетворяют этим соотношениям.

Мы уже определили сферическую волну $\Psi_0^{(0)}(\mathbf{x})$; см. (5.5). Используя тот факт, что функции (2.28) и (2.30), а следовательно, и фиксированная линейная комбинация этих функций удовлетворяют рекуррентным соотношениям (2.12), (2.23), мы находим из (5.5) и (5.6), что

$$\Psi_m^{(l)}(\rho, \theta, \varphi) = -i^l (\omega\rho)^{-1/2} H_{l+1/2}^{(1)}(\omega\rho)\, Y_l^m(\theta, \varphi). \tag{5.8}$$

Рассмотрим цилиндрическую систему, соответствующую операторам (5.4):

$$P^0 f_{m,\gamma}^{(2)} = -i\omega\gamma f_{m,\gamma}^{(2)}, \quad J^0 f_{m,\gamma}^{(2)} = m f_{m,\gamma}^{(2)}, \quad f_{m,\gamma}^{(2)}(\beta, t) = t^m \delta(\beta - \gamma). \tag{5.9}$$

Выбирая контуры интегрирования C_1 и C_2 так, как показано на рис. 1, мы легко получаем

$$\Psi_{m,\gamma}^{(2)}(r, \theta, z) = i^{m+1} (-1)^m (2\pi) J_m\left(\omega \left(1 + \gamma^2\right)^{1/2} r\right) e^{im\theta - \omega\gamma z} \tag{5.10}$$

для $\gamma \in C_1$, причем $\{r, \theta, z\}$ — цилиндрические координаты (2.36).

Из (5.7), (5.9) и соответствующих интегральных представлений $\Psi = I(f)$ легко вытекает разложение

$$\Psi_m^{(l)}(\mathbf{x}) = \left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}\right]^{1/2} (-1)^m \int\limits_{C_1} P_l^m(i\beta)\,\Psi_{m,\beta}^{(2)}(\mathbf{x})\,d\beta, \qquad z > 0. \tag{5.11}$$

В общем случае, если $\Psi_m^{(l)}$ подвергается переносу $\mathbf{T}(g) = \exp(a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3)$, мы получаем формулу разложения

$$\mathbf{T}(g)\,\Psi_m^{(l)}(\mathbf{x}) = \left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}\right]^{1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_{C_1} (-1)^{n+m}(ie^{-i\alpha})^n \times$$
$$\times P_l^m(i\beta)\,J_n\left[\omega a(1+\beta)^{1/2}\right]\exp(-a_3\omega\beta)\,\Psi_{m+n,\beta}^{(2)}(\mathbf{x})\,d\beta,$$
$$z + a_3 > 0, \quad a_1 + ia_2 = ae^{i\alpha}, \quad a > 0. \tag{5.12}$$

Используя подобные приемы, можно получить разложения бегущих сферических волн по иным базисам. В каждом случае мы получаем разложение для модели комплексной сферы, а затем пытаемся отобразить полученные результаты в пространство решений Гельмгольца, используя для этого преобразование (5.2). Эта процедура не столь проста, как та, которой мы пользовались в случае наших моделей гильбертова пространства, и каждый отдельный случай может потребовать использования каких-то особых приемов. Несколько интересных случаев рассматривается в работе [29, разд. 16], причем используется метод, отличный от нашего.

Меняя контур интегрирования в (5.2), можно получить другие разложения. Например, рассмотрим контур C_1' в β-плоскости, как показано на рис. 2, и сохраним контур C_2 в t-плоскости, как изображено на рис. 1. Легко показать, что в результате отображения (5.2), индуцированного таким выбором контуров, получается соответствие между операторами J и P на пространстве (β, t) и пространстве решений уравнения Гельмгольца.

Теперь рассмотрим уравнения на собственные значения для системы параболических координат 8 (см. табл. 14) в пространстве (β, t):

$$(\{J_1, P_2\} - \{J_2, P_1\})\,f_{\lambda.\,m}^{(8)} = -2i\lambda\omega f_{\lambda,\,m}^{(8)}, \quad iJ_3 f_{\lambda,\,m}^{(8)} = m f_{\lambda,\,m}^{(8)}.$$

Легко показать, что собственные функции определяются соотношением

$$f_{\lambda,\,m}^{(8)}(\beta, t) = (1+\beta^2)^{-1/2}\left[(1+i\beta)/(1-i\beta)\right]^{\lambda/2} t^m, \quad \lambda, m \in \mathbb{C}. \tag{5.13}$$

Для удобства рассмотрим только тот случай, когда λ и m — целые числа. Подставляя (5.13) в (5.2) для контуров C_1', C_2 и

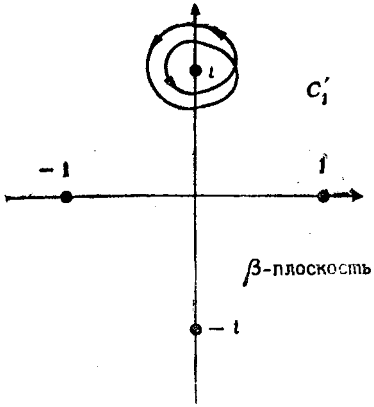

Рис. 2.

интегрируя, мы находим, что

$$\Psi^{(8)}_{\lambda m}(\mathbf{x}) = I\left(f^{(8)}_{\lambda, m}\right) =$$

$$= \frac{8\pi^2 (i)^{|m|} (-1)^k k!}{(|m|+k)!} (i\omega\xi^2)^{|m|/2} (-i\omega\eta^2)^{|m|/2} \times$$

$$\times \exp\left[i\omega \frac{(\eta^2-\xi^2)}{2}\right] L_k^{(|m|)}\left(i\omega\xi^2\right) L_k^{(|m|)}\left(-i\omega\eta^2\right) e^{im\varphi}, \quad (5.14)$$

если

$\lambda = -|m| - 2k - 1, \ k = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$

$\Psi^{(8)}_{\lambda m}(\mathbf{x}) = 0$ в противном случае.

Здесь ξ, η, φ — параболические координаты

$$x = \xi\eta \cos\varphi, \quad y = \xi\eta \sin\varphi, \quad z = (\xi^2 - \eta^2)/2.$$

(Подробное доказательство см. в [96].) Заметим, что некоторые ненулевые функции $f^{(8)}_{\lambda, m}$ в результате преобразования I отображаются в нуль. Через $L_n^{(\alpha)}(z)$ в (5.14) обозначаются обобщенные многочлены Лагерра.

Для вычисления матричных элементов операторов $\mathbf{T}(g)$ относительно этого базиса можно воспользоваться нашей моделью. Например, действуя на базис $\{f^{(8)}_{\lambda, m}\}$, оператор $\mathbf{T}(a) = \exp(aP_3)$ дает

$$\mathbf{T}(a) f^{(8)}_{\lambda, m}(\beta, t) = e^{-a\omega\beta} (1+\beta^2)^{-1/2} [(1+i\beta)/(1-i\beta)]^{\lambda/2} t^m =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} e^{-i\omega a} (-1)^s L_s^{(-1)}(2ia\omega) f^{(8)}_{\lambda+2s, m}(\beta, t).$$

Этот результат получается из производящей функции (4.11); см. разд. 2.4. Нетрудно показать, что преобразованием I это тождество отображается в тождество

$$\mathbf{T}(a)\,\Psi^{(8)}_{\lambda m}(\mathbf{x}) = \sum_{s=0}^{\infty} e^{-i\omega a}(-1)^s L_s^{(-1)}(2ia\omega)\,\Psi^{(8)}_{\lambda+2s,\,m}(\mathbf{x}). \tag{5.15}$$

(Заметим, что эта сумма конечна.) Подробные выкладки, а также определение матричных элементов общего вида $E(3)$ относительно параболического базиса можно найти в [96]. Впервые доказательство (не теоретико-групповое) этих формул разложения было дано Хохштадтом [136].

Рассмотрим теперь тождества для решений уравнения Гельмгольца, получаемые методом Вейснера. Хорошим объектом для приложения этого метода является комплексное уравнение Гельмгольца, которое получается из (1.1) в предположении, что все переменные этого уравнения комплекснозначны. Для подробного анализа этого уравнения необходимо определить все комплексные аналитические системы координат, в которых разделение переменных имеет место. Мы же рассмотрим здесь лишь те системы координат, допускающие разделение переменных, которые представляют особый интерес.

Наибольшее практическое значение имеет система сферических координат

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}\Psi = -l(l+1)\Psi, \qquad J^0\Psi = m\Psi. \tag{5.16}$$

Исследуем решения Ψ комплексного уравнения Гельмгольца, удовлетворяющие (5.16) в тех случаях, когда l и m — комплексные, не обязательно целые числа. Прежде чем рассматривать теоретико-групповые свойства этих решений, необходимо исследовать соответствующие собственные функции в нашей модели комплексной сферы, и поэтому мы начнем с операторов (5.4). Представленные с помощью новых комплексных переменных τ, ρ, где

$$\tau = i(1+\beta^2)^{1/2}, \qquad \rho = -i\beta, \tag{5.17}$$

эти операторы принимают следующий вид:

$$\begin{gathered} J^+ = -\tau\partial_\rho, \quad J^- = \tau^{-1}\left((1-\rho^2)\,\partial_\rho - 2\rho\tau\partial_\tau\right), \quad J^0 = \tau\partial_\tau, \\ P^+ = \omega\tau, \quad P^- = \omega\left(1-\rho^2\right)\tau^{-1}, \quad P^0 = \omega\rho. \end{gathered} \tag{5.18}$$

Из этих выражений легко получить, что решение $f_l^{(l)}$ уравнений

$$J^0 f_l^{(l)} = l f_l^{(l)}, \qquad J^+ f_l^{(l)} = 0, \tag{5.19}$$

которое имеет вид

$$f_l^{(l)}(\rho,\ \tau) = \Gamma(l + {}^1\!/_2)(2\tau)^l,$$

единственно с точностью до некоторой мультипликативной константы. (Множитель $\Gamma(l+{}^1/_2)2^l$, где l — произвольная комплексная константа, такая, что $l+{}^1/_2$ не является целым числом, введен для удобства последующих вычислений.) Из (5.19) следует, что $\Psi = f_l^{(l)}$ удовлетворяет (5.16) при $m = l$. Для того чтобы получить другие решения, рассмотрим разложение

$$\exp(\alpha J^-) f_l^{(l)} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^n/n!)(J^-)^n f_l^{(l)}. \tag{5.20}$$

Если положить $f_{l-n}^{(l)} = [(-1)^n \Gamma(2l-n+1)/\Gamma(2l+1]\,(J^-)\ f_l^{(l)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то из соотношений коммутирования для оператора J вытекает, что

$$\begin{gathered} J^0 f_m^{(l)} = m f_m^{(l)}, \quad J^+ f_m^{(l)} = (m-l) f_{m+1}^{(l)}, \quad J^- f_m^{(l)} = -(m+l) f_{m-1}^{(l)}, \\ \mathbf{J}\cdot\mathbf{J} f_m^{(l)} = -l(l+1) f_m^{(l)}, \quad m = l,\ l-1,\ l-2, \ldots . \end{gathered} \tag{5.21}$$

Применяя к левой части соотношения (5.20) некоторые соображения теории Ли, мы получаем производящую функцию

$$\begin{aligned} &\Gamma(l+{}^1/_2)\,[2\tau - 4\alpha\rho - 2\alpha^2(1-\rho^2)/\tau]^l = \\ &\qquad = \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha)^n \binom{2l}{n} j_n^{(l)}(\rho)\,\tau^{l-n}, \qquad (5.22) \\ &\qquad f_m^{(l)}(\rho, \tau) = j_n^{(l)}(\rho)\,\tau^{l-n}, \quad m = l-n. \end{aligned}$$

Это разложение справедливо для $\tau \neq 0$ и достаточно малого α. Сравнивая коэффициенты при α^n в обеих частях этого уравнения, мы находим

$$f_m^{(l)}(\rho, \tau) = \Gamma(l-m+1)\,\Gamma(m+{}^1/_2)\,C_{l-m}^{m+1/2}(\rho)\,(2\tau)^m, \tag{5.23}$$

где $C_n^\nu(x)$ — многочлен (ультрасферический) Гегенбауэра (Б.6ii). Этот многочлен обычно определяется при помощи производящей функции

$$\left(1 - 2\alpha x + \alpha^2\right)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\nu(x)\,\alpha^n, \tag{5.24}$$

теоретико-групповое значение которой будет раскрыто в разд. 3.7. Когда l — положительное целое число и $m = l$, $l-1, \ldots, -l$, функции (5.23) пропорциональны комплексификациям сферических гармоник Y_l^m. Но нас прежде всего будут интересовать случаи, когда $2l$ не является целым числом.

Из рекуррентного соотношения для многочленов Гегенбауэра

$$x C_n^\nu(x) = \frac{n+1}{2(\nu+n)} C_{n+1}^\nu(x) + \frac{(2\nu+n-1)}{2(\nu+n)} C_{n-1}^\nu(x).$$

которое можно легко получить либо из (5.24), либо из (Б.6ii), следует, что

$$P^0 f_m^{(l)} = \frac{\omega}{2l+1} f_m^{(l+1)} + \frac{\omega (l+m)(l-m)}{2l+1} f_m^{l-1}. \tag{5.25}$$

Кроме того, в силу соотношений коммутирования $[P^0, J^\pm] = \pm P^\pm$ мы имеем

$$\begin{aligned} P^+ f_m^{(l)} &= \frac{\omega}{2l+1} f_{m+1}^{(l+1)} - \frac{\omega (l-m)(l-m-1)}{2l+1} f_{m+1}^{(l-1)}, \\ P^- f_m^{(l)} &= \frac{-\omega}{2l+1} f_{m-1}^{(l+1)} + \frac{\omega (l+m)(l+m-1)}{2l+1} f_{m-1}^{(l-1)}. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Соотношения (5.21), (5.25), (5.26) определяют действие алгебры $\mathscr{E}(3)$ на базис $\{f_m^{(l)}\}$, где $l = l_0$, $l_0 \pm 1$, $l_0 \pm 2$, ..., $m = l$, $l - 1$, ... и $2l_0$ не является целым числом. (Как известно, простой вид соотношения (5.25) связан с тем фактом, что многочлены Гегенбауэра ортогональны с соответствующим весом [17, гл. X]. Это свойство многочленов Гегенбауэра, как и многие другие, связано с волновым уравнением, и поэтому будет рассматриваться в следующей главе.)

Известно, что любую целую функцию от x можно единственным образом разложить в ряд по многочленам Гегенбауэра $C_n^\nu(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (2ν не является целым числом), который равномерно сходится на компактных подмножествах комплексной плоскости (см., например, [140]). Таким образом, мы можем вычислить экспоненты операторов P и J и найти матричные элементы этих операторов для базиса $\{f_m^{(l)}\}$; соответствующие довольно сложные выкладки можно найти в [84]. Кроме (5.20), (5.22) мы приведем здесь только один из этих результатов: из соотношения (5.25) доказательством по индукции получается, что

$$e^{\alpha\rho} = (2/\alpha)^\nu \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} (\nu + n) I_{\nu+n}(\alpha) C_n^\nu(\rho), \qquad \nu, \alpha \in \mathbb{C}, \tag{5.27}$$

т. е.

$$\exp(\alpha P^0) f_l^{(l)} = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{l+1/2} \Gamma\left(l + \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(l+n+{}^1/_2)}{n!} I_{l+n+1/2}(\alpha) f_l^{(l+n)}, \tag{5.27'}$$

где $I_\nu(\alpha) = \exp(-i\nu\pi/2) J_\nu[\alpha \exp(i\pi/2)]$ — модифицированная функция Бесселя [17].

Теперь изучим связь между этими результатами и решениями комплексного уравнения Гельмгольца в случае сферического базиса. Для удобства вместо комплексных сферических координат r, θ, φ (см. строку 5 в табл. 14) возьмем эквивалентные координаты

$$\rho = -\cos\theta, \quad \tau = -e^{i\varphi}\sin\theta, \quad s = ir, \tag{5.28}$$

допускающие разделение переменных. В этих координатах операторы симметрии для уравнения Гельмгольца имеют вид

$$\begin{aligned} &J^+ = -\tau\partial_\rho, \quad J^- = \tau^{-1}\left((1-\rho^2)\partial_\rho - 2\rho\tau\partial_\tau\right), \quad J^0 = \tau\partial_\tau, \\ &P^+ = \tau\partial_s - \frac{\rho\tau}{s}\partial_\rho - \frac{\tau^2}{s}\partial_\tau, \\ &P^- = \frac{1-\rho^2}{\tau}\partial_s - \frac{\rho(1-\rho^2)}{s\tau}\partial_\rho + \frac{\rho^2+1}{s}\partial_\tau, \\ &P^0 = \rho\partial_s + \frac{1-\rho^2}{s}\partial_\rho - \frac{\rho\tau}{s}\partial_\tau. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Мы ищем множество решений $\{\Psi_m^{(l)}(\mathbf{x})\}$ уравнения Гельмгольца, которые под действием операторов симметрии (5.29) удовлетворяют рекуррентным соотношениям (5.21), (5.25), (5.26). Поскольку операторы J в (5.18) и (5.29) идентичны, отсюда следует, что

$$\Psi_m^{(l)}(\mathbf{x}) = S^{(l)}(s) f_m^{(l)}(\rho, \tau).$$

Подставляя это выражение в (5.25) и (5.26), мы видим, что функция $S^{(l)}$ должна удовлетворять рекуррентным соотношениям

$$\left(\frac{d}{ds} - \frac{l}{s}\right) S^{(l)}(s) = \omega S^{(l+1)}(s), \quad \left(\frac{d}{ds} + \frac{l+1}{s}\right) S^{(l)}(s) = \omega S^{(l-1)}(s). \tag{5.30}$$

Следовательно, $s^{1/2}S^{(l)}(s)$ — решение модифицированного уравнения Бесселя, и, взяв

$$S^{(l)}(s) = (\omega s)^{-1/2} I_{l+1/2}(\omega s) \quad \text{или} \quad S^{(l)}(s) = (\omega s)^{-1/2} I_{-l-1/2}(\omega s), \tag{5.31}$$

мы находим, что при любом выборе будут удовлетворяться рекуррентные соотношения (5.30). Взяв первое выражение (5.31), мы видим, что функции

$$\Psi_m^{(l)}(s, \rho, \tau) = (l-m)!\,\Gamma(m + {}^1\!/_2)(\omega s)^{-1/2} I_{l+1/2}(\omega s)\, C_{l-m}^{m+1/2}(\rho)(2\tau)^m \tag{5.32}$$

и операторы (5.29) удовлетворяют рекуррентным формулам (5.21), (5.25), (5.26). Таким образом, определяющие действие группы $E(3)$ матричные элементы, вычисленные для базиса $\{f_m^{(l)}\}$, справедливы также для базиса $\{\Psi_m^{(l)}\}$. Например, из (5.27) мы получаем теорему сложения Гегенбауэра

$$\{I_{l+1/2}(sS)(2S)^{-l-1/2} =$$

$$= \Gamma(l+{}^1/_2) \sum_{n=0}^{\infty} (l+n+{}^1/_2) I_{l+n+1/2}(s) I_{l+n+1/2}(\gamma) C_n^{l+1/2}(\rho), \quad (5.33)$$

$$S = (1 + 2\gamma\rho/s + \gamma^2/s^2)^{1/2}, \qquad |2\gamma\rho/s + \gamma^2/s^2| < 1.$$

Для получения тождеств, связывающих решения уравнения Гельмгольца, можно использовать также модель комплексной сферы. Например, из (5.18), (5.23) мы получаем фактически тривиальное тождество

$$(l-m)!\, C_{l-m}^{m+1/2}(\omega^{-1}P^0) f_m^{(m)} = f_m^{(l)}, \quad l-m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots . \quad (5.34)$$

Однако для модели (5.29), (5.32) это тождество принимает нетривиальный вид

$$C_{l-m}^{m+1/2}\left(\rho\partial_s + \frac{1-\rho^2}{s}\partial_\rho - \frac{\rho m}{s}\right) I_{m+1/2}(\omega)\, s^{-1/2} =$$

$$= I_{l+1/2}(s)\, C_{l-m}^{m+1/2}(\rho)\, s^{-1/2}. \quad (5.35)$$

В работе [84] представлено много иных тождеств и теорем сложения.

Метод Вейснера в его общем виде можно также применить для вывода тождеств для сферических волн. Рассмотрим, например, решение системы уравнений (типа цилиндрической волны)

$$(\mathbf{P}\cdot\mathbf{P} + \omega^2)\Psi = 0, \quad P^0\Psi = \lambda\Psi, \quad J^0\Psi = m\Psi, \qquad \lambda,\ m \in \mathbb{C},$$

$$\Psi(s,\ \rho,\ \tau) = \left[\tau(\rho^2-1)^{1/2}(\lambda^2-1)^{1/2}\right]^m e^{\omega\lambda s\rho} \times$$

$$\times I_{\pm m}\left(\omega s(\rho^2-1)^{1/2}(\lambda^2-1)^{1/2}\right). \quad (5.36)$$

Выбирая решение I_m, мы убеждаемся в справедливости разложения

$$\Psi(s,\ \rho,\ \tau) = (\omega s)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda) I_{m+n+1/2}(\omega s) C_n^{m+1/2}(\rho)\, \tau^m,$$

где функция Ψ представлена в виде суммы решений уравнения Гельмгольца типа сферической волны. Остается только подсчитать $a_n(\lambda)$. Поскольку функция Ψ симметрична относительно ρ и λ, мы имеем $a_n(\lambda) = b_n C_n^{m+1/2}(\lambda)$. Кроме того, если $\lambda = 1$, то

$$\Psi(s,\ \rho,\ \tau) = \frac{(\omega s\tau/2)^m e^{\omega s\rho}}{\Gamma(m+1)},$$

и тождество (5.27) позволяет вычислить коэффициенты $a_n(\lambda)$, что при $\omega = 1$ приводит к окончательному результату

$$[(\rho^2-1)(\lambda^2-1)]^{-m/2} e^{s\lambda\rho} I_m\left(s[(\rho^2-1)(\lambda^2-1)]^{1/2}\right) =$$
$$= \frac{2^{2m+1}}{(2\pi s)^{1/2}} \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,(m+n+{}^1/_2)}{\Gamma(2m+n+1)} \times$$
$$\times I_{m+n+1/2}(s)\, C_n^{m+1/2}(\rho)\, C_n^{m+1/2}(\lambda), \qquad (5.37)$$

причем ряд в правой части этого соотношения сходится для всех $\rho, \lambda \in \mathbb{C}$ (см. [17]).

Разберем еще один случай, а именно рассмотрим решения (5.14), которые соответствуют системе параболических координат (строка 8 табл. 14). Записывая эти решения в координатах (5.28) и разлагая их по элементам сферического базиса, мы получаем

$$e^{s\rho} L_k^{(m)}(-s(1+\rho))\, L_k^{(m)}(s(1-\rho)) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^{-m-1/2} I_{m+n+1/2}(s)\, C_n^{m+1/2}(\rho). \qquad (5.38)$$

Полагая $\rho = \alpha/s$, $s \to 0$, можно определить коэффициенты a_n:

$$2^{m+1/2}\Gamma(m+{}^1/_2)\, e^{\alpha}\left[L_k^{(m)}(-\alpha)\right]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \alpha^n}{n!\,(m+n+{}^1/_2)}.$$

Используя формулу преобразований для ${}_1F_1$ (приложение Б, разд. 3), можно вычислить в явном виде коэффициенты при α^n в левой части этого уравнения, в результате чего получаем

$$a_n = \frac{2^{m+1/2}(m+n+{}^1/_2)\,\Gamma(m+{}^1/_2)\,\Gamma(m+k+1)\,\Gamma(m+k+n+1)}{(k!)^2\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(m+n+1)} \times$$
$$\times\, {}_3F_2\left(\left.\begin{matrix} -k, & -m-n, & -n \\ m+1, & -m-k-n \end{matrix}\,\right|\, 1\right). \qquad (5.39)$$

При $k = 0$ это выражение сводится к формуле (5.27).

3.6. Уравнение Лапласа $\Delta_3\Psi = 0$

Известные системы координат, допускающие разделение переменных для вещественного уравнения Лапласа

$$\Delta_3\Psi(\mathbf{x}) = 0, \qquad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z), \qquad (6.1)$$

определены и изучены в классической книге Бохера [27]. Однако явная связь между этими системами и группой симметрии уравнения (6.1) была установлена совсем недавно [25]. Без учета тривиальной симметрии E алгебра симметрии этого уравнения десятимерна и имеет базис следующего вида:

$$
\begin{gathered}
P_j = \partial_j = \partial_{x_j}, \qquad j = 1,\ 2,\ 3; \qquad J_3 = x_2\partial_1 - x_1\partial_2, \\
J_2 = x_1\partial_3 - x_3\partial_1,\ \ J_1 = x_3\partial_2 - x_2\partial_3,\ \ D = -\left(1/2 + x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3\right), \\
K_1 = x_1 + \left(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right)\partial_1 + 2x_1x_3\partial_3 + 2x_1x_2\partial_2, \\
K_2 = x_2 + \left(x_2^2 - x_1^2 - x_3^2\right)\partial_2 + 2x_2x_3\partial_3 + 2x_2x_1\partial_1, \\
K_3 = x_3 + \left(x_3^2 - x_1^2 - x_2^2\right)\partial_3 + 2x_3x_1\partial_1 + 2x_3x_2\partial_2. \qquad (6.2)
\end{gathered}
$$

Операторы P_l и J_l порождают подалгебру, изоморфную алгебре $\mathscr{E}(3)$, а D — производящий оператор группы растяжений. Операторы K_j являются производящими операторами *специальных конформных преобразований* и будут рассмотрены ниже. В действительности с оператором Лапласа Δ_3 коммутируют только элементы $\mathscr{E}(3)$. Относительно остальных элементов алгебры Ли пространство решений уравнения (6.1) просто инвариантно.

Алгебра симметрии уравнения Лапласа изоморфна алгебре $so(4, 1)$, т. е. алгебре Ли всех вещественных (5×5)-матриц $\mathscr{A}$, таких, что $\mathscr{A}G^{4,1} + G^{4,1}\mathscr{A}^t = 0$, где

$$
G^{4,1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{4} \mathscr{E}_{ll} - \mathscr{E}_{55}, \qquad (6.3)
$$

причем в (6.3) $\mathscr{E}_{ij}$ является (5×5)-матрицей, в которой элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен единице, а все остальные элементы равны нулю:

$$
\mathscr{E}_{ij} = \begin{array}{c} j \\ \left[\quad 1 \quad\right] \end{array} i. \qquad (6.4)
$$

Базис для $so(4, 1)$ состоит из десяти элементов

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{ab} &= \mathscr{E}_{ab} - \mathscr{E}_{ba} = -\Gamma_{ba}, \qquad 1 \leqslant a, b \leqslant 4, \\
\Gamma_{a5} &= \mathscr{E}_{a5} + \mathscr{E}_{5a} = \Gamma_{5a},
\end{aligned} \qquad (6.5)
$$

причем соотношения коммутирования имеют вид

$$
\begin{aligned}
&[\Gamma_{ab}, \Gamma_{cd}] = \delta_{bc}\Gamma_{ad} + \delta_{ad}\Gamma_{bc} + \delta_{ca}\Gamma_{db} + \delta_{db}\Gamma_{ca}, \\
&[\Gamma_{a5}, \Gamma_{cd}] = -\delta_{ad}\Gamma_{c5} + \delta_{ac}\Gamma_{d5}, \qquad [\Gamma_{a5}, \Gamma_{b5}] = \Gamma_{ab}.
\end{aligned} \qquad (6.6)
$$

Легко проверить, что корректные соотношения коммутирования для операторов (6.2) получаются в результате следующей идентификации:

$$\begin{aligned} &J_3=\Gamma_{32}, && J_2=\Gamma_{24}, && J_1=\Gamma_{43}, \quad D=\Gamma_{15},\\ &P_1=\Gamma_{12}+\Gamma_{25}, && P_2=\Gamma_{13}+\Gamma_{35}, && P_3=\Gamma_{14}+\Gamma_{45},\\ &K_1=\Gamma_{12}-\Gamma_{25}, && K_2=\Gamma_{13}-\Gamma_{35}, && K_3=\Gamma_{14}-\Gamma_{45}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Таким образом, группа симметрии уравнения (6.1), *конформная группа*, локально изоморфна $SO(4, 1)$, группе всех вещественных (5×5)-матриц A, таких, что

$$AG^{4,1}A^t=G^{4,1}. \tag{6.8}$$

Компонента единицы этой группы состоит из матриц, удовлетворяющих (6.8) и условиям $\det A=1$ и $A_{55}\geqslant 1$. Алгеброй Ли группы $SO(4, 1)$ является алгебра $so(4, 1)$; см. [134].

Вычисляя экспоненту операторов (6.2), мы получаем локальное действие группы $SO(4, 1)$ как группы преобразований операторов симметрии. Так, оператор импульса и оператор момента импульса порождают подгруппу операторов симметрии (1.12), изоморфную группе $E(3)$; оператор растяжения порождает

$$\exp(\lambda D)\Psi(\mathbf{x})=\exp(-\lambda/2)\Psi[\exp(-\lambda)\mathbf{x}], \qquad \lambda\in R, \tag{6.9}$$

а операторы K_j порождают специальные конформные преобразования

$$\begin{aligned} &\exp(a_1K_1+a_2K_2+a_3K_3)\Psi(\mathbf{x})=\\ &=[1-2\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})]^{-1/2}\Psi\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})}{1-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})}\right). \end{aligned} \tag{6.10}$$

Кроме того, рассмотрим для уравнения Лапласа оператор симметрии инверсии и операторы симметрии, являющиеся отражениями в пространстве:

$$\begin{aligned} &I\Psi(\mathbf{x})=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})^{-1/2}\Psi(\mathbf{x}/\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}), && I=I^{-1},\\ &R\Psi(\mathbf{x})=\Psi(-x_1, x_2, x_3), && R=R^{-1}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Это известные операторы симметрии уравнения (6.1), не порождаемые инфинитезимальными операторами (6.2); см. [13]. Из определения этих операторов следует, что

$$IP_jI^{-1}=-K_j, \qquad IDI^{-1}=-D, \qquad IJ_jI^{-1}=J_j. \tag{6.12}$$

Довольно утомительными вычислениями можно показать, что уравнение Лапласа принадлежит классу I. Кроме того, хотя пространство симметрических операторов второго порядка в обдертывающей алгебре алгебры $so(4, 1)$ и является 35-мерным, на пространстве решений уравнения (6.1) имеется 20 линейно независимых соотношений между этими операторами. Таким образом, всего лишь 15 операторов могут считаться линейно независимыми на пространстве решений. Например, мы имеем соотношения

$$\begin{aligned} &\text{(i)} && \mathbf{P}\cdot\mathbf{P}=\mathbf{K}\cdot\mathbf{K}=0,\\ &\text{(ii)} && \mathbf{J}\cdot\mathbf{J}={}^1\!/_4-D^2,\\ &\text{(iii)} && \Gamma^2_{45}+\Gamma^2_{41}-\Gamma^2_{51}={}^1\!/_4+\Gamma^2_{23},\\ &\text{(iv)} && \{P_1, K_1\}+\{P_2, K_2\}+\{P_3, K_3)=2+4D^2. \end{aligned} \tag{6.13}$$

(Заметим, что эти соотношения имеют силу не в общем случае, а только на пространстве решений уравнений (6.1), причем $\Gamma_{\alpha\beta}$ (см. (6.7)) являются дифференциальными операторами на этом пространстве.)

У читателя может возникнуть вопрос, почему мы не провели подобный анализ уравнения Лапласа $\Delta_2\Psi(\mathbf{x})=0$. Дело в том, что алгебра симметрии этого уравнения бесконечномерна. Действительно, каждое преобразование $\Psi(x, y)\to\Psi(u(x, y), v(x, y))$, где $u+iv=f(z)$, $z=x+iy$, а $f(z)$ — аналитическая функция, определяет оператор симметрии уравнения Лапласа. Группа всех аналитических преобразований $z\to f(z)$ является группой симметрии этого уравнения, но не является группой Ли. (В самом деле, любое групповое преобразование определяется бесконечным числом параметров $\{a_n\}$, где $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.) Таким образом, методы теории Ли оказываются малоэффективными для этого уравнения Лапласа. Можно показать, что бесконечномерные алгебры симметрии для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка от n переменных появляются только при $n=2$ [106].

Вернемся к задаче разделения переменных для уравнения (6.1). Очевидно, что каждая система координат, допускающая R-разделение переменных, характеризуется парой коммутирующих операторов симметрии второго порядка в обвертывающей алгебре алгебры $so(4, 1)$. Как обычно, две системы координат будут считаться эквивалентными, если преобразованием из связной компоненты единицы конформной группы, расширенной за счет дискретных операторов (6.11), одну систему можно получить из другой.

Прежде всего следует заметить, что перечисленные в табл. 14 одиннадцать систем координат, допускающие разделение переменных для уравнения Гельмгольца, допускают разделение переменных и для уравнения Лапласа. Полагая $\omega=0$ в формулах, полученных для уравнения Гельмгольца в разд. 3.1, мы кратко опишем вид решений Ψ с разделенными переменными для уравнений на собственные значения $S_j\Psi = \lambda_j\Psi$, $\Delta_3\Psi = 0$.

Для системы декартовых координат 1 решения имеют вид

$$\exp(\alpha x + \beta y + \gamma z), \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0, \tag{6.14}$$

а для системы цилиндрических координат 2 — вид

$$\begin{gathered} \Psi^{(2)}_{\lambda, n}(r, \varphi, z) = J_{\pm n}(\lambda r)\exp(\lambda z + in\varphi), \\ iJ_3\Psi_{\lambda, n} = n\Psi_{\lambda, n}, \quad P_3\Psi_{\lambda, n} = \lambda\Psi_{\lambda, n}. \end{gathered} \tag{6.15}$$

Решения с разделенными переменными для системы координат параболического цилиндра 3 записываются в виде

$$\begin{gathered} \Psi^{(3)}_{\lambda, \mu}(\xi, \eta, z) = D_{i\mu-1/2}(\pm\sigma\xi)\, D_{-i\mu-1/2}(\pm\sigma\eta)\, e^{\lambda z}, \\ \sigma = \exp(-i\pi/4)\,(2\lambda)^{1/2}, \\ P_3\Psi_{\lambda, \mu} = \lambda\Psi_{\lambda, \mu}, \quad \{J_3, P_2\}\,\Psi_{\lambda, \mu} = 2\mu\lambda\Psi_{\lambda, \mu}, \end{gathered} \tag{6.16}$$

а для системы координат эллиптического цилиндра 4 — в виде

$$\begin{gathered} \Psi^{(4)}_{\lambda, n}(\alpha, \beta, z) = \begin{cases} \mathrm{Ce}_n(\alpha, q)\,\mathrm{ce}_n(\beta, q)\, e^{\lambda z}, \\ \mathrm{Se}_n(\alpha, q)\,\mathrm{se}_n(\beta, q)\, e^{\lambda z}, \end{cases} \quad q = d^2\lambda^2/4, \\ \left(J_3^2 + d^2P_1^2\right)\Psi_{\lambda, n} = \mu_n\Psi_{\lambda, n}, \quad P_3\Psi_{\lambda, n} = \lambda\Psi_{\lambda, n}. \end{gathered} \tag{6.17}$$

Системе сферических координат 5 соответствуют решения вида

$$\begin{gathered} \Psi^{(5)}_{l. m}(\rho, \theta, \varphi) = \left\{ \begin{matrix} \rho^l \\ \rho^{-l-1} \end{matrix} \right\} P_l^m(\theta)\, e^{im\varphi}, \quad iJ_3\Psi^{(5)}_{l, m} = m\Psi^{(5)}_{l, m}, \\ \mathbf{J}\cdot\mathbf{J}\Psi^{(5)}_{l, m} = -l(l+1)\,\Psi^{(5)}_{l, m}. \end{gathered} \tag{6.18}$$

Для системы координат вытянутого сфероида 6 уравнения с разделяющимися переменными принимают вид (1.20) с $\omega = 0$, а их решения имеют вид

$$P_n^m(\operatorname{ch}\eta)\, P_n^m(\cos\alpha)\, e^{im\varphi}, \tag{6.19}$$

т. е. это не что иное, как решения (1.21) при $\omega = 0$. Подобным же образом для системы координат сплющенного сфероида 7 уравнения с разделяющимися переменными имеют вид (1.22) при $\omega = 0$, а собственные функции таковы:

$$P_n^m(-i\operatorname{sh}\eta)\, P_n^m(\cos\alpha)\, e^{im\varphi}. \tag{6.20}$$

Для системы параболических координат 8 уравнения с разделяющимися переменными при $\omega = 0$ принимают вид (1.24), а их решения — вид

$$J_{\pm m}(i\sqrt{\lambda}\,\xi)\, J_{\pm m}(\sqrt{\lambda}\,\eta)\, e^{im\varphi}. \tag{6.21}$$

Для системы параболоидальных координат 9 мы имеем уравнения с разделяющимися переменными вида (1.26) при $\omega = 0$ и решения с разделяющимися переменными, выраженные через функции Матье:

$$\begin{gathered}\mathrm{Ce}_n(\alpha, \, -\lambda c/2)\,\mathrm{ce}_n(\beta, \, -\lambda c/2)\,\mathrm{Ce}_n(\gamma + i\pi/2, \, -\lambda c/2), \\ \mathrm{Se}_n(\alpha, \, -\lambda c/2)\,\mathrm{se}_n(\beta, \, -\lambda c/2)\,\mathrm{Se}_n(\gamma + i\pi/2, \, -\lambda c/2).\end{gathered} \tag{6.22}$$

Для системы эллипсоидальных координат 10 уравнения с разделяющимися переменными принимают вид (1.29), или (1.33) при $\omega = 0$. Таким образом, три уравнения с разделяющимися переменными сводятся к уравнению Ламе, а три однозначных решения в R^3 являются произведениями трех многочленов Ламе (см. [7]).

И наконец, для системы конических координат 11 уравнения с разделяющимися переменными имеют вид (1.35) при $\omega = 0$. Однозначные решения в R^3 записываются так:

$$\begin{Bmatrix} r^l \\ r^{-l-1} \end{Bmatrix} E_{ln}^{p,\,q}(\alpha)\, E_{ln}^{p,\,q}(\beta), \quad l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{6.23}$$

где функции E являются многочленами Ламе; см. (3.24). По аналогии со сферическими гармониками $Y_l^m(\theta, \varphi)$ такие произведения многочленов Ламе называются *эллипсоидальными гармониками* (см. [125]). Вычисление м. э. с. б., связанных со сферическими и эллипсоидальными гармониками, уже было проведено в разд. 3.3.

Остальные системы координат, допускающие разделение переменных для уравнения Лапласа, допускают только R-разделение переменных и не приводят к разделению переменных для уравнения Гельмгольца. Координатные поверхности для этих систем являются ортогональными семействами софокусных циклид. Циклида — это поверхность, уравнение которой имеет вид

$$a(x^2 + y^2 + z^2)^2 + P(x, y, z) = 0, \tag{6.24}$$

где a — некоторая константа, а P — многочлен второго порядка. Если $a = 0$, то циклида сводится к поверхности второго порядка. Известно, что координатные поверхности одиннадцати допускающих разделение переменных систем, перечисленных в табл. 14, являются софокусными семействами поверхностей второго порядка

$$\frac{x^2}{a_1 + \lambda} + \frac{y^2}{a_2 + \lambda} + \frac{z^2}{a_3 + \lambda} = 1, \quad a_l = \mathrm{const}, \tag{6.25}$$

и их предельных случаев (см. [14, 99, 101, 125]). В частности, все эти координаты являются предельными случаями эллипсоидальных координат, а координатные поверхности являются эллипсоидами, гиперболоидами и различными предельными случаями этих поверхностей, такими, как параболоиды, сферы и плоскости.

Известно, что при любом конформном преобразовании уравнения Лапласа система, допускающая $\mathcal{R}$-разделение переменных, отображается в систему, допускающую $\mathcal{R}$-разделение переменных. Однако оператор инверсии I (см. (6.11)) отображает поверхность второго порядка в циклиду с $a \neq 0$, что читатель может легко проверить сам. Таким образом, изучая системы координат, допускающие $\mathcal{R}$-разделение переменных для уравнения Лапласа, неизбежно приходится сталкиваться с системами координат, координатные поверхности которых являются циклидами.

Легко проверить, что семейство всех циклид инвариантно относительно действия конформной группы и что эта группа отображает ортогональные поверхности в ортогональные поверхности. Вместо того чтобы строить ортогональные системы координат при помощи семейств софокусных квадрик, можно использовать для этой цели более общие семейства, которыми являются семейства софокусных циклид. Непосредственным вычислением можно показать, что такие семейства определяют ортогональные системы координат, допускающие $\mathcal{R}$-разделение переменных для уравнения Лапласа. Более того, таким способом можно получить все системы координат, допускающие разделение переменных для уравнения Лапласа.

Поскольку системы координат, связанные конформным преобразованием, считаются эквивалентными, для получения всех различных систем циклид, очевидно, необходимо разбить семейства циклид (6.24) на конформные классы эквивалентности. Среди классов эквивалентности циклид имеются такие, которые содержат циклиды вида (6.24) с $a = 0$. Эти классы соответствуют одиннадцати допускающим разделение переменных системам, перечисленным в табл. 14. Остальные классы содержат циклиды вида (6.24) только с $a \neq 0$ и приводят к новым системам, допускающим $\mathcal{R}$-разделение переменных. Подробное описание этого построения можно найти в классической книге Бохера [27]. В настоящей книге мы дадим только теоретико-групповую характеристику систем координат, перечисленных в книге Бохера. Впервые такая характеристика была дана в работе [25]; мы же представляем ее в виде табл. 17.

В каждой системе координат $\{\mu, \nu, \rho\}$ решения с $\mathcal{R}$-разделенными переменными принимают вид $\Psi(\mathbf{x}) = \mathcal{R}^{1/2}(\mu, \nu, \rho) A(\mu) B(\nu) C(\rho)$, причем эти решения характеризуются уравнениями для собственных значений вида $S_j\Psi = \lambda_j\Psi$, где λ_1, λ_2 — константы разделения.

Таблица 17

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ДОПУСКАЮЩИЕ R-РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

	Коммутирующие операторы S_1, S_2	Координаты, допускающие R-разделение переменных
12	$S_1 = \frac{a+1}{4}(P_2 + K_2)^2 +$ $+ \frac{b+1}{4}(P_1 + K_1)^2 +$ $+ \frac{a+b}{4}(P_3 + K_3)^2 +$ $+ J_3^2 + bJ_2^2 + aJ_1^2,$ $S_2 = \frac{a}{4}(P_2 + K_2)^2 +$ $+ \frac{b}{4}(P_1 + K_1)^2 +$ $+ \frac{ab}{4}(P_3 + K_8)^2$	$x = \mathscr{R}^{-1}\left[\frac{(\mu - a)(\nu - a)(\rho - a)}{(b - a)(a - 1)a}\right]^{1/2},$ $y = \mathscr{R}^{-1}\left[\frac{(\mu - b)(\nu - b)(\rho - b)}{(a - b)(b - 1)b}\right]^{1/2},$ $z = \mathscr{R}^{-1}\left[\frac{(\mu - 1)(\nu - 1)(\rho - 1)}{(a - 1)(b - 1)}\right]^{1/2},$ $\mathscr{R} = 1 + \left[\frac{\mu\nu\rho}{ab}\right]^{1/2}$
13	$S_1 = 2\alpha J_3^2 + \frac{\alpha+1}{2}\{P_2, K_2\} +$ $+ \frac{\beta}{2}(P_2^2 - K_2^2) +$ $+ \frac{\alpha}{2}\{P_1, K_1\} +$ $+ \frac{\beta}{2}(K_1^2 - P_1^2),$ $S_2 = \frac{\alpha}{2}\{P_2, K_2\} +$ $+ \frac{\beta}{2}(P_2^2 - K_2^2) +$ $+ (\alpha^2 + \beta^2) J_3^2$	$x = \mathscr{R}^{-1}\left[\frac{(\mu - 1)(\nu - 1)(\rho - 1)}{(a - 1)(b - 1)}\right]^{1/2},$ $y = \mathscr{R}^{-1}\left[-\frac{\mu\nu\rho}{ab}\right]^{1/2},$ $z = \mathscr{R}^{-1},$ $\mathscr{R} = 2\,\mathrm{Re}\left[-\frac{i(\mu - a)(\nu - a)(\rho - a)}{(a - b)(a - 1)a}\right]^{1/2},$ $a = \bar{b} = \alpha + i\beta$; α, β вещественные
14	$S_1 = J_3^2,$ $4S_2 = (P_3 + K_3)^2 - a(P_3 - K_3)^2$	$x = \mathscr{R}^{-1}\cos\varphi,$ $y = \mathscr{R}^{-1}\sin\varphi,$ $z = \mathscr{R}^{-1}\left[-\frac{\mu\rho}{a}\right]^{1/2},$ $\mathscr{R} = \left[\frac{(\mu - a)(a - \rho)}{a(a - 1)}\right]^{1/2} -$ $-\left[\frac{(\mu - 1)(1 - \rho)}{a - 1}\right]$

Продолжение табл. 17

Коммутирующие операторы S_1. S_2	Координаты, допускающие R-разделение переменных
15 $S_1 = J_3^2$, $4S_2 = -4aD^2 - (P_3 - K_3)^2$	$x = \mathfrak{R}^{-1} \cos\varphi$, $y = \mathfrak{R}^{-1} \sin\varphi$, $z = \mathfrak{R}^{-1} \left[\frac{(\mu - a)(a - \rho)}{a(a-1)}\right]^{1/2}$, $\mathfrak{R} = \left[\frac{\mu\rho}{a}\right]^{1/2} + \left[\frac{(\mu - 1)(\rho - 1)}{a - 1}\right]^{1/2}$
16 $S_1 = J_3^2$, $2S_2 = \alpha\{P_3, K_3\} + \beta\left(K_3^2 - P_3^2\right)$	$x = \mathfrak{R}^{-1} \cos\varphi$, $y = \mathfrak{R}^{-1} \sin\varphi$, $z = \mathfrak{R}^{-1} \left[-\frac{\mu\rho}{ab}\right]^{1/2}$, $\mathfrak{R} = 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{i(\rho - a)(\mu - a)}{a(a-b)}\right]^{1/2}$, $a = \bar{b} = \alpha + i\beta$
17 $S_1 = J_3^2$, $4S_2 = (P_3 + K_3)^2$	$x = \mathfrak{R}^{-1} \operatorname{sh}\xi \cos\varphi$, $y = \mathfrak{R}^{-1} \operatorname{sh}\xi \sin\varphi$, $z = \mathfrak{R}^{-1} \cos\psi$, $\mathfrak{R} = \operatorname{ch}\xi + \sin\psi$

Более конкретно, для системы 12 параметры меняются в интервалах

$$0 < \rho < 1 < \nu < b < \mu < a$$

и каждый множитель в решении с разделенными переменными удовлетворяет уравнению

$$\left[(f(\xi))^{1/2} \frac{d}{d\xi} (f(\xi))^{1/2} \frac{d}{d\xi} - \left(\frac{3}{16}\xi^2 - \frac{\lambda_1}{4}\xi + \frac{\lambda_2}{4}\right)\right] A(\xi) = 0, \qquad (6.26)$$
$$f(\xi) = (\xi - a)(\xi - b)(\xi - 1)\xi, \quad \xi = \mu, \ \nu, \ \rho,$$

которое является стандартной формой уравнения с пятью элементарными особенностями [1]. О решениях этого уравнения известно очень мало. Для системы 13 параметры меняются в интервалах

$$-\infty < \rho < 0 < \mu < 1 < \nu < \infty.$$

Уравнения с разделяющимися переменными имеют вид (6.26) с $a = \bar{b} = \alpha + i\beta$. Для системы 14 параметры меняются в интервалах $\mu > a > 1$, $\rho < 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, а решения уравнения Лапласа имеют вид $\Psi = \mathscr{R}^{1/2}E_1(\mu)E_2(\rho)e^{im\varphi}$, где

$$\left[4(\mathscr{P}(\xi))^{1/2}\frac{d}{d\xi}(\mathscr{P}(\xi))^{1/2}\frac{d}{d\xi}+\left(\frac{1}{4}-m^2\right)\xi-\lambda\right]E_j(\xi)=0,$$

$$j=1,\ 2,\quad \xi=\mu,\ \rho,\quad \mathscr{P}(\xi)=(\xi-a)(\xi-1)\xi, \tag{6.27}$$

$$iJ_3\Psi=m\Psi,\quad S_2\Psi=\lambda\Psi.$$

Положив $\mu=\mathrm{sn}^2(\alpha,k)$, $\rho=\mathrm{sn}^2(\beta,k)$, где $k=a^{-1/2}$, получим

$$x=\mathscr{R}^{-1}\cos\varphi,\quad y=\mathscr{R}^{-1}\sin\varphi,\quad z=ik\mathscr{R}^{-1}\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta,$$

$$\mathscr{R}=i(k')^{-1}\,\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta-i(kk')^{-1}\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta, \tag{6.28}$$

$$\Psi=\mathscr{R}^{1/2}\Lambda^p_{m-1/2}(\alpha,\ k)\,\Lambda^p_{m-1/2}(\beta,\ k)\,e^{im\varphi},$$

где $\Lambda^p_n(z,\ k)$ — решение уравнения Ламе

$$\frac{d^2\Lambda}{dz^2}+\left(h^p_n-n(n+1)\,k^2\,\mathrm{sn}^2(z,\ k)\right)\Lambda=0. \tag{6.29}$$

Параметры α, β принадлежат следующим интервалам комплексной плоскости: $\alpha\in[iK',\ iK'+2K]$, $\beta\in[2K-iK',\ 2K+iK']$. Для системы 15 параметры меняются в интервалах

$$1<\rho<a<\mu<\infty,\qquad 0\leqslant\varphi<2\pi$$

и уравнения с разделяющимися переменными имеют вид (6.27). Выполняя те же подстановки с использованием эллиптических функций, что и в предыдущем случае, получаем

$$x=\mathscr{R}^{-1}\cos\varphi,\quad y=\mathscr{R}^{-1}\sin\varphi,\quad z=i(k'\mathscr{R})^{-1}\,\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta,$$

$$\mathscr{R}=k(\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta+\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta/k'), \tag{6.30}$$

$$\Psi=\mathscr{R}^{1/2}\Lambda^p_{m-1/2}(\alpha,\ k)\,\Lambda^p_{m-1/2}(\beta,\ k)\,e^{im\varphi},$$

где α, β принадлежат следующим интервалам комплексной плоскости: $\alpha\in[iK', iK'+2K]$, $\beta\in[K, K+2iK']$.

Для системы 16 параметры удовлетворяют условиям $\mu>0$, $\rho<0$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, а уравнения с разделяющимися переменными имеют вид (6.27), причем

$$\mathscr{P}(\xi)=(\xi-a)(\xi-b)\xi,\qquad a=\bar{b}=\alpha+i\beta.$$

Полагая $\mu=\mathrm{sn}^2(\gamma,t)$, $\rho=\mathrm{sn}^2(\theta,t)$, где $t=(s+is')(s-is')^{-1}$, $s^2=(|a|-\mathrm{Re}\,a)/(2|a|)$, мы получаем решения

$$\Psi=\mathscr{R}^{1/2}\Lambda^p_{m-1/2}(\gamma,\ t)\,\Lambda^p_{m-1/2}(\theta,\ t)\,e^{im\varphi}, \tag{6.31}$$

где $\gamma\in[-iK',\ iK']$, $\theta\in[2K-iK',\ 2K+iK']$.

И наконец, для системы 17 (системы тороидальных координат) собственные функции имеют вид

$$\Psi = (\operatorname{ch}\xi + \sin\psi)^{1/2} E(\xi) \exp[i(l\psi + m\varphi)],$$
$$iJ_3\Psi = m\Psi, \quad (P_3 + K_3)\Psi = -2il\Psi,$$
$$\left[(\operatorname{sh}\xi)^{-1}\frac{d}{d\xi}\operatorname{sh}\xi\frac{d}{d\xi} + \left(\frac{1}{4} - l^2 - \frac{m^2}{\operatorname{sh}^2\xi}\right)\right]E(\xi) = 0. \qquad (6.32)$$

Базис решений для этого уравнения образован присоединенными функциями Лежандра $P^m_{l-1/2}(\operatorname{ch}\xi)$, $Q^m_{l-1/2}(\operatorname{ch}\xi)$.

Несложными вычислениями можно показать, что координатные поверхности во всех этих случаях являются циклидами. Для систем 14—17 некоторые из этих поверхностей являются циклидами вращения. Системы 12—16 довольно трудны для анализа, поэтому при исследовании уравнения Лапласа широко используется только система тороидальных координат 17. Система тороидальных координат имеет много общего с системой сферических координат. (Действительно, в случае комплексного уравнения Лапласа эти системы переходят друг в друга под действием комплексной конформной группы.) Для того чтобы разделить переменные в уравнении Лапласа, часто пользуются системой биполярных координат [13], но она конформно эквивалентна системе сферических координат. Однако эти две системы координат не эквивалентны относительно евклидовой группы, которая порождается $E(3)$ и растяжением $\exp(\alpha D)$.

Из семнадцати систем, допускающих R-разделение переменных для уравнения Лапласа, девять, а именно системы 2, 5—8, 14—17, соответствуют диагонализации оператора J_3. Эти системы обладают тем свойством, что их собственные функции принимают вид $\Psi(\mathrm{x}) = \Phi e^{im\varphi}$, $iJ_3\Psi = m\Psi$, где Φ — функция от остальных двух переменных. Если подставить в уравнение Лапласа это выражение для Ψ и полученный результат разделить на $e^{im\varphi}$, то мы получим дифференциальное уравнение для Φ, которое в цилиндрических координатах записывается так:

$$(\partial_{rr} + r^{-1}\partial_r - r^{-2}m^2 + \partial_{zz})\Phi(r, z) = 0. \qquad (6.33)$$

Уравнение (6.33) при фиксированном $m \geqslant 0$ является обобщенным осесимметрическим уравнением теории потенциала. Вещественная алгебра симметрии этого уравнения изоморфна алгебре $sl(2, R)$. Действительно, базис этой алгебры образован операторами K_3, P_3, D (см. (6.2)), причем соотношения коммутирования имеют вид

$$[D, P_3] = P_3, \quad [D, K_3] = -K_3, \quad [P_3, K_3] = -2D, \qquad (6.34)$$

а из тождества (6.13iii) следует, что (6.33) можно записать в эквивалентной операторной форме:

$$({}^1/_2P_3^2 + {}^1/_2K_3^2 - D^2)\,\Phi = ({}^1/_4 + m^2)\,\Phi. \tag{6.35}$$

В работе [38] (см. также [62]) показано, что пространство симметрических операторов симметрии второго порядка в обертывающей алгебре алгебры $sl(2, R)$ по модулю подпространства, порожденного оператором Казимира ${}^1/_2P_3^2 + {}^1/_2K_3^2 - D^2$, в результате действия группы симметрии $SL(2, R)$ разбивается на девять типов орбит. Девять перечисленных выше систем координат и являются как раз теми системами координат, которые допускают разделение переменных в уравнении (6.33), и легко проверить, что эти системы взаимно однозначно соответствуют девяти типам орбит; т. е. между списком операторов S_2, в котором J_3^2, S_2 определяют каждую систему, и списком представителей этих типов орбит имеется полное соответствие.

3.7. Тождества для решений с разделенными переменными уравнения Лапласа

Подобрать модель гильбертова пространства для решений уравнения Лапласа, такую, чтобы действие конформной группы задавалось унитарным представлением, невозможно. В самом деле, если бы такая модель существовала, то операторы импульса iP_j, $j = 1, 2, 3$, были бы самосопряженными операторами в этом гильбертовом пространстве. Однако из тождества $P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = 0$ и спектральной теоремы для самосопряженных операторов следует, что $P_j = 0$, а это приводит к противоречию.

Тем не менее, применяя метод Вейснера, можно получить соотношения, связывающие решения с разделенными переменными уравнения Лапласа, и, поступая так же, как в разд. 3.5, построить модели негильбертова пространства для этого уравнения. Рассмотрим выражение

$$\Psi(x, y, z) = \int_{C_1} d\beta \int_{C_2} dt\, t^{-1} h(\beta, t) \times$$
$$\times \exp\left[\frac{ix\beta}{2}(t + t^{-1}) + \frac{y\beta}{2}(t - t^{-1}) - \beta z\right] = I(h), \tag{7.1}$$

где h — аналитическая функция в некоторой области из $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, содержащей контуры интегрирования $C_1 \times C_2$, причем $I(h)$ абсолютно сходится и под знаком интеграла допускается произвольное дифференцирование по переменным x, y, z. Легко проверить, что для каждой такой функции h $\Psi = I(h)$ является решением уравнения Лапласа (6.1). Кроме того, интегрируя по частям, можно показать, что операторы P_j, J_j, K_j, D (см. (6.2)), действующие на пространство решений уравнения (6.1), соответствуют операторам

$$\begin{aligned}
&P^+ = -\beta t, \quad P^- = -\beta t^{-1}, \quad P^0 = -i\beta, \quad D = \beta\partial_\beta + {}^1/_2,\\
&J^+ = it\beta\partial_\beta - it^2\partial_t, \quad J^- = -i\beta t^{-1}\partial_\beta - i\partial_t, \quad J^0 = t\partial_t,\\
&K^+ = t\beta^{-1}(\beta\partial_\beta - t\partial_t)(\beta\partial_\beta - t\partial_t - 1),\\
&K^- = t^{-1}\beta^{-1}(\beta\partial_\beta + t\partial_t)(\beta\partial_\beta + t\partial_t - 1),\\
&K^0 = i\beta^{-1}\left((t\partial_t)^2 - (\beta\partial_\beta)^2\right),
\end{aligned} \tag{7.2}$$

где

$$J^\pm = \mp J_2 + iJ_1, \quad J^0 = iJ_3$$

и аналогичные выражения имеют место для $P^\pm$, $K^\pm$ и т. д. В рассматриваемом нами случае предполагается, что C_1, C_2 и h выбираются таким образом, что при каждом интегрировании по частям граничные члены обращаются в нуль:

$$P^\pm\Psi = I(P^\pm h), \quad J^\pm\Psi = I(J^\pm h)$$

и т. д.

В качестве первого примера возьмем C_1 и C_2 в виде единичных окружностей на β- и t-плоскости соответственно с центрами в начале координат и обычным направлением обхода (против часовой стрелки). Тогда, полагая

$$h(\beta, t) = \beta^{-l-1}j(t), \quad j(t) = \sum_{m=-l}^{l} a_m t^m, \quad l = 0, 1, 2, \ldots, \tag{7.3}$$

вычислим при помощи теоремы о вычетах интеграл по β, что дает

$$\Psi(x, y, z) = I(h) = -\frac{2\pi}{l!}\int_0^{2\pi} [ix\cos\alpha + iy\sin\alpha - z]^l\, j(e^{i\alpha})\, d\alpha. \tag{7.4}$$

Из (7.3) видно, что h является собственной функцией оператора D, отвечающей собственному значению $-l - {}^1/_2$; следовательно, согласно (6.13ii),

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}\Psi = -l(l+1)\Psi.$$

Кроме того, Ψ — решение уравнения Лапласа, являющееся однородным многочленом от x, y, z порядка l. В частности, для $j(t) = t^m$, $-l \leqslant m \leqslant l$, мы имеем $J^0\Psi = m\Psi$; следовательно, функция Ψ должна быть кратной шаровой гармонике $\rho^l Y_l^m(\theta, \varphi)$, выраженной в сферических координатах (строка 5 табл. 14). Вычисляя этот интеграл для частного случая, когда $\theta = 0$, мы получаем

$$I(\beta^{-l-1}t^m) = -\frac{2\pi\rho^l}{l!}\int_0^{2\pi}[i\sin\theta\cos(\varphi-\alpha)-\cos\theta]^l e^{i\alpha m}\,d\alpha =$$

$$= 16\pi^3(-1)^{l+1}i^m\rho^l[4\pi(2l+1)(l-m)!\,(l+m)!]^{-1/2}Y_l^m(\theta,\varphi). \quad (7.5)$$

В качестве следующего примера возьмем контур C_2 в t-плоскости, контур C_1', состоящий из положительной части вещественной оси β-плоскости от точки $\beta = 0$ до $\beta = +\infty$, и аналитическую функцию $h(\beta, t) = \beta^l t^m$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, $m = l$, $l-1, \ldots, -l$. В этом случае $\Psi = I(h)$ удовлетворяет уравнениям $D\Psi = (l + {}^1/_2)\Psi$, $\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}\Psi = -l(l+1)\Psi$, $J^0\Psi = m\Psi$, и легко показать, что

$$I(\beta^l t^m) = il!\rho^{-l-1}\int_0^{2\pi}[-i\sin\theta\cos(\varphi-\alpha)+\cos\theta]^{-l-1}e^{im\alpha}\,d\alpha =$$

$$= i^{1-m}\rho^{-l-1}[16\pi^3(l-m)!\,(l+m)!/(2l+1)]^{1/2}Y_l^m(\theta,\varphi), \quad (7.6)$$

где ρ, θ, φ — сферические координаты и $0 \leqslant \theta < \pi/2$.

Теперь рассмотрим уравнения

$$(\{J_1, P_2\} - \{P_1, J_2\})f = -\lambda f, \quad J^0 f = mf \quad (7.7)$$

для собственных функций, соответствующих системе параболических координат. Для модели (7.2) эти собственные функции имеют вид

$$f^{(8)}_{\lambda, m}(\beta, t) = \exp(-\lambda/2\beta)\beta^{-1}t^m. \quad (7.8)$$

Подставляя в уравнение (7.1) $h = f^{(8)}_{\lambda, m}$ и выбирая контуры C_1, C_2, мы находим, что

$$\Psi^{(8)}_{\lambda, m} = I\left(f^{(8)}_{\lambda, m}\right) =$$

$$= -2\pi\int_0^{2\pi} J_0\left[i(2\lambda)^{1/2}(z - ix\cos\alpha - iy\sin\alpha)^{1/2}\right]e^{im\alpha}\,d\alpha =$$

$$= -4\pi^2 J_m(-i\sqrt{\lambda}\,\xi)J_m(\sqrt{\lambda}\,\eta)e^{im\varphi}, \quad (7.9)$$

$$x = \xi\eta\cos\varphi, \quad y = \xi\eta\sin\varphi, \quad z = (\xi^2 - \eta^2)/2.$$

Как обычно, тот факт, что переменные разделяются, дает нам возможность вычислить интеграл. Подставляя в уравнение (7.1) $h = f^{(8)}{}_{\lambda,m}$ и выбирая соответствующим образом контуры C_1', C_2, мы получаем

$$\Psi^{(8)'}_{\lambda,\,m} = I\left(f^{(8)}_{\lambda,\,m}\right) = 2\pi i^{m+1} e^{im\varphi} \int\limits_0^\infty J_m(\beta r) \exp(-\beta z - \lambda/2\beta)\, d\beta/\beta =$$

$$= 2i \int\limits_0^{2\pi} K_0\left[(2\lambda)^{1/2} (z - ix \cos\alpha - iy \sin\alpha)^{1/2}\right] e^{im\alpha}\, d\alpha =$$

$$= 4\pi i K_m\left(\sqrt{\lambda}\,\xi\right) I_m\left(i\sqrt{\lambda}\,\eta\right) e^{im\varphi}, \qquad \lambda > 0, \;\; \xi > |\eta|, \qquad (7.10)$$

где второе и третье равенства получаются в результате интегрирования. Заметим, что второе равенство дает разложение нашего решения по цилиндрическим волнам.

Подобным же образом интегрирование в (7.6) по t дает разложение

$$I\left(\beta^l t^m\right) = 2\pi i^{m+1} e^{im\varphi} \int\limits_0^\infty J_m(\beta r)\, e^{-\beta z} \beta^l\, d\beta, \qquad z > 0, \qquad (7.6')$$

шаровой гармоники по цилиндрическим волнам.

Применяя оператор I (с контурами C_1, C_2) к обеим частям тождества

$$f^{(8)}_{\lambda,\,m}(\beta,\, t) = t^m \sum_{l=0}^{\infty} (-\lambda/2)^l\, \beta^{-l-1}/l!,$$

мы находим разложение

$$\Psi^{(8)}_{\lambda,\,m}(\mathbf{x}) = -\sum_{l=|m|}^{\infty} 16\pi^3 i^m \left[4\pi(2l+1)(l-m)!\,(l+m)!\right]^{-1/2} \times$$

$$\times (\lambda\rho/2)^l (l!)^{-1}\, Y_l^m(\theta,\, \varphi) \qquad (7.9')$$

произведений функции Бесселя по сферическим гармоникам.

Соответствующие системе координат сплющенного сфероида (системе 7) уравнения на собственные значения

$$\left(\mathbf{J}\cdot\mathbf{J} + a^2 P_1^2 + a^2 P_2^2\right) f = -\lambda f, \qquad J^0 f = mf$$

в модели (7.2) дают собственные функции

$$f^{(7)}_{\lambda,\,m}(\beta,\, t) = \beta^{-1/2} J_\nu(a\beta)\, t^m, \qquad \nu^2 = \lambda + 1/4. \qquad (7.11)$$

Рассматривая случай, в котором m — положительное целое число и $\nu = l + 1/2$ (где $l > -1$), и применяя оператор I (контуры C_1', C_2), получаем

$$\Psi^{(7)}_{\lambda,\,m}(\mathbf{x}) = I\left(f^{(7)}_{\lambda,\,m}\right) = 2\pi i^{m+1} e^{im\varphi} \int\limits_0^\infty J_m(\beta r)\, J_\nu(a\beta)\, e^{-\beta z}\, d\beta/\beta^{1/2} =$$

$$= 2\pi i^{m+1} (a \operatorname{ch}\eta)^{-1/2}\, \Gamma(m + l + 1)\, e^{im\varphi} \times$$

$$\times P_l^{-m}(\cos\alpha)\, P_{m-1/2}^{-l-1/2}(\operatorname{th}\eta), \qquad 0 < \alpha < \pi/2, \;\; 0 < \eta, \qquad (7.12)$$

где α, η, φ — координаты сплющенного сфероида (строка 7 табл. 14). Заметим, что второе равенство дает разложение нашего решения по цилиндрическим волнам. И в этом случае интегралы вычисляются довольно просто, так как нам заранее известно, что переменные в решении разделяются. Для того чтобы определить четыре оставшиеся константы, необходимо только исследовать поведение интеграла в окрестностях $\eta = 0$ и $\alpha = 0, \pi/2$.

В случае, когда $\nu = l + {}^1/_2$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, можно разложить (7.11) в степенной ряд по переменной β и, применяя почленно оператор I, получить разложение решения в сфероидальных координатах по шаровым гармоникам:

$$\Psi^{(7)}_{\lambda, m}(\mathbf{x}) = \sum_{n=\max\left(\frac{|m|-l}{2},\, 0\right)}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^{l+2n+1/2} (i)^{2n-m+1} \frac{\rho^{-l-2n-1}}{n!\Gamma(l+n+3/2)} \times$$

$$\times \left[16\pi^3 \frac{(l+2n-m)!\,(l+2n+m)!}{2l+4n+1}\right]^{1/2} Y^m_{l+2n}(\theta, \varphi). \quad (7.13)$$

Для системы тороидальных координат 17 уравнения на собственные значения

$$(P^0 + K^0) f = 2lf, \qquad J^0 f = mf$$

в модели (7.2) дают собственные функции

$$f^{(17)}_{n, m}(\beta, t) = e^{-i\beta}(\beta t)^m {}_1F_1\left(\begin{matrix} -n \\ 2m+1 \end{matrix} \middle| 2i\beta\right), \quad n = -l - m - {}^1/_2. \quad (7.14)$$

Возьмем $n, m = 0, 1, 2, \ldots$. Применяя оператор I (контуры C_1', C_2), мы получаем

$$\Psi^{(17)}_{n, m}(\mathbf{x}) = I\left(f^{(17)}_{n, m}\right) =$$

$$= 2\pi i^{m+1} e^{im\varphi} \int_0^\infty e^{-\beta z - i\beta} J_m(r\beta)\, \beta^m {}_1F_1\left(\begin{matrix} -n \\ 2m+1 \end{matrix} \middle| 2i\beta\right) d\beta =$$

$$= \sqrt{2}\,\pi\,(-{}^1/_2)^m (-i)^n (2m)!\,(\operatorname{ch}\xi + \sin\psi)^{1/2} \times$$

$$\times \exp\left[i(m\varphi + l\psi + \pi/4)\right] P^{-m}_{l-1/2}(\operatorname{ch}\xi). \quad (7.15)$$

Простые вычисления дают

$$\exp(\alpha P_3)\, f^{(17)}_{n, m} = \sum_{s=m}^{\infty} a^s_{n, m} \beta^s t^m,$$

$$a^s_{n, m} = \frac{(-\alpha - i)^{s-m}}{(s-m)!} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n,\ m-s \\ 2m+1 \end{matrix} \middle| \frac{2i}{\alpha + i}\right); \quad (7.16)$$

следовательно,

$$\exp(\alpha P_3)\,\Psi^{(17)}_{n,m}(\mathbf{x}) =$$

$$= \sum_{s=m}^{\infty} a^s_{n,m} i^{1-m} \rho^{-s-1} \left[16\pi^3 \frac{(s-m)!\,(s+m)!}{2s+1}\right]^{1/2} Y_s^m(\theta, \varphi) \qquad (7.17)$$

является разложением решения, соответствующего системе тороидальных координат, по шаровым гармоникам. (Почленное интегрирование, которое мы применили для вывода (7.13) и (7.17), можно обосновать при помощи известной теоремы Лебега [68].)

Из приведенных примеров видно, что предложенная нами модель негильбертова пространства позволяет получать интегральные представления и формулы разложения решений уравнения Лапласа в системах координат, допускающих разделение переменных для этого уравнения. (В некоторых случаях, однако, эти модели приводят к дифференциальным операторам третьего и четвертого порядка.) Исследование систем, связанных с уравнениями Ламе и Уиттекера — Хилла, выполняется аналогично исследованию, проведенному в разд. 3.3. Выбирая иные контуры в β- и t-плоскостях, можно значительно увеличить число рассматриваемых случаев. Кроме того, разложения решений волнового уравнения в гильбертовом пространстве (см. разд. 4.1) можно интерпретировать как разложения решений уравнений Лапласа, если заменить t на iz, $z > 0$.

Наибольший эффект метод Вейснера дает в приложении к функциям, связанным с системой сферических координат. Эти функции являются общими собственными функциями коммутирующих операторов D и J^0. Мы изучим эти собственные функции с более общих позиций, используя для этого прежде всего модель (7.2). В этой модели решения уравнений

$$J^0 g = mg, \qquad Dg = (l + {}^1\!/_2)\, g, \qquad m,\ l \in \mathbb{C},$$

кратны $\beta^l t^m$. Если собственные функции нормированы таким образом, что

$$g^{(l)}_m = i^{l-m} \beta^l t^m, \qquad (7.18)$$

то отсюда легко следует, что действие операторов (7.2) на этот базис описывается соотношениями

$$\begin{aligned} J^{\pm} g^{(l)}_m &= (-l \pm m)\, g^{(l)}_{m\pm1}, & J^0 g^{(l)}_m &= m g^{(l)}_m, \\ P^0 g^{(l)}_m &= -g^{(l+1)}_m, & P^{\pm} g^{(l)}_m &= \mp g^{(l+1)}_{m\pm1}, \\ D g^{(l)}_m &= (l + {}^1\!/_2)\, g^{(l)}_m, & K^0 g^{(l)}_m &= (l^2 - m^2)\, g^{(l-1)}_m, \end{aligned}$$

$$K^{\pm} g^{(l)}_m = \mp (l \mp m)(l \mp m - 1)\, g^{(l-1)}_{m\pm1}. \qquad (7.19)$$

Рассмотрим нашу модель в случае, когда $l_0 \in \mathbb{C}$ фиксировано, причем $l_0 + {}^1/_2$ не является целым числом, $l = l_0$, $l_0 \pm 1$, ... и $m = l$, $l - 1$, $l - 2$, ... Заметим, что соответствующее множество базисных функций $\{g_m^{(l)}\}$ инвариантно относительно действия алгебры $so(4, 1)$. В частности, каждый из операторов J^+, K^0, K^+ отображает в нуль собственную функцию $g_l^{(l)}$.

В силу своей простоты рекуррентные формулы (7.19) позволяют легко вычислить экспоненту операторов L алгебры Ли и получить локальное действие $\exp(\alpha L)$ конформной группы в базисе (7.18). (Действительно, при помощи локальной теории Ли можно вычислить экспоненты всех операторов (7.2), за исключением операторов второго порядка K. Однако экспоненты операторов K можно формально вычислить, применяя базис $\{g_m^{(l)}\}$ и используя рекуррентные формулы (7.19); полученные результаты будут справедливы для модели (6.2), предложенной для уравнения Лапласа.) Подробный анализ матричных элементов, описывающих действие группы, дается в работе [85], где на основе результатов этого анализа выводятся тождества для многочленов Гегенбауэра.

Чтобы понять, как получаются эти функции, рассмотрим систему комплексных координат $\{w, t, \rho\}$, комплексно эквивалентную системе комплексных сферических координат $\{\theta, \varphi, \rho\}$ (строка 5 табл. 14). (Поскольку нас интересуют аналитические разложения, полезно рассмотреть решения комплексного уравнения Лапласа.) Таким образом,

$$\begin{gathered} w = \cos\theta = z/\rho, \qquad t = e^{i\varphi}(1 - w^2)^{1/2} = (x + iy)/\rho, \\ \rho = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}. \end{gathered} \tag{7.20}$$

В этих координатах операторы (6.2) принимают вид

$$\begin{aligned} &J^0 = t\partial_t, \quad J^+ = -t\partial_w, \quad J^- = t^{-1}((1 - w^2)\partial_w - 2wt\partial_t), \\ &D = -({}^1/_2 + \rho\partial_\rho), \qquad -iP^0 = w\partial_\rho + \rho^{-1}(1 - w^2)\partial_w - \rho^{-1}wt\partial_t, \\ &-iP^+ = t\partial_\rho - \rho^{-1}tw\partial_w - \rho^{-1}t^2\partial_t, \\ &-iP^- = t^{-1}(1 - w^2)\partial_\rho - \rho^{-1}t^{-1}w(1 - w^2)\partial_w + \rho^{-1}(1 + w^2)\partial_t, \\ &-iK^0 = \rho w + \rho^2 w\partial_\rho + \rho(w^2 - 1)\partial_w + \rho tw\partial_t, \\ &-iK^+ = \rho t + \rho^2 t\partial_\rho + \rho tw\partial_w + \rho t^2\partial_t, \\ &-iK^- = \rho t^{-1}(1 - w^2) + \rho^2 t^{-1}(1 - w^2)\partial_\rho - \rho(1 + w^2)\partial_t + \\ &\qquad\qquad + \rho t^{-1}w(1 - w^2)\partial_w. \end{aligned} \tag{7.21}$$

Теперь будем искать функции $\Psi_m^{(l)}(w, t, \rho)$, которые удовлетворяют рекуррентным формулам (7.19), когда действуют операторы (7.21). (Поскольку в модели (7.19) $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}g_m^{(l)} = 0$, функции $\Psi_m^{(l)}$

автоматически становятся решениями уравнения Лапласа, соответствующими системе 5.)

Из соотношений

$$J^0\Psi_l^{(l)} = l\Psi_l^{(l)}, \quad D\Psi_l^{(l)} = (l + {}^1/_2)\,\Psi_l^{(l)}, \quad K^0\Psi_l^{(l)} = 0$$

вытекает, что $\Psi_l^{(l)} = \Gamma(l + {}^1/_2)\,(2t)^l\,(\rho/i)^{-l-1}$ с точностью до некоторой мультипликативной константы. Из (7.19) имеем

$$\exp\left(-i\alpha P^0\right)\Psi_m^{(l)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\alpha)^n}{n!}\Psi_m^{(l+n)}, \tag{7.22}$$

а из (7.21) следует, что

$$\exp\left(-i\alpha P^0\right)\Psi_m^{(l)}(w,\ t,\ \rho) = \Psi_m^{(l)}\left[(w + \alpha/\rho)\left(1 + \alpha^2/\rho^2 + 2\alpha w/\rho\right)^{-1/2},\right.$$
$$\left.t\,(1 + \alpha^2/\rho^2 + 2\alpha w/\rho)^{-1/2},\ \rho\,(1 + \alpha^2/\rho^2 + 2\alpha w/\rho)^{1/2}\right]. \tag{7.23}$$

Подставляя (7.23) в (7.22), полагая $m = l$ и используя явные формулы для $\Psi_l^{(l)}$, мы получаем простую производящую функцию для собственных функций $\Psi_l^{(l+n)}$. Сравнивая полученное выражение с (5.24), находим

$$\Psi_m^{(l)}(w,\ t,\ \rho) = (l - m)!\,\Gamma(m + {}^1/_2)\,C_{l-m}^{m+1/2}(w)\,(2t)^m\,(\rho/i)^{-l-1}. \tag{7.24}$$

Непосредственной проверкой можно показать, что эти функции удовлетворяют всем рекуррентным формулам (7.19). (Эти формулы в точности совпадают с известными рекуррентными формулами, которым удовлетворяют многочлены Гегенбауэра.) Подставляя (7.23) в (7.22), мы получаем тождество общего вида для многочленов Гегенбауэра:

$$(1 - 2w + \alpha^2)^{-\nu-k/2}\,C_k^{\nu}\left[(w - \alpha)\,(1 - 2\alpha w + \alpha^2)^{-1/2}\right] =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\binom{k+n}{n}C_{n+k}^{\nu}(w), \quad \left|\alpha^2 - 2\alpha w\right| < 1, \tag{7.25}$$

которое при $k = 0$ сводится к (5.24).

Подобным образом формула

$$\exp\left(-\alpha P^+\right)\Psi_m^{(l)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\Psi_{m+n}^{(l+n)}$$

дает тождество

$$(1 - \alpha)^{-\nu-k/2}\,C_k^{\nu}\left[w\,(1 - \alpha)^{-1/2}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\frac{\Gamma(\nu + n)}{\Gamma(\nu)}C_k^{\nu+n}(w), \quad |\alpha| < 1, \tag{7.26}$$

а рассматривая $\exp(\alpha K^0)\Psi_m^{(l)}$, мы получаем

$$(1+2aw+\alpha^2)^{k/2}C_k^\nu\left[(w+\alpha)(1+2aw+\alpha^2)^{-1/2}\right]=$$
$$=\sum_{n=0}^{k}\alpha^l\binom{2\nu+k-1}{n}C_{k-n}^\nu(w) \qquad (7.27)$$

и т. д. Более полный перечень таких разложений можно найти в работе [85].)

Другой тип тождеств, которые можно получить из (7.19), тесно связан с максвелловской теорией поля. Очевидное тождество $(P^0)^n g_l^{(l)}=(-1)^n g_l^{(l+n)}$, которое следует из (7.19), дает

$$n!\rho^{-\nu-n-1/2}C_n^\nu(w)=\left(w\partial_\rho+\rho^{-1}\left(1-w^2\right)\partial_w-\rho^{-1}w\left(\nu-{}^1/_2\right)\right)^n\rho^{-\nu-1/2},$$
$$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

Более общо, применяя метод Вейснера, можно получить разложения вида

$$\mathbf{T}(g)\Psi(w,\ t,\ \rho)=\sum_{m,\ l}a_{m,\,l}C_{l-m}^{m+1/2}(w)\,t^m\begin{Bmatrix}\rho^l\\ \rho^{-l-1}\end{Bmatrix} \qquad (7.28)$$

даже в том случае, когда g отграничено от единицы конформной группы или когда Ψ является решением уравнения Лапласа не на сферической орбите. Рассмотрим случай, связанный с цилиндрической орбитой. Решение уравнений

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}\Psi=0, \qquad -iP^0\Psi=\lambda\Psi, \qquad J^0\Psi=m\Psi, \qquad m,\ \lambda\in\mathbb{C}$$

имеет вид

$$\Psi(w,\ t,\ \rho)=\left[t/(\lambda(w^2-1)^{1/2})\right]^m e^{\lambda w\rho}I_m\left[\lambda\rho(w^2-1)^{1/2}\right],$$

где $I_m(z)$ — модифицированная функция Бесселя. В этом случае разложения (7.28) принимают вид

$$\Psi(w,\ t,\ \rho)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\lambda)\,\rho^{m+n}t^mC_n^{m+1/2}(w).$$

Для того чтобы вычислить константы $a_n(\lambda)$, положим в обеих частях этого уравнения $w=1$ и получим окончательный результат

$$\Gamma(m+1)\left[\rho(w^2-1)^{1/2}\right]^{-m}e^{\rho m}I_m\left[\rho(w^2-1)^{1/2}\right]=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(2m+n+1)}C_n^{m+1/2}(w)\,\rho^n. \qquad (7.29)$$

Любая аналитическая функция Ψ, получающаяся в результате разделения переменных в комплексном уравнении Лапласа, приводит к разложению (7.28). Такие функции могут быть получены аналитическим продолжением решений с разделенными переменными вещественного уравнения Лапласа и продолжением решений с разделенными переменными волнового уравнения

$$(\partial_{tt} - \Delta_2)\Phi(x, y, t) = 0,$$

которое будет рассматриваться в следующей главе. (Полагается $t = iz$.) Таким способом можно получить огромное количество производящих функций для многочленов Гегенбауэра.

В общем случае в соотношение (7.28) входит двойная сумма, но если $\mathbf{T}(g)\Psi$ является собственной функцией оператора J^0, то m фиксировано и суммирование ведется только по l. Эти функции являются решениями уравнения (6.33), и для того, чтобы их получить, нужно считать Ψ одним из решений уравнения (6.33) с разделенными переменными, а g — элементом комплексной группы $SL(2, \mathbb{C})$, порождаемой операторами P^0, K^0 и D. В статье [41] Висванатан дал подробный вывод производящих функций (за исключением довольно сложных систем функций Ламе), получаемых указанным способом. Когда $\mathbf{T}(g)\Psi$ является собственной функцией оператора D, сумма в соотношении (7.28) тоже сводится к однократной; в этом случае фиксируется l и суммирование ведется только по m. Системы координат, в которых D является диагональным оператором, будут рассмотрены в разд. 4.3.

И наконец, следует заметить, что при помощи конформной симметрии комплексного уравнения Лапласа можно получить формулы квадратичного преобразования для гипергеометрической функции ${}_2F_1$; см. [94].

Упражнения

1. Показать, что сопряженное действие группы $E(3)$ разбивает алгебру $\mathscr{E}(3)$ на три орбиты.

2. Доказать, что в системе координат параболического цилиндра $x = (\xi^2 - \eta^2)/2$, $y = \xi\eta$, $z = z$ уравнение Гельмгольца имеет решения с разделенными переменными и что соответствующими определяющими операторами являются $\{J_3, P_2\}$ и P_3^2.

3. Используя выражения (4.10), (4.11), вычислить билинейные разложения функции $\sin(\omega R)/\omega R$ по решениям с разделенными переменными уравнения Гельмгольцав сферических координатах и в координатах вытянутого сфероида.

4. Вычислить алгебру симметрии уравнения Лапласа $\Delta_3\psi = 0$.

5. Показать, что в результате замены переменных $x = u$, $y - iz = s$, $y + iz = 2t$ и подстановки $\Psi = e^{\lambda s}\Phi(t, u)$ комплексное уравнение Лапласа $(\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz})\Psi = 0$ сводится к уравнению теплопроводности для функции Φ,

Глава 4

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

4.1. Уравнение $\Psi_{tt} - \Delta_2 \Psi = 0$

В этой главе мы рассмотрим вещественное волновое уравнение

$$(\partial_{00} - \partial_{11} - \partial_{22}) \Psi(x) = 0, \qquad x = (x_0, x_1, x_2). \tag{1.1}$$

Известно, что алгебра симметрий уравнения (1.1) десятимерна и имеет: базисные операторы импульса и энергии

$$P_\alpha = \partial_\alpha, \qquad \alpha = 0, 1, 2, \tag{1.2}$$

производящие операторы однородных преобразований Лоренца

$$M_{12} = x_1\partial_2 - x_2\partial_1, \quad M_{01} = x_0\partial_1 + x_1\partial_0, \quad M_{02} = x_0\partial_2 + x_2\partial_0, \tag{1.3}$$

производящий оператор группы растяжений

$$D = -(1/2 + x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + x_2\partial_2) \tag{1.4}$$

и производящие операторы специальных конформных преобразований

$$\begin{aligned} K_0 &= -x_0 + (x \cdot x - 2x_0^2)\,\partial_0 - 2x_0x_1\partial_1 - 2x_0x_2\partial_2, \\ K_1 &= x_1 + (x \cdot x + 2x_1^2)\,\partial_1 + 2x_1x_0\partial_0 + 2x_1x_2\partial_2, \\ K_2 &= x_2 + (x \cdot x + 2x_2^2)\,\partial_2 + 2x_2x_0\partial_0 + 2x_2x_1\partial_1, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где

$$x \cdot y = x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 = x_0y_0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

(Мы игнорируем тривиальную симметрию E.)

Для удобства введем еще один базис для этой алгебры, ясно показывающий изоморфизм между этой алгеброй и алгеброй $so(3, 2)$. Определим $so(3, 2)$ как десятимерную алгебру Ли вещественных (5×5)-матриц $\mathscr{A}$, таких, что $\mathscr{A} G^{3,2} + G^{3,2} \mathscr{A}^t = 0$, где

$$G^{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{3} \mathscr{E}_{jj} - \sum_{k=4}^{5} \mathscr{E}_{kk},$$

а $\mathcal{E}_{ij}$ задано формулой (6.4) в разд. 3.6. Легко проверить, что матрицы

$$\begin{aligned} &\Gamma_{ab} = \mathcal{E}_{ab} - \mathcal{E}_{ba} = -\Gamma_{ba}, && a \neq b \\ &\Gamma_{aB} = \mathcal{E}_{aB} + \mathcal{E}_{Ba} = \Gamma_{Ba}, && 1 \leqslant a,\ b \leqslant 3, \quad 4 \leqslant A,\ B \leqslant 5, \\ &\Gamma_{AB} = -\mathcal{E}_{AB} + \mathcal{E}_{BA} = -\Gamma_{BA} && \end{aligned} \tag{1.6}$$

образуют базис для $so(3,2)$, причем соотношения коммутирования имеют вид

$$\begin{aligned} &[\Gamma_{ab}, \Gamma_{cd}] = \delta_{bc}\Gamma_{ad} + \delta_{ad}\Gamma_{bc} + \delta_{ca}\Gamma_{db} + \delta_{db}\Gamma_{ca}, \\ &[\Gamma_{aB}, \Gamma_{cd}] = -\delta_{ad}\Gamma_{cB} + \delta_{ac}\Gamma_{dB}, \quad [\Gamma_{Ab}, \Gamma_{45}] = \delta_{A5}\Gamma_{4b} - \delta_{A4}\Gamma_{5b}, \\ &[\Gamma_{aB}, \Gamma_{cD}] = \delta_{BD}\Gamma_{ac} - \delta_{ac}\Gamma_{BD}, \quad [\Gamma_{ab}, \Gamma_{45}] = 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Этот Г-базис связан с нашим другим базисом следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} &P_0 = \Gamma_{14} + \Gamma_{45}, && P_1 = \Gamma_{12} + \Gamma_{25}, && P_2 = \Gamma_{13} + \Gamma_{35}, \\ &K_0 = \Gamma_{14} - \Gamma_{45}, && K_1 = \Gamma_{12} - \Gamma_{25}, && K_2 = \Gamma_{13} - \Gamma_{35}, \\ &M_{12} = \Gamma_{23}, && M_{01} = \Gamma_{42}, && M_{02} = \Gamma_{43}, \quad D = \Gamma_{15}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Вычисляя экспоненты операторов симметрии, можно получить локальную группу Ли преобразований операторов симметрии уравнения (1.1). В частности, оператор импульса и оператор Лоренца порождают группу Пуанкаре операторов симметрии

$$\Psi(x) \to \Psi(x\Lambda + a), \qquad a = (a_0, a_1, a_2), \qquad \Lambda \in SO(1, 2), \tag{1.9}$$

оператор растяжений порождает подгруппу

$$\exp(\lambda D)\Psi(x) = \exp(-\lambda/2)\Psi[\exp(-\lambda)x], \tag{1.10}$$

а операторы K_α порождают специальные конформные преобразования

$$\begin{aligned} &\exp(a \cdot K)\Psi(x) = \\ &= [1 + 2x \cdot a + (a \cdot a)(x \cdot x)]^{-1/2}\Psi\left(\frac{x + a(x \cdot x)}{1 + 2x \cdot a + (a \cdot a)(x \cdot x)}\right). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Кроме того, мы рассмотрим операторы инверсии, отражения в пространстве и отражения во времени

$$\begin{aligned} &I\Psi(x) = [-x \cdot x]^{-1/2}\Psi(-x/(x \cdot x)), \quad S\Psi(x) = \Psi(x_0, -x_1, x_2), \\ &T\Psi(x) = \Psi(-x_0, x_1, x_2), \quad I = I^{-1}, \quad S = S^{-1}, \quad T = T^{-1}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

которые не порождаются локальными операторами симметрии. Из выражения для оператора инверсии I следует, что

$$IK_\alpha I^{-1} = -P_\alpha, \qquad IDI^{-1} = -D, \qquad IM_{\alpha\beta}I^{-1} = M_{\alpha\beta}. \tag{1.13}$$

Поступая так же, как мы это делали в разд. 3.6, рассматривая уравнения Лапласа, можно показать, что волновое уравнение принадлежит классу I. Более того, хотя пространство симметрических операторов второго порядка в обертывающей алгебре алгебры $so(3, 2)$ 35-мерно, на пространстве решений уравнения (1.1) имеется 20 линейно независимых соотношений между этими операторами. Например, мы имеем соотношения

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} && P_0^2 - P_1^2 - P_2^2 = K_0^2 - K_1^2 - K_2^2 = 0,\\
&\text{(ii)} && \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^2 + \Gamma_{23}^2 = {}^1/_4 + \Gamma_{45}^2,\\
&\text{(iii)} && M_{12}^2 - M_{01}^2 - M_{02}^2 = {}^1/_4 - D^2,\\
&\text{(iv)} && \Gamma_{45}^2 - \Gamma_{41}^2 - \Gamma_{51}^2 = {}^1/_4 + \Gamma_{23}^2,
\end{aligned} \tag{1.14}$$

справедливые при применении к решениям уравнения (1.1).

Известно [46, 66, 139], что, формально применяя преобразование Фурье в переменных x_α, решение $\Psi(x)$ уравнения (1.1) можно представить в виде

$$\Psi(x) = (4\pi)^{-1} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} [\exp(i\mathbf{k} \cdot x) f(\mathbf{k}) + \exp(i\tilde{k} \cdot x) \tilde{f}(\mathbf{k})]\, d\mu(\mathbf{k}), \tag{1.15}$$

где $\tilde{k} = (-k_0, k_1, k_2)$, $k_0 = (k_1^2 + k_2^2)^{1/2}$ и $d\mu(\mathbf{k}) = dk_1\, dk_2/k_0$. Пусть $\mathscr{H} = \mathscr{H}_+ \oplus \mathscr{H}_-$ — пространство всех упорядоченных пар комплекснозначных функций $F(\mathbf{k}) = \{f(\mathbf{k}), \tilde{f}(\mathbf{k})\}$, определенных в R^2 и таких, что

$$\iint (|f|^2 + |\tilde{f}|^2)\, d\mu(\mathbf{k}) < \infty$$

(интеграл берется в смысле Лебега). Рассмотрим индефинитное скалярное произведение в $\mathscr{H}$, заданное интегралом

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle = \iint (f\bar{g} - \tilde{f}\bar{\tilde{g}})\, d\mu(\mathbf{k}). \tag{1.16}$$

Тогда [46, 66] функции Ψ, Φ, связанные с функциями $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ соотношением (1.15), удовлетворяют тождеству

$$\langle \Psi, \Phi \rangle \equiv \langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle = 2i \iint\limits_{x_0 = t} (\Psi(x)\, \partial_0 \overline{\Phi}(x) - [\partial_0 \Psi(x)]\, \overline{\Phi}(x))\, dx_1\, dx_2, \tag{1.17}$$

не зависящему от t. (Чтобы быть более точными, тождество (1.17) можно получить из (1.16), если сначала рассмотреть плотное подпространство пространства $\mathscr{H}$, состоящее из C^∞ функций с компактным носителем, отграниченным от $(0, 0)$, а затем перейти к пределу. Для $\mathbf{F} \in \mathscr{H}$ соответствующая функция $\Psi(x)$ является слабым решением уравнения (1.1) в смысле теории обобщенных функций; функция может не быть дважды непрерывно дифференцируемой по каждой из переменных.)

Операторы (1.2)—(1.5), действуя на решения уравнения (1.1), индуцируют соответствующие операторы в $\mathscr{H}$, относительно которых подпространства $\mathscr{H}_+$ и $\mathscr{H}_-$ по отдельности инвариантны. В самом деле, повторным интегрированием по частям можно установить, что индуцированные операторы в подпространстве $\mathscr{H}_+$ имеют вид

$$\begin{gathered} P_0 = ik_0, \quad P_j = -ik_j, \quad j = 1,\ 2, \quad M_{12} = k_1\partial_2 - k_2\partial_1, \\ M_{01} = k_0\partial_1, \quad M_{02} = k_0\partial_2, \quad D = {}^1/_2 + k_1\partial_1 + k_2\partial_2, \\ K_0 = ik_0(\partial_{11} + \partial_{22}), \quad K_1 = i(k_1\partial_{11} - k_1\partial_{22} + 2k_2\partial_{12} + \partial_1), \\ K_2 = i(-k_2\partial_{11} + k_2\partial_{22} + 2k_1\partial_{12} + \partial_2). \end{gathered} \tag{1.18}$$

Индуцированные операторы в $\mathscr{H}_-$ имеют тот же вид (1.18), но только в каждом выражении k_0 заменен на $-k_0$. Более того, легко показать, что эти операторы являются косоэрмитовыми операторами на каждом из подпространств $\mathscr{H}_+$ и $\mathscr{H}_-$.

Индуцированные операторы S, T в $\mathscr{H}$ имеют вид

$$S\mathbf{F}(k_1,\ k_2) = \mathbf{F}(-k_1,\ k_2), \qquad T\mathbf{F}(\mathbf{k}) = (\tilde{\bar{f}}(\mathbf{k}),\ f(\mathbf{k})). \tag{1.19}$$

Таким образом, $\mathscr{H}_+$ и $\mathscr{H}_-$ инвариантны относительно оператора S, но под действием оператора T эти подпространства взаимозаменяются. Учитывая это свойство оператора T, мы будем в дальнейшем рассматривать только элементы гильбертова пространства $\mathscr{H}_+$, т. е. решения с положительной энергией

$$\Psi(x) = (4\pi)^{-1} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(ik \cdot x) f(\mathbf{k})\, d\mu(\mathbf{k}). \tag{1.20}$$

Скалярное произведение в $\mathscr{H}_+$ имеет вид

$$\langle f,\ g\rangle = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{k})\, \bar{g}(\mathbf{k})\, d\mu(\mathbf{k}) \tag{1.21}$$

и

$$\begin{aligned} \langle \Psi,\ \Phi\rangle \equiv \langle f,\ g\rangle = 4i \iint\limits_{x_0=t} \Psi(x)\, \partial_0 \bar{\Phi}(x)\, dx_1\, dx_2 = \\ = 4i \iint\limits_{x_0=t} \bar{\Phi}(x)\, \partial_0 \Psi(x)\, dx_1\, dx_2. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Далее, если Ψ задано формулой (1.20), мы имеем

$$f(\mathbf{k}) = k_0\pi^{-1} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \exp(-ik \cdot x)\, dx_1\, dx_2. \tag{1.23}$$

Используя методы работы [66], можно показать, что подпространство $\mathscr{H}_+$ инвариантно относительно оператора I и

$$If(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-1} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\left[(2l \cdot k)^{1/2}\right] f(\mathbf{l})\, d\mu(\mathbf{l}) \qquad f \in \mathscr{H}_+,\ I^2 = E, \quad (1.24)$$

где E — единичный оператор в $\mathscr{H}_+$. Ясно, что I допускает расширение до некоторого унитарного самосопряженного оператора в $\mathscr{H}_+$ с собственными значениями ± 1.

Если $\{\Psi_\alpha(x)\}$ — о. н. базис для подпространства $\mathscr{H}_+$, то (в смысле теории обобщенных функций)

$$\sum_\alpha \bar{\Psi}_\alpha(x)\,\Psi_\alpha(x') = \Delta_+(x - x') = (16\pi^2)^{-1} \iint \exp\left[ik \cdot (x' - x)\right] d\mu(\mathbf{k}), \quad (1.25)$$

где обобщенная функция Δ_+ имеет вид

$$\Delta_+(x) = \begin{cases} 2\pi i\,(t^2 - r^2)^{-1/2}, & t > r, \\ -2\pi i\,(t^2 - r^2)^{-1/2}, & t < -r, \quad r = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}, \\ 2\pi\,(r^2 - t^2)^{-1/2}, & -r < t < r, \quad t = x_0. \end{cases} \quad (1.26)$$

Обобщенная функция (1.26) вычисляется по аналогии с соответствующим выражением для четырехмерного пространства-времени [49]. Следовательно,

$$\Psi(x) = \langle \Psi,\ \Delta_+(x' - x)\rangle, \quad (1.27)$$

причем интегрирование выполняется по x'.

Известно, что если вычислить экспоненты представления алгебры $so(3, 2)$ в $\mathscr{H}_+$, индуцированного операторами (1.18), то мы получим глобальное неприводимое унитарное представление накрывающей группы $\widetilde{SO}(3, 2)$ — компоненты единицы группы $SO(3, 2)$ (см. [46]). Максимальной связной компактной подгруппой группы $\widetilde{SO}(3, 2)$ является группа $SO(3) \times SO(2)$, где группа $SO(3)$ порождается операторами Γ_{12}, Γ_{13}, Γ_{23}, а группа $SO(2)$ — оператором Γ_{45}. Определим явное действие этой подгруппы в $\mathscr{H}_+$, а также действие некоторых других подгрупп группы $\widetilde{SO}(3, 2)$, представляющих известный интерес.

Операторы M_{01}, M_{02}, M_{12} порождают некоторую подгруппу группы $\widetilde{SO}(3, 2)$, изоморфную группе $SO(2, 1)$ (см. разд. 4.3). Действие этой подгруппы в $\mathscr{H}_+$ определяется соотношениями вида

$$\begin{gathered} \exp(\theta M_{12})\, f(\mathbf{k}) = f(k_1 \cos\theta - k_2 \sin\theta,\ k_1 \sin\theta + k_2 \cos\theta), \\ \exp(aM_{01})\, f(\mathbf{k}) = f(k_1(a),\ k_2), \qquad (1.28) \\ k_1(a) = \left[e^a (k_1 + k_0)^2 - e^{-a} k_2^2\right]/2\,(k_1 + k_0), \qquad f \in \mathscr{H}_+. \end{gathered}$$

(Формулу для оператора M_{02} легко получить из формулы для M_{01}.)

Оператор P_α порождает подгруппу переносов группы $\widetilde{SO}(3,2)$:

$$\exp\left(\sum a_\alpha P_\alpha\right) f(\mathbf{k}) = \exp(ia \cdot k) f(\mathbf{k}). \tag{1.29}$$

Унитарные операторы вида $\exp\left(\sum a_\alpha K_\alpha\right)$ вычисляются не столь просто. В работе [59] показано, что

$$\exp(aK_0) f(\mathbf{s}) = -i(2\pi a)^{-1} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \exp[i(s_0 + l_0)/a] \times$$

$$\times \cos\{a^{-1}[2(s_0 l_0 + s_1 l_1 + s_2 l_2)]^{1/2}\} f(\mathbf{l})\, d\mu(\mathbf{l}), \tag{1.30}$$

$$\exp(aK_1) f(\mathbf{s}) \doteq (8\pi |a|)^{-1} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \exp[i(s_1 + l_1)/a] \times$$

$$\times \cos\left[\frac{s_1(l_2 + l_0) - l_1(s_2 + s_0)}{a(s_2 + s_0)^{1/2}(l_2 + l_0)^{1/2}}\right] f(\mathbf{l})\, d\mu(\mathbf{l}) \tag{1.31}$$

при $f \in \mathscr{H}_+$ и

$$\exp[a(K_0 + K_1)] f(\mathbf{s}) = [4\pi i a(s_0 - s_1)]^{-1/2} \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{-(s_2 - w)^2}{4ia(s_0 - s_1)}\right] f\left(\frac{w^2 - (s_0 - s_1)^2}{2(s_0 - s_1)},\ w\right) dw. \tag{1.32}$$

Оператор растяжений D порождает подгруппу

$$\exp(aD) f(\mathbf{k}) = \exp(a/2) f(e^a \mathbf{k}). \tag{1.33}$$

Теперь мы можем легко вычислить экспоненту компактного оператора $\Gamma_{45} = (P_0 - K_0)/2$. Действительно, операторы P_0, D и K_0 порождают подгруппу $SL(2, R)$ группы $\widetilde{SO}(3, 2)$. Используя формулы (1.17) гл. 2, легко показать, что

$$\exp(2\theta\Gamma_{45}) = \exp(\operatorname{tg}(\theta) P_0) \exp(-K_0 \sin\theta\cos\theta) \exp(-2D \ln\cos\theta).$$

Вычисляя правую часть этого соотношения, получаем

$$\exp(2\theta\Gamma_{45}) f(\mathbf{k}) = i(2\pi)^{-1} \csc(\theta) \iint \exp[-i(k_0 + l_0)\operatorname{ctg}\theta] \times$$

$$\times \cos\{\csc(\theta)[2(k_0 l_0 + k_1 l_1 + k_2 l_2)]^{1/2}\} f(\mathbf{l})\, d\mu(\mathbf{l}), \qquad \theta \neq n\pi. \tag{1.34}$$

Подобно этому, операторы P_1, D, K_1 порождают подгруппу $SL(2, R)$ группы $\widetilde{SO}(3,2)$, и мы можем доказать соотношение

$$\exp(2\theta\Gamma_{12}) = \exp(\operatorname{tg}(\theta) P_1) \exp(K_1 \sin\theta\cos\theta) \exp(-2D \ln\cos\theta),$$

$$2\Gamma_{12} = K_1 + P_1,$$

или

$$\exp(2\theta\Gamma_{12}) f(\mathbf{k}) = (8\pi |\sin\theta|)^{-1} \exp(ik_1 \operatorname{ctg}\theta) \times$$
$$\times \iint \exp(il_1 \operatorname{ctg}\theta) \cos\left[\frac{k_1(l_2+l_0) - l_1(k_2+k_0)}{\sin\theta\,(k_2+k_0)^{1/2}(l_2+l_0)^{1/2}}\right] f(\mathbf{l})\, d\mu(\mathbf{l}), \quad \theta \neq n\pi. \tag{1.35}$$

Операторы (1.35) совместно с операторами $\exp(\theta M_{12})$ (см. (1.28)) определяют действие подгруппы $SO(3)$.

Все известные системы координат, допускающие R-разделение переменных для уравнения (1.1), соответствуют двумерному (коммутирующему) подпространству пространства симметрических операторов второго порядка в обертывающей алгебре алгебры $so(3, 2)$. Если коммутирующие операторы образуют базис такого подпространства, то соответствующие решения с разделенными переменными уравнения (1.1) характеризуются уравнениями на собственные значения

$$S_j\Psi = \lambda_j\Psi, \qquad j = 1,\ 2$$

(см. [59—61]). Системы координат считаются эквивалентными, если они отображаются друг в друга преобразованиями, порождаемыми операторами группы $\widetilde{SO}(3, 2)$ и S, T и I. Если система координат, допускающая разделение переменных, соответствует подпространству с базисом $S_j = L_j^2$, $j = 1,\ 2$, таким, что $[L_1, L_2] = 0$ и $L_j \in so(3, 2)$, мы называем такую систему *расщепляющейся*. В этом случае можно диагонализировать операторы первого порядка L_j. Такие системы наиболее изучены и просты в обращении. В более общем случае, когда система координат соответствует подпространству с базисом S_1, S_2, таким, что $S_1 = L^2$, $L \in so(3, 2)$, мы говорим о *полурасщепляющейся* системе. В этом случае можно диагонализировать оператор первого порядка L. Если нет базиса S_1, S_2, такого, что оператор S_1 является квадратом некоторого $L \in so(3, 2)$, то мы называем соответствующую систему *нерасщепляющейся*. Из всех систем координат, допускающих разделение переменных, нерасщепляющиеся системы являются наиболее сложными и реже всего используются в приложениях.

Детальное (но не исчерпывающее) исследование решений с R-разделенными переменными уравнения (1.1) проведено в работах [59—61]. В настоящей книге мы удовлетворимся рассмотрением некоторых наиболее важных полурасщепляющихся систем. Заданный оператор $L \in so(3, 2)$ может соответствовать нескольким полурасщепляющимся системам (либо ни одной такой системе). Действительно, если Ψ удовлетворяет уравнению (1.1) и $L\Psi = i\lambda\Psi$, то, поскольку L — оператор симметрии уравнения (1.1), можно ввести новые переменные y_0, y_1, y_2, такие, что $L = \partial_{y_0} + f(y)$ (где функция f может быть тождественно равна нулю) и $\Psi(y) = r(y)\exp(i\lambda y_0)\Phi_\lambda(y_1, y_2)$, где r — заданная функция, удовлетворяющая уравнению $\partial_{y_0} r + fr = 0$. Тогда уравнение (1.1) сводится к дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка для функции Φ_λ от двух переменных y_1, y_2. Каждая полурасщепляющаяся система, рассматриваемая нами, соответствует системам, допускающим разделение переменных для полученного дифференциального уравнения. В частности, $S_1 = L^2$, а S_2 соответствует оператору симметрии второго порядка полученного уравнения.

В следующих разделах мы рассмотрим различные формы оператора L, которые приводят к полурасщепляющимся системам.

4.2. Оператор Лапласа на сфере

Прежде всего исследуем системы, соответствующие диагонализации оператора Γ_{45} (см. (1.8)). Ограничим наше унитарное неприводимое представление группы $\widetilde{SO}(3,2)$ в $\mathcal{H}_+$ на компактную подгруппу $SO(3)$; тогда это представление разбивается в прямую сумму неприводимых представлений D_l группы $SO(3)$, причем $\dim D_l = 2l + 1$. Определим соответствующий базис для $\mathcal{H}_+$, в котором происходит это разбиение. Таким базисом является базис собственных функций коммутирующих операторов Γ_{45} и $\Gamma_{23} = M_{12}$:

$$\Gamma_{45} f = i\lambda f, \quad \Gamma_{23} f = imf, \quad -i\Gamma_{45} = (k_0/2)(-\partial_{11} - \partial_{22} + 1). \tag{2.1}$$

При $k_1 = k\cos\theta$, $k_2 = k\sin\theta$, $k_0 = k$ легко показать, что о. н. базис собственных векторов имеет вид

$$f_m^{(l)}(\mathbf{k}) = [(l-m)!/\pi(l+m)!]^{1/2}(2k)^m e^{-k} L_{l-m}^{(2m)}(2k)\, e^{im\theta}, \tag{2.2}$$
$$\lambda = l + {}^1\!/_2, \quad l = 0, 1, \ldots, \quad m = l, l-1, \ldots, -l.$$

Из этого результата и (1.14ii) видно, что множество $\{f_m^{(l)}\}$ при фиксированном l образует о. н. базис для представления D_l группы $SO(3)$. Кроме того, ограничение нашего представления группы $\widetilde{SO}(3,2)$ на группу $SO(3)$ можно представить следующим образом: $SO(3) = \sum_{l=0}^{\infty} \oplus D_l$. Из известных рекуррентных формул для многочленов Лагерра вытекают соотношения

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Gamma}_{15} f_m^{(l)} = {}^1/_2 \, [(l-m+1)(l+m+1)]^{1/2} f_m^{(l+1)} - {}& \\
- {}^1/_2 \, [(l-m)(l+m)]^{1/2} f_m^{(l-1)}&, \\
\mathbf{\Gamma}_{42} f_m^{(l)} = - {}^1/_4 \, [(l+m+2)(l+m+1)]^{1/2} f_{m+1}^{(l+1)} + {}& \\
+ {}^1/_4 \, [(l-m)(l-m-1)]^{1/2} f_{m+1}^{(l-1)} + {}& \\
+ {}^1/_4 \, [(l+m)(l+m-1)]^{1/2} f_{m-1}^{(l-1)} - {}& \\
- {}^1/_4 \, [l-m+1)(l-m+2)]^{1/2} f_{m-1}^{(l+1)}&. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Использовав (2.1), (2.3) и взяв коммутаторы, можно определить действие оператора $\Gamma_{\alpha\beta}$ на этот базис.

Следует указать на тесную связь между уравнением на собственные значения $\Gamma_{45} f = i\lambda f$ и квантовой задачей Кеплера в двумерном пространстве

$$\begin{aligned}
&Hg = \mu g, \qquad H = -\partial_{xx} - \partial_{yy} + e/r, \\
&r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \qquad \iint\limits_{R^2} |g|^2 dx\, dy < \infty.
\end{aligned} \qquad (2.4)$$

Эти две задачи на собственные значения можно идентифицировать в предположении, что $k_1 = x(-\mu)^{1/2}$, $k_2 = y(-\mu)^{1/2}$, $\mu = -e^2/4\lambda^2$. Данные задачи на собственные значения определены на гильбертовых пространствах с различными скалярными произведениями, но из теоремы о вириале [47] следует, что если собственное значение энергии μ принадлежит дискретному спектру оператора H, а g — соответствующий собственный вектор, то g также имеет конечную норму в $\mathscr{H}_+$. Обратно, если f — собственная функция оператора Γ_{45}, то $\iint |f|^2 dx\, dy < \infty$, а f соответствует собственному значению энергии μ, принадлежащему дискретному спектру оператора H. Поскольку собственные значения λ оператора Γ_{45} определяются соотношением $\lambda = l + {}^1/_2$, $l = 0, 1, \ldots$, отсюда следует, что собственные значения дискретного спектра оператора H имеют вид $\mu_l = -e^2/4(l + {}^1/_2)^2$. Это вполне удовлетворительное объяснение строения дискретного спектра оператора H не проливает свет на строение непрерывного спектра оператора H, поскольку оператор Γ_{45} имеет только дискретный спектр.

Используя отображение (1.20), можно вычислить соответствующий о. н. базис решений с положительной энергией уравнения (1.1):

$$\Psi_m^{(l)}(x)=\left[\frac{(l-m)!}{4\pi\,(l+m)!}\right]^{1/2}\exp\left[im\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right]\times$$
$$\times\int_0^\infty \exp\,[(ix_0-1)\,k]\,(2k)^m\,J_m(kr)\,L_{l-m}^{(2m)}(2k)\,dk, \tag{2.5}$$
$$x_1=r\cos\alpha,\quad x_2=r\sin\alpha.$$

В координатах

$$x_0=\sin\psi/(\cos\sigma-\cos\psi),\qquad x_1=\sin\sigma\cos\alpha/(\cos\sigma-\cos\psi),$$
$$x_2=\sin\sigma\sin\alpha/(\cos\sigma-\cos\psi) \tag{2.6}$$

переменные в уравнении (1.1) R-разделяются и формула (2.5) дает

$$\Psi_m^{(l)}(x)=(-i)^{m-1}\,[(\cos\sigma-\cos\psi)/(4l+2)]^{1/2}\times$$
$$\times\exp\,[-i\psi\,(l+{}^1\!/_2)]\,Y_l^m(\sigma,\,\alpha), \tag{2.7}$$

где Y_l^m — сферическая гармоника. (Параметры всегда можно выбрать таким образом, чтобы $\cos\sigma-\cos\psi>0$; см. [62].) Действительно, на пространстве решений уравнения (1.1) мы имеем

$$\Gamma_{45}=-\partial_\psi+\frac{\sin\psi}{2\,(\cos\sigma-\cos\psi)},\qquad \Gamma_{23}=\partial_\alpha, \tag{2.8}$$

и поэтому

$$\Psi_m^{(l)}=(\cos\sigma-\cos\psi)^{1/2}\exp\,[-i\psi\,(l+{}^1\!/_2)]\exp\,(im\alpha)\,g\,(\sigma).$$

Подставляя последнее выражение в (1.1), мы находим, что переменные R-разделяются и $g(\sigma)$ является линейной комбинацией функций $P_l^m(\cos\sigma)$, $Q_l^m(\cos\sigma)$. Вычисляя интеграл (2.5) для частных значений параметра (например, для $\sigma=0,\pi$), мы получаем формулу (2.7).

Имеется другая модель нашего неприводимого представления накрывающей группы $\widetilde{SO}(3,2)$, для которой собственные функции операторов Γ_{45} и Γ_{23} принимают исключительно простой вид. Пространство представлений является гильбертовым пространством Баргманна — Сегала $\mathscr{F}_2$, состоящим из всех целых функций $h(z_1,\,z_2)$, таких, что [12]

$$\int_{\mathbf{C}\times\mathbf{C}}|\,h\,|^2\,d\xi(\mathbf{z})<\infty,$$
$$d\xi(\mathbf{z})=\pi^{-2}\exp\,[-(|\,z_1\,|^2+|\,z_2\,|^2)]\,dx_1\,dx_2\,dy_1\,dy_2,\ z_j=x_j+iy_j. \tag{2.9}$$

Скалярное произведение имеет вид

$$\langle f,\,h\rangle=\int_{\mathbf{C}\times\mathbf{C}}f\bar{h}\,d\xi(\mathbf{z}).$$

Пространство нашего представления не совпадает с $\mathscr{F}_2$, но является подпространством $\mathscr{F}_2^+$, состоящим из всех функций $h \in \mathscr{F}_2$, таких, что $h(-z_1, -z_2) = h(z_1, z_2)$. Функции

$$f_m^{(l)}(z) = z_1^{l+m} z_2^{l-m} / [(l+m)!\,(l-m)!]^{1/2}, \qquad l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\quad m = l,\ \ldots,\ -l, \tag{2.10}$$

образуют о. н. базис для $\mathscr{F}_2^+$. Полагая

$$\Gamma_{45} = \frac{i}{2}(z_1\partial_{z_1} + z_2\partial_{z_2} + 1), \quad \Gamma_{15} = \frac{1}{2}(z_1z_2 - \partial_{z_1z_2}), \quad \Gamma_{23} = \frac{i}{2}(z_1\partial_{z_1} - z_2\partial_{z_2}), \quad \Gamma_{42} = \frac{1}{4}(\partial_{z_1z_1} + \partial_{z_2z_2} - z_1^2 - z_2^2) \tag{2.11}$$

и сравнивая эти выражения с (2.3), можно видеть, что имеется новая модель нашего представления группы $\widetilde{SO}(3, 2)$, в которой функции $f_m^{(l)}(\mathbf{k})$ можно отождествить с функциями (2.10). Явное унитарное отображение U из $\mathscr{H}^+$ в $\mathscr{F}_2^+$, коммутирующее с групповым действием, имеет вид

$$Uf(\mathbf{z}) = \iint\limits_{R^2} U(\mathbf{k}, \mathbf{z}) f(\mathbf{k})\, d\mu(\mathbf{k}), \qquad f \in \mathscr{H}^+, \tag{2.12}$$

где

$$U(\mathbf{k}, \mathbf{z}) = \sum_{l, m} \bar{f}_m^{(l)}(\mathbf{k}) f_m^{(l)}(\mathbf{z}) = \pi^{-1/2} \exp(-k + z_1z_2) \times \times \operatorname{ch}\{\sqrt{2k}\,[z_1 \exp(i\theta/2) - z_2 \exp(i\theta/2)]\}, \quad k_1 = k\cos\theta, \quad k_2 = k\sin\theta. \tag{2.13}$$

(Заметим, что $f_m^{(l)}(\mathbf{k}) \in \mathscr{H}^+$ и $f_m^{(l)}(\mathbf{z}) \in \mathscr{F}_2^+$.)

Для того чтобы понять, какую роль играют координаты (2.6), следует заметить, что если Ψ — решение уравнения (1.1), такое, что $\Gamma_{45}\Psi = i(l + {}^1\!/_2)\Psi$, то $\Psi(\sigma, \alpha, \psi) = (\cos\alpha - \cos\psi)^{1/2} \exp[-i\psi(l + {}^1\!/_2)]\Phi(\sigma, \alpha)$, где Φ — собственная функция оператора Лапласа на сфере (см. уравнение (2.20) разд. 3.2 при $\sigma = \theta$, $\alpha = \varphi$). Как мы видели в разд. 3.3, уравнение (2.20) допускает решения с разделенными переменными в двух системах координат. Для первой системы (сферические координаты $\{\sigma, \alpha\}$) мы имеем решения уравнения (1.1) с R-разделенными переменными вида (2.7), которые диагонализируют операторы

1. Γ_{45}^2, Γ_{23}^2.

Однако имеется также система типа Ламе, которая приводит к решениям уравнения (1.1) с R-разделенными переменными, диагонализирующими операторы

$$2.\quad \Gamma_{45}^2,\quad \Gamma_{12}^2+a^2\Gamma_{13}^2,\qquad a>0.$$

Матричные элементы для этих базисов уже были вычислены нами в разд. 3.3.

4.3. Диагонализация операторов P_0, P_2 и D

Теперь найдем системы координат, допускающие разделение переменных уравнения (1.1), такие, чтобы соответствующие базисные функции Ψ были собственными функциями оператора P_0: $P_0\Psi = i\omega\Psi$. Для таких систем мы имеем $\Psi(x) = \exp(i\omega x_0)\Phi(x_1, x_2)$, где

$$(\partial_{11}+\partial_{22}+\omega^2)\Phi = 0. \tag{3.1}$$

Таким образом, уравнение для определения собственных функций сводится к уравнению Гельмгольца. Теперь P_0 коммутирует с каждым элементом в евклидовой алгебре Ли $\mathscr{E}(2)$, порождаемой операторами P_1, P_2, M_{12}; но, как известно из гл. 1, $\mathscr{E}(2)$ является алгеброй симметрии уравнения (3.1). Кроме того, уравнение (3.1) допускает решения с разделенными переменными в четырех системах координат, причем каждая из этих систем соответствует оператору симметрии второго порядка, являющемуся элементом обертывающей алгебры алгебры $\mathscr{E}(2)$; см. табл. 1. Четыре системы координат, допускающие разделение переменных для уравнения (1.1), характеризуются диагонализацией операторов, представленных в табл. 18.

Условие $P_0 f = i\omega f$ в $\mathscr{H}_+$ влечет равенство $f(\mathbf{k}) = \delta(k-\omega)g_\omega(\theta)$, где $\omega > 0$, $k_1 = k\cos\theta$, $k_2 = k\sin\theta$. Для того чтобы найти функции g_ω, достаточно рассмотреть гильбертово пространство $L_2(S_2)$, действие группы $E(2)$ в котором описывается при помощи операторов

$$P_1 = -i\omega\cos\theta,\qquad P_2 = -i\omega\sin\theta,\qquad M_{12} = \partial_\theta.$$

Эти операторы определяют унитарное неприводимое представление группы $E(2)$ в $L_2(S_2)$. Как только собственные функции

Таблица 18

3	P_0^2, P_1^2	Декартовы
4	P_0^2, M_{12}^2	Полярные
5	P_0^2, $\{M_{12}, P_2\}$	Параболического цилиндра
6	P_0^2, $M_{12}^2+d^2P_2^2$	Эллиптические

$g_{\omega\mu}(\theta)$ второго оператора в строках 3—6 табл. 18 будут определены, соответствующие решения $\Psi_{\omega\mu}$ с разделенными переменными уравнения (1.1) можно найти из соотношения

$$\Psi_{\omega\mu}(x) = (4\pi)^{-1} \exp(i\omega x_0) \int_{-\pi}^{\pi} \exp[-i\omega(x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta)]\, g_{\omega\mu}(\theta)\, d\theta. \tag{3.2}$$

Заметим, что эта модель фактически тождественна круговой модели, изученной нами в гл. 1. Следовательно, вычисленные в гл. 1 спектральные разложения и м. э. с. б. можно использовать для волнового уравнения.

Теперь найдем системы координат, допускающие разделение переменных в уравнении (1.1) и такие, что базисные функции Ψ являются собственными функциями оператора P_2: $P_2\Psi = -i\omega\Psi$. Для таких систем $\Psi(x) = \exp(-i\omega x_2)\Phi(x_0, x_1)$, причем

$$(\partial_{00} - \partial_{11} + \omega^2)\Phi = 0. \tag{3.3}$$

Оператор P_2 коммутирует с подалгеброй $\mathscr{E}(1, 1)$, порождаемой операторами P_0, P_1, M_{01}, а $\mathscr{E}(1, 1)$ является алгеброй симметрии уравнения (3.3). Это уравнение имеет решения с разделенными переменными в десяти системах координат, которым соответствуют десять операторов симметрии второго порядка в обертывающей алгебре алгебры $\mathscr{E}(1, 1)$; см. табл. 2. В табл. 19 перечисляются пары коммутирующих операторов, отвечающих соответствующим решениям с разделенными переменными уравнения (1.1). Случай 3′ эквивалентен случаю 3 табл. 18.

Условие $P_2 f = -i\omega f$ в $\mathscr{H}_+$ влечет соотношение $f(\mathbf{k}) = \delta(k_2 - \omega) g_\omega(\zeta)$, где $-\infty < \omega < \infty$, $k_1 = |k_2| \operatorname{sh} \zeta$, $k_0 = |k_2| \operatorname{ch} \zeta$. Задача определения собственных функций сводится к рассмотрению гильбертова пространства $L_2(R)$, в котором действие группы $E(1, 1)$ задается операторами

$$P_0 = i|\omega|\operatorname{ch}\xi, \quad P_1 = -i|\omega|\operatorname{sh}\xi, \quad M_{01} = \partial_\xi. \tag{3.4}$$

Эти операторы определяют унитарное неприводимое представление группы $E(1, 1)$ в $L_2(R)$. Коль скоро собственные функции $g_{\omega\mu}(\xi)$ второго оператора в строках 7—15 табл. 19 определены,

Таблица 19

3′	P_2^2, P_0, P_1	11	$P_2^2, M_{01}^2 - P_0P_1$
7	P_2^2, M_{01}^2	12	$P_2^2, M_{01}^2 + (P_0 + P_1)^2$
8	$P_2^2, \{M_{01}, P_1\}$	13	$P_2^2, M_{01}^2 - (P_0 + P_1)^2$
9	$P_2^2, \{M_{01}, P_0\}$	14	$P_2^2, M_{01}^2 + P_1^2$
10	$P_2^2, \{M_{01}, P_0 - P_1\} + (P_0 + P_1)^2$	15	$P_2^2, M_{01}^2 - P_1^2$

соответствующие решения $\Psi_{\omega\mu}$ с разделенными переменными уравнения (1.1) можно получить, используя формулу

$$\Psi_{\omega\mu}(x) = (4\pi)^{-1}\exp(-i\omega x_2)\int_{-\infty}^{\infty}\exp[i|\omega|(x_0\operatorname{ch}\xi - x_1\operatorname{sh}\xi)]\,g_{\omega\mu}(\xi)\,d\xi. \tag{3.5}$$

Данная модель идентична $L_2(R)$-модели гл. 1, и поэтому вычисленные там спектральные разложения и м. э. с. б. можно использовать и для волнового уравнения.

Определим системы координат, допускающие разделение переменных уравнения (1.1) и такие, что базисные функции Ψ являются собственными функциями оператора D: $D\Psi = -i\nu\Psi$. В этом случае мы имеем $\Psi(x) = \rho^{i\nu-1/2}\Phi(s)$, где

$$x_a = \rho s_a \qquad (\rho \geqslant 0), \qquad s_0^2 - s_1^2 - s_2^2 = \varepsilon,$$

а ε равно или ± 1, или 0 в зависимости от того, какое из соотношений $x \cdot x > 0$, $x \cdot x < 0$ или $x \cdot x = 0$ имеет место. Из (1.14iii) следует, что

$$\left(M_{12}^2 - M_{01}^2 - M_{02}^2\right)\Phi(s) = (\nu^2 + {}^1/_4)\,\Phi(s). \tag{3.6}$$

Операторы $M_{\alpha\beta}$ (см. (1.3)) удовлетворяют соотношениям коммутирования

$$[M_{12}, M_{01}] = -M_{02}, \quad [M_{12}, M_{02}] = M_{01}, \quad [M_{01}, M_{02}] = M_{12}; \tag{3.7}$$

следовательно, они образуют базис подалгебры $sl(2, R) \cong so(2, 1)$ (см. разд. 2.1). Теперь оператор D коммутирует с этой подалгеброй, а $SO(2, 1)$ является группой симметрии уравнения (3.6). Оператор Казимира $M_{12}^2 - M_{01}^2 - M_{02}^2$ коммутирует со всеми элементами алгебры $so(2, 1)$. Как показано в работе [38], пространство операторов симметрии второго порядка в обертывающей алгебре алгебры $so(2, 1)$ по модулю оператора Казимира разбивается сопряженным действием группы $SO(2, 1)$ на девять типов орбит. (Группы $SO(2, 1)$ и $SL(2, R)$ локально изоморфны.) Более того, приведенное уравнение (3.6) допускает решения с разделенными переменными в девяти системах координат, причем каждая из этих систем соответствует единственной орбите оператора. Системы координат для $\varepsilon = 1$ можно найти в [57, 107], причем для $\varepsilon = 1$ уравнение (3.6) является уравнением на собственные значения *для оператора Лапласа на гиперболоиде.* Системы координат для $\varepsilon = \pm 1$, 0 приведены в работе [60]. Поскольку в вышеуказанных работах проводится подробный анализ систем координат для перечисленных случаев, мы здесь указываем (табл. 20) только функциональные формы решений с разделенными переменными уравнения (3.6), названия систем координат и пары коммутирующих операторов,

Таблица 20

	Операторы	Координаты	Функции от разделенных переменных
16	D^2, M_{12}^2	Сферические	Экспоненциальная Присоединенная Лежандра
17	D^2, M_{01}^2	Эквидистантные	Экспоненциальная Присоединенная Лежандра
7′	$D^2, (M_{12}-M_{02})^2$	Гороциклические	Экспоненциальная Макдональда
18	$D^2, M_{12}^2+a^2M_{01}^2$	Эллиптические	Периодическая Ламе Периодическая Ламе
19	$D^2, M_{01}^2-a^2M_{12}^2$ $0<a<1$	Гиперболические	Ламе — Вангерина Ламе — Вангерина
20	$D^2, aM_{01}^2-\{M_{12}, M_{02}\}$, $0<a$	Полугиперболические	Ламе — Вангерина Ламе — Вангерина
21	$D^2, aM_{01}^2+M_{02}^2+M_{12}^2-$ $-\{M_{12}, M_{02}\}$, $0<a$	Эллиптико-параболические	Присоединенная Лежандра Присоединенная Лежандра
22	$D^2, -aM_{01}^2+M_{02}^2+$ $+M_{12}^2-\{M_{12}, M_{02}\}$, $0<a$	Гиперболико-параболические	Присоединенная Лежандра Присоединенная Лежандра
23	$D^2, \{M_{01}, M_{02}\}-$ $-\{M_{12}, M_{01}\}$	Полукруговые параболические	Бесселя Макдональда

связанных с соответствующими решениями с разделенными переменными уравнения (1.1). Система 7′ эквивалентна системе 7.

Условие $Df=-i\nu f$ в $\mathscr{H}_+$ влечет соотношение $f(\mathbf{k})=$ $=k^{-i\nu-1/2}h_\nu(\theta)$, где $-\infty<\nu<\infty$, $k_1=k\cos\theta$, $k_2=k\sin\theta$. Таким образом, задача определения собственных функций сводится к рассмотрению гильбертова пространства, в котором действие группы $SO(2, 1)$ задается операторами

$$\begin{gathered} M_{12}=\partial_\theta, \quad M_{01}=-\sin\theta\partial_\theta-(i\nu+{}^1/_2)\cos\theta, \\ M_{02}=\cos\theta\partial_\theta-(i\nu+{}^1/_2)\sin\theta. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Эти операторы определяют унитарное неприводимое однозначное представление группы $SO(2, 1)$, принадлежащее основной серии: $l=-{}^1/_2+i|\nu|$ (см. [11, 120]). Коль скоро собственные функции $h_{\nu\alpha}(\theta)$ второго оператора в строках 16—23 табл. 20

определены, соответствующие решения $\Psi_{\nu\alpha}$ с разделенными переменными уравнения (1.1) можно получить, используя формулу

$$\Psi_{\nu\alpha}(x)=\rho^{i\nu-1/2}(4\pi)^{-1}\Gamma(^1/_2-i\nu)\int_0^{2\pi}\exp[\pm i\pi(^1/_2-i\nu)/2]\times$$
$$\times|s_0-s_1\cos\theta-s_2\sin\theta|^{i\nu-1/2}h_{\nu\alpha}(\theta)\,d\theta, \qquad (3.9)$$

где имеет место знак $+$, когда $s_0-s_1\cos\theta-s_2\sin\theta>0$, и знак $-$, когда это выражение <0. Спектральные разложения операторов 16—23 и различные м. э. с. б., вычисленные в $L_2(S_2)$-модели, можно найти в [57]. (Вычисление матричных элементов смешанных базисов, соответствующих системам координат, которые отвечают различным подгруппам, см. в [53].)

4.4. Уравнение Шредингера и уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу

Особый интерес представляют системы координат, допускающие разделение переменных в уравнении (1.1) и такие, что базисные функции Ψ являются собственными функциями оператора P_0+P_1: $(P_0+P_1)\Psi=i\beta\Psi$. В этом случае мы имеем $\Psi(x)=e^{is\beta}\Phi(t,x_2)$, где $2s=x_0+x_1$, $2t=x_1-x_0$. Приведенное уравнение для Φ является уравнением Шредингера для свободной частицы

$$(i\beta\partial_t+\partial_{x_2x_2})\Phi(t,x_2)=0. \qquad (4.1)$$

Это уравнение имеет операторы симметрии

$$\mathcal{K}_{-1}=P_2,\quad \mathcal{K}_{-2}=P_1-P_0,\quad \mathcal{K}_0=P_0+P_1,\quad \mathcal{K}_1={}^1/_2(M_{02}-M_{12}),$$
$$\mathcal{K}^0=-D-M_{01},\quad \mathcal{K}_2={}^1/_2(K_0+K_1), \qquad (4.2)$$

коммутирующие с $P_0+P_1=\mathcal{K}_0$. Как было показано в разд. 2.1, эти операторы образуют базис для шестимерной алгебры Шредингера $\mathcal{G}_2$ — алгебры симметрии уравнения (4.1). (Заметим, что перенормировкой t и x_2 константу β в уравнении (4.1) можно сделать равной 1.) Пары коммутирующих операторов, соответствующие системам координат, которые допускают решения с разделенными переменными уравнения (4.1), перечислены в табл. 21. (Координаты 3″ эквивалентны координатам 3 табл. 18.) Эти результаты следуют из табл. 6. Заметим, что в этом случае определяющие операторы в обертывающей алгебре имеют первый, а не второй порядок. Это объясняется тем, что в уравнениях с разделенными переменными данные операторы имеют первый порядок. Все перечисленные ранее системы координат полуподгрупп были ортогональны относительно метрики Минковского,

Таблица 21

3″	$P_0 + P_1,\ P_2$	Свободная частица
24	$P_0 + P_1,\ P_0 - P_1 - {}^1/_4 K_0 - {}^1/_4 K_1$	Гармонический осциллятор
25	$P_0 + P_1,\ P_0 - P_1 + aM_{12} - aM_{02},$ $a \neq 0$	Линейный потенциал
26	$P_0 + P_1,\ D + M_{01}$	Репульсивный осциллятор

однако четыре системы координат, перечисленные в табл. 21, неортогональны.

Условие $(P_0 + P_1)f = i\beta f$ в $\mathcal{H}_+$ влечет $f(\mathbf{k}) = u\delta(u - \beta)l_\beta(v)$, где $\beta > 0$, $u = k_0 - k_1$, $v = k_2$. Таким образом, вычисление функции l_β сводится к рассмотрению гильбертова пространства $L_2(R)$, в котором действие группы Шредингера задается операторами

$$\begin{gathered}\mathcal{K}_0 = i\beta, \quad \mathcal{K}_{-1} = -iv, \quad \mathcal{K}_1 = (\beta/2)\,\partial_v, \quad \mathcal{K}^0 = -{}^1/_2 - v\partial_v, \\ \mathcal{K}_{-2} = -iv^2/\beta, \quad \mathcal{K}_2 = -i(\beta/2)\,\partial_{vv}.\end{gathered} \tag{4.3}$$

Как показано в разд. 2.1, эти операторы определяют неприводимое унитарное представление группы Шредингера в $L_2(R)$. (Действительно, при $\beta = 1$, применяя преобразование Фурье, можно показать, что операторы (1.24) (см. разд. 2.1) унитарно эквивалентны операторам, рассматриваемым в настоящем разделе, а при $\beta \neq 1$ результаты, полученные нами ранее, можно модифицировать, с тем чтобы получить глобальное групповое действие.) Как только собственные функции $l_{\beta\mu}(v)$ вторых операторов в строках 3″, 24—26 табл. 21 будут определены, соответствующие решения $\Psi_{\beta\mu}$ с разделенными переменными уравнения (1.1) можно получить из формулы

$$\Psi_{\beta\mu}(x) = (4\pi)^{-1}\exp(i\beta s)\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-i(v^2 t/\beta + vx_2)]\,l_{\beta\mu}(v)\,dv. \tag{4.4}$$

Теперь определим системы координат, допускающие разделение переменных для уравнения (1.1) и такие, что базисные функции Ψ являются собственными функциями оператора M_{12}: $M_{12}\Psi = im\Psi$. Имеется соотношение $\Psi(x) = e^{im\varphi}\Phi(x_0, r)$, где $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, а функция Φ удовлетворяет уравнению Эйлера — Пуассона — Дарбу[1])

$$(\partial_{00} - \partial_{rr} - r^{-1}\partial_r + m^2 r^{-2})\,\Phi = 0, \tag{4.5}$$

---

[1]) В дальнейшем будем называть это уравнение уравнением ЭПД. — *Прим. перев.*

или, как следует из (1.14iv),

$$(\Gamma^2_{45} - \Gamma^2_{41} - \Gamma^2_{51})\Phi = (\Gamma^2_{23} + {}^1/_4)\Phi = -(m + {}^1/_2)(m - {}^1/_2)\Phi. \qquad (4.6)$$

Алгеброй симметрии уравнения (4.5) является алгебра $sl(2, R)$, порождаемая операторами Γ_{45}, Γ_{41}, Γ_{51}, а группой симметрии этого уравнения является (если m целое число) группа $SL(2, R)$:

$$[\Gamma_{41}, \Gamma_{51}] = -\Gamma_{45}, \quad [\Gamma_{41}, \Gamma_{45}] = -\Gamma_{51}, \quad [\Gamma_{51}, \Gamma_{45}] = \Gamma_{41}. \qquad (4.7)$$

В работе [62] показано, что переменные в уравнении ЭПД R-разделяются в точности для девяти систем координат, соответствующих девяти типам $SL(2, R)$-орбит операторов симметрии второго порядка в обертывающей алгебре алгебры $sl(2, R)$ по модулю оператора Казимира $\Gamma^2_{45} - \Gamma^2_{41} - \Gamma^2_{51}$. В табл. 22 приведены только операторы, отвечающие решениям с R-разделенными переменными уравнения (1.1), а также соответствующие решения с R-разделенными переменными уравнения (4.5). (При этом операторы связаны следующими соотношениями: $\Gamma_{23} = M_{12}$, $\Gamma_{51} = D$, $\Gamma_{45} = (P_0 - K_0)/2$, $K_{41} = (P_0 + K_0)/2$.) Системы координат, допускающие истинное R-разделение переменных, отвечают строкам 1′ и 29—31 этой таблицы.

Таблица 22

	Операторы	Функции с разделенными переменными
1′	$\Gamma^2_{23}, \Gamma^2_{45}$	Экспоненциальная Гегенбауэра
4′	$\Gamma^2_{23}, (\Gamma_{45} + \Gamma_{41})^2$	Экспоненциальная Бесселя
16′	$\Gamma^2_{23}, \Gamma^2_{51}$	Экспоненциальная Присоединенная Лежандра
27	$\Gamma^2_{23}, 2\Gamma^2_{41} + \{\Gamma_{45}, \Gamma_{41}\}$	Присоединенная Лежандра Присоединенная Лежандра
28	$\Gamma^2_{23}, 2\Gamma^2_{45} + \{\Gamma_{45}, \Gamma_{41}\}$	Присоединенная Лежандра Присоединенная Лежандра
29	$\Gamma^2_{23}, \Gamma^2_{41} + a\{\Gamma_{45}, \Gamma_{51}\}$	Ламе — Вангерина Ламе — Вангерина
30	$\Gamma^2_{23}, \Gamma^2_{45} + a\Gamma^2_{51}$, $a > 0$	Ламе — Вангерина Ламе — Вангерина
31	$\Gamma^2_{23}, a\Gamma^2_{41} + \Gamma^2_{51}$ $a > 1$	Ламе — Вангерина Ламе — Вангерина
32	$\Gamma^2_{23}, \{\Gamma_{51}, \Gamma_{41} + \Gamma_{45}\}$	Бесселя Бесселя

Условие $M_{12}f = imf$ в $\mathscr{H}_+$ влечет $f(\mathbf{k}) = e^{im\theta}j_m(k)$, где $m = 0, \pm 1, \ldots$, $k_1 = k\cos\theta$, $k_2 = k\sin\theta$. Задача определения собственных функций сводится к рассмотрению гильбертова пространства $L_2[0, \infty]$, в котором действие группы $SL(2, R)$ определяется операторами

$$\begin{aligned} &\Gamma_{45} = (ik/2)\left(-\partial_{kk} - k^{-1}\partial_k + m^2k^{-2} + 1\right), \\ &\Gamma_{41} = (ik/2)\left(\partial_{kk} + k^{-1}\partial_k - m^2k^{-2} + 1\right), \quad \Gamma_{51} = k\partial_k + {}^1/_2. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Это действие неприводимо и унитарно эквивалентно однозначному представлению группы $SL(2, R)$, но не $SO(2, 1)$ из отрицательной дискретной серии $D^-_{|m|-1/2}$, что можно видеть из (4.6) и (2.2). (Сравните с разд. 2.3.) Действительно, собственные значения оператора Γ_{45} в этой модели имеют вид $i(n + {}^1/_2)$, $n = |m|, |m| + 1, |m| + 2, \ldots$. Эта модель оператора D^-_l изучалась многими авторами (см., например, [22, 97]).

Как только собственные функции $j_{m\mu}(k)$ вторых операторов, представленных в табл. 22, определены, соответствующие решения $\Psi_{m\mu}$ с разделенными переменными уравнения (1.1) можно вычислить, используя формулу

$$\Psi_{m\mu}(x) = \exp\left[im(\theta - \pi/2)\right] \int_0^\infty \exp(ix_0k)\, J_m(kr)\, j_{m\mu}(k)\, dk. \tag{4.9}$$

Вообще говоря, уравнение ЭПД (4.5) можно изучать для любого вещественного $m > 0$. Системы координат, допускающие разделение переменных, и модель (4.8) остаются теми же, но группа симметрии, так же как в разд. 2.3, становится универсальной накрывающей группой $\widetilde{SL}(2, R)$ группы $SL(2, R)$. Отображение из $L_2(0, \infty)$ в пространство решений уравнения (4.5) имеет вид

$$\Phi(x_0, r) = \exp(-im\pi/2) \int_0^\infty \exp(ix_0k)\, J_m(kr)\, f(k)\, dk = U[f], \tag{4.10}$$

причем соответствующее скалярное произведение

$$\begin{aligned} (\Phi_1, \Phi_2) \equiv \langle f_1, f_2\rangle = i \int_0^\infty \Phi_1(x_0, r)\, \partial_0\overline{\Phi}_2(x_0, r)\, r\, dr = \\ = i \int_0^\infty \overline{\Phi}_2(x_0, r)\, \partial_0\Phi_1(x_0, r)\, r dr \end{aligned} \tag{4.11}$$

не зависит от x_0. Анализ спектральных разложений операторов, определяющих решения с разделенными переменными, можно найти в работе [62].

Мы определили решения Φ_m уравнения ЭПД (4.5) как решения волнового уравнения (1.1), которые являются собственными функциями оператора $L = -iM_{12}$: $L\Psi_m = m\Psi_m$, $\Psi_m = e^{im\varphi}\Phi_m(x_0, r)$. Для комплексификации $so(3, 2)^c \cong so(5, \mathbb{C})$ конформной алгебры симметрии можно взять базис $\{L_j\}$, такой, что $[L, L_j] = \alpha_j L_j$, где $\alpha_j = 0, \pm 1$. Действительно, соотношения коммутирования

$$[L,\ P_1 \pm iP_2] = \pm (P_1 \pm iP_2), \qquad [L,\ M_{01} \pm iM_{02}] = \pm (M_{01} \pm iM_{02}),$$
$$[L,\ K_1 \pm iK_2] = \pm (K_1 \pm iK_2),$$

а также тот факт, что $[L, L'] = 0$ для $L' = D, P_0, K_0$, обеспечивают такой базис. Из этих соотношений следует, что $L_j\Psi_m$ является собственной функцией оператора L с собственным значением $m + \alpha_j = m$, $m \pm 1$, т. е. $L_j(e^{im\varphi}\Phi_m) = \exp[i(m + \alpha_j)\varphi]\Phi_{m+\alpha_j}$. Выделяя множитель, зависящий от φ, мы видим, что каждый оператор симметрии отображает решение уравнения (4.5) для m в решение для $m + \alpha_j$. Подобным образом операторы (1.12) индуцируют отображения множества решений одного уравнения ЭПД в множество решений другого уравнения так же, как это производится некоторыми операторами группы симметрии.

Мы видим, что этот ряд рекуррентных формул, связывающих различные уравнения ЭПД друг с другом, является прямым следствием конформной симметрии волнового уравнения, из которого в результате частичного разделения переменных получается уравнение ЭПД. Вайнстейн [30, 31], изучая краевые задачи для уравнения ЭПД, применил две такие рекуррентные формулы. Полное теоретико-групповое исследование дается в работе [94]; там же показано, что формулы квадратичного преобразования для функции ${}_2F_1$ [16] связаны с конформной симметрией волнового уравнения.

Мы упомянули все полурасщепляющиеся системы координат для волнового уравнения, за исключением некоторых любопытных неортогональных систем, которые соответствуют диагонализации оператора ${}^1\!/_2 M_{12} + {}^1\!/_4 K_0 - {}^1\!/_4 P_0$ и которые рассматриваются в работах [59, 61]; в работе [61] изучены также некоторые сильно сингулярные решения, получающиеся в результате того, что диагонализация некоторого оператора первого порядка определяет соответствующие координаты не единственным образом. Ортогональные нерасщепляющиеся системы координат рассматриваются в [60].

4.5. Волновое уравнение $(\partial_{tt} - \Delta_3)\Psi(x) = 0$

Вещественное волновое уравнение в четырехмерном пространстве-времени

$$(\partial_{00} - \partial_{11} - \partial_{22} - \partial_{33})\Psi(x) = 0 \qquad (5.1)$$

можно во многих отношениях считать наиболее значимым в нашей книге. Общеизвестно, какую роль играет уравнение (5.1) в физике [13, 109]; для нас же важен тот факт, что почти все уравнения, рассмотренные нами в предшествующих главах, либо являются частными случаями уравнения (5.1), либо получаются из него частичным разделением переменных. Более того, в то время как волновое уравнение в трехмерном пространстве и его комплексификация связаны с производящими функциями для функций и многочленов Гегенбауэра, уравнение (5.1) связано с производящими функциями для гипергеометрической функции Гаусса общего вида и многочленов Якоби.

Несмотря на то что в данное время уравнение (5.1) интенсивно изучается с теоретико-групповой точки зрения, результаты, представленные в настоящей работе, все еще носят фрагментарный характер. Мы укажем здесь только некоторые основные особенности проблемы разделения переменных для уравнения (5.1) и дадим краткий анализ работ, посвященных этому вопросу.

В работе [15] вычисляется пятнадцатимерная алгебра симметрии $so(4, 2)$ уравнения (5.1), которую можно получить по очевидной аналогии с алгеброй симметрии уравнения (1.1). Эта группа симметрии, локально изоморфная группе $SO(4, 2)$, называется конформной группой. Она содержит следующие подгруппы: однородную группу преобразований Лоренца $SO(3, 1)$, группу Пуанкаре $E(3, 1)$ и компактную ортогональную группу $SO(4, R)$. Имеет место также симметрия инверсии, аналогичная I; см. (1.12). Применяя преобразование Фурье, можно построить гильбертово пространство $\mathscr{H}_+$ решений с положительной энергией, в котором определяется унитарное неприводимое представление конформной группы. Это осуществляется по аналогии с тем, как было получено соотношение (1.20); подробные выкладки см. в работах [46, 66, 139].

Предполагается, что решения с R-разделенными переменными уравнения (5.1) являются общими собственными функциями триплетов независимых коммутирующих операторов не выше второго порядка в обертывающей алгебре алгебры $so(4, 2)$. Рассмотрим несколько достаточно подробно изученных частных случаев.

Ограничивая алгебру симметрии уравнения (1.1) до компактной подалгебры $so(3)$, мы приходим к оператору Лапласа на сфере S_2 и получаем две системы координат, допускающих разделение переменных для соответствующего уравнения. Подобным образом ограничивая $so(4, 2)$ до компактной подалгебры $so(4)$, мы получаем оператор Лапласа на единичной сфере S_3 в четырехмерном пространстве. Этот оператор исследован в работе [64], где показано, что уравнение на собственные значения допускает разделение переменных точно в шести системах координат, связанных с шестью парами коммутирующих операторов симметрии второго порядка в обертывающей алгебре алгебры $so(4)$. Изучена также связь между алгеброй $so(4)$ и уравнением Шредингера для задачи Кеплера в случае трех пространственных переменных.

Диагонализация оператора симметрии $P_0 = \partial_0$ сводит уравнение (5.1) к уравнению Гельмгольца, которое допускает разделение переменных в одиннадцати системах координат. Диагонализация оператора $P_3 = \partial_3$ сводит уравнение (5.1) к уравнению Клейна — Гордона

$$(\partial_{00} - \partial_{11} - \partial_{22} + \omega^2)\Phi = 0. \tag{5.2}$$

В работе [60] дается классификация ортогональных относительно метрики Минковского 53 систем координат, допускающих разделение переменных уравнения (5.2). Диагонализация оператора симметрии растяжения $\sum\limits_{\alpha=0}^{3} x_\alpha \partial_\alpha$ сводит уравнение (5.1) к уравнению на собственные значения для оператора Лапласа на гиперболоиде в четырехмерном пространстве. Это приведенное уравнение имеет в качестве группы симметрии однородную группу преобразований Лоренца $SO(3, 1)$ и допускает разделение переменных в 34 системах координат, причем каждая система соответствует паре операторов симметрии второго порядка в обертывающей алгебре алгебры $so(3, 1)$; см. [63, 107]. Диагонализация оператора $P_0 + P_1 = \partial_0 + \partial_1$ сводит уравнение (5.1) к уравнению Шредингера для свободной частицы

$$(i\beta\partial_t + \partial_{22} + \partial_{33})\Phi = 0, \tag{5.3}$$

которое допускает разделение переменных в 17 системах координат. Аналогичным образом диагонализация оператора симметрии $M_{23} = x_2\partial_3 - x_3\partial_2$ дает приведенное уравнение, подобное уравнению ЭПД. Бейтмен [14], используя комплексификацию приведенного уравнения, полученного в результате диагонализации операторов M_{23} и $M_{01} = x_0\partial_1 + x_1\partial_0$, нашел производящие функции для многочленов Якоби, а Корнвиндер [69, 70] применил это уравнение для исследования теоремы сложения для многочленов Якоби. Хенричи [132] воспользовался этим же уравнением, чтобы получить производящие функции для произведений многочленов Гегенбауэра.

Хотя все перечисленные выше системы координат были получены методами, совершенно аналогичными тем, которые мы применяли при исследовании уравнения (1.1), при изучении уравнения (5.1) появляется несколько новых типов нерасщепляющихся систем координат. Например, диагонализация оператора $P_2^2 + P_3^2$

сводит уравнение (5.1) к двум уравнениям:

$$(\partial_{00} - \partial_{11} + \omega^2)\Phi = 0, \qquad (\partial_{22} + \partial_{33} + \omega^2)\Theta = 0, \tag{5.4}$$

где $\Psi = \Phi\Theta$. Возможные системы координат, допускающие разделение переменных для приведенных уравнений, можно найти в табл. 1 и 2.

В следующей главе будет дан анализ явной связи между функциями ${}_2F_1$ и волновым уравнением.

Упражнения

1. Вычислить алгебру симметрии волнового уравнения (1.1).

2. Пусть $y_0 = \cos\sigma$, $y_1 = \sin\sigma\cos\alpha$, $y_2 = \sin\sigma\ \sin\alpha$, где (ψ, σ, α) — координаты (2.6), в которых уравнение (1.1) имеет решения с R-разделенными переменными. Показать, что, подставив в волновое уравнение

$$\Psi = [\cos\sigma - \cos\psi]^{1/2} \exp\left[-i\psi\left(l + {}^1/_2\right)\right] \Phi(y_1, y_2, y_3),$$

мы получим приведенное уравнение $\left(\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^2 + \Gamma_{23}^2\right)\Phi = -l(l+1)\Phi$, т. е. уравнение на собственные значения для оператора Лапласа на сфере $y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = 1$. Здесь Γ_{12}, Γ_{13}, Γ_{23} — обычные операторы момента импульса на сфере.

3. Показать, что пространство операторов симметрии второго порядка в обвертывающей алгебре алгебры $so(2, 1)$ по модулю оператора Казимира разбивается сопряженным действием группы $SO(2, 1)$ на девять типов орбит. (Указание: эта задача эквивалентна классификации классов эквивалентности вещественных симметрических (3×3)-матриц Q относительно преобразований $Q \to A^tQA$, $A \in SO(2, 1)$; подробности можно найти в работе [38].)

4. Показать, что уравнение ЭПД (4.5) допускает разделение переменных в координатах

$$x = {}^1/_2\left[(t + r)^{1/2} + (t - r)^{1/2}\right], \qquad y = {}^1/_2\left[(t + r)^{1/2} - (t - r)^{1/2}\right],$$
$$t \pm r > 0,$$

соответствующих операторам Γ_{23}^2, $\{\Gamma_{51}, \Gamma_{41} + \Gamma_{45}\}$. Решения с разделенными переменными являются произведениями функций Бесселя [62].

5. Как показано в тексте, функция $\Phi(x_0, r)$ является решением уравнения ЭПД

$$\left(\partial_{00} - \partial_{rr} - r^{-1}\partial_r + m^2r^{-2}\right)\Phi = 0$$

тогда и только тогда, когда $\Psi_m = e^{im\varphi}\Phi$ — решение волнового уравнения (1.1), где $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$. Таким образом, решения волнового уравнения, являющиеся собственными функциями оператора $M_{12} = \partial_\varphi$, соответствуют решениям уравнения ЭПД. Используя выражения $[iM_{12}, \pm iM_{01} + M_{02}] = \mp(\pm iM_{01} + M_{02})$, вывести дифференциальные рекуррентные формулы, отбражающие решения уравнения ЭПД при $m = m_0$ в его решения при $m = m_0 \mp 1$ соответственно. Аналогичным образом остальные операторы симметрии Ли волнового уравнения отображают множество решений уравнения ЭПД во множество решений этого же уравнения (см. [94]).

Глава 5

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

5.1. Функции Лауричеллы F_D

Гипергеометрическая функция Гаусса ${}_2F_1$ тесно связана с уравнением Лапласа и волновым уравнением в четырехмерном пространстве, а также с комплексификациями этих уравнений. Функция ${}_2F_1$ появляется в результате разделения переменных в указанных уравнениях, а использование конформных групп симметрии дает возможность объяснить многие ее свойства. Но мы избрали иной подход к изучению этой функции: в настоящей книге исследуется непосредственно сама гипергеометрическая функция, а также некоторые из ее обобщений, полученных за последние 150 лет.

Функции F_A, F_B, F_C и F_D (см. (Б.21)—(Б.24)), введенные Лауричеллой [73], известны теперь под названием функций Лауричеллы; детальное исследование этих функций провели Аппель и Кампе де Ферье [4]. Из степенных рядов, которыми определяются функции Лауричеллы, сразу следует, что эти функции являются обобщениями функции ${}_2F_1$ на n комплексных переменных: при $n=1$ каждая из функций F_A, F_B, F_C и F_D сводится к функции ${}_2F_1$. Хотя функции Лауричеллы впервые были получены не в результате разделения переменных, мы увидим, что их можно получить частичным разделением переменных в системе n дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. С теоретико-групповой точки зрения самым интересным обобщением функции ${}_2F_1$ являются функции F_D; поэтому мы проведем тщательное исследование этих функций, получая результаты для функции ${}_2F_1$ в предположении, что $n=1$. Как следует из (Б.24),

$$F_D[a;\ b_1,\ \ldots,\ b_n;\ c;\ z_1,\ \ldots,\ z_n]$$

зависит от $n+2$ комплексных параметров a, b_j, c и n комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$. При $n=1$ мы имеем

$$F_D[a;\ b;\ c;\ z] \equiv {}_2F_1\left(\begin{matrix} a,\ b \\ c \end{matrix}\middle|\, z\right). \tag{1.1}$$

Используя разложение (Б.24), мы получаем дифференциальные рекуррентные формулы для функций F_D, а затем на основании этих рекуррентных формул строим алгебру Ли. Вычисления проводятся так же, как и ранее, поэтому мы приводим только полученные результаты. Определим семейство функций

$$\Psi_c^{a,\, b_1,\, \ldots,\, b_n}(s,\, u_1,\, \ldots,\, u_n,\, t,\, z_1,\, \ldots,\, z_n) = \Psi_c^{a,\, b_j}(s,\, u_j,\, t,\, z_j) = \\ = \frac{\Gamma(c-a)\,\Gamma(a)}{\Gamma(c)}\, F_D(a;\, b_1,\, \ldots,\, b_n;\, c;\, z_1,\, \ldots,\, z_n)\, s^a u^{b_1} \cdots u_n^{b_n} t^c, \quad (1.2)$$

где $c \neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$, а $s,\ u_j,\ t$ — комплексные переменные. Кроме того, определим операторы

$$E^{\alpha} = s\Big(\sum_j z_j\partial_{z_j} + s\partial_s\Big), \qquad E^{\alpha\beta_k\gamma} = su_kt\partial_{z_k},$$

$$E^{\beta_k} = u_k(z_k\partial_{z_k} + u_k\partial_{u_k}), \qquad E_{\gamma} = t^{-1}\Big(\sum_j z_j\partial_{z_j} + t\partial_t - 1\Big),$$

$$E^{\alpha\gamma} = st\Big(\sum_j (1-z_j)\,\partial_{z_j} - s\partial_s\Big),$$

$$E^{\gamma} = t\Big(\sum_j (1-z_j)\,\partial_{z_j} + t\partial_t - s\partial_s - \sum_j u_j\partial_{u_j}\Big),$$

$$E_{\alpha} = s^{-1}\Big(\sum_j z_j(1-z_j)\,\partial_{z_j} + t\partial_t - s\partial_s - \sum_j z_ju_j\partial_{u_j}\Big),$$

$$E_{\beta_k} = u_k^{-1}\Big(z_k(1-z_k)\,\partial_{z_k} + z_k\sum_{j\neq k}(1-z_j)\,\partial_{z_j} + \\ + t\partial_t - z_ks\partial_s - \sum_j u_j\partial_{u_j}\Big),$$

$$E^{\beta_k\gamma} = u_kt\left((z_k-1)\,\partial_{z_k} + u_k\partial_{u_k}\right),$$

$$E_{\alpha\gamma} = s^{-1}t^{-1}\Big(\sum_j z_j(1-z_j)\,\partial_{z_j} - \sum_j z_ju_j\partial_{u_j} + t\partial_t - 1\Big),$$

$$E_{\alpha\beta_k\gamma} = s^{-1}u_k^{-1}t^{-1}\Big(\sum_j z_j(z_j-1)\,\partial_{z_j} - t\partial_t + z_ks\partial_s + \\ + \sum_j z_ju_j\partial_{u_j} - z_k + 1\Big),$$

$$E_{\beta_k\gamma} = u_k^{-1}t^{-1}\Big(z_k(z_k-1)\,\partial_{z_k} + \sum_{j\neq k}(z_k-1)\,z_j\partial_{z_j} + z_ks\partial_s - t\partial_t + 1\Big),$$

$$E_{\beta_p}^{\beta_k} = u_ku_p^{-1}\left((z_k-z_p)\,\partial_{z_k} + u_k\partial_{u_k}\right), \qquad J_{\alpha} = s\partial_s - (1/2)\,t\partial_t,$$

$$J_{\beta_k} = u_k\partial_{u_k} - (1/2)\,t\partial_t + (1/2)\sum_{j\neq k} u_j\partial_{u_j},$$

$$J_{\gamma} = t\partial_t - (1/2)\Big(s\partial_s + \sum_j u_j\partial_{u_j} + 1\Big), \quad k,\ p = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \quad (1.3)$$

Если пределы изменения j не указываются явно, то суммирование по j проводится от 1 до n. Действие этих операторов на базис (1.2) задается формулами

$$
\begin{aligned}
&E^{\alpha}\Psi_c^{a,\,b_j}=(c-a-1)\,\Psi_c^{a+1,\,b_j}, && E^{\alpha\beta_k\gamma}\Psi_c^{a,\,b_j}=b_k\Psi_{c+1}^{a+1,\,\hat{b}_k},\\
&E^{\beta_k}\Psi_c^{a,\,b_j}=b_k\Psi_c^{a,\,\hat{b}_k}, && E_{\gamma}\Psi_c^{a,\,b_j}=(c-a-1)\,\Psi_{c-1}^{a,\,b_j},\\
&E^{\alpha\gamma}\Psi_c^{a,\,b_j}=\Big(\sum_j b_j-c\Big)\Psi_{c+1}^{a+1,\,b_j}, && E^{\gamma}\Psi_c^{a,\,b_j}=\Big(c-\sum_j b_j\Big)\Psi_{c+1}^{a,\,b_j},\\
&E_{\alpha}\Psi_c^{a,\,b_j}=(a-1)\,\Psi_c^{a-1,\,b_j}, && E_{\beta_k}\Psi_c^{a,\,b_j}=\Big(c-\sum_j b_j\Big)\Psi_c^{a,\,\tilde{b}_k},\\
&E^{\beta_k\gamma}\Psi_c^{a,\,b_j}=b_k\Psi_{c+1}^{a,\,\hat{b}_k}, && E_{\alpha\gamma}\Psi_c^{a,\,b_j}=(a-1)\,\Psi_{c-1}^{a-1,\,b_j},\\
&E_{\alpha\beta_k\gamma}\Psi_c^{a,\,b_j}=(1-a)\,\Psi_{c-1}^{a-1,\,\tilde{b}_k}, && E_{\beta_k\gamma}\Psi_c^{a,\,b_j}=(a-c+1)\,\Psi_{c-1}^{a,\,\tilde{b}_k},\\
&E_{\beta_p}^{\beta_k}\Psi_c^{a,\,b_j}=b_k\Psi_c^{a,\,b_1\,\dots\,b_k+1\,\dots\,b_p-1\,\dots\,b_n}, && J_{\alpha}\Psi_c^{a,\,b_j}=(a-c/2)\,\Psi_c^{a,\,b_j},\\
&J_{\beta_k}\Psi_c^{a,\,b_j}=\Big(b_k-c/2+(1/2)\sum_{j\neq k} b_j\Big)\Psi_c^{a,\,b_j},\\
&J_{\gamma}\Psi_c^{a,\,b_j}=\Big[c-(1/2)\Big(a+\sum_j b_j+1\Big)\Big]\Psi_c^{a,\,b_j}, && k,\ p=1,\ \dots,\ n.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Символы $\hat{b}_k$ и $\tilde{b}_k$ определяются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\hat{b}_k&=b_1,\ \dots,\ b_{k-1},\ b_k+1,\ b_{k+1},\ \dots,\ b_n,\\
\tilde{b}_k&=b_1,\ \dots,\ b_{k-1},\ b_k-1,\ b_{k+1},\ \dots,\ b_n.
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Чтобы получить дифференциальные рекуррентные формулы для функции F_D, необходимо в обеих частях соотношений (1.4) исключить зависимость от s, u_j и t. При $n=1$ эти соотношения принимают вид рекуррентных формул (Б.25) для ${}_2F_1$.

Соотношения (1.4) проверяются стандартными вычислениями. Легко показать, что операторы (1.3) образуют базис для алгебры Ли $sl(n+3,\ \mathbb{C})$ размерности $(n+3)^2-1$. (Напомним, что $SL(n+3,\ \mathbb{C})$ — группа всех комплексных $[(n+3)\times\times(n+3)]$-матриц A, таких, что $\det A=1$.) Алгебра Ли $sl(n+3,\ \mathbb{C})$ группы $SL(n+3,\ \mathbb{C})$ состоит из всех комплексных $[(n+3)\times(n+3)]$-матриц $\mathcal{A}$, таких, что $\operatorname{tr}\mathcal{A}=0$ (см. [86]). Обозначая через $\mathcal{E}_{ij}$ матрицу, элемент которой на пересечении i-й строки и j-го столбца равен единице, а остальные элементы равны нулю (см. формулу (6.4) разд. 3.6), можно видеть, что матрицы $\mathcal{E}_{ij}$, $i\neq j$ и $\mathcal{E}_{ii}-\mathcal{E}_{33}$, $1\leqslant i,j\leqslant n+3$, образуют базис алгебры $sl(n+3,\ \mathbb{C})$. Соотношения коммутирования получаются из общей формулы

$$
[\mathcal{E}_{ij},\ \mathcal{E}_{kl}]=\delta_{jk}\mathcal{E}_{il}-\delta_{li}\mathcal{E}_{kj}.
\tag{1.6}
$$

Можно проверить, что соответствующие соотношения коммутирования удовлетворяются, если произведена идентификация

$$\begin{gathered}
E^{\alpha}=\mathscr{E}_{12}, \qquad E_{\alpha}=\mathscr{E}_{21}, \qquad E^{\beta_k}=\mathscr{E}_{k+3,3}, \\
E_{\beta_k}=\mathscr{E}_{3,k+3}, \qquad E^{\beta_k}_{\beta_p}=\mathscr{E}_{k+3,p+3}, \qquad E^{\gamma}=\mathscr{E}_{31}, \\
E_{\gamma}=-\mathscr{E}_{13}, \qquad E^{\alpha\gamma}=\mathscr{E}_{32}, \qquad E_{\alpha\gamma}=\mathscr{E}_{23}, \\
E^{\beta_k\gamma}=-\mathscr{E}_{k+3,1}, \qquad E_{\beta_k\gamma}=-\mathscr{E}_{1,k+3}, \qquad E^{\alpha\beta_k\gamma}=-\mathscr{E}_{k+3,2}, \\
E_{\alpha\beta_k\gamma}=-\mathscr{E}_{2,k+3}, \qquad J_{\alpha}={}^1/_2\,(\mathscr{E}_{11}-\mathscr{E}_{22}), \\
J_{\beta_k}={}^1/_2\,(\mathscr{E}_{k+3,k+3}-\mathscr{E}_{33}), \quad J_{\gamma}={}^1/_2\,(\mathscr{E}_{33}-\mathscr{E}_{11}), \qquad 1\leqslant k,\ p\leqslant n, \\
k\neq p. \qquad (1.7)
\end{gathered}$$

Пусть

$$C_k=E^{\alpha}E^{\beta_k}-E^{\alpha\beta_k\gamma}E_{\gamma}, \qquad 1\leqslant k\leqslant n. \qquad (1.8)$$

Тогда легко проверить, что решение f системы уравнений

$$\begin{gathered}
C_kf=0, \quad J_{\alpha}f=(a-c/2)\,f, \quad J_{\beta_k}f=\Big(b_k-c/2+(1/2)\sum_{j\neq k}b_j\Big)f, \\
J_{\gamma}f=\Big[c-(1/2)\Big(a+\sum_j b_j+1\Big)\Big]f, \qquad k=1,\ \ldots,\ n,
\end{gathered} \qquad (1.9)$$

аналитическое в окрестности $z_1=\ldots=z_n=0$, имеет вид

$$f=F_{\mathrm{D}}(a;\ b_1,\ \ldots,\ b_n;\ c;\ z_1,\ \ldots,\ z_n)\,s^a u_1^{b_1}\cdots u_n^{b_n}t^c \qquad (1.10)$$

и единственно с точностью до некоторой мультипликативной константы. Действительно, из последних $n+2$ уравнений следует, что

$$f=F(z_1,\ \ldots,\ z_n)\,s^a u_1^{b_1}\cdots u_n^{b_n}t^c,$$

а из n первых уравнений вытекают уравнения

$$\left\{\Big(\sum_{j=1}^{n}z_j\partial_{z_j}+a\Big)(z_k\partial_{z_k}+b_k)-\partial_{z_k}\Big(\sum_{j=1}^{n}z_j\partial_{z_j}+c-1\Big)\right\}F=0, \qquad k=1,\ \ldots,\ n, \qquad (1.11)$$

т. е. дифференциальные уравнения в частных производных для функции F_{D}. Операторы C_k коммутируют не со всеми элементами алгебры $sl(n+3,\ \mathbb{C})$, но каждый элемент оставляет пространство решений этой системы уравнений инвариантным. Отсюда следует, что если $\Psi(s,u_j,t,z_j)$ — решение уравнения $C_k\Psi=0$, $k=1,\ \ldots,\ n$, представленное рядом Лорана

$$\Psi=\sum_{a,\,b_j,\,c}g_{ab_jc}(z_j)\,s^a u_1^{b_1}\ldots u_n^{b_n}t^c, \qquad (1.12)$$

и если Ψ — аналитическая функция при $z_1 = \ldots = z_n = 0$, то

$$g_{ab_jc} = k(ab_jc)F_D(a;\ b_1,\ \ldots,\ b_n;\ c;\ z_1,\ \ldots,\ z_n), \qquad (1.13)$$

где k — некоторая константа. Кроме того, элементы алгебры $sl(n+3,\ \mathbb{C})$ отображают решение уравнения $C_k\Psi = 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$, в другие решения этого уравнения.

Теперь мы видим, что функции F_D получаются как решения с разделенными переменными системы n дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка $C_k\Psi = 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$, в координатах s, u_j, t, z_j. Чтобы упростить эту систему, выполним R-преобразование $\Phi = t^{-1}\Psi$, убрав тем самым множитель t^{-1} из оператора E_γ. В результате мы перейдем к новым переменным v, v_j, w, w_j, таким, что

$$E^\alpha = \partial_v, \quad E^{\beta_k} = \partial_{v_k}, \quad E^{\alpha\beta_k\gamma} = \partial_{w_k}, \quad E_\gamma = \partial_w.$$

В явном виде мы имеем

$$s = -1/v, \quad u_j = -1/v_j, \quad t = w, \quad z_j = ww_j/(vv_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \qquad (1.14)$$

а уравнения $C_k\Psi = 0$ принимают вид

$$\left(\partial_v\partial_{v_k} - \partial_w\partial_{w_k}\right)\Phi = 0, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n. \qquad (1.15)$$

Из (1.2) следует, что уравнения (1.15) имеют решения

$$\Phi_c^{a,\,b_j} = t^{-1}\Psi_c^{a,\,b_j} =$$
$$= \frac{\Gamma(c-a)\,\Gamma(a)}{\Gamma(c)} F_D\left(a;\ b_1,\ \ldots,\ b_n;\ c;\ \frac{ww_1}{vv_1},\ \ldots,\ \frac{ww_n}{vv_n}\right) \times$$
$$\times \left(-\frac{1}{v}\right)^a \left(-\frac{1}{v_1}\right)^{b_1} \ldots \left(-\frac{1}{v_n}\right)^{b_n} w^c. \qquad (1.16)$$

В частном случае, когда $n = 1$, можно положить $v = (z+t)/2$, $v_1 = (z-t)/2$, $w = (ix+y)/2$, $w_1 = (ix-y)/2$, в результате чего уравнение (1.15) примет вид комплексного волнового уравнения

$$(\partial_{tt} - \partial_{xx} - \partial_{yy} - \partial_{zz})\,\Phi(t,\ x,\ y,\ z) = 0,$$

решения которого вида (1.16) содержат функцию ${}_2F_1$. Легко показать, что алгеброй симметрии этого уравнения является алгебра $o(6,\ \mathbb{C}) \cong sl(4,\ \mathbb{C})$.

Возвратимся теперь к операторам (1.3) и определим действие группы $SL(n+3,\ \mathbb{C})$, индуцируемое этими операторами. Не определяя глобального действия этой группы, укажем, что каждый из следующих триплетов:

$$\begin{gathered}\{J^+,\ J^-,\ J^0\}\equiv\{E^\alpha,\ E_\alpha,\ J_\alpha\},\quad \{E^{\beta_k},\ E_{\beta_k},\ J_{\beta_k}\},\\ \{E^\gamma,\ E_\gamma,\ J_\gamma\},\quad \{E^{\alpha\beta_k\gamma},\ E_{\alpha\beta_k\gamma},\ J_\alpha+J_{\beta_k}+J_\gamma\},\\ \{E^{\alpha\gamma},\ E_{\alpha\gamma},\ J_\alpha+J_\gamma\},\quad \{E^{\beta_k\gamma},\ E_{\beta_k\gamma},\ J_{\beta_k}+J_\gamma\},\\ \{E^{\beta_l}_{\beta_p},\ E^{\beta_p}_{\beta_l},\ J_{\beta_l}-J_{\beta_p}\},\quad 1\leqslant k\leqslant n,\quad 1\leqslant l<p\leqslant n,\end{gathered}\tag{1.17}$$

удовлетворяет соотношениям коммутирования

$$[J^0,\ J^\pm]=\pm J^\pm,\quad [J^+,\ J^-]=2J^0$$

и образует базис подалгебры алгебры $sl(n+3,\ \mathbb{C})$, изоморфной алгебре $sl(2,\ \mathbb{C})$. Кроме того, каждый триплет порождает локальную подгруппу Ли группы $SL(n+3,\ \mathbb{C})$, изоморфную группе $SL(2,\ \mathbb{C})$; полученные таким образом подгруппы порождают полное действие группы $SL(n+3,\ \mathbb{C})$.

Используя соотношения

$$\mathbf{T}(A)=\exp(-bd^{-1}J^+)\exp(-c\,dJ^-)\exp(\tau J^0),\ \exp(\tau/2)=d^{-1},\tag{1.18}$$

где

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\ \mathbb{C})$$

(см. (4.14) разд. 2.4), перейдем от действия алгебры Ли, порождаемой операторами $(J^+,\ J^-,\ J^0)$, к групповому действию. Мы видим, что триплет $\{E^\alpha, E_\alpha, J_\alpha\}$ порождает групповое действие

$$\begin{aligned}&\mathbf{T}_1(A)\Psi(s,\ u_j,\ t,\ z_j)=\\ &=\Psi\left[\frac{as+c}{d+bs},\ \frac{u_j(as+c)}{as+c(1-z_j)},\ \frac{ts}{as+c},\ \frac{z_js}{(d+bs)(as-cz_j+c)}\right],\end{aligned}\tag{1.19}$$

а триплет $\{E^{\beta_k},\ E_{\beta_k},\ J_{\beta_k}\}$ — действие

$$\begin{aligned}&\mathbf{T}_{2,\,k}(A)\Psi(s,\ u_j,\ u_k,\ t,\ z_j,\ z_k)=\\ &=\Psi\left(\frac{s(au_k+c)}{au_k+c(1-z_k)},\ \frac{u_j}{u_k}(au_k+c),\ \frac{au_k+c}{d+bu_k},\ \frac{u_kt}{au_k+c},\right.\\ &\qquad\left.\frac{au_kz_j+c(z_j-z_k)}{au_k+c(1-z_k)},\ \frac{z_ku_k}{(d+bu_k)(au_k-cz_k+c)}\right),\\ &\qquad\qquad k=1,\ \ldots,\ n.\end{aligned}\tag{1.20}$$

В (1.20) j пробегает значения от 1 до n, исключая k. Триплет $\{E^{\gamma}, E_{\gamma}, J_{\gamma}\}$ порождает действие

$$\mathbf{T}_3(A)\Psi(s, u_j, t, z_j) = (a + c/t)^{-1}\times$$
$$\times\Psi(s(d+bt), u_j(d+bt), (at+c)/(d+bt), [dz_j -$$
$$- bt(1-z_j)](a+c/t)), \qquad (1.21)$$

триплет $\left\{E^{\alpha\beta_k\gamma}E_{\alpha\beta_k\gamma}, J_{\alpha}+J_{\beta_k}+J_{\gamma}\right\}$ — действие

$$\mathbf{T}_{4,k}(A)\Psi(s, u_j, u_k, t, z_j, z_k) = [a + c(1-z_k)/(u_k t s)]^{-1}\times$$
$$\times\Psi\left[as - \frac{cz_k}{u_k t},\ u_j\left[\frac{asu_k t - cz_k}{asu_k t + cz_j - cz_k}\right],\right.$$
$$au_k - \frac{cz_k}{st},\ t\left[\frac{asu_k t + c(1-z_k)}{asu_k t - cz_k}\right],$$
$$\left. z_j\left[\frac{asu_k t + c(1-z_k)}{asu_k t + c(z_j - z_k)}\right],\quad [z_k d - bsu_k t]\left[a + \frac{c(1-z_k)}{su_k t}\right]\right], \qquad (1.22)$$

Триплет $\left\{E^{\alpha\gamma}, E_{\alpha\gamma}, J_{\alpha}+J_{\gamma}\right\}$ — действие

$$\mathbf{T}_5(A)\Psi(s, u_j, t, z_j) = (a - c/(st))^{-1}\times$$
$$\times\Psi\left[\frac{s}{d-bst},\ \frac{u_j st}{ast - cz_j},\ at - \frac{c}{s},\quad \frac{(dz_j - bst)(ast-c)}{(ast-cz_j)(d-bst)}\right], \qquad (1.23)$$

триплет $\left\{E^{\beta_k\gamma}, E_{\beta_k\gamma}, J_{\beta_k}+J_{\gamma}\right\}$ — действие

$$\mathbf{T}_{6,k}(A)\Psi(s, u_j, u_k, t, z_j, z_k) = [a + c/(u_k t)]^{-1}\times$$
$$\times\Psi\left(\frac{su_k t}{au_k t + cz_k},\ u_j,\ \frac{u_k}{d+bu_k t},\ at + \frac{c}{u_k},\ \frac{z_j(au_k t + c)}{au_k t + cz_k},\right.$$
$$\left.\frac{(dz_k + bu_k t)(au_k t + c)}{(d+bu_k t)(au_k t + cz_k)}\right), \qquad (1.24)$$

а триплет $\left\{E^{\beta_k}_{\beta_p}, E^{\beta_p}_{\beta_k}, J_{\beta_k}-J_{\beta_p}\right\}$ — действие

$$\mathbf{T}_{7,k,p}(A)\Psi(s, u_j, u_k, u_p, t, z_j, z_k, z_p) =$$
$$= \Psi\left(s,\ u_j,\ \frac{u_k u_p}{du_p + bu_k},\ \frac{u_p u_k}{au_k + cu_p},\ t,\ z_j,\ \frac{dz_k u_p + bz_p u_k}{du_p + bu_k},\right.$$
$$\left.\frac{az_p u_k + cz_k u_p}{au_k + cu_p}\right), \qquad 1 \leqslant k < p \leqslant n. \qquad (1.25)$$

Каждый из операторов $\mathbf{T}_l(A)$ отображает решение Ψ системы уравнений $C_k\Psi = 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$, в другое решение.

Чтобы вычислить матричные элементы групповых операторов $\mathbf{T}_l(A)$ относительно базиса $\left\{\Psi_c^{a,\,b} l\right\}$, полезно построить более простую модель соотношений (1.4). Такая модель определяется функциями

$$f_c^{a,b_j}(s,\ u_j,\ t) = s^a u_1^{b_1} \cdots u_n^{b_n} t^c$$

от $n+2$ комплексных переменных и операторами

$$\begin{aligned}
&E^\alpha = s(t\partial_t - s\partial_s - 1), \qquad E^{\alpha\beta_k\gamma} = s u_k^2 t \partial_{u_k}, \qquad E^{\beta_k} = u_k^2 \partial_{u_k},\\
&E_\gamma = t^{-1}(t\partial_t - s\partial_s - 1), \qquad E_\alpha = s^{-1}(s\partial_s - 1), \\
&E_{\beta_k} = u_k^{-1}\Big(t\partial_t - \sum_j u_j \partial_{u_j}\Big), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n,
\end{aligned} \tag{1.26}$$

порождающими алгебру $sl(n+3,\ \mathbb{C})$. Некоторые примеры матричных элементов, вычисленных таким способом, и соответствующих производящих функций для F_D и ${}_1F_2$ можно найти в работах [91] и [83, гл. 5].

5.2. Формулы преобразований и производящие функции для функций F_D

Теперь покажем, что формулы преобразований для функций F_D определяются свойствами группы симметрии $SL(n+3,\ \mathbb{C})$. Пусть

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2,\ \mathbb{C}); \tag{2.1}$$

тогда из формул (1.2) и (1.19) следует, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_1(I)\Psi_c^{a,b_j} = (-1)^{a+c}\frac{\Gamma(c-a)\Gamma(a)}{\Gamma(c)} F_D\left(a;\ b_j;\ c;\ -\frac{z_j}{1-z_j}\right) \times \\
\times (1-z_1)^{-b_1} \cdots (1-z_n)^{-b_n} s^{c-a} u_1^{b_1} \cdots u_n^{b_n} t^c.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Однако функция $\mathbf{T}_1(I)\Psi_c^{a,b_j}$ является общей собственной функцией операторов J_α, J_{β_j} и J_γ, аналитической при $z_1 = \ldots = z_n = 0$. Следовательно,

$$\mathbf{T}_1(I)\Psi_c^{a,b_j} = kF_D(c-a;\ b_j;\ c;\ z_j)\, s^{c-a} u_1^{b_1} \cdots u_n^{b_n} t^c. \tag{2.3}$$

Полагая в (2.2) и (2.3) $z_1 = \ldots = z_n = 0$, вычислим константу k и получим формулу преобразования

$$(1-z_1)^{-b_1} \cdots (1-z_n)^{-b_n} F_D\left(a;\ b_j;\ c;\ \frac{z_j}{z_j - 1}\right) = F_D(c-a;\ b_j;\ c;\ z_j) \tag{2.4}$$

(см. [4, гл. VII]). Подобным образом $T_{2,k}(I)\Psi_c^{a,b_j}$ дает формулы

$$(1-z_k)^{-a}F_D\left(a;\ b_j,\ b_k;\ c;\ \frac{z_k-z_j}{z_k-1},\ \frac{z_k}{z_k-1}\right)=$$

$$=F_D\left(a;\ b_j,\ c-\sum_l b_l;\ c;\ z_j,\ z_k\right),\qquad k=1,\ \ldots,\ n. \tag{2.5}$$

Остальные формулы преобразований для функции F_D получаются комбинациями (2.4) и (2.5). Формулы преобразований для функции ${}_2F_1$ следуют из (2.4) при $n=1$.

Вычисляя $T_3(I)\Psi_c^{a,b_j}$, мы находим, что функция

$$F_D\left(a;\ b_j;\ a+\sum_l b_l-c+1;\ 1-z_j\right), \tag{2.6}$$

аналитическая при $z_1=\ \ldots\ =z_n=1$, является решением уравнений (1.11). Вычисляя $T_5(I)\Psi_c^{a,b_j}$, мы видим, что функция

$$z_1^{-b_1}\cdots z_n^{-b_n}F_D\left(\sum_l b_l-c+1;\ b_j;\ \sum_l b_l-a+1;\ z_j^{-1}\right) \tag{2.7}$$

является еще одним решением уравнений (1.11). Подобным образом $T_{6,k}(I)\Psi_c^{a,b_j}$ дает решение

$$z_k^{-a}F_D\left(a;\ b_j,\ a-c+1;\ a-b_k+1;\ \frac{z_j}{z_k},\ \frac{1}{z_k}\right). \tag{2.8}$$

Если A находится в окрестности единицы группы $SL(2,\ \mathbb{C})$, то функции $T_j(A)\Psi_c^{a,b_j}$ можно разложить при помощи матричных элементов, полученных из рекуррентных формул (1.4). Если же A находится далеко от единицы (скажем, $A=I$), то эти разложения неприемлемы. Рассмотрим, например,

$$\exp\left(\lambda E^{\alpha\gamma}\right)\ \Psi(s,\ u_j,\ t,\ z_j)=\Psi\left(\frac{s}{1+\lambda st},\ u_j,\ t,\ \frac{z_j+\lambda st}{1+\lambda st}\right). \tag{2.9}$$

При малых $|\lambda|$ мы имеем

$$\exp\left(\lambda E^{\alpha\gamma}\right)\ \Psi_c^{a,b_j}=\sum_{h=0}^{\infty}\binom{\sum_l b_l-c}{h}\Psi_{c+h}^{a+h,\ b_j}\lambda^h,$$

т. е.

$$(1+\lambda)^{-a}F_D\left(a;\ b_j;\ c;\ \frac{z_j+\lambda}{1+\lambda}\right)=$$

$$=\sum_{h=0}^{\infty}\binom{\sum_l b_l-c}{h}\frac{(a)_h}{(c)_h}F_D(a+h;\ b_j;\ c+h;\ z_j)\lambda^h,\quad |\lambda|<1. \tag{2.10}$$

При $\lambda = 1$ и $|\tau| < 1$, где $\tau = s^{-1}t^{-1}$, функция $\exp(E^{\alpha\gamma})\Psi_c^{a, b_j}$ не будет аналитической при $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = \tau = 0$. Применяя оператор $\exp(E^{\alpha\gamma})$ к (2.6) и используя (1.12), (1.13), получаем

$$(1+\tau)^{-a} F_D\left(a;\ b_j;\ a+\sum_l b_l - c + 1;\ \tau(1-z_j)/(1+\tau)\right) = \sum_{h=0}^{\infty} B_h F_D(-h;\ b_j;\ c-a-h;\ z_j)\,\tau^h. \tag{2.11}$$

Чтобы вычислить константы B_h, положим $z_1 = \ldots = z_n = 0$:

$$(1+\tau)^{-a}F_D\left(a;\ b_j;\ a+\sum_l b_l - c+1;\ \tau/(1+\tau)\right) = (1+\tau)^{-a}{}_2F_1\left(a;\ \sum_l b_l;\ a+\sum_l b_l - c+1;\ \tau/(1+\tau)\right) = \sum_{h=0}^{\infty} B_h\tau^h.$$

Таким образом,

$$B_h = \binom{-a}{h}{}_2F_1\left[\begin{matrix}-h,\ \sum b_l\\ a+\sum b_l - c+1\end{matrix}\middle|\, 1\right] = \binom{-a}{h}\frac{(a-c+1)_h}{\left(a+\sum b_l - c+1\right)_h}, \tag{2.12}$$

что следует из [83] и теоремы Вандермонда [117].

Разлагая $\mathrm{T}_1(A)\Psi_\gamma^{\alpha, \beta_j}$ в степенной ряд по $\tau = s^{-1}$, мы получаем

$$a^{\alpha-\gamma}b^{-\alpha}\left(1+\frac{c\tau}{a}\right)^{\alpha+\sum\beta_l-\gamma}\left(1+\frac{d\tau}{b}\right)^{-\alpha}\left(1+\frac{c\tau(1-z_1)}{a}\right)^{-\beta_1}\cdots$$

$$\cdots\left(1+\frac{c\tau(1-z_n)}{a}\right)^{-\beta_n} F_D\left(\alpha;\ \beta_j;\ \gamma;\ \frac{z_j\tau}{(b+d\tau)\left[a+c\tau(1-z_j)\right]}\right) = \sum_{h=0}^{\infty} B_h F_D(-h;\ \beta_j;\ \gamma;\ z_j)\,\tau^h. \tag{2.13}$$

Полагая $z_1 = \ldots = z_n = 0$ и используя тождество (5.124) работы [83], мы находим

$$B_h = \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} a^{-\gamma-h}c^h\binom{-\gamma}{h}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-h,\ \alpha\\ \gamma\end{matrix}\middle|\, -\frac{1}{bc}\right), \qquad ad-bc=1. \tag{2.14}$$

Если $a = b = d = 1$, а $c = 0$, это тождество принимает вид

$$(1+\tau)^{-\alpha}F_D\left(\alpha;\ \beta_j;\ \gamma;\ \frac{z_j\tau}{1+\tau}\right) = \sum_{h=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{h}F_D(-h;\ \beta_j;\ \gamma;\ z_j)\,\tau^h, \qquad |\tau|<1; \tag{2.15}$$

если же $a=c=1$, $b=-w^{-1}$, оно сводится к соотношению

$$(1+\tau)^{\alpha+\sum\beta_l-\gamma}[1+(1-w)\tau]^{-\alpha}\prod_{l=1}^{n}[1+(1-z_l)\tau]^{-\beta_l}\times$$

$$\times F_{\mathrm{D}}\left(\alpha;\ \beta_j;\ \gamma;\ \frac{-z_j\tau w}{[1+(1-w)\tau][1+(1-z_j)\tau]}\right)=$$

$$=\sum_{h=0}^{\infty}\binom{-\gamma}{h}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-h,\ \alpha\\ \gamma\end{matrix}\middle|\,w\right)F_{\mathrm{D}}(-h;\ \beta_j;\ \gamma;\ z_j)\,\tau^h,\qquad(2.16)$$

$$|\tau|<\min\left(1,\ |1-z_j|^{-1},\ |1-w|^{-1}\right).$$

В общем случае производящие функции для F_{D} можно получить, потребовав, чтобы решение Ψ уравнений $C_k\Psi=0$, $1\leqslant k\leqslant n$, являлось общей собственной функцией $n+2$ коммутирующих (или почти коммутирующих) операторов, построенных при помощи обертывающей алгебры алгебры $sl(n+3,\ \mathbb{C})$. Такое требование к функции $\Psi_c^{a,\,b_j}$ ставится уравнениями (1.9).

В качестве примера найдем решение Ψ системы уравнений

$$E^{\alpha}\Psi=\Psi,\quad \mathrm{J}_{\beta_k}\Psi=\Bigl(\beta_k+{}^1/_2\sum_{j\neq k}\beta_j-{}^1/_2\gamma\Bigr)\Psi,\ \ k=1,\ \ldots,\ n,$$

$$(J_\gamma+{}^1/_2J_\alpha)\,\Psi=\Bigl({}^3/_4\gamma-{}^1/_2\sum_{l}\beta_l-{}^1/_2\Bigr)\Psi,\quad C_k\Psi=0,\qquad(2.17)$$

аналитическое при $z_1=\ldots=z_m=0$. Первые $n+2$ уравнений имеют общее решение

$$\Psi=f\left(z_j/s\right)\exp\left(-s^{-1}\right)u_1^{\beta_1}\ldots u_n^{\beta_n}t^{\gamma},$$

где f — произвольная функция. Подставляя это выражение в уравнения $C_k\Psi=0$, $1\leqslant k\leqslant n$, получаем

$$f(x_j)=\Phi(\beta_j;\ \gamma;\ x_j)=\sum_{m_j=0}^{\infty}\frac{(\beta_1)_{m_1}\ldots(\beta_n)_{m_n}}{(\gamma)_{m_1+\ldots+m_n}}\frac{x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}}{m_1!\ldots m_n!}=$$

$$=\lim_{\alpha\to\infty}F_D(\alpha;\ \beta_j;\ \gamma;\ z_j/\alpha).\qquad(2.18)$$

Разлагая $\mathbf{T}_1(A)\Psi$ в степенной ряд по $\tau=s^{-1}$, мы имеем

$$\exp\left[-\left(\frac{d\tau+b}{a+c\tau}\right)\right](a+c\tau)^{\Sigma\beta_l-\gamma}\prod_{l=1}^{n}[a+c\tau(1-z_l)]^{-\beta_l}\times$$

$$\times\Phi\left(\beta_j;\ \gamma;\frac{z_j\tau}{(a+c\tau)[a+c\tau(1-z_j)]}\right)=$$

$$=\sum_{h=0}^{\infty}B_hF_D\left(-h;\ \beta_j;\ \gamma;\ z_j\right)\tau^h,\quad ad-bc=1.\qquad(2.19)$$

Полагая $z_1 = \ldots = z_n = 0$ и используя производящую функцию (4.11) разд. 2.4 для многочленов Лагерра, получаем

$$B_h = a^{-\gamma} e^{-b/a} (c/a)^h L_h^{(\gamma-1)} ((ac)^{-1}), \tag{2.20}$$

где $L_n^a(z)$ — обобщенный многочлен Лагерра. При $b = c = 0$, $a = d = 1$ тождество (2.19) упрощается и принимает вид

$$\exp(-\tau)\,\Phi(\beta_j;\ \gamma;\ z_j\tau) = \sum_{h=0}^{\infty} F_D(-h;\ \beta_j;\ \gamma;\ z_j)(-\tau)^h/h!. \tag{2.21}$$

При $a = c = d^{-1} = w^{-1/2}$, $b = 0$ мы имеем

$$\begin{aligned} &\exp\left[-\frac{w\tau}{(1+\tau)}\right](1+\tau)^{\Sigma\beta_l-\gamma}[1+\tau(1-z_1)]^{-\beta_1}\ldots \\ &\quad\ldots[1+\tau(1-z_n)]^{-\beta_n}\ \Phi\left[\begin{matrix}\beta_j\\ \gamma\end{matrix}\middle|\frac{z_j w\tau}{(1+\tau)[1+\tau(1-z_j)]}\right] = \\ &\quad= \sum_{h=0}^{\infty} L_h^{(\gamma-1)}(w)\, F_D\left(\begin{matrix}-h;\ \beta_j\\ \gamma\end{matrix}\middle| z_j\right)\tau^h, \qquad |\tau| < \min(1, |z_j - 1|^{-1}) \end{aligned} \tag{2.22}$$

Если $b = -c = 1$, $a = d = 0$, то функция $T_1(A)\Psi$ принимает вид

$$e^s(1-z_1)^{-\beta_1}\ldots(1-z_n)^{-\beta_n} s^\gamma \Phi\left(\begin{matrix}\beta_j\\ \gamma\end{matrix}\middle|\frac{z_j s}{1-z_j}\right) u_1^{\beta_1}\ldots u_n^{\beta_n} t^\gamma.$$

Разлагая эту функцию по степеням переменной s, мы получаем

$$\begin{aligned} &e^s(1-z_1)^{-\beta_1}\ldots(1-z_n)^{-\beta_n}\Phi\left(\begin{matrix}\beta_j\\ \gamma\end{matrix}\middle|\frac{z_j s}{1-z_j}\right) = \\ &\qquad\qquad = \sum_{h=0}^{\infty} F_D\left(\begin{matrix}\gamma+h;\ \beta_j\\ \gamma\end{matrix}\middle| z_j\right)\frac{s^h}{h!}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Заметим, что функция Φ, определяемая соотношением (2.18), является конфлюентной формой функции F_D. При $n = 1$ мы имеем

$$\Phi\left(\begin{matrix}\beta\\ \gamma\end{matrix}\middle| z\right) = {}_1F_1\left(\begin{matrix}\beta\\ \gamma\end{matrix}\middle| z\right).$$

Нужно также заметить следующее: мы показали, что система уравнений (1.15) допускает частичное R-разделение переменных в координатах z_j/s, s, u_j, t и что решения с частично разделенными переменными характеризуются операторными уравнениями вида (2.17). Исчерпывающая классификация производящих функций для функции F_D возможна лишь после классификации систем координат, допускающих частичное разделение переменных для уравнений (1.15).

Используя дифференциальные рекуррентные формулы, которым удовлетворяют функции Φ и другие конфлюентные формы функции F_D, можно построить теорию алгебры Ли этих функций. Соответствующие алгебры Ли можно также получить как сужения алгебры симметрии функции F_D [91].

Функции Лауричеллы F_A, F_B, F_C также являются обобщениями функции ${}_2F_1$ на случай n переменных и могут изучаться при помощи методов теории алгебр Ли (см. [92, 93]). Однако не все рекуррентные формулы, которым удовлетворяет функция ${}_2F_1$, можно перенести на эти функции, представляющие поэтому меньший интерес, чем функции F_D. Аналогичным образом при помощи методов алгебр Ли можно изучать и обобщенные гипергеометрические функции ${}_pF_q$ [89].

Упражнения

1. Вывести соотношения коммутирования и показать, что $2(p+q)+1$ операторов

$$E^{\alpha_l}=t_l\left(z\partial_z+t_l\partial_{t_l}\right),\quad E_{\beta_k}=u_k^{-1}\left(z\partial_z+u_k\partial_{u_k}-1\right),$$

$$E^{\alpha_1\cdots\beta_q}=t_1\cdots t_p u_1\cdots u_q\partial_z,\quad T_l=t_l\partial_{t_l},\quad U_k=u_k\partial_{u_k},$$

$$l=1,\ \ldots,\ p,\quad k=1,\ \ldots,\ q,$$

образуют базис алгебры Ли $\mathcal{G}_{p,\,q}$.

2. Используя дифференциальные рекуррентные формулы (Б.20) для обобщенных гипергеометрических функций ${}_pF_q$, определить действие алгебры $\mathcal{G}_{p,\,q}$ на базисные функции

$$\Psi_{b_j}^{a_l}(t_l,\ u_j,\ z)={}_pF_q\left(\begin{matrix}a_l\\ b_j\end{matrix}\middle|\,z\right)t_1^{a_1}\cdots t_p^{a_p}u_1^{b_1}\cdots u_q^{b_q}.$$

3. Показать, что дифференциальное уравнение (Б.19) для функции ${}_pF_q$ эквивалентно уравнению $L_{p,\,q}\Psi_{b_j}^{a_l}=0$, где

$$L_{p,\,q}=E^{\alpha_1}\cdots E^{\alpha_p}-E^{\alpha_1\cdots\beta_q}E_{\beta_1}\cdots E_{\beta_q}.$$

4. Показать, что функции $\Psi_{b_j}^{a_l}$ являются решениями $\Psi(t_l,\ u_j,\ z)$ уравнений

$$L_{p,\,q}\Psi=0,\quad T_l\Psi=a_l\Psi,\quad U_k\Psi=b_k\Psi,\quad 1\leqslant l\leqslant p,\quad 1\leqslant k\leqslant q,$$

аналитическими при $t=0$. (Этим доказывается, что функция ${}_pF_q$ появляется в результате разделения переменных в дифференциальном уравнении в частных производных $L_{p,\,q}\Psi=0$.)

5. Доказать, что $\mathcal{G}_{p,\,q}$ — алгебра симметрии уравнения $L_{p,\,q}\Psi=0$.

6. Получить тождества для специальной функции ${}_pF_q$, соответствующие выражениям

$$\exp\left(cE^{\alpha_1}\right)\Psi_{b_j}^{a_i},\quad \exp\left(cE_{\beta_1}\right)\Psi_{b_j}^{a_l}\quad\text{и}\quad \exp\left(cE^{\alpha_1\cdots\beta_q}\right)\Psi_{b_j}^{a_l}.$$

7. Используя метод Вейснера и выражение $\exp\left(1E^{\alpha_1}\right)\Psi^{\sigma, a_i}_{b_j}$, получить тождество

$$(1-\tau)^{-\sigma}\, {}_pF_q\left(\begin{matrix}\sigma, a_i\\ b_j\end{matrix}\,\middle|\,\frac{-z\tau}{1-\tau}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\sigma+n)}{\Gamma(\sigma)\,n!}\, {}_pF_q\left(\begin{matrix}-n, a_i\\ b_j\end{matrix}\,\middle|\,z\right)\tau^n, \quad |\tau|<1.$$

8. Показать, что решение Ψ уравнения $L_{p,\,q}\Psi=0$, такое, что

$$E^{\alpha_1}\Psi=\Psi, \quad T_l\Psi=a_l\Psi, \qquad 1\leqslant l\leqslant p-1;$$

$$U_k\Psi=b_k\Psi, \qquad 1\leqslant k\leqslant q,$$

принимает вид

$$\Psi=f\left(z/t_p\right)\exp\left(-t_p^{-1}\right)t_1^{a_1}\,\dots\,t_{p-1}^{a_{p-1}}u_1^{b_1}\,\dots\,u_q^{b_q},$$

т. е. показать, что Ψ — решение с R-разделенными переменными в координатах $t_1, \dots, t_{p-1}, u_1, \dots, u_q, z/t_p$. Показать, что если Ψ — функция, аналитическая при $z=0$, то с точностью до некоторого постоянного множителя

$$f(x)={}_{p-1}F_q\left(\begin{matrix}a_i\\ b_j\end{matrix}\,\middle|\,x\right).$$

Применяя метод Вейснера, получить тождество

$$e^{\tau}\,{}_{p-1}F_q\left(\begin{matrix}a_i\\ b_j\end{matrix}\,\middle|\,-z\tau\right)=\sum_{n=0}^{\infty}{}_pF_q\left(\begin{matrix}a_i, -n\\ b_j\end{matrix}\,\middle|\,z\right)\frac{\tau^n}{n!}.$$

(Другие тождества для функции ${}_pF_q$, полученные теоретико-групповыми методами, см. в [89].)

9. Используя дифференциальные рекуррентные формулы (Б.5) для ${}_2F_1$, доказать соотношения (1.4) для частного случая $n=1$.

10. Доказать тождества (2.21)—(2.23) при $n=1$; в этом случае указанные тождества определяют производящие функции для ${}_2F_1$.

Приложение А

ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ

В этом разделе приводятся некоторые необходимые для работы с настоящей книгой основные факты, касающиеся групп и алгебр Ли. Полные доказательства и подробный анализ этих фактов можно найти в работе [86]. Поскольку почти все группы Ли, с которыми приходится сталкиваться в математической физике, являются группами матриц, мы ограничимся рассмотрением локальных линейных групп Ли.

Пусть W — открытое связное множество, содержащее $\mathbf{e} = (0, \ldots, 0)$ в пространстве R^n всех вещественных n-наборов $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$.

Определение. Любая n-мерная *вещественная локальная линейная группа Ли* G является множеством невырожденных комплексных $(m \times m)$-матриц $A(\mathbf{g}) = A(g_1, \ldots, g_n)$, определенных для каждого $\mathbf{g} \in W$ и таких, что

1) $A(\mathbf{e}) = E_m$ (единичная матрица);

2) элементы матрицы $A(\mathbf{g})$ суть аналитические функции параметров $g_1, \ldots, g_n$, и отображение $\mathbf{g} \to A(\mathbf{g})$ взаимно однозначно;

3) матрицы $\partial A(\mathbf{g})/\partial g^j$, $j = 1, \ldots, n$, линейно независимы для каждого $\mathbf{g} \in W$;

4) существует некоторая окрестность W' элемента $\mathbf{e}$ в пространстве R^n, $W' \subset W$, такая, что для любой пары n-наборов $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ из W' найдется n-набор $\mathbf{k} \in W$, удовлетворяющий условию $A(\mathbf{g})A(\mathbf{h}) = A(\mathbf{k})$, причем в левой части этого равенства производится обычное умножение матриц.

Локальную группу Ли можно рассматривать как окрестность единицы в глобальной группе Ли. (С теорией глобальных групп Ли можно познакомиться в [131, 134].) Если в приведенном выше определении W и W' являются окрестностями элемента $\mathbf{e} \in \mathbb{C}^n$, то G является *комплексной* локальной линейной группой Ли.

Параметры $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ определяют *локальные координаты* на группе G, и можно показать, что групповое умножение можно представить в локальных координатах через $\mathbf{k} = \varphi(\mathbf{g}, \mathbf{h})$, где φ — аналитическая векторнозначная функция своих $2n$ аргументов для $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$, достаточно близких к $\mathbf{e}$, и $\varphi(\mathbf{e}, \mathbf{g}) = \varphi(\mathbf{g}, \mathbf{e}) = \mathbf{g}$. Любое преобразование локальных координат $\mathbf{g}' = \mathbf{f}(\mathbf{g})$ приводит к новой группе Ли, которую мы идентифицируем с группой G.

Пусть $\mathbf{g}(t)$ — аналитическая кривая в R^n, такая, что $\mathbf{g}(0) = \mathbf{e}$. (Здесь t — вещественный параметр, а $\mathbf{g}(t)$ определена и аналитична по t при $|t| < 1$.) *Алгебра Ли* $\mathcal{G}$ группы G является множеством всех $(m \times m)$-матриц $\mathcal{A} = (d/dt) A(\mathbf{g}(t))\,|_{t=0}$, где $\mathbf{g}$ пробегает по всем аналитическим кривым, проходящим через $\mathbf{e}$. Отсюда следует, что каждая матрица $\mathcal{A} \in \mathcal{G}$ является линейной комбинацией n линейно независимых матриц

$$\mathcal{C}_j = \partial A(\mathbf{g})/\partial g_j\,|_{\mathbf{g}=\mathbf{e}}.$$

Действительно, $\mathcal{A} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathcal{C}_j$, где $\alpha_j = (dg_j/dt)(t)\,|_{t=0}$. Это говорит о том, что $\mathcal{G}$ является n-мерным вещественным векторным пространством, на котором введено сложение и скалярное умножение матриц. Матрицы $\mathcal{C}_j$ образуют базис алгебры $\mathcal{G}$.

Кроме того, матричный *коммутатор* $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}$ принадлежит $\mathcal{G}$ для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{G}$. В частности, $[\mathcal{C}_l, \mathcal{C}_s] = \sum_{i=1}^{m} c_j^{ls} \mathcal{C}_j$, $1 \leqslant l, s \leqslant n$, где $c_j^{ls} = c_{j,ls} - c_{j,sl}$ и

$$c_{j,ls} = \frac{\partial^2}{\partial g_l \partial h_s} \varphi_j(\mathbf{g}, \mathbf{h})\Big|_{\mathbf{g}=\mathbf{h}=\mathbf{e}}, \qquad \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n).$$

Экспонента $(m \times m)$-матрицы $\mathcal{A}$ является следующей $(m \times m)$-матрицей:

$$\exp(\mathcal{A}) = \sum_{p=0}^{\infty} (p!)^{-1} \mathcal{A}^p. \tag{A.1}$$

В (A.1) мы имеем сходящийся к аналитической функции ряд от элементов матрицы $\mathcal{A}$, причем $\exp(\mathcal{A})\exp(-\mathcal{A}) = E_m$, и для $(m \times m)$-матриц $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, для которых $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$, имеет место соотношение $\exp(\mathcal{A})\exp(\mathcal{B}) = \exp(\mathcal{A} + \mathcal{B})$.

Обозначим элементы матрицы $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, и определим *норму* матрицы $\mathcal{A}$ через $\|\mathcal{A}\| = \max\limits_{i,j} |\mathcal{A}_{ij}|$. Существуют положительные числа ε и δ, такие, что (1) $\exp(\mathcal{A}) \in G$ для каждой матрицы $\mathcal{A} \in \mathcal{G}$, если $\|\mathcal{A}\| < \varepsilon$, и (2) каждую матрицу $A \in G$, для которой $\|A - E_m\| < \delta$, можно представить как $A = \exp(\mathcal{A})$ для единственной матрицы $\mathcal{A} \in \mathcal{G}$, $\|\mathcal{A}\| < \varepsilon$. Экспоненциальное отображение является взаимно однозначным аналитическим отображением окрестности нулевой матрицы в $\mathcal{G}$

на окрестность единичной матрицы E_m в G. Представляя A через $\exp(\mathscr{A})$, где $\mathscr{A}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mathscr{C}_j$, можно параметризовать G, используя *канонические координаты* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Пусть U — открытое связное множество в $\mathbb{C}_p$. Любую точку $\mathbf{z}\in U$ можно задать через ее координаты: $\mathbf{z}=(z_1, \ldots, z_p)$, $z_j\in\mathbb{C}$. Пусть $\mathbf{Q}$ — отображение, которое каждой паре $(\mathbf{z}, A)$, $\mathbf{z}\in U$, $A\in G$, ставит в соответствие элемент $\mathbf{Q}(\mathbf{z}, A)$, принадлежащий $\mathbb{C}^p$. Будем писать $\mathbf{Q}(\mathbf{z}, A)=\mathbf{z}^A\in\mathbb{C}^p$.

Определение. Если $\mathbf{Q}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\mathbf{z}^A$ — аналитическое отображение от $p+n$ координат точки $\mathbf{z}$ и матрицы A;

2) $\mathbf{z}^{E_m}=\mathbf{z}$ для всех $\mathbf{z}\in U$;

3) если $\mathbf{z}^A\in U$, то $(\mathbf{z}^A)^B=\mathbf{z}^{(AB)}$ для всех A, $B\in G$, таких, что $AB\in G$,

то n-мерная локальная линейная группа Ли G действует на множество U как *локальная группа Ли преобразований.*

Предположим, что G — локальная группа Ли преобразований на множестве U и что $\mathscr{F}$ — пространство всех функций $f(\mathbf{z})$, аналитических в окрестности фиксированной точки $\mathbf{z}^0\in U$. (Предполагается, что окрестность зависит от функции.) *Локальная мультипликативная функция* ν для этой группы преобразований представляет собой скалярнозначную аналитическую функцию $\nu(\mathbf{z}, A)$ от $p+n$ координат, $\mathbf{z}\in U$, $A\in G$, и такую, что (1) $\nu(\mathbf{z}, E_m)=1$ и (2) $\nu(\mathbf{z}, AB)=\nu(\mathbf{z}, A)\nu(\mathbf{z}^A, B)$ для A, B, $AB\in G$. Заметим, что $\nu(\mathbf{z}, A)\equiv 1$ — (тривиальная) локальная мультипликативная функция. (С общей теорией локальных мультипликативных функций можно познакомиться в работе [83].)

Локальное мультипликативное представление $\mathbf{T}$, соответствующее G, U, $\mathscr{F}$, ν, является отображением $\mathbf{T}(A)$ пространства $\mathscr{F}$ на себя, определенным для $A\in G$ и $f\in\mathscr{F}$ посредством соотношения

$$[\mathbf{T}(A)f](\mathbf{z})=\nu(\mathbf{z}, A)f(\mathbf{z}^A). \qquad (\text{A}.2)$$

Так как ν — локальная мультипликативная функция, то

1) $\mathbf{T}(E_m)f=f$ для всех $f\in\mathscr{F}$;

2) $\mathbf{T}(AB)f=\mathbf{T}(A)[T(B)f]$ для всех A, $B\in G$, достаточно близких к E_m.

Пусть $A(\mathbf{g}(t))$ — однопараметрическая кривая, принадлежащая G, с элементом алгебры Ли

$$\mathscr{A}=\frac{d}{dt}A(\mathbf{g}(t))\big|_{t=0}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mathscr{C}_j, \qquad (\text{A. }3)$$

как определено выше. Пусть $\mathbf{T}$ — мультипликативное представление группы G и $f\in\mathscr{F}$.

Определение. *Обобщенная производная Ли* $D_{\mathcal{A}}$ функции f является аналитической функцией

$$D_{\mathcal{A}} f(\mathbf{z}) = \frac{d}{dt}[\mathbf{T}(A\mathbf{g}(t)) f](\mathbf{z})|_{t=0}. \qquad (\mathrm{A}.4)$$

Непосредственные вычисления дают

$$D_{\mathcal{A}} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} P_{ij}(\mathbf{z})\alpha_j\partial_{z_i} + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j P_j(\mathbf{z}), \qquad (\mathrm{A}.5)$$

где $D_{\mathcal{A}}$ зависит только от $\mathcal{A} \in \mathcal{G}$, а не от возможных кривых $\mathbf{g}(t)$, которые приводят к $\mathcal{A}$. Элементы $P_{ij}(\mathbf{z})$ вычисляются однозначно по $\mathbf{Q}(\mathbf{z}, A)$, а элементы $P_j(\mathbf{z})$ — по $\nu(\mathbf{z}, A)$. В частности, если $\nu \equiv 1$, то $P_j \equiv 0$ и $D_{\mathcal{A}}$ будет *обыкновенной* производной Ли.

Приведенные ниже теоремы, часто используемые в настоящей книге, предложены Софусом Ли [83, 86].

Теорема A.1. *Обобщенные производные Ли локального мультипликативного представления образуют алгебру Ли относительно операций сложения производных и скобки Ли*

$$[D_{\mathcal{A}}, D_{\mathcal{B}}] = D_{\mathcal{A}}D_{\mathcal{B}} - D_{\mathcal{B}}D_{\mathcal{A}}. \qquad (\mathrm{A}.6)$$

Эта алгебра является гомоморфным образом алгебры $\mathcal{G}$:

$$D_{(a\mathcal{A}+b\mathcal{B})} = aD_{\mathcal{A}} + bD_{\mathcal{B}}, \quad D_{[\mathcal{A},\mathcal{B}]} = [D_{\mathcal{A}}, D_{\mathcal{B}}], \qquad (\mathrm{A}.7)$$
$$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{G}, \quad a, b \in R.$$

(Смысл равенств (A.6) и (A.7) состоит в том, что они выполняются на любой функции $f \in \mathcal{F}$.)

Теорема A.2.

$$\begin{aligned}[\mathbf{T}(\exp(t\mathcal{A}))f](\mathbf{z}) &= \sum_{j=0}^{\infty}(j!)^{-1}t^j D_{\mathcal{A}}^j f(\mathbf{z}) = \\ &= (\exp D_{\mathcal{A}}) f(\mathbf{z}), \qquad \mathcal{A} \in \mathcal{G}.\end{aligned} \qquad (\mathrm{A}.8)$$

(*Этот результат справедлив для всех* $t \in R$ *при достаточно малых* $|t|$.)

Теорема A.3. *Пусть*

$$D_j = \sum_{i=1}^{p} P_{ij}(\mathbf{z})\partial_{z_i} + P_j(\mathbf{z}), \qquad j = 1, \ldots, n, \qquad (\mathrm{A}.9)$$

суть n *линейно независимых дифференциальных операторов, определенных и аналитических на некотором открытом множестве* $U \subseteq \mathbb{C}^p$. *Если существуют вещественные константы* c_{jk}^l, *та-*

кие, что

$$[D_j, D_k] = \sum_{l=1}^{n} c_{jk}^{l} D_l, \qquad 1 \leqslant j, k \leqslant n, \tag{A. 10}$$

то D_j *образуют базис алгебры Ли, т. е. алгебры обобщенных производных Ли для локального мультипликативного представления* $\mathbf{T}$ *локальной группы Ли* G. *Имеется базис* $\{\mathscr{C}_j\}$ *алгебры Ли* $\mathscr{G}$ *группы* G, *такой, что*

$$[\mathscr{C}_j, \mathscr{C}_k] = \sum_{l=1}^{n} c_{jk}^{l} \mathscr{C}_l.$$

Действие группы G *получается интегрированием уравнений*

$$\frac{dz_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(\mathbf{z}(t))\,\alpha_j, \qquad \frac{d}{dt}\ln \nu(\mathbf{z}^0, \exp(t\mathscr{A})) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j P_j(\mathbf{z}(t)), \tag{A. 11}$$

где

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}^0, \quad \nu(\mathbf{z}^0, E_m) = 1, \quad \mathbf{z}(t) = \mathbf{z}^{0\,(\exp(t\mathscr{A}))}, \quad 1 \leqslant i \leqslant p, \tag{A. 12}$$

а $\mathscr{A}$ *определено формулой* (A. 3).

Приложение Б

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В этом приложении мы собрали, как в справочнике, некоторые основные определения и формулы для тех специальных функций, которые наиболее часто встречаются в настоящей книге. Все эти функции (за исключением гамма-функции и эллиптических функций) являются решениями дифференциальных уравнений, получающихся в результате разделения переменных в уравнениях математической физики. Условные обозначения, которыми мы здесь пользуемся, предложены Бейтменом (см. [16, 17]); в этих работах читатель может найти много дополнительных сведений, касающихся свойств специальных функций.

1. Гамма-функция

Гамма-функция определяется интегралом

$$\Gamma(z)=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt, \qquad \operatorname{Re} z>0.$$

Аналитическим продолжением $\Gamma(z)$ можно расширить до функции, аналитической на всей комплексной плоскости, за исключением простых полюсов при $z=-n$, $n=0, 1, 2, \ldots$.

Функциональные соотношения:

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z), \qquad \Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin\pi z.$$

Частные значения:

$$\Gamma(n+1)=n!, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots; \quad \Gamma(^1/_2)=\sqrt{\pi}.$$

Биномиальные коэффициенты определяются соотношениями

$$\binom{\mu}{n}=\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)/n!=\Gamma(\mu+1)/\Gamma(\mu-n+1)\,n!. \tag{Б. 1}$$

2. Гипергеометрическая функция

Гипергеометрический ряд, сходящийся при $|z| < 1$, определяется следующим образом:

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}\middle| z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n, \qquad (\text{Б.2}) $$

где

$$ (a)_0 = 1, \quad (a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1), \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (\text{Б.3}) $$

есть символ Похгаммера. Аналитическим продолжением функцию ${}_2F_1$ можно расширить до функции, аналитической и однозначной на комплексной z-плоскости с разрезом вдоль положительной вещественной оси от $+1$ до $+\infty$.

Интегральное представление:

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}\middle| z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1+tz)^{-a}\, dt, $$

$$ \operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0, \quad |\arg(1-z)| < \pi. $$

При фиксированном z функция ${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}\middle| z\right)/\Gamma(c)$ является целой функцией параметров a, b, c. Если a или b — отрицательное число, а c не является отрицательным целым числом, то гипергеометрический ряд сводится к многочлену от z.

Дифференциальное уравнение:

$$ z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + [c-(a+b+1)z]\frac{du}{dz} - abu = 0. \qquad (\text{Б.4}) $$

Это уравнение имеет решение $u = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}\middle| z\right)$. Если c не является целым числом, то уравнение (Б.4) допускает линейно независимое решение $u = z^{1-c}\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} a-c+1, b-c+1 \\ 2-c \end{matrix}\middle| z\right)$.

Дифференциальные рекуррентные формулы:

$$ \frac{d}{dz}{}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}\middle| z\right) = \frac{ab}{c}{}_2F_1\left(\begin{matrix} a+1, b+1 \\ c+1 \end{matrix}\middle| z\right), $$

$$ \left[z\frac{d}{dz} + a\right]{}_2F_1 = a\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} a+1, b \\ c \end{matrix}\middle| z\right), $$

$$ \left[z\frac{d}{dz} + c-1\right]{}_2F_1 = (c-1)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c-1 \end{matrix}\middle| z\right), $$

$$ \left[z(1-z)\frac{d}{dz} - bz + c - a\right]{}_2F_1 = (c-a)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} a-1, b \\ c \end{matrix}\middle| z\right), $$

$$\left[(1-z)\frac{d}{dz}-(a+b-c)\right]{}_2F_1=(c-a)(c-b)c^{-1}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a, b\\ c+1\end{matrix}\middle| z\right),$$

$$\left[z(1-z)\frac{d}{dz}-bz+c-1\right]{}_2F_1=(c-1)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a-1, b\\ c-1\end{matrix}\middle| z\right),$$

$$\left[(1-z)\frac{d}{dz}-a\right]{}_2F_1=a(b-c)\,c^{-1}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a+1, b\\ c+1\end{matrix}\middle| z\right),$$

$$\left[z(1-z)\frac{d}{dz}-(b+a-1)z+c-1\right]{}_2F_1=$$

$$=(c-1)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a-1, b-1\\ c-1\end{matrix}\middle| z\right), \qquad (\text{Б}.5)$$

Соотношение симметрии:

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}a, b\\ c\end{matrix}\middle| z\right)={}_2F_1\left(\begin{matrix}b, a\\ c\end{matrix}\middle| z\right).$$

Формулы преобразования:

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}a, b\\ c\end{matrix}\middle| z\right)=(1-z)^{-a}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a, c-b\\ c\end{matrix}\middle| \frac{z}{z-1}\right)=$$

$$=(1-z)^{c-a-b}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}c-a, c-b\\ c\end{matrix}\middle| z\right).$$

Частные случаи. (i) Многочлены Лежандра:

$$P_n(x)={}_2F_1\left(\begin{matrix}n+1, -n\\ 1\end{matrix}\middle| \frac{1-x}{2}\right), \qquad n=0, 1, 2, \ldots;$$

(ii) многочлены Гегенбауэра:

$$C_n^{\nu}(x)=\frac{\Gamma(2\nu+n)}{\Gamma(2\nu)\,n!}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}2\nu+n, -n\\ \nu+1/2\end{matrix}\middle| \frac{1-x}{2}\right), \qquad n=0, 1, 2, \ldots;$$

(iii) многочлены Якоби:

$$P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)=\binom{n+\alpha}{n}{}_2F_1\left(\begin{matrix}n+\alpha+\beta+1, -n\\ \alpha+1\end{matrix}\middle| \frac{1-x}{2}\right), n=0, 1, 2, \ldots;$$

(iv) функции Лежандра:

$$P_\nu^\mu(z)=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\nu+1, -\nu\\ 1-\mu\end{matrix}\middle| \frac{1-z}{2}\right)\Big/\Gamma(1-\mu),$$

$$Q_\nu^\mu(z)=e^{i\mu\pi}2^{-\nu-1}\pi^{1/2}\Gamma(\nu+\mu+1)\,z^{-\nu-\mu-1}(z^2-1)^{\mu/2}\times$$

$$\times{}_2F_1\left(\begin{matrix}\nu/2+\mu/2+1, \nu/2+\mu/2+1/2\\ \nu+3/2\end{matrix}\middle| z^{-2}\right)\Big/\Gamma(\nu+3/2). \qquad (\text{Б}.6)$$

3. Конфлюентная гипергеометрическая функция

Функция ${}_1F_1\left(\begin{matrix}a\\c\end{matrix}\middle|z\right)$ определяется рядом

$$ {}_1F_1\left(\begin{matrix}a\\c\end{matrix}\middle|z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}, $$

сходящимся при всех z.

Интегральное представление:

$$ {}_1F_1\left(\begin{matrix}a\\c\end{matrix}\middle|z\right)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)}\int\limits_0^1 e^{zt}t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,dt,\qquad \operatorname{Re}c>\operatorname{Re}a>0. $$

Для фиксированного z функция ${}_1F_1\left(\begin{matrix}a\\c\end{matrix}\middle|z\right)\Big/\Gamma(c)$ является целой функцией от a и c.

Дифференциальное уравнение:

$$ z\frac{d^2u}{dz^2}+(c-z)\frac{du}{dz}-au=0. \tag{Б.7} $$

Это уравнение имеет решение $u={}_1F_1\left(\begin{matrix}a\\c\end{matrix}\middle|z\right)$; если же c не является целым числом, то уравнение допускает независимое решение $u=z^{1-c}\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}a-c+1\\2-c\end{matrix}\middle|z\right)$.

Дифференциальные рекуррентные формулы:

$$ \frac{d}{dz}\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}a\\c\end{matrix}\middle|z\right)=\frac{a}{c}\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}a+1\\c+1\end{matrix}\middle|z\right), $$

$$ \left[z\frac{z}{dz}-z+c-1\right]{}_1F_1=(c-1)\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}a-1\\c-1\end{matrix}\middle|z\right), $$

$$ \left[z\frac{d}{dz}+a\right]{}_1F_1=a\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}a+1\\c\end{matrix}\middle|z\right), $$

$$ \left[z\frac{d}{dz}-z+c-a\right]{}_1F_1=(c-a)\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}a-1\\c\end{matrix}\middle|z\right), $$

$$ \left[\frac{d}{dz}-1\right]{}_1F_1=\frac{a-c}{c}\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}a\\c+1\end{matrix}\middle|z\right), $$

$$ \left[z\frac{d}{dz}+c-1\right]{}_1F_1=(c-1)\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}a\\c-1\end{matrix}\middle|z\right). \tag{Б.8} $$

Формула преобразования:

$${}_1F_1\left(\begin{matrix}a\\c\end{matrix}\middle|z\right)=e^z\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}c-a\\c\end{matrix}\middle|-z\right).$$

Частные случаи. (i) Многочлены Лагерра:

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)\,n!}\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}-n\\\alpha+1\end{matrix}\middle|x\right),\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ldots;$$

(ii) функции Бесселя:

$$J_\nu(x)=\frac{e^{-ix}(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}\nu+1/2\\2\nu+1\end{matrix}\middle|2ix\right);$$

(iii) функции параболического цилиндра:

$$D_\nu(x)=2^{1/2}\exp\left(\frac{-x^2}{4}\right)\left[\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2-\nu/2)}\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}-\nu/2\\1/2\end{matrix}\middle|\frac{x^2}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\,x2^{-1/2}\frac{\Gamma(-1/2)}{\Gamma(-\nu/2)}\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}1/2-\nu/2\\3/2\end{matrix}\middle|\frac{x^2}{2}\right)\right].\tag{Б.9}$$

4. Функции параболического цилиндра

Функция $u=D_\nu(x)$, определенная формулой (Б.9iii), является решением уравнения

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left(\nu+\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4}\right)u=0.\tag{Б.10}$$

Линейно независимым решением этого уравнения является функция $u=D_{-\nu-1}(iz)$; если же ν не является целым числом, то решением будет функция $D_\nu(-z)$. Если $\nu=n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$ то

$$D_n(z)=2^{-n/2}\exp(-z^2/4)\,H_n(2^{-1/2}z),\tag{Б.11}$$

где

$$H_n(z)=(-1)^n\exp(z^2)\frac{d^n}{dz^n}\exp(-z^2)\tag{Б.12}$$

есть многочлен Эрмита порядка n.

Дифференциальные рекуррентные соотношения:

$$\left[\frac{d}{dz}+\frac{z}{2}\right]D_\nu(z)=\nu D_{\nu-1}(z),\qquad\left[-\frac{d}{dz}+\frac{z}{2}\right]D_\nu(z)=D_{\nu+1}(z).\tag{Б.13}$$

5. Функции Бесселя

Функции Бесселя $J_\nu(z)$ определяются соотношением (Б.9ii) или соотношением

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\, {}_0F_1\left(\nu+1 \,\middle|\, \frac{-z^2}{4}\right), \quad |\arg z| < \pi, \tag{Б.14}$$

где

$${}_0F_1(c\,|\,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(c)_n n!}; \tag{Б.15}$$

этот ряд сходится при всех x. Функция $z^{-\nu}J_\nu(z)$ является целой функцией от z.

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{du}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)u = 0. \tag{Б.16}$$

Это уравнение имеет решения $u_1 = J_\nu(z)$ и $u_2 = J_{-\nu}(z)$, линейно независимые, если ν не является целым числом n. Однако $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$, и при $\nu = n$ функция $J_n(z)$ является единственным решением уравнения (Б.16), ограниченным в окрестности $z = 0$.

Дифференциальные рекуррентные формулы:

$$\left[-\frac{d}{dz} + \frac{\nu}{z}\right] J_\nu(z) = J_{\nu+1}(z), \qquad \left[\frac{d}{dz} + \frac{\nu}{z}\right] J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z). \tag{Б.17}$$

Функции, рассмотренные нами в разд. 2—5, являются либо гипергеометрическими функциями ${}_2F_1$, либо различными частными или предельными случаями функции ${}_2F_1$. Однако функции, которые будут рассматриваться в разд. 6 и 7, являются обобщениями функции ${}_2F_1$, причем в разд. 6 рассматриваются обобщения на дифференциальные уравнения более высокого порядка, а в разд. 7 — обобщения на функции от нескольких переменных.

6. Обобщенные гипергеометрические функции

Функции ${}_pF_q$ определяются рядом

$${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_p \\ b_1, b_2, \ldots, b_q \end{matrix} \,\middle|\, z\right) = {}_pF_q(a_i;\ b_j;\ z) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \ldots (a_p)_n}{(b_1)_n, \ldots, (b_q)_n} \frac{z^n}{n!}. \tag{Б.18}$$

Если параметры a_i, b_j выбираются так, что этот ряд бесконечен и его члены не теряют смысла, то можно показать, что он сходится при всех z, если $p \leqslant q$, сходится при $|z| < 1$, если $p = q + 1$, и расходится при всех $z \neq 0$, если $p > q + 1$.

Дифференциальное уравнение:

$$\left(z\frac{d}{dz}+a_1\right)\ldots\left(z\frac{d}{dz}+a_p\right)u-\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}+b_1-1\right)\ldots$$
$$\ldots\left(z\frac{d}{dz}+b_q-1\right)u=0. \qquad (\text{Б}.19)$$

Это уравнение имеет решение $u = {}_pF_q(a_i; b_j; z)$, и, за исключением случаев, когда параметры a_i, b_j выбираются особым способом, это единственное решение уравнения (Б.19), ограниченное в окрестности точки $z = 0$.

Дифференциальные рекуррентные формулы:

$$\left(z\frac{d}{dz}+a_1\right){}_pF_q(a_i;\ b_j;\ z)=a_1\,{}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1+1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p\\ b_j\end{matrix}\middle|\,z\right],$$

$$\left(z\frac{d}{dz}+b_1-1\right){}_pF_q(a_i;\ b_j;\ z)=(b_1-1)\,{}_pF_q\left[\begin{matrix}a_i\\ b_1-1,\ b_2,\ \ldots,\ b_q\end{matrix}\middle|\,z\right],$$

$$\frac{d}{dz}\,{}_pF_q(a_i;\ b_j;\ z)=\frac{a_1\ldots a_p}{b_1\ldots b_q}\,{}_pF_q(a_i+1;\ b_j+1;\ z).$$
$$(\text{Б}.20)$$

Соотношение симметрии: функция ${}_pF_q(a_i; b_j; z)$ является симметрической функцией от $a_1, \ldots, a_p$ и $b_1, \ldots, b_q$.

7. Функции Лауричеллы

Функции Лауричеллы являются обобщениями функции ${}_2F_1$ на случай n переменных $z_1, \ldots, z_n$. Они подразделяются на четыре класса:

$$F_A\,[a;\ b_1,\ \ldots,\ b_n;\ c_1,\ \ldots,\ c_n;\ z_1,\ \ldots,\ z_n]=$$
$$=\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m_1+\ldots+m_n}(b_1)_{m_1}\cdots(b_n)_{m_n}}{(c_1)_{m_1}\cdots(c_n)_{m_n}}\,\frac{z_1^{m_1}\ldots z_n^{m_n}}{m_1!\ldots m_n!},\qquad(\text{Б}.21)$$
$$|z_1|+\ldots+|z_n|<1,$$

$$F_B\,[a_1,\ \ldots,\ a_n;\ b_1,\ \ldots,\ b_n;\ c;\ z_1,\ldots,\ z_n]=$$
$$=\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m_1}\cdots(a_n)_{m_n}(b_1)_{m_1}\cdots(b_n)_{m_n}}{(c)_{m_1+\ldots+m_n}}\,\frac{z_1^{m_1}\ldots z_n^{m_n}}{m_1!\ldots m_n!},\ (\text{Б}.22)$$
$$|z_1|<1,\ \ldots,|z_n|<1,$$

$$F_C[a; b; c_1, \dots, c_n; z_1, \dots, z_n] =$$

$$= \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\dots+m_n} (b)_{m_1+\dots+m_n}}{(c_1)_{m_1} \dots (c_n)_{m_n}} \frac{z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}}{m_1! \dots m_n!}, \qquad \text{(Б. 23)}$$

$$|z_1|^{1/2} + \dots + |z_n|^{1/2} < 1,$$

и

$$F_D[a; b_1, \dots, b_n; c; z_1, \dots, z_n] =$$

$$= \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\dots+m_n} (b_1)_{m_1} \dots (b_n)_{m_n}}{(c)_{m_1+\dots+m_n}} \frac{z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}}{m_1! \dots m_n!}, \qquad \text{(Б. 24)}$$

$$|z_1| < 1, \dots, |z_n| < 1.$$

В следующем разделе мы рассмотрим функции, которые нельзя получить как частные или предельные случаи функций гипергеометрического типа.

8. Функции Матье

Дифференциальное уравнение Матье имеет вид

$$\frac{d^2u}{dx^2} + (a - 2q \cos 2x) u = 0, \qquad \text{(Б. 25)}$$

где обычно переменная x имеет вещественное значение, а q — заданный вещественный ненулевой параметр. Если решения уравнения (Б.25) подчинить условию периодичности $u(x) = u(x + 2\pi)$, то это уравнение можно рассматривать как задачу Штурма — Лиувилля на собственные значения a. Из общей теории задач на собственные значения следует, что существует счетное бесконечное множество таких собственных значений, причем все они вещественны, имеют кратность, равную единице, ограничены снизу и стремятся к $+\infty$. В силу свойств симметрии уравнение (Б.25) имеет четыре типа периодических решений (называемых функциями Матье первого рода или просто функциями Матье):

$$\text{(i)} \quad \mathrm{ce}_{2n}(x, q) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}^{(2n)} \cos 2mx,$$

$$\text{(ii)} \quad \mathrm{ce}_{2n+1}(x, q) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}^{(2n+1)} \cos (2m + 1) x,$$

$$\text{(iii)} \quad \mathrm{se}_{2n+1}(x, q) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+1}^{(2n+1)} \sin (2m + 1) x,$$

$$\text{(iv)} \quad \mathrm{se}_{2n+2}(x, q) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+2}^{(2n+2)} \sin (2m + 2) x, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \qquad \text{(Б. 26)}$$

Коэффициенты A, B зависят от q, и рекуррентные формулы для этих коэффициентов легко получить подстановкой выражений (Б.26) в уравнение (Б.25) [7]. Собственные значения a, отвечающие функциям ce_{2n}, ce_{2n+1}, se_{2n+1}, se_{2n+2}, обозначаются через a_{2n}, a_{2n+1}, b_{2n+1}, b_{2n+2}. Этими собственными значениями являются такие значения a, при которых функции (Б.26), коэффициенты которых определяются рекуррентными формулами, принадлежат $L_2[-\pi, \pi]$, т. е. такие, при которых эти функции интегрируемы с квадратом. Всегда можно выбрать коэффициенты таким образом, чтобы они были вещественными, а функции Матье нормировать так, чтобы

$$\int_{-\pi}^{\pi} [u(x)]^2 dx = \pi. \qquad (Б.27)$$

Кроме того, в силу такой нормировки

$$\lim_{q\to 0} \mathrm{ce}_0(x, q) = 2^{-1/2},$$

$$\lim_{q\to 0} \mathrm{ce}_n(x, q) = \cos nx, \quad \lim_{q\to 0} \mathrm{se}_n(x, q) = \sin nx, \qquad n \neq 0. \qquad (Б.28)$$

Приложение В

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В этом приложении перечисляются основные свойства эллиптических функций, необходимые для работы с настоящей книгой. Подробные сведения относительно этих функций можно найти в работах [7, 17, 125].

Эллиптические функции зависят от комплексной переменной z и вещественного параметра (*модуля*) k, который в настоящей книге всегда удовлетворяет условию $0 \leqslant k \leqslant 1$. *Дополнительный модуль* имеет вид $k' = (1-k^2)^{1/2}$, $1 \geqslant k^2 \geqslant 0$. Эллиптические функции $\operatorname{sn}(z, k)$, $\operatorname{cn}(z, k)$, $\operatorname{dn}(z, k)$, или сокращенно $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$, определяются соотношениями

$$z = \int\limits_0^{\operatorname{sn} z} [(1-t^2)(1-k^2t^2)]^{-1/2}\,dt = \int\limits_{\operatorname{cn} z}^{1} [(1-t^2)(k'^2+k^2t^2)]^{-1/2}\,dt =$$

$$= \int\limits_{\operatorname{dn} z}^{1} [(1-t^2)(t^2-k'^2)]^{-1/2}\,dt. \qquad (\text{В}.1)$$

Значения этих интегралов зависят от контуров интегрирования, и эта зависимость отражается на свойствах периодичности эллиптических функций.

При $k \to 0$ мы имеем

$$\operatorname{sn}(z, k) \to \sin z, \quad \operatorname{cn}(z, k) \to \cos z, \quad \operatorname{dn}(z, k) \to 1,$$

а при $k \to 1$

$$\operatorname{sn}(z, k) \to \operatorname{th} z, \quad \operatorname{cn}(z, k) \to 1/\operatorname{ch} z, \quad \operatorname{dn}(z, k) \to 1/\operatorname{ch} z.$$

Свойства периодичности:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sn}(z+2K) = -\operatorname{sn}(z), && \operatorname{sn}(z+2iK') = \operatorname{sn} z, \\ &\operatorname{cn}(z+2K) = -\operatorname{cn}(z), && \operatorname{cn}(z+2iK') = -\operatorname{cn} z; \\ &\operatorname{dn}(z+2K) = \operatorname{dn}(z), && \operatorname{dn}(z+2iK') = -\operatorname{dn} z. \end{aligned} \qquad (\text{В}.2)$$

Здесь K, K' определяются соотношениями

$$K(k)=\int_0^{\pi/2}(1-k^2\sin^2\theta)^{-1/2}\,d\theta,\qquad K'=K(k'). \tag{B.3}$$

Основные соотношения:

$$\begin{gathered}\operatorname{sn}(-z)=-\operatorname{sn}(z),\quad \operatorname{cn}(-z)=\operatorname{cn}(z),\quad \operatorname{dn}(-z)=\operatorname{dn}(z),\\ \operatorname{sn}^2 z+\operatorname{cn}^2 z=1,\qquad k^2\operatorname{sn}^2 z+\operatorname{dn}^2 z=1.\end{gathered} \tag{B.4}$$

Частные значения:

$$\begin{aligned}&\operatorname{sn}0=0, && \operatorname{sn}K=1, && \operatorname{sn}(K+iK')=1/k,\\ &\operatorname{cn}0=1, && \operatorname{cn}K=0, && \operatorname{cn}(K+iK')=-ik'/k,\\ &\operatorname{dn}0=1, && \operatorname{dn}K=k', && \operatorname{dn}(K+iK')=0.\end{aligned} \tag{B.5}$$

В точке $z=iK'$ все эллиптические функции имеют простые полюсы. Если z возрастает от 0 до K, то функция $\operatorname{sn} z$ возрастает от 0 до 1, функция $\operatorname{cn} z$ убывает от 1 до 0, а функция $\operatorname{dn} z$ убывает от 1 до k'. Если z меняется от K до $K+iK'$, то функция $\operatorname{sn} z$ возрастает от 1 до k^{-1}, функция $\operatorname{cn} z$ имеет чисто мнимые значения и меняется от 0 до $-ik'/k$, а функция $\operatorname{dn} z$ убывает от k' до 0. Если z меняется от $K+iK'$ до iK', то функция $\operatorname{sn} z$ возрастает от $1/k$ до $+\infty$, функция $\operatorname{cn} z$ имеет чисто мнимые значения и меняется от $-ik'/k$ до $-i\infty$, а функция $\operatorname{dn} z$ имеет чисто мнимые значения и меняется от 0 до $-i\infty$.

Производные:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dz}\operatorname{sn} z=\operatorname{cn} z\operatorname{dn} z,\qquad \frac{d}{dz}\operatorname{cn} z=-\operatorname{sn} z\operatorname{dn} z,\\ \frac{d}{dz}\operatorname{dn} z=-k^2\operatorname{sn} z\operatorname{cn} z.\end{gathered} \tag{B.6}$$

Список литературы

1. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Пер. с англ. — Харьков: Гос. научн.-техн. изд-во Украины, 1939.
2. Альфорс (Ahlfors L.). Complex analysis. — New York: McGraw-Hill, 1953.
3. Андерсон, Кумеи, Вульфман (Anderson R., Kumei S., Wulfman C.). Invariants of the equations of wave mechanics, I, II. — Rev. Mexicana Fis., 1972, t. 21, 1—33, 35—57.
4. Аппель, Кампе де Ферье (Appell P., Kampe de Feriet J.). Functions hypergéométriques et hypersphériques. — Paris: Gauthiers-Villars, 1926.
5. Армстронг (Armstrong L., Jr.). Group properties of radial wavefunctions.— J. Phys. Colloq., C4, Suppl., 1970, v. 31, 17—23.
6. — $O(2, 1)$ and the harmonic oscillator radial function. — J. Math. Phys., 1971, v. 12, 953—957.
7. Арскотт (Arscott F.). Periodic differential equations. — New York: Macmillan (Pergamon), 1964.
8. — The Whittaker — Hill equation and the wave equation in paraboloidal coordinates. — Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1967, v. A67, 265—276.
9. Ахиезер Н. И., Глазман И. И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М. — Л.: Гостехиздат, 1950.
10. Баргманн (Bargmann V.). Zur Theorie des Wasserstoffatoms. — Z. Physik, 1936, B. 99, 576—582.
11. — Irreducible unitary represetations of the Lorentz group. — Ann. of Math., 1947, v. 48, 568—640.
12. — On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, I. — Comm. Pure Appl. Math., 1961, v. 14, 187—214.
13. Бейтмен (Bateman H.). Electrical and optical wave-motion. — New York: Dover, 1955.
14. — Partial differential equations of mathematical physics. — London and New York: Cambridge Univ. Press, 1969.
15. — The transformation of the electrodynamical equations. — J. London Math. Soc., 1909, v. 8, 223—264.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: Пер. с англ., Т. I. — М.: Наука, 1973.
17. — — Высшие трансцендентные функции: Пер. с англ. Т. II. — М.: Наука, 1974.
18. Блумен, Коул (Blumen G., Cole J.). The general similarity solution of the heat equation. — J. Math. and Mech., 1969, v. 18, 1025—1042.
19. — — Similarity methods for differential equations. — Applied Mathematical Sciences, v. 13. — New York: Springer, 1974.
20. Бойер (Boyer C.). The maximal kinematical invariance group for an arbitrary potential. — Helv. Phys. Acta, 1974, v. 47, 589—605.

21. — Lie theory and separation of variables for the equation $iU_t + \Delta_2 U - (\alpha/x_1^2 + \beta/x_2^2)U = 0$. — SIAM J. Math. Anal., 1976, v. 7, 230—263.
22. Бойер, Вольф (Boyer C., Wolf B.). Finite $SL(2, R)$ representation matrices of the D_k^+ series for all subgroup reductions. — Rev. Mexicana Fis., 1976, t. 25, 31—45.
23. Бойер, Калнинс, Миллер (Boyer C., Kalnins E., Miller W., Jr.). Lie theory and separation of variables, 6: The equation $iU_t + \Delta_2 U = 0$. — J. Math. Phys., 1975, v. 16, 499—511.
24. — — — Lie theory and separation of variables, 7: The harmonic oscillator in elliptic coordinates and Ince polynomials. — J. Math. Phys., 1975, v. 16, 512—517.
25. — — — Symmetry and separation of variables for the Helmholtz and Laplace equations. — Nagoya Math. J., 1976, v. 60, 35—80.
26. Бойер, Миллер (Boyer C., Miller W., Jr.). A classification of second-order raising operators for Hamiltonians in two variables. — J. Math. Phys., 1974, v. 15, 1484—1489.
27. Бохер (Bôcher M.). Die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie. — Leipzig: 1894.
28. Брэгг (Bragg L.). The radial heat polynomials and related functions. — Trans. Amer. Math. Soc., 1965, v. 119, 270—290.
29. Буххольц (Buchholz H.). The confluent hypergeometric function. — New York: Springer, 1969.
30. Вайнстейн (Weinstein A.). The generalized radiation problem and the Euler — Poisson — Darboux equation. — Summa Brasil. Math., 1955, t. 3, 125—146.
31. — On a Cauchy problem with subharmonic initial values. — Ann. Mat. Pura Appl. (4), 1957, t. 43, 325—340.
32. Ватсон Г. Теория бесселевых функций: Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1949.
33. Вейснер (Weisner L.). Group-theoretic origin of certain generating functions. — Pacific J. Math., 1955, v. 5, 1033—1039.
34. — Generating functions for Bessel functions. — Canad. J. Math., 1959, v. 11, 148—155.
35. — Generating functions for Hermite functions. — Canad. J. Math., 1959, v. 11, 141—147.
36. Вигнер Е. Теория групп и ее приложения в квантовомеханической теории атомных спектров: Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1961.
37. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представления групп. — М.: Наука, 1965.
38. Винтернитц П., Лукач И., Смородинский Я. А. Квантовые числа в малых группах группы Пуанкаре. — Ядерная физика, 1968, т. 7, вып. 1, 192—201.
39. Винтернитц П., Смородинский Я. А., Улир М., Фриш И. Группы симметрии в классической и квантовой механике. — Ядерная физика, 1968, т. 7.
40. Винтернитц П., Фриш И. Инвариантные разложения релятивистских амплитуд и подгруппы собственной группы Лоренца. — Ядерная физика, 1965, т. 1, вып. 5, 889—901.
41. Висванатан (Viswanathan B.). Generating functions for ultraspherical functions. — Canad. J. Math., 1968, v. 20, 120—134.
42. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Обобщенные функции. Вып. 4. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. — М.: Физматгиз, 1961.
43. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представление группы вращений и группы Лоренца, их приложения. — М.: Гостехиздат, 1958.
44. Гельфанд И. М., Наймарк М. А. Унитарные представления классических групп. — Труды Мат. ин-та им. Стеклова, т. 36. — 1950.
45. Гилмор Р. (Gilmore R.). Lie groups, Lie algebras and some of their applications. — New York: Wiley, 1974.

46. Гросс Л. (Gross L.). Norm invariance of mass-zero equations under the conformal group. — J. Math. Phys., 1964, v. 5, 687—695.
47. Давыдов А. С. Квантовая механика. — М.: Наука, 1973.
48. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы: Пер. с англ. Ч. 1. — М.: ИЛ, 1962; Ч. 2. — М.: Мир, 1966.
49. Дирак (Dirac P.). Discussion of the infinite distribution of electrons in the theory of the positron. — Proc. Cambridge Phil. Soc., 1934, v. 30, 150—163.
50. Инуи (Inoui T.). Unified theory of recurrence formulas. — Progr. Theoret. Phys., 1948, v. 3, 169—187, 244—261.
51. Инфельд, Халл (Infeld L., Hull T.). The factorization method. — Revs. Mod. Phys., 1951, v. 23, 21—68.
52. Иосида (Yosida K.). Lectures on differential and integral equations. — New York: Wiley (Interscience), 1960.
53. Калнинс (Kalnins E.). Mixed-basis matrix elements for the subgroup reductions of $SO(2,1)$. — J. Math. Phys., 1973, v. 14, 654—657.
54. — On the separation of variables for the Laplace equation in two- and three-dimensional Minkowski space. — SIAM J. Math. Anal., 1975, v. 6, 340—374.
55. Калнинс, Миллер (Kalnins E., Miller W., Jr.). Symmetry and separation of variables for the heat equation. — In: Proc. Conf. on Symmetry, Similarity and Group-Theoretic Methods in Mechanics. — Univ. of Calgary, Canada, 1974, p. 246—261.
56. — — Lie theory and separation of variables, 3: The equation $f_{tt} - f_{ss} = \gamma^2 f$. — J. Math. Phys., 1974, v. 15, 1025—1032; «Erratum». — J. Math. Phys., 1975, v. 16, 1531.
57. — — Lie theory and separation of variables, 4: The groups $SO(2,1)$ and $SO(3)$. — J. Math. Phys., 1974, v. 15, 1263—1274.
58. — — Lie theory and separation of variables, 5: The equations $iU_t + U_{xx} = 0$ and $iU_t + U_{xx} - c/x^2 U = 0$. — J. Math. Phys., 1974, v. 15, 1728—1737.
59. — — Lie theory and separation of variables, 8: Semisubgroup coordinates for $\Psi_{tt} - \Delta_2\Psi = 0$. — J. Math. Phys., 1975, v. 16, 2507—2516.
60. — — Lie theory and separation of variables, 9: Orthogonal R-separable coordinate systems for the wave equation $\Psi_{tt} - \Delta_2\Psi = 0$. — J. Math. Phys., 1976, v. 17, 331—335.
61. — — Lie theory and separation of variables, 10: Nonorthogonal R-separable solutions of the wave equation $\Psi_{tt} - \Delta_2\Psi = 0$. — J. Math. Phys., 1976, v. 17, 356—368.
62. — — Lie theory and separation of variables, 11: The EPD equation. — J. Math. Phys., 1976, v. 17, 369—377.
63. — — Lie theory and the wave equation in space-time, 1: The Lorentz group. — J. Math. Phys., 1977, v. 18, 1—16.
64. Калнинс, Миллер, Винтерницц (Kalnins E., Miller W., Jr., Winiternitz P.). The group $O(4)$, separation of variables and the hydrogen atom. — SIAM J. Appl. Math., 1976, v. 30, 630—664.
65. Картан (Cartan E.). Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos. — Rend. Circ. Math. Palermo, 1929, t. 53, 217—252.
66. Каструп (Kastrup H.). Conformal group and its connection with an indefinite metric in Hilbert space. — Phys. Rev., 1965, v. 140, B183—186.
67. Като Т. Теория возмущений линейных операторов: Пер. с англ. — М.: Мир, 1972.
68. Коревар (Korevaar J.). Mathematical methods. Vol. 1. — New York: Academic Press, 1968.
69. Корнвиндер (Koornwinder T.). The addition formula for Jacobi polyno-

mials and spherical harmonics. — SIAM J. Appl. Math., 1973, v. 25, 236—246.

70. — Jacobi polynomials. II. An analytic proof of the product formula. — SIAM J. Math. Anal., 1974, v. 5, 125—137.
71. Кулсон, Джозеф (Coulson C., Joseph A.). A constant of the motion for the two-center Kepler problem. — Internat. J. Quant. Chem., 1967, v. 1, 337—347.
72. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Ч. I. Нерелятивистская теория. — М.: Гостехиздат, 1948.
73. Лауричелла (Lauricella G.). Sulle funzioni ipergemetriche a pui variabili. — Rend. Circ. Mat. Palermo, 1893, t. 7, 111—113.
74. Леви-Леблон (Levy-Leblond J.-M.). Galilei group and Galilean invariance. — In: Group theory and its applications (Loebl E., ed.). Vol. II. — New York: Academic Press, 1971.
75. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. — М.: Наука, 1970.
76. Макаров А., Смородинский Я., Валиев К., Винтерниц П. (Makarov A., Smorodinsky J., Valiev K., Winternitz P.). A systematic search for nonrelativistic systems with dynamical symmetries. — Part I: The integrals of motion. — Nuovo Cimento, 1967, t. 52A, 1061—1084.
77. Мак-Брайд (McBride E.). Obtaining generating functions. — Berlin: Springer, 1971.
78. Макки (Mackey G.). Induced representations of groups and quantum mechanics. — New York: W. A. Benjamin, 1968.
79. Макфадьен, Винтерниц (Macfadyen N., Winternitz P.). Crossing symmetric expansions of physical scattering amplitudes; the $O(2, 1)$ group and Lamé functions. — J. Math. Phys., 1971, v. 12, 281—293.
80. Мейкснер, Шефке (Meixner J., Schäfke F.). Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen. — Berlin: Springer, 1965.
81. Миллер (Miller W., Jr.). On Lie algebras and some special functions of mathematical physics. — Amer. Math. Soc. Memoir, No. 50. — Providence: Amer. Math. Soc., 1964.
82. — Confluent hypergeometric functions and representations of a four-parameter Lie group. — Comm. Pure Appl. Math., 1966, v. 19, 251—259.
83. — Lie theory and special functions. — New York: Academic Press, 1968.
84. — Special functions and the complex Euclidean group in 3-space, I. — J. Math. Phys., 1968, v. 9, 1163—1175.
85. — Special functions and the complex Euclidean group in 3-space, III. — J. Math. Phys., 1968, v. 9, 1434—1444.
86. — Symmetry groups and their applications. — New York, Academic Press, 1972.
87. — Clebsch — Gordan coefficients and special function identities, I. The harmonic oscillator group. — J. Math. Phys., 1972, v. 13, 648—655.
88. — Clebsch — Gordan coefficients and special function identities, II. The rotation and Lorentz groups. — J. Math. Phys., 1972, v. 13, 827—833.
89. — Lie theory and generalized hypergeometric functions. — SIAM J. Math. Anal., 1972, v. 3, 31—44.
90. — Lie theory and Meijer's G function. — SIAM J. Math. Anal., 1974, v. 5, 309—318.
91. — Lie theory and the Lauricella functions F_D. — J. Math. Phys., 1972, v. 13, 1393—1399.
92. — Lie theory and generalizations of the hypergeometric functions. — SIAM J. Appl. Math., 1973, v. 25, 226—235.
93. — Lie algebras and generalizations of the hypergeometric functions. — In: Harmonic analysis on homogeneous spaces. — Proc. Symp. Pure Math., v. 26. — Providence: Amer. Math. Soc., 1973, p. 355—356.

94. — Symmetries of differential equations: The hypergeometric and Euler — Darboux equations. — SIAM J. Math. Anal., 1973, v. 4, 314—328.
95. — Lie theory and separation of variables, 1: Parabolic cylinder coordinates. — SIAM J. Math. Anal., 1974, v. 5, 626—643.
96. — Lie theory and separation of variables, 2: Parabolic coordinates.—SIAM J. Math. Anal., 1974, v. 5, 822—836.
97. Монтгомери, О'Рейфеартей (Montgomery W., O'Raifeartaigh L.), Noncompact Lie-algebraic approach to the unitary representations of $\widetilde{SU}(1, 1)$.— J. Math. Phys., 1974, v. 15, 380—382.
98. Морен (Maurin K.). General eigenfunction expansions and unitary representations of topological groups. — Warszawa: PWN, 1968.
99. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики: Пер. с англ. Т. 1. — М.: ИЛ, 1958.
100. Мошински, Селигман, Вольф (Moshinsky M., Seligman T., Wolf K.). Canonical transformations and the radial oscillator and Coulomb problems. — J. Math. Phys., 1972, v. 13, 901—907.
101. Мун, Спенсер (Moon P., Spencer D.). Field theory handbook. — Berlin: Springer, 1961.
102. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Гостехиздат, 1954.
103. Нейлор, Селл (Naylor A., Sell G.). Linear operator theory. — New York: Holt, 1971.
104. Нидерер (Niederer U.). The maximal kinematical invariance group of the harmonic oscillator. — Helv. Phys. Acta, 1973, v. 46, 191—200.
105. — Universität Zurich preprint. December 1973.
106. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. — Новосибирск: 1962.
107. Олевский М. Н. Триортогональные системы в пространствах постоянной кривизны, в которых уравнение $\Delta_2 u + \lambda u = 0$ допускает полное разделение переменных. — Матем. сб., 1950, т. 27 (69), вып. 2, 379—426.
108. Патера, Винтерниц (Patera J., Winternitz P.). A new basis for the representations of the rotation group: Lamé and Heun polynomials.— J. Math. Phys., 1973, v. 14, 1130—1139.
109. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными.—М.: Гостехиздат, 1953.
110. Пруговецки (Prugovecki E.). Quantum mechanics in Hilbert space. — New York: Academic Press, 1971.
111. Райнвилль (Rainville E.). The contiguous function relations for ${}_pF_q$ with applications. — Bull. Amer. Math. Soc., 1945, v. 51, 714—723.
112. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики: Пер. с англ. Т. 1. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1977.
113. Рис Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу: Пер. с франц. — 2-е изд. — М.: Мир, 1979.
114. Розенблюм, Уиддер (Rosenbloom P., Widder D.). Expansions in terms of heat polynomials and associated functions. — Trans Amer. Math. Soc., 1959, v. 92, 220—266.
115. Розенкранс (Rosencrans S.). Perturbation algebra of an elliptic operator.— J. Math. Anal. Appl., 1976, v. 56, 317—329.
116. Сегё Г. Ортогональные многочлены: Пер. с англ. — М.: Физматгиз, 1962.
117. Слейтер (Slater L.). Generalized hypergeometric functions. — London and New York: Cambridge Univ. Press, 1966.
118. Смородинский Я. А., Тугов И. И. О полных наборах наблюдаемых. — ЖЭТФ, 1966, т. 50, вып. 3, 653—659.
119. Стэкгоулд (Stakgold I.). Boundary value problems of mathematical physics. Vol. I. — New York: Macmillan, 1967.

120. Сэлли (Sally P.). Analytic continuation of the irreducible unitary representations of the universal covering group of $SL(2, R)$. — Amer. Math. Soc. Mem. No. 69. — Providence: Amer. Math. Soc., 1967.
121. Титчмарш (Titchmarsh E.). Eigenfunction expansions. Part 1. — 2nd ed. — London and New York: Oxford Univ. Press, 1962. [Имеется перевод изд. 1946 г.: Титчмарш Э. Ч. Разложения в собственных функциях, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Ч. 1. — М.: ИЛ, 1960[1]).]
122. Толмен (Talman J.). Special functions: A group theoretic approach. — New York: W. A. Benjamin, 1968.
123. Трусделл (Truesdell C.) An essay toward a unified theory of special functions. — Ann. of Math. Studies, No. 18. — Princeton Univ. Press, 1948.
124. Уиттекер (Whittaker E.). On Hamilton's principal function in quantum mechanics. — Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1941, v. A61, 1—19.
125. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа: Пер. с англ. Ч. 1., Ч. 2. — 2-е изд. — М.: Физматгиз, 1962, 1963.
126. Уорнер (Warner G.). Harmonic analysis on semi-simple Lie groups. Vol. I, Vol. II. — New York: Springer, 1972.
127. Урвин, Арскотт (Urwin K., Arscott F.). Theory of the Whittaker — Hill equation. — Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1970, v. A69, 28—44.
128. Фам Нгок Дин (Pham Ngoc Dinh A.). Opérateurs diagonaux associés a l'équation de Mathieu et applications. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1974, t. A279, 557—560.
129. Фридман, Руссек (Friedman B., Russek J.). Addition theorems for spherical waves. — Quart. Appl. Math., 1954, v. 12, 13—23.
130. Хамермеш М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам: Пер. с англ. — М.: Мир, 1966.
131. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства: Пер. с англ. — М.: Мир, 1964.
132. Хенричи (Henrici P.). Addition theorems for general Legendre and Gegenbauer functions. — J. Rat. Mech. Anal., 1955, v. 4, 983—1018.
133. Хида (Hida T.). Brownian motion (на японском языке). — Токуо: Iwanami Book Co., 1975.
134. Хознер, Шварц (Hausner M., Schwartz J.). Lie groups and Lie algebras. — New York: Gordon & Breach, 1968.
135. Холевински, Хаймо (Cholewinski F., Haimo D.). The dual Poisson — Laguerre transform. — Trans. Amer. Math. Soc., 1969, v. 144, 271—300.
136. Хохштадт (Hochstadt H.). Addition theorems for solutions of the wave equation in parabolic coordinates. — Pacific J. Math., 1957, v. 7, 1365—1380.
137. Черри (Cherry T.). Expansions in terms of parabolic cylinder functions. — Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), 1949, v. 8, 50—65.
138. Шапиро Р. Л. Специальные функции, связанные с представлениями группы $SU(n)$ класса I относительно $SU(n-1)$ $(n \geqslant 3)$. — Изв. высш. учебн. завед., Матем., 1968, т. 4 (71), 97—107.
139. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля: Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1963.
140. Шефке (Schäfke F.). — Einführung in die Theorie der speziellen Funktion der mathematischen Physik. — Berlin: Springer, 1963.
141. Шредингер (Schrödinger E.). On solving eigenvalue problems by factorization. — Proc. Roy. Irish Acad., 1940, v. A46, 9—16.

---

[1]) Поскольку в первом издании книги теорема, на которую ссылается автор, отсутствует, мы указываем второе издание этой же работы на английском языке. — *Прим. ред.*

142. Эйзенхарт Л. Непрерывные группы преобразований: Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1947.
143. Эрдейи (Erdélyi A.). Generating functions of certain continuous orthogonal systems. — Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1941, v. A61, 61—70.
144. Эстабрук, Гаррисон (Estabrook F., Harrison B.). Geometric approach to invariance groups and solution of partial differential systems. — J. Math. Phys., 1971, v. 12, 653—666.
145. Эстабрук, Уолквист (Estabrook F., Wahlquist H.). Prolongation structures of nonlinear evolution equations. — J. Math. Phys., 1975, v. 16, 1—7.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ