РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

REGULAR & CHAOTIC DYNAMICS

ТОМ VIII

СЕРИЯ

РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

ВЫШЛИ В СВЕТ:

1. *Э. Картан.* Интегральные инварианты (с добавлением В.В.Козлова).
2. *А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко.* Геометрия и топология интегрируемых геодезических потоков на поверхностях.
3. *А. Д. Морозов, Т. Н. Драгунов и др.* Инвариантные множества динамических систем в WINDOWS.
4. *В. В. Козлов.* Общая теория вихрей.
5. *М. Оден.* Вращающиеся волчки: курс интегрируемых систем.
6. *В. В. Голубев.* Талант без почвы.
7. *А. В. Борисов, И. С. Мамаев.* Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике.
8. *Д. Биркгоф.* Динамические системы.

ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ:

В. М. Алексеев. Лекции по небесной механике.

В. И. Арнольд, А. Авец. Эргодические проблемы классической механики.

Ю. Мозер. Интегрируемые системы.

Э. Уиттекер. Аналитическая динамика.

E-mail: borisov@uni.udm.ru
http://www.uni.udm.ru/rcd

Д.Биркгоф

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

перевод с английского
Е. М.Ливенсона
под редакцией: А.А.Маркова,
В.В.Немыцкого и В.В.Степанова

Редакция журнала
“Регулярная и хаотическая динамика”

Издательский дом
“Удмуртский университет”

1999

УДК 531.391
ББК 22.236.3
Б 64

Библиотека «R&C Dynamics», том VIII

Серия организована издательством «УРСС» и редакцией журнала «Регулярная и хаотическая динамика» в 1998 г.

Б 64 **Дж. Д. Биркгоф**
Динамические системы. — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. 408 стр.
ISBN 5-7029-0356-0

Классическая монография одного из самых значительных математиков этого века. После выхода этой книги динамические системы стали отдельной интенсивно развивающейся областью математики. Вышедшая в 1941 году на русском языке, она давно стала библиографической редкостью.

Предназначена для студентов и аспирантов, физиков и математиков, полезна для научных сотрудников и преподавателей.

ISBN 5-7029-0356-0 **ББК 22.236.3**

Оригинал-макет подготовлен в редакции журнала «Регулярная и хаотическая динамика»
http://www.uni.udm.ru/rcd

Содержание

Предисловие

Книга Дж. Биркгофа «Динамические системы» наряду со знаменитым сочинением Пуанкаре «Новые методы небесной механики» оказала решающее влияние на современное развитие теории дифференциальных уравнений и аналитической динамики. Изданная на русском языке в 1941 (!) году, она давным давно стала библиографической редкостью. Поэтому мы решили переиздать книгу Биркгофа, добавив две его работы, содержащие доказательство эргодической теоремы. По словам Н. Винера (кстати сказать, не любившего Биркгофа по причинам, которые он сам объяснил в своих воспоминаниях) эти работы — поразительное свидетельство «пробивной» силы Биркгофа. «Он занялся эргодической теоремой без всякой предварительной подготовки, не обладая никакими специальными знаниями в области интеграла Лебега и даже не особенно им интересуясь. Несмотря на это, руководствуясь только своей математической интуицией, он сумел получить одну из важнейших теорем, вплоть до настоящего времени занимающую центральное положение в теории интеграла Лебега.»

Надо признать, что текст книги Биркгофа не лишен недостатков: не все доказательства приведены аккуратно, имеются неточности и даже ошибки, но, как заметил однажды Безикович, репутация математика основывается на числе плохих доказательств, которые он придумал (поскольку работы первооткрывателей неуклюжи).

А. А. Марков, В. В. Немыцкий и В. В. Степанов провели очень значительную и содержательную работу по редактированию текста русского издания. Однако, по их признанию, наверное не все погрешности обнаружены, не все недостатки исправлены. Приведу поучительный пример.

В главах III и IV Биркгоф строит теорию «пфаффовых систем»

$$\sum_{j=1}^{2m}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}-\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right)\frac{dx_j}{dt}-\frac{\partial Z}{\partial x_i}=0,$$

параллельную теории гамильтоновых систем; здесь X_i и Z — известные функции от $x_1, \ldots, x_{2m}$, причем кососимметрический определитель

$$\left|\frac{\partial X_i}{\partial x_j}-\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right|$$

отличен от нуля. При этом Биркгоф не заметил, что (по теореме Дарбу) уравнение Пфаффа — это уравнение Гамильтона, записанное не в канонических переменных.

Задумывая переиздание книги Биркгофа, мы намеревались заново прокомментировать текст с учетом развития идей Биркгофа. Однако скоро нам стала очевидной невыполнимость такого проекта. Читатель может попробовать самостоятельно продвинуться в этом направлении, вооружившись девятитомником обзоров, объединенных под тем же названием «Динамические системы» и изданных ВИНИТИ АН СССР в 1985–1991 годах.

Переиздавая книгу Биркгофа, мы ориентировались прежде всего на молодых исследователей. Мы хотели дать им возможность познакомиться с оригинальным изложением идей выдающегося математика Джорджа Дэвида Биркгофа, которые никогда не потеряют своей значимости и актуальности.

В. В. Козлов

Предисловие редакторов перевода

Книга Биркгофа «Динамические системы» подводит итоги исследованиям автора в области динамики, выполненным до 1927 года. В этой области Биркгоф является основоположником новых точек зрения, новых методов исследования и автором целого ряда важных результатов. Здесь достаточно указать на его замечательное доказательство последней геометрической теоремы Пуанкаре о неподвижных точках при преобразовании плоского кольца, на применение им этой теоремы к теории периодических движений систем с двумя степенями свободы, на его теории центральных и рекуррентных движений. Все это в настоящее время входит в тот минимум знаний, которым должен обладать всякий желающий специализироваться в области качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений или в области теоретической механики. Перевод книги Биркгофа, предлагаемый вниманию читателя, является поэтому насущной потребностью.

Из сказанного ясно, что книга эта будет полезной прежде всего для аспирантов, специализирующихся в указанных областях. Можно не сомневаться в том, что и у более зрелых специалистов в этих областях она будет настольной книгой. Наконец, можно рассчитывать, что книга окажется полезной и для студентов старших курсов университетов.

Книга Биркгофа вышла впервые в свет в 1927 году. Работа автора в области динамики продолжалась, однако, и после этого. Редакция считает целесообразным по возможности отразить в предлагаемом читателю русском переводе и этот более поздний этап работы Биркгофа. С этой целью в русский перевод была включена относящаяся к 1931 г. статья Биркгофа «О существовании областей неустойчивости в динамике», являющаяся существенным дополнением к главе VIII. Другая включенная в русский перевод статья Биркгофа «Некоторые проблемы динамики», вышедшая в 1929 году, интересна тем, что в ней дается перечень некоторых важных, еще не решенных проблем.

Остальные две включенные в русский перевод статьи Биркгофа связаны с последней геометрической теоремой Пуанкаре. Одна из них содержит подробное доказательство одного существенного для динамических приложений обобщения этой теоремы, применяемого в тексте книги. Другая проливает новый свет на роль этой теоремы в динамике.

Редакция считает необходимым предостеречь читателя от некритического отношения к содержанию книги Биркгофа. В этой книге далеко не все рассуждения проведены с достаточной тщательностью. Это ведет к тому, что в отдельных случаях автор приходит даже к неправильным выводам. Часто бывает также, что выводы правильны, но рассуждения, на которых они основаны, недостаточны.

Все такие ошибки редакция старалась по возможности исправлять в многочисленных примечаниях, отмечая неправильные утверждения, заменяя неточные рассуждения строгими доказательствами и т. п. Во всей этой работе большую помощь оказал редакции переводчик книги Е. М. Ливенсон, за что редакция выражает ему свою искреннюю благодарность.

Следует, однако, отметить, что редакции удалось устранить далеко не все неясности. В некоторых случаях редакция была вынуждена ограничиться указанием на недостаточность того или иного рассуждения, не будучи в состоянии заменить его правильным. Возможно также, что некоторые ошибки ускользнули от внимания редакции. Все это обязывает читателя к самому строгому, критическому отношению к тексту книги.

А. Марков, В. Немыцкий, В. Степанов

Глава 1
Физическое рассмотрение динамических систем

§ 1. Вводные замечания. В динамике мы имеем дело с физическими системами, состояние которых в некоторый момент t вполне определяется значениями n вещественных переменных

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Таким образом, в динамической системе скорости изменения этих переменных, т. е.

$$\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt},$$

зависят только от значений самих этих переменных, так что закон движения системы может быть выражен посредством n дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Например, для материальной точки, свободно падающей в пустоте близ поверхности земли, x_1 и x_2 могут обозначать пройденное расстояние и скорость. В этом случае уравнения движения принимают вид

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = g,$$

где g — ускорение силы тяжести.

§ 2. Теорема существования. Переходим к формулировке теоремы существования для системы дифференциальных уравнений типа (1)[1]. Функции X_i мы будем считать вещественными и равномерно непрерывными в некоторой открытой, ограниченной n-мерной связной области R «пространства» точек, определенных прямоугольными координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Решением $x(t)$ уравнений (1) в открытом

[1] К первым пяти параграфам может быть указана следующая общая литература: *Picard E.*, Traité d'Analyse, т. 2, гл. 11 и т. 3, гл. 8; *Goursat E.*, Cours d'Analyse mathematique, т. 2, гл. 19; *Bliss G. A.*, Princeton Colloquium Lectures, гл. 3.

интервале $t' < t < t''$ называется такая система n функций $x_i(t)$, непрерывных вместе со своими первыми производными, которая для всякого t в указанном интервале определяет точку, принадлежащую R, и удовлетворяет дифференциальным уравнениям (1).

Теорема существования. *Если точка x^0 лежит в R на расстоянии не менее D от границы R и M есть верхняя граница функций $|X_i|$ в R, то существует решение $x(t)$ уравнений* (1), *определенное в интервале*

$$|t - t_0| < \frac{D}{\sqrt{n}M}$$

и обращающееся в x^0 при $t = t_0$.

Для доказательства этой теоремы заметим прежде всего, что любое решение уравнений (1), для которого $x(t_0) = x^0$, удовлетворяет n уравнениям:

$$S_i \equiv x_i - x_i^0 - \int_{t_0}^{t} X_i(x_1, \ldots, x_n)\, dt = 0. \tag{2}$$

Обратно, всякая система непрерывных функций $x(t)$ в R обращается в x^0 при $t = t_0$, а также удовлетворяет уравнениям (1), если все S_i обращаются тождественно в нуль в интервале, содержащем $t = t_0$ в качестве внутренней точки. Это можно проверить непосредственным дифференцированием.

Определим теперь систему бесконечно многозначных функций $X_i^m(x_1, \ldots, x_n)$, где значениями $X_i^m(x_1, \ldots, x_n)$ служит *любая* система $X_i(y_1, \ldots, y_n)$ в точке y, координаты которой отличаются от соответственных координат точки x не более, чем на $\frac{1}{m}$. Очевидно, что при этом определении мы можем в любой прямоугольной области, определяемой неравенствами

$$|x_i - a_i| \leqslant \frac{1}{m} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

принять за значения n составляющих X^m (т. е. $X_1^m, X_2^m, \ldots, X_n^m$) постоянные числа, а именно: составляющие $X(a_1, \ldots, a_n)$.

Если в выражении для S_i заменим X_i на X_i^m и x_i на x_i^m, то получим выражение

$$S_i^m \equiv x_i^m - x_i^0 - \int_{t_0}^{t} X_i^m(x_1^m, \ldots, x_n^m)\, dt.$$

Покажем, что при надлежащем выборе x_i^m и X_i^m эти выражения S_i^m обращаются тождественно в нуль.

Примем X^m равным $X(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ в области, определяемой неравенствами
$$|x_i - x_i^0| < \frac{1}{m} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Тогда интегралы в написанных выше выражениях для S_i^m будут линейными функциями t и, следовательно, x_i^m могут быть выражены формулами
$$x_i^0 + X_i(x_1^0, \ldots, x_n^0)(t - t_0),$$
пока точка x^m не выходит из этой области. С точки зрения геометрии можно сказать, что выражения для $x_i^m(t)$ дают параметрическое уравнение прямой, проходящей при $t = t_0$ через центр области. В частном случае, когда все функции X_i^m обращаются в нуль, прямая вырождается в точку x^0.

В случае, если прямая выходит за пределы области при $t = t_1 > t_0$ в точке y^0, мы можем принять эту точку за центр новой аналогичной области тех же размеров и в этой новой области определить x_i^m формулой
$$y_i^0 + X_i(y_i^0, \ldots, y_n^0)\,(t - t_1).$$

Выражения S_i^m будут тогда обращаться в нуль и при $t > t_1$, пока точка x^m не покинет эту вторую область в точке z^0 и т. д.

Таким образом, повторяя этот процесс, мы определяем x_i^m и X_i^m, обращающие S_i^m в нуль для $t > t_0$, и подобным же образом для $t < t_0$. Процесс может остановиться только в том случае, если ломаная линия, представляющая $x^m(t)$, пересечет границу R.

Но если мы будем считать t за время, а x_i^m за координаты точки x^m, то скорость ее, равная
$$\left[(X_1^m)^2 + \ldots + (X_n^m)^2\right]^{1/2},$$
очевидно, меньше $\sqrt{n}M$. Следовательно, точка x^m должна оставаться внутри R по крайней мере в интервале времени
$$|t - t_0| < \frac{D}{\sqrt{n}M}.$$

Таким образом, все функции x_i^m для всех значений i и m определены в этом интервале.

Придавая m значения 1, 2, 3, ..., получим бесконечную последовательность систем функций $x_i^m\,(t)$, определенных в этом интервале. Все эти системы лежат в R и, таким образом, ограничены в совокупности. Далее, из того, что $S_i^m = 0$ для всех i и m, следует неравенство:

$$|x_i^m(t+h) - x_i^m(t)| = \left| \int\limits_t^{t+h} X_i^m(x_1^m, \ldots, x_n^m)\, dt \right| \leqslant Mh.$$

Применив теперь к функциям x_i^m теорему, являющуюся частным случаем теоремы Асколи[1](1), найдем, что существует бесконечная последовательность $m_1, m_2, \ldots$ значений m, такая, что для каждого i, $x_i^{m_k}$ равномерно стремится к некоторой непрерывной функции $\overline{x}_i$.

Легко доказать, что полученные таким образом функции $\overline{x}_i$ удовлетворяют интегральной форме (2) наших дифференциальных уравнений. Действительно, так как S_i^m равны нулю при всех i и m, имеем

$$\overline{S}_i = \overline{S}_i - S_i^{m_k} = (\overline{x}_i - x_i^{m_k}) -$$
$$- \int\limits_{t_0}^{t} [X_i(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) - X_i^{m_k}(x_1^{m_k}, \ldots, x_n^{m_k})]\, dt.$$

При безграничном возрастании k первое слагаемое правой части равномерно стремится к нулю, так как $x_i^{m_k}$ равномерно стремится к x_i. Точно так же $X_i^{m_k}(x_1^{m_k}, \ldots, x_n^{m_k})$ равномерно стремится к $X_i(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$; в самом деле, при k достаточно большом $X_i(x_1^{m_k}, \ldots, x_n^{m_k})$ будет отличаться от $X_i(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ на сколь угодно малую величину, так как функции X_i по предположению равномерно непрерывны; $X_i(x_1^{m_k}, \ldots, x_n^{m_k})$ в свою очередь будет сколь угодно мало отличаться от $X_i^{m_k}(x_1^{m_k}, \ldots, x_n^{m_k})$ по определению функций X_i^m. Следовательно, подынтегральное выражение и вся правая часть формулы будут равномерно стремиться к нулю при возрастании k, откуда следует, что выражения $\overline{S}_i$, не зависящие от m, тождественно равны нулю, и, таким образом, $\overline{x}(t)$ дает требуемое решение уравнений (1).

Применяя повторно теорему существования, мы можем данное решение $x(t)$ уравнений (1) продолжить за пределы первоначального интервала его определения, если только при приближении t к одному из концов этого интервала $x(t)$ не приближается к границе R. Отсюда следует справедливость утверждения:

[1]Краткую формулировку и доказательство этой теоремы см. у *W. F. Osgood*, Annals of Mathematics, т. 14, сер. 2, стр. 152–153. (^{1}) (маленькие цифры в скобках означают ссылки на примечания редакции, помещенные в конце книги).

Любое решение $x(t)$ уравнений (1) может быть распространено на интервал, имеющий один из четырех видов:

$$-\infty < t < +\infty;$$
$$-\infty < t < t'';$$
$$t' < t < +\infty;$$
$$t' < t < t'',$$

где при приближении t к t' или t'' точка $x(t)$ приближается к границе R(2).

§ **3. Теорема единственности.** Мы можем доказать теперь, что существует только одно решение уравнений (1), обращающееся в x^0 при $t = t_0$ при условии, что функции X_i имеют непрерывные первые частные производные. Это последнее требование может быть заменено гораздо более общим условием Липшица.

Теорема единственности. *Если для всех i и для всех пар точек x, y в R функции X_i удовлетворяют условию Липшица*

$$|X_i(x_1, \ldots , x_n) - X_i(y_1, \ldots , y_n)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} L_j\, |x_j - y_j|,$$

где величины $L_1, \ldots , L_n$ суть постоянные положительные количества, то существует только одно решение $x(t)$ уравнений (1), такое, что $x(t_0) = x^0$.

Действительно, если бы два различных решения $x(t)$ и $y(t)$ принимали одни и те же значения x^0 при $t = t_0$, то из соответствующих интегральных форм дифференциальных уравнений мы сейчас же получили бы

$$x_i - y_i - \int_{t_0}^{t} [X_i(x_1, \ldots , x_n) - X_i(y_1, \ldots , y_n)]\, dt = 0$$

для всех i, откуда по условию Липшица

$$|x_i - y_i| \leqslant \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} L_j |x_j - y_j|\, |dt|$$

для всех i.

Обозначим через L наибольшее из чисел $L_1, \ldots, L_n$. И пусть Q будет максимум выражения $|x_i - y_i|$ для всех i и для t в некотором произвольном замкнутом интервале, содержащемся внутри интервала

$$|t - t_0| \leqslant \frac{1}{2nL},$$

$|x_i - y_i|$ достигает этого максимума Q при некотором i и при некотором значении t, скажем при t^*. Если мы подставим t^* вместо t в написанное выше неравенство для $|x_i - y_i|$ и применим теорему о среднем значении к правой части его, то получим

$$Q \leqslant nLQ|t^* - t_0| \leqslant \frac{Q}{2},$$

откуда следует, что Q может быть равно только нулю. Следовательно, два решения $x(t)$ и $y(t)$, совпадающие при $t = t_0$, будут совпадать в любом интервале, содержащемся в интервале $\left(t_0 - \dfrac{1}{2nL},\ t_0 + \dfrac{1}{2nL}\right)$. Теорема единственности получается повторным применением этого результата.

Физический смысл теорем существования и единственности заключается, очевидно, в том, что движение динамической системы вполне определяется дифференциальными уравнениями и начальными значениями переменных, определяющих состояние системы, — обстоятельство интуитивно очевидное.

Таким образом, для исследования какой-нибудь динамической проблемы требуется составление соответствующих дифференциальных уравнений при помощи принципов физики и затем математическое изучение свойств движений системы на основе этих уравнений.

§ 4. Две теоремы о непрерывности. Мы переходим теперь к двум теоремам о непрерывности, которые тесно связаны с только что доказанными теоремами.

Первая теорема о непрерывности. *Если функции X_i в уравнениях* (1) *удовлетворяют условию Липшица в R, то единственное решение $x(t)$, обращающееся в x^0 при $t = t_0$, представляет собою систему непрерывных функций от n параметров x_i^0 и от $t - t_0$.*

Заметим прежде всего, что если мы заменим независимую переменную t на $t' = t - t_0$, то новые дифференциальные уравнения будут отличаться от уравнений (1) только тем, что вместо t будет стоять t', а в начальных условиях t_0 будет заменено нулем. Следовательно, в выражениях для x_i величины t и t_0 встречаются только в комбинации $t - t_0$, так что достаточно показать непрерывность x_i относительно x_i^0 и t в случае, когда $t_0 = 0$.

Эта теорема может быть доказана обобщением метода, примененного выше при доказательстве теоремы единственности. Если x_i и y_i — два решения уравнений (1), обращающиеся при $t = 0$ соответственно в x_i^0 и y_i^0, то, вычитая соответственные интегральные уравнения, получим, очевидно,

$$x_i - y_i = x_i^0 - y_i^0 + \int_0^t [X_i(x_1, \ldots, x_n) - X_i(y_1, \ldots, y_n)]\, dt$$

при условии, что t лежит в интервале, в котором определены как $x_i(t)$, так и $y_i(t)$.

Предположим, что x^0 лежит в R на расстоянии не менее D от его границы, и пусть, далее, расстояние y^0 и x^0 будет не более $D/2$. Это последнее условие будет удовлетворено, если наибольшая из разностей $|x_i^0 - y_i^0|$ не будет превосходить $D/2\sqrt{n}$. Кроме того ограничим временно t интервалом $|t| \leqslant \dfrac{1}{2nL}$.

Если при этих условиях обозначить через Q^0 наибольшую из разностей $|x_i^0 - y_i^0|$, а через Q максимум разности $|x_i - y_i|$ для всех i и для t, лежащего в рассматриваемом интервале, то из написанного выше равенства следует

$$Q \leqslant Q^0 + nLQ\,|t^*| \leqslant Q^0 + \frac{Q}{2}$$

для произвольного значения t^* величины t.

Таким образом, в указанном интервале всегда имеем $Q \leqslant 2Q_0$, т. е. разность $x_i - y_i$ не может по абсолютной величине превзойти наибольшую из удвоенных начальных разностей $|x_j^0 - y_j^0|$. Следовательно, если y^0 стремится к x^0, то y стремится к x равномерно в указанном интервале. Так как во всей области R $|dx_i/dt| \leqslant M$, то функции x_i непрерывны относительно x_i^0 и t в указанном интервале для t.

Остается лишь снять ограничение с интервала для t.

В любом замкнутом интервале $0 \leqslant t \leqslant T$, в котором $x(t)$ определено, точка x все время находится на расстоянии, превышающем некоторое положительное число D, от границы области R. Следовательно, в интервале для t, имеющем постоянную длину $\dfrac{1}{nL}$ с центром в любой точке t' интервала $0 \leqslant t \leqslant T$, каждая функция $x_i(t)$ есть непрерывная функция от $x_i(t')$ и от $t - t'$. Мы можем выбрать точки

$$t_0 = 0,\ t_1,\ \ldots,\ t_k = T$$

так, что $0 < t_1 - t_0 < \dfrac{1}{2nL}$, $0 < t_2 - t_1 < \dfrac{1}{2nL}$ и т. д. Тогда, если мы положим $|x_i^0 - y_i^0| \leqslant q$, то получим последовательно

$$|x_i(t_1) - y_i(t_1)| \leqslant 2q,\ \ldots,\ |x_i(t_k) - y_i(t_k)| \leqslant 2^k q.$$

Отсюда очевидна справедливость доказываемой теоремы в любом интервале для t.

Вторая теорема о непрерывности. *Если функции X_i имеют в R непрерывные и ограниченные первые частные производные и эти частные производные сами удовлетворяют условию Липшица, то составляющие $x_i(t)$ единственного решения $x(t)$ уравнений (1), обращающегося в x^0 при $t = t_0$, имеют непрерывные первые частные производные по всем x_i^0 и по $t - t_0$.*

Для доказательства этой теоремы мы возвращаемся к рассмотрению равенства, написанного в начале доказательства предыдущей теоремы. Мы будем предполагать совершенно так же, как в предыдущей теореме, что y достаточно близко к x в интервале $|t - t_0| \leqslant T$, но кроме того потребуем, чтобы отрезок, соединяющий точки $x(t)$ и $y(t)$, целиком лежал в R для любого t в тех же пределах, для чего достаточно, чтобы $y(t)$ лежало от $x(t)$ на расстоянии, меньшем D. Предыдущая теорема показывает, что эти условия будут выполнены, если разности $|y_i^0 - x_i^0|$ достаточно малы.

Теорема о среднем значении дает

$$X_i(y_1, \ldots, y_n) - X_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(y_j - x_j),$$

где аргументы выражений $\dfrac{\partial X_i}{\partial x_j}$ суть $z_{i1}, \ldots, z_{in}$, причем

$$z_{ij} = x_j + \theta_i(y_j - x_j) \quad (0 < \theta_i < 1),$$

так что z_i лежит в R. Таким образом, наше равенство принимает вид:

$$y_i - x_i = y_i^0 - x_i^0 + \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(y_j - x_j)\, dt.$$

Пусть $y_2^0, \dots, y_n^0$ взяты соответственно равными $x_2^0, \dots, x_n^0$ и y_1^0 стремится к x_1^0. Если мы введем обозначения

$$\frac{y_1 - x_1}{y_1^0 - x_1^0} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_1^0}, \dots, \frac{y_n - x_n}{y_1^0 - x_1^0} = \frac{\Delta x_n}{\Delta x_1^0},$$

то n написанных выше уравнений примут вид

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_1^0} = 1 + \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_1}{\partial x_j} \frac{\Delta x_j}{\Delta x_1^0}\, dt,$$

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1^0} = 0 + \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_2}{\partial x_j} \frac{\Delta x_j}{\Delta x_1^0}\, dt,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\Delta x_n}{\Delta x_1^0} = 0 + \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_n}{\partial x_j} \frac{\Delta x_j}{\Delta x_1^0}\, dt.$$

Для $|t - t_0|$ достаточно малого, в частности, для

$$|t - t_0| \leqslant \frac{1}{2nL'},$$

где L' есть верхняя граница $|\partial X_i / \partial x_j|$ в R, как легко видеть, ни один из интегралов, стоящих в правых частях предыдущих равенств, не превосходит $Q'/2$, где Q' есть максимум $|\Delta x_j / \Delta x_1^0|$ для всех j в этом интервале t. Подставляя в предыдущие равенства значения t и i, дающие максимум выражения $\Delta x_j / \Delta x_1^0$, подобно тому, как мы это делали в предыдущем параграфе, получим, что Q' не может быть больше 2. Далее, дифференцируя эти равенства и принимая во внимание, что $Q' \leqslant 2$, убедимся, что производные отношений $\Delta x_i / \Delta x_1^0$ по x не превосходят $2nL'$.

Из этого следует, что мы можем применить теорему Асколи и заставить Δx_1^0 стремиться к нулю таким образом, чтобы каждое из отношений $\Delta x_i / \Delta x_1^0$ стремилось к пределу, который мы обозначим через y_i. Легко видеть, что эти пределы будут удовлетворять интегральным уравнениям:

$$y_1 = 1 + \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_1}{\partial x_j} y_j \, dt,$$

$$y_2 = 0 + \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_2}{\partial x_j} y_j \, dt,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_n = 0 + \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_n}{\partial x_j} y_j \, dt.$$

Эти условия, очевидно, эквивалентны следующим n уравнениям вариации

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} y_j \tag{3}$$

и совокупности начальных условий

$$y_1(t_0) = 1, \quad y_2(t_0) = 0, \ \dots, \quad y_n(t_0) = 0.$$

Но эти n уравнений и начальные условия, присоединенные к уравнениям (1) и начальным условиям $x_i(t_0) = x_i^0$, дают систему $2n$ уравнений и $2n$ начальных условий для $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, по отношению к которым имеют место теорема существования и теорема единственности (напомним, что $\partial X_i / \partial x_j$ так же, как X_i, удовлетворяют условию Липшица). Поскольку функции y_i определяются однозначно, то, следовательно, $\Delta x_i / \Delta x_1^0$ стремится к y_i, каким бы образом мы ни устремляли Δx_i^0 к нулю[1].

Отсюда видно, что для всех i и j частные производные $y_i = \partial x_i / \partial x_j^0$ существуют и удовлетворяют уравнениям вариации и начальным условиям:

$$y_1(t_0) = 0, \dots, y_{j-1}(t_0) = 0, \ y_j(t_0) = 1, \ y_{j+1}(t_0) = 0, \dots, y_n(t_0) = 0.$$

Применяя первую теорему о непрерывности, получим, что эти функции $\partial x_i / \partial x_j^0$ не только существуют, но и непрерывны по x_i^0 и по $t - t_0$.

[1]В противном случае мы нашли бы по теореме Асколи другую, отличную от первой, систему y_i, обладающую теми же свойствами.

§ 5. **Некоторые обобщения.** Вышеприведенные теоремы могут быть обобщены и дополнены в различных направлениях.

Прежде всего рассмотрим случай, когда X_i суть функции от $x_1, \ldots, x_n$ и параметра c, определенные для всех x в области R и для $c' < c < c''$, равномерно непрерывные в той же области и кроме того удовлетворяющие условию Липшица относительно $n+1$ переменных $x_1, \ldots, x_n, c$. Рассмотрим систему $n+1$ дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = 0$$

с начальными условиями

$$x_i(t_0) = x_i^0 \quad (i = 1, \ldots, n), \ x_{n+1}(t_0) = c,$$

где x^0 находится в R и $c' < c < c''$. Теорема существования, теорема единственности и первая теорема о непрерывности могут быть применены к этим уравнениям. Из этих теорем следует, что единственное решение $x_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ существует и непрерывно по x_i^0 и c. Но это решение, очевидно, удовлетворяет уравнениям

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, c) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

и начальным условиям $x_i(t_0) = x^0$.

Если X_i кроме того обладает ограниченными первыми частными производными по $x_1, \ldots, x_n, c$, удовлетворяющими условию Липшица относительно этих переменных, то по второй теореме о непрерывности $\partial x_i/\partial c$ будут существовать.

Следовательно, теоремы существования, единственности и непрерывности непосредственно распространяются на случай, когда правые части X_i *дифференциальных уравнений* (1) *содержат один или несколько параметров.*

Далее положим, что выражение X_i содержит t наряду с $x_1, \ldots, x_n$.

Рассматривая, аналогично предыдущему, систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \quad (i = 1, \ldots, n), \ dx_{n+1}/dt = 1$$

с $n+1$ начальным условием

$$x_i(t_0) = x_i^0 \quad (i = 1, \ldots, n), \quad x_{n+1}(t_0) = t_0,$$

мы видим, что при надлежащем ограничении для t эта система имеет решение и что это решение единственно, если функции $X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ удовлетворяют условию Липшица относительно $x_1, \ldots, x_n, t$. Легко формулировать для этой системы также утверждение, соответствующее первой и второй теореме непрерывности.

Таким образом, подобное же обобщение может быть сделано для случая, когда функции X_i, зависят от времени t.

Далее положим, что X_i зависят только от $x_1, \ldots, x_n$ и обладают непрерывными частными производными включительно до порядка $\mu > 0$, причем частные производные порядка μ удовлетворяют условию Липшица. Приведенное выше доказательство второй теоремы о непрерывности показывает, что данная система (1) дифференциальных уравнений может быть заменена подобной же системой порядка $2n$ с зависимыми переменными $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$, где, например, $y_i = \partial x_i/\partial x_1^0$; эта система порядка $2n$ состоит, разумеется, из данных n уравнений и из n уравнений вариации. Если мы теперь применим вторую теорему о непрерывности к этой дополненной системе, то получим непосредственно, что вторые частные производные $\partial^2 x_i/\partial x_j^0 \partial x_i^0$ и подобным же образом $\partial^2 x_i/\partial x_j^0 \partial x_k^0$ существуют и непрерывны. В дополненной системе уравнений правые части будут вообще иметь непрерывные частные производные вплоть до порядка $\mu - 1$, причем последние будут удовлетворять условию Липшица.

Повторяя вышеприведенное рассуждение, мы докажем существование частных производных $x_1, \ldots, x_n$ по $x_1^0, \ldots, x_n^0$ включительно до порядка μ.

В случае, если функции $X_i(x_1, \ldots, x_n)$ имеют конечные частные производные до порядка μ включительно, причем частные производные порядка μ удовлетворяют условию Липшица, то составляющие $x_1, \ldots, x_n$, рассматриваемые как функции от $x_1^0, \ldots, x_n^0, t - t_0$, обладают непрерывными частными производными до порядка μ включительно.

Важным частным случаем этой теоремы, с которым мы только и будем иметь дело в дальнейшем, будет тот случай, когда функции X_i имеют непрерывные частные производные по $x_1, \ldots, x_n$ любого порядка. В этом случае составляющие $x_1, \ldots, x_n$ будут иметь непрерывные частные производные любого порядка по $x_1^0, \ldots, x_n^0, t - t_0$

Если кроме того функции X_i суть аналитические функции от $x_1, \ldots, x_n$, то составляющие $x_1, \ldots, x_n$, рассматриваемые как функции от $x_1^0, \ldots, x_n^0, t - t_0$ будут аналитическими функциями этих переменных.

Наметим вкратце доказательство этого важного факта.

Заметим прежде всего, что достаточно показать, что единственное решение уравнений (1), обращающееся в x^0 при $t = 0$, имеет в качестве составляющих аналитические функции от $x_1^0, \ldots, x_n^0, t$. Как и во второй теореме о непрерывности, общий случай мы можем привести к этому, заменив в дифференциальных уравнениях t на $t' = t - t_0$.

Далее, полагая

$$x_1' = x_1 - x_1^0, \ \ldots, \quad x_n' = x_n - x_n^0$$

и подставляя $x_1', \ldots, x_n'$ в наши уравнения, мы видим, что мы можем ограничиться доказательством аналитичности $x_1, \ldots, x_n$ в окрестности начала координат. Но так как X_i в этом случае суть аналитические функции в окрестности начала, то мы можем написать:

$$X_i \ll \frac{M}{1 - \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{r}} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где M — достаточно большое положительное количество, а r — достаточно малое положительное количество. Написанная формула означает, что все коэффициенты разложения X_i в ряд по степеням x_i не превосходят по абсолютной величине соответствующих коэффициентов разложения в ряд правой части[1].

Рассмотрим вспомогательную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{M}{1 - \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{r}},$$

единственным решением которой, удовлетворяющим условию

$$x_1 = x_1^0, \ \ldots \quad x_n = x_n^0$$

при $t = 0$, будет, очевидно,

$$x_i = x_i^0 + u \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где u определяется уравнением

$$\left(1 - \frac{x_1^0 + \ldots + x_n^0}{r}\right) u - \frac{nu^2}{2r} = Mt.$$

В этом случае $x_1, \ldots, x_n$ очевидно, аналитические функции от $x_1^0, \ldots, x_n^0, t$; далее, явное выражение для $x_1, \ldots, x_n$, получаемое последовательным дифференцированием вспомогательной системы уравнений и подстановкой в полученные равенства значений $x_1^0 = \ldots =$

[1]Доказательство соотношения этого типа см., например, у *E. Picard*, Traité d'Analyse, т. 2, гл. 9.

$= x_n^0 = t = 0$ показывает, что в разложении $x_1, \ldots, x_n$ по степеням $x_1^0, \ldots, x_n^0$, t все коэффициенты положительны.

Но из написанного выше неравенства, очевидно, следуют подобные же неравенства между любой частной производной X_i и соответственной частной производной правой части вспомогательной системы уравнений. Таким образом мы убеждаемся, что ряды, составленные посредством последовательного дифференцирования уравнений (1) по $x_1^0, \ldots, x_n^0$, t и подстановки в полученные равенства $x_1^0 = \ldots = x_n^0 = t = 0$ сходятся, потому что коэффициенты их членов меньше по абсолютной величине коэффициентов ряда, абсолютная сходимость которого нам известна. Следовательно, эти ряды определяют аналитические функции $x_1, \ldots, x_n$, причем из способа построения этих функций очевидно, что все разности

$$X_i(x_1, \ldots, x_n) - \frac{dx_i}{dt} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

рассматриваемые как функции от $x_1^0, \ldots, x_n^0$, t, обращаются в точке $x_1^0 = \ldots = x_n^0 = t = 0$ в нуль вместе со всеми своими частными производными любого порядка. Отсюда следует, что эти разности обращаются в нуль тождественно. Значит, полученные этим формальным способом ряды дают единственное искомое решение дифференциальных уравнений (1), и аналитичность решения, таким образом, доказана.

§ 6. Принцип сохранения энергии[1]. Консервативные системы. Для многих динамических систем геометрическая конфигурация задается m координатами $q_1, \ldots, q_m$ пространственного характера, а состояние системы определяется этими координатами и скоростями $q_1', \ldots, q_m'$, где $q_i' = dq_i/dt$. Про такую систему говорят, что она обладает m степенями свободы. Этим координатам могут быть соотнесены обобщенные внешние силы Q_i, причем работа W этих сил определяется формулой:

$$dW = \sum_{j=1}^{m} Q_j dq_j,$$

где символ дифференцирования имеет свое обычное значение.

Величины Q_i мы будем предполагать вещественными, однозначными аналитическими функциями координат, скоростей и ускорений;

[1]Исторические и критические замечания относительно этого принципа см. в статье *A. Voss* в «Encyclopädie d. mathematischen Wissenschaften» или во французской версии этой статьи E. и F. Cosserat. Я представил изложенные здесь результаты в Chicago Colloquium в 1920 г. Нижеследующая трактовка принципа существенно отличается от всякой другой, которую я знаю.

таким образом, существует одна и только одна система внешних сил, вызывающая данную систему ускорений при заданной системе значений координат и скоростей. В этом случае переменными, определяющими состояние системы, очевидно, являются $2m$ координат и скоростей.

Конкретной моделью подобной динамической системы может служить скрытый в стене механизм, управляемый системой m стержней, выступающих над поверхностью стены. Если стержни выступают на длины $q_1, \ldots, q_m$, то Q будут обыкновенные силы, приложенные к этим стержням в направлении изнутри.

Основная гипотеза, выражающая принцип сохранения энергии, состоит в том, что если при каком-нибудь приложении этих внешних сил динамическая система проходит замкнутый цикл, так что конечные значения $2m$ величин q_i и q_i' равны начальным значениям, то полная работа, совершенная внешними силами на протяжении всего цикла, равна нулю. Всякую систему, удовлетворяющую этому условию, мы будем называть консервативной.

Консервативные динамические системы являются лишь идеальным случаем по отношению к системам, действительно встречающимся в природе, тем не менее значение их чрезвычайно велико.

Рассмотрим теперь свойства подобной консервативной системы. Если она проходит цикл $ABCA$ и измененный цикл $AB'CA$ (которые могут быть изображены графически замкнутыми кривыми в $2m$-мерном пространстве с координатами q_i и q_i'), то работа, совершенная силами на отрезках ABC и $AB'C$ обоих циклов, одинакова, а именно, равна работе, совершенной на общей части CA, взятой с обратным знаком. Таким образом, работа, совершенная на пути от A до C, не зависит от самого пути, а только от значений $q_1, \ldots, q_m, q_1', \ldots, q_m'$ в точке C.

$$\int_A^C \sum_{j=1}^{m} Q_j \, dq_j = W(q_1, \ldots, q_m, q_1', \ldots, q_m')\Big|_A^C .$$

Дифференцируя это равенство по t, получим следующее фундаментальное тождество, выраженное в $3m$ переменных q_i, q_i', q_i'':

$$\sum_{j=1}^{m} Q_j q_j' \equiv \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial W}{\partial q_j} q_j' + \frac{\partial W}{\partial q_j'} q_j'' \right). \tag{4}$$

Это соотношение должно иметь место, если мы хотим, чтобы соблюдался принцип сохранения энергии, и, наоборот, легко видеть, что из соотношения (4) следует принцип сохранения энергии.

Этому тождеству можно придать интересную явную форму. Для этой цели будем искать такую функцию L от $2m$ переменных q_i, q_i', чтобы для нее было справедливо тождество:

$$\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j'}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}\right]q_j' \equiv \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial W}{\partial q_j}q_j'+\frac{\partial W}{\partial q_j'}q_j''\right).$$

Сравнивая коэффициенты при q_i'' обеих частей, получим m условий:

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L}{\partial q_i'\partial q_j'}q_j' \equiv \frac{\partial W}{\partial q_i'},$$

которые все будут удовлетворены, если

$$\sum_{j=1}^{m} q_j'\frac{\partial L}{\partial q_j'} - L \equiv W, \tag{5}$$

в чем можно убедиться, дифференцируя по q_i'. Сравнивая в обеих частях остающиеся члены, независимые от q_i'', получаем новое условие:

$$\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 L}{\partial q_i\partial q_j'}q_i'q_j' - \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L}{\partial q_j}q_j' \equiv \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial W}{\partial q_j}q_j',$$

которое, очевидно, будет удовлетворено, если L удовлетворяет условию (5).

Всегда можно найти функцию L, удовлетворяющую условию (5). Для этой цели заметим, прежде всего, что если $Q_1, \dots, Q_m$ можно разложить в ряд по возрастающим степеням $q_1', \dots, q_m'$, то соответствующее разложение W не будет содержать членов первой степени. Иначе говоря, мы имеем

$$W = W_0 +^{*} + W_2 + W_3 + \dots,$$

где W_n обозначает сумму членов n-ой степени относительно скоростей $q_1', \dots, q_n'$ в разложении W. Действительно, если бы в этом разложении присутствовало W_1, то в правой части фундаментального тождества (4) имелись бы члены, не содержащие скоростей q_i', в то время как левая часть этих членов не имеет. Если мы теперь подставим в уравнение в частных производных (5) написанное выше разложение W и соответствующее разложение L:

$$L = L_0 + L_1 + L_2 + \dots,$$

и примем во внимание, что согласно теореме Эйлера об однородных функциях

$$\sum_{j=1}^{m} q_j' \frac{\partial L_n}{\partial q_j'} = nL_n,$$

то, сравнивая члены одинакового порядка относительно скоростей, получим

$$L_0 = -W_0, \quad L_2 = W_2, \ \ldots, \quad L_n = \frac{W_n}{n-1}, \ \ldots$$

в то время как L_1 остается произвольной.

Всякую такую функцию L можно назвать «главной функцией», связанной с данной произвольной консервативной системой. Если в разложении функции L в ряд по степеням скоростей отсутствуют члены первой степени, то такая функция L обладает некоторыми важными свойствами.

Определяя функции R_i посредством уравнений

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i'}\right) - \frac{dL}{\partial q_i} + R_i, \tag{6}$$

мы замечаем, что согласно определению функции L

$$\sum_{j=1}^{m} R_j q_j' \equiv 0. \tag{7}$$

Обратно, если $Q_1, \ldots, Q_m$ могут быть выражены в форме (6) так, чтобы имело место равенство (7), то для такой системы справедлив закон сохранения энергии.

Если W есть функция работы консервативной динамической системы и если L — соответствующая главная функция, то обобщенные внешние силы Q_i могут быть выражены в форме (6) *и* (7).

Это последнее утверждение может быть сформулировано в несколько ином виде. Как это обычно делается, назовем динамическую систему, для которой $R_i \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, «лагранжевой системой». Систему же, для которой $W \equiv 0$ назовем «системой, лишенной энергии». Это последнее название оправдывается тем, что любые внешние силы, приложенные к такой системе, не произведут никакой работы. В этом случае мы можем также положить $L \equiv 0$. Тогда только что приведенное утверждение может быть высказано в такой форме:

Всякая консервативная динамическая система имеет внешние силы, которые могут быть представлены в виде суммы внешних сил «лагранжевой системы» и внешних сил «системы, лишенной энергии».

Перед тем, как перейти к дальнейшим вопросам, заметим, что для свободного движения системы по определению должно быть $Q_1 = \ldots = Q_n = 0$ и, следовательно, уравнения движения принимают вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -R_i \quad (i = 1, \ldots, m),$$

где величины R_i удовлетворяют соотношению (7). Из этих уравнений непосредственно следует:

Движение свободной консервативной динамической системы совпадает с движением лагранжевой системы, к которой приложена система сил, не производящая работы.

Свободная консервативная динамическая система, очевидно, имеет интеграл работы $W = \mathrm{const}$, который в силу соотношения (5) может быть написан в другой форме, а именно:

$$\sum_{j=1}^{m} q_j' \frac{\partial L}{\partial q_j'} - L = \mathrm{const}.$$

Лагранжевы и лишенные энергии системы были определены через условия, накладываемые на внешние силы. Эти определения не исключают друг друга. В самом деле, поставим себе вопрос: при каких условиях динамическая система будет лагранжевой и одновременно лишенной энергии? Так как она лишена энергии, то, очевидно,

$$W = W_0 + W_2 + \ldots = 0,$$

откуда мы находим, что для нее самая общая функция L будет иметь вид:

$$L = L_1 = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j q_j'.$$

Но поскольку наша система является лагранжевой, то можно положить

$$R_i = 0$$

при всех i и, таким образом, найти

$$Q_i = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial q_i}\right) q_j' \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Итак, для того чтобы система была одновременно обоих типов, обобщенные внешние силы должны иметь указанный частный вид.

Интересно отметить, что в случае, когда $m = 1$, из уравнения (7) следует, что $R_1 = 0$, так что всякая консервативная динамическая система с одной степенью свободы будет лагранжевой системой. Подобным же образом, если $m = 2$, то внешние силы могут быть представлены в виде

$$Q_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_1'}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} + \lambda q_2'; \quad Q_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_2'}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} - \lambda q_1',$$

где λ — произвольная функция координат, скоростей и ускорений.

§ 7. Замена переменных в консервативной системе. Первоначально координатами q_i консервативной системы могут быть фактические расстояния, а силами Q_i — силы, действующие в направлении этих координат. Но в физике в большинстве случаев бывает невыгодно ограничиваться одной системой координат.

Определим измененные внешние силы $\overline{Q}_i$, соответствующие новым координатам $\overline{q}_i$, посредством уравнений

$$\overline{Q}_i = \sum_{j=1}^{m} Q_j \frac{\partial q_j}{\partial \overline{q}_i} \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{8}$$

Принимая это определение и переходя еще раз к новым переменным $\overline{\overline{q}}_i$, мы можем выразить новые силы $\overline{\overline{Q}}_i$ через $\overline{Q}_i$ подобными же формулами. Полученные таким образом выражения для i будут совпадать с теми, которые мы получили бы, непосредственно переходя от Q_i к $\overline{Q}_i$. Это свойство непосредственно вытекает из вышеприведенных определений.

Таким образом, Q_i оказываются однозначно определенными для любой системы координат.

Заметим, что в случае перехода от одной системы прямоугольных координат к другой вышеприведенные формулы, выражающие силы $\overline{Q}_i$ через Q_i, совпадают с формулами, полученными применением обычных законов сложения сил. В общем же случае мы можем сказать, что эти формулы определяют в известном смысле обобщенные составляющие силы.

Далее, из равенства

$$dW = \sum_{j=1}^{m} Q_j \, dq_j = \sum_{j=1}^{m} \overline{Q}_j \, d\overline{q}_j$$

следует, что динамическая система, консервативная в первоначальной системе координат, останется по нашему определению консервативной в новых координатах. Кроме того новая функция работы будет совпадать с прежней (с точностью до постоянного слагаемого); и далее, так как формулы преобразования скоростей

$$q_i' = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial q_i}{\partial \overline{q}_j} \overline{q}_j' \quad (i = 1, \ldots, m)$$

линейны и однородны в скоростях, то, следовательно, различные компоненты W_0, W_2, ... функции W остаются неизменными.

Если мы условимся для определенности всегда выбирать функцию L одинаковым образом, а именно так, чтобы она не содержала j членов, линейных относительно скоростей, то главная функция тоже не будет зависеть от выбора системы координат.

Определим теперь $\overline{R}_i$ из формулы

$$\overline{Q}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \overline{q}_i'}\right) - \frac{\partial L}{\partial \overline{q}_i} + \overline{R}_i,$$

где L есть главная функция, выраженная через новые переменные $\overline{q}_i$, $\overline{q}_i'$.

Легко доказать формальное равенство

$$\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_j'}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial q_j}\right]\frac{\partial q_j}{\partial \overline{q}_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{q}_i'}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{q}_i} \quad (i = 1, \ldots, m),$$

где φ в левой части есть произвольная функция от q_i, q_i'.

Для доказательства этой формулы заметим, что из написанных выше линейных соотношений между q_i' и $\overline{q}_i'$ следует

$$\frac{\partial q_i'}{\partial \overline{q}_j'} = \frac{\partial q_i}{\partial \overline{q}_j}; \quad \frac{\partial q_i'}{\partial \overline{q}_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial \overline{q}_j}\right) \quad (i, j = 1, \ldots, m),$$

откуда для любого i имеем

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_j'}\right)\right]\frac{\partial q_j}{\partial \overline{q}_i} = \sum_{j=1}^{m}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_j'} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial \overline{q}_i}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial q_j'} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_j}{\partial \overline{q}_i}\right)\right] =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{q}_i'}\right) - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial q_j'} \cdot \frac{\partial q_j'}{\partial \overline{q}_i}.$$

Кроме того имеем также для любого i

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial \overline{q}_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{q}_i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial q_j'} \cdot \frac{\partial q_j'}{\partial \overline{q}_i}.$$

Вычитая последнее равенство из предыдущего, получаем требуемую формулу.

Подставив в эту последнюю L вместо φ, убеждаемся, что $\overline{R}_i$ получаются из R_i, совершенно так же, как $\overline{Q}_i$ из Q_i. Таким образом, мы можем формулировать следующий общий результат.

Если от переменных $q_1, \ldots, q_m$ консервативной динамической системы перейти к новой системе переменных $\overline{q}_1, \ldots, \overline{q}_m$, то динамическая система остается консервативной с прежними значениями функций L, W, в то время как величины Q_i и R_i преобразуются в новые выражения посредством формул (8). *В частности, если система была лагранжевой или лишенной энергии в первоначальных переменных, то она остается такой же в новых переменных.*

§ 8. Геометрические связи. Теперь мы имеем возможность рассмотреть систему с «геометрическими» связями. Пусть различные геометрические точки данной консервативной системы фиксированы, или должны оставаться при своем движении на данных кривых или поверхностях, или же связаны между собою различными негибкими и не имеющими массы стержнями.

Результатом всех таких связей будет уменьшение числа степеней свободы. В самом деле, при соответствующем выборе системы координат $q_1, \ldots, q_m$ мы можем добиться того, что k связей системы будут выражаться формулами

$$q_{\mu+1} = \text{const}, \ \ldots, \ q_m = \text{const} \quad (\mu = m - k).$$

Обозначим теперь через $\overline{L}$ то, во что превратится L, если связанным координатам $q_{\mu+1}, \ldots, q_m$ придать эти постоянные значения, причем соответствующие q_i', q_i'', конечно, обращаются в нуль. Тогда очевидно, что

$$L = \overline{L}; \quad \frac{d\overline{L}}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}; \quad \frac{\partial \overline{L}}{\partial q_i'} = \frac{\partial L}{\partial q_i'} \qquad (i = 1, \ldots, \mu).$$

Отсюда имеем

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{L}}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial \overline{L}}{\partial q_i} + R_i \qquad (i = 1, \ldots, \mu).$$

где Q_i и R_i имеют обычные значения.

Но первоначальные внешние силы Q_i могут быть представлены как суммы

$$\overline{Q}_i + P_i \quad (i = 1, \ldots, m),$$

где «силы связи» P_i не могут производить работу ни при каких перемещениях системы, подчиненных связям. Отсюда следует, что функции $P_1, \ldots, P_\mu$ обращаются в нуль, если координаты выбраны, как указано. Следовательно, мы можем заменить Q_i на $\overline{Q}_i$ в вышеприведенной формуле при $i = 1, \ldots, \mu$.

Отсюда мы приходим к следующему заключению.

Если консервативная система с m степенями свободы подчинена k геометрическим связям, то ее можно рассматривать как консервативную систему с $m - k$ степенями свободы.

§ 9. Внутренняя характеризация лагранжевых систем. В большинстве динамических приложений лагранжевы системы можно рассматривать как системы частиц, находящихся под действием известных сил и геометрических связей. Этот способ внутренней характеризации, послуживший Лагранжу основой для вывода его уравнений, будет вкратце рассмотрен в этом параграфе.

В следующем параграфе мы рассмотрим внешнюю характеризацию лагранжевых систем.

Начнем с рассмотрения трех частных типов частиц в обычном пространстве:

а) Инерциальная частица.

Если x, y, z будут обозначать прямоугольные координаты частицы, то внешние силы X, Y, Z, действующие в направлениях, параллельных осям координат, пропорциональны составляющим ускорения в этих направлениях.

$$X = mx'', \quad Y = my'', \quad Z = mz'',$$

где коэффициент пропорциональности m называется «массой» частицы.

Примером может служить обычная материальная частица.

Очевидно, частица будет лагранжевого типа с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

L есть «кинетическая энергия» частицы.

b) Некинетическая частица.

Такая частица подвержена силам, не зависящим от скорости и имеющим следующий вид:

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

где V есть функция координат частицы в пространстве. Эта динамическая система тоже лагранжева и для нее $L = V$.

Функция V есть «потенциальная энергия» частицы, обязанная своим возникновением полю сил, в котором частица движется.

Почти к этому типу принадлежит наэлектризованная частица с ничтожной массой в статическом электрическом поле.

c) Гироскопическая частица.

По определению гироскопической называется частица, подверженная действию сил, имеющих составляющие вдоль осей, вида

$$X = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\right) y' + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) z',$$

так что вектор силы перпендикулярен вектору скорости и сила, следовательно, не совершает никакой работы. Тем не менее, система является лагранжевой с главной функцией, равной

$$L = \alpha x' + \beta y' + \gamma z'.$$

Отметим, что эта система представляет собой случай лагранжевой системы, являющейся одновременно системой, лишенной энергии.

К этому типу принадлежит, например, наэлектризованная частица, движущаяся в статическом магнитном поле.

d) Система «обобщенных» частиц.

Если частица движется под действием сил, представляющих собою сумму сил инерциального, некинетического и гироскопического типов, то такую частицу можно назвать «обобщенной» частицей. Примером может служить обыкновенная материальная частица, движущаяся в поле тяготения. Такая система, очевидно, будет лагранжевой, и главная функция ее будет просто суммой главных функций, связанных со слагающими силами.

Рассмотрим далее совокупность таких частиц, которые никаким образом не взаимодействуют между собою. Если мы сложим лагранжевы функции различных частиц, то мы получим функцию L, из которой можно вывести уравнения движения системы частиц.

Конечно, при этом необходимо различать координаты различных частиц, употребляя для них разные переменные x_i, y_i, z_i, где $i = 1, \ldots, m$.

Очевидно, что в этом случае мы имеем главную функцию, квадратичную по отношению к скоростям. Естественным обобщением этих систем будут такие системы, главная функция которых — любой квадратичный относительно скоростей полином. Однородное, квадратичное относительно скоростей, слагаемое T будет кинетическая энергия системы, слагаемое U, не зависящее от скоростей, — ее потенциальная энергия, а слагаемое однородное, линейное относительно скоростей, можно назвать «гироскопической энергией».

Кроме того, как мы видели, мы можем подчинить наши частицы различного рода геометрическим связям и таким образом уменьшить число степеней свободы, не нарушая лагранжева характера системы.

Рассмотрение таких систем «обобщенных» частиц бывает достаточно для большинства приложений.

е) Обобщенная частица в m-мерном пространстве.

Естественным обобщением предыдущих рассуждений, на котором мы не будем здесь останавливаться, можно показать, что одна материальная частица, лежащая на m-мерном многообразии, определенном квадратичной дифференциальной формой, находящаяся в поле сил, вызванном потенциальной функцией на поверхности, и подчиненная кроме того гироскопическим силам, зависящим от какой-нибудь линейной функции скоростей на поверхности, будет типа Лагранжа. Ее функция L будет квадратичной функцией от скоростей. И обратно, всякая лагранжева система с m степенями свободы и с функцией L, квадратичной относительно скоростей, может быть представлена движением материальной частицы на таком m-мерном многообразии.

Следовательно, движение любой динамической системы с m степенями свободы можно представить изоморфным движением одной обобщенной частицы на надлежащей m-мерной поверхности.

§ 10. Внешняя характеризация лагранжевых систем[1]**.** В этом параграфе мы намерены охарактеризовать один важный тип лагранжевых систем через некоторые простые свойства внешних сил. А именно, мы собираемся охарактеризовать такие динамические системы, для которых лагранжева функция L — квадратичная функция от скоростей, не имеющая членов первой степени, т. е. L имеет вид $T-U$, где T — однородная квадратичная функция скоростей, а U зависит только от координат. Эти «регулярные» системы составляют важный класс динамических систем. Легко видеть, что регулярные системы остаются таковыми при любом преобразовании координат.

Мы приступим теперь к формулировке ряда свойств, характеризующих в совокупности этот класс систем.

Начнем со следующего свойства.

I. *Внешние силы изменяются линейно при изменении составляющих ускорений.*

Это свойство, очевидно, можно записать так:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j'' + b_i,$$

[1]Содержание этого параграфа было представлено Chicago Colloquium в 1920 г. Аналитическую характеризацию лагранжевых систем в случае, когда внешние силы линейны относительно скоростей, см. у *E. Whittaker*, Analytical Dynamics, стр. 45.

где a_{ij} и b_i — выражения, не содержащие ускорений.

II. Принцип взаимности[1]. *Изменение ускорения q_j'', вызванное каким-нибудь изменением i-й силы Q_i, равно изменению ускорения q_i'', вызванному таким же изменением j-й силы Q_j $(i,\ j = 1, \ldots, m)$.*

Для того чтобы записать это свойство в виде формулы, положим, что Q_k получает приращение Q, причем все q_i и q_i' остаются неизменными.

Тогда написанные выше выражения дадут:

$$Q\delta_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\Delta_1 q_j'' \quad (i = 1, \ldots, m),$$

где $\delta_{ik} = 1$, если $i = k$, и $\delta_{ik} = 0$, если $i \neq k$, а Δ обозначает, как всегда, приращение.

Предположим теперь, что Q_l получает такое же приращение Q. Будем иметь, подобно предыдущему,

$$Q\delta_{il} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\Delta_2 q_j''.$$

Если мы положим, что определитель $|a_{ij}|$ не равен нулю, то эти уравнения можно разрешить относительно $\Delta q_j''$ и получить для всех i, k, l:

$$\Delta_1 q_i'' = \sum_{j=1}^{m} \overline{a}_{ij} Q\delta_{jk} = \overline{a}_{ik}Q; \Delta_2 q_i'' = \overline{a}_{il}Q,$$

где $\overline{a}_{ij}$ — алгебраическое дополнение элемента a_{ji} j-й строки и i-го столбца матрицы $\|a_{ij}\|$, деленное на определитель $|a_{ij}|$. Из принципа взаимности (свойство II) получим, положив сперва $i = l$, а потом $i = k$, $\overline{a}_{lk} = \overline{a}_{kl}$. Таким образом, алгебраические дополнения элементов определителя $|a_{ij}|$ симметричны относительно i и j, следовательно, симметричны и сами элементы a_{ij}, т. е. мы имеем $a_{ij} = a_{ji}$ для всех i и j.

III. *Для семейства подобных движений силы суть квадратичные функции быстроты движения.*

Другими словами, пусть $q_i = q_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ — движение системы, и положим, что это движение ускорено в отношении λ к 1.

[1]Ср. *Rayleigh*, Theory of Sound, т. 1, гл. 4.

Внешние силы тогда будут:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(q_1, \dots, q_m, \lambda q'_1, \dots, \lambda q'_m)\lambda^2 q''_j +$$
$$+ b_i(q_1, \dots, q_m, \lambda q'_1, \dots, \lambda q'_m),$$

поскольку координаты q_i останутся неизменными, в то время как скорости q'_i и ускорения q''_i увеличатся соответственно в λ и λ^2 раз.

Если мы хотим, чтобы эти выражения для Q_i были квадратичными функциями λ (q_i, q'_i, q''_i тут, конечно, совершенно независимые переменные), то функции a_{ij} должны быть независимыми от скоростей, а b_i должны быть квадратичными функциями таковых. Таким образом, на основании свойства III мы можем написать:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q''_j + \sum_{j,k=1}^{m} b_{ijk} q'_j q'_k + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} q'_j + b_i,$$

где величины a_{ij}, b_{ijk} суть функции только координат $q_1, \dots, q_m$.

Это выражение еще более уточняется при следующем предположении.

IV. Обратимость. *Любое движение под действием заданных внешних сил может быть также описано в обратном порядке.*

Это значит, что написанное равенство остается верным при замене t на $-t$. Но при этом скорости q'_i меняют знак, а координаты q_i и ускорения q''_i не меняются. Отсюда мы заключаем, что в формулах для Q_i члены $b_{ij} q'_j$ должны отсутствовать, и, следовательно, мы можем написать

$$Q_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q''_j + \sum_{j,\,k=1}^{m} b_{ijk} q'_j q'_k + b_i,$$

где величины a_{ij}, $b_{ijk} = b_{ikj}$, b_i зависят только от координат.

Все до сих пор использованные свойства I–IV инвариантны по отношению к преобразованию координат q_i и относятся к свойствам внешних сил в окрестности некоторой точки с координатами $q_1^0, \dots, q_m^0$.

При надлежащем выборе координат в точке $q_1^0, \dots, q_m^0$ мы можем привести выражение для $Q_1, \dots, Q_m$ к простой форме

$$Q_i = q''_i + b_i \qquad (i = 1, \dots, m)$$

в этой точке.

Для доказательства этого утверждения примем, что точка $(q_1^0, \ldots, q_m^0)$ есть начало, и произведем первое линейное преобразование:

$$q_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} \overline{q}_j \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

где β_{ij} суть некоторые постоянные числа, причем $|\beta_{ij}| \neq 0$. Тогда имеем для функции Q_i:

$$\overline{Q}_i = \sum_{j=1}^{m} Q_j \frac{\partial q_j}{\partial \overline{q}_i} = \sum_{j=1}^{m} Q_j \beta_{ji}.$$

Подставляя в эту формулу выражение для Q_j, находим для любого i:

$$\overline{Q}_i = \sum_{j,\,k,\,l=1}^{m} a_{jk} \beta_{kl} \beta_{ji} \overline{q}_l'' + \text{члены, не зависящие от } q_1'', \ldots, q_m''.$$

Отсюда следует, что если мы так выберем наше преобразование, чтобы превратить квадратичную форму

$$\sum_{j,\,k=1}^{m} a_{jk} q_j q_k$$

в сумму квадратов

$$q_1^2 + \ldots + q_m^2,$$

то величины $\overline{a}_{ij}$ будут равны нулю при $i \neq j$ и единице при $i = j$. Следовательно, мы имеем право предположить, что при этом предварительном преобразовании a_{ij} преобразовались в δ_{ij} в начале координат так, что

$$Q_i = q_i'' + \sum_{j,\,k=1}^{m} b_{ijk}^0 q_j' q_k' + b_i^0 \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Произведем теперь дальнейшее преобразование.

$$\overline{q}_i = q_i + \frac{1}{2} \sum_{j,\,k}^{m} b_{ijk}^0 q_j q_k,$$

где значения постоянных b_{ijk}^0 определяются из предыдущего равенства. Непосредственным дифференцированием убеждаемся, что в начале координат имеют место равенства:

$$\overline{q}_i' = q_i', \quad \overline{q}_i'' = q_i'' + \sum_{j,\,k=1}^{m} b_{ijk}^0 q_j' q_k' \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Отсюда тотчас же видно, что для Q_i в начале координат справедлива доказываемая формула, т. е.

$$\overline{Q}_i = \overline{q}_i'' + b_i \quad (i = 1, \ldots, m).$$

V. Принцип сохранения энергии. *Рассматриваемая динамическая система консервативна.*

Если W — функция работы, то мы имеем основное равенство

$$dW = \sum_{j=1}^{m} Q_j q_j'\, dt,$$

характеризующее консервативные системы. Но правая часть этого равенства есть линейное выражение относительно ускорений; сравнивая коэффициенты при q_j'' в обеих частях, получим, принимая во внимание выражения для Q_i:

$$\frac{\partial W}{\partial q_j'} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} q_i' \quad (j = 1, \ldots, m),$$

откуда

$$W = T + U,$$

где

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,\,k=1}^{m} a_{jk} q_j' q_k',$$

а U зависит только от $q_1, \ldots, q_m$.

Из этой формулы для W следует, конечно, на основании сказанного в предыдущих параграфах, что $L = T - U$, и, следовательно,

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) + \frac{\partial U}{\partial q_i} + R_i \quad (i = 1, \ldots, m),$$

где R_i удовлетворяет условию (7).

Поскольку первые два члена правой части дают выражение, совершенно подобное приведенному выше выражению для Q_i, причем члены, содержащие q_j'', в обоих выражениях совпадают, то из этого следует, что разности R_i должны иметь вид:

$$R_i = \sum_{j,\,k=1}^{m} c_{ijk} q_j' q_k' + c_i \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Принимая во внимание условие (7), мы заключаем далее, что для всех i, j, k имеют место соотношения

$$c_{ijk} + c_{jki} + c_{kij} = 0, \; c_i = 0,$$

причем, разумеется, $c_{ijk} = c_{ikj}$.

Следовательно, принципы I–V приводят к динамической системе, у которой внешние силы выражаются формулами

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{j,\,k=1}^{m} c_{ijk} q_j' q_k',$$

где $c_{ijk} = c_{ikj}$ суть функции координат, удовлетворяющие условию

$$c_{ijk} + c_{jki} + c_{kij} = 0$$

для любых i, j, k.

Остается лишь так подобрать возможно простое последнее свойство системы, чтобы из него следовало $c_{ijk} = 0$ для всех i, j, k.

VI. *Если при каком-нибудь выборе системы координат кинетическая энергия T делается стационарной относительно $q_1, \ldots, q_m$, в некоторой точке $q_1^0, \ldots, q_m^0$, то силы Q_i вызывают ускорение, независимое от скоростей.*

Предположим пока, что такое стационарное T существует. Тогда имеем в точке $q_1^0, \ldots, q_m^0$

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} = 0 \qquad (i, j, k = 1, \ldots, m).$$

Выражение для Q_i в этой точке обращается в

$$Q_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j'' + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{j,\,k=1}^{m} c_{ijk} q_j' q_k'.$$

(Нужно отметить, что написанная выше формула для Q_i сохраняется для всех систем координат.) Если теперь эти силы Q_i не зависят от скоростей, то все c_{ijk} должны обращаться в нуль для этой специальной координатной системы, а следовательно, согласно известному закону преобразования членов R_i и для любой координатной системы. Таким образом, получена искомая лагранжева форма для внешних сил, и, следовательно, условия I–VI определяют регулярную лагранжеву динамическую систему.

Утверждение, что существует стационарное T, следует из общеизвестной теоремы, гласящей, что для любой системы координат геодезического типа в точке $q_1^0, \ldots, q_m^0$ квадрат линейного элемента

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\, dq_i\, dq_j$$

имеет стационарные в этой точке коэффициенты.

Обратно, легко видеть, что для всякой регулярной лагранжевой системы внешние силы Q_i удовлетворяют условиям I–VI.

§ 11. Рассеивающие системы. Консервативные системы часто являются лишь предельными случаями того, что действительно встречается в природе, так как работа, произведенная силами в течение замкнутого цикла, бывает обычно больше нуля. Систему, в которой силы производят работу вдоль замкнутого цикла, мы назовем рассеивающей. Иначе говоря, мы можем определить рассеивающую систему как такую, для которой

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + R_i \quad (i = 1, \ldots, m),$$

где

$$\sum_{j=1}^{m} R_j q_j' \geqslant 0.$$

Кроме того мы предположим, что равенство может иметь место только для движений, происходящих в некотором многообразии размерности ниже m в m-мерном координатном пространстве.

Допустим теперь, что такая система не подвержена действию внешних сил или по крайней мере подвержена действию только таких сил, которые не производят работы, так что

$$\sum_{j=1}^{m} Q_j q_j' = 0.$$

Из очевидного соотношения

$$\frac{dW}{dt} + \sum_{j=1}^{m} R_j q'_j = 0,$$

где W обозначает функцию, ассоциированную с L, т. е. функцию

$$\sum_{j=1}^{m} \left(q'_j \frac{\partial L}{\partial q'_j} - L \right),$$

мы заключаем, что W постоянно уменьшается, стремясь к предельному значению W_0. При этом предполагается, что функция работы не может уменьшаться до $-\infty$.

Рассмотрим теперь предельные движения для данного движения. Вдоль этих движений W принимает свое предельное значение W_0 и сумма

$$\sum_{j=1}^{m} R_j q'_j,$$

конечно, обращается в нуль.

Рассеивающая система этого типа стремится при своем свободном движении либо к равновесию, либо, в более общем случае, к движению консервативной системы с меньшим числом степеней свободы.

Глава 2
Вариационные принципы и их применение

§ 1. Алгебраический вариационный принцип. С точки зрения формальной динамики чрезвычайно большое значение имеет тот факт, что дифференциальные уравнения могут быть, вообще говоря, получены из требования, чтобы «вариация» некоторого определенного интеграла обращалась в нуль.

Для того, чтобы выяснить природу вариационного метода, рассмотрим аналогичную проблему, касающуюся обыкновенных maxima и minima.

Пусть нам дано n уравнений с n неизвестными

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

левые части которых f_i могут быть выражены как частные производные одной и той же вещественной аналитической функции

$$f_i \equiv \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Тогда мы имеем частный случай системы n уравнений с n неизвестными, получаемый, когда мы ищем maxima и minima функции F, и эта система может быть записана в виде одного символического уравнения

$$dF = 0,$$

означающего, что при значениях переменных $x_1^0, \ldots, x_n^0$, удовлетворяющих нашим уравнениям, функция F «стационарна».

Предположим теперь, что в наших n уравнениях мы заменим переменные x_i на новые y_i, причем зависимость между x_i, и y_i однозначная и аналитическая. Так как стационарность какого-нибудь значения функции F, очевидно, не зависит от того, в какой системе переменных F выражена, то решения первоначальной системы уравнений могут быть выражены формулой $dF = 0$ в новых переменных совершенно так же, как и в старых. Таким образом мы обладаем методом, позволяющим, вообще говоря, получать эквивалентные уравнения в новых переменных намного проще, чем путем непосредственной подстановки.

В тех случаях, когда нельзя представить данные уравнения в этой специальной форме, часто бывает возможным найти комбинации этих уравнений, которые могут быть представлены в этом виде.

Кроме того любая, не исключительная система n уравнений относительно $x_1, \ldots, x_n$

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

эквивалентна системе $2n$ уравнений, полученных из $dF = 0$, где

$$F = \sum_{j=1}^{n} f_j x_{(n+j)}.$$

Эта эквивалентность имеет место всегда при единственном условии, что определитель $|\partial f_i / \partial x_j| \neq 0$. Действительно, из получаемых $2n$ уравнений находим, что $x_{n+1}, \ldots, x_{2n}$ должны равняться нулю, а $x_1, \ldots, x_n$ должны удовлетворять требуемым уравнениям.

Отсюда можно заключить, что значение аналогичного вариационного метода в динамике является также в значительной мере формальным.

§ 2. Принцип Гамильтона. Определим понятия «стационарного интеграла». Пусть уравнения

$$x_i = x_i(t, \lambda) \quad (i = 1, \ldots, m)$$

представляют систему функций, зависящих от параметра λ, причем при $\lambda = 0$ мы получаем данную систему функций:

$$x_i(t, 0) = x_i^0(t) \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Допустим, что функции $x_i(t, \lambda)$ непрерывны и имеют непрерывные первые и вторые частные производные по t и λ, а также, что достаточно близко к концам рассматриваемого интервала (t_0, t_1) эти функции обращаются в $x_i^0(t)$ тождественно при любом λ.

$$x_i(t, \lambda) = x_i^0(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \varepsilon,\ t_1 - \varepsilon \leqslant t \leqslant t_1).$$

В этом случае интеграл

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(x_1, \ldots, x_m, x_1', \ldots, x_m')\, dt,$$

где F непрерывна вместе со своими частными производными первого и второго порядка, называется «стационарным» при $x_i = x_i^0(t)$, если для всякой системы функций описанного типа имеем:

$$\delta I = \left.\frac{\partial I}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} \delta\lambda = 0.$$

Это равносильно уравнению

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial x_j'} \cdot \frac{\partial x_j'}{\partial \lambda} \right) dt = 0$$

при $\lambda = 0$. Интегрируя по частям и заметив, что $\delta x_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial \lambda}\delta\lambda$ обращаются в нуль на концах интервала $(t_0,\, t_1)$, получаем уравнение, эквивалентное предыдущему

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{m} \left[\frac{\partial F}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j'}\right) \right] \delta x_j \, dt = 0.$$

В частности, мы можем взять

$$x_i(t,\, \lambda) = x_i^0(t) + \lambda\, \delta x_i \quad (i = 1,\, \ldots\, ,\, m),$$

где функции δx_i, суть произвольные непрерывные функции от t с непрерывными производными первого и второго порядка, подчиненные только условию, что они обращаются в нуль достаточно близко от обоих концов интервала $(t_0,\, t_1)$.

Таким образом, найдем, что требование стационарности интеграла I равносильно системе m дифференциальных уравнений Эйлера относительно $x_1^0,\, \ldots\, ,\, x_m^0$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i'}\right) - \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1,\, \ldots\, ,\, m).$$

В самом деле, написанный интеграл может обращаться в нуль для всех допустимых значений функций $x_i(t, \lambda)$, только если удовлетворены эти уравнения[1] ([1]).

[1] См., например, *O. Bolza*, Vorlesungen über Variationsrechnung, гл. 1, где читатель найдет более полные формулировки и доказательства.

Но эти m дифференциальных уравнений совершенно тождественны с уравнениями Лагранжа, в которых только L заменено на F. Отсюда мы выводим следующий важный результат.

Уравнеим Лагранжа можно придать вариационную форму, известную под названием принципа Гамильтона:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = 0. \tag{1}$$

Согласно принципу, приведшему нас к рассмотрению понятия вариации, мы можем произвести любую замену переменных в лагранжевых уравнениях посредством подстановки этих переменных в функцию L. От этого обстоятельства в значительной мере и зависит удобство лагранжевой формы уравнений.

§ 3. Принцип наименьшего действия. Существует и другая известная вариационная форма уравнений Лагранжа, называемая «принципом наименьшего действия». Мы выясним сейчас отношение этого принципа к только что высказанному принципу Гамильтона. Мы предположим, что $L = L_2 + L_1 + L_0$ — квадратичная функция скоростей. Напомним, что уравнения Лагранжа имеют следующий интеграл энергии:

$$W \equiv \sum_{j=1}^{m} \left(q_j' \frac{\partial L}{\partial q_j'} \right) - L = L_2 - L_0 = c.$$

На этом именно обстоятельстве основаны наши дальнейшие рассуждения.

Остановим наше внимание на случае, когда постоянная энергии c имеет какое-нибудь определенное значение, скажем $c = 0$. (Всякий случай можно привести к этому, заменив L на $L + c$.) Тогда мы имеем $L_2 = L_0$ вдоль рассматриваемого движения $q_i = q_i^0(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Определим теперь интеграл I^* следующей формулой:

$$I^* = I - \int_{t_0}^{t_1} \left(\sqrt{L_2} - \sqrt{L_0} \right)^2 dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(2\sqrt{L_0 L_2} + L_1 \right) dt.$$

Тогда

$$\delta I^* = \delta I - 2 \int_{t_0}^{t_1} \left(\sqrt{L_2} - \sqrt{L_0} \right) \left(\delta\sqrt{L_2} - \delta\sqrt{L_0} \right) dt.$$

Следовательно, принимая во внимание, что для $q_i^0(t)$, удовлетворено условие $L_0 = L_2$, имеем

$$\delta I^* = \delta I$$

для *всех* вариаций величин q_i. Значит, если функции q_i^0 кроме того удовлетворяют уравнениям Лагранжа, так что $\delta I = 0$, то мы будем иметь также $\delta I^* = 0$.

Выражение $2\sqrt{L_0 L_2} + L_1$, стоящее под знаком интеграла в I^*, является однородной функцией размерности 1 от производных q_i'. Следовательно, численная величина интеграла I^* не зависит от выбора параметра t на пути интегрирования, а зависит только от самого пути интегрирования в m-мерном пространстве с координатами $q_1, \ldots, q_m$[1]; для вариаций, удовлетворяющих условиям, поставленным нами в начале предыдущего параграфа, начальная и конечная точки пути фиксированы. Таким образом, мы можем считать, что интеграл энергии просто определяет параметр t, потому что, если мы положим

$$\bar{t} = \int^{t} \frac{\sqrt{L_2}}{\sqrt{L_0}}\, dt,$$

то требование $W = 0$ будет выполнено при новом параметре $\bar{t}$.

Следовательно, если мы имеем $\delta I^* = 0$ при $q_i = q_i^0(t)$ и если новый параметр t определен из только что приведенной формулы, то имеем также $\delta I = 0$ при $q_i = q_i^0(t)$.

Другой вариационной формой уравнений движения лагранжевой системы с функцией L, квадратичной относительно скоростей, является $\delta I^* = 0$, или, подробнее:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (2\sqrt{L_0 L_2} + L_1)\, ds = 0, \tag{2}$$

при условии, что L выбрана таким образом, что постоянная энергии обращается в нуль и что параметр t определен вышеприведенной формулой.

Уравнение $\delta I^* = 0$, которое обычно дается для того случая, когда член L, линейный относительно скоростей, отсутствует, выражает собою «принцип наименьшего действия» для этой задачи.

При помощи этого принципа мы можем легко произвести преобразование не только переменных q_i, но также и переменной t. В самом

[1] См. *O. Bolza*, Vorlesungen über Variationsrechnung, гл. 5.

деле, условие $\delta I^* = 0$, разумеется, сохраняет свою форму при переходе от зависимых переменных q_i, к новым $\overline{q}_i$, вдоль преобразованной кривой будет исполнено то же вариационное условие, причем функцию L, конечно, нужно заменить ее выражением через новые переменные, тогда как t сохраняет свое прежнее значение. Следовательно, для того, чтобы преобразовать эти переменные, достаточно произвести преобразование непосредственно над L. Соответствующие новые дифференциальные уравнения получатся, таким образом, из нового выражения для функции L.

Над независимой переменной t мы можем произвести преобразование следующего вида

$$dt = \mu(q_1, \ldots, q_m)\, d\overline{t}.$$

Иначе говоря, дифференциальный элемент времени делится на выражение μ, зависящее от координат. Мы можем определить характер преобразования, которое испытывают уравнения в результате этой подстановки новой переменной следующим образом. Заметим, что интеграл I^* может быть написан под видом

$$I^* = \int\limits_{\overline{t}_0}^{\overline{t}_1} (2\sqrt{\mu L_0 \cdot \mu L_2} + \mu L_1)\, d\overline{t}.$$

Новый интеграл получает тот же вид, что и прежний, если положить

$$\overline{L} = \mu L.$$

Кроме того, δI^* обращается в нуль вдоль кривой, независимо от того, будем ли мы рассматривать за параметр t или $\overline{t}$. При этом преобразовании t уравнения Лагранжа переходят в новые уравнения того же типа, но в которых функция L заменена на μL.

Дифференциальная форма $L\,dt$ остается инвариантной при обоих описанных типах преобразований. Отсюда вытекает следующее положение.

При преобразовании

$$q_i = f_i(\overline{q}_1, \ldots, \overline{q}_m) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$
$$dt = \mu(\overline{q}_1, \ldots, \overline{q}_m)\, d\overline{t}$$

уравнения Лагранжа с постоянной энергии, равной нулю, переходят в подобную же систему уравнений с постоянной энергии, равной нулю, в которой $\mathbf{L}$ *получается из формулы*

$$L\, dt = \overline{L}\, d\overline{t}.$$

В обратимом случае имеем $L_1 = 0$ и, следовательно,

$$I^* = \int\limits_{t_0}^{t_1} 2\sqrt{L_0 L_2}\, dt = 2\int\limits_{t_0}^{t_1} ds,$$

где $ds^2 = L_0 L_2\, dt^2$ есть квадрат элемента дуги на надлежащем многообразии с координатами $q_1, \dots, q_m$.

Таким образом, в обратимом случае с фиксированной постоянной энергии кривые движения могут быть интерпретированы как геодезические линии на m-мерном многообразии с квадратом элемента дуги

$$ds^2 = L_0 L_2\, dt^2.$$

Этот результат показывает, насколько общий характер имеет проблема геодезических линий m-мерного многообразия.

§ 4. Нормальная форма (две степени свободы). Выведенным здесь формулам преобразований можно придать весьма изящный вид для случая систем с двумя степенями свободы[1]. В этом случае дифференциальный элемент

$$L_2\, dt^2 = \frac{1}{2}(a_{11}\, dq_1^2 + 2a_{12}\, dq_1\, dq_2 + a_{22}\, dq_2^2)$$

можно рассматривать как квадрат элемента длины дуги некоторой двумерной поверхности. Выбирая за $\overline{q}_1$ и $\overline{q}_2$ координаты изотермической сети на этой поверхности, мы будем иметь для квадрата элемента дуги выражение

$$\frac{1}{2}\lambda(d\overline{q}_1^2 + d\overline{q}_2^2).$$

Следовательно, если мы возьмем μ равным $\dfrac{1}{\lambda}$ и произведем вышеуказанное (см. предыдущий параграф) преобразование t, то этим самым мы приведем λ к единице.

Для данной лагранжевой системы с двумя степенями свободы и данной постоянной энергии 0 *существуют переменные вышеописанного типа, в которых главная функция* L *имеет вид*:

$$L = \frac{1}{2}\left(q'^2_1 + q'^2_2\right) + \alpha q'_1 + \beta q'_2 + \gamma.$$

[1]См., например, мою статью «Dynamical Systems with Two Degrees of Freedom», Trans. Amer. Math. Soc., vol. 18 (1917), sections 2–5.

Уравнения движения и интеграл энергии получают в этом случае нормальную форму:

$$q_1'' + \lambda q_2' = \frac{\partial \gamma}{\partial q_1}; \quad q_2'' - \lambda q_1' = \frac{\partial \gamma}{\partial q_2};$$

$$\left(\lambda = \frac{\partial \alpha}{\partial q_2} - \frac{\partial \beta}{\partial q_1}\right); \quad \frac{1}{2}(q'^2_1 + q'^2_2) = \gamma.$$

Далее, если рассматривать q_1 и q_2 как прямоугольные координаты материальной частицы с массой, равной единице, движущейся на плоскости, то из приведенных уравнений следует, как легко видеть, что частица движется под влиянием поля сил, вызванного потенциальной энергией — γ, и силы, равной по величине λv (где v означает скорость) и направленной перпендикулярно к направлению движения.

Всякую такую лагранжеву систему с двумя степенями свободы можно рассматривать как материальную частицу на плоскости, находящуюся под действием консервативного поля сил, вызванного потенциальной энергией — γ, и не производящей работы силы λv (где v — скорость), действующей в направлении, перпендикулярном к направлению движения.

§ 5. Несущественные координаты. Разыскание интегралов представляет собою задачу, имеющую основное значение в теории систем дифференциальных уравнений. Вопрос о том, имеет ли данная система интегралы какого-либо определенного типа, обычно может быть решен формальными методами. Задача нахождения таких интегралов рассматривалась и разрешалась во многих частных случаях. Чтобы коснуться немного динамических задач этого рода, мы рассмотрим здесь вкратце интегралы лагранжевых систем, которые линейны или второй степени относительно скоростей. Область изменения переменных $q_1, \ldots, q_m$ мы ограничим малой скоростью точки $q_1^*, \ldots, q_m^*$, в то время как $q_1', \ldots, q_m'$ для рассматриваемых интегралов будут произвольны.

Мы будем предполагать, что L — квадратичная функция скоростей, причем однородная квадратичная часть L_2 есть положительная определенная форма([2]).

Существует очень простой случай, когда частный интеграл лагранжевых уравнений, линейный относительно скоростей, может быть найден сразу, а именно: случай, когда одна из координат, например q_1, не входит в главную функцию L. В этом случае соответственное дифференциальное уравнение принимает вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_1'} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial L}{\partial q_1'} = c.$$

Это — интеграл, линейный относительно скоростей. Координата q_1 в этом случае называется «несущественной координатой».

Можно доказать методом вариаций, что в этом случае остальные $m-1$ уравнений, дающих систему $m-1$ уравнений второго порядка относительно $q_2, \ldots, q_m$, после того, как с помощью вышеприведенного интеграла мы исключили q_1', могут быть выражены в лагранжевой форме. Обозначим через $\overline{L}$ функцию от $q_2, \ldots, q_m, q_2', \ldots, q_m'$, получаемую из L после исключения q_1' (³). Если $q_1^0, \ldots, q_m^0$ удовлетворяют данным уравнениям Лагранжа, то, интегрируя по частям, находим для произвольных вариаций $q_2, \ldots, q_m$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \overline{L}\, dt = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial q_j'} \delta q_j \Big|_{t_0}^{t_1};$$

здесь q_1' определяется из соотношения $\partial L/\partial q_1' = c$, тогда как q_1 определяется только с точностью до постоянного слагаемого. Если $\delta q_2, \ldots, \delta q_m$ обращаются в нуль в окрестности концов интервала (t_0, t_1), то это равенство приводится к виду:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \overline{L}\, dt = c\delta q_1 \Big|_{t_0}^{t_1} \quad \text{или} \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} (\overline{L} - cq_1')\, dt = 0.$$

Если q_1 есть несущественная координата, то наши лагранжевы уравнения могут быть заменены системой лагранжевых уравнений в $q_2, \ldots, q_m$, с главной функцией

$$L - \frac{\partial L}{\partial q_1'} q_1',$$

в которой можно исключить q_1', пользуясь известным интегралом $\partial L/\partial q_1' = c$.

Мы отметили вышеуказанное приведение системы к системе с меньшим числом степеней свободы, потому что оно характерно как пример тех приведений, к которым стремятся во многих динамических проблемах, а именно приведений, сохраняющих общий вид уравнений.

§ 6. Метод множителей. Зададим теперь следующий вопрос: при каких условиях можно найти m «множителей» M_i, зависящих от координат и скоростей, так, чтобы, умножив уравнения Лагранжа на эти множители $M_1, \ldots, M_m$ и сложив, мы получили бы в левой части полученного уравнения полную производную некоторой функции V, линейной относительно скоростей? Если такие множители существуют, то имеем:

$$\sum_{j=1}^{m} M_j \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q'_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j}\right] = \frac{dV}{dt}.$$

Очевидно, что это будет обобщением понятия несущественной координаты, для которой имеем $M_i{=}1$ для некоторого i, тогда как $M_j{=}0$ при $j \neq i$.

Сравнивая коэффициенты при q''_i в обеих частях написанного тождества, мы получаем прежде всего:

$$\sum_{j=1}^{m} M_j \frac{\partial^2 L}{\partial q'_i \partial q'_j} = \frac{\partial V}{\partial q'_i} \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Здесь благодаря тому, что L по предположению есть квадратичная функция скоростей, коэффициенты при M_j будут функциями только координат $q_1, \ldots, q_m$. Правая часть равенства — тоже функция только координат, так как V линейна относительно скоростей. Кроме того, так как L_2 — определенная положительная форма, то определитель $|\partial^2 L/\partial q'_i \partial q'_j| \neq 0$. Из всего этого следует, что функции M_i могут содержать только координаты. Частное интегрирование относительно q'_i дает:

$$V = \sum_{j=1}^{m} M_j \frac{\partial L}{\partial q'_j} + S(q_1, \ldots, q_m).$$

Для каждой данной функции V существует только одна система функций M_i и S, для которой выполняются эти равенства, так как коэффициенты $\partial L/\partial q'_j$ при M_j суть линейно независимые относительно скоростей q'_i выражения. Кроме того при преобразовании координат новое соотношение, полученное из написанного выше, будет иметь тот же вид, так как интеграл, линейный относительно скоростей, остается таковым при любом преобразовании переменных. Таким образом, переходя от переменных q_i к новым $\overline{q}_i$, находим

$$V = \sum_{j,k=1}^{m} M_j \frac{\partial L}{\partial \overline{q}'_k} \frac{\partial \overline{q}_k}{\partial q_j} + S.$$

Новые коэффициенты $\overline{M}_i$ даются формулами:

$$\overline{M}_i = \sum_{j=1}^{m} M_j \frac{\partial \overline{q}_i}{\partial q_j}.$$

Из теории линейных уравнений в частных производных первого порядка известно, что можно определить m независимых функций $\overline{q_i}$, таких, что выполняются соотношения

$$\overline{M}_1 = 1, \quad \overline{M}_2 = \ldots = \overline{M}_m = 0.$$

Тогда получаем

$$V = \frac{\partial L}{\partial \overline{q}_1'} + S.$$

Дифференцируя это равенство по t и принимая во внимание, что теперь

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \overline{q}_1'}\right) - \frac{\partial L}{\partial \overline{q}_1} \equiv \frac{dV}{dt},$$

получаем новое тождество

$$\frac{\partial L}{\partial \overline{q}_1} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial S}{\partial \overline{q}_j} \overline{q}_j' \equiv 0.$$

Таким образом, выражение $\partial L/\partial \overline{q}_1$ оказывается линейным относительно скоростей. Следовательно, коэффициенты при членах L, квадратичных относительно скоростей, не зависят от $\overline{q_1}$, т. е.

$$L_2 = \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(\overline{q}_2, \ldots, \overline{q}_m)\overline{q}_j'\, \overline{q}_k'.$$

Положим

$$L_1 = \sum_{j=1}^{m} b_j(\overline{q}_1, \ldots, \overline{q}_m)\overline{q}_j'; \qquad L_0 = e(\overline{q}_1, \ldots, \overline{q}_m),$$

тогда вышеприведенное тождество можно записать так:

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial b_j}{\partial \overline{q}_1} \overline{q}_j' + \frac{\partial e}{\partial \overline{q}_1} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial S}{\partial \overline{q}_j} \overline{q}_j' = 0.$$

Отсюда мы сразу видим, что e не зависит от $\overline{q}_1$ и что, положив $S^* = \int S\,d\overline{q}_1$, мы можем написать для L_1 выражение

$$L_1 = -\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial S^*}{\partial \overline{q}_j}\overline{q}'_j + \sum_{j=1}^{m} b_j^*(\overline{q}_2, \dots , \overline{q}_m)\overline{q}'_j.$$

Таким образом, L_1 равняется сумме полной производной и линейного выражения от $\overline{q}'_1, \dots , \overline{q}'_m$ с коэффициентами, зависящими только от $\overline{q}'_2, \dots , \overline{q}'_m$.

Так как мы можем прибавить к функции L полную производную, не изменяя этим ни вариацию, ни уравнения Лагранжа, то мы можем опустить первое слагаемое в L. Следовательно, мы можем считать, что L не содержит координаты q_1.

Самый общий случай, в котором для уравнений Лагранжа можно подобрать множители $M_1(q_1, \dots , q_m)$, с помощью которых можно составить такую комбинацию левых частей уравнений Лагранжа, которая была бы полной производной некоторой функции V, линейной относительно скоростей $q'_1, \dots , q'_m$, может быть приведен переходом к новым переменным к случаю системы, содержащей несущественную координату q_1, когда все множители, кроме одного M_1, равны нулю, а M_1 равен единице.

Существование таких линейных интегралов может быть установлено чисто геометрическими способами. Заметим, что в предшествовавших рассуждениях производились преобразования только над $q_1, \dots , q_m$, тогда как t оставалось без изменения. Следовательно, квадратичная дифференциальная форма $ds^2 = L_2\,dt^2$ представляет собой инвариант, который в окончательных переменных имеет коэффициенты, содержащие только $q_2, \dots , q_m$. Но это аналитическое свойство дифференциального элемента означает, что многообразие допускает однопараметрическую непрерывную группу преобразований в себя:

$$\overline{q}_1 = q_1 + c, \quad \overline{q}_2 = q_2, \dots , \overline{q}_m = q_m.$$

Необходимое условие существования такой обобщенной несущественной координаты состоит в том, что многообразие $ds^2 = L_2\,dt^2$ допускает однопараметрическую непрерывную группу преобразований в себя.

Мы не будем здесь искать дальнейших необходимых условий.

§ 7. Общий случай интеграла, линейного относительно скоростей. До сих пор из приведенных выше рассуждений мы не можем еще заключить, что все интегралы наших уравнений, линейные относительно скоростей, могут быть получены методом обобщенных несущественных координат. Это можно доказать следующим образом.

Так как L_2 по предположению положительная определенная форма, то мы можем написать этот интеграл в том виде, в каком мы им пользовались в предыдущем параграфе, т. е.

$$V \equiv \sum_{j=1}^{m} M_j \frac{\partial L}{\partial q'_j} + S,$$

где S и M_j — функции одних координат. Применяя в точности метод предыдущего параграфа, мы покажем, что соответствующим преобразованием координат можно добиться того, чтобы $M_1 = 1$, $M_2 = \ldots = M_m = 0$, после чего, дифференцируя по t, убедимся так же, как и там, что L можно сделать независимой от q_1, так что координата q_1 есть несущественная.

Указанный выше метод множителей даст все интегралы уравнений Лагранжа, линейные относительно скоростей.

§ 8. Условные интегралы, линейные относительно скоростей. В предыдущем параграфе мы рассматривали интегралы, линейные относительно скоростей и годные для *всех* значений постоянной энергии. Более трудную проблему представляет собою нахождение условного интеграла, годного для какого-нибудь *определенного* значения постоянной c энергии, например, для $c = 0$. В настоящем параграфе мы рассмотрим этот вопрос для случая системы с двумя степенями свободы. В этом случае, как было показано раньше, мы можем, совершив преобразование переменных, получить уравнения движения и интеграл энергии в нормальной форме:

$$x'' + \lambda y' = \gamma_x, \quad y'' - \lambda x' = \gamma_y; \quad \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) = \gamma,$$

где γ_x, например, означает $\partial\gamma/\partial x$.

Кроме того, так как всякое преобразование переменных сохраняет линейный характер (относительно x' и y') линейного интеграла, то мы можем написать искомый интеграл в виде

$$V \equiv lx' + my' + n = k,$$

где подразумевается, что это соотношение должно иметь место в том случае, когда постоянная энергии обращается в нуль.

Если мы продифференцируем этот линейный интеграл по времени t, то получившееся уравнение должно обращаться в тождество, если принять во внимание написанные выше дифференциальные уравнения движения и интеграл энергии.

С помощью дифференциальных уравнений мы можем исключить x'' и y''. После того, как это будет сделано, мы получим уравнение, квадратичное относительно x' и y', которое должно обращаться в тождество в силу одного только интеграла энергии. В этом уравнении члены второй степени относительно x', y' будут

$$l_x x'^2 + (l_y + m_x)x'y' + m_y y'^2.$$

Для того, чтобы эта сумма комбинировалась с членами низших степеней в выражение, обращающееся в нуль, если принять во внимание интеграл энергии, она должна быть нижеследующего вида:

$$\rho(x'^2 + y'^2),$$

откуда

$$l_x = m_y, \quad l_y = -m_x,$$

т. е.

$$l = u_y, \quad m = u_x,$$

где u — гармоническая функция.

Мы можем теперь написать интеграл в виде

$$u_y x' + u_x y' + n = k.$$

Из сказанного в § 3 следует, что дальнейшее произвольное конформное преобразование плоскости x, y вместе с соответственным преобразованием аргумента t сохранит нормальную форму дифференциальных уравнений и интеграла энергии. Для того чтобы упростить еще больше линейный интеграл, произведем преобразование координат x, y в новые $\overline{x}$, $\overline{y}$, определенные формулой

$$\overline{x} + i\overline{y} = \int \frac{dx + idy}{u_y + iu_x} \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

Это, очевидно, представляет собою конформное преобразование. Обратное преобразование

$$x + iy = f(\overline{x} + i\overline{y})$$

будет тоже конформным, и мы имеем:

$$|f'(\overline{x} + i\overline{y}|^2 = \left|\frac{dx + i\,dy}{d\overline{x} + i\,d\overline{y}}\right|^2 = u_y^2 + u_x^2.$$

Теперь определим преобразование t формулой

$$dt = (u_y^2 + u_x^2)\, d\bar{t}.$$

Тогда мы, очевидно, получаем:

$$\bar{x}' + i\bar{y}' = (u_y - iu_x)(x' + iy'),$$

где $\bar{x}' = \dfrac{d\bar{x}}{d\bar{t}}$, $\bar{y}' = \dfrac{d\bar{y}}{d\bar{t}}$. В частности, имеем, таким образом,

$$\bar{x}' = u_y x' + u_x y'.$$

Следовательно, после того, как мы произвели такое преобразование([4]), наш линейный интеграл примет форму (мы теперь опускаем черточки над x, y, t):

$$x' + n = k.$$

Продифференцируем теперь этот интеграл по t и исключим x'' при помощи первого уравнения Лагранжа. Мы получим тогда

$$n_x x' + (n_y - \lambda) y' + \gamma_x = 0.$$

Это выражение должно тождественно обращаться в нуль в силу соотношения $x'^2 + y'^2 = 2\gamma$. Следовательно, это выражение обращается в нуль тождественно относительно x' и y', что имеет место только в том случае, если λ и γ будут функциями одного y. В этом случае подходящим выбором n, а, именно, при $n = \int \lambda\, dy$, мы действительно можем добиться того, чтобы вышеприведенное выражение обращалось в нуль.

Если такая динамическая система с двумя степенями свободы и постоянной энергии, равной нулю, имеет условный интеграл, линейный относительно скоростей, то посредством подходящего преобразования координат и времени уравнения могут быть приведены к нормальному виду, с главной функцией L, равной

$$L = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + n(y) x' + \gamma(y),$$

и система содержит несущественную координату x. В этом интегрируемом случае кривые движения даются уравнениями:

$$x = \int \frac{(c_1 - n)\, dy}{\sqrt{2\gamma - (c_1 - n)^2}} + c_2,$$

$$t = \int \frac{dy}{\sqrt{2\gamma - (c_1 - n)^2}} + c_3.$$

§ 9. Интегралы, квадратичные относительно скоростей. Известным интегралом, квадратичным относительно скоростей, является интеграл энергии. Кроме того, известно, что динамические системы так называемого типа Лиувилля, для которых L имеет вид:

$$L = \frac{1}{2}U\sum_{j=1}^{m} v_j(q_j)q'^2_j - \frac{W}{U},$$

где

$$U = \sum_{j=1}^{m} u_j(q_j), \quad W = \sum_{j=1}^{m} w_j(q_j)$$

имеют m интегралов, квадратичных относительно скоростей, а именно:

$$\frac{1}{2}U^2 v_i q'^2_i - cu_i + w_i = c_i \quad (i = 1, \dots, m)(^5),$$

и могут быть полностью проинтегрированы.

Мы предполагаем здесь рассмотреть частный случай обратной задачи: определить условия, при которых система Лагранжа с двумя степенями свободы, обратимого типа, с постоянной энергии, равной нулю, имеет условный интеграл, квадратичный относительно скоростей, т. е. вида

$$V \equiv \frac{1}{2}(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2) + dx' + ey' + f = k,$$

где $a, \dots, f$ суть функции от x и y, причем мы предполагаем, что этот интеграл не является линейной комбинацией интеграла энергии и линейного интеграла.

Если такой интеграл существует, то любое преобразование переменных x, y, t типа, рассмотренного в § 3, оставляет форму этого интеграла без изменения. Следовательно, мы можем привести наши уравнения к нормальному виду, для которого

$$L = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + \gamma.$$

Дифференцируя предполагаемый интеграл и исключая x'', y'' с помощью уравнений Лагранжа, мы получим полином не выше чем третьей степени относительно x', y', который должен обращаться тождественно в нуль в силу соотношения $W \equiv \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - \gamma = 0$. Но члены третьей степени относительно x', y' суть

$$\frac{1}{2}a_x x'^3 + \left(b_x + \frac{1}{2}a_y\right)x'^2y' + \left(b_y + \frac{1}{2}c_x\right)x'y'^2 + \frac{1}{2}c_y y'^3.$$

Эти члены вместе с членами низших порядков должны дать нуль на основании равенства $W = 0$. Это может быть только в том случае, если написанный полином делится на $x'^2 + y'^2$, т. е. если

$$a_x - c_x = 2b_y, \quad a_y - c_y = -2b_x.$$

Но эти формулы представляют собой дифференциальное уравнение Коши–Римана для сопряженных гармонических функций $a-c$, $2b$, и мы можем написать:

$$a - c = 2u_y, \quad b = u_x,$$

где u — гармоническая функция.

Из этого следует, что квадратичные члены предполагаемого интеграла можно написать в виде:

$$\frac{1}{2}u_y x'^2 + u_x x'y' - \frac{1}{2}u_y y'^2 + \rho(x'^2 + y'^2).$$

Принимая во внимание интеграл энергии, мы можем заменить последний член на $2\rho\gamma$. Остальные квадратичные члены могут быть записаны так:

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}[(u_y - iu_x)(x' + iy')^2],$$

где $\mathrm{Re}(z)$ означает вещественную часть z.

Определим теперь аналитическую функцию g от $x + iy$ соотношением

$$g'^2 = \frac{1}{u_y + iu_x}, \text{(6)}$$

и совершим замену переменных

$$\overline{x} + i\overline{y} = g(x + iy), \quad d\overline{t} = |g'|^2\,dt,$$

сохраняющую нормальную форму уравнений. Мы видим, что написанные выше квадратичные члены, которые можно записать еще так:

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[\frac{g'^2(dx + i\,dy)^2}{|g'|^4\,dt^2}\right],$$

в новых переменных превращаются в

$$\frac{1}{2}(\overline{x}'^2 - \overline{y}'^2).$$

Следовательно, наш интеграл примет более простой вид:

$$\frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) + dx' + ey' + f = k,$$

если мы будем писать для простоты x, y, t вместо $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{t}$.

Далее, продифференцировав это уравнение по t, как прежде, получим после исключения x'', y'':

$$d_x x'^2 + (d_y + e_x)x'y' + e_y y'^2 + (f_x + \gamma_x)x' + \\ + (f_y - \gamma_y)y' + d\gamma_x + e\gamma_y = 0.$$

Члены первой степени должны тождественно обращаться в нуль, откуда находим:

$$\gamma = \varphi(x) + \psi(y); \quad f = -\varphi(x) + \psi(y).$$

Но при таком виде γ дифференциальные уравнения сразу интегрируемы.

Если обратимая лагранжева система с двумя степенями свободы и с постоянной энергии, равной нулю, имеет условный интеграл, квадратичный относительно скоростей и существенно отличный от интеграла энергии, то преобразованием переменных мы можем добиться того, чтобы уравнения и интеграл энергии приняли вид

$$x'' = \varphi'(x), \quad y'' = \psi'(y), \quad \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) = \varphi(x) + \psi(y).$$

Квадратичный интеграл в таком случае будет

$$\frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) = \varphi(x) - \psi(y) + k,$$

и уравнения полностью интегрируемы, причем решение их имеет вид:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\varphi + k/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dy}{\sqrt{\psi - k/2}}.$$

Уравнения типа Лиувилля представляют собой существенно эквивалентный случай.

§ 10. Уравнения Гамильтона. Перейдем теперь к формулировке другой важной формы вариационного принципа, которая приведет нас к так называемому гамильтонову или каноническому виду уравнений динамики.

Напишем уравнение

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Big[\sum_{j=1}^{m} p_j q'_j - \sum_{j=1}^{m} p_j r_j + L(q_1, \ldots, q_m, r_1, \ldots, r_m)\Big]\, dt = 0,$$

в котором r_i суть функции от $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$, определенные посредством m уравнений

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial r_i} \quad (i = 1, \ldots, m), (^7)$$

в то время как $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ варьируются независимо друг от друга. Это уравнение, как мы знаем, равносильно системе $2m$ дифференциальных уравнений, из которых первые m, получаемые варьированием $p_1, \ldots, p_m$, суть

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial p'_i}\right) - \frac{\partial F}{\partial p_i} \equiv -q'_i + r_i + \sum_{j=1}^{m}\left(p_j \frac{\partial r_j}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial r_j}\frac{\partial r_j}{\partial p_i}\right) \equiv -q'_i + r_i = 0,$$

где подынтегральное выражение обозначено для краткости через F. Остальные m уравнений могут быть получены таким же образом и имеют вид:

$$p'_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0,$$

где буквой H обозначено выражение

$$\sum_{j=1}^{m} p_j r_j - L.$$

Необходимо отметить, что получающиеся таким образом $2m$ дифференциальных уравнений все являются уравнениями парного порядка, так что общий интеграл их содержит $2m$ произвольных постоянных.

Из первых m уравнений следует, что функции p_i^0, q_i^0, для которых интеграл стационарен, обладают тем свойством, что $r_i^0 = (q_i^0)'$. Будем считать теперь, что $r_i = q'_i$, так что наш интеграл обращается в интеграл Лагранжа

$$\int_{t_0}^{t_1} L(q_1, \ldots, q_m, q'_1, \ldots, q'_m)\, dt.$$

Вариации $q_1, \ldots, q_m$ продолжают оставаться произвольными, но вариации $p_1, \ldots, p_m$ определены формулой $p_i = \partial L/\partial q'_i$. При этом, если вариации $q_1, \ldots, q_m$ обращаются в ноль тождественно в окрестности точек t_0 и t_1, то и вариации p_i обращаются в ноль в тех же окрестностях, так как

$$\delta p_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial q'_i} \delta q_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial q'_j \partial q'_i} \delta q'_j.$$

Отсюда

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt = 0$$

вдоль кривой $q_i = q_i^0(t)$. Следовательно, q_i^0 удовлетворяет уравнениям Лагранжа, связанным с этим интегралом, а p_i^0 определяется из уравнений $r_i^0 = q_i^0$.

Таким образом каждое решение предложенной вариационной задачи приводит к некоторому решению уравнений Лагранжа. Обратное высказывание также справедливо([8]), потому что выбор p_i, q_i в любой момент t произволен и приводит к произвольной системе значений q_i, q'_i.

Если главная функция лагранжевой системы есть $L(q_1, \ldots, q_m, q'_1, \ldots, q'_m)$ и если мы образуем функцию от $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$, определенную формулой

$$H = -L + \sum_{j=1}^{m} p_j q'_j, \tag{3}$$

где переменные q'_i исключаем при помощи уравнений

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q'_i} \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{4}$$

то первоначальные уравнения $\delta \int L\, dt = 0$ могут быть заменены эквивалентной системой уравнений относительно p_i, q_i, а именно:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Big[\sum_{j=1}^{m} p_j q'_j - H\Big]\, dt = 0, \tag{5}$$

или иначе

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{6}$$

Уравнения (6) называются уравнениями Гамильтона, а переменные p_i — «обобщенными моментами». Пара переменных p_i, q_i есть пара «сопряженных» переменных. Кроме того следует отметить, что гамильтонова «главная функция» H — не что иное, как полная энергия системы, выраженная через обобщенные координаты и моменты. Из канонических уравнений (6) сразу же следует интеграл энергии $H = \text{const}$.

Легко видеть также, что вышеприведенный вариационный принцип приводит к тем же уравнениям и в том случае, когда функции L и H содержат время t.

Обратно, всякую систему Гамильтона (5), (6), *где H — произвольная функция, можно привести к системе Лагранжа.*

Для доказательства этого утверждения нам достаточно определить L посредством формулы

$$L(q_1, \dots, q_m, r_1, \dots, r_m) = -H + \sum_{j=1}^{m} p_j r_j,$$

где $p_1, \dots, p_m$ суть функции от q_i и r_i, определяемые в неявном виде из уравнений

$$r_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, \dots, m)(^9).$$

Очевидно, лагранжева система, имеющая эту функцию L в качестве главной функции, будет связана требуемым образом с данной функцией H.

Если H содержит t, то L будет, разумеется, тоже содержать t, и те же рассуждения останутся в силе.

§ 11. Преобразование уравнений Гамильтона. Вариационный принцип (5) замечателен тем, что из производных $p'_1, \dots, p'_m, q'_1, \dots, q'_m$ только $q'_1, \dots, q'_m$ содержатся под знаком интеграла, и притом, линейно, и имеют коэффициентами как раз сопряженные переменные. Преобразование координат $p_1, \dots, q_m$ в новые $\overline{p}_1, \dots, \overline{q}_m$ дает форму, линейную относительно $p'_1, \dots, q'_m$, но, вообще говоря, не такого вида. Мы рассмотрим в следующем параграфе получающийся таким путем тип уравнений — так называемые пфаффовы уравнения, которые имеют некоторые преимущества перед уравнениями Гамильтона.

Общий вид «контактного преобразования», сохраняющего каноническую форму уравнений, будет:

$$p_i = \frac{\partial K}{\partial q_i}, \quad \overline{p}_i = -\frac{\partial K}{\partial \overline{q}_i} \qquad (i = 1, \dots, m) \tag{7}$$

где K — произвольная функция от $q_1, \ldots, q_m, \overline{q}'_1, \ldots, \overline{q}'_m$ и t, подчиненная только условию, что она должна действительно давать преобразование координат $p_1, \ldots, q_m$ в новые $\overline{p}_1, \ldots, \overline{q}_m$ при помощи приведенных уравнений. Мы не будем объяснять здесь смысл этих на вид искусственных формул замены переменных, а перейдем прямо к доказательству того, что подобное преобразование действительно сохраняет каноническую форму уравнений. Посредством первых m из этих формул мы придаем вариационной задаче следующий вид:

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big[\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial K}{\partial q_j} q'_j - H\Big]\, dt = 0,$$

где независимыми переменными теперь считаются $\overline{p}_1, \ldots, \overline{q}_m$.

Но для тех же переменных имеем:

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial K}{\partial q_j} q'_j + \frac{\partial K}{\partial \overline{q}_j} \overline{q}'_j\right) + \frac{\partial K}{\partial t}\right] dt = 0,$$

так как выражение под знаком интеграла есть полная производная. Вычитая из верхней формулы нижнюю и применяя последние m уравнений (7), получим:

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big[\sum_{j=1}^{m} \overline{p}_j \overline{q}'_j - \overline{H}\Big]\, dt = 0 \qquad \left(\overline{H} = H + \frac{\partial K}{\partial t}\right).$$

Преобразование вида (7) *с произвольной функцией* K, *действительно дающей преобразование переменных, сохраняют гамильтонову форму уравнений с главной функцией* $\overline{H} = H + \partial K/\partial t$.

Подобным же образом мы можем написать

$$p_i = \frac{\partial K}{\partial q_i}, \quad \overline{q}_i = \frac{\partial K}{\partial p_i} \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{8}$$

и получить такой же результат.

Преобразования (8) *тоже сохраняют гамильтонову форму уравнений с главной функцией* $\overline{H} = H + \partial K/\partial t$.

Достоин внимания тот факт, что преобразования типа (8) составляют группу. В самом деле, эти преобразования характеризуются тем, что выражение

$$\sum_{j=1}^{m}(p_j\,dq_j+\overline{q}_j\,d\overline{p}_j)$$

есть полный дифференциал dK. Для второго такого преобразования от $\overline{p}_1, \ldots, \overline{q}_m$ к $\overline{\overline{p}}_1, \ldots, \overline{\overline{q}}_m$ имеется второй подобный дифференциал $d\overline{K}$. Складывая, получаем:

$$\sum_{j=1}^{m}(p_j\,dq_j+\overline{\overline{q}}_j\,d\overline{\overline{p}}_j)=d\Big(K+\overline{K}-\sum_{j=1}^{m}\overline{p}_j\overline{q}_j\Big),$$

так что сложное преобразование принадлежит к тому же типу. Подобным же образом преобразование, обратное преобразованию (7), или результат нечетного числа подобных преобразований, дает преобразование того же типа, в результате четного числа преобразований типа (7) дает преобразование типа (8)[1](^{1})(^{10}).

§ 12. Уравнения Пфаффа. Очевидно, что уравнения Гамильтона можно рассматривать как частный случай уравнений, вытекающих из более общего вариационного принципа Пфаффа:

$$\delta\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_{j=1}^{n}P_jp'_j+Q\Big]\,dt=0, \tag{9}$$

в котором подынтегральное выражение представляет собою линейную функцию от производных p'_i, с коэффициентами $P_1, \ldots, P_n$, Q, которые являются произвольными функциями от $p_1, \ldots, p_n$, причем n — четное число ($n = 2m$).

Если мы представим в явном виде получающиеся уравнения, то будем иметь:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_j}-\frac{\partial P_j}{\partial p_i}\right)\frac{dp_j}{dt}-\frac{\partial Q}{\partial p_i}=0\quad(i=1,\ldots,n). \tag{10}$$

Эти уравнения, очевидно, представляют собою выродившиеся уравнения Лагранжа с $L_2{=}0$, $L_1{=}\sum P_jp'_j$, $L_0{=}Q$, так что мы имеем интеграл вида $Q = \mathrm{const}$, который для уравнений Гамильтона обращается в интеграл энергии.

[1]Приложения теории контактных преобразований и теорию соответствующих гамильтоновых уравнений в частных производных читатель может найти у *Whittaker*, Analytical Dynamics, гл. 10, 11, 12.

Эти уравнения сохраняют свою форму при произвольном преобразовании переменных. Нужно только прямой подстановкой переменных найти точное выражение линейной дифференциальной формы под знаком интеграла. Таким образом, пфаффовы уравнения допускают совершенно произвольные подстановки и в этом отношении значительно удобнее как лагранжевых, так и гамильтоновых уравнений.

§ 13. О значении вариационных принципов. Так как вариационные принципы играют большую роль в динамической теории, интересно выяснить их истинное значение для динамики. Иными словами: какими специальными свойствами обладают уравнения Лагранжа, Гамильтона и Пфаффа, получающиеся из соответствующих вариационных принципов, рассмотренных выше?

Все эти типы уравнений можно рассматривать как системы $n=2m$ уравнений первого порядка, если в уравнениях Лагранжа мы введем новые переменные $r_i = q_i'$.

Заметим прежде всего, что пока мы будем рассматривать эти уравнения в окрестности какой-нибудь точки соответствующего n-мерного пространства, не являющейся точкой равновесия системы, нельзя будет найти никаких специальных характеристик для этих типов уравнений.

В самом деле, если мы возьмем какую-нибудь динамическую систему, определенную n уравнениями:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

то она перейдет в систему того же вида при любом преобразовании переменных

$$x_i = \varphi_i(y_1, \ldots, y_n) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

при известных условиях. Две такого рода системы будут, естественно, называться «эквивалентными», если можно перейти от одной из них к другой посредством допустимого преобразования переменных указанного типа. Если мы сосредоточим наше внимание на окрестности какой-либо точки $x_1^0, \ldots, x_n^0$, в которой не все X_i, обращаются в нуль, так что она не есть точка равновесия системы, то такая система будет эквивалентна любой другой подобной системе, так что мы сможем перейти к уравнениям:

$$\frac{dy_1}{dt} = 1, \quad \frac{dy_i}{dt} = 0 \quad (i = 2, \ldots, n).$$

Это легко можно показать следующим образом. Представим себе, что данная система дифференциальных уравнений определяет стационарное течение жидкости в пространстве с координатами $x_1, \ldots, x_n$, так что кривые движения жидкости даются решениями $x_i = x_i(t)$ $(i = 1, \dots , n)$. Эти кривые, имеющие в каждой точке определенное направление, с направляющими косинусами, пропорциональными $X_1, \dots , X_n$ могут быть деформированы в прямые линии

$$y_1 = t_1, \quad y_2 = c_2, \dots , \quad y_n = c_n$$

пространства с координатами $y_1, \dots , y_n$ посредством одно-однозначного аналитического преобразования. Следовательно, преобразованные уравнения имеют общее решение:

$$y_1 = t + c_1, \quad y_2 = c_2, \dots , \quad y_n = c_n,$$

откуда тотчас же следует, что эти уравнения имеют требуемый нормальный вид:

$$\frac{dy_1}{dt} = 1, \quad \frac{dy_2}{dt} = \dots = \frac{dy_n}{dt} = 0.$$

Следовательно, в окрестности точки, не являющейся точкой равновесия, нет никакой существенной разницы между уравнениями, выведенными из вариационного принципа, и самым общим видом дифференциальных уравнений.

В следующей главе мы увидим, что вариационные принципы имеют большое значение в вопросах, связанных с формальной устойчивостью динамических систем вблизи точки равновесия, или периодического движения. И можно даже сказать, что в этом состоит их главное значение для динамики. Здесь надлежит сделать еще одно интересное замечание относительно вариационных принципов. Предположим, что мы исходим из n произвольных уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots , x_n, t) \quad (i = 1, \dots , n). \tag{11}$$

Уравнения вариации будут:

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} y_j \quad (i = 1, \dots , n).$$

Они могут быть проинтегрированы, если мы знаем общий интеграл уравнений (11):

$$x_i = f_i(t, c_1, \dots , c_n) \quad (i = 1, \dots , n).$$

Решение уравнений вариации будет:

$$y_i = k_1 \frac{\partial f_i}{\partial c_1} + \dots + k_n \frac{\partial f_i}{\partial c_n} \quad (i = 1, \dots , n).$$

где $k_1, \dots , k_n$ — произвольные постоянные.

Соответственно этому система уравнений, сопряженная с уравнениями вариации,

$$\frac{dz_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial x_i} z_j \quad (i = 1, \dots , n)$$

имеет интегралы

$$\frac{\partial f_1}{\partial c_i} z_1 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial c_i} z_n = k_i \quad (i = 1, \dots , n).$$

Следовательно, данную систему (11) дифференциальных уравнений первого порядка можно назвать «эквивалентной» расширенной системе (11), (12) тоже первого порядка с $2n$ переменными $x_1, \dots , x_n$, $z_1, \dots , z_n$, так как решение одной из этих систем дает решение другой. Но расширенная система (11), (12) есть система Гамильтона с сопряженными переменными x_i, z_i и с главной функцией, равной

$$H = -\sum_{j=1}^{m} X_j z_j,$$

в чем мы можем убедиться непосредственно.

Эти замечания должны показать нам, с какой осторожностью следует подходить к вопросу об истинном значении вариационных принципов в динамике.

Глава 3
Формальное рассмотрение динамических систем

§ 1. Вводные замечания. В предыдущей главе было указано, что система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

не имеет инвариантов по отношению к группе всех одно-однозначных аналитических преобразований

$$x_i = \varphi_i(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

при условии, что мы ограничимся рассмотрением окрестности какой-нибудь точки x_i^0. Это было показано в предположении, что X_i суть аналитические функции и что они не обращаются в нуль одновременно в точке x_i^0.

Простейший случай, в котором можно ожидать появления инвариантов, это — случай, когда x_i^0 суть точка равновесия системы, для чего требуется, чтобы все $X_i^0 = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Другой важный случай, который можно рассматривать как обобщение первого, представится, если мы будем рассматривать наши уравнения в окрестностях некоторого периодического решения с периодом τ:

$$x_i = f_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Если мы теперь напишем

$$x_i = f_i(t) + \overline{x}_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

то уравнения (1) примут более общую форму:

$$\frac{d\overline{x}_i}{dt} = \overline{X}_i(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

или, опуская для простоты черточки над x_i и X_i:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

где X_i суть аналитические функции от $x_1, \ldots, x_n$ и t — периодические относительно t, с периодом τ, совпадающим с периодом рассматриваемого движения, и обращающиеся в нуль в точке $\overline{x}_1 = \ldots = \overline{x}_n = 0$ для всех значений t. Мы рассмотрим вопрос об инвариантных характеристиках для «обобщенной проблемы равновесия», определенной системой уравнений этого последнего вида (3).

В настоящей главе мы сосредоточим внимание главным образом на тех чисто формальных соображениях, в которых не принимаются во внимание вопросы, касающиеся сходимости рассматриваемых рядов, и в которых мы будем считать известной точку равновесия или периодическое движение. Таким путем мы будем иметь возможность развить в значительной мере формальную сторону теории применяемых в динамике уравнений типов Лагранжа, Гамильтона и Пфаффа. С этой целью мы, прежде всего, будем исследовать свойства того, что можно назвать общим случаем проблемы равновесия, а затем перейдем к упомянутым частным типам, так что можно будет сравнивать обе задачи.

§ 2. Формальная группа. Для удобства обозначений мы примем, что точка равновесия системы (3) находится в начале координат. Мы будем рассматривать преобразования вида

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\overline{x}_j + \frac{1}{2}\sum_{j,\,k=1}^{n} a_{ijk}(t)\overline{x}_j\,\overline{x}_k + \ldots, \tag{4}$$

где коэффициенты a_{ij}, a_{ijk} суть вещественные периодические аналитические функции t с периодом τ, такие, что определитель $|a_{ij}|$ не обращается в нуль ни при каком значении t. Очевидно, что два таких последовательно совершенных преобразования могут быть соединены в одно преобразование того же типа, и что преобразование, обратное какому-нибудь преобразованию типа (4), будет иметь такой же вид. Кроме того, дифференциальные уравнения (3), очевидно, сохраняют свой вид при преобразовании, принадлежащем этой группе.

Представим себе теперь, что в преобразовании (4) встречаются расходящиеся ряды. Правые части $\overline{X}_i$ преобразованных дифференциальных уравнений будут в этом случае представлены как определенные формальные степенные ряды относительно $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ с коэффициентами, являющимися периодическими аналитическими функциями от t с периодом τ, причем эти ряды не будут содержать свободных членов. Таким образом, наряду с формальной группой преобразований, мы получаем соответствующие формальные уравнения. Здесь необходимо особенно подчеркнуть, что обычные законы композиции преобразований и вывода соответствующих дифференциальных уравнений применимы для случая расходящихся рядов совершенно так же, как и для сходящихся. Это непосредственно следует из того, что если мы оборвем формальные ряды на каком-нибудь члене высокой степени, то для получившихся таким образом действительных преобразований и действительных дифференциальных уравнений эти формальные законы имеют место. Когда мы будем присоединять члены все более и более высокой степени, то на члены более низкой степени в правых частях получающихся дифференциальных уравнений это не будет влиять.

Переходя к формальному предельному случаю, мы заключаем, что обычные, чисто формальные соотношения будут оставаться в силе и в случае расходящихся рядов.

Во многих случаях бывает выгодно несколько видоизменить вышеуказанную формальную группу так, чтобы некоторые пары переменных x_i, x_j были связаны особым образом; так, например, бывает выгодно ввести пары сопряженных переменных

$$\xi = x_i + x_j\sqrt{-1}, \quad \eta = x_i - x_j\sqrt{-1},$$

причем x_i и x_j тогда и только тогда вещественны, когда ξ и η — сопряженные комплексные переменные. В то же время преобразование координат $x_1, \ldots, x_n$ в $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ может быть выражено как преобразование сопряженных пар ξ, η в соответствующие новые пары $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$. Участвующие в этом преобразовании ряды должны тогда обладать тем свойством, что если сопряженным парам, подобным ξ, η, дать сопряженные комплексные значения, а остальным переменным дать вещественные значения, то же будет иметь место и для преобразованных переменных. Если мы возвратимся к преобразованиям прежних координат, то это условие будет означать, что новые переменные $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ должны быть вещественными, если $x_1, \ldots, x_n$ вещественны.

Нетрудно определить характерные свойства формальных рядов, определяющих преобразования подобных пар сопряженных переменных. Если преобразования первоначальной группы написать в виде:

$$\begin{aligned} x_i &= f_i(\overline{x}_1, \overline{y}_1, \ldots, \overline{x}_s, \overline{y}_s, \overline{x}_{2s+1}, \ldots, \overline{x}_n), \\ y_i &= g_i(\overline{x}_1, \overline{y}_1, \ldots, \overline{x}_s, \overline{y}_s, \overline{x}_{2s+1}, \ldots, \overline{x}_n) \quad (i = 1, \ldots, s), \\ x_i &= h_i(\overline{x}_1, \overline{y}_1, \ldots, \overline{x}_s, \overline{y}_s, \overline{x}_{2s+1}, \ldots, \overline{x}_n) \quad (i = 2s+1, \ldots, n), \end{aligned}$$

где $x_1, y_1, \ldots, x_s, y_s$ суть s пар соотнесенных переменных, то сопряженные переменные будут выражаться формулами

$$\xi_i = x_i + y_i\sqrt{-1}, \quad \eta_i = x_i - y_i\sqrt{-1} \qquad (i = 1, \ldots, s),$$

и аналогичными формулами будут выражаться $\overline{\xi}_i$, $\overline{\eta}_i$ через $\overline{x}_i$, $\overline{y}_i$.

Отсюда получаем

$$\xi_i = f_i\left(\frac{\overline{\xi}_1+\overline{\eta}_1}{2}, \frac{\overline{\xi}_1-\overline{\eta}_1}{2\sqrt{-1}}, \ldots, \overline{x}_{2s+1}, \ldots, \overline{x}_n\right) + \\ + g_i\left(\frac{\overline{\xi}_1+\overline{\eta}_1}{2}, \frac{\overline{\xi}_1-\overline{\eta}_1}{2\sqrt{-1}}, \ldots, \overline{x}_{2s+1}, \ldots, \overline{x}_n\right)\sqrt{-1}$$

для $i = 1, \ldots, s$ и подобные же формулы для η_i $(i = 1, \ldots, s)$ и для x_i $(i = 2s+1, \ldots, n)$ в новых переменных. Очевидно, что ряды, стоящие в правой части, обладают всеми свойствами преобразований формальной группы, за исключением лишь того, что их периодические коэффициенты будут, вообще говоря, комплексными.

Рассматривая внимательнее эти ряды, мы тотчас же заметим, что они обладают следующим дополнительным характеристическим свойством. Если мы переставим в каждой паре сопряженные переменные $\overline{\xi}_i$, $\overline{\eta}_i$ в рядах для ξ_i, η_i, x_i и одновременно заменим все коэффициенты на сопряженные, то ряды для ξ_i $(i = 1, \ldots, s)$ перейдут в ряды для η_i, и наоборот, в то время как ряды для x_i $(i = 2s+1, \ldots, n)$ останутся без изменения.

Легко доказать, что это необходимое формальное свойство является в то же время и достаточным. Действительно, пусть $\overline{x}_i$, $\overline{y}_i$ будут вещественные количества, и определим $\overline{\xi}_i$, $\overline{\eta}_i$ как выше, так что $\overline{\xi}_i$, $\overline{\eta}_i$ будут сопряженными комплексными числами.

Напишем:

$$\begin{aligned}
\xi_i &= \varphi_i(\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\eta}_s, \overline{x}_{2s+1}, \ldots, \overline{x}_n, t) \quad (i = 1, \ldots, s)\\
\eta_i &= \psi_i(\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\eta}_s, \overline{x}_{2s+1}, \ldots, \overline{x}_n, t) \quad (i = 1, \ldots, s)\\
x_i &= \chi_i(\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\eta}_s, \overline{x}_{2s+1}, \ldots, \overline{x}_n, t) \quad (i = 2s+1, \ldots, n)
\end{aligned}$$

и предположим, что ряды φ_i, ψ_i, χ_i обладают указанными формальными свойствами и для начала, что они сходятся. Тогда, если мы обозначим величину, сопряженную с какой-нибудь величиной k знаком k^*, то мы можем написать, например,

$$\begin{aligned}
\xi_i^* &= {\varphi_i}^*(\overline{\xi}_1^*, \ldots, \overline{\eta}_s^*, \overline{x}_{2s+1}, \ldots, x_n, t) =\\
&= {\varphi_i}^*(\overline{\eta}_1, \ldots, \overline{\xi}_s, \overline{x}_{2s+1}, \ldots, x_n, t) =\\
&= \psi_i(\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\eta}_s, \overline{x}_{2s+1}, \ldots, x_n, t) = \eta_i,
\end{aligned}$$

где φ_i^* обозначает формальный ряд, полученный посредством замены всех коэффициентов в φ_i на сопряженные им. Следовательно, ξ_i и η_i сопряжены. Подобное же рассуждение показывает, что x_i будут вещественны (для $i = 2s+1, \ldots, 2n$).

В случае, когда ряды первоначальной формальной группы расходятся, то ряды для сопряженных переменных могут, разумеется, тоже расходиться. Но вышеприведенное формальное свойство сохраняется и в этом случае, в чем можно легко убедиться, обрывая ряды где-нибудь на членах высоких степеней и применяя далее то же рассуждение, что и выше.

В качестве очень простого примера перехода от вещественных к сопряженным комплексным переменным рассмотрим преобразование, которое в вещественном виде производится над парой переменных x, y и имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= \overline{x}\cos(\vartheta + t - c\overline{r}^2) - \overline{y}\sin(\vartheta + t - c\overline{r}^2), \\ y &= \overline{x}\sin(\vartheta + t - c\overline{r}^2) + \overline{y}\cos(\vartheta + t - c\overline{r}^2) \qquad (\overline{r}^2 = \overline{x}^2 + \overline{y}^2). \end{aligned}$$

Это преобразование, очевидно, принадлежит к рассматриваемой формальной группе и имеет период $\tau = 2\pi$. Переходя к соответственной паре сопряженных комплексных переменных ξ, η, легко найдем

$$\begin{aligned} \xi &= \overline{\xi} e^{\sqrt{-1}(\vartheta + t - c\overline{\xi}\overline{\eta})}, \\ \eta &= \overline{\eta} e^{-\sqrt{-1}(\vartheta + t - c\overline{\xi}\overline{\eta})} \end{aligned}$$

и сразу убеждаемся, что правые части формул обладают требуемым характеристическим свойством.

§ 3. Формальные решения. Предположим, что в рассматриваемую систему (3) дифференциальных уравнений мы подставим

$$x_i = F_i(t, c_1 \ldots, c_n) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

где F_i суть формальные степенные ряды относительно n произвольных постоянных $c_1, \ldots, c_n$, не имеющие свободного члена и притом такие, что определитель $\partial F_i / \partial c_j$ в начале координат (т. е. в точке $c_1 = \ldots = c_n = 0$) не обращается в нуль ни при каком значении t и что коэффициенты этих рядов — вещественные аналитические функции от t. Может случиться, что полученные таким образом n равенств будут в формальном смысле удовлетворяться тождественно относительно t и c_i. В этом случае мы скажем, что ряды (5) дают «формальное общее решение» рассматриваемой системы дифференциальных уравнений.

В частном случае может оказаться, что коэффициенты функций F_i являются периодическими функциями t с периодом τ. В этом случае мы будем иметь соответствующее преобразование

$$x_i = F_i(t, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

принадлежащее формальной группе. Если преобразованная формальная система дифференциальных уравнений будет

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(y_1, \ldots, y_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

то мы имеем формальные равенства:

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial y_j} Y_j \equiv X_i(F_1, \ldots, F_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

в которых аргументами F_i являются, разумеется, $y_1, \ldots, y_n, t$. Но утверждение, что F_i дает формальное решение, означает как раз, что

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} \equiv X_i(F_1, \ldots, F_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

причем аргументами рядов F_i в этом равенстве будут уже не $y_1, \ldots, y_n$, а $c_1, \ldots, c_n$.

Если мы теперь заменим в последней формуле $c_1, \ldots, c_n$ соответственно на $y_1, \ldots, y_n$, что, разумеется, всегда возможно, и сравним получившиеся тождества с предыдущими, то убедимся, что

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial y_j} Y_j = 0,$$

откуда, очевидно, $Y_i \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Следовательно, рассматриваемый случай оказывается таким частным случаем, в котором данная система дифференциальных уравнений может быть формально преобразована к нормальному виду

$$\frac{dx_i}{dt} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

посредством преобразования, принадлежащего к рассматриваемой формальной группе. Как мы увидим ниже, в общем случае подобное преобразование невозможно.

Если над переменными уравнений (3) *произвести преобразование, принадлежащее нашей формальной группе, то всякое формальное общее решение* (5) *преобразуется в формальное общее решение преобразованных уравнений.*

Чтобы проще показать это, расширим временно формальную группу, включив в нее преобразования, коэффициенты которых суть непериодические аналитические функции t. К этой расширенной группе принадлежит, между прочим, преобразование, получаемое из формулы (5) заменой $c_1, \ldots, c_n$ на $y_1, \ldots, y_n$, которое превращает данные уравнения в систему уравнений, для которых $Y_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Но преобразованная система с переменными $\overline{x}_i, \ldots, \overline{x}_n$ может быть приведена к этому виду непосредственно путем преобразования, являющегося композицией преобразований от $\overline{x}_i$ к x_i и от x_i к y_i. А это как раз обозначает, что общее решение преобразованной системы может быть получено путем преобразования общего решения первоначальной системы. Это рассуждение предполагает, что формальные законы преобразований остаются в силе и в распространенной формальной группе.

Из любого формального решения (5) *уравнений* (3) *мы можем получить всякое другое решение* $x_i = G_i(t, d_1, \ldots, d_n)$ *посредством подстановки в* (5) *вместо* $c_1, \ldots, c_n$ *произвольных вещественных рядов по* $d_1, \ldots, d_n$, *с постоянными, не зависящими от* t *коэффициентами*

$$c_i = \varphi_i(d_1, \ldots, d_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

при единственном условии, что определитель $|\partial\varphi/\partial d_j|$ *не обращается в нуль при* $d_1 = \ldots = d_n = 0$.

Это почти очевидное обстоятельство можно просто доказать при помощи введенной нами расширенной группы. Два преобразования

$$x_i = F_i(t, z_1, \ldots, z_n), \quad x_i = G_i(t, w_1, \ldots, w_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

превращают уравнения (3) соответственно в уравнения

$$\frac{dz_i}{dt} = 0, \quad \frac{d\omega_i}{dt} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Следовательно, если мы напишем:

$$z_i = \varphi_i(t, \omega_1, \ldots, \omega_n) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

обозначив через φ_i преобразование переменных z непосредственно в ω, то мы видим сразу, что

$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi_i}{\partial w_j}\frac{dw_j}{dt} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = 0,$$

так что функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ не содержат переменной t, т. е.

$$z_i = \varphi_i(\omega_1, \ldots, \omega_n) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Таким образом, получаем формальные тождества

$$F_i(t,\, \varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_n) = G_i(t,\, d_1,\, \ldots,\, d_n) \qquad (i = 1,\, \ldots,\, n),$$

причем в $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ мы должны подставить $d_1, \ldots, d_n$ вместо $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Но это как раз и есть соотношение, которое мы хотим доказать. Очевидно также из определения обобщенной группы, что определитель $|\partial\varphi_i/\partial d_j|$ не равен нулю при $d_1 = \ldots = d_n = 0$.

Вопрос о существовании формальных решений может быть легко разрешен. Действительно, возьмем $c_1 = x_1^0, \ldots, c_n = x_n^0$, где x_i^0 есть значение x_i при $t = t_0$. Тогда, как было доказано в первой главе, общее решение

$$x_i = F_i(t,\, c_1,\, \ldots,\, c_n) \qquad (i = 1,\, \ldots,\, n)$$

будет аналитической функцией от $c_1, \ldots, c_n$ для $|c_i|$ малых ($i{=}1, \ldots, n$) при всяком t, лежащем в t-интервале, для которого F_i определена при $c_1 = \ldots = c_n = 0$. Но при этих значениях c_i решение будет $x_i = 0$ ($i = 1, \ldots, n$) для всех значений t, откуда следует, что решение представляет собою аналитическую функцию $c_1, \ldots, c_n, t$ для любого t при условии, что все $|c_i|$ будут тогда достаточно малы. Таким образом, функции F_i могут быть разложены в ряды по степеням $c_1, \ldots, c_n$, коэффициенты которых — аналитические функции t для всех значений t. Кроме того, имеем, очевидно, при $t = t_0$

$$\frac{\partial F_i}{\partial c_j} = \delta_{ij} \qquad (\delta_{ij} = 1; \quad \delta_{ij} = 0, \text{ если } i \neq j).$$

Следовательно, $\dfrac{\partial F_i}{\partial c_j}$ ($i = 1, \ldots, n$) составляют n линейно независимых решений уравнений вариации при $j = 1, \ldots, n$, и определитель $|\partial F_i/\partial c_j|$ не обращается при $c_1 = \ldots = c_n = 0$ в нуль ни при каком значении t.

Существуют формальные решения всякой системы (3).

Очевидно, что если мы введем сопряженные переменные способом, указанным в предыдущем параграфе, то формальные решения соответственно видоизменятся.

Значение формальных решений будет выяснено в следующей главе. Здесь же достаточно указать, что такие решения применяются в астрономических задачах, когда нужно вычислить возмущения периодического движения.

§ 4. Проблема равновесия. Как указано выше (§ 1), простейший подлежащий нашему рассмотрению случай — это случай обычной точки равновесия. В этом случае функции $X_1, \ldots, X_n$ не содержат t в явном виде. Рассматривая этот случай, мы можем ограничиться теми преобразованиями формальной группы, которые не содержат времени t.

Уравнения вариации принимают вид:

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где постоянные c_{ij} суть значения, принимаемые выражениями $\partial X_i / \partial x_j$ в начале координат. Прежде всего, мы остановимся на случае, когда n корней $m_1, \ldots, m_n$ характеристического уравнения

$$|c_{ij} - m\delta_{ij}| = 0 \tag{6}$$

не связаны никаким соотношением вида

$$i_1 m_1 + \ldots + i_n m_n = 0, \tag{7}$$

где $i_1, \ldots, i_n$ — целые числа, не равные одновременно нулю. Эти корни либо все вещественны, либо же некоторые вещественны, в то время как остальные комбинируются в пары сопряженных комплексных корней. Нужно отметить, что условие, наложенное нами на корни $m_1, \ldots, m_n$ [отсутствие соотношений типа (7)], исключает корень, равный нулю, и, следовательно, определитель $|c_{ij}|$ отличен от нуля.

Легко видеть, далее, что мы можем построить такую квадратную таблицу l_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$, что: 1) для каждого k существует такое i, что $l_{ik} \neq 0$; 2) для каждого k числа $l_{1k}, \ldots, l_{nk}$ удовлетворяют n однородным линейным уравнениям:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} l_{jk} = l_{ik} m_k. \tag{8}$$

Действительно, это следует из того обстоятельства, что определитель системы (8) есть как раз левая часть уравнения (6), в котором m заменено на m_k, и, следовательно, он равен нулю.

Кроме того, определитель $|l_{ij}|$ отличен от нуля, что, разумеется, хорошо известно из обычной теории линейных преобразований; тем не менее, для полноты изложения мы приводим здесь этому доказательство. Действительно, предположим противное, т. е. что $|l_{ij}| = 0$; тогда существуют такие множители $\rho_1, \ldots, \rho_n$, не равные одновременно нулю, что

$$\sum_{j=1}^{n} l_{ij} \rho_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Умножая уравнения (8) на ρ_k $(k = 1, \ldots, n)$ и складывая их, получим:

$$0 = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} m_k \rho_k.$$

Таким образом $m_i \rho_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ представляют собой другую систему подобных множителей. Повторяя то же рассуждение, мы убедимся последовательно в том, что ρ_i, $m_i \rho_i$, ${m_i}^2 \rho_i$, ... образуют системы подобных же множителей. Далее, так как линейная комбинация множителей дает тоже систему множителей, то мы видим, что вообще

$$(c_0 + c_1 m_i + c_2 m_i^2 + \ldots + c_{n-1} m_i^{n-1}) \rho_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

образуют систему множителей. Но n выражениям, стоящим в скобках, могут быть при надлежащем выборе $c_0, \ldots, c_{n-1}$ приданы любые n значения, так как корни m_i все различны. В частности, коэффициент при каком-нибудь $\rho_k \neq 0$ может быть сделан равным единице, а все остальные — нулю. Но из этого следовало бы, что $l_{ik} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, что противоречит сделанным предположениям. Значит, $|l_{ik}|$ не может быть равным нулю.

Очевидно, что мы можем выбрать числа $|l_{ij}|$ таким образом, что в преобразовании

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} l_{ij} z_j \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

от переменных x_i к z_i переменные z_i и z_j, соответствующие сопряженным комплексным корням m_i и m_j, будут иметь сопряженные комплексные значения, когда $x_1, \ldots, x_n$ вещественны, и наоборот.

Произведем теперь эту замену переменных в рассматриваемом специальном типе дифференциальных уравнений (1). Уравнения, полученные подстановкой в (1) написанных выше линейных выражений от z_i вместо x_i, будут иметь вид:

$$\sum_{j=1}^{n} l_{ij} \frac{dz_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n} l_{ij} m_j z_j + \ldots \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где точками в правых частях обозначены члены относительно $z_1, \ldots, z_n$ выше первой степени. Вид слагаемых в правой части следует из характеристического вида (8) чисел l_{ij}. Из этих же формул следует, что уравнения относительно z_i имеют вид:

$$\frac{dz_i}{dt} = m_i z_i + \ldots \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где выписаны только линейные члены.

Таким образом, мы можем привести уравнения к виду:

$$\frac{dx_i}{dt} = m_i x_i + F_i(x_1, \dots, x_n) \qquad (i = 1, \dots, n),$$

причем F_i может быть представлено в виде:

$$F_i = F_{i2} + F_{i3} + \dots \qquad (i = 1, \dots, n),$$

где F_{ik} — однородный полином степени k относительно $x_1, \dots, x_n$.

Мы покажем теперь, что можно построить формальные ряды

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = \varphi_{i2} + \varphi_{i3} + \dots \qquad (i = 1, \dots, n)$$

такие, что преобразование

$$\overline{x}_i = x_i + \varphi_i \qquad (i = 1, \dots, n)$$

приведет наши дифференциальные уравнения к виду:

$$\frac{d\overline{x}_i}{dt} = m_i \overline{x_i} \qquad (i = 1, \dots, n),$$

Это будет достигнуто, если мы так подберем φ_i, что уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} + \frac{d\varphi_i}{dt} = m_i(x_i + \varphi_i) \qquad (i = 1, \dots, n)$$

будут следовать из дифференциальных уравнений для x_i. Исключая при помощи этих уравнений $\dfrac{dx_i}{dt}$, мы получим искомые соотношения:

$$F_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(m_j x_j + F_j) = m_i \varphi_i \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Разлагая F_i и φ_i в ряды, мы приведем эти уравнения к виду $(i = 1, \dots, n)$:

$$F_{i2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial x_j} m_j x_j = m_i \varphi_{i2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$F_{ik} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x_j} m_j x_j + \sum_{p+q=k+1} \frac{\partial \varphi_{ip}}{\partial x_j} F_{jq} \right) = m_i \varphi_{ik},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Рассмотрим первое уравнение, написанное для любого i. Оно, очевидно, представляет собою уравнение в частных производных относительно φ_{i2}. Коэффициент c_i члена

$$c_i x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n} \qquad (l_1 + \dots + l_n = 2)$$

в φ_{i2} может быть, очевидно, определен через подобный же коэффициент d_i в F_{i2} посредством уравнения

$$d_i + [l_1 m_1 + \dots + (l_i - 1)m_i + \dots + l_n m_n]c_i = 0.$$

Но стоящее в скобках выражение не равно нулю вследствие предположения относительно чисел m_i, так что из этих формул можно определить c_i. Следовательно, существует единственная система однородных квадратичных полиномов φ_{i2}, удовлетворяющих для каждого i первому из написанных выше уравнений.

Совершенно так же вторые уравнения определяют φ_{i3} единственным образом, так как уравнения, служащие для определения коэффициентов в φ_{i3}, будут того же общего типа, что и для φ_{i2}, с той только разницей, что в этом случае $l_1 + \dots + l_n = 3$ и т. д.

Следовательно, оставляя в стороне вопрос о сходимости рядов, появлявшихся в этом рассуждении, мы приходим к следующему заключению.

Посредством формального преобразования

$$x_i = f_i(z_1, \dots, z_n) = \sum_{j=1}^{n} l_{ij} z_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} l_{ijk} z_j z_k + \dots \qquad (i = 1, \dots, n),$$

где определитель $|l_{ij}| \neq 0$, дифференциальные уравнения (1), имеющие в начале координат точку равновесия общего типа, могут быть приведены к нормальному виду

$$\frac{dz_i}{dt} = m_i z_i \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{9}$$

таким образом, что каждой паре сопряженных комплексных корней m_i и m_j будут соответствовать сопряженные переменные z_i и z_j.

Так как только что написанные нормальные уравнения интегрируемы и имеют общее решение

$$z_i = c_i e^{m_i t} \qquad (i = 1, \dots, n),$$

то нижеследующее положение также оказывается справедливым.

Соответственное формальное решение уравнений (1) *может быть написано в виде*

$$x_i = f_i(c_1 e^{m_1 t}, \ldots, c_n e^{m_n t}) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где f_i *суть те самые степенные ряды, которые участвуют в преобразовании уравнений* (1) *к нормальному виду.*

§ 5. Проблема обобщенного равновесия. Нетрудно распространить вышеприведенный метод на проблему обобщенного равновесия, в которой мы исходим из уравнений вида (3). В этом случае уравнения вариации образуют систему, состоящую из n обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right|_{x=0} y_j \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

коэффициенты которых $\partial X_i/\partial x_j|_{x=0}$ суть аналитические периодические функции t с периодом τ. Пусть $y_{1k}, \ldots, y_{nk}$ $(k = 1, \ldots, n)$ представляют собою для каждого k решения этой системы, причем все эти n решений линейно независимы. Тогда общее решение будет линейной комбинацией этих частных решений. При замене t на $t + \tau$ уравнения вариации не изменяют. Отсюда следует, что

$$y_{ik}(t + \tau) = \sum_{l=1}^{n} y_{il}(t) c_{lk} \qquad (i, k = 1, \ldots, n),$$

где c_{lk} — постоянные коэффициенты. Если мы теперь определим опять $m_1, \ldots, m_n$, как корни характеристического уравнения таблицы $||c_{ij}||$, то мы можем, рассуждая совершенно так же, как выше, выбрать другую систему n линейно независимых решений таких, что предыдущие соотношения примут для них нормальную форму:

$$y_{ik}(t + \tau) = m_k y_{ik} \qquad (i, k = 1, \ldots, n).$$

Мы ограничиваемся, как и выше, рассмотрением общего случая, когда между числами $\mu_k = \lg m_k/\tau$ $(k = 1, \ldots, n)$([1]) и $2\pi\sqrt{-1}/\tau$ не имеется никаких соотношений вида:

$$i_1\mu_1 + \ldots + i_n\mu_n + i_{n+1}\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\tau} = 0,$$

где $i_1, \ldots, i_{n+1}$ — целые числа, не равные одновременно нулю. В этом случае $m_1, \ldots, m_n$ все различны между собою.

Напишем теперь функции y_{ik}, дающие решения уравнений вариации в виде

$$y_{ik} = e^{\mu_k t} p_{ik}(t) \qquad (i,\, k = 1,\, \ldots\, ,\, n),$$

тогда очевидно, что функции p_{ik} будут периодическими с периодом τ. Далее, из известной теоремы(2) мы знаем, что определитель

$$|y_{ij}| = |p_{ij}| e^{(\mu_1 + \ldots + \mu_n)t}$$

никогда не обращается в нуль. Следовательно, линейная замена переменных $x_1, \ldots, x_n$ на $z_1, \ldots, z_n$ по формуле

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} z_j \qquad (i = 1,\, \ldots\, ,\, n)$$

принадлежит к группе допустимых преобразований. Уравнения вариации будут иметь решение:

$$y_i = \delta_{ik} e^{\mu_k t} \qquad (i = 1,\, \ldots\, ,\, n)$$

при $k = 1, \ldots, n$. Следовательно, новые уравнения должны иметь вид:

$$\frac{dz_i}{dt} = \mu_i z_i + \ldots \qquad (i = 1,\, \ldots\, ,\, n).$$

Из всего этого мы заключаем, что можно без ограничения общности писать наши уравнения в подготовленном виде:

$$\frac{dx_i}{dt} = \mu_i x_i + F_i(x_1,\, \ldots\, ,\, x_n,\, t) \qquad (i = 1,\, \ldots\, ,\, n),$$

где F_i есть, разумеется, периодическая функция t с периодом τ. Очевидно, что если некоторые пары чисел m_i, суть пары сопряженных комплексных чисел, то мы можем считать, что сделанное нами преобразование переменных принадлежит к типу, который мы рассматривали.

Будем теперь продолжать так же, как в обыкновенной проблеме равновесия, и попробуем с этой целью произвести преобразование переменных, подобное тому, которое мы делали выше, с тем различием, что коэффициенты в рядах φ_i, не должны быть непременно постоянными числами, а могут быть периодическими аналитическими функциями t с периодом τ. Если мы будем выбирать систему этих «функций» φ_i(3)

так, чтобы привести дифференциальные уравнения к нормальному виду, как мы это делали в случае обыкновенного равновесия, то получим аналогичные уравнения, а именно:

$$F_{i2} + \frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial x_j} \mu_j x_j = \mu_i \varphi_{i2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$F_{ik} + \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x_j} \mu_j x_j + \sum_{p+q=k+1} \frac{\partial \varphi_{ip}}{\partial x_j} F_{jq} \right) = \mu_i \varphi_{ik},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Рассматривая типический член φ_{i2}

$$c_i(t) x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n} \qquad (l_1 + \dots + l_n = 2)$$

мы находим, что требуемые условия будут

$$d_i(t) + \frac{dc_i(t)}{dt} + [l_1\mu_1 + \dots + (l_i - 1)\mu_i + \dots + l_n\mu_n] c_i = 0 \ \ (i = 1, \dots , n),$$

где d_i — коэффициент подобного члена F_{i2}. Коэффициент λ при c_i в этом уравнении не равен нулю, и уравнение можно сразу решить относительно c_i:

$$c_i(t) = k_i e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t} \int_0^t d_i(t)\, e^{\lambda t}\, dt.$$

Решение будет периодическим относительно t с периодом τ в том и только в том случае, если

$$k_i(1 - e^{\lambda \tau}) = \int_0^\tau d_i(t)\, e^{\lambda t}\, dt.$$

Это уравнение относительно k_i можно, разумеется, решить одним и только одним способом, если только λ не является целым кратным $2\pi\sqrt{-1}/\tau$. Но это последнее соотношение противоречило бы нашему предположению о том, что между множителями $\mu_1, \dots , \mu_n$ и $2\pi\sqrt{-1}/\tau$ не существует никакого линейного соотношения с целыми коэффициентами.

Отсюда мы видим, что, как и выше, при последовательном определении φ_{i2}, φ_{i3} и т. д. нам не встретится никаких затруднений, и, таким образом, мы можем привести наши уравнения к требуемой нормальной форме.

Посредством формального преобразования

$$x_i=f_i(z_1, \dots , z_n, t)=\sum_{j=1}^{n} l_{ij}(t)z_j+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} l_{ijk}(t)z_jz_k + \dots \quad (i=1, \dots , n),$$

где l_{ij} — *аналитические и периодические функции* t *с периодом* τ, *причем* $|l_{ij}(t)| \neq 0$, *дифференциальные уравнения* (3), *имеющие в начале координат точку обобщенного равновесия общего вида, могут быть приведены к нормальному виду*

$$\frac{dz_i}{dt} = \mu_i z_i \qquad (i = 1, \dots , n). \tag{10}$$

Соответствующее формальное решение уравнений (3) *будет в таком случае, очевидно,*

$$y_i = f_i(c_1 e^{\mu_1 t}, \dots , c_n e^{\mu_n t}, t) \qquad (i = 1, \dots , n).$$

§ 6. О гамильтоновых множителях. Как первый шаг по направлению к получению подобной же нормальной формы для гамильтоновой системы уравнений в точке равновесия, мы докажем некоторые общеизвестные основные свойства множителей для этих уравнений[1] (4).

В этом случае уравнения имеют следующий вид:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, \dots , m), \tag{11}$$

где H — вещественная аналитическая функция от $n = 2m$ переменных $p_1, \dots , q_m$. Если эти уравнения имеют в начале координат точку равновесия, то, очевидно, все первые частные производные функции H обращаются в этой точке в нуль, и мы можем написать, пренебрегая постоянным слагаемым H,

$$H = H_2 + H_3 + \dots ,$$

[1] См. *Poincaré*, Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, т. 1, гл. 4. Его «характеристические показатели» соответствуют нашим «множителям».

где H_k — однородный полином степени k относительно $p_1, \ldots, q_m$ и где, в частности, имеем:

$$H_2 = \sum_{j,k=1}^{m} \left(\frac{1}{2}a_{jk}p_jp_k + b_{jk}p_jq_k + \frac{1}{2}c_{jk}q_jq_k\right).$$

Мы можем считать, очевидно, $a_{ji} = a_{ij}$, $c_{ij} = c_{ji}$, но b_{ij} будет, вообще говоря, отлично от b_{ji}.

Уравнения вариации получаются из уравнений (11), если мы заменим H на H_2 и p_i, q_i на P_i, Q_i, и могут быть написаны в явном виде, как уравнения:

$$\frac{dP_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{m} b_{ji}P_j - \sum_{j=1}^{m} c_{ij}Q_j,$$

$$\frac{dQ_i}{dt} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}P_j + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}Q_j (i = 1, \ldots, m),$$

которые представляют собою частный случай системы $2m$ линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

Наше первое замечание будет заключаться в том, что, вообще говоря, все множители этой системы различны между собою. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно дать пример подобной системы, имеющей $2m$ различных показательных решения. Если мы примем

$$H_2 = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2}\mu_j(p_j^2 + q_j^2),$$

то уравнения вариации приведутся к виду:

$$\frac{dP_i}{dt} = -\mu_i Q_i, \quad \frac{dQ_i}{dt} = \mu_i P_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

с $2m$ частными решениями

$$P_i = \delta_{ik}e^{\pm\mu_k\sqrt{-1}t}, \quad Q_i = \mp\delta_{ik}\sqrt{-1}e^{\pm\mu_k\sqrt{-1}t},$$

где δ_{ij} имеют свое обычное значение. Следовательно, в этом случае $2m$ множителей будут иметь величины, равные $\pm\mu_k\sqrt{-1}$ $(k = 1, \ldots, m)$, и будут различны, если, например, $\mu_1, \ldots, \mu_m$ будут различными положительными количествами.

Прежде чем оставить этот частный случай, заметим, что если H_2 имеет только что приведенный вид, то мы можем ввести сопряженные переменные

$$\xi_i = p_i + \sqrt{-1}q_i, \quad \eta_i = p_i - \sqrt{-1}q_i \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

и тогда легко найдем:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

где $\overline{H} = -2\sqrt{-1}H$ и $\overline{H}_2$ принимают нормальный вид:

$$\overline{H_2} = -\sum_{j=1}^{m} \mu_j \sqrt{-1}\xi_j\eta_j.$$

Следовательно, при таком преобразовании переменных гамильтонова форма дифференциальных уравнений сохраняется. В этом случае уравнения вариации еще проще, а именно, они имеют вид:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \mu_i\sqrt{-1}\xi_i, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = -\mu_i\sqrt{-1}\eta_i \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Этот тип сопряженных переменных будет играть важную роль в дальнейшем.

Предположим теперь, что мы имеем дело с общим случаем, когда все $2m$ множителей различны между собою. Мы хотим доказать, что эти множители можно разбить на m различных пар, каждая из которых состоит из множителей, равных по величине и противоположных по знаку. Мы уже видели, что это имеет место в вышеприведенном примере.

Так как все множители по предположению различны, то существует полная система решений уравнений вариации

$$P_{1k}, \ldots, P_{mk}; \quad Q_{1k}, \ldots, Q_{mk} \qquad (k = 1, \ldots, 2m)$$

вида

$$P_{ik} = C_{ik}e^{\lambda_k t}, \quad Q_{ik} = D_{ik}e^{\lambda_k t} \qquad (i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, 2m),$$

причем определитель порядка $2m$, составленный из постоянных C_{ik}, D_{ik} не равен нулю.

Такая полная система частных решений обладает тем свойством, при котором самое общее решение нашей системы дифференциальных уравнений вариации может быть представлено как линейная комбинация этих частных решений.

Но если P_i, Q_i и $P_i{}^*$, $Q_i{}^*$ будут два любых решения уравнений вариации, то имеет место формула:

$$\sum_{j=1}^{m}(Q_jP_j{}^* - P_jQ_j{}^*) = \text{const}.$$

Для того, чтобы убедиться в справедливости этого равенства, достаточно продифференцировать левую часть его по t и затем, применив уравнения вариации, убедиться, что производная левой части по t тождественно обращается в нуль.

Если мы теперь подставим в это соотношение какие-нибудь два из вышеприведенных частных решений, то получим

$$\sum_{j=1}^{m}(D_{jk}C_{jl} - C_{jk}D_{jl})e^{(\lambda_k+\lambda_l)t} = \text{const}$$

для всех k и l. Отсюда непосредственно следует, что либо $\lambda_k + \lambda_l = 0$, либо постоянная, стоящая в правой части, равна нулю, что дает нам возможность обосновать доказываемое положение.

В самом деле, если каждое λ_i имеет соответствующее λ_j, такое, что $\lambda_i + \lambda_j = 0$, то, очевидно, такое λ_j может быть только одно. В противном же случае какой-нибудь корень λ_{k_0} не имеет соответствующего ему, дающего с ним в сумме нуль, но тогда из вышеприведенного соотношения следует, что его левая часть должна обращаться в нуль при $l = 1, \ldots, 2m$, когда k принимает значение k_0, откуда находим:

$$D_{1k_0}C_{1l} + \ldots + D_{mk_0}C_{ml} - C_{1k_0}D_{1l} - \ldots - C_{mk_0}D_{ml}=0 \quad (l=1, \ldots, 2m).$$

Эти $2m$ уравнений линейны и однородны относительно $D_{1k_0}, \ldots, D_{mk_0}, -C_{1k_0}, \ldots, -C_{mk_0}$, так что определитель, составленный из их коэффициентов, должен быть равен нулю.

Но этот определитель есть как раз вышеупомянутый определитель порядка $2m$, не могущий обращаться в нуль. Следовательно, такого множителя λ_{k_0}, не имеющего пары, не существует.

Вообще говоря, в точке равновесия для уравнений Гамильтона множители могут быть разбитыми на m пар λ_i, $-\lambda_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, причем все λ_i различны между собою([5]).

Очевидно, что, вообще говоря, множители либо вещественны, либо могут быть объединены в комплексные сопряженные пары с различными модулями.

Следовательно, множитель, сопряженный с комплексным, должен совпадать с обратным ему по знаку множителем. Переходя к исключительным случаям посредством предельного перехода, мы заключаем:

Множители λ_i представляют собою вещественные или чисто мнимые количества(6).

Мы определим точку равновесия общего типа, как такую, для которой $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ не подчинены никаким линейным соотношениям с целыми коэффициентами типа (7), и сосредоточим свое внимание именно на этом общем случае.

§ 7. Нормализация H_2. Предположив, что точка равновесия рассматриваемой гамильтоновой системы есть точка равновесия общего типа, мы можем произвести преобразование переменных

$$\left.\begin{aligned} p_i &= \sum_{j=1}^{m}(d_{ij}\overline{p}_j + e_{ij}\overline{q}_j), \\ q_i &= \sum_{j=1}^{m}(f_{ij}\overline{p}_j + g_{ij}\overline{q}_j) \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

которое приведет соответственные уравнения вариации к нормальному виду:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP_i}{dt} &= -\lambda_i P_i, \\ \frac{dQ_i}{dt} &= \lambda_i Q_i \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Действительно, для этого приведения (см. § 4) требовалось только, чтобы корни характеристического уравнения (6) были различны, что, в данном случае имеет место. Разумеется, пары соотнесенных переменных $\overline{p}_i$, $\overline{q}_i$ соответствуют парам соотнесенных корней λ_i, $-\lambda_i$. Если λ_i вещественно, то $\overline{p}_i$, $\overline{q}_i$ — тоже вещественные переменные. Если λ_i — чисто мнимое число, то $\overline{p}_i$, $\overline{q}_i$ — сопряженные комплексные числа.

Мы докажем теперь, что это линейное преобразование не разрушает гамильтонову форму дифференциальных уравнений.

Заметим, прежде всего, что уравнения вариации могут быть написаны в вариационной гамильтоновой форме:

$$\delta \int_{t_1}^{t_0} \left[\sum_{j=1}^{m} P_j Q_j' - H_2(p_1, \ldots, Q_m)\right] dt = 0,$$

в которой вместо H поставлены его члены второй степени. После вышеприведенного преобразовании переменных эта формула, очевидно, принимает вид

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_{j,k=1}^{m}(K_{jk}P_jP'_k+L_{jk}Q_jP'_k+M_{jk}P_jQ'_k+N_{jk}Q_jQ'_k)-H_2\Big]\,dt=0,$$

причем H_2 мы можем представить в виде:

$$H_2=\sum_{j,\,k=1}^{m}(R_{jk}P_jP_k+S_{jk}P_jQ_k+T_{jk}Q_jQ_k).$$

В этих формулах мы опускаем черту над буквами P_j, Q_j и т. п. Очевидно, мы можем положить

$$R_{ij}=R_{ji},\quad T_{ij}=T_{ji}\qquad (i,\,j=1,\,\dots,\,m).$$

Применяя к этому вариационному уравнению обычное лагранжево правило, мы получим уравнения вариации в новых переменных:

$$\frac{d}{dt}\Big[\sum_{j=1}^{m}(K_{ji}P_j+L_{ji}Q_j)\Big]-\sum_{j=1}^{m}(K_{ij}P'_j+M_{ij}Q'_j)+$$
$$+\sum_{j=1}^{m}(2R_{ij}P_j+S_{ij}Q_j)=0\qquad (i=1,\dots,m),$$

$$\frac{d}{dt}\Big[\sum_{j=1}^{m}(M_{ji}P_j+N_{ji}Q_j)\Big]-\sum_{j=1}^{m}(L_{ij}P'_j+N_{ij}Q'_j)+$$
$$+\sum_{j=1}^{m}(S_{ji}P_j+2T_{ij}Q_j)=0,\qquad (i=1,\dots,m).$$

Но решения этих уравнений известны. В частности, мы имеем решение:

$$P_i=\delta_{ik}e^{-\lambda_k t},\quad Q_i=0\qquad (i=1,\,\dots,\,m)$$

которое, будучи подставлено в первое из вышеприведенных уравнений, дает тотчас же

$$-\lambda_k(K_{ki}-K_{ik})+2R_{ik}=0.$$

Переставляя i и k и замечая, что $R_{ki} = R_{ik}$, получим, далее, для любых i и k:

$$(\lambda_i + \lambda_k)(K_{ki} - K_{ik}) = 0,$$

откуда $K_{ki} = K_{ik}$ при i, отличном от k, так же как и при $i = k$. Отсюда следует, что R_{ik} равно нулю для всех i и k.

Подобным же образом, пользуясь второй группой уравнений, мы можем показать, что $N_{ki} = N_{ik}$ и что T_{ik} равно нулю для всех i и k. Таким образом, слагаемые

$$\sum_{j,k=1}^{m} K_{jk} P_j P'_k, \qquad \sum_{j,k=1}^{m} N_{jk} Q_j Q'_k$$

оказываются полными производными и могут быть опущены под знаком интегралов в вариационной формуле. Уравнения вариации оказываются, таким образом, следующего, более частного вида:

$$\frac{d}{dt}\Big[\sum_{j=1}^{m} L_{ji} Q_j\Big] - \sum_{j=1}^{m} M_{ij} Q'_j + \sum_{j=1}^{m} S_{ij} Q_j = 0 \quad (i = 1, \ldots, m),$$

$$\frac{d}{dt}\Big[\sum_{j=1}^{m} M_{ji} P_j\Big] - \sum_{j=1}^{m} L_{ij} P'_j + \sum_{j=1}^{m} S_{ji} P_j = 0 \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Для того, чтобы определить еще точнее эти уравнения, мы подставляем

$$P_i = 0, \quad Q_i = \delta_{ik} e^{\lambda} k^t \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

в первую группу этих уравнений и получаем для всех i и k:

$$-\lambda_k (M_{ik} - L_{ki}) + S_{ik} = 0$$

Подобным же образом из второй группы уравнений получаем для всех i и k:

$$-\lambda_k (M_{ki} - L_{ik}) + S_{ki} = 0$$

Переменяя местами i и k в последнем уравнении и сравнивая получившееся уравнение с предыдущим, получим для $i \neq k$:

$$M_{ik} = L_{ki}, \quad S_{ik} = 0.$$

Следовательно, сумма

$$\sum_{j,k=1}^{m} (L_{jk} Q_j P'_k + M_{jk} P_j Q'_k)$$

отличается от суммы

$$\sum_{j=1}^{m}(L_{jj}Q_jP_j' + M_{jj}P_jQ_j'),$$

а, следовательно, и от суммы

$$\sum_{j=1}^{m}(M_{jj} - L_{jj})P_jQ_j'$$

на полную производную.

Таким образом, мы имеем право написать вариационный принцип в виде:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_{j=1}^{m}(M_{jj} - L_{jj})P_jQ_j' - \sum_{j=1}^{m}S_{jj}P_jQ_j\Big]\,dt = 0$$

в наших новых переменных. Уравнения вариации будут[1]:

$$M_{ii} - L_{ii}Q_i' - S_{ii}Q_i = 0, \quad (M_{ii} - L_{ii})P_i' + S_{ii}P_i \qquad (i = 1, \dots, n),$$

так что мы должны иметь

$$(M_{ii} - L_{ii})\lambda_i = S_{ii} \qquad (i = 1, \dots, m).$$

Рассмотрим теперь простейший случай, когда все корни λ_i вещественны. В этом случае, если мы заменим вещественные переменные P_i на

$$\overline{P}_i = (M_{ii} - L_{ii})P_i \qquad (i = 1, \dots, m),$$

то, как легко видеть, вариационный принцип примет вид:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_{j=1}^{m}P_jQ_j' - \sum_{j=1}^{m}\lambda_jP_jQ_j\Big]\,dt = 0.$$

Эта дальнейшая замена переменных законна, так как в этом случае p_i, q_i были определены только с точностью до постоянного вещественного множителя(^{7}). Отсюда следует, что выражение

$$\sum_{j=1}^{m}P_jQ_j'$$

[1]Постоянные $M_{ii} - L_{ii}$ не равны нулю, так как уравнения вариации не вырождаются.

остается существенно([8]) того же вида после нашего линейного преобразования.

Другой частный случай имеем, когда все λ_i — чисто мнимые количества. В этом случае, выбирая подходящим образом пары p_i, q_i мы можем, очевидно, написать чисто мнимые количества $M_{ii} - L_{ii}$ в виде $\rho_i\sqrt{-1}$, где $\rho_i > 0$([9]). Мы можем здесь заменить P_i, Q_i на

$$\overline{P}_i = \sqrt{\rho_i}P_i, \quad \overline{Q}_i = \sqrt{\rho_i}Q_i \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

после чего получается подобная предыдущей вариационная форма.

Очевидно, что эта самая линейная замена переменных должна сохранять первоначальную гамильтонову форму уравнения, так как выражение

$$\sum_{j=1}^{m} p_j q'_j$$

остается существенно того же вида после этого преобразования([10]).

Посредством надлежащего линейного преобразования с постоянными коэффициентами любая гамильтонова система с точкой равновесия общего типа может быть приведена к нормальной форме, для которой

$$H_2 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j p_j q_j.$$([11])

§ 8. Проблема точки равновесия для уравнений Гамильтона. Для дальнейшего преобразования уравнений Гамильтона в окрестности точки равновесия применим ряд контактных преобразований

$$p_i = \frac{\partial K}{\partial q_i}, \quad \overline{q}_i = \frac{\partial K}{\partial \overline{p}_i} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

с функцией K вида

$$K = \sum_{j=1}^{m} \overline{p}_j q_j + K_3 + K_4 + \ldots,$$

где K_3, K_4, ... — однородные функции от $\overline{p}_i$, q_i $(i = 1, \ldots, m)$ соответственно третьей, четвертой и т. д. степеней. Мы видели уже, что такие преобразования сохраняют гамильтонову форму уравнений, и что они образуют группу. Заметим, что если все $K_s = 0$ $(s > 2)$, то преобразование будет тождественным.

Мы начнем с того, что примем $K_s = 0$ для всех $s > 3$, и постараемся выбрать K_3 таким образом, чтобы возможно больше упростить H_3. Мы имеем:

$$p_i = \overline{p}_i + \frac{\partial K_3}{\partial q_i}, \quad \overline{q}_i = q_i + \frac{\partial K_3}{\partial \overline{p}_i} \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Если решить эти уравнения относительно p_i, q_i $(i = 1, \ldots, m)$, то получатся следующие выражения p_i, q_i через $\overline{p}_i$, $\overline{q}_i$:

$$p_i = \overline{p}_i + \frac{\partial K_3{}^*}{\partial \overline{q}_i} + \ldots, \quad q_i = \overline{q}_i - \frac{\partial K_3{}^*}{\partial \overline{p}_i} + \ldots \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

где $K_3{}^*$ обозначает функцию, полученную из K_3 заменой q_i на $\overline{q}_i$. Написанные явно члены дают разложения p_i, q_i в ряды по степеням $\overline{p}_i$, $\overline{q}_i$ до членов второй степени включительно. Прямой подстановкой получаем выражение для H через $\overline{p}_i$, $\overline{q}_i$:

$$H = H_2\left(\overline{p}_1 + \frac{\partial K_3{}^*}{\partial \overline{q}_1} + \ldots, \ldots, \overline{q}_m - \frac{\partial K_3{}^*}{\partial \overline{p}_m} + \ldots\right) + H_3 + \ldots,$$

где аргументы выражений H_3, H_4, ... те же, что и для H_2. Выписывая явно члены не выше третьей степени, получим:

$$H = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \overline{p}_j \overline{q}_j + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\overline{q}_j \frac{\partial K_3{}^*}{\partial \overline{q}_j} - \overline{p}_j \frac{\partial K_3{}^*}{\partial \overline{p}_j}\right) + H_3(\overline{p}_1, \ldots, \overline{q}_m) + \ldots$$

Таким образом, как и следовало ожидать, H_2 сохранило свою форму, а H_3 приняло вид:

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(q_j \frac{\partial K_3}{\partial q_j} - p_j \frac{\partial K_3}{\partial p_j}\right) + H_3(p_1, \ldots, q_m),$$

где мы можем выбирать функцию K_3 по произволу. Возьмем теперь какой-нибудь член K_3, например:

$$c p_1^{\alpha_1} \ldots p_m^{\alpha_m} q_1^{\beta_1} \ldots q_m^{\beta_m} \qquad (\alpha_1 + \ldots + \beta_m = 3).$$

Соответствующий член в преобразованном H_3 имеет коэффициент

$$c[\lambda_1(\beta_1 - \alpha_1) + \ldots + \lambda_m(\beta_m - \alpha_m)] + h,$$

где h означает подобный же коэффициент в первоначальном H_3. В этом выражении коэффициент при c не равен нулю, потому что в противном случае было бы

$$\beta_1 = \alpha_1, \ \ldots, \ \beta_m = \alpha_m,$$

что очевидно невозможно, так как сумма всех α_i и β_i равна 3.

Таким образом, мы можем так выбрать все коэффициенты c, чтобы новое H_3 обращалось в нуль.

Продолжая таким же образом дальше, постараемся исключить H_4, насколько это возможно, посредством дальнейшего преобразования, в котором на этот раз $K_s = 0$ для всех s, кроме $s = 4$. Мы будем иметь преобразование:

$$p_i = \overline{p}_i + \frac{\partial K_4{}^*}{\partial \overline{q}_i} + \ldots, \ q_i = \overline{q}_i - \frac{\partial K_4{}^*}{\partial \overline{p}_i} + \ldots \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

которое оставляет H_2 и $H_3 \equiv 0$ в прежнем виде, но преобразует H_4 в

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(q_j \frac{\partial K_4}{\partial q_j} - p_j \frac{\partial K_4}{\partial p_j} \right) + H_4(p_1, \ldots, q_m).$$

Теперь мы можем тем же способом, как и прежде, уничтожить все члены H_4, за исключением тех, которые содержат p_i и q_i в одинаковой степени для каждого i, т. е. членов, имеющих вид:

$$c(p_i q_i)^2 \text{ или } d p_i q_i p_j q_j \qquad (i, j = 1, \ldots, m).$$

Действительно, мы имеем в этом случае:

$$\alpha_1 + \ldots + \beta_m = 4,$$

и, следовательно, можно сделать равными нулю коэффициенты всех членов, кроме тех, для которых $\alpha_i = \beta_i (i = 1, \ldots, m)$, т. е. тех, которые имеют приведенный выше вид.

Легко видеть таким образом, что бесконечным числом шагов мы можем исключить из H все члены, кроме тех, которые могут быть выражены через m произведений $p_i q_i$.

Посредством надлежащих преобразований вышеописанных типов гамильтонова система, имеющая в начале координат точку равновесия общего типа, может быть приведена к нормальной гамильтоновой форме, главная функция H которой является функцией только от m произведений $p_1 q_1, \ldots, p_m q_m$, причем H_2 имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j p_j q_j.$$

Отметим еще, что примененное в предыдущем параграфе линейное преобразование также представляет собою контактное преобразование[1], так что фактически к нормальной форме можно придти посредством одного формального контактного преобразования.

Для уравнений в этой нормальной форме мы можем тотчас же получить общее формальное решение. Если мы положим $\pi_i = p_i q_i$, то нормальные уравнения Гамильтона могут быть записаны в виде:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \pi_i} p_i, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \pi_i} q_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

откуда получаем

$$p_i q_i = c_i \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Если мы подставим эти значения $p_i q_i$ в написанные уравнения, то ряды $\partial H/\partial \pi_i$ превратятся в постоянные, и мы чисто формальным образом приходим к следующему заключению:

Общее формальное решение нормальных гамильтоновых уравнений в окрестности точки равновесия имеет вид:

$$p_i = \alpha_i e^{-\gamma_i t}, \quad q_i = \beta_i e^{\gamma_i t} \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

где

$$\gamma_i = \frac{\partial H(\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_m\beta_m)}{\partial \pi_i} \qquad (i = 1, \ldots, m)(^{12}).$$

Соответствующее решение в прежних переменных может быть получено из только что приведенных формул при помощи формул контактного преобразования, выражающих старые переменные через новые.

§ 9. Обобщенная гамильтонова проблема. Если

$$p_i = \varphi_i(t), \quad q_i = \psi_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

есть периодическое движение периода τ и если мы положим

$$p_i = \varphi_i + \overline{p}_i, \quad q_i = \psi_i + \overline{q}_i \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

то дифференциальные уравнения в новых переменных будут гамильтоновыми уравнениями с главной функцией $\overline{H}$, равной

$$\overline{H} = H + \sum_{j=1}^{m} (\varphi_j' \overline{q}_j - \psi_j' \overline{p}_j),$$

[1]См. *Whittaker*, Analytical Dynamics, гл 16.

где штрих обозначает производную. Это преобразование может быть представлено как контактное преобразование

$$p_i = \frac{\partial K}{\partial q_i}, \quad \overline{q}_i = \frac{\partial K}{\partial \overline{p}_i} \qquad (i = 1, \ldots , m),$$

где

$$K = \sum_{j=1}^{m} (\overline{p}_j q_j + \varphi_j q_j - \psi_j \overline{p}_j).$$

В этих новых переменных H будет функцией от $\overline{p}_1, \ldots , \overline{q}_m$ и t периодической (с периодом τ) относительно последней переменной, причем решением, соответствующим данному периодическому движению $p_i = \varphi_i$, $q_i = \psi_i$, будет $\overline{p}_i = \overline{q}_i = 0$ $(i = 1, \ldots , m)$. Таким образом, по крайней мере в формальном смысле (см. главу IV, § 1) наша проблема приводится к проблеме обобщенного равновесия.

Наша цель показать, в этом параграфе, что для такой проблемы обобщенного равновесия возможно приведение уравнений к некоторому нормальному виду, совершенно аналогичное проделанному выше приведению для случая обыкновенного равновесия.

Мы ограничимся здесь тем, что укажем на все те изменения в рассуждениях, которые требует эта более общая задача.

Первое различие, на которое мы обратим внимание, заключается в том очевидном обстоятельстве, что в уравнениях вариации вместо постоянных a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} появляются периодические функции от t с периодом τ. Второе различие состоит в том, что постоянные C_{ij}, D_{ij}, появляющиеся в решениях этих уравнений, тоже должны быть заменены периодическими функциями t.

Все эти изменения, однако, нисколько не влияют на рассуждение, доказывающее, что множители разбиваются на m пар

$$\lambda_1, -\lambda_1, \ldots , \lambda_m, -\lambda_m,$$

где $\lambda_1, \ldots , \lambda_m$ — вещественные или чисто мнимые количества([13]).

Точка равновесия общего типа может быть и здесь определена как такая, для которой между $m+1$ количествами $\lambda_1, \ldots , \lambda_m$, $2\pi\sqrt{-1}/\tau$ нет никакого линейного соотношения с целыми коэффициентами([14]).

В соответственных линейных преобразованиях d_{ij}, e_{ij}, f_{ij}, g_{ij} — периодические функции от t с периодом τ. Такими же функциями являются количества K_{ij}, L_{ij}, M_{ij}, N_{ij}, R_{ij}, S_{ij}, T_{ij} в вариационных формулах. Определяя вид этих функций, как мы это делали выше, мы получим условия вида:

$$-\lambda_k(K_{ki} - K_{ik}) + \frac{dK_{ki}}{dt} + 2R_{ik} = 0.$$

Если мы переменим местами i и k в этой формуле и вычтем из одной формулы другую, то получим:

$$\frac{d}{dt}(K_{ki} - K_{ik}) - (\lambda_k + \lambda_i)(K_{ki} - K_{ik}) = 0.$$

Это дифференциальное уравнение относительно $(K_{ki} - K_{ik})$ не имеет отличных от нуля периодических решений периода τ, благодаря условию, наложенному на $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Отсюда мы заключаем, как прежде, что K_{ki} и K_{ik} равны между собою, а $2R_{ik} = -\dfrac{dK_{ki}}{dt}$.

Но в этом случае выражение

$$\sum_{j,\,k=1}^{m} K_{jk} p_j p'_k$$

можно превратить в полную производную, прибавив к нему

$$\frac{1}{2} \sum_{j,\,k=1}^{m} \frac{dK_{jk}}{dt} p_j p_k,$$

причем это же выражение мы можем прибавить к H. Таким образом, очевидно, что мы можем принять

$$K_{ij} = N_{ij} = R_{ij} = T_{ij} = 0$$

подобно тому, как прежде. Подобными небольшими изменениями предыдущих рассуждений можно показать, что это линейное преобразование приведет к такому же нормальному виду для H_2 в проблеме обобщенного равновесия, как и в проблеме обыкновенного равновесия.

Для того, чтобы сделать очевидным, что мы можем совершить преобразование $H_3, H_4, \ldots$ совершенно аналогично тому, как мы делали в случае точки обыкновенного равновесия, рассмотрим новое H_3, получаемое в результате преобразования

$$p_i = \overline{p}_i + \frac{\partial K_3}{\partial q_i}, \quad \overline{q}_i = q_i + \frac{\partial K_3}{\partial \overline{p}_i} \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

где K_3 — однородный полином третьей степени относительно $\overline{p}_i$, q_i $(i = 1, \ldots, m)$, коэффициенты которого суть периодические функции t с периодом τ. Новый вид H_3 будет:

$$\frac{\partial K_3{}^*}{\partial t} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(q_j \frac{\partial K_3{}^*}{\partial q_j} - p_j \frac{\partial K_3{}^*}{\partial p_j} \right) + H_3(p_1, \ldots, q_m).$$

Рассматривая члены

$$c(t)p_1^{\alpha_1}\dots q_m^{\beta_m},\quad h(t)p_1^{\alpha_1}\dots q_m^{\beta_m}\qquad(\alpha_1+\ldots+\beta_m=3)$$

$K_3{}^*$ и H_3 соответственно и стремясь уничтожить подобный член в новом H_3, мы придем к уравнению:

$$\frac{dc}{dt}+c[\lambda_1(\beta_1-\alpha_1)+\ldots+\lambda_m(\beta_m-\alpha_m)]+h=0.$$

Это обыкновенное неоднородное линейное уравнение первого порядка имеет одно и только одно периодическое решение периода τ, так как коэффициент при c несоизмерим с $\dfrac{2\pi\sqrt{-1}}{\tau}$ ([15]) в силу условия, наложенного на $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Таким образом, мы можем уничтожить все H_3.

Подобно этому, можно уничтожить все члены H_4, за исключением тех, которые могут быть выражены только через произведения p_iq_i $(i = 1, \ldots, m)$. Коэффициенты же этих последних членов мы можем сделать постоянными числами; действительно, это требование приводит к уравнению вида

$$\frac{dc}{dt}+h(t)=C,$$

где C — произвольная постоянная, выбор которой зависит от нас. Из этой формулы находим для c значение

$$c=\int(C-h(t))\,dt,$$

которое будет, очевидно, периодическим периода τ, если за C мы выберем среднее значение $h(t)$ в промежутке $(0, \tau)$. Отсюда мы приходим к тому же заключению, что и прежде, а именно:

Посредством такого ряда преобразований переменных в обобщенной гамильтоновой проблеме равновесия гамильтонова функция может быть приведена к такому же нормальному виду, что и для случая обычного равновесия[1].

---

[1]Результаты, изложенные в этой главе, были сообщены в моих «Chicago Colloquium» лекциях в 1920 г. До сих пор изложенный материал стоит, очевидно, в тесной связи с предшествовавшими работами. В частности нормальная форма уравнений Гамильтона связана с формальными тригонометрическими рядами в динамике, рассмотренными, например, у *Whittaker*, Analytical Dynamics, гл. 15.

§ 10. О пфаффовых множителях. Перейдем теперь к рассмотрению более общей пфаффовой вариационной проблемы

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{j=1}^{2m} X_j(x_1, \ldots, x_{2m}) x_j' + Z(x_1, \ldots, x_{2m}) \right] dt = 0, \tag{12}$$

которая приводит немедленно к системе обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2m$:

$$\sum_{j=1}^{2m} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) \frac{dx_j}{dt} - \frac{\partial Z}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 2m). \tag{13}$$

Мы рассмотрим тот случай этих уравнений, когда в начале координат имеется точка равновесия, причем будем предполагать, что $2m$ аналитических функций X_i таковы, что кососимметрический определитель

$$\left| \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_j} \right|$$

отличен от нуля в начале координат. Постоянные члены в рядах для функций X_i могут быть всюду опущены.

Уравнения Гамильтона, очевидно, являются частным случаем этих пфаффовых уравнений (12).

Как будет показано в следующей главе, эти обобщения уравнений Гамильтона разделяют с последними то важное свойство, что для них автоматически выполняются все условия полной устойчивости, если только они удовлетворяют очевидным условиям устойчивости первого порядка. Следовательно, с этой точки зрения пфаффовы уравнения являются столь же важными для динамики, как и гамильтоновы, хотя первые принадлежат к более общему типу и, кроме того, имеют одно дополнительное преимущество, а именно: они сохраняют свою пфаффову форму при любом преобразовании переменных, принадлежащем к формальной группе. В самом деле, достаточно только произвести замену переменных под знаком интеграла в формуле (12), чтобы получить преобразованные значения функций X_i и Z.

В первую очередь для получения нормальной формы уравнений Пфаффа покажем, что множители для этих уравнений так же, как и для уравнений Гамильтона, разбиваются на пары λ_i, $-\lambda_i$.

Заметим, что в общем случае эти множители должны быть различными, так как они различны для гамильтоновых уравнений, являющихся частным случаем пфаффовых.

Произведем линейное преобразование с постоянными коэффициентами, приводящее уравнения вариации к нормальному виду. Это преобразование, разумеется, сохраняет пфаффову форму уравнений. Соответственные уравнения вариации, получаемые из уравнений (13), будут:

$$\sum_{j=1}^{2m}\left[\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}-\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right)\frac{dy_j}{dt}-\frac{\partial^2 Z}{\partial x_i\partial x_j}y_j\right]=0.$$

Они должны иметь частные решения

$$y_i=\delta_{ik}e^{\lambda_k t}\qquad (i=1,\ldots,2m)$$

при $k=1,\ldots,2m$. При этом подразумевается, что в формулах уравнений вариации значения частных производных $\dfrac{\partial X_i}{\partial x_j}$ и т. д. берутся в начале координат.

Подставляя в уравнения вариации написанные частные решения, легко получаем:

$$\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k}-\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right)\lambda_k-\frac{\partial^2 Z}{\partial x_i\partial x_k}=0.$$

Если мы переменим i и k местами и полученное уравнение вычтем из только что написанного, то получим:

$$\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k}-\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right)(\lambda_k+\lambda_i)=0\qquad (i,k=1,\ldots,m).$$

Но если для какого-нибудь k не найдется такого i, чтобы $\lambda_i+\lambda_k=0$, то вышеупомянутый кососимметрический определитель необходимо должен обращаться в нуль. Последнее невозможно, так как уравнения вариации вырождались бы. Следовательно, каждому множителю λ_i можно всегда сопоставить другой $\lambda_k=-\lambda_i$, но это как раз и есть то, что мы хотели доказать.

В проблеме равновесия для пфаффовых уравнений множители можно разбить на пары так, чтобы множители каждой пары различались только знаком([16]). *Эти множители можно обозначить через* $\lambda_1, -\lambda_1, \ldots, \lambda_m, -\lambda_m$. *Они должны быть вещественными или чисто мнимыми количествами*([17]).

Очевидно, мы можем определить общий случай как такой, когда между величинами $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ нет никаких линейных соотношений с целыми коэффициентами, совершенно так же, как в случае уравнений Гамильтона. Мы ограничимся рассмотрением этого общего случая.

§ 11. Предварительная нормализация пфаффовых уравнений. Чрезвычайно легко убедиться в том, что примененная в предыдущем параграфе нормализация приводит члены первой степени в $X_1, \ldots, X_{2m}$ по существу к гамильтоновой форме. Действительно, если мы обозначим $2m$ зависимых переменных через $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ таким образом, чтобы p_i, q_i, соответствовали множителям λ_i и $-\lambda_i$ соответственно, и если буквы $P_1, \ldots, Q_m$ будут изображать коэффициенты при $p_1', \ldots, q_m'$ соответственно под знаками интеграла в формуле (12), то полученные в предыдущем параграфе соотношения между частными производными $\partial X_i/\partial x_j$ в начале координат принимают вид:

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_j} = \frac{\partial P_j}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \quad (i, j = 1, \ldots, m),$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \qquad (i, j = 1, \ldots, m;\ i \neq j).$$

Первая система уравнений показывает, что линейные члены P_i, содержащие $p_1, \ldots, p_m$, составляют вместе полную производную, так же как и линейные члены Q_i, содержащие $q_1, \ldots, q_m$. Подобным же образом из второй системы уравнений следует, что член P_i, содержащий q_j, вместе с членом Q_j, содержащим p_i, образует полную производную. Все эти члены можно опустить, и остается рассмотреть только члены

$$\sum_{j=1}^{m} (c_j p_j\, dq_j + d_j q_j\, dp_j).$$

Эту сумму, очевидно, можно заменить суммой

$$\sum_{j=1}^{m} (c_j - d_j) p_j\, dq_j.$$

Здесь ни одна из разностей $c_j - d_j$ не может обратиться в нуль, вследствие сделанного предположения, что основной кососимметрический определитель не обращается в нуль в начале координат.

Если теперь p_i, q_i суть вещественные переменные, то мы можем произвести дальнейшую линейную подстановку

$$\overline{p}_i = p_i, \quad \overline{q}_i = (c_i - d_i) q_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

и получим тогда требуемые линейные гамильтоновы члены([18]). С другой стороны, если p_i, q_i — сопряженные комплексные переменные, то c_i

и d_i тоже будут сопряженными комплексными переменными и $c_i - d_i$ будет чисто мнимым количеством $\rho_i\sqrt{-1}$(19). Мы можем положить тогда

$$\overline{p}_i = \sqrt{\rho_i}p_i, \quad \overline{q}_i = \sqrt{\rho_i}q_i,$$

если $\rho > 0$(20). Если же $\rho < 0$, то мы можем обменять местами p_i и q_i.

Перейдем теперь к рассмотрению функции Z. Так как мы имеем точку равновесия в начале координат, то, очевидно, что $\partial Z/\partial p_i$, $\partial Z/\partial q_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ обращаются в этой точке в нуль, т.е. что функция Z не содержит членов первой степени. Низшие члены в Z будут, следовательно, второй степени.

Очевидно, что уравнения вариации, которые зависят только от членов первой степени в $X_1, \ldots, X_{2m}$ и от членов второй степени в Z, будут такими же, как и для уравнений типа Гамильтона. Следовательно, линейное преобразование, применяемое в гамильтоновом случае для получения нормального вида этих низших степеней, приводит и Z_2 к тому же нормальному виду.

Мы можем выразить наши результаты следующим образом.

Предварительным линейным преобразованием(21) *мы можем привести уравнения Пфаффа с точкой равновесия общего типа в начале координат к виду*

$$\delta\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_{j=1}^{m}(P_jq_j' + Q_jp_j') - R\Big]\,dt = 0,$$

где

$$P_i = p_i + P_{i2} + \ldots, Q_i = * + Q_{i2} + \ldots \quad (i = 1, \ldots, m),$$
$$R = \sum_{j=1}^{m}\lambda_j p_j q_j + R_3 + \ldots$$

§ 12. Проблема точки равновесия для уравнений Пфаффа. После того как проделаны эти подготовительные преобразования, становится уже легко установить основной результат, заключающийся в том, что посредством точечного преобразования, независимого от i, можно привести пфаффовы уравнения к гамильтонову виду. Точнее говоря, можно показать, что возможно привести Q_i $(i = 1, \ldots, m)$ к нулю посредством надлежащей последовательности преобразований, не влияя на нормальный вид P_i(22). Когда это будет сделано, достаточно будет положить просто

$$\overline{p}_i = P_i, \quad \overline{q}_i = q_i \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

и мы получим полную гамильтонову форму в случае, если $p_1, \ldots, q_m$ суть вещественные переменные. Небольшое изменение этого метода сделает его пригодным для случая, когда p_i, q_i не являются вещественными.

В случае вещественных переменных положим

$$p_i = \overline{p}_i, \quad q_i = \overline{q}_i + \overline{G}_{i2}(\overline{p}_1, \ldots, \quad \overline{q}_m) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

где согласно нашим обычным обозначениям G_{i2} есть однородный квадратный полином относительно своих аргументов. Вариационная формула принимает в этом случае вид, в котором новый коэффициент P_i имеет по-прежнему член первой степени p_i, в то время как новые Q_i мы легко можем выразить в виде рядов

$$* + Q_{i2} + \sum_{j=1}^{m} p_j \frac{\partial G_{j2}}{\partial p_i} + \ldots \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

В этом выражении отсутствуют члены первой степени, в то время как члены выше второй степени явно не выписаны.

Далее имеем:

$$d\Big(\sum_{j=1}^{m} p_j G_{j2}\Big) = \sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{m} p_j \frac{\partial G_{j2}}{\partial p_k} + G_{k2}\Big)\, dp_k + \sum_{j,\,k=1}^{m} p_j \frac{\partial G_{j2}}{\partial q_k}\, dq_k.$$

Это тождество показывает, что, вычитая полную производную под знаком интеграла, мы можем привести Q_{i2} к виду $Q_{i2} - G_{i2}$ не вводя новых членов первой степени в P_i. Следовательно, если мы возьмем $G_{i2} = Q_{i2}$ $(i = 1, \ldots, m)$, то мы можем исключить члены второй степени из Q.

Производя дальнейшее преобразование

$$p_i = \overline{p}_i, \quad q_i = \overline{q}_i + \overline{G}_{i3} \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

мы можем подобным же образом исключить члены третьей степени из Q_i. Продолжая таким образом до бесконечности, мы приходим к вариационной форме

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Big[\sum_{j=1}^{m} P_j q_j' + * - R\Big]\, dt = 0,$$

где

$$P_j = p_j + P_{j2} + \ldots \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

которую можно привести к гамильтоновой форме указанным выше способом.

В случае, если некоторые из пар p_i, q_i являются сопряженными комплексными числами, мы можем сначала произвести следующее линейное преобразование, переводящее p_i и q_i в вещественные переменные:

$$p_i = \frac{\overline{p}_i + \overline{q}_i\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \quad q_i = \frac{\overline{p}_i - \overline{q}_i\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},$$

так что выражение $p_i q_i'$ перейдет в $\overline{p}_i q_i'$(23) с точностью до полной производной. Таким образом, нормальный вид P_i, Q_i сохраняется для этих вещественных переменных. Производя далее над ними вышеуказанные преобразования, мы придем к тому же результату, что и раньше.

Надлежащим преобразованием, принадлежащим к формальной группе

$$p_i = \varphi_i(\overline{p}_i, \ldots, \overline{q}_m), \quad q_i = \psi_i(\overline{p}_i, \ldots, \overline{q}_m) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

общая проблема Пфаффа может быть приведена к гамильтоновой форме.

§ 13. Обобщенная проблема Пфаффа. При таких обстоятельствах естественно ожидать, что пфаффовы уравнения, содержащие время t с точкой обобщенного равновесия в начале координат, допускают формальное приведение к гамильтонову виду. Нетрудно доказать справедливость этого утверждения посредством небольшого изменения предыдущих рассуждений.

В случае такой точки равновесия уравнения можно записать в виде вариационной формулы:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Big[\sum_{j=1}^{2m} X_j(x_1, \ldots, x_{2m}, t) x_j' + Z(x_1, \ldots, x_{2m}, t)\Big]\, dt = 0, \tag{14}$$

где X_i $(i = 1, \ldots, m)$ и Z суть периодические функции от t, или иначе формулами

$$\sum_{j=1}^{2m} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right) \frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial X_i}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 2m). \tag{15}$$

Прежде всего очевидно, что множители различны; это следует из рассмотрения того частного случая, когда речь шла об обычной точке равновесия.

Кроме того, мы опять можем привести уравнения вариации к нормальному виду посредством линейного преобразования, коэффициенты которого являются периодическими аналитическими функциями t с периодом τ. Нормализованные уравнения вариации будут иметь решения

$$y_i = \delta_{ik}^{\lambda} k^t \qquad (i = 1, \ldots, 2m),$$

где $k = 1, \ldots, 2m$. Отсюда следует, что и для проблемы обобщенной точки равновесия множители разбиваются на пары λ_i, $-\lambda_i$[21].

То же самое рассуждение показывает, что линейные члены в P_i, Q_i могут быть частично так скомбинированы в некоторые полные производные, частично включенные в R, что мы придем к такому же, как и прежде, нормальному виду для членов первой степени в P_i, Q_i и членов второй степени в R. И, наконец, мы пишем как в § 12:

$$p_i = \overline{p}_i, \quad q_i = \overline{q}_i + \overline{G}_{i2} \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

где $\overline{G}_{i2}$ имеет теперь коэффициентами периодические функции t периода τ.

Тогда посредством рассуждений, подобных § 12, мы можем добиться, чтобы $Q_{i2} = 0$ для $i = 1, \ldots, m$, а затем последовательно $Q_{i3} = 0$ и т. д.

Посредством надлежащего преобразования, принадлежащего к формальной группе, обобщенная пфаффова проблема периодического движения может быть сведена к гамильтоновой форме. Следовательно, нормальный вид гамильтоновых уравнений может служить также и в случае уравнений Пфаффа.

Глава 4
Устойчивость периодических движений

§ 1. О приведении к обобщенному равновесию. Для движения вблизи точки равновесия гамильтоновой или более общей пфаффовой системы случай устойчивости естественно определяется как такой, когда множители $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ являются чисто мнимыми количествами и между ними нет никаких линейных соотношений с целыми коэффициентами.

В этой главе мы займемся, однако, не этим вопросом, а несколько более сложным. Это — вопрос об устойчивости движения вблизи какого-нибудь периодического движения такой системы[1]. Применяемый метод требует приведения к случаю обобщенного равновесия. В более общем случае систем Пфаффа это можно осуществить посредством перехода к новым координатам

$$x_i = \overline{x}_i + \varphi_i(t) \quad (i = 1, \ldots, 2m),$$

где периодические функции $\varphi_i(t)$ периода τ изображают координаты в данном периодическом движении. Таким образом, функции $X_1, \ldots, X_{2m}, Z$ [см. формулу (12) на стр. 100] перестают быть независимыми от t и становятся периодическими функциями t периода τ, и данное движение теперь соответствует обобщенному равновесию в начале координат в новом пространстве с координатами $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{2m}$. Таким образом, мы приходим к рассмотрению вопроса о движении вблизи подобной точки обобщенного равновесия.

С этим приведением к обобщенному равновесию связано, однако, одно затруднение, на которое для гамильтоновых систем впервые указал Пуанкаре и которое желательно вкратце здесь выяснить.

Аналогично случаю обычного равновесия естественно определить случай устойчивости как такой, когда все множители $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — чисто мнимые количества, причем мы предполагаем, что между этими множителями и числом $2\pi\sqrt{-1}/\tau$ не существует никаких линейных соотношений с целыми коэффициентами. Если же таковые соотношения существуют, то подлежащие рассмотрению вопросы принимают более сложный характер.

[1] О проблеме устойчивости равновесия см. мою статью «Stability and the Equations of Dynamics», Amer. Journ. Math., vol. 49 (1927).

Для точки обобщенного равновесия, полученной вышеизложенным способом приведения, множители не будут удовлетворять этому условию ввиду того, что такая система всегда будет иметь множитель, равный нулю([1]), который будет, разумеется, двойным. В этом легко убедиться из следующего рассуждения. Пфаффова система имеет интеграл $Z = \text{const}$ в первоначальных переменных и, следовательно, интеграл

$$Z(x_1 + \varphi_1, \ldots, x_{2m} + \varphi_{2m}) = \text{const}$$

в новых переменных. Дифференцируя относительно $2m$ произвольных постоянных, входящих в общее решение $x_1, \ldots, x_{2m}$, мы убеждаемся в том, что линейное соотношение

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} y_1 + \cdots + \frac{\partial Z}{\partial x_{2m}} y_{2m} = \text{const}$$

имеет место для $2m$ линейно независимых решений $y_1, \ldots, y_{2m}$ уравнений вариации и, следовательно, для любого решения этих уравнений; в этой формуле подразумевается, что аргументами выражений $\partial Z/\partial x_1$ $(i = 1, \ldots, 2m)$ служат $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2m}$. Если теперь все $2m$ множителей $\pm\lambda_1, \ldots, \pm\lambda_m$ различны, то существует полная система $2m$ решений

$$y_i = p_{ik} e^{\lambda_k t} \quad (i = 1, \ldots, 2m)$$

при $k = 1, \ldots, 2m$ $(\lambda_{m+i} = -\lambda_i)$, в которых p_{ij} суть периодические функции t периода τ. Но так как $\partial Z/\partial x_1$ тоже периодические функции, то подстановка этих решений в линейные интегральные соотношения относительно y_i приведет нас немедленно к заключению, что постоянные в правых частях должны обращаться в нуль во всяком случае, если $\lambda_k \neq 0$([2]). Но если бы эти постоянные обращались в нуль для такой полной системы решений уравнений вариации, то они должны были бы обращаться в нуль для любого решения $y_1, \ldots, y_{2m}$. Но этого не может быть, так как для какого-нибудь определенного значения t мы можем величинам $y_1, \ldots, y_{2m}$ придать любые значения[1].

Следовательно, существуют два решения уравнений вариации, соответствующие множителю 0([3]). Но

$$x_i = \varphi_i(t + k) - \varphi_i(t) \quad (i = 1, \ldots, 2m)$$

[1]Если исключить случай обыкновенного равновесия, то все $\partial Z/\partial x_i$ не могут одновременно обращаться в нуль вдоль первоначального движения, потому что пфаффовы уравнения дали бы нам тогда $dx_i/dt = 0$ $(i = 1, \ldots, 2m)$, т. е. обыкновенное равновесие.

будет при любом k решением приведенных уравнений, откуда, дифференцируя по k, получим одно из решений уравнений вариации

$$y_1 = \varphi_1', \dots, y_{2m} = \varphi_{2m}'.$$

Это решение имеет периодические (периода τ) составляющие $y_1, \dots, y_{2m}$ и, следовательно, принадлежит множителю 0([4]). С другой стороны, периодическое движение, с которого мы начали свои рассуждения, не изолировано, но изменяется как аналитическая функция постоянной c в известном интеграле (т. е. постоянной энергии в случае уравнений Гамильтона)([5]). Это приводит ко второму периодическому решению

$$y_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial c}, \dots, \quad y_{2m} = \frac{\partial \varphi_{2m}}{\partial c},$$

принадлежащему множителю 0([6]). Вообще говоря, других решений, принадлежащих множителям, равным нулю, не будет.

Это затруднение может быть обойдено следующим образом. Переменную Z мы можем принять за одну из зависимых переменных $x_1, \dots, x_{2m}$, скажем, за x_{2m} в первоначальном пространстве с координатами $x_1, \dots, x_{2m}$. Кроме того переменная $\vartheta = x_{2m-1}$ может быть выбрана как угловая переменная, возрастающая на 2π, когда периодическое движение проходит один период. Остальные координаты $x_1, \dots, x_{2m-2}$ мы можем заставить обращаться в нуль на этой кривой движения([7]).

Сосредоточим внимание на тех движениях вблизи данного периодического движения, для которых $Z = c$ имеет то же значение, что и вдоль самого периодического движения. В этом случае порядок пфаффовой системы уравнений понижается до $2m - 1$ и переменными будут $x_1, \dots, x_{2m-2}, \vartheta$. Эту систему можно написать в вариационной форме

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Big(\sum_{j=1}^{2m-2} X_j x_j' + X_{2m-1} \vartheta' \Big)\, dt = 0,$$

причем к этим уравнениям нужно присоединить равенство $Z = c$. Но подынтегральное выражение представляет собой однородную, размерности один, функцию от $x_1', \dots, x_{2m-2}', \vartheta'$, так что мы можем взять ϑ вместо t в качестве параметра. Вариационный принцип примет тогда вид

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Big[\sum_{j=1}^{2m-2} X_j x_j' + X_{2m-1} \Big]\, d\vartheta = 0.$$

Таким образом, мы получаем пфаффову систему четного порядка $2m-2$, коэффициенты которой будут периодическими функциями переменной ϑ периода 2π, причем известному периодическому движению соответствует начало координат в пространстве с координатами $x_1, \ldots, x_{2m-2}$.

При этом последнем методе приведения к проблеме обобщенного равновесия мы обходим трудности, указанные в начале этого параграфа.

По этим причинам в приложениях теории мы можем ограничиться рассмотрением случая обобщенного равновесия устойчивого типа, определенного выше.

§ 2. Устойчивость пфаффовых систем. В качестве исходного пункта наших рассуждений мы возьмем уравнения движения, частично нормализированные вплоть до членов некоторой степени s посредством надлежащего преобразования, определенного сходящимися рядами по способу, изложенному в предыдущей главе. Таким образом, уравнения будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \pi_i} p_i + L_{i,s+1}, \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \pi_i} q_i + M_{i,s+1} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{1}$$

где для H можно написать выражение

$$H = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j p_j q_j + H_4 + \cdots + H_{\overline{s}} \quad (\overline{s} = s \text{ или } s+1),$$

в котором H_k — однородные полиномы степени $k/2$ относительно m произведений $\pi_i = p_i q_i$, в то время как $L_{i,s+1}$, $M_{i,s+1}$ являются сходящимися степенными рядами относительно $p_1, \ldots, q_m$, которые начинаются с членов степени не ниже $s+1$ и коэффициенты которых, разумеется, суть аналитические периодические функции от t периода τ. Положим

$$u^2 = \sum_{j=1}^{m} p_j q_j.$$

Очевидно, мы можем сказать, что u определяет в известном смысле расстояние точки от положения равновесия в любой момент t; в самом деле, если мы выразим u^2 через первоначальные вещественные переменные $x_1, \ldots, x_{2m}$, то получим вещественный степенной ряд относительно $x_1, \ldots, x_{2m}$, начинающийся с положительной определенной квадратичной формы([8]), т. е.

$$u^2 = \sum_{j,k=1}^{2m} a_{jk}(t)x_jx_k + \ldots$$

для всех t, откуда

$$k\sum_{j=1}^{2m} x_j^2 \leqslant u^2 \leqslant K\sum_{j=1}^{2m} x_j^2 \quad (K > k > 0)$$

в некоторой окрестности начала координат.

Очевидно теперь, что мы можем выбрать N настолько большим, что

$$|L_{i,\,s+1}|, \quad |M_{i,\,s+1}| \leqslant Nu^{s+1} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

на достаточно малом расстоянии от начала координат.

Умножая первое из частично нормализированных уравнений (1) на q_i, а второе на p_i, и складывая, мы заключаем, что

$$\left|\frac{d\pi_i}{dt}\right| \leqslant 2Nu^{s+2} \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Отсюда и из определения u следует неравенство

$$\left|u\frac{du}{dt}\right| \leqslant mNu^{s+2}$$

или, что то же самое,

$$-mN \leqslant \frac{1}{u^{s+1}}\frac{du}{dt} \leqslant mN.$$

Интегрируя по t в пределах от t_0 до t, мы получаем из последнего неравенства

$$\left|\frac{1}{u_0^s} - \frac{1}{u^s}\right| \leqslant msN|t - t_0|.$$

Исследуем вопрос, в какой промежуток времени u сможет превзойти $2u_0$. Для соответствующего t мы должны иметь

$$\left|\frac{1}{u_0^s} - \frac{1}{2^s u_0^s}\right| < msN|t - t_0|.$$

Отсюда очевидно (так как $s \geqslant 1$), что u не может превзойти $2u_0$, пока

$$|t - t_0| \leqslant \frac{1}{2msNu_0^s}. \tag{2}$$

Иначе говоря, наименьший промежуток времени, который должен пройти прежде, чем начальное расстояние u_0 удвоит свою величину, будет порядка s относительно $1/u_0$.

В течение этого же промежутка времени мы будем иметь

$$\left|\frac{d\pi_i}{dt}\right| \leqslant 2^{s+3}Nu_0^{s+2},$$

откуда, интегрируя, получаем:

$$|\pi_i - \pi_i^0| \leqslant 2^{s+3}Nu_0^{s+2}|t - t_0| \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{3}$$

Принимая во внимание, что H и его частные производные суть полиномы, находим

$$\left|\frac{\partial H}{\partial \pi_i} - \frac{\partial H^0}{\partial \pi_i}\right| \leqslant P\sum_{j=1}^{m} |\pi_i - \pi_i^0| \leqslant 2^{s+3}mNPu_0^{s+2}|t - t_0|$$

для малых π_i, π_i^0. С другой стороны, из нормализированных дифференциальных уравнений имеем в этом интервале:

$$\left|\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \pi_i}p_i\right|, \quad \left|\frac{dq_i}{dt} - \frac{\partial H}{\partial \pi_i}q_i\right| \leqslant 2^{s+1}Nu_0^{s+1} \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Комбинируя эти неравенства с предыдущей группой неравенств, получаем

$$\left|\frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H^0}{\partial \pi_i}p_i\right|, \quad \left|\frac{dq_i}{dt} - \frac{\partial H^0}{\partial \pi_i}q_i\right| \leqslant 2^{s+1}Nu_0^{s+1} + 2^{s+4}mNPu_0^{s+3}|t - t_0|$$

для $i = 1, \ldots, m$. Эти неравенства по существу эквивалентны следующим:

$$\left|\frac{d}{dt}\left(p_i e^{\gamma_1 t}\right)\right|, \quad \left|\frac{d}{dt}\left(q_i e^{-\gamma_1 t}\right)\right| \leqslant 2^{s+1}Nu_0^{s+1} + 2^{s+4}mNPu_0^{s+3}|t - t_0|,$$

где $\gamma_i = \partial H^0/\partial \pi_i$ суть чисто мнимые количества. В том обстоятельстве, что H и его частные производные по π_i — чисто мнимые количества, легко убедиться следующим образом: если мы поменяем местами в уравнениях (1) p_i, q_i $(i = 1, \ldots, m)$ и заменим H сопряженным с ним выражением, то эти уравнения перейдут сами в себя. Но это значит, что выражение, сопряженное с H, совпадает с $-H$, т. е. что H есть чисто мнимая функция([9]). Интегрируя предыдущие неравенства, получаем

$$\begin{aligned} &|p_i - p_i^0 e^{-\gamma_i(t-t_0)}|, \\ &|q_i - q_i^0 e^{\gamma_i(t-t_0)}| \leqslant 2^{s+1} N u_0^{s+1} |t - t_0| + 2^{s+3} m N P u_0^{s+3} |t - t_0|^2 \end{aligned} \tag{4}$$

для $i = 1, \ldots, m$.

Если мы теперь вернемся к сходящимся степенным рядам, выражающим $x_1, \ldots, x_{2m}$ через величины $p_1, \ldots, q_m$, и если мы заменим в этих рядах $p_1, \ldots, q_m$ на

$$p_1^0 e^{-\gamma_1(t-t_0)}, \ \ldots, \quad q_m^0 e^{\gamma_m(t-t_0)}$$

соответственно, то полученные ряды совпадут с формальными рядами, дающими решение вплоть до членов степени $(s + 1)$ относительно $2m$ произвольных постоянных $p_1^0, \ldots, q_m^0$([10]). Но совершаемая при этом ошибка будет порядка разностей, составляющих левую часть неравенства (4). Следовательно, если мы выразим $x_1, \ldots, x_{2m}$ посредством формальных рядов, являющихся решениями, полученными из нормального вида оборванных на членах порядка s относительно $2m$ произвольных постоянных $p_1^0, \ldots, q_m^0$, то в течение промежутка времени (2) совершённая ошибка не будет превосходить по абсолютной величине выражение

$$A u_0^{s+1} + B u_0^{s+1} |t - t_0| + C u_0^{s+3} |t - t_0|^2,$$

где A, B, C — некоторые положительные константы.

Благодаря тому, что в этих неравенствах s — произвольное целое положительное число, можно придать им еще более простой вид. Ограничим $|t - t_0|$ еще строже, чем в формуле (2), а именно: пусть он будет порядка не более $(s/3)+1$ относительно обратного расстояния $1/u_0$. Тогда слагаемые вышеприведенной суммы будут, очевидно, порядка $s/3$ относительно самого расстояния u_0. Следовательно, если мы отбросим в формальных рядах решения все члены степени выше $s/3$,то порядок ошибки будет выше $s/3$. Но $s/3$ произвольно, откуда мы выводим следующее заключение:

Если формальные ряды решения проблемы обобщенного равновесия устойчивого типа для уравнений Пфаффа оборвать на членах произвольного порядка s относительно начальных значений $p_1^0, \ldots, q_m^0$ произвольных постоянных([11])*, то полученные таким образом $2m$ тригонометрических сумм*([12]) *будут иметь коэффициенты не выше чем первого порядка относительно u_0 и будут выражать координаты $x_1, \ldots, x_{2m}$ с* *ошибкой порядка не выше u_0^{s+1} в течение промежутка времени порядка не ниже $1/u_0^{s+1}$. Здесь u_0 выражает расстояние до начала координат в пространстве $x_1, \dots, x_{2m}$ при $t = t_0$.*

Написанные в явном виде эти тригонометрические суммы для $x_1, \dots, x_{2m}$ имеют вид вещественных выражений:

$$A_0 + \sum_j (A_j \cos l_j t + B_j \sin l_j t),$$

где

$$l_i\sqrt{-1} = i_1 \frac{\partial H^0}{\partial \pi_1} + \dots + i_m \frac{\partial H^0}{\partial \pi_m}, \qquad d = \sum_{j=1}^{m} |i_j| \leqslant s,$$

причем $i_1, \dots, i_m$ — целые числа, а A_i, B_i — полиномы относительно $p_1^0, \dots, q_m^0$, все члены которых имеют степень не ниже d и не выше s.

§ 3. Неустойчивость пфаффовых систем. В случае, если некоторые из множителей λ_i вещественны, рассуждения в корне меняются. Если мы предположим, что имеются положительные и отрицательные множители $\pm\lambda_1, \dots, \pm\lambda_k$, то будет существовать вещественное k-мерное аналитическое многообразие кривых движения, приближающихся к кривой периодического движения. Точки на этих кривых, близкие к периодическому движению, оставляют окрестность такового в сравнительно короткий промежуток времени. Точнее говоря, расстояние будет превосходить

$$u_0 e^{\lambda(t-t_0)},$$

где u_0 обозначает начальное расстояние от периодического движения при $t = t_0$, а λ есть положительная константа, меньшая, чем наименьший положительный множитель. Подобно этому, при уменьшении t расстояние u_0 может увеличиваться таким же образом вдоль второго вещественного аналитического многообразия кривых.

Это положение, очевидно, совершенно не похоже на то, которое имелось в устойчивом случае, и может быть с полным основанием названо неустойчивым.

Мы не будем останавливаться на выводе результатов этого рода[1], первый из которых был получен Пуанкаре.

§ 4. Полная устойчивость. Из сказанного в § 2 видно, что пфаффовы и гамильтоновы системы обладают в известном смысле полной формальной или тригонометрической устойчивостью в случае,

[1] Некоторые из основных положений, касающихся этого случая, см. *Picard*, «Traite d'Analyse», т. 3, гл. 1.

если $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, $2\pi\sqrt{-1}/\tau$ суть чисто мнимые количества, не связанные никаким линейным соотношением с целыми коэффициентами.

Мы перейдем теперь к определению этого понятия «полной устойчивости».

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений четного порядка $2m$

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_{2m}, t) \qquad (i = 1, \ldots, 2m), \tag{5}$$

имеющую в начале координат точку обобщенного равновесия, и положим, что при $t = t_0$ точка x_i^0 находится на расстоянии ε от начала координат. Пусть T будет какой-нибудь фиксированный промежуток времени, f — любое целое положительное число и $P_s(x_1, \ldots, x_{2m}, t)$ — произвольный полином относительно $x_1, \ldots, x_{2m}$ с коэффициентами — аналитическими и периодическими (периода τ) функциями от t,не имеющий членов степени ниже s. Если всегда возможно с ошибкой, численно меньшей, чем

$$M\varepsilon^{f+s+1},$$

апроксимировать P_s для $|t - t_0| \leqslant T$ тригонометрической суммой порядка N:

$$\sum_{j=0}^{N}(A_j \cos l_j t + B_j \sin l_j t) \qquad (|l_i - l_j| > l > 0),$$

где M, N, l зависят только от f и P_s и где $l_0 = 0$, то мы будем говорить, что уравнения (5) «вполне устойчивы».

В качестве весьма простого примера рассмотрим систему двух уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = kx_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -kx_1,$$

общее решение которой будет:

$$\begin{aligned} x_1 &= A\cos kt + B\sin kt, \\ x_2 &= -A\sin kt + B\cos kt, \end{aligned}$$

так что координаты x_1, x_2 представляются тригонометрическими суммами первого порядка. Любой полином P_s степени $s_1 \geqslant s$ также может быть точно представлен суммой, порядок N которой не превосходит 2^{s_1+1}. Следовательно, приведенный пример удовлетворяет определению «полной устойчивости».

Результаты, полученные в § 2, показывают, что в случае гамильтоновых или пфаффовых уравнений из определенной ранее обыкновенной устойчивости системы всегда следует полная устойчивость.

Это непосредственно следует из того, что разности $l_i - l_j$, входящие в тригонометрические суммы §2, приближенно выражаются через некоторое ограниченное число линейных комбинаций с целыми коэффициентами $m+1$ количеств $\lambda_1/\sqrt{-1}, \ldots, \lambda_m/\sqrt{-1}, 2\pi/\tau$, и ни одна из этих комбинаций не обращается в нуль.

В случае полной устойчивости решения нормализированных уравнений вариации (глава III, § 5) будут пределами тригонометрических сумм указанного типа и, следовательно, будут сами тригонометрическими на основании леммы о тригонометрических суммах, приведенной ниже (в § 5 и 6 этой главы). Следовательно, множители будут чисто мнимыми количествами.

Весьма важно показать, что это определение полной устойчивости независимо от выбранной нами системы координат $x_1, \ldots, x_{2m}$. В самом деле, предположим, что данная система вполне устойчивая. Произведем допустимое преобразование координат:

$$\overline{x}_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_{2m}, t) \quad (i = 1, \ldots, 2m),$$

где φ_i — аналитические функции от $x_1, \ldots, x_2m, t$, равные нулю в начале координат и при этом такие, что определитель $|\partial\varphi_i/\partial x_j|$ не равен нулю в начале координат, причем коэффициенты в разложении по степеням $x_1, \ldots, x_{2m}$ суть аналитические периодические функции от t периода τ. Тогда две переменные

$$\overline{\varepsilon} = \left[\overline{x}_1^2 + \cdots + \overline{x}_{2m}^2\right]^{1/2}\Big|_{t=t_0}$$

и

$$\varepsilon = \left[x_1^2 + \cdots + x_{2m}^2\right]^{1/2}\Big|_{t=t_0},$$

очевидно, обе одинаково могут служить для измерения расстояния от начала при $t = t_0$, так как мы имеем

$$0 < d < \frac{\overline{\varepsilon}}{\varepsilon} < D$$

в окрестности начала([13]).

Рассмотрим теперь какой-нибудь полином $P_s(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{2m}, t)$, который, очевидно, может быть представлен в виде

$$P^*(x_1, \ldots, x_{2m}, t) + Q(x_1, \ldots, x_{2m}, t),$$

где P^* есть полином относительно $x_1, \ldots, x_{2m}$, не содержащий членов степени ниже s, а Q может быть представлено как степенной ряд, начинающийся с членов степени не ниже $f+s+1$. Очевидно, что, с одной стороны, полином P^* может быть представлен тригонометрической суммой указанного типа с ошибкой порядка $f+s+1$ относительно ε (по условию полной устойчивости), а с другой стороны, что Q само порядка $f+s+1$. Следовательно, полином $P_s(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{2m}, t)$ может быть представлен той же самой тригонометрической суммой с ошибкой того же порядка. Таким образом, полная устойчивость системы в новых переменных доказана.

Сам по себе факт, что множители системы $2m$ дифференциальных уравнений первого порядка распадаются на m чисто мнимых пар, отнюдь не доказывает полной устойчивости системы в установленном выше смысле. Простым примером системы, не обладающей полной устойчивостью, хотя и имеющей только чисто мнимые множители, может служить система двух уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = ky + x(x^2+y^2), \qquad \frac{dy}{dt} = -kx + y(x^2+y^2),$$

где k положительно и за основной период взято 2π. Множителями этой системы будут чисто мнимые количества $\pm k\sqrt{-1}$. Но, если первое из этих уравнений мы умножим на $2x$, а второе на $2y$ и получившиеся уравнения сложим, то будем иметь

$$\frac{du}{dt} = 2u^2 \quad (u = x^2+y^2),$$

откуда, интегрируя, получаем

$$u = \frac{u_0}{1 - 2u_0(t-t_0)}.$$

Если бы система обладала полной устойчивостью, то мы могли бы найти постоянное целое число N настолько большое, что для некоторого постоянного K имело бы место неравенство

$$|u - S_N| \leqslant K u_0^3,$$

где S_N изображает тригонометрическое выражение порядка N указанного выше типа; это следует из того, что u является однородным квадратичным полиномом относительно x и y, а u_0 — квадрат расстояния ε^2. Вышеприведенное неравенство может быть записано в виде

$$\left| \frac{u-u_0}{u_0^2} - \frac{S_N - u_0}{u_0^2} \right| \leqslant K u_0.$$

Пусть теперь u_0 стремится к нулю. Очевидно, что

$$\lim_{u_0=0} \frac{u-u_0}{u_0^2} = 2(t-t_0).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{u_0=0} \frac{S_N-u_0}{u_0^2} = 2(t-t_0).$$

Но стоящее в левой части выражение является тригонометрической суммой указанного вида порядка не выше N; эта сумма стремится к своему пределу равномерно. Следовательно, на основании леммы о тригонометрических суммах, формулировка и доказательство которой содержатся в § 5 и 6 этой главы, предел этой суммы будет суммой того же вида. Но представить $2(t-t_0)$ как конечную тригонометрическую сумму, очевидно, невозможно. Следовательно, в этом случае мы не имеем полной устойчивости.

Как мы видели, условие, чтобы все множители были чисто мнимыми количествами, необходимо, хотя и недостаточно, для полной устойчивости. Обозначая m пар чисто мнимых множителей через $\pm\lambda_1, \ldots, \pm\lambda_m$, мы будем в дальнейшем предполагать, что между $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ и $2\pi\sqrt{-1}/\tau$ нет никакого линейного соотношения с целыми коэффициентами. Разумеется, при этом предположении мы исключаем из рассмотрения некоторые особые случаи, которые требуют дальнейшего изучения.

Для полной устойчивости оказывается необходимым выполнение бесконечного множества условий помимо условия, чтобы все множители были чисто мнимыми.

§ 5. Нормальный вид для вполне устойчивых систем. Мы видели уже, что пфаффовы и гамильтоновы системы уравнений обладают свойством полной устойчивости в случае, если характеристические числа их будут чисто мнимыми. Естественно возникает очень интересный вопрос об отыскании условий полной устойчивости системы в наиболее общем случае и о характеристике движений вблизи точки обобщенного равновесия, обладающего такой полной устойчивостью. Мы ответим на эти вопросы, приведя уравнения вполне устойчивого типа к некоторому определенному «нормальному» виду. Так как $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — чисто мнимые количества, различные между собою, то мы можем произвести такое линейное преобразование переменных $x_1, \ldots, x_{2m}$, что система уравнений в новых переменных $p_1, q_1, \ldots, p_m, q_m$ будет иметь вид

$$\frac{dp_i}{dt} = -\lambda_i p_i + P_i, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \lambda_i q_i + Q_i \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

где p_i и q_i — сопряженные комплексные переменные, а P_i, Q_i — ряды, начинающиеся с членов не ниже второй степени([14]).

Произведем теперь вторую замену переменных

$$p_i = \overline{p}_i + \overline{\varphi}_{i2}, \qquad q_i = \overline{q}_i + \overline{\psi}_{i2} \quad (i = 1, \ldots , m);$$

здесь $\overline{\varphi}_{i2}$ и $\overline{\psi}_{i2}$ — однородные квадратичные полиномы относительно $\overline{p}_1, \ldots , \overline{q}_m$, коэффициенты которых суть аналитические периодические функции от t. Легко видеть, что дифференциальные уравнения сохранят свой вид с новыми P_i, Q_i, которые будут иметь однородные квадратичные слагаемые вида

$$P_{i2} + \sum_{j=1}^{m}\Bigl(p_j\frac{\partial\varphi_{i2}}{\partial p_j} - q_j\frac{\partial\varphi_{i2}}{\partial q_j}\Bigr)\lambda_j - \lambda_i\varphi_{i2} - \frac{\partial\varphi_{i2}}{\partial t},$$

$$Q_{i2} + \sum_{j=1}^{m}\Bigl(p_j\frac{\partial\psi_{i2}}{\partial p_j} - q_j\frac{\partial\psi_{i2}}{\partial q_j}\Bigr)\lambda_j + \lambda_i\psi_{i2} - \frac{\partial\psi_{i2}}{\partial t}$$

соответственно. Рассматривая эти выражения, мы легко убеждаемся, принимая во внимание несоизмеримость множителей $\lambda_1, \ldots , \lambda_m$, что эти новые P_{i2} и Q_{i2} можно обратить в нуль надлежащим выбором φ_{i2} и ψ_{i2} одним и только одним способом. В самом деле, пусть

$$P(t)p_1^{\alpha_1}\ldots p_m^{\alpha_m}q_1^{\beta_1}\ldots q_m^{\beta_m} \qquad (\alpha_1 + \cdots + \beta_m = 2)$$

будет какой-нибудь член P_{i2} и пусть коэффициентом подобного члена φ_{i2} будет $\varphi(t)$. Из написанного выше выражения для нового P_{i2} будет тогда следовать дифференциальное уравнение для $\varphi(t)$:

$$P(t) + \Bigl[\sum_{j=1}^{m}(\alpha_j - \beta_j)\lambda_j - \lambda_i\Bigr]\varphi - \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

которое может быть удовлетворено периодической функцией с периодом τ, если только коэффициент при φ не будет кратным $2\pi\sqrt{-1}/\tau$, что невозможно на основании нашего предположения о несоизмеримости. Такое периодическое решение будет, кроме того, единственным (см. главу III, § 9).

Таким образом, мы можем обратить в нуль все члены второй степени в P_i, Q_i([15]).

Совершенно подобным же способом мы можем посредством преобразования вида

$$p_i = \overline{p}_i + \overline{\varphi}_{i3}, \qquad q_i = \overline{q}_i + \overline{\psi}_{i3} \quad (i = 1, \ldots , m)$$

обратить в нуль все члены третьей степени в P_i, Q_i, за исключением тех, для которых выражения

$$\sum_{j=1}^{m}(\alpha_j-\beta_j)\lambda_j-\lambda_i, \qquad \sum_{j=1}^{m}(\alpha_j-\beta_j)\lambda_j+\lambda_i, \quad (\alpha_1+\dots+\beta_m=3)$$

обращаются в нуль. Эти исключительные члены имеют вид:

$$P(t)p_ip_jq_j, \quad Q(t)q_ip_jq_j \qquad (j=1,\,\dots\,,m).$$

Но даже и для этих членов функции φ и ψ могут быть выбраны таким образом, чтобы новые коэффициенты, а именно:

$$P(t)-\frac{d\varphi}{dt}, \quad Q(t)-\frac{d\psi}{dt}$$

были постоянными числами (см. главу III, § 9). Следовательно, возможно привести P_i, Q_i к следующему нормальному виду:

$$\begin{aligned} P_i &= p_i(c_{i1}p_1q_1+\dots+c_{im}p_mq_m)+\dots\,, \\ Q_i &= q_i(d_{i1}p_1q_1+\dots+d_{im}p_mq_m)+\dots\,, \end{aligned}$$

где мы выписали в правых частях члены третьей степени P_{i3} и Q_{i3}(16).

Следующим нашим шагом необходимо показать, что в случае полной устойчивости выражения P_{i3} и Q_{i3} должны удовлетворять дополнительным соотношениям

$$q_iP_{i3}+p_iQ_{i3}=0 \quad (i=1,\,\dots\,,m),$$

т. е. $c_{ij}+d_{ij}=0$ $(i,\,j=1,\,\dots\,,m)$. Для того, чтобы доказать это утверждение, мы воспользуемся следующей, почти очевидной, леммой.

Лемма о тригонометрических суммах. *Пусть нам дана последовательность тригонометрических сумм вида*

$$\sum_{j=1}^{N}(A_j\cos l_jt+B_j\sin l_jt) \quad (|l_i-l_j|>l>0),$$

где N, l суть постоянные количества, а A_i, B_i, l_i изменяются, причем, однако, во всех суммах $l_0=0$. Если эта последовательность стремится к пределу $\varphi(t)$ равномерно в некотором интервале, то $\varphi(t)$ само является в этом интервале тригонометрической суммой порядка не выше N.

Доказательство этой простой леммы мы отложим до следующего параграфа.

Рассмотрим квадратичные полиномы $p_i q_i$. Из данных дифференциальных уравнений находим:

$$\frac{d(p_i q_i)}{dt} = q_i P_{i3} + p_i Q_{i3} + \cdots \quad (i = 1, \ldots, m),$$

где ненаписанные члены будут не ниже пятой степени, а члены написанные имеют вид

$$p_i q_i[(c_{i1} + d_{i1})p_1 q_1 + \cdots + (c_{im} + d_{im})p_m q_m] \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Мы покажем, что это выражение тождественно равно нулю.

В самом деле, из только что приведенных дифференциальных уравнений следуют тотчас же неравенства

$$\left|\frac{d\pi_i}{dt}\right| \leqslant K(\pi_i + \cdots + \pi_m)^2 \quad (\pi_i = p_i q_i)$$

для $i = 1, \ldots, m$, где $\pi_1, \ldots, \pi_m$, разумеется, суть неотрицательные количества(17). Эти последние неравенства дают

$$\left|\frac{du}{dt}\right| \leqslant mKu^2 \quad \left(u = \sum_{j=1}^{m} \pi_j\right),$$

откуда

$$|u - u_0| \leqslant 4mKu_0^2|t - t_0| \leqslant 4mKTu_0^2$$

для любого данного промежутка времени $|t - t_0| \leqslant T$, при условии, что u_0 достаточно мало. Это неравенство можно получить, применяя методы, указанные в § 2. Следовательно, $u - u_0$ второго порядка относительно u_0 во всем этом интервале, и в то же время неравенства для $d\pi_i/dt$ показывают, что $\pi_i - \pi_i^0$ тоже второго порядка. Таким образом выражение

$$q_i P_{i3} + p_i Q_{i3},$$

являющееся однородным квадратичным полиномом относительно $\pi_i, \ldots, \pi_m$, отличается от своего значения в точке $t = t_0$ на величину третьего порядка относительно u_0, и приведенные выше дифференциальные уравнения дают:

$$\left|\frac{d\pi_i}{dt} - (q_i^0 P_{i3}^0 + p_i Q_{i3}^0)\right| \leqslant L u_0^{5/2} \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Интегрируя, получаем:

$$\left|\pi_i - \pi_i^0 - (q_i^0 P_{i3}^0 + p_i^0 Q_{i3}^0)(t - t_0)\right| \leqslant LTu_0^{5/2} \quad (i = 1, \ldots, m)$$

в рассматриваемом интервале.

Пусть, далее, мы имеем:

$$p_i^0 = \alpha_i \varepsilon, \quad q_i^0 = \beta_i \varepsilon \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

где $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_m, \beta_m$ представляют собою m произвольных пар сопряженных комплексных чисел, и предположим, что ε стремится к нулю. Последнее написанное неравенство, в котором u_0 нужно рассматривать как постоянное кратное ε^2, показывает, что

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{(\pi_i - \pi_i^0)}{\varepsilon^4} = \alpha_i \beta_i [(c_{i1} + d_{i1})\alpha_1 \beta_1 + \cdots + (c_{im} + d_{im})\alpha_m \beta_m](t - t_0),$$

причем мы имеем равномерное приближение к пределу в рассматриваемом интервале. С другой стороны, мы можем в этом интервале изобразить π_i тригонометрической суммой вышеуказанного типа с точностью до величины порядка ε^5, и, следовательно, $(\pi_i - \pi_i^0)/\varepsilon^4$ может быть изображено такой суммой с точностью до величины порядка ε. Таким образом левая часть написанного равенства есть предел равномерно сходящейся последовательности тригонометрических сумм, удовлетворяющих условию леммы, и, следовательно, она тоже должна быть тригонометрической суммой. Но это может иметь место только в том случае, если суммы $c_{ij} + d_{ij}$ обращаются в нуль при всех значениях i и j, что и требовалось доказать.

Таким образом, выписывая члены до третьей степени включительно относительно p_i, q_i, мы имеем:

$$\frac{dp_i}{dt} = -p_i\left[\lambda_i - \sum_{j=1}^{m} c_{ij} p_j q_j\right] + \cdots,$$

$$\frac{dq_i}{dt} = q_i\left[\lambda_i - \sum_{j=1}^{m} c_{ij} p_j q_j\right] + \cdots [18].$$

Таким путем мы можем последовательно удалять из P_i, Q_i члены все высшей и высшей степени, за исключением членов, являющихся произведениями соответственно p_i или q_i на полиномы относительно m произведений $p_j q_j$. Коэффициенты в P_i, Q_i при этих остающихся членах будут постоянные числа, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку.

Всякая вполне устойчивая система уравнений (1) *может быть формально приведена к нормальному виду*

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= -M_i\xi_i, \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= M_i\eta_i \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{6}$$

где $M_1, \ldots, M_m$ *являются чисто мнимыми степенными рядами*([19]) *относительно* m *переменных* ξ_i, η_i, *т. е.*

$$M_i = \lambda_i - \sum_{j=1}^{m} c_{ij}\xi_j\eta_j + \cdots \quad (i = 1, \ldots, m),$$

и ξ_i, η_i *суть сопряженные комплексные переменные.*

Обратно, если какая-нибудь система уравнений может быть приведена к такому нормальному виду, то из рассуждений § 2 *следует, что такая система вполне устойчива.*

§ 6. Доказательство леммы о тригонометрических суммах. Рассмотрим последовательность тригонометрических сумм $\psi(t)$, удовлетворяющих всем условиям доказываемой леммы. Для таких сумм имеет место символическое равенство

$$\left[D(D^2 + l_1^2)(D^2 + l_2^2)\ldots(D^2 + l_n^2)\right]\psi = 0,$$

где в символическом дифференциальном операторе слева знак D обозначает обычное дифференцирование по t. Интегрируя $2N + 1$ раз, получаем:

$$\psi + \sum_{j=1}^{N} l_j^2 \int_0^t\!\!\int_0^t \psi(t)\,dt^2 + \cdots + \Bigl(\prod_{j=1}^{N} l_j^2\Bigr)\int_0^t \cdots \int_0^t \psi(t)\,dt^{2N} = P(t),$$

где $P(t)$ — полином не выше чем $2N$-й степени.

Далее, все l_i $(i = 1, \ldots, N)$ превосходят по абсолютной величине l, так как по условию имеем:

$$|l_i - l_0| = |l_i| \geqslant l \quad (i = 1, \ldots, N).$$

Очевидно теперь, что мы можем выбрать такую подпоследовательность тригонометрических сумм $\psi(t)$, что для нее вес $m_i = \dfrac{1}{l_i}$, которые все численно меньше, чем $\dfrac{1}{l}$, будут стремиться к пределам m_i^*, причем $|m_i^*| \leqslant 1/l$. Любые два таких числа m_i^*, m_j^*, разумеется, могут быть равны, только если оба равны нулю. Разделим теперь обе части предыдущего интегрального уравнения на произведение $l_1^2, \ldots, l_N^2$ и перейдем к пределу. Так как ψ стремится к φ равномерно, то мы тотчас же получим:

$$\Bigl(\prod_{j=1}^{N} m_j^{*2}\Bigr)\varphi + \cdots + \int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \varphi(t)\, dt^{2N} = Q(t),$$

где $Q(t)$ как предел равномерно сходящейся последовательности полиномов порядка не выше $2N$, является само таким полиномом([20]). Отсюда мы можем сделать немедленное заключение, что φ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\bigl[D(m_1^{*2}D^2+1)\ldots(m_N^{*2}D^2+1)\bigr]\,\varphi = 0,$$

общим решением которого является тригонометрическая сумма

$$C_0 + \sum_{j=1}^{N}\left[C_j \cos\frac{t}{m_j^*} + D_j \sin\frac{t}{m_j^*}\right],$$

где знак суммы распространяется только на те значения j, для которых m_j^* не равно нулю. Следовательно, φ будет такой тригонометрической суммой.

§ 7. Обратимость и полная устойчивость. Можно было бы показать, как тесно связаны между собою вариационный принцип и требование полной устойчивости системы[1]. Вместо этого мы предпочитаем, следуя другому направлению мысли, показать, что требование полной устойчивости тесно связано также с требованием обратимости во времени данной системы дифференциальных уравнений, если только мы дадим надлежащее обобщение обычному определению обратимости([21]).

Мы будем говорить, что данная система (5), имеющая в начале координат точку обобщенного равновесия, «обратима», если при замене t на $-t$ вновь полученная система эквивалентна первоначальной по отношению к преобразованиям формальной группы.

При таком изменении знака переменной t все множители системы тоже меняют свой знак, т.е. λ_i переходит в $-\lambda_i$. Отсюда прежде всего

[1] См. мою статью «Stability and the Equations of Dynamics», Amer. Journ. Math., vol. 49 (1927).

очевидно, что для обратимой системы четного порядка эти множители разбиваются на пары, так что множители каждой пары одинаковы по абсолютной величине и противоположны по знаку. Нас интересует главным образом тот случай, когда эти множители являются, кроме того, чисто мнимыми количествами, между которыми не существует никаких линейных соотношений с целыми коэффициентами. Мы будем, следовательно, считать, что эти условия устойчивости первого порядка выполнены.

Очевидно, что приведенное определение обратимости не зависит от выбранной системы зависимых переменных. Отсюда следует, что если мы имеем вполне устойчивую систему, то мы можем рассматривать ее в нормальной форме (6). Замена t на $-t$ приводит нас к измененным уравнениям:

$$\frac{d\overline{\xi}_i}{dt} = \overline{M}_i\overline{\xi}_i, \qquad \frac{d\overline{\eta}_i}{dt} = \overline{M}_i\overline{\eta}_i \quad (i = 1, \ldots, m),$$

где мы пишем черту над буквами во избежание путаницы. Но от прежних уравнений к новым можно перейти посредством преобразования, принадлежащего формальной группе:

$$\xi_i = \overline{\eta}_i, \qquad \eta_i = \overline{\xi}_i.$$

Следовательно, если какая-нибудь система (5) *обладает устойчивостью первого порядка, то необходимым условием полной устойчивости такой системы будет обратимость ее в смысле вышеприведенного определения.*

Остается только показать, что это простое необходимое условие является также достаточным.

Тот же процесс нормализации, который был применен в § 5, приводит нас к нормальной форме более общего вида:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = U_i\xi_i, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = V_i\eta_i \tag{7}$$

где U_i, V_i — функции от m произведений $\xi_1\eta_1, \ldots, \xi_m\eta_m$ с начальными членами соответственно λ_i, $-\lambda_i$. Это можно показать без помощи гипотезы полной устойчивости.

Если мы теперь заменим t на $-t$, то эти нормализированные уравнения переходят в уравнения

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -U_i\xi_i, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = -V_i\eta_i \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{8}$$

По нашему предположению эти новые уравнения эквивалентны первоначальным уравнениям (7). Заметим теперь, что уравнения (8) имеют тот же вид, что и (7), с той только разницей, что ξ_i и η_i обменялись ролями и функции $-U_i$, $-V_i$ заменяют прежние V_i, U_i.

Легко доказать, с другой стороны, что самое общее преобразование, сохраняющее нормальную форму уравнений (7), имеет вид

$$\xi_i = \overline{\xi}_i \overline{f}_i, \qquad \eta_i = \overline{\eta}_i \overline{g}_i \qquad (i = 1, \dots, m), \tag{9}$$

где $\overline{f}_i$ и $\overline{g}_i$ — произвольные степенные ряды относительно m произведений $\xi_i\eta_i$ с постоянными членами, не равными нулю, и с коэффициентами, не зависимыми от t.

В том, что преобразования такого рода сохраняют нормальный вид уравнений (7), легко убедиться прямой подстановкой. Прежде всего замечаем, что обратное преобразование имеет такой же вид:

$$\overline{\xi}_i = \xi_i h_i, \qquad \overline{\eta}_i = \eta_i k_i \quad (i = 1, \dots, m),$$

причем

$$\overline{f}_i h_i = \overline{g}_i k_i = 1.$$

Отсюда находим:

$$\frac{d\overline{\xi}_i}{dt} = \overline{U}_i \overline{\xi}_i,$$

где

$$\overline{U}_i = \overline{f}_i \Big[h_i U_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial h_i}{\partial u_j} (U_j + V_J) \xi_j \eta_j \Big] \quad (u_i = \xi_i \eta_i),$$

и такие же выражения для $d\overline{\eta}_i/dt$ при $i = 1, \dots, m$(22).

Для доказательства того, что формулы (9) дают самый общий вид преобразований, сохраняющих нормальный вид, мы будем в формулах таких преобразований рассматривать последовательно члены первой, второй и т. д. степени.

Итак, рассмотрим члены первой степени в рядах, выражающих $\overline{\xi}_i$, $\overline{\eta}_i$ через ξ_i, η_i. Эти члены мы можем написать в виде

$$a\xi_i + b\eta_i, \quad c\xi_i + d\eta_i \text{(23)}$$

соответственно, так что, например, имеем:

$$\frac{d}{dt}(a\xi_i + b\eta_i) = a\lambda_i \xi_i - b\lambda_i \eta_i + \xi_i \frac{da}{dt} + \eta_i \frac{db}{dt} + \dots \equiv \lambda_i (a\xi_i + b\eta_i) + \dots,$$

если мы хотим, чтобы преобразование сохраняло нормальный вид уравнений, хотя бы только для членов первой степени. Отсюда мы заключаем, что b равно нулю и что a — постоянное число[24].

Подобным же образом c равно нулю и d — постоянная сопряженная с a[25].

Следовательно, ряды, дающие преобразования для переменных ξ_i, η_i к новым $\overline{\xi}_i$, $\overline{\eta}_i$, имеют требуемые линейные члены.

Итак, самое общее преобразование, сохраняющее нормальную форму уравнений, может быть представлено как композиция линейного преобразования

$$\overline{\xi}_i = a\xi_i, \quad \overline{\eta}_i = a\eta_i, \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

принадлежащего группе преобразований (9), и преобразования вида

$$\overline{\xi}_i = \xi_i + F_i, \qquad \overline{\eta}_i = \eta_i + G_i,$$

где F_i, G_i начинаются с членов не ниже второй степени.

Обозначим через F_{i2} и G_{i2} однородные квадратичные слагаемые F_i и G_i соответственно. Таким образом, выписывая члены первой и второй степени, имеем:

$$\overline{\xi}_i = \xi_i + F_{i2} + \cdots, \quad \overline{\eta}_i = \eta_i + G_{i2} + \cdots \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

и обратное преобразование

$$\xi_i = \overline{\xi}_i - \overline{F}_{i2} + \cdots, \quad \eta_i = \overline{\eta}_i - \overline{G}_{i2} + \cdots \quad (i = 1, \ldots, m),$$

где $\overline{F}_{i2}$, $\overline{G}_{i2}$ суть просто F_{i2}, G_{i2}, в которых ξ_i, η_i заменены на $\overline{\xi}_i$, $\overline{\eta}_i$ соответственно. Мы должны определить самый общий вид F_{i2}, G_{i2}, при котором нормальная форма уравнений может сохраниться. Можно написать:

$$\frac{d\overline{\xi}_i}{dt} = U_i\xi_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\xi_j \frac{\partial F_{i2}}{\partial \xi_j} - \eta_j \frac{\partial F_{i2}}{\partial \eta_j} \right) + \frac{\partial F_{i2}}{\partial t} + \cdots \equiv \overline{U}_i\overline{\xi}_i$$

при $i = 1, \ldots, m$, откуда, сравнивая члены второй степени обеих частей, получаем:

$$-\lambda_i F_{i2} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\xi_j \frac{\partial F_{i2}}{\partial \xi_j} - \eta_j \frac{\partial F_{i2}}{\partial \eta_j} \right) + \frac{\partial F_{i2}}{\partial t} = 0.$$ [26]

Если при определении коэффициентов отдельных слагаемых F_{i2} мы будем рассуждать, как в § 5, то придем к заключению, что F_{i2} должно обращаться в нуль. Подобным же образом найдем, что G_{i2} равно нулю. Таким образом, наше преобразование имеет члены до второй степени включительно требуемого вида, и нам нужно теперь рассмотреть преобразование

$$\overline{\xi}_i = \xi_i + F_{i3} + \cdots, \quad \overline{\eta}_i = \eta_i + G_{i3} + \cdots \quad (i = 1, \ldots, m)$$

и обратное преобразование

$$\xi_i = \overline{\xi}_i - \overline{F}_{i3} + \cdots, \quad \eta_i = \overline{\eta}_i - \overline{G}_{i3} + \cdots \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Мы приходим в этом случае к m уравнениям

$$-\lambda_i F_{i3} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\xi_j \frac{\partial F_{i3}}{\partial \xi_j} - \eta_i \frac{\partial F_{i3}}{\partial \eta_j} \right) + \frac{\partial F_{i3}}{\partial t} = \xi_i \Delta U_{i2},$$

где ΔU_{i2} обозначает разность между членами второй степени в $\overline{U}_i$ и в U_i, причем мы должны заменить в $\overline{U}_i$ все $\overline{\xi}_i$, $\overline{\eta}_i$ на ξ_i, η_i. Таким образом ΔU_{i2} представляет собой линейную функцию этих m произведений с постоянными коэффициентами. Но тем же способом, что и в § 5, мы можем теперь показать, что всякий член F_{i3} содержит множитель ξ_i и что F_{i3} имеет вид

$$\xi_i \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \xi_j \eta_j.$$

Разумеется, G_{i3} может быть представлено подобной же формулой, причем общим множителем, содержащимся во всех членах, является теперь η_i.

Следовательно, наше преобразование имеет указанный вид до членов третьей степени включительно. Но в этом случае это преобразование может быть представлено как композиция преобразования

$$\overline{\xi}_i = a\xi_i + F_{i3}, \quad \overline{\eta}_i = d\eta_i + G_{i3} \quad (i = 1, \ldots, m),$$

принадлежащего к группе преобразований типа (9), и дальнейшего преобразования

$$\overline{\xi}_i = \xi_i + F_{i4}, \quad \overline{\eta}_i = \eta_i + G_{i4},$$

так что мы можем повторить подобные же рассуждения относительно членов четвертой степени. Таким образом шаг за шагом мы приходим к доказываемому утверждению, что самый общий вид преобразований, сохраняющих нормальную форму (7), есть как раз (9).

Остается рассмотреть, в каких случаях возможно перейти посредством преобразования типа (9) от уравнений (7) к уравнениям (8), в которых мы будем теперь писать $\overline{\xi}_i$, $\overline{\eta}_i$ вместо ξ_i, η_i, чтобы, таким образом, различить две системы переменных $\xi_1, \ldots, \eta_m$ и $\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\eta}_m$. Если мы положим $u_1 = \xi_i\eta_i$, $\overline{u}_1 = \overline{\xi}_i\overline{\eta}_i$, $W_i = U_i + V_i$, то получим две системы уравнений относительно $u_i, \ldots, \overline{u}_m$ и $\overline{u}_1, \ldots, u_m$, а именно:

$$\frac{du_i}{dt} = W_i(u_1, \ldots, u_m)u_i \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{10}$$

$$\frac{d\overline{u}_i}{dt} = -W_i(\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_m)\overline{u}_i \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{11}$$

причем имеют место соотношения

$$\begin{aligned}\overline{u}_i = u_i h_i(u_1, \ldots, u_m)k_i(u_1, \ldots, u_m) = \\ = u_i l_i(u_1, \ldots, u_m) \qquad (i = 1, \ldots, m).\end{aligned} \tag{12}$$

Кроме того, по вышеприведенным соображениям постоянное слагаемое ρ_i в l_i есть вещественное положительное число([27]). Легко показать теперь, что решения уравнений (10) и (11) могут быть связаны соотношением (12) только в том случае, если $W \equiv 0$.

Прежде всего напомним, что U_i и V_i имеют постоянные члены соответственно λ_i и $-\lambda_i$, дающие в сумме нуль. Следовательно, ряд W_i не имеет постоянного слагаемого, и при $W_i \neq 0$ этот ряд должен начинаться с членов некоторой положительной степени r. Обозначим сумму всех членов степени r в W_i через W_{ir}. Если мы произведем указанную замену переменных, то получим равенства

$$\frac{d\overline{u}_i}{dt} = -\rho_i W_{ir}(\rho_1 u_1, \ldots, \rho_m u_m)u_i + \cdots \equiv \rho_i W_{ir}(u_1, \ldots, u_m)u_i + \cdots,$$

где выписаны явно только члены низшей степени $r+1$ относительно $u_1, \ldots, u_m$. Отсюда получаем, сравнивая эти низшие члены:

$$W_{ir}(\rho_1 u_1, \ldots, \rho_m u_m) + W_{ir}(u_1, \ldots, u_m) = 0.$$

Рассмотрим теперь какой-нибудь член выражения W_{ir}, скажем,

$$c_i u_1^{\alpha_1} \ldots u_m^{\alpha_m} \qquad (\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = r).$$

Последнее равенство дает

$$c_i(1 + \rho_1^{\alpha_1} \ldots \rho_m^{\alpha_m}) = 0,$$

что невозможно, если $c_i \neq 0$. Следовательно, все члены W_{ir} должны обращаться в нуль, что противоречит предположению, что r есть степень начальных членов W_i. Отсюда следует, что таких членов не существует, и значит, $W_i \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, m)$. Иначе говоря, из требования обратимости вытекает, что уравнения (7) имеют вид

$$\frac{d\xi_i}{dt} = U_i\xi_i, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = -U_i\eta_i,$$

который, как мы знаем, характерен для случая полной устойчивости.

Если для какой-нибудь системы имеет место устойчивость первого порядка, то обратимость является необходимым и достаточным условием полной устойчивости обобщенного равновесия.

Случай обычного равновесия, разумеется, еще проще, чем только что рассмотренный случай обобщенного равновесия, и для него получаются результаты, вполне аналогичные изложенным выше.

§ 8. Другие виды устойчивости. Мы уже определили два вида устойчивости: устойчивость первого порядка и полную или тригонометрическую устойчивость. В § 2 было доказано, что для уравнений динамики (гамильтоновых и пфаффовых) из устойчивости первого порядка следует полная устойчивость. Некоторые другие виды устойчивости тоже представляют интерес.

На первое место в этом отношении, как теоретически наиболее важную, нужно поставить «перманентную устойчивость», при которой малые отклонения от состояния равновесия или периодического движения остаются малыми все время. Таков тип устойчивости обычного равновесия, когда потенциальная энергия имеет минимум. Уравнения динамики принадлежат к такому типу, для которого эта устойчивость может существовать, хотя, вообще говоря, вопрос о том, имеется она или нет в каком-нибудь данном случае, принадлежит к числу чрезвычайно трудных вопросов и составляет так называемую «проблему устойчивости». До сих пор эта проблема разрешена только для тех случаев, когда какой-нибудь известный сходящийся интеграл гарантирует существование подобной устойчивости перманентного типа.

Другим типом устойчивости будет тот, когда малые отклонения остаются таковыми в течение очень долгого промежутка возрастающего или убывающего времени. Достаточным условием такой «полуперманентной устойчивости» будет существование интеграла, выраженного формальными рядами, которые начинаются с однородного полинома, образующего определенную форму относительно зависимых переменных. Представляется вероятным, что небольшое изменение этого достаточного условия сделает его необходимым и достаточным. Разумеется, для полной устойчивости необходима полуперманентная устойчивость.

Наконец, Ляпуновым и другими был рассмотрен еще один вид устойчивости — «односторонняя устойчивость», при которой малые отклонения остаются малыми при $t > 0$ и, вообще говоря, стремятся к нулю с безграничным увеличением t [1] ([28]). Легко показать, что если все m множителей имеют отрицательные вещественные части, то мы будем иметь этот вид устойчивости. С другой стороны, для этой устойчивости необходимо, чтобы ни один из множителей не имел положительной вещественной части. В случае уравнений динамики, однако, вещественные части всех множителей не могут быть одновременно отрицательными, потому что каждому множителю λ_i соответствует множитель $-\lambda_i$. Таким образом, односторонняя устойчивость для уравнений динамики возможна только в том случае, когда все множители будут чисто мнимые числа. В этом же случае из односторонней устойчивости какой-нибудь системы следует перманентная устойчивость.

Таким образом, для задач динамики важными типами устойчивости будут: полная или тригонометрическая устойчивость и упомянутая уже перманентная устойчивость. Мы вернемся позже (глава VIII) к важной проблеме о взаимоотношениях этих двух типов устойчивости.

---

[1] См., например, *Picard*, «Traite d'Analyse», т. 3, гл. 8.

Глава 5
Существование периодических движений

§ 1. Роль периодических движений. Периодические движения, включая равновесие, составляют очень важный класс движений динамических систем. В этой главе нашей главной целью будет рассмотрение различных общих методов, позволяющих устанавливать существование периодических движений.

В следующей главе мы рассмотрим глубже вопрос о распределении периодических движений для динамических систем с двумя степенями свободы. Эти системы представляют собой простейший случай систем неинтегрируемого типа.

Случай одного уравнения первого порядка не представляет никакого интереса. Если дифференциальное уравнение будет

$$\frac{dx}{dt} = X(x),$$

то мы, очевидно, будем иметь равновесие для корней уравнения $X = 0$, в то время как для всех остальных движений будем иметь либо асимптотическое приближение к одному из положений равновесия, либо безграничное увеличение $|x|$. Здесь положения равновесия играют центральную роль.

В следующем по простоте случае имеется система двух уравнений первого порядка. Тут геометрические методы Пуанкаре[1] дают качественные характеристики всех возможных движений, и оказывается, что положения равновесия и периодические движения и в этом случае играют центральную роль. Следующий параграф будет посвящен примеру такого движения.

Если, однако, мы ограничимся рассмотрением системы двух уравнений гамильтонова или пфаффова типа (что соответствует одной степени свободы), то такие системы имеют интеграл энергии. Мы предполагаем здесь, что время t не входит в явном виде в уравнения; случай, когда уравнения содержат время, нужно в сущности рассматривать как имеющий ту же степень общности, что и случай двух степеней свободы. Если мы теперь будем считать переменные p, q координатами точ-

[1]См. его статью «Sur les courbes définies par une équation différentielle», Journal de Mathématiques, ser. 3, vol. 7, 1881, vol. 8, 1882, ser. 4, vol. 1, 1885, vol. 2, 1886.

ки на плоскости[1], то через каждую точку проходит одна и только одна кривая движения, и эти кривые могут только быть либо замкнутыми, либо уходящими в бесконечность обоими своими концами. Соответствующие этим двум случаям семейства — семейства периодических движений и неустойчивых движений — составляют множества всех возможных движений системы, за исключением только того, что некоторые из этих кривых могут заключать одну или несколько точек равновесия, в каковом случае мы будем иметь асимптотическое приближение к такой точке в одном или обоих направлениях.

В случае динамических систем более сложного типа неясно: играют ли периодические движения столь же важную роль. Для динамических систем с двумя степенями свободы (рассматриваемых в следующей главе) можно сказать, однако, с почти полной уверенностью, что периодические движения продолжают и тут играть основную роль. В более сложных случаях — для систем с еще бо́льшим числом степеней свободы — рекуррентные движения, которые мы рассмотрим в главе 7, быть может, следует рассматривать как надлежащее обобщение периодических движений, и, таким образом, эти движения могут приобрести большое теоретическое значение.

§ 2. Пример системы двух уравнений. Пример, о котором мы упоминали в предыдущем параграфе, касается прямолинейного движения частицы в поле сил самого общего вида.

Выражаясь точнее, мы рассматриваем движение частицы P единичной массы по прямой линии под действием силы $f(x, v)$, зависящей от пространственной координаты частицы x и от ее скорости v.[2] Ради определенности мы предположим, что имеется одно и только одно положение равновесия на прямой движения и что рассматриваемое движение устойчиво в том смысле, что для $t > 0$ x и v остаются ограниченными по абсолютной величине.

Обычная форма уравнений движения выражается одним уравнением второго порядка:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

где функция f предполагается известной, причем мы будем считать, что она — аналитическая относительно обоих своих аргументов. Если мы поместим начало координат в точку равновесия, то будем иметь кроме того:

$$f(0, 0) = 0, \quad f(x, 0) \neq 0, \quad \text{если } x \neq 0.$$

[1]Можно представить себе, что p, q являются координатами на более сложной поверхности, но мы ограничимся здесь простейшим случаем плоскости.

[2]Краткое изложение рассматриваемой здесь задачи см. в моей статье «Stabilità e Periodicita nella Dinamica», Periodico di Matematiche, ser. 4, vol. 6, 1926.

Введем обозначение $dx/dt = y$ и заменим написанное выше уравнение второго порядка системой двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = f(x, y).$$

Эта система уравнений, очевидно, принадлежит к тем системам, для которых имеют место теоремы существования и единственности.

Если мы будем считать x, y прямоугольными координатами точки Q на плоскости, то возможные движения частицы соответствуют заполняющим плоскость x, y аналитическим интегральным кривым, для которых

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y}.$$

Единственной кривой, выродившейся в точку, будет начало координат, отвечающее точке равновесия. Остальные кривые имеют всюду касательную, непрерывно изменяющую свое направление, так как нигде, кроме начала координат, dx/dt и dy/dt на обращаются в нуль одновременно. Кроме того, угловой коэффициент касательной может обращаться в бесконечность только для точек, лежащих на оси x.

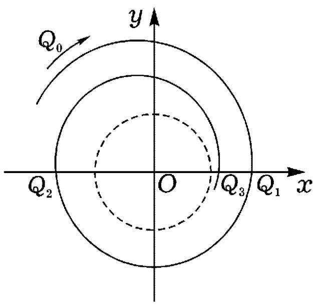

Рис. 1

Рассмотрим теперь определенную интегральную кривую, соответствующую данному устойчивому движению. Пусть Q_0 (рис. 1) будет точка на этой кривой, соответствующая $t = 0$. Для определенности предположим, что Q_0 лежит в верхней полуплоскости; изменения, которые следует сделать в наших рассуждениях, если Q_0 лежит в нижней полуплоскости, очевидны. Так как $dx/dt = y$ остается положительной до тех пор, пока точка Q, лежащая на интегральной кривой, не пересечет оси абсцисс, то Q движется непрерывно вправо, если t возрастает от своего начального значения 0.

Но по предположению точка Q лежит внутри достаточно большого квадрата, с центром в O и сторонами длины $2M$, параллельными осям координат.

Следовательно, пока t, увеличиваясь, остается меньшим любого значения, при котором Q пересечет ось абсцисс, x, которое тоже увеличивается и ограничено, стремится к некоторому пределу $\overline{x}$.

Если t стремится к конечному пределу $\overline{t}$, когда x стремится к $\overline{x}$, то по теореме существования движение может быть продолжено за $\overline{t}$;

но, разумеется, при этом уже не будет $y > 0$ по определению $\bar{t}$. Следовательно, в этом случае мы должны иметь $\bar{y} = 0$, и кривая пересекает ось абсцисс в точке $(\bar{x}, 0)$. Нужно заметить, что $\bar{x}$ не может быть нулем. В противном случае мы имели бы два решения, а именно, данное решение $x(t)$, $y(t)$ и решение $x = 0$, $y = 0$, удовлетворяющие оба начальным условиям $x = 0$, $y = 0$ при $t = \bar{t}$, что противоречит теории единственности.

Если t безгранично увеличивается, когда x стремится к $\bar{x}$, то можно показать, что точка (x, y) стремится к $(0, 0)$. В самом деле, допустим противное. Очевидно, что так как x постоянно возрастает, оставаясь все время меньше M по абсолютной величине, а y тоже остается все время меньше M по абсолютной величине, то точка (x, y) имеет пределом либо одну точку $(\bar{x}, \bar{y})$, либо отрезок $(\bar{x}, \bar{y})$, где $\bar{y}_0 \leqslant y \leqslant \bar{y}_1$.

Но это последнее предположение, очевидно, потребовало бы бесконечно большой кривизны x интегральной кривой вблизи точек $(\bar{x}, \bar{y}_0)$ и $(\bar{x}, \bar{y}_1)$. Так как x выражается формулой

$$x = \frac{y(f_x y + f_y f) - f^2}{(y^2 + f^2)^{3/2}}$$

(где f_x, f_y обозначает частные производные f по x и y), то отсюда следовало бы, что $y^2 + f^2$ было вблизи $(\bar{x}, \bar{y}_0)$ и $(\bar{x}, \bar{y}_1)$ бесконечно мало. Но это могло бы быть только в том случае, если $\bar{x}$, $\bar{y}_0$, $\bar{y}_1$ все обращались в нуль, что противоречит сделанному предположению.

Следовательно, y должно стремиться к некоторому пределу $\bar{y}$, когда t безгранично возрастает([1]).

Очевидно теперь, что длина дуги интегральной кривой

$$\int_0^t \sqrt{f^2 + y^2}\, dt$$

безгранично увеличивается вместе с t, если только (x, y), не стремится к $(0, 0)$, а бесконечная длина дуги тоже требует бесконечной кривизны([2]).

Таким образом, мы получили, что либо Q приближается к началу координат O слева при безграничном возрастании t, либо Q пересекает ось абсцисс в некоторой точке $Q_1 = (x_1, 0)$.

В этом последнем случае очевидно, что точка Q, перейдя через ось x, начнет двигаться влево. Совершенно теми же рассуждениями мы покажем, что или точка Q при безграничном увеличении t будет все время двигаться влево, приближаясь к точке $(0,\ 0)$, или же она должна вновь пересечь ось абсцисс в точке $Q_2 = (x_2,\ 0)$ при $t = \bar{\bar{t}}$.

Точки Q_1 и Q_2 должны при этом лежать на оси x по разные стороны от начала O. В самом деле, в противном случае $f(x_1,\ 0)$ и $f(x_2,\ 0)$ имели бы одинаковый знак [потому что $f(x,\ 0)$, равное нулю, только при $x = 0$ не обращалось бы в нуль между x_1 и x_2], и точка Q должна была бы двигаться вниз от Q_2, подобно тому, как она это делает в Q_1. Отсюда легко усмотреть, что Q_1 должно лежать справа, а Q_2 — слева от O.

В самом деле, Q_1 во всех случаях должно быть справа от начала, потому что, если бы Q_1, лежало слева, то частица при своем движении влево от Q_1 не могла бы стремиться к началу координат и, следовательно, должна была бы пересечь ось абсцисс в некоторой точке Q_2,лежащей, таким образом, с той же стороны от начала, что и Q_1.

Повторяя это рассуждение бесконечное число раз, приходим либо к конечному числу точек пересечения $Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_n$ интегральной кривой с осью абсцисс, лежащих поочередно слева и справа от O, после последней из которых Q стремится к O, либо к бесконечной последовательности точек пересечения $Q_1,\ Q_2,\ \ldots$, тоже лежащих поочередно слева и справа от O.

Из топологии полученной фигуры очевидно([3]), что в последнем случае кривая может либо спиралеобразно удаляться от O, стремясь к некоторому ограничивающему овалу, окружающему O, либо образовывать сама такой овал, либо спиралеобразно приближаться к такому овалу извне (как показано на рис. 1), либо образовывать спираль, приближающуюся к точке O. Из элементарных теорем существования и единственности, разумеется, следует, что кривая не может пересекать или касаться самое себя.

Следовательно, мы имеем следующие, единственно возможные, типы устойчивого прямолинейного движения частицы в поле сил с одним положением равновесия:

a) Частица колеблется бесконечное число раз около положения равновесия с возрастающей амплитудой колебаний, стремясь асимптотически к периодическому движению.

b) Частица колеблется периодически около точки равновесия.

c) Частица колеблется бесконечное число раз около точки равновесия с убывающей амплитудой, стремясь к периодическому движению асимптотически.

d) Частица колеблется конечное или бесконечное число раз и стремится к положению равновесия.

e) Частица находится в положении равновесия([4]).

На основе приведенных рассуждений можно получить ясную картину всех возможных движений частицы под действием любого поля сил указанного типа.

Рассмотрим упорядоченное множество различных замкнутых кривых в плоскости x, y, отвечающих периодическим движениям. Все эти кривые, очевидно, должны заключать начало координат, которое можно рассматривать как первую, самую внутреннюю из этих кривых.

Какая-нибудь другая кривая движения может иметь точку между двумя периодическими кривыми, и в этом случае она будет лежать целиком между обеими кривыми и будет устойчива. Частица будет в этом случае приближаться асимптотически к одному из периодических движений, когда t безгранично возрастает, и к другому, когда t безгранично убывает.

Единственный другой случай, который может представиться, — это случай кривой движения, лежащей снаружи от самой внешней (последней) кривой совокупности периодических движений([5]). Это движение, очевидно, будет устойчиво в одном и только в одном направлении и приближается асимптотически к периодическому движению, соответствующему внешней кривой, когда t безгранично возрастает в этом направлении.

§ 3. Метод минимума. Пусть теперь мы имеем лагранжеву динамическую проблему:

$$\delta I = \delta \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = 0,$$

где L есть функция пространственных координат $q_1, \ldots, q_m$ и скоростей $q_1', \ldots, q_m'$, квадратичная относительно этих последних переменных.

Выраженная этой вариационной формулой система дифференциальных уравнений имеет интеграл энергии, а именно:

$$L_2 - L_0 = \mathrm{const}.$$

Прибавляя к L_0 надлежащее постоянное слагаемое, мы можем обратить для данного движения произвольную постоянную в написанной формуле в нуль. Мы попробуем упростить поставленную задачу, пользуясь интегралом энергии, который можем написать теперь в виде

$$L_2 - L_0 = 0.$$

Как мы уже видели, задаче можно дать иную вариационную формулировку, а именно:

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(2\sqrt{L_0 L_2} + L_1\right)\, dt = 0$$

(см. главу II, § 3), где подынтегральное выражение представляет собой однородную функцию от $q_1', \ldots, q_m'$ размерности один и где, следовательно, значение интеграла не зависит от параметра t вдоль пути интегрирования, а только от самого пути в пространстве $(q_1, \ldots, q_m)$.

Далее, координатами являются $q_1, \ldots, q_m$. Но выбор той или иной системы координат не существен, потому что любое однозначное аналитическое преобразование переменных не влияет на вариационный принцип. Необходимо, однако, потребовать, чтобы система значений координат $q_1, \ldots, q_m$ образовала некоторое аналитическое многообразие M известной связности. Соответственно этому мы принимаем, что коэффициенты в L суть аналитические функции от $q_1, \ldots, q_m$ на многообразии M, если $q_1, \ldots, q_m$ выбраны подходящим образом. Предположим, кроме того, что выражение $4L_0L_2 - L_1^2$, которое является однородной квадратичной формой относительно скоростей, будет положительной определенной формой. Мы можем рассматривать выражение $ds^2 = L_0 L_2 dt^2$ как квадрат элемента дуги на «характеристической поверхности» M.

Обозначим через l любую замкнутую кривую в M, которую нельзя непрерывно деформировать в точку. Многообразие M здесь считается многосвязным в смысле линейной связности(⁶).

Предположим далее, что при такой непрерывной деформации кривой l интеграл I вдоль этой кривой безгранично возрастает, если l не остается целиком в конечной части многообразия M, а также, что I превосходит некоторую положительную константу I_0 при любом выборе l. В этом случае, следовательно, будет существовать положительная точная нижняя граница для значений интеграла I вдоль этих кривых.

Интуитивно очевидно, что эта граница будет достигнута на некоторой замкнутой кривой, которая будет соответствовать какому-то периодическому движению. Здесь мы не будем входить в детали доказательств, а ограничимся тем, что выскажем результат[1].

[1] См. мою статью «Dynamical Systems with Two Degrees of Freedom», Trans. Amer. Math. Soc., vol. 18, 1917, где метод минимума разработан полнее и где имеются ссылки на важные предшествующие статьи Hadamard'a, Whittaker'a, Hilbert'a и Signorini.

Если нам дана лагранжева динамическая проблема этого рода с функцией

$$L = L_0 + L_1 + L_2$$

и на характеристической поверхности M дан какой-нибудь замкнутый путь l, не сводимый в точку, то для любого заданного значения c постоянной энергии, т. е. для

$$L_2 - L_0 = c,$$

существует периодическое движение того же типа (в смысле непрерывных преобразований), что и l, для которого

$$l = \int\limits_l (2\sqrt{L_0 L_2} + L_1)\, dt$$

имеет абсолютный минимум.

Если $L_1 = 0$, так что динамическая система обратима, то интеграл превращается в длину дуги s на характеристической поверхности и периодическое движение соответствует замкнутой геодезической линии данного типа.

В случае двух степеней свободы ($m = 2$) этот метод минимума дает только те периодические движения неустойчивого типа, для которых оба не равные нулю множителя вещественны[1]. Аналогичные результаты, несомненно, справедливы для любого числа степеней свободы и могут быть получены при помощи классических методов вариационного исчисления.

Если мы будем изменять постоянную энергии c, то почти очевидно, что периодическое движение будет изменяться аналитически. Мы имеем здесь, таким образом, пример аналитического продолжения периодического движения с изменением параметра (см. § 9 этой главы).

§ 4. Приложение к симметрическому случаю. Существует один случай, когда прямое приложение метода минимума невозможно, а именно: случай характеристической поверхности, не содержащей не сводящихся в точку циклов. Интересно отметить, что даже в этом случае небольшое видоизменение метода минимума иногда может стать применимым.

Это будет во всех тех случаях, когда динамическая проблема «симметрична» в том смысле, что все точки характеристической поверхности можно разбить на пары симметричных точек, так что интеграл I будет иметь одно и то же значение вдоль какой-нибудь кривой и вдоль

[1] См. мою уже цитированную статью (§ 14).

ее симметричного изображения. Если это условие удовлетворено, и, если мы будем считать локальные координаты $q_1, \ldots, q_m$ каждой точки пары одинаковыми, то L_0, L_1, L_2 будут тоже одинаковыми в симметрических точках.

Чтобы иллюстрировать заключающуюся здесь идею, будем считать, что поверхность M лежит в обычном пространстве и симметрична относительно начала координат, но не проходит через него, так что если x, y, z — координаты точки M, то $-x$, $-y$, $-z$ будут координатами симметрической точки M. Разумеется, M считается связной и обладающей ранее указанными свойствами; в частности, M может быть выпуклой поверхностью, симметричной относительно начала. Интеграл I можно считать обыкновенной длиной дуги кривой, лежащей на поверхности M.

Возьмем теперь какую-нибудь кривую $l = ABCDA$ на M, такую, что CDA есть изображение ABC и, следовательно, A и C — симметрические точки. Будем непрерывно деформировать кривую каким угодно образом, но с единственным условием, чтобы она всегда состояла из двух симметричных дуг ABC, CDA.

Тогда интеграл I вдоль кривой l будет иметь абсолютный минимум, который будет достигнут на какой-нибудь кривой этого типа. В самом деле, нам достаточно принять симметрические точки за тождественные и рассмотреть интеграл I вдоль замкнутой кривой на полученном посредством такого отождествления многообразии.

Если лагранжева проблема такого типа обладает симметрией в указанном выше смысле и если l есть какой-нибудь симметрический замкнутый путь на характеристической поверхности M, то будет существовать симметрическое периодическое движение, эквивалентное l, для которого I есть абсолютный минимум.

В частности, пусть мы имеем замкнутую m-мерную аналитическую поверхность той же связности, что и гиперсфера, лежащую в $(m + 1)$-мерном пространстве и симметричную относительно начала. Предыдущий результат немедленно прилагается к этой поверхности и указывает на существование по крайней мере одной геодезической линии без кратных точек.

В более общем случае, если лагранжева проблема этого типа допускает аналитическое преобразование в себя T, k-я степень которого представляет собою тождественное преобразование, и если l есть замкнутый путь, инвариантный относительно T и не сводимый в точку на M(7), то существует периодическое движение, эквивалентное l(8).

§ 5. Критерий Уиттекера и аналогичные результаты. До сих пор мы имели дело с лагранжевыми динамическими проблемами, характеристические поверхности которых не имели никаких границ, за исключением границ на бесконечности. Очень просто, однако, распространить полученные результаты на случаи, когда M ограничено одной или несколькими аналитическими $(m-1)$-мерными поверхностями, при условии, что единственная малая геодезическая дуга, соединяющая какую-нибудь упорядоченную пару близких точек, лежащих в М, тоже лежит в M. Границу, которая обладает этим свойством, будем называть «выпуклой».

В самом деле, кривая в M, дающая минимум, будет в этом случае либо замкнутая экстремальная кривая, в каком случае она, очевидно, не касается ни одной из границ и, следовательно, лежит целиком в M, либо она состоит из конечного или бесконечного числа экстремальных дуг, вершины которых, разумеется, должны лежать на границах M. Но по определению выпуклой границы дающая минимум кривая не может содержать вершин на границах M. В самом деле, если бы такая вершина V существовала, то малая дуга AVB, содержащая V, могла бы быть заменена более короткой экстремальной дугой AB, лежащей целиком внутри M. Таким образом, мы пришли к противоречию.

Поверхность M, определенная в предыдущем параграфе, может иметь любое число конечных выпуклых границ, помимо границ в бесконечности, и для такой поверхности справедливы полученные в предыдущем параграфе теоремы существования периодического движения.

Первоначальный критерий Уиттекера относился к обратимому случаю систем с двумя степенями свободы, причем M было кольцом. Полученный результат гласил, что имеется периодическое движение минимального типа, совершающее в кольце один оборот[1].

§ 6. Метод минимакса. Посредством метода «минимакса» можно устанавливать существование дальнейших периодических движений. Простейшую иллюстрацию этого метода мы получим, если будем рассматривать геодезические линии на поверхности вида тора в обыкновенном трехмерном пространстве. Изложенный выше метод минимума, очевидно, дает нам для каждого класса эквивалентных замкнутых кривых, не сводимых в точку, по крайней мере одну геодезическую линию, принадлежащую этому классу. Будем теперь деформировать замкнутую кривую l таким образом, что в начальном и в конечном положении она будет совпадать с упомянутой минимальной геодезической линией и по крайней мере одна из угловых координат увеличится при деформации на $2k\pi$. Конечно, во время этого движения длину l придется, вообще говоря, увеличивать по сравнению с начальной, и эта длина пройдет через некоторый максимум. Рассмотрим деформацию, для которой этот максимум будет наименьшим. В некотором положении l^* кривая l действительно достигает этого максимума. Это положение l^*

[1] См. мою упомянутую статью (§ 10–13).

отвечает замкнутой геодезической линии. Очевидно, что невозможно деформировать все соседние с l^* кривые, имеющие меньшую длину, друг в друга, не переходя через кривые большей или равной длины; иначе l^* не отвечала бы нашему определению. Это свойство характерно для всех кривых типа минимакса.

Вышеприведенное изложение интуитивно. Можно, однако, этот метод изложить вполне строго[1].

В более общем случае мы приходим к следующему заключению.

Лагранжева проблема, подчиненная прежним условиям (см. § 3) *и имеющая $k > 1$ периодических движений минимального типа, эквивалентных замкнутой кривой l, будет непременно обладать еще по крайней мере $k - 1$ периодическими движениями минимаксного типа, эквивалентными той же кривой.*

Если мы исключим из рассмотрения все особые случаи и ограничимся интуитивным способом рассуждения, то мы можем следующим образом сделать это более общее положение вероятным. Пусть $I_1, \ldots, I_k$ будут значения интеграла I вдоль k периодических движений минимального типа, существование которых мы предполагаем, и пусть I^* будет настолько большим числом, что мы можем непрерывной деформацией кривой l перейти от какой-нибудь из соответствующих кривых $l_1, \ldots, l_k$ к любой другой так, чтобы интеграл I на l все время оставался бы меньше I^*. Для определенности предположим, что $I_1, \ldots, I_k$ расположены в порядке возрастания их величины.

Пусть u будет переменный параметр и рассмотрим замкнутые кривые l данного типа, для которых $I < u$. Пока $u < I_1$ (абсолютный минимум), таких кривых не будет совсем, но если u будет увеличиваться, становясь больше I_1, то появляются кривые, сначала мало отличающиеся от l_1. Но чем больше становится u, тем большие отклонения от кривой l_1 делаются возможными для l. Точно так же, когда u становится больше I_2, появляется новая изолированная совокупность кривых l в окрестности кривой l_2. И, в конце концов, когда u делается больше I_k, появляется последняя k-я совокупность кривых в окрестности кривой l_k.

Но, с другой стороны, при возрастании u какие-нибудь две из имеющихся совокупностей кривых могут соединиться в одну, т. е. может стать возможным деформировать кривую l_α в кривую l_β так, чтобы интеграл I вдоль кривой l все время оставался меньше u. Следовательно, будем иметь наименьшее значение u, для которого это возможно, и соответствующее периодическое движение типа минимакса. Каждый раз, когда происходит такое соединение, число изолированных совокупностей кривых l, имеющих $I < u$, уменьшается на единицу.

[1]См. мою упомянутую статью (§ 15–19), где метод минимакса развивается для случая двух степеней свободы.

Но когда $u = I^*$, то существует только одна такая совокупность, так что имеет место $k-1$ соединение. Следовательно, существует $k-1$ минимаксных периодических движений, что и требовалось доказать.

Нетрудно показать, что, за исключением того случая, когда периодическое движение типа минимакса кратное([9]), только две совокупности кривых могут совпасть для одного из этих критических значений u.

Если характеристическая поверхность допускает дискретные преобразования в себя, то возникает исключительный случай, при котором периодические движения минимального типа должны считаться каждое больше чем один раз. Таков именно вышеупомянутый случай геодезических линий на торе.

Отметим, что когда мы рассматриваем какую-нибудь замкнутую кривую l как описанную k раз ($k > 1$), движения минимального типа остаются теми же, тогда как движения типа минимакса, связанные с ними, не будут теми же, что при $k = 1$, а будут отличны от них.

Общее положение требует дальнейшего изучения.

§ 7. Приложение к исключительному случаю. Случай m-мерной лагранжевой системы, имеющей характеристическую поверхность, которая может быть одно-однозначно и аналитически отображена на гиперсферу, представляет исключительный интерес, но как раз к этому случаю намеченный здесь метод минимакса не приложим, так как на таком многообразии не существует замкнутых кривых l, не сводимых в точку. Тем не менее и в этом случае можно установить существование периодических движений типа минимакса.

Для того, чтобы сделать рассуждение насколько возможно конкретным, мы остановим свое внимание на случае обратимой геодезической проблемы, хотя будет очевидно, что то же рассуждение можно применить к любой лагранжевой проблеме рассматриваемого типа, имеющей характеристическую поверхность, гомеоморфную гиперсфере.

Нашим первым шагом будет определить, что называется «покрытием» поверхности. Рассматривая сначала случай двумерной поверхности, предположим, что поверхность сферы приведена в одно-однозначное аналитическое соответствие с данной поверхностью. Малые круги на сфере, лежащие в плоскостях, перпендикулярных какой-нибудь оси, очевидно переходят при этом в систему замкнутых аналитических кривых (две из которых состоят из одной точки), покрывающих данную поверхность. Точки покрытия могут быть определены двумя угловыми координатами ϑ, φ на нашей поверхности, где φ и ϑ означают соответственно долготу и дополнение до $\frac{\pi}{2}$ широты соответственной точки сферы относительно данной оси. Построенные нами кривые соответствуют $\vartheta = \text{const}$, в то время как φ изменяется от 0 до 2π. Координата ϑ может изменяться только от 0 до π, причем обоим крайним значениям ϑ соответствуют кривые, состоящие из одной точки.

Теперь представим себе, что это покрытие непрерывно деформируется. Этим мы хотим сказать, что все точки, непрерывно изменяясь, переходят в близкие точки, причем кривые покрытия переходят в новые кривые. Очевидно, что такое покрытие будет всегда действительно покрывать каждую точку по крайней мере однажды и не может свестись к точке[1] (^{10}).

Подобным же образом в случае m-мерного многообразия мы строим систему малых кругов на гиперсфере

$$x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = 1$$

[$x_1, \ldots, x_{m+1}$ — прямоугольные координаты в $(m+1)$-мерном пространстве], определяемых уравнениями:

$$x_3 = x_3^{(0)}, \ldots, x_{m+1} = x_{m+1}^{(0)},$$
$$x_1^2 + x_2^2 = 1 - x_3^{(0)2} - \cdots - x_{m+1}^{(0)2}.$$

В этом случае состоящие из одной точки окружности находятся в одно-однозначном соответствии с $(m-2)$-мерной гиперсферой.

Изображение этой системы кругов дает аналитическое покрытие нашей характеристической поверхности M.

Точки покрытия могут быть определены надлежащими координатами, и мы можем так же, как для двумерной поверхности, непрерывно деформировать это покрытие. Очевидно, что такое покрытие всегда будет покрывать каждую точку поверхности M по крайней мере один раз(^{11}).

Далее, длины изображений кругов в этом покрытии имеют верхнюю границу L^*. Мы можем также найти такое d, что две любые точки M, геодезическое расстояние которых в M меньше, чем d, могут быть соединены единственной минимальной геодезической линией длины $\delta < d$. Пусть n будет такое целое положительное число, что

$$\frac{L^*}{n} < d \leqslant \frac{L^*}{n-1}.$$

На изображении какого-нибудь круга возьмем точку P_1, для которой $\varphi = 0$, и разделим всю кривую на n дуг:

$$P_1P_2,\ P_2P_3,\ \ldots,\ P_nP_1,$$

[1] Схема доказательства этого положения приведена в подстрочном примечании на стр. 246 моей уже цитированной статьи, и это доказательство легко распространяется на случай m-мерной гиперсферы.

равной длины, меньшей d. Проделаем это со всеми кругами. Пусть теперь на каждом круге точка Q_i движется от P_i к P_{i+1} ($P_{n+1} = P_1$) таким образом, чтобы в каждый данный момент все дуги (P_iP_{i+1}) делились точками Q_i пропорционально, и рассмотрим дугу, состоящую из кратчайшей геодезической дуги P_iQ_i и из дуги Q_iP_{i+1} нашей кривой. Нетрудно видеть, что мы получаем таким образом непрерывную деформацию нашего покрытия. Но в начале деформации все дуги P_iP_{i+1} были дугами наших кривых, а в конце они стали геодезическими дугами P_iP_{i+1}.

Таким образом, мы видим, что наше покрытие данными изображениями кругов можно непрерывно деформировать в покрытие замкнутыми кривыми $P_1 \ldots P_nP_1$, состоящими каждая из n геодезических дуг ($P_1P_2, \ldots , P_nP_1$). Кроме того, очевидно, что максимум длины кривой этого нового покрытия не может превзойти L^*, а максимум длины геодезических дуг, составляющих эти кривые, меньше d.

Это преобразование составляет первый шаг к последовательности непрерывных изменений данного покрытия. Вторым шагом будет разделение всех кривых нового покрытия на n равных частей, начиная с середины дуги P_1P_2. Таким образом, мы получаем дуги $Q_1Q_2, \ldots , Q_nQ_1$ и переходим к третьему покрытию, а именно, к покрытию кривыми, состоящими из геодезических дуг $Q_1Q_2, \ldots , Q_nQ_1$, каждая из которых имеет длину меньше d, причем замкнутые кривые нового покрытия не будут по длине превосходить L^*. Эта деформация может быть произведена таким же образом, как первая.

Начатый таким образом процесс последовательного деления кривых покрытия на n частей и деформации покрытия может быть продолжен до бесконечности. В каждой данной стадии его отдельные геодезические дуги, из которых состоят кривые покрытия, имеют длину меньше, чем d, а длины самих кривых покрытия не превосходят L^*. Кроме того, результатом каждого шага будет уменьшение (или по крайней мере не увеличение) длины кривой.

Может случиться, что некоторые из промежуточных кривых обратятся в точки при этих преобразованиях, но это ни в какой мере не повлияет на наши рассуждения. Однако невозможно, чтобы максимальная длина кривых покрытия сделалась меньше d. Это легко видеть. В самом деле, в противном случае мы могли бы все кривые соответствующего покрытия деформировать в точки следующим образом: пусть каждая точка Q кривой $P_1 \ldots P_nP_1$ сдвигается к P_1 по единственной кратчайшей геодезической дуге, соединяющей ее с P_1, и притом так, что все точки всех кривых одновременно проходят пропорциональные расстояния. Таким образом, m-мерное покрытие делается самое большее $(m-1)$-мерным и не может проходить через все точки M, что противоречит сказанному выше.

В связи с этим последним рассуждением нужно заметить, что в каждой стадии производимых нами преобразований совокупность точек P_i является аналитическим $(m-1)$-мерным многообразием, и потому не возникает никаких трудных теоретико-множественных вопросов, связанных с размерностью.

Таким образом, максимальная длина L_p кривых p-го покрытия уменьшается (или по крайней мере не увеличивается) с увеличением p и стремится к положительному пределу $L \geqslant d$.

Легко показать теперь, что соответствующая последовательность кривых покрытия

$$P_1^{(p)} \dots P_n^{(p)} P_1^{(p)} \qquad (p = 1, 2, \dots),$$

длина которых как раз равна максимальной длине L_p, будет иметь предельную замкнутую геодезическую линию, имеющую длину L. Для этого мы сначала докажем следующую лемму, из которой все будет сразу следовать.

Лемма. *Возьмем какую-нибудь замкнутую кривую, состоящую из n равных дуг $P_1P_2, \dots, P_nP_1$, длиной каждая $\leqslant d$ и с общей длиною $\geqslant d$, и заменим ее кривой, состоящей из геодезических дуг, $P_1 \dots P_nP_1$ и затем эту последнюю заменим кривой, состоящей из геодезических дуг $Q_1 \dots Q_nQ_1$, где точки $Q_1, \dots, Q_n$ делят кривую $P_1 \dots P_nP_1$ на n равных частей, причем точка Q_1 является серединой дуги P_1P_2. Если внешний угол между двумя последовательными геодезическими линиями $P_{i-1}P_i$ и P_iP_{i+1} в какой-нибудь вершине превосходит $\delta > 0$, то разность между длиной первоначальной кривой и длиной последней кривой $(Q_1 \dots Q_nQ_1)$ будет превосходить некоторое определенное положительное число, зависящее только от δ.*

Прежде всего мы заметим, что каждая из двух замен не увеличивает общую длину кривой. Следовательно, лемма будет, действительно, справедлива, если первый шаг значительно уменьшит длину кривой. Предположим, что первый шаг уменьшает длину кривой очень мало. Так как n фиксировано раз навсегда, то это значит, что длина каждой из геодезических дуг P_iP_{i+1} почти равна длине первоначальной дуги P_iP_{i+1}. По теореме Осгуда в вариационном исчислении, первоначальные дуги должны быть весьма близки к новым геодезическим дугам, а эти последние должны иметь почти равную длину. Следовательно, точки Q_i, делящие новую кривую на n равных частей, лежат очень близко к серединам геодезических дуг P_iP_{i+1}. Отсюда следует, что если внешний угол в какой-нибудь вершине P_i превосходит δ, то сумма геодезических дуг $Q_{i-1}P_i$ и P_iQ_i будет превосходить геодезическую дугу $Q_{i-1}Q_i$ на некоторое определенное (зависящее от δ) положительное число. Отсюда непосредственно следует лемма. Таким образом, мы дали схему доказательства. Очевидно, что само доказательство носит такой характер, что подробная трактовка всех связанных с ним вопросов равномерности слишком удлинила бы его, однако приведенная схема доказательства дает достаточное представление об общем ходе рассуждения([12]).

Из этой леммы сразу следует доказываемое утверждение. В самом деле, если бы все внешние углы во всех вершинах ломаных, состоящих из геодезических дуг, не стремились равномерно к нулю, то длины кривых нашей последовательности бесконечное число раз уменьшались бы больше чем на некоторое определенное положительное число, что, разумеется, невозможно. Следовательно, эти внешние углы стремятся к нулю. Но точки $P_1^{(p)}$ имеют, по крайней мере, одну предельную точку P_1, и направления геодезических дуг имеют предельное направление, в силу чего существует предельная геодезическая линия, которая, разумеется, будет замкнута и как раз длины L.

Если m-мерная характеристическая поверхность M гомеоморфна m-мерной гиперсфере, то существует, по крайней мере, одно периодическое движение, получаемое вышеприведенным процессом.

Естественно ожидать, что такое движение будет минимаксного типа, но мы не будем заниматься этим вопросом. В простейшем случае двух степеней свободы это предположение оказывается правильным.

§ 8. Обобщения Морса. Методы минимума и минимакса могут дать нам только некоторые типы периодических движений. Недавняя замечательная работа Морса[1] заставляет предполагать с большой долей вероятности, что все типы периодических движений могут быть обнаружены посредством надлежащего обобщения этих методов, основанного на более глубоком применении принципов топологии. Кроме того, числа периодических движений разных типов (из которых типы минимума и минимакса являются простейшими) связаны между собой различными соотношениями, открытыми Морсом. До сих пор, однако, применение этих соотношений подробно развито им только для случаев динамических систем с двумя степенями свободы, рассматриваемых в окрестности периодического движения.

---

[1]См. его статью: *Morse*, «Relations Between the Critical Points of a Function of Independent Variables», Trans. Amer. Math. Soc., vol. 27, 1925, а также статью «A Theory of the Ordinary Problem of the Calculus of Variations in the Large». См. также книгу: *Morse*, «The Calculus of Variations in the Large», Amer. Math. Soc. Coll. Publ., vol. XVIII, 1934.

§ 9. Метод аналитического продолжения. При методе аналитического продолжения Хилла и Пуанкаре мы исходим из известного периодического движения и получаем аналитическое продолжение его при изменении параметра c.

Для определенности мы будем рассматривать систему уравнений Гамильтона:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, \ldots, m),$$

где H есть аналитическая функция от $p_1, \ldots, q_m, t, c$, периодическая относительно t с периодом 2π. Кроме того, мы предположим, что начало координат есть точка обобщенного равновесия при $c = 0$.

Посредством надлежащего предварительного преобразования переменных, подобного тому, которое мы делали в § 7 главы III, мы можем при $c = 0$ привести H к нормальному виду:

$$H = -\sum_{j=1}^{m} \lambda_j p_j q_j + H_3 + \cdots,$$

если $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ различны.

Но общее решение данной системы может быть написано в виде

$$p_i = p_i(p_1^0, \ldots, q_m^0, t, c), \quad q_i = q_i(p_1^0, \ldots, q_m^0, t, c)$$

(для $i = 1, \ldots, m$), где $p_1^0, \ldots, q_m^0$ обозначают значения соответственно $p_1, \ldots, q_m$ при $t = 0$.

Условие периодичности в этом случае выражается системой $2m$ уравнений:

$$p_i(p_1^0, \ldots, q_m^0, 2\pi, c) = p_i^0, \; q_i(p_1^0, \ldots, q_m^0, 2\pi, c) = q_i^0 \quad (i = 1, \ldots, m).$$

В эти формулы, как мы видели в главе I (§ 5), все переменные входят аналитически. Но для $c = 0$ эта система уравнений по предположению имеет решение

$$p_1^0 = \ldots = q_m^0 = 0.$$

Следовательно, будет существовать единственное решение $p_1^0, \ldots, q_m^0$, аналитическое относительно c, при условии, что функциональный определитель

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial p_1}{\partial p_1^0} - 1 & \dfrac{\partial p_1}{\partial p_2^0} & \cdots & \dfrac{\partial p_1}{\partial q_m^0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial q_m}{\partial p_1^0} & \dfrac{\partial q_m}{\partial p_2^0} & \cdots & \dfrac{\partial q_m}{\partial q_m^0} - 1 \end{vmatrix}$$

не обращается в нуль при $t = 2\pi$, $c = 0$. Но $2m$ функций

$$\frac{\partial p_1}{\partial p_i^0}, \ldots, \frac{\partial q_m}{\partial p_i^0}$$

($i = 1, \ldots, m$) образуют решение уравнений вариации, так же как и функции

$$\frac{\partial p_1}{\partial q_i^0}, \ldots, \frac{\partial q_m}{\partial q_i^0}$$

($i = 1, \ldots, m$). Все эти функции, кроме того, обращаются в нуль при $t = 0$, кроме $\partial p_i/\partial p_i^0$ и $\partial q_i/\partial q_i^0$, которые равны 1 для $i = 1, \ldots, m$.

Известный нам уже вид квадратичных членов H при $c = 0$ дает уравнения вариации:

$$\frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i, \quad \frac{dz_i}{dt} = -\lambda_i z_i \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

где y_i, z_i соответствуют p_i, q_i. Следовательно, вышеприведенные решения имеют следующий вид:

$$\begin{matrix} e^{\lambda_1 t}, & 0, & \ldots, & 0, \\ 0, & e^{\lambda_2 t}, & \ldots, & 0, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & e^{-\lambda_m t}, \end{matrix}$$

где единственными отличными от нуля элементами будут те, которые лежат на главной диагонали, а именно:

$$e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_m t}, \quad e^{-\lambda_1 t}, \ldots, e^{-\lambda_m t}.$$

Следовательно, выписанный выше определитель равен:

$$\prod_{i=1}^{m} (e^{2\pi\lambda_i} - 1)(e^{-2\pi\lambda_i} - 1)$$

и отличен от нуля, если только какой-нибудь из множителей λ_i не будет целым кратным $\sqrt{-1}$.

Таким образом, при этих условиях мы имеем аналитическое семейство решений

$$p_1(t, c), \ldots, q_m(t, c),$$

периодических с периодом 2π относительно t, что и требовалось доказать.

Ограничения, наложенные нами на динамическую систему при этом доказательстве, могут быть значительно смягчены. Прежде всего подобный нормальный вид решения существует и в том случае, когда не все множители $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ различны. Пусть, например, $\lambda_1 = \lambda_2$, в то время как $\lambda_s, \ldots, \lambda_m$ отличны друг от друга и от λ_1. Вообще говоря, первое и второе решения уравнений вариации имеют теперь вид:

$$\begin{gathered} 0, \quad e^{\lambda_1 t}, \quad 0, \ldots, 0, \\ e^{\lambda_1 t}, \quad te^{\lambda_1 t}, \quad 0, \ldots, 0. \end{gathered}$$

Также $(m+1)$-е и $(m+2)$-е решения имеют вид:

$$\begin{gathered} 0, \quad e^{-\lambda_1 t}, \quad 0, \ldots, 0, \\ e^{-\lambda_1 t}, \quad te^{-\lambda_1 t}, \quad 0, \ldots, 0 \end{gathered}$$

соответственно. Если переставим первый и второй ряд, а также $(m+1)$-й и $(m+2)$-й ряд, то получим определитель, все элементы которого ниже диагонали обращаются в нуль, а все элементы главной диагонали и, следовательно, он сам не равны нулю, если только среди множителей λ_i нет ни одного, который был целым кратным $\sqrt{-1}$([13]).

Но такой множитель указывал бы ни более, ни менее, как на существование периодического решения уравнений вариации с тем же периодом 2π, что и данное движение. Будем называть точку обобщенного равновесия «простой», если для нее не существует решения уравнений вариации с тем же периодом, что у самой точки обобщенного равновесия, и «кратной», если такое решение существует.

Аналитическое продолжение обобщенного равновесия всегда возможно, пока равновесие остается простым.

Заменой переменных

$$p_i = p_i(t, c) + P_i, \quad q_i = q_i(t, c) + Q_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

мы получаем новые уравнения Гамильтона:

$$\frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial Q_i}, \quad \frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial P_i} \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

где

$$H^* = H + \sum_{j=1}^{m} (p'_j Q_j - q'_j P_j).$$

Они принадлежат к тому же типу, что прежние, но имеют точку обобщенного равновесия в начале координат *при всех малых значениях параметра c*. Решение в формальных рядах такой системы дифференциальных уравнений, разумеется, содержит параметр c. Именно такого рода формальные ряды оказываются часто полезными в приложениях; при этом равенство нулю параметров, аналогичных c, может соответствовать специальному интегрируемому случаю динамической проблемы, когда периодическое движение, из которого мы исходим, может быть выражено в явном виде.

§ 10. Метод преобразования Пуанкаре. Иногда динамической проблеме может быть придана другая, совершенно новая форма. Решения n дифференциальных уравнений первого порядка с правыми частями, не зависящими от t, можно изобразить в виде постоянного n-мерного потока жидкости таким образом, что координатами движущейся точки жидкости будут являться зависимые переменные. Предположим теперь, что в этом «многообразии состояний движения» может быть построена замкнутая $(n-1)$-мерная аналитическая поверхность S такая, что каждая линия потока пересекает S по крайней мере один раз в течение любого промежутка времени τ и притом каждый раз в одном направлении. Тогда такую поверхность S можно назвать «секущей поверхностью» («surface of section»). Если из точки P, лежащей в S, мы будем двигаться по линии потока, проходящей через P в направлении увеличивающегося времени, то мы пересечем S снова в некоторой точке P_1. Таким образом, определяется одно-однозначное аналитическое преобразование секущей поверхности S в себя, а именно, преобразование T, переводящее каждую точку P в соответственную точку P_1.

Отсюда мы видим, что можно связать данную динамическую проблему с дискретным преобразованием T замкнутой $(n-1)$-мерной поверхности в себя. Свойства движения в этом случае отражаются в свойствах преобразования T. Например, периодичность движения, изображаемого в многообразии состояний движения замкнутой кривой, пересекающей S в точках $P, P_1, \ldots, P_{k-1}$, отражается в символических равенствах:

$$P_1 = T(P), \quad P_2 = T(P_1), \ \ldots, \quad P = T(P_{k-1}),$$

означающих, что $P, P_1, \ldots, P_{k-1}$ все суть инвариантные точки по отношению к k-й степени преобразования T. Обратно, если P инвариантно по отношению к T^k, то через P проходит соответствующее периодическое движение, пересекающее S в точках $P, T(P), \ldots, T^{k-1}(P)$.

Секущая поверхность в вышеприведенном смысле будет существовать только в том случае, если в многообразии состояний движения существует угловая координата φ, определенная таким образом, что она постоянно возрастает вдоль всякой линии потока. В необходимости этого условия можно убедиться путем следующего рассуждения. Если секущая поверхность S существует, то определим φ как равную нулю на этой поверхности и равную $\frac{2\pi t}{\tau}$ в любой другой точке P, где τ — полный интервал времени, необходимый для того, чтобы пройти от S до S вдоль той линии потока, на которой P лежит. Очевидно, что φ — аналитическая функция([14]) положения точки, увеличивающаяся ровно на 2π между двумя пересечениями линии потока с S. Следовательно, угловая координата существует. Обратно, если такая координата существует, то уравнение $\varphi = 0$ даст секущую поверхность.

Необходимым и достаточным условием существования замкнутой секущей поверхности является существование переменного угла φ в многообразии состояний движения, постоянно возрастающего вдоль всякой линии потока.

Точнее говоря, должно иметь место дифференциальное неравенство

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j X_j > 0,$$

где Φ_i удовлетворяют условию интегрируемости

$$\frac{\partial \Phi_i}{dx_j} = \frac{\partial \Phi_j}{dx_i} \quad (i,\, j = 1,\, \ldots\, ,\, n),$$

а $X_1, \ldots , X_n$ обозначают, как обычно, правые части дифференциальных уравнений.

В некоторых динамических проблемах мы встречаемся с крайне интересным типом секущих поверхностей, имеющих границы. Границы эти суть замкнутые аналитические $(n-2)$-мерные поверхности, состоящие из линий потока, и всякая линия потока, не лежащая на границе S, пересекает S по крайней мере однажды в течение каждого достаточно большого интервала времени τ и притом всегда в одном направлении.

В случае, когда n равно 3, секущая поверхность — двумерная, и границами ее поэтому будут замкнутые кривые, соответствующие отдельным периодическим движениям. Но как раз в случае гамильтоновой или пфаффовой динамической проблемы с двумя степенями свободы применение интеграла энергии понижает порядок системы до $n = 3$. Для таких проблем, по-видимому, вообще существует секущая поверхность, что будет видно в следующей главе[1]. Пример, приведенный в

[1]См. мою цитированную статью (§ 22–29).

следующем параграфе, показывает возможность подобной секущей поверхности и для случая числа степеней свободы, большего двух. Однако в этом случае нам приходится иметь дело с $(n-2)$-мерными аналитическими замкнутыми поверхностями, состоящими из линий потока, а такие поверхности, вообще говоря, по-видимому, не существуют.

Весьма большой интерес представляет также случай открытой аналитической секущей поверхности вроде той, которую Купмен[1] получил во внешнем случае ограниченной проблемы трех тел.

Во всех этих трех случаях очевидно, что посредством приведения динамической задачи к проблеме преобразования определение периодического движения может быть сведено к задаче разыскания инвариантных точек на секущей поверхности S при преобразовании T и его степеней.

§ 11. Пример ограниченной секущей поверхности. Следующая динамическая проблема дает пример, показывающий, что подобные секущие поверхности могут существовать для гамильтоновых проблем с более чем двумя степенями свободы: частица P в консервативном поле сил в пространстве движется таким образом, что сила всегда имеет положительную составляющую, направленную к некоторой определенной плоскости для точек, лежащих вне этой плоскости.

В этом случае уравнения движения образуют систему шестого порядка, а именно:

$$\frac{dx}{dt}=x', \qquad \frac{dy}{dt}=y', \qquad \frac{dz}{dt}=z',$$
$$\frac{dx'}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{dy'}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{dz'}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial z},$$

где x, y, z — прямоугольные координаты точки P в пространстве и где за фиксированную плоскость мы можем принять плоскость $z=0$. Значит, $\partial U/\partial z$ имеет одинаковый знак с z, так что

$$\frac{\partial U}{\partial z}=\lambda z,$$

где λ — положительная аналитическая функция координат x, y, z(15). Интеграл энергии можно представить в виде:

$$\frac{1}{2}\left(x'^2+y'^2+z'^2\right)+U=0$$

[1] *B. O. Koopman*, «On Rejection to Infinity and Exterior Motion in the Restricted Problem of Three Bodies», Trans. Amer. Math. Soc., vol. 29, 1927.

при условии, что мы включим в U произвольную постоянную. Таким образом мы сосредоточим внимание на совокупности движений, удовлетворяющих этому последнему условию, понизив этим способом порядок системы с шестого на пятый. Мы будем рассматривать только тот случай, когда поверхность $U = 0$ представляет собой замкнутую односвязную поверхность в пространстве, пересекающую плоскость $z = 0$ по овалу, причем $U < 0$ внутри поверхности. Частица в этом случае обязательно должна лежать в области $U \leqslant 0$.

Пятимерное многообразие M состояний движения состоит из шестерок чисел (x, y, z, x', y', z'), связанных между собой интегральным соотношением. Избранная секущая поверхность S будет в этом случае представлять собой четырехмерную часть многообразия M, в которой z обращается в нуль и $z' = dz/dt \geqslant 0$. Трехмерная граница поверхности S, определяемая равенствами $z = z' = 0$, очевидно, состоит из линий потока, так как точка, для которой $z = z' = 0$, при каком-нибудь значении t_0 времени t будет иметь $z = z' = 0$ при любом t.

Но дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \lambda z = 0$$

показывает сразу, что z обращается в нуль по крайней мере однажды в достаточно большом интервале времени τ и не может обращаться в нуль дважды в сколь угодно малом интервале времени([16]). Следовательно, если мы будем двигаться от какой-нибудь точки, лежащей на S, вдоль линии потока в многообразии состояний движения, то пересечем S опять в течение промежутка времени, равного 2τ, в том же направлении, так как в S мы имеем $dz/dt > 0$.

Очевидно, что таким образом мы устанавливаем одно-однозначное аналитическое преобразование внутренних точек поверхности S друг в друга. Кроме того, если z, z' малы, то мы имеем приближенно

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \lambda(x, y, 0)z = 0,$$

где x, y суть координаты движения в плоскости вблизи данного движения. Но частное решение этого уравнения, для которого $z = 0$ при $x = x_0$, $y = y_0$, $x' = x'_0$, $y' = y'_0$, причем, разумеется,

$$\frac{1}{2}({x'_0}^2 + {y'_0}^2) + U(x_0, y_0, 0) = 0$$

обращается в нуль в точке x_1, y_1, x'_1, y'_1, причем

$$\frac{1}{2}({x'_1}^2 + {y'_1}^2) + U(x_1, y_1, 0) = 0,$$

где x_1, y_1, x_1', y_1', очевидно, суть аналитические функции от x_0, y_0, x_0', y_0'. Таким образом, мы видим, что преобразование T поверхности S можно рассматривать как одно-однозначное и непрерывное также и на границе S, при условии, что мы определим T на границе как преобразующее точку

$$x_0,\ y_0,\ 0,\ x_0',\ y_0',\ 0$$

поверхности S в точку

$$x_1,\ y_1,\ 0,\ x_1',\ y_1',\ 0.$$[17]

Мы покажем теперь с помощью этого приведения к проблеме преобразования, что всегда существует периодическое движение, дважды пересекающее плоскость $z = 0$, если только нет кратного периодического движения, лежащего в плоскости $z = 0$.

Для того чтобы доказать это, рассмотрим связность секущей поверхности S. Очевидно, что мы можем так преобразовать переменные x, y в новые $\overline{x}$, $\overline{y}$, что овал $z = 0$, $U \leqslant 0$ перейдет в круг

$$\overline{x}^2 + \overline{y}^2 \leqslant 1.$$

Если мы напишем теперь

$$U = \frac{1}{2} p(\overline{x}, \overline{y})(\overline{x}^2 + \overline{y}^2 - 1),$$

где $p > 0$ внутри этого круга, и если обозначим, далее,

$$x' = \sqrt{p}\,\overline{x}', \quad y' = \sqrt{p}\,\overline{y}', \quad z' = \sqrt{p}\,\overline{z}',$$

то уравнение поверхности S принимает вид

$$\overline{x}'^2 + \overline{y}'^2 + \overline{z}'^2 + \overline{x}^2 + \overline{y}^2 = 1 \quad (\overline{z}' \geqslant 0),$$

что может быть переписано:

$$\overline{z}' = \left(1 - \overline{x}^2 + \overline{y}^2 - \overline{x}'^2 - \overline{y}'^2\right)^{1/2}.$$

Следовательно, внутренние точки и граница S находятся в одно-однозначном и непрерывном соответствии с внутренними точками и границей четырехмерной гиперсферы:

$$\overline{x}^2 + \overline{y}^2 + \overline{x}'^2 + \overline{y}'^2 = 1.$$

Преобразование T определяет одно-однозначное непрерывное отображение этой гиперсферы в себя.

Но по известной теореме, принадлежащей Брауверу, такое преобразование оставляет инвариантной какую-нибудь точку. Применяя эту теорему к рассматриваемой проблеме, мы заключаем, что существует периодическое движение, пересекающее $z = 0$ дважды (случай внутренней инвариантной точки), или же существует периодическое движение $z = 0$ (случай инвариантной точки на границе). Но этот последний случай есть тот, когда мы получаем уравнения $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $x_1' = x_0'$, $y_1' = y_0'$. Это значит, что уравнения вариации имеют периодическое решение вдоль этого плоского периодического движения, в котором компонента при z не равна нулю. Следовательно, периодическое движение кратно, и в некотором смысле мы имеем все-таки периодическое движение в бесконечно малой окрестности плоскости $z = 0$, пересекающее эту плоскость дважды. Представляется в высшей степени вероятным, что фактическое периодическое движение, дважды пересекающее плоскость $z = 0$, должно существовать во всех случаях.

Глава 6
Приложения геометрической теоремы Пуанкаре

§ 1. Периодические движения вблизи обобщенного равновесия ($m = 1$). Последняя геометрическая теорема Пуанкаре и ее обобщения[1] доставляют нам дополнительное орудие для установления существования периодических движений. До сих пор еще не найдено какого-либо обобщения этой теоремы на большее число измерений, так что ее применение ограничивается динамическими системами с двумя степенями свободы. В этой главе мы намереваемся изложить некоторые основные идеи, содержащиеся в этой теореме и ее применениях.

Напомним, что движение вблизи периодического движения какой-нибудь гамильтоновой или пфаффовой системы с m степенями свободы, не содержащей времени t в явном виде, может быть приведено к движению подобной же системы, имеющей только $m-1$ степеней свободы, но содержащей независимую переменную периодически с периодом 2π.

Само периодическое движение будет в этой новой системе обобщенным равновесием. Это приведение выполняется при помощи аналитического приема, указанного выше (глава IV, § 1).

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о существовании периодических движений с периодом $2k\pi$ в окрестности точки обобщенного равновесия для систем с одной степенью свободы ($m = 1$). Мы докажем существование бесконечного числа таких близких периодических движений в общем случае устойчивого равновесия при помощи соображений, которые хотя и не опираются явно на геометрическую теорему Пуанкаре, но повторяют в точности рассуждения, доказывающие эту теорему в некоторых частных случаях. Ниже (в § 3) эти результаты будут приложены к первоначальной динамической проблеме с двумя степенями свободы.

Обозначим единственную пару переменных через p, q, так что гамильтонова главная функция H будет зависеть от p, q, t, являясь периодической функцией от t периода 2π, и вместе со своими первыми производными она будет обращаться в нуль в начале координат, т.е. при $p = q = 0$ и всех значениях t.

---

[1]См. мою статью «An Extension of Poincare's Last Geometric Theorem», Acta Mathematica, vol. 47, 1926([1]).

Если теперь (p_0, q_0) есть какая-нибудь точка вблизи начала координат, то существует единственное решение:

$$p = f(p_0, q_0, t), \quad q = g(p_0, q_0, t),$$

принимающее при $t = 0$ значения (p_0, q_0); это решение аналитично в p_0, q_0, t при t сколь угодно большом и p_0, q_0 достаточно малых. Обозначим через p_1, q_1 значения p, q при t, равном полному периоду 2π. Иначе говоря, имеем

$$p_1 = f(p_0, q_0, 2\pi), \quad q_1 = g(p_0, q_0, 2\pi),$$

где f и g — аналитические функции от p_0, q_0, обращающиеся в нуль вместе с этими переменными.

Таким путем мы определяем преобразование T, имеющее такую же природу, что и преобразование секущей поверхности, рассмотренное в предыдущей главе (§ 10). В самом деле, если мы введем новую зависимую переменную $r = t$, то система двух уравнений Гамильтона может быть заменена эквивалентной системой:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dr}{dt} = 1,$$

где H — функция от p, q, r периодическая по r с периодом 2π. Для этих уравнений многообразие состояний движения будет 3-мерным пространством с координатами p, q, r, в котором ось r изображает периодическое движение, а именно то, которое отвечает обобщенному равновесию в первоначальной системе; не нужно забывать, что r является угловой координатой. Далее, как мы видели выше, поверхность $\varphi = r = 0$ будет служить секущей поверхностью, но с той разницей, что мы вынуждены ограничиться некоторой окрестностью начала координат. Исходя из точки $(p_0, q_0, 0)$ на этой секущей поверхности и двигаясь вдоль линии потока, мы придем в точку $(p_1, q_1, 2\pi)$, т.е. в $(p_1, q_1, 0)$. Таким образом, написанное выше преобразование действительно является преобразованием T секущей поверхности, которое, однако, только локально определено. Такие «локальные секущие поверхности» могут быть построены в окрестностях периодического движения в любой динамической проблеме; достаточно взять элемент поверхности, пересекающий, но не касательный к соответственной линии потока в многообразии состояний движения.

Но поток, определяемый тремя вышеприведенными уравнениями, представляет собой движение несжимаемой жидкости, так как расхождение правых частей уравнений равно нулю. Следовательно, если мы (посмотрим какую-нибудь трубку, состоящую из отрезков линий потока между параллельными плоскостями $r = 0$ и $r = 2\pi$, которая движется постоянно с единичной скоростью в направлении оси r, то увидим, что через первое основание в течение времени Δt пройдет объем, равный приближенно $\sigma_0 \Delta t$ (где σ_0 есть площадь первого основания), а через второе основание за то же время — объем, равный приближенно $\sigma_1 \Delta t$ (σ_1 — площадь второго, основания), и эти объемы должны быть равны. Если Δt стремится к нулю, то мы получим в пределе $\sigma_0 = \sigma_1$. Так как σ_0 — произвольная площадка на плоскости $r = 0$, то из предыдущих рассуждений очевидно, что T должно быть сохраняющим площадь преобразованием переменных p_0, q_0. Это важное свойство преобразования T соответствует некоторому общему свойству преобразований, связанных с динамическими проблемами.

Необходимо теперь формулировать условия, которые должны быть наложены на обобщенное равновесие для того, чтобы мы могли сделать требуемое заключение о существовании бесконечного множества периодических движений в окрестности точки обобщенного равновесия. Прежде всего мы предполагаем, что обобщенное равновесие принадлежит к общему устойчивому типу и что оно обладает полной устойчивостью. Значение нормального вида уравнений (глава III, § 9) заключается в том, что решение их может быть написано под видом:

$$p = p_0 e^{M(p_0 q_0)t} + \Phi, \quad q = q_0 e^{-M(p_0 q_0)t} + \Psi$$

соответствующим образом выбранных сопряженных переменных p, q. Здесь Φ и Ψ являются сходящимися степенными рядами относительно p_0, q_0 с начальными членами сколь угодно высокой степени $2\mu + 1$. Все коэффициенты этих рядов суть аналитические функции t.

Эти ряды сходятся абсолютно и равномерно для любого фиксированного промежутка значений t, например, для $|t| \leqslant 2\pi$, если только p_0, q_0 достаточно малы. За функцию M можно взять полином степени не выше μ относительно произведения p_0, q_0, с чисто мнимыми постоянными коэффициентами, т. е. вида

$$\lambda + l p_0 q_0 + \ldots + s p_0^\mu q_0^\mu,$$

где λ есть множитель. По условию устойчивости $\lambda/\sqrt{-1}$ — иррациональное число, и, в частности, $\lambda = 0$. Наше второе условие будет заключаться в том, что l не равно нулю. В случае, если l есть нуль, но какой-нибудь другой коэффициент в M отличен от нуля, может быть применено по существу то же рассуждение, что и в случае $l \neq 0$. Таким образом, единственным исключительным случаем будет тот, когда формальный ряд M в полностью нормализованных уравнениях сводится к постоянной, равной λ. Это будет весьма исключительный случай, и можно построить примеры, показывающие, что к этому случаю заключение о существовании бесконечного множества периодических движений в окрестности данного периодического движения неприменимо (см. § 4 этой главы).

Нормальный вид уравнений дает нам средство для изучения преобразования T. Свойство преобразования T, которое нам необходимо для наших целей в настоящий момент, заключается в следующей лемме, доказательство которой мы откладываем до следующего параграфа.

Лемма. *Если $l \neq 0$, то при соответствующем выборе переменных p, q мы можем для любого достаточно малого положительного числа ε найти такое целое положительное число n, что всякое преобразование T^ν ($\nu \leqslant n$) преобразует круг $r \leqslant \varepsilon(^2)$, с центром в инвариантной точке $r = 0$, в область, лежащую в круге радиуса 2ε, причем угловое вращение, производимое преобразованием T^n, которое равно $2\pi n\lambda/\sqrt{-1}$ при $r = 0$, возрастает вместе с r вдоль любого радиуса нашего круга $r \leqslant \varepsilon$, достигая при $r = \varepsilon$ величины не менее чем на 2π большей, чем при $r = 0$.*

Пусть r, ϑ будут полярными координатами точки и пусть (r_n, ϑ_n) обозначает образ точки (r, ϑ) при преобразовании T^n, причем прямоугольные координаты p, q, радиус ε и целое число n выбраны так, как требуется только что приведенной леммой. Для любого постоянного ϑ_n разность $\vartheta_n - \vartheta_0$ будет возрастать, таким образом, от $2\pi n\lambda/\sqrt{-1}$ при $r = 0$ до величины, по крайней мере на 2π большей при $r = \varepsilon$. Следовательно, если обозначим через $2k\pi$ наименьшее целое кратное 2π, большее, чем $2\pi n\lambda/\sqrt{-1}$, то уравнение

$$\vartheta_n - \vartheta_0 = 2k\pi$$

будет иметь единственное решение вдоль каждого радиуса-вектора. Следовательно, аналитическую кривую C, изображаемую этим уравнением, каждый радиус-вектор встретит в одной и только одной точке.

Рассмотрим теперь образ C_n этой кривой при преобразовании T^n; кривая C_n пересечет кривую C в некоторой точке Q, так как если бы C_n лежала полностью внутри или вне C, то T^n не могло бы быть преобразованием, сохраняющим площади в первоначальных координатах. Точка Q является образом при преобразовании T^n некоторой точки P, лежащей тоже на C. Кроме того P и Q имеют одинаковое ϑ по определению кривой C. Следовательно, P и Q должны совпадать, и точка P инвариантна по отношению к преобразованию T^n. Так как ε сколько угодно мало, то мы получаем требуемый результат.

В случае обобщенного равновесия общего устойчивого типа для гамильтоновой проблемы с одной степенью свободы существует бесконеч-

ное множество периодических движений в любой окрестности точки обобщенного равновесия.

§ 2. Доказательство леммы § 1. Определим функцию $F(u)$ из уравнения

$$luF^2(u) = M(u) - \lambda.$$

Очевидно, что $F(u)$ есть квадратный корень из вещественного полинома степени $\mu - 1$ со свободным членом, равным единице. Если мы положим, далее,

$$\overline{p} = F(pq)p, \quad \overline{q} = F(pq)q,$$

то найдем, что вышеуказанный нормальный вид для T еще больше упрощается и приводится к

$$\overline{p} = \overline{p}_0 e^{(\lambda + l\overline{p}_0\overline{q}_0)t} + \overline{\Phi}, \quad \overline{q} = \overline{q}_0 e^{-(\lambda + l\overline{p}_0\overline{q}_0)t} + \overline{\Psi},$$

так что все члены M, кроме первых двух, обращаются в нуль. После того, как мы заменим $\overline{p}$, $\overline{q}$ соответственными вещественными переменными $\dfrac{\overline{p}+\overline{q}}{2}$ и $\dfrac{\overline{p}-\overline{q}}{2}$, которые мы для простоты будем снова обозначать через p, q и введем обозначения σ и s для вещественных констант $2\pi\lambda/\sqrt{-1}$ и $2\pi l/\sqrt{-1}$ соответственно, мы получим следующие формулы, определяющие преобразование T:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= p_0\cos(\sigma + sr_0^2) - q_0\sin(\sigma + sr_0^2) + P \\ q_1 &= p_0\sin(\sigma + sr_0^2) + q_0\cos(\sigma + sr_0^2) + Q \end{aligned}\right\} \quad (r_0^2 = p_0^2 + q_0^2), \tag{1}$$

где P, Q суть вещественные степенные ряды относительно p_0, q_0 с начальными членами не ниже $(2\mu+1)$-го порядка. Очевидно теперь, что по отношению к этим переменным T будет обыкновенным вращением на угол $\sigma + sr_0^2$ с точностью до членов порядка $2\mu+1$ относительно расстояния точки до начала. Именно эти переменные мы примем в дальнейших рассуждениях. Если $l \neq 0$, то мы можем считать s положительным.

Следовательно, мы имеем в некоторой фиксированной окрестности начала и для фиксированного K:

$$|P|,\ |Q| \leqslant Kr_0^{2\mu+1}. \tag{2}$$

Из вышеприведенных формул находим тотчас же

$$r_1^2 = r_0^2 + R, \tag{3}$$

сходится для достаточно малых r_0 его частные производные представляются производными рядами подобного же вида. Формула (6) показывает, что при $r_0 = 0$ мы имеем $\vartheta = \vartheta_0 + n\sigma$, а при $r_0 > 0$ разность $\vartheta_n - \vartheta_0 - n\sigma$ может быть сделана сколь угодно большой, если мы возьмем n достаточно большим, но в пределах применимости неравенств (5)([5]).

С помощью формул (3) и (6) получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\left|\frac{\partial\rho_1}{\partial\rho_0} - 1\right| \leqslant A\rho_0^{\mu}, && \left|\frac{\partial\rho_1}{\partial\vartheta_0}\right| \leqslant A\rho_0^{\mu+1}, \\ &\left|\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\rho_0} - s\right| \leqslant A\rho_0^{\mu-1}, && \left|\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\vartheta_0} - 1\right| \leqslant A\rho_0^{\mu}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где ρ обозначает r^2, а A есть надлежащая положительная константа.

Но тождества

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho_n}{\partial\rho_0} &= \frac{\partial\rho_n}{\partial\rho_{n-1}}\frac{\partial\rho_{n-1}}{\partial\rho_0} + \frac{\partial\rho_n}{\partial\vartheta_{n-1}}\frac{\partial\vartheta_{n-1}}{\partial\rho_0}, \\ \frac{\partial\vartheta_n}{\partial\rho_0} &= \frac{\partial\vartheta_n}{\partial\rho_{n-1}}\frac{\partial\rho_{n-1}}{\partial\rho_0} + \frac{\partial\vartheta_n}{\partial\vartheta_{n-1}}\frac{\partial\vartheta_{n-1}}{\partial\rho_0} \end{aligned}$$

могут быть переписаны в виде

$$\left.\begin{aligned} u_n &= (1+\varepsilon_1)u_{n-1} + \varepsilon_2 v_{n-1}, \\ v_n &= (s+\varepsilon_3)u_{n-1} + (1+\varepsilon_4)v_{n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где мы обозначаем

$$u_n = \frac{\partial\rho_n}{\partial\rho_0}, \quad v_n = \frac{\partial\vartheta_n}{\partial\rho_0},$$

в то время как из неравенств (5) и (7) следует для $n \leqslant N\rho_0^{-1}$

$$\begin{aligned} &|\varepsilon_1| \leqslant 2^{2\mu}A\rho_0^{\mu}, && |\varepsilon_2| \leqslant 2^{2\mu+2}A\rho_0^{\mu+1}, \\ &|\varepsilon_3| \leqslant 2^{2\mu-2}A\rho_0^{\mu-1}, && |\varepsilon_4| \leqslant 2^{2\mu}A\rho_o^{\mu}. \end{aligned}$$

Эти уравнения (8) позволяют нам определить u_n, v_n последовательно для $n = 1, 2, \ldots$ с начальными условиями $u_0 = 1$, $v_0 = 0$.

Пренебрежем теперь на мгновение малыми членами в этих уравнениях (8). Они тогда принимают вид

$$u_n = u_{n-1}, \quad v_n = su_{n-1} + v_{n-1},$$

сходится для достаточно малых r_0 его частные производные представляются производными рядами подобного же вида. Формула (6) показывает, что при $r_0 = 0$ мы имеем $\vartheta = \vartheta_0 + n\sigma$, а при $r_0 > 0$ разность $\vartheta_n - \vartheta_0 - n\sigma$ может быть сделана сколь угодно большой, если мы возьмем n достаточно большим, но в пределах применимости неравенств (5)([5]).

С помощью формул (3) и (6) получаем:

$$\left.\begin{aligned} \left|\frac{\partial\rho_1}{\partial\rho_0} - 1\right| &\leqslant A\rho_0^{\mu}, & \left|\frac{\partial\rho_1}{\partial\vartheta_0}\right| &\leqslant A\rho_0^{\mu+1}, \\ \left|\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\rho_0} - s\right| &\leqslant A\rho_0^{\mu-1}, & \left|\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\vartheta_0} - 1\right| &\leqslant A\rho_0^{\mu}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где ρ обозначает r^2, а A есть надлежащая положительная константа.

Но тождества

$$\frac{\partial\rho_n}{\partial\rho_0} = \frac{\partial\rho_n}{\partial\rho_{n-1}}\frac{\partial\rho_{n-1}}{\partial\rho_0} + \frac{\partial\rho_n}{\partial\vartheta_{n-1}}\frac{\partial\vartheta_{n-1}}{\partial\rho_0},$$
$$\frac{\partial\vartheta_n}{\partial\rho_0} = \frac{\partial\vartheta_n}{\partial\rho_{n-1}}\frac{\partial\rho_{n-1}}{\partial\rho_0} + \frac{\partial\vartheta_n}{\partial\vartheta_{n-1}}\frac{\partial\vartheta_{n-1}}{\partial\rho_0}$$

могут быть переписаны в виде

$$\left.\begin{aligned} u_n &= (1+\varepsilon_1)u_{n-1} + \varepsilon_2 v_{n-1}, \\ v_n &= (s+\varepsilon_3)u_{n-1} + (1+\varepsilon_4)v_{n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где мы обозначаем

$$u_n = \frac{\partial\rho_n}{\partial\rho_0}, \quad v_n = \frac{\partial\vartheta_n}{\partial\rho_0},$$

в то время как из неравенств (5) и (7) следует для $n \leqslant N\rho_0^{-1}$

$$|\varepsilon_1| \leqslant 2^{2\mu}A\rho_0^{\mu}, \qquad |\varepsilon_2| \leqslant 2^{2\mu+2}A\rho_0^{\mu+1},$$
$$|\varepsilon_3| \leqslant 2^{2\mu-2}A\rho_0^{\mu-1}, \quad |\varepsilon_4| \leqslant 2^{2\mu}A\rho_o^{\mu}.$$

Эти уравнения (8) позволяют нам определить u_n, v_n последовательно для $n = 1, 2, \ldots$ с начальными условиями $u_0 = 1$, $v_0 = 0$.

Пренебрежем теперь на мгновение малыми членами в этих уравнениях (8). Они тогда принимают вид

$$u_n = u_{n-1}, \quad v_n = su_{n-1} + v_{n-1},$$

откуда, исключая u, получаем:

$$\Delta^2 v_n = v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n = 0.$$

Легко убедиться в том, что в результате исключения u из уравнений (8) получается подобным же образом

$$\Delta^2 v_n = \varepsilon_5 \Delta v_n + \varepsilon_6 v_n, \tag{9}$$

где для ε_5, ε_6 имеем неравенства:

$$|\varepsilon_5|,\ |\varepsilon_6| \leqslant B\rho_0^{\mu-1} \quad (n \leqslant N\rho_0^{-\mu}) \tag{10}$$

в малой окрестности начала координат. Кроме того, начальные условия могут быть записаны в виде

$$v_0 = 0, \quad \Delta v_0 = s + \varepsilon_3^0, \tag{11}$$

где ε_3^0 обозначает ε_3, когда мы заменим ρ_{n-1}, ϑ_{n-1} соответственно через ρ_0, ϑ_0.

Очевидно, что $v_1 = s + \varepsilon_3^0$ положительно и, следовательно, согласно формуле (9) v_2, v_3, ... , тоже положительны для $n = 1, 2, \ldots$, пока n не станет слишком велико, если только ρ_0 достаточно мало, причем величина v_n приблизительно равна ns. Мы хотим теперь определить более точно промежутки значений ρ_0 и n, для которых v_n остается положительным. В этих пределах переменный угол ϑ_n возрастает вместе с ρ_0, если угол ϑ_0 фиксирован.

Но уравнение (9) есть однородное, линейное, разностное уравнение второго порядка по v_n, и мы рассматриваем частное решение его, удовлетворяющее соотношениям (11). Очевидно, что v_n будет оставаться положительным по крайней мере до тех пор, пока Δv_n положительно. Первым вопросом, таким образом, будет определение пределов значений n, для которых как v_n, так и Δv_n обязательно будут положительными. Но линейное разностное уравнение дает

$$\Delta^2 v_n \geqslant -B\rho_0^{\mu-1}(|\Delta v_n| + |v_n|),$$

так что v_n и Δv_n, очевидно, уменьшаются медленнее, чем если бы

$$\Delta^2 v_n = -B\rho_0^{\mu-1}(\Delta v_n + v_n),$$

пока v_n и Δv_n остаются положительными([6]). Таким образом, v_n и Δv_n будут оставаться положительными при $n = 1, 2, \ldots$ по крайней мере так же долго, как это имеет место для решения линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами

$$v_{n+2} - (2 - B\rho_0^{\mu-1})v_{n+1} + v_n = 0$$

удовлетворяющего начальным условиям (11). Но этим решением будет выражение

$$v_n = (s + \varepsilon_3^0)\frac{e^{\alpha_1 n} - e^{\alpha_2 n}}{e^{\alpha_1} - e^{\alpha_2}}, \tag{12}$$

где α_1, α_2 определяются равенством

$$\alpha_i = \log\left[1 - \frac{1}{2}B\rho_0^{\mu-1} \pm \sqrt{-\left(B\rho_0^{\mu-1} - \frac{1}{4}B^2\rho_0^{2\mu-2}\right)}\right] \quad (i = 1,\, 2).$$

Определенные таким образом v_n и Δv_n во всяком случае останутся положительными до тех пор, пока dv_n/dn не обратится в нуль, т. е. пока не будет выполнено равенство

$$e^{(\alpha_1-\alpha_2)n} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Так как главный член $\alpha_1 - \alpha_2$, очевидно, равен

$$2\sqrt{-B}\rho_0^{\frac{\mu-1}{\varepsilon}},$$

а главный член $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$ равен -1, то это соотношение показывает, что n должно быть порядка $\rho_0^{-(\mu-1)/2}$.

Отсюда мы заключаем, что до тех пор пока $n \leqslant N^* r_0^{-(\mu-1)}$ [сравнить с (5)], угол ϑ будет возрастать вместе с r_0 при фиксированном ϑ_0 в указанной окрестности(7).

Характер выведенных выше неравенств делает очевидным, что мы можем выбрать значение r_0 столь малым и затем n столь большим, чтобы выполнялись все условия, сформулированные в лемме.

§ 3. Периодические движения вблизи данного периодического движения $m = 2$. Мы видели уже (глава IV, § 1) как пфаффова система уравнений общего вида, не содержащая времени t в явном виде, допускает приведение к подобной же системе с меньшим на единицу числом степеней свободы при условии, что мы ограничимся рассмотрением движений вблизи данного периодического движения. В приведенной системе, однако, независимая переменная появляется в дифференциальных уравнениях с периодом τ, а данное периодическое движение принимает вид обобщенного равновесия.

В этом параграфе мы намерены рассмотреть периодические движения в окрестности данного периодического движения для гамильтоновых уравнений с двумя степенями свободы ($m = 2$):

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{13}$$

в которых H есть аналитическая функция от p_1, q_1, p_2, q_2 не содержащая времени t. Однако такое периодическое движение допускает аналитическое продолжение с изменением постоянной энергии $H = h$ (глава V, § 9) и, следовательно, не изолировано.

Нашей целью будет рассмотреть те периодические движения, которые принадлежат тому же значению h, что и данное периодическое движение. Это значение может быть принято равным нулю.

Возможность приведения к пфаффовой системе с одной степенью свободы ($m = 1$) вместе с результатами предыдущего параграфа делает с самого начала весьма вероятным, что в окрестности данного периодического движения будет, вообще говоря, бесконечное множество периодических движений с большим периодом, если только данное периодическое движение устойчиво.

При рассмотрении этого вопроса мы сделаем дальнейшее допущение, что данная гамильтонова проблема связана с обыкновенной лагранжевой проблемой, имеющей главную функцию L, квадратичную относительно скоростей. Если q_1, q_2 суть координаты этой лагранжевой системы, то уравнения

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i'} \quad (i = 1, 2)$$

служат, разумеется, для определения переменных p_1, p_2.

Пусть $q_1 = q_1(t)$, $q_2 = q_2(t)$ будут уравнения, изображающие данное периодическое движение периода τ, и рассмотрим соответствующую аналитическую кривую в плоскости (q_1, q_2).

Очевидно, что мы можем ввести новую систему координат $\overline{q}_1$, $\overline{q}_2$ так, чтобы $\overline{q}_2$ обращалось в нуль вдоль периодического движения, а q_1 возрастало на 2π, когда точка проходит полный период периодического движения. Например, если кривая движения не имеет двойных точек, то ее можно деформировать в окружность с центром в начале координат, и тогда мы можем за $\overline{q}_1$ и $\overline{q}_2$ принять соответственно угол и радиальное смещение. Вообще же говоря, очевидно, что мы можем принять $\overline{q}_1 = \frac{2\pi t}{\tau}$ вдоль периодического движения. Разумеется, эта замена переменных q_1, q_2 на $\overline{q}_1$, $\overline{q}_2$ не изменит лагранжева характера динамической проблемы, но новая главная функция L будет периодической относительно переменного $\overline{q}_1$ с периодом 2π.

Соответственная гамильтонова проблема будет иметь вид (13), где H будет периодической функцией от q_1 периода 2π, причем для рассматриваемого периодического движения будем иметь $q_1 = \frac{2\pi t}{\tau}$, $q_2 = 0$. Из соответствующих гамильтоновых уравнений получим (также вдоль данного периодического движения):

$$\frac{2\pi}{\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad 0 = \frac{\partial H}{\partial p_2}.$$

Очевидно теперь, что мы можем решить уравнение $H = h$ относительно p_1 и получить решение в виде

$$p_1 + K(q_1, p_2, q_2, h) = 0, \tag{14}$$

где K есть вещественная однозначная аналитическая функция своих четырех аргументов, периодическая с периодом 2π по q_1. Кроме того, мы можем рассматривать h, q_1, p_2, q_2 как зависимые переменные, вместо p_1, q_1, p_2, q_2; мы замечаем, что уравнение (14) может быть разрешено относительно h, так как из соотношения $H = h$ мы получаем:

$$\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial h} = 1,$$

так что $\partial p_1/\partial h \neq 0$ вдоль движения. После того, как мы подставим наши новые переменные h, q_1, p_2, q_2 вместо p_1, q_1, p_2, q_2, вариационный принцип (глава II, § 10) примет вид

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (-Kq_1' + p_2 q_2' - 2)\, dt = 0, \tag{15}$$

который приводит к четырем уравнениям:

$$\frac{\partial K}{\partial h}\frac{dq_1}{dt} + 1 = 0; \quad \frac{\partial K}{\partial h}\frac{dh}{dt} + \frac{\partial K}{\partial p_2}\frac{dp_2}{dt} + \frac{\partial K}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} = 0;$$

$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_2}\frac{dq_1}{dt}; \quad \frac{dp_2}{dt} + \frac{\partial K}{\partial q_2}\frac{dq_1}{dt} = 0.$$

Из этих уравнений мы можем непосредственно вывести соотношение $h = \text{const}$, справедливость которого, разумеется, и так известна.

Но очевидно, что в окрестности данного периодического движения q_1 может служить независимой переменной так же, как t. Исключив t из предыдущих уравнений, получим:

$$\frac{dp_2}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_2}, \quad \frac{dq_2}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_2}. \tag{16}$$

Здесь мы должны положить $h = 0$ в функции K, которая является периодической функцией от q_1 периода 2π. Данное периодическое движение соответствует значениям p_2, q_2:

$$p_2 = \varphi(q_1), \quad q_2 = 0,$$

где φ — периодическая функция q_1, с периодом 2π. Эти уравнения будут, очевидно, гамильтоновыми с одной степенью свободы ($m = 1$), и мы можем преобразовать их в гамильтонову систему с точкой обобщенного равновесия в начале координат, если положим

$$\overline{p}_2 = p_2 - \varphi(q_1), \quad \overline{q}_2 = q_2,$$

причем новой главной функцией будет

$$\overline{K} = K + \varphi'(q_1)q_2.$$

И обратно, если мы имеем решение уравнений (16), то мы можем определить t с помощью уравнения

$$\frac{dt}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial h}$$

и получить решение первоначальной системы, приняв за независимую переменную t. Таким образом, системы (13) и (16) эквивалентны[1]. Периодические движения в окрестности данного периодического движения для (13) соответствуют движениям с периодом $2k\pi$ в окрестности начала координат для системы (16).

Для гамильтоновой проблемы (13), *приводящейся к проблеме обобщенного равновесия устойчивого типа* ($l \neq 0$), *существует бесконечное множество периодических движений в окрестности данного периодического движения, причем период каждого такого движения, вообще говоря,*

[1]Относительно произведенных приведений см. *Whittaker*, Analytical Dynamics, гл. XII.

соответствует много раз повторенному периоду первоначального движения.

Это предложение, разумеется, получается непосредственным применением результатов § 1 этой главы к приведенной проблеме (16).

§ 4. Некоторые замечания. Общее заключение, которое можно сделать из рассуждений предшествующих параграфов, состоит в том, что для данного значения постоянной энергии существуют, вообще говоря, периодические движения в окрестности данного периодического движения устойчивого типа по крайней мере в том случае, если наша динамическая система имеет две степени свободы и относится к обычному типу ($l \neq 0$). Тот факт, что могут существовать изолированные периодические движения устойчивого типа даже для динамических систем с двумя степенями свободы, мы можем доказать следующим простым примером.

Пусть мы имеем гамильтонову систему с главной функцией, равной

$$H = \frac{1}{2}k\left(p_1^2 + q_1^2\right) + \frac{1}{2}l\left(p_2^2 + q_2^2\right),$$

где величины k, l не соизмеримы друг с другом. Общее решение этой системы будет:

$$\begin{aligned} p_1 &= A\cos kt + B\sin kt, & q_1 &= A\sin kt - B\cos kt, \\ p_2 &= C\cos lt + D\sin lt, & q_2 &= C\sin lt - D\cos lt. \end{aligned}$$

Постоянная энергии h определяется формулой

$$H = \frac{1}{2}k\left(A^2 + B^2\right) + \frac{1}{2}l\left(C^2 + D^2\right) = h.$$

Единственными периодическими решениями будут два аналитических семейства

$$p_1 = q_1 = 0 \ \text{ и } \ p_2 = q_2 = 0;$$

все эти решения — устойчивого типа. При заданном значении постоянной энергии мы будем иметь только два таких периодических движения, так как все периодические движения второго семейства с заданным значением $A^2 + B^2$ изображают одну и ту же замкнутую кривую в трехмерном многообразии $H = h$ в четырехмерном пространстве (p_1, p_2, q_1, q_2). Если мы определим для этого случая преобразование T, как в предшествующем § 3, то оно окажется вращением на угол, несоизмеримый с 2π, и, следовательно, будет в точности соответствовать тому исключительному случаю, когда полином M (см. § 1) вырождается в постоянную.

Первый вопрос, связанный с возможными обобщениями предыдущих результатов для случая двух степеней свободы ($m = 2$), будет заключаться в следующем. Пусть начало координат является точкой обобщенного равновесия общего устойчивого типа для какого-нибудь динамической системы, которую мы, кроме того, будем считать вполне устойчивой. Если постоянная l не равна нулю, то можем ли мы сказать, что всегда существует бесконечное множество периодических движений в окрестности начала координат?

Мне представляется в высшей степени сомнительным, чтобы ответ на этот вопрос был утвердительным. В предыдущих рассуждениях свойство потока не изменять площади сечения играло существенную роль. Нет никаких оснований предполагать, что это свойство сохранится для более общих динамических систем вполне устойчивого типа хотя бы только для случая пфаффовых систем.

Приведенный выше пример можно обобщить таким образом, чтобы вывести из него предварительное необходимое условие, которое мы должны наложить на гамильтоновы системы с числом степеней свободы больше двух, если мы хотим, чтобы для них оставалось справедливым заключение о существовании бесконечного множества периодических движений вблизи данного устойчивого периодического движения.

В самом деле, рассмотрим динамическую систему

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

где H есть функция от m произведений $p_1q_1, \ldots, p_mq_m$, причем v_i, q_i суть сопряженные комплексные переменные, а именно:

$$H = \sum_{j=1}^{m} c_j p_j q_j + \frac{1}{2}\sum_{j,\,k=1}^{m} d_{jk} p_j q_j p_k q_k.$$

Здесь коэффициенты c_i, d_{ij} суть периодические функции от t с периодом τ. Начало координат есть точка обобщенного равновесия, имеющая множителями числа

$$\lambda_i = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\tau} c_1(t)\,dt \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Эта точка равновесия будет вообще устойчивого типа, если только эти m количеств λ_i и $\dfrac{2\pi\sqrt{-1}}{\tau}$ не связаны никаким линейным соотношением с целыми коэффициентами. Если мы для краткости положим

$$x_i = \int\limits_0^t \left[c_i + \sum_{j=1}^m d_{ij} p_j^0 q_j^0\right] dt,$$

то общее решение будет, как легко видеть,

$$p_i = p_i^0 e^{-x_i}, \quad q_i = q_i^0 e^{x_i} \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Кроме того, положив

$$C_i = \int\limits_0^\tau c_i\, dt, \quad D_{ij} = \int\limits_0^\tau d_{ij}\, dt,$$

мы найдем, что условия, чтобы решение было периодическим с периодом $k\tau$, будут:

$$C_i + \sum_{j=1}^m D_{ij} p_j^0 q_j^0 = \frac{2\pi k_i \sqrt{-1}}{k} \quad (i = 1, \ldots, m),$$

где $k_1, \ldots, k_m$ суть целые числа. Но эти условия представляют собой m линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно произведений $p_i^0 q_i^0 (i = 1, \ldots, m)$, которые могут быть решены, если определитель $|D_{ij}|$ не равен нулю. Кроме того, взяв все отношения k_i/k малыми, мы получим периодическое движение, близкое к началу координат. С другой стороны, если $|D_{ij}|$, то, вообще говоря, эти уравнения не могут быть решены.

В частном случае, когда все величины c_i и d_{ij} суть постоянные числа, наша система будет представлена в нормальном виде, причем величины c_i будут множители, а d_{ij} будут инварианты, аналогичные l для случая $m = 1$.

Следовательно, для того, чтобы можно было ожидать во всех случаях бесконечного множества периодических движений в окрестности начала координат, мы должны при $m > 1$ прежде всего наложить условие $|d_{ij}| \neq 0$, аналогичное условию $l \neq 0$ для системы с одной степенью свободы.

Всякое обобщение должно, разумеется, принимать во внимание все существующие однозначные аналитические интегралы (как, например, интеграл энергии). В самом деле, если мы имеем k таких интегралов, то периодическое движение допускает k-кратное аналитическое продолжение. Нас при этом интересуют не те периодические движения, которые принадлежат к тому же семейству, что и данное, а, наоборот, те периодические движения, лежащие в окрестности данного, для которых постоянные интегрирования в упомянутых выше интегралах имеют то же значение, что и у данного периодического движения, и которые в течение одного своего периода совершают много оборотов вблизи данного периодического движения.

§ 5. Геометрическая теорема Пуанкаре[1]**.** Пуанкаре показал, что существование бесконечного множества периодических орбит в ограниченной проблеме трех тел и других динамических задачах тотчас следует из некоторой геометрической теоремы, с которой лемма § 1 тесно связана.

Для удобства мы прежде всего сформулируем эту теорему.

Геометрическая теорема Пуанкаре. *Пусть нам дано кольцо* $0 < a \leqslant \leqslant r \leqslant b$ *в плоскости, определяемой полярными координатами* r, ϑ *и некоторое одно-однозначное непрерывное, сохраняющее площадь преобразование* T *этого кольца в себя и при этом такое, что точки окружности* $r = a$ *передвигаются при этом преобразовании вперед (т. е. в направлении возрастающих* ϑ*), а точки окружности* $r = b$ *передвигаются назад (в направлении убывающих* ϑ*). Тогда в кольце будут существовать по меньшей мере две точки, инвариантные при преобразовании* T*.*

Мы наметим вкратце доказательство этой теоремы.

Будем считать $x = \vartheta$ и $y = r^2$ прямоугольными координатами точки на плоскости (x, y). Наше кольцо будет на этой плоскости представлено полоской $a^2 \leqslant y \leqslant b^2$. Преобразование T этой полоски в себя передвигает точки границы $y = a^2$ вправо, а точки границы $y = b^2$ — влево. Кроме того, преобразование T сохраняет площади в плоскости (x, y), так как $2r\,dr\,d\vartheta = dx\,dy$, и перемещает одинаковым образом любые две точки, имеющие одинаковую ординату и абсциссы, различающиеся на число, кратное 2π.

Присоединим к T новое преобразование T_ε, совершающее перенос всех точек плоскости (x, y) на расстояние $\varepsilon > 0$ в направлении возрастающих y. Композиция преобразований T и T_ε, (в порядке сначала T, потом T_ε,) дает сохраняющее площадь преобразование TT_ε которое переводит данную полоску $a^2 \leqslant y \leqslant b^2$ в полоску $a^2 + \varepsilon \leqslant y \leqslant b^2 + \varepsilon$.

Предположим, что преобразование T не имеет инвариантных точек, тогда существует такое положительное количество d, что все точки перемещаются на расстояние, не меньшее d при преобразовании T(⁸).
Выберем за ε число, меньшее d.

[1]Этот параграф по существу совпадает с § 34 моей статьи «Dynamical Systems with Two Degrees of Freedom», Trans. Amer. Math. Soc., vol. 18, 1917.

Рассмотрим теперь узкую полоску $a^2 \leqslant y \leqslant a^2 + \varepsilon$. При преобразовании TT_ε, нижний край $y = a^2$ этой полоски переходит в верхний, а вся полоска превращается в новую полоску, лежащую целиком над прежней, за исключением их общего края. Повторяя преобразование TT_ε, переводим вторую полоску в третью и т. д.

Продолжая этот процесс, мы получим ряд полос, образующих последовательные слои. Каждый из этих слоев совмещается с самим собой при передвижении на 2π направо. Это следует из того, что оба преобразования T и T_ε однозначны в кольце.

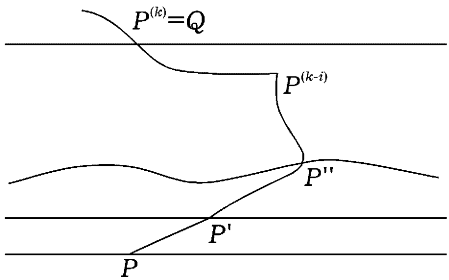

Рис. 2

В кольце эти слои будут изображаться системой замкнутых кольцевых слоев, которые, разумеется, все имеют одинаковую площадь, потому что преобразование TT_ε, сохраняет площадь относительно r, ϑ так же, как в плоскости (x, y). Следовательно, какой-нибудь из этих слоев на бесконечной полоске, скажем k-й слой, должен перейти где-нибудь через верхнюю границу $y = b^2$ нашей полоски. Пусть теперь в плоскости (x, y) Q будет точка верхнего края k–й полоски, для которой y достигает наибольшей величины (рис. 2). Обозначим через P точку прямой $y = a^2$, которая k-кратным повторением преобразования TT_ε переводится в Q, и пусть P', P'', ... , $P^{(k)} = Q$ обозначают образы точки P при последовательной итерации преобразования TT_ε. Проведем прямолинейный отрезок PP', который будет, разумеется, лежать целиком в первом слое. Последовательные образы этого отрезка $P'P'' \ldots P^{(k-1)}P^{(k)}$ будут все находиться в соответственных слоях и не будут иметь между собой общих точек, если не считать того, что две последовательные дуги $P^{(i-1)}P^{(i)}$ и $P^{(i)}P^{(i+1)}$ имеют общий конец $P^{(i)}$. Таким образом, соединяя эти дуги вместе, получим одну дугу PQ без двойных точек.

Рассмотрим теперь вектор LL', идущий от какой-нибудь точки L к ее образу L' при преобразовании TT_ε, и будем двигать начало L вектора от P к $P^{(k-1)}$ вдоль линии PQ. Угол, образуемый этим вектором с положительным направлением оси абсцисс, мы можем считать в начале пути (при $L = P$) положительным острым углом, так как образ P' точки P лежит справа и сверху от самой точки P. Когда точка L перешла в конечное положение $P^{(k-1)}$ своего пути, этот угол будет лежать во втором квадранте, потому что, по условиям теоремы и определению $Q = P^{(k)}$, $P^{(k)}$ лежит слева и сверху от $P^{(k-1)}$([9]).

Из способа построения последовательных дуг PP', $P'P''$, ... совершенно очевидно, что когда L движется по кривой PQ от P к $P^{(k-1)}$ L' движется вдоль той же кривой от P' к Q. Поэтому легко видеть на рис. 2, что вектор LL' при переходе из начального положения PP' к конечному $P^{(k-1)}P(k)$ делает поворот на наименьший положительный угол([10]). Если теперь двигать L' дальше от Q по вертикальному направлению до встречи с прямой $y = b^2 + \varepsilon$, то утверждение о вращении вектора на наименьший положительный угол останется справедливым при условии, что ε достаточно мало, так как Q лежит самое большее на ε над прямой $y = b^2$([11]).

Предположим теперь, что L движется любым способом от какой-нибудь точки прямой $y = a^2$ до какой-нибудь точки прямой $y = b^2$, оставаясь, конечно, все время на нашей полоске $a^2 \leqslant y \leqslant b^2$. Преобразование TT_ε не имеет инвариантных точек, и, следовательно, точка L, никогда не будет совпадать со своим образом L'. В начальном положении угол, образуемый LL', лежит в первой четверти; в конечном же положении этот угол лежит во второй четверти. Но полное изменение угла при движении L от $y = a^2$ до $y = b^2$ оказалось в одном частном случае равным наименьшему возможному положительному углу([12]). Следовательно, так как любой путь точки L от $y = a^2$ до $y = b^2$ может быть непрерывно преобразован в любой другой, это изменение будет всегда равно наименьшему положительному углу.

Пусть теперь ε стремится к нулю. При уменьшении ε вектор LL', где L — любая точка нашей полоски, все время имеет определенное направление, так как преобразование TT_ε не имеет инвариантных точек. Посредством предельного перехода мы получаем, что для преобразования T угловое изменение направления вектора LL' будет равно наименьшему возможному положительному углу([13]). Этот наименьший положительный угол, разумеется, равен π, потому что начальное направление LL' при L, лежащем на прямой $y = a^2$, будет совпадать с положительным направлением оси абсцисс, а конечное направление LL' при $y = b^2$ будет совпадать с отрицательным направлением оси абсцисс.

Рассмотрим теперь обратное преобразование T^{-1}, которое принадлежит к тому же типу, что и T, с той только разницей, что оно передвигает точки прямой $y = a^2$ налево, а точки прямой $y = b^2$ — направо. Рассуждением, совершенно подобным тому, которое было приведено выше, мы докажем, что если начальная точка L вектора $LL^{(-1)}$, конец которого есть $L^{(-1)} = T^{-1}L$, движется от какой-нибудь точки прямой $y = a^2$ до точки прямой $y = b^2$, то полное изменение угла вектора с осью абсцисс будет равно наименьшему отрицательному углу, т. е. $-\pi$.

Но полный поворот вектора $LL^{(-1)}$ в точности равен полному повороту обратно направленного вектора $L^{(-1)}L$, соединяющего точку $L^{(-1)}$ на $y = a^2$ с ее образом L при преобразовании T.

Следовательно, по предыдущему полное изменение направления вектора $LL^{(-1)}$, при движении L (или $L^{(-1)}$) от прямой $y = a^2$ до прямой $y = b^2$, должно быть равно π, между тем как мы только что получили, что оно должно быть равно $-\pi$. Мы пришли, таким образом, к противоречию, из которого следует, что преобразование T должно иметь по крайней мере одну инвариантную точку.

Для того, чтобы доказать, что таких точек должно быть не менее чем две, мы можем применить способ, примененный Пуанкаре.

Пусть точка L описывает основной прямоугольник

$$0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \quad a^2 \leqslant y \leqslant b^2$$

в плоскости (x, y) в положительном направлении. Очевидно, что при этом полный поворот вектора LL' будет равен нулю, потому что вектор LL' не изменяет направления вдоль стороны $y = a^2$ и вдоль стороны $y = b^2$, а повороты вектора вдоль сторон $x = 0$ и $x = 2\pi$ дают в сумме нуль. Но если L описывает замкнутый путь вокруг простой инвариантной точки, то поворот вектора LL' будет равен $\pm 2\pi$. Следовательно, мы видим, что либо имеются по крайней мере две простые инвариантные точки, такие, что повороты вектора LL' вокруг них равны $+2\pi$ и -2π соответственно, либо по крайней мере одна кратная инвариантная точка. В действительности будут всегда существовать по крайней мере две геометрически различные инвариантные точки[1].

§ 6. Проблема бильярдного шара[2]. Для того, чтобы дать пример, иллюстрирующий применение теоремы Пуанкаре и ее обобщений, мы рассмотрим прежде всего специальную, но весьма типическую задачу этого рода, а именно задачу о движении бильярдного шара на ограниченном выпуклой кривой бильярдном столе. Эта система представляет очень большой интерес по следующим основаниям. Всякая лагранжева система с двумя степенями свободы изоморфна с движением материальной частицы на гладкой поверхности, равномерно вращающейся около постоянной оси и носящей на себе консервативное поле

[1] См. мою статью «An Extension of Poincaré's Last Geometric Theorem», Acta Mathematica, vol. 47, 1926([1]).

[2] § 6–9 взяты из моей статьи «On the Periodic Motions of Dynamical Systems», Acta Mathematica, vol. 48, 1927.

сил[1]. В частности, если поверхность не вращается и если поле сил отсутствует, то частица будет двигаться по геодезическим линиям. Если мы теперь сплющим поверхность, сделав ее плоской областью, ограниченной выпуклой кривой C, то получим «проблему бильярдного шара». Но в этой проблеме формальная сторона, обычно столь устрашающая в динамике, не играет почти никакой роли, и только интересные качественные вопросы требуют рассмотрения. Если кривая C — эллипс, то получается интегрируемый случай, а именно предельный случай эллипсоида, рассмотренного Якоби.

В проблеме бильярдного шара можно прийти к некоторым периодическим движениям прямым применением методов максимума — минимума. Так как это представляет интерес само по себе, я укажу здесь, как это можно сделать. Результаты, полученные Морсом (см. главу V, § 8), показывают, что область применения этих методов, уже развитая до известной степени Пуанкаре, Адамаром, Уиттекером и мною, может быть еще расширена. Таким образом, легко может оказаться, что значение метода минимума-максимума в проблеме бильярдного шара типично для общего случая.

Длиннейшая хорда границы C бильярдного стола, пройденная в обоих направлениях, очевидно, дает одно из простейших периодических движений. Бильярдный шар, движущийся по этой хорде, ударяется об ограничивающую стол кривую под прямым углом и откатывается обратно по этой хорде. Если мы будем непрерывно изменять эту хорду, уменьшая длину ее настолько мало, насколько это возможно, так, чтобы в конце этого преобразования ее оба конца поменялись местами, мы будем иметь промежуточное положение наименьшей длины, которое будет хордой, пересекающей C в месте наименьшей его ширины. Эта хорда дает второе периодическое движение. Детальное изучение небольших возмущений обоих этих периодических движений показывает, что первое движение неустойчиво, в то время как второе может быть устойчивым или неустойчивым.

Далее, мы ищем треугольник наибольшего периметра, вписанный в C. Очевидно, что по крайней мере один такой треугольник существует и не имеет вырождающихся сторон длины нуль. Касательная к линии C, проведенная в любой вершине этого треугольника, будет, разумеется, образовывать равные углы с обеими сторонами, сходящимися в этой вершине.

Таким путем мы получаем «гармонический треугольник», которо-

[1]См. мою статью «Dynamical Systems with Two Degrees of Freedom», Trans. Amer. Math. Soc., vol. 18, 1917. Предполагается, что лагранжева главная функция является квадратичной относительно скоростей.

му будут отвечать два различных периодических движения, соответствующих двум возможным направлениям обхода.

Кроме того, если мы будем непрерывно изменять этот треугольник, не переменяя порядок его вершин и стараясь насколько возможно меньше уменьшать его периметр так, чтобы в конце этого преобразования получить тот же треугольник, но с циклически переставленными вершинами, то мы пройдем через треугольник наименьшего периметра, который тоже будет гармоническим и тоже будет соответствовать двум периодическим движениям.

Таким путем может быть установлено существование двух гармонических n-угольников, обходящих $k \leqslant n/2$ раз кривую C (k — число взаимно простое с n).

Два периодических движения, соответствующих n-угольнику типа максимума, будут неустойчивы, в то время как два периодических движения, соответствующих n-угольнику типа минимакса, могут быть устойчивыми или неустойчивыми.

§ 7. Соответствующее преобразование T. Мы намерены теперь определить преобразование кольца T, связанное с проблемой бильярдного шара, и показать, как геометрическая теорема Пуанкаре в своей первоначальной форме приводит к выведенным в предыдущем параграфе заключениям. Приведение задачи к вопросу о преобразованиях кольца имеет большое значение, даже не принимая во внимание его связь с вопросом о периодических движениях. Нужно отметить также, что в наиболее интересных случаях, как, например, ограниченная задача трех тел, метод приведения к преобразованиям кольца и применения геометрической теоремы Пуанкаре вполне приложим к изучению периодических движений, в то время как метод максимума и минимума до сих пор не мог быть приложен к этим задачам.

Предположим прежде всего, что длина линии C равна 2π, и будем измерять расстояние вдоль C от некоторой постоянной точки до переменной точки P на этой кривой посредством угловой координаты φ.

В точке P, которую будем считать начальной точкой движения бильярдного шара, обозначим буквой ϑ угол между положительным направлением касательной в этой точке и направлением движения шара. Переменная ϑ может, очевидно, изменяться только в пределах между 0 и π. Эти координаты ϑ, φ представляют однозначным образом все возможные состояния шара в начале движения или после удара. Если мы будем рассматривать φ как угловую координату точки на плоскости, а ϑ, увеличенное на постоянную, например, на π, как радиальную координату этой точки, то совокупность всех возможных значений, ϑ, φ представляется на этой плоскости кольцом, ограниченным окружностями радиусов π и 2π, а именно окружностями $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$.

Рассмотрим теперь определенное состояние движения шара в точке P с данными координатами (ϑ, φ). Бильярдный шар, выйдя из точки P на C, встречается опять с этой кривой в другой точке P_1 и продолжает двигаться от нее с новыми координатами, скажем (ϑ_1, φ_1), и так далее до бесконечности. Если C — аналитическая кривая, как мы предположим, то зависимость между (ϑ, φ) и (ϑ_1, φ_1), очевидно, однозначная и аналитическая внутри кольца. Когда ϑ близко к 0 или к π, то шар выходит из P под небольшим углом к краю стола и ударяется в него опять в близкой точке с ϑ, снова близким соответственно к нулю или к π. Следовательно, точки, лежащие на ограничивающих окружностях, соответствуют себе самим с $\varphi_1 = \varphi$, $\vartheta_1 = \vartheta$.

Можно сделать еще одно дальнейшее замечание относительно этого соответствия вдоль обеих границ кольца. Если мы будем рассматривать преобразование кольца, переводящее каждую точку (ϑ, φ) в соответствующую ей (ϑ_1, φ_1), то при этом преобразовании T как внутренний, так и внешний круг сделает несколько полных оборотов, ибо, как мы только что видели, точки этих границ являются инвариантными. Мы можем принять, что внутренняя окружность остается неподвижной, но тогда то же не будет верно относительно внешней окружности, которая, как мы сейчас покажем, окажется совершившей один полный оборот в положительном направлении. В самом деле, будем изменять для данной точки P и соответствующего ей постоянного φ угол ϑ от нуля до π. Очевидно, что в этом случае ϑ_1 будет возрастать от 0 до π, а φ_1 возрастать на 2π, так как точка P_1 обойдет, исходя из P, полный цикл по кривой C в положительном направлении. Иначе говоря, преобразование T превращает радиальный отрезок, пересекающий кольцо, в кривую, исходящую из той же точки на внутренней окружности, но делающую один полный оборот в кольце, прежде чем закончиться на внешней окружности. Следовательно, при преобразовании T внешняя граница делает один полный оборот.

Предположим теперь, что мы имеем какое-нибудь периодическое движение, например, соответствующее одному из гармонических треугольников, описанных в положительном направлении. Очевидно, что преобразование T переводит состояние движения шара в одной вершине в такое же состояние во второй, состояние во второй вершине — в состояние в третьей и, наконец, состояние в третьей вершине — в состояние в первой. Таким образом, при применении преобразования T тройка точек кольца перемещается циклически, и все точки этой тройки инвариантны при применении третьей степени T^3 этого преобразования. Обратно, любой тройке точек, обладающей этим свойством, или, иначе говоря, любой точке, инвариантной относительно T^3, вместе с ее образами при преобразованиях T и T^2 соответствует периодическое движение, принадлежащее некоторому гармоническому треугольнику. В этом случае из соображений, приведенных выше, очевидно, что существуют по крайней мере четыре таких тройки. Очевидно, что T не имеет инвариантных точек, потому что при этом преобразовании φ возрастает на величину, большую нуля и меньшую 2π

Таким путем отыскание гармонических многоугольников и связанных с ними периодических движений в задаче бильярдного шара приводится к определению систем различных точек $P_1, \ldots, P_n$, перемещаемых циклически при преобразовании T, так что $T^n(P_i) = P_i$. Вообще же говоря, решительно всякое интересное свойство движения бильярдного шара отражается в соответствующем свойстве преобразования T. Таким образом, динамическая проблема может быть сведена к задаче некоторого специального преобразования кругового кольца в себя.

§ 8. Свойство преобразования T сохранять площадь. Преобразование T, выражаемое формулами

$$\vartheta_1 = f(\vartheta, \varphi), \quad \varphi_1 = g(\vartheta, \varphi),$$

обладает еще одним свойством, которое позволяет применить к этому преобразованию геометрическую теорему Пуанкаре, а именно: двойной интеграл $\iint \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$, распространенный на какую-нибудь часть кольца σ, равен тому же интегралу, распространенному на образ этой части при преобразовании T и его степенях. Это — по существу свойство сохранения площадей в измененных координатах.

Прежде чем мы перейдем к совершенно элементарному доказательству этого утверждения, мы укажем на одно его немедленное приложение, подтверждающее сделанное нами выше утверждение о большой теоретической важности преобразований кольца. Так как интеграл, написанный выше, вычисленный на площадях $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, (\sigma_i = T\sigma_{i-1})$, имеет одно и то же значение и так как значение его на всем кольце конечно и равно 4π, то какие-нибудь два образа σ_i и $\sigma_j (i > j)$ должны налегать друг на друга. Применяя обратное преобразование T^{-1}, получим, что σ_{i-1} и σ_{j-1} налегают друг на друга и, наконец, что σ_{i-j} и σ_o налегают друг на друга также. Но в переводе на язык проблемы бильярдного шара это значит, что можно послать шар с координатами (положением и направлением), сколь угодно близкими к любым данным так, чтобы он в конце концов вернулся сколь угодно близко к тому же положению и направлению. Пуанкаре, развив подробнее эту цепь рассуждений, показал[1], что «вероятность» того, что произвольное движение возвращается бесконечно много раз в окрестность своего

[1] См. его «Methodes nouvelles de la Mécanique céleste», т. 3, гл. 26.

первоначального состояния, равна единице. Он назвал это свойство динамических систем «устойчивостью в смысле Пуассона».

Доказательство того, что написанный выше двойной интеграл инвариантен относительно преобразования T, основывается на вычислении в явном виде якобиана

$$J = \frac{\partial\vartheta_1}{\partial\vartheta}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi} - \frac{\partial\vartheta_1}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\vartheta}.$$

В самом деле, если интеграл $\iint M(\vartheta,\,\varphi)\,d\vartheta\,d\varphi$ инвариантен, то мы имеем:

$$\iint M(\vartheta_1,\,\varphi_1)\,d\vartheta_1\,d\varphi_1 = \iint M(\vartheta,\,\varphi)\,d\vartheta\,d\varphi,$$

где областью изменения переменных ϑ_1, φ_1, является σ_1, в то время как переменные ϑ, φ пробегают σ. Но согласно основной теореме о замене переменных под знаком кратного интеграла преобразование переменных T дает для интеграла слева выражение

$$\iint\limits_{\sigma} M(\vartheta_1,\,\varphi_1)\,J\,d\vartheta\,d\varphi.$$

Сравнивая это выражение с интегралом справа, распространенным на ту же произвольную площадку, мы выводим, что функциональная зависимость

$$M(\vartheta_1,\,\varphi_1)\,J = M(\vartheta,\,\varphi)$$

необходима и также достаточна для инвариантности интеграла. Следовательно, для того чтобы доказать, что интеграл $\iint \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$ инвариантен при преобразовании T, мы должны только показать, что

$$J = \frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta_1}.$$

Пусть

$$x = F(\varphi), \quad y = G(\varphi)$$

будет параметрическим уравнением кривой C в прямоугольных координатах, так что если τ обозначает угол между положительным направлением оси x и положительным направлением касательной к C в некоторой точке P, то

$$\tau = 1/\operatorname{arctg}\frac{G'(\varphi)}{F(\varphi)}.$$

Подобным же образом, пусть τ_1 обозначает тот же угол для образа P_1 точки P. Этот угол выражается такой же формулой, в которой только φ заменено на φ_1. Наконец, пусть α обозначает угол между положительным направлением оси x и направлением движения шара при выходе его из P (рис. 3).

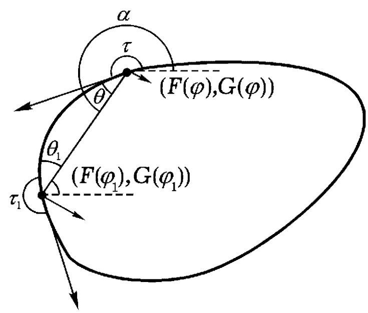

Рис. 3

Очевидно, что имеют место следующие два соотношения:

$$\vartheta = \alpha - \tau,$$
$$\vartheta_1 = \tau_1 - \alpha.$$

Заменяя в этих формулах τ и τ_1, их выражениями через φ, а также заменяя α выражением

$$1/\operatorname{arctg}\frac{G(\varphi_1) - G(\varphi)}{F(\varphi_1) - F(\varphi)},$$

очевидно, равным α, мы получим формулы, выражающие ϑ и ϑ_1, через φ, φ_1 в явном виде:

$$T\colon \begin{cases} \vartheta = 1/\operatorname{arctg}\dfrac{G(\varphi_1) - G(\varphi)}{F(\varphi_1) - F(\varphi)} - 1/\operatorname{arctg}\dfrac{G'(\varphi)}{F'(\varphi)} = L(\varphi, \varphi_1), \\ \vartheta_1 = 1/\operatorname{arctg}\dfrac{G'(\varphi_1)}{F'(\varphi_1)} - 1/\operatorname{arctg}\dfrac{G(\varphi_1) - G(\varphi)}{F(\varphi_1) - F(\varphi)} = M(\varphi, \varphi_1). \end{cases}$$

Эти два уравнения определяют преобразование T точки (ϑ, φ) в точку (ϑ_1, φ_1). Взяв дифференциалы обеих частей, находим:

$$d\vartheta = L_\varphi\, d\varphi + L_{\varphi_1}\, d\varphi_1, \tag{17}$$
$$d\vartheta_1 = M_\varphi\, d\varphi + M_{\varphi_1}\, d\varphi_1, \tag{18}$$

откуда непосредственно получаем:

$$d\vartheta_1 = \frac{M_{\varphi_1}}{L_{\varphi_1}}\, d\vartheta + \left(M_\varphi - \frac{M_{\varphi_1} L_\varphi}{L_{\varphi_1}}\right) d\varphi, \quad d\varphi_1 = \frac{1}{L_{\varphi_1}}\, d\vartheta - \frac{L_\varphi}{L_{\varphi_1}}\, d\varphi, \tag{19}$$

что дает

$$J = -\frac{M_\varphi}{L_{\varphi_1}} = -\frac{[F(\varphi_1) - F(\varphi)]G'(\varphi) - [G(\varphi_1) - G(\varphi)]F'(\varphi)}{[F(\varphi_1) - F(\varphi)]G'(\varphi_1) - [G(\varphi_1) - G(\varphi)]F'(\varphi_1)}.$$

Но $F(\varphi_1) - F(\varphi)$ и $G(\varphi_1) - G(\varphi)$ пропорциональны соответственно $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, а с другой стороны,

$$F'(\varphi) = \cos\tau, G'(\varphi) = \sin\tau, \quad F'(\varphi_1) = \cos\tau_1, \quad G'(\varphi_1) = \sin\tau_1,$$

так что мы имеем окончательно:

$$J = \frac{\sin(\alpha - \tau)}{\sin(\tau_1 - \alpha)} = \frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta_1},$$

что и требовалось доказать.

§ 9. Приложения теоремы Пуанкаре к проблеме бильярдного шара. Как было уже указано, нет точки кольца, не лежащей на его границе, которая была бы инвариантна относительно преобразования T. С другой стороны, рассмотрим преобразование T^2 и присоединим к нему вращение плоскости ϑ, φ около начала, координат на угол -2π, которое мы обозначим через R_{-1}. Преобразование T^2R_{-1} оставляет инвариантным интеграл $\iint \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$ и передвигает точки внешней окружности на угол 2π, а точки внутренней окружности на угол -2π, следовательно, в противоположном направлении. Таким образом, преобразование T^2R_{-1}, удовлетворяет всем условиям, необходимым для применения геометрической теоремы Пуанкаре. Следовательно, сложное преобразование T^2R_{-1} имеет по крайней мере две инвариантные точки. Но это значит, что T^2 имеет две геометрически различные инвариантные точки с индексами разных знаков[1], хотя для обеих этих точек φ увеличивается на величину 2π.

Если P есть такая инвариантная точка, то $T(P)$, разумеется, тоже будет таковой, но с тем же индексом. Таким образом, мы получаем две пары точек, скажем,

$$P,\ T(P);\ Q,\ T(Q),$$

причем все четыре точки различные. Они, очевидно, соответствуют двум основным периодическим движениям.

Переходя к применению теоремы Пуанкаре к периодическим движениям более сложного типа, мы должны принять по внимание тот факт, что каждому такому движению соответствует другое, отличное от него периодическое движение, получающееся изменением порядка обхода многоугольника на обратный, причем эти движения имеют одинаковый индекс. Однако одно из этих движений увеличивает φ на величину $2k\pi$, а другое — на величину $2(n-k)\pi$. Рассматривая только те инвариантные точки T^n, для которых φ увеличивается на $2k\pi$ $(k \leqslant n/2)$,

[1] См. мою статью «An Extension of Poincaré's Last Geometric Theorem», Acta Mathematica, vol. 47, 1926 (1). Под индексом инвариантной точки мы подразумеваем число полных оборотов вектора, соединяющего точку P с ее образом, когда P описывает малую окружность около инвариантной точки.

мы, очевидно, получим каждый гармонический n-угольник только однажды. Можно заметить кстати, что эта возможность сгруппировать подобным образом движения в проблеме бильярдного шара по два находит полное отражение в том, что T есть композиция двух инволюторных преобразований(^{14}); именно это самое свойство преобразований кольца в ограниченной задаче трех тел дало мне возможность доказать существование бесконечного множества симметричных периодических орбит[1].

Перейдем теперь к рассмотрению инвариантных точек преобразования $T^n R_{-k}$, где R_{-k} обозначает k-кратное вращение на угол -2π. Вращения внешней и внутренней окружностей будут, очевидно, соответственно,

$$2(n-k)\pi \quad \text{и} \quad -2k\pi,$$

т. е. будут противоположных знаков. Отсюда мы можем заключить о существовании по крайней мере двух рядов геометрически различных точек

$$P,\ T(P),\ \ldots,\ T^{n-1}(P),\ Q,\ T(Q),\ \ldots,\ T^{n-1}(Q),$$

таких, что $T^n(P) = P$, $T^n(Q) = Q$, причем φ увеличивается на $2k\pi$; при этом мы предполагаем, что n и k — взаимно простые числа.

Чтобы доказать подробнее это утверждение, предположим, что P — одна из таких инвариантных относительно T^n точек, для которых T^n увеличивает φ на $2k\pi$. Если n точек

$$P,\ T(P),\ \ldots,\ T^{n-1}(P)$$

не все различны, то пусть $T^m(P) = P$ $(m \leqslant n-1)$, и положим, что φ увеличивается при преобразовании T^m на $2j\pi$. Комбинируя два символических уравнения, $T^m(P) = P$ и $T^n(P) = P$, мы получим $T^d(P) = P$, где d (не равное единице, разумеется) есть общий наибольший делитель m и n Таким образом, P инвариантно относительно T^d. Предположим, что T^d увеличивает φ на $2f\pi$. Из уравнения $T^n = T^{qd}$ мы видим, что T^n будет тогда увеличивать φ на $2qf\pi$, так что $k = qf$. Таким образом, k и n будут иметь общего делителя q, не равного единице, что противоречит тому, что они взаимно просты.

Все n инвариантных точек T_i(P) не только различны, но имеют одинаковый индекс. Следовательно, будет существовать точка Q инвариантная по отношению к T^n, но с индексом, имеющим обратный знак. Эта точка, а также ее образы при последовательных степенях преобразования T будут обязательно все отличны от точки P и ее образов и дадут нам, таким образом, второй, отличный от первого ряд из n точек.

---

[1] См. мою статью «The Restricted Problem of Three Bodies», Rendiconti di Palermo, vol. 39, 1915, особенно § 14.

Таким образом, мы получаем для любого $n > 2$ и любого числа $k \leqslant n/2$, взаимно простого с n, два геометрически различных гармонических n-угольника, обходящих k раз кривую C. Этим двум многоугольникам будут соответствовать, разумеется, четыре периодических движения. Мы не станем входить здесь в рассмотрение устойчивости или неустойчивости движения в зависимости от знака индекса.

Заслуживает внимания то обстоятельство, что здесь, очевидно, может быть применен метод, изложенный в § 2 и 3 этой главы, который покажет нам, что существует бесконечное множество периодических движений, лежащих в окрестности любого устойчивого периодического движения общего типа, если постоянная l не равна нулю.

Мы покажем, в частности, как этот метод можно применить к предельному типу периодического движения, когда бильярдный шар движется вдоль границы бильярдного стола по кривой C.

Для этой цели необходимо рассмотреть явные выражения для T для того случая, когда ϑ мало. Прямое вычисление дает:

$$\vartheta_1 - \vartheta = \frac{2}{3}\frac{k'}{k^2}\vartheta^2 + l\vartheta^3 + \dots,$$

$$\varphi_1 - \varphi = \frac{2}{k}\vartheta - \frac{4}{3}\frac{k'}{k^3}\vartheta^2 + m\vartheta^3 + \dots,$$

где функция $k(\varphi)$ обозначает кривизну кривой C в точке, имеющей данное φ, а функции $l, m, \dots$ зависят только от φ. Рассуждая совершенно формальным образом и заменяя $\vartheta_1 - \vartheta$ и $\varphi_1 - \varphi$ на $\Delta\vartheta$ и $\Delta\varphi$ соответственно, мы получим приближенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\vartheta}{d\varphi} = \frac{1}{3}\frac{k'}{k}\vartheta,$$

дающее после интегрирования

$$\vartheta = \vartheta_0 k^{1/3}(\varphi).$$

Здесь ϑ_0 обозначает значение ϑ в точке, имеющей кривизну, равную единице. Этот результат показывает, что в первом приближении кривая $\vartheta = \vartheta_0 k^{1/3}(\varphi)$ вблизи внутренней границы $\vartheta = 0$ кольца почти инвариантна при преобразовании T и, вероятно, может быть сделана с еще бо́льшим приближением инвариантной присоединением членов высших степеней. Очевидно, предельные периодические движения, образуемые кривой C, нужно на этом основании рассматривать как устойчивые движения.

Также, если переменная n обозначает число итераций, то мы имеем приближенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi}{dn} = 2\vartheta_0 k^{-2/3},$$

откуда, интегрируя, получаем:

$$n = \int k^{2/3} \frac{d\varphi}{2\vartheta_0}.$$

Отсюда следует, что φ возрастает более чем на 2π, вдоль приближенной инвариантной кривой, если $n\vartheta_0$ превосходит $\pi K^{2/3}$, где K есть максимальная кривизна кривой C.

Таким образом, представляется весьма вероятным, что лемма § 2 применима и здесь, и что существует бесконечное множество периодических движений, равномерно близких к кривой C.

§ 10. Геодезическая проблема. Построение преобразования TT^*. Мы переходим теперь к рассмотрению задач, связанных с геодезическими линиями на аналитической поверхности. Для того, чтобы получить насколько возможно более конкретные результаты, мы ограничимся случаем замкнутой выпуклой поверхности S, хотя окажется, что эти ограничения не являются необходимыми для приводимого ниже рассуждения.

Мы уже установили существование по крайней мере одной замкнутой геодезической линии g типа минимакса (глава V, § 7), которую мы будем считать не имеющей двойных точек. Наше первое утверждение заключается в том, что существует настолько большое положительное число L, что любая геодезическая дуга длины, большей L, пересекает g по крайней мере дважды (или идет вдоль g). В самом деле, в противном случае существовала бы последовательность геодезических дуг g_n длиной L_n, из которых ни одна не пересекает g, причем $\lim L_n = +\infty$. Но для этого необходимо, чтобы при достаточно большом L_n никакая часть g_n не лежала бы слишком близко от g, потому что замкнутые геодезические линии типа минимакса обладают тем свойством, что лежащие в окрестности их геодезические дуги пересекают их в точках, отделенных каждая от своей предыдущей дугами ограниченной длины; точнее, можно показать, что если P есть точка, лежащая на g, и P'' — ее вторая сопряженная точка в смысле вариационного исчисления, то дуга PP'' делает по крайней мере один полный оборот на g.[1]

---

[1] Доказательство этого утверждения см. в моей статье «Dynamical Systems with Two Degrees of Freedom», Trans. Amer. Math. Soc., vol. 18, 1917, особенно § 19.

Следовательно, если P_n будет середина g_n, то последовательность точек P_n будет иметь предельную точку P, не лежащую на g, и геодезические линии g_n будут иметь по крайней мере одно такое предельное направление в P, что полная геодезическая линия h, проходящая через P по этому направлению, не пересекается с g и даже нигде не приближается к g.

Рассмотрим теперь ту часть поверхности S, разделенной линией g на две части, в которой лежит h, и в частности часть S, лежащую между g и h. Одной из границ этой области s будет линия g, имеющая всюду геодезическую кривизну, равную нулю, а другая граница γ состоит из части или всего h и его предельных точек.

Пусть N_1 и N_2 будут две близкие достижимые точки полученной таким образом границы γ, так что в области s существует короткая криволинейная дуга N_1AN_2, все внутренние точки которой лежат не на границе s. Рассмотрим также короткую геодезическую дугу N_1GN_2. Тогда кривая $N_1AN_2GN_1$ ограничивает некоторую область σ.

Если какая-нибудь внутренняя точка дуги N_1GN_2 принадлежит границе γ, то вся дуга N_1GN_2, должна лежать на этой границе; иначе, кривая h пересекала бы N_1GN_2, и, следовательно, должна была бы иметь общие точки с N_1AN_2, что противоречит определению N_1AN_2. В этом случае N_1GN_2 составляет часть границы γ и область σ лежит целиком в s. Если геодезическая дуга N_1GN_2 не имеет внутренней точки, принадлежащей γ, то она лежит целиком внутри области s, за исключением точек N_1 и N_2. Следовательно, если мы возьмем на границе γ циклическую цепь близких точек

$$N_1,\ N_2,\ \dots,\ N_n,$$

то различные между собой короткие геодезические дуги N_1N_2, $N_2N_3, \dots, N_nN_1$ все лежат внутри s или совпадают с γ. Мы предполагаем, что эта цепь обходит γ в положительном угловом направлении. В этом случае граница γ будет все время оставаться слева. Но в построенном таким образом многоугольнике из геодезических дуг угол в области s при любой вершине будет меньше или равен π. В самом деле, если бы, например, угол при N_{i+1} превосходил π, то было бы очевидно, что γ лежит также влево от короткой геодезической дуги N_iN_{i+2} и, таким образом, точка N_{i+1} оказалась бы вполне окруженной точками, не лежащими на γ, что невозможно.

Но интегральная кривизна части S, ограниченной этим многоугольником, будет согласно известной формуле в точности равна сумме этих n внутренних углов, уменьшенной на величину $(n-2)\pi$, и, таким образом, будет меньше 2π, что невозможно, потому что интегральная кривизна каждой из обеих областей, ограниченных кривой g, равна в точности 2π согласно той же формуле.

Таким образом, мы пришли к противоречию, в силу чего наше утверждение о существовании числа L, обладающего тем свойством, что все геодезические дуги длины больше L, пересекают g, должно быть справедливо.

Мы введем теперь систему параметров, определяющих геодезические линии следующим образом: пусть какая-нибудь произвольно направленная геодезическая линия f пересекает данную направленную геодезическую линию g точке P. Положение точки P может быть определено ее геодезическим расстоянием ϑ от некоторой фиксированной точки на g, если полную длину g мы примем за 2π, что всегда можно сделать, выбрав соответствующую единицу длины, то переменная ϑ будет периодической с периодом 2π. Далее, буквой φ мы обозначим угол между положительными направлениями линий g и f в точке P, так что $0 < \varphi < \varphi$[15].

Следующий раз линия f пересечет линию g в противоположном направлении, и соответствующие координаты ϑ_1^* и φ_1^* будут изменяться аналитически вместе с ϑ и φ. Таким образом, мы определяем преобразование T:

$$\varphi_1^* = h(\varphi, \vartheta), \quad \vartheta_1^* = \chi(\varphi, \vartheta),$$

которое переводит в себя кольцо R:

$$0 < \varphi < \pi, \quad 0 \leqslant \vartheta < 2\pi,$$

где $\varphi + \pi$ и ϑ — полярные координаты точки кольца, так же как в предыдущем параграфе.

Подобным же образом за этим пересечением с координатами φ^*, ϑ^* будет следовать пересечение снова в первоначальном направлении с координатами φ_1, ϑ_1; таким образом, определяется второе преобразование кольца в себя, а именно T^*:

$$\varphi_1 = h^*(\varphi^*, \vartheta^*), \quad \vartheta_1 = \chi^*(\varphi^*, \vartheta^*).$$

Вдоль границ кольца R мы можем считать преобразования T и T^* непрерывными. В этом обстоятельстве можно убедиться следующим образом. Если геодезическая линия f, близкая к g, пересекает g под малым углом φ в данной точке ϑ, то, разумеется, f пересечет g опять под малым углом φ_1^* в точке ϑ_1^*, близкой к сопряженной с первой точкой пересечения, как было указано выше. Из этого следует доказываемая непрерывность. Кроме того, мы знаем, что три последовательные сопряженные точки соответствуют дуге, большей одного полного цикла кривой g.

Если $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$, то будем иметь соответственно $\varphi_1^* = 0$ или $\varphi_1^* = \pi$, так же как, если $\varphi^* = 0$ или π, то будем иметь $\varphi_1 = 0$ или π соответственно. Кроме того, если ϑ или ϑ^* возрастает вдоль границы кольца, то соответственно ϑ_1^* или ϑ_1 будет возрастать. Действительно, мы уже видели, что если ϑ — координата точки P, то ϑ_1^* есть координата сопряженной точки P'. Таким образом, T и T^* суть прямые преобразования([16]) кольца, переводящие внутреннюю и внешнюю границы R в самих себя.

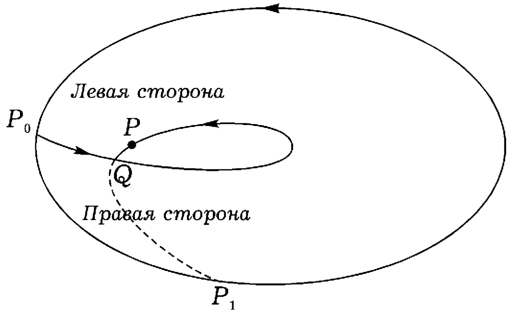

Рис. 4

Рассмотрим теперь несколько подробнее характер преобразования T и T^* вдоль границ. Эти преобразования, очевидно, определены только с точностью до полных оборотов, и желательно было бы установить какое-нибудь соглашение, которое устранило бы этот произвол и дало бы нам возможность сравнить преобразование вдоль внутренней и вдоль внешней границы кольца. Рассмотрим любую направленную дугу P_0P_1 геодезической линии f между двумя последовательными точками пересечения P_0 и P_1 линий f и g (рис. 4) и будем называть двойную точку Q дуги P_0P_1 положительной, если движущаяся точка, описывающая дугу P_0P_1, пересекая свой пройденный путь в точке Q, переходит с левой стороны на правую, и отрицательной в противоположном случае. «Индексом» дуги P_0P_1 мы назовем разность между числом положительных и числом отрицательных двойных точек в дуге P_0P_1. Определим теперь значение разности $\vartheta_1^* - \vartheta$ как равное наименьшей положительной дуге P_0P_1 линии g, увеличенное на $2\pi i$, где i — индекс дуги.

Мы можем показать теперь, что определенное таким образом ϑ_1^* изменяется непрерывно вместе с ϑ и φ. В самом деле, если ϑ и φ изменяются, то новые двойные точки не могут появиться внутри дуги P_0P_1, потому что геодезическая дуга не может касаться себя самой. Если положительная двойная точка появляется в P_1, то, очевидно, ϑ_1^*

увеличивается как раз на 2π, как и должно быть по нашему определению. При появлении отрицательной двойной точки ϑ_1^* подобным же образом уменьшается на 2π. Таким образом, наше соглашение приводит к непрерывной функции во всех случаях.

Но очевидно также, что если геодезическую дугу P_0P_1, лежащую в окрестности кривой g, непрерывно деформировать в этой окрестности, не сохраняя ее геодезического характера, но оставляя точки P_0 и P_1 неподвижными и допуская только простое внутреннее касание, то положительные и отрицательные двойные точки будут появляться одновременно парами, так что индекс кривой не изменится. Таким образом, если мы дугу P_0P_1 преобразуем в спиралеобразную кривую, исключив все отрицательные двойные точки, то индекс, очевидно, будет равен числу оборотов этой спирали вдоль g. В этом случае увеличение ϑ, т. е. $\vartheta_1^* - \vartheta$, будет измеряться согласно нашему условию длиной дуги вдоль кривой g(17). Если, однако, нами исключены все положительные двойные точки, то наше соглашение даст для разности $\vartheta_1^* - \vartheta$ выражение $2\pi i$ ($i \leqslant 0$) плюс угловое значение кратчайшей положительной дуги P_0P_1, и, следовательно, эта разность $\vartheta_1^* - \vartheta$ превосходит длину дуги P_0P_1 на 2π(18).

Отсюда выводим, что, согласно нашему условию, разность $\vartheta_1^* - \vartheta$ измеряется для $\varphi = 0$ фактическим приращением ϑ вдоль g, а для $\varphi = \pi$ эта разность измеряется алгебраическим приращением (фактически убыванием) ϑ вдоль дуги, увеличенным на 2π, так как дуга P_0P_1 должна браться в положительном направлении.

Но при переходе от точки P к ее второй сопряженной точке P'', при $\varphi = 0$, ϑ увеличивается на некоторую величину α, причем

$$2k\pi \leqslant \alpha < 2(k+1)\pi,$$

где число $k \geqslant 1$ не зависит от положения точки P; действительно, одно-однозначное прямое преобразование точек кривой g, переводящее любую точку P в ее вторую сопряженную, определяет коэффициент вращения[1], лежащий между $2k\pi$ и $2(k+1)\pi$ причем $k \geqslant 1$, благодаря упомянутому уже свойству сопряженных точек на геодезической линии минимаксного типа. Отсюда мы получаем неравенство

$$2k\pi \leqslant \chi(0, \vartheta) - \vartheta < 2(k+1)\pi.$$

Подобным же образом, рассматривая случай $\varphi=\pi$, убедимся, что $\vartheta_1^* - 2\pi$ уменьшается на аналогичную величину, так что имеем:

$$-2k\pi < \chi(\pi, \vartheta) - \vartheta \leqslant -2(k-1)\pi.$$

[1]Определение коэффициентов вращения Пуанкаре и краткое рассмотрение их свойств см. в моей статье «Surface Transformations and Their Dynamical Applications», Acta Mathematica, vol. 43, 1922, § 45.

Отсюда следует, что преобразование T (или T^*) передвигает в противоположных направлениях точки обеих границ кольца R, во всяком случае, если мы исключим тот особый случай, когда вторая сопряженная точка совпадает с первоначальной после одного цикла кривой g([19]).

§ 11. Применение теоремы Пуанкаре к проблеме геодезических линий. Проблема геодезических линий является, разумеется, гамильтоновой, причем главную функцию H представляет квадрат скорости. В четырехмерном многообразии состояний движения четырехкратный интеграл

$$\iiiint dp_1\, dq_1\, dp_2\, dq_2$$

есть инвариантный интеграл. В инвариантном подмногообразии $H = \mathrm{const}$ должен поэтому существовать инвариантный объемный интеграл, а именно:

$$\iiint dq_1\, dp_2\, dq_2,$$

при условии, что $H = h$, q_1, p_2, q_2 приняты за координаты (см. § 3). Ограничение $H = \mathrm{const}$ фиксирует постоянную скорость. Рассмотренное выше кольцо состояний движения, пересекающих g в положительном направлении, очевидно, представлено в нашем трехмерном многообразии тоже кольцом $\overline{R}$, ограниченным двумя замкнутыми кривыми, изображающими линию g, проходимую в обоих возможных направлениях. Образ $TT^*(P)$ какой-нибудь точки P, очевидно, получается, если мы будем следовать за линией потока, проходящей через TT^*, пока она не пересечет опять колцо $\overline{R}$. Дальнейшее рассмотрение показывает, что полученное таким образом кольцо $\overline{R}$ представляет собой аналитическую поверхность.

Если мы теперь рассмотрим трубку, состоящую из линий потока и имеющую оба свои основания с площадями $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, на $\overline{R}$, причем q_1 есть независимая переменная, а α_1, α_2 суть углы, образуемые линиями потока с обоими основаниями, то потеря «объема» в промежуток времени Δq_1 будет на одном конце приближенно равна

$$(\sin \alpha_1 \Delta\sigma_1)\Delta q_1,$$

в то время как приращение объема на другом конце будет приближенно

$$(\sin \alpha_2 \Delta\sigma_2)\Delta q_1.$$

Таким образом, $\int \sin\alpha\, d\sigma$ является положительным инвариантным плоскостным интегралом, необходимым для применения геометрической теоремы Пуанкаре. Следовательно, существуют две точки кольца R, инвариантные относительно преобразования TT^*, откуда мы можем немедленно сделать следующий вывод.

Пусть мы имеем выпуклую аналитическую поверхность, на которой какая-нибудь замкнутая геодезическая линия минимаксного типа (существование таких линий нами было доказано ранее) *не имеет двойных точек; предположим еще, что ни для одной из точек этой геодезической линии ее вторая сопряженная точка не совпадает с ней после одного полного оборота. Тогда будет существовать вторая замкнутая геодезическая линия, пересекающая первую ровно два раза.*

Каждой такой замкнутой геодезической линии, разумеется, соответствуют две инвариантные точки кольца R, отвечающие двум направлениям обхода.

При тех же самых условиях должны существовать, по крайней мере, две геодезические линии, встречающие данную геодезическую линию типа минимакса только в двух точках.

Для доказательства этого утверждения мы будем рассуждать следующим образом. Для точек кольца R мы по определению имеем:

$$T(\vartheta,\, \varphi) = (\vartheta_1^*,\, \varphi_1^*).$$

С другой стороны, та же самая геодезическая линия может быть взята с обратным направлением, так что

$$T(\vartheta_1^*,\, \pi - \varphi_1^*) = (\vartheta,\, \pi - \varphi).$$

Если мы теперь определим «отражение» U посредством формулы

$$U = (\vartheta,\, \varphi) = (\vartheta,\, \pi - \varphi),$$

то получим:

$$TU(\vartheta,\, \varphi) = (\vartheta_1^*,\, \pi - \varphi_1^*),$$

откуда

$$TUTU = I,$$

где I обозначает тождественное преобразование. Следовательно, преобразование $TU = V$ имеет порядок 2, как и U, и мы находим, что $T = VU$, т.е. это есть композиция двух инволюторных преобразований. Подобным же образом мы находим $T^* = V^*U$, где V^* — тоже инволюторное преобразование. Отсюда мы заключаем, что преобразование TT^* имеет вид VUV^*U. Предположим теперь, что у нас имеется инвариантная точка P относительно преобразования TT^*, так что

$$VUV^*U(P) = P.$$

Применяя обратное преобразование $(TT^*)^{-1}$, мы находим тогда

$$UV^*UV(P) = P,$$

откуда

$$VTT^*(P) = V(P).$$

Следовательно, если P есть инвариантная точка относительно преобразования TT^*, то таковой же является $V(P)$.

Но точка $V(P)$ должна быть геометрически отлична от P, иначе мы имели бы

$$TU(P) = P$$

или, выражая это соотношение через координаты (ϑ, φ) точки P,

$$\vartheta_1^* = \vartheta, \quad \pi - \varphi_1^* = \varphi.$$

Но это означало бы, что ближайшее пересечение, взятое нами геодезической линии g, изображаемой точкой P на кольце, с минимаксной геодезической линией пересекало бы эту последнюю в той же точке и в противоположном направлении, что, очевидно, невозможно.

Индексы инвариантной точки P и соответственной второй инвариантной точки $V(P)$ относительно преобразования TT^* равны. Действительно, произведем замену переменных, соответствующую символическому уравнению

$$Q = V(P),$$

при которой любая точка P переводится в $V(P)$. Преобразование TT^* тогда перейдет в

$$VTT^*V = (TT^*)^{-1},$$

в чем легко убедиться сразу, подставляя вместо TT^* выше выведенное для него выражение VUV^*U. Следовательно, преобразование TT^* в окрестности какой-нибудь инвариантной точки P эквивалентно обратному преобразованию в окрестности соответствующей инвариантной точки $V(P)$. Но индекс инвариантной точки не изменяется при замене переменных и одинаков для прямого и обратного преобразований. Следовательно, индексы двух соответственных точек P и $V(P)$ обязательно должны быть равны между собой.

Геометрически очевидно, что соответствующие точки P и $V(P)$ отвечают двум возможным направлениям обхода соответствующей им геодезической линии.

Так как обобщенная теорема Пуанкаре дает нам возможность утверждать существование, по крайней мере, двух инвариантных точек с индексами разных знаков, то мы можем из этого заключить, что существуют две геометрически различные замкнутые геодезические линии, каждая из которых пересекает данную замкнутую геодезическую линию только дважды.

Таким образом, выделенное выше курсивом утверждение доказано.

Применяя то же рассуждение к высшим степеням преобразования TT^*, мы можем доказать существование других типов геодезических линий. Кроме того, тут применимы методы § 1 этой главы, с помощью которых мы можем доказать, что в непосредственной близости к любой замкнутой геодезической линии устойчивого типа будет, вообще говоря, находиться бесчисленное множество замкнутых геодезических линий.

В заключение я сделаю еще два замечания относительно проблемы геодезических линий. Во-первых, заключение о том, что существуют по крайней мере две геодезические линии, пересекающие данную геодезическую линию типа минимакса ровно в двух точках каждая, справедливо, несомненно, для поверхностей значительно более общего вида, чем рассмотренные.

Во-вторых, если выпуклая поверхность симметрична в пространстве относительно плоскости, содержащей геодезическую линию g, то будут существовать различные замкнутые геодезические линии, пересекающие g дважды под прямыми углами. Эти симметричные геодезические линии могут быть исследованы методами, аналогичными тем, которые я применил при изучении известных симметричных периодических орбит в ограниченной проблеме трех тел (цитировано выше). Действительно, если g минимаксного типа, то преобразования T и T^* оказываются тождественными([20]), и TT^* оказывался квадратом произведения двух инволюторных преобразований так же, как основное преобразование в ограниченной проблеме трех тел.

Глава 7
Общая теория динамических систем

§ 1. Вводные замечания[1]**.** Конечной целью теории движения динамической системы должно служить качественное определение всех возможных типов движений и взаимоотношений между этими движениями.

В настоящей главе делается попытка дать изложение подобной теории.

Как мы видели в предыдущих главах, для весьма общего класса динамических систем совокупность всех состояний движения может быть приведена в одно-однозначное соответствие с точками P замкнутого n-мерного многообразия M таким образом, что при подходящем выборе координат $x_1, \ldots, x_n$ дифференциальные уравнения движения могут быть написаны в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

в окрестности любой точки многообразия M_i, где X_i суть вещественные аналитические функции своих аргументов, а t обозначает время. Движение системы представляется в таком случае кривыми, лежащими в M. Через каждую точку P_0 многообразия M проходит одна и только одна подобная кривая движения, и положение точки P на этой кривой изменяется, как аналитическая функция, в зависимости от положения P_0 и от интервала времени, прошедшего между P_0 и P. При изменении t каждая точка многообразия M движется по своей кривой движения, и, таким образом, мы получаем постоянный поток многообразия M в самом себе.

Исключая случай, когда M содержит сингулярные точки или область бесконечно удаленной точки, мы ограничимся рассмотрением специального класса динамических систем, а именно системами «несингулярного типа». Большинство теорем, касающихся задач этого типа,

[1] § 1–4 взяты прямо из моей статьи «Über gewisse zentrale Bewegungen dynamischer Systeme», Göttinger Nachrichten, 1926. Остальная часть этой главы тесно связана с моими статьями: «Quelques théorèmes sur les mouvements des systèmes dynamiques», Bull. Soc. Math. France, vol. 40 (1912); «Surface Transformations and Their Dynamical Applications», Acta Mathematica, vol. 43, 1922, в особенности § 54–57.

допускает, однако, обобщения на случаи сингулярных систем. Проблема трех тел, рассматриваемая в главе IX, принадлежит к задачам сингулярного типа.

Дифференциальные уравнения классической динамики принадлежат к более специальному классу и в частности обладают инвариантным n-мерным интегралом. В результате этого любая малая частица σ многообразия M, содержащая любую данную точку P_0 в некоторый момент времени t_0, должна после любого другого момента времени t_1 занять положение, частично или полностью покрывающее первоначальное положение, соответствовавшее моменту t_0.

Это можно показать следующим образом. Положим $t_1 - t_0 = \tau$ и рассмотрим положение частицы σ в моменты $t_0 + \tau$, $t_0 + 2\tau$, ... Эти положения не могут не иметь попарно общих точек; в самом деле, если v обозначает величину инвариантного интеграла, распространенного на частицу σ в ее первоначальном положении, то этой же величине будет равен интеграл во всех последующих положениях, и так как его величина на всем многообразии M конечна и равна, скажем, V то взаимно неналегающих среди этих положений может быть не больше, чем V/v([1]). Следовательно, какие-то две частицы i-я и j-я $(i < j)$ налегают друг на друга, иначе говоря, положение частицы σ в момент $t_0 + i\tau$ налегает на положение той же частицы в момент $t_0 + j\tau$. Но в таком случае очевидно, что положение частицы в момент $t_0 + (j - i)\tau \geqslant t_0 + \tau = t_1$ налегает на первоначальное. Посредством этого рассуждения и его естественного обобщения Пуанкаре доказал[1], что, вообще говоря, движения таких более специальных динамических систем будут возвращаться бесконечно много раз в окрестность своего первоначального состояния и будут обладать родом устойчивости «в смысле Пуассона».

Первая наша задача в этой главе — показать, что с любой динамической системой, не ограниченной подобным образом, всегда связана некоторая замкнутая совокупность так называемых «центральных движений», обладающих этим свойством региональной рекуррентности([2]), к которым все другие движения системы, вообще говоря, стремятся асимптотически.

§ 2. Блуждающие и неблуждающие движения. Рассмотрим произвольную точку P_0 многообразия состояний движения M. Пусть σ будет открытое связное множество малого диаметра ε^2, содержащее P_0([3]). При возрастании времени t эта «частица» σ движется. Может случиться, что P_0 представляет состояние равновесия; в этом

---

[1]«Mèthodes nouvelles de la Mécanique céleste», т. 3, гл. 26.

[2]Очевидно, что в M можно определить расстояние надлежащим образом. Диаметром совокупности точек будет тогда просто верхняя грань расстояний двух точек этой совокупности.

случае частица σ все время будет содержать P_0; временно мы исключим этот случай из рассмотрения. Во всяком другом случае σ через некоторое время придет в положение, не имеющее общих точек с ее первоначальным положением σ_0, если только σ_0 достаточно мало; это следует из того, что составляющие скорости dx_i/dt для всех точек частицы приблизительно такие же, как для P_0. Если можно выбрать ε настолько малым, чтобы σ после этого никогда не налегала на свое первоначальное положение, то мы будем называть P_0 «блуждающей точкой» и соответственное движение «блуждающим движением».

В противном случае точку P_0 мы будем называть «неблуждающей точкой» и соответственное движение «неблуждающим движением». Неблуждающими мы будем, разумеется, называть также точки равновесия и соответственные вырождающиеся «движения»([4]).

В этих определениях имеется кажущаяся асимметрия между направлениями возрастания и убывания времени t. Но легко видеть, что фактически нет никакой асимметрии. Действительно, если частица σ налегает на свое первоначальное положение σ_0 через промежуток времени τ, то она ведет себя так же через промежуток времени $-\tau$; потому что, если частицы σ_0 и σ_τ, налегают друг на друга, то $\sigma_{-\tau}$ и σ_0, очевидно, тоже налегают друг на друга.

Таким образом, блуждающая точка P_0 характеризуется тем, что соответственная частица σ описывает n-мерную трубку, нигде не пересекающую самое себя, когда t изменяется от $-\infty$ до $+\infty$([5]). По этой причине название «блуждающая» представляется законным, так как точка никогда не возвращается в бесконечно малую окрестность какой-нибудь раз пройденной точки([6]).

Совокупность W всех блуждающих точек многообразия представляет собой открытую совокупность, состоящую из кривых движения. Совокупность M_1 неблуждающих точек M состоит из дополнительной замкнутой совокупности кривых движения([7]).

Из того, что было сказано выше, сразу следуют все части этого утверждения, кроме разве того, что W открыто и, следовательно, M_1 замкнуто. Но если P_0 есть блуждающая точка, то таковыми, очевидно, будут все точки частицы σ, содержащей P_0([8]). Отсюда тотчас же следует, что W — открытая совокупность и, значит, M_1 — замкнутая совокупность.

Если совокупность M содержит точки, не являющиеся предельными точками совокупности W, то эти точки образуют подмножество M_1' множества M_1, состоящее из кривых движения и обладающее свойством региональной рекуррентности.

Очевидно, что M_1' состоит из кривых движения, потому что если какая-нибудь точка Q совокупности M_1 не находится в непосредственном соседстве ни с какой кривой движения, принадлежащей W, то то же самое будет справедливо относительно любой точки кривой движения, проходящей через Q(9). Мы видим также, что достаточно малая частица, содержащая Q, будет вся содержаться в M_1', так что M_1' является открытой совокупностью неблуждающих точек. Отсюда следует свойство региональной рекуррентности.

Очевидно, что совокупность $M_1'' = M_1 - M_1'$ представляет собою просто границу открытых n-мерных совокупностей W, M_1'(10). Она является состоящим из кривых движения замкнутым множеством размерности, меньшей n.

С возрастанием или убыванием времени любая блуждающая точка приближается асимптотически к совокупности M_1.

Это основное свойство блуждающих движений доказывается очень просто. Рассмотрим любую открытую окрестность множества M_1 и дополнительную замкнутую совокупность C, состоящую исключительно из блуждающих точек. Около каждой точки, принадлежащей C, может быть построена маленькая частица σ, которая при своем движении никогда не будет налегать на свое первоначальное положение. Следовательно, можно найти конечное число таких частиц, покрывающих полностью C. Движущаяся точка может войти в одну из таких частиц, которые мы считаем неподвижными, только однажды и оставаться там короткий промежуток времени. Отсюда очевидно, что она по истечении некоторого конечного промежутка времени будет оставаться в данной окрестности совокупности M_1. Следовательно, всякая движущаяся точка будет приближаться асимптотически к M_1, что и требовалось доказать.

Более внимательное изучение обнаруживает некоторые дальнейшие особенности способа приближения блуждающих движений к неблуждающим движениям. Так как в предыдущем рассуждении движущаяся точка входила в какую-нибудь из неподвижных частиц, покрывающих C, только однажды и оставалась там в течение короткого промежутка времени, то мы сможем высказать следующее положение.

Всякое блуждающее движение остается вне какой-нибудь выбранной окрестности совокупности M_1 в течение конечного времени T и покидает эту окрестность конечное число N раз, где N и T равномерно ограничены, коль скоро окрестность множества M_1 выбрана[1](11).

§ 3. Последовательность M, M_1, M_2, ... Придя к замкнутой совокупности M_1(12), между точками которой расстояние может быть

---

[1]Для того, чтобы сделать счет выводов точным, мы должны были бы выбрать покрывающие частицы таким образом, чтобы каждая из них отсекала самое большее один отрезок от каждой кривой движения, и затем рассматривать, гак окрестность совокупности M_1, дополнение к сумме этих частиц.

определено так же, как и между точками M, мы можем теперь определить блуждающие и неблуждающие точки относительно M_1 следующим образом. Выберем произвольную точку P_0, принадлежащую M_1, и открытое множество σ малого диаметра, содержащее точку P_0. Оставляя в стороне случай, когда P_0 есть точка равновесия, и выбирая диаметр σ достаточно малым, мы видим, что содержащаяся в σ часть M_1 перестанет в некоторый момент налегать на свое первоначальное положение. Если мы можем выбрать диаметр σ настолько малым, чтобы та часть M_1, которая содержится в σ, никогда уже более при дальнейшем движении не налегала на свое первоначальное положение, то мы будем говорить, что P_0 есть блуждающая точка совокупности M_1 (хотя она по определению M_1 будет неблуждающей относительно M.) Все остальные точки, в том числе точки равновесия, принадлежащие M_1, будут называться неблуждающими точками множества M_1([13]).

Очевидно, что аналогия с M полная. Неблуждающие точки относительно M_1 образуют замкнутую совокупность M_2, состоящую из кривых движения. К этой совокупности стремится асимптотически любая точка P, принадлежащая совокупности W_1 блуждающих относительно M_1 точек, при возрастании или убывании времени t; мы можем так же сформулировать утверждение, аналогичное приведенному в конце предыдущего параграфа.

Тот же процесс может быть теперь повторен с совокупностью M_2, взятой в качестве основной, и таким образом мы определим M_3 и W_2. Идя далее таким же образом, мы получим последовательность замкнутых, непустых совокупностей M, M_1, M_2, ... Мы будем говорить, что процесс обрывается на какой-нибудь совокупности M_i, если совокупность M_{i+1} совпадает с M_i, в этом случае W_i будет, разумеется, пустой совокупностью. В случае, если процесс не обрывается таким способом, мы будем иметь последовательность различных замкнутых, непустых совокупностей M, M_1, M_2, ..., каждая из которых содержится в предыдущих совокупностях и содержит последующие. Эта последовательность определяет предельную совокупность M (общую часть всех совокупностей M_i), которая, очевидно, замкнута, непуста и состоит из кривых движения. Применяя к ней тот же процесс, мы получим совокупности $M_{\omega+1}$, $M_{\omega+2}$. Таким образом последовательно определяются

$$\begin{array}{llll}
M, & M_1, & M_2, & \dots, \\
M_\omega, & M_{\omega+1}, & M_{\omega+2}, & \dots, \\
M_{2\omega}, & M_{2\omega+1}, & M_{2\omega+2}, & \dots, \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
M_{\omega^2}, & M_{\omega^2+1}, & M_{\omega^2+2}, & \dots, \\
\dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

согласно известной теории трансфинитных порядковых чисел, разработанной Кантором.

Но мы получили, таким образом, вполне упорядоченное множество замкнутых совокупностей, из которых каждая содержится в предыдущих и содержит последующие. Как известно, такая совокупность должна быть конечна или исчислима. Следовательно, процесс непременно оборвется на каком-нибудь M_r (r — конечное или трансфинитное число).

Таким образом, существует обрывающаяся трансфинитная последовательность различных замкнутых совокупностей

$$M,\ M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_w,\ \ldots,\ M_r,$$

где элемент M_{p+1}, непосредственно следующий за M_p, состоит из точек, не блуждающих относительно M_p, тогда как элемент M_p, не имеющий непосредственно предшествующего ему, есть общая часть предшествующих. Блуждающие точки совокупности M_p стремятся асимптотически к M_{p+1} и притом таким образом, что полное время, в течение которого какая-нибудь такая точка находится вне данной окрестности M_{p+1}, так же как и число раз, когда эта точка покидает эту окрестность, равномерно ограничены([14]).

Последняя совокупность M_r, на которой обрывается процесс, есть совокупность «центральных движений». Она, очевидно, обладает свойством региональной рекуррентности, так как совокупность W_r блуждающих точек совокупности M_r пуста. Из этого свойства методом Пуанкаре (см. книгу, цитированную выше) можно вывести, что в любой окрестности какой-нибудь точки, принадлежащей M_r, имеется движение, которое возвращается в эту окрестность бесконечно много раз в будущем и в прошедшем([15]).

В самом деле, если в этой окрестности проходит изолированная кривая движения, принадлежащая M_r, то эта кривая должна быть замкнута и соответствующее движение должно быть периодическим, так как движение неблуждающее. В этом случае само периодическое движение обладает требуемым свойством. Если изолированного движения не имеется, то сколь малой мы ни выбрали бы окрестность данной точки, она при своем движении будет в некоторый момент налегать на свое первоначальное положение. Таким образом, мы получим две точки P, Q на одной и той же кривой движения, принадлежащей M_r, лежащие обе в маленькой частице, содержащей данную точку, но отстоящие далеко друг от друга по времени. Возьмем теперь еще меньшую частицу около P, такую маленькую, чтобы всякая точка P' этой частицы пришла в точку Q', лежащую в первоначальной частице и вблизи от Q, когда P придет в Q. Выбирая P' подходящим образом, мы можем сделать так, чтобы на кривой движения, проходящей через P', этой точке предшествовала точка R', лежащая все в той же частице, что и P', Q'. Таким образом, мы получаем дугу $R'P'Q'$ кривой движения, принадлежащей M_r, такую, что три точки R', P', Q', отстоящие далеко друг от друга по времени, лежат в одной и той же, данной в начале частице. Далее, выбирая еще меньшую частицу около P', мы приходим к дуге $R''P''Q''S''$, а затем к $T'''R'''P'''Q'''S'''$ и т. д. Пределом точек P, P', P'', ... будет точка P^*, принадлежащая M_r и лежащая в данной частице. Проходящая через нее кривая движения пересекает эту частицу бесконечно много раз в прошедшем и в будущем.

Очевидно, что периодические движения в динамической проблеме должны принадлежать к совокупности центральных движений. Движения, которые мы определим ниже как «рекуррентные» (§ 7), тоже принадлежат к числу центральных.

§ 4. Некоторые свойства центральных движений. Легко видеть, что каждая точка многообразия M попадает в любую данную окрестность совокупности центральных движений по крайней мере однажды в течение любого промежутка времени постоянной, достаточно большой длины. В самом деле, любая точка попадает в окрестность M_2 равномерно часто, потому что всякое движение, принадлежащее M_1, приближается к M_2 равномерно часто, и, следовательно, то же справедливо относительно движений, близких к M_1. Продолжая таким же образом дальше, мы видим, что свойство равномерного приближения имеет место для совокупностей M_1, M_2, ... Если эта последовательность продолжается до M_ω, то то же справедливо и для M_ω. В самом деле, так как M_ω есть предел последовательности убывающих замкнутых совокупностей, то в любой окрестности M_ω лежит какой-нибудь M_n, и, следовательно, любая окрестность M_ω будет в то же время окрестностью M_n. Но так как произвольная точка попадает в любую данную окрестность M_n равномерно часто, то же самое будет справедливо и для M_ω. Продолжая то же рассуждение для $M_{\omega+1}, \dots, M_{\omega^2}, \dots, M_r$, мы придем к доказываемому утверждению.

Но мы видели, что движения, принадлежащие M, приближаются к движениям, лежащим в M_1, определенным образом и что, с другой стороны, движения, принадлежащие M_1, приближаются подобным же образом к движениям, принадлежащим M_2. Соединяя вместе эти результаты, мы могли бы сделать некоторые выводы относительно характера приближения какой-нибудь точки многообразия M к M_2. Эти выводы могли бы быть затем перенесены на $M_3, \dots, M_w$. Но вместо, этого мы установим более простой результат, справедливый для всех совокупностей M_p.

Определим «вероятность» того, что дуга PQ кривой движения лежит в данной области Σ, как отношение интервала времени, когда она лежит в Σ, к общему времени между P и Q([16]).

Вероятность того, что какая-нибудь дуга кривой движения лежит в произвольной окрестности совокупности M_p и в частности в окрестности совокупности центральных движений M_r, стремится к единице, когда промежуток времени, соответствующий дуге, безгранично возрастает([17]).

Из того, что было доказано в начале относительно M_1, следует, что вероятность того, что какая-нибудь дуга кривой движения лежит в данной окрестности M_1, стремится равномерно к единице с безграничным возрастанием промежутка времени, соответствующего дуге([18]).

Для того, чтобы доказать подобное же свойство для M_2, мы напомним прежде всего, что любое произвольное движение, принадлежащее M_1, изображается кривой, которая целиком лежит в данной окрестности совокупности M_2, за исключением ограниченного числа дуг, соответствующих все вместе ограниченному промежутку времени. Но всякая данная дуга, достаточно близкая к M_1, будет разделять с движениями M_1 свойство находиться в данной окрестности M_2, за исключением ограниченного числа дуг с ограниченной общей длиной, при условии, что мы сначала выберем длину дуги, а затем выберем соответственным образом окрестность совокупности M_1, в которой эта дуга должна лежать. Кроме того, если какая-нибудь точка дуги кривой движения данной длины лежит достаточно близко к M_1, то дуга данной длины должна будет лежать в выбранной окрестности M_1.

Следовательно, так как вероятность того, что дуга кривой движения многообразия M лежит в заданной окрестности M_1, стремится к единице, если мы будем безгранично увеличивать промежуток времени, и так как всякая точка, лежащая в такой окрестности, принадлежит длинной дуге кривой движения, лежащей в окрестности M_2, за исключением конечного числа отрезков с ограниченной общей длиной, то очевидно, что вероятность того, что дуга кривой движения в M лежит в данной окрестности M_2, стремится к единице равномерно с безграничным возрастанием промежутка времени.

То же рассуждение приложимо и к совокупностям $M_3, M_4, \ldots$ Относительно M_ω мы должны заметить только, что так как M_ω есть предел убывающей последовательности замкнутых совокупностей $M_1, M_2, \ldots$, то для достаточно большого n каждая точка M_n будет находиться на расстоянии, меньшем ε от какой-нибудь точки M_ω. Так как вероятность того, что произвольная дуга кривой движения, отвечающая достаточно большому промежутку времени, будет на расстоянии меньшем ε от M_n не меньше $1 - \delta$, где δ сколь угодно малое число, то вероятность того, что она лежит на расстоянии, меньшем 2ε от M_ω тоже не меньше $1 - \delta$. Очевидно, это рассуждение можно продолжить на дальнейшие M_p, и, таким образом, теорема доказана([19]).

§ 5. О роли центральных движений. Очевидно теперь, что первой задачей, относящейся к свойствам динамических систем, является отыскание центральных движений. Для уравнений классической динамики центральными движениями, очевидно, будут все движения системы по крайней мере для случая несингулярных систем, который нас единственно интересует в данный момент. В самом деле, из свойства устойчивости в смысле Пуассона следует свойство региональной рекуррентности, характерное для центральных движений.

§ 6. Группы движений. Рассмотрим теперь любую кривую движения, лежащую в M, и точку P_t движущуюся по ней. Точки P_t образуют «точечную группу» данного движения. Всякая предельная точка совокупности P_t, соответствующая $\lim t = +\infty$, будет называться ω-предельной точкой, а всякая предельная точка совокупности P_t при $\lim t = -\infty$ будет называться α-предельной точкой.

Во всех случаях предельные точки каждого из двух классов образуют замкнутую совокупность.

Все ω- (или α-) предельные точки любого движения P_t образуют замкнутую связную совокупность, состоящую из кривых движения. Расстояние точки P_t от этой предельной совокупности стремится к нулю при $\lim t = +\infty$ (соответственно $-\infty$).

Действительно, пусть P^* будет ω-предельная точка, к которой P_t приближается при $\lim t = +\infty$ и пусть P^{**} будет точка, в которую P^* придет через промежуток времени c. Очевидно, что P_{t+c} будет стремиться к P^{**}, если P_t стремится к P^*. Иначе говоря, P^{**} есть ω-предельная точка, если P^* есть таковая. Отсюда следует, что все точки точечной группы, содержащей P^*, суть ω-предельные точки.

Для того, чтобы доказать, что расстояние P_t от ω-предельной совокупности стремится к нулю, мы прибегнем к рассуждению от противного. Если бы P_t не стремилось равномерно к ω-предельной совокупности при $\lim t = +\infty$, то можно было бы выбрать бесконечную последовательность безгранично возрастающих значений t таким образом, чтобы для всех этих значений точка P_t отстояла от всякой ω-предельной точки на расстоянии, не меньшем некоторого положительного количества d. Но эта последовательность точек P_t должна иметь по крайней мере одну предельную точку P_1, и эта точка будет находиться на расстоянии, не меньшем d, от любой ω-предельной точки. Однако, по определению, P_1 есть ω-предельная точка, так что мы пришли к противоречию. Очевидно, что ω-предельная совокупность — связная, так как к ней равномерно приближается точка P_1, когда t стремится к $+\infty$, тогда как P_t движется непрерывно вдоль кривой движения([20]).

Если мы рассмотрим совокупности движений $M_1, M_2, \ldots$, приводящие к совокупности центральных движений M_r, то увидим, что α- и ω-предельные движения для движения совокупности M_p лежат в M_{p+1}.

§ 7. Рекуррентные движения. Рассмотрим теперь произвольную замкнутую связную совокупность Σ, состоящую из кривых движения. Мы уже видели выше, что α- и ω-предельные движения для любого движения образуют такие совокупности. В более общем случае, если мы возьмем любую связную совокупность, состоящую из кривых движения, и присоединим ее предельные точки, то получим совокупность Σ требуемого типа.

Если совокупность Σ не имеет непустого собственного подмножества Σ' того же типа, то мы будем говорить, что Σ есть «минимальная совокупность движений». В этом случае, если P есть какая-нибудь точка совокупности Σ, то ее α- и ω-предельные точки образуют замкнутые связные подмножества Σ, которые должны совпадать с Σ.

По определению всякая полная точечная группа в минимальной совокупности является «рекуррентной точечной группой» и всякое движение в этой группе называется «рекуррентным».

Все рекуррентные движения принадлежат к числу центральных движений. Действительно, α- или ω-предельные точки всякого такого движения в M_p образуют совокупность Σ в M_{p+1}, которая должна совпадать с минимальной совокупностью, так что всякая точка нашей минимальной совокупности, лежащая в M_p, должна лежать в M_{p+1}. Следовательно, вся минимальная совокупность, соответствующая рекуррентному движению, лежит в M_r.

Кроме простейшего случая, когда Σ состоит из единственной замкнутой кривой, во всех остальных случаях минимальное множество Σ содержит неисчислимое совершенное множество кривых движения([21]). В самом деле, представим себе, что Σ содержит изолированную кривую движения. Точка P_t на этой кривой имеет точки этой кривой в качестве своих α- или ω-предельных точек. Следовательно, эта кривая должна быть замкнута и составлять минимальную совокупность.

Для того, чтобы точечная группа, образованная движением P_t, была рекуррентной, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного количества ε можно было найти такое положительное число T, чтобы всякая дуга $P_t P_{t+T}$ кривой движения содержала точки, лежащие на расстоянии, меньшем ε от любой точки кривой движения.

Это условие необходимо.

В противном случае существовала бы рекуррентная точечная группа Σ, порождаемая движением P_t, и положительное число ε, такое, что, можно найти последовательность дуг $P_t P_{t+2T}$ (T — произвольно велико), каждая из которых не имеет ни одной точки, лежащей на расстоянии, меньшем ε от соответственной точки Q, принадлежащей Σ. При возрастании T точки Q имеют по крайней мере одну предельную точку Q^*, и поэтому очевидно, что для подходящим образом выбранной подпоследовательности дуг $P_t\,P_{t+2T}$ никакая точка не лежит на расстоянии, меньшем $\varepsilon/2$ от Q. Рассмотрим последовательность середин P_{t+T} этих дуг. Пусть P^* будет какая-нибудь предельная точка этой последовательности. Мы можем утверждать тогда, что все точки точечной группы, содержащей P^*, находятся на расстоянии, не меньшем $\varepsilon/2$ от Q^*. Следовательно, P^* определяет замкнутую совокупность, состоящую из точечных групп, лежащую в минимальном множестве Σ, но составляющую собственную часть этого множества и в частности не содержащую точку Q^*. Это невозможно по самому определению минимального множества.

Для того, чтобы доказать достаточность условия, мы заметим прежде всего, что α- и ω-предельные множества точечной группы, удовлетворяющей этому условию, должны совпадать. Нам нужно только взять $t = 0$ в произвольной дуге P_tP_{t+T}, чтобы убедиться в справедливости этого предположения. Обозначим совокупность этих общих α- и ω-предельных точек через Σ.

Если бы совокупность Σ не была минимальной, то она содержала бы собственное подмножество Σ' подобного же рода, к которому не принадлежала бы какая-то точка Q совокупности Σ. Но когда точка P_t приблизится достаточно близко к какой-нибудь точке совокупности Σ', то она останется в течение сколь угодно большого интервала времени вблизи от этой замкнутой, связной, состоящей из кривых движения совокупности, и, таким образом, не может приближаться в этом интервале времени к точке Q. Таким образом, требуемое условие не будет выполнено точечной группой, порождаемой P_t. Следовательно, Σ есть минимальное множество, и наше движение рекуррентно.

Очевидно, что все рекуррентные движения центральны, но обратное, разумеется, неверно; центральные движения могут быть, могут и не быть рекуррентными. Примером может служить случай дифференциальных уравнений классической динамики, где все движения центральные, но вовсе не обязательно рекуррентные.

§ 8. Произвольные и рекуррентные движения. Значение движений рекуррентного типа для исследования любого произвольного движения можно видеть из следующего предложения.

Среди ω- (α-) предельных движений любого данного движения существует по крайней мере одна рекуррентная группа движений.

Обозначим через Σ замкнутую совокупность всех ω-предельных точек данного движения. Мы должны показать, что совокупность Σ содержит минимальное подмножество.

Разделим M на большое число малых областей, диаметром не больше ε, где ε — выбранная нами положительная константа (первая сеть). Среди движений, принадлежащих Σ, найдется такое, которое проходит через наименьшее число этих малых областей, когда t изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Пусть Σ_1 будет соответственное замкнутое множество, состоящее из кривых предельных движений. Это множество составляет часть Σ и лежит целиком в тех же областях. Разложим эти маленькие области на еще более мелкие области, диаметром не больше $\varepsilon/2$ (вторая сеть). Среди движений, принадлежащих Σ_1, будет такое, которое проходит через наименьшее количество этих новых областей при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$. Определим Σ_2, как соответствующее замкнутое множество, состоящее из кривых предельных движений; Σ_2 будет частью Σ_1.

Продолжая таким же образом, мы определим бесконечную последовательность $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ замкнутых, связных, состоящих из кривых движения совокупностей, каждая из которых содержится в предыдущих. Возьмем теперь в каждой Σ_n какую-нибудь точку P_n и пусть P^* будет предельная точка совокупности точек P_n. P^*, разумеется, принадлежит Σ, как предельная точка последовательности точек множества Σ. Кроме того, так как P_n содержится в Σ_m $(m \leqslant n)$, то предельная точка P^* принадлежит $\Sigma, \Sigma_1, \ldots$ Следовательно, вся кривая движения, проходящая через P^*, принадлежит $\Sigma, \Sigma_1, \ldots$ (так как $\Sigma, \Sigma_1, \ldots$ состоят из кривых движения). Но отсюда и из способа определения совокупностей $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ следует, что кривая движения проходит через все области R-й сети, через которые проходит Σ_R, и, следовательно, ее предельными точками должны быть все точки общей части Σ_r совокупностей $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$

Тем же самым рассуждением можно показать, что любое движение, лежащее в Σ_r, имеет в качестве своей α- или ω-предельной совокупности само множество Σ_r. Иначе говоря, Σ_r представляет собою требуемое минимальное множество.

Ниже приводимая теорема показывает, что точка P_t или порождает рекуррентное движение, или же она равномерно часто приближается к рекуррентным движениям.

Для всякого $\varepsilon > 0$ существует промежуток T, настолько большой, что любая дуга P_tP_{t+T} содержит хотя бы одну точку, лежащую на расстоянии, меньшем ε, от какой-нибудь группы рекуррентных движений.

Доказательство весьма просто. Допустив, что теорема неверна, мы можем найти для сколь угодно больших T дуги кривых движения P_tP_{t+2T}, не имеющие точек на расстоянии, меньшем ε, от рекуррентных точечных групп. Пусть теперь P_{t+T}, будет середина такой дуги. Если P^* есть предельная точка точек P_{t+T} для $\lim T = \infty$, то вся кривая движения, проходящая через P^*, очевидно, не содержит точек, лежащих на расстоянии, меньшем ε, от какой бы то ни было рекуррентной точечной группы. Но совокупности α- и ω-предельных точек для этой кривой содержат каждая минимальное множество. Таким образом, мы приходим к противоречию, так как каждое движение в минимальном множестве по определению рекуррентно.

§ 9. Плотность специальных центральных движений. Очевидно, что вопрос о структуре совокупности центральных движений M_r имеет огромное теоретическое значение. Эта замкнутая совокупность движений характеризуется, как мы видели, свойством региональной рекуррентности, и, следовательно, существование n-мерного инвариантного объемного интеграла в случае уравнений классической динамики обеспечивает для этого случая совпадение M_r с M.

Мы хотим установить несколько простых свойств совокупности центральных движений

Совокупность M_r состоит из одной или нескольких связных частей, каждая из которых содержит по меньшей мере одно минимальное множество рекуррентных движений.

Всякое центральное движение, α- или ω-предельные точки которого не заполняют целиком какой-нибудь связной части множества M_r, мы будем называть «специальным центральным движением». Согласно этому определению рекуррентное движение будет специальным, если только соответствующее минимальное множество не является само той связной частью множества M_r, к которой наше рекуррентное движение принадлежит. В частности для классической динамики специальными являются такие движения, которые не проходят сколь угодно близко от всех возможных состояний движения либо при возрастании, либо же при убывании времени.

Специальные центральные движения всюду плотны на любой связной части совокупности центральных движений, за исключением того случая, когда эта связная часть состоит из единственного минимального множества рекуррентных движений.

В случае классической динамики ($M_r = M$) специальные центральные движения оказываются, таким образом, всюду плотными на M, за исключением того случая, когда само M является минимальным множеством рекуррентных движений.

При доказательстве этой теоремы мы будем считать, что M_r совпадает с M, но из доказательства будет очевидно, что те же рассуждения M_r совершенно так же применимы к любой связной части множества M_r при условии, что под областью совокупности M_r мы будем подразумевать любое связное подмножество M_r, никакая точка которого не является предельной для точек, принадлежащих M_r, но не лежащих в этом подмножестве.

Предположим, что наша теорема неверна и что имеется замкнутая область E, ни одна точка которой не принадлежит специальному движению. Но в M существует по крайней мере одна совокупность Σ рекуррентных движений; эти рекуррентные движения будут в рассматриваемом случае специальными движениями и, следовательно, будут все лежать целиком в дополнительной области $F = M - E$.

Рассмотрим все точки, лежащие на расстояния, меньшем ε, от Σ, где ε выбрано таким образом, что ε-окрестность совокупности Σ лежит целиком в области F. Если мы теперь будем безгранично увеличивать t, то эта ε-окрестность будет двигаться, причем может быть одно из двух: либо при достаточно малом ε ни одна точка ε-окрестности не выйдет из F, либо по крайней мере одна точка ε-окрестности, в конце концов, выйдет из F, каково бы ни было ε.

Легко показать, что второе предположение невозможно. В самом деле, устремим ε к нулю и будем рассматривать последовательность дуг PQ кривых движения в F, таких, что P лежит в ε-окрестности, совокупности Σ, а Q лежит на границе F и соответствует более позднему моменту t. Очевидно, что полукривая движения в направлении *убывающего* времени, начинающаяся в какой-нибудь предельной точке $\overline{Q}$ последовательности точек Q для $\lim \varepsilon = 0$, лежит целиком в F, кроме точки $\overline{Q}$, и определяет специальное движение, что невозможно, так как она содержит точку $\overline{Q}$, принадлежащую E. Таким образом, мы можем ограничиться рассмотрением первого предположения.

В этом случае обозначим через $\overline{\varepsilon}$ верхнюю грань всех ε, для которых совокупность всех точек, лежащих на полукривых движения, исходящих из точек ε-окрестности совокупности Σ в направлении возрастающего t, лежит целиком в F. Легко видеть, что эта верхняя грань $\overline{\varepsilon}$ обладает тем же свойством. Точки, лежащие на полукривых движения, исходящих из точек $\overline{\varepsilon}$-окрестности, и предельные движения образуют расширенную область R, в которой лежит Σ. Никакое движение, лежащее в R, не пересечет, если его продолжить в направлении убывающего времени, границы F в какой-либо точке P, потому что в противном случае полукривая движения в направлении *возрастающего* времени, проходящая через P была бы специальным движением, проходящим через точку P, принадлежащую E. По этой же причине область R должна лежать целиком в F. Но если мы теперь рассмотрим полукривые движения, проходящие через точки, лежащие в ε'-окрестности R, то убедимся, что некоторые из этих полукривых должны пересекать границу F в каких-то точках Q, соответствующих более позднему моменту времени; в противном случае $\bar{\varepsilon}$ не было бы наибольшим допустимым значением ε. Выберем последовательность ε', так что $\lim \varepsilon' = 0$, и соответственную последовательность точек Q. Тогда полукривая движения в направлении убывающего времени, проходящая через какую-нибудь предельную точку $\overline{Q}$ точек Q, будет специальным движением, проходящим через точку $\overline{Q}$, лежащую в E.

Итак, мы пришли к противоречию, что доказывает нашу теорему.

Обобщая немного это рассуждение, мы можем получить следующий более точный результат.

Если какая-нибудь связная область F множества M_r содержит в себе кривую движения, то существует по крайней мере одно специальное движение, проходящее через точку, лежащую на границе этой области, и содержащееся в ней в направлении возрастания (убывания) t.

Будем рассматривать ε-окрестность кривой движения, лежащей в области F. При безграничном уменьшении (эта окрестность движется, и предыдущие рассуждения покажут нам, что вышеприведенное утверждение должно быть справедливым, за исключением того случая, когда для достаточно малого ε ни одна точка ε-окрестности нашей кривой не выходит при этом движении за пределы F.

Рассматривая эту ε-окрестность вместе со всей частью области F, которую она покрывает при убывании t, мы получим расширенную область. Эта расширенная область должна оставаться в F и при возрастании t и быть инвариантной. В самом деле, если бы какая-нибудь точка перешла при движении в направлении возрастания в точку Q вне этой области, то достаточно малая окрестность точки Q при своем движении в направлении убывающего времени не налегала бы на свое начальное положение, начиная с некоторого момента, что противоречит свойству региональной рекуррентности.

Если мы возьмем за $\bar{\varepsilon}$ точную верхнюю границу всех возможных значений ε, то получим инвариантную область R, состоящую из полных кривых движения. Рассматривая точки в ε'-окрестности области R и заставляя t убывать, мы найдем, как прежде, что некоторые из движений в этой окрестности должны, в конце концов, покинуть F в точке Q. Устремляя ε' к нулю, мы найдем предельную точку Q' точек Q, через которую проходит движение, лежащее в F при возрастании t, что и требовалось доказать.

§ 10. Рекуррентные и полуасимптотические центральные движения. Мы будем говорить, что движение является «положительно (или отрицательно) полуасимптотическим» по отношению к минимальному множеству рекуррентных движений, если это множество есть единственное минимальное множество, содержащееся в ω- (α-) предельном множестве данного движения. Имея в виду это определение, мы можем высказать следующее положение:

Или в любой окрестности рекуррентного движения имеются другие рекуррентные движения, или же имеются центральные движения, положительно (отрицательно) полуасимптотические к этому рекуррентному движению.

Доказательство очевидно. Выберем малую окрестность данного минимального множества рекуррентных движений. Из рассуждений предыдущего параграфа следует, что будет существовать движение, входящее в некоторой точке P в эту окрестность и остающееся в ней после этого при безграничном возрастании t. Если при сколь угодно малом ε в совокупности ω-предельных точек этого движения будут другие минимальные множества, кроме данного, то высказанное выше утверждение справедливо. В противном случае движение, проходящее через P, будет положительно полуасимптотичным к данному рекуррентному движению, тоже в согласии с высказанным утверждением.

§ 11. Транзитивность и интранзитивность. Рассмотрим «частицу» около какой-нибудь точки в некотором связном подмножестве многообразия центральных движений M_r. С возрастанием t эта частица движется согласно дифференциальным уравнениям движения; следовательно, ее движение образует трубку в M, которая должна непременно пересечь сама себя, вследствие свойства региональной рекуррентности. Обозначим через R получаемую таким образом трубчатую область вместе с предельными точками. При возрастании t конец трубки R движется внутрь трубки, и все R переходит в свою собственную или несобственную часть. Но вследствие свойства региональной рекуррентности эта область не может перейти в свою собственную часть, и, следовательно, она переходит в себя. Таким образом, трубка, образованная частицей, при изменении t в любом из обоих возможных направлений будет одна и та же и будет состоять из полных движений.

Но далее имеются две возможности: либо для каждой точки P, принадлежащей M, и для каждой частицы около этой точки соответствующая область R совпадает с M, либо же для какой-нибудь точки P при подходящем выборе частицы, содержащей эту точку, R представляет собою только часть M. В первом случае мы будем говорить, что связная часть совокупности центральных движений M_r, будет «транзитивного» типа, во втором случае, что она будет «интранзитивного» типа.

Для проблемы классической динамики транзитивность означает, что любая малая частица при своем движении опишет все многообразие M состояний движений, исключая лишь нигде не плотное множество движений, а интранзитивность означает, что для какой-то частицы это не будет справедливо.

Необходимым и достаточным условием интранзитивности связного множества центральных движений является существование в этом множестве инвариантной связной замкнутой области, составляющей только часть его.

Характерным признаком интранзитивного случая, в классической динамике будет, таким образом, существование инвариантных n-мерных континуумов, состоящих из целых кривых движения и составляющих лишь часть многообразия M.

Очевидно, что приведенное условие необходимо, так как подобной инвариантной областью является вышеописанная область R. С другой стороны, если существует инвариантная область R, то частица, лежащая целиком в R в некоторый момент, будет при своем движении всегда оставаться в R (при возрастании и убывании t), так что движения являются интранзитивными.

В случае интранзитивности все движения являются специальными. Это следует из того, что любое движение лежит либо внутри такого инвариантного подконтинуума, либо на его границе, либо в дополнительном множестве к инвариантному подконтинууму.

В случае, когда какая-нибудь связная часть совокупности M_r центральных движений транзитивна, будут существовать движения, которые как при возрастании, так и при убывании t пройдут, в конце концов, сколь угодно близко от каждой точки этой связной части.

Для определенности мы возьмем в нашем доказательстве $M_r = M$. Кроме того, сделаем предварительное замечание, состоящее в том, что любая частица при своем движении с возрастанием t покроет все M; в противном случае она определяла бы инвариантную область R в многообразии M как раз того типа, который исключается свойством транзитивности. Следовательно, существуют дуги кривых движения, начинающиеся в любой окрестности данной точки и кончающиеся при большом t в окрестности другой данной точки.

Начнем с того, что выберем положительное количество d, меньшее единицы, и какое-нибудь исчислимое множество точек P_k ($k = 1, 2, \dots$), которое было бы всюду плотно в M. Очевидно, что если мы возьмем другое множество точек $\overline{P}_k$ ($k = 1, 2, \dots$), такое, что для всякого k расстояние P_k от $\overline{P}_k$ будет меньше d^k, то это второе множество будет тоже всюду плотно в M.

Для того, чтобы получить движение, которое не было бы специальным, мы можем действовать следующим образом. В d-окрестности точки P_1 мы можем найти такую точку P_1', чтобы для нее существовала дуга $P_1'P_2'$ кривой движения, конец P_2' которой лежал бы в d^2-окрестности точки P_2. Возьмем теперь меньшую окрестность около точки P_1', лежащую в d-окрестности точки P_1 и обладающую тем свойством, что если точка P_1'' будет двигаться, оставаясь все время в этой окрестности, то некоторая точка P_2'' на кривой движения, проходящей через P_1'', соответствующая более позднему моменту времени, изменяясь непрерывно вместе с P_1'', будет оставаться все время в d^2-окрестности точки P_2. Это, очевидно, возможно.

Но теперь в этой меньшей окрестности точки P_1' мы можем выбрать такую точку P_1'', что кривая движения, проходящая через P_1'', пересечет при уменьшающемся t d^2-окрестность точки P_2. Пусть Q_2'' будет точка, лежащая в этой окрестности на нашей кривой движения. Таким образом, мы получим дугу $Q_2''P_1''P_2''$ кривой движения, такую, что P_1'' находится в d-окрестности точки P_1, в то время как P_2'' и Q_2'' находятся в d^2-окрестности точки P_2. Кроме того, мы можем выбрать окрестность точки P_1'', лежащую целиком в d-окрестности точки P_1 и столь малую, что при непрерывном изменении точки P_1''' в этой окрестности мы можем непрерывно изменять оба конца Q_2''' и P_2''' дуги $Q_2'''P_1'''P_2'''$ кривой движения в d^2-окрестности точки P_2.

Следующим шагом будет выбор такой дуги $Q_2'''P_1'''P_2'''P_3'''$ кривой движения, что P_1''' лежит в выбранной нами малой окрестности, что P_3''' лежит в d^3-окрестности точки P_3. Затем, в результате следующего шага получаем дугу $Q_3^{IV}Q_2^{IV}P_1^{IV}P_2^{IV}P_3^{IV}$ и так далее, продолжая до бесконечности. Таким образом мы строим на $2(k-1)$-й стадии дугу кривой движения

$$Q_k^{(2k-2)} \ldots Q_2^{(2k-2)} P_1^{(2k-2)} P_2^{(2k-2)} \ldots P_k^{(2k-2)},$$

причем точки P_k^j и Q_k^j лежат в d^k-окрестности точки P_k.

Очевидно, что, переходя к пределу, мы получим кривую движения

$$\ldots Q_3^* Q_2^* P_1^* P_2^* P_3^* \ldots$$

где P_k^* и Q_k^* лежат в d^k-окрестности точки P_k. Значит, множества точек P_1^*, P_2^*, P_3^*, ... и Q_1^*, Q_2^*, ... всюду плотны в M. Следовательно, α- и ω-предельные точки этого движения составляют все M, и само движение не является специальным.

В следующей главе (§ 11) дан пример несингулярной геодезической проблемы транзитивного типа. Представляется вероятным, что вообще после того, как выполнены все очевидные приведения при помощи известных интегралов, задачи классической динамики будут транзитивного типа.

Между самым общим транзитивным случаем и весьма специальным случаем интегрируемой до конца системы лежит бесконечное разнообразие промежуточных возможных случаев, зависящих от частных свойств дифференциальных уравнений.

В следующей главе мы будем рассматривать случай систем с двумя степенями свободы. К несчастью, представляется весьма мало вероятным, чтобы методы, применяемые в этом случае, допускали простое обобщение на случай большего числа степеней свободы. Задача трех тел, рассматриваемая в главе IX, в высшей степени поучительна, как пример этого, более сложного случая, несмотря на то, что она относится к сингулярному типу.

Глава 8
Системы с двумя степенями свободы

§ 1. Формальная классификация периодических движений. Глава VI была посвящена предварительному изучению динамических систем гамильтонова типа с двумя степенями свободы ($m = 2$), в особенности в связи с вопросом о периодических движениях. В настоящей главе мы предполагаем не только рассмотреть полнее вопрос о существовании и распределении таких периодических движений, но также и различных других типов движений.

Для систем этого рода мы имеем сначала четырехмерное многообразие состояний движения с координатами p_1, q_1, p_2, q_2. Однако, выбирая какое-нибудь определенное значение постоянной энергии $H = h$, мы определяем таким образом в нашем четырехмерном многообразии трехмерное аналитическое подмногообразие. Это трехмерное многообразие мы и будем рассматривать в дальнейшем как многообразие состояний движения. Иными словами, используя интеграл энергии, мы приведем систему дифференциальных уравнений четвертого порядка к системе третьего порядка.

Мы ограничимся рассмотрением только тех случаев, когда M не имеет особенностей, т. е. является замкнутым и аналитическим многообразием, и, кроме того, будем считать, что M не содержит точек равновесия системы, потому что такие точки существуют лишь при исключительных значениях величины h.

Рассмотрим теперь какое-нибудь периодическое движение; оно будет изображаться замкнутой кривой в M. Вообразим себе, что эту кривую пересекает некоторая аналитическая поверхность S. Если, исходя из какой-нибудь точки P, лежащей на S достаточно близко к периодическому движению, мы будем двигаться вдоль кривой движения в направлении возрастающего времени t, то мы пересечем S снова в некоторой точке P_1. Мы будем писать $P_1 = T(P)$ и, таким образом, определим одно-однозначное аналитическое преобразование T поверхности S в себя по крайней мере в окрестности данного периодического движения. Преобразование T оставляет на месте точку, соответствующую данному периодическому движению. Периодическим движениям, близким к данному, но до замыкания описывающим k оборотов, будет соответствовать система k точек P, $T(P)$, ... , $T^{k-1}(P)$, причем

$$T^k(P) = P,$$

где смысл применяемых символов очевиден.

Существует весьма важный частный случай, когда мы можем указать на некоторые характеристические свойства преобразования T, основываясь на полученных уже результатах. Это случай, когда гамильтонова проблема получена из лагранжевой, имеющей главную функцию, квадратичную относительно скоростей (глава VI, § 1–3).

Напомним в точности способы выбора координат для этого случая. Прежде всего, лагранжевы координаты q_1, q_2 выбираются таким образом, что q_1 является угловой координатой, причем вдоль данного периодического движения q_1 равно $2\pi t/\tau$, где τ — период движения, а q_2 равно нулю. Далее, из дифференциальных уравнений следует, что $\dfrac{\partial H}{\partial p_1}$ не равно нулю вдоль периодического движения, и мы можем разрешить уравнение $H = h$ относительно p_1 в виде

$$p_1 + K(q_1, p_2, q_2, h) = 0,$$

где K — аналитическая функция своих четырех аргументов и при этом периодическая относительно q_1 с периодом 2π. Следовательно, q_1, p_2, q_2 составляют вместе подходящую систему координат для M в торообразной окрестности данного периодического движения. Для этих переменных имеют место уравнения гамильтонова типа:

$$\frac{dp_2}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_2}, \qquad \frac{dq_2}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_2}. \tag{1}$$

Уравнения (1) дают нам возможность выразить координаты p_2, q_2 вдоль любой кривой движения через угловую координату q_1, после чего t может быть найдено простым интегрированием.

Последнее преобразование состоит в замене координаты p_2 на новую $p_2 - p_2^0$. Здесь $p_2^0(t)$ есть значение p_2 вдоль данной периодической кривой, причем t должно быть заменено его значением вдоль периодического движения $q_1\tau/2\pi$. Если мы в то же время преобразуем K, прибавив к нему слагаемое $q_2\, dp_2^0/dq_1$, то вид уравнений (1) будет сохранен, и K останется периодической функцией от q_1 периода 2π. Данному периодическому движению будет при этом соответствовать $p_2 = q_2 = 0$.

Таким путем делается очевидной природа координат, применяемых для приведения проблемы к проблеме обобщенного равновесия. Эти координаты имеют то преимущество, что если в качестве секущей поверхности S мы возьмем «плоскость» $q_1 = 0$, то преобразование T окажется сохраняющим площади. Кроме того, если наше периодическое движение принадлежит к общему устойчивому типу, так что множители $\pm\lambda$ в уравнениях (1) суть чисто мнимые количества, несоизмеримые с $\sqrt{-1}$, то, как мы видели (глава VI, § 2), преобразование T может быть представлено в нормальном виде:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_0\cos(\sigma + sr_0^2) - v_0\sin(\sigma + sr_0^2) + \Phi, \\ v_1 &= u_0\sin(\sigma + sr_0^2) + v_0\cos(\sigma + sr_0^2) + \Psi, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где

$$r_0^2 = u_0^2 + v_0^2,$$

при подходящем выборе переменных u, v; здесь Ψ, Φ — сходящиеся степенные ряды по u_0, v_0, начинающиеся с членов сколь угодно высокого порядка. Это преобразование во всяком случае возможно, если величина $l = \sqrt{-1}s/2\pi$ не обращается в нуль.

Нужно заметить, что выбор поверхности S не влияет на получаемое преобразование T с точностью до замены переменных.

Изучив подробнее преобразование T и основываясь на его свойстве сохранять площади и на его нормальном виде (2), мы показали выше, что сколь угодно близко к данному периодическому движению устойчивого типа имеется бесконечное множество других периодических движений.

В случае, когда периодическое движение принадлежит к общему неустойчивому типу, мы можем выбрать множитель λ так, что либо само λ, либо $2\lambda - \sqrt{-1}$ есть вещественное число([1]). Тот же самый метод, который мы применяли в устойчивом случае (глава III, § 6–9), приводит нас к подобному же формальному решению и к вещественному нормальному виду для T:

$$u_1 = \mu u e^{lr_0^2} + \Phi, v_1 = \frac{1}{\mu} v e^{-lr_0^2} + \Psi \quad (\mu \neq \pm 1), \tag{3}$$

при условии, что $l \neq 0$; здесь Φ и Ψ являются рядами того же типа, что и в формуле (2).

Этот общий неустойчивый случай является очень простым аналитически[1]. Мы будем иметь две инвариантные аналитические кривые, проходящие через начало координат, которые можно принять за оси u

[1]См. мою статью «Surface Transformations and Their Dynamical Applications», Acta Mathematica, vol. 43, 1922, § 27, или статью Hadamard «Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles», Bull. Soc. Math. France, vol. 29, 1901.

и v. Точки, лежащие на одной из этих инвариантных кривых, при последовательном повторении преобразования T приближаются к началу координат; точки другой инвариантной кривой удаляются от начала, в то время как точки, не лежащие на этих кривых, сперва приближаются, а затем удаляются от начала.

Если мы применим эти результаты к многообразию M вблизи периодического движения неустойчивого типа, то увидим, что имеются две инвариантные аналитические поверхности, проходящие через кривую периодического движения, одна из которых соответствует аналитическому семейству движений, асимптотических к периодическому движению в положительном направлении, а другая — подобному же семейству движений, асимптотических в отрицательном направлении. Все прочие близлежащие движения сначала приближаются, а затем удаляются от нашего периодического движения неустойчивого типа.

Очевидно, что не может существовать никаких периодических движений, лежащих целиком вблизи данного периодического движения неустойчивого типа в противоположность тому, что мы видели для движений, принадлежащих к общему устойчивому типу ($l \neq 0$).

Таким образом, мы видим, насколько различаются между собой классы периодических движений устойчивого и неустойчивого типа.

Переходим теперь к рассмотрению вопроса о том, в какой мере необходимы наложенные ограничения.

Прежде всего, ни в какой точке периодического движения не могут обращаться в нуль одновременно все частные производные интеграла энергии H, так что многообразие $H = h$ является правильным аналитическим трехмерным многообразием M вдоль периодического движения. Если вместо p_1, q_1, p_2, q_2 в качестве координат выбраны p, q, r, h, то инвариантный интеграл обыкновенного трехмерного объема принимает вид

$$\iiiint \varphi \, dp \, dq \, dr \, dh,$$

где $\varphi > 0$ есть аналитическая функция от p, q, r, h. Следовательно, интеграл $\iiint \varphi \, dp \, dq \, dr$ инвариантен в многообразии M.

Отсюда следует далее, что T оставляет инвариантным двойной интеграл $\iint \psi \, du \, dv$, где u, v суть координаты на поверхности S, а $\psi > 0$ является аналитической функцией от u и v. Это можно показать по существу тем же рассуждением, что и в главе VI § 1. Этого обстоятельства уже достаточно для получения нормальных форм (2) и (3) и для получения из них вышеприведенных выводов[1].

[1] См. мою цитированную статью, где доказывается как высказанное утверждение, так и нижеследующее.

Следовательно, гамильтонову проблему нам не нужно ограничивать вышеуказанным способом.

В самом деле, можно показать, что для самого общего преобразования T, имеющего подобный инвариантный двойной интеграл $\iint \psi\, du\, dv$, всегда существует формально инвариантная функция $\Omega(u, v)$, данная формальными степенными рядами, по степеням u, v. Мы можем определить неустойчивый случай как такой, когда уравнение $\Omega = 0$ дает вещественные формальные инвариантные кривые неустойчивого типа. В этом случае всегда имеются асимптотические инвариантные аналитические семейства движений (или аналитические семейства периодических движений, содержащие данное периодическое движение). Все другие соседние движения приближаются и затем отдаляются от данного периодического движения. Таким образом, не существует близких периодических движений, за исключением движений, принадлежащих к. тому же аналитическому семейству, что и данное периодическое движение, если таковые существуют([2]).

Если уравнение $\Omega = 0$ не дает вещественных формальных инвариантных кривых этого рода, то периодическое движение мы можем назвать принадлежащим к устойчивому типу. В рассмотренном выше случае общего устойчивого типа функция Ω совпадает с r^2 с точностью до членов высшего порядка. Если σ несоизмерима с 2π, тогда как s вместе с некоторыми, но не со всеми подобными константами обращается в нуль, то никаких существенных изменений не требуется, за исключением того, что в формуле (2) член sr_0^2 заменяется на $s^{(k)}r_0^{2k}$. Если однако, все эти константы равны нулю, то нормальный вид (2) сохраняется с $s = 0$, и к таким нерегулярным периодическим движениям уже невозможно применить наше прежнее рассуждение, с помощью которого мы показали существование бесконечного множества периодических движений вблизи данного.

С другой стороны, никакого существенного затруднения не возникает для движения устойчивого типа в случае, когда σ равно 0 или $\pm\pi$ или, общее, когда σ соизмеримо с 2π; в этих случаях данное периодическое движение является кратным или само, или если его повторить k раз, где k — надлежащее целое число. В последнем случае необходимо взять вместо T преобразование T^k, для которого число σ будет равно нулю. Здесь инвариантная функция Ω начинается с членов степени высшей, чем вторая, и дальнейшее рассмотрение показывает, что T аналогично вращению на угол, равный нулю в начале координат и возрастающий (или убывающий) с увеличением расстояния от начала. Представляется, следовательно, весьма вероятным, что в этом случае также должно быть бесконечное множество соседних периодических движений, хотя доказательство этого еще не проведено во всех своих аналитических деталях.

Следовательно, в весьма общих случаях устойчивого периодического движения, а, может быть, во всех, за исключением совершенно особого случая, когда T формально эквивалентно чистому вращению на угол, несоизмеримый с 2π(3), это свойство будет сохраняться. Упомянутый исключительный случай будет тот, когда функция M в формальном решении сводится к своему первому члену λ.

Следовательно, для самого общего случая неустойчивого типа ($m{=}2$) *характерным является существование асимптотических аналитических семейств движений (или, по крайней мере, аналитических семейств периодических движений, содержащих данное движение). Прочие близлежащие движения приближаются и затем удаляются от данного периодического движения.*

В самом общем устойчивом случае, за исключением в высшей степени вырождающегося случая, когда σ несоизмеримо с 2π и формальные ряды не включают никаких переменных периодов, будут иметься соседние периодические движения(4).

Необходимо подчеркнуть, что второе из этих утверждений сформулировано здесь без подробного доказательства, которого я еще не имел возможности провести.

Вырождающийся случай устойчивого типа является действительным исключением, как показывает пример в главе VI, § 4, и требует дальнейшего исследования. Кроме того, формальные ряды перестают быть пригодными в устойчивом случае, когда λ соизмеримо с $\sqrt{-1}$. Они должны быть заменены рядами значительно более сложного типа, относительно строения которых некоторые идеи можно найти, например, в моей вышеупомянутой статье; прежнее определение формальной устойчивости должно быть обобщено таким образом, чтобы возможно было допускать сколь угодно большие периоды.

Между неспециализированной динамической проблемой и в высшей степени исключительным случаем интегрируемой проблемы существует большое количество различных промежуточных случаев. Для того, чтобы обладать аналитическим орудием, применимым ко всем без исключения случаям, без сомнения, необходимо было бы рассмотреть вопрос об устойчивости и неустойчивости аналитических семейств периодических движений, подобно вышерассмотренному периодическому движению. Хотя индивидуальные периодические движения, принадлежащие к такому семейству, должны считаться неустойчивыми, но это обстоятельство само по себе ничего не дает для решения вопроса о том, как будут себя вести близкие движения по отношению ко всему семейству движений, рассматриваемому в целом.

Мы собираемся в дальнейшем рассмотреть главным образом те динамические проблемы, для которых всякое периодическое движение и его кратные являются простыми периодическими движениями с $l \neq 0$.

Такие системы будут называться «неинтегрируемыми системами общего типа». Мы ограничиваемся этими системами не столько вследствие того, что рассмотрение более общих систем представляло бы какое-нибудь существенное математическое затруднение, сколько во избежание усложнения рассуждений. Интегрируемые системы будут рассмотрены отдельно в § 13, тогда как для промежуточных случаев будут даны некоторые указания о характере результатов.

§ 2. Распределение периодических движений устойчивого типа. Нашей первой задачей будет доказательство следующего утверждения.

Для неинтегрируемых гамильтоновых систем общего типа ($m = 2$) *совокупность периодических движений общего устойчивого типа в* M *плотна в себе.*

Отметим, что эта теорема представляет собой некоторое уточнение результата, полученного в § 1–3 главы VI, согласно которому в любой окрестности такого периодического движения устойчивого типа лежат другие периодические движения устойчивого или неустойчивого типа.

Начнем с того, что напомним утверждения, сформулированные в лемме § 1 главы VI. Мы показали там, что если нам дана сколь угодно малая окрестность начала координат $r \leqslant \rho$ (r, ϑ — полярные координаты), то мы можем найти такое целое число n, что, во-первых, все точки области $r \leqslant \rho$ остаются в области $r \leqslant 2\rho$ при преобразованиях $T, T^2, \ldots, T^n$ и, во-вторых, $\partial\vartheta_n/\partial r_0$ положительно при $r \leqslant \rho$, причем значение ϑ_n при $r = \rho$ по крайней мере на 2π больше, чем при $r = 0$. Легко доказать подобными же рассуждениями, что и $\partial r_n/\partial r_0$ и $\partial\vartheta_n/\partial\vartheta_0$ положительны при тех же условиях.

Таким образом, кривая

$$\vartheta_n - \vartheta_0 - 2k\pi = 0,$$

где k выбрано так, что при $r = 0$ левая часть этого уравнения отрицательна, но не меньше, чем -2π, будет на каждом радиусе иметь одну и только одну точку (r, ϑ), для которой $r \leqslant \rho$. Значит, написанное выше уравнение определяет аналитическую кривую C, окружающую начало координат и встречающую каждый радиус в одной точке. Но по определению кривой C всякая точка P, принадлежащая кривой C, переходит при преобразовании T в точку P_n, лежащую на том же радиусе; таким образом, кривая C_n тоже встречает каждый радиус только в одной точке. Кроме того, вследствие свойства преобразования T_n сохранять площади, C_n и C будут пересекаться по крайней мере в двух точках; эти точки будут инвариантными точками при преобразовании T^n. В рассматриваемом случае кривые C_n и C не могут совпадать, потому что C соответствовала бы тогда аналитическому семейству кратных периодических движений.

Исследуем вопрос об индексах вышеупомянутых инвариантных точек. Для этого можно рассматривать r и ϑ как прямоугольные координаты точки на плоскости (рис. 5). Здесь I обозначает инвариантную точку, в которой кривая C_n пересекает C, переходя из внутренней области, образуемой кривой C, во внешнюю, если мы будем двигаться по C_n в направлении возрастающего ϑ.

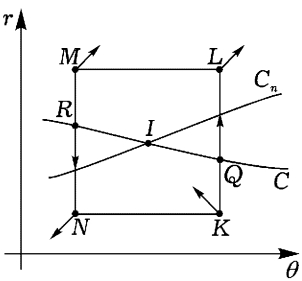

Рис. 5

Если какая-нибудь точка P описывает в положительном направлении цикл вокруг I, например, вдоль квадрата $KLMN$, то из сказанного выше следует, что вектор PP^n будет иметь горизонтальную составляющую, направленную вправо, когда точка P находится над кривой C, и влево, когда точка P находится под кривой C. В точках Q и R вектор PP_n будет направлен соответственно вверх и вниз. Отсюда очевидно, что когда P описывает этот цикл, вектор PP_n поворачивается на угол -2π, так что индекс точки I будет -1; в то же время инвариантная точка J, в которой кривая C_n пересекает C в противоположном направлении, имеет индекс $+1$.

Но согласно нашим предположениям периодические движения, соответствующие точкам I и J, не кратные. Если они принадлежат к устойчивому типу, то число σ не будет для них соизмеримо с 2π. Соответствующие нормальные формы будут либо типа (3), где μ положительно или отрицательно, но не равно ± 1, либо типа (2).

При помощи формул (2) и (3) легко определить соответствующие индексы. В первом и втором случае([5]) угловой коэффициент вектора PP_n будет равен

$$\frac{v_n - v}{u_n - u} = -\frac{1}{\mu}\frac{v + \ldots}{u + \ldots},$$

где в числителе и знаменателе выписаны члены не выше первого порядка. Отсюда следует, что если μ отрицательно, то вращение вектора PP_n будет такое же, как вектора, проведенного от инвариантной точки I, принимаемой за начало координат, к точке (u, v), т. е. 2π. Следовательно, индекс равен $+1$, если μ отрицательно. Подобным же образом очевидно, что индекс равен -1, если μ положительно. Переходя к третьему случаю, когда движение будет устойчивого типа, причем по предположению число σ в формулах (2) несоизмеримо с 2π, мы видим, что T^n представляет собой вблизи начала координат вращение на угол, несоизмеримый с 2π, так что вектор PP_n вращается на 2π, когда P обходит цикл вокруг I. Следовательно, для движения устойчивого типа индекс равен $+1$.

Отсюда мы заключаем, что точка I соответствует периодическому движению неустойчивого типа, но относительно точки J пока еще неясно, какого она типа.

На самом же деле при указанных условиях движение, соответствующее J, должно быть устойчивого типа. Числа μ являются корнями характеристического уравнения, которое принимает вид:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial r_n}{\partial r_0} - \mu & \dfrac{\partial r_n}{\partial \vartheta_0} \\ \dfrac{\partial v_n}{\partial r_0} & \dfrac{\partial v_n}{\partial v_0} - \mu \end{vmatrix} = 0,$$

если мы выразим его через переменные r, ϑ. Так как корни этого уравнения — взаимно-обратные числа, то уравнение приводится к виду

$$\mu^2 - \left(\frac{\partial r_n}{\partial r_0} + \frac{\partial \vartheta_n}{\partial \vartheta_0}\right)\mu + 1 = 0,$$

где коэффициент при μ представляет собой отрицательное число. Следовательно, μ положительно, и J соответствует периодическому движению устойчивого типа.

Этот вывод завершает доказательство для общего случая, когда не имеется кратных периодических движений и $l \neq 0$.

Если первоначальное периодическое движение принадлежит к устойчивому типу, но не к тому совершенно исключительному формальному виду, когда отсутствуют переменные периоды, то, как мне кажется, можно ожидать, что будут существовать близкие периодические движения устойчивого типа.

Этот исключительный случай заслуживает особого внимания; возможно, что он может появиться только в интегрируемой проблеме.

§ 3. Распределение предельно-периодических движений. Предположим, что для рассматриваемой гамильтоновой системы неинтегрируемого общего типа имеется по крайней мере одно периодическое движение устойчивого типа. Всякое такое движение изображается замкнутой кривой C в многообразии M состояний движения.

Выберем теперь произвольную замкнутую кривую C_1 движения устойчивого типа. Очень близко к ней можно найти замкнутую кривую C_2 движения устойчивого типа, один обход которой соответствует k_1 обходам кривой C_1. Далее выберем кривую C_3, очень близкую к C_2 и обход которой соответствует k_2 обходам кривой C_2 и, следовательно, k_1, k_2 циклам кривой C_1. Таким образом, мы получим последовательность замкнутых кривых C_n $(n = 1, 2, \ldots)$, которая, очевидно, может быть выбрана таким образом, чтобы она имела пределом при безграничном увеличении n некоторое определенное множество C; этого мы можем достигнуть подходящим выбором окрестностей C_n. Кроме того, тем же способом мы можем гарантировать, чтобы множество C не содержало ни одной из кривых C_1, C_2, ... Например, на n-м шаге мы можем выбрать окрестность кривой C_n настолько малой, чтобы она не содержала никаких замкнутых кривых движения длины меньше n, кроме, может быть, самой кривой C_n; разумеется, таких кривых движения имеется лишь конечное число.

Интересно исследовать вопрос об аналитической форме множества C. Пусть q_1 будет угловая координата в M, которая увеличивается на 2π, когда мы описываем один цикл кривой C_1. Тогда p_1, p_2, q_2 мы можем считать надлежащими координатами этого движения (§ 1) и можем написать уравнения периодического движения C_1 в виде

$$p_1 = f_1(q_1), \quad p_2 = g_1(q_1), \quad q_2 = h_1(q_1), \quad t = \int l_1(q_1)\, dq_1,$$

где f_1, g_1, h_1, $l > 0$ суть аналитические периодические функции от q_1 периода 2π. Для периодического движения C_2 имеем таким же образом уравнения:

$$p_1 = f_2(q_1), \quad p_2 = g_2(q_1), \quad q_2 = h_2(q_1), \quad t = \int l_2(q_1)\, dq_1,$$

где f_2, g_2, h_2, l_2 суть аналитические периодические функции от q_1 периода $2k_1\pi$. Таким образом, мы образуем последовательности функций f_n, g_n, h_n, l_n от q_1, периодических с периодом $2k_1 \ldots k_{n-1}\pi$, соответствующих периодическим движениям C_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Если мы возьмем начальные точки на кривых C_n, соответствующие значениям параметра $q_1 = 0$, таким образом, чтобы они стремились к некоторому пределу, то очевидно, что функции f_n, g_n, h_n, l_n будут стремиться соответственно к пределам f, g, h, l и притом равномерно для всех значений q_1.

Если существует хоть одно периодическое движение устойчивого типа для данной неинтегрируемой гамильтоновой системы общего типа, то будет существовать бесконечное множество близких движе-

ний, предельно-периодических, но не периодических, имеющих координаты вида

$$p_1 = \lim_{n\to\infty} f_n(q_1), \;\; p_2 = \lim_{n\to\infty} g_n(q_1),$$

$$q_2 = \lim_{n\to\infty} h_n(q_1), \quad t = \int \lim_{n\to\infty} l_n(q_1)\, dq_1,$$

где f_n, g_n, h_n, l_n ***суть аналитические периодические функции от*** q_1 ***с периодами, равными*** $2\pi k_1 \ldots k_{n-1}$, ***причем*** k_1, k_2, ... ***суть целые положительные числа, которые мы можем считать большими единицы. Стремление этих функций к пределу является равномерным для всех значений*** q_1.

Очевидно, что имеется неисчислимое множество таких предельно-периодических движений и координаты их выражаются функциями типа, рассмотренного Бором. Ясно, что они составляют класс рекуррентных движений нового типа.

§ 4. Устойчивость и неустойчивость периодических движений. При рассмотрении периодических движений устойчивого типа в динамических проблемах мы должны их разделить на два основных класса. Может случиться, что все движения, достаточно близкие к данному периодическому движению, остаются в малой окрестности его в течение всего времени. Это есть простейший из двух случаев, и в этом случае рассматриваемое периодическое движение может быть названо «устойчивым». Или же может случиться, что существует такая малая окрестность данного периодического движения, что для нее мы можем найти движения, сколь угодно близкие к данному в начале, но выходящие, в конце концов, из данной окрестности. В этом случае рассматриваемое периодическое движение может быть названо «неустойчивым».

Проведенная здесь классификация, очевидно, может быть применена не только к периодическим движениям, но также и к рекуррентным движениям любого типа. Устойчивость в этом фундаментальном качественном смысле не следует смешивать с ранее определенной, «полной формальной устойчивостью»; периодическое движение устойчивого типа может быть или не быть устойчивым.

Преобразование T поверхности S дает нам немедленно простое условие устойчивости.

Рассмотрим малую область s поверхности S, содержащую инвариантную точку, и образы s_1, s_2, ... этой области при последовательном применении преобразования T. Все эти области содержат в качестве внутренней точки инвариантную точку. Бесконечная последовательность областей s, s_1, ... будет лежать в окрестности инвариантной точки, вследствие нашего предположения об устойчивости движения. Все эти области вместе составляют некоторую окрестность s инвариантной точки, которая переходит в свою часть при преобразовании T, так как области s, s_1, ... переходят соответственно в s_1, s_2, ... Но $\overline{s}$ не может переходить в свою собственную часть, вследствие существования инвариантного поверхностного интеграла. Следовательно, $\overline{s}$ является инвариантной областью в S, которой соответствует торообразная область многообразия M, заключающая внутри себя данное периодическое движение.

Необходимым и достаточным условием устойчивости является существование бесконечной последовательности инвариантных торообразных областей, сходящихся к данной кривой периодического движения в многообразии M состояний движения.

§ 5. Устойчивый случай. Зоны неустойчивости. Какова же, однако, природа границы подобной инвариантной торообразной области в M, заключающей данную замкнутую кривую устойчивого периодического движения? Для ответа на этот вопрос мы, естественно, обращаемся к рассмотрению характера соответственной инвариантной замкнутой кривой в S, составляющей внешнюю границу инвариантной области s.

Будем считать, что наше периодическое движение принадлежит к общему устойчивому типу, но при этом не к тому частному случаю, когда формальные ряды не содержат никаких переменных периодов (§ 1). В этом случае может быть применен нормальный вид (2) с $s \neq 0$ или подобный вид. Мы можем считать, что s положительно, потому что если s отрицательно для T, то соответствующее количество $-s$ положительно для T^{-1}. Этот нормальный вид (2) показывает, что вращение против часовой стрелки вокруг инвариантной точки возрастает вместе с радиусом-вектором, если r достаточно мало.

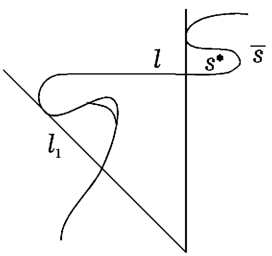

Рис. 6

Граница всякой области $\overline{s}$, лежащей в достаточно малой окрестности инвариантной точки, встречает каждый радиус в одной точке. Действительно, допустим противное, и пусть s^* обозначает совокупность всех точек, лежащих на отрезках, которые соединяют инвариантную точку с точками границы $\overline{s}$. Части области s^*, не лежащие в $\overline{s}$, ограничены, каждая дугой границы области $\overline{s}$ и отрезком радиуса и могут быть двух различных типов: либо они лежат вправо от этого отрезка радиуса, либо лежат слева от него. Но преобразование T, очевидно, переводит область первого типа, т. е. ограниченную слева отрезком l радиуса, в область, ограниченную границей $\overline{s}$ и образом l_1 этого отрезка l. Но так как угловая координата возрастает вместе с радиусом, то геометрически очевидно (рис. 6), что образ такой области обязательно будет составлять собственную часть области того же типа.

Но это невозможно, так как для преобразования T существует инвариантный поверхностный интеграл, и, следовательно, это преобразование не может переводить никакую область в свою собственную часть. Таким образом, не существует областей, ограниченных слева отрезками радиуса.

Подобно этому, применяя обратное преобразование T^{-1}, мы можем показать, что не существует таких же областей, ограниченных справа отрезками радиуса.

Следовательно, каждый радиус встречает только однажды границу инвариантной области $\bar{s}$.

Невозможность того, чтобы отрезок радиуса-вектора составлял часть границы области $\bar{s}$, очевидна. Таким образом, граница $\bar{s}$ действительно встречает каждый радиус в одной точке.

Более тщательное рассмотрение, основанное на нормальном виде, показывает, что для кривой $r = f(\vartheta)$, ограничивающей область $\bar{s}$, разностное отношение

$$\frac{f(\vartheta_1) - f(\vartheta_2)}{(\vartheta_1 - \vartheta_2)}$$

ограничено, и при этом мало́ для инвариантных областей, лежащих в достаточно малой окрестности инвариантной точки[1]. Справедливость этого утверждения становится почти очевидной, если мы заметим, что T изменяет направления, достаточно отличающиеся от перпендикулярных направлений к радиусу, переводя их в направления, еще более отличающиеся от последних.

Наши выводы могут быть, таким образом, сформулированы в виде следующего предложения.

Для устойчивого периодического движения общего устойчивого типа, с переменными периодами в формальных рядах, инвариантные торообразные области таковы, что граница пересечения такой области с аналитической секущей поверхностью S может быть представлена уравнением $r = f(\vartheta)$, где r, ϑ суть полярные координаты с инвариантной точкой в начале координат, а f — непрерывная периодическая функция от ϑ с периодом 2π, для которой разностное отношение ограничено.

Кривые движения, лежащие на границе такой торообразной области, образуют замкнутое инвариантное семейство. Во всяком таком замкнутом инвариантном семействе движений вблизи данного устойчи-

[1]Подробности см. в моей уже цитированной статье, § 42-48.

вого периодического движения имеется по крайней мере одно рекуррентное движение.

Если коэффициент вращения χ вдоль соответствующей инвариантной кривой на поверхности S несоизмерим с 2π, то поверхность тора может представлять собой одно минимальное множество рекуррентных движений. В этом случае координаты и время могут быть представлены при помощи непрерывных функций, периодических по двум аргументам.

Для того, чтобы сделать это очевидным, выберем прежде всего угловые координаты ϑ, φ на поверхности тора следующим образом: координату φ мы будем считать равной нулю на S и возрастающей пропорционально времени вдоль каждой кривой движения, причем коэффициент пропорциональности должен быть выбран таким образом, чтобы φ возрастало на 2π между любыми двумя пересечениями с поверхностью S. Координату ϑ вдоль инвариантной кривой на S нужно определить таким образом, чтобы преобразование T приняло вид $\vartheta_1 = \vartheta + \chi$, где χ есть указанный коэффициент вращения. Вне S на торе ϑ можно положить равным значению ϑ для соответствующей точки на S, увеличенному на $\chi\varphi/2\pi$ с той целью, чтобы сделать ϑ однозначным на торе. В этих координатах уравнение кривой движения будет $\vartheta - \vartheta_0 = \dfrac{\chi\varphi}{2\pi}$. Кроме того, координаты p_i, q_i суть периодические непрерывные функции от ϑ, φ и таким же свойством обладает $dt/d\varphi$.

Следовательно, мы можем написать:

$$p_1 = f\left(\frac{\chi\varphi}{2\pi}, \varphi\right), \quad q_1 = g\left(\frac{\chi\varphi}{2\pi}, \varphi\right),$$
$$p_2 = h\left(\frac{\chi\varphi}{2\pi}, \varphi\right), \quad q_2 = k\left(\frac{\chi\varphi}{2\pi}, \varphi\right),$$
$$t = \int l\left(\frac{\chi\varphi}{2\pi}, \varphi\right) d\varphi,$$

где f, g, h, k, l являются непрерывными периодическими функциями обоих аргументов периода 2π.

Может существовать еще одна возможность. Минимальное множество кривых движения может соответствовать совершенному, нигде не плотному множеству точек на инвариантной кривой; все другие движения будут тогда асимптотически приближаться к этому минимальному множеству рекуррентных движений при бесконечном возрастании или убывании времени[1].

[1]Доказательства этих теорем и ссылки на предыдущую работу Пуанкаре см. в моей статье. «Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques», Bull. Soc. Math. France, vol. 40, 1912.

Если, однако, коэффициент вращения будет соизмеримым с 2π и будет иметь вид $2p\pi/q$ (p и q — взаимнопростые целые числа), то необходимо должны существовать точки инвариантной кривой, инвариантные относительно преобразования T^q. Можно доказать, что в этом случае вся инвариантная кривая состоит из аналитических дуг, ограниченных точками, инвариантными при преобразовании T^q, в то время как внутренние точки этих дуг стремятся асимптотически к этим инвариантным точкам при повторении операции T или обратной операции T^{-1}.[1] Мы приходим, таким образом, к следующему заключению.

Всякое такое замкнутое семейство движений вблизи данного устойчивого периодического движения общего устойчивого типа, с переменными периодами в формальных рядах, характеризуется коэффициентом вращения. Если этот коэффициент несоизмерим с 2π, то либо семейство состоит из единственного минимального множества рекуррентных движений непрерывного типа, или же оно содержит совершенное, нигде не плотное минимальное множество рекуррентных движений разрывного типа, к которому все остальные движения семейства стремятся асимптотически при безграничном возрастании или убывании t. Если это число соизмеримо с 2π, то в семействе существует одно или несколько замкнутых периодических движений, тогда как остальные движения семейства образуют аналитические ветви, асимптотические к этим периодическим движениям.

Следует отметить, что этот результат касается и инвариантных подмногообразий многообразия M состояний движения и, в частности, касается центральных множеств такого подмногообразия. Следовательно, можно сделать вывод, что хотя в динамических системах классического типа все движения являются центральными по отношению ко всему многообразию, однако это не обязательно справедливо для инвариантных подмногообразий, так что понятие центральных движений продолжает иметь значение даже для проблем классической динамики.

Любые два такие замкнутые семейства не могут иметь общих движений, за исключением того случая, когда оба имеют один и тот же коэффициент вращения, соизмеримый с 2π. Очевидно, что коэффициент вращения, измеряющий среднее угловое вращение, должен быть одинаков для двух пересекающихся семейств. Для того, чтобы доказать, что этот коэффициент должен быть соизмеримым с 2π, отметим, что поскольку два данных семейства имеют по крайней мере одно общее движение, но не совпадают между собой, соответственные кривые $r = f_1(\vartheta)$ и $r = f_2(\vartheta)$ на поверхности S будут заключать между собой одну или несколько областей, ограниченных (каждая) одной дугой каждой из обеих кривых. При повторении операции T такая область

[1] См. мою цитированную статью в Acta Mathematica, § 42–48.

должна, в конце концов, налечь на себя и, следовательно, совпасть с собой, причем обе ограничивающие ее дуги переходят, разумеется, в себя. Оба общих конца этих дуг останутся, следовательно, при этом преобразовании T^q инвариантными и, следовательно, коэффициент вращения соизмерим с 2π.

Два семейства с различными коэффициентами вращения не могут пересекаться, и то из них, которое лежит дальше от периодического движения, имеет больший коэффициент вращения.

Будем условно рассматривать все инвариантные семейства, имеющие один и тот же соизмеримый с 2π коэффициент вращения, как образующие одно семейство. Это тем более естественно, что любые два такие семейства должны пересекаться. Внешняя граница соответствующей сети инвариантных кривых на S и ее внутренняя граница не могут не иметь общих точек, потому что они тогда соответствовали бы различным коэффициентам вращения. Это расширенное семейство, согласно формулированному выше утверждению, состоит из конечного числа периодических движений и из некоторых аналитических семейств движений, асимптотических к этим периодическим движениям.

Рассмотрим теперь бесконечную расширяющуюся или сжимающуюся последовательность таких инвариантных семейств. Эта последовательность, очевидно, определяет предельное инвариантное семейство, если только она не сжимается к нашему устойчивому периодическому движению и не расширяется за пределы той окрестности движений, рассмотрением которой мы ограничиваемся.

Эти инвариантные семейства движений вполне различны между собой, т. е. не пересекаются, имеют коэффициенты вращений, возрастающие (или убывающие) вместе с расстоянием от данного устойчивого периодического движения, и составляют замкнутое множество. В случае, если упорядоченное множество инвариантных семейств содержит два последовательных члена, то область многообразия M, лежащая внутри внешней из соответствующих торообразных областей и вне внутренней, может быть названа «зоной неустойчивости»[1].(6) *На поверхности S этой зоне соответствует кольцеобразная область, лежащая между двумя последовательными инвариантными кривыми. Такие области будут всегда существовать, если только инвариантные семейства не заполнят окрестность устойчивого периодического движения целиком, за исключением областей, заключенных внутри инвариантных семейств с коэффициентами вращения, соизмеримыми с 2π.*

Многие из примененных здесь методов могут быть использованы для более подробного изучения вопросов, связанных с последовательностями инвариантных семейств, зонами неустойчивости и их отно-

[1] В § 8 этой главы коротко рассмотрен вопрос о существовании таких зон.

шением к близким периодическим движениям (§ 8, 9). Мы установим здесь только следующее предложение.

Во всякой зоне неустойчивости вокруг данного устойчивого периодического движения существуют движения, исходящие из любой, сколь угодно малой окрестности любого движения, принадлежащего одному из ограничивающих семейств, и переходящие в произвольно заданную окрестность другого ограничивающею семейства.

В самом деле, рассмотрим внутреннюю границу соответственного кольца в S и маленькую область, окружающую произвольную точку этой границы кольца. Бесконечным повторением операции T определяем инвариантную область, состоящую из области, находящейся внутри этой внутренней границы, самой границы и выбранной нами маленькой области вместе со всеми ее последовательными образами. Границей, определенной таким образом инвариантной области, должна служить внешняя граница кольца, так как внутренняя и внешняя границы кольца являются последовательными инвариантными кривыми на S. Таким образом, образ маленькой площадки подходит сколь угодно близко к внешней инвариантной кривой, что и требовалось доказать.

§ 6. Критерий устойчивости. Легко дать аналитический критерий устойчивости.

Пусть
$$u_1 = f(u, v), \quad v_1 = g(u, v)$$

будут уравнения, определяющие преобразование T поверхности S вблизи инвариантной точки, и пусть $r = F(\vartheta)$ будет уравнение одной из инвариантных кривых в полярных координатах. Согласно полученным выше результатам F будет тогда однозначной непрерывной функцией от ϑ, периодической периода 2π и имеющей ограниченное разностное отношение.

Так как эта кривая инвариантна по отношению к преобразованию T, то уравнение ее может быть написано также в виде $r_1 = F(\vartheta_1)$, где r_1 и ϑ_1, должны быть заменены своими выражениями через r, ϑ, полученными из приведенных выше формул преобразования. Следовательно, если мы заменим r на $F(\vartheta)$, то придем к тождеству и, таким образом, получим следующий критерий.

Для того, чтобы периодическое движение общего устойчивого типа, с переменными периодами в формальных рядах, было действительно устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы некоторое связанное с ним функциональное уравнение

$$f^2(F\cos\vartheta,\, F\sin\vartheta)+g^2(F\cos\vartheta,\, F\sin\vartheta) = F^2\left(\operatorname{arctg}\frac{g(F\cos\vartheta,\, F\sin\vartheta)}{f(F\cos\vartheta,\, F\sin\vartheta)}\right)$$

допускало непрерывные решения $F(\vartheta)$, периодические с периодом 2π, с $|F|$, сколь угодно малым, но отличным от нуля.

§ 7. Проблема устойчивости. Чрезвычайно важным в динамике является вопрос: следует ли из полной формальной устойчивости периодического движения устойчивого типа, определенной выше, устойчивость в качественном смысле. Аналитические критерии, различающие устойчивый и неустойчивый случаи, чрезвычайно тонки. Здесь имеются две группы вопросов, которые, естественно, возникают в этом случае. Следует ли из формальной устойчивости такая фактическая устойчивость? Если нет, следует ли фактическая устойчивость из формальной в важных частных случаях, например, в ограниченной задаче трех тел?

Можно сказать почти наверное, что в общем случае имеется неустойчивость, хотя до сих пор не было получено доказательства этого предложения. Второй из поставленных вопросов является гораздо более трудным и носит в сущности арифметический характер; его можно сравнить с вопросом о том, будет или нет какое-нибудь данное число трансцендентным.

§ 8. Неустойчивый случай. Асимптотические семейства. Обратимся к аналогичному рассмотрению неустойчивых периодических движений общего устойчивого типа, содержащих переменные периоды в своих формальных рядах. В этом случае не будет существовать инвариантных семейств кривых типа, встречающегося в устойчивом случае, по крайней мере, если мы ограничимся достаточно малой окрестностью данного периодического движения. В соответствии с этим на поверхности S не будет существовать инвариантных кривых, окружающих нашу инвариантную точку.

Во всякой такой области неустойчивости вокруг неустойчивого периодического движения устойчивою типа имеются два связных семейства движений, достигающих границы области, которые остаются все время внутри ее, если t соответственно безгранично возрастает или убывает.

Для того, чтобы доказать это утверждение, рассмотрим, как обычно, преобразование T поверхности S в соответствующей окрестности инвариантной точки. Пусть σ будет очень маленькая область около инвариантной точки, граница которой пересекается каждым радиусом только однажды. Образы σ_n $(n = 1, 2, \dots)$ области σ при преобразованиях T^n должны все содержать внутри себя инвариантную точку, и для некоторого значения $n\sigma_n$ должна достичь границы S; в противном случае сумма всех этих областей представляла бы собой инвариантную область $\overline{\sigma}$, граница которой была бы инвариантной кривой исключенного типа согласно рассуждению § 4. Точки области σ_n остаются в S по крайней мере при n повторениях операции T^{-1}.

Будем теперь все более и более уменьшать диаметр области σ. Предельное замкнутое множество(7), полученное таким образом, связно содержит инвариантную точку и точки границы S и будет оставаться в S после любого числа повторений преобразования T^{-1}. Если мы повторим это же рассуждение, но заменив T на T^{-1}, то получим второе подобное же множество, остающееся внутри S при всех последовательных повторениях преобразования T. Очевидно, что эти два связных множества соответствуют двум связным семействам движений, обладающих указанными свойствами.

Сделаем теперь дополнительное предположение, что наше периодическое движение принадлежит к общему устойчивому типу, имеющему переменные периоды в формальных рядах. В этом случае мы уже видели, что преобразование T изменяет направления касательных к какой-либо кривой против часовой стрелки по отношению к направлению радиуса-вектора, за исключением касательных направлений, почти перпендикулярных к направлению радиуса-вектора.

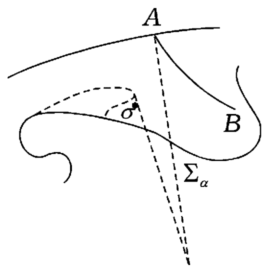

Рис. 7

Имея в виду это свойство, рассмотрим множество Σ_α всех точек, остающихся в S при бесконечном повторении преобразования T^{-1} и связанных с инвариантной точкой множеством точек того же рода. Согласно с только что доказанным, множество Σ_α доходит до границы S. Представим себе какую-нибудь регулярную кривую AB, проведенную из точки A на границе S, имеющую вначале (точка A) направление внутрь области по радиусу и нигде не поворачивающую вправо от радиального направления(8). Все точки, лежащие вне Σ_α, достижимы от границы S при помощи таких кривых AB, не имеющих общих точек с Σ_α (рис. 7). Для доказательства этой «левосторонней достижимости» множества Σ_α с границы S предположим противное, т. е. что имеется одна или несколько областей недостижимых точек (см. область σ^* на рисунке); эти области будут, очевидно, ограничены отчасти отрезками радиуса, от которых они будут лежать вправо (если смотреть по направлению внутрь по радиусу). Преобразование T^{-1}, очевидно, переводит эти недостижимые области в их собственные части, так как оно вращает радиальные направления по часовой стрелке по отношению к радиальному направлению. Но это невозможно вследствие существования инвариантного поверхностного интеграла.

Пусть нам дано неустойчивое движение общего устойчивого типа, *с переменными периодами в формальных рядах, и предположим для определенности, что вращение возрастает вместе с удалением от этого периодического движения. Тогда замкнутые связные семейства движений Σ_α и Σ_ω, остающиеся в области неустойчивости соответственно при убывании и возрастании t и достигающие границы этой области, являются соответственно достижимыми от этой границы (с левой и с правой стороны).*

Возвращаемся к виду Σ_α на S. Множество Σ_α должно бесконечно завиваться вправо вокруг неподвижной точки, начиная от точки его пересечения с границей S. Чтобы установить этот факт, целесообразно рассматривать полярные координаты ϑ и r как прямоугольные координаты, причем ось ϑ направлена налево, а ось r вверх. Тогда поверхность S представится в виде бесконечной полосы, и область этой полосы, расположенная вправо и выше связного множества Σ_α, не может простираться налево от той точки Σ_α, которая лежит на границе S; иначе, очевидно, имелись бы недостижимые области исключенного типа.

Если бы далее Σ_α не простиралось неограниченно вправо, то оно при этом представлении было бы целиком заключено между двумя вертикальными прямыми. Но результаты § 2 гл. VI показывают, что две точки, из которых одна лежит на оси $r = 0$, а другая вблизи нее, движутся в направлении оси ϑ со скоростями столь различными, что могут разойтись на сколь угодно большое расстояние. Поэтому при достаточном повторении преобразования T^{-1} кривая Σ_α (все образы которой при преобразовании T^{-1} лежат внутри S) распространится на полосу, сколь угодно широкую в направлении ϑ, и, таким образом, пересечет Σ_α. Итак, Σ_α и ее образ ограничат область, которая останется внутри S при всех повторениях преобразования T^{-1}. Но это приведет нас так же, как прежде, к инвариантной области $\overline{\sigma}$. Следовательно, Σ_α, распространяется бесконечно далеко в направлениях отрицательных ϑ. Отсюда следует, что Σ_α оборачивается бесконечное множество раз вокруг инвариантной точки в направлении часовой стрелки, в то время как Σ_ω оборачивается бесконечное число раз в противоположном направлении. Отсюда очевидно, что множества Σ_α и Σ_ω должны пересекаться бесконечное множество раз.

Докажем теперь, что множества Σ_α, $T^{-1}(\Sigma_\alpha)$, $T^{-2}(\Sigma_\alpha)$ асимптотически стремятся к точке O равномерным образом. Иначе существовали бы значения $n_1, n_2, \ldots$, такие, что $\lim n_i = \infty$ и что $T^{-n_i}(\Sigma_\alpha)$ простирались бы за пределы круга фиксированного радиуса $r = r_0$. Следовательно, существовали бы подмножества множеств $T^{-n_i}(\Sigma_\alpha)$, замкнутые, связанные с точкой O и имеющие по крайней мере одну точку на окружности $r = r_0$. Такое подмножество Σ_α^i и его образы $T^k(\Sigma_\alpha^i)$ целиком расположены внутри области S. Устремляя n_i к бесконечности, мы получаем, таким образом, множество $\Sigma_{\alpha\omega}$, замкнутое и связанное с O, простирающееся от O до некоторой точки на $r = r_0$ и такое, что *все* его образы (при преобразованиях T и T^{-1}) находятся внутри S. Кроме того, каждая точка, не принадлежащая множеству $\Sigma_{\alpha\omega}$, должна быть достижима извне как справа, так и слева от радиального направления. Отсюда заключаем, что $\Sigma_{\alpha\omega}$ должно состоять из радиальных отрезков. Но это невозможно. В самом деле, $T(\Sigma_{\alpha\omega})$ не имело бы этого свойства, так как T вращает всякое радиальное направление влево; между тем то же рассуждение показывает, что $T(\Sigma_{\alpha\omega})$ должно обладать этим свойством([9]).

Мы можем резюмировать эти заключения следующим образом.

Семейства Σ_α и Σ_ω движений оборачиваются бесконечно много раз по или против часовой стрелки соответственно вокруг периодического движения, в зависимости от того, достижимы ли они слева или справа и, таким образом, пересекаются в бесконечном множестве общих движений. Движения, принадлежащие Σ_α и Σ_ω, являются соответственно отрицательно и положительно асимптотическими к данному периодическому движению, тогда как бесконечно многие общие движения являются асимптотическими в обоих направлениях к данному периодическому движению.

Соображения, совершенно аналогичные приведенным выше, можно применить к любой зоне неустойчивости. Будут существовать положительно и отрицательно асимптотические связные множества, начинающиеся на одной из границ и достигающие любой окрестности другой границы зоны. Оба множества пересекаются бесконечное множество раз. Кроме того, рассуждениями, аналогичными тем, которые применяются в следующем параграфе, можно доказать, что множество, положительно асимптотическое к одной границе, пересекает множество, отрицательно асимптотическое к другой. Поэтому должно существовать бесконечное множество движений, положительно и отрицательно асимптотических к двум границам в любой из четырех возможных комбинаций.

§ 9. Распределение движений асимптотических к периодическим движениям. До сих пор мы ограничивались рассмотрением непосредственной окрестности периодического движения. Мы обращаемся теперь к рассмотрению совокупности всех движений в многообразии M, которое мы будем считать замкнутым и аналитическим.

При этом мы будем предполагать, что существует секущая поверхность S рода один и соответствующее преобразование T. Границы поверхности S должны соответствовать периодическим движениям общего устойчивого типа, и S пересекается в одном и том же направлении всякой кривой движения в M по крайней мере один раз в течение любого, достаточно большого промежутка времени. Если мы будем двигаться от любой точки P на поверхности S вдоль кривой движения в направлении возрастающего времени, то пересечем снова S в некоторой точке P_1; мы будем писать $P_1 = T(P)$, определяя, таким образом, одно-однозначное аналитическое преобразование T поверхности S в себя, которое мы будем считать непрерывным вдоль границы S.

Мы не будем пытаться дать здесь формулировку условий, при которых возможно действительно построить такую секущую поверхность S. Подробности такого построения будут, по видимому, различными для различных случаев (см. главу VI), и их рассмотрение вряд ли дало бы нам особенно много. Такие секущие поверхности S и связанные с ними преобразования T существуют в весьма широких классах проблем.

Кроме того, мы сделаем предположение, что наша динамическая система транзитивна. Эта гипотеза, несомненно, справедлива в некоторых случаях, как показывает пример, приводимый ниже в § 11, и, по всей вероятности, справедлива вообще, если только не имеются исключительные условия. Однако же, так как присутствие хотя бы одного устойчивого периодического движения, очевидно, влечет за собой интранзитивность, этот вопрос не может быть разрешен, пока не решена проблема устойчивости.

Если мы теперь интегрируем гипотезу транзитивности на поверхности S, то она будет означать, что каковы бы ни были точки P_0 и Q_0 на этой поверхности, всегда можно найти сколь угодно близкие к этим точкам точки P, Q и целое число n такие, что $Q = T^n(P)$.

Предположим теперь, что существует хоть одно периодическое движение общего устойчивого типа, с переменными периодами в формальных рядах. Так как это движение неустойчиво, то для него имеется сеть, образованная соответственными связными множествами Σ_α, и Σ_ω.

Рассмотрим часть этой сети, отсекающую малую окрестность около инвариантной точки. Эта окрестность состоит из тех точек поверхности S, которых нельзя достигнуть извне данной области, содержащей инвариантную точку, не пересекая соответствующих ветвей Σ_α или Σ_ω. Граница этой окрестности не состоит целиком из точек одного из множеств Σ_α или Σ_ω. Иначе при безграничном повторении преобразования T^{-1} или T образы этой границы продолжали бы лежать в той же части S, и, таким образом, определилась бы инвариантная часть поверхности S. Вместе с тем очевидно, что при повторении, например, операции T^{-1} часть границы, состоящая из точек Σ_α, стремится к инвариантной точке, а часть, состоящая из точек Σ_ω, должна в конце концов, достигнуть любой части S. В противном случае часть S, достигнутая образами Σ_ω и заключенная внутри них, даст нам также область поверхности S, инвариантную при преобразовании T, что исключено гипотезой транзитивности.

Следовательно, множества Σ_α и Σ_ω, асимптотические к рассматриваемой инвариантной точке при преобразованиях соответственно T^{-1} и T, оба всюду плотны на секущей поверхности S.

Мы уже видели (§ 1, 2 главы VIII), что вблизи такого периодического движения устойчивого типа существует бесконечное множество других периодических движений устойчивого типа, соответствующих инвариантным точкам поверхности S относительно какой-нибудь степени T^n преобразования T. Рассмотрим какое-нибудь такое движение, которое будет общего устойчивого типа с переменными периодами в формальных рядах. Для него существуют множества Σ'_α и Σ'_ω, которые оба должны быть также всюду плотны в S. Но множества Σ_α и Σ'_α не имеют общих точек, поскольку одно и то же движение не может быть асимптотическим к двум различным периодическим движениям в одном направлении (в данном случае в направлении отрицательных t). Аналогично не могут иметь общих точек множества Σ_ω и Σ'_ω.

Отсюда явствует, что множества Σ_α и Σ'_ω имеют бесконечное множество общих точек, так же как и множества Σ'_α и Σ_ω.

В случае транзитивной системы с двумя степенями свободы, если существует периодическое движение общего устойчивого типа, с переменными периодами в формальных рядах, то существует бесконечное множество других периодических движений общего устойчивого типа. Движения, положительно или отрицательно асимптотические к какому-нибудь из периодических движений этого бесконечного множества, образуют множества, всюду плотные в S. Существует бесконечное множество движений, асимптотических в направлении положительных t к одному из этих периодических движений и в то же время асимптотических в направлении отрицательных t к любому другому периодическому движению этого множества или даже к тому же периодическому движению.

Мы рассмотрим теперь периодические движения неустойчивого типа и движения, асимптотические к ним.

Как мы уже видели, существуют аналитические семейства движений, асимптотических в положительном и отрицательном направлении к такому периодическому движению. В простейшем случае, рассмотрением которого мы можем ограничиться, имеются две, соответствующие этим семействам, инвариантные аналитические кривые, проходящие через инвариантную точку, причем точки одной из них дают движения, асимптотические в положительном, а точки другой — движения, асимптотические в отрицательном направлении к данному периодическому движению. Две дуги одной и той же инвариантной кривой, исходящие из инвариантной точки, не могут, разумеется, пересечься, как бы далеко мы их ни продолжили.

Наоборот, две дуги, принадлежащие разным инвариантным кривым, могут пересечься. В этом случае рассуждение, подобное тому, которое мы применяли выше к аналогичным кривым $\Sigma_\alpha, \Sigma_\omega$, покажет нам, что каждая из двух инвариантных кривых будет всюду плотна в S, и что обе кривые будут пересекаться в бесконечном множестве точек([10]).

Кроме того, рассуждая как прежде, мы можем показать, что существует бесконечное множество движений, асимптотических в положительном направлении к заданному периодическому движению общего устойчивого типа, с переменными периодами в формальных рядах, или к заданному периодическому движению общего неустойчивого типа, имеющему двояко-асимптотические движения, и в то же время асимптотических в отрицательном направлении к заданному периодическому движению одного из этих двух типов.

Очевидно, что если две дуги положительно и отрицательно асимптотических типов для такого периодического движения неустойчивого типа пересекают сетку одного движения устойчивого типа, то они будут пересекать все такие сетки, а также друг друга.

Отсюда следует, что если мы докажем, что все четыре дуги, исходящие из инвариантной точки, пересекают эти сетки, то, очевидно, мы сможем распространить заключения, сделанные нами выше относительно движений, асимптотических к периодическим движениям устойчивого типа, на периодические движения неустойчивого типа. Мы докажем сейчас, что это действительно имеет место при условии, что, во-первых, асимптотическая аналитическая дуга, исходящая из одной инвариантной точки неустойчивого типа, не будет тождественна дуге, исходящей из другой такой точки, и, во-вторых, что в нашей системе не существует периодического движения общего устойчивого типа с неизменными периодами в формальных рядах. Случай, когда одно из этих условий не удовлетворяется, нужно считать совершенно исключительным. Мы будем проводить рассуждения только для того случая, когда в нашей системе не имеется кратных периодических движений, хотя заключение остается справедливым при гораздо более общих условиях.

Для того, чтобы доказать вышеприведенное утверждение, предположим, что одна из четырех дуг, принадлежащих к рассматриваемому периодическому движению неустойчивого типа, не пересекает этих сеток, и покажем, что это приведет к противоречию. Неограниченно продолжая эту дугу, мы получим на S связное предельное множество Σ. Это множество Σ, очевидно, инвариантно при преобразовании T. Кроме того, вследствие этого обстоятельства и гипотезы транзитивности, Σ не может ограничивать область. Поэтому согласно известной теореме, принадлежащей Брауверу([11]), на Σ существует точка, инвариантная при преобразовании T. Эта точка должна соответствовать периодическому движению неустойчивого типа, так как по предположению рассматриваемая асимптотическая дуга не может стремиться ни к какому периодическому движению устойчивого типа, с переменными периодами в формальных рядах.

Но теперь очевидно, что Σ должно содержать по крайней мере две дуги, асимптотические (противоположного типа) к этой инвариантной точке, если только первоначально продолженная дуга не совпадает с одной из этих дуг. Но эта последняя возможность была тоже исключена.

Очевидно, что эти новые дуги в Σ не пересекают сеток, принадлежащих к периодическим движениям устойчивого типа, и мы, следовательно, можем взять какую-нибудь одну из них, образуя, таким образом, совокупность Σ_1 в Σ. Продолжая далее этот процесс, мы придем, в конце концов, к множеству Σ^* в Σ, содержащему минимальное количество инвариантных точек, соответствующих периодическим движениям неустойчивого типа, и асимптотических дуг. Любая дуга в таком множестве Σ^*, продолженная исходя из инвариантной точки, должна, следовательно, иметь эту точку в качестве предельной, и будут существовать по крайней мере две такие дуги противоположных типов, асимптотические к одной и той же инвариантной точке.

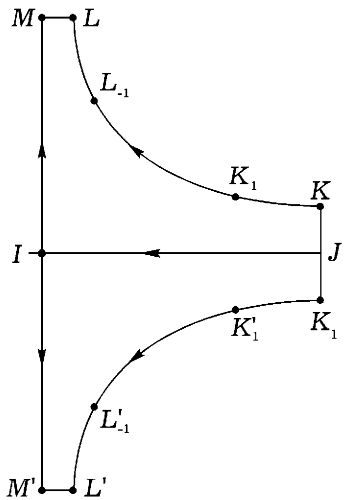

Рис. 8

Рассмотрим отдельно случаи, когда будут существовать две, три или четыре такие дуги, асимптотические к инвариантной точке I (рис. 8).

В первом случае пусть IJ и IM будут дуги в Σ^*, асимптотические соответственно в положительном и отрицательном направлении. Но дуга IM, если мы ее продолжим, должна вернуться в окрестность I, что она может сделать только вдоль IJ. Пусть кривая $IJKLM$ будет построена следующим образом: JK — короткая криволинейная дуга, пересекающая IJ в точке J; KL — дуга, составленная из дуги KK_1, соединяющей точку K с ее образом K_1 вблизи IJ, и образов K_1K_2, K_2K_3, $\ldots$ этой дуги, взятых до тех пор, пока мы не приходим к точке L, лежащей близко от IM; LM — короткий отрезок. Криволинейный многоугольник $IJK'L'M'$ можно подобным же образом построить по другую сторону от IJ. Продолжение дуги IM не может приближаться к IJ, пересекая $JK'K_1'$, потому что тогда дуга IM' тоже лежала бы в Σ^*. Следовательно, это продолжение пересекает JKK_1. Подобным же образом продолжение IJ пересекает MLL_{-1}. Топология фигуры показывает, что продолжения IM и IJ будут пересекаться, что противоречит сделанному предположению.

Предположим теперь, что три дуги, например, IJ одного типа и IM, IM' другого, лежат в Σ^*. Отсюда следует, как выше, что продолжение IJ пересечет MLL_{-1} и $M'L'L'_{-1}$. Но, если продолжение дуги IJ не пересекает ни IM, ни IM', то из топологии фигуры очевидно, что IM пересечет $JK'K_1'$ и также IM' пересечет JKK_1. Таким образом, IM и IM' должны обязательно пересекаться, что невозможно, так как эти дуги принадлежат к одному и тому же типу.

Остается рассмотреть случай, когда все четыре дуги лежат в Σ^*. В этом случае дуга IM, если мы ее продолжим, должна пересекать линию $K_1KJK'K_1'$. Но IM не может пересекать $JK'K_1'$, потому что тогда продолжение IJ не могло бы приближаться к IM', что видно из рассмотрения фигуры. Следовательно, IM должно пересекать JKK_1 и подобным же образом IM' должно пересекать $JK'K_1'$. Но то же рассуждение, которое мы применяли к IJ, покажет, если мы его приложим к IM, то IJ должно пересекать MLL_{-1}. Следовательно, IJ и IM должны пересекаться, что невозможно.

Мы можем теперь формулировать наше заключение.

Предположим, что для какой-нибудь динамической проблемы транзитивного типа с двумя степенями свободы имеется секущая поверхность S рода один. Предположим, кроме того, что все периодические движения общего устойчивого типа содержат переменные периоды в своих формальных рядах и что никакие два аналитических асимптотических семейства, связанных с различными периодическими движениями неустойчивого типа, не совпадают.

При этих условиях каждое из этих асимптотических семейств плотно в M и имеется бесконечное множество движений, асимптотических в обоих направлениях к двум любым (различным или совпадающим) периодическим движениям, безразлично устойчивого или неустойчивого типа.

Сделанное нами специально предположение о несуществовании кратных периодических движений несущественно для доказательства этого предложения; оно было сделано для упрощения доказательства, которое приведено здесь в предположении, что мы имеем дело с этим общим случаем.

Высказанный результат делает очевидной некоторую аналогию между движениями устойчивого и неустойчивого типа.

Выше было показано, что в любой окрестности периодического движения общего устойчивого типа, с переменными периодами в формальных рядах, существуют соседние периодические движения как устойчивого, так и неустойчивого типа. Естественно, возникает вопрос: имеются ли подобно этому периодические движения, сколь угодно близкие к какому-нибудь периодическому движению неустойчивого типа? Конечно, такое движение не может оставаться вблизи данного периодического движения в течение всего периода. На этот вопрос может быть дан утвердительный ответ. А именно, можно показать, что когда обе асимптотические аналитические ветви периодического движения неустойчивого типа пересекаются, то будет существовать бесконечное множество периодических движений, проходящих через сколь угодно малую окрестность соответствующих двояко-асимптотических движений и данного периодического движения неустойчивого типа[1].

Таким образом, можно сказать, что множество всех периодических движений как устойчивого, так равно и неустойчивого типа будет в известном смысле плотно в себе в очень широком классе случаев.

Предположение Пуанкаре, что эти периодические движения всюду плотны, как мы видели, не всегда оправдывается (см. главу VI, § 4), но оно, несомненно, является справедливым в весьма широком классе случаев.

§ 10. О других типах движений. До сих пор мы рассматривали среди различных типов рекуррентных движений только периодические движения, предельно-периодические движения и некоторые другие простые типы рекуррентных движений. Такие рекуррентные движения почти наверное образуют бесконечную иерархию все более и более сложных типов, даже для динамических систем с двумя степенями свободы, которые мы в настоящий момент рассматриваем.

Из движений, асимптотических к рекуррентным в том или ином направлении, мы рассмотрели только движения, асимптотические к периодическим движениям. Мы не рассматривали других специальных и неспециальных движений. Общие методы, применяемые в этой и предыдущей главе, приводят по данным вопросам к целому ряду различных результатов[2].

[1] См. мою статью «On the Periodic Motions of Dynamical Systems», которая напечатана в Acta Mathematica, t. 50, 1927.

[2] См. Мою статью «Surface Transformations and Their Dynamical Applications», Acta Mathematica, vol. 43, § 54–73.

Мы не будем пытаться идти далее в этом направлении. Пример, приведенный в § 11, даст нам некоторое представление о сложности, которую следует здесь ожидать.

§ 11. Пример транзитивной динамической проблемы. Динамические задачи, обычно называемые «интегрируемыми», представляют собой проблемы интранзитивного типа, в которых движения представлены кривыми, лежащими на инвариантных аналитических многообразиях одного или двух измерений в многообразии M. Например, в случае проблемы двух тел все движения будут периодическими и упомянутые инвариантные многообразия в M будут представлять собою замкнутые кривые. В интегрируемых случаях (см. § 12, 13) специальные аналитические соотношения достаточны для того, чтобы дать полное представление о движениях и об их взаимоотношениях.

Любая неинтегрируемая проблема транзитивного типа может, однако, считаться «решенной», если для нее можно указать специальный алгоритм, достаточно могущественный для разрешения всех вопросов о типах и распределении движений.

Я собираюсь в этом параграфе построить такой алгоритм для транзитивной геодезической проблемы на специальной аналитической поверхности отрицательной кривизны. Представляется весьма вероятным, что полученные здесь результаты окажутся типичными во многих отношениях для общего случая транзитивной проблемы; эти результаты легко обобщить на случай любой замкнутой аналитической поверхности отрицательной кривизны. Мы можем дать здесь только интуитивное обоснование полученных результатов. Что же касается техники, то мы можем отослать читателя к замечательным работам Адамара[1] и Морса[2], методы и идеи которых играют главную роль в рассматриваемом здесь построении.

Представляется маловероятным, чтобы какой-нибудь подобный алгоритм существовал для геодезической проблемы на замкнутой аналитической поверхности положительной кривизны.

Поверхность, которую мы будем в дальнейшем рассматривать, определяется уравнением:

$$z^2 = 1 - e^2 \sin^2 \frac{1}{2}x \, \sin^2 \frac{1}{2}y \quad (e > 1),$$

где x, y, z — прямоугольные координаты точки, причем мы условимся

[1] *Hadamard*, «Les surfaces à courbures opposées et leur lignes géodesiques», Journ. de Math., ser. 5, vol. 4, 1898.

[2] *Morse*, «Recurrent geodesics on a Surface of Negative Curvature», Trans. Amer. Math. Soc., vol. 22, 1921 и «A Fundamental Class of Geodesics on Any Closed Surface of Genus Greater Than One», Trans. Amer. Math. Soc., vol. 26, 1924.

считать, что все точки

$$(x \pm 2k\pi,\ y \pm 2l\pi) \quad (k,\ l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

соответствуют одной и той же точке на нашей поверхности. Это соглашение законно, потому что линейная группа параллельных переносов

$$\overline{x} = x \pm 2k\pi, \quad \overline{y} = y \pm 2l\pi, \quad \overline{z} = z$$

переводит нашу поверхность в себя. Основной областью изменения x, y будет тогда квадрат, определяемый неравенствами

$$0 \leqslant x < 2\pi, \quad 0 \leqslant y < 2\pi.$$

Уравнение поверхности можно переписать в виде

$$\sin^2 \frac{1}{2}x \sin^2 \frac{1}{2}y = \frac{1 - z^2}{e^2}.$$

Следовательно, при любом z_0, таком, что $|z_0| < 1$, след данной поверхности на плоскости $z = z_0$ будет состоять из выпуклого, симметричного, аналитического овала, лежащего внутри основного квадрата и имеющего свой центр симметрии в центре этого квадрата. Когда z_0 возрастает по абсолютной величине, этот овал аналитически расширяется, а при $z_0 = \pm 1$ превращается в основной квадрат. Легко убедиться непосредственно или на основании вышеприведенных качественных рассуждений, что эта поверхность всюду аналитическая и имеет отрицательную кривизну везде, кроме точек поверхности, соответствующих сторонам ограничивающих квадратов и $z = \pm 1$.

Связность этой замкнутой поверхности легко определить. Если мы возьмем ее верхнюю половину $z \geqslant 0$ и присоединим к ней внутренность экваториального овала, то убедимся, что верхняя половина нашей поверхности гомеоморфна поверхности тора с одним отверстием в ней. Нижняя половина будет, конечно, гомеоморфна верхней. Таким образом, вся наша поверхность гомеоморфна поверхности тора с ручкой, т. е. поверхности рода 2.

Основное свойство такой поверхности отрицательной кривизны состоит в том, что любые две заданные точки A, B могут быть соединены одной и только одной геодезической дугой AB данного топологического типа.

Если мы применим полное изображение в пространстве x, y, z при помощи бесконечного количества конгруентных экземпляров этой поверхности, то этот результат означает, что любая непрерывная линия на поверхности, соединяющая A с B, может быть деформирована в единственную геодезическую дугу.

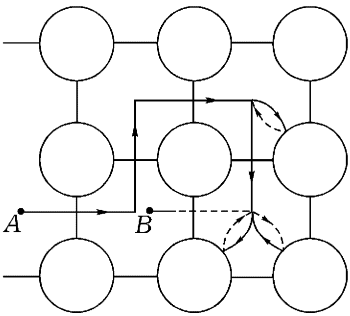

Рис. 9

Постараемся ввести символику, которая дала бы нам возможность изобразить тип любой дуги AB. Рассмотрим проекцию данной поверхности на экваториальную плоскость $z = 0$. Эта проекция будет покрывать дважды всю плоскость, кроме частей, лежащих внутри каждого геодезического овала на экваториальной плоскости. На рис. 9 эти овалы изображаются кругами. Подобно этому, горизонтальные и вертикальные отрезки, принадлежащие сети квадратов, имеющих вершинами центры этих овалов, будут, очевидно, соответствовать замкнутым геодезическим линиям.

Предположим, что проекция точки A лежит внутри какого-нибудь квадрата нашей сети и что же имеет место для точки B. Когда точка P движется вдоль AB от A к B, ее проекция описывает непрерывную кривую на плоскости x, y. С другой стороны, если нам дана эта проекция и указано, в каких точках, лежащих на геодезических овалах, точка переходит с верхней половины поверхности (где $z > 0$) на нижнюю ($z < 0$), то этим путь AB полностью определен.

Пусть символ x обозначает пересечение точкой P вертикального отрезка нашей сети в направлении положительных x, а x^{-1} — пересечение в противоположном направлении. Точно так же символами y и y^{-1} мы обозначим пересечение горизонтального отрезка соответственно в положительном и отрицательном направлениях оси y. Далее, из какой-нибудь точки внутри квадрата достижимы, не пересекая сторон квадрата, четыре квадранта геодезических овалов, а именно: в левом нижнем углу, правом нижнем углу, правом верхнем углу и левом верхнем углу квадрата. Обозначим соответствующие переходы через точки этих овалов в направлении положительных z (т.е. с нижней стороны на верхнюю) через w_1, w_2, w_3, w_4 соответственно, а переходы в противоположном направлении через w_1^{-1}, w_2^{-1}, w_3^{-1}, w_4^{-1} соответственно. Очевидно теперь, что всякая дуга AB соответствует символу, образованному конечной комбинацией этих двенадцати символов, написанных в том же порядке, в каком встречаются соответственные пересечения. Обратно, если дан любой такой символ (ограниченный единственным условием, что за всяким w_i будет следовать w_j^{-1}, и наоборот), то ему соответствует единственный (с точностью до непрерывных деформаций) путь. Причиной указанного ограничения является то, что точка P движется из области $z < 0$ в область $z > 0$ и затем из области $z > 0$ в область $z < 0$.

Каждой допустимой деформации пути AB (причем A и B остаются, разумеется, фиксированными) будет соответствовать некоторая модификация символа. Символы, получаемые друг из друга таким способом, можно назвать «эквивалентными». Совершенно очевидно, что необходимо найти условия эквивалентности двух систем и определить какую-нибудь нормальную форму для каждого класса эквивалентных символов.

Допустимые преобразования символов будут двух типов. Во-первых, мы можем вставить или исключить любую пару элементов вида aa^{-1} или $a^{-1}a$, так как это соответствует деформации над овалом или отрезком. Во-вторых, мы можем заменить такой символ, как w_3y на yw_2, или $w_3^{-1}y$ на yw_2^{-1}, или w_2y^{-1} на $y^{-1}w_3$, или $w_2^{-1}y^{-1}$ на $y^{-1}w_3^{-1}$. Эти изменения будут представлять собою преобразования символа, когда точка P дуги AB, лежащая на геодезическом овале, проходит при деформации через общую точку квадрантов w_2 и w_3 геодезического овала. Мы будем иметь подобные же преобразования в точке, общей квадрантам w_3, w_4, в точке, общей квадрантам w_4, w_1 и в точке, общей квадрантам w_1, w_2.

Для того, чтобы получить нормальную форму, мы уменьшаем число элементов в символе, насколько это возможно, следующими тремя способами. Во-первых, мы вычеркиваем всякую пару aa^{-1} или $a^{-1}a$. Во-вторых, мы заменяем всякую тройку, подобную yw_2y^{-1} на w_3; в самом деле, имеем:

$$yw_2y^{-1} = w_3(yy^{-1}) = w_3.$$

Для каждой из шестнадцати определенных выше операций второго типа существует по две соответствующие тройки вида pw_ip^{-1} или $pw_i^{-1}p^{-1}$, где p обозначает один из символов x, x^{-1}, y, y^{-1}; каждая из этих троек может быть заменена одним элементом w_j или w_j^{-1}. В-третьих, мы заменяем всякую тройку, подобную $w_3yw_2^{-1}$ на y. Для каждой из шестнадцати операций второго рода будет также по две соответственные тройки этого типа, могущие быть замененными одной буквой x, x^{-1}, y или y^{-1}.

После того, как это все проделано, мы везде, где только возможно, меняем порядок во всех парах, подобных $y^{-1}w_3$ (составленных из одного из элементов x, x^{-1}, y, y^{-1}, за которым следует w_i или w_i^{-1}), так, чтобы элемент w_j (или w_j^{-1}) был на первом месте. Так, например, $y^{-1}w_3$ заменяется на w_2y^{-1}.

Нормальную форму мы определим как такую, которая получится после того, как будут проделаны все эти преобразования. Мы хотим показать, что эта нормальная форма будет единственной. Для этой цели мы разделим взятый символ на несколько компонент, из которых каждая состояла бы либо только из элементов x, x^{-1}, y, y^{-1}, либо только из элементов w_j, w_i^{-1}. Например, для дуги AB на чертеже символ будет, очевидно,

$$xyxw_2y^{-1}w_2^{-1}w_1x^{-1};$$

он уже имеет нормальную форму и делится на пять компонент:

$$xyx,\ w_2,\ y^{-1},\ w_2^{-1}w_1,\ x^{-1}.$$

Мы будем доказывать для этого частного случая, что нормальная форма единственна, но метод доказательства будет, очевидно, совершенно общий. Первая компонента, очевидно, дает наименьшее число квадратов, которое может пройти проекция точки P, движущаяся от A к B вдоль пути этого типа, прежде чем она пересечет экваториальную плоскость. Следовательно, всякий другой нормальный символ для AB должен иметь ту же первую компоненту. Подобно этому, вторая компонента указывает единственным образом наибольшее число переходов через плоскость $z = 0$, которое может совершить точка P, оставаясь все время в одном квадрате и никогда не пересекая дважды одного и того же геодезического овала. В данном случае имеется только один элемент w_2 во второй компоненте. Следовательно, вторая компонента будет w_2 во всякой нормальной форме.

Вообще мы совершаем только необходимые переходы через стороны квадратов и геодезические овалы, причем эти последние производятся насколько возможно раньше. Такова будет геометрическая интерпретация операций, приводящих символ к нормальной форме, и это обстоятельство может послужить основой для доказательства единственности этой формы.

Условие, что какой-нибудь символ находится в нормальной форме, означает просто, что некоторые комбинации элементов не могут в нем встречаться. Этими недопустимыми комбинациями будут, очевидно, следующие:

$$xx^{-1},\ x^{-1}x,\ yy^{-1},\ y^{-1}y,\ w_iw_i^{-1},\ w_i^{-1}w_i\ \ (i = 1, 2, 3, 4);$$
$$xw_1,\ xw_4,\ xw_1^{-1},\ \lambda w_4^{-1},\ x^{-1}w_2,\ x^{-1}w_3,\ x^{-1}w_2^{-1},\ x^{-1}w_3^{-1};$$
$$yw_1,\ yw_2,\ yw_1^{-1},\ yw_2^{-1},\ y^{-1}w_3,\ y^{-1}w_4,\ y^{-1}w_3^{-1},\ y^{-1}w_4^{-1}.$$

Бесконечный символ, соответствующий полной геодезической линии, будет, очевидно, обладать тем же свойством минимальности числа элементов, что и нормальный символ, так как геодезическая линия пересекает вспомогательные геодезические линии (стороны квадратов и геодезические овалы) наименьшее число раз. Мы будем называть этот символ «приведенным символом». Буквы x, x^{-1}, y, y^{-1} следуют друг за другом в приведенном символе в точности в том же порядке, что и в нормальном. Но точное положение элементов w_i не может быть определено без более точного знания свойств данной поверхности, и оно будет различным для различных поверхностей того же общего типа.

Для приведенного символа точки пересечения геодезической линии с вспомогательными линиями могут быть ассоциированы с соответственными элементами символа, а промежуточные точки мы можем указывать, вставляя обыкновенное вещественное число u $(0 < u < 1)$ между двумя последовательными элементами α, β, указывая этим, что точка P лежит на дробной части u пути от пересечения α до пересечения β по геодезической дуге.

Таким образом, мы получаем символы для «состояния движения» в нашей проблеме, присоединяя число u к полному приведенному символу. При непрерывном изменении состояния движения u будет изменяться непрерывно (если его рассматривать как периодическую переменную периода один). Соответствующее изменение самого символа будет «непрерывным» в том смысле, что малое изменение состояния движения может вызвать лишь изменения в далеких элементах приведенного символа или же допустимые перестановки порядка последовательных элементов. Соответствующее изменение в нормальном символе будет, вообще говоря, тоже непрерывным, но здесь компоненту вида $w_i\,ccc\ldots$, где c — данная группа элементов — нужно считать равной компоненте $ccc\ldots$ Оба конца, очевидно, меняются непрерывно, но никакие другие изменения порядка не должны нигде иметь место в символе.

Мы можем теперь рассмотреть вопрос о типах движений и их взаимоотношениях.

Прежде всего, периодические движения, соответствующие замкнутым геодезическим линиям, находятся, очевидно, в одно-однозначном соответствии со всеми нормальными типами конечных символов, если мы два символа, не отличающихся круговым порядком элементов, будем считать за один. Два периодических движения, соответствующих двум направлениям, в которых может быть пройдена одна и та же геодезическая линия, отвечают соответственно некоторому конечному символу и тому же символу, взятому в обратном порядке. Нормальным символом для полной геодезической линии будет, очевидно, этот частичный символ, повторенный бесконечное множество раз. Так как этот частичный символ может быть выбран по произволу, то соответствующее периодическое движение мы можем выбрать сколь угодно близко от произвольного геодезического движения.

Множество периодических движений всюду плотно во множестве всех движений системы.

Далее рассмотрим движения, асимптотические в положительном направлении к данному периодическому движению. Для того, чтобы какое-нибудь движение было таковым, нормальный символ этого движения должен, разумеется, совпадать с символом периодического движения, начиная с некоторого места, и это условие является также достаточным. Для того, чтобы данное движение было асимптотическим к одному периодическому движению, определяемому конечным символом p в отрицательном направлении, а к другому, определяемому символом q, в положительном, необходимо и достаточно, чтобы его символ повторял символ p, начиная с некоторого места влево, и символ q, начиная с некоторого места вправо. Промежуточная часть символа может быть выбрана по произволу. Если символы p и q совпадают, то мы определяем таким образом движение, двояко-асимптотическое к данному периодическому движению. Так как промежуточная часть произвольна, то движения каждого из этих типов всюду плотны, но их множество исчислимо.

Это рассуждение показывает, что существует, имеющее мощность континуума, семейство движений, положительно или отрицательно асимптотических к данному периодическому движению. Существует также бесконечное множество движений, положительно асимптотических к одному заданному периодическому движению и отрицательно асимптотических к другому заданному или тому же периодическому движению, и множество таких движений всюду плотно, хотя исчислимо.

И, вообще, если движение должно быть асимптотическим в данном направлении к какому-нибудь данному движению, то этим задается только один конец соответственного символа.

Подобное же заключение остается справедливым по отношению к движениям, асимптотическим к любым двум данным движениям.

Существуют также движения, полуасимптотические к данным движениям, которые хотя и не являются собственно асимптотическими к ним, но таковы, что их отклонения становятся все более и более редкими при безграничном возрастании (или убывании) времени.

Для того, чтобы построить соответствующий символ, мы должны просто написать такой нормальный символ, который в одном направлении состоит все в большей и большей мере из повторений символа одного из данных движений, в то время как в другом направлении он составлен подобно этому, главным образом, из компонентов символа второго данного движения.

Перейдем теперь к рекуррентным движениям непериодического типа. Очевидно, что соответствующий нормальный символ характеризуется тем свойством, что каково бы ни было целое положительное число n, мы можем найти настолько большое целое число N, что любая встречающаяся в нашем символе последовательность n знаков встретится по крайней мере однажды во всякой последовательности N знаков символа. Морс (цитировано выше) дал особый метод построения такого символа.

Существует, вероятно, целая иерархия таких рекуррентных движений, зависящих (в отношении степени сложности соответственных символов) от характера изменения N в зависимости от n. Здесь я хочу только указать один метод, который может привести к обнаружению рекуррентных движений непериодического типа для рассматриваемой системы. Пусть $f(x_1, \ldots, x_p)$ будет любая функция, аналитическая и периодическая периода 1, относительно своих p аргументов $x_1, \ldots, x_p$ $(p > 1)$. Если $c_1, \ldots, c_p$ суть p количеств, не связанных между собою никакими линейными соотношениями с целыми коэффициентами, то $f(c_1\lambda, \ldots, c_p\lambda)$ будет квазипериодической функцией от λ. Обозначим теперь символом a наименьший положительный вычет по модулю q целой части числа a, так что a есть одно из целых чисел $0, 1, \ldots, q-1$. Функция $f(c_1\lambda, \ldots, c_p\lambda)$, если мы будем подставлять вместо λ целые числа, даст нам бесконечную в обе стороны последовательность, состоящую из целых чисел $0, 1, \ldots, q-1$, обладающую требуемым характеристическим свойством рекуррентности, и не будет периодического типа, если только функция f не окажется слишком близкой к периодической.

Предположим, например, что мы возьмем $q = 8$ и соотнесем числам $0, 1, \ldots, 7$ знаки x, x^{-1}, y, y^{-1}, w_1 (или w_1^{-1}), w_2 (или w_2^{-1}), w_3 (или w_3^{-1}), w_4 (или w_4^{-1}) соответственно. Кажущаяся некоторая неопределенность несущественна, так как знаки w_i, w_j^{-1} должны чередоваться. Тогда мы получим символ для рекуррентного движения на нашей поверхности, соответствующий любой функции f. В самой природе предложенного метода построения рекуррентных непериодических движений лежит то, что они обладают некоторыми p периодами, лежащими в основе, и вполне могут быть непрерывного типа. Пример, предложенный Морсом, оказался, как он показал, разрывного типа.

Общая теория, изложенная в главе VII, показывает, что всякое движение имеет в связном замкнутом множестве своих α- (ω)- предельных движений некоторое множество рекуррентных движений.

Метод, примененный там для построения такого рекуррентного движения, имеет свой аналог в символическом методе, при помощи которого по крайней мере один нормальный символ рекуррентного типа может быть получен из каждого конца какого-нибудь нормального символа.

Возникает вопрос: в какой мере связные замкнутые α- и ω-предельные множества могут быть заданы по желанию? Но очевидно, что так как данное движение приближается к своим ω-предельным движениям асимптотически при возрастании времени, то возможно найти последовательность безгранично возрастающих дуг

$$AB,\ B'C,\ C'D,$$

лежащих в ω-предельном множестве, и при этом таких, что B' очень близко к B, C' к C и т. д., и что эти дуги, взятые вместе, аппроксимируют сколь угодно близко множество всех ω-предельных движений([12]). Для этой цели мы можем разбить данное движение на длинные дуги MN, NP, PQ, $\ldots$, каждая из которых близка к ω-предельному множеству, так что в этом множестве существуют отрезки AB, $B'C$, $\ldots$, близкие соответственно к MN, NP и, таким образом, ко всему ω-предельному множеству. Будем называть всякое связное замкнутое множество, обладающее этим свойством, «циклическим».

α- и ω-предельные множества всякого движения будут непременно циклическими множествами. Обратно, если в рассматриваемом случае даны два циклических множества движений, то всюду плотно лежат движения, имеющие в точности данные множества в качестве своих α- и ω-предельных множеств.

В самом деле, построим символ, который имел бы в одном направлении последовательность символов, соответствующих дугам AB, $B'C$, $C'D$, $\ldots$ ω-предельного циклического множества, где, как выше, эти символы возрастают по длине, в то время как расстояния между точками BB', CC', $\ldots$ становятся все меньше и меньше; сделаем то же для α-предельного циклического множества, но в обратном направлении. Между этими двумя частями вставим произвольный конечный символ. Такой символ, очевидно, соответствует движению с требуемыми свойствами, и эти движения будут, очевидно, всюду плотны, благодаря присутствию произвольного символа.

Наконец, существуют неспециальные движения, так что рассматриваемая динамическая проблема транзитивна.

Для того, чтобы получить неспециальные движения, нам нужно только написать символы, которые содержали бы все допустимые конечные последовательности значков.

Совокупность всех неспециальных движений, разумеется, измерима в смысле Лебега, и вполне естественно предположить, что ее мера равна мере всего многообразия состояний движения, т. е. что совокупность всех специальных движений имеет меру нуль. Я не мог доказать справедливость этого предположения([13]).

Таким образом, в геодезической проблеме на замкнутой аналитической поверхности отрицательной кривизны существует чрезвычайно большое разнообразие типов движения, но тем не менее для нее существует специальный алгоритм, при помощи которого мы можем удовлетворительно описать все это разнообразие с помощью надлежащих символов.

Вышеприведенная задача, разумеется, отличается от динамических задач наиболее интересного класса, представленного геодезической проблемой на выпуклой поверхности, в том отношении, что в ней все периодические движения принадлежат к неустойчивому типу. Тем не менее она, по-видимому, является во многих отношениях типической для общего случая.

§ 12. Интегрируемый случай. Проблема геодезических линий на выпуклом эллипсоиде, исследованная Якоби, является общеизвестным примером интегрируемой задачи[1]. Если мы сплющим этот эллипсоид, превратив его в плоский эллипс, то получим в пределе специальный интегрируемый случай проблемы бильярдного шара (см. главу VI, § 6). Этот пример является еще более конкретным, так как геодезические линии превращаются в обыкновенные ломаные с вершинами, лежащими на эллипсе, и сторонами, образующими равные углы с нормалью к эллипсу в любой вершине.

Из элементарной геометрии известно, что если какой-нибудь отрезок этой ломаной проходит через фокус эллипса, то все последующие и предыдущие отрезки этой ломаной будут проходить поочередно через оба фокуса эллипса, как бы далеко мы их ни взяли. Другое общеизвестное свойство состоит в том, что если мы построим систему эллипсов и гипербол, конфокальных с границей бильярдного стола, то последовательные отрезки нашей ломаной или их продолжения будут касаться одного и того же эллипса или гиперболы нашей системы конфокальных конических сечений; если эти точки касания лежат на эллипсе, то бильярдный шар будет двигаться кругом стола все время в одном и том же направлении; если же эти точки лежат на гиперболе, то последовательные точки касания лежат поочередно на ее двух ветвях, а последовательные отрезки лежат между ее ветвями; большая и малая оси эллипса, ограничивающего стол, образуют два предельных случая периодического движения.

Воспользуемся теперь координатами φ и ϑ, которые мы уже приме-

[1]Очень поучительное исследование интегрируемых случаев можно найти в статье Whittaker «On the Adelphic Integral of the Differential Equations of Dynamics», Proc. Royal. Soc., Edinburgh, vol. 47, 1917.

няли в главе VI, § 7, для построения преобразования кругового кольца в себя. Здесь φ обозначает угловую координату периода 2π, измеряющую длину дуги вдоль эллипса, в то время как ϑ измеряет угол с положительным направлением касательной к эллипсу, под которым шар исходит из данной точки на эллипсе.

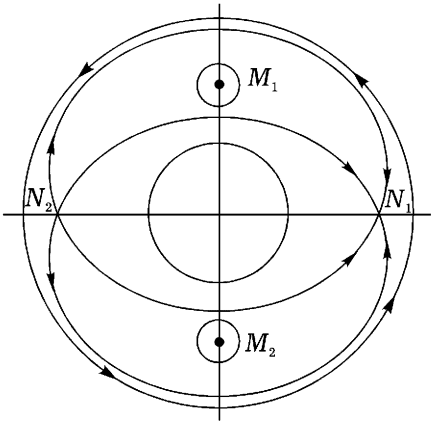

Рис. 10

Для любых (φ, ϑ), где $\vartheta + \pi$ и φ могут быть рассматриваемы как полярные координаты точки на кольцеобразной секущей поверхности (рис. 10), существует одно и только одно исходное состояние движения шара и существует непосредственно следующее состояние (ϑ_1, φ_1). Таким образом, определяется преобразование T, переводящее (ϑ, φ) в (ϑ_1, φ_1). Мы не будем заниматься здесь выводом формул, выражающих ϑ_1, φ_1 через ϑ, φ, хотя эти формулы могут быть получены прямо или как предельный случай формул, появляющихся в геодезической проблеме на эллипсоиде. Такие явные формулы не нужны для наших целей.

Мы хотим определить качественный характер преобразования T в этом интегрируемом случае.

Прежде всего, движение бильярдного шара вокруг стола в каком-нибудь из двух противоположных направлений, очевидно, соответствует последовательности точек на одной замкнутой аналитической кривой, лежащей вблизи кривой соответственно $\vartheta = 0$ или $\vartheta = \pi$, в зависимости от направления движения, т. е. от того, возрастает или убывает φ; оба предельных случая $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ соответствуют катанию бильярдного шара вокруг стола вдоль его эллиптической границы в двух противоположных направлениях. Таким образом, мы получаем два аналитических семейства кривых, сходящихся соответственно к кривым $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$, которые остаются инвариантными при преобразовании T. Согласно результатам, полученным в главе VI, преобразование T оставляет на месте точки кривой $\vartheta = 0$, но поворачивает точки, лежащие на кривой $\vartheta = \pi$, на угол, равный 2π.

Во-вторых, если мы рассмотрим исходное состояние движения шара, соответствующее касанию к гиперболе, то будет иметься одна и только одна такая точка касания, лежащая на прямой линии, образованной отрезком, пройденным бильярдным шаром, или продолжением этого отрезка, и мы можем эту точку касания непрерывно изменять вдоль всей гиперболы. Существуют, однако, для каждой такой точки касания два соответственных исходных состояния движения, соответствующих двум значениям φ, — одному на каждой из двух дуг границы стола, лежащих между обеими ветвями рассматриваемой гиперболы. Следовательно, каждая гипербола дает две замкнутые аналитические кривые в кольце, и когда гиперболы, изменяясь, стремятся к малой оси данного эллипса, мы получаем два аналитических семейства кривых, сходящихся соответственно к точкам $M_1 = (\pi/2, \pi/2)$, $M_2 = (\pi/2, 3\pi/2)$, соответствующим движению вдоль малой оси.

Очевидно, что предельным случаем любого из этих четырех типов движения будет упомянутый вначале случай, когда прямолинейные отрезки проходят через фокусы. Но исходные состояния движения, соответствующие прохождению через какой-нибудь фокус, соответствуют одной замкнутой аналитической кривой, и эти две кривые имеют две общие точки, а именно точки $N_1 = (\pi/2, 0)$, $N_2 = (\pi/2, \pi)$, соответствующие движению шара вдоль большой оси. Таким путем мы можем разделить все точки кольца (соответствующие всем возможным состояниям движения) на области, как показано на рис. 10.

Преобразование T оставляет инвариантными точки, лежащие на внутренней границе кольца, и вращает инвариантные аналитические кривые, лежащие близко к ней, на угол, возрастающий вместе с расстоянием от границы, поскольку, — когда ϑ возрастает, в то время как φ остается неподвижным, — φ_1 оказывается возрастающим. Для предельной кривой этого семейства, состоящей на двух аналитических дуг, сходящихся в точках N_1 и N_2, мы видим, что преобразование T вращает N_1 в N_2 и N_2 в N_1 в положительном направлении, причем дуги, проходящие через N_1 и N_2, меняются местами.

Подобно этому, преобразование T передвигает точки, лежащие на внешней границе кольца, на угол 2π в положительном направлении, а инвариантные аналитические кривые, лежащие близко к внешней границе, преобразование T вращает на угол, меньший 2π и уменьшающийся с увеличением расстояния от границы.

Предельная кривая этого семейства состоит из двух аналитических дуг, имеющих общими концами точки N_1 и N_2, и преобразование T переводит N_1 в N_2 и меняет местами обе дуги.

Рассмотрение движений, проходящих через фокусы, показывает, что эти движения стремятся асимптотически к движению вдоль большой оси в обоих направлениях. Это обстоятельство находится в соответствии с тем фактом, что все точки, лежащие на внутренних дугах N_1N_2, передвигаются на угол меньший, чем π, в то время как точки внешних дуг N_1N_2 передвигаются на угол больший, чем π. Очевидно, что преобразование T не имеет инвариантных точек внутри кольца.

Рассмотрим теперь различные типы движения и для начала какое-нибудь движение, соответствующее кривой аналитического семейства, содержащего кривую $\vartheta = 0$.

Примем аналитические переменные (φ, ψ), где ψ изменяется вместе с кривой семейства. Преобразование принимает вид

$$\varphi_1 = F(\varphi, \psi), \quad \psi_1 = \psi$$

с якобианом

$$J = \frac{\partial F}{\partial \varphi} > 0.$$

Если в этих переменных инвариантный интеграл будет

$$\iint I\, d\varphi\, d\psi$$

(см. § 1), то мы будем иметь

$$I(\varphi_1, \psi_1)\frac{\partial F}{\partial \varphi} = I(\varphi, \psi),$$

так что интеграл от $\int I\, d\varphi$ вдоль какой-нибудь дуги $\psi = \mathrm{const}$ и вдоль преобразованной дуги имеет одно и то же значение.

Положим теперь

$$\frac{\chi}{2\pi} = \frac{\int_0^{\varphi} I(\varphi, \psi)\, d\varphi}{\int_0^{2\pi} I(\varphi, \psi)\, d\varphi},$$

вводя таким образом новую аналитическую угловую переменную χ периода 2π, которой мы можем заменить φ. В этих специальных переменных преобразование T примет вид

$$\chi_1 = \chi + \alpha(\psi), \quad \psi_1 = \psi.$$

Здесь $\alpha(\psi)$ — аналитическая функция от ψ.

Следовательно, преобразование любой инвариантной кривой аналитического семейства, содержащего кривую $\vartheta = 0$, является по существу вращением на угол α, изменяющийся аналитически вместе с кривой и возрастающий, начиная с нуля при $\vartheta = 0$ к предельному значению π. Но эту переменную ψ, разумеется, не следует считать определенной на предельной неаналитической кривой.

Следовательно, если $\alpha(\psi)$ соизмеримо с 2π, скажем, $\alpha = 2\pi p/q$, то каждая точка инвариантной кривой соответствует полигональному периодическому движению бильярдного шара, при котором он обходит за один период p раз вокруг эллипса и имеет на нем q вершин. Здесь p считается взаимно простым с q и p, q принимают все значения, при которых $p < q/2$.

Если $\alpha(\psi)$ несоизмеримо с 2π, то вся кривая соответствует одному минимальному множеству рекуррентных движений непрерывного типа.

Таким же образом, на аналитическом семействе инвариантных кривых, содержащем кривую $\vartheta = \pi$, преобразование T является по существу вращением с коэффициентом вращения β, изменяющимся аналитически от одной инвариантной кривой к другой и уменьшающимся от значения 2π на границе к предельному значению π. И в этом случае мы имеем такое же распределение периодических движений и движений рекуррентного типа.

Если мы теперь обратимся к двум аналитическим семействам кривых, которые примыкают соответственно к точкам M_1 и M_2 и которые меняются местами при преобразовании T, то целесообразнее рассматривать T^2 вместо T, поскольку T^2 оставляет кривые обоих семейств инвариантными, в то время как ни одна точка этих кривых не может быть инвариантной относительно нечетной степени преобразования T.

Рассуждая аналогичным образом, мы можем показать, что преобразование каждой из этих инвариантных кривых в себя при T^2 является по существу вращением, коэффициент которого γ изменяется аналитически от кривой к кривой; в каждой из двух инвариантных точек M_1, M_2 значение γ будет просто коэффициентом вращения для соответствующего устойчивого периодического движения вдоль малой оси, причем γ стремится к предельному значению вдоль предельной неаналитической кривой семейства.

Если γ соизмеримо с 2π, скажем $\gamma = 2\pi p/q$, то всякая точка инвариантной кривой соответствует полигональному периодическому движению, имеющему на эллипсе $2q$ вершин и p раз колеблющемуся по направлению малой оси. Если γ не соизмеримо с 2π, то кривая соответствует единственному минимальному множеству рекуррентного типа.

Очевидно, что точки N_1, N_2 соответствуют периодическому движению вдоль большой оси и, следовательно, будут неустойчивого типа с аналитическими асимптотическими ветвями, представленными инвариантными кривыми, проходящими через эти точки. Подобным же образом M_1, M_2 соответствуют периодическому движению устойчивого типа вдоль малой оси.

Таким образом, мы видим, что имеющееся в нашем распоряжении аналитическое орудие дало нам возможность определить возможные типы движения и их взаимоотношения.

И не только эти, но и другие естественно возникающие вопросы могут быть разрешены без затруднения.

Например, в случае движения вокруг стола в любом из двух направлений имеется ли единственное число, которое можно было бы по праву назвать средним угловым вращением? Ответ на этот вопрос положительный в случае периодического движения, и можно показать также, что он будет положительным и в случае непериодического движения. В самом деле заметим, что если n обозначает число вершин, пройденных в какой-нибудь промежуток времени, и если f_n обозначает соответствующее приращение ранее определенной координаты χ, то мы имеем очевидно

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_n}{n} = \alpha,$$

где α — коэффициент вращения. Кроме того, если n велико, то вершины будут распределены с приблизительно равной густотой для χ между 0 и 2π. Но время, необходимое для прохождения от одной вершины к следующей, пропорционально длине отрезка и, следовательно, имеет вид $l(\chi)$, где l есть аналитическая и периодическая (периода 2π) функция от χ. Следовательно, полное время, потребное на прохождение n вершин, будет:

$$l(\chi) + l(\chi_1) + \ldots + l(\chi_{n-1}),$$

что приближенно дается интегралом

$$\frac{n}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} l(\chi)\, d\chi.$$

Отсюда мы выводим, что существует среднее угловое вращение, которое имеет величину

$$\frac{2\pi\alpha(\psi)}{\int\limits_0^{2\pi} l(\chi)\, d\chi},$$

где α и l суть определенные аналитические функции.

§ 13. Понятие интегрируемости. Вопросы, касающиеся интегрируемости данной динамической проблемы, представляют большой интерес. Общеизвестно, что для некоторых задач можно ввести вспомогательные аналитические соотношения, с помощью которых мы можем удовлетворительно исследовать решения соответствующих дифференциальных уравнений. В этом случае система может быть названа «интегрируемой». Если, однако, мы попытаемся сформулировать точное определение интегрируемости, то оказываются возможными многие различные определения, каждому из которых присущ известный теоретический интерес. Рассмотрим вкратце понятие интегрируемости, не забывая при этом указания Пуанкаре, что система дифференциальных уравнений может быть только более или менее интегрируемой.

Заметим, что в только что рассмотренной проблеме мы имеем четыре периодических движения, которые играли специальную роль, а именно, движения вдоль обеих осей эллипса и два движения вдоль самого эллипса в обоих возможных направлениях.

Все другие периодические движения разбиваются на аналитические семейства и, таким образом, с формальной точки зрения представляют собой весьма вырождающиеся типы. Но эти специальные движения изолированы и принадлежат к общему типу. В окрестности этих точек мы будем иметь обычные разложения координат в формальные ряды[1], и эти ряды мы можем считать сходящимися и аналитически продолженными на некоторую окрестность движения; в самом деле, эти свойства представляют собой только другое выражение подобных же свойств интегрируемого преобразования T, согласно которым оно вращает определенным образом известные кривые, окружающие инвариантные точки.

Отметим также, что в этой проблеме четыре надлежащим образом выбранные окрестности четырех основных периодических движений покрывают целиком многообразие M; в самом деле, оба семейства движений вокруг эллипса, семейство движений поперек эллипса и периодическое движение вдоль большой оси вместе исчерпывают все движения системы. Эти факты подсказывают нам следующее (не вполне точное) определение интегрируемости, основанное на некотором локальном и на некотором нелокальном свойстве.

Данная система аналитических дифференциальных уравнений на замкнутом аналитическом многообразии M будет называться интегрируемой, если существует конечное множество периодических движений, такое, что соответствующие полные разложения в формальные ряды могут быть взяты сходящимися и дающими соответственное аналитическое представление для каждого возможного движения системы.

При применении этого определения в качестве известного рода нормы естественно появляются некоторые соображения.

Прежде всего, естественно определить «локальную интегрируемость» в окрестности некоторого периодического движения общего устойчивого типа как такую, когда формальные ряды мы можем счи-

[1] Разумеется, при этом вместо времени t появится дискретный аргумент — целое число n.

тать сходящимися. Следовательно, движение устойчиво в интегрируемом случае, и соответственные явные формулы дают нам полное представление о характере близких движений.

Но теперь возможно представить, что эти ряды хотя и не сходятся, но вблизи периодических движений представляют асимптотически какие-то функции, непрерывные вместе с некоторыми или всеми своими производными, причем с помощью этих функций система дифференциальных уравнений может быть приведена к нормальному виду, подобно тому, как в § 13 главы III $M_1, \ldots, M_m$ суть функции от $\xi_1\eta_1, \ldots, \xi_m\eta_m$, непрерывные вместе с некоторыми из своих производных. Здесь качественное поведение системы таково же, как и в случае сходимости. Возникает вопрос: нужно ли систему дифференциальных уравнений называть интегрируемой и в этом более общем случае?

Кроме того, качественное поведение движений вблизи периодического движения общего неустойчивого типа для систем с двумя степенями свободы существенно не зависит от сходимости или расходимости формальных рядов. Спрашивается, должны ли мы называть всякую систему локально интегрируемой в окрестности подобного периодического движения неустойчивого типа.

Если дифференциальная система содержит параметр μ, то мы можем рассматривать тот вид локальной интегрируемости, когда от формальных рядов требуется не только, чтобы они сходились, но также чтобы они были аналитическими относительно μ. Именно в этом смысле Пуанкаре доказал несуществование отличных от классических, однозначных интегралов в задаче трех тел[1]. Но очевидно, что это определение логически отлично от вышеприведенного. Система, не интегрируемая в этом смысле, может быть (a priori) интегрируемой согласно нашему определению для каждого отдельного значения параметра μ. Насколько я знаю, локальная неинтегрируемость в вышеприведенном смысле не была установлена ни для какой динамической проблемы. Мы здесь, однако, установим ее (для случая $m = 1$) следующим образом.

Предположим, что всякая гамильтонова проблема локально интегрируема в окрестности точки обобщенного равновесия общего устойчивого типа (см. главу III). Применяя нормальные переменные, мы видим, что тогда T является по существу вращением на переменный угол.

Вдоль инвариантных аналитических кривых с рациональным коэффициентом вращения все движения будут периодическими в интегрируемом случае с одним и тем же периодом $2k\pi$. Именно на этом обстоятельстве основывается наше дальнейшее рассуждение.

Далее, из самой природы преобразования T следует, что вблизи

[1]«Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste», т. 1, гл. 5.

точки равновесия не имеется других периодических движений с тем же периодом $2k\pi$, так как вращение постоянно возрастает вместе с расстоянием и инвариантное семейство представлено кривой, встречающей каждый радиус только однажды.

Напишем теперь
$$H = H_0 + \mu H_1,$$
где H_0 есть данное значение главной функции, μ — малый параметр, а H_1 — аналитическая функция от p_1, q_1 и t, периодическая относительно t с периодом 2π и начинающаяся с членов не ниже пятой степени, если мы ее разложим в степенной ряд по степеням p_1, q_1, но в остальном произвольная. Легко убедиться, что в измененной проблеме множитель λ и постоянная l не зависимы от μ.

Кроме того, мы можем принять, что H_0 имеет нормальный вид
$$H_0 = \lambda p_1 q_1 + \frac{1}{2} p_1^2 q_1^2,$$
так как мы можем пользоваться нормальными переменными. Вдоль всякого движения аналитического семейства уравнения вариации имеют одно и только одно периодическое решение периода $2k\pi$, как показывает прямое вычисление.

Будем изменять μ от его начального значения $\mu = 0$. Тут могут представиться две возможности. Либо кривая, изображающая периодическое аналитическое семейство для $\mu = 0$, может быть продолжена аналитически, в каковом случае имеется близкая кривая для $\mu \neq 0$; или же будет иметься только конечное число периодических движений этого периода для μ, малых по абсолютной величине.

В первом случае, очевидно, должно существовать периодическое решение уравнений вариации относительно μ, которые получаются, если мы прибавим неоднородные члены — $\partial H_1/\partial q_1$, $\partial H_1/\partial p_1$ к соответственным правым частям уравнений вариации, упомянутых выше. Но так как $\partial H_1/\partial q_1$, $\partial H_1/\partial p_1$ могут быть взяты почти по произволу вдоль любого периодического движения, то обычные явные формулы для вариаций δp_1, δq_1 показывают, что, вообще говоря, не будет существовать никакого периодического решения. В самом деле, функции δp_1, δq_1 могут быть выражены как интегралы, линейные в этих произвольных функциях, к которым прибавлено общее решение однородной системы, одна часть которой является периодической. Таким образом, два условия должны удовлетворяться в то время, как имеется (существенно) только одна произвольная постоянная, и условие совместимости требует, чтобы обращался в нуль некоторый интеграл, взятый на отрезке, равном $2k\pi$, подынтегральное выражение которого содержит линейно $\partial H_1/\partial q_1$, $\partial H_1/\partial p_1$. Очевидно, что это условие не может в общем случае выполняться.

Следовательно, если H_1 выбрано надлежащим образом и затем μ взято произвольно малым, то будет только конечное число периодических движений этого периода.

Но по предположению измененная система интегрируема. Посредством другого, значительно меньшего изменения функции H, мы можем уничтожить аналитическое периодическое семейство значительно ближе к положению обобщенного равновесия, не вводя при этом новых периодических движений периода $2k\pi$.

Идя далее таким же образом, мы образуем предельную допустимую главную функцию H, для которой λ и l остаются прежними, но для которой не существует аналитических периодических семейств, принадлежащих коэффициентам вращения, сколь угодно близким коэффициенту вращения обобщенного равновесия. Эта предельная проблема не может, следовательно, быть локально интегрируемой в приведенном смысле.

Так как существует только исчислимое множество периодов $2k\pi$ ($k = 1, 2, \ldots$), участвовавших в нашем рассуждении, легко видеть, что для подходящим образом выбранного H не будет существовать никаких периодических аналитических семейств вблизи точки равновесия.

В локально интегрируемой гамильтоновой проблеме вблизи обобщенного равновесия общего устойчивого типа $l \neq 0$ будет существовать бесконечное множество близлежащих аналитических семейств периодических движений, имеющих своим периодом целое кратное основного периода.

Вообще же гамильтонова система близ такого периодического движения будет локально неинтегрируемой и не будет иметь аналитических семейств близлежащих периодических движений.

Было бы возможно, и это представляло бы значительный интерес, применить тот же метод к доказательству того, что близкие инвариантные семейства, асимптотические в противоположных направлениях, к одному и тому же периодическому движению, вообще говоря, не существуют. Это исключило бы возможность инвариантных семейств, принадлежащих рациональному коэффициенту вращения, и доказало бы, что вообще имеется либо полная неустойчивость, либо зональная неустойчивость.

Тот же метод позволяет нам установить, что кратные периодические движения, вообще говоря, не существуют для периодических задач этого типа.

Глава 9
Проблема трех тел

§ 1. Вводные замечания. Задача трех или большего числа тел считается по справедливости одной из самых знаменитых проблем в математике. Тем не менее, до недавнего времени весь интерес в этой проблеме был направлен на формальную сторону вопроса и в частности на формальное решение посредством рядов. Пуанкаре[1] был первым, получившим блестящие качественные результаты, касающиеся в особенности специального предельного случая так называемой «ограниченной проблемы трех тел», рассмотренной впервые Хиллом. Что касается общей проблемы, то главные результаты, полученные Пуанкаре, следующие: во-первых, он установил существование различных типов периодических движений методом аналитического продолжения; во-вторых, он показал, что в силу самой структуры дифференциальных уравнений проблемы тригонометрические ряды могут быть полезными, и, наконец, в-третьих, он указал на пригодность этих рядов, как асимптотических. Все эти результаты остаются справедливыми не только для проблемы трех тел, но и для всякой гамильтоновой системы. К несчастью, в его исследованиях всегда имеется вспомогательный параметр μ, причем при $\mu = 0$ система будет специального интегрируемого типа. Таким образом, возникающие трудности (по крайней мере, отчасти) более зависят от особой природы интегрируемого предельного случая (когда два из трех тел имеют массу 0), чем присущи самой проблеме.

Можно без преувеличения сказать, что последняя работа Сундмана[2] является одной из замечательнейших работ о проблеме трех тел, которая была когда-либо сделана. Он доказал, что по крайней мере в том случае, когда момент количества движения тел относительно какой-либо оси, проходящей через центр тяжести, не равен нулю, наибольшее из трех расстояний между телами будет всегда превосходить некоторую определенную константу, зависящую от начального расположения; таким образом, доказана невозможность тройного соударения, тогда как относительно особенностей при двойном соударении показано, что

[1] См. его «Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste».

[2] См. *Sundman*, «Mémoire sur le problème de trois corps», Acta Mathematica, vol. 36, 1912; в связи с этим см. также J. Chazy, «Sur l'allure du mouvement dans le problème des trois corps», Ann. Scient. De l'École Normale Sup., 1922.

они устранимого типа. Этим путем установлена справедливость предположения Вейерштрасса о невозможности тройного соударения и получены сходящиеся ряды для координат и времени, годные для всего движения. Получив такие ряды, Сундман «решил» проблему трех тел в смысле, указанном Пенлеве[1]. В сущности, однако, существование таких рядов является простым отражением того физического факта, что тройное столкновение невозможно, и ничего более этого не дает относительно качественной природы решения. В этой главе я собираюсь рассмотреть проблему трех тел, стараясь приложить к ней, насколько возможно, точки зрения, развитые в предыдущих главах, и в частности показать, в чем, по-видимому, состоит истинное значение результатов, которые были получены Сундманом[2].

§ 2. Уравнения движения и классические интегралы. Предположим, что рассматриваемые три тела, которые мы будем считать материальными точками, находятся в точках P_0, P_1, P_2 и имеют массы m_0, m_1, m_2 соответственно. Обозначим расстояние P_0P_1 через r_2, расстояние P_0P_2 через r_1 и расстояние P_1P_2 через r_0. Если мы теперь положим

$$U = \frac{m_0 m_1}{r_2} + \frac{m_0 m_2}{r_1} + \frac{m_1 m_2}{r_0} \tag{1}$$

и если x_i, y_i, z_i $(i = 0,\, 1,\, 2)$ будут декартовы координаты соответствующего тела P_i, а x_i', y_i', z_i' будут составляющими скорости этого тела, то уравнения движения могут быть записаны в виде девяти уравнений второго порядка:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i} \quad (i = 0,\, 1,\, 2), \tag{2}$$

которые, очевидно, представимы как уравнения Лагранжа; они могут быть также записаны как восемнадцать уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_i}{dt} = x_i', && \frac{dy_i}{dt} = y_i', && \frac{dz_i}{dt} = z_i', && (i = 0,\, 1,\, 2),\\ &m_i \frac{dx_i'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, && m_i \frac{dy_i'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, && m_i \frac{dz_i'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z_i}, && (i = 0,\, 1,\, 2), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

которые, разумеется, могут быть легко превращены в уравнения типа Гамильтона. Мы не будем здесь делать этого преобразования, которое может быть произведено обычным способом, а также не станем

[1] См. *Painlevé*, «Lecons sur la théorie des équations différentielles».

[2] Большая часть новых результатов, содержащихся в этой главе, сообщена мною в Chicago Colloquium в 1920 г.

высказывать обычные вариационные принципы, которые могут быть применены к данному случаю (см. главу II).

Интеграл, выражающий принцип сохранения энергии, будет, как легко видеть, иметь вид

$$\frac{1}{2}\sum m_i(x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i) = U - K, \tag{4}$$

где K — постоянная интегрирования.

Кроме этого интеграла имеется, разумеется, еще шесть линейных интегралов количества движения, которые означают, что центр тяжести движется по прямой линии с постоянной скоростью; если мы выберем систему координат таким образом, чтобы центр тяжести был неподвижен и находился в начале координат, то эти шесть интегралов примут вид

$$\left.\begin{aligned}\sum m_i x_i = \sum m_i y_i = \sum m_i z_i = 0,\\ \sum m_i x'_i = \sum m_i y'_i = \sum m_i z'_i = 0.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Имеются также три интеграла площадей. Если мы возьмем их относительно осей координат, то эти три интеграла примут вид

$$\left.\begin{aligned}\sum m_i(y_i z'_i - z_i y'_i) = a,\\ \sum m_i(z_i x'_i - x_i z'_i) = b,\\ \sum m_i(x_i y'_i - y_i x'_i) = c,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где a, b, c суть постоянные интегрирования.

Эти десять интегралов представляют собой все известные существенно независимые интегралы нашей системы.

§ 3. Приведение системы к двенадцатому порядку. Нашу систему (3) дифференциальных уравнений можно сразу же привести к системе двенадцатого порядка при помощи интегралов количества движения (5), применяя, например, следующий метод, предложенный Лагранжем. Пусть координаты точки P_1 относительно P_0 будут (x, y, z), а координаты точки P_2 относительно центра тяжести тел P_0 и P_1 будут (ξ, η, ζ). Если мы обозначим для удобства

$$\left.\begin{aligned}p = \frac{m_1}{m_0 + m_1}, \quad q = \frac{m_0}{m_0 + m_1},\\ M = m_0 + m_1 + m_2, \quad m = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}, \quad \mu = \frac{(m_0 + m_1) m_2}{m_0 + m_1 + m_2},\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

то получим следующие явные формулы преобразования переменных:

$$\left.\begin{array}{lll} x = x_1 - x_0, & y = y_1 - y_0, & z = z_1 - z_0, \\ \xi = x_2 - px_1 - qx_0, & \eta = y_2 - py_1 - qy_0, & \zeta = z_2 - pz_1 - qz_0, \end{array}\right\} \tag{8}$$

вместе с формулами обратного преобразования:

$$\left.\begin{array}{lll} x_0 = -\dfrac{m_2}{M}\xi - px, & y_0 = -\dfrac{m_2}{M}\eta - py, & z_0 = -\dfrac{m_2}{M}\zeta - pz, \\ x_1 = -\dfrac{m_2}{M}\xi + qx, & y_1 = -\dfrac{m_2}{M}\eta + qy, & z_1 = -\dfrac{m_2}{M}\zeta + qz, \\ x_2 = -\dfrac{m_0 + m_1}{M}\xi, & y_2 = -\dfrac{m_0 + m_1}{M}\eta, & z_2 = -\dfrac{m_0 + m_1}{M}, \end{array}\right\} \tag{9}$$

которые следуют из формул (8) и (5).

Полученная таким путем система двенадцатого порядка может быть записана в следующей изящной форме:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{dx}{dt} = x', & \dfrac{dy}{dt} = y', & \dfrac{dz}{dt} = z'; \\ \dfrac{d\xi}{dt} = \xi', & \dfrac{d\eta}{dt} = \eta', & \dfrac{d\zeta}{dt} = \zeta'; \\ m\dfrac{dx'}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial x}, & m\dfrac{dy'}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial y}, & m\dfrac{dz'}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial z}, \\ \mu\dfrac{d\xi'}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial \xi}, & \mu\dfrac{d\eta'}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial \eta}, & \mu\dfrac{d\zeta'}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial \zeta}. \end{array}\right\} \tag{10}$$

В этих новых переменных уравнения (5) количества движения можно считать удовлетворенными тождественно, в то время как интегралы площадей принимают вид:

$$\left.\begin{array}{l} m(yz' - zy') + \mu(\eta\zeta' - \zeta\eta') = a, \\ m(zx' - xz') + \mu(\zeta\xi' - \xi\zeta') = b, \\ m(xy' - yx') + \mu(\xi\eta' - \eta\xi') = c, \end{array}\right\} \tag{11}$$

а интеграл энергии будет:

$$\frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \frac{1}{2}\mu(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = U - K. \tag{12}$$

Легко видеть, что на уравнения (10) можно смотреть как на уравнения движения в пространстве двух частиц с координатами $(x,\ y,\ z)$

и (ξ, η, ζ) и массами m и μ соответственно, в консервативном поле сил с потенциальной энергией, равной $-U$. Эти уравнения могут быть также выведены из лагранжева или гамильтонова вида уравнений при помощи вариационных принципов (см. главу II).

§ 4. Равенство Лагранжа. Положим

$$R^2 = \frac{m_0 m_1 r_2^2 + m_0 m_2 r_1^2 + m_1 m_2 r_0^2}{M} = mr^2 + \mu\rho^2, \tag{13}$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2. \tag{14}$$

Если мы теперь подставим в (13) явные выражения для r^2 и ρ^2, полученные из (14), и дважды продифференцируем, то, пользуясь формулами (10) и (12), получим следующее равенство, принадлежащее Лагранжу:

$$\frac{d^2R^2}{dt^2} = 2(U - 2K). \tag{15}$$

Нужно заметить, что U однородно (размерности -1) относительно x, y, z, ξ, η, ζ, так что

$$x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} + z\frac{\partial U}{\partial z} + \xi\frac{\partial U}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial U}{\partial \eta} + \zeta\frac{\partial U}{\partial \zeta} = -U.$$

§ 5. Неравенство Сундмана. Для того, чтобы прийти к неравенству Сундмана, будем искать верхнюю границу выражения $(dR/dt)^2$, где x, y, z, ξ, η, ζ мы будем рассматривать как данные количества, в то время как x', y', z', ξ', η', ζ' будем изменять по произволу, но так, чтобы они давали определенное заданное значение постоянной энергии K и постоянным интегралов площадей a, b, c. Это — чисто алгебраическая задача.

Имеем

$$RR' = mrr' + \mu\rho\rho',$$

откуда

$$R^2R'^2 = (mr^2 + \mu\rho^2)(mr'^2 + \mu\rho'^2) - m\mu(r\rho' - \rho r')^2,$$

что можно написать иначе в виде

$$R'^2 = mr'^2 + \mu\rho'^2 - \frac{m\mu}{R^2}(r\rho' - \rho r')^2.$$

Кроме того, имеем очевидные тождества:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2 + \frac{1}{r^2}\left[(yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2\right],$$

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = \rho'^2 + \frac{1}{\rho^2}\left[(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2 + (\zeta\xi' - \xi\zeta')^2 + (\xi\eta' - \eta\xi')^2\right].$$

Умножая два последних уравнения на m и μ соответственно и вычитая их почленно из предшествующего уравнения, получим в результате уравнение

$$R'^2 + P = 2(U - K), \tag{16}$$

где P (минимум которого мы должны теперь искать) представляет собою сумму семи квадратов:

$$P = \frac{m}{r^2}\left[(yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2\right] + \frac{\mu}{\rho^2}\left[(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2 + \right.$$
$$\left. + (\zeta\xi' - \xi\zeta')^2 + (\xi\eta' - \eta\xi')^2\right] + \frac{m\mu}{R^2}(r\rho' - \rho r')^2. \tag{17}$$

Здесь мы воспользовались интегралом энергии (12).

Из этого соотношения, принадлежащего Сундману, мы можем вывести неравенство, играющее основную роль в его работе, а также в настоящей главе.

Если мы напишем

$$W = yz' - zy', \quad V = \eta\zeta' - \zeta\eta',$$

то из формулы (17) видно, что P содержит два члена вида

$$S = \frac{m}{r^2}W^2 + \frac{\mu}{\rho^2}V^2,$$

тогда как первый интеграл площадей дает

$$mW + \mu V = a.$$

Легко показать, что наименьшее значение выражения S, если W и V изменяются так, что предыдущее равенство остается справедливым, а r и ρ остаются постоянными, будет a^2/R^2. Подобным же образом P будет содержать еще две аналогичные пары членов с минимальными значениями сумм, равными b^2/R^2 и c^2/R^2 соответственно. Отсюда мы заключаем, что справедливо неравенство

$$P \geqslant \frac{f^2}{R^2}, \tag{18}$$

где

$$f^2 = a^2 + b^2 + c^2. \tag{19}$$

Исключим теперь U из равенства (16) Сундмана и равенства (15) Лагранжа. Мы получим в результате исключения формулу:

$$2RR'' + R'^2 + 2K = P,$$

откуда, применяя неравенство (18), получим требуемое неравенство

$$2RR'' + R'^2 + 2K \geqslant \frac{f^2}{R^2}. \tag{20}$$

Если мы определим вспомогательную функцию Сундмана формулой

$$H = RR'^2 + 2KR + \frac{f^2}{R}, \tag{21}$$

то неравенство (20) дает нам возможность написать соотношение

$$H' = FR' \quad (F \geqslant 0). \tag{22}$$

Здесь H возрастает (или, по крайней мере, не убывает) при возрастании R и убывает (или, по крайней мере, не возрастает), когда R убывает. Этот результат имеет основное значение для последующего.

§ **6. Возможность соударения.** До сих пор мы рассматривали решения в обычном смысле. Рассмотрение дифференциальных уравнений показывает, что существует единственное аналитическое решение, при котором координаты и скорости тел принимают заданные значения при $t = t_0$, при условии, что тела P_0, P_1, P_2 геометрически различны (т. е. никакие два из них не находятся в одной точке. — *Ред.*). В случае совпадения двух из этих тел или всех трех тел правые части дифференциальных уравнений перестают быть аналитическими или даже определенными, так что мы уже не можем в этом случае применить теоремы существования главы *I*. Но, согласно полученным там результатам, эти решения могут быть либо продолжены на все значения t, или же, например, при возрастании t продолжение возможно вплоть до какого-то значения $\bar{t}$ аргумента t.

Рассмотрим эту возможность в свете элементарных теорем существования.

Из восемнадцатимерного многообразия состояний движения, связанного с восемнадцатью зависимыми переменными

$$x_i,\, y_i,\, z_i,\, x_i',\, y_i',\, z_i' \quad (i = 0,\, 1,\, 2),$$

мы должны исключить три пятнадцатимерных аналитических многообразия

$$r_i = 0 \quad (i = 0,\, 1,\, 2).$$

Остающееся открытое многообразие простирается в бесконечность и ограничено многообразиями $r_i = 0$.

Согласно результатам, полученным в главе I, любое данное движение мы можем безгранично (аналитически) продолжать за исключением того случая, когда при приближении t к некоторому критическому значению $\bar{t}$ соответственная точка P стремится к границе вышеуказанной открытой области.

Предположим теперь, что наименьшее из трех взаимных расстояний тел P_0, P_1, P_2 не стремится к нулю, когда t приближается к $\bar{t}$; при этом не предполагается, что какое-нибудь определенное из этих расстояний, например, P_0P_1 остается наименьшим вблизи $\bar{t}$. Мы можем в этом случае найти положения наших трех тел для t, сколь угодно близкого к $\bar{t}$, при которых все три их взаимные расстояния превосходят некоторую положительную постоянную d. Но из соотношения (4), в котором

$$U < \frac{m_0m_1 + m_0m_2 + m_1m_2}{d},$$

легко видеть, что скорости x_i', y_i', z_i' ограничены. Физически очевидно, что при таких начальных условиях продолжение движений возможно для интервала времени, не зависимого от частных значений взаимных расстояний или скоростей, благодаря характеру входящих сюда сил; мы не будем останавливаться на получении явного выражения для этого интервала на основании нашей первой теоремы существования. Таким образом, мы приходим к противоречию.

Аналитическое продолжение какого-нибудь данного движения в проблеме трех тел всегда возможно, если только при приближении времени t к некоторому значению $\bar{t}$ наименьшее из трех взаимных расстояний не стремится к нулю.

Сейчас нам целесообразно вернуться к рассмотрению равенства Лагранжа (15). Когда t приближается к $\bar{t}$, то U стремится к положительной бесконечности. Следовательно, если мы представим R^2 как функцию от t на плоскости, взяв t и R^2 за прямоугольные координаты, то соответствующая кривая будет обращена вогнутостью вверх при t, достаточно близком к $\bar{t}$. Следовательно, R^2 либо делается бесконечным, либо стремится к конечному положительному пределу, либо к нулю.

Первый из этих случаев, очевидно, невозможен, так как тогда одно из тел удалялось бы бесконечно далеко от двух других, которые стремились бы к совпадению, когда t приближается к $\bar{t}$, а такое положение вещей невозможно благодаря тому, что силы, действующие на далекое тело, ограничены по величине.

Во втором случае очевидно, что при приближении t к $\bar{t}$ какое-то одно определенное из расстояний стремится к нулю, тогда как два других стремятся к одному и тому же предельному значению. Это есть случай соударения двух тел. Так как силы, действующие на третье тело, конечны в моменты, близкие к соударению, то оно приближается к определенному предельному положению; и следовательно, два других (соударяющихся) тела тоже стремятся к определенному положению, потому что центр тяжести системы фиксирован в начале координат.

В третьем случае мы имеем, разумеется, тройное соударение, которое произойдет в начале координат. Если, однако, постоянная f не равна нулю, то тройное столкновение не может произойти; это следует тотчас же из формулы (22). В самом деле, мы видим, что $d(R^2)/dt$ будет отрицательным при t, близких к $\bar{t}$ в случае тройного столкновения, так как d^2R^2/dt^2 положительно, согласно равенству Лагранжа (15). Следовательно, H будет убывать вместе с R (или по крайней мере не возрастать), когда t стремится к $\bar{t}$. Но рассмотрение выражения H [формула (21)] показывает нам, что при $f \neq 0$ H делается положительно бесконечным, когда R приближается к нулю. Таким образом, мы пришли к противоречию.

Когда t приближается к $\bar{t}$, то либо имеет место двойное соударение определенных двух тел в определенной точке, причем третье тело приближается к определенной точке, отличной от точки соударения, или же тройное соударение всех трех тел в их общем центре тяжести. Если, однако, f не равно нулю, т. е. если постоянные площадей данных трех тел не все равны нулю, то тройное соударение не может произойти ни при каком t.

С этого момента мы будем предполагать, что $f > 0$, и, таким образом, исключим тройное соударение.

Мы можем считать, что допущение $f > 0$ просто заставляет нас ограничиваться рассмотрением общего случая. В самом деле, легко показать, что в случае, когда $f = 0$, движение происходит в некоторой постоянной плоскости. Таким образом, здесь мы можем сразу привести нашу систему к системе низшего порядка. Более того, если $f = 0$, то момент количества движения относительно оси, перпендикулярной к плоскости движения в центре тяжести системы, равен нулю. Таким образом, мы исключаем только частный случай движения в плоскости. Этот исключенный случай представляет большой интерес и заслуживает внимательного изучения сам по себе.

§ 7. Неограниченное продолжение движений. В рассматриваемом нами случае очевидно, что всякое движение может быть продолжено до двойного соударения. Мы хотим здесь рассмотреть вкратце случай двойного соударения для того, чтобы сделать физически правдоподобной возможность продолжения движения за двойное соударение некоторым определенным образом. Аналитические методы, достаточно мощные, чтобы справиться с особенностью двойного соударения, были впервые разработаны Сундманом (цитировано выше). После этого Леви–Чивита[1] нашел другой подход к вопросу, не выходящий из области уравнений обычного динамического типа. Здесь мы не станем приводить все рассуждения с требуемой строгостью, а аналитические детали рассуждений читатель может найти в упомянутых работах Сундмана и Леви–Чивита.

Предположим, что сталкиваются, например, тела P_0 и P_1, тогда как P_2 находится от них на некотором расстоянии. Движение тел P_0 и P_1 близ точки соударения будет, очевидно, существенно таково же, как в проблеме двух тел. Мы и хотим здесь пренебречь возмущающими силами, вызываемыми телом P_2 в течение того времени, когда тела P_0 и P_1 близки к соударению, т. е. заменить функцию U одним ее слагаемым $m_0 m_1 / r_2$ и считать очевидным, что положение вещей будет при этом допущении существенно тем же, что и в рассматриваемом нами случае.

Но если бы движение тел P_0 и P_1 было совершенно таким же, как в проблеме двух тел, то их центр тяжести двигался бы по прямой линии с постоянной скоростью, а сами тела P_0 и P_1 двигались бы относительно центра тяжести по неподвижной прямой вплоть до момента соударения. Мы можем уточнить это утверждение, сказав, что P_0 и P_1 в каждый момент находились бы на расстояниях от этого общего центра тяжести, обратно пропорциональных их массам, а квадрат их относительной скорости был бы равен выражению $2(m_0 + m_1)/r_2$, увеличенному на некоторую постоянную, значение которой зависит от полной энергии системы относительно центра тяжести. Движение относительно центра

[1] *Levi–Civita*, «Sur la régularisation du problème de trois corps», Acta Mathematica, vol. 42, 1921.

тяжести после соударения можно представить себе, как просто переменившее свое направление на обратное. В первоначальной координатной системе тела P_0 и P_1 опишут две кривые с точкой возврата каждая, и соударение произойдет в их общей точке возврата; касательные к обеим кривым в точке возврата будут, разумеется, иметь противоположные направления, и нетрудно было бы определить точно движение тел в этом случае, написав явно формулы движения.

Очевидно, такое движение с соударением в проблеме двух тел характеризуется следующими величинами: во-первых, тремя координатами точки соударения в пространстве; во-вторых, тремя составляющими скорости центра тяжести системы; в-третьих, двумя угловыми координатами ϑ, ψ, определяющими направление в пространстве касательной к кривой движения точки P_1 в точке столкновения, которое совпадает с направлением линии движения P_1 относительно центра тяжести системы тел P_0 и P_1 и, в-четвертых, постоянной энергии. Таким образом, всего для того, чтобы однозначно характеризовать состояние системы в момент соударения в задаче двух тел, нужны девять координат. Но для того, чтобы определить состояние движения системы до или после соударения, необходимо еще указать время τ вблизи момента столкновения.

Далее, всякое движение, при котором оба тела почти сталкиваются, может быть характеризовано подобным же образом. Здесь предполагается, что начальные условия несколько изменены в какой-то момент, предшествующий соударению. Легко обобщить на случай такого измененного движения вышеприведенные координаты следующим образом: во-первых, вместо координат точки соударения мы можем взять координаты центра тяжести в момент, когда тела подходят ближе всего друг к другу; во-вторых, соответствующие составляющие скорости центра тяжести могут быть взяты по-прежнему; в-третьих, угловые координаты ϑ, ψ могут относиться к направлению общей оси конических сечений, описанных телами относительно центра тяжести, и, в-четвертых, постоянная полной энергии может быть взята по-прежнему. Если мы незначительно изменим движение этим способом, то эти девять координат тоже изменятся незначительно.

К этим девяти координатам мы должны присоединить еще одну угловую координату ψ, определяющую направление плоскости относительного движения тел и длину перигелия p. Всего, таким образом, мы получаем одиннадцать координат, достаточных для определения кривой движения двух тел в общем положении. Для того, чтобы определить какое-нибудь специальное состояние движения, нужно к этим одиннадцати координатам прибавить еще время τ, прошедшее с момента наибольшего сближения двух тел.

Координата p теряет смысл в частном случае кругового движения тел относительно центра тяжести, но этот случай не может иметь места в рассматриваемых движениях, когда тела почти сталкиваются.

Следовательно, мы получаем всего двенадцать координат, определяющих состояние движения, что, разумеется, соответствует тому факту, что в проблеме двух тел мы имеем систему дифференциальных уравнений двенадцатого порядка.

Рассмотрим несколько внимательнее эти координаты в проблеме двух тел. Шесть координат, определяющих положение центра тяжести в момент наибольшего сближения тел, не подчинены никаким ограничениям. Этим мы хотим сказать, что системы этих шести координат находятся в одно-однозначном соответствии с окрестностью точки в шестимерном пространстве. Подобно этому две координаты, определяющие направление оси соударения, будут произвольными в том же смысле, т. е. будут в одно-однозначном соответствии с окрестностью точки в (ϑ, ψ)-сфере, и, разумеется, полная энергия и время τ тоже могут принимать любые значения. С другой стороны, длина перигелия p будет всегда положительной, и когда p стремится к нулю, наше движение приближается к исходному движению, при котором имеет место соударение, независимо от значения координаты ψ, определяющей положение плоскости движения. Введем теперь вместо p и ψ новые координаты α и β следующим образом:

$$\alpha = p\cos\psi, \qquad \beta = p\sin\psi.$$

Соударение в этих новых координатах определяется равенствами

$$\alpha = \beta = 0.$$

Новые координаты α, β будут уже совершенно произвольными.

Следовательно, в проблеме двух тел состояния движения вблизи какого-нибудь состояния соударения находятся в одно-однозначном непрерывном соответствии с окрестностью точки в двенадцатимерном пространстве. При таком представлении состояния движения при соударении составляют девятимерную поверхность, проходящую через данную точку.

Очевидно, что в известном смысле особенность соударения исчезает при применении указанных координат[1].

Вернемся теперь к проблеме трех тел в рассматриваемом случае, т. е. когда два из трех тел, например, P_0 и P_1 сталкиваются. Движение,

[1]Относительно фактического уничтожения особенностей посредством аналитического преобразования в проблеме трех тел и родственных задачах см. *Levi–Civita*, «Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi», Annali di Mathematica, ser. 3, vol. 9, 1903.

при котором это происходит, характеризуется определенным положением точки соударения, определенным вектором скорости их центра тяжести в момент соударения, направлением касательной к движению в точке соударения и, наконец, предельной полной энергией системы соударяющихся тел. Для определения состояния движения в некоторый момент времени после соударения необходимо, кроме того, знать промежуток времени τ, прошедший с момента столкновения.

Для движений, близких к тому, при котором происходит соударение, эти координаты допускают простое обобщение. Например, момент прохождения «перигелия» может быть определен, как такой, когда расстояние P_0P_1 достигает своего минимума, и, таким образом, положение и составляющие скорости центра тяжести, координаты оси, длина перигелия могут быть определены немедленно, так же как постоянная энергии. За угловую координату ψ можно взять угол, определяемый плоскостью, делящей пополам малый двугранный угол, образуемый плоскостями, проходящими через P_0P_1, и соответственно векторы скоростей тел P_0, P_1 относительно их центра тяжести. Время τ определяется, как прежде. Координаты p, ψ могут быть, разумеется, заменены на α, β, как выше.

Таким образом, из физических рассуждений становится очевидным, что двойное столкновение представляет собою особенность устранимого типа и что состояния движения при двойном соударении образуют три пятнадцатимерных (*аналитических*) *подмногообразия в восемнадцатимерном многообразии M_{18}, соответствующих соударению P_0 с P_1, P_1 с P_2 и P_0 с P_2.*

Если мы к многообразию состояний движения присоединим части его границы, соответствующие двойному соударению, то, очевидно, возможно аналитически продолжать движение сколь угодно далеко, если только при приближении t к некоторому значению $\bar{t}$ (причем, например, $t < \bar{t}$) не имеет места бесконечное множество двойных соударений. Мы сейчас покажем, что этот случай невозможен, если только $f > 0$, как мы до сих пор предполагали.

Во-первых, заметим, что не только R, но и R' должно оставаться непрерывным при двойном соударении. В самом деле, дифференциальные уравнения показывают, что $d^2\xi/dt^2, d^2\eta/dt^2, d^2\zeta/dt^2$ все непрерывны в момент соударения, так что ρ', так же как и ρ, должно быть непрерывно. С другой стороны, r' не будет непрерывным; но так как

$$r^2r'^2 = (xx'+yy'+zz')^2 \leqslant (x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2) \leqslant \frac{2r^2}{m}(U+|K|),$$

благодаря интегралу энергии (12), то очевидно, что rr' непрерывно и обращается в нуль в момент соударения. Следовательно, R' остается непрерывным при соударении и принимает значение $\mu\rho\rho'/R$, что следует из (13).

Во-вторых, когда t приближается к $\bar{t}$, наименьшее из расстояний r_i должно стремиться к нулю. В противном случае мы имели бы $r_i > d > 0$ $(i = 0, 1, 2)$ сколь угодно близко к t. Мы видели уже, что благодаря интегралу энергии из этого следовало бы, что все величины x', y', z', ξ', η', ζ' ограничены, так что было бы возможно продолжение движения без соударения в течение определенного промежутка времени, зависящего только от d. Но это невозможно.

В-третьих, R должно стремиться к определенному пределу, когда t приближается к $\bar{t}$; это следует из равенства Лагранжа (15) совершенно так же, как в случае приближения к двойному соударению, поскольку обе величины R' и R остаются непрерывными при двойном соударении. Исходя из неравенства Сундмана (20) и рассуждая так же, как прежде, мы покажем, что R не может стремиться к нулю, когда t приближается к $\bar{t}$.

Отсюда мы заключаем, что, когда t приближается к $\bar{t}$, тело P_2 стремится к некоторому определенному предельному положению, отличному от соответствующего общего (тоже определенного) предельного положения тел P_0 и P_1. Но физически очевидно и легко может быть показано аналитически, что в этом случае может быть только конечное число соударений при $t < \bar{t}$. Таким образом, мы приходим к противоречию.

В многообразии M_{18} состояний движения, к которым мы присоединили состояния при двойном соударении, возможно бесконечное продолжение в обоих направлениях времени каждого движения, для которого $f > 0$. В случае $f = 0$ продолжение может стать невозможным только в случае тройного соударения.

До сих пор мы имели дело только с восемнадцатимерным многообразием M_{18}. Легко видеть, какие изменения нужно внести в формулировку вышеприведенных результатов для того, чтобы применить их к многообразию M_{12}, которое получается, если мы рассматриваем только те движения, для которых центр тяжести системы тел P_0, P_1, P_2 лежит в начале координат. В этом случае шесть координат, дающих положение и скорость центра тяжести тел P_0 и P_1, определяют подобные же координаты для P_2.

Совершенно аналогичные результаты получаются для двенадцатимерного многообразия M_{12} тех состояний движения, для которых центр тяжести системы всех трех тел лежит в начале координат.

Как было указано выше, все эти результаты могут быть получены прямым применением метода регуляризации уравнений, предложенного Сундманом и Леви–Чивита. Рассмотрение соответственных формул приводит нас к следующему дополнительному заключению. *В расширенном многообразии M_{18} не только состояния движения при соударе-*

нии оказываются образующими три пятнадцатимерных многообразия, но и кривые движения должны рассматриваться как аналитические и как изменяющиеся аналитически с изменением начальной точки и интервала, при условии, что этот интервал измеряется таким параметром, как и, где

$$t = \int r_0 r_1 r_2 \, du.$$

§ 8. Дальнейшие свойства движений. Случай $K < 0$ не представляет никаких трудностей, поскольку вопрос касается общего качественного характера движений. Равенство Лагранжа (15) обеспечивает, что d^2R^2/dt^2 будет в этом случае превосходить $4|K|$. Следовательно, линия, изображающая R^2 как функцию от t в плоскости с прямоугольными координатами t, R^2, будет представлять собою кривую с одним минимумом, обращенную всюду выпуклостью вниз, т. е. R^2 будет безгранично возрастать.

То же заключение будет, очевидно, справедливым и для $K = 0$, по крайней мере если U не приближается к нулю. Но это может случиться только в том случае, когда все три взаимных расстояния тел безгранично возрастают.

В случае, когда $K \leqslant 0$, $f > 0$, по крайней мере два, если не все три, взаимные расстояния тел безгранично увеличиваются при безграничном возрастании или убывании времени. В случае $K \leqslant 0$, $f = 0$ то же утверждение справедливо, если только движение не оканчивается (в том или другом направлении времени) тройным соударением.

Желательно было бы, разумеется, более полное качественное рассмотрение движений, для которых $K \leqslant 0$. Но и на основании только что сформулированных результатов мы можем рассматривать этот случай как «решенный» в качественном смысле.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением случая $f > 0$, $K > 0$, т. е. случая, когда не все константы площадей равны нулю и потенциальная энергия системы недостаточна для того, чтобы все три расстояния между телами могли безгранично возрастать.

Останется, таким образом, нерассмотренным случай $f = 0$, $K > 0$. В этом случае движение будет происходить существенно в одной плоскости, и здесь, быть может, посредством надлежащего уточнения неравенства Сундмана возможно получить результаты, подобные тем, которые получены для случая $f > 0$, $K > 0$.

Мы переходим к рассмотрению некоторых простых и важных свойств движения в случае $f > 0$, $K > 0$.

В случае $f > 0$, $K > 0$ наименьшее из трех расстояний между телами не может превзойти $M^2/3K$.

Доказательство очевидно. Из интеграла энергии (12) следует, что U не меньше, чем K. Но все расстояния r_0, r_1, r_2 будут не меньше наименьшего расстояния r. Отсюда получаем:

$$\frac{m_0 m_1 + m_1 m_2 + m_0 m_2}{r} \geqslant K.$$

Числитель левой части не превосходит $M^2/3$, откуда непосредственно следует доказываемое неравенство.

В случае $f > 0$, $K > 0$ наибольшее из взаимных расстояний r_i будет обязательно превосходить наименьшее r_j по крайней мере в k раз при условии, что

$$R \leqslant \frac{2m^{*1/2} f^2}{k^2 M^3} \quad \textit{или} \quad R \geqslant \frac{k M^{5/2}}{3K},$$

где m^* обозначает наименьшую из трех масс m_0, m_1, m_2.

Для того, чтобы доказать это утверждение, обозначим через k_1 фактическое отношение наибольшего расстояния к наименьшему. Тогда мы будем иметь:

$$R^2 \leqslant \frac{(m_0 m_1 + m_0 m_2 + m_1 m_2) k_1^2 r^2}{M} \leqslant \frac{M k_1^2 r^2}{3},$$

где r обозначает наименьшее из расстояний. Из подобных же вычислений находим:

$$U \leqslant \frac{m_0 m_1 + m_0 m_2 + m_1 m_2}{r} \leqslant \frac{M^2}{3r}.$$

Но равенство Сундмана (16) вместе с формулой (18) дает

$$\frac{f^2}{R^2} < 2U.$$

Если мы применим к этой формуле выведенные выше неравенства для R^2 и U, то легко получим

$$r > \frac{4f^2}{k_1^2 M^3}.$$

Но поскольку R равно по меньшей мере $m^{1/2} r$, причем m в свою очередь не менее половины наименьшей массы m^* [см. равенства (7)], находим:

$$R > \frac{2m^{*1/2} f^2}{k_1^2 M^3}.$$

Следовательно, если R не превосходит первого из выражений, указанных в формулировке доказываемого утверждения, то мы тотчас видим, что k_1 превосходит k. Это доказывает первую часть нашего утверждения.

Для того, чтобы доказать вторую часть, обозначим через $\overline{r}$ наибольшее из расстояний r_0, r_1, r_2. Мы имеем тогда

$$R^2 \leqslant \frac{(m_0m_1 + m_0m_2 + m_1m_2)\overline{r}^2}{M} \leqslant \frac{M\overline{r}^2}{3},$$

откуда

$$\overline{r} > \frac{R}{M^{1/2}}.$$

Если мы применим теперь выведенное уже неравенство для наименьшего расстояния r вместе с только что написанным, то найдем:

$$k_1 > \frac{3KR}{M^{5/2}}.$$

Следовательно, если R не меньше второго из написанных в формулировке утверждения выражений, то k_1 будет больше k. Это доказывает вторую часть утверждения.

Если $f > 0$, $K > 0$, то часть кривой $R = R(t)$ (t, R суть прямоугольные координаты), для которой $R < f/2^{1/2}K^{1/2}$, состоит из конечной дуги, обращенной выпуклостью вниз и имеющей один минимум. Если $R = R_0$ есть этот минимум, то кривая возрастает в обе стороны, пока

$$R < \frac{f^2}{2KR_0},$$

причем наклон касательной R' удовлетворяет неравенству

$$R'^2 \geqslant \frac{R - R_0}{R}\left(\frac{f^2}{R_0R} - 2K\right).$$

Для того, чтобы доказать это утверждение, заметим прежде всего, что когда R ограничено, как указано в начале доказываемого утверждения, то R не может быть равно постоянной величине. В самом деле, если бы R было постоянным, то равенство Лагранжа (15) давало бы $U = 2K$. Но комбинация равенства Сундмана (16) и формулы (18) с равенством $U = 2K$ дала бы

$$\frac{f^2}{R^2} \leqslant 2K,$$

что противоречит ограничениям, наложенным на R. Подобными же рассуждениями мы можем показать, что если R' обращается в нуль, когда R ограничено, как выше, то R'' должно быть положительным. В самом деле, в противном случае мы нашли бы из равенства Лагранжа (15) $U \leqslant 2K$, и отсюда, применяя равенство Сундмана (16) и формулу (18), мы получили бы вышеупомянутое неравенство $f^2/R^2 \leqslant 2K$, приводящее к противоречию.

Если на рассматриваемой дуге имеется точка, для которой $R' = 0$, то в этой точке R достигает абсолютного минимума. По обе стороны от нее функция H (см. § 5) будет возрастать (или, по крайней мере, не будет убывать) вместе с R, пока мы не придем (при $R = R_1$) к новой точке, для которой $R' = 0$. Отсюда получаем

$$2KR_1 + \frac{f^2}{R_1} \geqslant 2KR_0 + \frac{f^2}{R_0},$$

откуда

$$2K \geqslant \frac{f^2}{R_0 R_1},$$

так как $R_1 > R_0$.

В этом случае R действительно возрастает, по крайней мере, до тех пор, пока не превзойдет величину $f^2/2KR_0$. Кроме того, пока R остается $\leqslant f/2KR_0$, H остается не меньше H_0. Из этого следует, что R'^2 в каждый момент не меньше выражения, указанного в формулировке доказываемой теоремы, так что теорема в этом случае справедлива.

Случай, когда $R' \neq 0$ всюду на нашей дуге, может быть исключен из рассмотрения. В этом случае H должно убывать (или по крайней мере не возрастать) с убыванием R. Следовательно, R не может стремиться к нулю, потому что в этом случае H делалось бы бесконечным. Когда R будет приближаться к своей нижней границе R_0, то R' будет стремиться к нулю. Отсюда мы заключаем, что сформулированное неравенство для R'^2 остается справедливым, если R_0 определено таким образом.

Но этот вид асимптотического приближения R к значению R_0, когда t безгранично возрастает (или убывает), невозможен. Эту невозможность можно показать следующим образом. Заменим в неравенстве $H \geqslant H_0$ знак $\geqslant$ знаком равенства. Таким способом мы определим новую кривую $R = R(t)$, наклон которой для любого R не больше по абсолютной величине соответствующего наклона вдоль первоначальной кривой $R = R(t)$. Следовательно, определенная таким образом новая кривая приближается к оси t медленнее, чем первоначальная, и должна тоже асимптотически приближаться к прямой $R = R_0$, что следует из уравнения $H = H_0$. Но дифференцируя это уравнение по t, получаем:

$$2RR'' + R'^2 + 2K - \frac{f^2}{R^2} = 0.$$

Следовательно, когда t стремится к бесконечности, а R, R' стремятся к R_0, 0 соответственно, то R'' будет стремиться к определенному положительному количеству, что невозможно.

Полученные до сих пор результаты можно рассматривать как касающиеся тех движений, при которых все три тела находятся и некоторый момент $t = t_0$ близко друг к другу, причем их взаимное отдаление измеряется величиной R. Тела будут отдаляться друг от друга, так что R будет возрастать, и при этом весьма быстро (при условии, что R не будет ни слишком велико, ни слишком мало) до тех пор, пока R не станет очень большим.

Мы переходим теперь к выводу аналогичных результатов для того случая, когда по крайней мере одно из расстояний между телами велико. В этом случае удобно пользоваться величиной ρ вместо R. Нужно при этом принимать во внимание, что в последующем изложении r обозначает все время наименьшее из трех расстояний.

Если $f > 0$, $K > 0$, то до тех пор, пока $\rho \geqslant \dfrac{2M^2}{3K}$, одно и то же расстояние r_2 будет наименьшим расстоянием.

При указанных условиях ρ будет по крайней мере вдвое превосходить расстояние r_2. Следовательно, r_0 и r_1, превосходят r_2, так как ρ есть расстояние от P_2 до центра тяжести тел P_0 и P_1. Но, если r_0 и r_1 превосходят r_2, то одно и то же расстояние r_2 все время остается наименьшим.

В случае, когда $f > 0$, $K > 0$, получаем для $\rho \geqslant \dfrac{2M^2}{3K}$ неравенство

$$\rho'' > -\frac{8M}{\rho^2}.$$

Если для какого-нибудь такого значения ρ имеем

$$\rho' \geqslant \frac{4M^{1/2}}{\rho^{1/2}},$$

то ρ будет все время увеличиваться, стремясь к бесконечности.

Мы исходим из следующего тождества:

$$\rho'' + \rho'^2 = \xi\xi'' + \eta\eta'' + \zeta\zeta'' + \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2.$$

Последние три слагаемых левой части представляют собою квадрат скорости точки (ξ, η, ζ), в то время как ρ'^2 даст квадрат радиальной скорости и поэтому не превосходит величины $\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$. Из этого обстоятельства и дифференциальных уравнений (10) получаем:

$$\rho\rho'' \geqslant \frac{1}{\mu}\left(\xi\frac{\partial U}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial U}{\partial \eta} + \zeta\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right).$$

Но выражение в скобках в правой части как раз равно выражению $\rho\partial U/\partial n$, где производная $\partial U/\partial n$ взята по направлению прямой линии, соединяющей P_2 с центром тяжести тел P_0 и P_1. Очевидно, что $\partial r_0/\partial n$ и $\partial r_1/\partial n$ не могут по абсолютной величине превосходить единицу, и мы получаем:

$$\rho\rho'' \geqslant -\frac{\rho}{\mu}\left(\frac{m_1 m_2}{r_0^2} + \frac{m_0 m_2}{r_1^2}\right) > -M\rho\left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_1^2}\right)$$

[см. формулы (7)]. Но в рассматриваемом случае r_0 и r_1 превосходят $\rho - r$ и, следовательно, $\rho/2$. Это приводит к первому из доказываемых неравенств.

Вместо того, чтобы продолжать наше исследование аналитическим путем, заметим, что это неравенство можно рассматривать как равносильное требованию, чтобы частица двигалась вдоль оси ρ под действием силы, направленной к началу координат и не превосходящей силу тяжести, вызываемую массой, равной $8M$. Но в этом случае очевидно, что частица будет удаляться в бесконечность при условии, что начальная скорость, направленная от начала координат, будет не меньше скорости при падении из бесконечности под действием притяжения такой массы. Но это как раз и есть то, что требуется доказать.

Нужно отметить, что поскольку начальное значение величины ρ не меньше, чем $2M^2/3K$, то ρ продолжает оставаться все время больше этой величины, и, следовательно, одно и то же расстояние r остается всегда наименьшим из трех расстояний.

Мы собираемся теперь соединить вместе эти результаты и доказать, что если минимум R_0 достаточно мал, то R и ρ будут безгранично возрастать. Качественное основание этого рассуждения очевидно. Согласно тому, что было уже доказано, для R^* и $R^{*\prime}$, сколь угодно больших, мы можем выбрать R_0 столь малым, что все движения, для которых минимум R не превосходит R_0, соответствуют функции R, которая возрастает от своего минимума до R^* и имеет при $R = R^*$ производную, не меньшую чем $R^{*\prime}$. Это означает, разумеется, что ρ^* сколь угодно велико, потому что

$$\lim_{R=\infty} \frac{R}{\rho} = \frac{1}{M^{1/2}}(m_0 m_2 + m_1 m_2)^{1/2},$$

причем стремление к пределу равномерно. Кроме того, так как мы имеем соотношение

$$RR' = mrr' + \mu\rho\rho',$$

то, очевидно, что $\rho\rho'$ должно быть велико и, в частности, $|\rho'|$ должно быть велико при условии, что $|rr'|$ равномерно ограничено. Но мы имеем

$$r'^2 \leqslant x'^2 + y'^2 + z'^2 < \frac{2U}{m},$$

благодаря интегралу энергии (12). Отсюда:

$$r^2 r'^2 < \frac{2(m_0 m_1 + m_0 m_2 + m_1 m_2) r}{m} < \frac{2M^2 r}{m^*}$$

вследствие того, что m превосходит половину наименьшей массы m^*. Таким путем находим

$$|rr'| < \frac{M^2}{K^{1/2} m^{*1/2}}.$$

Следовательно, мы показали, что $|rr'|$ равномерно ограничено.

Если для $f > 0, K > 0$ мы возьмем R_0 достаточно малым, то всякое движение, при котором наши три тела настолько сближаются, что в некоторый момент $R \leqslant R_0$, таково, что два из расстояний r_0, r_1 неограниченно возрастают вместе с t, тогда как третье r_2, остается все время меньшим $\dfrac{M^2}{3K}$.

Мы не будем останавливаться на получении аналитической формулы, дающей R_0, хотя полученные выше результаты дали бы нам достаточный материал для вывода этой формулы.

Мы хотим в заключение остановиться на одном интересном вопросе, возникающем в связи с приведенными выводами. Вопрос заключается в следующем: которое из трех тел будет удаляться безгранично от двух других в случае близкого приближения к тройному столкновению? Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Всякое движение рассматриваемого типа характеризуется тем свойством, что в продолжение всего движения одно и то же тело (скажем P_2) остается на относительно далеком расстоянии от других двух ближайших тел.

В справедливости этого утверждения легко убедиться. В начале этого параграфа мы показали, что для R, большего или меньшего некоторых определенных величин, отношение наибольшего из расстояний к наименьшему будет как угодно велико. Следовательно, мы должны рассмотреть только промежуточные значения. Но в этих пределах, если бы отношение наибольшего расстояния к наименьшему не оставалось большим для достаточно малого R_0, существовали бы конфигурации трех тел, при которых расстояния r_i и отношения r_i/r_j лежали бы между некоторыми постоянными границами, каким бы малым мы R_0 ни выбрали. Однако в таких конфигурациях величина U не превосходит некоторого количества, и, следовательно, согласно интегралу энергии (12) то же было бы справедливо относительно скоростей x', y', z', ξ', η', ζ'. Наконец, очевидно, что RR' не могло бы превзойти некоторую определенную величину. Но мы установили уже, что R' становится сколь угодно большим в таких пределах значений R_1, так что мы пришли к абсурду.

В этой области, очевидно, требуются еще дальнейшие исследования, целью которых должно быть более точное определение количественного характера движений; но доказанных здесь фактов достаточно для того, чтобы установить, что единственный случай, при котором возможно одновременное близкое приближение всех трех тел при данных $f > 0$, $K > 0$, будет тот, когда эти тела ведут себя, как пара тел, одно из которых соответствует ближайшим двум телам P_0 и P_1, тогда как другим является P_2. Движения тела P_2 и центра тяжести тел P_0 и P_1, будут в этом случае происходить по почти гиперболическим путям, тогда как P_0 и P_1 будут двигаться относительно их центра тяжести по почти эллиптическим орбитам.

§ 9. Результат Сундмана. Сундман показал (цитировано выше), что при данных начальных координатах и скоростях таких, что $f > 0$, $K > 0$, величина $R(t)$ для соответствующего движения будет всегда превосходить некоторую определенную положительную константу. Это обстоятельство является очевидным, если мы примем во внимание результаты § 8. В противном случае, мы имели бы бесконечное приближение к тройному соударению и, следовательно, движение, для которого R' было бы произвольно велико при данном начальном значении величины R, что, разумеется, невозможно.

§ 10. Приведенное многообразие состояний движения. Перейдем теперь к рассмотрению той системы дифференциальных уравнений, которая получается в проблеме трех тел после применения десяти известных интегралов для понижения порядка системы с восемнадцатого до восьмого. Другими словами, мы считаем, что десяти соответствующим постоянным интегрирования даны некоторые определенные значения и внимание направлено на рассмотрение ∞^7 движений, соответствующих данной системе значений констант. В последующем мы будем предполагать, что не все постоянные площадей равны нулю и что постоянная энергии положительна, т. е. будем считать, что $f > 0$, $K > 0$.

Вектор момента количества движения с составляющими a, b, c определяет направление в пространстве, играющее в последующем изложении важную роль. Очевидно, что любые два движения, дающие в некоторый момент одно и то же расположение в отношении положения тел и направления и величины скоростей, но различающиеся только угловым расположением относительно этой оси момента количества движения, будут и в дальнейшем при своем движении различаться только этим. Другими словами, если φ обозначает какую-нибудь угловую координату, фиксирующую расположение системы относительно оси момента количества движения, а $u_1, \ldots, u_7$ являются какой-нибудь системой относительных координат, не содержащей φ, то дифференциальные уравнения, определяющие ∞^7 движений, имеют вид:

$$\frac{du_i}{dt} = U_i(u_1, \ldots, u_7) \quad (i = 1, \ldots, 7)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Phi(u_1, \ldots, u_7).$$

Первые уравнения составляют систему дифференциальных уравнений седьмого порядка, в то время как последнее уравнение позволяет нам определить φ посредством еще одного интегрирования. При желании можно исключить время из этих уравнений, так что система перейдет в систему шестого порядка

$$\frac{du_i}{du_1} = \frac{U_i}{U_1} \quad (i = 2, 3, \ldots, 7).$$

Таким образом, с чисто формальной точки зрения система восемнадцатого порядка может быть «приведена» к системе шестого порядка.

С той точки зрения, однако, которую мы примем в дальнейшем, такое приведение (которое, кстати говоря, может быть проведено без нарушения гамильтоновой формы уравнений)[1] не представит для нас никакой существенной выгоды.

Рассмотрим расширенное многообразие M_{18} состояний движения, в котором особенности, соответствующие двойному соударению, устранены методом, изложенным в § 7 этой главы.

Граница многообразия M_{18}, будет в этом случае состоять из движений, характеризующихся одной из следующих возможностей: одна из координат x_i, y_i, z_i безгранично возрастает по абсолютной величине; величина R стремится к нулю; постоянная энергии какой-нибудь пары тел P_i, P_j относительно их центра тяжести возрастает безгранично по абсолютной величине. Очевидно, что точки, находящиеся на некотором расстоянии от границы, определенной этими тремя возможностями, имеют ограниченные координаты и не все три из их взаимных расстояний малы; благодаря условию, наложенному на энергию,

[1]См., например, *Whittaker*, «Analytical Dynamics», гл. 13.

постоянная энергии относительно центра тяжести всех трех тел будет, наверное, невелика по абсолютной величине, а то обстоятельство, что относительные постоянные энергии невелики, означает, что ближайшие два тела скоро должны разойтись на значительное расстояние. Таким образом, либо все координаты и составляющие скоростей ограничены, и ни одно из взаимных расстояний не мало, или же движение близко по времени к такому состоянию и, следовательно, не близко к границе многообразия M_{18}.

В M_{18} совокупность всех движений системы может быть представлена как постоянный поток жидкости, причем линии потока соответствуют возможным типам движения. Когда мы фиксируем десять постоянных интегрирования, то мы этим самым сосредоточиваем свое внимание на соответственном потоке подмногообразия M_8 вдоль самого себя, в котором линии потока изображают рассматриваемые ∞^7 движений.

Движения, различающиеся только ориентацией относительно оси момента количества движения, образуют замкнутое однопараметрическое семейство таких линий потока, что их соответственные точки дают замкнутые кривые; другими словами, параметры $u_1, \ldots, u_7$ постоянны вдоль такой кривой, в то время как φ изменяется от 0 до 2π. В частном случае лагранжевых равносторонних или прямолинейных решений, когда взаимные расстояния остаются постоянными[1], соответствующая замкнутая кривая будет сама линией потока.

«Приведенное многообразие M_7 состояний движения» соответствует ∞^7 состояниям движения, определенным системой координат, подобной $u_1, \ldots, u_7$.

Очевидно, что в первоначальном многообразии M_{18} замкнутые кривые, которые дают состояния движения, различающиеся лишь ориентацией около оси момента количества движения, представляют собою ∞^{17} таких аналитических кривых, что через каждую точку проходит одна и только одна кривая. Следовательно, если мы желаем подробнее исследовать особенности M_7, то мы должны только изучить особенности M_8. Мы хотим здесь изучить особенности многообразия M_8 и, следовательно, M_7 в той мере, в какой это нужно для того, чтобы получить следующий результат.

Для неспециальных значений величин $f > 0$ и $K > 0$ приведенное аналитическое многообразие M_7 состояний движения не имеет особенных точек, но имеет границу, причем при приближении точки к границе либо R стремится к нулю или бесконечности, либо постоянная энергии какой-нибудь пары тел относительно их центра тяжести становится сколь угодно большой и отрицательной.

---

[1]См. статью *Lagrange*, «Essai sur le problème des trois corps», Oeuvres, т. VI.

Прежде всего докажем вкратце наше утверждение относительно границ многообразия M_7. На некотором расстоянии от границы ни одна из координат не может быть велика, так как ни одно из расстояний r_i не велико, а центр тяжести системы находится в начале координат. Так как постоянная энергии для всех трех тел дана, то ни одна из частных постоянных энергии какой-нибудь пары не может быть велика и положительна. Следовательно, только в том случае, когда одна из этих частных постоянных энергии велика и отрицательна, состояние движения может быть близким к границе M_7.

Исследуя аналитический характер многообразия M_8, а следовательно, и M_7, мы можем предположить, что рассматриваемое в данный момент состояние движения не является состоянием двойного соударения. В самом деле, «частица» в M_{18} вблизи состояния двойного соударения может быть переведена аналитически в частицу, окружающую другое состояние движения, не являющееся состоянием двойного соударения. Таким образом, инвариантное подмногообразие M_7 будет аналитическим либо во всех точках какой-нибудь линии потока, либо ни в одной точке этой линии.

Применим координаты x, y, z, ξ, η, ζ, x', y', z', ξ', η', ζ', определяющие положение точки в многообразии M_{12}, часть которого составляет M_8. Системы этих координат, удовлетворяющие условиям момента количества движения и энергии [(11) и (12)], изображают однозначно все состояния движения, принадлежащие многообразию M_8 вблизи рассматриваемого движения, принадлежащего M_8. Очевидно, что, вообще говоря, эти четыре уравнения могут быть решены для любых четырех из двенадцати переменных, т. е, что M_8 является аналитическим в рассматриваемой точке.

Мы можем показать, однако, что для неспециальных значений величин $f>0$ и $K>0$ многообразие M_8 не может содержать вообще никаких особенных точек. Выберем оси координат так, чтобы $x = y = \eta = 0$, т. е., чтобы тело P_1 лежало в направлении оси z от P_0, а прямая, соединяющая P_2 с центром тяжести тел P_0 и P_1, лежала в плоскости (x, z). Постараемся решить наши четыре уравнения относительно x', y', z', η', выразив эти переменные как функции остальных. Условие разрешимости этих уравнений будет выполнено, если определитель Якоби

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & -z & 0 & -\zeta \\ z & 0 & 0 & 0 \\ x' & y' & z' & \eta' \end{vmatrix}.$$

не обращается в нуль. Мы здесь сократили якобиан на очевидный множитель m в первых трех столбцах и на множитель μ в четвертом.

Значит, многообразие M_8 является аналитическим в данной точке при условии, что имеет место неравенство

$$-\xi z^2 z' \neq 0.$$

Но уже было указано, что z не равно нулю. Кроме того, мы можем считать $\xi \neq 0$, если только P_2 не находится постоянно на прямой P_0P_1, и мы можем взять $z' \neq 0$, если только расстояние P_0P_1 (и подобным же образом любое расстояние P_iP_j) не остается постоянным. Отсюда мы заключаем, что либо многообразие M_8 является аналитическим вдоль рассматриваемой линии потока, либо все три тела лежат на одной прямой или же на постоянных расстояниях друг от друга, но не на одной прямой.

В последнем случае тела P_0, P_1, P_2 лежат, как известно, в вершинах равностороннего треугольника в плоскости, перпендикулярной к вектору момента количества движения. Этот треугольник вращается с постоянной угловой скоростью вокруг своего центра тяжести. Кроме того, известно, что для каждого заданного значения угловой скорости существует одна и только одна возможная величина треугольника этого рода. Таким образом, при заданных значениях величин f и K такого движения, вообще говоря, не будет существовать.

Подобным же образом в первом из рассматриваемых случаев дальнейшее исследование показывает, что расстояния между телами остаются неизменными. Известно, что для заданного значения угловой скорости существуют три решения рассматриваемого типа и, следовательно, вообще говоря, не будет решений при данных значениях f и K.

Во всех случаях многообразие M_7 может иметь особенности только в точках, соответствующих равносторонне-треугольным и прямолинейным решениям с постоянными взаимными расстояниями. Эти решения могут существовать только в том случае, когда между f и K существуют известные аналитические соотношения. Только когда f и K при своем изменении проходят через эти критические значения, может изменяться топологическая природа M_7.

Многообразие M_7 имеет основное значение для проблемы трех тел, но, насколько я знаю, оно нигде не было изучено даже в связи с такими элементарными вопросами, как связность. В работе Пуанкаре доказывается существование известных периодических движений, т. е. известных замкнутых линий потока в M_7, получаемых методом аналитического продолжения из предельного интегрируемого случая задачи трех тел; им были также рассмотрены (в связи с разложением в формальные ряды) соседние движения, т. е. торообразные окрестности таких замкнутых линий потока, но Пуанкаре не рассматривал многообразия M_7 в целом.

В заключение заметим, что состояния движения, при которых три тела движутся все время в плоскости, проходящей через их центр тяжести и перпендикулярной к вектору момента количества движения, соответствуют инвариантному подмногообразию M_5 многообразия M_7, содержащему все особенные точки, когда таковые существуют. Поскольку, вопрос касается размерности, это многообразие M_5 могло бы служить границей надлежащим образом обобщенной секущей поверхности (см. главу V).

§ 11. Типы движения в M_7. Проблема трех тел отличается от проблем несингулярного типа, которые мы рассматривали раньше, тем, что для нее многообразие состояний движения не замкнуто. Особенности на границе не могут быть уничтожены никакими аналитическими ухищрениями. В самом деле, рассмотрим «частицу» в окрестности состояния тройного соударения при $t = 0$. Очевидно, что эта частица стремится к границе M_7, так как мы имеем в этом случае $\lim R = \infty$, согласно полученным выше результатам (§ 8). Полутрубчатая область, образованная этой частицей при ее движении, переходит, следовательно, при своем движении в свою *собственную* часть и должна была бы соответствовать бесконечному значению инвариантного семимерного объемного интеграла. Такое положение не может возникнуть, когда многообразие состояний движения замкнуто и не имеет особенностей.

Мы можем сказать еще точнее, что линии потока, соответствующие движениям, при которых имеется большое приближение к тройному соударению, не только лежат целиком вблизи границы M_7 и стремятся к ней при безграничном возрастании или убывании t, но они заполняют собой три, не имеющие общих точек, области многообразия M_7, так как при каждом таком движении какое-то одно определенное из трех тел, безгранично удаляется от остальных двух.

Линии потока, соответствующие большому приближению к тройному соударению, заполняют, таким образом, три, не имеющих общих точек, связных семимерных множества в многообразии M_7, соответствующих тому, что любое из тел P_0, P_1 или P_2 может быть относительно далеко от других двух тел в течение такого движения. Эти области лежат вблизи границы M_7, и всякая принадлежащая к ним линия потока приближается к этой границе, когда t безгранично возрастает или убывает.

Эти три связные области, разумеется, не определены точно, пока мы не фиксировали степень приближения к тройному соударению.

Естественно ожидать, что в этом случае безграничного удаления два близких тела будут иметь определенную предельную постоянную энергии, ориентацию плоскости движения, эксцентриситет, количество движения и момент количества движения относительно центра тяжести всех трех тел. Во всяком случае эти движения мы можем свободно рассматривать как в значительной мере «известные».

Тут возникает очень интересный вопрос, а именно: заполняют ли движения, для которых $\lim R = \infty$ в одном или в обоих направлениях, многообразие M_7 всюду плотно или нет? Весьма существенно понять, в чем состоит трудность, присущая этому вопросу. Прямым вычислением, без сомнения, можно всегда установить, принадлежит ли данное движение к одному из этих связных множеств или нет. Разумеется, для $|K|$ малых почти все должно быть заполнено этими множествами, вследствие результатов, полученных нами для случая $K \leqslant 0$. Тем не менее, если в M_7 имеется хотя бы одно периодическое движение устойчивого типа, невозможно определить, будут ли соседние движения принадлежать к этим множествам, не решая для этого частного случая основной проблемы устойчивости. Мы уже указывали (глава VIII) на чрезвычайную трудность проблемы устойчивости, возникающую как раз вследствие того, что в динамической проблеме, подобной проблеме трех тел, формальная устойчивость первого порядка обеспечивает удовлетворение бесконечного множества других, более тонких условий полной формальной устойчивости. Предыдущий вопрос, однако, может быть поставлен в другой, более наглядной форме, которая, по моему мнению делает весьма вероятным, что движения, для которых $\lim R = \infty$ при $\lim t = +\infty$, всюду плотны в M_7. То же будет в таком случае справедливо и относительно движений, для которых $\lim R = \infty$ при $\lim t = -\infty$, так как, вследствие обратимости системы дифференциальных уравнений, оба предположения должны быть одновременно справедливы или одновременно ложны.

Мы уже изображали многообразие M_7 как семимерную жидкость, находящуюся в состоянии стационарного течения. Три типа движений, при которых происходит большое приближение к тройному соударению, соответствуют трем потокам, входящим в M_7 из бесконечности и возвращающимся затем в бесконечность.

Что же может случиться с какой-нибудь произвольной точкой жидкости? Мне представляется вероятным, что, вообще говоря, такая точка будет двигаться по M_7, пока она не будет подхвачена одним из этих потоков и унесена в бесконечность. Можно, однако, предвидеть, что окажутся также и такие точки, которые будут находиться в равновесии или двигаться по замкнутым линиям потока и, таким образом, не будут унесены этими тремя потоками. В согласии с результатами главы VII в этом случае должны непременно существовать другие линии потока, которые будут оставаться вблизи данной замкнутой линии потока при возрастании или же при убывании времени. Более обще будут существовать линии потока рекуррентного типа, соответствующие рекуррентным движениям, и различные другие линии потока, которые остаются в окрестности рекуррентных при возрастании или убывании времени. Линии потока, соответствующие этим рекуррентным движениям и упомянутым соседним движениям, не могут, разумеется, приближаться к границе M_7.

Для того, чтобы найти распределение таких периодических движений, рекуррентных движений и соседних с ними движений, очевидно, необходим был бы тщательный и подробный дальнейший анализ. В заключение мы произведем только очевидную классификацию движений, основанную на функции $R(t)$.

Произвольное движение в проблеме трех тел для случая $f>0$, $K>0$ принадлежит при возрастании t к одному из следующих четырех типов:

1. *R возрастает до $+\infty$; в этом случае одно из тел удаляется безгранично от остальных двух, тогда как расстояние между этими последними остается ограниченным.*

2. *R стремится к некоторой величине $\overline{R}$, а U стремится к $2K$; в этом случае предельное движение будет специального типа, как, например, в лагранжевом решении, когда три тела находятся в вершинах равностороннего треугольника.*

3. *$R(t)$ ограничено, как в случае (2), но колеблется между двумя значениями, движение в этом случае будет таково, что взаимные расстояния и скорости тел будут ограничены все время, за исключением, быть может, случаев двойных соударений или приближений к таким соударениям, и среди предельных движений будут непременно существовать периодические или другие рекуррентные движения.*

4. *$R(t)$ колеблется между каким-то положительным значением и $+\infty$; это — промежуточный случай, когда скорости остаются ограниченными, за исключением случаев двойных соударений и приближений к двойным, но не тройным соударениям, а одно тело время от времени удаляется произвольно далеко от остальных двух, близких друг к другу тел с тем, чтобы затем снова к ним приблизиться.*

Ту же классификацию можно, разумеется, провести и для случая убывающего t.

Единственное утверждение, нуждающееся здесь в пояснении, состоит в том, что если R стремится к $\overline{R}$, то U приближается к $2K$. Но можно доказать, что это следует из равенства Лагранжа (15).

§ 12. Обобщение на случай большего числа тел и более общих законов силы. В этом параграфе мы рассмотрим возможность обобщенно предыдущих результатов на случай большего числа тел, а также более общего поля сил. При этом мы совершенно исключим из рассмотрения вопрос о соударении тел. Для нашей цели достаточно, чтобы после соударения нескольких тел было возможно какое-нибудь продолжение движения, при котором количество движения, его момент и постоянная энергии оставались бы теми же после соударения, что и до него; мы предположим также, что если

$$R^2 = \frac{1}{2M}\sum m_i m_j r_{ij}^2,$$

то R' можно считать непрерывным при соударении; здесь $m_1, \ldots, m_n$ обозначают массы тел $P_1, \ldots, P_n$ соответственно, M есть сумма всех этих масс, а r_{ij} обозначает взаимное расстояние тел P_i и P_j.

Пусть функция сил U будет какой-нибудь функцией расстояний r_{ij}, однородной, измерения -1 относительно этих расстояний. Для функции U этого типа сохранится первоначальный вид дифференциальных уравнений десяти интегралов, неравенства (20) Сундмана и лагранжева равенства (15), при условии, что f обозначает полный момент количества движения системы относительно ее центра тяжести.

Наши рассуждения, приведенные в этой главе, основывались главным образом на этих аналитических соотношениях. Следовательно, мы можем высказать следующий результат.

Пусть U будет аналитической функцией от взаимных расстояний n тел P_i $(i = 1, \ldots, n)$ с координатами x_i, y_i, z_i и массами m_i, соответственно, и пусть U будет, кроме того, однородной функцией этих расстояний измерения -1. Если все n тел достаточно близки друг к другу в некоторый момент времени, причем полный момент количества движения f и постоянная энергии K больше нуля, то по крайней мере два из взаимных расстояний между телами становятся весьма большими при безграничном возрастании или убывании времени.

Дальнейшее рассмотрение показывает, что условие однородности, наложенное на U, может быть заменено следующим условием:

$$\sum\left(x_i\frac{\partial U}{\partial x_i} + y_i\frac{\partial U}{\partial y_i} + z_i\frac{\partial u}{\partial z_i}\right) \geqslant -dU,$$

где $0 < d < 2$, так что и для этих более общих функций по крайней мере два из взаимных расстояний между телами становятся очень большими.

В этом случае функция H принимает следующий более общий вид:

$$H = R^d\left[R'^2 + \frac{f^2}{(2-d)R^2} + 2K\right].$$

Я не пытался выяснить условия, при которых по крайней мере два из взаимных расстояний становятся бесконечными.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Обобщение последней геометрической теоремы Пуанкаре

§ 1. Введение. Увенчанный премией мемуар Пуанкаре «Le problème de trois corps et les équations de la dynamique», напечатанный в 13 томе «Acta mathematica», содержал первый подступ к неинтегрируемым проблемам динамики. Под руководством профессора Миттаг-Лефлера журнал «Acta mathematica» имел много замечательных статей, но, быть может, ни одна из них не имела большего научного значения, чем эта. Ее многочисленные идеи, в которых периодические движения играли центральную роль, естественным образом повели к дальнейшим динамическим исследованиям Пуанкаре.

В чрезвычайно интересной статье «Sur un théorème de géométrie», опубликованной в 33 томе «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo» незадолго до его смерти, Пуанкаре показал, что одна геометрическая теорема, доказанная им в частных случаях, дала бы нам ответ на некоторые нерешенные вопросы, касающиеся периодических движений. Особенности метода, с помощью которого я вскоре после этого получил общее доказательство ее справедливости[1], а также динамическое происхождение самой теоремы навели меня на мысль о даваемом здесь обобщении.

§ 2. Формулировка теоремы. Пусть r, ϑ означают полярные координаты в плоскости, так что $r = a > 0$ будет уравнением круга C радиуса a. Наше внимание будет занимать двусвязное кольцо R, ограниченное кругом C и кривой[2] Γ, окружающей C, а также второе такое кольцо R_1 ограниченное тем же кругом C и подобной

[1] Proof of Poincaré's Geometric Theorem, Transactions of the American Mathematical Society, 14; или см. перевод в 42 томе Bulletin de la Soclété Mathématique de France.

[2] Замкнутую кривую мы определяем как общую границу ограниченного односвязного открытого множества и внутренности дополнительного множества. Кольцо есть область, ограниченная двумя замкнутыми кривыми, одна из которых лежит внутри другой. Если эти кривые не имеют общих точек, то кольцо является двусвязным открытым множеством. До § 8 мы не будем рассматривать никаких других типов колец.

же кривой Γ_1. Кольца R и R_1 мы будем считать связанными одно-однозначным прямым(1) непрерывным точечным преобразованием T, переводящим R в R_1. Таким образом, мы можем написать:

$$C = T(C), \quad \Gamma_1 = T(\Gamma), \quad R_1 = T(R),$$
$$C = T^{-1}(C), \quad \Gamma = T^{-1}(\Gamma_1), \quad R = T^{-1}(R_1),$$

где смысл обозначений ясен.

Обобщение последней геометрической теоремы Пуанкаре, которое мы здесь установим, формулируется так.

Теорема. *Если Γ и Γ_1 имеют с каждым радиальным лучом $\vartheta = \mathrm{const}$ не более чем по одной общей точке и если T переносит точки на C и на Γ в противоположных угловых направлениях в их новые положения на C и на Γ_1, то либо в общей части R и R_1 имеются две различные инвариантные точки преобразования T, либо в R (или в R_1) существует кольцо, опирающееся на C и преобразуемое посредством T (или T^{-1}) в часть самого себя*[1].

В формулировке Пуанкаре границы Γ и Γ_1 совпадают, а второй возможный случай исключен посредством предположения о сохранении интеграла

$$\iint Pr\,dr\,d\vartheta \quad (P > 0)$$

при преобразовании T.

Ценность устранения условия совпадения кривых Γ и Γ_1 явствует из того, что обобщенная теорема может быть применена для установления существования бесконечного множества периодических движений вблизи устойчивого периодического движения динамической системы с двумя степенями свободы. Далее, из этого сразу вытекает существование движений, которые сами не периодичны, но являются равномерными пределами периодических движений. Действительное существование таких квазипериодических движений, насколько мне известно, до сих пор не было доказано[2]. В настоящей работе я не рассматриваю этих динамических приложений.

[1]Ограничения, накладываемые на кривые Γ и Γ_1, могут быть смягчены. А именно, от этих кривых можно только требовать, чтобы они были «достижимы справа» и «достижимы слева» в том смысле, в каком эти термины определены в моей статье «Surface Transformations and their Dynamical Applications» в томе 43 Acta mathematica (см. также главу VIII этой книги. — *Ред.*). Однако менее общая, но более простая теорема, сформулированная в тексте, достаточна для иллюстрации того же типа обобщения и оказывается удобной для динамических приложений.

[2]Известные исследования Г. Бора доставили нам аналитическое представление таких движений. См., например его работы: «Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen», Acta mathematica, т. 45; «Einige Sätze über Fourierreihe fastperiodischer Funktionen», Mathematische Zeitschrift, т. 23. (На русском языке см. книгу Г. Бора «Почти периодические функции» из серии «Современная математика». —*Ред.*)

Стоит также отметить, что обобщенная теорема не предполагает инвариантности интеграла по площади и, таким образом, по существу относится к области analysis situs. Кроме того, в ней устанавливается существование двух различных инвариантных точек, в то время как до сих пор не была исключена возможность единственной инвариантной точки.

Остающийся открытым вопрос о возможности n-мерного обобщения последней геометрической теоремы Пуанкаре мы сейчас вкратце обсудим. Исследование аналитических свойств движений вблизи данного устойчивого периодического движения динамической системы с n степенями свободы и свойств соответствующего преобразования T, порождаемого этой системой, по-видимому, указывает на существование бесконечного множества близких периодических движений. Теорема Пуанкаре оказывается лишь качественным выражением существенных элементов аналитического положения вещей при $n = 2$; и, в действительности, частный случай, рассмотренный Пуанкаре, достаточен тогда для динамических приложений[1]. Чтобы придти к надлежащему n-мерному обобщению теоремы, необходимо определить качественно существенные элементы n-мерной аналитической проблемы. Это, вероятно, может быть сделано простым путем.

§ 3. δ-цепи. Лемма 1. Возьмем произвольное число $\delta > 0$.

Посредством преобразования T любая точка P_0 круга C переводится в точку $T(P_0)$ круга C. Направленное наружу радиальное перемещение на произвольное расстояние α_0, удовлетворяющее лишь условию $0 \leqslant \alpha_0 < \delta$, переводит $T(P_0)$ в точку P_1, лежащую на той же радиальной прямой. Подобным же образом направленное наружу радиальное перемещение точки $T(P_1)$ на расстояние α_1, удовлетворяющее лишь условно $0 \leqslant \alpha_1 < \delta$, переводит $T(P_1)$ в точку P_2, лежащую на той же радиальной прямой. Продолжая таким же образом, получаем *δ-цепь* точек

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ \ldots,$$

в которой каждая точка получается из предыдущей посредством применения преобразования T и последующего направленного наружу радиального перемещения на расстояние, меньшее числа δ. δ-цепь может оборваться на некотором n-м шаге только тогда, когда P_n лежит вне R, так что преобразование T в этой точке не определено. Такая обрывающаяся δ-цепь будет называться *конечной*.

Условие несуществования конечной δ-цепи содержит следующая

[1] В моих чикагских лекциях о динамических системах, которые скоро появятся в виде книги, я доказываю эти утверждения. (См. главу VI этой книги, которая и имеется здесь в виду. — *Ред.*)

Лемма 1. *Для того, чтобы не существовало конечной δ-цепи, необходимо и достаточно, чтобы в R содержалось открытое кольцо Σ, опирающееся на C и переходящее при преобразовании T в кольцо $T(\Sigma)$, содержащееся в Σ и радиально отстоящее от внешней границы кольца Σ не менее чем на δ.*

Достаточность условия очевидна. В самом деле, если точка P лежит в таком континууме Σ, то ее образ $T(P)$ и всякая точка, получаемая из $T(P)$ посредством направленного наружу радиального перемещения на расстояние, меньшее чем δ, также лежит в Σ, так как $T(P)$ лежит в $T(\Sigma)$. Таким образом, последовательные элементы цепи $P_1, P_2, \ldots$ должны все лежать в Σ и потому в R, так как P_0 лежит в Σ.

Необходимость условия также легко устанавливается. Мы начнем с рассмотрения точечных множеств $M_0, M_1, \ldots$, образованных соответственно точками $P_0, P_2, \ldots$

Множество M_0, разумеется, совпадает с кругом C. Множество M_1, очевидно, является открытым круговым кольцом.

$$a \leqslant r < a + \delta.$$

Оно содержит M_0 и состоит из внутренних точек, исключая точки круга C.

Множество M_2 содержит M_1 и потому M_0. В самом деле, для всякой точки P_0 на круге C существует единственная точка P_{-1}, переходящая в P при преобразовании T. Таким образом, точки P_{-1}, P_0, P_1 образуют δ-цепь из трех точек, в силу чего P_1 принадлежит также M_2.

Далее, все точки множества M_2, кроме точек круга C, суть внутренние точки. Чтобы это показать, нам, разумеется, можно уже не рассматривать точек P_2, принадлежащих M_1. Для точки P_2, не принадлежащей M_1, соответствующая точка P_1 есть внутренняя точка M_1. Так как преобразование одно-однозначно и взаимно непрерывно, то оно переводит P_1 и окрестность P_1 в $T(P_1)$ и окрестность $T(P_1)$. Дальнейшее радиальное перемещение переводит $T(P_1)$ и окрестность этой точки в точку P_2 и ее окрестность. Следовательно, P_2 и в этом случае есть внутренняя точка множества M_2.

Наконец, множество M_2 связно, так как оно получается при радиальном перемещении связного множества $T(M_1)$.

Таким образом, мы усматриваем, что $M_1, M_2, \ldots$ есть возрастающая последовательность открытых связных множеств, опирающихся на C. Если конечных δ-цепей не существует, то получается бесконечная последовательность таких областей, причем все они лежат в R. Они определяют предельное открытое связное множество, опирающееся на C. Это множество S, очевидно, есть не что иное, как совокупность всех точек, принадлежащих каким-либо δ-цепям.

Рассмотрим теперь область $T(S)$. Так как в случае принадлежности точки Q к M_p точка $T(Q)$ принадлежит M_{p+1}, то $T(S)$ есть открытое связное множество, опирающееся на C и содержащееся в S. Далее, если $T(Q)$ передвинуть наружу в радиальном направлении на расстояние, меньшее, чем δ, то получающаяся точка все еще будет принадлежать M_{p+1}. Таким образом, каждая точка множества $T(S)$ отстоит не менее чем на δ от границы множества S в наружном радиальном направлении.

Следовательно, если бы δ было кольцом, то оно было бы областью того типа, существование которого утверждается в лемме. Однако вполне допустимо, что часть границы множества S, достижимая из бесконечности, не составляет всей границы. Это будет тогда, когда S захватывает([2]) некоторые области или части своей наружной границы и, таким образом, не является кольцом.

Допустим теперь, что S не есть кольцо, и обозначим через $\overline{S}$ захваченное точечное множество. Ясно, что множество $S+\overline{S}$ образует настоящее кольцо. Докажем, что эта увеличенная область $S+\overline{S}$ удовлетворяет остальным условиям, налагаемым на Σ в лемме 1.

Ясно, что $S+\overline{S}$ содержится в R, так как S содержится в R; следовательно, $S+\overline{S}$ может быть подвергнуто преобразованию T. При этом T преобразует это множество в самого себя или в часть самого себя. В самом деле, если какая-либо точка принадлежит S, то мы видели, что T переводит ее в точку множества S, если же точка принадлежит $\overline{S}$ и, следовательно, захватывается множеством S, то она переводится в точку, захватываемую множеством $T(S)$ и тем более захватываемую самим S, т. е. также в точку множества $S+\overline{S}$. Далее, аналогичное рассуждение показывает, что каждая точка множества $T(S+\overline{S})$ отстоит не менее чем на δ от границы множества $S+\overline{S}$ в наружном радиальном направлении. В самом деле, если такая точка принадлежит $T(S)$, то она обладает этим свойством относительно границы множества S; если же точка принадлежит $T(\overline{S})$, то она получается из точки, захватываемой S, и потому захватывается $T(S)$, в силу чего последующее радиальное перемещение в направлении наружу на расстояние, меньшее, чем δ, дает точку, захватываемую S и, значит, принадлежащую $S+\overline{S}$. Этот последний шаг основан на ранее доказанном соотношении между S и $T(S)$.

Следовательно, $S+\overline{S}$ во всех случаях образует кольцо Σ, обладающее свойствами, указанными в лемме 1. Доказательство, таким образом, завершено.

§ 4. Минимальные δ-цепи. Допустим теперь, что существует хотя бы одна конечная δ-цепь. Тогда имеется наименьшее натуральное число n, для которого существует δ-цепь $P_0, P_1, \ldots, P_n$, такая, что P_n лежит вне R.

Такие *минимальные* δ-цепи обладают некоторыми интересными свойствами. Очевидно, например, что точка P_i такой цепи принадлежит M_i, но не принадлежит M_j при $j < i$; в противном случае можно было бы сейчас же построить δ-цепь с меньшим числом элементов. Таким образом, P_0 есть единственная точка δ-цепи, принадлежащая C; P_1 есть единственная точка δ-цепи, принадлежащая открытому кольцу $a < r < a + \delta$ и т. д.

Единственное другое свойство, которое нам понадобится, немногим менее очевидно: если P_i и P_j $(i \geqslant 1,\ j \geqslant 1)$ лежат на одной и той же радиальной полупрямой, то $T(P_{i-1})$ и $T(P_{j-1})$ лежат на той же радиальной полупрямой, и притом в том же радиальном порядке, что P_i и P_j. Чтобы установить это, заметим, что $T(P_{i-1})$ и $T(P_{j-1})$ не совпадают, так как иначе совпадали бы P_{i-1} и P_{j-1}, благодаря чему можно было бы выпустить все точки цепи между P_{i-1} и P_{j-1}, а также одну из этих точек. Это невозможно. По той же причине P_i не совпадает с P_j.

Допустим теперь, что точка $T(P_{i-1})$ имеет координату r, меньшую, чем координата r точки $T(P_{j-1})$. Это условие будет, конечно, выполнено при надлежащем выборе обозначений i, j. Единственно возможный радиальный порядок четырех рассматриваемых точек, не согласующийся с доказываемым утверждением, таков:

$$T(P_{i-1}),\ T(P_{j-1}),\ P_j,\ P_i,$$

где радиальная координата возрастает слева направо. В самом деле, точка P_i должна лежать дальше от начала координат, чем P_j, а P_j в свою очередь лежит не ближе, чем $T(P_{j-1})$. (Здесь допустимо, что $T(P_{j-1})$ совпадает с P_j.) Но тогда очевидно, что точка P_j может быть получена из $T(P_{i-1})$ посредством направленного наружу радиального перемещения на расстояние, меньшее, чем δ, и что точка P_i таким же образом может быть получена из $T(P_{j-1})$. Это следует из того, что радиальное расстояние между $T(P_{i-1})$ и P_i меньше δ. Следовательно, P_j принадлежит M_i, а P_i принадлежит M_j. Но ранее доказанное свойство исключает одну из этих возможностей. Поэтому имеет место указанный порядок расположения точек.

§ 5. Вспомогательное преобразование E. Лемма 2. Пусть теперь $P_0, P_1, \ldots, P_n$ будут точки какой-либо δ-цепи. Из только что установленного свойства непосредственно следует, что если $P_i, P_j, P_k, \ldots$ $(i \geqslant 1,\ j \geqslant 1,\ k \geqslant 1, \ldots)$ суть точки этой цепи, лежащие на данной радиальной полупрямой, то $T(P_{i-1}), T(P_{j-1}), T(P_{k-1}), \ldots$ лежат в том же радиальном порядке.

Теперь представим себе точку Q, движущуюся наружу от $r = a$ по этой радиальной полупрямой. Почти очевидно, что одновременно можно двигать вторую точку $\overline{Q}$ по той же самой полупрямой таким образом, чтобы радиальная координата $\overline{Q}$ все время была не меньше радиальной координаты Q, но никогда не превосходила бы последнюю на величину, большую или равную δ, и чтобы при совпадении точки Q с $T(P_{i-1})$, $T(P_{j-1})$, $T(P_{k-1})$, ... точка $\overline{Q}$ совпадала бы соответственно с P_i, P_j, P_k, ...

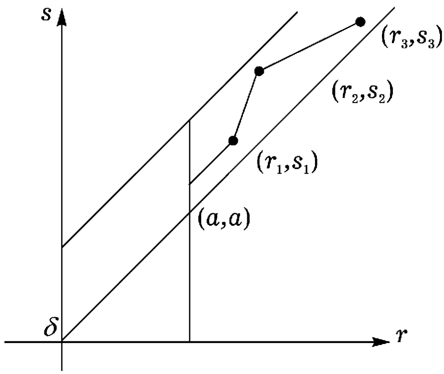

Рис. 11

Графически это обстоятельство можно следующим образом сделать более очевидным. Пусть r_1, r_2, ... — радиальные координаты точек $T(P_{i-1})$, $T(P_{j-1})$, ..., расположенные в возрастающем порядке; s_1, s_2, ... — соответственные координаты точек P_i, P_j, ... Имеют место неравенства:

$$r_1 < r_2 < r_3 < \ldots$$
$$s_1 < s_2 < s_3 < \ldots$$
$$0 \leqslant s_1 - r_1 < \delta,$$
$$0 \leqslant s_2 - r_2 < \delta, \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Рассматривая (r_1, s_1), (r_2, s_2), ... как пары декартовых координат точек плоскости, соединим эти точки последовательно прямолинейными отрезками (см. рис. 11) и продолжим таким образом полученную ломаную линию вправо и влево от ее концов прямолинейными отрезками, образующими угол 45° с положительной осью r. Эта ломаная линия даст график функции $s = f(r)$. Если рассматривать r как радиальную координату точки Q, а s как радиальную координату точки $\overline{Q}$, то определяемое этим соответствие между Q и $\overline{Q}$ обладает желаемыми свойствами.

$\overline{Q}$ может совпадать с Q при $r = a$, причем, однако, в этом случае Q не является точкой $T(P_{i-1})$; иначе точка Q совпадала бы с $T(P_0)$, а $\overline{Q}$ — с точкой P_1, отличной от Q. Заменяя в этом случае прямолинейную часть графика для $r \leqslant r_1$ другим, менее наклонным отрезком, мы получим измененное соответствие, при котором Q не будет совпадать с $\overline{Q}$ при $r = a$. В дальнейшем удобно предполагать, что соответствие удовлетворяет этому условию.

Таким образом, на каждой радиальной полупрямой, содержащей точки P_i, P_j, ..., минимальной δ-цепи определяется непрерывное одно-однозначное, направленное наружу радиальное перемещение на расстояние, меньшее δ, переводящее каждую точку $T(P_{i-1})$, $T(P_{j-1})$, ... в соответственную точку P_i, P_j, ...

Все эти линейные радиальные перемещения могут быть выполнены посредством одного, определенного при $r \geqslant a$, непрерывного одно-однозначного, направленного наружу радиального перемещения плоскости на расстояние, меньшее δ. В самом деле, представим себе, что перпендикулярно к плоскости чертежа (рис. 11) восстановлена третья координатная ось ϑ и что все графики расположены в соответствующих плоскостях $\vartheta = \mathrm{const}$. Эти ломаные линии все поднимаются в направлении возрастающих r, а в вертикальном направлении лежат над плоскостью $s = r$ на расстоянии, меньшем, чем δ. Соединим прямолинейными отрезками пары точек соседних графиков с одинаковыми координатами r. Этим, очевидно, определяется функция $s = f(r, \vartheta)$, порождающая радиальное перемещение E желаемого характера.

Результаты двух последних параграфов могут быть объединены в следующей лемме.

Лемма 2. *Если существует конечная δ-цепь, то существуют минимальные δ-цепи, и для всякой минимальной δ-цепи $P_0, P_1, \ldots, P_n$ существует одно-однозначное непрерывное, направленное наружу радиальное перемещение E, определенное при $r \geqslant a$, перемещающее точки на расстояние, меньшее δ, а кривую C наружу, и переводящее*

$$T(P_0),\ T(P_1),\ \ldots,\ T(P_{n-1})$$

соответственно в

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n.$$

§ 6. Вспомогательная кривая. Лемма 3. Рассмотрим теперь преобразование TE, получаемое, если после T произвести такое преобразование E. Ясно, что TE есть прямое одно-однозначное преобразование кольца R в кольце $E(R_1)$ и что оно переводит круг C в другую кривую C_1, окружающую C. Кроме того, TE переводит точки $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ минимальной δ-цепи, соответствующей преобразованию E, в точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$ соответственно. В самом деле, T

переводит P_{i-1} в точку $T(P_{i-1})$, а E переводит последнюю в P_i. Так как P_0 лежит на $C_0 = C$, то P_1 лежит на C_1.

Преобразование TE переводит двусвязное кольцо, ограниченное кривыми C_0 и C_1, в аналогичное кольцо, ограниченное кривыми C_1 и C_2. Это второе кольцо опирается на внешнюю сторону C_1 первого кольца, а точка P_2 лежит на C_2. Таким образом, применяя последовательно преобразование TE, получаем последовательность расширяющихся колец C_0C_1, C_1C_2, ... , $C_{n-1}C_n$, каждое из которых опирается на предыдущее, в то время как P_0, P_2, ... , P_n, лежат соответственно на C_0, C_1, ... , C_n.

Этот процесс, разумеется, кончился бы раньше, если какое-нибудь кольцо $C_{r-1}C_r$ $(r < n)$ выходило из R. Очевидно, однако, что все точки C_0C_1 принадлежат M_1, все точки C_1C_2 принадлежат M_2 и т. д., так что все точки $C_{r-1}C_r$ принадлежат M_r и потому по самому определению минимальной δ-цепи не могут лежать вне R. С другой стороны, P_n на C_n лежит вне R, так что часть кольца $C_{n-1}C_n$ простирается вне R.

На этом этапе удобно рассматривать r и ϑ как прямоугольные координаты точки на плоскости r, ϑ. Из какого-либо избранного определения преобразования T в этой плоскости все другие определения этого преобразования получаются посредством параллельного перемещения в направлении ϑ на расстояние $2k\pi$ $(k = \pm1, \pm2, \ldots)$. Круг C переходит в прямую $r = a$, параллельную оси ϑ; Γ и Γ_1 оказываются незамкнутыми кривыми, лежащими над этой прямой и простирающимися бесконечно далеко направо и налево, тогда как C_1, C_2, ... делаются такими же кривыми, причем C_1 лежит над C_0, C_2 над C_1 и т. д.

Отрезки какой-либо из этих кривых, содержащиеся в полосе

$$2k\pi \leqslant \vartheta \leqslant 2(k+1)\pi$$

конгруентны друг другу. Кольца CC_1, C_1C_2, ... делаются примыкающими друг к другу лентами. Преобразование TE переводит каждую такую ленту в ленту, лежащую непосредственно над ней.

В этой новой плоскости соединим точки P_0 и P_1 непрерывной дугой P_0P_1 без кратных точек, пересекающей ленту C_0C_1 и, исключая точки P_0 и P_1, лежащей внутри этой ленты.

Очевидно, что TE переводит дугу P_0P_1 в дугу P_1P_2, пересекающую вторую ленту C_1C_2. Далее, TE переводит дугу P_1P_2 в дугу P_2P_3 на третьей ленте и т. д. (рис. 12). Очевидно, что таким образом получается непрерывная кривая $P_0P_1P_2 \ldots P_n$ без кратных точек.

Пусть Q_0 будет первой точкой, в которой кривая $P_0P_1P_2 \ldots P_n$ встречает границу Γ кольца R. Точка Q_0, очевидно, лежит на дуге $P_{n-1}P_n$, но не совпадает с концевой точкой P_n. Рассмотрим образ

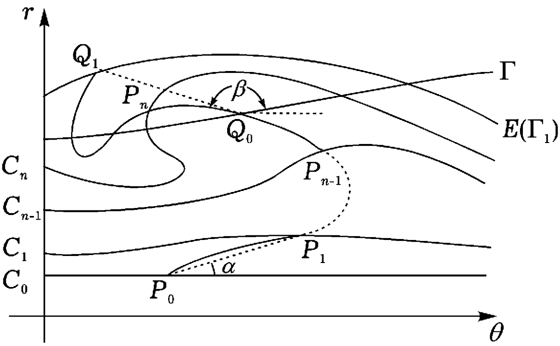

Рис. 12

кривой $P_0P_1 \ldots P_{n-1}Q_0$ при преобразовании TE. Преобразованная кривая $P_1 \ldots P_nQ_1$ состоит из дуг

$$P_1P_2,\ P_2P_3,\ \ldots\ ,\ P_{n-1}P_n,\ P_nQ_1$$

и, очевидно, не имеет кратных точек. Ясно также, что преобразованная кривая не имеет общих точек с дугой P_0P_1, отличных от P_1. Следовательно, вспомогательная кривая P_0Q_1 не имеет кратных точек. Она обладает тем дальнейшим свойством, что преобразование TE переводит часть ее P_0Q_0, пересекающую R, в другую часть P_1Q_1, частично лежащую вне R и пересекающую $E(R_1)$.

Строго говоря, так как для P_0 существует бесконечная система изображающих точек, если считать r и ϑ прямоугольными координатами, а именно точки, получаемые из какой-либо одной при движениях вправо и влево на расстояние $2k\pi$, то получается бесконечная система конгруентных крииых P_0Q_1. Если, однако, вернуться к r и ϑ, как к полярным координатам, и выбрать дугу P_0P_1 так, чтобы она не имела кратных точек в этой старой плоскости, то очевидно, что в новой плоскости кривые P_0Q_1 попарно не будут иметь общих точек и не будут также иметь кратных точек.

Полученные таким образом результаты резюмирует

Лемма 3. *При условиях и обозначениях леммы 2 существует непрерывная кривая без кратных точек*

$$P_0P_1 \ldots P_{n-1}Q_0P_nQ_1,$$

такая, что преобразование TE переводит дугу P_0Q_0, пересекающую R, в дугу P_1Q_1, пересекающую $E(R_1)$, в то время как P_0P_1 пересекает кольцо, ограниченное кривыми C и $E(C)$.

§ *7.* **δ-теорема.** На основе трех доказанных подготовительных лемм мы можем теперь доказать одну теорему, из которой следует обобщение последней геометрической теоремы Пуанкаре, сформулированное в § 2.

δ-теорема. *Если всякая радиальная полупрямая $\vartheta = \mathrm{const}$ пересекает каждую из кривых Γ и Γ_1 лишь в одной точке и если преобразование T перемещает точки кривых C и Γ в противоположных угловых направлениях (относительно ϑ), то для всякого $\delta > 0$ либо в R существует точка P, такая, что $T(P)$ лежит на той же радиальной полупрямой, что и P, причем расстояние между этими точками меньше δ, либо в R (или в R_1) содержится открытое кольцо Σ, опирающееся на C и переходящее при преобразовании T (или T^{-1}) в кольцо, лежащее в Σ и радиально отстоящее не меньше чем на δ от границы кольца Σ в направлении наружу.*

Чтобы установить эту теорему, очевидно, достаточно доказать, что если никакой области Σ не существует, то должна существовать точка P.

Если никакой области Σ не существует, то согласно лемме 1 существуют конечные δ-цепи, и тогда согласно леммам 2 и 3 существует вспомогательное преобразование E и кривая $P_0P_1 \ldots P_{n-1}Q_0P_nQ_1$.

Теперь представим себе точку A, движущуюся по этой кривой от P_0 к Q_0. Ее образ при преобразовании TE, которую мы обозначим через A_1, движется при этом от P_1 к Q. В плоскости прямоугольных координат r, ϑ, вектор AA_1 (рис. 12) вращается в течение этого процесса на определенный угол, который мы обозначим через $\mathrm{rot}\, AA_1$.

Для определенности допустим, что координата ϑ точек круга C увеличивается при преобразовании T. Тогда согласно предположению координата ϑ точек кривой Γ должна уменьшаться при T. Если обозначить через a положительный острый угол, образуемый вектором P_0P_1 с положительной осью ϑ, а через β — лежащий между $\pi/2$ и $3\pi/2$ угол, образуемый с этой же осью вектором Q_0Q_1, то ясно, что интересующий нас поворот либо равен $\beta - \alpha$, либо отличается от $\beta - \alpha$ на целое кратное 2π. Для последующего чрезвычайно важно установить, что этот поворот в точности равен $\beta - \alpha$([3]).

Допустим, что пересекаемая вспомогательной кривой P_0Q_1 полоса, ограниченная кривыми C и $E(\Gamma_1)$, деформируется посредством чисто радиального перемещения таким образом, что кривые $E(C)$ и $E(\Gamma_1)$ (из которых и вторая непрерывна и пересекает лишь в одной точке всякую радиальную полупрямую, в силу предположения относительно Γ_1) переходят в прямые линии $r = b$ и $r = c$, тогда как прямая C остается неподвижной. В течение этой деформации $\mathrm{rot}\, AA_1$, взятый вдоль деформируемой кривой, будет изменяться непрерывно. Следовательно, угол $\beta - \alpha$, измеренный прежним образом, либо все время будет точным значением $\operatorname{rot} AA_1$, либо будет отличаться от $\operatorname{rot} AA_1$ на одно и то же целое кратное 2π. Кроме того, α и β будут удовлетворять прежним неравенствам

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3\pi}{2}.$$

Предположим теперь, что вспомогательная кривая, преобразованная таким образом в кривую, пересекающую полосу $a \leqslant r \leqslant c$, подвергается дальнейшей деформации в этой полосе, причем точки P_0, P_1, Q_0, Q_1 остаются закрепленными. Ясно, что благодаря непрерывности изменения $\operatorname{rot} AA_1$ доказываемое равенство будет все время соблюдаться или все время нарушаться, если только кривая не приобретает при деформации кратных точек.

Но в начальном положении дуга P_0P_1 пересекает полосу $a \leqslant r \leqslant b$, тогда как P_1Q_1 лежит вне этой полосы. Следовательно, дугу P_0P_1 можно деформировать в этой полосе в прямолинейный отрезок P_0P_1. Далее, дуга $P_1Q_0Q_1$ пересекает полосу $b \leqslant r \leqslant c$ и, очевидно, может быть деформирована в ломаную линию $P_1Q_0Q_1$ без изменения положения точек P_1, Q_0 и Q_1. Таким образом, посредством законного изменения мы получаем ломаную линию $P_0P_1Q_0Q_1$, где указанные точки расположены в порядке возрастающей координаты r, в то время как у точки P_1 координата ϑ больше, чем у точки P_0, а у точки Q_1 координата ϑ меньше, чем у точки Q_0.

В этом нормальном положении пригодность выражения $\beta - \alpha$ для $\operatorname{rot} AA_1$ очевидна. Следовательно, и для исходной вспомогательной кривой оно пригодно, как бы сложна ни была эта кривая.

В силу неравенств, которым подчинены β и α, мы заключаем отсюда, что $\operatorname{rot} AA_1$ положителен при движении точки A от P_0 к Q_0 по вспомогательной кривой.

Рассмотрим теперь измененное преобразование TE_λ, где E_λ означает радиальное перемещение, передвигающее каждую точку на расстояние в λ раз большее, чем при преобразовании E. Таким образом, E_1 есть то же самое, что E, тогда как E_0 есть тождественное преобразование, при котором каждая точка остается на месте. Если обозначить $TE_\lambda(A)$ через A_1, то ясно, что при уменьшении λ от 1 до 0 $\operatorname{rot} AA_1$ будет меняться непрерывно, если только A и A_1 не совпадут при какомнибудь λ. Но это дало бы точку P такую, которая лежала бы на одной радиальной полупрямой с $T(P)$. Таким образом, эту возможность больше нет надобности рассматривать. А так как при уменьшении λ точки P_1 и Q_1 движутся по линиям $\vartheta = \text{const}$ соответственно справа и слева от P_0 и Q_0, то неравенство $\operatorname{rot} AA_1 > 0$ должно соблюдаться, пока λ достигнет нуля.

Поэтому угол поворота вектора, проведенного из точки A к ее образу A_1, при преобразовании $T = TE_0$, положителен, когда A движется по вспомогательной кривой P_0Q_0. При непрерывном переводе вспомогательной кривой в какую-либо другую кривую, пересекающую кольцо R, этот поворот должен изменяться непрерывно, или же мы придем к инвариантной точке и, следовательно, к только что упомянутому случаю. Этот угол поворота никогда не равен нулю, так как согласно предположению теоремы вектор AA_1 имеет составляющую по оси ϑ положительную, когда A лежит на C, и отрицательную, когда A лежит на Γ. Таким образом, полный поворот вектора AA_1 положителен вдоль всякой кривой, пересекающей R.

Теперь необходимо отметить полную симметрию вхождения T и T^{-1} в предположение и заключение δ-теоремы. Благодаря этому, мы можем принять обратное преобразование T^{-1} за основное, причем R и R_1, Γ и Γ_1 просто поменяются ролями. Кроме того, преобразования T^{-1} передвигает точки кривых C и Γ_1, в противоположных направлениях относительно ϑ. Для определенности мы считали, что в плоскости прямоугольных координат r и ϑ преобразование T передвигает точки кривой C вправо, а точки кривой Γ влево. Следовательно, преобразование T^{-1} переводит в этой же плоскости точки кривой C влево, а точки кривой Γ_1 — вправо.

Принимая во внимание это небольшое изменение, мы приходим к заключению, что полный угловой поворот вектора, проведенного из точки B к ее образу B_{-1}, при преобразовании T^{-1} отрицателен вдоль всякой кривой, пересекающей кольцо R_1.

Но когда B пересекает R_1, B_{-1}, разумеется, пересекает R и B_{-1} можно принять за точку A. Отсюда мы заключаем, что $\operatorname{rot} AA_1$ отрицателен при движении точки A вдоль любой кривой, пересекающей R.

Это нелепо, так как полный поворот вектора A_1A в точности равен повороту вектора AA_1, положительному при тех же условиях согласно доказанному.

Следовательно, δ-теорема доказана.

§ 8. Завершение доказательства. Условия теоремы, формулированной в § 2, включают условия δ-теоремы, и, кроме того, мы можем считать исключенной вторую возможность δ-теоремы при всяком положительном δ. Итак, при всяком положительном δ существует точка P кольца R, переходящая при преобразовании T в точку $T(P)$ кольца R_1, лежащую на той же радиальной полупрямой и отстоящую от P не более чем на δ. Последовательность таких точек с δ, стремящимся к нулю, очевидно, имеет по меньшей мере одну предельную точку, которая принадлежит R и R_1, и инвариантна при T. Таким образом, существование хотя бы одной инвариантной точки установлено.

Перейдем теперь к вспомогательной плоскости, в которой r и ϑ являются прямоугольными координатами. Пусть точка A совершает полный обход в положительном направлении вокруг части полосы R, содержащейся между двумя параллелями к оси r, лежащими на расстоянии 2π друг от друга. Ясно, что $\operatorname{rot} AA_1$ при таком обходе равен нулю, так как на дугах кривых C и Γ повороты равны нулю, а повороты, соответствующие двум другим частям контура, взаимно уничтожаются.

Очевидно, что этот контур содержит внутри себя каждую инвариантную точку только однажды. Поэтому полный поворот равен алгебраической сумме поворотов, соответствующих обходам вокруг каждой инвариантной точки в отдельности по маленьким контурам, окружающим эти точки[1]. Но для простой инвариантной точки такой поворот по определению равен $\pm 2\pi$. Следовательно, имеются или по меньшей мере две различные инвариантные точки или же одна кратная инвариантная точка K с вращением ϑ.

В общем случае посредством этого рассуждения, принадлежащего Пуанкаре, из существования одной инвариантной точки следует существование второй. Доказательство же того, что всегда существует вторая инвариантная точка, *отличная* от первой, значительно сложнее предыдущего доказательства.

Мы допустим, что существует одна и только одна инвариантная точка K, и посредством небольшого обобщения нашего прежнего рассуждения покажем, что тогда получается противоречие.

Вместо того, чтобы рассматривать закрепленное положительное число δ, мы будем применять $\delta(\vartheta)$, изменяющееся при переходе от одной радиальной полупрямой к другой. Выражение «направленное наружу радиальное перемещение точки P на величину, меньшую, чем δ», относится теперь к значению δ для радиальной полупрямой, проходящей через P. При $\delta = 0$ точка P остается неподвижной. Очевидно, что и относительно такого переменного $\delta(\vartheta)$ могут быть определены δ-цепи и минимальные δ-цепи.

В нашем случае мы выберем δ малым и положительным, за исключением единственной радиальной полупрямой, проходящей через единственную инвариантную точку K. Далее, функцию δ, очевидно, можно взять непрерывно зависящей от ϑ и меньшей расстояний от P до $T(P)$ и от $T(P)$ до K для всякой точки P, лежащей на соответствующей радиальной полупрямой, причем эти расстояния измеряются на плоскости прямолинейных координат r и ϑ.

Если δ выбрать таким образом, то инвариантная точка K не может входить в состав какой-либо δ-цепи, так как в противном случае она по-

[1]Случай существования бесконечного множества инвариантных точек может быть исключен из рассмотрения.

лучилась бы из предшествующей точки $P \neq K$ посредством перемещения точки $T(P)$ на расстояние, меньшее расстояния между $T(P)$ и K.

Лемма 1 по-прежнему имеет место для этого слегка видоизмененного типа δ-цепей, с той лишь разницей, что теперь внешняя граница кольца Σ может касаться круга C в точке пересечения этого круга с радиальной полупрямой, проходящей через K. Но при исключении второй возможности, указанной в формулировке теоремы, такой области Σ не может существовать. Следовательно, существуют конечная δ-цепь и минимальная δ-цепь $P_0, P_1, \ldots, P_n$, соответствующая рассматриваемой функции $\delta(\vartheta)$.

Исходя из этой минимальной цепи, мы можем построить вспомогательное преобразование E, обладающее свойствами, указанными в лемме 2.

Тогда при рассмотрении преобразования TE, как и раньше, получается последовательность колец CC_1, C_1C_2, ..., с той лишь разницей, что теперь две границы какого-либо из них могут касаться друг друга в одной точке.

Точки P_0 и P_1 могут быть, как и ранее, соединены дугой, содержащейся в кольце C_0C_1, и, таким образом, как в лемме 3, получается вспомогательная кривая

$$P_0P_1 \ldots P_{n-1}Q_0P_nQ_1.$$

Теперь эта кривая может, однако, иметь двойные точки, так как последовательные кривые C, C_1, C_2, ... могут иметь общие точки. В двойных точках вспомогательная кривая не пересекает самое себя. Она, разумеется, не может проходить через инвариантную точку K, лежащую вне последовательности колец.

Продолжая теперь, как § 7, будем рассматривать $\operatorname{rot} AA_1$ вдоль кривой P_0Q_0, где A_1 есть образ точки A при отображении TE. Способ выбора функции $\delta(\vartheta)$ обеспечивает, что точка A_1 всегда отлична от A. Поэтому, как и раньше, мы убеждаемся, что этот поворот положителен вдоль вспомогательной кривой, и что он остается положительным при параметрическом преобразовании TE_λ, когда λ убывает от 1 до 0. Таким образом, $\operatorname{rot} AA_1$ положителен вдоль этой кривой, если A_1 означает образ точки A при преобразовании T. Он положителен поэтому и вдоль всякой кривой, пересекающей R и получаемой из P_0Q_0 посредством непрерывной деформации, такой, что деформируемая кривая никогда не проходит над K. Но если даже эта кривая и проходит над K, то на $\operatorname{rot} AA_1$ это не может отразиться, так как вращение вокруг K равно 0. Следовательно, $\operatorname{rot} AA_1$ положителен вдоль всякой кривой, пересекающей R.

Переходя к T^{-1}, мы заключаем, что $\operatorname{rot} A_1 A = \operatorname{rot} A A_1$ отрицателен, и, таким образом, приходим к противоречию.

Этим теорема установлена.

Простое обобщение приведенного рассуждения показывает, что либо существуют две инвариантные точки, для которых $\operatorname{rot} A A_1$ отличен от 0, или же существует бесконечное множество инвариантных точек.

О динамической роли последней геометрической теоремы Пуанкаре[1]

Рассмотрим динамическую систему с одной степенью свободы. Уравнения движения в канонической гамильтоновой форме будут иметь вид:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p},$$

где $H = H(p,\, q)$ есть функция от p и q. Из условия постоянства энергии $H(p,\, q)$ решение системы может быть получено посредством одной квадратуры. Следовательно, этот случай не представляет никакого особого интереса.

В случае двух степеней свободы предположим, что уравнения движения даны в гамильтоновой форме

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1,\, 2),$$

где $H = H(p_1,\, q_1,\, p_2,\, q_2)$. Будем рассматривать p_1, q_1, p_2, q_2 как координаты точки в четырехмерном пространстве. В окрестности периодического движения, соответствующего некоторому значению интеграла энергии, точки $(p_1,\, q_1,\, p_2,\, q_2)$, соответствующие тому же значению интеграла энергии, заполняют трехмерный тор. Как известно, задача может быть здесь сведена к случаю обобщенной гамильтоновой системы с одной степенью свободы, а именно:

$$\frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{1}$$

где $H = H(p,\, q,\, \tau)$, причем τ — угловая переменная периода 2π, измеряющая расстояние между двумя точками вдоль трехмерного тора. Данное периодическое движение можно считать соответствующим значениям $p = q = 0$.

Мы можем представить эту систему в следующем виде:

$$\frac{dp}{d\tau} = P, \quad \frac{dq}{d\tau} = Q, \quad \frac{dr}{d\tau} = R = 1, \tag{2}$$

[1]Лекция, прочитанная автором 8 июня 1928 г. на заседании математического семинара университета в Сегеде.

где
$$P = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial H}{\partial p},$$
причем и P и Q переменная τ должна быть заменена на r.

Будем рассматривать p, q, r как прямоугольные координаты точки в трехмерном пространстве.

Предыдущие уравнения определяют направление линии тока в любой точке пространства. Движения динамической системы изображаются линиями тока трехмерной жидкости, находящейся в стационарном движении.

Рассмотрим плоскости $r = 0$ и $r = 2\pi$. Две точки этих плоскостей, имеющие одинаковые координаты p и q, мы будем считать совпадающими; они соответствуют одному и тому же состоянию движения, вследствие периодичности переменной τ.

Возьмем в плоскости $r = 0$ точку P с координатами (p, q) и проследим линию тока, исходящую из P до точки P_1 с координатами (p_1, q_1), лежащей в плоскости $r = 2\pi$. Соотнося таким образом каждой точке P соответствующую точку P_1, мы получаем преобразование T плоскости (p, q) в самое себя. Для этого преобразования начало координат является инвариантной точкой.

Преобразование T обладает двумя важными свойствами. Во-первых, функции P, Q, R удовлетворяют соотношению
$$\frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial r} = 0.$$
Это означает, что поток, для которого P, Q, R суть составляющие скорости, является потоком несжимаемой жидкости.

Во-вторых, если мы рассмотрим маленькую замкнутую кривую в плоскости $r = 0$ и цилиндр высоты h, ограниченный линиями потока, проходящими через точки этой кривой, и плоскостями $r = 0$ и $r = h$, то через промежуток времени 2π этот цилиндр перейдет в подобный же цилиндр высоты h с площадью основания σ_1, равной площади, ограниченной первоначальной кривой. Это есть следствие несжимаемости. Другими словами, преобразование T сохраняет площади. Следовательно, якобиан
$$J\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p & q \end{pmatrix}$$
равен единице.

Таким образом, динамической задаче соответствует некоторое сохраняющее площади преобразование T плоскости (p, q) в самое себя, имеющее инвариантную точку в начале координат. Каждому важному свойству динамической системы, касающемуся движений вблизи данного периодического движения, соответствует некоторое свойство преобразования T.

Если H является аналитической функцией от p, q, τ, то p_1, q_1 будут аналитическими в p, q. Подобным же образом, если H непрерывно вместе со всеми своими частными производными любого порядка, то p_1, q_1 будут иметь непрерывные частные производные любого порядка по p, q.

Теперь возникает интересный вопрос о том, существует ли обратно динамическая задача рассматриваемого типа для каждого такого преобразования T. В связи с этим мы докажем следующую теорему.

Если равенства

$$p_1 = \varphi(p, q), \; q_1 = \psi(p, q)$$

определяют сохраняющее площади преобразование T плоскости (p, q) в самое себя и если функции φ, ψ и все их частные производные любого порядка непрерывны, причем начало координат является инвариантной точкой преобразования T, то существует соответственная динамическая система (1), такая, что функция H непрерывна вместе со всеми своими частными производными любого порядка по p, q, τ и при этом является периодической функцией τ периода 2π.

Было бы чрезвычайно интересно доказать подобную же теорему для аналитических функций.

В окрестности начала координат преобразование T, переводящее (p, q) в (p_1, q_1), является существенно([1]) аффинным преобразованием с определителем единица. Соответствующее линейное преобразование может быть получено посредством одно-однозначной аналитической деформации (вращения или растяжения), переводящей каждую точку (p, q) в ее образ $(\overline{p}_1, \overline{q}_1)$ при изменении параметра r от 0 до 2π([2]). На эту деформацию может быть наложено очень малое смещение с составляющими

$$\frac{r}{2\pi}(p_1 - \overline{p}_1), \quad \frac{r}{2\pi}(q_1 - \overline{q}_1).\text{([3])}$$

Получающееся преобразование зависит от параметра r, оставляет на месте начало координат, одно-однозначно преобразует окрестность последнего в самое себя и переводит точку (p, q) в точку (p_1, q_1), когда r возрастает от 0 до 2π.

При изменении r от 0 до 2π точки (p, q, r) описывают дуги кривых, соединяющие $(p, q, 0)$ с $(p_1, q_1, 2\pi)$ таким образом, что r на них возрастает и что вся окрестность оси r для $0 \leqslant r \leqslant 2\pi$ заполнена этими кривыми одно-однозначным образом. Если мы присоединим к этим дугам все дуги, получаемые при параллельном переносе пространства на расстояние $2k\pi$ ($k = \pm1, \pm2, \ldots$) в направлении оси r, то все пространство (p, q, r) в окрестности оси r будет заполнено кривыми, состоящими из таких дуг. Уравнения этих кривых имеют вид:

$$p = f(r), \quad q = g(r),$$

где f и g непрерывны вместе со всеми своими производными во всех точках, за исключением точек плоскостей $r = 0, \pm 2\pi, \ldots$, где производные могут совершать конечные скачки.

Произведем теперь деформацию области $0 \leqslant r \leqslant 2\pi$ пространства (p, q, r) в направлении оси r по формуле:

$$r = k_0 \int\limits_0^{\rho} e^{\frac{1}{\rho(\rho-2\pi)}}\, d\rho,$$

где постоянная k_0 выбрана так, чтобы при $\rho = 2\pi$, r также равнялось бы 2π. Очевидно, что r определяется как функция от ρ, непрерывная вместе со всеми своими производными при $0 \leqslant \rho \leqslant 2\pi$, причем при $\rho = 0$ и $\rho = 2\pi$ все эти производные обращаются в нуль.

Если мы произведем эту деформацию области $0 \leqslant r \leqslant 2\pi$ пространства (p, q, r) одновременно с такими же деформациями областей

$$2k\pi \leqslant r \leqslant 2(k+1)\pi \quad (k = \pm1, \pm2, \ldots),$$

то мы получим преобразованную систему кривых, для которых соответственные функции f и g будут уже всюду непрерывными вместе со всеми своими производными.

Пусть теперь каждая точка P движется вдоль своей кривой с составляющей скорости по оси r, равной единице. Любая площадка σ на плоскости $r = 0$ переходит при этом в площадку σ_0 на плоскости $r = r_0$. Мы имеем здесь

$$\iint\limits_{\sigma} dp\, dq = \iint\limits_{\sigma_0} J\, dp\, dq,$$

где J означает соответствующий якобиан. Отсюда, очевидно, следует, что тройной интеграл

$$\iiint J(p, q, r)\, dp\, dq\, dr$$

инвариантен. Здесь функция J не только непрерывна вместе со своими производными, но и периодична относительно r с периодом 2π, так как по предложению $J(p, q, 2\pi) = 1$.

Определим теперь деформацию пространства (p, q, r) в направлении оси q равенством

$$\overline{q} = \int\limits_0^q J(p, q, r)\, dq.$$

Это преобразование, очевидно, периодично в желательном смысле и оставляет на своих местах точки плоскостей $r{=}2k\pi$ $(k{=}0, \pm1, \pm2, \ldots)$. В новых переменных инвариантный интеграл запишется просто как обычный объемный интеграл $\iiint dp\, dq\, dr$.

Соответствующие дифференциальные уравнения имеют вид:

$$\frac{dp}{d\tau} = P, \quad \frac{dq}{d\tau} = Q, \quad \frac{dr}{d\tau} = 1,$$

где P, Q суть функции от p, q, r, непрерывные вместе со всеми своими производными любого порядка и периодические с периодом 2π относительно r. Так как объем инвариантен, то мы имеем

$$\frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial Q}{\partial q} = 0.$$

Но эго означает, что существует функция H того же типа, для которой

$$P = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Другими словами, данное преобразование, сохраняющее площади, соответствует динамической задаче рассматриваемого типа.

Это замечание показывает, что в случае преобразования, рассматриваемого Пуанкаре в его последней геометрической теореме, свойство сохранять площади действительно является характерным для этого преобразования. Оно показывает также, как динамическая задача может приводить скорее к рассмотрению преобразования вблизи инвариантной точки или вблизи замкнутой инвариантной кривой, в которую такая точка может быть растянута, чем к преобразованию, определенному во всем кольце, как требуется в теореме Пуанкаре. По этой именно причине я видоизменил теорему Пуанкаре, распространив ее на преобразования этого более общего типа, которые представляются более пригодными для многих динамических приложений. Действительно, более подробное рассмотрение этих приложений показывает, что для многих целей видоизмененная теорема Пуанкаре достаточна, если только аналитические детали исследованы[1].

[1]См. главу VI моей книги «Динамические системы».

С точки зрения топологии трансляционную теорему Браувера о преобразованиях плоскости можно рассматривать как трактующую вопрос о топологических отображениях сферы с одной единственной инвариантной точкой. Аналогичным образом надлежащее обобщение теоремы Пуанкаре[1] бросает свет на морфологию любого такого преобразования с двумя инвариантными точками. Важный новый метод исследования, изобретенный Керекьярто(^{4}), как кажется, дает возможность рассматривать эти и другие подобные вопросы на общей основе.

[1] См. мою статью «Обобщение последней геометрической теоремы Пуанкаре» в Acta mathematica, 47, 1925, 297. (См. перевод статьи в этой книге. — *Ред.*)

Некоторые проблемы динамики[1]

Со времен Хилла и Пуанкаре стараются охарактеризовать движения динамических систем в их общих качественных чертах. Эта последняя фаза развития теоретической динамики представляет большой интерес для математика. Важность качественных динамических идей для точных наук едва ли может быть переоценена. Для пояснения этих идей я вкратце рассмотрю несколько простых примеров. После такой подготовки я хочу привлечь внимание к некоторым нерешенным динамическим проблемам.

Весьма важной является, например, не совсем определенная идея о том, что любое устойчивое движение динамической системы либо является периодическим, либо совершается вблизи периодического движения. Чтобы иметь дело с очень простым случаем, рассмотрим движение частицы P по прямой под влиянием силы f, зависящей только от положения и скорости частицы[2]. Мы будем предполагать, что на прямой имеется только одно положение равновесия O. Если тогда x означает расстояние OP, а t — время, то мы имеем уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x,\, \frac{dx}{dt}\right),$$

где f — заданная функция. Так как рассматриваемое движение устойчиво, то

$$|x| \leqslant M, \quad |y| \leqslant M$$

при $t \geqslant 0$, где $y = dx/dt$. Но вышеприведенное уравнение второго порядка сейчас же ведет к двум уравнениям первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = f(x,\, y),$$

где x и y рассматриваются как прямоугольные координаты. Движениям соответствуют кривые, однократно заполняющие плоскость. Равновесие в O соответствует точечной кривой $x = y = 0$, которую мы также будем обозначать через O.

[1]В этой статье приводится содержание двух докладов, которые автор читал в качестве гостя в Берлинском университете 30 июня и 3 июля 1928 г.

[2]Этот пример, как и другие здесь приведенные, подробно рассмотрен в моей книге «Динамические системы». Там же даны дальнейшие литературные указания.

При $y > 0$ каждая точка движется по своей кривой направо, так как $dx/dt > 0$. При $y < 0$ каждая точка движется налево. На оси x каждая точка движется в направлении оси y или в противоположном направлении. Рассматриваемое устойчивое движение соответствует кривой, лежащей при $t \geqslant 0$ в квадрате $|x| \leqslant M$, $|y| \leqslant M$.

Рассмотрим прежде всего простейший случай, когда движущаяся точка ни разу не пересекает ось x. Здесь имеется лишь одна возможность: точка приближается к положению равновесия при бесконечном возрастании t, как показано на рис. 13*a*.

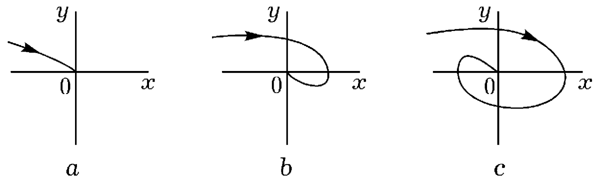

Рис. 13

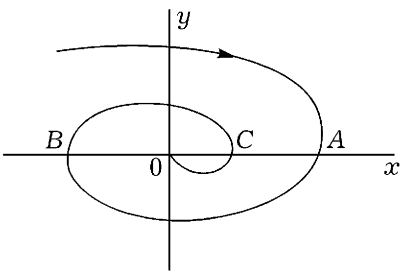

Рис. 14

Рис. 13*b*, *c* соответствует одному или двум переходам через ось. При двух переходах точки перехода лежат по разные стороны от положения равновесия, так как по одну сторону направление везде одно и то же. Мы имеем здесь движение частицы P, которая один или два раза колеблется через положение равновесия, чтобы потом начать приближаться к нему. При трех переходах A, B, C, очевидно, что C лежит не только по ту же сторону, что и A, но и между O и A (рис. 14). Здесь частица трижды проходит через положение равновесия, причем третье колебание меньше первого. После этого P приближается к этому положению. Эти процессы можно продолжить. Мы должны иметь или конечное число убывающих колебаний с последующим приближением к положению равновесия, или бесконечно много колебаний. В этом последнем случае движение или в точности периодическое, или колебания возрастают, приближаясь к периодическому движению, или они убывают с приближением к периодическому движению, или, наконец они убывают с приближением к положению равновесия. Общая идея о связи между устойчивостью и периодичностью оправдывается, таким образом, по крайней мере в этом частном случае.

При более глубоком рассмотрении этой идеи выявляются некоторые «центральные движения» и «рекуррентные движения» как действительные обобщения периодических движений.

В классической динамике дифференциальные уравнения обычно имеют гамильтонов или канонический вид. В простейшем случае одной степени свободы два дифференциальных уравнения таковы:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{1}$$

где H (энергия) есть заданная аналитическая функция p и q. Умножая эти два уравнения на $\partial H/\partial p$ и $\partial H/\partial q$ и складывая, убеждаемся сейчас же, что в плоскости p, q точка движется по кривой $H = \text{const}$. Поэтому движение должно быть либо неустойчивым, либо периодическим, либо приближающимся к положению равновесия (p_0, q_0). Пользуясь, далее, интегралом $H = \text{const}$ можно интегрировать эти дифференциальные уравнения.

Мы рассмотрим теперь гамильтонову систему с двумя степенями свободы, так как это простейший неразрешимый случай. Уравнения имеют вид

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{2}$$

где H — заданная аналитическая функция четырех переменных p_1, q_1, p_2, q_2. Пользуясь известным интегралом энергии $H = \text{const}$ и независимостью H от t, можно чисто формальным образом понизить на две единицы порядок этой системы. Эта редукция хорошо известна, и нет надобности проводить ее здесь. Новые упрощенные уравнения могут быть следующим образом представлены в виде гамильтоновой системы с одной степенью свободы:

$$\frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p}. \tag{3}$$

Здесь H — известная функция переменных p, q, τ. Этой редукцией мы будем пользоваться в дальнейшем.

Если p_1, q_1, p_2, q_2 означают координаты точки в четырехмерном пространстве, то четыре первоначальных уравнения определяют некоторое течение жидкости в этом пространстве. Составляющими скорости являются как раз четыре величины, стоящие в правых частях уравнений (2). Каждая точка (p_1, q_1, p_2, q_2) представляет определенное состояние движения. Линии тока или кривые движения соответствуют возможном движениям системы. Совокупность возможных точек соответствует «многообразию состояний» и может быть замкнутой или незамкнутой. Две такие динамические системы «эквивалентны», если существует точечное преобразование, переводящее точки и движения одной системы в точки и движения другой.

Действительная цель динамики состоит в том, чтобы определить все инварианты данной динамической системы относительно таких преобразований так, чтобы было возможно ответить на вопрос, эквивалентны ли две такие системы или нет.

Вообще говоря, такие инварианты существуют лишь в окрестности положения равновесия или периодического движения. Поэтому мы будем рассматривать окрестность замкнутой кривой движения, соответствующей такому периодическому движению.

Соответственно нашей редукции мы будем рассматривать только близкие состояния движения, для которых постоянная энергии та же, что и для данного периодического движения. Они соответствуют трехмерной части многообразия состояний, образующей топологический тор.

При надлежащем выборе переменных p, q, τ данная кривая движения будет лежать вдоль оси τ в пространстве p, q, τ, где всякие две точки $(p,\ q,\ \tau+2\pi)$ и $(p,\ q,\ \tau)$ соответствуют одному и тому же состоянию движения. Здесь тор превращается в бесконечный цилиндр.

Пусть теперь дана некоторая поверхность S, пересекающая замкнутую кривую движения в точке Q под углом, отличным от нуля. Плоскость $\tau = 0$, очевидно, является поверхностью этого рода. Возьмем какую-либо точку P этой поверхности и проследим проходящую через P кривую движения в направлении возрастающего времени до первой следующей точки P_1, также лежащей на S. Этим определяется точечное преобразование T от любого P к соответствующему P_1: $P_1 = T(P)$. Это преобразование, как и обратное преобразование $P = T^{-1}(P_1)$, аналитично, если только данная проблема и секущая поверхность аналитичны. Следует заметить, что Q является неподвижной точкой преобразования T.

Чтобы дать простой пример такого преобразования T, рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$q'' + k^2 q = 0,$$

или, что то же самое, два дифференциальных уравнения типа (3):

$$\frac{dp}{dt} = -k^2 q = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = p = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \left[H = \frac{1}{2}(p^2 + k^2 q^2)\right].$$

Решение $(p,\ q)$, принимающее при $\tau = 0$ значения $(p_0,\ q_0)$, дается формулами:

$$p = p_0 \cos k\tau - kq_0 \sin k\tau, \quad q = \frac{p_0}{k} \sin k\tau + q_0 \cos k\tau.$$

При возрастании τ от 0 до 2π получаем p_1, p_2:

$$p_1 = p_0 \cos 2k\pi - kq_0 \sin 2k\pi, \quad q_1 = \frac{p_0}{k} \sin 2k\pi + q_0 \cos 2k\pi.$$

В координатах $(p/\sqrt{k}, q\sqrt{k})$ это преобразование T является обычным вращением на угол $2k\pi$.

Очевидно, что при другом выборе координат или секущей поверхности определится другое преобразование $\overline{T}$, эквивалентное T. В самом деле, при новом выборе координат изменяются лишь координаты на S. Но и при новом выборе секущей поверхности паре значений p, q переменных на S соответствует одна и только одна пара $\overline{p}$, $\overline{q}$ на $\overline{S}$, в силу чего и здесь преобразования T и $\overline{T}$ должны быть эквивалентными.

Этот результат допускает обращение, а именно, если преобразования, относящиеся к двум динамическим проблемам, эквивалентны, то и эти проблемы эквивалентны друг другу. Чтобы доказать это, надо лишь определить взаимно однозначное и непрерывное отображение двух многообразий состояний.

Геометрически это совершается так. Точки поверхностей S и $\overline{S}$ соответствуют друг другу заданным образом. Всякая другая точка P первого многообразия лежит на дуге QQ_1, оканчивающейся в двух точках секущей поверхности. Точка P делит дугу на две части QP и PQ_1. Обозначим отношение этих частей QP/PQ_1 через σ. Будем считать точки P и $\overline{P}$ соответствующими, если они лежат на соответствующих дугах QQ_1 и $\overline{QQ}_1$ и имеют одинаковые σ и $\overline{\sigma}$. Таким образом, устанавливается непрерывное преобразование одного многообразия в другое многообразие, переводящее кривые движения первого многообразия в кривые движения второго.

Применяемые здесь точечные преобразования только непрерывны. Таким образом, при этом способе доказательства мы пользуемся группой всех непрерывных точечных преобразований.

Эти соображения показывают, что все динамические свойства движений соответствуют свойствам преобразований секущих поверхностей. Таким образом, динамическая проблема сводится к проблеме преобразований плоскости вблизи неподвижной точки. Ясно также, что такое сведение произвольной динамической проблемы к проблеме преобразований всегда возможно по крайней мере вблизи периодического движения.

Каковы же теперь характеристические свойства преобразования, соответствующего динамической проблеме (3)?

Чтобы ответить на этот вопрос, заметим прежде всего, что при применении канонических переменных p, q, τ и секущей поверхности $\tau = 0$ площади не меняются при преобразовании T. В самом деле, течение оставляет объем неизменным, так как уравнения могут быть написаны следующим образом:

$$\frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dr}{d\tau} = 1 \quad [H = H(p, q, r)],$$

где

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) + \frac{\partial}{\partial r}(1) = 0.$$

При этом каждая точка движется с составляющей скорости, равной единице, по оси τ. Поэтому маленький цилиндр с основанием α в плоскости $\tau = 0$ и с постоянной маленькой высотой h должен все время иметь основание с одной и той же площадью. Произвольная площадь α в плоскости p, q должна поэтому равняться соответствующей площади $\overline{\alpha}$ в плоскости $\tau = 2\pi$, что и требовалось доказать.

Мы можем теперь дать несколько иную картину нашей проблемы на плоскости. В плоскости p, q каждая точка движется в каждый момент τ с составляющими скорости $-\partial H/\partial q$, $\partial H/\partial p$. Таким образом, определяется переменное течение на плоскости, которое такое же, как если бы плоскость $\tau = c$ двигалась в направлении оси τ со скоростью равной единице и каждая точка плоскости p, q оставалась бы на соответствующей кривой движения. Это переменное течение есть течение несжимаемой жидкости в плоскости, так как площадь всякой части остается постоянной. Мы видим также, что двумерное течение периодично с периодом 2π. Ранее введенное преобразование T имеет здесь следующий смысл. Точка P жидкости, которая при $\tau = 0$ занимает положение p_0, q_0, будет через 2π секунд находиться в p_1, q_1.

Обратно, каждое сохраняющее площадь периодическое течение этого рода соответствует динамической проблеме (3). В самом деле, дифференциальные уравнения такого течения могут быть написаны в виде

$$\frac{dp}{d\tau} = P, \quad \frac{dq}{d\tau} = Q, \quad \frac{dr}{d\tau} = 1 \quad [P = P(p, q, r), \quad Q = Q(p, q, r)],$$

где P и Q периодичны в r с периодом 2π и где

$$\frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial Q}{\partial q} = 0$$

в силу несжимаемости. Если теперь положить

$$H = \int\limits_{(0,0)}^{(p,q)} (Q\,dp - P\,dq),$$

то эти дифференциальные уравнения примут как раз вид (3).

Поэтому кажется очевидным, что всякое однозначное, сохраняющее площади преобразование T соответствует гамильтоновой проблеме типа (3). Этот факт сейчас же доказывается по крайней мере в том случае, когда функции, определяющие T, равно как и все их производные, непрерывны, и функция H того же рода (но, быть может, неаналитическая)[1].

Для динамических систем со многими степенями свободы соответствующее объемосохраняющее свойство таких преобразований T не вполне характерно.

Рассмотрим теперь какое-либо сохраняющее площади преобразование T вблизи неподвижной точки. В общем случае оно имеет один из следующих типов. Либо линейная часть T является вращением

$$p_1 = p_0 \cos\vartheta - q_0 \sin\vartheta, \quad q_1 = p_0 \sin\vartheta + q_0 \cos\vartheta,$$

где $\vartheta/2\pi$ иррационально, либо она имеет вид

$$p_1 = \lambda p_0, \quad q_1 = \frac{1}{\lambda} q_0,$$

где $\lambda^2 \neq 1$. Второй, значительно более простой тип будем называть неустойчивым, первый — устойчивым.

Во втором случае можно, по всей вероятности, при надлежащем выборе переменных p, q придать преобразованию T следующую нормальную форму:

$$p_1 = \lambda e^{p_0 q_0} p_0, \quad q_1 = \frac{1}{\lambda} e^{-p_0 q_0} q_0.$$

При этом допускаются все точечные преобразования, при которых соответствующие функции и все их производные непрерывны. Для исходной динамической проблемы прямые $p_0 = 0$ и $q_0 = 0$ соответствуют двум семействам асимптотических движений. Все другие близкие движения приближаются к периодическому движению с тем, чтобы потом опять удалиться от него.

[1]См. мою заметку «Замечание о роли геометрической теоремы Пуанкаре».

В первом случае также существует простая нормальная форма:

$$p_1 = p_0 \cos(\vartheta + r_0^2) - q_0 \sin(\vartheta + r_0^2),$$
$$q_1 = p_0 \sin(\vartheta + r_0^2) + q_0 \cos(\vartheta + r_0^2),$$

где $r_0^2 = p_0^2 + q_0^2$. Эта нормальная форма в общем случае достижима лишь формальным образом.

Мы видим, что и здесь существует единственный формальный инвариант ϑ. Преобразование можно с большой степенью точности рассматривать как подобное вращению вокруг точки $(0, 0)$ на зависящий от радиуса r_0 угол $\vartheta + r_0^2$.

Определение природы преобразования в этом случае является одной из интереснейших и труднейших проблем математики. Существенный вопрос заключается в следующем: остаются ли точки P, близкие к точке $(0, 0)$, все время близкими к ней при повторении преобразования T? Это — простейший случай проблемы динамической устойчивости, которая в настоящее время не разрешена.

В этом направлении я хочу сделать еще одно замечание. В силу природы преобразования в этом случае можно придти к заключению, что вблизи рассматриваемого периодического движения существует бесконечное множество периодических движений с той же постоянной энергии, совершающих много оборотов в течение своего периода([1]). Идея доказательства следующая (разумеется, я не могу привести всех деталей).

При больших n и в достаточно малой окрестности точки $(0, 0)$ преобразование T^n имеет вид вращения на угол $n(\vartheta + r_0^2)$ по крайней мере в том отношении, что вращение вдоль круга $r = r_0$ превосходит вращение при $r = 0$ более чем на 2π. Поэтому можно найти m такое, что если T^n дополнить поворотом на угол $2m\pi$, то вращение будет положительным при $r = r_0$ и отрицательным при $r = 0$.

Легко усмотреть, что при этом новом преобразовании T_m^n должна существовать по крайней мере одна замкнутая кривая C вокруг точки $(0, 0)$ такая, что на ней вращение равно нулю. В силу сохранения площадей, при T_m^n кривые C и $T_m^n(C)$ должны иметь по крайней мере одну общую точку P. Далее непосредственно доказывается, что каждый радиус пересекает C в одной и только одной точке. Поэтому и $T_m^n(C)$ обладает тем же свойством, так как каждая точка $T_m^n(Q)$ кривой $T_m^n(C)$ лежит на том же радиусе, что и Q. Следовательно, $T_m^n(P)$ должно совпадать с P.

Эта точка P соответствует периодическому движению, совершающему n оборотов в течение своего периода. А так как n может быть взято сколь угодно большим, то существует бесконечное множество таких периодических движений вблизи рассматриваемого периодического движения.

Так называемая последняя геометрическая теорема Пуанкаре была им установлена, чтобы доказать существование таких новых периодических движений. Наш метод показывает, однако, как во многих важнейших случаях можно избежать применения этой теоремы. Очень интересно отметить, что большинство неправильных попыток доказательства этой теоремы основано на соображениях совершенно того же рода, что и вышеприведенные. Эти попытки как раз потому не ведут к цели, что в общем случае теоремы Пуанкаре нам не известно, что C имеет нужный специальный вид.

Мы рассмотрим теперь вкратце следующие четыре примера динамических систем: 1) бильярдный шар на эллиптическом столе; 2) частицу на гладкой выпуклой поверхности; 3) частицу на гладкой замкнутой поверхности повсюду отрицательной кривизны и 4) задачу трех тел.

1. Бильярдный шар на эллиптическом столе.

Геодезические линии на эллипсоиде с полуосями a, b, c ($a > b > c > 0$) известны со времен Якоби. Они появляются также в качестве общего решения интегрируемой гамильтоновой проблемы, так как частица, движущаяся по гладкому эллипсоиду без воздействия внешних сил, должна следовать по геодезической линии. Если теперь меньшая полуось c будет стремиться к нулю, в то время как остальные полуоси будут оставаться постоянными, то эллипсоид перейдет в эллипс. Геодезические линии будут состоять из прямолинейных отрезков, и два таких отрезка, принадлежащие одной и той же геодезической линии и следующие друг за другом, должны встречать эллипс под одинаковыми углами. Но такие ломаные линии суть идеализированные пути бильярдного шара на эллипсе. Разумеется, и эта проблема должна быть «интегрируемой».

Геометрическое свойство, соответствующее этой интегрируемости, хорошо известно: два следующих друг за другом отрезка суть всегда касательные к одному и тому же коническому сечению, имеющему те же фокусы, что и данный эллипс. Поэтому все движения делятся на аналитические семейства по соответствующим коническим сечениям.

Возможные состояния движения соответствуют точкам эллипса, рассматриваемым совместно со всевозможными направлениями. Таким образом, если x, y — координаты точки эллипса, а ψ — направляющий угол, то каждая тройка (x, y, ψ) дает состояние движения. Совокупность таких состояний, очевидно, является топологическим тором, если отвлечься от тех состояний (x, y, ψ), при которых (x, y) лежит на самом эллипсе. Но для таких точек тройки (x, y, ψ) и (x, y, ψ_1) следует рассматривать как одно состояние, если ψ и ψ_1 соответствуют двум последовательным отрезкам. Поэтому многообразие состояний в этом случае замкнуто.

Мы имеем, таким образом, интегрируемую динамическую задачу с замкнутым многообразием состояний.

Здесь без всяких исключений можно определить преобразование T. Пусть ϑ будет переменная с периодом 2π, определяющая положение точки на эллипсе; φ — угол между направлением отскочившего бильярдного шара и положительным направлением касательной. Таким образом, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Для каждой пары (ϑ, φ) существует непосредственно следующая пара (ϑ_1, φ_1). Совокупность состояний движения (ϑ, φ), соответствующих удару о борт, образует секущую поверхность S для всех возможных кривых движения, за исключением двух движений катания вдоль кривой. Эта секущая поверхность имеет вид кольца. Мы можем написать

$$(\vartheta_1, \varphi_1) = T(\vartheta, \varphi).$$

Так как эта проблема интегрируема, то на S мы имеем замкнутые инвариантные аналитические кривые, преобразуемые сами в себя при T и при T^{-1}. Все начальные состояния, определяющие отрезки, касательные к одному и тому же коническому сечению с теми же фокусами, что и у края стола, принадлежат одной или двум таким замкнутым кривым. Топологическую природу этих кривых очень легко определить.

Сейчас же видно, что существуют четыре рода движений: a) всюду плотные периодические движения, соответствующие некоторым из этих кривых; b) всюду плотные рекуррентные, но не периодические движения, соответствующие другим кривым и образующие общий случай в смысле лебеговой меры; c) два семейства движений, асимптотически приближающихся к периодическому движению вдоль главной оси в обоих направлениях изменения времени; они соответствуют путям, проходящим через фокусы однажды и потому бесконечное множество раз; d) два движения катания по эллипсу в противоположных направлениях, которые также периодичны. Все периодические движения, за исключением движений вдоль короткой оси и двух движений катания, неустойчивы.

Таким образом, получается полное обозрение всех типов движения и их взаимоотношений, как и следовало ожидать в такой интегрируемой проблеме([2]).

2. Частица на гладкой, замкнутой, выпуклой поверхности. Многообразие состояний в этом случае, очевидно, замкнуто. Однако для таких общих выпуклых поверхностей нет оснований ожидать группировки движений в замкнутые семейства, как в случае эллипсоида.

Строение секущей поверхности и преобразования T здесь несколько сложнее, чем в предыдущей задаче. Прежде всего наглядным образом усматривается, что существует кратчайшая длина для замкнутой кривой, такой, что выпуклое тело пролезает сквозь эту кривую. Кривая G этой длины должна быть натянута вокруг поверхности, и в этом положении она образует замкнутую геодезическую линию. Состояния движения, соответствующие пересечению кривой G, образуют две секущие поверхности надлежащего типа с относящимися к ним преобразованиями T. Полное рассмотрение движений в произвольно заданном случае кажется почти невозможным, так как бесконечные процессы, которые при этом участвуют, нельзя фактически провести. В действительности мы могли бы получить очень хорошее представление об этом, если бы знали все инвариантные области на S.

Однако кажется почти несомненным, что в общем случае таких областей на S не существует. В этом случае можно доказать: a) что существует бесконечное плотное в себе множество периодических движений; b) что асимптотические движения всех мыслимых типов всюду плотны; c) что существуют движения, проходящие сколь угодно близко от любого состояния, и т. д. Таким образом, мы и здесь получим довольно удовлетворительный обзор типов движения и их взаимоотношений. Разумеется, здесь мы имеем дело с более сложным случаем, чем в случае интегрируемом([3]).

3. Частица на гладкой замкнутой поверхности повсюду отрицательной кривизны.

Чтобы построить такой пример, рассмотрим поверхность

$$z^2 = 1 - e^2 \sin^2 \frac{1}{2}x \sin^2 \frac{1}{2}y \qquad (e > 1),$$

где x, y, z — прямоугольные координаты и где мы принимаем, что все точки

$$(x + 2k\pi,\ y + 2l\pi) \qquad (k,\ l = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$$

соответствуют одной и той же точке поверхности. Это допущение законно, так как все преобразования

$$\overline{x} = x + 2k\pi, \quad \overline{y} = y + 2l\pi$$

переводят поверхность в самое себя. Фундаментальной областью является квадрат плоскости x, y:

$$0 \leqslant x < 2\pi, \quad 0 \leqslant y < 2\pi.$$

Дальнейшее рассмотрение немедленно показывает, что кривизна везде отрицательна, за исключением точек, лежащих над и под сторонами квадратов, и что поверхность имеет род 2. Далее, здесь существует одна и только одна геодезическая линия AB, соединяющая заданную точку A с заданной точкой B и непрерывно деформируемая в заданную кривую AB. Таким же образом усматривается, что существует одна и только одна замкнутая геодезическая линия заданного типа.

Этот пример имеет совершенно другой характер, чем два предыдущих, так как здесь не существует периодических движений устойчивого типа. Как легко доказать, в этом случае существует не только всюду плотное множество периодических движений, но и другие типы рекуррентных движений, а также движения, проходящие сколь угодно близко от любого состояния, и т. д. Здесь имеется алгоритм, дающий возможность обозреть все движения.

В этом случае кажется невозможным построить полную секущую поверхность с соответствующим точечным преобразованием T. Несмотря на это, природа движений известна почти в такой же степени, как в периодическом случае(4).

Три предыдущих примера были геодезического типа. Это не является, однако, действительным ограничением, так как все обычные динамические задачи могут быть формулированы как геодезические.

4. Задача трех тел.

Здесь мы будем считать данными десять постоянных интегрирования, соответствующих десяти известным интегралам. Мы допустим далее, что не все три постоянные площадей равны нулю.

Многообразие состояний надо здесь рассматривать как открытое семимерное, так как координаты не ограничены. Возможность соударения всех трех тел исключена, а соударение только двух тел, как впервые показал Сундман, является устранимой особенностью.

Важный факт состоит в следующем: кривая движения этого многообразия состояний, содержащая точку, для которой все три расстояния малы, должна при возрастании или убывании времени уходить в бесконечность. В единственном, с качественной точки зрения трудном случае полная энергия недостаточна для того, чтобы бесконечно удалить все тела друг от друга. В этом случае одно и только одно тело удаляется от двух других. На этих основаниях в многообразии состояний должны существовать три течения из бесконечности в бесконечность. Можно думать, что в общем случае все точки этого «моря» приносятся одним из этих течений, чтобы потом опять в одном из них уйти в бесконечность. Только некоторые периодические, рекуррентные и асимптотические к ним движения могут быть другого типа(5).

В этих четырех примерах я упомянул лишь о некоторых из важнейших до сих пор известных свойств. Более глубокое рассмотрение дало бы нам дальнейшие результаты, касающиеся природы и распределения возможных движений.

После этих подготовительных замечаний мы можем формулировать некоторые, в настоящее время нерешенные проблемы теоретической динамики. Вначале мы говорили о связи между периодичностью и устойчивостью. Однако такая связь не имеет места, если идею периодичности не обобщить надлежащим образом.

Существуют два рода таких обобщений. Вспоминая наш первый пример, легко понять оба эти рода обобщений.

Во-первых, мы заметим, что с течением времени каждое движение приближается к периодическим по крайней мере в этом специальном примере. Если многообразие состояний замкнутое, то существует замкнутое множество M_1, к движениям которого приближаются все остальные движения. Чтобы точнее определить M_1, рассмотрим небольшую частицу([6]) в M. Может случиться, что с течением времени эта частица никогда не вернется к ее исходному положению. Соответствующие движения называются тогда «блуждающими»([7]). Множество M_1 есть как раз множество неблуждающих движений. Теперь мы можем определить движения M_2, не блуждающие относительно M_1. Таким образом, возникает счетная, вполне упорядоченная последовательность M, M_1, M_2, $\ldots$, оканчивающаяся на некотором $M_r = M_{r+1}$, где r — порядковое число в смысле Кантора. В течение всякого движения точка почти всегда находится вблизи этого множества центральных движений([7]). Если многообразие состояний двухмерно, то легко доказать, что $r \leqslant 2$. Однако при большем числе измерений n я не думаю, чтобы было $r \leqslant n$.

Поэтому я формулирую следующим образом нашу первую проблему.

Проблема I. *Построить динамическую задачу с трехмерным замкнутым многообразием состоянии таким образом, чтобы порядковое число r центральных движений было > 3.*

Существуют другие важные проблемы, касающиеся строения центральных движений.

Второе обобщение периодических движений возникает так. Никакое периодическое движение не приближается к другому движению. Мы можем называть «рекуррентными» те движения, пути которых плотны в *минимальном* замкнутом множестве других движений, не содержащем никаких подмножеств того же рода. Существование таких рекуррентных движений и их квазипериодические свойства легко доказать. Основная теорема гласит, что всякое устойчивое движение равномерно часто подходит близко к таким рекуррентным движениям([8]).

Существует много важных вопросов о строении рекуррентных движений. Но первый и важнейший вопрос относится к одним периодическим движениям и может быть сформулирован так.

Проблема II. *В случае гамильтоновых задач* (2) *с двумя степенями свободы, с замкнутым многообразием состояний и с наличием хотя бы одного устойчивого периодического движения доказать всюду плотность периодических движений.* (Постоянная энергия имеет здесь заданное значение.)

Если это предположение правильно, то всякое движение такой гамильтоновой системы всегда совершается вблизи периодических движений. Я не думаю, чтобы это же имело место в случае многих степеней свободы. Я предполагаю, что рекуррентные движения всюду плотны. Поэтому и формулирую третью проблему следующим образом.

Проблема III. *В случае любой гамильтоновой задачи с замкнутым многообразием состояний доказать всюду плотность рекуррентных движений.*

Существует еще другой вопрос, касающийся периодических движений: можно ли найти целесообразное обобщение последней теоремы Пуанкаре на более общие случаи?

Мы должны здесь сделать несколько подготовительных замечаний. В первоначальной форме этой теоремы речь идет о преобразовании T двумерного кольца в самого себя. Для применения этой теоремы к какой-либо динамической проблеме необходимо было поэтому найти полную секущую поверхность S, ограниченную двумя периодическими кривыми движения. Но в случае многих степеней свободы такой секущей поверхности не существует, если нет замкнутого инвариантного семейства кривых движения. Однако существования такого семейства нельзя ожидать. Для возможности динамических приложений мы должны поэтому найти обобщение теоремы, относящееся лишь к преобразованию вблизи неподвижной точки. Такие преобразования всегда имеются.

Мы должны теперь определить также тип преобразований T, возникающих из динамических задач. Свойство сохранения площадей, характеристическое в простейшем случае, допускает обобщение, ибо, как было замечено выше, T является в общем случае объемосохраняющим. Однако это свойство никоим образом не является характеристическим. Чтобы определить характеристическое свойство, рассмотрим какую-либо геодезическую проблему. На n-мерной поверхности, по которой движется частица, мы можем построить $(n-1)$-мерную поверхность таким образом, чтобы рассматриваемая замкнутая геодезическая линия пересекала ее в некоторой точке. Может оказаться, что поблизости существует одна и только одна геодезическая линия, соединяющая точку $(x_1, \dots, x_{n-1})$ этой поверхности с ближайшей следующей точкой $(x'_1, \dots, x'_{n-1})$ этой же поверхности. Будем тогда рассматривать $(x_1, \dots, x_{n-1}, x'_1, \dots, x'_{n-1})$ как координаты точки на обычной секущей поверхности; энергия частицы H, а потому и ее скорость имеют здесь заданное значение, в силу чего многообразие состояний $(2n-1)$-мерно. При преобразовании T точка $(x_1, \ldots, x'_{n-1})$ секущей поверхности переходит в точку $(x'_1, \ldots, x''_{n-1})$. Длина $\Omega\,(x_1, \ldots, x'_{n-1})$ геодезической линии, соединяющей $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ с $(x'_1, \ldots, x'_{n-1})$, обладает здесь экстремальным свойством:

$$d\left[\Omega(x_1, \ldots, x'_{n-1}) + \Omega(x'_1, \ldots, x''_{n-1})\right] = 0$$

при варьировании переменных $x'_1, \ldots, x'_{n-1}$. Эти $n-1$ уравнений определяют координаты $x''_1, \ldots, x''_{n-1}$ через $x_1, \ldots, x'_{n-1}$ и тем самым преобразование T.

Пользуясь конечным числом таких вспомогательных поверхностей можно следующим образом определить преобразование T в геодезической проблеме. Существует k функций

$$\Omega_1(x_1, \ldots, x'_{n-1}),\ \Omega_2(x'_1, \ldots, x''_{n-1}),\ \ldots,\ \Omega_k(x_1^{(k-1)}, \ldots, x_{n-1}^{(k)})$$

таких, что уравнения

$$d(\Omega_1 + \cdots + \Omega_k) = 0$$

имеют место и определяют преобразование T. Здесь варьируются все переменные, кроме $x_1, \ldots, x_{n-1}$ и $x_1^{(k)}, \ldots, x_{n-1}^{(k)}$.

Преобразования T такого рода будем называть «консервативными преобразованиями». Возникает следующая проблема.

Проблема IV. *При заданном консервативном преобразовании T доказать существование соответствующей гамильтоновой системы и, в частности, системы геодезического типа.*

Если это предположение правильно, то действительное обобщение последней теоремы Пуанкаре должно в качестве эквивалента давать теорему о существовании других замкнутых геодезических линий вблизи данной замкнутой геодезической линии. Рассматриваемая замкнутая геодезическая линия, разумеется, должна быть здесь устойчивого типа.

Вопрос о возможном обобщении теоремы Пуанкаре мы можем теперь формулировать следующим образом.

Проблема V. *Пусть T — какое-либо консервативное преобразование с неподвижной точкой P устойчивого типа. Определить условия, при которых вблизи P существует бесконечное множество точек, неподвижных при преобразованиях T^m.*

Наконец, я должен сформулировать важную и весьма трудную проблему устойчивости в ее простейшей форме.

Проблема VI. *В случае двух степеней свободы доказать существование динамических систем, обладающих периодическим движением устойчивого типа, которое, однако, в действительности неустойчиво.*

Все вышеприведенные проблемы касаются не специальных динамических систем, а общих. Существует много других интересных проблем, касающихся некоторых важных специальных систем. Здесь я хочу отметить лишь две такие проблемы.

Проблема VII. *В общей задаче трех тел определить топологическую природу многообразия состояний.*

Проблема VIII. *Доказать неинтегрируемость задачи трех тел вблизи периодического движения устойчивого типа.*

Следует заметить, что результаты Пуанкаре доказывают лишь невозможность некоторой равномерной интегрируемости при переменных массах. По моему мнению, вышеприведенные проблемы суть именно те, от решения которых зависит возможность значительного дальнейшего продвижения.

О существовании областей неустойчивости в динамике

§ 1. Пусть нам дана динамическая система с двумя степенями свободы. Будем рассматривать движения, соответствующие какому-нибудь определенному значению полной энергии. В этом случае дифференциальные уравнения движения можно написать в следующем виде:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H(p,\, q,\, t)}{\partial q}, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H(p,\, q,\, t)}{\partial p}. \tag{1}$$

В частности, в непосредственной окрестности периодического движения можно рассматривать независимую переменную t как и периодическую (угловую) координату периода 2π, а H — как периодическую функцию этой переменной, причем само периодическое движение будет соответствовать траектории $p = q = 0$ в пространстве $(p,\, q,\, t)$.

§ 2. Следуя методу, примененному в работах Пуанкаре[1], Леви–Чивита[2] и моих[3], изучение движений, соседних с периодическим движением, приводится к изучению некоторого точечного преобразования T плоскости в себя. Обозначим через

$$p(p_0,\, q_0,\, t) \;\text{ и }\; q(p_0,\, q_0,\, t)$$

координаты p, q в момент t того движения, для которого при $t = 0$ p и q обращаются соответственно в p_0 и q_0. Если H представляет собою аналитическую функцию своих аргументов, то обе эти функции p и q будут также аналитическими относительно p_0, q_0, t.

По прошествии промежутка времени, равного 2π, движущаяся точка окажется снова в плоскости $t = 0$[4] с значениями координат p и q, равными

$$\begin{aligned} p_1 &= p(p_0,\, q_0,\, 2\pi) \equiv \varphi(p_0,\, q_0), \\ q_1 &= q(p_0,\, q_0,\, 2\pi) \equiv \psi(p_0,\, q_0). \end{aligned}$$

[1] См. его «Méthodes nouvelles de la mécanique céleste», I, III.

[2] См., например, *Levi–Civita*, «Sopra alcuni criteri di instabilita», Annali di Mathematice, Ser. III, т. V. 1901.

[3] «Surface Transformations and Their Dynamical Applications», Acta Mathematica, т. XLIII, 1922.

Отметим здесь, что почти все рассуждения, содержащиеся в этом мемуаре, остаются справедливыми в случае, когда T выражается непрерывными функциями, имеющими непрерывные производные любого порядка.

[4] Мы рассматриваем все точки $(p,\, q,\, t + 2k\pi)$ $(k = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \dots)$ как одну точку.

Таким образом, преобразование T, переводящее каждую точку p, q в точку p_1, q_1, определяется формулами

$$p_1 = \varphi(p, q), \quad q_1 = \psi(p, q). \tag{2}$$

Легко показать, что это преобразование T будет прямым, одно-однозначным и аналитическим в окрестности инвариантной точки $p=0$, $q = 0$, которая соответствует данному периодическому движению, и что кроме того это преобразование сохраняет площади:

$$\frac{\partial p_1}{\partial p}\frac{\partial q_1}{\partial q} - \frac{\partial p_1}{\partial q}\frac{\partial q_1}{\partial p} \equiv 1. \tag{3}$$

§ 3. С другой стороны, если нам дано преобразование T, обладающее вышеупомянутыми свойствами, то всегда существуют соответствующие этому преобразованию динамические системы вида (1), для которых H будет функцией класса C_∞,[1] если не аналитической([1]).

§ 4. Предположим теперь, что периодическое движение $p = q = 0$ будет общего устойчивого типа. В этом случае характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \left(\frac{\partial\varphi(0, 0)}{\partial p} + \frac{\partial\psi(0, 0)}{\partial q}\right)\lambda + 1 = 0 \tag{4}$$

будет иметь два комплексных сопряженных корня

$$\lambda' = e^{\sigma\sqrt{-1}}, \quad \lambda'' = e^{-\sigma\sqrt{-1}},$$

где σ — такое число, что отношение $\dfrac{\sigma}{2\pi}$ иррационально. Ряды, формально выражающие координаты p и q в функции от t, будут в этом случае тригонометрического типа.

При помощи преобразования T мы можем поставить основную проблему устойчивости в следующей форме: будем повторять бесконечно преобразование T (или T^{-1}) и рассмотрим последовательные образы некоторой точки P, находящейся от инвариантной точки $(0, 0)$ на расстоянии, меньшем δ. Всегда ли можно выбрать δ настолько малым, чтобы все эти образы лежали на расстоянии, меньшем $\varepsilon > 0$ от этой точки, где ε — произвольно заданное, сколь угодно малое число? Если это так, то движение будет устойчивым в строгом смысле этого слова. До сих пор эта весьма трудная проблема еще не разрешена во всей своей общности.

---

[1]То есть функция H и все ее частные производные (любого порядка) непрерывны.

Как отметил еще Пуанкаре[1], для того, чтобы в каком-нибудь данном случае имелась устойчивость в указанном выше смысле, необходимо и достаточно, чтобы вокруг инвариантной точки существовали инвариантные кривые[2] сколь угодно малого диаметра. В этом случае мы можем, очевидно, найти бесконечную последовательность $f_1, f_2, \ldots$ инвариантных кривых, сходящуюся к этой точке.

§ 5. Я показал (см. цитированную уже статью в «Acta Mathematica», что применением формальных рядов можно всегда привести преобразование T к нормальному виду:

$$\left.\begin{aligned} \overline{p_1} &= \overline{p}\cos\left[\sigma + c(\overline{p}^2 + \overline{q}^2)^m\right] - \overline{q}\sin\left[\sigma + c(\overline{p}^2 + \overline{q}^2)^m\right], \\ \overline{p_1} &= \overline{p}\sin\left[\sigma + c(\overline{p}^2 + \overline{q}^2)^m\right] + \overline{q}\cos\left[\sigma + c(\overline{p}^2 + \overline{q}^2)^m\right], \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где, вообще говоря, $m = 1$, $c \neq 0$.

В интегрируемом случае ряды $\overline{p}$, $\overline{q}$ будут сходящимися и мы будем иметь аналитическое семейство инвариантных кривых f, а именно кривых $\overline{p}^2 + \overline{q}^2 = \text{const}$. Это, следовательно, будет простым примером случая, когда имеется устойчивость в строгом смысле слова.

§ 6. Мною был изучен также вид инвариантных кривых в общем неинтегрируемом случае при единственном предположении, что $c \neq 0$. При подходящем выборе координат p, q будет существовать круг с центром в начале координат, такой, что внутри этого круга преобразование T вращает каждое радиальное направление влево или вправо, в зависимости от того, будет ли $c > 0$ или $c < 0$, тогда как обратное преобразование T^{-1} поворачивает эти векторы в противоположном направлении. Рассматривая только внутренность такого круга, я доказал, между прочим, следующие факты:

1. Всякая инвариантная кривая f выражается уравнением вида $r = f(\vartheta) > 0$ (r, ϑ — полярные координаты), где $f(\vartheta)$ есть непрерывная периодическая функция от ϑ периода 2π, и при этом такая, что отношение

$$\frac{f(\vartheta_1) - f(\vartheta_2)}{\vartheta_1 - \vartheta_2}$$

ограничено для всех ϑ_1, ϑ_2.

2. Всякой инвариантной кривой соответствует некоторый коэффициент вращения τ, дающий в известном смысле среднее приращение, которое получает угловая координата ϑ точек (r, ϑ) этой кривой при

[1] Méthodes nouvelles de la mécanique céleste, т. III, стр. 149–151.

[2] Кривыми мы называем границы односвязного открытого множества.

преобразовании T.[1] Если $c > 0$[2], то инвариантная кривая f_1, будет содержать внутри себя инвариантную кривую f_2 при $\tau_1 > \tau_2$, и, наоборот, если f_2 находится внутри кривой f_1, то будем иметь $\tau_1 > \tau_2$.

3. Один и тот же коэффициент τ не может принадлежать двум различным кривым f_1 и f_2, за исключением того случая, когда $\tau = \dfrac{2m\pi}{n}$, где m и n — целые числа. В этом случае кривые, соответствующие этому значению τ, будут обязательно иметь одну или несколько общих точек; эти общие точки будут инвариантными относительно преобразования T^n, и приращение ϑ для них при этом преобразовании будет равно $2m\pi$.

4.[3] Всякая кривая, принадлежащая значению $\dfrac{2m\pi}{n}$ коэффициента вращения, будет или сама аналитической, или состоять из конечного числа дуг, аналитических во всех точках, за исключением, может быть, своих концов, где они, однако, остаются класса C_∞. Эти концы аналитических дуг представляют собою инвариантные точки неустойчивого типа относительно преобразования T^n; точки аналитической дуги при итерации преобразования T^n стремятся асимптотически к одному из этих концов (а при итерации T^{-n} к другому).

5. Совокупность инвариантных кривых f и совокупность их коэффициентов вращения τ замкнуты и содержат всегда соответственно инвариантную кривую $r = 0$ и ее коэффициент вращения $\tau = \sigma$.

§ **7.** Как мы видим, могут представиться разные случаи: a) не существует инвариантных кривых f, кроме кривой $r = 0$; b) такие кривые существуют, и соответствующие значения коэффициентов τ заполняют некоторый интервал (σ, μ); и, наконец, c) такие кривые существуют, но их коэффициенты вращения не заполняют интервала.

В первом случае мы имеем область неустойчивости около инвариантной точки, которая будет неустойчивой, согласно критерию Пуанкаре. В третьем случае мы будем иметь кольцеобразные зоны неустойчивости между каждыми двумя последовательными инвариантными кривыми f_1 и f_2, т. е. такими, что не существует никакого значения τ между τ_1 и τ_2; напомним, что совокупность значений τ замкнута. Эти кольцеобразные зоны неустойчивости обладают некоторыми замечательными свойствами, напоминающими в значительной мере свойства зоны неустойчивости для первого случая. В частности, можно найти

---

[1]Точнее, после n последовательных повторений преобразования T это приращение (по исследованиям Пуанкаре) будет всегда лежать между пределами $n\tau - 2\pi$ и $n\tau + 2\pi$.

[2]Это предположение не ограничивает общности, потому что величины c для T и для T^{-1} будут всегда противоположных знаков.

[3]В случае, если преобразование T принадлежит классу C_∞, но не является аналитическим, формулировка свойства (4) должна быть надлежащим образом изменена.

точки в любой окрестности какой-нибудь точки одной границы кольцеобразной зоны неустойчивости, которые после нескольких итераций преобразования T или T^{-1} окажутся в окрестности другой границы этой области.

До сих пор ни разу не было доказано существование таких кольцеобразных зон неустойчивости. Главной целью этой статьи будет доказательство их существования, при условии, что преобразование T — аналитическое и что функция H принадлежит к классу C_∞, хотя, быть может, и не является аналитической.

Если бы можно было пойти далее и доказать существование такой зоны вокруг начала (т. е. для случая, когда одна из кривых f_1, f_2 обращается в кривую $r = 0$), то проблема устойчивости была бы разрешена в отрицательном смысле.

§ 8. Для того, чтобы доказать только что высказанное утверждение, рассмотрим в первую очередь сложное преобразование вида $T_k = T_0 R_k$. Здесь T_0 обозначает преобразование (5) с $m = 1$, $0 < c < \pi$; R_k есть преобразование, зависящее от параметра k, которое при $k = 0$ обращается в тождественное преобразование и при всех k сохраняет площади и имеет в качестве инвариантных точек начало координат и все точки окружности $r = 1$. Мы определим сейчас преобразование R_k совершенно точно.

Применяя видоизмененные полярные координаты $\rho = r^2$, ϑ, мы можем написать преобразование T_0 в виде:

$$\rho_1 = \rho, \quad \vartheta_1 = \vartheta + \sigma + c\rho. \tag{6}$$

Условие для того, чтобы какое-нибудь преобразование, выраженное посредством этих координат, сохраняло площади, заключается в том, чтобы соответственный функциональный определитель был равен единице(^{2}).

Выберем постоянную σ таким образом, чтобы она была отрицательной, но большей, чем $-c$ $(-c < \sigma < 0)$. В этом случае преобразование T_0 оставляет инвариантным не только начало, но и все точки окружности $\rho = -\frac{\sigma}{c} < 1$ в круговой области $\rho \leqslant 1$.

Определим теперь преобразование R_k уравнениями[1]:

$$p_1 = p + k\frac{\partial u}{\partial q_1}(p, q_1), \quad q = q_1 + k\frac{\partial u}{\partial p}(p, q_1), \tag{7}$$

[1]Относительно применения уравнений этого типа см. статью E. Goursat «Sur les transformations ponctuelles qui conservent les volumes», Bulletin des Sciences Mathématiques, sér. 3, t. V, 1901.

где
$$u(p,\, q_1) \equiv -(p^2 + q_1^2 - 1)^2 (p^2 + q_1^2)^2 p.$$

Для k достаточно малых мы видим, что это преобразование является прямым, одно-однозначным и аналитическим, и что оно приводится к тождественному преобразованию для $k = 0$. Кроме того, начало координат и точки окружности $\rho = 1$ остаются инвариантными, и площади сохраняются при преобразовании R_k для всех значений k, что можно показать непосредственным вычислением функционального определителя.

Следовательно, преобразования R_k действительно обладают всеми указанными выше свойствами.

Если мы выразим переменные p_1, q_1 в функции от p, q, то мы получим следующие ряды:

$$p_1 = p + k\frac{\partial u}{\partial q}(p,\, q) + \ldots,\quad q_1 = q - \frac{\partial u}{\partial p}(p,\, q) + \ldots\,(^3) \tag{8}$$

Выраженные через координаты ρ, ϑ, эти ряды принимают следующий вид:

$$\rho_1 = \rho + 2k\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \ldots,\quad \vartheta_1 = \vartheta - 2k\frac{\partial u}{\partial \rho} + \ldots \tag{9}$$

Мы не будем применять эти последние уравнения в непосредственной окрестности начала координат.

§ 9. Рассмотрим теперь сложное преобразование $T_k = T_0 R_k$. Очевидно, что при k достаточно малых это преобразование удовлетворяет следующим условиям:

a) T_k — прямое, одно-однозначное, аналитическое преобразование относительно переменных p, q; оно изменяется аналитически с изменением параметра k;

b) оно сохраняет площади;

c) оно имеет начало координат в качестве простой инвариантной точки; при этом разложение по степеням p, q совпадает с таковым для T_0 до членов третьего порядка включительно;

d) окружность $\rho = 1$ является для преобразования T_k инвариантной кривой; при преобразовании T_k все точки этой окружности передвигаются вдоль нее на угол, равный $\sigma + c < 2\pi$;

e) при $k = 0$, T_k приводится к преобразованию T_0, инвариантными точками которого являются начало координат и все точки окружности $\rho = -\frac{\sigma}{c} < 1$.

§ 10. Докажем теперь два других свойства вспомогательного преобразования T_k, а именно:

f) T_k поворачивает радиальные направления налево от этих направлений по крайней мере при очень маленьких k;

g) в круге $\rho \leqslant 1$ преобразование T_k $(k \neq 0)$ имеет еще только две инвариантные точки, кроме начала координат. Эти инвариантные точки простые и изменяются аналитически с изменением k. При $k = 0$ они приводятся к точкам $\left(-\frac{\sigma}{c}, 0\right)$, $\left(-\frac{\sigma}{c}, \pi\right)$ (в полярных координатах); первая из этих точек устойчивого, а вторая — неустойчивого типа.

Для того, чтобы доказать утверждение f, заметим, что при малых k радиальные направления поворачиваются указанным образом по крайней мере для точек, близких к началу координат, потому что разложения p_1, q_1 в ряды по степеням p, q имеют члены не выше четвертой степени, не зависящие от k, и изменяются как аналитические функции от k. С другой стороны, угол, на который поворачивается радиальное направление влево, будет аналитической функцией от p, q, исключая начало координат; эта функция положительна при $k = 0$ (за исключением начала координат) и, следовательно, будет положительной вне некоторого круга $\rho = \delta > 0$ при достаточно малых k.

Для доказательства утверждения (g) нужно рассмотреть инвариантные точки преобразования T_k. Очевидно, что такие точки при малых k могут существовать только в окрестности точки $\rho = 0$ или окружности $\rho = -\frac{\sigma}{c}$, дающих инвариантные точки преобразования T_0. Точка $\rho = 0$ является «простой» инвариантной точкой преобразования T_0. Следовательно, при малых k всякая инвариантная точка преобразования T_k, лежащая в окрестности точки $\rho = 0$, получается посредством аналитической вариации из начала координат. Но так как начало координат само есть инвариантная точка преобразования T_k при всяком k, то отсюда следует, что T_k не имеет никаких других инвариантных точек в окрестности начала координат, кроме самого начала.

Для того, чтобы рассмотреть другие инвариантные точки, мы применим видоизмененные полярные координаты ρ, ϑ. Преобразование T_k может быть записано в этих координатах в виде:

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 &= \rho + 2k\frac{\partial u^*}{\partial \vartheta}(\rho,\, \vartheta + \sigma + c\rho) + \ldots, \\ \vartheta_1 &= \vartheta + \sigma + c\rho - 2k\frac{\partial u^*}{\partial \rho}(\rho,\, \vartheta + \sigma + c\rho) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где

$$u^*(\rho,\, \vartheta) \equiv u(p,\, q).$$

В инвариантной точке имеем $\rho_1 = \rho$, $\vartheta_1 = \vartheta$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial \vartheta}(\rho,\ \vartheta + \sigma + c\rho) + kA_1 + \ldots = 0, \\ \sigma + c\rho - 2k\frac{\partial u^*}{\partial \rho}(\rho,\ \vartheta + \sigma + c\rho) + k^2B_1 + \ldots = 0, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ суть аналитические функции от ρ и ϑ, периодические периода 2π относительно ϑ; кроме того эти ряды сходятся равномерно для тех значений ρ и ϑ, которые мы здесь рассматриваем (т. е. $0 \leqslant \delta \leqslant \rho \leqslant 1$, ϑ произвольно).

Но при нашем выборе функции u имеем:

$$u^*(\rho,\ \vartheta) \equiv -(1-\rho)^2\rho^{5/2}\cos\vartheta.$$

Следовательно, первое из уравнений (11) показывает нам, что для всякого значения ρ, близкого к $-\frac{\sigma}{c}$, существуют два соответствующих значения ϑ, удовлетворяющих этому уравнению, одно из которых близко к нулю, а другое — к π:

$$\vartheta' = -\sigma - c\rho + kf_1(\rho) + \ldots,\quad \vartheta'' = \pi - \sigma - c\rho + kg_1(\rho) + \ldots \tag{12}$$

Здесь $f_1, f_2, \ldots, g_1, g_2, \ldots$ суть аналитические функции ρ.

Подставляя эти значения ϑ во второе уравнение (11), мы получим два уравнения, имеющих следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \sigma + c\rho + kC_1(\rho) + \ldots = 0, \\ \sigma + c\rho + kD_1(\rho) + \ldots = 0, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где $C_1, C_2, \ldots, D_1, D_2, \ldots$ — аналитические функция от ρ.

Из этих уравнений получаем соответственные значения ρ' и ρ'' координаты ρ:

$$\left.\begin{aligned} \rho' = -\frac{\sigma}{c} + kE_1 + \ldots, \\ \rho'' = -\frac{\sigma}{c} + kF_1 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Здесь коэффициенты $E_1, E_2, \ldots, F_1, F_2, \ldots$ — постоянные числа.

Следовательно, для $k \neq 0$ и малых ρ существуют как раз две инвариантные точки, отличные от начала координат, которые изменяются аналитически с изменением k и приводятся при $k = 0$ к $\left(-\frac{\sigma}{c},\ 0\right)$ и $\left(-\frac{\sigma}{c},\ \pi\right)$ соответственно.

Остается рассмотреть характеристические уравнения этих двух инвариантных точек. Если мы положим $k > 0$, то первое уравнение, которое можно написать в виде

$$\lambda^2 - 2\left[1 + kc\left(1 + \frac{\sigma}{c}\right)^2\left(-\frac{\sigma}{c}\right)^{5/2} + \ldots\right]\lambda + 1 = 0(^4),$$

будет иметь два вещественных корня $\lambda_1' < 1$ и $\lambda_1'' > 1$. Соответственная инвариантная точка будет, следовательно, простой и формально неустойчивой. Второе уравнение будет иметь следующий вид:

$$\lambda^2 - 2\left[1 - kc\left(1 + \frac{\sigma}{c}\right)^2\left(-\frac{\sigma}{c}\right)^{5/2} + \ldots\right]\lambda + 1 = 0.$$

Это уравнение имеет два комплексных сопряженных корня. Соответственная инвариантная точка будет также простой, но устойчивой с формальной точки зрения, во всяком случае, если мы выберем k таким образом, что эти корни не будут корнями n-й степени из единицы.

Следовательно, определенное таким образом преобразование T_k будет обладать всеми указанными свойствами.

§ **11.** Но при малых k T_k имеет по крайней мере две инвариантные кривые, а именно, $\rho = 0$ и $\rho = 1$, с коэффициентами вращения σ и $\sigma + c$ соответственно. Следовательно, или существует система промежуточных инвариантных кривых, соответствующих всем числам интервала $\sigma \leqslant \tau \leqslant \sigma + c$, или же существуют кольцеобразные зоны неустойчивости, что нам требуется доказать. Нам остается, следовательно, рассмотреть только первую возможность. В этом случае должна существовать *по крайней мере* одна инвариантная кривая f_0, соответствующая промежуточному значению $\tau = 0$; эта кривая будет обязательно содержать простую инвариантную точку неустойчивого типа.

Я утверждаю, что не может существовать только одна кривая этого рода.

В противном случае эта кривая содержала бы две из асимптотических ветвей, исходящих из неустойчивой точки, и мы имели бы одну из двух возможностей, показанных на рис. 15.

I_1 и I_2 обозначают соответственно неустойчивую и устойчивую инвариантную точку; асимптотическая кривая f_0 встречает всякий луч, исходящий из начала координат, в одной точке, и направление движения точек этой кривой показано на рисунке стрелками; в самом деле, около точки I_1 всякое радиальное направление поворачивается налево. Но в рассматриваемом случае инвариантные кривые f при стремлении коэффициента τ к нулю должны приближаться равномерно к f_0, что невозможно, потому что такая инвариантная кривая не может пересекать две свободные асимптотические ветви, исходящие на точки I.

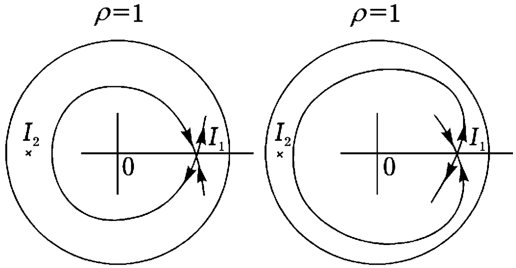

Рис. 15

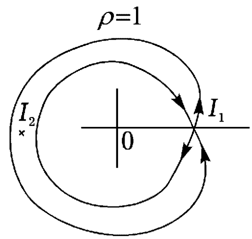

Рис. 16

В этих условиях, очевидно, остается только одна возможность, а, именно, мы будем иметь две инвариантные асимптотические кривые f_1 и f_2, образуемые четырьмя асимптотическими ветвями, исходящими из I_1 и совпадающими попарно. Этот случай изображен на рис. 16.

Можно было бы надеяться доказать непосредственным вычислением невозможность этого предположения. В самом деле, представляется почти невероятным, чтобы эти ветви совпали указанным выше образом. Однако такое вычисление, по-видимому, было бы сложным, и я предпочитаю обойти трудности этого вычисления способом, изложенным в следующем параграфе.

§ **12.** Мы предположим сперва, что T_k имеет две инвариантные кривые, подобные тем, которые изображены на рис. 16.

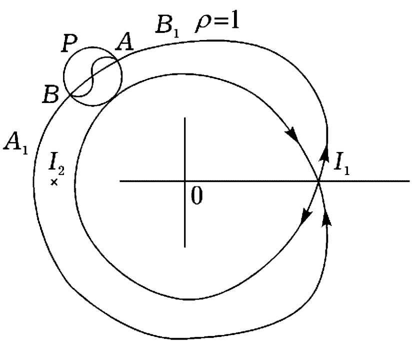

Рис. 17

Рассмотрим теперь сложное преобразование $T_k^* = T_k S$, где S определяется как тождественное преобразование вне малой окружности γ около некоторой точки p на внешней асимптотической ветви (рис. 17). Внутри γ S есть вращение вокруг p на переменный, но малый угол, обращающийся в нуль в центре и на окружности круга γ. Очевидно, можно выбрать преобразование S класса C_∞ таким образом, что S будет вращать радиальные направления налево на сколь угодно малый угол. Кроме того S будет сохранять площади. Сложное преобразование T_k^* будет обладать подобными же свойствами.

Но такое преобразование T^* класса C_∞ будет обладать всегда асимптотическими ветвями класса C_∞, как в случае аналитического преобразования, с той только очевидной разницей, что эти ветви будут класса C_∞, но не обязательно аналитическими[1]. В рассматриваемом случае мы можем даже найти эти ветви непосредственно. В самом деле, эти ветви будут одинаковыми для T^* и для T в окрестности инвариантной точки I_1. При последовательных итерациях преобразования T^* верхняя часть внешней ветви продолжается тем же способом, что и для T, во всяком случае до точки A, где эта ветвь встречает окружность γ. Но если мы повторим преобразование T^* еще один раз, то мы должны произвести сначала преобразование T, которое продолжит нашу ветвь до A_1, и затем S, которое преобразует дугу AB внутри круга, превратив ее в новую, которая пересечет AB только один раз.

С другой стороны, последовательными итерациями преобразования $T^{*-1} = S^{-1}T_k^{-1}$ можно продолжить таким же образом нижнюю часть внешней ветви до точки B, где эта ветвь встречает γ. Если мы теперь повторим еще раз T^{*-1}, то мы должны начать с преобразования S^{-1}, которое не изменит уже имеющуюся часть кривой, и произвести затем преобразование T^{-1}, которое распространит ее до точки $B_{-1} = T^{-1}(B)$ вдоль той же асимптотической кривой, что и T.

Следовательно, обе внешние асимптотические ветви преобразования T^* пересекаются в точке P.

§ 13. Это преобразование T^* обладает всеми упомянутыми свойствами преобразования T, с единственным исключением, что нужно заменить условия аналитичности условием принадлежности к классу C_∞. Однако для этого преобразования асимптотические ветви не совпадают попарно.

Следовательно, для таких преобразований класса C_∞ существуют кольцеобразные зоны неустойчивости.

§ 14. Мы покажем теперь, что то же заключение остается справедливым и для аналитических преобразований.

Заметим, что мы можем построить преобразования $T_{0,t}$, $R_{k,t}$, S_t, обладающие следующими свойствами:

a) при $t = 0$ эти преобразования обращаются в тождественные, а при $t = 2\pi$ в T_0, R_k, S соответственно;

b) эти преобразования прямые, однозначные, класса C_∞ относительно p, q, t и при этом аналитические относительно t, и сохраняют площади при всех k;

c) они оставляют инвариантными начало координат $\rho = 0$ и окружность $\rho = 1$ при любом k.

[1] Я говорю здесь только о простой инвариантной точке неустойчивого типа. См. мою уже цитированную статью в § 33–41.

В самом деле, мы можем определить преобразование $T_{0,t}$ следующими формулами:

$$\rho_1 = \rho, \quad \vartheta_1 = \vartheta + (\sigma + c\rho)\frac{t}{2\pi}.$$

Это преобразование, очевидно, будет обладать всеми тремя указанными свойствами. Подобным же образом мы можем определить $R_{k,t}$ слегка видоизмененными уравнениями (1):

$$p_1 = p + \frac{kt}{2\pi}\frac{\partial u(p,\, q_1)}{\partial q_1}, \quad q = q_1 + \frac{kt}{2\pi}\frac{\partial u(p,\, q_1)}{\partial p},$$

с той же функцией $u(p,\, q)$. Что касается S_t, то мы определим его так же, как S, но уменьшив вращение в круге γ в отношении $t : 2\pi$.

Сложное преобразование $T_t^* = T_{0,t}R_{k,t}S_t$ будет тогда также обладать свойствами (a), (b), (c) (причем, разумеется, $T_{2\pi}^* = T^*$).

Применим теперь геометрическую интерпретацию, а, именно, будем рассматривать переменные p, q, t как прямоугольные координаты точки в пространстве.

При изменении t от 0 до 2π всякая точка $(p,\, q,\, 0)$ на плоскости $t = 0$ переходит в точку $(p_1,\, q_1,\, t_1)$ на плоскости $t = t_1$, где $(p_1,\, q_1)$ есть образ точки $(p,\, q)$ при преобразовании $T_{t_1}^*$. Мы видим, следовательно, что всякая точка описывает траекторию, которая начинается в точке $(p,\, q,\, 0)$ и кончается в точке $(p_1,\, q_1,\, 2\pi)$, где $(p_1,\, q_1)$ получается из $(p,\, q)$ посредством преобразования T^*. Совокупность всех этих траекторий заполняет цилиндрическую область $\rho \leqslant 1$ между двумя плоскостями $t = 0$ и $t = 2\pi$, и направление единственной траектории, проходящей через любую точку $(p,\, q,\, t)$, определяется дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dp}{dt} = \varphi(p,\, q,\, t), \quad \frac{dq}{dt} = \psi(p,\, q,\, t), \tag{15}$$

где φ и ψ будут класса C_∞ относительно p, q и t, но не будут обязательно периодическими периода 2π относительно t. Очевидно, что ось t будет сама такой траекторией, и что, следовательно,

$$\varphi(0,\, 0,\, t) = \psi(0,\, 0,\, t) = 0.$$

Так как преобразование T^* сохраняет площади при всех значениях t, очевидно, что состоящая из траекторий трубчатая область с площадью одного из оснований $d\sigma$ будет в пересечении со всякой плоскостью $t = \text{const}$ давать площадку той же величины $d\sigma$. Следовательно, объем элементарного цилиндра с площадью основания $d\sigma$ и высотою dt будет всегда $d\sigma dt$. Отсюда следует, что поток жидкости, определенный дифференциальными уравнениями (15), т. е. уравнениями

$$\frac{dp}{dt} = \varphi(p,\, q,\, \tau), \qquad \frac{dq}{dt} = \psi(p,\, q,\, \tau), \qquad \frac{d\tau}{dt} = 1,$$

сохраняет объем.

По обычному правилу мы имеем, следовательно,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p}(p,\, q,\, t) + \frac{\partial\psi}{\partial q}(p,\, q,\, t) = 0. \tag{16}$$

Но уравнение (16) показывает, что существует функция $H(p,\, q,\, t)$ класса C_∞ относительно p, q, t такая, что

$$\varphi(p,\, q,\, t) = -\frac{\partial H(p,\, q,\, t)}{\partial q}, \quad \psi(p,\, q,\, t) = \frac{\partial H(p,\, q,\, t)}{\partial p}.$$

Эта функция становится полностью определенной, если прибавить условие $H(0,\, 0,\, t) = 0$.

Следовательно, уравнения (15) имеют гамильтонову форму

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}(p,\, q,\, t), \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(p,\, q,\, t),$$

где функция H вообще не будет периодической относительно t.

Мы постараемся теперь найти другую функцию $\overline{H}(p,\, q,\, t)$, аналитическую относительно p, q, t, которая была бы приблизительно равна $H(p,\, q,\, t)$, и при этом такую, что соответствующее аналитическое преобразование $\overline{T}$ обладало бы также и другими свойствами преобразования T^*, важными нам для той цели, которую мы имеем в виду.

§ 15. Эти свойства суть в существенном следующие:

a) окружность $\rho = 1$ является инвариантной кривой преобразования $\overline{T}$;

b) точка $\rho = 0$ является устойчивой инвариантной точкой для $\overline{T}$; в разложениях p_1, q_1 в ряды по p, q в окрестности этой точки для обоих преобразований совпадают члены до четвертого порядка включительно.

В самом деле, такое преобразование $\overline{T}$ будет иметь две простые инвариантные точки, близкие к таким же точкам преобразования T^*, с почти теми же асимптотическими ветвями, которые, следовательно, пересекутся. С другой стороны, преобразование $\overline{T}$ будет вращать налево радиальные направления как в окрестности инвариантной точки [вследствие свойства (b)], так и на достаточно большом расстоянии от нее (благодаря тому, что $\overline{T}$ мало отличается от T^*.

Для того, чтобы найти такую функцию $\overline{H}$, заметим, что на цилиндре $\rho = 1$

$$p\frac{\partial H}{\partial q} - q\frac{\partial H}{\partial p} = 0.$$

В самом деле, из равенства $p^2 + q^2 = 1$ в какой-нибудь момент следует то же равенство при всех t. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}(p^2 + q^2 - 1) = 2\left(-p\frac{\partial H}{\partial q} + q\frac{\partial H}{\partial p}\right) = 0.$$

Но это равенство требует, чтобы H приводилось на поверхности цилиндра к функции одного только t, так что мы можем написать:

$$H(p,\, q,\, t) \equiv H(1,\, 0,\, t) + (p^2 + q^2 - 1)J(p,\, q,\, t),$$

где $J(p, q, t)$ принадлежит к классу C_∞. Кроме того разложение $J(p, q, t)$ в степенной ряд до членов четвертого порядка определяет такое же разложение $H(p,\, q,\, t)$; заметим, что J, как и H, является аналитической функцией всюду, за исключением окружности γ. Кроме того, так как линия $p = q = 0$ является траекторией, частные производные первого порядка функции H по p и q тождественно обращаются в нуль в этой точке и тем же свойством обладает функция J.

Выберем теперь (если возможно) функцию $\overline{J}$, мало отличающуюся от J, аналитическую по p, q, t и имеющую то же разложение, что и J, до членов третьего порядка включительно. Рассмотрим соответственную функцию $\overline{H}$:

$$\overline{H} = H(1,\, 0,\, t) + (p^2 + q^2 - 1)\overline{J}(p,\, q,\, t)$$

и определяемые ею гамильтоновы уравнения. Мы тотчас же видим, что соответствующее преобразование $\overline{T}$ будет обладать всеми требуемыми свойствами, в частности, свойствами (a) и (b).

Допуская временно без доказательства почти очевидный факт существования такой функции $\overline{J}$ мы видим, что *существуют кольцеобразные зоны неустойчивости для аналитических преобразований.*

Для того, чтобы обойти трудности, возникающие при этом способе рассуждения, мы допустим, что все частные производные $\overline{J}$ до четвертого порядка включительно, весьма мало отличаются от соответственных производных J; мы докажем существование такой функции $\overline{J}$

позднее (§ 17). Очевидно, что при этих условиях всякое радиальное направление будет вращаться налево при преобразовании $\overline{T}$, так же как и при T.

§ 16. В гамильтоновых уравнениях, соответствующих этой функции $\overline{H}$ при $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, мы можем определить $\overline{H}$ и вне этих пределов так, чтобы $\overline{H}$ была периодической функцией от t. Разумеется, эта функция $\overline{H}$ не будет ни обязательно аналитической, ни даже непрерывной при $t = 0, \pm 2\pi, \ldots$ Предположим теперь, что мы произвели в направлении оси t деформацию, выражающуюся уравнением:

$$\bar{t} = \chi(t).$$

Обратную функцию $\chi^{-1}(\bar{t})$ мы будем считать класса C_∞ и возрастающей от 0 до 2π вместе с t, так что $\dfrac{dt}{d\bar{t}}$ положительно всюду, кроме точек $t = 0$ и $t = 2\pi$, где все производные обращаются одновременно в нуль. После этого преобразования новые траектории будут иметь направления, параллельные оси $\bar{t}$ на обеих крайних плоскостях $\bar{t} = 0$ и $\bar{t} = 2\pi$, и мы видим, что эти траектории будут всюду класса C_∞. С этой новой независимой переменной дифференциальные уравнения сохраняют свою гамильтонову форму с новой главной функцией

$$\overline{\overline{H}} = \overline{H}\frac{dt}{d\bar{t}},$$

которая будет, очевидно, класса C_∞ относительно p, q, t, периодической по t периода 2π и аналитической всюду, за исключением точек $t = 0, \pm 2\pi, \ldots$, если мы выберем за функцию $\chi^{-1}(\bar{t})$ функцию, аналитическую всюду в промежутке $(0, 2\pi)$, кроме точек $t = 0$ и $t = 2\pi$. Это изменение независимой переменной не влияет на преобразование T, связанное с первоначальными дифференциальными уравнениями.

Следовательно, кольцеобразные зоны неустойчивости существуют для динамических систем (1) *с функцией H класса C_∞ всюду и аналитической всюду, кроме, может быть, точек $t = 0, \pm 2\pi, \ldots$, и с функцией T аналитической.*

С первого взгляда можно было бы подумать, что небольшая дополнительная модификация позволила бы нам найти функцию H всюду аналитическую, но тут имеется затруднение, возникающее благодаря тому, что разложение функции $\overline{H}$ по степеням переменных p, q содержит неаналитические коэффициенты, которые должны быть модифицированы. Тем не менее, я думаю, что этот метод можно действительно применить и, следовательно, можно найти функцию H, которая была бы всюду аналитической. Однако я этого еще не доказал.

Во всяком случае, с точки зрения приложений представляется интересным как раз случай функции H класса C_∞.

§ 17. Чтобы закончить доказательство, нам осталось доказать еще следующую простую лемму.

Пусть мы имеем функцию

$$f(x_1, \ldots, x_n, t)$$

класса C_∞, определенную при

$$a \leqslant x_i \leqslant b \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad -\delta \leqslant t \leqslant 2\pi + \delta$$

и обращающуюся в нуль вместе со всеми своими частными производными до $(k-1)$-го порядка включительно при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Можно тогда найти функцию $g(x_1, \ldots, x_n, t)$, аналитическую относительно $x_1, \ldots, x_n, t$, обладающую теми же свойствами, и при этом такую, что функция $f - g$ и все ее частные производные до $(k-1)$-го порядка включительно будут сколь угодно малы в этой области.

В самом деле, если мы вычтем из J полином P, дающий разложение J по степеням p, q до членов четвертого порядка включительно, мы получим функцию J^*, к которой можно будет применить только что высказанную лемму. Полученное таким образом аналитическое приближение K к J^* (с $n = 3$, $k = 5$) дает нам искомое аналитическое приближение $K + P$ к функции J.

Остается только доказать лемму.

Заметим, что эта лемма справедлива при $n = 0$, потому что можно найти аналитическую функцию, отличающуюся сколь угодно мало от данной функции $f(t)$ класса C_∞, лемма справедлива также при $k = 0$.

Следовательно, если лемма не будет справедлива вообще (при любых n и k), то найдется наименьшее $n > 0$ и затем наименьшее $k > 0$, при которых лемма не будет справедлива (для некоторой функции f). Но такую функцию f мы можем написать в виде:

$$f(x_1, \ldots, x_n, t) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, t) + x_n f_1(x_1, \ldots, x_n, t),$$

где первый член является функцией от $n - 1$ переменной x_i, тогда как второй содержит функцию $f_1(x_1, \ldots, x_n, t)$ класса C_∞, обращающуюся при $x_1 = \ldots = x_n = 0$ в нуль вместе со своими частными производными по $x_1, \ldots, x_n$ до $(k-2)$-го порядка включительно. Следовательно, применяя последовательно два раза доказываемую лемму к этим двум функциям, мы найдем аналитическое приближение $\overline{g}(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$ к $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, t)$ и аналитическое приближение $g_1(x_1, \ldots, x_n, t)$ к f_1; но тогда

$$g(x_1, \ldots, x_n, t) = \overline{g}(x_1, \ldots, x_{n-1}, t) + x_n g_1(x_1, \ldots, x_n, t),$$

дает нам искомое аналитическое приближение к $f(x_1, \ldots, x_n, t)$.

Доказательство эргодической теоремы[1]

Пусть

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

является системой n дифференциальных уравнений, заданных на замкнутом аналитическом многообразии M, обладающем инвариантной формой объема и подчиненных ограничениям, упомянутым в предыдущей работе, исключая предположение о сильной транзитивности.

Установим сначала, что без этого предположения

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n(P)}{n} = \tau(P) \tag{17}$$

для всех точек P на поверхности σ с точностью до точек множества меры 0. Другими словами, существует «среднее время $\tau(P)$ пересечения» поверхности σ для траектории общего положения.

Доказательство «эргодической теоремы» о том, что существует временная вероятность p такая, что точка P траектории общего положения лежит в заданном объеме v многообразия M, имеет параллели с вышеуказанной теоремой о возвращении, как будет видно в дальнейшем.

Новая важная работа фон Неймана показывает только сходимость *в среднем.* Справедливость (17), для любой точки P им не доказана и временная вероятность для любой траектории, в обычном смысле, не установлена. *Непосредственное* доказательство результатов фон Неймана было получено Е. Хопфом.

Наш подход будет основываться на следующей лемме:

Лемма 4. *Если $S_\lambda[S'_\lambda]$ — измеримое множество на σ, инвариантное под действием T, за исключением, возможно, множества меры 0, и если для любой точки P этого множества выполняется*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{t_n(P)}{n} \geqslant \lambda > 0, \quad \left[\lim_{n\to\infty} \inf \frac{t_n(P)}{n} \leqslant \lambda > 0\right], \tag{18}$$

[1] D. Birkhoff, *Proof of the ergodic theorem.* proc. N. A. S., vol. 17, 1931, p. 404–408.

тогда

$$\begin{aligned} &\int_{S_\lambda} t(P)\,dP \geqslant \lambda \int_{S_\lambda} dP, \\ &\int_{S'_\lambda} t(P)\,dP \leqslant \lambda \int_{S_\lambda} dP. \end{aligned} \tag{19}$$

Доказательство.

Рассмотрим только первый случай, поскольку доказательство второго случая в точности повторяет первый. По аналогии с предыдущей работой, определим различные измеримые множества U_1, U_2, ... на S_λ так, что для P в U_n

$$t_n(P) > n(\lambda - \varepsilon) \qquad (P \quad \text{вне} \quad U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}). \tag{20}$$

Величина $\varepsilon > 0$ берется произвольно. Ясно, что для любой точки P из S_λ

$$t_n(P) > n(\lambda - \varepsilon)$$

для бесконечно многих значений n так, что все такие точки принадлежат хотя бы одному из множеств U_1, U_2, ... Теперь, согласно рассуждениям в предыдущей работе, заключаем, что

$$\int_{S_\lambda^k} t(P)\,dP > (\lambda - \varepsilon) \int_{S_\lambda^k} dP,$$

где $S_\lambda^k = U_1 + U_2 + \ldots + U_k$. Однако, при всех значениях k, множество S_λ^k является измеримой частью инвариантного множества S_λ и увеличиваясь стремится к пределу $U_1 + U_2 + \ldots$, который содержит все точки множества S_λ. Следовательно, путем предельного перехода получим

$$\int_{S_\lambda} t(P)\,dP \geqslant (\lambda - \varepsilon) \int_{S_\lambda} dP$$

при любых $\varepsilon > 0$, откуда выводится неравенство данной леммы.

Теорема о возвращении устанавливала результаты непосредственно из этой леммы.

Рассмотрим измеримое инвариантное множество точек P на σ, для которых

$$t_n(P) \geqslant n\lambda \tag{21}$$

для бесконечно большого числа значений n (см. предыдущую заметку). Это множество S_λ, к которому применима данная лемма. Аналогично, множество точек P на σ, для которых

$$t_n(P) < n\lambda \tag{22}$$

для бесконечно большого числа значений n, является множеством S'_λ, подобному установленному в лемме.

Множество S_λ сокращается, а множество S'_λ увеличивается вместе с σ, и оба множества, взятые вместе, составляют σ. Мера множества S_λ должна стремиться к нулю по мере увеличения λ. Иначе она бы стремилась к инвариантному измеримому множеству положительной меры S^*, для которого неравенство леммы выполняется при $\lambda = \Lambda$ (Λ — произвольно большая положительная величина), отсюда получаем

$$\int_{S^*} t(P)\, dP \geqslant \Lambda \int_{S^*} dP$$

при любых Λ, что не имеет смысла. Кроме того, когда λ стремится к нулю, S_λ становится пустым, поскольку существует наименьшее время пересечения λ_0. Аналогично, S'_λ увеличивается вместе с λ от множества нулевой меры при $\lambda < \lambda_0$ до множества σ.

Тогда, если S_λ и S'_λ не являются существенно дополняющими друг друга частями поверхности σ (одна из которых убывающая, а другая возрастающая), то они должны иметь, при определенных значениях λ, общую измеримую компоненту S^*_λ положительной меры, также инвариантную под действием T.

Рассмотрим множество точек, принадлежащих S^*_λ таких, что

$$t_n(P) > n\mu \qquad (\mu > \lambda)$$

для бесконечно большого числа значений n. Они составляют инвариантное измеримое подмножество $S^*_{\lambda\mu}$ множества S^*_λ, которое должно иметь меру 0 при любых таких μ. Иначе неравенства леммы дают одновременно

$$\int_{S^*_{\lambda\mu}} t(P)\, dP \geqslant \mu \int_{S^*_{\lambda\mu}} dP, \qquad \int_{S^*_{\lambda\mu}} t(P)\, dP \leqslant \mu \int_{S^*_{\lambda\mu}} dP,$$

которые противоречат друг другу.

Следовательно, делаем вывод, что все точки P из S^*_λ, за исключением точек множества меры 0, удовлетворяют неравенству

$$t_n(P) \leqslant n\mu$$

при любых $\mu > \lambda$ и при достаточно больших $n = n_P$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{t_n(P)}{n} \leqslant \lambda.$$

Также делаем вывод, что для всех точек из S^*_λ, с точностью до точек множества меры 0, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{t_n(P)}{n} \geqslant \lambda.$$

Отсюда следует, что для точек P из S^*_λ, с обычным исключением,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n(P)}{n} = \lambda. \tag{23}$$

Два таких множества S^*_λ, принадлежащих различным λ, явно различны, за исключением множества меры 0. Следовательно, может существовать только счетное множество $S^*_{\lambda^i}$ ($i = 1, 2, \ldots$) из таких множеств, так как каждое из них имеет положительную меру. За исключением значений λ_i, величины λ, S'_λ и S_λ являются дополняющими друг друга частями σ без учета множества меры 0.

Выберем теперь любые два значения λ, например λ, μ с условием $\lambda < \mu$, не принадлежащие этому счетному множеству и рассмотрим точки из S_λ, которые не принадлежат S_μ. Они составляют инвариантное измеримое множество $S_{\lambda,\mu}$ такое, что для любой точки P этого множества

$$\lambda \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup \frac{t_n(P)}{n} \mu, \tag{24}$$

а также

$$\lambda \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf \frac{t_n(P)}{n} \leqslant \mu, \tag{25}$$

поскольку $S_{\lambda,\mu}$ — тождественна с частью множества S'_μ вне S_λ. Делаем вывод, что $t_n(P)/n$ колеблется между λ и μ при n, стремящемся к ∞, для всех точек P из $S_{\lambda,\sigma}$, за исключением множества меры 0.

Выбирая множество значений таких, что λ, μ находятся достаточно близко друг к другу, делаем вывод, что для всех точек на σ, за исключением множества меры 0, колебание $t_n(P)/n$, когда n становится бесконечным, меньше произвольного $\delta > 0$.

Теперь очевидно, что сформулированная теорема возвращения верна.

Следует также заметить, что если t_n/P обозначает время до n-ого пересечения при уменьшающемся времени, то такой же результат справедлив, если n стремится к $\pm\infty$ *с тем же пределом*, исключая множество точек P меры 0. Это сразу следует из того, что (24) может быть записано в виде

$$\lambda \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup \frac{t_n(P)}{n} \leqslant \mu,$$

где P из $S_{\lambda,\mu}$ заменяется на $T^n(P)$, и (25) можно придать соответствующий вид.

Эта теорема возвращения допускает некоторые явные обобщения. Во-первых, нет необходимости ограничиваться аналитическим случаем. Более того, вместо одной поверхности σ можно взять любое измеримое множество σ^*, вложенное в счетное множество различных простых элементов поверхности с $v\cos\theta > d > 0$. В этом случае $t^*(P)$ обозначает время от P на σ^* до первого последующего пересечения σ^*.

Для того, чтобы доказать «эргодическую теорему», заметим сначала, что можно найти множество σ^*, пересекающее каждую траекторию, за исключением соответствующих равновесию и любых других с полной мерой 0. Это возможно, так как можно найти счетное множество различных простых элементов σ_1, σ_2, ... поверхности с $v\cos\theta > d > 0$, которые пересекают каждую траекторию, не соответствующую равновесию. Если определить σ_k как предел

$$\sigma_1 + \sigma_{12} + \sigma_{123} + \ldots + \sigma_{1\ldots k},$$

где σ_{12} обозначает множество точек P из σ_2 вне траектории, пересекающей σ_1, σ_{123} обозначает множество точек σ_3 вне траектории, пересекающей σ_1 или σ_2 и так далее, то σ_k будет иметь надлежащие свойства.

Пусть теперь v обозначает любой «измеримый» объем в многообразии M, и пусть $\bar{t}(P)$ обозначает интервал времени, в течение которого точка на траектории, исходящей из P на таком множестве σ^*, лежит в v до тех пор, пока не достигнута точка $T(P)$ из σ^*. Следовательно, $\bar{t}(P) \leqslant t(P)$ во всех случаях. Кроме того, $\bar{t}_n(P)$ удовлетворяет тому же функциональному уравнению, что и $t(P)$

$$\bar{t}_n(P) = \bar{t}(T^{n-1}(P)) + \bar{t}_{n-1}(P).$$

Таким образом, то же самое рассуждение, как и раньше, применимо для того, чтобы показать, что, за исключением множества точек P с мерой 0,

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{\bar{t}_n(P)}{n} = t(P),$$

где $\overline{\tau}(P) \leqslant \tau(P)$; тогда как, очевидно,

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{t_n(P)}{n} = \tau(P) > 0.$$

Делаем вывод, что справедлива следующая «эргодическая теорема»:

Для любой динамической системы типа (17) *существует определенная «временная вероятность» p того, что любая движущаяся точка, за исключением точек множества меры* 0, *будет лежать в области v; т. е. существует*

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{\overline{t}}{t} = p \leqslant 1,$$

где t обозначает полное пройденное время, измеряемое от неподвижной точки, и $\overline{t}$ — полное пройденное время в v.

Для сильно транзитивных систем p является отношением объема v к V.

Конечно, идея приведенного доказательства содержится в лемме. Необходимо отметить отвлеченный характер этой леммы, так как она показывает, что вышеупомянутая теорема сразу же обобщается на случай функционального пространства при подходящих ограничениях.

Очевидно, что $\tau(P)$ и $\overline{\tau}(P)$, как определено выше, удовлетворяют функциональным соотношениям следующего типа:

$$\int_0^\lambda \lambda\, dm(S_\lambda) = \int_{S_\lambda} t(P)\, dP,$$

где интеграл в левой части представляет собой интеграл Стилтьеса, $m(S_\lambda)$ — мера S_λ.

Что такое эргодическая теорема?[1]

Интеграл Лебега (1901), основанный на борелевской мере, в течение этого столетия был основным инструментом в замечательных достижениях анализа. По-видимому, эргодической теореме суждено занять центральное место в этом развитии. Действительно, в недавней статье Уинер и Уинтнер[2] отзываются о ней как о «единственном результате, установленным для решений динамических систем».

Чтобы понять теорему и природу ее применения, необходимо прежде всего упомянуть меру (Бореля–Лебега), то есть «вероятность» в смысле схематически описанном Пуанкаре в третьем томе его «Новых методов в небесной механике». Ограничимся случаем отрезка прямой единичной длины с координатой x, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Предположим, что имеется конечное множество непересекающихся интервалов общей длины $l < 1$. Вероятность (в определенном интуитивном смысле) того, что точка, взятая наугад, лежит на одном из этих интервалов, равняется l, а вероятность того, что она лежит в дополнении этого множества, очевидно, $1 - l$.

Предположим теперь, что имеется точечное множество M содержащее бесконечное количество точек, которое может быть заключено внутри бесконечного множества непересекающихся интервалов с длинами l_1, l_2, ... общей длины

$$l_1 + l_2 + l_3 + \ldots = l < 1.$$

Тогда ясно, что вероятность того, что точка, взятая наугад, лежит в M, не может превосходить l; а вероятность того, что она лежит в дополнительном множестве, по крайней мере, не меньше $1 - l$. Если сейчас M такой природы, что оно может быть заключено в бесконечном множестве интервалов общей длины, не превышающей произвольно малое

[1]«What is Ergodic Theorem?» G. D. Birkhoff, Amer. Math. Mo., Vol. 49, 1942 pp. 222–226.

[2]К вопросу об эргодической динамике почти периодических систем, American Journal of Mathematics, Vol. 63, 1941. Для представления о литературе смотрите работу Эберхарда Хопфа «Эргодическая теорема», Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Berlin, Springer, 1937. Мы рассматриваем только «Эргодическую Теорему», а совсем не «Эргодическую Теорему Среднего» фон Неймана, которая побудила пересмотреть некоторые старые идеи, и привела к открытию и доказательству эргодической теоремы, включающей сильный, точный результат, который, насколько нам известно, никогда и не надеялись получить.

значение ε, очевидно, что вероятность попадания случайной точки в M не превышает ε, то есть вероятность равна нулю. Такое множество M называется множеством меры 0.

Например, множество рациональных точек $x = m/n$, всюду плотное на отрезке, является множеством меры 0. По сути, эти точки могут быть упорядочены

$$0;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{3}{4};\ \frac{1}{5};\ \frac{2}{5};\ \frac{3}{5};\ \frac{4}{5};\ \ldots$$

и n-ая точка этой последовательности очевидно, может быть заключена на интервале длиной $\varepsilon/2^n$. После чего, имеем

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \ldots = \varepsilon,$$

откуда ясно, что множество рациональных точек меры 0.

В более общем виде, если имеется множество M такое, что оно может быть заключено в множестве интервалов длиной l_1, l_2, $\ldots$, причем

$$l_1 + l_2 + \ldots \leqslant l + \varepsilon,$$

в то время как дополнение множество $\overline{M}$, аналогично, может быть заключено внутри интервалов $\bar{l}_1$, $\bar{l}_2$, $\ldots$ с

$$\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \ldots \leqslant (1 - l) + \varepsilon$$

при произвольно малом $\varepsilon > 0$, тогда M считается измеримым с мерой l; ясно, что ее дополнительное множество $\overline{M}$ будет измеримым с мерой $1 - l$. В таком случае вероятность того, что случайная точка попадает в M, должна полагаться равной l.

Все обычные бесконечные множества, определенные, в частности, аналитическими методами, оказываются в этом смысле измеримыми.

Сущность эргодической теоремы сейчас может быть пояснена при помощи рассмотренного отрезка прямой.

Предположим, что задано произвольное взаимно однозначное сохраняющее меру преобразование T отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$ в себя; T может иметь конечное или бесконечное количество разрывов. Приведем первый простой пример. Представим, что отрезок прямой $0 \leqslant x < 1$ изогнулся в окружность с длиной 1 без какого-либо растяжения; первое преобразование T является обычным поворотом этой окружности на некоторый угол α. Второй простой пример: отрезок прямой разделен на бесконечное множество интервалов

$$0 \leqslant x < \frac{1}{2};\quad \frac{1}{2} \leqslant x < \frac{3}{4};\quad \frac{3}{4} \leqslant x < \frac{7}{8}, \ldots$$

и тогда второй интервал переставляется с первым, четвертый с третьим, и так далее, определяя, таким образом, преобразование T. В обоих случаях преобразование T сохраняет меру.

Тогда эргодическая теорема гласит, что: *Для любого, сохраняющего меру преобразования T, и для каждой отдельной точки P (кроме, вероятно, исключительного множества меры 0) существует определенная вероятность того, что итерации P*

$$P,\ T(P),\ T^2(P),\ \ldots \qquad и \qquad P,\ T^{-1}(P),\ T^{-2}(P),\ \ldots$$

попадают в заданное измеримое множество M.

Другими словами, для n этих точек (начиная с P) доля точек, которые лежат в множестве M, стремится к определенному ограничению μ_p в то время как n стремится к бесконечности в обоих направлениях.

В более общем случае, отрезок прямой может быть заменен конечным n-мерным объемом M при $n > 1$, а для точек из M может быть определен переменный (интегрируемый) положительный вес $w(P)$. Тогда обобщенная теорема будет утверждать, что соответствующие взвешенные средние стремятся к пределу μ_p. В элементарном специальном случае, указанном вначале, этот вес равен 1 для точек из M и нулю для точек вне M. При $n > 1$ дискретное преобразование T может быть заменено на стационарный сохраняющий меру поток T_t со временем t, при этом справедлива сходная теорема.

Для того, чтобы пояснить эту последнюю возможность, положим, что в квадрате $0 \leqslant x < 1$, $0 \leqslant y < 1$ точки двигаются с постоянной скоростью в фиксированном направлении, составляющей угол α с осью x и, покидая квадрат, возвращаются в него в гомологичной точке (см. рис. 18.). Очевидно, что такое преобразование T_t сохраняет площадь. Пусть теперь M будет произвольно выбранной измеримой частью квадрата, и P — произвольной точкой квадрата, которая не принадлежит возможному исключительному множеству меры 0. На основании этой же теоремы заключаем, что для бесконечного времени $t \geqslant 0$ или $t \leqslant 0$ существует определенная вероятность того, что точка $P_t = T_t(P)$ попадает внутрь M и эта вероятность одинакова в обоих направлениях. Обобщение для произвольного $w(P)$ справедливо и в случае «потока» и в дискретном случае.

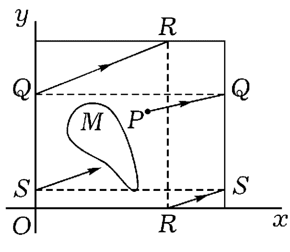

Рис. 18

В более аналитическом виде, для этих двух случаев $n \to \pm\infty$,

$T \to \pm\infty$ теорема записывается, соответственно, как:

$$\frac{w(P) + w(T(P)) + \ldots w(T^{n-1}(P))}{n} \to \mu_P;$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T w(P)dP \to \mu_P$$

Различные применения эргодической теоремы к динамическим системам чрезвычайно разнообразны и любопытны. Возьмем простой пример идеального выпуклого бильярдного стола, на котором идеальный бильярдный шар P двигается со скоростью 1. На рис. 19 положим $\phi = \operatorname{arc} OA$, $\phi_1 = \operatorname{arc} OA_1$, $l = AP, L^* = AA_1$. Имеем преобразование $(\theta_1, \phi_2) = T(\theta, \phi)$ определенное в прямоугольнике

$$0 < \theta < \pi; \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant p, \qquad (p = \text{периметр стола})$$

на $\theta\phi$-плоскости, соединенное с движением. Нетрудно доказать, что T является множеством, сохраняет меру в том смысле, что двойной интеграл

$$\iint \frac{\sin\theta}{\sin\theta_1}\, d\theta\, d\phi$$

имеет одно и то же значение для любой измеримой части этого прямоугольника и для ее образа при отображении T; действительно, возможно так изменить форму прямоугольника, что для новой области преобразование сохраняет обычную площадь.

Кроме того, ясно, что если зададим любое «состояние движения» бильярдного шара, как точки P тремя координатами θ, ϕ, l, тогда стационарный поток T_t определен в соответствующей области трехмерного $\theta\phi l$-пространства:

$$0 < \theta < \pi; \quad 0 \leqslant \phi < p, \quad 0 \leqslant l \leqslant l^*.$$

При этом сохраняется следующий интеграл по объему:

$$\int \left(\iint \frac{\sin\theta}{\sin\theta_1} d\theta\, d\phi \right) dl$$

Таким образом, теорема применима к этому потоку.

Приведем три явные применения к этой простой, но типичной динамической задаче:

(1) средняя длина n последовательных хорд траектории стремится к определенному пределу, одному и тому же вне зависимости, увеличивается или уменьшается время t;

(2) средний угол θ для n последовательных столкновений стремится к определенному предельному значению;

(3) для любой заданной области стола доля времени, проводимого в ней бильярдным шаром, пропорциональна ее площади.

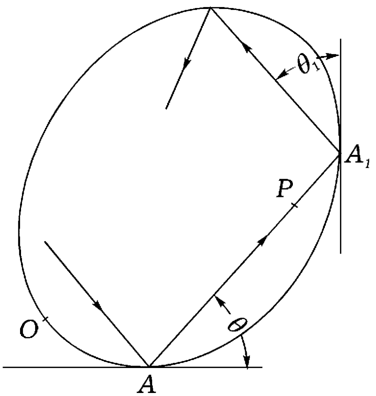

Рис. 19

Существует один особо интересный случай, который, насколько известно, фактически может быть «общим случаем»: Может случиться, что все точки нашего объема в среднем ведут себя существенно одинаковым образом (конечно же, не принимая во внимание исключительного множества меры 0). В противном случае, все пространство может разбиваться на инвариантные измеримые множества. Так, например, для эллиптического стола, движение полностью заполняет кольцо за пределами некоторого меньшего софокусного эллипса, это кольцо образует такое замкнутое инвариантное множество; эта интегрируемая задача — предельный случай геодезического потока на поверхности сплющенного эллипсоида.

Что означает эргодическая теорема, грубо говоря, заключается в том, что для дискретного сохраняющего меру преобразования или сохраняющего меру потока конечного объема, вероятности и взвешенные средние стремятся к пределам, для определенного начального состояния P (не принадлежащего исключительному множеству меры 0) и, кроме того, предельные значения одинаковы для обоих направлений.

Эргодическая теорема применяется к разнообразным серьезным задачам анализа и прикладной математики — как ко всей солнечной системе, так и к простой задаче бильярдного шара! Так, в известной идеализации для системы Земля–Солнце–Луна Дж. У. Хилла (ограниченная задача трех тел), можем сразу же утверждать (с вероятностью 1), что Луна обладает истинно средним угловым вращением вокруг Земли (измеренное через период), одинаковым в обоих направлениях времени.

ПРИМЕЧАНИЯ РЕДАКЦИИ

К главе 1

1) На русском языке см. *Р. Курант* и *Д. Гильберт.* Методы математической физики, ГТТИ. 1933, стр. 52–53.

2) Строгое доказательство этого утверждения может быть проведено следующим образом.

Лемма 1. *Если решение $x(t)$ уравнений* (1) *главы* I *определено в промежутке $a < t < b$, где $b < \infty$, то при $t \to b$ точка $x(t)$ стремится к некоторому предельному положению.*

Это является непосредственным следствием интегральных уравнений (2) и ограниченности функции X. Отсюда следует

Лемма 2. *Если при соблюдении условий предыдущей леммы решение $x(t)$ не может быть распространено ни на какой промежуток $a < t < c$, где $b < c$, то при $t \to b$ точка $x(t)$ стремится к точке границы множества R.*

В самом деле, допустим противное. Тогда согласно предыдущей лемме при $t \to b$ точка $x(t)$ должна стремиться к точке самого множества R. Обозначим последнюю через x^1. Расстояние ее от границы множества R обозначим через D. Имеем $D > 0$. Положим

$$c = b + \frac{D}{\sqrt{n}M}.$$

Имеем $b < c$. Согласно теореме существования, существует решение $x = y(t)$ уравнений (1), определенное при $|t - b| < c - b$ и такое, что $y(b) = x^1$. Положим

$$z(t) = \begin{cases} x(t) & \text{при } a < t < b, \\ y(t) & \text{при } b \leqslant t < c. \end{cases}$$

Тогда $z(t)$ будет распространением решения $x(t)$ на промежуток $a < t < c$.

В самом деле, при $t \neq b$ составляющие $z(t)$ вектора $z(t)$ удовлетворяют уравнениям (1) по определению $y(t)$ и $z(t)$. При $t = b$ эти составляющие непрерывны, так как $y(b)$ есть предельное положение $x(t)$ при $t \to b$. Наконец, имеем интегральные уравнения:

$$z_i(t) = z_i(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} X_i[z_1(u), \ldots, z_n(u)]\,du \quad (a < t < b),$$

$$z_i(t) = z_i(b) + \int\limits_{b}^{t} X_i[z_1(u), \ldots, z_n(u)]\,du \quad (b \leqslant t < c),$$

где t_0 произвольное фиксированное число между a и b. В силу непрерывности функции $z_j(u)$ и X_i первая система уравнений соблюдается и при $t = b$. Принимая это во внимание и пользуясь второй системой уравнений, заключаем, что первая система уравнений соблюдается при всяком t, принадлежащем промежутку $a < t < c$, откуда и следует, что $z(t)$ является решением уравнений (1), определенным в этом промежутке.

Таким образом, решение $x(t)$ может быть распространено на промежуток $a < t < c$, где $c > b$ вопреки предположению. Этим лемма доказана.

Условимся теперь говорить, что решение $x(t)$ уравнений (1), определенное в промежутке $a < t < b$, *продолжаемо направо* (*налево*), если оно может быть распространено на промежуток $a < t < c$ ($c < t < b$), где $c > b$ ($c < a$). Тогда имеем следующее утверждение.

Лемма 3. ***Если решение $x(t)$ уравнений (1), определенное при $a<t<b$, продолжаемо направо, то оно может быть так распространено на промежуток $a < t < c$, где $c > b$, что распространенное решение уже не будет продолжаемо направо.***

Доказательство.

Определим прежде всего конечную или бесконечную последовательность решений

$$x^1(t),\ x^2(t),\ \ldots \tag{1}$$

уравнений (1) главы I следующим образом. Положим $x^1(t) \equiv x(t)$ ($a < t < b$). Если $x^1(t)$ может быть распространено на промежуток $a < t < b + 1$, то распространяем его на этот промежуток каким-либо образом и распространенное решение обозначаем через $x^2(t)$. Если же такое распространение невозможно, то обрываем последовательность (1) уже на первом члене.

В случае существования решения $x^2(t)$ дальнейшее построение последовательности (1) зависит от возможности распространения этого решения на промежуток $a < t < b + 2$. Если такое распространение возможно, то производим его каким-либо образом и распространенное решение обозначаем через $x^3(t)$. В случае невозможности распространения обрываем последовательность (1) на члене $x^2(t)$.

Этот процесс последовательного распространения решения на промежутки $a < t < b + n$ $(n = 1, 2, \dots)$ продолжаем, пока он возможен. При этом, очевидно, могут встретиться два случая: либо процесс окажется продолжаемым до бесконечности, либо он оборвется на некотором k-м шаге.

В первом случае последовательность (1) бесконечна. Так как каждое решение, фигурирующее в этой последовательности, является распространением предыдущего решения, то, полагая

$$x^*(t) = x^j(t) \quad (a < t < b + j - 1),$$

мы получим решение $x^*(t)$ уравнений (1) главы I, определенное при $a < < t < \infty$. Это решение, очевидно, является искомым распространением решения $x(t)$, не продолжаемым направо.

Во втором случае мы получаем распространение $x^*(t)$ решения $x(t)$, определенное при $a < t < b_1$, где $b \leqslant b_1$, и не допускающее распространения на промежуток $a < t < b_1 + 1$. При $b = b_1$ решение $x^*(t)$, разумеется, совпадает с $x(t)$, которое мы здесь рассматриваем как распространение самого себя.

Определим теперь последовательность решений

$$y^1(t),\ y^2(t),\ \dots \tag{2}$$

уравнений (1) главы I следующим образом. Положим $y^1(t) = x^*(t)$ $(a < t < b_1)$. Если $y^{j-1}(t)$ уже определено в промежутке $a < t < b_{j-1}$, то определяем $y^j(t)$ в зависимости от того, допускает ли $y^{j-1}(t)$ распространение на промежуток $a < t < b_{j-1} + 2^{-j+1}$. Если допускает, то полагаем $b_j = b_{j-1} + 2^{-j+1}$ и обозначаем через $y^j(t)$ одно какое-нибудь из таких распространений. Если же распространение на этот промежуток невозможно, то полагаем просто

$$b_j = b_{j-1} \quad \text{и} \quad y^j(t) \equiv y^{j-1}(t) \quad (a < t < b_j).$$

Относительно определенных таким образом решений $y^j(t)$ и чисел b_j нетрудно установить следующее. Решение $y^j(t)$, определенное при $a < < t < b_j$, не допускает распространения на промежуток $a < t < b_j + 2^{-j+1}$.

При $j = 1$ справедливость этого утверждения уже известна. Предположим, что оно верно при $j = h - 1$, и докажем его справедливость при $j = 1$.

Допустим вопреки этому утверждению, что распространение решения $y^h(t)$ на промежуток $a < t < b_h + 2^{-h+1}$ возможно. Тогда следует рассмотреть два случая: 1) $b_h = b_{h-1} + 2^{-h+1}$, 2) $b_h = b_{h-1}$. В первом случае всякое распространение решения $y^h(t)$ на промежуток $a < t < b_h + 2^{-h+1}$ будет вместе с тем распространением решения $y^{h-1}(t)$ на промежуток $a < t < b_{h-1} + 2^{-h+2}$, что невозможно, согласно индуктивному предположению. Второй случай имеет место только тогда, когда решение $y^{h-1}(t)$ не допускает распространения на промежуток $a < t < b_{h-1} + 2^{-h+1}$. В этом случае решение $y^h(t)$ совпадает с решением $y^{h-1}(t)$ и потому также не допускает распространения на этот промежуток вопреки допущению. Этим наше утверждение доказано при $h = 1, 2, \ldots$

Так как $0 \leqslant b_{j-1} - b_j \leqslant 2^{-j+1}$, то последовательность чисел $b_1, b_2, \ldots$, не убывая, стремится к некоторому пределу b^*. Так как в последовательности (2) каждое решение является распространением предыдущего решения (включая случай тождества этих решений), то, полагая

$$y^*(t) = y^j(t) \quad (a < t < b_j),$$

мы получим решение $y^*(t)$ уравнений (1), определенное при $a < t < b^*$. Это решение, очевидно, является распространением исходного решения $x(t)$.

Наконец, принимая во внимание, что $\lim\limits_{j\to\infty} b_j = b^*$ и что решение $y^j(t)$, определенное при $a < t < b_j$, не допускает распространения на промежуток $a < t < b_j + 2^{-j+1}$, заключаем, что решение $y^*(t)$ непродолжаемо направо, что и требуется доказать.

Разумеется, совершенно аналогичная лемма имеет место относительно распространения решений налево. Отсюда следует, что для всякого решения $x(t)$ уравнений (1), определенного при $a < t < b$, существует решение $x^*(t)$ этих уравнений, не продолжаемое ни направо, ни налево и являющееся распространением решения $x(t)$ (включая случай совпадения этих решений). Наконец, принимая во внимание лемму 2 и аналогичную лемму относительно решений, не продолжаемых налево, убеждаемся в справедливости утверждения, приведенного в тексте.

К главе 2

1) См. также *Р. Курант* и *Д. Гильберт*. Методы математической физики, I. Москва, 1933, стр. 174–175. Из рассуждения в тексте ясно, что понятие стационарности интеграла (1) не изменится, если в его определении заменить условия обращения в нуль разностей $x_i(t,\lambda) - x_i^0(t)$ *вблизи* концов промежутка (t_0, t_1) условием их обращения в нуль на этих концах.

2) Квадратичная форма $F(x_1, \ldots, x_m)$ в переменных $x_1, \ldots, x_m$ называется *положительной определенной*, если $F(x_1, \ldots, x_m) > 0$ при всяких вещественных x_i, не равных сплошь нулю.

3) Из равенства $\dfrac{\partial L}{\partial q_i'} = c$ величина q_1' может быть определена как функция $q_2, \ldots, q_m, q_2', \ldots, q_m'$. В самом деле, так как L_2 по предположению положительная определенная квадратичная форма в $q_1', \ldots, q_m'$, то коэффициент в этой форме при ${q_1'}^2$ отличен от нуля, ибо в противном случае мы имели бы $L_2 = 0$ при $q_1' = 1$, $q_2' = \ldots = q_m' = 0$ вопреки определению, сформулированному в предыдущем примечании. Таким образом, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial {q_1'}^2} \neq 0$. Но это означает, что в выражении $\dfrac{\partial L}{\partial q_1'}$, линейном относительно q_1', коэффициент при q_1' отличен от нуля. Следовательно, равенство $\dfrac{\partial L}{\partial q_1'} = c$ разрешимо относительно q_1'.

4) Согласно § 3 переход от x, y, t к $\overline{x}, \overline{y}, \overline{t}$ сохраняет нормальную форму уравнений, так как

$$(x'^2 + y'^2)\,dt = (\overline{x}'^2 + \overline{y}'^2)\,d\overline{t}.$$

5) Здесь c — постоянная энергии. Выписанные m интегралов не являются независимыми, ибо, как нетрудно видеть,

$$\sum_{i=1}^{m} c_i = 0.$$

6) $u_y + iu_x$ не равно тождественно нулю, так как $a - c$ и b не могут одновременно обращаться в нуль тождественно. В противном случае интеграл V был бы линейной комбинацией W и линейного интеграла. — *Прим. перев.*

7) Здесь предполагается, что эти уравнения однозначно разрешимы относительно r_i. Это условие заведомо соблюдается, когда $L(q_1, \ldots, q_m, q'_1, \ldots, q'_m)$ есть квадратичная функция $q'_1, \ldots, q'_m$ и L_2 — положительная определенная форма в $q'_1, \ldots, q'_m$.

8) Точнее говоря, если $q_i(t)$ образуют решение уравнений Лагранжа, то, полагая $r_i = q'_i$, $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial q'_i}$, получим решение нашей новой вариационной задачи. В самом деле, уравнения, получаемые варьированием p_i, как показано в тексте, суть как раз $r_i = q'_i$. Уравнения же, получаемые варьированием q_i в силу соотношений $p_i = \dfrac{\partial L(q, q')}{\partial q'_i} = \dfrac{\partial L(q, r)}{\partial r_i}$, имеют вид

$$p'_i \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q'_i}\right) = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \equiv -\sum_{j=1}^{m} p_j \frac{\partial r_j}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial L(q, r)}{\partial r_j}\frac{\partial r_j}{\partial q_i} \equiv \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

и также выполняются в силу уравнений Лагранжа.

9) Здесь, разумеется, надо предположить, что эти уравнения однозначно разрешимы относительно p.

10) Преобразования (7) и (8), вообще говоря, сводятся друг к другу. Чтобы перейти от (7) к (8), надо лишь ввести новую функцию преобразования

$$K^* = K + \sum_{j=1}^{m} \overline{p}_j \overline{q}_j$$

и выразить ее через $q_1, \ldots, q_m, \overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_m, t$. Обратный переход совершается по формуле

$$K = K^* - \sum_{j=1}^{m} \overline{p}_j \overline{q}_j,$$

где K должно быть выражено через $q_1, \ldots, q_m, \overline{q}_1, \ldots, \overline{q}_m, t$. — *Прим. перев.*

К главе 3

1) Числа μ_k определены этими равенствами с точностью до целых кратных $\dfrac{2\pi\sqrt{-1}}{\tau}$, что в дальнейшем не следует упускать из виду. Относительно этих чисел имеет место следующая известная теорема, полезная в дальнейшем.

Если уравнения вариации имеют решение, удовлетворяющее условию

$$y_i(t+\tau) = e^{\mu\tau} y_i(t) \qquad (i = 1, \dots, n),$$

где μ — постоянная и не все y_i тождественно равны нулю, то μ фигурирует среди чисел $\mu_1, \dots, \mu_n$ (с точностью до слагаемого вида $\dfrac{2\pi l\sqrt{-1}}{\tau}$, где l — целое число).

Доказательство.

Решение $y_1, \dots, y_n$ является линейной комбинацией фундаментальной системы решений

$$y_i(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k y_{ik}(t),$$

где a_k суть постоянные, не равные нулю одновременно. Это дает

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_k c_{lk} y_{il}(t) = e^{\mu\tau} \sum_{l=1}^{n} a_l y_{il}(t) \qquad (i = 1, \dots, n),$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{n} a_k c_{lk} = e^{\mu\tau} a_l,$$

и поэтому

$$|c_{ij} - e^{\mu\tau}\delta_{ij}| = 0.$$

Следовательно, $e^{\mu\tau}$ совпадает с одним из чисел m_k, а μ — с одним из чисел $\lg \dfrac{m_k}{\tau}$, что и требовалось доказать.

2) Из дифференциальных уравнений для y_i следует, что

$$\frac{d}{dt}|y_{ij}| = \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial X_k}{\partial x_k}\right|_{x=0} |y_{ij}|,$$

откуда

$$|y_{ij}(t_2)| = |y_{ij}(t_1)| e^{\int_{t_1}^{t_2} \sum \left.\frac{\partial X_k}{\partial x_k}\right|_{x=0} dt}.$$

Из последнего равенства следует, что определитель $|y_{ij}(t)|$ *нигде* не обращается в нуль, если y_{ij} образуют систему линейно независимых решений.

3) Слово «функций» редакция ставит в кавычки, так как в действительности речь идет совсем не о функциях в общепринятом в современной математике смысле этого слова, а о формальных рядах, которые могут и расходиться, не определяя никаких функций.

4) Следует, однако, иметь в виду, что «доказательство» этих свойств, данное Пуанкаре (см. стр. 193–194 цитированной книги), состоит из путаницы, как замечено Винтнером («Amer. J. Math.», 53, 1931, 605).

5) Ограничение, наложенное здесь Биркгофом, — отсутствие кратных множителей, выраженное словами «вообще говоря» («in general»), — является лишним. Очень простое доказательство теоремы о группировке гамильтоновых множителей в пары вида $(\lambda, -\lambda)$, свободное от этого ограничения, дано, например, в известном мемуаре А. М. Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения» (1-е русск. изд., Харьков, 1892; франц. перевод, «Annales de Toulouse», sér. 2, t. 9, 1907; 2-е русск. изд., Ленинград, 1935).

6) Так как вывод этого утверждения основан не на логических заключениях, а на неясных соображениях, связанных с термином «вообще говоря» («in general»), не имеющим единого точного смысла, то не приходится удивляться тому, что утверждение оказывается ошибочным.

Пусть, например, $m = 2$, $H = p_1^2 - q_2^2 + (p_1 - p_2)(q_1 + q_2)$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^4 + 4 = 0.$$

Множителями будут корни этого уравнения, т. е. комплексные числа $\pm 1 \pm \sqrt{-1}$.

7) Выражения $M_{ii} - L_{ii}$ в этом случае вещественны. В самом деле, в силу того, что p_i и q_i в рассматриваемом случае вещественны при вещественных $\overline{p}_i$ и $\overline{q}_i$, коэффициенты d_{ij}, e_{ij}, f_{ij}, g_{ij} (см. начало § 7) вещественны. Но

$$M_{ii} = \sum_{j=1}^{m} d_{ji} g_{ji}, \quad L_{ii} = \sum_{j=1}^{m} e_{ji} f_{ji}. \tag{1}$$

8) То есть с точностью до полной производной.

9) Выражения $M_{ii} - L_{ii}$ в этом случае чисто мнимые. В самом деле, p_i и q_i вещественны, если $\overline{p}_i^* = q_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, где * означает сопряженное комплексное число. Отсюда $d_{ij}^* = e_{ij}$, $f_{ij}^* = g_{ij}$. В силу равенств (1) примечания 7 это дает $L_{ii}^* = M_{ii}$. Следовательно, $M_{ii} - L_{ii}$ имеют вид $\rho_i\sqrt{-1}$, где ρ_i вещественны и отличны от нуля. Если они не все положительны, то при i, соответствующих отрицательным ρ_i мы меняем ролями p_i и q_i, достигая этим положительности всех ρ_i.

10) При этом новая гамильтонова функция будет отличаться от старой множителем $\sqrt{-1}$.

11) Линейное преобразование, приводящее H_2 к такому виду, в общем случае, — когда присутствуют и вещественные и чисто мнимые и комплексные множители λ, — не обязательно будет иметь специальный вид, рассмотренный в § 4. Точнее говоря, при этом преобразовании вещественным системам значений исходных переменных не обязательно будут соответствовать системы значений новых переменных, такие, что переменные, соответствующие комплексным сопряженным λ, будут иметь комплексные сопряженные значения.

12) Встречающиеся здесь выражения $e^{\gamma_i t}$ и $e^{-\gamma_i t}$, где γ_i — формальные степенные ряды в $\alpha_1, \ldots, \beta_m$, нуждаются в расшифровке. Им можно придать следующий смысл. Обозначим через γ_{ik} полином в $\alpha_1, \ldots, \beta_m$, получаемый из формального ряда γ_i, путем отбрасывания членов порядка выше k. Тогда $e^{\gamma_{ik} t}$ и $e^{-\gamma_{ik} t}$ представимы как сходящиеся степенные ряды в $\alpha_1, \ldots, \beta_m$, с коэффициентами, зависящими от t. Нетрудно видеть, что при $k \to \infty$ коэффициент в $e^{\gamma_{ik} t}$ при любом фиксированном произведении степеней $\alpha_1, \ldots, \beta_m$ в конце концов перестает меняться в зависимости от k. В этом смысле зависящий от k степенной ряд для $e^{\gamma_{ik} t}$ формально сходится при $k \to \infty$ к некоторому формальному степенному ряду. Этот последний и обозначается через $e^{\gamma_i t}$. Аналогичным образом определяется $e^{-\gamma_i t}$.

Нетрудно видеть, что при такой расшифровке выражений $e^{\gamma_i t}$ и $e^{-\gamma_i t}$ равенства $p_i = \alpha_i e^{-\gamma_i t}$, $q_i = \beta_i e^{\gamma_i t}$ действительно определяют общее формальное решение нормализованных уравнений Гамильтона в смысле § 3 с точностью до условия вещественности, которое, разумеется, может не соблюдаться. Роль постоянных $c_1, \ldots, c_n$ играют при этом $\alpha_1, \ldots, \beta_m$. Коэффициенты формальных степенных рядов, фигурирующих в этом формальном решении, как нетрудно усмотреть, представляются как произведения показательных функций $e^{-\lambda_i t}$ или соответственно $e^{\lambda_i t}$ на целые рациональные функции t.

К сожалению, из текста главы IV выясняется, что Биркгоф придает выражениям $e^{\gamma_i t}$ и $e^{-\gamma_i t}$ какой-то иной, не ясный для редакции смысл, отступая от своего собственного определении общего формального решения, данного в § 3 главы III.

13) Возможность группировки множителей в пары вида $(\lambda, -\lambda)$ доказывается, далее, для более общего случая пфаффовых систем в примечании 24 к главе III. Что же касается вещественности или чистой мнимости множителей, то, как и для случая обыкновенного равновесия, утверждение Биркгофа ошибочно.

14) Как будет доказано в главе IV, обобщенная точка равновесия «общего типа» не может соответствовать периодическому движению гамильтоновой системы с главной функцией, не зависящей явно от t, если исключить случай покоя, при котором мы имеем обыкновенное равновесие.

15) Сравните аналогичное рассуждение в § 5 этой главы.

16) Приведенное Биркгофом доказательство этого утверждения относится лишь к случаю отсутствия кратных «множителей». Утверждение справедливо, однако, во всех случаях, что может быть доказано следующим образом.

Обозначим через A, B и y соответственно матрицы

$$\left\| \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right\|_{x=0}^{i,j=1,\dots,2m}, \qquad \left\| \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{x=0}^{i,j=1,\dots,2m}, \qquad \left\| \begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{2m} \end{matrix} \right\|.$$

Тогда уравнения вариации могут быть записаны под видом

$$A\frac{dy}{dt} = By.$$

Но так как согласно предположению существует матрица A^{-1}, обратная матрице A, то это матричное уравнение равносильно следующему:

$$\frac{dy}{dt} = A^{-1}By.$$

Отсюда следует, что «множители» являются корнями уравнения

$$\det(A^{-1}B - \lambda E) = 0,$$

где через E обозначена единичная матрица и $\det M$ означает определитель матрицы M. Принимая, далее, во внимание, что $\det A \neq 0$, заключаем, что последнее уравнение равносильно следующему:

$$\det(B - \lambda A) = 0.$$

Наше утверждение будет доказано, если нам удастся показать, что левая часть последнего уравнения есть четная функция λ.

Чтобы убедиться в последнем, заметим, что $A^T = -A$, $B^T = B$, где M^T означает транспонированную (отраженную от главной диагонали) матрицу M. В силу этого имеем:

$$\det(B + \lambda A) = \det(B + \lambda A)^T = \det(B^T + \lambda A^T) = \det(B - \lambda A),$$

что и требуется доказать.

17) Как мы знаем (см. примечание 6 к этой главе), последнее утверждение ошибочно уже в частном случае гамильтоновой проблемы.

18) В этом случае выражения $c_j - d_j$ вещественны. В самом деле, старые переменные $x_1, \ldots, x_{2m}$ связаны с новыми $p_1, \ldots, p_m$, $q_1, \ldots, q_m$ вещественным линейным преобразованием:

$$x_i = \sum_{k=1}^{m} (e_{ik}p_k + f_{ik}q_k) \quad (i = 1, \ldots, 2m),$$

и, как нетрудно видеть,

$$c_j = \sum_{i,k=1}^{2m} a_{ik}e_{kj}f_{ij}, \quad d_j = \sum_{i,k=1}^{2m} a_{ik}e_{ij}f_{kj},$$

где a_{ik} — коэффициент при x_k в X_i — также вещественный (ср. примечание 7 к главе III).

19) Доказательство, как в примечании 9 к главе III.

20) При этом

$$\sum_{i=1}^{m} (c_i - d_i)p_i\, dq_i$$

перейдет в

$$\sqrt{-1} \sum_{i=1}^{m} \overline{p}_i\, d\overline{q}_i.$$

От множителя $\sqrt{-1}$ мы можем освободиться путем деления на него функции Z. При этом, разумеется, надо предполагать, что все пары (p_i, q_i) являются комплексными сопряженными.

21) Последний шаг — исключение коэффициентов $c_i - d_i$ при $p_i\, dq_i$ — всегда может быть осуществлен хотя бы по формулам

$$\overline{p}_i = p_i, \quad \overline{q}_i = (c_i - d_i)q_i \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Однако результирующее линейное преобразование при этом, вообще говоря, не будет специального типа, рассмотренного в § 4.

22) Этот нормальный вид P_i состоит здесь в том, что линейная часть P_i сводится к p_i.

23) В действительности $p_i q_i'$ переходит с точностью до полной производной не в $\overline{p}_i\overline{q}_i'$, а в $-\sqrt{-1}\overline{p}_i\overline{q}_i'$. Множители $-\sqrt{-1}$ не мешают в дальнейших выкладках, если *все* пары (p_i, q_i) являются комплексными сопряженными, так как тогда весь варьируемый интеграл можно умножить на $\sqrt{-1}$. Они, однако, являются нежелательными, если не все пары (p_i, q_i), а лишь некоторые из них являются комплексными сопряженными.

Аналогичные обстоятельства имеют место при преобразованиях, применяемых в § 7 и 11. Именно из-за этих обстоятельств эти преобразования непригодны в общем случае для приведения рассмотренных там проблем к нормальной форме.

24) Здесь это легко вытекает из следующего рассуждения. В § 5 было доказано, что при отсутствии кратных «множителей» любая задача обобщенного равновесия приводится к такой, для которой уравнения вариации имеют постоянные коэффициенты, посредством линейного преобразования зависимых переменных с коэффициентами, периодически зависящими от t с периодом τ. При этом преобразовании сохраняется пфаффова форма дифференциальных уравнений согласно § 12 главы II. (То обстоятельство, что преобразование содержит t, не отражается на этом факте.) Нетрудно также видеть, что сохраняются и «множители». Пусть в самом деле преобразование от старых переменных $x_1, \ldots, x_{2m}$ к новым $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{2m}$ выражается матричным равенством

$$x = A\overline{x},$$

где A — невырождающаяся матрица с периодическими коэффициентами. Пусть матрица

$$\overline{Y} = \begin{Vmatrix} \overline{y}_{11} & \cdots & \overline{y}_{1,2m} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{y}_{2m,1} & \cdots & \overline{y}_{2m,2m} \end{Vmatrix}$$

дает фундаментальную систему решений уравнений вариации преобразованной системы таким образом, что каждый ее столбец соответствует отдельному решению. Полагая тогда

$$Y = A\overline{Y}, \tag{1}$$

получим аналогичную матрицу Y, дающую фундаментальную систему решений первоначальных уравнений вариации.

В силу периодичности коэффициентов этих уравнений имеем:

$$Y(t+\tau) = Y(t)C, \tag{2}$$

где C — матрица с постоянными коэффициентами.

Из равенств (1) и (2) заключаем, что

$$\overline{Y}(t+\tau) = \overline{Y}(t)C.$$

Отсюда следует, что «множители» обеих систем уравнений вариации — первоначальной и преобразованной — являются инвариантами одной и той же матрицы C. А так как новая система имеет постоянные коэффициенты и соответствует пфаффовой проблеме, то согласно § 10 (см. примечание 16 к главе III) «множители» обеих систем могут быть разбиты на пары вида $(\lambda,\ -\lambda)$.

Следует отметить, что предположение об отсутствии кратных «множителей» и здесь является излишним. В самом деле, в предыдущем рассуждении мы лишь в одном месте пользовались этим предположением — при ссылке на доказанную в § 5 возможность приведения системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами к системе с постоянными коэффициентами посредством надлежащего линейного преобразования зависимых переменных с периодическими коэффициентами. Но эта возможность имеет место во всех случаях, как доказано, например, в цитированной монографии А. М. Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения» (см. в особенности § 47 главы III этой монографии).

Таким образом, разбиение «множителей» на пары вида $(\lambda,\ -\lambda)$ осуществимо для всех случаев пфаффовой задачи обобщенного равновесия.

Другое доказательство этого утверждения читатель найдет в цитированной статье Винтнера.

К главе 4

1) Ср. примечание 14 к главе III.

2) Точнее говоря, если $\lambda_k \neq \dfrac{2\pi l\sqrt{-1}}{\tau}$, где l — целое число.

3) Рассуждение, приведенное Биркгофом для доказательства этого утверждения, логически неправильно. В самом деле, он исходит из предположения, что все $2m$ «множителей» различны между собой, и доказывает, что тогда среди них имеются два, равных нулю. Но отсюда следует только то, что все множители не могут быть различными.

Действительное доказательство существования равных нулю множителей содержится в непосредственно следующем тексте, где устанавливается существование нетривиального периодического решения уравнений вариации. Из факта существования такого решения существование одного, равного нулю множителя непосредственно следует согласно теореме, приведенной в примечании 1 к главе III. Второй, равный нулю множитель существует в силу общей теоремы о разбиении множителей на пары $(\lambda, -\lambda)$ (см. примечание 24 к главе III).

4) Это решение не тривиально, так как случай обыкновенного равновесия исключен из рассмотрения.

5) Существование аналитического семейства периодических решений с параметром c можно доказать, пользуясь вводимыми в конце этого параграфа новыми переменными и применяя изложенный в § 9 метод аналитического продолжения Пуанкаре. При этом на исходное периодическое движение накладываются некоторые ограничения.

6) В действительности решение уравнений, получаемое таким образом, вообще говоря, не будет периодическим, так как в семействе периодических решений с параметром c период в общем случае будет зависеть от этого параметра.

Рассмотрим, например, гамильтонову динамическую систему одной степени свободы с гамильтоновой функцией $H = (p^2 + q^2)^2$. Общее решение уравнений Гамильтона имеет здесь вид

$$p = c^{1/4}\cos[4c^{1/2}(t+k)], \quad q = c^{1/4}\sin[4c^{1/2}(t+k)],$$

где c — постоянная энергии, k — другая постоянная интегрирования. Это решение при $c > 0$ периодично с периодом $\dfrac{\pi}{2c^{1/2}}$. Дифференцирование по параметрам k и c дает при $k = 0$ два независимых решения уравнений вариации:

$$\begin{aligned} P &= -\sin(4c^{1/2}t), & P &= -t\sin(4c^{1/2}t) + \frac{1}{8}c^{-1/2}\cos(4c^{1/2}t), \\ Q &= \cos(4c^{1/2}t), & Q &= t\cos(4c^{1/2}t) + \frac{1}{8}c^{-1/2}\sin(4c^{1/2}t). \end{aligned}$$

Из них только первое периодично. Второго, независимого периодического решения уравнений вариации здесь не существует.

7) Существование такой системы координат Биркгоф, по-видимому, считает очевидным. В действительности же путь к ее построению длинен и кропотлив.

8) Это следует из того, что при вещественных $x_1, \ldots, x_{2m}$ значения переменных p_j и q_j суть сопряженные комплексные числа.

9) Более понятным образом это доказывается так. При комплексных сопряженных парах начальных значений p_j и q_j эти пары значений все время должны оставаться сопряженными комплексными, так как тогда начальные значения переменных $x_1, \ldots, x_{2m}$, — вещественны, и силу чего эти переменные все время вещественны. Отсюда следует, что при комплексных сопряженных парах (p_j, q_j) правые части уравнений (1) главы IV будут комплексными сопряженными. Принимая во внимание порядок малости членов $L_{i,\,s+1}$ и $M_{i,\,s+1}$, заключаем отсюда, что $\partial H/\partial \pi_i$ есть величина, сопряженная с $-\partial H/\partial \pi_i$, т. е. чисто мнимая. А так как $H = 0$ при $\pi_i = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, то и H — чисто мнимое.

10) В самом деле, с помощью методов главы III мы убеждаемся в возможности полной нормализации уравнений (1) главы IV посредством формального преобразования

$$p_i = \overline{p}_i + F_{i,\,s+1}(\overline{p}, \overline{q}, t), \quad q_i = \overline{q}_i + G_{i,\,s+1}(\overline{p}, \overline{q}, t) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

где $F_{i,\,s+1}$ и $G_{i,\,s+1}$ — формальные степенные ряды в $\overline{p}_1, \ldots, \overline{q}_m$, начинающиеся с членов порядка не ниже $s+1$, причем формальный степенной ряд для гамильтоновой функции $\overline{H}(\overline{p}, \overline{q})$ будет начинаться с многочлена

$$H(\overline{p}, \overline{q}) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \overline{p}_j \overline{q}_j + H_1(\overline{p}, \overline{q}) + \ldots + H_{\overline{s}}(\overline{p}, \overline{q}). \tag{1}$$

Согласно § 8 главы III нормализованные уравнения будут иметь общее формальное решение:

$$\overline{p}_i = p_i^0 e^{-\overline{\gamma}_i (t - t_0)}, \quad \overline{q}_i = q_i^0 e^{\overline{\gamma}_i (t - t_0)} \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

где

$$\overline{\gamma}_i = \frac{\partial \overline{H}(\pi_1^0, \ldots, \pi_m^0)}{\partial \pi_i^0}, \quad \pi_i^0 = \overline{p}_i^0 \overline{q}_i^0. \tag{2}$$

Этому формальному решению соответствует формальное решение уравнений (1) главы IV вида

$$p_i = p_i^0 e^{-\overline{\gamma}_i(t-t_0)} + F_{i,\,s+1}(p_j^0 e^{-\overline{\gamma}_j(t-t_0)},\; q_j^0 e^{\overline{\gamma}_j(t-t_0)},\; t),$$
$$q_i = q_i^0 e^{\overline{\gamma}_i(t-t_0)} + G_{i,\,s+1}(p_j^0 e^{-\overline{\gamma}_j(t-t_0)},\; q_j^0 e^{\overline{\gamma}_j(t-t_0)},\; t).$$

В силу (1) и (2) оно может быть представлено под видом

$$p_i = p_i^0 e^{-\gamma_i(t-t_0)} + F'_{i,\,s+1}(p_j^0,\; q_j^0,\; t),$$
$$q_i = q_i^0 e^{\gamma_i(t-t_0)} + G'_{i,\,s+1}(p_j^0,\; q_j^0,\; t),$$

где $F'_{i,\,s+1}$ и $G'_{i,\,s+1}$ — формальные степенные ряды в p^0 и q^0 с зависящими от t коэффициентами, не содержащие членов степени ниже $s+1$.

Возвращаясь теперь к переменным $x_1, \ldots, x_{2m}$, получаем общее формальное решение вида

$$x_i = \Phi_i(p_j^0 e^{-\gamma_j(t-t_0)},\; q_j^0 e^{\gamma_j(t-t_0)},\; t) + \Phi'_{i,\,s+1}(p_j^0,\; q_j^0,\; t),$$

где $\Phi'_i(p_j,\, q_j,\, t)$ — сходящиеся ряды, осуществляющие преобразование от x к p и q; $\Phi_{i,\,s+1}$ — формальные ряды в p_j^0, q_j^0, не содержащие членов порядка ниже $s+1$ в этих переменных.

11) Перевод точен. Смысл термина «начальные значения произвольных постоянных» не ясен редакции.

12) Здесь выясняется, что термин «формальное общее решение» («General Formal Solution») не имеет у Биркгофа единого ясного смысла. В самом деле, если «формальное общее решение» $p_i = p_i^0 e^{-\gamma_i t}$, $q_i = q_i^0 e^{\gamma_i t}$ нормализованных уравнений расшифровать в согласии с определением, сформулированным Биркгофом в § 3 главы III, то коэффициенты формальных рядов для координат x_i будут, вообще говоря, не «тригонометрическими суммами», а произведениями показательных функций $e^{\lambda_i t}$, $e^{-\lambda_i t}$ на целые рациональные функции t (сравните примечание 12 к главе III). Следовательно, термин «формальное общее решение» применяется Биркгофом в каком-то другом, не определенном им смысле.

К счастью, самая существенная часть утверждения, приведенного курсивом в § 2 главы IV, оказывается верной. А именно, координаты $x_1, \ldots, x_m$ действительно представимы тригонометрическими суммами указанного вида с точностью до величин порядка u_0^{s+1} в течение промежутка времени порядка $\dfrac{1}{u_0^{s+1}}$. Этот результат непосредственно следует из проведенного в § 2 рассмотрения решений системы (1), и он совершенно независим от каких бы то ни было «формальных общих решений».

13) Здесь d и D — положительные постоянные.

14) Эти ряды связаны друг с другом соотношениями

$$\begin{aligned} &P_i^*(q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m) = \\ &\quad = Q_i(q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m) \qquad (i = 1, \ldots, m), \end{aligned} \tag{1}$$

где $F^*(z_1, \ldots, z_m)$ означает степенной ряд, получаемый из ряда $F(z_1, \ldots, z_m)$ путем замены коэффициентов сопряженными комплексными величинами.

В самом деле, уравнения

$$\frac{dp_i}{dt} = -\lambda_i p_i + P_i, \; \frac{dq_i}{dt} = \lambda_i q_i + Q_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

таковы, что коль скоро начальные значения всех пар (p_i, q_i) суть сопряженные комплексные числа, то при всяком вещественном t каждое q_i будет сопряженным с соответствующим p_i. Отсюда непосредственно следует, что при $q_i = p_i^*$ $(i = 1, \ldots, m)$ имеем:

$$Q_j(p, q; t) = [P_j(p, q; t)]^*,$$

и потому

$$Q_j(p, q; t) = P_j^*(p, q; t).$$

Но справедлива следующая лемма: если аналитическая функция

$$F(p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m)$$

обращается в нуль, коль скоро $q_i = p_i^*$ $(i = 1, \ldots, m)$, то она тождественно равна нулю. Из этой леммы непосредственно следует на основании только что сказанного, что равенство (1) всегда соблюдается.

Сама же лемма легко доказывается с помощью преобразования

$$p_i = u_i + \sqrt{-1}v_i, \; q_i = u_i - \sqrt{-1}v_i \quad (i = 1, \ldots, m),$$

которое таково, что новые переменные u, v вещественны, когда старые связаны соотношениями $q_i = p_i^*$ $(i = 1, \ldots, m)$.

15) Нетрудно видеть, что если в уравнении

$$P_{i2} + \sum_{j=1}^{m} \left(p_j \frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial p_j} - q_j \frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial q_j} \right) \lambda_j - \lambda_i \varphi_{i2} - \frac{\partial \varphi_{i2}}{\partial t} = 0$$

поменять местами каждое p_j с соответствующим q_j и заменить коэффициенты сопряженными числами, то получится уравнение:

$$Q_{i2} + \sum_{j=1}^{m} \left(p_j \frac{\partial \psi_{i2}}{\partial p_j} - q_j \frac{\partial \psi_{i2}}{\partial q_j} \right) \lambda_j + \lambda_i \psi_{i2} - \frac{\partial \psi_{i2}}{\partial t} = 0,$$

где

$$\psi_{i2}(p,\, q;\, t) = \varphi_{i2}^{*}(q,\, p;\, t). \tag{1}$$

Чтобы в этом убедиться, надо лишь принять во внимание отмеченную в предыдущем примечании связь между рядами P_i и Q_i, а также чистую мнимость постоянных λ_i.

Отсюда следует, что формы φ_{i2} и ψ_{i2}, однозначно определяемые на основании этих уравнений и условий периодичности, связаны соотношением (1). Таким образом, примененное преобразование координат таково, что $\overline{q}_i = \overline{p}_i^{*}$ $(i = 1, \ldots, m)$, коль скоро $q_i = p_i^{*}$ $(i = 1, \ldots, m)$, т. е. коль скоро $x_1, \ldots, x_{2m}$ вещественны.

16) И это второе преобразование оказывается таким, что новые p_i и q_i будут сопряженными комплексными числами при вещественных $x_1, \ldots, x_{2m}$. Доказывается это так же, как аналогичное свойство предыдущего преобразования (см. примечание 15 к этой главе).

17) См. предыдущее примечание.

18) Уравнения эти таковы, что $q_i = p_i^{*}$ $(i = 1, \ldots, m)$ при всяком вещественном t, коль скоро это имеет место при $t = t_0$. Отсюда следует, что коэффициенты c_{ij} чисто мнимые.

19) M_i суть степенные ряды с чисто мнимыми коэффициентами, что усматривается шаг за шагом таким же образом, как, в частности, мнимость коэффициентов c_{ij} (см. предыдущее примечание).

20) В самом деле, если имеем последовательность полиномов $P_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ степени, не превосходящей n, сходящуюся в $n+1$ различных точках $t_1, \ldots, t_{n+1}$, то, полагая

$$a_j = \lim_{i \to \infty} P_i(t_j) \quad (j = 1, \ldots, n+1),$$

согласно интерполяционной формуле Лагранжа находим:

$$P_i(t) = \sum_{j=1}^{n+1} P_i(t_j)\frac{(t-t_1)\dots(t-t_{j-1})(t-t_{j+1})\dots(t-t_{n+1})}{(t_j-t_1)\dots(t_j-t_{j-1})(t_j-t_{j+1})\dots(t_j-t_{n+1})}$$

при $-\infty < t < \infty$, откуда

$$\lim_{i\to\infty} P_i(t) = \sum_{j=1}^{n+1} a_j\frac{(t-t_1)\dots(t-t_{j-1})(t-t_{j+1})\dots(t-t_{n+1})}{(t_j-t_1)\dots(t_j-t_{j-1})(t_j-t_{j+1})\dots(t_j-t_{n+1})}.$$

Таким образом, предел последовательности полиномов P_i в этом случае также является полиномом степени, не превосходящей n.

21) Согласно обычному определению система называется *обратимой*, если она переходит сама в себя при замене t на $-t$.

22) Выражение в прямых скобках является степенным рядом в произведениях $\xi_j\eta_j$. Но из формул (9) главы IV следует, что каждое такое произведение является степенным рядом в произведениях $\overline{\xi}_j\overline{\eta}_j$ без постоянного члена. Следовательно, выражение в прямых скобках и $\overline{U}_i$, являются степенными рядами в $\overline{\xi}_j\eta_j$ $(j = 1, \dots, m)$. При этом постоянный член ряда для $\overline{U}_i$, равен постоянному члену выражения $\overline{f}_i h_i U_i$, разложенного по степеням $\overline{\xi}_j\overline{\eta}_j$, а этот последний в силу равенства $f_i h_i = 1$ совпадает с постоянным членом U_i, т. е. равен λ_i. Аналогичным образом обстоит вопрос с выражениями $\overline{V}_i$.

23) Здесь Биркгоф почему-то считает возможным сразу рассматривать преобразования такого специального типа вместо общих, при которых

$$\overline{\xi}_i = \sum_{j=1}^{m}(a_{ij}\xi_j + b_{ij}\eta_j) + \dots,$$

$$\overline{\eta}_i = \sum_{j=1}^{m}(c_{ij}\xi_j + d_{ij}\eta_j) + \dots$$

При этом преобразовании мы должны иметь:

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}\xi_j + b_{ij}\eta_j) = \sum_{j=1}^{m}\left[\left(\lambda_j a_{ij} + \frac{da_{ij}}{dt}\right)\xi_j + \right.$$

$$\left. + \left(-\lambda_j b_{ij} + \frac{db_{ij}}{dt}\right)\eta_j\right] + \dots \equiv \lambda_i\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}\xi_j + b_{ij}\eta_j) + \dots$$

откуда

$$\frac{da_{ij}}{dt} + (\lambda_j - \lambda_i)a_{ij} = 0, \qquad \frac{db_{ij}}{dt} - (\lambda_j + \lambda_i)b_{ij} = 0$$

и, далее,

$$a_{ij} = a_{ij}^0 e^{(\lambda_i - \lambda_j)t}, \; b_{ij} = b_{ij}^0 e^{(\lambda_i + \lambda_j)t} \quad (i,\, j = 1, \ldots, m).$$

Принимая во внимание, что между числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ и $2\pi\sqrt{-1}/\tau$ нет линейных соотношений с целыми коэффициентами и что функции $a_{ij}(t)$ и $b_{ij}(t)$ должны быть периодическими с периодом τ, заключаем отсюда, что

$$\begin{aligned} &a_{ii} = a_{ii}^0 = \text{const} \quad &&(i = 1, \ldots, m), \\ &a_{ij} = 0 &&(i,\, j = 1, \ldots, m;\; i \neq j), \\ &b_{ij} = 0 &&(i,\, j = 1, \ldots, m). \end{aligned}$$

Аналогичным образом усматриваем, что

$$\begin{aligned} &c_{ij} = 0 &&(i,\, j = 1, \ldots, m), \\ &d_{ii} = \text{const} \quad &&(i = 1, \ldots, m), \\ &d_{ij} = 0 &&(i,\, j = 1, \ldots, m;\; i \neq j). \end{aligned}$$

24) См. предыдущее примечание.

25) Биркгоф рассматривает здесь лишь те преобразования, при которых $\overline{\eta}_i = \overline{\xi}_i^*$ $(i = 1, \ldots, n)$, коль скоро $\eta_i = \xi_i^*$ $(i = 1, \ldots, m)$. Это законно, так как именно эти преобразования соответствуют вещественным преобразованиям первоначальных вещественных координат.

26) При выводе этого уравнения существенное значение имеет то, что U_i и $\overline{U}_i$ разлагаются по степеням $\xi_j\eta_j$ и соответственно $\overline{\xi}_j\overline{\eta}_j$, в силу чего в этих разложениях отсутствуют члены, линейные в ξ_j, η_j и $\overline{\xi}_j$, $\overline{\eta}_j$.

27) В самом деле, как мы видели выше, постоянные члены в h_i и k_i суть сопряженные комплексные числа.

28) См. *А. М. Ляпунов.* Общая задача об устойчивости движения, 2-е изд., Ленинград, 1935.

К главе 5

1) Этот факт может быть доказан гораздо проще и строже. Легко убедиться, что предел y при $t \to \infty$ равен нулю.

В самом деле, обозначая через K наибольшее значение абсолютной величины функции t в рассматриваемом квадрате и принимая во внимание, что $\dfrac{dy}{dt} = f(x, y)$, имеем:

$$y(t) > \frac{1}{2}y(t_1)$$

при

$$0 < t_1 < t < t_1 + \frac{y(t_1)}{2K}.$$

Отсюда в силу того, что $\dfrac{dx}{dt} = y$, следует, что

$$x(t_2) - x(t_1) > \frac{[y(t_1)]^2}{4K},$$

где

$$t_2 = t_1 + \frac{y(t_1)}{2K}.$$

Тем более мы имеем при всяком $t > 0$

$$y^2 < 4K(\overline{x} - x),$$

так как x — возрастающая функция t. А так как x стремится к $\overline{x}$ при $t \to \infty$, то отсюда и следует, что $y \to 0$.

Далее легко доказать, что $\overline{x} = 0$. Допустив противное, мы имели бы в силу непрерывности функции $f(x, y)$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{dy}{dt} = \lim_{t\to\infty} f(x, y) = f(x, 0) \neq 0,$$

что несовместимо со стремлением y к нулю.

2) Все это вовсе не столь очевидно.

3) Такие слова обычно означают у Биркгофа привлечение геометрической интуиции.

4) В полноте этого перечня есть основания сомневаться.

5) Здесь Биркгоф упускает из виду тот случай, когда никакой самой внешней замкнутой кривой нет и в то же время существуют точки, лежащие вне всяких замкнутых кривых. Этот случай осуществляется, например, при

$$f(x, y) = x(y^2 - 1).$$

Кривые движения образуют здесь семейство, определяемое уравнением

$$y^2 = 1 + ce^{x^2} \quad (c \geqslant -1), \tag{1}$$

где c — параметр семейства. При этом, когда $c \geqslant 0$, равенство (1) определяет не одну, а две кривых движения, одна из которых лежит выше, другая ниже оси абсцисс. При $c = -1$ кривая вырождается в точку (начало координат). При $-1 < c < 0$ имеем замкнутую кривую вокруг начала координат. При $c \to 0$ эта кривая вытягивается в бесконечность в направлении оси x и при $c = 0$ переходит в две параллельные прямые $y = \pm 1$. Движения по ним, очевидно, двусторонне неустойчивы. Прямые эти лежат вне всех замкнутых кривых, среди которых нет никакой самой внешней.

6) Этим Биркгоф хочет лишь сказать, что на многообразии M должны существовать замкнутые кривые, не сводящиеся в точку непрерывной деформацией.

7) Имеется в виду несводимость в точку посредством непрерывных деформаций, при которых деформируемый путь все время остается инвариантным относительно преобразования. — *Прим. перев.*

8) Имеется в виду эквивалентность относительно тех же деформаций. — *Прим. перев.*

9) Определение кратного периодического движения дано ниже, в § 9.

10) Здесь и в дальнейшем имеет силу следующая, вовсе не очевидная теорема.

Если f есть непрерывное отображение m-мерной гиперсферы S^m в самое себя, получаемое из тождественного отображении посредством непрерывного изменения, то $f(S^m) = S^m$.

Простое доказательство читатель найдет, например, в XI главе книги *Г. Зейферта* и *В. Трельфалля* «Топология», ГОНТИ, 1938.

11) См. предыдущее примечание.

12) Несколько детализируя приведенную схему доказательства, нетрудно усмотреть, что ссылка на теорему Осгуда является совершенно излишней.

В самом деле, допустим, что при первом шаге длина замкнутой кривой убывает меньше чем на ε. Тогда каждая из геодезических дуг P_iP_{i+1} короче прежней дуги P_iP_{i+1} меньше, чем на ε, и, следовательно, длины всех геодезических дуг различаются между собою меньше, чем на ε. Следовательно, Q_2 будет отстоять от середины геодезической дуги P_2P_3 меньше, чем на ε, Q_3 — от середины дуги P_3P_4 меньше, чем на 2ε и т. д. Вообще любое Q_i будет отстоять от середины дуги P_iP_{i+1} меньше, чем на $n\varepsilon$. Отсюда следует, что геодезические дуги $Q_{i-1}P_i$ и P_iQ_i будут иметь каждая длину, большую, чем $\frac{d}{2n} - n\varepsilon$, что при достаточно малом ε больше, чем $\frac{d}{3n}$. Следовательно, если угол между этими дугами больше δ, то их сумма превосходит длину геодезической $Q_{i-1}Q_i$ на величину, большую некоторой положительной постоянной, зависящей только от d, n, δ и поверхности M. Отсюда вытекает утверждение леммы.

13) Все это по меньшей мере неточно. В действительности из общей теории линейных преобразований (см., например, *М. Бохер.* Введение в высшую алгебру. ГТТИ, 1933, гл. 21) следует, что в рассматриваемом случае можно так преобразовать координаты, чтобы уравнения вариации приняли один из видов:

$$\text{I.}\quad \frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1, \quad \frac{dy_2}{dt} = y_1 + \lambda_1 y_2, \quad \frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i \quad (i = 3, \ldots, m),$$

$$\frac{dz_1}{dt} = -\lambda_1 z_1, \quad \frac{dz_2}{dt} = z_1 - \lambda_1 z_2, \quad \frac{dz_i}{dt} = -\lambda_i z_i \quad (i = 3, \ldots, m).$$

$$\text{II.}\quad \frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i, \quad \frac{dz_i}{dt} = -\lambda_i z_i \quad (i = 1, \ldots, m).$$

III. Для y то же, что в случае I; для z то же, что в случае II.

IV. Для y то же, что в случае II; для z то же, что в случае I.

Рассмотрим случай I, который, по-видимому, только и имеет в виду Биркгоф.

Как и в случае отсутствия кратных множителей, проблема сводится к рассмотрению определителя

$$D = \begin{vmatrix} y_1^1(2\pi) - 1 & \ldots & y_1^{2m}(2\pi) \\ \vdots & & \vdots \\ y_m^1(2\pi) & \ldots & y_m^{2m}(2\pi) \\ z_1^1(2\pi) & \ldots & z_1^{2m}(2\pi) \\ \vdots & & \vdots \\ z_m^1(2\pi) & \ldots & z_m^{2m}(2\pi) - 1 \end{vmatrix},$$

где

$$y_1^i, \ldots, y_m^i, \ z_1^i, \ldots, z_m^i$$

есть решение уравнений вариации, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_j^i(0) = \delta_{ij}, \ z_j^i(0) = 0 \qquad \text{при } i = 1, \ldots, m;$$
$$y_j^i(0) = 0, \quad z_j^i(0) = \delta_{i-m,j} \text{ при } i = m+1, \ldots, 2m.$$

В силу этих начальных условий при $i = 1, 2$ получаем, соответственно, решения:

$$y_1^1 = e^{\lambda_1 t}, \ y_2^1 = te^{\lambda_1 t}, \ y_3^1 = \ldots = z_m^1 = 0;$$
$$y_1^2 = 0, \qquad y_2^2 = e^{\lambda_1 t}, \ y_3^2 = \ldots = z_m^2 = 0.$$

Аналогичным образом при $i = m+1, m+2$ имеем:

$$y_1^{m+1} = \ldots = y_m^{m+1} = 0, \ z_1^{m+1} = e^{-\lambda_1 t}, \ z_2^{m+1} = te^{-\lambda_1 t},$$
$$z_3^{m+1} = \ldots = z_m^{m+1} = 0;$$
$$y_1^{m+2} = \ldots = y_m^{m+2} = 0, \ z_1^{m+2} = 0, \ z_2^{m+2} = e^{-\lambda_1 t},$$
$$z_3^{m+2} = \ldots = z_m^{m+2} = 0.$$

Наконец, для остальных значений i имеем:

$$y_j^i = \delta_{ij} e^{\lambda_i t}, \ z_j^i = 0 \qquad (i = 3, \ldots, m);$$
$$y_j^i = 0, \qquad z_j^i = \delta_{i-m,j} e^{-\lambda_i t} \quad (i = m+3, \ldots, 2m).$$

Отсюда, как и при отсутствии кратных множителей, получаем:

$$D = \prod_{j=1}^{m} (e^{2\pi\lambda_j} - 1)(e^{-2\pi\lambda_j} - 1) \neq 0,$$

если ни один из множителей λ_j не является целым кратным $\sqrt{-1}$.

Совершенно аналогичным образом рассматриваются другие случаи.

14) В действительности так определенная функция φ может вовсе не быть аналитической на самой поверхности S, так как даже ее полная производная по t может терпеть разрыв при пересечении этой поверхности.

15) В действительности из сделанных предположений вытекает лишь, что $\lambda > 0$ при $z \neq 0$ и что λ — аналитическая функция. Условие положительности λ и при $z = 0$ является независимым допущением, существенным для дальнейшего (см. следующее примечание).

16) Во всем этом можно убедиться следующим образом.

Обозначим через λ_1 и λ_2 минимум и максимум функции λ в ограниченной области $U \leqslant 0$. В силу условия положительности λ (см. предыдущее примечание) имеем $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2$. Предполагая, что z и z' не обращаются в нуль одновременно, определим вспомогательные переменные r_1, r_2, φ_1, φ_2 соотношениями

$$\sqrt{\lambda_i} z = r_i \sin\varphi_i, \quad z' = r_i \cos\varphi_i, \quad r_i > 0 \quad (i = 1, 2).$$

В силу дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 z_i}{dt^2} + \lambda z = 0$$

имеем

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \sqrt{\lambda_i}\,\frac{z'^2 + \lambda z^2}{z'^2 + \lambda_i z^2},$$

откуда

$$\sqrt{\lambda_1} \leqslant \frac{d\varphi_1}{dt}, \qquad \frac{d\varphi_2}{dt} \leqslant \sqrt{\lambda_2}.$$

Принимая во внимание, что координата z обращается в нуль тогда и только тогда, когда $\varphi_i = n\pi$, заключаем отсюда, что обращение z в нуль имеет место не менее, чем однажды, в течение всякого промежутка времени, большего, чем $\dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda_1}}$ и не более, чем однажды, в течение всякого промежутка времени, меньшего, чем $\dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda_2}}$, если только z не равно нулю тождественно.

17) Соображения, предшествующие этому утверждению, содержат лишь некоторый намек на его доказательство. Само же доказательство можно вести следующим образом.

Будем рассматривать решение наших дифференциальных уравнений в зависимости от начального положения точки на секущей поверхности. Величины x, y, z, x', y', z' являются в этом решении функциями от x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0 и t, причем первые пять аргументов связаны между собою уравнением энергии

$$\frac{1}{2}\left({x'_0}^2 + {y'_0}^2 + {z'_0}^2\right) + U(x'_0, y'_0, 0) = 0,$$

из которого в силу условия $z'_0 \geqslant 0$ величина z'_0 определяется как однозначная непрерывная функция x_0, y_0, x'_0, y'_0, аналитическая при $z'_0 > 0$. Таким образом, имеем:

$$x = x(x_0, y_0, x'_0, y'_0, t), \ \ldots, \quad z' = z'(x_0, y_0, x'_0, y'_0, t).$$

Определим еще функцию $\zeta(x_0, y_0, x'_0, y'_0, t)$ дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \lambda(x, y, z)\zeta = 0 \tag{1}$$

(содержащим x_0, y_0, x'_0, y'_0 в качестве параметров) и начальными условиями

$$\zeta_0 = 0, \ \zeta'_0 = 1. \tag{2}$$

Так как z удовлятворяет тому же дифференциальному уравнению и начальному условию $z = 0$, то для внутренних точек (x_0, y_0, x'_0, y'_0) поверхности S имеем, очевидно,

$$\zeta = \frac{z}{z'_0}. \tag{3}$$

Для точек границы поверхности S правая часть этого равенства теряет смысл, так как и числитель, и знаменатель обращаются в нуль. Тем не менее, уравнение (1), принимающее вид

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \lambda(x, y, 0)\zeta = 0,$$

совместно с начальными условиями (2) продолжает и в этом случае определять функцию ζ.

Из теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметров и начальных условий (см. главу I) следует, что функции x, y, z, x', y', z', ζ непрерывно зависят от точки (x_0, y_0, x'_0, y'_0) поверхности S и от времени t, причем $\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}$ есть непрерывная функция тех же аргументов. При этом в силу начальных условий (2) ζ, рассматриваемая при фиксированных x_0, y_0, x'_0, y'_0 как функция t, никогда не обращается тождественно в нуль.

Обозначим через $\tau(x_0, y_0, x'_0, y'_0)$ наименьший положительный корень уравнения

$$\zeta(x_0, y_0, x'_0, y'_0, t) = 0, \tag{4}$$

удовлетворяющий условию $\dfrac{d\zeta}{dt} > 0$. Так как рассуждение, проведенное в предыдущем примечании, применимо к нашему уравнению (1), то такой корень существует и не превосходит $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\lambda_1}}$. Покажем, что τ является непрерывной функцией точки секущей поверхности.

Будем рассматривать произвольную (внутреннюю или граничную) точку $(x_0^0, y_0^0, {x'_0}^0, {y'_0}^0)$ поверхности S. Так как производная ζ по t непрерывна в точке $(x_0^0, y_0^0, {x'_0}^0, {y'_0}^0, \tau^0)$, где $\tau^0 = \tau(x_0^0, y_0^0, {x'_0}^0, {y'_0}^0)$ положительна, то согласно известной теореме о неявных функциях существуют положительные числа ε и δ, такие, что при

$$\max\left[|x_0^0 - x_0|, |y_0^0 - y_0|, |{x'_0}^0 - x'_0|, |{y'_0}^0 - y'_0|\right] < \delta$$

уравнение (4) имеет единственное решение:

$$t = \tau_1(x_0, y_0, x'_0, y'_0),$$

удовлетворяющее условию

$$|t - \tau^0| < \varepsilon,$$

причем определяемая отсюда функция τ_1 непрерывна. Остается показать, что в достаточно малой окрестности точки $(x_0^0, y_0^0, {x'_0}^0, {y'_0}^0)$ эта функция совпадает с функцией τ, для чего достаточно убедиться, что уравнение (4) не имеет положительных корней, меньших τ_1 и удовлетворяющих условию $\dfrac{d\zeta}{dt} > 0$, когда точка (x_0, y_0, x'_0, y'_0) принадлежит этой окрестности.

Допустим вопреки этому, что такие корни могут существовать для точек (x_0, y_0, x'_0, y'_0), сколь угодно близких к $(x_0^0, y_0^0, {x'_0}^0, {y'_0}^0)$. Тогда существует бесконечная последовательность точек $(x_0^i, y_0^i, {x'_0}^i, {y'_0}^i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ поверхности S и бесконечная последовательность моментов времени t^i $(i = 1, 2, \ldots)$ такие, что

$$\zeta(x_0^i, y_0^i, {x'_0}^i, {y'_0}^i, t^i) = 0, \tag{5}$$

$$0 < t^i < \tau(x_0^i, y_0^i, {x'_0}^i, {y'_0}^i), \tag{6}$$

$$\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{(x_0^i, \ldots, t^i)} > 0, \tag{7}$$

$$\lim_{i\to\infty}(x_0^i, y_0^i, {x'_0}^i, {y'_0}^i) = (x_0, y_0, x'_0, y'_0) \tag{8}$$

Так как $\tau < \tau_0 + \varepsilon$, то в силу неравенств (6) из последовательности пятерок $(x_0^i, y_0^i, {x'_0}^i, {y'_0}^i, t^i)$ может быть выбрана подпоследовательность, для которой t^i сходятся к некоторому t^0. Изменим обозначения таким образом, чтобы эта новая последовательность пятерок была обозначена через $(x_0^i, y_0^i, {x'_0}^i, {y'_0}^i, t^i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Тогда будем иметь условия (5)–(8) и, кроме того,

$$\lim_{t\to\infty} t^i = t^0.$$

В силу непрерывности функций ζ и $\dfrac{d\zeta}{dt}$ отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned} &\zeta(x_0^0,\, y_0^0,\, {x'_0}^0,\, {y'_0}^0,\, t^0) = 0,\\ &\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{(x_0^0,\, \ldots\, ,\, t^0)} \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Но одновременное обращение в нуль функций ζ и $\dfrac{d\zeta}{dt}$ невозможно, так как иначе функция $\zeta(x_0^0,\, y_0^0,\, {x'_0}^0,\, {y'_0}^0,\, t)$ переменной t обращалась бы тождественно в нуль в силу уравнения (1), что, как уже было отмечено, невозможно. Следовательно,

$$\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{(x_0^0,\, \ldots\, ,\, t^0)} > 0. \tag{10}$$

С другой стороны, согласно предыдущему примечанию условия (5) и (6) дают:

$$\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_2}} \leqslant t^i \leqslant \tau_1(x_i^0,\, y_i^0,\, {x'_0}^i,\, {y'_0}^i) - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_2}},$$

откуда в силу непрерывности функции τ_1

$$\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_2}} \leqslant t^0 \leqslant \tau_1(x_0^0,\, y_0^0,\, {x'_0}^0,\, {y'_0}^0) - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_2}}.$$

Но согласно определению функции τ_1 имеем:

$$\tau_1(x_0^0,\, y_0^0,\, {x'_0}^0,\, {y'_0}^0) = \tau(x_0^0,\, y_0^0,\, {x'_0}^0,\, {y'_0}^0).$$

Таким образом,

$$0 < t^0 < \tau(x_0^0,\, y_0^0,\, {x'_0}^0,\, {y'_0}^0). \tag{11}$$

Формулы (9), (10), (11) противоречат, однако, определению функции τ. Непрерывность функции τ этим доказана.

Определим теперь преобразование T поверхности S равенствами:

$$\begin{gathered} x_1 = x\,[x_0,\, y_0,\, x'_0,\, y'_0,\, \tau(x_0,\, y_0,\, x'_0,\, y'_0)],\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y'_1 = y'\,[x_0,\, y_0,\, x'_0,\, y'_0,\, \tau(x_0,\, y_0,\, x'_0,\, y'_0)]. \end{gathered}$$

Так как функции $x, \ldots , y'$ и τ непрерывны при всех рассматриваемых нами системах аргументов, то и это преобразование непрерывно внутри и на границе поверхности S. Кроме того, из равенства (3) и определения функции τ следует, что в любой внутренней точке

(x_0, y_0, x_0', y_0') поверхности S эта функция есть не что иное, как промежуток времени между начальным пересечением поверхности S в этой точке и ближайшим следующим пересечением. Следовательно, во внутренних точках поверхности S преобразование T совпадает с рассматриваемым в тексте. Этим и доказано, что последнее преобразование может быть непрерывно распространено на границу поверхности S.

Что продолженное таким образом преобразование T одно-однозначно — очевидно, так как совершенно аналогичным образом может быть определено непрерывное обратное преобразование.

К главе 6

1) Перевод этой статьи см. стр. 289–304.

2) Это r, которое равно $\sqrt{p^2+q^2}$, разумеется, не следует смешивать с прежним r, играющим роль угловой координаты.

3) Чтобы доказать строго неравенство

$$r_n^2 \leqslant \bar{r}_n^2 \quad (n = 0, 1, \ldots, k), \tag{1}$$

где $\bar{r}_n$ — решение дифференциального уравнения

$$\frac{d\bar{r}_n^2}{dn} = L\bar{r}_n^{2\mu+2}, \tag{2}$$

определенное при $0 \leqslant n \leqslant k$ и удовлетворяющее начальному условию

$$\bar{r}_0^2 = r_0^2,$$

можно рассуждать следующим образом.

Прежде всего, из уравнения (2) легко усматривается, что $\bar{r}_n^2 > 0$ при всяком n, принадлежащем промежутку $0 \leqslant n \leqslant k$.

Отсюда в силу уравнения (2) следует, что $\bar{r}_n^2$ есть возрастающая функция n. Принимая это во внимание, получаем, далее, из того же уравнения:

$$\bar{r}_{j+1}^2 - \bar{r}_j^2 = L\int_j^{j+1} \bar{r}_x^{2\mu+2}dx > L\bar{r}_j^{2\mu+2}. \tag{3}$$

Допустим теперь, что неравенство (1) доказано при $n = j \leqslant k-1$ и докажем его при $n = j+1$.

Согласно доказанному в тексте имеем:

$$r_{j+1}^2 - r_j^2 \leqslant Lr_j^{2\mu+2},$$

откуда в силу индуктивного предположения и неравенства (3)

$$r_{j+1}^2 - r_j^2 < \overline{r}_{j+1}^2 - \overline{r}_j^2.$$

Еще раз применяя индуктивное предположение, заключаем отсюда, что

$$r_{j+1}^2 < \overline{r}_{j+1}^2.$$

А так как неравенство (1) соблюдается при $n = 0$, то этим оно доказано при всяком интересующем нас n.

4) В самом деле, левая часть равенства

$$\frac{q_1 p_0 - p_1 q_0}{p_1 p_0 + q_1 q_0} = \frac{r_0^2 \sin(\sigma + s r_0^2) + p_0 Q - q_0 P}{r_0^2 \cos(\sigma + s r_0^2) + q_0 Q + p_0 P}$$

есть не что иное, как $\operatorname{tg}(\vartheta_1 - \vartheta_0)$. В силу этого равенства отсюда следует, что

$$\operatorname{tg}(\vartheta_1 - \vartheta_0 - \sigma - s r_0^2) = \frac{\operatorname{tg}(\vartheta_1 - \vartheta_0) - \operatorname{tg}(\sigma + r_0^2)}{1 + \operatorname{tg}(\vartheta_1 - \vartheta_0)\operatorname{tg}(\sigma + r_0^2)} =$$
$$= \frac{(p_0 Q - q_0 P)\cos(\sigma + s r_0^2) - (q_0 Q + p_0 P)\sin(\sigma + s r_0^2)}{r_0^2 + (p_0 Q - q_0 P)\sin(\sigma + s r_0^2) + (q_0 Q + p_0 P)\cos(\sigma + s r_0^2)}.$$

Полагая здесь $p_0 = r_0 \cos\vartheta_0$, $q_0 = r_0 \sin\vartheta_0$, усматриваем, что числитель и знаменатель представляются степенными рядами в r_0 с коэффициентами — тригонометрическими полиномами относительно ϑ_0. При этом ряд для числителя начинается с члена порядка не ниже $2\mu + 2$, ряд для знаменателя — с r_0^2. Следовательно, тангенс величины, обозначенной в тексте через ϑ, представляется аналогичным степенным рядом, начинающимся с члена порядка не ниже 2μ. То же справедливо поэтому и относительно самой этой величины.

5) Точнее говоря, величина $r_0 > 0$ и натуральное число n могут быть выбраны так, чтобы соблюдалось неравенство $n \leqslant N\overline{r}_0^{-2\mu}$ и величина $\vartheta_n - \vartheta_0 - n\sigma$ была сколь угодно большой.

6) Это отнюдь не очевидно. В самом деле, если в решении разностного уравнения

$$\Delta^2 v_n = -B\rho_0^{\mu-1}(\Delta v_n + v_n),$$

удовлетворяющем начальным условиям

$$v_0 = 0,\ \Delta v_0 = s + \varepsilon_3^0,$$

v_n и Δv_n не больше соответствующих v_n и Δv_n в рассматриваемом решении разностного уравнении (9) (см. текст) при некотором значении n, то оценки (10) отнюдь не гарантируют того, что и при непосредственно следующем значении n это будет иметь место. Поэтому все последующее рассуждение непригодно для доказательства леммы. Эту ошибку, к счастью, легко исправить.

Рассмотрим уравнение (9), где ε_5 и ε_6 могут быть произвольными функциями n, удовлетворяющими неравенствам (10). Из вида этого уравнения непосредственно следует, что в его решении, удовлетворяющем начальным условиям (11), v_n и Δv_n могут быть представлены как зависящие от n полиномы в $s+\varepsilon_3^0$, $\varepsilon_5(0), \ldots, \varepsilon_5(n-1)$, $\varepsilon_6(0), \ldots, \varepsilon_6(n-1)$ с положительными коэффициентами. Эти полиномы могут только возрасти, если мы заменим $\varepsilon_5(k)$ и $\varepsilon_6(k)$ их максимальным допустимым значением $B\rho_0^{\mu-1}$. Но тогда мы получим решение разностного уравнения

$$\Delta^2 V_n = B\rho_0^{\mu-1}(\Delta V_n + V_n),$$

удовлетворяющее тем же начальным условиям. Таким образом, для интересующего нас решения уравнения (9) имеем:

$$v_n \leqslant V_n \quad (n \leqslant N\rho_0^{-\mu}).$$

А так как при $v_n \geqslant 0$ и $\Delta v_n \geqslant 0$ имеем

$$\Delta^2 v_n \geqslant -B\rho_0^{\mu-1}(\Delta v_n + v_n) = -B\rho_0^{\mu-1} v_{n+1},$$

то при тех же условиях

$$\Delta^2 v_n \geqslant -B\rho_0^{\mu-1} V_{n+1} \quad (n+1 \leqslant N\rho_0^{-\mu}),$$

откуда в силу начальных условий:

$$\Delta v_n \geqslant s + \varepsilon_3^0 - B\rho_0^{\mu-1}\sum_{k=1}^{n} V_k \quad (n \leqslant N\rho_0^{-\mu}),$$

если только $\Delta v_k \geqslant 0$ при $k < n$.

С другой стороны, разностное уравнение для V_n и начальные условия дают

$$V_n = (s + \varepsilon_3^0)\frac{e^{\beta_1 n} - e^{\beta_2 n}}{e^{\beta_1} - e^{\beta_2}},$$

где

$$\beta_i = \log\left(1 + \frac{1}{2}B\rho_0^{\mu-1} \pm \sqrt{B\rho_0^{\mu-1} + \frac{1}{4}B^2\rho_0^{2\mu-2}}\right),$$

причем для определенности мы будем считать, что знак «+» относится к β_1, а знак «−» к β_2. Подставляя это выражение в неравенство для Δv_n, получаем:

$$\Delta v_n \geqslant (s+\varepsilon_3^0)\left[1-\frac{B\rho_0^{\mu-1}}{e^{\beta_1}-e^{\beta_2}}\left(\frac{e^{\beta_1(n+1)}-e^{\beta_1}}{e^{\beta_1}-1}-\frac{e^{\beta_2(n+1)}-e^{\beta_2}}{e^{\beta_2}-1}\right)\right] \quad (n\leqslant N\rho_0^{-\mu}),$$

при условии, что $\Delta v_k \geqslant 0$ $(0 < k < n)$.

Но из выражений для β нетрудно усмотреть, что

$$\frac{B\rho_0^{\mu-1}}{(e^{\beta_1}-e^{\beta_2})(e^{\beta_1}-1)} < \frac{1}{2}.$$

Так как, кроме того,

$$\frac{B\rho_0^{\mu}(e^{\beta_2(n+1)}-e^{\beta_2})}{(e^{\beta_1}-e^{\beta_2})(e^{\beta_1}-1)} > 0,$$

то последнее неравенство для Δv_n дает

$$\Delta v_n \geqslant (s+\varepsilon_s^0)\left(1-\frac{1}{2}(e^{\beta_1 n}-1)\right) \quad (n \leqslant N\rho_0^{-\mu}),$$

если только $\Delta v_k \geqslant 0$ при $0 < k < n$.

Далее при достаточно малых ρ_0 имеем, очевидно,

$$\beta_1 < 2B^{\frac{1}{2}}\rho_0^{\frac{\mu-1}{2}}.$$

Следовательно, при достаточно малом ρ_0

$$\Delta v_n \geqslant 0,$$

коль скоро

$$n \leqslant \min\left[N^*\rho_0^{-\frac{\mu-1}{2}}, N\rho_0^{-\mu}\right],$$

где

$$N^* = \frac{1}{2}\log 3B^{-\frac{1}{2}}.$$

Наконец, при достаточно малом ρ_0 последнее неравенство для n может быть заменено простым условием

$$n \leqslant N^*\rho^{-\frac{\mu-1}{2}}.$$

При этом условии Δv_n и v_n остаются положительными, если только ρ_0 достаточно мало. Это и есть результат, к которому стремится Биркгоф (см. конец доказательства).

7) См. предыдущее примечание.

8) Это утверждение справедливо для прямоугольника $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $a^2 \leqslant y^2 \leqslant b^2$, так как расстояние точки от ее образа есть непрерывная функция точки. Но, так как точки с абсциссами, различающимися на 2π, передвигаются одинаковым образом, то это утверждение справедливо для всей полоски $a^2 \leqslant y \leqslant b^2$. — *Прим. перев.*

9) Это утверждение справедливо при всяком, достаточно малом ε, так как не только точки прямой $y = b^2$, но и все точки полоски $a^2 \leqslant \leqslant y \leqslant b^2$, достаточно близкие к этой прямой, передвигаются влево при преобразовании T. — *Прим. перев.*

10) Докажем это важное утверждение.

Прежде всего введем на дуге $PP^{(k-1)}$ вещественный параметр t следующим образом. При $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{k-1}$ обозначим через L_t точку прямолинейного отрезка $PP^{(1)}$ с ординатой $(k-1)\varepsilon t$. При $\dfrac{s}{k-1} \leqslant t \leqslant \dfrac{s+1}{k-1}$, где $s = 1, \ldots, k-1$, положим

$$L_t = (TT_s)^s L_{t-\frac{s}{k-1}}.$$

Этим L_t определено однозначно при $0 \leqslant t \leqslant 1+\dfrac{1}{k-1}$. Когда t пробегает этот последний отрезок числовой прямой, точка L_t описывает дугу PQ, причем согласно определению

$$(TT_s)L_t = L_{t+\frac{1}{k-1}}.$$

Нас интересует угол между вектором $L_t L_{t+\frac{1}{k-1}}$ и осью абсцисс. Этот угол имеет смысл при всяком t, принадлежащем отрезку $0 \leqslant t \leqslant 1$, так как $L_t \neq L_{t+\frac{1}{k-1}}$. Величина этого угла определена, однако, лишь с точностью до слагаемого вида $2n\pi$, где n — целое число. Чтобы устранить эту неопределенность, потребуем, чтобы эта величина непрерывно зависела от t и чтобы при $t = 0$ она лежала между 0 и $\frac{\pi}{2}$. Так, определенную величину угла обозначим через $\varphi(t)$. Требуется доказать, что

$$0 < \varphi(1) - \varphi(0) < \pi. \tag{1}$$

С этой целью будем рассматривать угол между вектором $L_t L_{t'+\frac{1}{k-1}}$ и осью абсцисс как функцию двух переменных t и t', которые мы подчиним условиям $0 \leqslant t \leqslant t' \leqslant 1$. Так как дуга $PP^{(k-1)}$ не имеет кратных точек, то $L_t \neq L_{t'+\frac{1}{k-1}}$, и потому угол этот всегда имеет смысл. Налагая на величину этого угла условие непрерывности и подчиняя ее требованию лежать между 0 и $\frac{\pi}{2}$ при $t = t' = 0$, получаем непрерывную функцию $\varphi(t,\, t')$ двух аргументов, причем, очевидно,

$$\varphi(t,\, t') = \varphi(t). \tag{2}$$

Так как точка $L_0 = P$ лежит на прямой $y = a^2$, а точка $L_{t'+\frac{1}{k-1}}$ всегда расположена выше этой прямой, то $2n\pi < \varphi(0,\, t') < (2n+1)\pi$. В силу непрерывности функции $\varphi(0,\, t')$ следует, что

$$0 < \varphi(0,\, t) < \pi \quad (0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{3}$$

Так как точка $L_{1+\frac{1}{k-1}} = Q$ лежит выше прямой $y = b^2$, а точка L_t всегда расположена не выше этой прямой, то $2n\pi < \varphi(t,\, 1) < (2n+1)\pi$. В силу непрерывности функции $\varphi(t,\, 1)$ и неравенств (3) следует, что

$$0 < \varphi(t,\, 1) < \pi \quad (0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{4}$$

Принимая во внимание, что согласно доказанному в тексте

$$\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi < \varphi(1,\, 1) < (2n+1)\pi,$$

заключаем из неравенства (4), что

$$\frac{\pi}{2} < \varphi(1,\, 1) < \pi,$$

откуда согласно равенству (2) вытекают доказываемые неравенства (1). — *Прим. перев.*

11) В действительности малость ε не играет здесь никакой роли, так как при этом дополнительном движении вектора он, очевидно, не может выйти из второго квадранта, как бы велико ни было ε. Малость ε существенна лишь для того, чтобы вектор $P^{(k-1)}Q$ лежал во втором квадранте (см. примечание 10).

12) То есть это изменение лежит между 0 и 2π.

13) При этом мы пользуемся тем, что при $\varepsilon \to 0$ направление вектора LL' стремится к некоторому предельному направлению, так как преобразование T также не имеет инвариантных точек.

14) Преобразование T называется *инволюторным*, если оно совпадает со своим обратным преобразованием, т. е. если T^2 есть тождественное преобразование.

15) Этот угол, а также аналогичные углы φ^* и φ_1^* считаются всегда положительными. Однако при определении преобразования T (см. ниже) считается, что геодезическая линия f пересекает геодезическую линию g в одном направлении, например, справа налево, тогда как при определении преобразования T^* рассматривается случай пересечения в обратном направлении — слева направо.

16) Под «прямыми преобразованиями» Биркгоф понимает преобразования, сохраняющие ориентацию.

17) При этом подразумевается, что спираль идет вдоль g в положительном направлении.

18) Имеется в виду алгебраическая длина этой дуги. Подразумевается, что спираль идет вдоль g в отрицательном направлении.

19) В действительности из приведенного в тексте рассуждения следует лишь, что произведение TT^* передвигает в противоположных направлениях точки границ кольца R.

20) $T = T^*$, благодаря симметрии поверхности. — *Прим. перев.*

К главе 7

1) Это следует из того, что инвариантный n-мерный интеграл классической динамики положителен.

2) Свойство *«региональной рекуррентности»*, о котором говорит здесь Биркгоф, можно определить так. Для всякого непустого открытого множества σ и всякого вещественного числа t_1 найдется вещественное число $t \geqslant t_1$ такое, что σ и σ_t имеют общие точки.

Если при этом речь идет не о всем многообразии M, а о некотором, содержащемся в M множестве A, состоящем из кривых движения, то под «открытым множеством» здесь надо понимать множество, открытое относительно A, т. е. пересечение открытого множества многообразия M с множеством A.

3) Связность этого множества в дальнейшем не играет никакой роли. Условие связности могло бы быть здесь опущено без изменения объема определяемых далее понятий.

4) Во избежание недоразумений формулируем точное определение блуждающих и неблуждающих точек, относящееся ко всем случаям.

Точка P_0 называется *блуждающей*, если существует открытое множество σ_0 и вещественное число t_1, такие, что σ_0 содержит P_0 и что σ_t не имеет общих точек с σ_0 при всяких $t > t_1$. В противном случае точка P_0 называется *неблуждающей.*

5) Выражение «бесконечно малая окрестность» (infinitesimal neighborhood), не имеющее определенного смысла, следует здесь понимать просто как «достаточно малая окрестность».

6) Существование такой трубки не очевидно.

7) Последнее надо понимать просто так: M_1 есть дополнительное замкнутое множество, также состоящее из кривых движения.

8) Имеется в виду открытое множество σ, содержащее точку P и такое, что σ_t не имеет общих точек с σ при всяком, достаточно большом t.

9) Трудно понять эту фразу. Чтобы доказать, что M_1' состоит из кривых движения, можно рассуждать так.

Рассмотрим произвольную точку P множества $M_1 - M_1'$. Она является предельной точкой множества W. Поэтому существует последовательность $P^1, P^2, \ldots$ точек множества W, сходящаяся к P. По теореме о непрерывной зависимости от начальных условий отсюда следует, что при всяком вещественном t последовательность $P_t^1, P_t^2, \ldots$ сходится к P_t. Так как точки P_t^i также принадлежат W, ибо W состоит из кривых движения, то отсюда следует, что P_t есть предельная точка множества W. А так как P_t принадлежит M_1 в силу того, что P принадлежит M_1, то P_t принадлежит $M_1 - M_1'$.

Этим доказано, что кривая движения, проходящая через произвольную точку множества $M_1 - M_1'$, содержится в этом множестве, т. е., что $M_1 - M_1'$ состоит из кривых движения. Так как M_1 также состоит из кривых движения, то M_1' состоит из кривых движения, что и требуется доказать.

10) Сомнительно, что M_1'' всегда является границей M_1'. Если бы на функции X_i вместо условия аналитичности было наложено более слабое условие дифференцируемости всякого порядка, то противоречащие примеры строились бы без труда.

С другой стороны, при условии аналитичности редакции неизвестны примеры, когда множество M_1'' непусто и отлично от M.

11) Как видно из авторского примечания к этой теореме, она формулирована «не вполне точно», т. е., попросту говоря, неправильно. Чтобы придти к правильной формулировке, достаточно заметить, что «точный счет выходов» движущейся точки из окрестности множества M_1 совсем не соответствует сути рассматриваемого вопроса, которая состоит в том, что эта точка находится в этой окрестности при всяком t, не принадлежащем некоторым исключительным интервалам. Таким образом мы получаем следующую формулировку.

Для всякой окрестности Σ множества M_1 существует натуральное число N и положительное число T, удовлетворяющие условию: каково бы ни было движение системы, можно указать N интервалов длины T таких, что при t, не принадлежащем ни одному из них, движущаяся точка принадлежит Σ.

Нетрудно видеть, что именно то и вытекает из приведенного в тексте рассуждения.

12) Как видно из предыдущей теоремы, множество M_1 не пустое. — *Прим. перев.*

13) См. примечание 4.

14) Относительно числа выходов точки из окрестности множества M_{p+1} дело обстоит, разумеется, так же, как при $p = 0$ (см. примечание 11).

15) Здесь подразумевается следующее. В M_r существует движение, удовлетворяющее условию: при всяком вещественном τ найдутся числа t_1 и t_2 такие, что $t_1 < \tau < t_2$ и что и при $t = t_1$, и при $t = t_2$ точка P_t принадлежит рассматриваемой окрестности точки множества M_r.

16) Формулируем точное определение. *Вероятность* того, что в течение промежутка времени $[t_1, t_2]$ точка P_t лежит в области Σ, есть отношение

$$\frac{\operatorname{mes}(A[t_1, t_2])}{t_2 - t_1},$$

где A — множество всех вещественных t, при которых P_t лежит в Σ, и $\operatorname{mes} X$ означает лебегову меру множества X.

Так как множество Σ открыто и P_t непрерывно зависит от t, то множество A открыто, и потому числитель в выражении для вероятности существует.

17) Приводим точную формулировку этой важной теоремы.

Теорема. *Какова бы ни была окрестность Σ множества M_p и положительное число δ, существует $L > 0$ такое, что*

$$W(P, \Sigma, t_1, t_2) \geqslant 1 - \delta \tag{1}$$

для любой точки P и любых вещественных t_1 и t_2, удовлетворяющих условию

$$t_2 - t_1 \geqslant L;$$

при этом через $W(P, \Sigma, t_1, t_2)$ обозначена вероятность того, что P_t лежит в Σ к течение промежутка времени $[t_1, t_2]$ (см. предыдущее примечание).

18) Иначе говоря, доказываемая теорема (см. предыдущее примечание) верна при $p = 1$. В самом деле, определим N и T согласно теореме, точно сформулированной в примечании 11. Положим

$$L = \frac{NT}{\delta}$$

и рассмотрим движение точки P_t в течение промежутка времени $[t_1, t_2]$, где $t_2 - t_1 \geqslant L$. Если через A обозначить множество всех t, при которых P_t принадлежит Σ, то дополнение к A на числовой прямой содержится в сумме N интервалов длины T. Следовательно,

$$t_2 - t_1 - \operatorname{mes}(A[t_1, t_2]) = \operatorname{mes}([t_1, t_2] - A) \leqslant NT = L\delta \leqslant (t_2 - t_1),$$

откуда, по определению вероятности (см. примечание 16), следует неравенство (1) примечания 17.

19) Строгое доказательство этой теоремы может быть основано на следующих леммах.

Лемма 1. *Пусть F_1 и F_2 — два непересекающихся замкнутых множества пространства M, P — точка этого пространства, $T > 0$. Существует окрестность σ точки P такая, что при всяком τ не превышающем T по абсолютной величине, множество σ, имеем пустое пересечение по крайней мере с одним из множеств F_i.*

Лемма 2. *Пусть A и B — измеримые множества на числовой прямой $\eta > 0$, $\zeta > 0$, $a < b$, $c > 0$. Если*

$$\operatorname{mes}(A[a, b]) \geqslant \eta(b - a)$$

и

$$\operatorname{mes}(B[t - c, t + c]) \geqslant 2\zeta c$$

при всяким t, принадлежащем A, то

$$\operatorname{mes}(B[a, b]) \geqslant \eta\zeta(b - a) - \frac{c}{2}.$$

Мы прежде всего докажем теорему, основываясь на этих леммах, а затем докажем и самые леммы.

В доказательстве теоремы мы будем пользоваться трансфинитной индукцией. Так как теорема верна при $p = 1$ (см. предыдущее примечание), то нам надо лишь доказать следующие два утверждения:

α) Из справедливости теоремы для некоторого M_p вытекает ее справедливость для M_{p+1}.

β) Если q есть предельное порядковое число, то из справедливости теоремы для всех M_p $(p < q)$ вытекает ее справедливость для M_q.

Доказательство утверждения (α). Допустим, что теорема верна для множества M_p, возьмем число $\delta > 0$ и рассмотрим произвольную окрестность Σ множества M_{p+1}. Обозначим через Σ_1 множество всех точек пространства M, расстояние которых от M_{p+1} меньше, чем их же расстояние от $M - \Sigma$. Тогда Σ_1 также есть окрестность M_{p+1} в силу замкнутости множества $M - \Sigma$ и $\overline{\Sigma}_1$ не пересекается с $M - \Sigma$ в силу замкнутости множества M_{p+1}, причем $\overline{X}$ означает замыкание множества X. Множество $\Sigma_1 M_p$ есть поэтому окрестность M_{p+1} в пространстве M_p.

Но M_{p+1} связано с M_p совершенно так же, как M_1 с M. Поэтому в силу уже доказанной справедливости теоремы при $p = 1$ существует $L_1 > 0$ такое, что

$$W(P, \Sigma_1, M_p, t_1, t_2) \geqslant 1 - \frac{\delta}{2},$$

какова бы ни была точка P, принадлежащая M_p, и каковы бы ни были числа t_1, t_2, удовлетворяющие условию $t_2 - t_1 \geqslant L_1$.

Обозначим теперь через γ совокупность всех открытых множеств σ, удовлетворяющих условию: при всяком τ, не превосходящем $\frac{L_1}{2}$ по абсолютной величине, множество σ_τ не пересекается с одним из множеств $\overline{\Sigma}_1$, $M - \Sigma$. Так как последние два множества замкнуты и не пересекаются друг с другом, то согласно лемме 1 элементы σ множества γ покрывают все пространство M.

Обозначим, далее, через Σ_2 сумму всех элементов множества γ, пересекающихся с M_p. В силу только что сказанного, эти элементы покрывают M_p. Следовательно, Σ_2 есть окрестность M_p в пространстве M.

Согласно предположению, отсюда следует существование числа $L_2 > 0$ такого, что

$$W(P, \Sigma_2, t_1, t_2) \geqslant 1 - \frac{\delta}{2} \tag{1}$$

для всякой точки P пространства M и всяких вещественных t_1 и t_2, удовлетворяющих условию $t_2 - t_1 \geqslant L_2$.

Положим теперь

$$L = \max\left[L_2, \frac{L_1}{\delta^2}\right]$$

и покажем, что так определенное число L обладает желаемым свойством.

Пусть, в самом деле,

$$t_2 - t_1 \geqslant L \tag{2}$$

и P — какая-либо точка пространства M.

Обозначим через A множество всех t, при которых P_t, принадлежит Σ_2, через B множество всех t, при которых P_t принадлежит Σ. В силу неравенства (1) имеем:

$$\mathrm{mes}(A[t_1, t_2]) \geqslant \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)(t_2 - t_1), \tag{3}$$

так как $t_2 - t_1 \geqslant L \geqslant L_2$.

Возьмем теперь произвольное t, принадлежащее множеству A. По определению этого множества, точка P_t принадлежит Σ_2. По определению множества Σ_2, существует элемент σ множества γ, пересекающийся с M_p и содержащий P_t. Возьмем точку Q, принадлежащую σM_p, и обозначим через C множество всех τ, при которых Q_{tau} принадлежит $M_p\Sigma_1$. Согласно выбору числа L_1, имеем:

$$W\left(Q, \Sigma_1, M_p, -\frac{L_1}{2}, \frac{L_1}{2}\right) \geqslant 1 - \frac{\delta}{2},$$

так как Q принадлежит M_p. Отсюда

$$\mathrm{mes}\left(C\left[-\frac{L_1}{2}, \frac{L_1}{2}\right]\right) \geqslant \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)L_1. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь произвольное τ, принадлежащее множеству

$$C\left[-\frac{L_1}{2}, \frac{L_1}{2}\right].$$

Так как Q принадлежит σ, то Q_τ принадлежит σ_τ. С другой стороны, Q_τ принадлежит Σ_1, так как τ принадлежит C. Следовательно, σ_τ

пересекается с Σ_1 и тем более с $\overline{\Sigma}_1$. А так как $|\tau| \leqslant \dfrac{L_1}{2}$ и σ есть элемент множества γ, то σ_τ не пересекается с $M - \Sigma$, т. е. содержится в Σ. Принимая, наконец, во внимание, что P_t принадлежит σ, заключаем отсюда, что $P_{t+\tau}$ принадлежит Σ и что $t+\tau$ принадлежит B. С другой стороны, $t+\tau$ принадлежит отрезку $\left[t - \dfrac{L_1}{2}, t + \dfrac{L_1}{2}\right]$, так как τ принадлежит отрезку $\left[-\dfrac{L_1}{2}, \dfrac{L_1}{2}\right]$. Мы доказали таким образом, что при всяком τ, принадлежащем $C\left[-\dfrac{L_1}{2}, \dfrac{L_1}{2}\right]$, число $t+\tau$ принадлежит $B\left[t - \dfrac{L_1}{2}, t + \dfrac{L_1}{2}\right]$.

Принимая во внимание неравенство (4), получаем отсюда

$$\operatorname{mes}\left(B\left[t - \frac{L_1}{2}, t + \frac{L_1}{2}\right]\right) \geqslant \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) L_1, \tag{5}$$

что справедливо, таким образом, при всяком t, принадлежащем A.

Сопоставляя неравенства (3) и (5), применяя лемму 2 и принимая во внимание, что $t_2 - t_1 \geqslant L \geqslant \dfrac{L_1}{\delta^2}$, заключаем, что

$$\operatorname{mes}(B[t_1, t_2]) \geqslant \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^2 (t_2 - t_1) - \frac{L_1}{4} \geqslant$$
$$\geqslant \left[\left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4}\right] (t_2 - t_1) = (1 - \delta)(t_2 - t_1).$$

По определению множества B это даст

$$W(P, \Sigma, t_1, t_2) \geqslant 1 - \delta,$$

что, таким образом, верно, какова бы ни была точка P и каковы бы ни были числа t_1 и t_2, удовлетворяющие условию (2). Этим утверждение (α) доказано.

Доказательство утверждения (β). Допустим, что теорема справедлива при всяком p, меньшем предельного порядкового числа q, и возьмем произвольную окрестность Σ множества M_q. Множества $M_p - \Sigma$ ($p < q$) образуют убывающую последовательность. Они замкнуты, и пересечение их есть $M_p - \Sigma$, т. е. пустое множество. Так как пространство M, в котором все эти множества содержатся, есть замкнутое многообразие, то существует $p < q$, такое, что $M_p - \Sigma$ есть пустое множество.

Для этого p множество Σ является окрестностью M_p. Следовательно, согласно допущению существует $L \geqslant 0$, такое, что

$$W(P, \Sigma, t_1, t_2) \geqslant 1 - \delta$$

для всякой точки P и всяких чисел t_1 и t_2, удовлетворяющих условию (2). Этим доказано утверждение (β).

Нам остается теперь доказать леммы 1 и 2.

Доказательство леммы 1. Вопреки лемме, допустим, что, какова бы ни была окрестность σ точки P, существует число τ, не превышающее T по абсолютной величине и такое, что σ_τ, пересекается с обоими множествами F_i $(i = 1, 2)$. Тогда существует сходящаяся к точке P последовательность окрестностей σ^1, σ^2, ... и последовательность чисел τ^1, τ^2, ..., не превышающих T по абсолютной величине, такие, что $\sigma^n_{\tau^n}$ пересекается с обоими F_i, при $n = 1, 2, \ldots$ Мы можем поэтому при всяком n взять точки $Q^{n,\,i}$ $(i = 1, 2)$ соответственно из множеств $\sigma^n_{\tau^n} F_i$. Положим $P^{n,\,i} = Q^{n,\,i}_{-\tau^n}$. Тогда $P^{n,\,i}$ принадлежит σ^n, и потому обе последовательности $P^{1,\,1}$, $P^{2,\,1}$, ... и $P^{1,\,2}$, $P^{2,\,2}$, ... сходятся к P.

С другой стороны, последовательность τ^1, τ^2,... имеет точку сгущения τ, так как $|\tau^n| \leqslant T$ $(n = 1, 2, \ldots)$. А так как $P^{n,\,i}_{\tau^n} = Q^{n,\,i}$, то, следовательно, P_τ является точкой сгущения обеих последовательностей $Q^{1,\,1}$, $Q^{2,\,1}$, ... и $Q^{1,\,2}$, $Q^{2,\,2}$, ... В силу замкнутости множеств $F_i (i = 1, 2)$ отсюда следует, что точка P_τ принадлежит обоим этим множествам, вопреки предположению. Так как к этому противоречию мы пришли в результате допущения неправильности леммы 1, то последняя тем самым доказана.

Доказательство леммы 2. Положим

$$\chi(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ при } x, \text{ принадлежащем } B[a, b],\ |y| \leqslant c, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Имеем

$$2c\,\mathrm{mes}(B[a, b]) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi(y + z, y)\,dz = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi(y + z, y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{mes}(B[a, b][z - c, z + c])\,dz \geqslant \int\limits_{a}^{b} \mathrm{mes}(B[a, b][z - c, z + c])\,dz.$$

Но

$$\operatorname{mes}(B[a,\, b][z-c,\, z+c]) \geqslant$$
$$\geqslant \operatorname{mes}(B[z-c,\, z+c]) - \max[0,\, a+c-z] - \max[0,\, c-b+z].$$

Следовательно,

$$2c \operatorname{mes}(B[a,\, b]) \geqslant \int\limits_a^b \operatorname{mes}(B[z-c,\, z+c])\, dz -$$
$$- \int\limits_a^{a+c} (a+c-z)\, dz - \int\limits_{b-c}^{b} (c-b+z)\, dz,$$

откуда согласно условию леммы:

$$2c \operatorname{mes}(B[a,\, b]) \geqslant 2\zeta c \operatorname{mes}(A[a,\, b]) - c^2 \geqslant 2\eta\zeta c(b-a) - c^2,$$

что и дает доказываемое неравенство.

20) Связность совокупности ω-предельных точек любого движения может быть доказана следующим образом.

Пусть F — рассматриваемая совокупность ω-предельных точек движения точки P. Допустим, что она не связна. Тогда она представляется как сумма двух непустых замкнутых множеств F_1 и F_2, не имеющих общих точек. Эти множества находятся на положительном расстоянии ε друг от друга. Обозначим через G_i совокупность точек, находящихся на расстоянии, меньшем $\frac{\varepsilon}{2}$, от F_i. Тогда $G_1 + G_2$ есть совокупность точек, находящихся на расстоянии, меньшем $\frac{\varepsilon}{2}$, от F. Следовательно, согласно доказанной в тексте теореме о приближении к ω-предельному множеству существует число τ, такое, что при всяком $t > \tau$ точка P_t принадлежит одной из областей G_i. Она всегда принадлежит не более чем одной из них, так как эти области не имеют общих точек.

Обозначим через A_i совокупность всех $t > \tau$ таких, что P_i принадлежит G_i. В силу непрерывной зависимости P_t от t множества A_i открыты. Они не имеют общих точек и в сумме дают всю полупрямую $t > \tau$. В силу связности последней отсюда следует, что одно из них пусто, а другое совпадает со всей полупрямой $t > \tau$. Допустим для определенности, что A_2 пусто. Тогда P_t не принадлежит G_2 при всяком $t > \tau$, и потому точки множества F_2, содержащиеся в открытом множестве G_2, не являются ω-предельными точками рассматриваемого движения. Так как F_2 не пусто, то это означает противоречие.

Следовательно, множество F связно, что и требуется доказать.

21) Так как понятие совершенного множества кривых движения не определено, то фраза эта не имеет смысла. По-видимому, Биркгоф хочет сказать, что в случае, когда минимальное множество Σ не состоит из одной замкнутой кривой движения (которая в частности может вырождаться в точку), это множество содержит неисчислимое множество кривых движения, причем в окрестности любой точки любой из этих кривых содержатся точки, принадлежащие другим кривым. Докажем это свойство минимального множества Σ.

Пусть P — произвольная точка множества Σ, ε — произвольное положительное число. Согласно предположению кривая движения, проходящая через P, не может быть замкнута, так как иначе множество Σ состояло бы только из этой кривой. Следовательно, при $t_1 \neq t_2$ имеем $P_{t_1} \neq P_{t_2}$. Кроме того, согласно сказанному (см. 2-й абзац § 7) каждая точка P_t является ω-предельной для рассматриваемой кривой движения.

В частности, сама точка $P = P_0$ является ω-предельной. Следовательно, существует $t_1 > 1$, такое, что $\rho(P_0, P_{t_1}) < \frac{1}{2}\varepsilon_0$, где $\rho(X, Y)$ означает расстояние между точками X и Y. Так как $t_1 > 1$, то точка P_{t_1} не принадлежит дуге $\overset{\frown}{P_{-1}P_1}$ рассматриваемой кривой и потому находится от последней на положительном расстоянии ε_1, Так как $\rho(P_0, P_{t_1}) < \frac{\varepsilon_0}{2}$, то, разумеется, $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon_0}{2}$.

Точка P_{t_1} является ω-предельной. Следовательно, существует $t_2 > t_1 + 1$ такое, что

$$\rho(P_{t_1}, P_{t_2}) < \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Точка P_{t_2} не принадлежит дуге $\overset{\frown}{P_{-t_1}P_{t_1}}$ и потому находится от последней на положительном расстоянии ε_2 причем $\varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{2}$, так как

$$\rho(P_{t_1}, P_{t_2}) < \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Продолжая этот процесс, получаем две последовательности: $t_0 = 0$, $t_1, t_2, \ldots$ и $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{array}{ll}
1)\ t_{n+1} > t_n + 1 & (n = 0, 1, 2, \ldots), \\
2)\ 0 < \varepsilon_{n+1} < \dfrac{\varepsilon_n}{2} & (n = 0, 1, 2, \ldots), \\
3)\ \rho(P_{t_n}, P_{t_{n+1}}) < \dfrac{\varepsilon_n}{2} & (n = 0, 1, 2, \ldots), \\
4)\ \rho(P_{t_{n+1}}, \overset{\frown}{P_{-t_n}P_{t_n}}) = \varepsilon_{n+1} & (n = 0, 1, 2, \ldots),
\end{array}$$

где $\rho(X, A)$ означает расстояние между точкой X и множеством A, а n принимает значения $0, 1, 2, \ldots$

В силу условий (2) и (3) последовательность точек $P_{t_0}, P_{t_1}, P_{t_2}, \ldots$ сходится к некоторой точке Q, причем $\rho(P, Q) < \varepsilon_0$. В силу условия (1) эта точка является ω-предельной для движения P_t и потому принадлежит Σ. В силу условий (2) и (3) имеем

$$\rho(P_{t_{n+1}}, Q) < \varepsilon_{n+1},$$

откуда, согласно (4), следует, что Q не принадлежит никакой дуге $\overset{\frown}{P_{-t_n}P_{t_n}}$. Этим доказано, что для любой точки P множества Σ и любого $\varepsilon_0 > 0$ существует точка Q этого же множества, отстоящая от P менее, чем на $\varepsilon_0 > 0$, и не лежащая на кривой движения, проходящей через P.

Теперь остается доказать, что Σ состоит из неисчислимого множества кривых движения. Мы сейчас докажем даже, что множество кривых движения, содержащихся в Σ, имеет мощность континуума (см. статью Биркгофа «Queiques théorèmes sur les mouvements des systèmes dynamiques», Bull. Soc. Math. France, т. 40, 1912).

Для этого мы рассмотрим $(n-1)$-мерную площадку, пересекающую кривую движения, проходящую через точку P в этой самой точке. Если эту площадку взять достаточно малой, то все кривые движения, содержащиеся в Σ, будут пересекать ее в одном направлении. Мы возьмем ее гомеоморфной $(n-1)$-мерному евклидову пространству. Тогда, согласно уже доказанному, пересечение площадки с множеством Σ будет совершенным множеством относительно площадки.

Отсюда, как известно, следует, что это пересечение имеет мощность континуума. С другой стороны, каждая кривая движения имеет с рассматриваемой площадкой не более чем исчислимое множество общих точек. Из всего этого следует, что содержащиеся в Σ кривые движения образуют множество мощности континуума.

К главе 8

1) Напомним, что в проблеме обобщенного равновесия множители λ определены с точностью до целых кратных $2\pi\sqrt{-1}/\tau$ (т. е. в данном случае до целых, кратных $\sqrt{-1}$). Так как мы имеем теперь только два множителя λ, $-\lambda$, и так как λ^* тоже будет множителем, то λ^* должно

отличаться на целое, кратное $\sqrt{-1}$, либо от $-\lambda$, либо от λ. Первый случай приводит нас к движению устойчивого типа, во втором же мнимая часть λ будет кратной $\sqrt{-1}/2$, и, следовательно, мы можем считать ее равной либо нулю, либо $\sqrt{-1}/2$.

2) В цитированном на стр. 215 мемуаре автор показывает, что формальные вещественные разложения инвариантных кривых, получаемые из уравнения $\Omega = 0$, всегда определяют некоторые инвариантные кривые на плоскости (u, v); эти кривые имеют аналитический характер в окрестности точки $(0, 0)$, которая вообще является для них существенной особой точкой. Случай, отмеченный в скобках, имеет место тогда, когда инвариантная кривая есть геометрическое место инвариантных точек.

3) Автор имеет в виду тот случай, когда преобразование T формальным преобразованием приводится к виду:

$$u_1 = u_0 \cos\sigma - v_0 \sin\sigma, \quad v_1 = u_0 \sin\sigma + v_0 \cos\sigma.$$

4) Дальнейшие результаты в этом направлении получены в мемуаре G. D. Birkhoff and D. C. Lewis «On the Periodic Motions Near a Given Periodic Motion of a Dynamical System», «Annali di Mat.» (4), т. 12 (1933), стр. 117–133.

5) Имеются в виду случаи формул (3) с заменой u_1 и v_1 на u_n и v_n при положительном или отрицательном μ.

6) Существованию зон неустойчивости посвящена статья Биркгофа «О существовании областей неустойчивости в динамике» (перевод включен в эту книгу).

7) «Предельное замкнутое множество» в тексте следует заменить точным понятием *верхнего топологического предела* замкнутых областей σ_n, содержащихся в S, когда σ неограниченно уменьшается по диаметру (следовательно, n неограниченно возрастает). Верхний топологический предел множеств $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ есть совокупность точек, любая окрестность которых содержит точки бесконечного числа множеств $F_1, F_2, \ldots$

8) Автор имеет в виду следующее: если в какой-нибудь точке кривой ее касательная направлена по радиусу, то при дальнейшем движении вдоль дуги касательная может уклониться от радиального направления только в направлении против часовой стрелки.

9) Последний абзац заимствован из мемуара G. D. Birkhoff «Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques», «Mém. Pont. Acad. Scient. Novi Lincaei», сер. III, т. I, стр. 119. Автор дает новое

доказательство, которым редакция заменяет прежнее, недостаточное доказательство, приведенное в тексте «Dynamical System».

10) Если две дуги Oa и Ob инвариантных кривых, из которых первая соответствует положительно асимптотическим точкам, а вторая — отрицательно асимптотическим, пересекаются в точке M, то точка $M_1 = T(M)$ должна лежать, во-первых, на дуге OaM, а во-вторых, на продолженной за M дуге ObM; таким образом вторая инвариантная кривая необходимо пересекает первую, кроме точки M, еще в точке M_1. Повторяя преобразование T, мы получим бесчисленное множество точек пересечения обеих кривых на дуге OaM; аналогично, применение преобразования T^{-1} покажет нам бесконечное множество точек пересечения на дуге ObM. Из свойства непрерывности преобразования T легко усмотреть, что в точке M_1 вторая инвариантная кривая при удалении по ней от точки O пересекает первую, переходя с той же ее стороны, как в точке M. Этот факт не осуществим на плоскости; но заметим, что автор заранее ввел условие, что род поверхности S равен единице.

11) Редакции неясно, какую теорему Брауэра имеет в виду автор. Известные нам теоремы Брауэра о существовании неподвижных точек при преобразовании симплекса непосредственно неприменимы к множеству Σ.

12) Это надо понимать в том смысле, что множество точек, лежащих на дугах AB, $B'C$, $\ldots$ всюду плотно во множестве ω-предельных точек.

13) Для аналогичного примера этот факт доказан Хеддуидом [Proc. Nat. Acad. Soc. U.S.A., т. 19 (1933), стр. 345-348].

Примечания редакции к статье

«Обобщение последней геометрической теоремы Пуанкаре»

1) Под *прямым* преобразованием понимается преобразование, сохраняющее ориентацию.

2) Это захватывание нужно, по-видимому, понимать в следующем смысле. Точка P, лежащая вне круга C, считается *захваченной* множеством S, если в замыкании последнего содержится замкнутое множество F, такое, что P принадлежит ограниченной компоненте дополнения к F.

3) Вместо приведенного в последующем тексте не строгого и по существу сложного доказательства этого факта здесь может быть применено рассуждение, аналогичное приведенному в примечании 10 к главе VI.

Примечания редакции к статье

«О динамической роли последней геометрической теоремы Пуанкаре»

1) Оно аффинно с точностью до бесконечно малых второго порядка относительно p и q. В самом деле, имеем:

$$p_1 = ap + bq + F(p,\, q),$$
$$q_1 = cp + dq + G(p,\, q),$$

где a, b, c, d — постоянные, такие, что $ad-bc = 1$; F и G — сходящиеся степенные ряды в p и q, не содержащие членов порядка ниже второго.

2) Имеется в виду линейное преобразование

$$\left.\begin{aligned} \overline{p}_1 &= ap + bq, \\ \overline{q}_1 &= cp + dq \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

(см. предыдущее примечание). Может быть определено зависящее от параметра r линейное преобразование

$$\left.\begin{aligned} p_r^* &= f(r)p + g(r)q, \\ q_r^* &= h(r)p + k(r)q \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant r \leqslant 2\pi), \tag{2}$$

такое, что f, g, h, k суть аналитические функции, что

$$f(r)k(r) - g(r)h(r) = 1 \quad (0 \leqslant r \leqslant 2\pi)$$

и что

$$\begin{Vmatrix} f(0) & g(0) \\ h(0) & k(0) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} f(2\pi) & g(2\pi) \\ h(2\pi) & k(2\pi) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}.$$

В силу последних равенств преобразование (2) совпадает с тождественным преобразованием при $r = 0$ и с преобразованием (1) при $r = 2\pi$.

В этом смысле и следует понимать, что последнее преобразование может быть получено посредством одно-однозначной аналитической деформации.

3) Это «наложение» следует понимать просто в смысле алгебраического сложения. Так как

$$p_1 - \overline{p}_1 = F(p, q), \quad q_1 - \overline{q}_1 = G(p, q)$$

(см. предыдущие примечания), то в результате получается преобразование

$$\widehat{p}_r = f(r)p + g(r)q + \frac{r}{2\pi}F(p, q),$$
$$\widehat{q}_r = h(r)p + k(r)q + \frac{r}{2\pi}G(p, q) \quad (0 \leqslant r \leqslant 2\pi).$$

4) См. *B. de Kerekjarto*, The Plane Translation Theorem of Brouwer and the Last Geometric Theorem of Poincaré, Szeged Acta, т. 4, кн. 2 (1928), стр. 86–102.

Примечания редакции к статье
«Некоторые проблемы динамики»

1) См. главу VI этой книги.

2) Более подробно эта задача рассмотрена в главе VIII этой книги.

3) Более подробно эта задача рассмотрена в главе VI этой книги.

4) Более подробно эта задача рассмотрена в главе VIII этой книги.

5) Задаче трех тел посвящена глава IX этой книги.

6) Под «частицей» здесь следует понимать непустое открытое множество.

7) Теория блуждающих, неблуждающих и центральных движений содержится в главе VII этой книги. Точные определения указаны в примечаниях к этой главе.

8) Теория рекуррентных движений содержится в главе VII этой книги.

Примечания редакции к статье

«О существовании областей неустойчивости в динамике»

1) См. статью Биркгофа «О динамической роли последней геометрической теоремы Пуанкаре», печатаемую в этой книге.

2) Это следует из того, что элемент площади в этих координатах выражается произведением $\frac{1}{2}\,d\rho\,d\vartheta$.

3) Здесь и в равенствах (9) подразумеваются степенные ряды относительно параметра k, причем выписаны лишь члены нулевого и первого порядка относительно k.

4) Характеристическое уравнение инвариантной точки имеет вид

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\rho_1}{\partial\rho} - \lambda & \dfrac{\partial\rho_1}{\partial\vartheta} \\ \dfrac{\partial\vartheta_1}{\partial\rho} & \dfrac{\partial\vartheta_1}{\partial\vartheta} - \lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 - \left(\frac{\partial\rho_1}{\partial\rho} + \frac{\partial\vartheta_1}{\partial\vartheta}\right) + 1 = 0.$$

С другой стороны, согласно уравнениям (10), (13) и (14):

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial\rho} = 1 \pm 2kc\left(1 + \frac{\sigma}{c}\right)\left(-\frac{\sigma}{c}\right)^{3/2} + \ldots\,,$$

$$\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\vartheta} = 1 + \ldots\,,$$

где знак $(+)$ относится к инвариантной точке $\left(-\frac{\sigma}{c},\,0\right)$, знак $(-)$ — к инвариантной точке $\left(-\frac{\sigma}{c},\,\pi\right)$, члены порядка выше первого относительно k опущены. Отсюда и получаются характеристические уравнения инвариантных точек, приведенные в тексте.

Алфавитный указатель

Предметный указатель