

В первом издании книги (1972 г.) впервые в монографической литературе была представлена последовательная классическая (лагранжева и геометрическая), а также квантовая теория калибровочных полей. С тех пор единые калибровочные модели взаимодействий элементарных частиц получили блестящее экспериментальное подтверждение (единая модель слабых и электромагнитных взаимодействий Вейнберга — Салама и открытие нейтральных токов, калибровочные кварко-вые модели и открытие новых типов элементарных частиц: пси- и ипсилон-частицы, тяжелый лептон, шармированные мезоны и барионы). Классическая теория калибровочных полей стала активно применяться в физике конденсированных сред и фазовых переходов.

Во втором издании изложение частично переработано с учетом достижений последних лет, а также включены новые результаты по классическим решениям и модель Вейнберга — Салама.

Книга рассчитана на научных работников, специализирующихся в области теоретической и математической физики. Она представляет интерес также для студентов, аспирантов и преподавателей физических факультетов вузов.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава I. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИЛИ ГЕОМЕТРИЯ?	6
§ 1. Принципы относительности, геометрия и взаимодействие	6
§ 2. Калибровочные поля и физика элементарных частиц	22
Список литературы	49
Глава II. ЛАГРАНЖЕВА ТЕОРИЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ	52
§ 3. Введение	52
§ 4. Теоремы Нетер	55
§ 5. Локальная калибровочная инвариантность лагранжиана и вторая теорема Нетер	63
§ 6. Обратные теоремы Нетер	69
§ 7. Изопериметрические задачи в теории с локальной симметрией	73
§ 8. Тензорные калибровочные поля и производные Ли	81
Список литературы	91
Глава III. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ	93
§ 9. Калибровочные поля и единая геометрическая теория взаимодействий	93
§ 10. Внешние формы на многообразии и уравнения структуры пространства	99
§ 11 Калибровочные поля как коэффициенты связности главного расслоенного пространства над $V_4$	108
§ 12. Классификация решений классических уравнений калибровочных полей	115
§ 13. Калибровочные поля и структура пространства — времени	133

§ 14. Электродинамика сплошной среды в геометрическом аспекте	146
Список литературы	152
Глава IV. КВАНТОВАНИЕ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ	155
§ 15. Основные идеи построения квантовой теории калибровочных полей	155
§ 16. Механические системы и фазовое пространство	157
§ 17. Континуальный интеграл в квантовой механике	163
§ 18. Квантование систем со связями	166
§ 19. Континуальный интеграл и теория возмущений в квантовой теории поля	169
§ 20. Квантовая теория калибровочных полей	179
§ 21. Квантовая электродинамика	183
§ 22. Поля Янга — Миллса	189
§ 23. Квантование гравитационного поля	202
§ 24. Каноническое квантование гравитационного поля	211
§ 25. Попытки построения калибровочно-инвариантной теории электромагнитных и слабых взаимодействий	219
§ 26. Вихреподобные возбуждения в квантовой теории поля	226
Список литературы	235

Со времени выхода в свет первого издания этой книги, где в основном была построена классическая и квантовая теория калибровочных полей, интерес к единым теориям различных взаимодействий заметно возрос. Это связано прежде всего с решением двух главных теоретических проблем, стоявших на пути построения реалистических калибровочных моделей элементарных частиц: 1) перенормируемости калибровочных теорий и 2) происхождения массы векторных частиц. Механизм спонтанного нарушения локальной калибровочной симметрии, предложенной Хиггсом еще в 1964 г., позволил не только придать массу квантам калибровочных полей, но и обеспечил перенормируемость полученной таким образом теории массивных полей. Последнее было показано Гофтом в 1971 г. на примере модели Вейнберга—Салама 1967 г., описывающей единым образом слабые и электромагнитные взаимодействия. Справедливость модели Вейнберга—Салама была экспериментально подтверждена открытием в 1973 г. нейтральных токов, предсказывавшихся этой моделью в первом порядке теории возмущений. Появившееся затем множество единых калибровочных моделей сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий требовало существования новых кварков, обладающих новым квантовым числом («шармом»), и новых типов элементарных частиц. В 1974 г. действительно была экспериментально обнаружена связанная система из двух шармированных кварков  $C\bar{C}$  — таинственные  $\psi$ -частицы. В настоящее время эти частицы, проявляющие себя как сверхузкие долгоживущие резонансы, уже хорошо изучены. Появилась даже спектроскопия семейства  $\psi$ -частиц, представляющих собой возбужденные состояния системы  $C\bar{C}$ .

В 1977 г. открыта аналогичная система из двух  $B$ -кварков ( $B\bar{B}$ ) —  $Y$ -частица. Открыты также шармированные мезоны и барионы, у которых новое квантовое число не скомпенсировано. Многие единые калибровочные модели слабых и электромагнитных взаимодействий предсказывали существование тяжелых лептонов, что долгое время считалось аргументом против таких моделей. Однако в 1976 г. тяжелый  $\tau$ -лептон с массой  $\sim 1,8$  ГэВ был открыт экспериментально. Таким образом, единые калибровочные модели взаимодействий

приводят к новой, богатой открытиями физике элементарных частиц. Поэтому решение проблемы единого описания всех видов взаимодействий (сильных, слабых, электромагнитных и гравитационных) не только представляется математически интересным, но и становится практически необходимым. Впервые после создания квантовой электродинамики единые калибровочные модели слабых и электромагнитных взаимодействий дают теорию, в которой вычисления можно провести до конца в любом порядке теории возмущений.

Калибровочные асимптотически-свободные модели сильных взаимодействий свободны от ультрафиолетовых расходимостей и обеспечивают «тюрьму» для кварков в инфракрасной области. На очереди вопрос о включении в единую схему взаимодействий квантовой гравитации. Весьма перспективна в этом отношении идея использования дуальных моделей («струн») совместно с калибровочной инвариантностью и, возможно, супергравитации.

Классическая теория калибровочных полей развивается не менее успешно. Нелинейность классических уравнений неабелевых калибровочных полей породила новую индустрию среди теоретиков. Имеется в виду исследование частицеподобных решений этих уравнений (солитонов, кинков, монополей, вихрей). Частицеподобные решения обладают новым типом заряда — топологическим зарядом, который можно попытаться связать с квантовыми числами, характеризующими элементарные частицы. Поэтому теория калибровочных полей по-новому ставит вопрос о соотношении между классической и квантовой физикой. К сожалению, объем книги не позволяет осветить все вопросы достаточно полно. Однако основной математический аппарат (за исключением теории перенормировок) в ней представлен. Это лагранжева и геометрическая формулировки классической теории калибровочных полей, а также квантовая теория, использующая метод функционального интегрирования. Кроме того, анализируется роль принципов относительности и симметрии при построении физической теории.

В книге используются современные математические методы: вариационный формализм и теоремы Нетер — в лагранжевой формулировке теории поля, инвариантной относительно бесконечной группы (гл. II); бескоординатный метод внешних форм на многообразии и понятие расслоенного пространства — при анализе геометрической картины взаимодействия (гл. III); метод континуального интегрирования — при построении квантовой теории калибровочных полей (гл. IV). В частности, показано, что классическую теорию калибровочного поля можно рассматривать как аспект геометрии, и в этом смысле реализуется глубокая физическая и философская идея Эйнштейна о том, что геометрии пространства — времени самой по себе не существует, ибо она определяется взаимодействием физических тел. Иными словами, каждый вид взаимодействий создает свою геометрию.

В основе книги лежат оригинальные работы авторов, а также содержится обзор наиболее важных результатов по калибровочным полям советских и зарубежных авторов.

Все главы книги относительно самостоятельны и могут читаться независимо. Первая глава носит вводный характер. Чтобы сделать изложение других глав более доступным, в ней вводится, в частности, параллельно геометрическая и физическая терминология. Для понимания остальных глав желательно знакомство с теорией групп, римановой геометрией и теорией поля в объеме курсов, читаемых на физико-математических факультетах вузов. Главы I—III и предисловие написаны Н. П. Коноплевой, глава IV — В. Н. Поповым.

Авторы благодарны академикам М. А. Маркову, Л. Д. Фаддееву и А. Г. Иосифьяну за поддержку второго издания книги и ценные замечания.

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИЛИ ГЕОМЕТРИЯ?

### § 1. Принципы относительности, геометрия и взаимодействие

**Введение.** В 60-е годы в теории элементарных частиц сложилась своеобразная ситуация: с одной стороны, не было ни одного экспериментального факта, который нельзя было бы теоретически обосновать, а с другой — не было последовательной теории, с единой точки зрения описывающей все многообразие свойств и типов элементарных частиц. Особенно остро воспринимался разрыв между «внутренними» (гиперзаряд, изоспин и др.) и «внешними» (пространственно-временными) симметриями элементарных частиц. Становилось все более ясно, что построение единой теории взаимодействий требует изменения фундаментальных принципов, лежащих в основе физических теорий, и ведет к использованию новых представлений о структуре пространства—времени и природе взаимодействий элементарных частиц.

Свойства симметрии элементарных частиц формулируются обычно в терминах инвариантов групп\* симметрии пространства — времени, задающих принцип относительности теории (например, лоренц-инвариантность), и групп внутренней симметрии (например, изотопическая инвариантность сильных взаимодействий, вытекающая из независимости ядерных сил от электрического заряда частиц). Тем самым вопрос о естественном объединении внутренних и внешних симметрий тесно связан с использованием новых принципов относительности и симметрии в теории элементарных частиц. Таким фундаментальным принципом является требование локальной инвариантности теории. Именно с ним связаны идеи об универсальных взаимодействиях и калибровочных полях.

В основе работ Янга, Миллса, Утиямы и Сакураи [1—3], в которых впервые обсуждался вопрос о калибровочных полях, лежит

\* *Группой* называют совокупность преобразований (или операций) над элементами заданного множества, удовлетворяющую следующим условиям (аксиомам): 1) произведение двух преобразований  $A$  и  $B$  (два преобразования, выполненные подряд) дает некоторое преобразование  $C$  из той же совокупности  $A \cdot B = C$ ; 2) ассоциативность этого умножения:  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ ; 3) определено тождественное преобразование  $E$ ; 4) каждое из преобразований  $A$  имеет обратное преобразование  $A^{-1}$ , т. е.  $A \cdot A^{-1} = E$ . Группа называется *конечной*, если ее преобразования зависят от конечного числа числовых параметров, и *бесконечной*, если преобразования группы зависят от конечного числа функций или бесконечного числа параметров.

утверждение о существенно локальном характере всех внутренних свойств симметрии элементарных частиц. Из него вытекает необходимость замены конечных калибровочных групп симметрии соответствующими локальными группами, параметры преобразований которых изменяются от точки к точке. Это дает возможность ввести в теорию новый физический объект — *калибровочное поле*, взаимодействие с которым обеспечивает инвариантность теории относительно локальной группы симметрии. Тем самым принцип локальной калибровочной инвариантности оказывается глубоким физическим принципом, позволяющим вводить взаимодействие чисто аксиоматически, определяя его форму в соответствии со свойствами симметрии теории. Поэтому свойства калибровочных полей можно исследовать и независимо от эксперимента. Вопрос о реализации теоретических понятий в наблюдаемых явлениях, сам по себе достаточно сложный, отделяется тем самым от математического аппарата теории. Заметим, что локальная инвариантность впервые использовалась в качестве фундаментального физического принципа в общей теории относительности Эйнштейна (ОТО) [4]. Затем эту идею развил Вейль, который ввел электромагнитное поле из требования инвариантности теории относительно локальных, т. е. зависящих от точки, растяжений интервала:  $ds^{2'} = \lambda(x) ds^2$  [5]. Но свою окончательную форму принцип локальной калибровочной инвариантности как физический принцип принял в упоминавшихся выше работах Янга, Миллса, Утиямы и Сакураи (см. § 2).

Гравитационное и электромагнитное поля, с которыми впервые была связана идея калибровочной инвариантности, относятся к универсальным взаимодействиям. Гравитационное поле взаимодействует универсально со всеми массивными частицами, электромагнитное — со всеми заряженными. Локальная калибровочная инвариантность привела к открытию универсальных ядерных взаимодействий, осуществляемых векторными нестабильными частицами — *резонансами*, одинаково взаимодействующими со всеми несущими изоспин частицами. Была обнаружена также универсальность некоторых слабых взаимодействий, в связи с чем были предприняты попытки и в этом случае применить метод калибровочных полей [6]. В течение ряда лет эти попытки не приводили к успеху, но окончательный результат превзошел все ожидания. После того как был найден механизм спонтанного образования массы векторных мезонов (*механизм Хиггса*, 1964 [7]) и сформулирована процедура перенормировки для калибровочных моделей со спонтанным нарушением симметрии (Тофт, 1971 [8], А. А. Славнов, 1972 [9], Тейлор, 1971 [10]), удалось построить единую перенормируемую теорию слабых и электромагнитных взаимодействий элементарных частиц, простейшим вариантом которой оказалась модель Вейнберга — Салама, 1967 г. [11]. Эта модель предсказывала с необходимостью существование нейтральных токов, что вплоть до их экспериментального обнаружения в 1973 г. считалось аргументом против теории. Впоследствии получили экспериментальное подтверждение и более слож-

ные кварковые калибровочные модели, описывающие единым образом сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия адронов [12]. В настоящее время речь идет о включении гравитации в общую схему перенормируемых взаимодействий.

Основу теории калибровочных полей составляют принципы симметрии и гипотеза локальности полей, превращающая глобальные симметрии в локальные.

Принцип локальной калибровочной инвариантности отражает глубокую связь между универсальностью различных взаимодействий, сохранением векторных токов и существованием самих взаимодействий. Этот принцип определяет форму всех взаимодействий, независимо от их физической природы, и тем самым открывает путь к построению единой и последовательной теории взаимодействий элементарных частиц. В то же время принцип локальной калибровочной инвариантности, подобно общему принципу относительности Эйнштейна, придает теории такую форму, которая допускает чисто геометрическую интерпретацию. Благодаря этому становятся возможными развитие и обобщение идеи Эйнштейна о том, что геометрия пространства не задается *ad hoc*, а определяется взаимодействием физических тел [13]. Иными словами, геометрия приобретает динамический характер и эффективно отражает влияние на выделенную пробную частицу (или поле) всей остальной материи в мире.

Геометризация калибровочных полей показывает, что 4-мерное пространство — время — лишь частный случай возможных динамических геометрий. Произвольному калибровочному полю соответствует геометрия расслоенного пространства, получаемого из обычного пространства — времени заменой его точек «внутренними» пространствами, в которых действует калибровочная группа. Таким образом, классическая теория калибровочных полей, подобно ОТО, становится чисто геометрической теорией. Возникающая в результате этого единая теория различных взаимодействий (сильных, слабых, электромагнитных и гравитационных) оказывается также геометрической теорией. Единство ее заключается в существовании *общего принципа*, по которому строится геометрия, соответствующая каждому из взаимодействий [14]. В терминах геометрии расслоенного пространства движение частиц, взаимодействующих с каким-либо калибровочным полем, становится свободным (бессильным). Тем самым, как и в ОТО, устраняется разделение движений на инерциальные (или свободные) и неинерциальные (происходящие под действием внешних сил). Это позволяет описывать калибровочные поля с помощью простых геометрических понятий (коэффициентов связности, тензоров кривизны) и делает геометрию экспериментально проверяемой. Переход от 4-мерного пространства — времени к расслоенному пространству означает признание удивительной возможности: физическое пространство, определяемое взаимодействиями, может быть многомерным и даже бесконечномерным. Описание же микропроцессов в обычных пространственно-времен-

ных терминах означает с этой точки зрения некое проецирование «истинной» физической геометрии взаимодействий на геометрию, порождаемую нашими макроскопическими приборами. Поэтому было бы очень полезно знать, что мы теряем при таком проецировании.

**Локальные симметрии и геометризация взаимодействий.** Локальные пространственные симметрии и гравитационное поле. Предположим, что у нас есть квадратный лист тонкого стекла и глобус. Плоский однородный стеклянный лист будет изображать плоское (евклидово) пространство, а поверхность глобуса — искривленное (риманово) пространство. Допустим теперь, что нам нужно «завернуть» глобус в стеклянный лист.

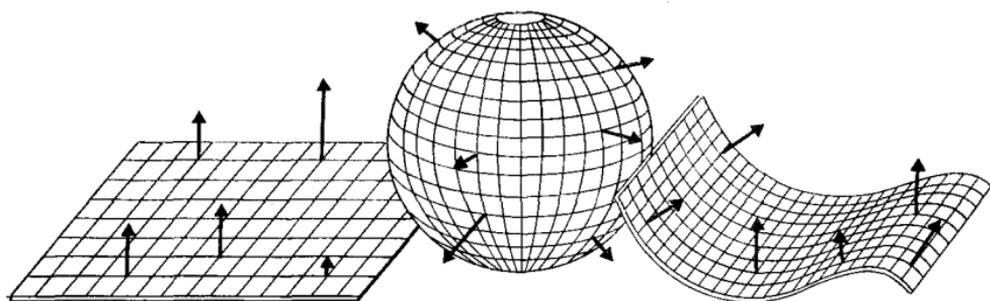


Рис. 1

Разрежем наш большой стеклянный квадрат на множество маленьких квадратиков и «оклеим» ими глобус. Эта операция представляет собой модель процесса покрытия искривленной поверхности (или пространства) локальными картами (или координатными сетками). Легко видеть, что весь плоский лист можно покрыть одной картой, а сферу — нельзя. Поэтому нам и пришлось взять множество маленьких квадратиков (локальных карт), чтобы они как можно ближе прилегали к точкам сферы. Поступив таким образом, мы заменили сферу множеством маленьких плоскостей, определенным образом взаимосвязанных, например повернутых друг относительно друга на фиксированный угол. Иными словами, можно сказать, что разница между множеством маленьких плоских квадратиков, собранных в один плоский лист, и множеством тех же квадратиков, собранных в сферу, состоит в том, что угол поворота между их плоскостями в первом случае равен нулю, а во втором отличен от нуля. В переводе на геометрический язык это значит, что искривленное пространство можно представить как совокупность плоских пространств, «соединенных» коэффициентами связности. Коэффициенты связности определяют величину взаимного «поворота» или «сдвига» соседних локальных плоских пространств (рис. 1). Поэтому при склеивании квадратиков в плоскость они равны нулю, а при склеивании в сферу — отличны от нуля. Таким образом, сфера — это множество плоскостей + коэффициенты связности.

Сравним теперь группы симметрии плоскости и сферы, точнее, группы движений, при которых эти объекты, как говорят, переходят в себя.

Если большой квадрат, о котором говорилось вначале, повернуть на четверть оборота вокруг оси, проходящей через его центр и перпендикулярной к его поверхности, то он займет то же положение, что и до поворота (см. рис. 1). Поскольку для человека, не видевшего самого процесса вращения, это состояние ничем не отличается от исходного, говорят, что квадрат после такого поворота перешел в себя. Заметим, что при этом *все точки* листа двигались в одной и той же плоскости и поворачивались на один и тот же угол, т. е. совершали *одно и то же движение*. Если же выбрать какой-нибудь маленький квадратик, прикрепленный к глобусу, и повернуть глобус на четверть оборота вокруг оси, проходящей через центр этого квадратика и перпендикулярной к его поверхности, то глобус тоже совпадет с самим собой. Но теперь прежнее движение совершают лишь точки, принадлежащие выбранному маленькому квадратику. Точки же соседних квадратиков, слегка повернутых на глобусе друг относительно друга, совершают повороты в других плоскостях, т. е. *другие движения*. Это значит, что если *плоский лист* был в целом симметричен относительно рассмотренных поворотов, то на глобусе *прежняя симметрия стала лишь локальной*, т. е. она существует для каждого маленького квадратика в отдельности, но не для всех вместе. Заметим, что это обстоятельство не исключает наличия у сферы в целом собственной симметрии, отличной от симметрии плоского листа.

Таким образом, локально сфера обладает той же симметрией, что и плоскость в целом. Локализация симметрии сводится к тому, что, сохраняя в каждой точке свою структуру (т. е. тип движения), преобразования должны изменять свои параметры при переходе от одной точки к другой. В нашем примере при переходе от одного маленького квадратика на сфере к другому мы совершаем вращения вокруг новой оси, тогда как плоский лист вращался целиком в одной плоскости вокруг одной оси.

Представим себе теперь, что и плоскость, и сфера очень большие, а наблюдатель очень маленький. Пусть у наблюдателя есть возможность узнать кое-что о пространстве, в котором он находится, но все его наблюдения «привязаны» к той точке, где он расположен, и к тому моменту времени, когда он делает измерения. Очевидно, что все результаты измерений будут отражать только локальные свойства окружающего наблюдателя пространства. Может ли он установить, что представляет собой пространство в целом? Может ли он, находясь в точке, отличить сферу от плоскости? Это тот самый вопрос, который в физике впервые поднял Эйнштейн [13]. Ответ Эйнштейна содержится в сформулированном им *принципе эквивалентности*. Обычно этот принцип формулируется как принцип равенства (локального) инертной и гравитационной масс. Но принципу эквивалентности можно придать и другую форму, а именно: *плоское*

*пространство + гравитационное поле локально эквивалентны искривленному риманову пространству* (т. е. неотличимы от него [15]).

Нетрудно заметить, что принцип эквивалентности в такой форме очень похож на установленную в приведенном выше примере локальную эквивалентность сферы и плоскости. Для полного совпадения достаточно отождествить коэффициенты связности (геометрическое понятие) с гравитационным полем (физическое понятие). Тогда получится геометрическая интерпретация гравитации.

Какова геометрия окружающего нас мира? Принцип эквивалентности в некотором смысле означает, что однозначного ответа на этот вопрос быть не может. Можно считать, что пространство плоское и все тела подвергаются воздействию универсального всепроникающего поля или что никакого поля нет, но пространство кривое. В таком случае вопрос о геометрии пространства в целом оказывается эквивалентным вопросу о поведении физических полей на произвольно больших расстояниях от источника. Свойства симметрии пространства становятся свойствами симметрии взаимодействий. Топология пространства в целом также отражается в свойствах взаимодействий. Так смыкаются геометрия и физика.

Заметим, что геометрическая интерпретация гравитационного поля стала возможной благодаря локализации пространственно-временной симметрии, т. е. переходу от плоского пространства — времени к искривленному, но обладающему локально теми же свойствами риманову пространству. Другие виды взаимодействий, а именно те, которые осуществляются калибровочными полями, также допускают чисто геометрическую интерпретацию. Только в этом случае локальными становятся внутренние симметрии элементарных частиц.

Локальные внутренние симметрии и калибровочные поля. Для того чтобы наглядно представить, что такое внутренние симметрии, рассмотрим следующий пример. Пусть летит по некоторой траектории шарик для пинг-понга, причем мы не видим, вращается он вокруг собственного центра инерции или нет, но знаем, что выполняется закон сохранения момента. Как описать положение точек поверхности шарика в произвольный момент времени, если угловая скорость его собственных вращений может изменяться?

Как известно из механики, свободный полет шарика определяется только движением его центра инерции. Свободное движение центра инерции не зависит от того, вращается шарик или нет и постоянны ли скорость и направление оси вращения. Вращение вокруг собственного центра инерции — это дополнительная (внутренняя) степень свободы, которая имеется у каждого тела (точнее, имеются три степени свободы, так как вращение возможно в любой плоскости). Если характер вращения изменяется, для обеспечения закона сохранения момента необходимо предположить, что во время полета на шарик действует некоторое поле сил, закручивающих его

или тормозящих вращение. Это поле сил — аналог калибровочного поля.

*Калибровочными преобразованиями* называют те преобразования функций, описывающих движение частицы, которые не отражаются на наблюдаемых характеристиках движения, т. е. не изменяют ее физического состояния. В этом смысле вращения шарика вокруг своего центра инерции являются аналогом калибровочных преобразований внутренней симметрии, если нас интересует лишь траектория движения шарика. Локализация такой внутренней симметрии приводит к изменению вектора угловой скорости собственного вращения шарика. Исчезновению локализации, т. е. преобразованиям симметрии с постоянными параметрами, здесь соответствует установление постоянной вдоль всей траектории скорости вращения. Очевидно, что и калибровочное поле при этом исчезает. В теории конденсированных сред постоянству вектора угловой скорости шарика соответствует постоянство свойств среды во всем ее объеме, которое проявляется в постоянстве параметра порядка (например, вектора намагниченности). В теории сверхпроводимости глобальная симметрия описывается постоянной фазой волновой функции электрона.

Собственные вращения шарика ненаблюдаемы до тех пор, пока на шарике не сделана какая-нибудь отметка, например, не нанесена полоска краски, позволяющая следить за его вращением. Но сделать внутренние вращения наблюдаемыми можно, только нарушив внутреннюю симметрию, поскольку краска делает неэквивалентными разные повороты шарика. Этот простой пример иллюстрирует еще одно важное обстоятельство: наличие какой бы то ни было симметрии означает наличие тождественных, т. е. неотличимых, состояний, тогда как наблюдение и измерение предполагают различие состояний, т. е. нарушение симметрии. Это нарушение всегда связано с воздействием на систему, т. е. с появлением некоторого поля сил [16]. Иначе говоря, *для того чтобы сделать симметрию наблюдаемой, нужно ее нарушить*. Внутренняя микроскопическая симметрия может стать макроскопической и, в принципе, наблюдаемой, если в макроскопически большой области пространства — времени локальная внутренняя симметрия стала глобальной (возникло упорядочение). Тогда появляется возможность наблюдать макроскопические квантовые явления. Примерами такого рода служат квантование магнитного потока в сверхпроводниках и появление когерентного излучения (лазеры). Классическая теория калибровочных полей описывает микроскопически неупорядоченные системы, и ее предсказания становятся экспериментально наблюдаемыми в макроскопических масштабах, как правило, в специальных условиях (фазовые переходы).

Инвариантность по отношению к локальным калибровочным преобразованиям означает невозможность измерить относительную фазу волновой функции частицы в двух разных мировых точках. На примере шариков это утверждение иллюстрируется следующим

образом. Предположим, что в каждой точке Вселенной помещается вращающийся шарик. Если два таких шарика находятся в точках, отделенных друг от друга пространственно-подобным интервалом, то невозможно установить угол поворота их друг относительно друга просто потому, что скорость света конечна. Это верно в любом пространстве — времени  $V_4$ .

Каждой локальной внутренней симметрии можно поставить в соответствие свое калибровочное поле. Источником его является сохраняющаяся в случае инвариантности относительно обычной (т. е. глобальной) калибровочной группы величина — плотность векторного или тензорного тока. В примере с шариками источник калибровочного поля — плотность момента собственных вращений шариков.

Внутренние пространства и расслоение над  $V_4$ . Внутренние симметрии можно понимать как симметрии некоторого внутреннего пространства, точки которого соответствуют различным состояниям частицы, не связанным с ее положением в пространстве. Пример внутренней симметрии: изотопическая инвариантность, или независимость ядерных сил от заряда частиц. Вследствие изотопической инвариантности ядерных сил в отсутствие электромагнитного поля протон и нейтрон неразличимы. Два неразличимые частицы можно рассматривать как два состояния одной частицы. Занумеруем эти состояния значениями внутреннего квантового числа — изоспина:  $1/2$  (протон) и  $-1/2$  (нейтрон). Получим изотопический дублет. Возможны и более богатые изотопические мультиплеты, содержащие три и более частиц. Воздействие электромагнитного поля на изотопический мультиплет приводит к нарушению изотопической симметрии и распадению мультиплета на отдельные компоненты (частицы), которые по отношению к электромагнитному полю ведут себя по-разному.

Локализация внутренних симметрий, подобно локализации пространственно-временных симметрий, приводит к необходимости ввести новый физический объект — калибровочное поле. Понятие калибровочного поля было впервые введено Янгом и Миллсом в связи с попыткой построить теорию сильных взаимодействий, исходя из требования инвариантности относительно локальной группы изотопических преобразований. В 1954 г. они предложили метод введения векторного поля, ответственного за сильные взаимодействия между нуклонами и связанного с сохраняющимся током изоспина. Идея метода состояла в следующем [1]. Сохранение изотопического спина тождественно требованию инвариантности всех взаимодействий относительно вращений изотопического спина. Это означает, что, когда электромагнитными взаимодействиями можно пренебречь, ориентация изотопического спина не имеет физического смысла. В этом случае различие протона и нейтрона становится чисто произвольным. Однако обычно подразумевается, что этот произвол ограничен следующим условием: как только сделан выбор, что называть протоном, а что нейтроном в одной точке прост-

свобода времени, свобода выбора в других пространственно-временных точках, даже отделенных от первой пространственно-подобным интервалом, пропадает.

Такое положение несовместимо с гипотезами близкодействия и локальности полей, лежащими в основе обычных физических теорий. В самом деле, пусть электромагнитное поле отсутствует и протон и нейтрон неразличимы. Предположим теперь, что в одной из точек или в некоторой области пространства включено электромагнитное поле и тем самым установлено, какая частица является протоном, а какая — нейтроном. В других областях пространства это различие будет устанавливаться лишь по мере того, как электромагнитное поле достигнет этих областей. Очевидно, что это не может произойти мгновенно во всех точках пространства, поскольку скорость распространения света (электромагнитного поля) конечна. Поэтому Янг и Миллс предложили ввести требование инвариантности всех взаимодействий относительно независимых вращений изотопического спина во всех точках пространства — времени, так что относительная ориентация изотопического спина в разных точках пространства — времени теряет смысл (если пренебречь электромагнитным полем). Таким образом, требуется инвариантность относительно изотопического калибровочного преобразования  $\psi' = S\psi$ , где  $S$  — вращение изотопического спина, зависящее от выбора точки.

Инвариантность теории относительно локальных изотопических вращений обеспечивается введением триплета векторных полей, кванты которых отождествляются с триплетом  $\rho$ -мезонов. Мультиплетам векторных мезонов в геометрической интерпретации соответствует понятие коэффициентов связности расслоенного пространства, играющих роль «сил».

*Расслоенное пространство* получается из обычного пространства — времени, если его точки заменить новыми пространствами (слоями), т. е. предположить, что «точки» имеют «внутреннюю структуру». Внутренние симметрии элементарных частиц становятся тогда симметриями, действующими внутри слоев (внутренних пространств), а пространственно-временные симметрии преобразуют друг в друга слои, отнесенные к разным пространственно-временным точкам. Геометрия расслоенного пространства обобщает риманову геометрию и включает ее как свой частный случай.

Внутреннее пространство не может быть отождествлено с обычным пространством — временем (будем говорить: мировым пространством) даже тогда, когда координаты его точек тоже пространственно-временные. Простейший пример — тот же вращающийся шарик. Отождествление внутренней и пространственно-временной симметрий движений шарика означало бы отождествление собственных и орбитальных его вращений. В механике связь между собственными вращениями шарика и перемещениями его в пространстве может появиться при наличии трения в окружающей среде. В общем случае нужно независимо рассматривать *два пространства*: одно для описания движения центра инерции (обычное пространство), другое —

«внутреннее» — для описания вращений вокруг центра инерции. Как заметил Картан, группы преобразований симметрии относительно точек, лежащих внутри тела и вне его, изоморфны между собой, но не совпадают. Например, если речь идет о вращениях, то операторы соответствующих групп взаимно обратны. В примере с шариками можно считать, что имеется одно пространство, которое учитывается дважды, так как играет двойную роль. Но в теории элементарных частиц это два разных пространства.

Довольно быстро было замечено, что переход от симметрии, заданной во всем пространстве, к локальной симметрии, существующей лишь в окрестности точки, напоминает переход от плоского абсолютного пространства — времени Минковского\* к риманову пространству общей теории относительности, которое локально обладает теми же свойствами, что и пространство Минковского. В самом деле, риманово пространство можно представить как многообразие, «точками» которого являются плоские пространства Минковского, причем «соединены» они между собой коэффициентами связности Риччи или Кристоффеля. Геометрическое понятие коэффициента связности в римановом 4-мерном пространстве соответствует в физике гравитационному взаимодействию. Если аналогичным образом рассматривается 4-мерное многообразие, «точками» которого являются пространства представлений группы внутренней симметрии, получается пример расслоенного пространства. Коэффициенты связности, введенные в нем, соответствуют вектор-потенциалам калибровочных полей или мультиплетам векторных мезонов. Такая геометрическая интерпретация калибровочных полей позволяет рассматривать траектории частиц, взаимодействующих с калибровочным полем, как свободные траектории в расслоенном пространстве. Тем самым при описании любых взаимодействий, которые осуществляются через какое-либо калибровочное поле, можно избавиться от понятия силы и сделать теорию таких взаимодействий чисто геометрической, подобно ОТО.

**Взаимодействие и геометрия.** Принципы относительности, геометрия и понятие силы. В основе каждой современной физической теории лежит некоторый принцип относительности. Принцип относительности формулируется в виде требования инвариантности теории относительно некоторой группы симметрии. Как правило, предполагается, что эта группа отражает свойства симметрии пространства — времени в целом. До создания общей теории относительности Эйнштейна роль таких групп играли конечные группы Ли (группа Галилея, включающая вращения и

---

\* Т. е. плоского 4-мерного пространства, в котором время играет роль четвертой координаты. Интервал (или длина) в таком пространстве определяется как корень квадратный из суммы квадратов пространственных координат минус квадрат временного промежутка, умноженный на квадрат скорости света. Из-за наличия минуса в выражении для 4-мерного интервала геометрия пространства Минковского называется не евклидовой, а псевдоевклидовой.

сдвиги в 3-мерном пространстве и отдельно — сдвиги во времени, группа Лоренца, включающая вращение в 4-мерном пространстве Минковского, где три пространственные координаты и время рассматриваются как равноправные координаты, и группа Пуанкаре — группа движений, т. е. вращений и сдвигов пространства Минковского). В теории Эйнштейна впервые в основу принципа относительности была положена бесконечная группа.

Принцип относительности указывает определенный класс систем отсчета, называемых *инерциальными* (в смысле данного принципа относительности), в которых, по определению, движение частиц считается прямолинейным, а сами частицы — свободными. Наблюдаемое отклонение траекторий от инерциальных и взаимодействие частиц описываются с помощью понятия силового поля.

Эйнштейновская концепция движения делает все траектории инерциальными. Это соответствует инвариантности теории относительно произвольных непрерывных преобразований пространственных координат и времени, которые называют также *общековариантными преобразованиями*. В механике Ньютона все инерциальные траектории связаны между собой преобразованиями Галилея, а в специальной теории относительности — преобразованиями Лоренца. Группы преобразований Галилея, Лоренца и *общековариантные преобразования* задают принципы относительности соответствующих теорий. Они определяют степень симметричности возможных бессиловых движений. Нарушение этой симметрии отождествляется с действием силы. Бессиловые, инерциальные движения реализуют аксиоматически введенную геометрию пространства — времени.

Таким образом, в основе каждой физической теории лежит постулат о геометрических свойствах пространства — времени, причем этот постулат находит свое выражение в принципе относительности теории [17—21]. В этом смысле геометрия логически предшествует эксперименту. Законы физики не могут быть выражены без помощи геометрии, хотя геометрия, взятая сама по себе, не соответствует никаким опытам, никакой опытной науке [22]. Геометрические постулаты физической теории отражают выбор средств измерения, с помощью которых эта теория может быть проверена [23].

**Абсолютное пространство и динамическая геометрия.** Согласно закону инерции классической механики, тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока на него не подействует сила. Следовательно, в механике Ньютона мы узнаем о существовании силы, действующей на тело, по отклонению его траектории от прямолинейной. Но как определить, прямолинейная ли траектория? Для этого нужно сравнить ее с эталоном прямой линии. Иными словами, нужна траектория, прямолинейная по определению, и нужна фиксированная процедура сравнения траекторий. В качестве образа прямой линии в механике часто используют луч света.

Такой выбор эквивалентен предположению, что кванты света — фотоны — не подвержены механическим воздействиям, т. е. их масса равна нулю. В принципе в качестве прямой линии можно взять траекторию любой частицы, движущейся по инерции, т. е. свободно. Но существуют ли свободные частицы и прямые линии? Для теорий типа механики Ньютона это принципиальный вопрос, поскольку отклонение исследуемых траекторий от инерциальных служит мерой интенсивности взаимодействия или силы, действующей на частицу.

Если частица ни с чем не взаимодействует, то она ненаблюдаема, так как наблюдение (измерение) подразумевает воздействие на нее. Абсолютно свободные частицы и абсолютно прямые линии — это абсолютно ненаблюдаемые объекты, объекты-мифы. Понятие инерциального или свободного движения относительно. Оно зависит от выбора класса возможных взаимодействий. Абсолютное пространство Ньютона — это пространство покоящейся системы отсчета, связанной с источником гравитационного поля. Инерциальное движение в этом пространстве наблюдаемо, например, с помощью света, т. е. электромагнитного поля. Таким образом, механика оказывается принципиально незамкнутой теорией. Она предполагает существование немеханических взаимодействий, позволяющих наблюдать инерциальные механические движения и делать измерения. При этом подразумевается, что воздействие на исследуемую систему и на эталон во время измерения достаточно мало. Когда же такому условию удовлетворить невозможно, переходят к квантовой картине, которая явно учитывает влияние процесса измерения на исследуемую систему. Квантование снимает противоречивость процедуры сравнения с ненаблюдаемыми эталонами.

Обратимся теперь к ОТО. В чем разница между точками зрения Ньютона и Эйнштейна? Теория Эйнштейна не просто обобщает классическую (ньютоновскую) теорию тяготения. Она построена на совершенно других принципах и представляет собой, в сущности, новый тип физической теории. Главные особенности этой теории — отсутствие понятия взаимодействия (или силы) и новая концепция пространства — времени. Они вытекают из нового понимания роли принципов относительности и симметрии в физической теории.

Следуя Пуанкаре [17], Эйнштейн [13] считал, что в опыте нет отдельно физики и геометрии; проверке на опыте подлежит только сумма: геометрия + физические законы. Опыт не дает доказательства существования того или иного геометрического пространства и соответственно геометрии безотносительно к тем физическим законам, которые лежат в его основе. Действительно, экспериментатор, прежде чем ставить опыт, делает явно или неявно ряд предположений относительно условий эксперимента. Например, он предполагает, что результат не зависит от того, в какой точке земного шара проводится эксперимент и как при этом ориентированы приборы. Таким образом, заранее постулируется, что пространство, в котором ставится опыт, однородно и изотропно.

Если пространство однородно, т. е. в целом обладает некоторой симметрией, то все геометрические объекты в нем характеризуются набором чисел — инвариантов различных представлений группы симметрии данного пространства. Эти числа соответствуют тем свойствам геометрических объектов, которые не изменяются при преобразованиях, переводящих рассматриваемое пространство в себя. Например, для окружности на плоскости таким числом является радиус. Радиус (расстояние) — инвариант группы движений плоскости. Свойства окружности определяются тем, что она — геометрическое место точек, равноудаленных от заданной точки. В однородном пространстве достаточно знать его группу движений, чтобы описать все, что может в нем происходить: свойства геометрических объектов и отношения между ними. В этом заключается смысл известной эрлангенской программы Ф. Клейна. Использование однородных пространств в физике означает, что свойства изучаемых объектов (например, частиц) формулируются в терминах инвариантов, характеризующих представления группы симметрии пространства — времени и внутренних симметрий. Численные значения инвариантов соответствуют интегральным сохраняющимся величинам: энергии, импульсу, моменту, спину, изотопическому спину и др.

Эйнштейн впервые ввел в физику риманову точку зрения на геометрию, согласно которой пространство в целом и нелокальные характеристики (например, длина) определяются только шаг за шагом. Риманово пространство не допускает, вообще говоря, никаких движений, т. е. не обладает никакой степенью однородности. Инварианты римановой геометрии — это дифференциальные инварианты группы произвольных непрерывных преобразований координат (общековариантных преобразований). В том смысле, как конечные группы Ли, соответствующие клейновским пространствам, группа общековариантных преобразований инвариантов не имеет. Точно так же не приводят к обычным законам сохранения и, следовательно, инвариантам группы локальных внутренних симметрий. Их подгруппы, соответствующие преобразованиям с постоянными параметрами, дают обычные (слабые) законы сохранения. Сами же локальные симметрии определяют форму дифференциальных инвариантов, которые становятся лагранжианами взаимодействующих полей. Именно поэтому они являются динамическими симметриями. Динамические симметрии позволяют формулировать свойства взаимодействий.

Важным свойством локальных симметрий является наличие тождественных соотношений между экстремалами и производными от них. Этим тождествам можно придать вид законов сохранения, которые оказываются сильными, т. е. выполняются независимо от конкретного вида лагранжиана и уравнений движения. Интегрирование таких законов сохранения дает инварианты, имеющие топологический смысл.

Таким образом, перед нами два совершенно различных типа физических теорий. В одном случае это теории, в которых струк-

тура пространства — времени жесткая и абсолютная, обладающая той или иной степенью симметрии. Предполагается, что могут существовать свободные частицы, которые движутся по геодезическим (прямолинейным) траекториям. Наблюдаемое в действительности искривление траекторий описывается с помощью понятия взаимодействия (силового поля). Все поля (в том числе и гравитационное) равноправны и отличаются только законом распространения и взаимодействием с порождающими их токами.

В другом случае взаимодействие полностью устраняется. Оно рассматривается как проявление динамической природы геометрии. Тогда все результаты измерений непосредственно относятся к геометрическим свойствам пространства — времени. При этом уже не нужно выделять инерциальные траектории в качестве эталонов. Достаточно сравнивать между собой траектории двух произвольных частиц или тел. Расстояние между ними, называемое геодезическим отклонением, пропорционально тензору кривизны пространства — времени (или тензору напряженности калибровочного поля). Геометризация взаимодействий избавляет физическую теорию от разбиения на две разнородные части: ненаблюдаемую (геометрическую) и наблюдаемую (физическую). Поскольку эксперимент отражает только сумму этих частей, такое обычно встречающееся разбиение всегда допускает произвол и служит причиной неоднозначности соответствия между теорией и экспериментом (конвенционализм физической теории) [17].

Если взаимодействие геометризовано, геометрия физического пространства становится экспериментально проверяемой. В этом случае возможен ответ на вопрос о том, какова геометрия физического мира. Достаточно лишь указать, какие физические тела или процессы реализуют основные геометрические понятия: точка, прямая, сфера, вектор и т. п. Такая реализация всегда приближительна, так как связана с идеализацией. От этого сопоставления зависит ответ на наш вопрос. Известно, что посредством твердых и неизменяемых (насколько это возможно) макроскопических тел можно реализовать геометрию Евклида. Среди классических теорий ей соответствует классическая механика Ньютона. Электродинамика фотонов реализует геометрию пространства Минковского, гравитационное поле вне источников — риманову геометрию, свободные калибровочные поля — геометрию расслоенного пространства.

**О роли геометрических теорий.** Геометрические теории поля нередко рассматриваются как чистая математика, не имеющая прямого отношения к эксперименту. Это связано, в частности, с тем, что одним из основных понятий любой геометрической теории является понятие пробного тела. Геометрическая теория представляет собой теорию движения пробных тел. В то же время попытки найти физическую модель пробного тела часто сталкиваются с трудностями, так как основным свойством пробного тела является способность подвергаться действию внешнего поля, не оказывая

на него обратного влияния. Заметим, что одним из возражений Эйнштейна против механики Ньютона было то, что в этой теории пространство и время абсолютны, т. е. «оказывают физическое действие, но сами от физических условий не зависят». Эйнштейн считал, что «представление о чем-то..., что воздействует само, но на что нельзя воздействовать, противоречит присущему науке методу мышления» [13, с. 44]. Но и представление о чем-то, что подвергается действию извне, но не воздействует само, столь же противоречит научному методу мышления. Однако пробное тело, по определению, должно обладать именно таким свойством. Возможно ли это и при каких условиях? Положительный ответ на этот вопрос означает: можно указать такой класс реальных физических объектов, которые при определенных условиях могут играть роль пробных тел, т. е. двигаться по геодезическим траекториям. Тем самым будет указан класс физических объектов, движение которых описывается геометрической теорией, т. е. указана область ее применимости.

Очевидно, что экспериментальная проверка любой теории имеет смысл только в области ее применимости. Особенно ясно это было понято при изучении квантовых явлений. Никого не удивляет, когда говорят, что прежде чем изучать свойства некоторого состояния методами квантовой теории, его нужно «приготовить». Но оказывается, что прежде чем изучать геодезическое движение методами ОТО, его также нужно «приготовить». Степень точности, с которой осуществляется геодезическое движение, одинакова для всех шаров, удовлетворяющих условию  $\rho R = \text{const}$ , где  $\rho$  — плотность вещества шара,  $R$  — радиус шара. Оценки показывают, что хорошая степень точности достигается для достаточно массивных тел типа планет, сильно удаленных друг от друга. Поэтому естественной областью применимости ОТО являются движение небесных тел и космология, а также движение искусственных пробных тел типа космических аппаратов, свободных от сноса [23].

Условие  $\rho R = \text{const}$  определяет степень универсальности ОТО в реальных условиях. Геометризованная электродинамика также содержит параметр, определяющий степень ее универсальности:  $e/m = \text{const}$ , где  $e$  — заряд частицы (т. е. пробного тела),  $m$  — ее масса. Очевидно, что в ОТО  $\rho$  играет роль заряда, а  $1/R$  — массы пробного тела.

Физической моделью расслоенного пространства может служить любое множество тождественных, но по-разному ориентированных в различных пространственно-временных точках элементов (атомов, молекул, спинов и т. п.). Поэтому классическая теория калибровочных полей оказалась очень полезной в физике конденсированных и упорядоченных сред. Возможно, что физика твердого тела, фазовые переходы, свойства сплошной среды станут основными областями применения геометрической теории калибровочных полей. Геометризация взаимодействия в этом случае означает переход к представлению о том, что все частицы среды являются свободными (т. е. не взаимодействуют между собой или не находятся в некоем

внешнем поле). Эта точка зрения близка успешно применяемому в физике твердого тела формализму квазичастиц.

Геометрическое описание взаимодействий позволяет аксиоматизировать физику. При этом: 1) естественным образом объединяются внутренние и пространственно-временные симметрии; 2) появляется естественный критерий для выбора формы лагранжианов взаимодействующих полей; 3) классифицируются решения уравнений классических калибровочных полей по их алгебраическим и топологическим свойствам; 4) обосновывается алгебра полей.

Однако главное достоинство геометрической теории взаимодействий — ее суверенность. В своей полемике с Бором Эйнштейн не просто выступал против чуждой ему идеологии. В основе его возражений против квантового подхода, для развития которого он сам много сделал, лежит образ идеальной теории, в которую все образы физической реальности входят через их теоретические аналоги. При этом теория не содержит элементов, заимствованных из опыта и не имеющих чисто теоретической интерпретации. Только такая «недуалистическая» теория может быть сравнима с экспериментом как целое. Квантовая механика, по мнению Эйнштейна, этому требованию не удовлетворяла, как, впрочем, и теория поля тяготения с источниками, развитая самим Эйнштейном. Стремление избавиться от такого дуализма и было причиной многолетних поисков Эйнштейна единой геометрической теории взаимодействий.

Как известно, стремление найти общую точку зрения на различные физические явления или общий математический аппарат существует с тех пор, как существует физика. Но до нашего столетия физика, как правило, стремилась найти универсальное вещество, заполняющее все пространство, свойствами которого можно было бы объяснить все физические явления. Так появились гипотезы об универсальных жидкостях типа флогистона и об эфире. С современной точки зрения эфир — механическая модель геометрических свойств пространства — времени. Поэтому он может быть без ущерба для теории из нее изъят и заменен аксиомами о пространственно-временных отношениях. Понимание этого обстоятельства привело, как известно, к созданию специальной, а затем общей теории относительности. В ОТО универсальное гравитационное взаимодействие отождествлялось с искривлением пространства — времени. В геометрических единых теориях гравитации и электромагнетизма (Эйнштейн, Вейль, Эддингтон, Райнич, Калуза, Фок и др.) гравитационное и электромагнитное поля объединялись предположением, что оба эти взаимодействия суть проявления неевклидовости пространства — времени, но более сложной природы, чем искривление, соответствующее лишь гравитационному взаимодействию.

В современных групповых подходах иногда ищут наиболее широкую группу преобразований, включающую как пространственно-временные, так и внутренние симметрии элементарных частиц. Как оказалось, такая группа, если она нетривиальна, должна быть бесконечной. В отличие от этих подходов при геометрическом объеди-

нении симметрий строится такое пространство, которое естественным образом наделено обоими видами симметрии, задаваемыми произвольными группами. Геометрия в «базе» и в «слое», т. е. пространственно-временная и внутренняя симметрии, вообще говоря, не связаны друг с другом. Это отражает независимость квантовых чисел, соответствующих внутренним симметриям и определяющих, например, правила запрета в реакциях элементарных частиц, от их пространственно-временных характеристик. Тем самым конструкция расслоенного пространства позволяет объединять любые симметрии. Связь между внутренними и пространственными симметриями появляется при нарушении локальной калибровочной инвариантности. Важно отметить также, что вместо одного вещества или одной функции с большим числом компонент или одной широкой группы в геометрической теории калибровочных полей указывается общий принцип, по которому строится геометрия пространства, соответствующая каждому взаимодействию.

Использование геометрии расслоенного пространства позволяет рассматривать не только каждое калибровочное поле отдельно, изменяя лишь структуру «слоя» в соответствии с калибровочной группой, но и несколько полей одновременно, если над каждой точкой пространства — времени ввести несколько слоев. Взаимодействие разных полей друг с другом или с гравитационным полем можно определить тогда с помощью проекций соответствующих слоев друг на друга или на касательное пространство к базе, т. е. проекции на пространство — время. Все результаты геометрических единых теорий гравитации и электродинамики, использующих 4-мерную или 5-мерную геометрию, могут быть получены таким способом.

Итак, исследователь, имеющий дело с современной теорией элементарных частиц, напоминает тех, кто сидит в платоновой пещере спиной к огню и пытается по пляскам теней на стене определить, что происходит с предметами, движущимися у него за спиной и отбрасывающими эти тени. Мы не знаем, что представляет собой «внутренний мир» элементарных частиц, какова природа внутренних симметрий. Тем не менее по отражениям этих внутренних свойств, улавливаемым нашими приборами, макроскопическими и 3-мерными, мы пытаемся восстановить происходящее в этом загадочном и недоступном мире, который называется «элементарная частица». Но если мы не можем «обернуться» и «увидеть сущность», то можно попробовать понять, как получается «тень» и что такое «огонь». Видя отображение и зная, как оно получается, мы могли бы «построить сущность».

## **§ 2. Калибровочные поля и физика элементарных частиц**

Последние 15—20 лет теория элементарных частиц напоминала калейдоскоп. Новые направления, теории, модели, технические приемы внезапно появлялись, давали несколько ярких результатов

и так же внезапно уходили в тень. Дисперсионные соотношения, реджистика, высшие симметрии, кварки и партоны, алгебра токов, черные дыры, расслоенные пространства, очарованные частицы, струны, солитоны, вильсоновские разложения, асимптотическая свобода и тюрьма для кварков, «заговор полюсов» и гидродинамика — что между ними общего? Стоит ли за этими «деревьями» какой-нибудь «лес» или все эти дороги ведут в разные стороны? Долгое время ответ был неясен. Сейчас, однако, можно сказать, что есть по крайней мере одна теория, где все пути сходятся. Это теория калибровочных полей. Она использует новые физические идеи и математический аппарат для единого описания всех видов взаимодействий элементарных частиц: сильных, слабых, электромагнитных и гравитационных. В то же время она допускает чисто геометрическую интерпретацию и в своем классическом аспекте может рассматриваться как теория сплошной среды. Поэтому она естественно смыкается со статистической физикой и физикой твердого тела, заимствуя у них некоторые методы и передавая свои.

Экспериментальные и теоретические открытия последних лет показывают, что, возможно, традиционное разделение видов взаимодействий по силе имеет смысл только при невысоких энергиях. С ростом энергии слабые взаимодействия растут и могут стать сильнее электромагнитных, а сильные взаимодействия ослабевают и могут по порядку величины приблизиться к слабым и электромагнитным [24]. Тогда сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия, которые мы привыкли различать, станут проявлениями одного универсального взаимодействия. Если под универсальностью понимать наличие одной константы связи, то произойти это может, по-видимому, при энергиях  $10^{16}$ — $10^{18}$  ГэВ, когда необходимо учитывать и гравитацию. Но и в любом другом случае истинно единая теория всех взаимодействий должна включать в себя теорию тяготения. Таким образом, возможно, в ближайшие годы в физике элементарных частиц будет сделан шаг, подобный созданию в прошлом веке электродинамики Максвелла, когда было понято, что свет, электрические и магнитные явления суть разновидности одного и того же электромагнитного взаимодействия. Теория Максвелла позволила предсказать и открыть радиоволны и механическое действие света, и благодаря ей механическая картина мира сменилась электромагнитной. Современные единые перенормируемые модели сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий явились результатом почти 40-летних попыток построить лагранжеву теорию слабых и сильных взаимодействий по образу и подобию электродинамики [25]. Возможно, что они тоже изменят картину мира.

Основу теории калибровочных полей составляют принципы симметрии, главный из которых — принцип локальной калибровочной инвариантности. Этот принцип впервые был использован Вейлем [5], который показал, что теорию Дирака можно сделать инвариантной относительно локальной группы фазовых преобразований волновых функций (градиентных преобразований второго рода), если

В лагранжиане обычные производные заменить ковариантными по правилу  $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ , где  $A_\mu$  — вектор-потенциал электромагнитного поля,  $e$  — электрический заряд. Возможность такой замены говорит об универсальности электромагнитного поля и соответствующей константы связи  $e$ . В то же время она означает, что взаимодействие, введенное с ее помощью, допускает чисто геометрическую трактовку на языке коэффициентов связности пространства—времени. Последнее было продемонстрировано самим Вейлем, который показал, что электромагнитное поле можно отождествить с дополнительными неметрическими коэффициентами связности пространства—времени, а локальные калибровочные преобразования — с растяжениями 4-мерного интервала, зависящими от точки. В пространстве Вейля имеется любопытный геометрический аналог квантования орбит по Бору. Именно, если рассматривать кулоновское центрально-симметричное электромагнитное поле (атом водорода) в пространстве Вейля, то оказывается, что боровские орбиты (орбиты электрона) — это те траектории, вдоль которых параллельный перенос вектора не изменяет его длины [26, 27]. Любые другие траектории в пространстве Вейля этому требованию не удовлетворяют. Основные черты вейлевской трактовки электромагнитного поля (универсальность, геометризуемость, наличие классических аналогов квантования) сохранились и в современной теории калибровочных полей.

**Поля Янга — Миллса.** Требование локальной изотопической инвариантности аналогично требованию калибровочной инвариантности заряженных полей  $\psi' = \exp[i\alpha(x)]\psi$  в электродинамике, где такая инвариантность обеспечивается введением электромагнитного поля  $A_\mu$ , преобразующегося по закону

$$A'_\mu = A_\mu + (1/e) \partial\alpha/\partial x^\mu, \quad (2.1)$$

и заменой в уравнении Дирака обычной производной — «ковариантной»:

$$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu.$$

Аналогично локальная изотопическая инвариантность обеспечивается заменой

$$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu = \partial_\mu - igB_\mu, \quad (2.2)$$

где  $B_\mu$  представляет собой  $2 \times 2$  матрицы ( $\hbar = c = 1$ ;  $x_4 = it$ ), из которых три эрмитовы ( $\mu = 1, 2, 3$ ), а  $B_4$  — антиэрмитова;  $g$  — изотопический заряд.

Из требования инвариантности

$$S (\partial_\mu - igB'_\mu) \psi' = (\partial_\mu - igB_\mu) \psi \quad (2.3)$$

получим закон преобразования для  $B_\mu$  ( $B$ -квантов поля Янга — Миллса):

$$B'_\mu = S^{-1} B_\mu S + (i/g) S^{-1} \partial S / \partial x^\mu.$$

Последний член подобен градиентному члену в калибровочном преобразовании электромагнитных потенциалов.

По аналогии с тензором напряженности электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}$  строится тензор

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial B_\nu / \partial x^\mu - \partial B_\mu / \partial x^\nu + ig (B_\mu B_\nu - B_\nu B_\mu),$$

преобразующийся по закону

$$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = S^{-1} \mathcal{F}_{\mu\nu} S. \quad (2.4)$$

Изложенный выше ход рассуждений можно применить к полю  $\psi$  с произвольным изотопическим спином. При этом будут изменяться матрицы  $S$ , т. е. представление группы вращений в 3-мерном пространстве. Различные поля с одинаковыми полными изотопическими спинами, т. е. принадлежащие к одному представлению  $S$ , взаимодействуют с одним и тем же матричным полем  $B_\mu$ . Произведение представлений  $S = S^{(a)} S^{(b)}$  порождает сумму  $B_\mu$ -полей, соответствующих каждому представлению:  $B_\mu = B_\mu^{(a)} + B_\mu^{(b)}$ . Поле  $B_\mu$  можно представить в виде

$$B_\mu = 2\mathbf{A}_\mu \cdot \mathbf{T}, \quad (2.5)$$

где  $\mathbf{T}$  — матрица представления группы изотопических вращений  $O_3$ , а поля  $\mathbf{A}_\mu$  одинаковы для всех представлений. В изотопическом пространстве  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{A}_\mu$  — 3-мерные векторы. Тогда

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = 2\mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{T};$$

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial \mathbf{A}_\nu / \partial x^\mu - \partial \mathbf{A}_\mu / \partial x^\nu - 2g \mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu.$$

Одни и те же  $\mathbf{F}_{\mu\nu}$  взаимодействуют со всеми полями  $\psi$  относительно к представлению  $S$ , к которому относится  $\psi$ . Если рассматриваются лишь инфинитезимальные изотопические калибровочные преобразования  $S = 1 - 2i\mathbf{T} \cdot \delta\omega$ , то преобразования  $\mathbf{A}_\mu$  выглядят следующим образом:

$$\mathbf{A}'_\mu = \mathbf{A}_\mu + 2\mathbf{A}_\mu \times \delta\omega + (1/g) \partial_\mu \delta\omega.$$

Здесь  $\delta\omega$  — совокупность параметров преобразований. Заметим, что выделить инфинитезимальные преобразования можно только в том случае, если локализуемая группа является группой Ли.

Выберем плотность лагранжиана, инвариантную относительно локальных изотопических калибровок, в виде

$$L = -(1/4) \mathbf{F}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu} - \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu - ig\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\mu) \psi - m\bar{\psi}\psi.$$

Варьирование этого лагранжиана по  $\mathbf{A}_\mu$  и  $\bar{\psi}$  приводит к следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \partial_\nu \mathbf{F}^{\mu\nu} + 2g (\mathbf{A}_\nu \times \mathbf{F}^{\mu\nu}) + \mathbf{J}^\mu &= 0; \\ \gamma^\mu (\partial_\mu - ig\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}_\mu) \psi + m\psi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

где  $\mathbf{J}^\mu = ig\bar{\psi}\boldsymbol{\tau}\psi$ . Дивергенция  $\mathbf{J}_\mu$  не обращается в нуль:

$$\partial \mathbf{J}^\mu / \partial x^\mu = -2g \mathbf{A}_\mu \times \mathbf{J}^\mu.$$

Если, однако, ввести величину

$$\tilde{J}^\mu = J^\mu + 2 g A_\nu \times F^{\mu\nu},$$

то получим закон сохранения в виде

$$\partial \tilde{J}^\mu / \partial x^\mu = 0. \quad (2.7)$$

Уравнения поля можно дополнить условием на  $A_\mu$ , аналогичным лоренцевой калибровке для электромагнитных потенциалов:

$$\partial A_\mu / \partial x^\mu = 0.$$

Это условие устраняет скалярную часть в поле  $A_\mu$ , оставляя компоненты, соответствующие спину 1, и налагает ограничение на возможные изотопические калибровочные преобразования. Именно, преобразование  $S = 1 - i\tau \cdot \delta\omega$  должно удовлетворять условию

$$\partial^2 \delta\omega / \partial x^{\mu^2} + 2 g A_\mu \times \partial \delta\omega / \partial x^\mu = 0,$$

которое, используя (2.2), можно представить в виде

$$\nabla_\mu \nabla_\mu \delta\omega = 0.$$

Это аналог условия на параметры градиентного преобразования (2.1) в электродинамике:

$$\partial^2 \alpha / \partial x^{\mu^2} = 0. \quad (2.8)$$

Как известно, условие (2.8) выделяет волновые решения в уравнениях Максвелла.

Будучи записаны через вектор-потенциал в лоренцевой калибровке, уравнения Янга — Миллса выглядят следующим образом:

$$\square A_\mu + 2 g A_\nu \times (2 \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu - 2 g A_\mu \times A_\nu) = 0. \quad (2.9)$$

**Сферически-симметричные решения классических уравнений Янга — Миллса. С в о б о д н ы е п о л я.** Сходство классических калибровочных полей с электромагнитным полем продемонстрировали Икеда и Миячи в 1962 г. [28] и затем Лос [29] в 1965 г. Они получили статические сферически-симметричные решения уравнений Янга — Миллса без источника в лоренцевой калибровке для случая изотопической и  $SU(3)$ -симметрий. Лос, кроме того, показал, что сферически-симметричные решения уравнений для калибровочного поля с любой внутренней симметрией приводятся всегда к кулоновскому виду. В самом деле, в общем случае сферически-симметричное решение уравнений Янга — Миллса имеет вид:

$$A_i = (x^i/r) f(r, t), \quad i = 1, 2, 3;$$

$$A_4 = i\varphi(r, t),$$

или в полярных координатах:  $A_r = f(r, t)$ ;  $A_\theta = A_\varphi = 0$ ;  $A_4 = i\varphi(r, t)$ .

Уравнения (2.9) принимают в статическом случае вид:

$$\Delta f - 2f/r^2 + 2g[f \times f' + \varphi \times \varphi' + 2g\varphi \times (f \times \varphi)] = 0; \quad (2.10)$$

$$\Delta \varphi + 4gf \times [\varphi' + g\varphi \times \varphi] = 0. \quad (2.11)$$

Условия калибровки  $\partial_i A_i = 0$  переходят в условия

$$\mathbf{f}' + 2\mathbf{f}/r = 0. \quad (2.12)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по  $r$ ,  $\Delta$  — оператор Лапласа. Интегрируя (2.12), получаем  $\mathbf{f} = \mathbf{a}/r^2$  ( $\mathbf{a}$  — константа интегрирования). Тогда (2.10) и (2.11) дают:

$$\boldsymbol{\varphi} \times [\boldsymbol{\varphi}' + 2g\mathbf{a} \times \boldsymbol{\varphi}/r^2] = 0; \quad (2.13)$$

$$(r^2\boldsymbol{\varphi}')' + 4g\mathbf{a} \times [\boldsymbol{\varphi}' + g\mathbf{a} \times \boldsymbol{\varphi}/r^2] = 0; \quad (2.14)$$

$\boldsymbol{\varphi} = 0$  — тривиальное решение этих уравнений. Пусть  $\boldsymbol{\varphi} \neq 0$ . Тогда из (2.13) следует существование такой скалярной функции  $\lambda(r)$ , что

$$r^2\boldsymbol{\varphi}' = -2g\mathbf{a} \times \boldsymbol{\varphi} + \lambda\boldsymbol{\varphi}. \quad (2.15)$$

Подставив (2.15) в (2.14), получим

$$(\lambda' + \lambda^2/r^2)\boldsymbol{\varphi} = 0,$$

откуда  $\lambda = k(1 - k/r)^{-1}$ ,  $k$  — константа интегрирования. Когда  $\lambda \neq 0$ , (2.15) сводится к уравнению

$$r^2(\lambda\boldsymbol{\varphi})' = -2g\mathbf{a} \times (\lambda\boldsymbol{\varphi}).$$

Общее решение этого уравнения:

$$\boldsymbol{\varphi} = (1 - k/r) [\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} \cos(2g|\mathbf{a}|/r) + \bar{\mathbf{c}} \sin(2g|\mathbf{a}|/r)], \quad (2.16)$$

$\bar{\mathbf{a}}$ ,  $\bar{\mathbf{b}}$  и  $\bar{\mathbf{c}}$  — константы интегрирования, удовлетворяющие условиям:  $\mathbf{a} \times \bar{\mathbf{a}} = 0$ ;  $|\mathbf{a}| \bar{\mathbf{c}} = \mathbf{a} \times \bar{\mathbf{b}}$ ;  $|\mathbf{a}| \bar{\mathbf{b}} = -\mathbf{a} \times \bar{\mathbf{c}}$ . Это значит, что: 1)  $\bar{\mathbf{a}} \parallel \mathbf{a}$ ; 2)  $\bar{\mathbf{a}}$ ,  $\bar{\mathbf{b}}$  и  $\bar{\mathbf{c}}$  образуют правостороннюю ортогональную систему и 3)  $|\bar{\mathbf{b}}| = |\bar{\mathbf{c}}|$ . Когда  $\lambda = 0$  (т. е.  $k = 0$ ), общее решение (2.15) дается формулой (2.16), в которой надо положить  $k = 0$ .

В случае  $\mathbf{a} \times \boldsymbol{\varphi} \neq 0$  решение (2.15) обладает следующими свойствами. При перемещении из одной точки пространства в другую вектор  $\boldsymbol{\varphi}$  «вращается» в групповом пространстве вокруг «оси»  $\mathbf{a}$ , причем угол  $\alpha$  между  $\mathbf{a}$  и  $\boldsymbol{\varphi}$  всюду постоянен. «Угловая скорость»  $\omega$  этого вращения получается следующим образом. Компонента «скорости» конца вектора  $\boldsymbol{\varphi}$  в направлении  $\mathbf{a} \times \boldsymbol{\varphi}$ , найденная из уравнения (2.15), есть

$$\frac{(\mathbf{a} \times \boldsymbol{\varphi}) \cdot \boldsymbol{\varphi}'}{|\mathbf{a} \times \boldsymbol{\varphi}|} = -2g \frac{|\mathbf{a} \times \boldsymbol{\varphi}|}{r^2} = -2g |\mathbf{a}| \cdot |\boldsymbol{\varphi}| \frac{\sin \alpha}{r^2}. \quad (2.17)$$

Если разделить (2.17) на расстояние конца вектора  $\boldsymbol{\varphi}$  от «оси»  $\mathbf{a}$  (т. е. на  $|\boldsymbol{\varphi}| \sin \alpha$ ), то получим выражение для «угловой скорости»  $\omega$ :  $\omega = -2g |\mathbf{a}|/r^2$ .

Частное решение  $\mathbf{A}_i = 0$ ;  $\mathbf{A}_4 = i(c_1/r + c_2)$ ;  $\mathbf{c}_1 = (0, 0, c_1)$ ;  $\mathbf{c}_2 = (0, 0, c_2)$ ;  $c_1, c_2 = \text{const}$  назовем *каноническим решением*. Его можно интерпретировать как нейтральное  $B$ -поле.

Итак, для  $B$ -квантов поля Янга — Миллса имеем каноническое решение:

$$B_i = 0; B_4 = 2i (c_1/r + c_2) \cdot T. \quad (2.18)$$

Ему соответствует тензор напряженности поля с компонентами:

$$\mathcal{F}_{ij} = 0; \mathcal{F}_{i4} = 2i (x^i/r^2) c_1 \cdot T. \quad (2.19)$$

Общее решение:

$$B_i = 2 (x^i/r^3) a \cdot T; B_4 = 2 i\varphi \cdot T, \quad (2.20)$$

где  $\varphi$  определяется формулами (2.16) и (2.17). В этом случае

$$\mathcal{F}_{ij} = 0; \mathcal{F}_{i4} = -2 i\lambda (x^i/r^3) \varphi \cdot T. \quad (2.21)$$

Общее решение выбором калибровки может быть приведено к каноническому виду.

Сохраняющиеся интегральные величины удовлетворяют соотношениям:

$$4\pi c_1 = -i \int J_4 d^3x; 4\pi k (\bar{a} + \bar{b}) = i \int J_4 d^3x.$$

Сферически-симметричное решение для калибровочного поля с  $SU(3)$ -симметрией, найденное Лосом, аналогично по своим свойствам решению Икеды и Миячи для изотопической симметрии, приведенному выше. Компоненты вектор-потенциала в решении Лоса имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} A_r &= ic^j H_j/r^2, j=1, 2; A_\theta = A_\varphi = 1; \\ A_t &= (ia/r) [E_3 \exp(i\beta) + E_{-3} \exp(-i\beta)], \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

где  $\beta = \beta_0 - c^j a_j (3)/r$ ;  $H_1, H_2, E_3, E_{-3}$  — генераторы  $SU(3)$ ;  $H_1 = (\sqrt{3}/3) I_3$ ;  $H_2 = (1/2) Y$ .

Корневой вектор  $a^j(3) = (-\sqrt{3}/6, 1/2)$  принадлежит  $E_3$ ;  $c^j, a$  — вещественные константы;

$$F_{rt} = - (ia/r^2) [E_3 \exp(i\beta) + E_{-3} \exp(-i\beta)]. \quad (2.23)$$

Как и в случае изотопической симметрии, решение (2.22), (2.23) приводится к кулоновскому виду с помощью преобразования  $S = \exp(ic^j H_j/r)$  при условии  $c^j a_j(3) = 0$ , которое означает пропорциональность  $c^j H_j$  выражению  $Q = I_3 + 1/2 Y$ , т. е.  $A_r$  пропорционально электрическому заряду  $Q$ .

При изменении  $r$ , как и в решении Икеды и Миячи, вектор  $rA_t$  вращается в групповом пространстве. В результате при больших  $r$   $\beta \rightarrow \beta_0$  и для  $r \gg c^j a_j$  решение практически кулоновского типа.

Если положить скорость света равной единице ( $c = 1$ ), то коэффициенты в формулах можно выбрать так, чтобы матричные элементы  $A_r$  имели размерность  $1/l$ , где  $l$  — длина, а генераторы группы, корневые векторы и  $a$  были безразмерны,  $c^j \sim l$ . Тогда  $c^j a_j \sim l$ , где  $l$  определяет размеры области, внутри которой поле короткодействующее, а снаружи быстро стремится к кулоновскому виду.

Таким образом, если рассматривается калибровочное поле одной точечной частицы, оно не отличается принципиально от кулоновского поля, и нелинейность уравнений поля себя не проявляет. Однако для двух точечных частиц решение уже не может быть приведено к кулоновскому виду.

**Монополи и инстантоны.** В 1969 г. Ву и Янг, используя калибровку  $\partial^0 A_i^a = 0$ , нашли статическое решение уравнений Янга—Миллса, перепутывающее внутренние и пространственно-временные индексы. Оно имело вид [30]:

$$A_j^a = \varepsilon_{iaj} x^i f(r)/r; A_0^a = 0; r = (x^2)^{1/2}.$$

Это решение сингулярно при  $r = 0$ . Однако, если искать подобное решение не для свободных  $SU(2)$ -калибровочных полей, а для взаимодействующих со скалярными полями Хиггса  $\varphi^a$ , можно построить статическое сферически-симметричное решение, описывающее магнитный монополь без струнных сингулярностей. Такое решение было впервые получено Тофтом и А. М. Поляковым в 1974 г. [31]:

$$A_i^a = -e^{-1} \varepsilon_{iaj} x^j f(r)/r; A_0^a = 0; \varphi^a = x^a u(r)/r.$$

Для того, чтобы построить это решение, нужно было предположить, что локальная симметрия спонтанно нарушена, т. е. в изопространстве имеется выделенное направление, определяемое триплетом полей  $\varphi^a$  или единичным киральным векторным полем  $n^a$ , и отождествить в каждой точке  $V_4$  направление  $\varphi^a$  с направлением радиус-вектора в обычном пространстве. Поэтому масса монополя, полученного таким образом, пропорциональна массе векторных мезонов, ассоциированных с  $SU(2)$ -калибровочной инвариантностью теории:  $M \sim m_V/g^2$ .

В каком смысле решение Тофта—Полякова описывает магнитный монополь? Предположим, что электромагнитная группа  $U(1)$  является подгруппой более широкой калибровочной группы с компактной накрывающей (в данном случае подгруппой  $SU(2)$ ) и определим физически наблюдаемое электромагнитное поле как свертку  $F_{\mu\nu} = n_a F_{\mu\nu}^a - e^{-1} \varepsilon_{abc} n^a (\nabla_\mu n^b) (\nabla_\nu n^c)$ . В статическом сферически-симметричном случае имеем  $F_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\mu\nu a} r^a / er^3$ . Следовательно, полученное выше решение описывает магнитное поле точечного источника  $H^a = -r^a / er^3$ , находящегося в начале координат  $r = 0$ . Полный магнитный поток равен  $-4\pi/e$ . Он удовлетворяет условию квантования Швингера  $eg = 1$ . Тензор  $F_{\mu\nu}$  удовлетворяет уравнениям

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = J_e^\mu; (1/2) \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} = J_m^\mu,$$

откуда видно, что токи сохраняются. Магнитный заряд определяется как

$$Q_m = (1/4\pi) \int J_m^0 d^3r = (-1/8\pi e) \int \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{abc} (\partial_i n^a) (\partial_j n^b) (\partial_k n^c) d^3r.$$

Из требования однозначности  $n^a$  получаем  $Q_m = (-3/4\pi e) \int_{n^2 \leq 1} k d^3n = -k/e$ , где  $k$  — число оборотов сферы в изопространстве при инте-

грировании по сфере в обычном пространстве. Поскольку  $n^a = r^a/r$ ,  $k = 0$  или 1. Величина  $k$  называется *степенью отображения*  $S^2$  в  $S^2$  (топологический инвариант). Сохранение магнитного заряда не связано с динамикой, так как вытекает из существования постоянного скаляр-изовекторного поля  $n^a$  и тождеств  $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\nu \partial^\alpha (n^a A^\beta) \equiv 0$ , справедливых в отсутствие линейных сингулярностей в  $A_\mu^a$ .

Обобщение этого подхода на группы более высокой размерности, чем  $SU(2)$ , приводит к  $SO(4)$  и  $SO(3,1)$ -калибровочным группам, когда размерности внутреннего пространства и базы совпадают. Первое решение такого типа было построено А. А. Белавиным, А. М. Поляковым, А. С. Шварцем и Ю. С. Тюпкиным в 1975 г. и получило название *инстантон*. Инстантонные решения регулярны, локализованы в пространстве и времени ( $S < \infty$ ), удовлетворяют условию самодуальности тензора поля  $F_{\mu\nu}^a = \pm *F_{\mu\nu}^a = (\pm 1/2) \varepsilon_{\mu\nu\tau\lambda} F^{\tau\lambda a}$  и в евклидовом  $V_4$  минимизируют интеграл действия, так как  $\int (F_{\mu\nu}^a \mp *F_{\mu\nu}^a)^2 dV \geq 0$  и, следовательно,  $S = \int (F_{\mu\nu}^a)^2 dV \geq \pm \int (F_{\mu\nu}^a *F_{\mu\nu}^a) dV$ . Действие при описании инстантонов играет такую же роль, как энергия при описании частиц. Инстантоны называют также псевдочастицами. Существует только два типа инстантонных решений уравнений  $SO(4)$ -калибровочного поля в евклидовом  $V_4$ :

$$1) A_\mu^{\alpha\beta} = 2Y_\mu^{\alpha\beta} (x^2 + \lambda^2)^{-1}; F_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = 4\delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \lambda^2 (x^2 + \lambda^2)^{-2};$$

$$2) A_\mu^{\alpha\beta} = (Y_\mu^{\alpha\beta} - Z_\mu^{\alpha\beta}) (x^2 + \lambda_+^2)^{-1} + (Y_\mu^{\alpha\beta} + Z_\mu^{\alpha\beta}) (x^2 + \lambda_-^2)^{-1};$$

$$F_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = 2\delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} [\lambda_+^2 (x^2 + \lambda_+^2)^{-2} + \lambda_-^2 (x^2 + \lambda_-^2)^{-2}] + 2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} [\lambda_+^2 (x^2 + \lambda_+^2)^{-2} - \lambda_-^2 (x^2 + \lambda_-^2)^{-2}],$$

где  $Y_\mu^{\alpha\beta} = x^\alpha \delta_\mu^\beta - x^\beta \delta_\mu^\alpha$ ;  $Z_\mu^{\alpha\beta} = \varepsilon_{\mu\alpha'\beta'\gamma} x^{\gamma} g^{\alpha\alpha'} g^{\beta\beta'}$ ;  $\lambda, \lambda_+, \lambda_-$  — масштабные факторы;  $\lambda_+ \neq \lambda_-$ . Решение 1, полученное А. А. Белавиным и др., — вещественное, всюду регулярное и исчезающее при  $x^2 \rightarrow \infty$  в евклидовом  $V_4$ , становится сингулярным при переходе к пространству Минковского, так как  $SO(4)$  заменяется на  $SO(3,1)$  и вследствие знакопеременности метрики возможно  $x^2 + \lambda^2 = 0$ . Решение 2 описывает пару псевдочастиц: инстантон — антиинстантон.

Инстантон, как и монополь, характеризуется сохраняющимся током, не связанным с динамикой и дающим в качестве заряда топологический инвариант:  $q = \int F_{\mu\nu}^\alpha (\pm) *F_{\mu\nu}^\alpha (\pm) d^4x$ , где  $F_{\mu\nu}^{0a} (\pm) = (1/2) (F_{\mu\nu}^{0a} \pm (1/2) \varepsilon_{abc} F^{bc})$ . Для решения 1  $q = 1$ . Антиинстантон имеет  $q = -1$ . Инстантоны — дальнедействующие поля и должны учитываться в инфракрасной проблеме. Они описывают квантовые флуктуации вакуума.  $SO(4)$  — калибровочное поле в плоском  $V_4$  не является гравитационным полем.

**Теория Утиямы и ее развитие. Калибровочные поля общего вида.**  
 В 1956 г. Утияма показал [2], что из требования локальной инвариантности интеграла действия

$$S = \int \bar{\psi} \Gamma^\mu \partial_\mu \psi d^4x \quad (2.24)$$

относительно произвольной полупростой группы Ли можно получить соответствующее этой группе векторное поле и обычные законы сохранения. В работе Утиямы постулат о локальной калибровочной инвариантности лагранжевой теории рассматривался как общий принцип, позволяющий вводить новые векторные поля и определять форму взаимодействия этих полей с исходными полями, связывая новые поля с законами сохранения. В качестве калибровочной группы использовалась произвольная полупростая группа Ли. Теория строилась с помощью вариационного формализма. Новый постулат инвариантности позволял ответить на следующие вопросы:

1. Какого типа будет поле  $A_\mu(x)$ , вводимое на основе требования инвариантности?
2. Как преобразуется это новое поле при преобразованиях группы  $G_{\infty r}$ ?
3. Какова форма взаимодействия между полем  $A_\mu(x)$  и исходным полем  $\psi$ ?
4. Можно ли определить новый лагранжиан  $L'(\psi, A)$  по исходному  $L(\psi)$ ?
5. Какие типы уравнений поля  $A_\mu(x)$  окажутся допустимыми?

Действительно, пусть  $\psi$  подвергается калибровочным преобразованиям вида

$$\psi' = S\psi, \quad (2.25)$$

где  $S = 1 + I \varepsilon^a(x)$ ,  $I$  — генератор некоторого представления группы Ли  $G_r$ , относительно которой интеграл действия (2.24) инвариантен. Легко видеть, что (2.25) получается из бесконечно малых преобразований  $G_r$  заменой параметров произвольными функциями координат. Таким образом, в каждой точке повторяется алгебра конечной группы Ли  $G_r$ , но параметры преобразований изменяются от точки к точке. Поскольку преобразования зависят от  $r$  функций, а не чисел, будем обозначать группы локальных калибровок  $G_{\infty r}$  (бесконечная группа) [32]. Интеграл действия (2.24) не инвариантен относительно  $G_{\infty r}$  из-за появления в его вариации неисчезающих производных от параметрических функций. Чтобы восстановить инвариантность лагранжиана, достаточно ввести в него взаимодействие с некоторым векторным полем, заменив обычную производную «ковариантной» (или компенсирующей) по следующему правилу:  $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu = \partial_\mu - A_{\mu a}^a I_a$ . В теории Утиямы это правило уже не яв-

ляется мнемоническим, как у Янга и Миллса, а получается в резуль-

тае решения условий инвариантности лагранжиана. Эти условия приведены в § 5, где строится полная лагранжева теория калибровочных полей.

Условия инвариантности, аналогичные (2.3), определяют трансформационные свойства вектор-потенциала калибровочного поля относительно группы локальных калибровок:

$$\delta A_\mu^a = f_{bc}^a A_\mu^c \varepsilon^b + \partial_\mu \varepsilon^a,$$

где  $f_{bc}^a$  — структурные константы группы  $G_r$ ,  $\varepsilon^a$  — параметры. Такой закон преобразования  $A_\mu^a$  обеспечивает одинаковые (т. е. ковариантные) трансформационные свойства относительно  $G_{\infty r}$  волновой функции  $\psi$  и ее ковариантной производной  $\delta(\nabla_\mu \psi) = \varepsilon^a I_a \nabla_\mu \psi$ .

Зная закон преобразования  $A_\mu^a$ , из требований инвариантности относительно локальных калибровок можно найти лагранжиан свободного поля  $A_\mu^a$ , зависящий от  $A_\mu^a$  и их первых производных. Простейший релятивистски- и калибровочно-инвариантный лагранжиан имеет вид  $L_0 = - (1/4) F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a$ . Произвольный лагранжиан свободного поля  $A_\mu^a$  сводится к произвольной функции  $L_0$  [39]. Тензор напряженности калибровочного поля, иногда называемый просто *тензор поля*, в общем случае имеет вид  $F_{\mu\nu}^a = \partial_{[\mu} A_{\nu]}^a - 1/2 f_{bc}^a A_{[\mu}^b A_{\nu]}^c$ . Он преобразуется относительно  $G_{\infty r}$  однородно:  $\delta F_{\mu\nu}^a = f_{bc}^a F_{\mu\nu}^c \varepsilon^b(x)$ . Опуская в выражении для  $F_{\mu\nu}^a$  параметрический индекс с помощью «групповой метрики»  $g_{ab} = f_{am}^l f_{lb}$ , получаем тензор поля  $F_{a\mu\nu} = g_{ab} F_{\mu\nu}^b$ . Его закон преобразования:

$$\delta F_{a\mu\nu} = - f_{ac}^b F_{b\mu\nu} \varepsilon^c(x).$$

Очевидно, что, поскольку  $g_{ab}$  не вырождается только для полупростых групп, калибровочные поля, полученные Утиямой, соответствуют только полупростым группам.

Полагая, что полный лагранжиан имеет вид  $L_T = L_0(F) + L(\psi, \nabla_\mu \psi)$ , Утияма записал уравнения калибровочного поля в виде  $\delta L_T / \delta A_\mu^a = 0$  и закон сохранения

$$\partial_\mu \tilde{J}_a^\mu = 0 \tag{2.26}$$

для тока

$$\tilde{J}_a^\mu = - \left( I_a \psi \partial L / \partial \nabla_\mu \psi + f_{ac}^b A_\nu^c \partial L_0 / \partial F_{\mu\nu}^b \right). \tag{2.27}$$

Здесь лагранжиан  $L_0$  свободного поля  $A_\mu^a$  считается произвольной функцией  $F_{\mu\nu}^a$ , удовлетворяющей условию  $f_{bc}^a F_{\mu\nu}^b \partial L_0 / \partial F_{\mu\nu}^c = 0$ .

Первый член в (2.27) — обычный ток  $J_a^\mu$ , сохраняющийся при глобальной симметрии  $L$ . Второй член появляется из-за локальности симметрии. В частных случаях абелевой и изотопических групп из (2.26) следуют законы сохранения электромагнитного и изоспинового токов, совпадающие с законами сохранения в электродинамике и теории Янга — Миллса. Но Утияма вывел эти законы не путем дифференцирования уравнений поля, а с помощью анализа условий локальной инвариантности лагранжиана, предполагая при этом, что 1) выполняются уравнения поля, т. е. закон сохранения является слабым, и 2) ток можно определить как

$$J_a^\mu = \partial L_T / \partial A_\mu^a. \quad (2.28)$$

Такое определение тока в совокупности с условиями локальной инвариантности лагранжиана приводит к (2.27), но не всегда эквивалентно обычному определению. Для массивных калибровочных полей два определения тока (2.27) и (2.28) приводят к разным выражениям, поскольку определение (2.28) чувствительно к потенциальной энергии, а (2.27) — нет. В теории Утиямы закон сохранения (2.27) выполняется на экстремальных  $\delta L_T / \delta A_\mu^a = 0$  вследствие соотношения, вытекающего из условий инвариантности лагранжиана:

$$\partial_\mu \tilde{J}_a^\mu \equiv \partial_\mu (\delta L_T / \delta A_\mu^a). \quad (2.29)$$

С точностью до дивергенции антисимметричного тензора отсюда следует  $\delta L_T / \delta A_\mu^a = \tilde{J}_a^\mu$ . Поэтому можно сказать, что источником любого калибровочного поля является сохраняющийся ток.

В работах [32] и [35] было впервые показано, что лагранжева теория калибровочных полей представляет собой частный случай теорий, инвариантных относительно бесконечных групп. Вариационный формализм для бесконечных групп, развитый в этих работах (см. гл. II), позволил построить последовательную лагранжеву теорию калибровочных полей, включающую, в частности, результаты Янга — Миллса и Утиямы.

**Группа Лоренца и гравитационное поле.** Попытки интерпретировать гравитацию как калибровочное поле занимают особое место, ибо, во-первых, это единственное физическое поле, которое непосредственно связано со структурой пространства — времени, и, во-вторых, при этом локализуются координатные преобразования (а не калибровочные), что приводит к замене однородных пространств типа пространства Минковского неоднородными типа риманова пространства, а в самом общем случае — расслоенными пространствами [14, 15, 32—36].

Как уже говорилось, если группа Ли локализуется, то алгебра сохраняется только локально. Точно так же и понятие представления конечной группы Ли  $G_r$  становится локальным. Поэтому прежде чем рассматривать группы преобразований координат, необходимо ввести наряду с мировыми координатными сетками,

покрывающими все пространство — время, локальные системы координат касательного пространства к  $V_1$ , присоединенные в каждой мировой точке. Базисные векторы локальной ортогональной системы координат в общей теории относительности называются *реперами*. Таким образом, выбирая в качестве слоя в каждой точке касательное пространство, получаем касательное расслоение над  $V_4$ . Неоднородная группа движений плоского пространства при локализации распадается на две различные по смыслу группы преобразований: однородная подгруппа переходит в локальную симметрию, преобразующую реперный базис в каждой точке, а сдвиги — в группу непрерывных автоморфизмов, отображающих друг на друга локальные пространства (общековариантную группу). Очевидно, что в этом случае размерности слоя и базы совпадают.

Гравитационное поле как калибровочное впервые рассматривал Утияма [2]. Гравитационное поле в теории Утиямы вводится следующим образом. Рассматриваются две группы преобразований: локальная группа Лоренца, действующая в касательном пространстве, и группа произвольных точечных преобразований в  $V_4$ . Кроме обычных полевых переменных типа волновых функций частиц в лагранжиан вводятся реперы как 16 новых независимых переменных. Постулируется определенная зависимость между ковариантными производными от мировых и реперных компонент тензоров. Тогда возникает зависимость между калибровочным полем  $A_\mu(kl)$ , соответствующим локальной группе Лоренца, и реперами. Учитывая соотношение между метрическим тензором и реперами и предполагая, что коэффициенты связности в базе симметричны по нижним индексам, Утияма показывает, что калибровочное поле  $A_\mu(kl)$  выражается через символы Кристоффеля и, следовательно, совпадает с гравитационным полем. Тогда тензор напряженности поля  $F_{\mu\nu}(kl)$  выражается через тензор римановой кривизны  $V_4$ . С помощью реперов строится линейный по  $F_{\mu\nu}(kl)$  лагранжиан калибровочного поля, совпадающий с обычной скалярной кривизной  $V_4$ .

В теории Утиямы уравнения Эйнштейна получаются следующим образом. Вводятся две системы координат: локальная лоренцева система ( $x$ -система) и произвольная криволинейная система мировых координат ( $u$ -система). Величины, отнесенные к  $x$ -системе, обозначаются латинскими индексами, а к  $u$ -системе — греческими.

Квадрат инвариантной длины бесконечно малого интервала записывается в виде:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = g_{\mu\nu} du^\mu du^\nu;$$

$$g_{\mu\nu}(u) = (\partial x^i / \partial u^\mu) (\partial x^k / \partial u^\nu) g_{ik}.$$

Две группы функций (реперы)  $h_\mu^k(u) = \partial x^k / \partial u^\mu$ ;  $h_k^\mu(u) = \partial u^\mu / \partial x^k$  связывают локальные величины с мировыми. При этом выполняются соотношения:

$$g_{ik} h_\mu^i h_\nu^k = g_{\mu\nu}; \quad g_{\mu\nu} h_i^\mu h_k^\nu = g_{ik}; \quad h_k^\mu h_\mu^l = \delta_k^l;$$

$$g^{ik} h_i^\mu h_\nu^k = g^{\mu\nu}; \quad g^{\mu\nu} h_\mu^i h_\nu^k = g^{ik}; \quad h_k^\mu h_\nu^k = \delta_\nu^\mu;$$

$$\det |g_{\mu\nu}| = g = -h^2 = -|\det (h_\mu^k)|^2.$$

Четыре вектора  $h_1^\mu, h_2^\mu, h_3^\mu, h_4^\mu$  задают в каждой мировой точке локальную лоренцеву систему отсчета ( $x$ -систему). Волновые функции  $Q^A$  определяются по отношению к этой  $x$ -системе. В частности, спиноры вводятся как функции, локальные компоненты которых преобразуются по спинорному представлению группы лоренцевых вращений локальной системы координат. Мировые компоненты волновых функций получаются из локальных с помощью реперов:  $Q^\mu(u) = h_k^\mu(u) Q^k$ . Интеграл действия записывается в виде:

$I = \int |h| L(Q^A, h_k^\mu, Q_{,\mu}^A) d^4x$ . Он оказывается инвариантным по отношению к двум типам преобразований:

1) преобразованию Лоренца

$$\delta h_\mu^k = \varepsilon^k_l h_\mu^l; \quad \delta Q^A = \frac{1}{2} T^A_B Q^B \varepsilon^{kl}, \quad (2.30)$$

где  $T^A_B$  — элемент  $N \times N$ -матрицы представления группы Лоренца; при этом  $u^\mu$  не изменяются;

2) общему точечному преобразованию

$$u^{\mu'} = u^\mu + \lambda^\mu(u), \quad (2.31)$$

где  $\lambda^\mu(u)$  — произвольная функция  $u$ ;  $\delta h_\mu^k = (\partial \lambda^\nu / \partial u^\mu) h_\nu^k$ ;  
 $\delta Q^A(u) = Q^{A'}(u') - Q^A(u) = 0$ ;  $\delta Q_{,\mu}^A = -(\partial \lambda^\nu / \partial u^\mu) Q^A_{,\nu}$ .

Локализация преобразований (2.30) приводит к замене обычной производной ковариантной:

$$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu = \partial_\mu - \frac{1}{2} A_\mu(kl) T^A_B Q^B,$$

где  $A_\mu(kl)$  — калибровочное поле. В частности, если  $Q^B$  — спинорное поле  $\psi$ , то

$$\nabla_\mu \psi = \partial \psi / \partial x^\mu - (i/4) A_\mu(kl) [\gamma^k \gamma^l] \psi,$$

где  $\gamma^k$  — обычные матрицы Дирака. Такое определение ковариантной производной спиноров в римановом пространстве предлагалось ранее В. А. Фоком и Д. Д. Иваненко (1929 г. [37]).

Компенсирующая трактовка гравитации рассматривалась также в работе А. М. Бродского, Д. Д. Иваненко и Г. А. Соколика (1961 г. [38]), где коэффициенты связности Риччи вводились из требования инвариантности уравнения первого порядка для частиц произвольного спина  $\Gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0$  относительно локализованной однородной группы Лоренца.

Обобщение гравитационной теории Утиямы было предложено в 1961 г. Кибблом [39], который вместо однородной группы Лоренца использовал в качестве калибровочной группы группу Пуанкаре, считая, однако, что локальные сдвиги не влияют на локальные вращения. По отношению к локальным сдвигам тензорные преобра-

реперы реперов можно рассматривать как калибровочные. Тогда реперы становятся вторым калибровочным полем и вводятся автоматически. Та же зависимость между ковариантными производными компонент тензоров в слое и в базе, которую постулировал Утияма, но без ограничения на симметрию коэффициентов связности базы, позволила Кибблу выразить калибровочное поле  $A_\mu(kl)$  через символы Кристоффеля и тензор кручения пространства—времени. Тензор кручения Киббл предложил связать со спиновыми свойствами материальных источников гравитационного поля. Теория Киббла не совпадает с ОТО и не является последовательной теорией.

Интерпретация поля тяготения как калибровочного ведет, вообще говоря, к неэйнштейновской теории гравитации, так как основными полевыми переменными здесь оказываются коэффициенты связности, а не метрический тензор. В геометрической трактовке такому полю тяготения соответствуют пространства аффинной связности, которые могут быть и не наделены метрикой. Следуя калибровочной идеологии, в качестве лагранжиана свободного поля в такой теории следует выбирать квадратичный по тензору кривизны лагранжиан  $L = - (1/4) R_{\mu\nu}(ik) R^{\mu\nu}(ik)$ , что и было впервые предложено в 1918 г. Вейлем [5] (см. также [33]).

Метрический тензор можно ввести в калибровочной теории тяготения либо как дополнительную полевою переменную, либо как калибровочное поле, ассоциированное с общековариантными преобразованиями (Н. П. Коноплева, 1968 г. [32]). В последнем случае простейшим локально калибровочно-инвариантным лагранжианом будет скалярная кривизна (см. § 8). Очевидно, что, варьируя его полевой переменной, т. е. по метрике, мы получим уравнения Эйнштейна.

Если в теории присутствуют два типа локальных симметрий: локальная лоренцева и общековариантная, то должно быть и два типа калибровочных полей: коэффициенты связности и метрика (или реперы). В качестве лагранжиана в этом случае можно выбрать сумму линейного и квадратичного по тензору кривизны лагранжианов [33, 40]. В качестве уравнений поля в такой теории получаются две группы уравнений. Варьирование лагранжиана по метрике дает обобщение уравнений Эйнштейна. Варьирование по связности приводит к квазимахвелловским уравнениям для тензора кривизны [40—42, § 13]. Если метрика ковариантно постоянна по отношению к рассматриваемой связности, класс решений обобщенных уравнений поля тяготения включает все пространства ОТО [40]. Интерес к калибровочной теории тяготения с квадратичным по тензору кривизны лагранжианом был вновь вызван в 1974 г. работой Янга [43].

**Калибровочные теории сильных взаимодействий. Теория Сакураи и  $SU(3)$ -симметрия.** В 1960 г. появилась большая статья Сакураи [3], в которой предлагалась универсальная теория сильных взаимодействий. Сакураи опирался, во-первых, на результат Пайса, состоящий в том, что не существует других точных внутрен-

них свойств симметрии, кроме числа барионов, гиперзаряда и изоспина, и, во-вторых, на локальную калибровочную инвариантность. С каждой из перечисленных величин посредством требования локальной калибровочной инвариантности можно связать некоторое векторное поле. Сакураи утверждал, что трех этих полей достаточно для объяснения существовавшего тогда спектра масс.

Кроме того, теория Сакураи предсказывала образование резонансов и давала ряд красивых следствий и объяснений (в частности, множественность рождения  $\pi$ -мезонов при аннигиляции протона и антипротона, эффект отталкивательной сердцевины и т. п.). Согласно Сакураи, сильные взаимодействия носят векторный характер. Объекты, осуществляющие их, должны быть векторными частицами с массой, равной массе нескольких  $\pi$ -мезонов, и малым временем жизни (резонансами). Однако теория Сакураи не допускала рождения единичных  $\pi$ - и  $K$ -мезонов, и связи типа Юкавы оказывались с ее точки зрения чисто феноменологическими.

Онуки и Икеда в 1960 г. и Немеан, Гелл-Ман и Глэшоу в 1961 г., исходя из идей Сакураи, предложили 8-мерную симметрию для сильных взаимодействий [44]. В отличие от теории Сакураи, опиравшейся на три самостоятельные локализованные симметрии (две однопараметрические, как в электродинамике, соответствующие сохранению числа барионов и гиперзаряда, и локализованную группу изотопических вращений), в новой теории указанные законы сохранения вытекали из одной группы симметрии, а именно из группы  $SU(3)$ . Эта группа объединяла все барионы (как и мезоны) в одно 8-мерное представление. Предсказывались ряд новых частиц и большое число правил отбора. Определялась форма связей с потенциалом Юкавы для  $\pi$ -,  $K$ - и  $\chi$ -мезонов. Формула масс, вытекающая из  $SU(3)$ -симметрии, находилась в хорошем согласии с экспериментом. Если модель Сакураи привела к открытию векторных мезонов  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $\phi$ , то благодаря  $SU(3)$ -симметрии был открыт  $\Omega$ -резонанс и появились новые модели адронов, получившие название *кварковых моделей*.

С точки зрения  $SU(3)$ -симметрии экспериментально наблюдаемые частицы не являются элементарными, поскольку они не образуют мультиплетов наименьшей размерности. Поэтому могут, в принципе, существовать более «мелкие» структурные единицы, из которых составлены наблюдаемые частицы. Такие частицы получили название кварков. Кварки были введены Гелл-Маном и Цвейгом в 1964 г. как гипотетические «составные части» нуклонов и мезонов, образующие наименьшее возможное представление группы  $SU(3)$  — триплет [45]. Введение кварков было вызвано стремлением уменьшить число необходимых «кирпичей мироздания», поскольку число известных частиц, считавшихся по традиции элементарными, слишком быстро росло. Кварки долгое время не принимались всерьез, так как казались слишком экзотическими объектами. Они должны были обладать дробными электрическими зарядами и двигаться внутри адронов почти свободно, но никогда не появляться вне адронов. Не-

Смотря на то, что «кварковый счет» давал предсказания, согласующиеся с экспериментом, кварки (и, позднее, их обобщение — партоны, т. е. любые «части» адронов) считались до недавнего времени скорее вспомогательными, чем реальными объектами. Ситуация изменилась после того, как в ноябре 1974 г. были открыты таинственные  $\psi$ - (или  $J$ )-частицы, принадлежащие к новому семейству частиц [46, 47]. Свойства  $\psi$ -частиц удалось объяснить с помощью введения четвертого шармированного (или очарованного)  $S$ -кварка. Это позволило представить  $\psi$ -частицы как *шармоний*, т. е. систему из шармированных кварка и антикварка, аналогичную позитронию (системе  $e^+e^-$ ), и предсказать его возбужденные уровни, которые также были открыты. Силы, удерживающие кварки внутри адронов, были объяснены с помощью неабелева калибровочного векторного поля глюонов, переносящего новое квантовое число — *цвет*.

Теория неабелевых (т. е. связанных с неабелевой группой калибровок) калибровочных полей оказалась единственной асимптотически свободной теорией, т. е. такой теорией, которая в области больших импульсов (или на малых расстояниях) предсказывает исчезновение взаимодействия, а при малых импульсах (или на больших расстояниях) — его рост. Большинство предложенных до сих пор механизмов удержания кварков (*кварковой тюрьмы*) так или иначе используют свойства неабелевых калибровочных полей. Однако вопрос о том, могут ли все-таки кварки вылетать, окончательно не решен, так как он связан со сложной проблемой инфракрасных расходимостей в калибровочных моделях. В настоящее время эта проблема интенсивно исследуется.

**Реджеизация калибровочных полей и дуальные модели.** Удивительное свойство асимптотической свободы теории неабелевых калибровочных полей, кроме всего прочего, означает, что в этой теории нет знаменитой проблемы «нуля заряда», от которой страдает квантовая электродинамика. Эта проблема в свое время вызвала такой пессимизм среди теоретиков, что некоторые из них решили строить теорию элементарных частиц, не прибегая к квантовой теории поля, а используя только свойства  $S$ -матрицы. Так появилась реджистика. Однако реджистика не смогла развиваться в последовательную теорию элементарных частиц, хотя в качестве феноменологической модели и остается полезной при описании экспериментов. Она дала весьма ценное для классификации элементарных частиц представление о *траекториях Редже*, на которые «ложатся» частицы. Траектории Редже, как и кварки, позволяют уменьшить число «кирпичей мироздания», так как одна траектория может охватывать бесконечное число частиц, несмотря на то, что сама описывается лишь двумя параметрами: наклоном и интерсептом. Сейчас имеется сильная тенденция к сближению между реджистикой и квантовой теорией поля, что проявилось, например, в создании исчисления реджевских полей, использующего элементы лагранжева квантово-полевого подхода. Еще сильнее эта тенденция проявляется в дуальных моделях — другом варианте  $S$ -матричного

подхода, тесно связанном с реджистикой [48, 49]. В последние годы интенсивно исследуются так называемые дуальные модели «струн». *Струна* — одномерная протяженная (и в этом смысле — классическая) система с бесконечным числом степеней свободы. Если в дуальных моделях устремить наклон траектории  $\alpha(t)$  к нулю и зафиксировать некоторые массы, то можно воспроизвести результаты некоторых теоретико-полевых моделей:  $\lambda\varphi^3$ , безмассовой теории Янга—Миллса, массивной теории Янга—Миллса со спонтанным нарушением симметрии. Дуальные и теоретико-полевые модели различаются обычно тем, что в древесном приближении первые дают реджевское поведение, а вторые — нет. Однако если просуммировать ряд теории возмущений в теории поля, то при некоторых условиях может появиться реджевское поведение. Как было показано в работах [50, 51], необходимые условия реджеизации выполняются в теориях с неабелевыми калибровочными полями. Может оказаться, что неабелевы калибровочные теории являются единственным классом теорий поля, способных «объединяться» с дуальными моделями. В случае такого объединения теория сильных взаимодействий приобретает те качества геометрической электродинамики Вейля, о которых говорилось выше, а именно: струны и их возбуждения можно отождествить с решениями типа вихрей, дислокаций, солитонов, кинков классических нелинейных уравнений. В то же время струны можно отождествить с нейтральным полем глюонов, а их концы — с кварками, которые, в свою очередь, можно рассматривать как магнитные монополи [51]. Таким образом, мы получим геометрическую и топологическую интерпретации некоторых квантовых соотношений [52] и обеспечим универсальность сильных взаимодействий.

Интересно отметить, что дуальные модели не содержат нефизических состояний (духов) только в пространствах размерности 26 (без спиноров) и  $10^*$  (со спинорами). Поэтому представление о расщепленном пространстве возникает в этих моделях как разумная интерпретация дополнительных пространственных размерностей [53]. Дуальные модели с калибровочными полями могут привести к единой перенормируемой квантовой теории всех взаимодействий, включая гравитацию.

**Динамические симметрии и киральная динамика.** В физике элементарных частиц в настоящее время используются два типа симметрий: алгебраические и динамические. Алгебраические симметрии соответствуют группам преобразований с постоянными (т. е. не зависящими от пространственно-временной точки) параметрами. Динамические симметрии задаются либо локальными калибровочными группами, либо нелинейными и неоднородными реализациями алгебраических симметрий. Алгебраические симметрии позволяют классифицировать частицы в соответствии с их квантовыми числами по мультиплетам, образующим различные представления выбранной группы симметрии. Динамические симметрии позволяют классифицировать взаимодействия между частицами, накладывая

ограничения на форму лагранжианов, приводя к полезным правилам сумм, низкоэнергетическим теоремам и счастливым взаимным сокращениям расходящихся диаграмм Фейнмана в теории возмущений. Благодаря локальной калибровочной инвариантности и ее следствиям единые модели сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий оказались унитарными и перенормируемыми. Основным инструментом, используемым при доказательстве перенормируемости, — тождества Уорда [9, 10], которые являются квантовым аналогом тождеств, вытекающих при наличии локальной симметрии из второй теоремы Нетер [32, 35].

Динамические симметрии не только определяют форму лагранжиана, но и обуславливают универсальность взаимодействия в том смысле, что первые порядки разложения по константе связи начинают совпадать с первыми порядками разложения по степеням энергии [49]. Это позволяет независимо от величины константы связи использовать соответствующую теорию поля для получения разумных результатов в области низких энергий.

Ранее для описания адронной физики при низких энергиях с успехом использовался аппарат дисперсионных соотношений. Однако необходимость введения ряда произвольных параметров придавала ему феноменологический характер. Привлечение динамического принципа киральной симметрии  $SU(3) \times SU(3)$  позволило значительно сократить число неопределенных параметров, налагая дополнительные граничные условия на низкоэнергетические решения дисперсионных уравнений. В настоящее время общепризнано, что киральная симметрия хорошо описывает низкоэнергетическую физику  $\pi$ -мезонов. Чаще всего при этом используется так называемая нелинейная  $\sigma$ -модель, которая обнаруживает многие свойства теорий с локальной калибровочной инвариантностью.

Идеи об универсальности сильных взаимодействий, подобной универсальности электромагнитных и гравитационных взаимодействий, а также о выделенной роли векторных сохраняющихся токов дают возможность найти общий подход к описанию электромагнитных свойств тяжелых частиц (адронов) и отклонений от электродинамики, обусловленных сильными взаимодействиями. В свою очередь, трактовка гравитации как калибровочного поля и применение к ней модели тензорной доминантности позволяют учесть вклады гравитационного поля в сильные взаимодействия.

Универсальные сильные взаимодействия и векторная доминантность. В квантовой теории поля универсальность электромагнитных взаимодействий (т. е. универсальность электрического заряда как константы связи с электромагнитным полем) формулируется как соотношение между амплитудами, характеризующими испускание фотона  $\gamma$  очень малой частоты. Например, для протона  $p$  и позитрона  $e^+$

$$\frac{A(e^+ \leftarrow \rightarrow e^+ + \gamma)}{A(p \leftarrow \rightarrow p + \gamma)} = \frac{Q(e^+)}{Q(p)} = 1, \quad (2.32)$$

где  $Q$  — электрический заряд. Это соотношение выполняется только в пределе  $q^2 \rightarrow 0$ , когда передаваемый фотоном импульс стремится к нулю. При больших передаваемых импульсах соответствующие амплитуды (форм-факторы) различаются по величине на несколько порядков.

Совершенно аналогично универсальность сильных взаимодействий  $\rho$ -мезона можно сформулировать в виде равенства

$$\frac{A(A \leftarrow \rightarrow A + \rho^0)}{B(B \leftarrow \rightarrow B + \rho^0)} = \frac{T_3^{(A)}}{T_3^{(B)}}, \quad (2.33)$$

где  $T_3^{(i)}$  — третьи компоненты изотопических спинов;  $A$  и  $B$  — произвольные частицы, несущие изоспин. Так же, как и в случае фотонов, мы должны требовать равенства матричных элементов при

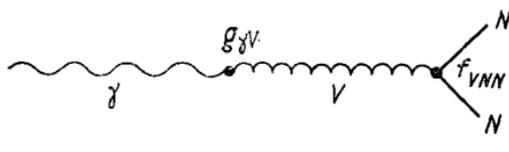


Рис. 2

$q^2 \rightarrow 0$ . Однако  $\rho$ -мезон в отличие от фотона обладает массой. Поэтому проверить данное соотношение экспериментально можно только в том случае, если соответствующие форм-факторы очень медленно изменяются или если этот закон изменения известен и можно провести необходимую экстраполяцию.

К соотношению (2.33) приводит также постулат о тождестве токов и полей, предложенный Кроллем, Ли и Зумино [54]:

$$J_\mu^a(x) = (m_\rho^2/f_\rho)\rho_\mu^a(x), \quad (2.34)$$

где  $J_\mu^a(x)$  — плотность изовекторного электромагнитного тока;  $\rho_\mu(x)$  — оператор  $\rho$ -мезонного поля.

Первоначальная формулировка универсальности в квантовой теории сильных взаимодействий была тесно связана с моделью векторной доминантности, т. е. с предположением о том, что основной вклад в сильные взаимодействия элементарных частиц вносят обмены одним векторным мезоном. Иначе говоря, векторная доминантность в сильных взаимодействиях означает преобладание диаграмм типа рис. 2. В качестве следствия она приводит к универсальности векторных взаимодействий. Например, для  $\rho$ -мезона  $f_{\rho\pi\pi} = f_{\rho NN} = f_\rho$  (константа взаимодействия  $\rho$ -мезона с любой частицей, несущей изоспин). Кроме того, появляется эффективная константа связи фотона с векторным мезоном, которая для  $\rho$ -мезона имеет вид  $g_{\gamma\rho} = e(m_\rho^2/f_\rho)$ , где  $m_\rho$  — масса  $\rho$ -мезона.

Появление диаграмм типа рис. 2 с точки зрения квантовой электродинамики означает возможность перехода фотона в векторный мезон («фотон обрывает массой»), который затем распадается на электрон-позитронную (или мюонную) пару, а также возможность об-

разования векторных мезонов при столкновении электрон — позитрон очень высокой энергии (на встречных пучках). Кроме трех  $\rho$ -мезонов ( $\rho^+$ ,  $\rho^-$ ,  $\rho^0$ ), образующих изовектор, в соответствии с  $SU(3)$ -симметрией сильных взаимодействий имеется два изоскалярных (т. е. лишенных изоспина) векторных мезона  $\omega$  и  $\phi$ , для которых возможны аналогичные процессы:  $\omega \leftrightarrow e^+ + e^-$ ;  $\phi \leftrightarrow e^+ + e^-$ .

Пропорциональность электрического заряда и константы связи векторных мезонов с другими частицами дает возможность находить соотношение между матричными элементами процессов  $\gamma + A \rightarrow B$  и  $\rho (q^2 = 0) + A \rightarrow B$ , где  $A$  и  $B$  — произвольные частицы. Иными словами, сильные взаимодействия, протекающие с участием векторных мезонов, как бы воспроизводят аналогичные электромагнитные процессы ( $\gamma$ -квант просто «заменяется»  $\rho$ -мезоном). Примером подобного рода может служить также связь между реакциями:

$$\begin{aligned} \omega &\rightarrow \pi^0 + \gamma \leftrightarrow \omega \rightarrow \pi + \rho; \\ \gamma + N &\rightarrow \pi + N \leftrightarrow \pi + N \rightarrow \rho (\omega, \phi) + N; \\ \gamma + p &\rightarrow \rho^0 + p \leftrightarrow \rho^0 + p \rightarrow \rho^0 + p. \end{aligned}$$

Для проверки идеи универсальности сравнивают значения констант связи, полученные различными методами. Значения константы связи для  $\rho$ -мезонов, вычисленные в разных процессах, совпадают с хорошей степенью точности и дают  $f_\rho^2/4 \pi \sim 2$  [44].

Расхождения между предсказаниями моделей векторной доминантности и экспериментом следует, скорее, отнести к ее приближенному характеру, чем к идее универсальности, которая за ней стоит. При сопоставлении с экспериментом вопрос о выборе модели, адекватно реализующей какой-либо физической принцип, всегда неоднозначен и сложен.

**Сильная гравитация.** Речь идет об учете вклада гравитационного поля в сильные взаимодействия элементарных частиц. Гравитационное поле рассматривается как калибровочное, соответствующее вейлевским преобразованиям координат (скейлинг-симметрия):  $x^{\mu'} = \lambda(x) x^\mu$ . Легко видеть, что эти преобразования образуют локальную абелеву калибровочную группу и в соответствии с общей идеологией приводят к существованию калибровочного поля. Источником такого поля считается след тензора энергии — импульса сильно взаимодействующих тяжелых частиц (адронов), который заменяется (доминируется) скалярной частицей — квантом калибровочного поля. Другой вариант учета гравитации в сильных взаимодействиях — тензорная доминантность, или введение калибровочного тензорного поля (переносчики —  $f$ - и  $f'$ -мезоны, имеющие спин 2). Тензорная доминантность требует, чтобы гравитационное поле взаимодействовало не непосредственно с феноменологическими полями адронов, а через промежуточное адронное поле спина 2, с которым оно взаимодействует билинейно. Источ-

ником тензорного мезонного поля считается тензор энергии — импульса адронов. Поэтому такое поле должно соответствовать эйнштейновской гравитации

Как показывает эксперимент, скейлинг-симметрия приближенно справедлива для взаимодействий при очень высоких энергиях.

**Универсальные слабые взаимодействия и массивные векторные поля.** То обстоятельство, что слабые взаимодействия имеют векторный характер, если не говорить о несохранении четности, и приблизительно универсальны по силе, привело ряд физиков к попыткам описать их с помощью векторных полей, связанных с локальной калибровочной инвариантностью. Этому способствовало существование теории Ферми 1934 г., в которой слабые взаимодействия по аналогии с электродинамикой описывались лагранжианом, представляющим собой произведение тока частиц  $J_W^\mu$  на вектор  $W_\mu$ :

$$L_{em} = eA_\mu J_{em}^\mu \rightarrow L_W = gW_\mu J_W^\mu; \quad \frac{g^2}{m_W^2 - q^2} \xrightarrow{q^2/m_W^2 \rightarrow 0} = \frac{g^2}{m_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}$$

( $G_F$  — константа Ферми).

Универсальность слабых взаимодействий проявлялась в равенстве констант связи во всех слабых процессах:

$$\begin{aligned} \mu &\rightarrow e\nu\tilde{\nu}, \quad \Sigma \rightarrow nlv, \quad \pi \rightarrow e\nu\pi^0; \\ n &\rightarrow p e\tilde{\nu}, \quad \Sigma \rightarrow \Lambda e\nu, \quad K \rightarrow lv; \\ \mu p &\rightarrow n\nu, \quad \Xi \rightarrow \Lambda lv, \quad K \rightarrow lv\pi; \\ \Lambda &\rightarrow p l\tilde{\nu}, \quad \pi \rightarrow lv, \quad K \rightarrow lv\pi, \end{aligned}$$

где  $l = e$  или  $\mu$ .

Нелептонные слабые распады приблизительно характеризовались той же универсальной константой  $G_F$  [55].

Однако кроме сходства между электродинамикой и слабыми взаимодействиями имелись и существенные различия. Слабый ток в отличие от электромагнитного заряжен: заряд изменяется при переходе  $n \rightarrow p$ , заряжена лептонная пара  $e\tilde{\nu}$ . Нейтральных токов, подобных электромагнитному, долгое время экспериментаторы не наблюдали. Радиус действия слабых сил  $< 10^{-14}$  см, тогда как электромагнитное поле дальнедействующее. Это связано с различием масс переносчиков взаимодействия: фотон — безмассовая частица, как и должно быть в теории с локальной калибровочной инвариантностью, а промежуточный  $W$ -бозон, если он существует, должен иметь массу  $m_W > 2$  ГэВ. Существование дальнедействующих слабых сил противоречило бы принципу эквивалентности [56].

Применить сразу калибровочную идеологию к слабым взаимодействиям оказалось трудным и потому, что некоторые из токов, фигурирующих в теории, не сохранялись. Токи изотопического спина и странности, которые входили в уравнения теории сильной связи, переставали сохраняться, как только учитывались электро-

магнитные и слабые взаимодействия. Сохранение слабого тока нарушалось не только в присутствии электромагнитных полей, но также (если речь шла об аксиально-векторной части лагранжиана и части, изменяющей странность) массовыми членами и сильными взаимодействиями. Кроме того, оказалось невозможным просто выразить слабые адронные токи через фундаментальные поля, соответствующие известным стабильным частицам. Поэтому пришлось искать формулировку универсальности слабых взаимодействий, не зависящую от сохраняющихся токов. Такая формулировка была предложена Гелл-Маном. В основе ее лежит постулат об одинаковых алгебраических свойствах мультиплетов зарядов тяжелых и легких частиц. Гипотеза универсальности совместно с гипотезой сохранения векторного тока позволила объяснить наблюдаемое в эксперименте приблизительное совпадение константы мюонного распада и векторной константы связи нейтронного распада.

Итак, для построения теории универсальных слабых взаимодействий необходимо было найти способ описывать нейтральные токи, учитывая нарушение симметрии в зарядовом пространстве, научиться вводить массу векторных полей, не нарушая локальной калибровочной инвариантности, учесть вклад сильных взаимодействий, сформулировать процедуру перенормировки.

Последнее требование связано со следующим обстоятельством. Теория Ферми в первом порядке теории возмущений дает хорошее согласие с экспериментом. Но с ростом энергии это согласие могло бы сильно ухудшиться. Поправки высших порядков мало влияют на результаты первого приближения только в том случае, если теория перенормируема, т. е. структура расходимостей не изменяется и их число не растет с ростом порядка теории возмущений. Электродинамика является перенормируемой теорией. Четырехфермионная теория слабых взаимодействий не перенормируема. Однако оказалось, что теорию слабых взаимодействий можно сделать перенормируемой, если объединить электромагнитные и слабые взаимодействия в единую схему на основе теории калибровочных полей. Впервые это было сделано в модели Вейнберга — Салама 1967 г., достоинства которой были, правда, оценены позже. Затем было предложено много других, более сложных моделей, объединяющих слабые, электромагнитные и сильные взаимодействия. Им посвящен следующий раздел.

**Единые модели сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий.** При современных энергиях все взаимодействия элементарных частиц можно разбить на несколько основных видов, резко отличающихся друг от друга по величине константы связи. Если их расположить в порядке убывания констант, получится известная иерархия взаимодействий: сильные, электромагнитные, слабые и гравитационные. Происхождение этой иерархии неизвестно, и неясно, будет ли она сохраняться с ростом энергии. Для каждого вида взаимодействий характерна своя группа симметрии, по представлениям которой классифицируются частицы.

Алгебраические симметрии предсказывают равенство масс частиц, относящихся к одному мультиплету. Но эксперимент показывает, что даже массы протона и нейтрона, образующих изотопический дублет, несколько различаются. В других случаях расщепление масс в мультиплетах еще больше. Поэтому алгебраические внутренние симметрии элементарных частиц, как правило, приходится нарушать, добавляя в лагранжиан члены, обладающие меньшей степенью симметрии, чем исходный лагранжиан. Эти нарушающие симметрию члены должны объяснять небольшое расщепление масс, экспериментально наблюдающееся в мультиплетах частиц.

Идея постепенного нарушения исходной высокой симметрии до полного отсутствия ее связывалась обычно с идеей об иерархии видов взаимодействий, различающихся по силе. Самое сильное взаимодействие должно обладать наивысшей симметрией и сохранять как можно больше свойств элементарных частиц. Поэтому ядерным силам сопоставлялась группа  $SU(3)$  или более высокие симметрии. Нарушение симметрии до  $SU(2)$  соответствовало переходу к слабым взаимодействиям, а переход к симметрии  $U(1)$  или  $O(2)$  описывал включение электромагнитного поля. Гравитационное взаимодействие разрушало всякую внутреннюю симметрию.

В 1964 г. Хиггс предложил другой способ нарушения симметрии, который позволил получать произвольное конечное расщепление масс в мультиплетах [7]. Этот способ получил название *спонтанного нарушения симметрии*. При спонтанном нарушении никакого нарушения симметрии исходного лагранжиана  $\mathcal{L}$  на самом деле не происходит. К  $\mathcal{L}$  добавляется нелинейный лагранжиан скалярных полей (лагранжиан Хиггса), обладающий той же симметрией, что и  $\mathcal{L}$ . Но некоторые компоненты скалярных полей наделяются ненулевыми вакуумными средними, в результате чего симметрия вакуума оказывается меньше симметрии исходного лагранжиана. Затем поля в лагранжиане переопределяются так, чтобы все они имели нулевые вакуумные средние. При этом симметрия между компонентами полей как будто теряется. На самом же деле она просто становится скрытой симметрией.

При спонтанном нарушении непрерывной алгебраической симметрии в соответствии с теоремой Голдстоуна появляются нефизические безмассовые бозоны. При спонтанном нарушении локальной калибровочной симметрии вместо нефизических бозонов появляются массы у векторных калибровочных полей. Значения возникающих масс выражаются через константу связи скалярных полей  $\lambda$  и могут быть сделаны произвольными, так как  $\lambda$  обычно теорией не фиксируется. Использование механизма Хиггса дает возможность приписать массы векторным полям, сохранив локальную калибровочную инвариантность теории. В свою очередь, локальная калибровочная инвариантность теории обеспечивает ее перенормируемость.

Важность этого обстоятельства трудно переоценить. После создания квантовой электродинамики впервые появилась теория поля, в которой вычисления в любом порядке теории возмущений можно

провести до конца (по крайней мере в принципе), и эта теория — теория калибровочных полей.

Но при всей своей привлекательности механизм Хиггса имеет один недостаток: он вводит в теорию произвольный параметр  $\lambda$  и снижает предсказательную силу теории. Этот параметр можно зафиксировать, если потребовать, например, чтобы теория была суперсимметричной, т. е. обладала симметрией между бозонами и фермионами. Другой способ понять смысл  $\lambda$  и определить его из каких-либо физических соображений — придать конкретный смысл скалярному хиггсовскому полю. Такой подход предполагает обычно интерпретацию скалярного поля Хиггса как поля, описывающего конденсат (типа конденсата куперовских пар в сверхпроводнике). Тогда спонтанное нарушение симметрии становится динамическим, а образование массы у векторных полей происходит в результате фазового перехода [57]. Эта идея восходит к классическим работам Бардина, Купера, Шриффера [58], Н. Н. Боголюбова [59], В. Л. Гинзбурга и Л. Д. Ландау [60] по сверхпроводимости.

Другой свободный параметр, возникающий в единых калибровочных моделях, — *угол смешивания*. Он появляется из-за того, что с экспериментально наблюдаемыми частицами сопоставляются не поля, входящие в лагранжиан, а их линейные комбинации. Так, в единой модели слабых и электромагнитных взаимодействий Вейнберга—Салама (1967 г.) физическому фотону ставится в соответствие комбинация  $(a - b_3)$ , где  $b_3$  — нейтральная компонента  $SU(2)$ -триплета векторных полей, ответственных за слабые взаимодействия,  $a$  — электромагнитное поле, связанное с  $U(1)$ -инвариантностью лагранжиана. Комбинация полей  $(a + b_3)$  отождествляется с  $Z$ -мезоном, ответственным за нейтральные слабые токи. Угол смешивания полей  $a, b_3$  называется *углом Вейнберга*  $\theta_w$ . Его значение определяется экспериментально. По современным данным,  $\sin^2 \theta_w \approx 0,23$ .

Слабые и электромагнитные взаимодействия адронов описываются едиными калибровочными моделями, использующими группу  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  или ее обобщения. Очевидно, что здесь возможных комбинаций полей больше и может быть несколько углов смешивания. Современные калибровочные модели сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий можно разделить на три группы [25] в зависимости от способа смешивания сильных и слабых взаимодействий. Обычно цель такого смешивания — подавить нейтральные токи, меняющие странность. Первую группу составляют модели, в которых расщепляется нейтральная компонента мультиплета спинорных полей. Например, вместо дублета кварков  $\begin{pmatrix} \mathcal{P} \\ \mathcal{N} \end{pmatrix}$  в рассмотрение вводится дублет  $\begin{pmatrix} \mathcal{N} \cos \theta_c + \lambda \sin \theta_c \\ \mathcal{P} \end{pmatrix}$ , где  $\lambda$  — странный кварк,  $\theta_c$  — угол Кабиббо. Это приводит к необходимости ввести дополнительный дублет с новым кварком  $\mathcal{P}'$  (или  $C$ ):  $\begin{pmatrix} -\mathcal{N} \sin \theta_c + \lambda \cos \theta_c \\ \mathcal{P}' \end{pmatrix}$ . Таким образом, в теории появляется новый кварк с новым квантовым числом — «шармом».

Другую группу моделей составляют «псевдокабиббовские» модели. В них дублеты  $\begin{pmatrix} \mathcal{P} \\ \mathcal{N} \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} \mathcal{P} \\ \lambda \end{pmatrix}$  считаются представлениями двух разных коммутирующих между собой групп  $SU(2)$ . В каждой из групп  $SU(2)$  промежуточный векторный бозон взаимодействует либо с током  $\overline{\mathcal{N}}\mathcal{N}$ , либо, с  $\lambda\bar{\lambda}$ , но нет частиц, взаимодействующих с  $\overline{\mathcal{N}}\lambda$ . Такую схему невозможно осуществить, если полагать  $\mathcal{P}$ -кварк в обоих дублетах одним и тем же. Поэтому Джорджи и Глэшоу предложили считать один из дублетов левосторонним, а другой — правосторонним. Тогда полулептонные слабые взаимодействия с  $\Delta S = 0$  будут иметь обычную  $(V - A)$ -форму, а взаимодействия с  $\Delta S = \pm 1$  —  $(V + A)$ -форму.

В третьей группе моделей сильные и слабые взаимодействия разделены в том смысле, что промежуточный бозон не взаимодействует непосредственно с кварками, но вначале превращается в какой-либо сильно взаимодействующий векторный мезон. При работе с моделями этого типа оказывается полезной гипотеза о векторной доминантности, которая успешно использовалась в первых калибровочных моделях сильных взаимодействий [44]. Структура таких моделей оставляет достаточно свободы для того, чтобы успешно описывать эксперимент.

Несколько слов необходимо сказать о поисках той высокой симметрии, которая должна характеризовать гипотетическое универсальное взаимодействие, проявляющее себя при невысоких энергиях как сильные, слабые, электромагнитные и гравитационные силы. Такие поиски вызваны в основном двумя причинами. Первая из них — необходимость понять происхождение углов смешивания и зафиксировать их теоретически. Вторая — желание иметь одну константу связи для всех видов взаимодействий и уменьшить тем самым число фундаментальных физических констант. Однако расширение симметрии вызывает катастрофический рост числа новых предсказываемых частиц, не наблюдающихся в эксперименте, а также нестабильность известных стабильных частиц [12]. Чтобы избежать этих неприятностей, нужно придумать сложный механизм удержания лишних частиц и спонтанно нарушить высокую симметрию до наблюдаемых  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  или  $SU(2) \times U(1)$ .

Резюмируем сказанное.

История попыток построения единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий по образу и подобию электродинамики насчитывает уже более 40 лет, но лишь сейчас, по-видимому, найден приемлемый вариант такой теории.

В основном теория калибровочных полей была сформулирована к 1967—1969 гг. Классическая лагранжева формулировка и геометрическая интерпретация калибровочных полей приняли современный вид в работах Н. П. Коноплевой [14, 32]. Метод квантования калибровочных полей с помощью функционального интеграла и диаграммная техника были развиты в работах Л. Д. Фаддеева и В. Н. Попова [61], а также де Витта [62]. Однако для построения

реалистических моделей элементарных частиц и сопоставления теории с экспериментом необходимо было решить вопросы о массе калибровочных полей и перенормируемости теории. Первый вопрос возник потому, что все взаимодействия элементарных частиц, кроме электромагнитных и гравитационных, короткодействующие, т. е. должны переноситься массивными частицами. Положительное решение второго вопроса делало теорию разумной в любой области энергий. Оба вопроса были успешно решены в течение 1971—1973 гг. Историю идей, позволивших найти решение, и ссылки можно найти в [63]. После этого калибровочные теории и единые калибровочные модели оказались в центре внимания теоретиков, а еще через 1,5—2 года — и экспериментаторов, особенно после открытия в конце 1973 г. нейтральных токов, предсказываемых этими моделями [64]. Нейтринные процессы, связанные с нейтральными токами, могут играть важную роль в энергетике звезд. В настоящее время нейтральные токи интенсивно изучаются.

Очень интересную возможность для нейтринных экспериментов дают калибровочные модели с малой, не равной нулю массой нейтрино. Оказывается, что в этом случае возможны осцилляции нейтрино, а именно попеременные превращения электронных нейтрино в мюонные и наоборот. Эта идея впервые была высказана в 1957 г. Б. М. Понтекорво [65]. Эксперименты по обнаружению осцилляций нейтрино планируются в нескольких исследовательских центрах [66].

В области электромагнитных и слабых взаимодействий адронов к достижениям калибровочных моделей следует отнести объяснение поведения  $\psi$ - и  $\Upsilon$ -частиц и предсказание их спектроскопии, которая подтвердилась экспериментально. Экспериментально подтверждено также существование тяжелого лептона, предсказывавшегося многими едиными моделями электромагнитных и слабых взаимодействий. На очереди эксперименты по обнаружению промежуточного  $W$ -бозона. В области сильных взаимодействий большим успехом квантовой хромодинамики было предсказание и открытие шармированных частиц (мезонов и барионов). Весьма интересно было бы проверить предсказание отклонений от бьеркеновского скейлинга в глубоконеупругих процессах, вытекающее из асимптотически-свободной кварк-глюонной модели сильных взаимодействий. Но ошибки в соответствующих экспериментах еще слишком велики, чтобы можно было отличить константу (предсказание партонной модели) от слабо меняющейся степени логарифма, получаемой в кварк-глюонной модели.

Таким образом, с точки зрения теории калибровочных полей имеется следующая картина. Все элементарные частицы делятся на два класса: основные частицы (нуклоны, лептоны) и частицы-переносчики (мезоны). Мезоны осуществляют взаимодействие между основными полями. В кварковой модели основные частицы состоят из трех кварков, а мезоны — из двух. Кварки соединены друг с другом «клеем» (глюонами). Этот «клей» обладает особыми свойствами. Он

может стягиваться в шнуры (струны), упругость которых при растяжении растет линейно с расстоянием. Поэтому кварки не могут вылетать, и наблюдаемы только связанные состояния кварков. Эта квантово-полевая картина имеет геометрический аналог в расслоенном пространстве — времени. Поля, описывающие основные частицы, соответствуют сечениям расслоенного пространства — времени. Мезонам соответствуют коэффициенты связности расслоенного пространства. Внутренняя симметрия элементарных частиц (изоспин, цвет) является симметрией группового пространства калибровочной группы (слоя).

Геометрическая картина соответствует передаче взаимодействия через среду. Поэтому калибровочные модели естественно привели к представлению о вакууме как о среде, т. е. системе с бесконечным числом степеней свободы. В этом вакууме могут рождаться пары частиц в таком количестве, что образуется конденсат, а эффекты поляризации столь сильны, что могут полностью экранировать вне-сенный извне заряд. Явление асимптотической свободы может рассматриваться как антиэкранировка, вызванная дисперсией вакуума. Разумеется, в теории калибровочных полей много Больших Вопросов, но красота самой теории вместе с интереснейшими экспериментальными открытиями последних лет позволяют надеяться, что с ними удастся справиться. В этом случае появился бы мост между физикой элементарных частиц, статистической физикой и физикой твердого тела.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Янг Ц. Н., Миллс Р. Л. В кн.: Элементарные частицы и компенсирующие поля. Пер. с англ. М., «Мир», 1964.
2. Утияма Р. Там же.
3. Сакураи Дж. Дж. Там же.
4. Эйнштейн А. Собр. соч. Т. I. М., «Наука», 1966.
5. Weyl H. Gravitation und Electricität. Berlin, Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. 1918; Z. f. Phys., 1929, v. 56, s. 330.
6. Salam A., Ward J. C. — Nuovo cimento, 1959, v. 11, p. 568; 1961, v. 19, p. 165.
7. Higgs P. W. — Phys. Lett., 1964, v. 12, p. 132.
8. t'Hooft G. — Nucl. Phys., 1971, v. B35, p. 173.
9. Славнов А. А. — Теор. и мат. физ., 1972, т. 10, с. 153.
10. Taylor J. C. — Nucl. Phys., 1971, v. B33, p. 435.
11. Weinberg S. — Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 1264; Salam A. Proc. 8-th Nobel Symposium, p. 367, Stocholm, 1968.
12. Труды XVIII Международной конференции по физике высоких энергий. Тбилиси, 1976. Д. 1.2-10400, Дубна, ОИЯИ, 1977.
13. Эйнштейн А. Собр. соч. Т. 2. М., «Наука», 1966, с. 178.
14. Коноплева Н. П. В кн.: Тр. Междунар. семинара «Векторные мезоны и электромагнитные взаимодействия. Дубна, ОИЯИ, 1969.
15. Konopleva N. P. Lokale symmetrien, Eichfelder und geschichtete Räume.— Ideen des exakten Wissens, 1971, Stuttgart, Deutsche Verlags-Anstalt, № 10, S. 671.
16. Коноплева Н. П., Соколик Г. А. Проблема тождества и принцип относительности. — В кн.: Эйнштейновский сборник 1967. М., «Наука», 1967.
17. Пуанкаре А. Последние мысли. Пер. с франц. Пг., Науч. книгоизд-во, 1923.

18. Фок В. А. Применение идей Лобачевского в физике. М., ГТТИ, 1950.
19. Коноплева Н. П. В кн.: Эйнштейновский сборник 1975 — 1976. М., «Наука», 1978.
20. Коноплева Н. П., Соколик Г. А. Возможное и действительное в теории поля и их связь с общим принципом относительности. — В кн.: Пространство и время в современной физике. Киев, «Наукова думка», 1968.
21. Коноплева Н. П., Соколик Г. А. — Вопросы философии, 1972, № 1, с. 118.
22. Кант И. Критика чистого разума. Собр. соч. Т. 3. М., «Мысль», 1964.
23. Коноплева Н. П. — Успехи физ. наук, 1977, т. 123, вып. 4, с. 537.
24. Клайн Д., Манн А., Руббин К. — Успехи физ. наук, 1976, т. 120, вып. 1, с. 97, 113.
25. Weinberg S. — Rev. Mod. Phys., 1974, v. 46, p. 255.
26. Schrödinger H. — Zs. f. Phys., 1922, Bd 12, S. 13.
27. London F. — Zs. f. Phys., 1927, Bd 42, S. 375.
28. Ikeda M., Miyachi Y. — Progr. Theor. Phys., 1962, v. 27, p. 474.
29. Loos H. G. — Nucl. Phys., 1965, v. 72, p. 677.
30. Wu T. T., Yang C. N. In Properties of Matter under Unusual Conditions. Ed. H. Mark, S. Fernbach. Interscience, N. Y., 1969.
31. 't Hooft G. — Nucl. Phys., 1974, v. B79, p. 276.  
Поляков А. М. — Письма ЖЭТФ, 1974, т. 20, с. 194.
32. Коноплева Н. П. В кн.: Гравитация и теория относительности. Вып. 4—6, Казань, КГУ, 1968.
33. Коноплева Н. П., — Вест. МГУ. Сер. физ., 1965, № 3, с. 73.  
Коноплева Н. П. В кн.: Проблемы гравитации. Тезисы докладов II Советской гравитационной конференции. Тбилиси, 1965.
34. Koporlyeva N. P., Sokolik H. A. — Nucl. Phys., 1965, v. 72, p. 667.
35. Коноплева Н. П., Соколик Г. А. В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М., Атомиздат, 1966.
36. Коноплева Н. П. Тезисы IV Всесоюзной межвузовской конференции по проблемам геометрии. Тбилиси, 1969.
37. Fock V., Ivanenko D. — Compt. rend., 1929, v. 88, p. 1470.
38. Бродский А. М., Иваненко Д. Д., Соколик Г. А. — Журн. эксперим. и теор. физ., 1961, т. 41, с. 1307.
39. Kibble T. W. B. — J. Math. Phys., 1961, v. 2, p. 212.
40. Коноплева Н. П. Тезисы 5-й Международной гравитационной конференции. Тбилиси, 1968, с. 27.
41. Коноплева Н. П. В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 3. М., Атомиздат, 1970.
42. Иосифьян А. Г., Станюкович К. П., Соколик Г. А. — Докл. АН СССР, 1964, т. 159, с. 1261.
43. Yang C. N. — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 445.
44. Электромагнитные взаимодействия и структура элементарных частиц. Сб. статей. Пер. с англ. Под ред. А. М. Балдина. М., «Мир», 1969.
45. Gell-Mann M. — Phys. Lett., 1964, v 8, p. 214.
46. Aubert J. J. e. a. — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 1404; Augustin e. a. — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 1406.
47. Abrams G. S. e. a. — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 1453.
48. Альфаро В., де, Фубини С., Фурлан Г., Росетти К. Токи в физике адронов. Пер. с англ. М., «Мир», 1976.
49. Нелокальные, нелинейные и неренормируемые теории поля. Препринт ОИЯИ Д2-9788, 1976.
50. Cornwall J. M., Levin D. N., Tiktopoulos G. — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 30, p. 1268.
51. Grisaru M. T., Schnitser H. J., Tsao H. S. — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 30, p. 811.
52. Фаддеев Л. Д., Тахтаджян Л. А. — Успехи мат. наук, 1974, т. 29, с. 245; Теор. и мат. физ., 1974, т. 21, с. 169.
53. Cremner E., Scherk J. — Nucl. Phys., 1976, v. B 108, p. 409.
54. Kroll N., Lee T. D., Zumino B. — Phys. Rev., 1967, v. 157, p. 1376.

55. Окунь Л. Б. В кн.: Элементарные частицы. Тр. 1-й школы физики ИТЭФ. Вып. 1. М., Атомиздат, 1973.
56. Lee T. D., Yang C. N. — Phys. Rev., 1955, v. 98, p. 1501.
57. Киржниц Д. А., Линде А. Д. — Успехи физ. наук, 1975, т. 115, с. 534.
58. Бардин Т., Купер Л. И., Шриффер Д. Р. В кн.: Теория сверхпроводимости. Пер. с англ. и нем. Под ред. Н. Н. Боголюбова. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
59. Боголюбов Н. Н. Квазисредние в задачах статистической механики. Препринт ОИЯИ Д-781, 1961.
60. Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д. — Журн. эксперим. и теор. физ., 1950, т. 20, с. 1064.
61. Faddeev L. D., Popov V. N. — Phys. Lett., 1967, v. B 25, p. 29.
62. Witt V., de. — Phys. Rev., 1967, v. 162, p. 1195; 1239.
63. Квантовая теория калибровочных полей. Пер. с англ. Под ред. Н. П. Коноплевой. М., «Мир», 1977; Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М., «Наука», 1978.
64. Hasert F. J. e.a. — Phys. Lett., 1973, v. B 46, p. 138; 1974, v. B 73, p. 1.
65. Понтекорво Б. — Журн. эксперим. и теор. физ., 1958, т. 34, с. 2473.
66. Neutrino 77: Proceed. of the Internat. Conf. on neutrino physics and neutrino astrophysics, Baksan valley, 18—24 June 1977. V. 1. Publishing office. «Nauka», Moscow, 1978.
67. Belavin A. A., Polyakov A. M., Schwarsz A. S., Tyupkin Yu. S. — Phys. Lett., 1975, v. 59 B, p. 85.
68. Фрадкин Е. С. В кн.: Проблемы теоретической физики. М., «Наука», 1969, с. 386.

## ЛАГРАНЖЕВА ТЕОРИЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

### § 3. Введение

Отличительная особенность всех калибровочных теорий — инвариантность относительно бесконечной группы (псевдогруппы), преобразования которой зависят от  $r$  произвольных функций и их производных. Благодаря такой симметрии калибровочные поля всегда описывают систему с лишними степенями свободы, что приводит при замене параметрических функций постоянными параметрами к системам со связями. Обычно, когда теория инвариантна относительно конечной группы и в ней присутствуют лишние переменные, эти переменные исключаются с помощью наложения дополнительных условий (условий калибровки). Вид условий калибровки не связывается при этом с уравнениями поля или движения. В теориях калибровочных полей инвариантность относительно бесконечной группы приводит к появлению тождественных соотношений между экстремалами соответствующих лагранжианов (тождеств Нетер). В квантовой теории тождеств Нетер соответствуют тождества Уорда.

При нарушении локальной калибровочной инвариантности и сужении ее до  $r$ -параметрической конечной группы (например, при введении массовых членов в лагранжиан) первоначальная инвариантность относительно бесконечной группы проявляет себя в наличии дополнительных условий на полевые переменные, являющихся следствием уравнений поля. Вид таких дополнительных условий определяется тождествами Нетер для той части уравнений поля, которая инвариантна относительно ненарушенной бесконечной группы симметрии. Выполнение этих дополнительных условий при нарушенной симметрии обеспечивает на экстремалах сохранение локальной калибровочной инвариантности интеграла действия, несмотря на отсутствие ее на произвольных траекториях. Кроме того, инвариантность относительно бесконечной группы приводит к уникальной и очень важной с физической точки зрения ситуации: возникают так называемые *сильные законы сохранения*, вид которых не связан с конкретной структурой лагранжиана и уравнений поля. Токи, соответствующие сильным законам сохранения, называют *несобственными*. Несобственные токи всегда можно представить в виде дивергенции от антисимметричного тензора. Поэтому соответствующие им заряды определяются граничными значениями полей и топо-

логией  $V_4$ . Структура сильных законов сохранения определяется только структурой локальной калибровочной группы и тождествами Нетер. Нарушение локальной калибровочной инвариантности лагранжиана добавлением членов, не содержащих производных от полевых переменных, например массовыми членами, не изменяет выражений несобственных токов через полевые переменные. Не изменяются и законы сохранения, если выполнены дополнительные условия, о которых говорилось выше. Нужно лишь отметить, что сильные законы сохранения всюду, кроме электродинамики, имеют вид ковариантных, а не обычных законов сохранения, подобно законам сохранения в общей теории относительности Эйнштейна. В электродинамике сильные законы сохранения совпадают с обычными вследствие абелевости калибровочной группы.

Интегрирование несобственных сохраняющихся токов приводит к мультиплетам зарядов, образующих регулярное представление\* конечной калибровочной группы. Алгебра этих зарядов не связана с конкретной структурой лагранжиана. Она связана лишь с наличием симметрии относительно бесконечной группы, даже несколько нарушенной. Существование законов сохранения, не зависящих до некоторой степени от уравнений поля и лагранжианов, позволяет получать полезные и простые соотношения, характеризующие взаимодействия элементарных частиц, не конкретизируя детально эти взаимодействия, но лишь постулируя свойства симметрии для сохраняющихся токов или зарядов [1], как это делается в алгебре токов.

Лагранжева формулировка классической теории калибровочных полей — наиболее удобный путь для обсуждения калибровочной инвариантности с точки зрения выбора формы инвариантных лагранжианов, анализа структуры законов сохранения и их возможных нарушений, а также при выборе дополнительных условий на полевые переменные. Использование вариационного формализма и двух теорем Нетер дает при этом определенные преимущества, связывая эти вопросы в единое целое.

При локализации пространственно-временных симметрий применение второй теоремы Нетер и аппарата производных Ли позволяет строить явно локально-инвариантные лагранжианы для произвольных тензорных полей, не вводя дополнительных (калибровочных) полей. Роль коэффициентов связности при этом играют комбинации производных исходного поля, определяемые тождествами Нетер. Возникающие таким образом лагранжианы нелинейны и имеют прозрачный геометрический смысл. По-видимому, киральная динамика относится к этому виду теорий.

Таким образом, наличие локальной калибровочной инвариантности (а в более общем случае — инвариантности относительно про-

---

\* Регулярным представлением алгебры Ли называют представление матрицами, матричные элементы которых суть структурные константы этой алгебры.

извольной бесконечной группы) приводит к возможности решения следующих задач:

1) по виду преобразований полевых переменных, образующих бесконечную группу, построить инвариантный лагранжиан, найти уравнения поля и дополнительные условия для них (используя при этом прямую вторую теорему Нетер), а также найти законы сохранения (следуя первой и второй теоремам Нетер);

2) по виду уравнений поля и дополнительных условий на полевые переменные, вытекающих из них, восстановить формы лагранжиана и групповых преобразований полевых переменных (используя обратную вторую теорему Нетер).

Материал главы расположен следующим образом. В § 4 излагаются первая и вторая теоремы Нетер [2], составляющие основу всех групповых и вариационных подходов, а также формулируются соответствующие законы сохранения. Первая теорема Нетер используется в случае симметрии теории относительно произвольных конечных групп Ли, вторая — относительно бесконечных. В § 5 показано, как по виду преобразований полевых переменных, порождаемых локальной калибровочной группой, построить инвариантный лагранжиан и уравнения полей [3, 4], определить вид тождеств Нетер и законов сохранения, а также найти дополнительные условия на полевые переменные, вытекающие из уравнений поля и тождеств Нетер при появлении массовых членов [5]. Иными словами, теоремы Нетер применяются к построению лагранжевой теории произвольного калибровочного поля. Обратным задачам (нахождению групповых преобразований и восстановлению формы лагранжиана по уравнениям поля и дополнительным условиям, вытекающим из них [5—7]) посвящен § 6. Важность этих задач связана с тем, что выбор дополнительных условий может диктоваться физическими соображениями, а это влечет за собой ограничения на форму возможных взаимодействий. В § 7 вторая теорема Нетер и ее следствия обобщаются на изопериметрические задачи, в которых имеется симметрия относительно бесконечной группы, в частности локальная калибровочная инвариантность [8]. Обсуждается механизм образования массы калибровочного поля, использующий не хиггсовские поля, а нарушение локальной калибровочной инвариантности в изопериметрической задаче. Показано, что если интегральное дополнительное условие обладает лишь глобальной симметрией, то на экстремальных изопериметрической задачи интеграл действия остается инвариантным относительно локальной калибровочной группы, если выполнены дополнительные условия, вытекающие из обобщенных тождеств Нетер. Обсуждается форма законов сохранения при наличии интегральных дополнительных условий. Демонстрируется появление соотношений типа пропорциональности токов и полей при нарушении бесконечной симметрии массовыми членами.

Интерпретации общей теории относительности как теории калибровочного поля симметричного тензора второго ранга [5, 9] посвящен § 8. В качестве калибровочной группы рассматривается

группа общековариантных (произвольных, непрерывных) преобразований координат 4-мерного пространства—времени. В качестве групповых вариаций полевых переменных [5, 10] используются производные Ли. Это дает возможность показать, что при переходе к неоднородному пространству—времени не нужно локализовать группу движений плоского пространства—времени, как делается при наивном перенесении идей Янга—Миллса на пространственно-временные симметрии, но достаточно использовать аппарат производных Ли [11], вид которых и определение не связаны с какой-либо конкретной геометрией пространства—времени. По этой причине и результаты, полученные таким методом, не зависят от геометрии пространства—времени.

В § 8 показано, что лагранжиан для поля симметричного тензора второго ранга  $g_{\mu\nu}$ , рассматриваемого как калибровочное поле в указанном выше смысле, по своей структуре совпадает со скалярной кривизной риманова пространства—времени  $V_4$ , а уравнения поля—с уравнениями Эйнштейна. Поэтому и оказалось возможным отождествить  $g_{\mu\nu}$  с метрическим тензором. Но можно и не делать такого отождествления. Тогда  $g_{\mu\nu}$  можно рассматривать как тензорное поле в плоском пространстве  $V_4$ , описывающее, например, свойства сплошной среды [5]. В § 8 с помощью производных Ли получены также тождества Нетер и законы сохранения для калибровочного векторного поля и поля антисимметричного тензора второго ранга, показана их связь с уравнениями Максвелла [12]. Обсуждается общая форма интегральных сохраняющихся величин, соответствующих ковариантным дифференциальным законам сохранения. Построены интегральные законы сохранения в ОТО [13, 14]. Показано, что в плоском пространстве—времени возможность независимого рассмотрения 4-импульса и момента связана с наличием у соответствующей группы движений 4-мерного нормального делителя. С этим же обстоятельством связана возможность отождествления  $P^\mu$  с пространственно-временным вектором, хотя на самом деле индекс  $\mu$  относится не к самому пространству Минковского, а к расслоению над ним. Простейший случай расслоения—касательное пространство, которое в случае плоского пространства обычно отождествляется с исходным пространством. В общем же случае все интегральные сохраняющиеся величины оказываются векторами в алгебре Ли, т. е. в пространстве, касательном к слою.

## § 4. Теоремы Нетер

**Формулировка и доказательство теорем.** Как известно, в современной теории поля законы сохранения получаются вариационным методом с помощью первой теоремы Нетер. Она формулируется следующим образом.

**Первая теорема.** *Если интеграл действия  $S$  инвариантен по отношению к некоторой группе  $G_r$  ( $r$ -параметрической группе Ли),*

то  $r$  линейно независимых комбинаций лагранжевых производных\* обращаются в дивергенции; и обратно, из последнего условия вытекает инвариантность  $S$  по отношению к некоторой группе  $G_r$ .

Выражения, стоящие под знаком дивергенций, фигурирующих в этой теореме, называются *токами*. Если лагранжевы производные равны нулю (выполняются уравнения Эйлера), дивергенции токов обращаются в нуль. Так получаются дифференциальные законы сохранения. Интегральные законы сохранения (типа закона сохранения электрического заряда или закона сохранения энергии) получаются при интегрировании дифференциальных законов сохранения по специальным образом выбранной 3-мерной гиперповерхности при определенных граничных условиях.

Локальные калибровочные группы и группа общековариантных преобразований координат пространства—времени относятся к бесконечным группам. Локальные калибровочные группы получаются из конечных групп Ли калибровочных преобразований волновых функций  $\delta\psi = \varepsilon^a I\psi$  заменой параметров  $\varepsilon^a$  функциями координат  $\varepsilon^a(x)$ . Поскольку, по определению, группа калибровок представляет собой надкоординатные преобразования, при такой замене в каждой фиксированной точке пространства—времени сохраняется алгебра конечной группы Ли. Это отличает локальные калибровочные группы от других бесконечных групп, которым, вообще говоря, никакая алгебра не соответствует. Группу общековариантных преобразований координат общей теории относительности  $x^{\mu'} = f^{\mu}(x)$  можно рассматривать как бесконечную группу  $G_{\infty 4}$ .

Свойства функционалов, инвариантных относительно произвольных бесконечных групп  $G_{\infty r}$ , исследовала Нетер, и полученные ею результаты сформулированы в виде следующей теоремы (вторая теорема Нетер):

**Вторая теорема.** Если интеграл действия  $S$  инвариантен относительно группы  $G_{\infty r}$ , в которой встречаются производные до  $k$ -го порядка включительно, то имеет место  $r$  тождественных соотношений между лагранжевыми производными и производными от них до  $k$ -го порядка. Обратное тоже верно.

Таким образом, в случае  $G_{\infty r}$ -инвариантности появляются тождественные соотношения между уравнениями Эйлера и производными от них, что приводит к сокращению числа линейно независимых полевых уравнений. Иными словами, в  $G_{\infty r}$ -инвариантной теории всегда имеется  $r$  произвольных преобразований полевых переменных, которые можно зафиксировать дополнительными калибровочными условиями. В случае  $G_r$ -инвариантности уравнения Эйлера, вообще говоря, линейно независимы, и тождеств, связывающих их, не существует (число переменных равно числу уравнений).

Теория, инвариантная относительно бесконечной группы  $G_{\infty r}$ , инвариантна также относительно ее подгруппы  $G_r$ , полученной из

\* Т. е. левых частей уравнений Эйлера, решения которых называют экстремалими.

$G_{\infty r}$ , при  $\varepsilon^a(x) = \text{const}$ . Поэтому соотношения дивергенций, о которых речь идет в первой теореме Нетер, возникают также и в случае  $G_{\infty r}$ -инвариантности. В результате применения обеих теорем Нетер оказывается, что в том и только в том случае, когда конечная группа  $G_r$  представляет собой подгруппу бесконечной группы, соотношения дивергенций, соответствующие  $G_r$ -инвариантности, являются линейными комбинациями тождественных соотношений, связывающих лагранжевы производные, а токи становятся линейными комбинациями лагранжевых производных. Такие токи Нетер назвала *несобственными токами*. Законы сохранения для несобственных токов выполняются на экстремалях тождественно. Несобственный сохраняющийся ток может быть сведен к дивергенции от некоторого антисимметричного тензора и, следовательно, обладает суперпотенциалом.

**Доказательство теорем Нетер.** Сравним доказательство и результаты обеих теорем Нетер [2, 5, 15]. Пусть

$$S = \int L(x, u, u', u'') dx,$$

где  $u$  — произвольные функции, описывающие систему (полевые переменные);  $x$  — координаты (пространственные и временные переменные); штрихи, так же как и запятая, означают обычное дифференцирование;  $L$  — плотность лагранжиана.

Сделаем преобразование  $y = x + \Delta x$ ;  $v(y) = u + \Delta u$ . При этом вариация формы  $u$  имеет вид  $\bar{\delta}u = \Delta u - (\partial u / \partial x) \Delta x$ . Тогда условие инвариантности действия примет вид

$$\int [\bar{\delta}L + \text{div}(L\Delta x)] dx = 0. \quad (4.1)$$

Поскольку соотношение (4.1) удовлетворяется при интегрировании по любой области, то подынтегральное выражение обращается в нуль тождественно, и мы получаем дифференциальное условие для  $\delta S = 0$ :

$$\bar{\delta}L + \text{div}(L\Delta x) = 0, \quad (4.2)$$

$$\text{где } \bar{\delta}L = \frac{\delta L}{\delta u} \bar{\delta}u + \partial_{\mu} \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial u_{,\mu}} - \partial_{\nu} \frac{\partial L}{\partial u_{,\nu\mu}} \right) \bar{\delta}u + \frac{\partial L}{\partial u_{,\mu\nu}} \bar{\delta}u_{,\nu} \right];$$

$\delta L / \delta u = \partial L / \partial u - \partial_{\mu} \partial L / \partial u_{,\mu} + \partial_{\nu\mu}^2 \partial L / \partial u_{,\nu\mu}$  — лагранжева производная.

Уравнение (4.2) представляет собой дифференциальное уравнение Ли, по которому можно найти явный вид лагранжиана, если известны вариации  $\Delta x$  и  $\Delta u$  или  $\bar{\delta}u$ . Представим уравнение (4.2) в виде

$$\frac{\delta L}{\delta u} \bar{\delta}u = \partial_{\mu} \left[ \left( -\frac{\partial L}{\partial u_{,\mu}} + \partial_{\nu} \frac{\partial L}{\partial u_{,\nu\mu}} \right) \bar{\delta}u - \frac{\partial L}{\partial u_{,\mu\nu}} \bar{\delta}u_{,\nu} - L\Delta x^{\mu} \right]. \quad (4.3)$$

Выражение (4.3) является тождеством относительно всех входящих в него аргументов, если  $S$  — инвариант. Заметим также, что оно справедливо для любых функций  $u$ , не обязательно являющихся решениями уравнений Эйлера. Для выполнения (4.3) безразлично также поведение  $u$  на границе, так как дивергенциальный член не отбрасывается. В дальнейшем нас будут интересовать два случая: 1)  $u$  — экстремаль; 2)  $u$  — решение обобщенных уравнений Эйлера с правой частью специального вида.

Рассмотрим частные случаи инвариантности.

**И н в а р и а н т н о с т ь о т н о с и т е л ь н о к о н е ч н о й г р у п п ы.** Пусть  $S$  инвариантен относительно конечной группы  $G_r$  и вариации имеют вид:  $\delta x^\mu = \varepsilon^a X x^\mu$ ;  $\delta u = \varepsilon^a I u$ ;  $\bar{\delta} u = (I u - X x^\mu \partial_\mu u) \varepsilon^a$ . Если  $X = \xi_a^\mu \partial_\mu$  — генераторы  $G_r$  в дифференциальной форме, то

$$\delta x^\mu = \xi_a^\mu \varepsilon^a; \quad \bar{\delta} u = (I u - \xi_a^\mu \partial_\mu u) \varepsilon^a. \quad (4.4)$$

Выражение (4.4) показывает, что вариация формы функции устроена аналогично производной Ли (см. § 8). Подставляя (4.4) в (4.3), вынося параметры  $\varepsilon^a$  из-под знака дивергенции и собирая члены при одинаковых  $\varepsilon^a$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta u} (I u - \xi_a^\mu \partial_\mu u) = -\partial_\mu \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial u_{,\mu}} - \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial u_{,\nu\mu}} \right) (I u - \xi_a^\nu \partial_\nu u) + \right. \\ \left. + L \xi_a^\mu + \frac{\partial L}{\partial u_{,\mu\nu}} (I u_{,\nu} - \xi_a^\lambda u_{,\nu\lambda}) \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

или

$$(I u - \xi_a^\mu \partial_\mu u) \delta L / \delta u = \partial_\mu J_a^\mu. \quad (4.6)$$

Итак,  $r$  линейно независимых комбинаций лагранжевых производных  $\delta L / \delta u$  в случае инвариантности  $S$  относительно  $G_r$  обращаются в дивергенции независимо от того, является ли  $u$  решением уравнений Эйлера или нет.

В обычной вариационной задаче на отыскание экстремума  $S$  интеграл от правой части (4.5) преобразуется в интеграл по поверхности и, поскольку вариации функций предполагаются исчезающими на границе области вместе со всеми своими производными, обращается в нуль (задача с закрепленными концами). При этом из  $\delta S = 0$  и из произвольности  $\delta u$  следует уравнение Эйлера:  $\delta L / \delta u = 0$ .

В случае групповых вариаций  $\delta u$ , вообще говоря, не исчезают на границе (концы до некоторой степени свободны), вариационный принцип дает только соотношения (4.5), а уравнение Эйлера не предполагается выполненным.

Если  $u$  — экстремаль, т. е.  $\delta L/\delta u = 0$ , то из (4.5) вытекает известный дифференциальный закон сохранения  $\partial_\mu J_a^\mu = 0$ , где

$$J_a^\mu = - \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial u_{,\mu}} - \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial u_{,\nu\mu}} \right) (Iu - \xi_a^\lambda \partial_\lambda u) + L \xi_a^\mu + \right. \\ \left. + (\partial L / \partial u_{,\mu\nu}) (Iu_{,\nu} - \xi_a^\lambda u_{,\nu\lambda}) \right] \quad (4.7)$$

— сохраняющийся ток. Если лагранжиан не содержит вторых производных от полевых переменных, сохраняющийся ток удобно представить в виде

$$J_a^\mu = - \frac{\partial L}{\partial u_{,\mu}} Iu_a + \left( \frac{\partial L}{\partial u_{,\mu}} u_{,\nu} - L \delta_\nu^\mu \right) \xi_a^\nu = - \frac{\partial L}{\partial u_{,\mu}} Iu_a + T_\nu^\mu \xi_a^\nu, \quad (4.8)$$

где  $T_\nu^\mu = u_{,\nu} \partial L / \partial u_{,\mu} - L \delta_\nu^\mu$  — канонический тензор энергии — импульса.

Если  $u$  — решение «обобщенного» уравнения Эйлера вида  $\delta L / \delta u = \Theta$ , где  $\Theta$  — новые функции (например, источники, не включенные в лагранжиан), то из (4.5) получим «обобщенные» неоднородные законы сохранения типа частичного сохранения аксиального тока (гипотеза PCAC):

$$\partial_\mu J_a^\mu + \Theta (Iu - \xi_a^\mu \partial_\mu u) = 0.$$

Из полученного выражения вытекает, что отличие дивергенции тока от нуля, т. е. нарушение законов сохранения и, следовательно, симметрии, можно связать определенным образом с новыми источниками. Соотношения (4.5) показывают также, что выражения для дивергенций токов можно получить непосредственно из полевых уравнений, свертывая их с вариациями формы волновых функций, порожденными группой инвариантности  $G_r$  [16]. Из  $\delta L / \delta u = 0$  следует  $\partial_\mu J_a^\mu = 0$ , и в этом смысле законы сохранения являются следствием уравнений поля. Таким образом, первая теорема Нетер вовсе не дает непосредственно законов сохранения. Она лишь утверждает, что в случае наличия определенной симметрии в вариационной задаче (или в соответствующей физической ситуации) можно составить выражения (называемые токами), дивергенции которых равны линейным комбинациям лагранжевых производных. Эти дивергенции обращаются в нуль на экстремальных, и тогда получаются дифференциальные законы сохранения. Однако соотношения дивергенций, о которых идет речь в первой теореме Нетер, выполняются и в том случае, когда уравнения поля лишь частично совпадают с уравнениями Эйлера. Выбор вида уравнений поля (и, следовательно, вида законов сохранения) лежит уже вне рамок первой теоремы Нетер.

**Инваринтность относительно бесконечной группы.** Допустим теперь, что интеграл действия  $S$  ин-

вариантен относительно  $G_{\infty r}$ . Пусть, как и в случае  $G_r$ ,  $\delta x$  и  $\delta u$  линейны относительно  $\varepsilon^a(x)$  и их производных. Тогда вариацию формы можно записать в виде

$$\bar{\delta}u = a_a(x, u, u', \dots) \varepsilon^a(x) + b_a^\mu(x, u, u', \dots) \partial \varepsilon^a(x) / \partial x^\mu \quad (4.9)$$

(для существования несобственных законов сохранения достаточно первых производных от  $\varepsilon^a(x)$ ). В этом случае

$$(\delta L / \delta u) \bar{\delta}u = (\delta L / \delta u) [a_a(x, u, u', \dots) \varepsilon^a(x) + b_a^\mu(x, u, u', \dots) \partial \varepsilon^a / \partial x^\mu].$$

Теперь на основании тождества

$\varphi(x, u, u', \dots) \partial^\tau \varepsilon(x) / \partial x^\tau \equiv (-1)^\tau (\partial^\tau \varphi / \partial x^\tau) \varepsilon(x) \text{ mod div}$  можно заменить производные от  $\varepsilon^a(x)$  самими функциями. Тогда (4.3) примет вид

$$[a_a \delta L / \delta u - \partial_\mu (b_a^\mu \delta L / \delta u)] \varepsilon^a(x) = -\text{div} (B^\mu + b_a^\mu \varepsilon^a \delta L / \delta u). \quad (4.10)$$

В отсутствие вторых производных в лагранжиане

$$B^\mu = (\partial L / \partial u_{,\mu}) a_a(x, u, u', \dots) \varepsilon^a + L \Delta x^\mu + b_a^\nu \partial_\nu \varepsilon^a \partial L / \partial u_{,\mu}.$$

Если теперь проинтегрировать (4.10) по какой-либо области, на границе которой  $\varepsilon^a(x)$  со всеми своими производными исчезают, интеграл от правой части (4.10) обратится в нуль\*. Тогда из  $\delta S = 0$  следует

$$\int [a_a \delta L / \delta u - \partial_\mu (b_a^\mu \delta L / \delta u)] \varepsilon^a(x) dx = 0.$$

В силу произвольности функций  $\varepsilon^a(x)$  отсюда вытекает равенство нулю выражения в квадратных скобках:

$$a_a \delta L / \delta u \equiv \partial_\mu (b_a^\mu \delta L / \delta u). \quad (4.11)$$

Это искомые зависимости между лагранжевыми производными и производными от них. Соотношения (4.11) линейно независимы и справедливы также для конечных преобразований  $G_{\infty r}$ . Этим соотношениям можно придать вид ковариантного закона сохранения  $\nabla_\mu (b_a^\mu \delta L / \delta u) \equiv 0$ , если ввести связность  $\Gamma_{\mu a}^b = a_a h_\mu^b$ , где  $h_\mu^b$  определяется условием  $h_\mu^b b_a^\mu = \delta_a^b$ .

Для перехода от бесконечно малых преобразований  $G_{\infty r}$  к конечным существенно, чтобы: а)  $\delta u$  и  $\delta x$  были линейны относительно  $\varepsilon^a(x)$  и их производных; б)  $\delta u$  и  $\delta x$  не содержали производных от  $u$ , поскольку в противном случае конечные преобразования  $G_{\infty r}$  зависят от бесконечного числа производных от  $u$ . Соотношения (4.11), как и (4.5) для  $G_r$ , справедливы для любых функций  $u$ , независимо от того, являются ли они решениями уравнений Эйлера или нет.

\* Поскольку утверждение второй теоремы Нетер состоит в том, что инвариантность относительно бесконечной группы порождает тождественные соотношения между экстремалиями, для доказательства теоремы достаточно среди произвольных функций  $\varepsilon^a(x)$  отыскать такие, которые обращаются в нуль вместе со своими производными на поверхности интегрирования.

Как и раньше, рассмотрим два случая:

1. Пусть  $u$  — экстремаль, т. е.  $\delta L/\delta u = 0$ . Тогда из (4.11) следует

$$\partial_\mu (b_a^\mu \delta L/\delta u) = 0.$$

Это выражение дает способ получения законов сохранения из уравнений поля с помощью дифференцирования.

2. Если  $u$  удовлетворяет уравнению  $\delta L/\delta u = \Theta$ , где  $\Theta$  — новые функции, то из (4.11) получаем дополнительные условия на  $\Theta$ :

$$\partial_\mu (b_a^\mu \Theta) = a_a \Theta. \quad (4.12)$$

Роль  $\Theta$  могут играть также члены, нарушающие  $G_{\infty,r}$ -инвариантность уравнений поля, но инвариантные относительно  $G_r$ , например массовые члены в калибровочно-инвариантной теории. Тогда тождества Нетер приводят к дополнительным условиям на полевые переменные, исключая лишние степени свободы. В самом деле, пусть  $\delta L/\delta u = \lambda u$ , где  $\lambda = \text{const}$ . Тогда  $\partial_\mu (b_a^\mu u) = a_a u$ .

**Слабые и сильные, или собственные и несобственные, законы сохранения.** Законы сохранения (4.7), полученные с помощью первой теоремы, Нетер называет *собственными законами сохранения*. Их также называют иногда *слабыми законами сохранения*, так как они выполняются только на экстремальных. В отличие от слабых законов сохранения, связанных с  $G_r$ -инвариантностью лагранжиана, инвариантность относительно бесконечной группы приводит к сильным законам сохранения, выполняющимся не только на экстремальных, но и для любых  $u$ . Сильные законы сохранения на самом деле являются записью тождеств Нетер. В теории калибровочных полей, как и в ОТО, возникают сильные законы сохранения именно такого типа. Эти законы сохранения — несобственные, так как в качестве сохраняющегося тока в них фигурируют линейные комбинации экстремалей. Примером такого сильного (несобственного) закона сохранения может служить тождество, которому удовлетворяют уравнения Эйнштейна:

$$(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R)_{;\mu} \equiv 0. \quad (4.13)$$

В § 8 показано, что оно является частным случаем тождеств Нетер для  $G_{\infty,3}$ , которые в общем случае выглядят следующим образом:

$$(\delta \hat{L}/\delta g^{\mu\nu})_{;\mu} \equiv 0, \quad (4.14)$$

где  $\hat{L}$  — плотность функции Лагранжа.

Тождества Нетер для электродинамики имеют вид

$$\partial_\mu (\delta L/\delta A_\mu) \equiv 0. \quad (4.15)$$

Если источников нет, а  $L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ , то (4.15) означает

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0. \quad (4.16)$$

Интегрирование этого закона сохранения приводит к теореме Гаусса относительно потоков электрического и магнитного полей через замкнутую двумерную поверхность:  $\oint_{\sigma} Hd\sigma = 0$ ;  $\oint_{\sigma} Ed\sigma = 0$ .

Если источники поля появляются как правая часть уравнений Эйлера, из (4.14) и (4.15) получаем известные законы сохранения тока источников в электродинамике и тензора энергии — импульса в гравитации:  $\partial_{\mu} J^{\mu} = 0$ ;  $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ . Оба эти закона сохранения являются следствиями тождеств Нетер, т. е. дополнительных условий на уравнения поля, и поэтому естественно понимать их как условия на источники. Любопытно, что эти условия на источники абсолютно безразличны к конкретному виду экстремалей, т. е. к виду левых частей уравнений, в которых они стоят. Важно лишь, что эти левые части инвариантны относительно бесконечной группы. Таким образом, законы сохранения (4.14), (4.15) не чувствительны к конкретной структуре инвариантной относительно  $G_{\infty r}$  части лагранжиана.

Из (4.10) при выполнении тождеств Нетер (4.11) следует равенство

$$\operatorname{div} [J_a^{\mu} \varepsilon^a(x) - b_a^{\nu} \partial_{\nu} \varepsilon^a(x) \partial L / \partial u_{,\mu} - b_a^{\mu} \varepsilon^a(x) \delta L / \delta u] = 0, \quad (4.17)$$

где  $J_a^{\mu} = a_a \partial L / \partial u_{,\mu}$ . Равенство (4.17) выполняется при любых  $\varepsilon^a(x)$  и обеспечивает инвариантность интеграла действия относительно  $G_{\infty r}$ , а также справедливость обратной второй теоремы Нетер.

Если учесть уравнения Эйлера  $\delta L / \delta u = 0$ , то

$$\operatorname{div} [J_a^{\mu} \varepsilon^a(x) - b_a^{\nu} \partial_{\nu} \varepsilon^a(x) \partial L / \partial u_{,\mu}] = 0. \quad (4.18)$$

Левая часть уравнения (4.18) представляет собой с точностью до знака не что иное, как вариацию лагранжиана после учета уравнений Эйлера и связывающих их тождеств. Таким образом,

$$\delta L = - \{ \partial_{\mu} J_a^{\mu} \varepsilon^a(x) + [J_a^{\mu} - \partial_{\nu} (b_a^{\mu} \partial L / \partial u_{,\nu})] \partial_{\mu} \varepsilon^a(x) - b_a^{\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \varepsilon^a(x) \partial L / \partial u_{,\mu} \}. \quad (4.19)$$

Так как параметрические функции совершенно произвольны, условие экстремальности действия приводит к равенству нулю коэффициентов в  $\delta L$  при  $\varepsilon^a(x)$  и их производных:

$$\partial_{\mu} J_a^{\mu} = 0; \quad (4.20)$$

$$J_a^{\mu} = \partial_{\nu} (b_a^{\mu} \partial L / \partial u_{,\nu}); \quad (4.21)$$

$$b_a^{\nu} \partial L / \partial u_{,\mu} + b_a^{\mu} \partial L / \partial u_{,\nu} = 0. \quad (4.22)$$

Таким образом, инвариантность интеграла действия относительно бесконечной группы приводит на экстремальных к обычному закону сохранения (4.20) для тока  $J_a^{\mu} = a_a \partial L / \partial u_{,\mu}$ , соответствующего

$G_r$ -инвариантности. Но этот ток равен [в силу условий (4.21) и (4.22)] дивергенции от некоторого антисимметричного тензора. Поэтому соответствующий заряд  $Q = \int J^0 d^3x$  в силу теоремы Гаусса всегда представим в виде интеграла по замкнутой 2-мерной поверхности:  $Q_a = \oint (\partial L / \partial u_{,i}) b_a^0 d\sigma^i$ .

Если лагранжиан не инвариантен относительно  $G_{\infty r}$ , но уравнения Эйлера и тождества Нетер выполнены, из соотношений (4.19) получаем следующие уравнения:

$$\partial \delta L / \partial \varepsilon^a(x) = \partial_\mu J_a^\mu; \quad (4.23)$$

$$\partial \delta L / \partial \partial_\mu \varepsilon^a(x) = J_a^\mu - \partial_\nu (b_a^\nu \partial L / \partial u_{,\nu}) = J_a^\mu - b_a^\nu \partial L / \partial u - \partial_\nu b_a^\nu \partial L / \partial u_{,\nu}; \quad (4.24)$$

$$\partial \delta L / \partial \partial_{\mu\nu} \varepsilon^a(x) = b_a^{\nu\mu} \partial L / \partial u_{,\mu\nu} = 1/2 (b_a^\nu \partial L / \partial u_{,\mu\nu} + b_a^\mu \partial L / \partial u_{,\nu\mu}). \quad (4.25)$$

Если полевые переменные преобразуются относительно  $G_{\infty r}$  однородно, т. е.  $b_a^\mu = 0$ , то уравнения (4.23) и (4.24) переходят в уравнения, предложенные Гелл-Маном и Леви (1960 г.) [1]:

$$\partial \delta L / \partial \partial_\mu \varepsilon^a(x) = J_a^\mu; \quad \partial \delta L / \partial \varepsilon^a(x) = \partial_\mu J_a^\mu.$$

Эти уравнения для лагранжиана, описывающего массивное калибровочное поле (с нарушенной локальной калибровочной инвариантностью), приводят к пропорциональности тока и поля:  $J_a^\mu \sim m^2 A_a^\mu$ .

### § 5. Локальная калибровочная инвариантность лагранжиана и вторая теорема Нетер

**Вторая теорема Нетер и калибровочные поля общего вида.** Построение инвариантных лагранжианов. Поставим следующую задачу: найти простейший лагранжиан, содержащий производные от полевых переменных  $A_\mu^a$  не выше первого порядка и инвариантный относительно локальной калибровочной группы, если преобразования  $A_\mu^a$  имеют вид

$$\delta A_\mu^a = f_{bc}^a A_\mu^c \varepsilon^b + \partial_\mu \varepsilon^a, \quad a = 1, \dots, r; \mu = 1, \dots, 4, \quad (5.1)$$

где  $f_{bc}^a$  — структурные константы некоторой конечной группы Ли,  $\varepsilon^a$  — параметры. Вектор-потенциал калибровочного поля  $A_\mu^a$  можно понимать как мультиплет  $r$  (по числу параметров калибровочной группы) векторных полей  $A_\mu$ , причем калибровочная группа перепутывает эти поля.

Преобразования (5.1) образуют группу  $G_{\infty r}$ , причем вид вариации  $\delta A_\mu^a$  соответствует случаю  $\Delta x = 0$ ;  $\bar{\delta} A_\mu^a = \delta A_\mu^a$ . Иными словами, преобразования  $G_{\infty r}$  надкоординатные (координаты не затрагиваются или фиксируется точка  $x$ ).

Используя вторую теорему Нетер, построим интеграл действия  $S = \int L(A_\mu^a; A_{\mu,\nu}^a) dv$ , инвариантный относительно  $G_{\infty r}$ . Соотношения

(4.3), являющиеся дифференциальными условиями инвариантности  $S$ , принимают вид

$$(\delta L / \delta A_{\mu}^a) \delta A_{\mu}^a \equiv \partial [ - (\partial L / \partial A_{\nu, \mu}^a) \delta A_{\nu}^a ]. \quad (5.2)$$

Подставим в (5.2)  $\delta A_{\mu}^a$  и, поскольку (5.2) должны выполняться тождественно, приравняем нулю коэффициенты при  $\varepsilon^a(x)$ ,  $\partial_{\mu} \varepsilon^a(x)$  и  $\partial_{\mu \nu} \varepsilon^a(x)$  по отдельности. Тогда условия инвариантности  $S$  запишутся в виде системы тождеств, решая которую снизу вверх получим общий вид зависимости  $L$  от  $A_{\mu}^a$  и  $A_{\mu, \nu}^a$  [3]:

$$f_{ac}^b A_{\mu}^c (\partial L / \partial A_{\mu}^b) + f_{ac}^b A_{\nu, \mu}^c (\partial L / \partial A_{\nu, \mu}^b) \equiv 0; \quad (5.3)$$

$$\partial L / \partial A_{\mu}^a + f_{ac}^b A_{\nu}^c (\partial L / \partial A_{\nu, \mu}^b) \equiv 0; \quad (5.4)$$

$$L / \partial A_{\mu, \nu}^a \equiv 0. \quad (5.5)$$

Из (5.5) следует, что производные от  $A_{\mu}^a$  входят в  $L$  только через антисимметричные выражения  $A_{[\mu, \nu]}^a$ . Используя (5.5), из (5.4) получаем

$$L = L(F_{\mu\nu}^a), \quad (5.6)$$

$$\text{где } F_{\mu\nu}^a = A_{\nu, \mu}^a - A_{\mu, \nu}^a - 1/2 f_{bc}^a (A_{\mu}^b A_{\nu}^c - A_{\nu}^b A_{\mu}^c).$$

Нетрудно убедиться, что  $F_{\mu\nu}^a$  преобразуется относительно (5.1) однородно:

$$\delta F_{\mu\nu}^a = f_{bc}^a F_{\mu\nu}^c \varepsilon^b. \quad (5.7)$$

Поскольку структура  $F_{\mu\nu}^a$  напоминает максвелловский тензор поля, назовем  $F_{\mu\nu}^a$  тензором напряженности поля  $A_{\mu}^a$ . Учитывая (5.7), из (5.3) получаем

$$L = L(F_{\mu\nu}^a, f_{ac}^m f_{mb}^c F_{\tau\lambda}^b). \quad (5.8)$$

Введем величину

$$F_{a\mu\nu} = f_{ac}^m f_{mb}^c F_{\mu\nu}^b = g_{ab} F_{\mu\nu}^b. \quad (5.9)$$

Ее закон преобразования  $\delta F_{a\mu\nu} = f_{ac}^b F_{b\mu\nu} \varepsilon^c$ . В этом случае (5.8) переходит в

$$L = L(F_{\mu\nu}^a, F_{a\tau\lambda}). \quad (5.10)$$

Величина  $g_{ab} = f_{ac}^m f_{mb}^c$  симметрична по  $a, b$  в силу тождества Якоби. В дальнейшем она будет использоваться как внутренняя метрика. Матрица  $g_{ab}$  не вырождена только для полупростых групп, для которых  $f_{ac}^b$  антисимметричны по всем значкам.

Простейший калибровочно-инвариантный, а также релятивистски-инвариантный лагранжиан имеет вид

$$L_0 = 1/4 F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}. \quad (5.11)$$

Произвольный инвариантный лагранжиан есть произвольная функция  $L_0$ ;  $L_0$  называют *лагранжианом свободного калибровочного поля*.

Теперь определим общий вид лагранжиана взаимодействия  $L_{вз}(A_\mu^a; \psi; \bar{\psi}, \mu)$ , инвариантного относительно  $G_{\infty r}$  и зависящего от двух видов функций и их производных: от вектор-потенциалов калибровочных полей  $A_\mu^a$ , содержащих в преобразованиях первые производные от параметров, и от волновых функций полей  $\psi$ , преобразующихся однородно и соответствующих частицам, взаимодействующим с калибровочным полем. Пусть

$$\left. \begin{aligned} \delta A_\mu^a &= f_{bc}^a A_\mu^c \varepsilon^b + \partial_\mu \varepsilon^a; \\ \delta \psi &= I \varepsilon^a \psi; \quad \delta \bar{\psi} = -\varepsilon^a \bar{\psi} I, \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

где  $I$  — генератор некоторого представления группы  $G_r$ , получающейся из  $G_{\infty r}$  при  $\varepsilon^a(x) = \text{const}$ .

Предположим, что взаимодействие (смешанные члены в  $L_{вз}$ ) не зависит от производных  $A_\mu^a$ . В этом случае для определения  $L_{вз}$  получим следующую систему уравнений:

$$f_{ac}^b (\partial L_{вз} / \partial A_\mu^b) A_\mu^c = - (\partial L_{вз} / \partial \psi) I \psi - (\partial L_{вз} / \partial \bar{\psi}, \mu) I \bar{\psi}, \mu + \text{h. c.}; \quad (5.13)$$

$$\partial L_{вз} / \partial A_\mu^a = - (\partial L_{вз} / \partial \psi, \mu) I \psi + \bar{\psi} I \partial L_{вз} / \partial \bar{\psi}, \mu, \quad (5.14)$$

где *h.c.* — эрмитово сопряженные члены. Из (5.14) следует, что  $L_{вз}$  зависит от аргументов, имеющих вид ковариантной производной:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_\mu \psi &= \partial_\mu \psi - 1/2 I A_\mu^a \psi; \\ \nabla_\mu \bar{\psi} &= \partial_\mu \bar{\psi} + 1/2 \bar{\psi} I A_\mu^a. \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Нетрудно убедиться, что уравнению (5.13) удовлетворяет лагранжиан взаимодействия

$$L_{вз} = \bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi, \quad (5.16)$$

где  $m$  произвольно. Таким образом, простейший лагранжиан, инвариантный относительно  $G_{\infty r}$  и описывающий калибровочное поле и взаимодействие этого поля, например, со спинорным полем  $\psi$ , имеет вид

$$L = -1/4 F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi, \quad (5.17)$$

где  $\gamma^\mu$  — матрицы Дирака.

Уравнения поля. Уравнения калибровочного поля для лагранжиана (5.10) имеют квазимаксвелловский вид [17]:

$$\left. \begin{aligned} \partial_\nu F_a^{\mu\nu} - f_{ac}^b F_b^{\mu\nu} A_\nu^c &= 0, \\ \text{или } \partial_\nu F_a^{\mu\nu} &= J_a^\mu, \text{ или } \nabla_\mu F_a^{\mu\nu} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

Если  $f_{ac}^b$  — структурные константы группы изотопических вращений, уравнения (5.18) представляют собой уравнения для бозонов Янга—Миллса. В электродинамике мы имеем однопараметрическую абелеву группу калибровочных преобразований, для которой  $f_{ac}^b = 0$ . Поэтому уравнения (5.18) переходят в уравнения Максвелла:  $\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$ .

Уравнения движения частиц, описываемых полем  $\psi$  и взаимодействующих с калибровочным полем, записываются в виде [18]

$$\delta L / \delta \psi = \partial L / \partial \psi - \nabla_\mu \partial L / \partial \nabla_\mu \psi = 0,$$

что для лагранжиана (5.17) дает

$$\gamma^\mu \nabla_\mu \psi - m \psi = 0.$$

В искривленном пространстве—времени вариационные уравнения калибровочного поля принимают вид [19]:

$$\partial_\nu (|h| \partial L / \partial F_a^{\mu\nu}) = |h| (J_a^\mu + J_a^0). \quad (5.19)$$

Уравнения движения частиц в калибровочном и гравитационном полях:

$$|h| \partial L / \partial \psi - \nabla_\mu^* (|h| \partial L / \partial \nabla_\mu \psi) = 0,$$

$$\text{где } \nabla_\mu^* (|h| \partial L / \partial \nabla_\mu \psi) = \partial_\mu (|h| \partial L / \partial \nabla_\mu \psi) + |h| (\partial L / \partial \nabla_\mu \psi) I A_\mu^a.$$

Слабый закон сохранения для суммарного тока:

$$\partial_\mu \left[ |h| \left( J_a^\mu + J_a^0 \right) \right] = 0.$$

Обобщенные уравнения Эйнштейна, или уравнения поля реперов

$$h_\nu^\mu : T_\mu^{\nu} (\text{всех полей}) + T_\mu^{\nu} (\text{всех частиц}) = 0, \text{ т. е.}$$

$$\Sigma (L_{0\mu}^\nu - 1/4 \delta_\mu^\nu L_0) + \Sigma ((\partial L / \partial \nabla_\nu \psi) \nabla_\mu \psi - L \delta_\mu^\nu) = 0.$$

Физический смысл этих уравнений — равенство нулю суммы тензоров энергии — импульса всех полей, входящих в лагранжиан.

Если гравитационное поле рассматривать как калибровочное, связанное с однородной локальной группой Лоренца, то для квадратичного по тензору Римана лагранжиана уравнение (5.19) переходит в  $R_{ik;\nu}^{\mu\nu} = J_{(ik)}^\mu$ .

**Тождества Нетер и законы сохранения.** Заменяя в тождествах (4.11)  $a_a$  на  $f_{ac}^b A_\mu^c$ ,  $b_a^\mu$  на 1, получаем [4,5]

$$f_{ac}^b A_\mu^c \delta L / \delta A_\mu^b \equiv \partial_\mu \delta L / \delta A_\mu^a, \quad (5.20)$$

где  $\delta L / \delta A_\mu^a = \partial L / \partial A_\mu^a - \partial_\nu \partial L / \partial A_{\mu,\nu}^a$ .

Поскольку  $A_\mu^a$  и  $A_{\mu,\nu}^a$  входят в  $L$  только через  $F_{\mu\nu}^a$ , удобнее переписать (5.20) через производные по  $F_{\mu\nu}^a$ . Используя соотношения

$$\partial L / \partial A_\mu^a \Big|_{A_{\mu,\nu}^a = \text{const}} = (-\partial L / \partial F_{\mu\nu}^b) f_{ac}^b A_\nu^c;$$

$$\partial L / \partial A_{\mu,\nu}^a \Big|_{A_\mu^a = \text{const}} = -\partial L / \partial F_{\mu\nu}^a = \partial L / \partial F_{\nu\mu}^a,$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta A_\mu^a} &= \frac{\partial L}{\partial F_{\nu\mu}^b} f_{ac}^b A_\nu^c - \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial F_{\nu\mu}^a} = \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial F_{\mu\nu}^a} - \frac{\partial L}{\partial F_{\mu\nu}^b} f_{ac}^b A_\nu^c; \\ \left( \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial F_{\mu\nu}^a} - \frac{\partial L}{\partial F_{\mu\nu}^b} f_{ac}^b A_\nu^c \right) f_{kl}^a A_\mu^l &\equiv -\partial_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial F_{\mu\nu}^b} f_{kc}^b A_\nu^c \right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Учитывая закон преобразования для  $F_{\mu\nu}^a$ , тождествам (5.20) нетрудно придать вид ковариантной дивергенции от лагранжевой производной:

$$\nabla_\mu (\partial_\nu \partial L / \partial F_{\mu\nu}^a - f_{ac}^b A_\nu^c \partial L / \partial F_{\mu\nu}^b) \equiv 0, \quad (5.22)$$

или, возвращаясь от производных по  $F_{\mu\nu}^a$  к производным по  $A_\mu^a$ ,  $\nabla_\mu (\delta L / \delta A_\mu^a) \equiv 0$ .

Мы получили сильный закон сохранения, справедливый независимо от вида полевых уравнений для  $A_\mu^a$ .

Тождества (5.21) на экстремалиях приводят к обычному закону сохранения (слабому):

$$\partial_\mu (f_{ac}^b A_\nu^c \partial L / \partial F_{\mu\nu}^b) = \partial_\mu J_a^\mu = 0 \quad (5.23)$$

для тока «самодействия» калибровочного поля  $J_a^\mu = f_{ac}^b A_\nu^c \partial L / \partial F_{\mu\nu}^b$ .

Относительно локальных калибровочных преобразований закон сохранения (5.23) нековариантен. Несобственный ток  $J_a^\mu$  по своему смыслу аналогичен псевдотензору энергии — импульса гравитационного поля в ОТО и мог бы быть назван псевдотоком. Он равен дивергенции антисимметричного тензора. В электродинамике  $J_a^\mu = 0$  из-за абелевости калибровочной группы.

Рассмотрим теперь лагранжиан (5. 17). Тождества (4.11) в этом случае выглядят следующим образом:

$$f_{ac}^b A_\mu^c \delta L / \delta A_\mu^b + (\delta L / \delta \psi)_a I \psi - \bar{\psi}_a I \delta L / \delta \bar{\psi} \equiv \partial_\mu (\delta L / \delta A_\mu^a), \quad (5.24)$$

где

$$\partial L / \partial A_\mu^a = \partial L_0 / \partial A_\mu^a + \partial L_{\text{вз}} / \partial A_\mu^a = J_a^\mu + J_a^{\mu 0}, \quad (5.25)$$

$J_a^\mu = - (\partial L_{\text{вз}} / \partial \nabla_\mu \psi)_a I \psi + \bar{\psi}_a I \partial L_{\text{вз}} / \partial \nabla_\mu \bar{\psi}$ . Если  $A_\mu^a$ ,  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  — решения уравнений Эйлера, то из (5.24) получаем закон сохранения

$$\partial_\mu (J_a^\mu + J_a^{\mu 0}) = 0. \quad (5.26)$$

Закон сохранения (5.26) ковариантен. Это обычный (слабый) закон сохранения тока, но несобственный. Интересно, что его структура подобна структуре закона сохранения энергии в ОТО: сохраняется в обычном смысле ток «материи» + псевдоток поля. Ток «материи», т. е. частиц, взаимодействующих с калибровочным полем, сохраняется лишь в смысле ковариантной дивергенции. В этом легко убедиться, записывая тождества Нетер для лагранжиана (5.16):

$$(\delta L / \delta \psi)_a I \psi - \bar{\psi}_a I (\delta L / \delta \bar{\psi}) \equiv 0.$$

Раскрывая лагранжевы производные  $\delta L / \delta \psi$  и  $\delta L / \delta \bar{\psi}$ , получаем  $\partial_\mu J_a^\mu - f_{ac}^b A_\mu^c J_b^\mu = 0$ .

Учитывая, что  $J_a^\mu$  преобразуется по регулярному представлению  $G_r$ , т. е.  $\delta J_a^\mu = f_{ac}^b \epsilon^c J_b^\mu$ , запишем сильный закон сохранения для тока частиц в ковариантном виде:  $\nabla_\mu J_a^\mu = 0$ . Для абелевых групп закон сохранения, полученный таким образом, по-прежнему однороден:  $\partial_\mu J^\mu = 0$ .

#### Массивные калибровочные поля и дополнительные условия.

Как было отмечено, тождества Нетер, обеспечивающие инвариантность интеграла действия относительно бесконечной группы, выполняются независимо от того, являются ли полевые переменные решениями уравнений Эйлера для этого действия. Они могут выполняться и в том случае, если уравнения движения инвариантны лишь относительно конечной группы, в которую переходит  $G_\infty$  при  $\epsilon^a(x) = \text{const}$ . Но тогда тождества Нетер приводят к дополнительным условиям на полевые переменные, устранивающим лишние компоненты.

Предположим, что вектор-потенциалы калибровочного поля удовлетворяют не уравнению (5.18), а уравнению с массой

$$\nabla_\nu F_a^{\mu\nu} - m^2 A_a^\mu = 0,$$

которое можно записать так:  $\delta L_0 / \delta A_\mu^a = m^2 A_\mu^a$ .

Тогда тождества Нетер приводят к условиям лоренцевой калибровки для  $A_a^\mu$ :

$$m^2 \nabla_\mu A_a^\mu = m^2 (\partial_\mu A_a^\mu - f_{ac}^b A_\mu^c A_b^\mu) = 0. \quad (5.27)$$

Поскольку для простых групп структурные константы антисимметричны по всем индексам, при  $m \neq 0$  условия калибровки сводятся просто к  $\partial_\mu A_a^\mu = 0$ . Когда уравнение экстремали  $\delta L_0 / \delta A_a^\mu = 0$  удовлетворяется ( $m^2 = 0$ ), дополнительные условия на вектор-потенциалы не возникают. Оба случая можно записать в виде соотношения

$$m^2 \partial_\mu A_a^\mu = \begin{cases} 0 & \text{при } m^2 \neq 0, \\ \text{произвольно} & \text{при } m^2 = 0. \end{cases} \quad (5.28)$$

Существование тождеств, связывающих уравнения поля и производные от них, в силу справедливости обратной второй теоремы Нетер говорит об инвариантности соответствующего лагранжиана относительно бесконечной группы. Действительно, если установлено, что калибровочные условия на вектор-потенциалы можно получить как следствие тождеств Нетер между уравнениями поля, производными от них и обычными законами сохранения, то, используя коэффициенты в тождествах как коэффициенты бесконечной группы  $G_{\infty r}$ , можно по соответствующим вариациям полевых переменных восстановить лагранжиан. Тождествам Нетер при наличии дополнительных условий удобно придавать вид [5]

$$a_a (\delta L / \delta u - \Theta) \equiv \partial_\mu [b_a^\mu (\delta L / \delta u - \Theta)], \quad (5.29)$$

где  $(\delta L / \delta u - \Theta)$  соответствует инвариантной относительно  $G_{\infty r}$  части уравнений Эйлера;  $\Theta$  — источники и все члены, нарушающие  $G_{\infty r}$ -инвариантность. Поэтому, если рассматриваются не только калибровочные поля, но и другие, взаимодействующие с ними (например, спинорные), выполнение дополнительных условий для калибровочного поля, связанных с тождествами Нетер, возможно лишь при выполнении определенных законов сохранения для других полей. В самом деле, из (5.24) следует, что  $\nabla_\mu (\delta L / \delta A_\mu^a) = \nabla_\mu J_a^\mu$ . Следовательно,

$$m^2 \partial_\mu A_a^\mu \equiv \nabla_\mu J_a^\mu. \quad (5.30)$$

## § 6. Обратные теоремы Нетер

**Первая обратная теорема Нетер.** Если  $r$  линейно независимых комбинаций лагранжевых производных обращаются в дивергенции (т. е. выполняется соотношение (4.6)), то интеграл действия инвариантен относительно  $r$ -параметрической конечной группы Ли. Для доказательства нужно провести рассуждения § 4 в обратном порядке. Именно: пусть выполняется соотношение

$$\Phi_a(x, u, u_\mu) \delta L / \delta u = \partial_\mu J_a^\mu. \quad (6.1)$$

Умножим обе его части на  $\varepsilon^a$  и просуммируем по  $a$ . Учитывая, что  $\varepsilon^a$  — числовые параметры, внесем их под знак дивергенции в правой части соотношения (6.1). Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\delta}u &= \varphi_a(x, u, u_\mu) \varepsilon^a; \quad \delta x^\mu = -(\varepsilon^a/L) (J_a^\mu + \varphi_a \partial L/\partial u_\mu); \\ \delta u &= \bar{\delta}u + u_\mu \xi_a^\mu \varepsilon^a = \bar{\delta}u - (\varepsilon^a/L) (J_a^\mu + \varphi_a \partial L/\partial u_\mu) u_\mu = \\ &= -(\varepsilon^a/L) (u_\mu J_a^\mu + T\varphi_a + 3L\varphi_a), \quad \text{где } T \equiv T_\mu^\mu. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Тогда получим, используя (4.3), соотношение (4.2):  $\delta L + \text{div}(L\Delta x) = 0$ . Интегрируя это выражение по произвольной области  $dx$ , получим равенство  $\delta S = 0$ , означающее инвариантность интеграла действия относительно бесконечно малых преобразований, определяемых величинами (6.2). Случай  $\delta x^\mu = 0$ , т. е.  $J_a^\mu = -(\partial L/\partial u_\mu) \varphi_a$ , отвечает надкоординатным преобразованиям внутренней симметрии.

Конечные преобразования можно найти, интегрируя уравнения типа  $dx^\mu/dt = \xi^\mu$  при соответствующих начальных условиях. Здесь  $t$  — текущий параметр на однопараметрических подгруппах.

Из предположения о том, что должно быть  $r$  и только  $r$  независимых соотношений дивергенций, следует, что конечные преобразования, соответствующие (6.2), образуют группу. В противном случае два преобразования, выполненных подряд, могли бы привести к новому преобразованию, не принадлежащему к классу (6.2), а поскольку относительно него интеграл действия также был бы инвариантен, появились бы новые соотношения дивергенций, независимые от (6.1), что противоречит предположению.

**Вторая образная теорема Нетер.** *Если имеет место  $r$  тождественных соотношений между лагранжевыми производными и производными от них до  $k$ -го порядка включительно, то интеграл действия инвариантен относительно бесконечной группы  $G_{\infty r}$ , преобразования которой содержат производные до  $k$ -го порядка.* Доказательство аналогично предыдущему случаю.

Существование зависимостей (4.11) ведет после умножения на  $\varepsilon^a(x)$  и сложения, а также использования тождественных преобразований к уравнению (4.10), а из него вытекают определения  $\delta x$  и  $\delta u$  и инвариантность интеграла действия относительно этих преобразований. То, что полученные преобразования образуют группу, следует из необходимости существования только  $r$  зависимостей и, следовательно, только  $r$  произвольных функций, определяющих преобразования  $G_{\infty r}$ .

Особый интерес представляет случай, когда функции  $u$  не являются решениями уравнений Эйлера  $G_{\infty r}$ -инвариантного лагранжиана и лагранжевы производные отличны от нуля. Тогда, как говорилось выше, вторая теорема Нетер приводит к дополнительным условиям на источники (законам сохранения для токов). Обращение второй теоремы Нетер в таком случае позволяет определить форму

инвариантного лагранжиана по уравнениям поля и дополнительным условиям, вытекающим из них.

**Восстановление лагранжиана по уравнениям поля и дополнительным условиям, вытекающим из них.** Ограничение числа степеней свободы взаимодействующего поля с помощью специального выбора дополнительных условий может быть связано с определенными физическими принципами. Например, калибровочные условия (5.28) для векторных полей означают, что эти поля могут переносить при взаимодействии только спин 1, тогда как в отсутствие дополнительных условий векторное поле может переносить два спина: 0 и 1 [6]. Оказывается, что если наложить на векторные поля дополнительные условия (5.28), т. е. потребовать, чтобы они обладали определенным спином и этот спин равнялся бы единице, то мультиплеты взаимодействующих векторных полей образуют *регулярные представления* различных полупростых алгебр Ли. Спин — это одно из квантовых чисел, классифицирующих представления группы Пуанкаре, которая является группой движения пространства — времени Минковского. Таким образом, здесь мы имеем пример ситуации, когда требование определенных пространственно-временных свойств векторного поля приводит к ограничениям на возможный вид взаимодействия между полями, т. е. определяет внутреннюю симметрию взаимодействий. Таким образом, устанавливается связь между законами сохранения, соответствующими, внутренним симметриям (сохранение числа барионов, странности, изотопического спина, а также электрического заряда) и пространственно-временным свойством векторных полей обладать определенным спином. Так, существование истинно нейтральных полей со спином 1 (например, фотона или  $\omega$ -мезона) влечет за собой инвариантности, соответствующие сохранению аддитивных квантовых чисел (электрического заряда или странности). Существование заряженных полей со спином 1 (например,  $\rho$ -мезона) приводит к инвариантностям типа изотопической и т. д. Обратное тоже верно: при наличии того или иного закона сохранения есть место для частицы, обуславливающей его возникновение, и можно ставить вопрос о поиске такой частицы.

В рамках лагранжева подхода, изложенного в § 5, связь между дополнительными условиями и группой инвариантности лагранжиана возникает благодаря справедливости второй обратной теоремы Нетер, когда наложенные дополнительные условия таковы, что их можно получить как следствие тождественных соотношений между уравнениями движения и производными от них (при выполнении соответствующих законов сохранения) [5]. Ниже приведен предложенный впервые Гелл-Маном и Глэшоу [7] метод восстановления структуры лагранжиана, описывающего взаимодействующие векторные поля, по уравнениям поля и вытекающим из них дополнительным условиям (см. также [6, 9]).

Пусть имеется некоторое число  $r$  векторных полей  $A_\mu^a$  ( $a = 1, \dots, r$ ). Наиболее общий лагранжиан, описывающий возможные взаимо-

действия с безразмерными константами связи, можно записать в виде

$$L_1(x) = -1/4 f_{\mu\nu}^a f_{\mu\nu}^a - 1/2 (m^2)_{ab} A_\mu^a A_\mu^b + \alpha_{abc} \partial_\nu A_\mu^a A_\mu^b A_\nu^c + \\ + \beta_{abcd} A_\mu^a A_\mu^b A_\nu^c A_\nu^d + \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} (\gamma_{abc} \partial_\mu A_\nu^a A_\lambda^b A_\rho^c + \delta_{abcd} A_\mu^a A_\nu^b A_\lambda^c A_\rho^d), \quad (6.3)$$

где  $f_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a$ ;  $\alpha_{ijk}$ ,  $\beta_{ijkl}$ ,  $\gamma_{ijk}$ ,  $\delta_{ijkl}$  — вещественные (для обеспечения эрмитовости лагранжиана) числовые коэффициенты — константы связи. Симметричную эрмитову матрицу  $\|m_{ab}^2\|$  естественно считать диагонализуемой и обладающей неотрицательными собственными значениями. Заранее не предполагается, что она кратна единичной, поэтому у разных полей массы могут быть как одинаковые, так и разные. Свободная часть лагранжиана (6.3) (т. е. та, в которую входят поля  $A_\mu^a$  только с одним и тем же латинским индексом) с самого начала записана в таком виде, чтобы в отсутствие взаимодействия (т. е. при  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ ;  $\|(m^2)_{ab}\| = m^2 I$ , где  $I$  — единичная матрица) каждое поле удовлетворяло обычному уравнению для векторного поля со спином 1:

$$\partial_\nu f_a^{\mu\nu} - m^2 A_a^\mu = 0. \quad (6.4)$$

Отметим также, что члены с  $\gamma$  и  $\delta$  учитывают возможность несохранения четности. Из самих определений нелинейных членов следуют свойства

$$\beta_{abcd} = \beta_{bacd} = \beta_{abd c} = \beta_{cdab}; \quad (6.5)$$

$$\gamma_{abc} = -\gamma_{acb}; \quad (6.6)$$

$\delta_{abcd}$  полностью антисимметричны по всем индексам, как и дискриминантный тензор  $\varepsilon_{\mu\nu\tau\lambda}$ . С учетом этих свойств из лагранжиана (6.3) получаем уравнения движения:

$$\square A_\mu^a - \partial_\mu \partial_\nu A_\nu^a - (m^2)_{ab} A_\mu^b - \alpha_{abc} \partial_\nu (A_\mu^b A_\nu^c) + \alpha_{bac} \partial_\nu A_\mu^b A_\nu^c + \\ + \alpha_{bca} \partial_\mu A_\nu^b A_\nu^c + 4\beta_{abcd} A_\mu^b A_\nu^c A_\nu^d + 2(\gamma_{abc} - \gamma_{bca}) \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\nu A_\lambda^b A_\rho^c + \\ + 4\delta_{abcd} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} A_\nu^b A_\lambda^c A_\rho^d = 0. \quad (6.7)$$

Возьмем 4-мерную дивергенцию от этого уравнения, исключим в полученном соотношении  $\square A_\mu^a$  с помощью уравнения (6.7) и потребуем, чтобы выполнялась альтернатива (5.28). Для этого необходимо и достаточно, чтобы каждая комбинация членов одинаковой структуры тождественно равнялась нулю. Отсюда найдем свойства коэффициентов  $\alpha_{abc}$ ,  $\beta_{abcd}$ ,  $\gamma_{abc}$  и  $\delta_{abcd}$ . Необходимость следует из того, что в противном случае нельзя было бы задать нужные начальные условия в задаче Коши произвольным образом (а в квантовой теории — непротиворечиво задать одновременные перестановочные соотношения). Достаточность очевидна. Оказывается, что:

а)  $\beta_{abcd}$  связаны с коэффициентами  $\alpha_{abc}$  соотношениями  $8\beta_{abcd} + \alpha_{mca}\alpha_{mdb} + \alpha_{mcb}\alpha_{mda} = 0$ ; б) коэффициенты  $\alpha_{abc}$  полностью антисимметричны и удовлетворяют структурному соотношению, совпадающему с тождеством Якоби для структурных констант алгебр Ли:  $[\alpha_a, \alpha_b] = -\alpha_{abc}\alpha_c$ , где обозначены матрицы  $(\alpha_a)_{bc} = \alpha_{abc}$ ; в)  $\gamma_{abc}$  полностью антисимметричны, в результате чего члены с  $\gamma_{abc}$  вообще выпадают из уравнений движения; г)  $\delta_{abcd} = 0$ , т. е. члены, не сохраняющие четность, несовместны с условием Лоренца. Таким образом, при взаимодействии векторных полей с определенным спином сохраняется четность; д) массы ограничены условием  $[\alpha_a, m^2] = 0$ . В результате лагранжиан (6.3) принимает вид

$$L_1 = -1/4 F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - 1/2 (m^2)_{ab} A_\mu^a A_\mu^b, \quad (6.8)$$

где  $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \alpha_{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ . Получился лагранжиан так называемого массивного калибровочного поля. Он инвариантен относительно преобразований калибровочной группы  $G_r$ , алгебра которой задается матрицами  $\alpha_{abc}$  (в прежних обозначениях  $f_{ac}^b$ ):

$$A_\mu^a{}' = A_\mu^a + \alpha_{abc} \varepsilon_b A_\mu^c, \quad (6.9)$$

где  $\varepsilon_b = \text{const}$ . Вектор-потенциал калибровочного поля  $A_\mu^a$  здесь соответствует мультиплетам векторных полей  $A_\mu$ , образующим неприводимые представления  $G_r$ . В рамках одного мультиплета, компоненты которого преобразуются только друг через друга, массы векторных полей одинаковы. Поэтому  $m^2$  можно понимать просто как массу калибровочного поля.

При выполнении условий (5.28) под действием локальной калибровочной группы, параметры преобразований которой зависят от пространственно-временных координат точки  $x$ , лагранжиан (6.8) сдвигается на полную дивергенцию. Но интеграл действия, несмотря на это, остается инвариантным относительно  $G_{\text{ог}}$ , если граничные условия таковы, что поверхностный интеграл, в который перейдет интеграл от дивергенции, обращается в нуль.

Аналогичным образом можно найти лагранжиан системы взаимодействующих полей со спинами  $1/2, 0, 1$  [6]. При этом поля спина  $1/2$  и  $0$  также распадаются на мультиплеты, преобразующиеся по неприводимым представлениям калибровочной группы, но представлениям уже не регулярным.

## § 7. Изопериметрические задачи в теории с локальной симметрией

**Обобщение второй теоремы Нетер на изопериметрические задачи.** Как мы видели в предыдущем параграфе, выбор дополнительных условий на полевые переменные имеет глубокий физический смысл. При этом очень важной оказывается связь между свойствами сим-

Метрии лагранжиана и видом дополнительных условий. Такая связь возникает в тех случаях, когда часть уравнения движения совпадает с уравнением Эйлера для интеграла действия, инвариантного относительно бесконечной группы  $G_{\infty r}$ , причем уравнения движения допускают группу инвариантности  $G_r$ , получающуюся из бесконечной группы  $G_{\infty r}$  при  $\varepsilon^a(x) = \text{const}$ . Такие уравнения движения можно рассматривать как уравнения Эйлера для интеграла действия, инвариантного относительно бесконечной группы, но в задаче на условный экстремум (типа изопериметрических задач). В данном параграфе обсуждаются свойства симметрии в задачах на условный экстремум, соответствующих физическим системам со связями. Как известно, изопериметрические задачи представляют собой задачи на отыскание условного экстремума некоторого функционала в том случае, когда дополнительным условием при варьировании является сохранение другого функционала  $S_1$  от тех же переменных, т. е. когда дополнительные условия интегральны. Поскольку нас интересуют законы сохранения и дополнительные условия, будем рассматривать функционалы как  $S$ , так и  $S_1$ , инвариантные относительно конечных или бесконечных групп Ли. В этих случаях имеется аналог теорем Нетер.

Рассмотрим обобщение второй теоремы Нетер на изопериметрические вариационные задачи.

**Третья теорема.** Пусть интеграл действия  $S$  инвариантен относительно бесконечной группы  $G_{\infty r}$  и фиксированный функционал  $S_1$  инвариантен относительно конечной группы  $G_r$ , являющейся подгруппой  $G_{\infty r}$ . Тогда возникает  $r$  дифференциальных дополнительных условий на полевые переменные, вытекающих из тождеств Нетер, связывающих лагранжевы производные функционала и производные от них.

Вследствие справедливости третьей теоремы справедлива следующая теорема.

**Четвертая теорема.** Пусть интеграл действия  $S = \int L dv = \int L(x, u, u') dv$  инвариантен относительно бесконечной группы  $G_{\infty r}$ , преобразования которой содержат (для простоты) лишь первые производные от параметрических функций, и пусть  $S_1 = \int L_1 dv = \text{const}$  инвариантен относительно группы  $G_r$ , получаемой из  $G_{\infty r}$  при  $\varepsilon^a(x) = \text{const}$ . Тогда на своих экстремальных вспомогательный функционал  $S_2 = S + \lambda S_1 = \int (L + \lambda L_1) dv = \int L_2 dv$  инвариантен относительно  $G_{\infty r}$ . При этом  $L_2$  сдвигается под действием  $G_{\infty r}$  на полную дивергенцию, а  $G_r$  оставляет  $L_2$  без изменения. (Здесь  $\lambda$  — множитель Лагранжа.)

Действительно, пусть  $\delta u = a_i(x, u, u', \dots) \varepsilon^i(x) + b_{i,\mu}^{\mu}(x, u, u', \dots) \varepsilon_{i,\mu}^i(x)$ , где  $\varepsilon^i(x)$  — произвольные функции, исчезающие на бесконечности вместе со своими производными;

$$\delta S_2 = \delta S + \lambda \delta S_1 = \int [(\delta u L_2 / \delta u) \delta u + \text{div}(\delta u D L_2 / D u, \mu)] dv = \\ = \int [ (a_i(x, u, u', \dots) \varepsilon^i(x) + b_{i,\mu}^{\mu}(x, u, u', \dots) \varepsilon_{i,\mu}^i(x)) \delta L_2 / \delta u +$$

$$\begin{aligned}
& + \operatorname{div} (\delta u (\partial L_2 / \partial u, \mu)) \, ldv = \int \{ [a_i (\delta L_2 / \delta u) - \partial_\mu (b_i^\mu \delta L_2 / \delta u)] \varepsilon^i (x) + \\
& + \operatorname{div} [ (b_i^\mu \delta L_2 / \delta u + a_i \partial L_2 / \partial u, \mu) \varepsilon^i + b_i^\nu \partial_\nu \varepsilon^i \partial L_2 / \partial u, \mu] \} \, dv.
\end{aligned}$$

Здесь  $\delta L_2 / \delta u = \partial L_2 / \partial u - \partial_\nu \partial L_2 / \partial u, \nu = \partial L / \partial u - \partial_\nu \partial L / \partial u, \nu +$   
 $+ \lambda (\partial L_1 / \partial u - \partial_\nu \partial L_1 / \partial u, \nu).$

Поскольку интеграл действия  $S$  и соответствующий ему лагранжиан инвариантны относительно  $G_{\infty r}$ , в силу второй теоремы Нетер справедливы следующие тождества:

$$a_i \delta L / \delta u \equiv \partial_\mu (b_i^\mu \delta L / \delta u). \quad (7.1)$$

Тождества (7.1) справедливы независимо от того, является ли  $u$  решением уравнений Эйлера  $\delta L / \delta u = 0$ , что в данном случае очень важно. Эти тождества на экстремалиях изопериметрической задачи, где  $\delta L / \delta u = -\lambda \delta L_1 / \delta u$ , переходят в дополнительные условия вида

$$a_i \delta L_1 / \delta u = \partial_\mu (b_i^\mu \delta L_1 / \delta u). \quad (7.2)$$

По условиям изопериметрической задачи  $\delta L_1 / \delta u \neq 0$ , и поэтому условия (7.2) имеют нетривиальный смысл. Они представляют собой те дополнительные условия на полевые переменные, существование которых утверждает теорема 3.

Вариация  $S_2$  сводится [при учете (7.1), (7.2) и  $\delta L_2 / \delta u = 0$ ] к интегралу от полной дивергенции. Следовательно, если  $\varepsilon^i (x)$  исчезают на границе вместе со всеми своими производными, то

$$\begin{aligned}
\delta S_2 &= \int \operatorname{div} [a_i \varepsilon^i \partial L_2 / \partial u, \mu + b^\nu \partial_\nu \varepsilon^i \partial L_2 / \partial u, \mu] \, dv = \\
&= \oint (a_i \varepsilon^i \partial L_2 / \partial u, \mu + b^\nu \partial_\nu \varepsilon^i \partial L_2 / \partial u, \mu) \, d\sigma_\mu = 0.
\end{aligned} \quad (7.3)$$

Если  $\varepsilon^i = \operatorname{const}$  и  $G_{\infty r}$  переходит в  $G_r$ , то вместо (7.3) получим

$$\delta S_2 = \oint a_i \varepsilon^i (\partial L_2 / \partial u, \mu) \, d\sigma_\mu = \varepsilon^i \oint J_i^\mu \, d\sigma_\mu = 0, \quad (7.4)$$

так как мы предположили инвариантность  $S$  и  $S_1$ , а следовательно,  $S_2$  относительно  $G_r$ . Если  $\varepsilon^i (x)$  и  $\partial_\mu \varepsilon^i (x)$  совершенно произвольны, то должно выполняться соотношение

$$J_i^\mu = \partial_\nu (b_i^\mu \partial L_2 / \partial u, \nu) = b_i^\mu \partial L_2 / \partial u + \partial_\nu b_i^\mu (\partial L_2 / \partial u, \nu).$$

Это соотношение, действительно, выполняется на экстремалиях. Следовательно, на экстремалиях  $\delta S_2 = 0$ . Таким образом, теорема 4 доказана.

Структура уравнений (7.2) подобна структуре условий (4.12) на внешние источники  $\Theta$ , не включенные в лагранжиан. Поэтому (7.2), как и (4.12), можно использовать при выборе формы дополнительных условий. Обратное: существование дополнительных условий вида (7.2) позволяет восстановить лагранжиан.

В теории калибровочных полей можно взять  $L_1 = A_\mu^a A_a^\mu$ ;  $a_i \rightarrow \rightarrow f_{ii}^b A_\mu^i$ ;  $b_i^\mu \rightarrow 1$  (стрелка означает соответствие). Тогда условия (7.2) принимают вид

$$f_{ac}^b A_\mu^c A_b^\mu = \partial_\mu A_a^\mu = 0 \quad (7.5)$$

вследствие полной антисимметрии структурных констант калибровочной группы по всем индексам.

Условия Лоренца' для электродинамики получаются автоматически из (7.5), так как соответствующие структурные константы  $f_{ac}^b = 0$ . Вследствие теоремы 4 лагранжиан массивного калибровочного поля в лоренцевой калибровке инвариантен относительно локальной калибровочной группы на своих экстремалах.

**Экстремали изопериметрической задачи и массивные калибровочные поля.** Прежде всего заметим, что экстремали функционала  $S = \int L(x, u, u', \dots) dv$  при дополнительном условии  $S_1 = \int L_1(x, u, u', \dots) dv = \text{const}$  одновременно являются экстремалами задачи на безусловный экстремум для вспомогательного функционала:

$$S_2 = S + \lambda S_1 = \int [L(x, u, u', \dots) + \lambda L_1(x, u, u', \dots)] dv, \quad (7.6)$$

где  $\lambda = \text{const}$  — множитель Лагранжа. Иными словами, если варьирование происходит при интегральном дополнительном условии, экстремали приобретают вид

$$\delta L_2 / \delta u = \delta L / \delta u + \lambda \delta L_1 / \delta u = 0, \quad (7.7)$$

причем предполагается, что  $\delta L / \delta u \neq 0$  и  $\delta L_1 / \delta u \neq 0$ .

Из опериметрические задачи допускают обращение в том смысле, что система экстремалей не изменится, если варьируемый функционал и дополнительное условие поменять ролями, т. е. варьировать  $S_1$  при условии  $S = \text{const}$ . Роль множителя Лагранжа в этом случае играет  $1/\lambda$ , что для однородных экстремалей не имеет значения:  $\delta L_2 / \delta u = (1/\lambda) \delta L / \delta u + \delta L_1 / \delta u = 0$ .

Условным экстремумом можно воспользоваться для изменения симметрии задачи, например для перехода от  $G_\infty$ -инвариантной теории к  $G_r$ -инвариантной. Для этого достаточно выбрать  $S_1$  инвариантным относительно  $G_r$ , если  $S$  инвариантен относительно  $G_\infty$ . Таким способом можно ввести массу калибровочного поля и тем самым снять ограничение  $m = 0$ . В самом деле, рассмотрим следующую вариационную задачу: найти экстремум функционала  $S = - \int_{V_4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} dv$ , где  $F_{\mu\nu}^a = \partial_{[\mu} A_{\nu]}^a - 1/2 f_{bc}^a A_{[\mu}^b A_{\nu]}^c$  — тензор напряженности калибровочного поля;  $A_\mu^a$  — вектор-потенциал этого поля, при условии, что другой функционал

$$S_1 = \int_{V_4} A_\mu^a A_a^\mu dv = b = \text{const} \neq 0. \quad (7.8)$$

Здесь  $a = 1, \dots, r$ , где  $r$  — число параметров калибровочной группы;  $\mu = 1, \dots, 4$  — пространственно-временные индексы;  $V_4$  будем считать конечной областью.

Согласно общему правилу, составим вспомогательный функционал

$$S_2 = S + \lambda S_1 = \int_{V_4} (-F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \lambda A_\mu^a A_a^\mu) dv \quad (7.9)$$

и найдем его экстремум. Найденная экстремаль будет также экстремалью для  $S$ , удовлетворяющей условию (7.8). Постоянные интегрирования и константу  $\lambda$  находят затем из граничных условий и дополнительного условия (7.8). Если постоянную  $\lambda$  отождествить с квадратом массы калибровочного поля  $2m^2$ , то  $S_2$  окажется действием для массивного калибровочного поля, причем масса будет иметь смысл множителя Лагранжа. Подобная интерпретация массы иногда используется в классической механике.

Уравнения Эйлера, соответствующие  $\delta S_2 = 0$ , имеют вид

$$F_{a;\nu}^{\mu\nu} - m^2 A_a^\mu = 0. \quad (7.10)$$

Система экстремалей не изменится, если уравнения Эйлера представить в виде

$$F_{;\nu}^{\mu\nu}/m^2 - A_a^\mu = 0. \quad (7.11)$$

Уравнения (7.11) можно теперь рассматривать как уравнения Эйлера, соответствующие вариации функционала  $S_1 = \int_{V_4} A_\mu^a A_a^\mu dv$  при дополнительном условии:

$$S = - \int_{V_4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} dv = a = \text{const}. \quad (7.12)$$

Величина  $S$  определяет  $1/m^2$ . Интеграл  $S$  представляет собой интеграл от инвариантов поля, взятый по 4-мерной области, в которой существует поле. Он определяется не только самими инвариантами, но и топологией  $V_4$ .

Если гравитационное поле рассматривается как калибровочное, соответствующее локальной группе Лоренца, то (7.12) переходит в

$$S = \int_{V_4} R^{\mu\nu\tau\lambda} R_{\mu\nu\tau\lambda} dv = \text{const}, \quad (7.13)$$

где  $R_{\mu\nu\tau\lambda}$  — тензор кривизны Римана. Для самодуальных полей  $F_{\mu\nu}^a = \pm *F_{\mu\nu}^a$  и дважды самодуальных  $R_{\mu\nu\tau\lambda} = \pm \bar{R}_{\mu\nu\tau\lambda}$  интегралы (7.12) и (7.13) являются топологическими инвариантами.

Аналогичная ситуация возникает и в отношении констант взаимодействия частиц с калибровочным полем. Именно: появление взаимодействия с калибровочным полем можно рассматривать с тех же позиций, что и появление массового члена, т. е. как замену задачи на безусловный экстремум для свободного лагранжиана (или безмас-

сового) задачей на условный экстремум с интегральными дополнительными условиями. Так, уравнения Дирака с взаимодействием

$$\gamma^\mu (\partial_\mu \psi - i e J A_\mu^a \psi) + m\psi = 0 \quad (7.14)$$

дают экстремум функционалу  $S_3 = \int (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + m \bar{\psi} \psi) dv$  при дополнительном условии

$$S_4 = \int J_a^\mu A_\mu^a dv = \text{const} \neq 0. \quad (7.15)$$

Константа взаимодействия (заряд) играет роль множителя Лагранжа и определяется значением  $S_4$ . В то же время уравнение (7.14) дает экстремум функционалу  $S_4 = \int J_a^\mu A_\mu^a dv = \int \bar{\psi} \gamma^\mu J \psi A_\mu^a dv$  при дополнительном условии

$$S_3 = \int (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + m \bar{\psi} \psi) dv = \text{const}. \quad (7.16)$$

В этом случае константа взаимодействия определяется через постоянное значение  $S_3$ , причем перенормировка константы взаимодействия соответствует изменению значения интеграла действия для свободных («голых») частиц.

Таким образом, переход от безмассового калибровочного поля к массивному, так же как и переход от свободных дираковских частиц к взаимодействующим, можно представить как переход от вариационной задачи на безусловный экстремум к требованию экстремальности того же интеграла действия при дополнительных интегральных условиях типа (7.8), (7.12), (7.15) или (7.16).

**Спонтанное нарушение локальной калибровочной симметрии.** В современных калибровочных моделях взаимодействий элементарных частиц для получения массы векторных калибровочных полей используется механизм Хиггса. Для того чтобы с помощью этого механизма получить массу векторных калибровочных полей, обычно к лагранжиану безмассового векторного поля  $L = -1/4 F_\mu^a F_\mu^a$  добавляется лагранжиан скалярного поля Хиггса ( $L_X$ ). Затем компоненты векторного поля заменяются линейными комбинациями векторного и скалярного полей так, чтобы получившееся в результате векторное поле оказалось массивным, т. е. в новом лагранжиане появились члены, пропорциональные квадрату переопределенных компонент векторного поля. Безмассовых скалярных полей в новом лагранжиане не остается, и поэтому говорят, что скалярные частицы «исчезли», а векторное поле приобрело массу.

Теория возмущений строится обычно в окрестности минимума потенциальной энергии. Этот минимум можно найти, варьируя потенциал  $V(\phi)$ , который, вообще говоря, может быть сильно нелинейным по полям, т. е. может описывать «самодействие» системы. Вторая производная потенциальной энергии по полю, взятая в точке минимума потенциальной энергии, называется *квадратом массы поля*, четвертая производная в той же точке — *константой связи*.

Условие  $V = V_{\text{мин}}$ , т. е.  $\delta V / \delta \varphi = 0$ , можно заменить условием  $S_1 = S_{1\text{мин}}$ , т. е.  $\delta S_1 / \delta \varphi = 0$ , где  $S_1 = \int V(\varphi) dv$ . Тогда можно определить массу поля с помощью метода изопериметрической задачи, изучая экстремали  $S_1$ . Масса, получаемая дифференцированием потенциальной энергии по полю, представляет собой массу флуктуаций около фиксированного решения и, естественно, зависит от этого решения.

Рассмотрим для простоты одно скалярное поле  $\varphi$  [20]. Его лагранжиан имеет вид

$$L_\varphi = 1/2 (\partial_\mu \varphi)^2 - V(\varphi) = 1/2 (\partial_\mu \varphi)^2 + L_1(\varphi).$$

Уравнение Эйлера для этого лагранжиана выглядит следующим образом:

$$\square \varphi = -\partial V(\varphi) / \partial \varphi.$$

Характер решений уравнений Эйлера зависит от вида функции  $V(\varphi)$ . Для того чтобы найти массу поля  $\varphi$ , нужно рассмотреть поведение решений уравнений поля  $\varphi$  вблизи решения, обеспечивающего минимум  $V$ , т. е. вблизи экстремалей  $-\delta L_1 / \delta \varphi = \partial V(\varphi) / \partial \varphi = 0$ . Если  $V(\varphi)$  имеет форму  $V(\varphi) = (\mu/2)\varphi^2 + (\beta/4)\varphi^4$ , то минимум потенциальной энергии достигается при  $\varphi = 0$ . Главный член разложения потенциала в этой точке:  $V(\varphi) = (\mu/2)\varphi^2$ , где  $\mu = (\partial^2 V / \partial \varphi^2)_{\varphi=0} > 0$ . Уравнение Эйлера для  $L_\varphi$  вблизи  $\varphi = 0$  принимает вид

$\square \varphi - \mu \varphi = 0$  или  $\ddot{\varphi} + \mu \varphi - \Delta \varphi = 0$ . Решения этого уравнения имеют вид плоских волн  $\varphi \sim \exp(\pm i k_\mu x^\mu)$ , где волновой вектор  $k_\mu = (k_0, \mathbf{k})$  удовлетворяет соотношению  $k_\mu^2 = \mu$  или  $k_0^2 = \mathbf{k}^2 + \mu$ .

Если  $V(\varphi)$  имеет вид лагранжиана Хиггса

$$L_X = V(\varphi) = -(\mu/2)\varphi^2 + (\beta/4)\varphi^4,$$

его экстремумы определяются решениями уравнения Эйлера

$$\delta L_X / \delta \varphi = -\mu \varphi + \beta \varphi^3 = +\beta \varphi (\varphi^2 - \mu/\beta) = 0,$$

$\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pm \sqrt{\mu/\beta}$ . Из них  $\varphi_1$  является локальным максимумом, и теория в окрестности  $\varphi = 0$  неустойчива. Два локальных минимума достигаются при  $\varphi = \eta = \pm \sqrt{\mu/\beta}$ . Вблизи этих решений  $V(\varphi) = -\mu \eta^2/4 + \mu (\varphi - \eta)^2$ ,  $m^2 = (\partial^2 V / \partial \varphi^2)_{\varphi=\eta} = 2\mu > 0$ , где  $m$  — масса квантов поля  $\Delta \varphi = (\varphi - \eta)$ .

При переходе к квантовой картине значения классического поля, обеспечивающие минимум потенциальной энергии, становятся вакуумными средними этого поля. Таким образом, в нелинейных теориях возможны различные вакуумы.

В теориях, инвариантных относительно локальной калибровочной группы, множество вакуумов определяется фактор-группой  $G/H$ , где  $H$  — группа стабильности вакуума, переводящая данный вакуум в себя. Классические траектории, связывающие различные вакуумы и удовлетворяющие условию  $S = \text{const}$ , играют важную роль в квантовой теории поля и теории фазовых переходов.

дов. Флуктуации поля в окрестности топологически нетривиальных решений приводят к спектру аномально больших масс.

Применим метод изопериметрической задачи для того, чтобы получить массу калибровочных полей, не используя дополнительных скалярных полей Хиггса. В механике, как известно, группой симметрии теории называется группа, оставляющая неизменным потенциал, а массой — инвариант этой группы.

Пусть калибровочное поле описывается интегралом действия  $S_1 = \int A_\mu^a A_\nu^a dv$  и, кроме того, наложено интегральное дополнительное условие  $S = -1/2 \int F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} dv = \text{const}$ . Будем рассматривать теорию в окрестности экстремума  $S_1$ . Соответствующие  $S_1$  уравнения Эйлера имеют вид:  $A_\mu^a = 0$ .

Будем варьировать теперь интеграл

$$S_1 = \int (f_{bc}^a f_{ahl} A_\mu^b A_\nu^c A_\mu^k A_\nu^l + m^2 g_{ab} A_\mu^a A_\nu^b) dv.$$

Уравнения Эйлера для  $S_1$  примут вид

$$2f_{bc}^a f_{ahl} A_\nu^c A_\mu^k A_\nu^l + m^2 g_{ab} A_\mu^a = 0$$

или

$$A_\mu^a (m^2 g_{ab} - 2f_{ald} f_{cb}^d A_\nu^c A_\nu^l) = 0. \quad (7.17)$$

Решение уравнения (7.17)  $A_\mu^a = 0$  дает локальный максимум  $S_1$ . Второе решение получим из условия  $2f_{ald} f_{cb}^d A_\nu^c A_\nu^l = m^2 g_{ab}$ , откуда, свертывая с  $g^{ab}$ , найдем  $4\delta_{lc} A_\nu^c A_\nu^l = rm^2$ . Этому соотношению удовлетворяет решение, соответствующее спонтанному нарушению симметрии. Для полупростых групп  $g_{ab} = -2\delta_{ab}$ .

Если теперь систему координат выбрать так, чтобы  $A_i^a = 0$ , где  $i = 1, 2, 3$  и  $A_0^a = \varphi^a$  — мультиплет скалярных полей, получим  $\delta_{ab} \varphi^a \varphi^b = rm^2/4$ .

Для однопараметрической абелевой группы  $\varphi^2 = m^2/4$ , как и в других случаях спонтанного нарушения симметрии, если положить  $S_1 = \int (A_\mu A_\mu A_\nu A_\nu - m^2 A_\mu A_\mu) dv$ . Для группы  $SU(2)$  соотношение (7.18) переходит в  $(\varphi^a)^2 = 3m^2/4$ .

Поиски решений уравнений поля вблизи некоторого конкретного решения эквивалентны переходу от задачи о движении одного пробного тела во внешнем поле к задаче об относительном движении двух тел, одно из которых считается опорным. Условие типа  $S = \text{const}$  позволяет фиксировать опорную траекторию.

**Законы сохранения в изопериметрических задачах.** Соотношение (7.4) дает законы сохранения для изопериметрической задачи в виде  $\oint J_i^\mu d\sigma_\mu = 0$ . Здесь

$$J_i^\mu = a_i \partial L_2 / \partial u_{i,\mu} = J_i^\mu + \lambda a_i \partial L_1 / \partial u_{i,\mu}, \quad (7.19)$$

где  $J_i^\mu = a_i \partial L / \partial u, \mu$ .

**Нарушение симметрии и сохранение токов.** Соотношение (7.19) показывает, как изменяется вид сохраняющихся токов при наложении дополнительных условий типа изопериметрической задачи. Именно, токи не изменяются, если  $L_1$  не содержит производных от  $u$  (токи «не чувствуют» потенциальной энергии). В частности, из (7.19) следует, что переход к массивным калибровочным полям [условия типа (7.8)] не изменяет вида сохраняющихся токов. Однако учет тождеств Нетер приводит к новому соотношению между токами и полями. Действительно, в этом случае по-прежнему

$$J_i^\mu = J_{\infty i}^\mu = b_i^\mu (\delta L / \delta u) = J_i^\mu - \lambda a_i (\partial L_1 / \partial u, \mu).$$

На экстремальных изопериметрической задачи  $\delta L_2 / \delta u = 0$  получаем  $J_i^\mu - \lambda a_i (\partial L_1 / \partial u, \mu) = -\lambda b_i^\mu (\delta L_1 / \delta u)$ . (7.20)

Для массивных калибровочных полей соотношение (7.20) приводит к пропорциональности тока и поля:  $J_i^\mu = m^2 A_i^\mu$ . Таким образом, пропорциональность тока и поля можно понимать (как и появление массы у калибровочного поля) как следствие неявного введения дополнительного условия (7.8) и превращения обычной вариационной задачи для калибровочных полей в изопериметрическую.

Заметим в заключение, что дополнительные условия (7.2), как и инвариантность  $S_2$  относительно  $G_{\infty r}$ , выполняются только на экстремальных  $\delta L_2 / \delta u = 0$ , т. е. являются следствием уравнений поля, в то время как инвариантность  $S$  определяется его формой и не зависит от уравнений поля. Возможно, что это обстоятельство является аргументом в пользу принятия принципа действия в следующей форме: варьируется та часть лагранжиана, которая нарушает симметрию (взаимодействие), а инвариантная часть фиксируется и определяет значение константы взаимодействия.

## § 8. Тензорные калибровочные поля и производные Ли

**Неоднородные пространства и производные Ли.** В этом параграфе ОТО рассматривается как теория калибровочного поля симметричного тензора второго ранга  $h_{\mu\nu}$  в пространстве — времени с произвольной геометрией. Калибровочной группой является группа произвольных непрерывных преобразований координат ОТО. Вид вариаций определяется с помощью производных Ли. Затем поле  $h_{\mu\nu}$  отождествляется с полем метрического тензора  $g_{\mu\nu}$  и совершается переход к псевдориманову пространству—времени. Далее обсуждается вопрос о векторном калибровочном поле и поле антисимметричного тензора второго ранга.

Группы, описывающие пространственно-временную симметрию, не могут быть локализованы по Янгу—Миллсу. Такая операция

фактически приводит к совершенно другому типу геометрии пространства—времени и другому представлению о пространстве, тогда как локализация внутренних симметрий не изменяет, вообще говоря, геометрии  $V_4$ . Аналогия между ОТО и теорией Янга—Миллса может быть проведена в том случае, если не отождествлять касательное пространство к  $V_4$  с самим пространством—временем. Тогда можно все свойства симметрии относить к касательному пространству, т. е. к пространству—времени Минковского, не заботясь вначале о том, локальными свойствами  $V_4$  или глобальным соответствует эта симметрия. Для сравнения величин, отнесенных к разным точкам такого многообразия, расслоенного на касательные пространства, введем операцию дифференцирования Ли. Производные Ли определяются независимо от геометрической структуры многообразия, но они связаны с произвольными непрерывными преобразованиями координат, т. е. с общековариантной группой. Таким образом, если воспользоваться производными Ли как вариациями, порожденными бесконечной группой преобразований координат ОТО, можно получить с помощью вариационной процедуры § 5 теорию гравитации как калибровочного поля. При этом калибровочным полем будет поле симметричного тензора второго ранга  $h_{\mu\nu}$ , который, вообще говоря, не обязательно отождествлять с метрическим тензором пространства—времени  $V_4$ . Если такое отождествление сделать, получится теория Эйнштейна. Уравнения Эйнштейна получаются автоматически как уравнения Эйлера для простейшего калибровочно-инвариантного лагранжиана  $L = R$ . Изложение следует работе [5], в которой впервые рассматривался такой подход.

*Производные Ли* в римановом пространстве (или в произвольном многообразии) вводятся следующим образом [11]. Поскольку все величины задаются в окрестности точки, а связь между точками задается дополнительно, для сравнения величин, отнесенных к разным точкам пространства, необходимо ввести в каждой из этих точек две системы координат. Одна из систем координат будет собственной, а другая—«увлеченной» из той точки, с которой происходит сравнение. Увлеченная система координат попросту «такая же», как во второй точке, и компоненты сравниваемых величин в первой точке относительно системы координат, увлеченной из второй точки, по определению, равны компонентам величин в собственной системе координат во второй точке. Иными словами, мы просто приписываем каждой точке кроме собственной системы координат систему координат и все значения компонент величины, подлежащей исследованию, отнесенные ко второй точке. Только теперь, имея в одной точке две системы координат и два набора компонент, мы можем воспользоваться тензорным анализом. Для этого необходимо осуществить автоморфизм (отображение) пространства в целом на себя и сравнить изменившиеся значения компонент с увлеченными значениями. Такое сравнение не зависит от определения параллельного переноса, т. е. от конкретных свойств пространства, и приводит к понятию производной Ли от данной величины. Сравнить величины, отне-

сенные к разным точкам риманова пространства, не сводя их так или иначе в одну точку, бессмысленно, так как при переходе к новой системе координат такое равенство нарушается. Переход от собственных значений величины к увлеченным описывается формулами, обобщающими тензорные преобразования. Для симметричного тензора второго ранга  $h_{\mu\nu}$  они дают

$$h_{\mu\nu}^*(x) = (\partial x^{*\tau} / \partial x^\mu) (\partial x^{*\lambda} / \partial x^\nu) h_{\tau\lambda}(x^*), \quad (8.1)$$

где звездочкой обозначены увлеченные значения координат и компонент тензора  $h_{\mu\nu}$ .

Рассмотрим непрерывный автоморфизм риманова пространства, индуцируемый преобразованиями координат вида

$$x^{*\mu} = x^\mu + \xi^\mu(x)t, \quad (8.2)$$

где  $t$  — параметр. Относительно таких преобразований определяется операция, называемая дифференцированием Ли. В случае симметричного ковариантного тензора второго ранга  $h_{\mu\nu}$  производной Ли от него называется выражение, легко получаемое из (8.1) как предел

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{h_{\mu\nu}^*(x^*) - h_{\mu\nu}(x)}{\delta t}; \quad \delta_L h_{\mu\nu} = \xi^\tau(x) \partial_\tau h_{\mu\nu} + h_{\tau\nu} \partial_\mu \xi^\tau(x) + h_{\mu\tau} \partial_\nu \xi^\tau(x). \quad (8.3)$$

Если  $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$  и коэффициенты связности выражаются только через производные от  $g_{\mu\nu}$  (риманова связность), то производную Ли можно переписать через ковариантные производные:  $\delta_L g_{\mu\nu} = \xi_{\nu;\mu} + \xi_{\mu;\nu}$ .

Группы Ли, образованные автоморфизмами (8.2) и сохраняющие метрический тензор  $g_{\mu\nu}$  (в смысле  $\delta_L g_{\mu\nu} = 0$ ), называют *группами движения риманова пространства*, а соответствующий вектор  $\xi^\tau$  — *вектором Киллинга*. В пространстве, допускающем группу движения, зная компоненты метрического тензора в одной точке, можно путем увлечения найти  $g_{\mu\nu}$  во всех точках. В плоском пространстве группы движения становятся обычными группами пространственно-временной симметрии. Например, в пространстве — времени Минковского группой движения является группа Пуанкаре, в пространстве — времени постоянной кривизны — группа де Ситтера  $O(4,1)$ , из которой группа Пуанкаре получается в предельном случае  $R \rightarrow \infty$  ( $R$  — радиус кривизны  $V_4$ ).

**Калибровочное векторное поле и поле антисимметричного тензора второго ранга.** Производные Ли определяются для величин произвольной размерности, как целой, так и полуцелой. Фактически это значит, что произвольное многообразие  $V_4$  расслаивается с помощью различных представлений полной линейной группы  $GL(4)$ . Иными словами, над каждой точкой  $V_4$  вводится слой, размерность которого определяется размерностью нужного нам представления. Поскольку производные Ли всегда содержат произвольные функции

( $\sim \Delta x$ ) и их производные, в качестве калибровочных можно рассматривать любые поля, имеющие лишь пространственно-временные индексы и не связанные с калибровочными группами типа внутренних симметрий. Для примера рассмотрим векторное поле  $A_\mu$ . Его производная Ли имеет вид:  $\delta_L A_\mu = \xi^\tau \partial_\tau A_\mu + A_\tau \partial_\mu \xi^\tau$ ;  
 $\delta_L A^\mu = \xi^\tau \partial_\tau A^\mu - A^\tau \partial_\tau \xi^\mu$ .

Тождества Нетер, используя (4.11), можно записать в виде  
 $(\delta \hat{L} / \delta A_\mu) (\partial_\tau A_\mu - \partial_\mu A_\tau) \equiv \partial_\mu (\delta \hat{L} / \delta A_\mu) A_\tau$ .

Если свернуть это выражение с  $\delta \hat{L} / \delta A_\tau$ , получим  
 $A_\tau (\delta \hat{L} / \delta A_\tau) \partial_\mu (\delta \hat{L} / \delta A_\mu) \equiv (\delta \hat{L} / \delta A_\tau) \partial_{[\tau} A_{\mu]} \delta \hat{L} / \delta A_\mu \equiv 0$ .

Поэтому либо выполняется закон сохранения

$$\partial_\mu (\delta \hat{L} / \delta A_\mu) = 0,$$

либо векторное поле удовлетворяет условию

$$A_\tau (\delta \hat{L} / \delta A_\tau) = 0.$$

Из тождеств Нетер при включении источников получаем

$$J^\mu F_{\tau\mu} \equiv 2 (\partial_\mu J^\mu) A_\tau, \quad (8.4)$$

где  $F_{\tau\mu} = \partial_\tau A_\mu - \partial_\mu A_\tau$ . Отсюда следует, что  $\partial_\mu J^\mu (A_\tau J^\tau) = 0$ . Поэтому либо  $J^\mu$  сохраняется, т. е.  $\partial_\mu J^\mu = 0$ , либо взаимодействие отсутствует ( $A_\tau J^\tau = 0$ ). Свертывая (8.4) с  $*F^{\tau\lambda}$ , получаем

$$J^\lambda (F_{\alpha\beta}^* F^{\alpha\beta}) \equiv 8 \partial_\mu J^\mu (\epsilon^{\tau\lambda\alpha\beta} A_\tau F_{\alpha\beta}).$$

**Антисимметричное тензорное поле второго ранга  $f_{\mu\nu}$ .** Его вариация Ли задается формулой

$$\delta_L f_{\mu\nu} = \xi^\tau \partial_\tau f_{\mu\nu} + f_{\tau\nu} \partial_\mu \xi^\tau + f_{\mu\tau} \partial_\nu \xi^\tau.$$

Тождества Нетер имеют вид

$$\frac{1}{2} (\delta L / \delta f_{\mu\nu}) (\partial_\tau f_{\mu\nu} - \partial_\mu f_{\tau\nu} - \partial_\nu f_{\mu\tau}) \equiv \partial_\mu (\delta L / \delta f_{\mu\nu}) f_{\tau\nu}. \quad (8.5)$$

Если  $\partial_{[\tau} f_{\mu\nu]} \neq 0$  и  $L = \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}$ , то  $\delta L / \delta f_{\mu\nu} = \frac{1}{2} f^{\mu\nu}$  и тождества (8.5) принимают вид

$$\frac{1}{2} f^{\mu\nu} (\partial_\tau f_{\mu\nu} - \partial_\mu f_{\tau\nu} - \partial_\nu f_{\mu\tau}) = (\partial_\mu f^{\mu\nu}) f_{\tau\nu} m^2$$

или

$$\frac{1}{2} f^{\mu\nu} \partial_\tau f_{\mu\nu} = \partial_\mu (f^{\mu\nu} f_{\tau\nu}),$$

откуда следует «закон сохранения»

$$\partial_\mu (f^{\mu\nu} f_{\tau\nu} - \frac{1}{4} \delta_\tau^\mu f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}) = 0.$$

Величина, стоящая в скобках, в электродинамике играет роль тензора энергии — импульса электромагнитного поля. Здесь закон сохранения этого тензора получен как следствие тождеств Нетер.

Используя тождество  $*f^{\mu\nu}f_{\tau\nu} \equiv 1/4 \delta_{\tau}^{\mu} (*f^{\lambda\nu}f_{\lambda\nu})$ , где  $*f^{\mu\nu} = 1/2 \epsilon^{\mu\nu\tau\lambda} f_{\tau\lambda}$ ,  $\epsilon^{\mu\nu\tau\lambda}$  — дискриминантный тензор, и антисимметрию  $f_{\mu\nu}$ , можно (8.5) переписать так:

$$(*f^{\lambda\nu}f_{\lambda\nu})\partial_{\mu}(\delta L/\delta f_{\mu\sigma}) \equiv 6*f^{\sigma\tau}\partial_{[\tau}f_{\mu\nu]}\delta L/\delta f_{\mu\nu}. \quad (8.6)$$

Если  $f_{\mu\nu}$  удовлетворяет уравнению

$$\partial_{[\tau}f_{\mu\nu]} = 0, \quad (8.7)$$

(8.6) упрощается:

$$(*f^{\lambda\sigma}f_{\lambda\sigma})\partial_{\mu}(\delta L/\delta f_{\mu\nu}) = 0. \quad (8.8)$$

Таким образом, из любого уравнения поля для  $f_{\mu\nu}$  сильный закон сохранения и дополнительные условия получаются простым дифференцированием. Если  $\delta L/\delta f_{\mu\nu} = f^{\mu\nu}$ , то из (8.8) следует

$$(*f^{\lambda\sigma}f_{\lambda\sigma})\partial_{\mu}f^{\mu\nu} = 0. \quad (8.9)$$

Следовательно,

$$\partial_{\mu}f^{\mu\nu} = \begin{cases} 0, & \text{если } *f^{\lambda\sigma}f_{\lambda\sigma} \neq 0; \\ \text{произвольно,} & \text{если } *f^{\lambda\sigma}f_{\lambda\sigma} = 0. \end{cases}$$

Итак, выполнение условий  $*f^{\lambda\sigma}f_{\lambda\sigma} \neq 0$  и  $\partial_{[\tau}f_{\mu\nu]} = 0$  приводит к уравнениям Максвелла

$$\partial_{\mu}f^{\mu\nu} = 0, \quad (8.10)$$

а также, в качестве следствия (8.7) и (8.10), к уравнениям

$$\square f^{\mu\nu} = 0. \quad (8.11)$$

Заметим, что уравнения (8.11) как следствие тождеств Нетер  $\partial_{\mu}(\delta L/\delta f_{\mu\nu}) = 0$  можно получить и при отличном от (8.4) законе преобразования  $f_{\mu\nu}$ , а именно при

$$\delta f_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\xi_{\nu} - \partial_{\nu}\xi_{\mu}. \quad (8.12)$$

Такой вид преобразований  $f_{\mu\nu}$  был использован в работе [21], где вводились гипотетические частицы нотофы (фотоны «наоборот») как кванты антисимметричного тензорного поля второго ранга.

**Калибровочное поле симметричного тензора второго ранга.** Если в  $V_4$  заданы поле симметричного невырожденного тензора второго ранга  $h_{\mu\nu}$  и автоморфизм  $V_4$ , индуцируемый непрерывными преобразованиями координат вида (8.2), то условия типа (5.3)—(5.5) определяют вид лагранжиана и уравнений поля, инвариантных относительно преобразований  $h_{\mu\nu}$  (8.3), порожденных автоморфизмом  $V_4$  [5]. Инвариантный лагранжиан, не содержащий производных от  $h_{\mu\nu}$ , имеет вид  $L = 1/\sqrt{-h}$ ;  $h = \det|h_{\mu\nu}|$ . Лагранжиан, зависящий от  $h_{\mu\nu}$ , его первых и вторых производных, сводится к

$$\hat{L} = \sqrt{-h} R, \quad (8.13)$$

где  $R$  — аналог скалярной кривизны риманова пространства (в том смысле, что он составлен из величин  $h_{\mu\nu}$  и их производных точно так же, как скалярная кривизна составляется из метрического тензора и его производных). Поднятия индексов здесь в обычном смысле не происходит, так как для свертывания индексов используется обратная матрица  $h^{\mu\nu}$ , удовлетворяющая условию  $h^{\mu\sigma}h_{\sigma\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}$ . Введение метрики для построения инвариантного лагранжиана не требуется. Условия инвариантности типа (5.3)—(5.5) автоматически приводят также к тому, что производные от  $h_{\mu\nu}$  входят в лагранжиан только через комбинации  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ , составленные, подобно символам Кристоффеля, из  $h^{\mu\nu}$  и производных от  $h_{\mu\nu}$ .

Варьирование лагранжиана (8.13) по  $h^{\mu\nu}$  приводит в качестве уравнений Эйлера к уравнениям Эйнштейна [5, 9]:

$$R_{\mu\nu} - 1/2 h_{\mu\nu} R = 0.$$

Использование понятия производных Ли на произвольных многообразиях делает очень прозрачным смысл полученных формул. В самом деле, вид инвариантного лагранжиана определяется только видом вариаций полевых переменных. Строение производной Ли зависит только от тензорной размерности функций и, следовательно, одинаково для всех симметричных тензоров второго ранга и для всех геометрий. Производные Ли порождаются всегда группой, причем бесконечной, описывающей отображение на себя произвольного многообразия. Эта группа внешне совпадает с общековариантными преобразованиями (или «локальной группой сдвигов») и поэтому приводит к тем же результатам, что и риманова геометрия, в смысле структуры дифференциальных инвариантов.

Тождества Нетер, соответствующие преобразованиям (8.3), имеют вид:  $1/2 (\partial \hat{L} / \partial h_{\mu\nu}) (\partial_{\tau} h_{\mu\nu} - \partial_{\nu} h_{\mu\tau} - \partial_{\mu} h_{\tau\nu}) \equiv \partial_{\nu} (\delta \hat{L} / \delta h_{\mu\nu}) h_{\mu\tau}$  или

$$\nabla_{\nu} (\delta \hat{L} / \delta h_{\mu\nu}) \equiv 0, \quad (8.14)$$

где  $\delta \hat{L} / \delta h_{\mu\nu} = \partial \hat{L} / \partial h_{\mu\nu} - \partial_{\tau} \partial \hat{L} / \partial (\partial_{\tau} h_{\mu\nu})$ ,  $\hat{L} = \sqrt{-h} L$ . Ковариантную производную здесь следует понимать формально в смысле коэффициентов связности, составленных из  $h_{\mu\nu}$  и его производных.

Выражение (8.14) представляет собой сильный закон сохранения, справедливый независимо от конкретного вида лагранжиана или уравнений Эйлера. В частности, из него следует известный ковариантный закон сохранения (4.13)

$$(R^{\mu\nu} - 1/2 h^{\mu\nu} R)_{;\nu} \equiv 0. \quad (8.15)$$

В общей теории относительности тождество (8.15) выводится обычно как следствие тождеств Бианки для тензора кривизны Римана. Здесь же оно является записью тождеств Нетер и справедливо для любого симметричного тензорного поля  $h_{\mu\nu}$ , например тензора упругих деформаций среды.

Пусть теперь  $\delta L/\delta h_{\mu\nu} = T^{\mu\nu}$ , где  $T^{\mu\nu}$  — симметричный тензор, описывающий источники поля. Тогда из (8.14) следует ковариантный закон сохранения для  $T^{\mu\nu}$ :  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ .

Таким образом, ковариантный, тождественно выполняющийся закон сохранения энергии в ОТО представляет собой сильный закон сохранения, вытекающий из тождеств Нетер для полевых уравнений и являющийся следствием инвариантности теории относительно бесконечной группы  $G_{\infty 4}$ .

Для того чтобы получить обычный закон сохранения (в смысле обычной дивергенции) в соответствии с общим правилом для всех калибровочных полей, нужно ввести псевдоток (в данном случае — псевдотензор  $t^{\mu\nu}$ ) самого поля. Суммарный тензор будет сохраняться в обычном смысле:  $\partial_\nu (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = 0$ . Однако такая процедура не приводит к правильным интегральным законам сохранения.

Тождества (8.14) позволяют определить строение дополнительных условий на уравнения поля. Например, если уравнения поля имеют вид  $\delta \hat{L}/\delta h_{\mu\nu} = m^2 (h_{\mu\nu} + q\delta_{\mu\nu}h_\rho^\rho)$ , то из (8.14) получим [4, 5]

$$m^2 \nabla_\nu (h_{\mu\nu} + q\delta_{\mu\nu}h_\rho^\rho) = 0. \quad (8.16)$$

Если  $h_{\mu\nu}$  отождествляется с метрическим тензором  $g_{\mu\nu}$ , все ковариантные производные приобретают обычный смысл. Для метрического тензора  $g_{\mu\nu}$  условия (8.16) можно упростить, выбирая локально геодезическую систему координат, что приводит к условиям Гильберта—Лоренца:

$$m^2 \partial_\nu (g_{\mu\nu} + q\delta_{\mu\nu}g_\rho^\rho) = 0. \quad (8.17)$$

Можно было бы идти обратным путем, т. е. постулировать дополнительные условия (8.17) и тождества, связывающие дополнительные условия с уравнениями поля в виде

$$\nabla_\nu (\delta \hat{L}/\delta h_{\mu\nu} - m^2 (h_{\mu\nu} + q\delta_{\mu\nu}h_\rho^\rho)) \equiv 0.$$

Тогда мы нашли бы, что преобразования  $h_{\mu\nu}$ , порождающие такие тождества, суть (8.3), а уравнения поля представляют собой уравнения Эйнштейна [9].

**Интегральные законы сохранения в ОТО.** Часто обсуждение вопроса о построении интегрального закона сохранения энергии в ОТО начинают с замечания о том, что дифференциальный закон сохранения энергии в пространстве Эйнштейна  $V_4$  имеет необычную структуру: нулю равняется не обычная, а ковариантная дивергенция тензора энергии—импульса. Чтобы «исправить» дифференциальный закон сохранения, вводят различные псевдотензоры энергии—импульса гравитационного поля, которые в сумме с тензором энергии—импульса материи приводят к обычному дифференциальному закону сохранения энергии. Но если речь идет не о плоском, а о римановом пространстве, при интегрировании такого дифференциального

закона сохранения возникает проблема неоднозначности. Неоднозначность появляется по двум причинам: 1) из-за нековариантности псевдотензоров и обычного закона сохранения  $\partial_\mu (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = 0$ ; 2) вследствие неоднозначности интеграла от симметричного тензора в римановом пространстве. В случае векторных сохраняющихся токов неоднозначности нет, так как ковариантная производная от вектора (точнее, от векторной плотности) совпадает с обычной, а интеграл от вектора по 3-мерной гиперповерхности  $\Sigma$  есть интеграл от скаляра и поэтому однозначен. Интегральные сохраняющиеся величины (энергия, масса, импульс) в ОТО зависят от выбора системы координат. Сам процесс интегрирования также зависит от этого выбора и способа сопоставления величин в разных точках  $V_4$ , т. е. от выбора коэффициентов связности. От этой неоднозначности можно избавиться, но тогда придется пересмотреть набор интегральных характеристик, который можно получить из дифференциального закона сохранения тензора энергии — импульса в ОТО.

Дело в том, что интегрирование в римановом пространстве однозначно определено только для скаляров. Поскольку элемент объема представляет собой полностью антисимметричное произведение дифференциалов координат, скаляр под знаком интеграла можно получить только при свертывании элемента объема с антисимметричными тензорами. Интегрирование симметричных тензоров ранга  $n \geq 2$ , таким образом, остается неопределенным. Один из возможных путей однозначного интегрирования симметричных тензоров — интегрирование с вектором.

Рассмотрим формулу Грина в римановом пространстве:

$$\int_V J^m_m d^4 v = \oint_\Sigma J^m \varepsilon(N) N_m d^3 v, \quad (8.18)$$

где  $N_m$  — вектор нормали;  $\varepsilon(N)$  — индикатор вектора  $N_m$ ;  $d^4 v$ ,  $d^3 v$  — инвариантные элементы объема. Для симметричного тензора второго ранга  $T^{ik}$  формула, аналогичная формуле (8.18), может быть получена при помощи дополнительного вектора

$$\int (T^{ik} \lambda_k)_i d^4 v = \int T^i_k \lambda_k d^4 v + \int T^{ik} \lambda_{i;k} d^4 v. \quad (8.19)$$

Из формулы (8.19) видно, что интегральный закон сохранения для симметричного тензора имеет смысл только вдоль определенных направлений, а именно вдоль траекторий векторного поля  $\lambda_k$ . Если риманово пространство не допускает существования какого-либо векторного поля (что в общем случае возможно), то нельзя найти и интегральные законы сохранения в этом пространстве. Правда, для псевдориманова пространства, имеющего метрику с сигнатурой Минковского, это ограничение несущественно, так как условие существования такой метрики совпадает с условием существования на многообразии непрерывного поля направлений. Таким образом, в пространствах ОТО всегда существует некоторое векторное поле и, следова-

тельно, всегда можно построить интегральные сохраняющиеся величины (хотя бы одну). При этом свойства сохраняющейся интегральной величины определяются характером векторного поля  $\lambda_k$ . Поэтому интегральные сохраняющиеся величины, даже если они получены интегрированием дифференциального закона сохранения тензора энергии — импульса, могут не образовывать вектора энергии — импульса, а иметь совсем другой смысл. Понятие 4-мерного импульса (вектора энергии — импульса) можно ввести лишь в специальном случае, когда имеется четыре коммутирующих между собой векторных поля, компоненты которых приводятся к виду  $\lambda_k = \delta_n^k$ .

В качестве примера рассмотрим скалярные частицы в пространстве с метрикой де Ситтера. Для скалярного поля все сохраняющиеся токи имеют вид [см. формулу (4.8)]  $J_a^\mu = T_{\nu}^{\mu} \xi_a^\nu$ , где  $\xi_a^\nu$  определяется преобразованиями координат:  $\delta x^\mu = \xi_a^\mu \varepsilon^a$ . Пусть  $\lambda_k$  определяет группу движений пространства—времени, т. е. является одним из векторов Киллинга:  $\lambda_k = \xi_{a k}$ , причем  $\xi_{a(k; i)} = 0$ . Тогда соотношение (8.19) принимает вид, напоминающий формулу (8.18):

$$\int T_{;i}^{ik} \xi_h^i d^4 v = \oint T^{ik} \xi_h^i \varepsilon(N) N_i d^3 v. \quad (8.20)$$

В частном случае плоского пространства  $\xi_a^k$  имеет вид:

1) для сдвигов  $\xi_{(i)}^k = \delta_i^k$ ; 2) для вращений  $\xi_{in}^k = L_i^k x^n$ , где  $L_i^k = \delta_n^k g_{il} - \delta_l^k g_{ni}$  — матрица лоренцевых вращений. Из формулы (8.20) в первом случае получаем

$$\int T_{;i}^{i(k)} d^4 v = \oint T^{i(k)} \varepsilon(N) N_i d^3 v. \quad (8.21)$$

Если выполняется ковариантный закон сохранения  $T_{;i}^{i(k)} = 0$ , то  $\oint T^{i(k)} \varepsilon(N) N_i d^3 v = 0$ . Отсюда обычно при интегрировании по бесконечно удаленным поверхностям, где  $T^{ik}$  обращается в нуль, получают интегральный закон сохранения 4-мерного импульса  $P^i$ :

$$P^{(i)} = \int T^{(i)0} \varepsilon(N) N_0 d^3 v. \quad (8.22)$$

Заметим, что векторный индекс у  $P^{(i)}$  на самом деле является групповым значком. Им нумеровались векторы Киллинга, соответствующие сдвигам. Поэтому он поставлен в скобки.

В случае вращений плоского пространства формула (8.20) дает

$$\begin{aligned} \int T_{(pq)}^{ik} L_{kn} x^n d^4 v &= \int (T^{ik} L_{kn} x^n)_{;i} d^4 v - \int T^{ik} L_{ki} d^4 v = \\ &= \oint T^{ik} L_{kn} x^n \varepsilon(N) N_i d^3 v. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Если тензор  $T^{ik}$  симметричен, отсюда получим закон сохранения момента системы  $M_{(pq)} = \int M_{(pq)}^{(i)} \varepsilon(N) N_i d^3 v$ :

$$\int_{(pq)} M_{(pq)}^i d^4 v = \oint_{(pq)} M^i \varepsilon(N) N_i d^3 v, \quad (8.24)$$

где

$$M_{(pq)}^i = T_p^i x_q - T_q^i x_p. \quad (8.25)$$

В пространстве постоянной кривизны (пространстве де Ситтера) в стереографических координатах элемент длины имеет вид  $-ds^2 = \varphi^2 dx^i{}^2$ . Здесь  $\varphi = [1 + (r^2 - x_0^2)/4R^2]^{-1}$ , где  $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ . Группа де Ситтера изоморфна группе вращений  $O(5)$ . Ее генераторы можно представить в виде

$$\Pi_l = \varphi^{-1} P_l + (x_h/2R^2) L_{hl}; \quad L_{lh} = x_l P_h - x_h P_l, \quad (8.26)$$

где  $P_h = -i\partial/\partial x^h$ . Таким образом, только в пределе плоского пространства ( $R \rightarrow \infty$ ) оператор 4-мерного импульса  $\Pi_l$  приобретает смысл оператора сдвига по координатам. В искривленном пространстве «импульс» всегда смешан с «моментом». Чтобы этого избежать, нужно было бы выбрать в группе движений четыре коммутирующих между собой оператора и назвать их операторами 4-мерного импульса. Однако это невозможно, так как группа де Ситтера проста и имеет ранг 2. В результате 4-мерный импульс и полный момент системы становятся компонентами 5-мерного полного момента системы.

Выпишем интегральные сохраняющиеся величины, предполагая, как обычно, что на пространственной бесконечности  $T^{ik} = 0$ . Для компонент 4-мерного момента получим обычное выражение:

$$M_{lm} = \int M_{(lm)}^0 \varepsilon(N) N_0 d^3 v = \int \varphi^4 M_{(lm)}^0 d^3 x = \int (M_{0(lm)}/\sqrt{g_{00}}) \varphi^3 d^3 x, \quad (8.27)$$

где  $M_{(lm)}^0$  определяется формулой (8.25), но  $x$  — уже не декартовы, а стереографические координаты.

Обобщенные сдвиги  $\Pi_l$  дают четыре вектора Киллинга, которые определяют сохраняющийся (при тех же условиях на пространственной бесконечности) обобщенный 4-мерный импульс с компонентами:

$$\begin{aligned} P^{(0)} &= \int \sqrt{-g} T_k^0 \xi_0^k d^3 x = \int \varphi^3 T_0^0 d^3 x - \int (r^2/2R^2) \varphi^4 T_0^0 d^3 x + \\ &+ \int \varphi^4 (x_0 x_\alpha/2R^2) T_\alpha^0 d^3 x = \int \varphi^3 T_0^0 d^3 x - \\ &- 1/2 \int (x_\alpha M_{0(0\alpha)}/\sqrt{g_{00}} R^2) \varphi^3 d^3 x, \quad \alpha = 1, 2, 3; \end{aligned} \quad (8.28)$$

$$\begin{aligned} P^{(\alpha)} &= \int \sqrt{-g} T_k^\alpha \xi_\alpha^k d^3 x = \int \varphi^3 T_\alpha^0 d^3 x - 1/2 \int \varphi^4 T_\alpha^0 R^{-2} \sum_{k \neq \alpha} x_k^2 d^3 x + \\ &+ 1/2 \int \varphi^4 \sum_{k \neq \alpha} T_\alpha^0 (x_h x_\alpha/R^2) d^3 x = \int \varphi^3 (T_{0\alpha}/\sqrt{g_{00}}) d^3 x - \\ &- 1/2 \int (x^k M_{0(0k)}/\sqrt{g_{00}} R^2) \varphi^3 d^3 x. \end{aligned} \quad (8.29)$$

Эти выражения имеют смысл в том случае, если метрика пространства—времени считается жестко заданной и не связана с распределением материи. Если же рассматривается геометризованная теория (ОТО), тогда с необходимостью  $T^{ik}$  будет пропорционален метрическому тензору  $g^{ik}$  и вместо (8.27)—(8.29) получим

$$M_{(0\alpha)} = \int \sqrt{-g} \xi_{(0\alpha)}^0 d^3x = \int \varphi^4 x_\alpha d^3x \quad (8.30)$$

(другие компоненты «момента» равны нулю);

$$P^{(0)} = \int \varphi^3 d^3x - \int \frac{r^2}{2R^2} \varphi^4 d^3x = \int \frac{(1 - (r^2 + x_0^2))/4R^2}{1 + (r^2 - x_0^2)/4R^2} \varphi^3 d^3x;$$

$$P^{(\alpha)} = \frac{1}{2} \int \frac{x_0 x_\alpha}{R^2 [1 + (r^2 - x_0^2)/4R^2]} \varphi^3 d^3x. \quad (8.31)$$

Все индексы у интегральных величин  $P^{(i)}$ ,  $M_{(ik)}$  групповые, поэтому  $P^{(i)}$ ,  $M_{(ik)}$  не изменяются при преобразованиях системы координат. Но они зависят от выбора поверхности интегрирования и базиса  $\xi_a^\mu$  в алгебре Ли группы движений. Таким образом, интегральные сохраняющиеся величины, соответствующие пространственно-временным свойствам симметрии, образуют мультиплет, реализующий регулярное представление алгебры Ли группы движений  $V_4$ . В пространстве Минковского существование 4-мерного вектора энергии—импульса как самостоятельной интегральной характеристики системы связано с двумя «счастливыми обстоятельствами»: во-первых, группа движений пространства Минковского (группа Пуанкаре) имеет 4-мерную инвариантную подгруппу; во-вторых, само пространство Минковского может быть отождествлено с групповым пространством этой инвариантной подгруппы. Поэтому векторы  $P^i$  из алгебры Ли группы Пуанкаре становятся пространственно-временными. В общем же случае интегральные сохраняющиеся величины являются векторами расслоенного пространства над  $V_4$ , когда в качестве слоя выступает групповое пространство группы движений. Если структура группы движений искривленного пространства окажется такой, что само  $V_4$  можно будет отождествить с этой группой или ее инвариантной подгруппой, интегральные сохраняющиеся величины  $P$ ,  $M$ , как и в плоском пространстве, окажутся пространственно-временными векторами. Число их компонент, однако, будет меньше, чем в плоском пространстве, так как группа движений риманова пространства уже, чем псевдоевклидова.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адлер С., Дашен Р. Алгебра токов. Пер. с англ. М., «Мир», 1971; Альфаро В., де, Фубини С., Фурлан Г., Росетти К. Токи в физике адронов. Пер. с англ. М., «Мир», 1976.
2. Нетер Э. В кн.: Вариационные принципы механики. М., Физматгиз, 1959.

3. Utiyama R. — Progr. Theor. Phys., 1956, v. 101, p. 1596.
4. Коноплева Н. П., Соколик Г. А. В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М., Атомиздат, 1966, с. 22.
5. Коноплева Н. П. В кн.: Гравитация и теория относительности. Вып. 4—5. Казань, КГУ, 1968, с. 67.
6. Ogiyevetsky V. I., Polubarinov I. V. — Ann. Phys., 1963, v. 25, p. 358; Nucl. Phys., 1966, v. 76, p. 677.
7. Glashow L., Gell-Mann M. — Ann. Phys., 1961, v. 15, p. 437.
8. Иосифьян А. Г., Коноплева Н. П. — Докл. АН СССР, 1971, т. 198, № 5, с. 1036.
9. Огиевецкий В. И., Полубаринов И. В. В кн.: Современные проблемы гравитации. Тбилиси, ТГУ, 1967, с. 430.
10. Коноплева Н. П. Тезисы докладов III Межвузовской научной конференции по проблемам геометрии. Казань, КГУ, 1967, с. 80.
11. Yano K. The theory of Lie derivatives and its applications. Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1957.
12. Коноплева Н. П. В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 3. М., Атомиздат, 1970, с. 103.
13. Коноплева Н. П. — Докл. АН СССР, 1970, т. 190, с. 1070.
14. Синг Дж. Л. Общая теория относительности. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
15. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М., Физматгиз, 1961.
16. O'Connell R. F., Tompkins D. B. — Nuovo cimento, 1965, v. 38, p. 1088; J. Math. Phys., 1965, v. 6, p. 1952.
17. Киббл Т. В кн.: Элементарные частицы и компенсирующие поля. Пер. с англ. М., «Мир», 1964.
18. Коноплева Н. П., Соколик Г. А. — Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 2, с. 310.
19. Коноплева Н. П. — Вест. МГУ, Сер. физ., 1965, № 3, с. 73.
20. Берестецкий В. Б. В кн.: Труды Первой школы физики ИТЭФ. М., Атомиздат, 1973, с. 3.
21. Огиевецкий В. И., Полубаринов И. В. — Ядерная физика, 1966, т. 4, с. 216.

## ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

### § 9. Калибровочные поля и единая геометрическая теория взаимодействий

Цель каждого геометрического подхода к взаимодействиям состоит обычно в отыскании такого пространства, в котором изучаемые поля стали бы стандартными геометрическими объектами. Это позволяет применить мощные и хорошо разработанные методы геометрии, алгебры и топологии для изучения свойств решений классических уравнений движения и поля, которые нередко бывают нелинейными. Найденное пространство часто рассматривается как формально-математическое конфигурационное пространство.

Более глубокий подход к геометризации взаимодействий связан с работами Пуанкаре [1] и Эйнштейна [2], где свойства пространства—времени определялись через свойства приборов и процедур измерения (см. гл. I). Развивая эти идеи, можно показать, что геометризация какого-либо взаимодействия означает переход к таким системам отсчета (или приборам), которые движутся в соответствующем поле бессильным образом. Назовем такие системы отсчета инерциальными относительно данного взаимодействия. Если в такой системе отсчета можно указать способ измерения координат изучаемых объектов, не изменяющий состояния инерциального движения системы отсчета, то оказывается возможным построить пространство отсчета, связанное с данной системой отсчета.

Множество построенных таким образом пространств отсчета, вообще говоря, не образует какого-либо единого пространства—времени. Это проявляется в том, что в одной из инерциальных систем отсчета другие инерциальные системы отсчета могут выглядеть как движущиеся неинерциально. Для того чтобы учесть и описать такую возможность, в геометрических теориях предполагается, что существует некое единое пространство—время, в котором траектории всех инерциальных систем отсчета являются геодезическими. Тогда изменение относительного расстояния между инерциальными системами отсчета можно описывать уравнением отклонения геодезических. Отличие от нуля второй производной отклонения геодезических указывает на существование реального физического поля, в котором бессильным образом движутся инерциальные системы отсчета. Это физическое поле описывается в терминах кривизны или кручения пространства—времени, т. е. проявляется в неголоном-

ности его. Как известно, именно так обстоит дело в теории тяготения Эйнштейна.

Концепция Эйнштейна допускает обобщение на произвольные виды взаимодействий. При этом пространство — время обобщается так, что свойства локально-инерциальных систем отсчета описываются не только пространственно-временными, но и внутренними симметриями. Система геодезических 4-мерного риманова пространства заменяется более сложными бессилковыми конфигурациями — геодезическими в расслоенном пространстве над  $V_4$ . Общий принцип построения пространств, в которых данное взаимодействие или несколько взаимодействий исчезают, позволяет сделать содержание классической теории любого калибровочного поля чисто геометрическим и свести его к теории связностей главного расслоенного пространства над  $V_4$ . Это дает возможность с единой точки зрения рассматривать целый ряд на первый взгляд не связанных между собой теорий. В данном случае речь идет о поисках единой точки зрения на сильные, электромагнитные, слабые и гравитационные взаимодействия [3, 4].

Расслоенное пространство [5] проще всего можно представить себе как совокупность двух пространств, связанных специальным отображением. Именно: одно из двух пространств выбирается в качестве базы расслоенного пространства и в каждую точку базы проецируется экземпляр второго пространства (слой). Таким образом, расслоенное пространство можно рассматривать и как обычное  $n$ -мерное пространство (базу), точки которого заменены некоторыми  $m$ -мерными пространствами  $F_x$  со своей, вообще говоря, геометрией. Предполагается, что в каждом слое  $F_x$  действует группа  $G_r$ , не затрагивая базы. База представляет собой многообразие, инвариантное относительно действия группы  $G_r$ . Простым примером расслоенного пространства является многообразие траекторий какой-либо интранзитивной группы. В этом случае точки базы упорядочиваются по инвариантам интранзитивной группы. Слоем является траектория группы, на которой группа действует транзитивно\*. Риманово пространство ОТО тоже можно рассматривать как расслоенное, если считать слоем касательное пространство к  $V_4$ , т. е. использовать касательное расслоение. Благодаря этому гравитация не только как физическое поле в плоском пространстве, но и в геометрической трактовке становится в один ряд с другими полями.

Геометрический подход позволяет строить классическую теорию всех калибровочных полей по единому принципу, изменяя только  $G_r$  при переходе от одного вида взаимодействий к другому. Если каждому виду взаимодействий поставить в соответствие свою группу симметрии (локальную калибровочную группу), то можно постро-

---

\* *Транзитивность* означает, что преобразованиями, принадлежащими данной группе, любую точку пространства можно перевести в любую другую. *Интранзитивность* означает отсутствие такой возможности, если, например, группа оставляет некоторые точки неподвижными (центр вращения).

ить иерархию взаимодействий, в которой переход к более сильному взаимодействию сопровождается расширением группы симметрии, а ослабление взаимодействия связано с нарушением симметрии и сужением калибровочной группы. Однако такая классификация взаимодействий осуществима лишь до некоторой степени, поскольку, как показано в § 12, имеется зависимость между пространственно-временными и внутренними свойствами симметрий решений уравнений поля через структуру группы голономии, являющейся подгруппой калибровочной группы. Связь между типом взаимодействия и внутренней симметрией неоднозначна, поскольку, например, сферически-симметричным потенциалом могут обладать различные поля, в то время как всем сферически-симметричным решениям отвечает абелева группа голономии [6]. При геометрическом подходе решающую роль играет тензорная размерность полей. Именно она определяет трансформационные свойства полей и форму уравнений.

Частным случаем расслоенного пространства является многообразие поверхностей, вложенных в пространство высшей размерности. *Имбединг* (вложение) позволяет геометрически интерпретировать внутренние симметрии и массу калибровочного поля [7—10]. Если вектор-потенциалы  $A_\mu^a$  отождествить с недиагональными компонентами метрики  $g_{\alpha\mu}$   $(r+4)$ -мерного вмещающего пространства, получим обобщение единой теории гравитации и электромагнетизма Калузы — Клейна [11] на калибровочные поля. Такой подход впервые был предложен в 1965 г. де Виттом [12] и развивался далее Кернером [13], Траутманом [14] и Хо [15]. С помощью имбединга удобно изучать топологические свойства расслоенного пространства.

Более естественная геометрическая интерпретация калибровочных полей состоит в отождествлении вектор-потенциалов  $A_\mu^a$  с коэффициентами связности главного расслоенного пространства, базой которого является риманово пространство—время, а слоем — конечная калибровочная группа Ли  $G_r$  [16, 17]. В этом случае тензор напряженности калибровочного поля  $F_{\mu\nu}^a$  становится тензором кривизны расслоенного пространства. Уравнения движения частиц, взаимодействующих с калибровочным полем, приобретают смысл свободных уравнений в расслоенном пространстве. Такой подход воспроизводит все результаты и уравнения лагранжевой вариационной теории калибровочных полей, а также позволяет классифицировать решения этих уравнений по алгебраическим и топологическим свойствам. Единая теория всех видов взаимодействий, использующая геометрическую интерпретацию калибровочных полей как коэффициентов связности расслоенного пространства над  $V_4$ , была впервые предложена в 1965 г. Н. П. Коноплевой и Г. А. Соколиком [3]. Классификация решений уравнений Янга—Миллса при помощи понятия группы голономии расслоенного пространства была впервые построена Лосом в 1965 г. [6]. Алгебраическая классификация топологически нетривиальных асимптотически-плос-

ких решений уравнений Янга—Миллса в евклидовом пространстве  $V_4$  была впервые построена Атьей и Уордом [18] в 1977 г. и затем обобщена в 1978 г. Атьей, Хитчином, Ю. И. Маниным и Дринфельдом [19].

Для всех видов калибровочных полей как следствие универсальности подхода возникают уравнения одного и того же типа, известные в случае изотопической симметрии как уравнения Янга—Миллса. Эти уравнения напоминают уравнения Максвелла, но сильно нелинейны, так как учитывают «самодействие» полей. Иными словами каждое калибровочное поле может влиять не только на частицы и другие внешние по отношению к нему объекты, но и само на себя. Самодействие поля определяется структурой соответствующей ему калибровочной группы. В случае электромагнитного поля калибровочная группа однопараметрическая, и поэтому соответствующие уравнения совпадают с уравнениями Максвелла (самодействие отсутствует). Вследствие нелинейности уравнений калибровочных полей не все их классические решения могут быть истолкованы квантовомеханически как решения, описывающие элементарные частицы. Подобный переход, возможность которого предполагается принципом соответствия, на самом деле осуществим лишь для специальных конфигураций полей, обладающих плоской асимптотикой. Особый интерес представляют частицеподобные решения классических уравнений калибровочных полей (инстантоны, обладающие конечным действием; солитоны, обладающие конечной энергией, а также монополи, вихри и другие дефекты топологии многообразий). Инстантоны играют важную роль в квантовой теории поля, солитоны существенны в теориях со спонтанным нарушением симметрии, свойства дефектов в упорядоченных средах определяют параметры фазовых переходов.

Существующие геометрические методы описания взаимодействий естественно классифицируются в зависимости от способа построения геометрии пространства—времени и пространства внутренних переменных. Если соответствующие пространства однородны, то геометрический подход сводится к алгебраической классификации их групп симметрии и представлений этих групп. Часто для использования алгебраических методов приходится переходить к пространствам высших размерностей, где искривленное пространство — время или внутреннее пространство выглядит как поверхность. Риманов подход дает в качестве характеристик многообразия и, следовательно, взаимодействий следующие объекты: метрический тензор (не обязательно симметричный), коэффициенты связности (в общем случае несимметричные), тензор кривизны и его свертки. В теории Эйнштейна для описания свойств поля тяготения используется симметричный метрический тензор. Коэффициенты связности не являются независимыми, а определяются из условия равенства нулю ковариантной производной метрического тензора. Антисимметричная часть коэффициентов связности — тензор кручения — полагается равной нулю. Равенство нулю ковариантной производной метрического

тензора обеспечивает равнообъемность перенесения в голономной системе координат.

Неиспользованные в ОТО возможности римановой геометрии вскоре после создания теории Эйнштейна привлекли внимание теоретиков, искавших пути к единой картине мира. Прежде всего, появились геометрические теории электромагнитного поля, использующие кручение пространства—времени [2, 20]. Геометрический путь казался также наиболее естественным для создания единой теории классических полей, описывающей не только гравитацию и электромагнитное поле в отдельности, но и взаимодействие между ними [21]. Поиски геометрического описания электромагнитного поля велись в четырех основных направлениях: 1) обобщение параллельного переноса векторов в 4-мерном пространстве—времени; 2) обобщение метрики пространства—времени; 3) совместное решение уравнений Максвелла и Эйнштейна в римановом пространстве общей теории относительности как уже объединенной системы уравнений гравитационного и электромагнитного полей (геометродинамика); 4) обобщение самого пространства—времени, т. е. введение дополнительного, 5-го измерения.

В первом случае обобщались коэффициенты связности риманова пространства—времени  $V_4$ . Для этого кроме символов Кристоффеля  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ , соответствующих гравитационному полю (по Эйнштейну), вводились дополнительные коэффициенты связности  $\Gamma_\mu$ , которые отождествлялись с вектор-потенциалом электромагнитного поля  $A_\mu$ . Таким образом, пространство—время  $V_4$  наделялось геометрией Вейля. В пространстве Вейля параллельный перенос изменял длину векторов. Это дополнительное преобразование (калибровка масштаба) отождествлялось с калибровочными преобразованиями в электродинамике.

Геометрические единые теории с несимметричными коэффициентами связности (кручением) вновь стали активно предлагаться в 50-е—60-е годы. Одна из калибровочных теорий гравитации (Киббл, 1961 г.) также привела к несимметричным коэффициентам связности в  $V_4$ , но в отличие от более ранних работ Киббл отождествлял кручение с тензором спиновой плотности материи, а не с электромагнетизмом. Весьма интересным кажется подход, предложенный Схоутеном [22], который использует кручение для описания электромагнитных свойств сплошной среды. Хотя этот подход макроскопический, он позволяет описать не только свойства сплошной среды, но и изменение этих свойств с температурой. Далее этот подход развивался, например, в [23, 24], где показано, что кручение можно связать с плотностью дислокаций в среде. В работе [25] было показано, что кручение можно связать с плотностью источников электромагнитного поля. В [26] были получены инвариантные квадратичные соотношения между энергией и импульсом, а также импульсом и тензором натяжений электромагнитного поля в среде и показано, что соответствующие известные линейные соотношения, используемые также в теории поля, могут не иметь места в неоднородной изотропной диспергирующей среде.

Эйнштейном в 1945 г. [2, с. 614] была предложена единая теория гравитации и электромагнетизма, использующая несимметричный метрический тензор  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + g_{[\mu\nu]}$ . В этой теории электромагнитное поле описывается антисимметричной частью метрики, которая отождествляется с тензором напряженности электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}$ . Коэффициенты связности в такой теории также несимметричны и включают электромагнитное поле. Аппарат здесь получается очень громоздким и сложным из-за неоднозначности операций ковариантного дифференцирования и поднятия и опускания индексов. Однако несимметричная теория дает очень интересную зависимость между гравитационным и электромагнитным полями. Вследствие этой зависимости, например, нейтральная массивная вращающаяся звезда может с течением времени приобрести заряд, т. е. электромагнитное поле. Кроме того, существует ограничение сверху на электромагнитное поле, которым может обладать гравитирующая система [21]. Такого ограничения не дает никакая другая теория.

Геометродинамика Райнича—Уилера—Мизнера [27, 28] использует обычную риманову геометрию общей теории относительности, но обобщает ее уравнения. Система уравнений Эйнштейна — второго порядка по производным от  $g_{\mu\nu}$ . Если же в совместной системе уравнений Эйнштейна—Максвелла исключить электромагнитные переменные, то для  $g_{\mu\nu}$  получится система уравнений 4-го порядка. Она содержит достаточно информации для того, чтобы описывать чисто геометрически как гравитационное, так и электромагнитное поля. Электромагнитное поле оказывается в этом случае связанным со скоростью изменения римановой кривизны пространства—времени. Следы, оставляемые электромагнитным полем на метрике  $V_4$ , столь характерны, что по ним можно восстановить свойства породившего их поля. В геометродинамике возможны устойчивые чисто полевые образования — *геоны*. Для внешнего наблюдателя геоны ведут себя как тяготеющая масса, но на самом деле никакой сингулярности внутри них нет. Они соответствуют регулярным решениям уравнений Эйнштейна—Максвелла и «состоят» из замкнутых силовых линий поля. Электрический заряд в рамках геометродинамики также получает чисто геометрическую интерпретацию, если учесть топологические свойства  $V_4$ . Если пространство — время наделено неевклидовой топологией (обладает «ручками» и «дырками»), то поток силовых линий через каждую топологическую ручку ведет себя для внешнего наблюдателя, находящегося около одной горловины ручки, как классический электрический заряд. Однако величина этого заряда не имеет прямого отношения к заряду элементарных частиц, например электрона.

Геометродинамика Райнича — Уилера — Мизнера показывает, что классическая физика, если в нее включить теорию тяготения Эйнштейна и максвелловскую электродинамику, представляет собой естественным образом объединенную чисто геометрическую теорию. Иными словами, классическая физика — суть аспект геометрии.

В настоящее время решения уравнений геометродинамики активно исследуются, в частности, методом Ньюмена—Пенроуза [29]. Система уравнений Янга—Миллса и Эйнштейна, рассматриваемая совместно, также обладает интересными частицеподобными решениями [30]. Однако устойчивых образований типа геонов уравнения Янга—Миллса в плоском  $V_4$  не дают [31]. Обобщение геометродинамики на случай калибровочных полей рассматривалось также в [4, 32].

Гравитационное поле, рассматриваемое как калибровочное, может соответствовать нескольким группам симметрии: 1) общековариантной; 2) локальной группе Лоренца; 3) группе масштабных преобразований интервала. В первом случае его свойства определяются свойствами метрического тензора, что дает обычную теорию Эйнштейна; во втором случае — свойствами коэффициентов связности Риччи, что приводит к полевым уравнениям 4-го порядка. В третьем случае источником поля считается след тензора энергии—импульса, а переносчиками — скалярные частицы. Следовательно, подход с точки зрения калибровочных симметрий может приводить к более общим теориям гравитации, чем эйнштейновская. Обобщенная теория гравитации, в которой роль полевых переменных играют коэффициенты связности, по своей структуре подобна максвелловской электродинамике.

Установив связь между различными калибровочными полями и гравитацией, или структурой  $V_4$ , можно, во-первых, учесть влияние негравитационных взаимодействий на геометрию пространства—времени, и, во-вторых, интерпретировать внутренние симметрии и массы калибровочных полей как эффективное проявление искривленности пространства—времени на малых расстояниях. Первый аспект геометрически сводится к свойствам проекции пространства, в котором действует калибровочная группа, на касательное пространство к  $V_4$ . Второй аспект связан со свойствами вложимости риманова пространства—времени  $V_4$  в плоское пространство большей размерности. Дополнительные размерности, появляющиеся при этом, становятся ареной действия внутренних симметрий.

В настоящее время геометрические методы в теории поля и теории сплошной среды переживают расцвет и превращаются из экзотического занятия в рабочий инструмент теоретиков. В данной главе показано, что все существующие методы геометрического описания взаимодействий можно сформулировать в терминах геометрии расслоенных пространств.

## **§ 10. Внешние формы на многообразии и уравнения структуры пространства**

**Электродинамика Максвелла и внешние формы.** Для установления количественной формы физических законов обычно пользуются тензорным анализом. Однако тензорный анализ требует введения не-сингулярных координатных систем, в которых могут быть заданы

компоненты векторов и тензоров. В то же время, согласно определению дифференцируемого многообразия, одной несингулярной координатной системы недостаточно для того, чтобы покрыть многообразие, топологически не эквивалентное открытому множеству в евклидовом пространстве. Поэтому, например, в произвольном дифференцируемом многообразии невозможно описать такое поле, как электромагнитное, задав его компоненты  $F_{\mu\nu}$  в какой-либо одной конкретной системе координат. Если же компоненты использовать, то их следует задать по отношению к координатам нескольких координатных систем (или локальных карт), покрывающих в совокупности все многообразие.

В каждой точке окрестности существует значительная свобода выбора координатных систем. Таким образом, компоненты напряженности электромагнитного поля в различных координатных системах сами по себе не так существенны, как понятие, к которому можно прийти, абстрагируясь от них, — внутреннее значение  $F$  напряженности поля\*. Чтобы пояснить смысл этого термина, рассмотрим векторы на многообразии. Утверждение, что вектор\*\*  $v$  известен, означает, что в случае необходимости можно задать его компоненты в любой несингулярной системе координат. Связь между вектором  $v$  и его компонентами выражается формулой

$$v = v_m e^m. \quad (10.1)$$

Компоненты  $v_m$  зависят от выбора векторов  $e^m$  базиса системы координат. Простейший базис составляется из векторов градиента координатных функций  $dx^m$ :

$$v = v_m dx^m. \quad (10.2)$$

Ковариантные векторы являются линейными комбинациями дифференциалов координат и называются дифференциальными формами 1-го ранга, 1-формами или *пфаффовыми формами* [33].

Вместо того чтобы в качестве базисных векторов использовать дифференциалы координат, можно взять произвольный набор  $n$  линейно независимых векторов  $\omega^\alpha$  (здесь индекс означает номер вектора, а не его компоненту). По отношению к этому набору базисных векторов компоненты вектора  $v$  определяются из разложения

$$v = v_\alpha \omega^\alpha. \quad (10.3)$$

Компоненты вектора-градиента в таком базисе называются *пфаффовыми производными* по отношению к  $\omega^\alpha$ :  $\text{grad } f = f_\alpha \omega^\alpha$ . Иногда набор  $n$  векторов  $\omega^\alpha$  называют неголономным базисом, в отличие от голономного базиса, составленного из первых дифференциалов координат.

\* Внутреннее значение возникает при переходе к бескоординатной записи полей на многообразии через  $p$ -формы. Оно не зависит от выбора системы координат.

\*\* Точнее, ковариантный вектор.

Для описания электромагнитного поля необходимо использовать формы более высокого ранга, или 2-формы. Простейшую 2-форму  $\alpha$  можно представить в виде внешнего произведения двух 1-форм ( $\mathbf{u} = u_\alpha \omega^\alpha$  и  $\mathbf{v} = v_\alpha \omega^\alpha$ ):

$$\alpha = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 1/2 (u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha) \omega^\alpha \wedge \omega^\beta = 1/2 \alpha_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta. \quad (10.4)$$

Операция внешнего произведения  $\wedge$  обобщает векторное произведение на случай умножения векторов и антисимметричных тензоров любого ранга таким образом, что после умножения снова получаются антисимметричные тензоры. Внешнее произведение  $\wedge$  определяется требованиями: 1) ассоциативности; 2) дистрибутивности, а для произведения двух векторов — также антикоммутативности, т. е.  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ . В частности,  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = 0$ .

Внешнее произведение  $p$  векторов или линейная комбинация этих векторов образует  $p$ -форму. Если каждый вектор выражен через  $\omega^\alpha$ ,  $p$ -форма может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \sum_{\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p} a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} \omega^{\alpha_1} \wedge \omega^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge \omega^{\alpha_p} = \\ &= (p!)^{-1} a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} \omega^{\alpha_1} \wedge \omega^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge \omega^{\alpha_p}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Тензорные компоненты представляют собой коэффициенты  $p$ -формы [в выражении (10.5) —  $a_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ ]. На многообразии  $p$ -формы, в отличие от тензорных коэффициентов, могут быть выбраны инвариантным образом. Инвариантным же образом можно определить дифференцирование  $p$ -форм (внешнее дифференцирование).

Оператор внешнего дифференцирования  $D$  в применении к скалярной функции (0-форме) дает вектор (1-форму). Для  $p$ -форм более высокого ранга (10.5) эта операция обобщается с помощью определения [33]:

$$(Da) = (p!)^{-1} da_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p}.$$

В тензорных компонентах

$$(Da)_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1}} = \sum (-1)^P \partial a_{\beta_2 \dots \beta_{p+1}} / \partial x^{\beta_1},$$

где  $P$  равно 0 или  $+1$ , в зависимости от того, какую подстановку индексов  $\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}$  образуют индексы  $\beta_1, \dots, \beta_{p+1}$  — четную или нечетную.

Операция  $D$ , или *внешняя производная*, представляет собой антисимметричное дифференцирование, обобщающее обычную операцию взятия ротора от вектора. Она линейна:  $D(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = D\mathbf{a}_1 + D\mathbf{a}_2$ . В применении к произведению, в котором первый сомножитель является  $p$ -формой, она дает

$$D(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (Da) \wedge \mathbf{b} + (-1)^P \mathbf{a} \wedge D\mathbf{b}.$$

Повторное применение внешнего дифференцирования дает нуль:

$$D(Da) = 0.$$

Уравнения Максвелла можно рассматривать как уравнения для коэффициентов  $F_{\mu\nu}$  и  $*F_{\mu\nu}$  (дуально-сопряженный тензор) двух 2-форм [28]:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu; \quad (10.6)$$

$$*\mathbf{f} = \frac{1}{2} *F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (10.7)$$

Внешняя производная от формы (10.6) имеет вид

$$D\mathbf{f} = \frac{1}{2} (\partial F_{\alpha\beta} / \partial x^\gamma) dx^\gamma \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta = \frac{1}{6} (\partial F_{\alpha\beta} / \partial x^\gamma + \partial F_{\beta\gamma} / \partial x^\alpha + \partial F_{\gamma\alpha} / \partial x^\beta) dx^\gamma \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta. \quad (10.8)$$

Согласно уравнениям Максвелла, коэффициенты 3-формы (10.8) обращаются в нуль:  $(\partial F_{\alpha\beta} / \partial x^\gamma + \partial F_{\beta\gamma} / \partial x^\alpha + \partial F_{\gamma\alpha} / \partial x^\beta) = 0$ . Отсюда следует, что

$$D\mathbf{f} = 0. \quad (10.9)$$

Уравнение (10.9) удовлетворяется тождественно, если  $\mathbf{f} = DA$ , т. е.

$$F_{\alpha\beta} = (\partial A_\beta / \partial x^\alpha) - (\partial A_\alpha / \partial x^\beta).$$

Оставшиеся уравнения Максвелла в отсутствие источников означают, что внешняя производная 2-формы (10.7) равна нулю:

$$D*\mathbf{f} = 0. \quad (10.10)$$

Уравнения (10.9) и (10.10) представляют собой бескоординатную запись уравнений Максвелла в произвольном многообразии при произвольном выборе координатных систем.

Интегрирование на произвольном многообразии не является вполне определенной и однозначной операцией, если оно применяется к произвольным тензорам. Интегрирование однозначно только тогда, когда  $p$ -форма интегрируется по  $p$ -мерному пространству. В этом случае оно может быть проведено так, что в результате получится скалярная, не зависящая от системы координат величина. Поэтому интегральные законы сохранения в электродинамике, имеющие инвариантный смысл, суть

$$\oint_{c^2} \mathbf{f} = 4\pi p \quad (p \text{ — магнитный заряд});$$

$$\oint_{c^2} *\mathbf{f} = 4\pi q \quad (q \text{ — электрический заряд});$$

$c^2$  — замкнутая 2-мерная поверхность.

Факт существования векторного потенциала означает отсутствие магнитного заряда:  $\int_{c^2} \mathbf{f} = \int_{c^2} DA = \int_{\partial c^2} \mathbf{A} = 0$ , так как  $\partial c^2 = 0$  ( $\partial c^2$  — граница  $c^2$ ).

Если многообразие метризовано, можно ввести операцию симметричного дифференцирования форм  $\delta$ , обобщающую операцию взятия дивергенции от вектора:

$$(\delta\omega)_{k_1 \dots k_{p-1}} = -\nabla^l \omega_{lk_1 \dots k_{p-1}}. \quad p \text{ — ранг } \omega.$$

С помощью инвариантных операторов  $D$  и  $\delta$  можно определить инвариантный волновой оператор  $\Delta = D\delta + \delta D$  [33]. Оператор  $\Delta$  является топологически и метрически самосопряженным оператором, т. е. равны друг другу следующие скалярные произведения:  $(\Delta\alpha, \beta) = (\alpha, \Delta\beta) = (\alpha, *\Delta^{*-1}\beta)$ , где операция  $*$  определяется как  $(*\omega)_{j_1 \dots j_{n-p}} = \delta_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} \omega^{i_1 \dots i_p}$ .

Индексы у коэффициентов  $\omega^{i_1 \dots i_p}$  подняты с помощью метрики  $g^{ik}$ ,  $\delta_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n}$  —  $n$ -мерный символ Кронекера.

Решения уравнений вида  $\Delta\omega + \mu = 0$ , где  $\mu$  — форма, в евклидовом пространстве всегда являются гармоническими формами.

Используя инвариантные операторы  $D$ ,  $\delta$  и  $\Delta$ , нетрудно показать, что свободные уравнения Максвелла не являются волновыми. Они становятся волновыми при выполнении дополнительных условий  $D\delta A = 0$ , частный случай которых — условия Лоренца  $\delta A = 0$ . Условия Лоренца — не единственные условия, выделяющие волновые решения. Например, если вектор-потенциал  $A_\mu$  совпадает с вектором Киллинга, т. е.  $\partial_\mu A_\nu = -\partial_\nu A_\mu$ , то условие  $\delta A = 0$  выполняется и приводит к волновым уравнениям для  $A_\mu$ . В общем случае волновые уравнения векторного поля имеют вид

$$\Delta A_\mu = (D\delta + \delta D) A_\mu = F_{\mu\nu} ;^\nu - (A_\nu ;^\nu) ;_\mu = -\nabla_\nu \nabla^\nu A_\mu - R_\mu^\nu A_\nu = 0.$$

Их можно получить из лагранжиана, если условия Лоренца явно учесть в лагранжиане. Здесь  $R_\mu^\nu$  — тензор Риччи,  $\nabla_\nu$  — ковариантная производная.

Для топологического лапласиана всегда можно построить функции Грина. Поэтому полезно обобщить топологический лапласиан на формы со значениями в некоторой алгебре Ли. Такое обобщение с помощью «удлинения» ковариантной производной было предложено и использовано для инвариантной формулировки гравитационных волн в [4, 34]. Операторы  $D$  и  $\delta$ , определенные через удлиненные ковариантные производные, обладают теми же свойствами, что и операторы де Рама, т. е.  $D^2 = \delta^2 = 0$ ,  $\Delta = D\delta + \delta D$ ,  $D\Delta = \Delta D$ ,  $\delta\Delta = \Delta\delta$ . Если топологический лапласиан де Рама в координатной записи в римановом пространстве имеет вид

$$(\Delta\omega)_{k_1 \dots k_p} = -\nabla^i \nabla_i \omega_{k_1 \dots k_p} + \sum_{\nu=1}^p (-1)^\nu (\nabla_{k_\nu} \nabla^i - \nabla^i \nabla_{k_\nu}) \omega_{i k_1 \dots \hat{k}_\nu \dots k_p},$$

то топологический лапласиан для форм со значениями в алгебре Ли определяется как

$$(\Delta\omega^a)_{k_1 \dots k_p} = -\tilde{\nabla}^i \tilde{\nabla}_i \omega_{k_1 \dots k_p}^a + \sum_{\nu=1}^p (-1)^\nu (\tilde{\nabla}_{k_\nu} \tilde{\nabla}^i - \tilde{\nabla}^i \tilde{\nabla}_{k_\nu}) \omega_{i k_1 \dots \hat{k}_\nu \dots k_p}^a,$$

где  $\hat{k}_v$  — пропущенный индекс;  $\tilde{V}_i$  — удлиненная ковариантная производная. Таким образом, в искривленном пространстве вид волнового оператора зависит от тензорной размерности полей. Даламбертиан сохраняет свой вид при переходе к неевклидовым пространствам только для скалярных функций в отсутствие конформных преобразований интервала. Конформные преобразования изменяют вид инвариантного волнового оператора и для скалярных полей.

**Метод внешних форм. Уравнения структуры и отображение многообразий.** Рассмотрим гладкое многообразие, покрытое координатными окрестностями. На нем в окрестности каждой точки зададим систему пфаффовых форм [35]:

$$\omega^i = X_j^i dx^j; \quad \omega^i = Y_j^i dy^j, \quad (10.11)$$

где  $dx^i, dy^j$  — дифференциалы координат в окрестности точек  $x$  и  $y$  соответственно. Назовем их главными формами. Пусть на пересечении окрестностей точек  $x$  и  $y$  соответствующие координаты связаны дифференцируемыми преобразованиями  $y^i = y^i(x)$ . Потребуем, чтобы на пересечении окрестностей точек  $x$  и  $y$  формы  $\omega^i_x$  и  $\omega^i_y$  совпадали (были инвариантными формами):

$$\omega^i_y = Y_j^i \frac{\partial y^j}{\partial x^k} = \omega^i_x = X_k^i dx^k.$$

Из этого требования получим закон преобразования для коэффициентов 1-форм:

$$X_k^i = (\partial y^j / \partial x^k) Y_j^i. \quad (10.12)$$

Закон преобразования (10.12) обеспечивает инвариантность форм  $\omega^i$  на пересечении различных координатных окрестностей. Переходя от одной точки к другой, можно задать  $\omega^i$  на всем многообразии.

Система форм  $\omega^i$  [т. е. система уравнений (10.11)] вполне интегрируема, так как  $n$  переменных зависят от  $n$  дифференциалов. При этом требуется, чтобы матрица коэффициентов  $X_j^i$  была невырожденной.

Условия интегрируемости систем уравнений, как известно, находятся их внешним дифференцированием. Для системы уравнений (10.11) внешнее дифференцирование приводит к следующим соотношениям:

$$D\omega^i = dX_j^i \wedge dx^j = dX_j^i \wedge \tilde{X}_k^j \omega^k = \omega^k \wedge (-dX_j^i \tilde{X}_k^j), \quad (10.13)$$

где  $D\omega^i$  — внешний дифференциал от  $\omega^i$ ;  $\tilde{X}_k^j$  — матрица, обратная матрице  $X_k^j$  и удовлетворяющая условию  $dx^j = \tilde{X}_k^j \omega^k$ . К выражению, стоящему в скобках в уравнении (10.13), не меняя его, можно добавить член  $X_{kl}^i \omega^l$ , где матрица  $X_{kl}^i$  симметрична по нижним ин-

дексам (поскольку при этом добавляется нуль:  $X_{kl}^i \omega^l \wedge \omega^k = 0$ ). Тогда (10.13) принимают вид

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad (10.14)$$

где  $\omega_k^i = dX_j^i \tilde{X}_k^j + X_{kl}^i \omega^l$  — двухиндексные формы. Уравнения (10.14) называют *уравнениями структуры*.

Можно потребовать, чтобы  $\omega_k^i$ , так же как и  $\omega^i$ , были инвариантными формами и на пересечении окрестностей определялись однозначно. Тогда определится закон преобразования для коэффициентов  $X_{kl}^i$ .

Уравнения (10.13) представляют собой необходимые и достаточные условия для полной интегрируемости системы форм  $\omega_k^i$ , так как внешние дифференциалы этих форм разлагаются по ним самим. Продифференцируем (10.13) внешним образом. Поскольку внешний дифференциал от внешнего дифференциала тождественно равен нулю, получим

$$0 = \omega^k \wedge (\omega_k^l \wedge \omega_l^i - D\omega_k^i).$$

В силу обобщенной леммы Картана коэффициенты в скобках разлагаются по тем же формам  $\omega^i$ :

$$D\omega_k^l - \omega_k^l \wedge \omega_l^i = \omega_l^i \wedge \omega_{kl}^i, \quad (10.15)$$

где  $\omega_{kl}^i$  — некие новые 3-индексные формы. Снова можно потребовать, чтобы  $\omega_{kl}^i$  были инвариантны на пересечении, т. е. имели глобальный характер, и продифференцировать (10.15) внешним образом. Тогда получим

$$D\omega_{kl}^i = \omega_{kl}^m \wedge \omega_m^i + \omega_k^m \wedge \omega_{ml}^i + \omega_l^m \wedge \omega_{km}^i + \omega^m \wedge \omega_{klm}^i \quad (10.16)$$

Здесь появились 4-индексные формы  $\omega_{klm}^i$ .

Таким образом, получается бесконечная цепочка зацепляющихся уравнений структуры для бесконечной последовательности форм  $\omega^i$ ,  $\omega_k^i$ ,  $\omega_{kl}^i$ ,  $\omega_{klm}^i$ , задаваемых глобально на всем многообразии. Эта цепочка уравнений определяет структуру многообразия. Цепочка обрывается, если начиная с некоторого количества индексов формы высшего порядка выражаются через формы низших порядков.

Обычная дифференциальная геометрия соответствует на языке внешних форм и уравнений структуры простейшему случаю, когда уже 2-индексные формы  $\omega_k^i$  становятся линейными комбинациями 1-индексных главных форм  $\omega^i$ :

$$\omega_k^i = \Gamma_{kl}^i \omega^l. \quad (10.17)$$

Коэффициенты разложения (10.17) называют тогда *коэффициентами связности*, а формы  $\omega_k^i$  — *формами связности*;  $\Gamma_{kl}^i$ , вообще говоря, несимметричны и не связаны с метрикой. Цепочка уравнений структуры заменяется в этом случае двумя уравнениями, выведенными

Картаном и названными им *уравнениями структуры пространства* [36]:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i + S_{kl}^i \omega^l \wedge \omega^k; \quad (10.18)$$

$$D\omega_k^i = \omega_k^l \wedge \omega_l^i + R_{klm}^i \omega^m \wedge \omega^l, \quad (10.19)$$

где  $S_{kl}^i$  — тензор кручения;  $R_{klm}^i$  — тензор кривизны. Формы  $\omega^i$  по Картану определяют смещение начала координат  $dM = \omega^i e_i$ , а формы  $\omega_k^i$  — изменение базисных векторов (репера) при переходе от одной точки многообразия к другой:  $de_i = \omega_k^i e_k$ . Для ортогонального базиса в  $V_4$  формы  $\omega_k^i$  определяют лоренцевы повороты реперов. В общем случае формы  $\omega^i$  соответствуют пространству первых дифференциалов,  $\omega^i$  и  $\omega_j^i$  — пространству вторых дифференциалов и т. д.

Смысл уравнений структуры становится ясным, если в качестве многообразия рассматривать какую-либо классическую группу Ли. На ней введем  $n$  линейно независимых пфаффовых форм  $\Omega^\alpha = \Omega^\alpha(u, du) = a_\beta^\alpha(u) du^\beta$ . Пусть преобразования из группы  $v^\alpha = \varphi^\alpha(a, u)$  оставляют  $\Omega^\alpha$  инвариантными, т. е.  $\Omega^\alpha[\varphi_\alpha(a, u), d_u \varphi(a, u)] = \Omega^\alpha(u, du)$ . Тогда вместо  $\omega^i$  появятся 2-индексные формы  $\Omega_\beta^\alpha = f_{\beta\gamma}^\alpha \Omega^\gamma$ , где  $f_{\beta\gamma}^\alpha$  — структурные константы группы, одновременно играющие роль коэффициентов связности на группе. Уравнения структуры (10.14) примут вид уравнений структуры группы:

$$D\Omega^\alpha = 1/2 f_{\beta\gamma}^\alpha \Omega^\beta \wedge \Omega^\gamma. \quad (10.20)$$

Дифференцируя (10.20) внешним образом, получим соотношение для структурных констант группы — тождество Бианки.

Если рассматривается  $r$ -мерное пространство представления конечной группы Ли, структурные уравнения приводят к уравнениям для генераторов этого представления. Зададим структурные формы представления:  $\Delta X^J = dx^J - \xi_\alpha^J(x) \Omega^\alpha$ . Первые интегралы этих уравнений  $\tilde{x}^J = f^J(a, x)$  выберем так, чтобы при  $a = 1$   $\tilde{x}^J = x^J$ . Тогда при  $d\tilde{x}^J = 0$  получим  $dx^J = \xi_\alpha^J(x) \Omega^\alpha$ . Внешнее дифференцирование этой вполне интегрируемой системы дает дифференциальные уравнения Ли:

$$(\partial \xi_\alpha^J / \partial x^K) \xi_{\beta J}^K = \xi_\beta^J f_{\alpha\beta}^K, \quad J, K = 1, 2, \dots, r.$$

В общем случае в каждой фиксированной точке многообразия (точка фиксируется условием  $\omega^i = 0$ ) уравнения структуры для каждой системы форм принимают вид, аналогичный (10.20). Например, (10.15) переходит в  $D\omega_k^i = \omega_k^l \wedge \omega_l^i$ , где  $\omega_k^i = dX_k^i \tilde{X}_i^i$ . Иными словами, в каждой точке многообразия имеется система форм, таких, что их внешние дифференциалы выражаются через них самих, причем коэффициенты разложения постоянны. Это такая же картина, как в теории групп Ли. Тем самым уравнения структуры при-

водят к возникновению в каждой точке многообразия пространства некоторой линейной группы Ли, для которой  $\omega^i, \omega_j^i, \omega_{jk}^i$  и т. д. являются структурными формами. Например,  $\omega^i, \omega_j^i$  соответствуют второй дифференциальной группе Ли. Размерность пространства структурных форм  $\omega^i, \omega_j^i, \omega_{jk}^i : n + n^2 + n^2(n+1)/2$ . Иными словами, над каждой точкой многообразия возникает новое пространство (слой) с действующей в нем структурной группой. Многообразие расслаивается, становится расслоенным многообразием. Слои определяются над каждой точкой окрестности  $x$  и над каждой точкой окрестности  $y$ . Над каждой точкой пересечения окрестностей возникают два слоя, «смещенные» друг относительно друга определенным образом (с помощью элемента группы). Чтобы однозначно определить слой над пересечением окрестностей, можно вместо инвариантных форм группы  $\Omega^\alpha$ , удовлетворяющих (10.20), перейти к формам  $\omega^\alpha$ , заданным над всем многообразием, в том числе и над пересечением окрестностей. Тогда уравнения структуры принимают вид:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i; \quad (10.21)$$

$$D\omega^\alpha = 1/2 f_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \omega^k \wedge \omega_k^\alpha, \quad (10.22)$$

где  $\omega_x^\alpha = \omega^\alpha$ ;  $\omega_k^\alpha = \omega_k^\alpha$ .

Инвариантные формы  $\Omega^\alpha$  связаны с произвольными формами  $\omega^\alpha$  соотношением  $\omega^\alpha = \Omega^\alpha + \Gamma_k^\alpha \omega^k$ , где  $\Gamma_k^\alpha$  — коэффициенты связности расслоенного пространства, задающие отображение слоев в двух бесконечно близких точках друг на друга. Если фиксируется точка, т. е.  $x^i = \text{const}$ ,  $\omega^i = 0$ , первая система уравнений удовлетворяется тождественно, а вторая переходит в структурные уравнения группы.

Структурные уравнения (10.21) и (10.22), если они просто постулируются, позволяют рассматривать расслоения с произвольной группой Ли в качестве структурной группы. Они называются *уравнениями расслоенного пространства*. Именно в произвольных расслоенных пространствах калибровочные поля становятся коэффициентами связности.

Отображение многообразий определяется через отображение соответствующих систем внешних форм следующим образом [35]. Пусть на первом многообразии задана система форм  $\Phi^I = U_K^I du^K$ , а на втором  $\theta^a = t_b^a dt^b$ , подчиняющихся уравнениям структуры:

$$D\theta^a = \theta^b \wedge \theta_b^a; \quad (10.23)$$

$$D\Phi^I = \Phi^K \wedge \Phi_K^I. \quad (10.24)$$

Зададим отображение  $u^I = u^I(t)$ . Тогда возникает связь между дифференциалами  $du^I = (du^I/\partial t^a) dt^a$ , которая приводит к соотно-

шениям  $\Phi^I = U_K^I (\partial u^k / \partial t^a) dt^a$ ;  $dt^a = \tilde{t}_b^a \theta^b$ , т. е.  $\Phi^I = U_K^I (\partial u^k / \partial t^a) \tilde{t}_b^a \theta^b$ . Таким образом, формы на первом многообразии линейно выражаются через формы на втором многообразии:

$$\Phi^I = \Lambda_a^I \theta^a. \quad (10.25)$$

Введенная система форм обладает свойством правильной продолжаемости, т. е. при внешнем дифференцировании получается разложение только по главным формам. Других коэффициентов нет. Поэтому можно применять обобщенную лемму Картана, согласно которой коэффициенты при главных формах должны разлагаться по ним самим. Действительно, продифференцируем (10.25):

$$D\Phi^J = d\Lambda_a^J \wedge \theta^a + \Lambda_a^J D\theta^a.$$

Подставим сюда вместо  $D\Phi^J, D\theta^a$  их выражения из (10.23), (10.24). Тогда

$$\Phi^K \wedge \Phi_K^J = d\Lambda_a^J \wedge \theta^a + \Lambda_a^J \theta^b \wedge \theta_b^a. \quad (10.26)$$

Все члены в (10.26) пропорциональны  $\Lambda_a^K \theta^a$ . Применим лемму Картана и получим уравнение, которому должны подчиняться коэффициенты  $\Lambda_a^J$  при отображении систем форм:

$$d\Lambda_a^J + \Lambda_a^K \Phi_K^J - \Lambda_b^J \theta_a^b = \Lambda_{ab}^J \theta^b, \quad (10.27)$$

где  $\Lambda_{ab}^J$  — новые коэффициенты.

Если один раз имеет место правильная продолжаемость, она имеет место все время. Дифференцируя (10.27) внешним образом, получим бесконечную цепочку зацепляющихся уравнений для коэффициентов отображения  $\Lambda_a^J, \Lambda_{ab}^J, \Lambda_{abc}^J$  и т. д. Обрывая эту цепочку уравнений, фиксируем отображение многообразий с точностью до бесконечно малых соответствующего порядка:  $\Lambda_a^J \sim \partial u^K / \partial t^a$ ,  $\Lambda_{ab}^J \sim \partial^2 u^K / \partial t^a \partial t^b$  и т. д.

### § 11. Калибровочные поля как коэффициенты связности главного расслоенного пространства над $V_4$

**Понятия связности и расслоенного пространства.** В теории связностей переход к современной глобальной точке зрения и замена линейных групп общей группой Ли привели к большим изменениям. Понятие связности возникло у Леви-Чивита как параллельное перенесение касательных векторов многообразия. У него связность определялась метрикой. Вейль обобщил понятие связности и показал, что метрика в определении связности несущественна. Так появилось понятие пространств аффинной связности. Дальнейшее обобщение произошло с появлением пространств и связности Кенига. Он ввел связность в векторных расслоениях и показал, что не

обязательно, чтобы размерности слоя и базы совпадали. Затем Картан ввел понятия проективной, конформной и других связностей. Эти связности, как показал Схоутен, локально можно моделировать в векторных расслоениях. В настоящее время понятие связности формулируется для самых общих расслоений, когда не обязательно, чтобы в слое действовала группа Ли, а связность была линейной. Нам понадобится понятие линейной связности в однородном расслоении, когда в слое действует произвольная группа Ли  $G_r$ .

Связность в однородном расслоении (вообще говоря, нелинейная) вводится как отображение множества путей в базе в множество диффеоморфизмов слоя на слой, удовлетворяющее определенным условиям [37, 38]. Иначе говоря, связность определяет отображение слоев друг на друга при перенесении их вдоль различных путей в базе.

Расслоенное пространство [5] представляет собой дифференцируемое  $c^\nu$ -многообразие  $E$ , на котором задано отношение эквивалентности  $R$  такое, что: а) пространство отношений  $B = E/R$ , или базисное пространство, — дифференцируемое многообразие  $n$  измерений; б) проекция  $p$ , т. е. каноническое отображение многообразия  $E$  на базу  $B$ , соответствующее определению  $B$  как пространства отношений, есть  $c^\nu$ -дифференцируемое отображение всюду ранга  $n$ . При этих условиях структура дифференцируемого расслоенного пространства на  $E$  определяется совокупностью следующих элементов:  $B$  — база;  $F$  — типовый слой;  $c^\nu$  — дифференцируемое многообразие;  $G_r$  — группа Ли,  $c^\nu$  — дифференцируемо действующая на  $F$  (группа автоморфизмов  $F$ );  $p$  — проекция  $E$  на базу  $B$ ;  $\Phi$  — семейство гомеоморфизмов топологического произведения  $U \times F$  на прообраз  $p^{-1}(U)$ , где  $U$  — открытое множество пространства  $B$ , причем выполняется ряд условий на  $\Phi$ . Если  $F$  представляет собой групповое пространство  $G_r$ ,  $E$  называют *главным расслоенным пространством*; если  $F$  — касательное пространство к базе, то говорят о *касательном расслоении*; когда  $F$  является пространством представления  $G_r$ ,  $E$  называют *присоединенным расслоенным пространством*.

При переходе от одной точки базы к другой происходит изоморфное отображение слоев, «присоединенных» в этих точках, друг на друга. Если это отображение тождественное, т. е. движение в базе не вызывает преобразования слоя, то геометрически это значит, что расслоенное пространство представляет собой прямую сумму двух пространств. Это тривиальный случай. Калибровочные группы и связанные с ними калибровочные поля приводят к нетривиальному примеру расслоенных пространств. Действительно, выберем в качестве базы пространство—время  $V_4$ , а в качестве слоя — групповое пространство некоторой полупростой группы Ли\*. При пере-

\* Если группа  $G_r$  не полупроста, то может не существовать связанного с ней риманова пространства, так как метрика на группе будет тогда вырожденной.

мещении точки в  $V_4$  слой, как говорилось, изоморфно преобразуется. В данном случае это преобразование принадлежит  $G_r$  и зависит от точки  $V_4$ . Эти два свойства характеризуют локальные калибровочные группы. Коэффициенты связности задают отображение слоев, отнесенных к бесконечно близким точкам базы. Такую же роль играют калибровочные поля, связывая пространства представлений калибровочной группы. Если слоем является пространство, в котором действует группа изотопических преобразований (изопространство), то связь между изопространствами в разных точках  $V_4$  осуществляется полем Янга—Миллса. Если слой совпадает с касательным пространством, то отображение слоев задается коэффициентами связности Риччи, отождествляемыми с гравитационным полем. Аналогично и для других калибровочных полей.

**Определение связности через векторные поля в расслоенном пространстве.** Рассмотрим пространство, касательное к расслоенному пространству. Локально оно разбивается на два подпространства, образующих прямую сумму: пространство, касательное к базе, и пространство, касательное к слою. Пусть в пространстве, касательном к базе, выбрано  $n$  линейно независимых векторов  $e_\mu$ , а в пространстве, касательном к слою, —  $r$  векторов  $e_a$ , которые одновременно являются касательными к одномерным подгруппам  $G_r$ . Вместе эти  $(n + r)$  векторов образуют базис пространства, касательного к расслоенному пространству (репер):  $\{e_1, \dots, e_{n+r}\}$ . Многообразие  $L_0(p)$  — пространство реперов — имеет размерность  $n(n + r)$ . Векторы, касательные к слою, называют *вертикальными векторами*. Если вдоль пути в базе задано отображение слоев, это значит, что эти слои «пронизаны» семейством кривых, инвариантных относительно действия группы. Компоненты векторного поля  $v$ , касательного к этим кривым, удовлетворяют уравнениям:

$$v^\mu e_\mu + v^a e_a = v, \quad \mu = 1, \dots, n; \quad a = 1, \dots, r; \quad (11.1)$$

$$dv^\mu + v^\nu \omega_\nu^\mu = v_1^\mu dt;$$

$$dv^a + v^\mu \omega_\mu^a + v^b f_{bc}^a \omega^c = v_1^a dt, \quad (11.2)$$

где  $f_{bc}^a$  — структурные константы  $G_r$ ;  $\omega^c$ ,  $\omega_\nu^\mu$ ,  $\omega_\mu^a$  — внешние дифференциальные формы.

Вдоль пути в базе полагаем  $\omega^\mu = v^\mu dt$ , где  $t$  — параметр. Вид коэффициентов при  $v^b$  в (11.2) есть следствие инвариантности поля  $v$  относительно действия группы и означает, что все «торчащие» из слоя векторы имеют одну и ту же проекцию в базе. Можно показать и обратное: если задано векторное поле уравнениями (11.1) и (11.2), то их интегральные кривые задают изоморфизм слоев друг на друга. Эти интегральные кривые называют *горизонтальными путями*. Для того чтобы определить перенос слоев вдоль произвольного пути в базе или, что то же самое, определить связность во всем расслоенном пространстве, а не только вдоль отдельных кривых, необхо-

дим задать  $n$  векторных полей, удовлетворяющих уравнениям типа (11.1) и (11.2):

$$\mathbf{v} = v^\mu \mathbf{e}_\mu + v^a \mathbf{e}_a, \quad \kappa = 1, \dots, n; \quad (11.3)$$

$$dv^\mu + v^\kappa \omega_\kappa^\mu = v_\lambda^\mu \omega^\lambda; \quad (11.4)$$

$$dv^a + v^\kappa \omega_\kappa^a + v^b f_{bc}^a \omega^c = v_\lambda^a \omega^\lambda. \quad (11.5)$$

Свернем соотношение (11.3) с величинами  $v_\lambda^\kappa$ , удовлетворяющими условию  $v_\lambda^\mu v^\lambda = \delta_\lambda^\mu$ , тогда получим

$$E_\lambda = v_\lambda^\kappa v^a \mathbf{e}_a = \mathbf{e}_\lambda + \Gamma_\lambda^a \mathbf{e}_a.$$

Векторы  $E_\lambda$  проецируются в  $n$  векторов в базе. Геометрический объект

$$\Gamma_\mu^a = v_\mu^\kappa v^\kappa{}^a \quad (11.6)$$

играет роль коэффициентов связности расслоенного пространства.

Из соотношения (11.6) следует, что горизонтальные и вертикальные компоненты векторного поля  $v^\mu$  и  $v^a$  взаимосвязаны:

$$v^a = \Gamma_\mu^a v^\mu. \quad (11.7)$$

Отсюда следует, что, зная коэффициенты связности  $\Gamma_\mu^a$ , можно по проекции векторного поля в базу ( $v^\mu$ ) определить проекцию его в слой ( $v^a$ ) и тем самым восстановить векторное поле полностью, т. е. «поднять» его в расслоенное пространство. Поэтому говорят, что задание уравнений (11.4), (11.5) означает задание  $n$  лифтов векторных полей, причем это эквивалентно заданию коэффициентов связности (5.6).

Задание  $n$  лифтов векторных полей позволяет определить связность вдоль любого пути в базе. Если отображение слоев осуществляется с помощью некоторой псевдогруппы, то компоненты  $v$  специализируются так, чтобы они определяли однопараметрические преобразования этой псевдогруппы.

Если можно отождествить векторные поля  $v^a$ ,  $v_\mu^\kappa$  с реперами, то из определения (11.7) получается соотношение  $v^b v^a = \Gamma_\lambda^a \Gamma_\mu^b v^\lambda v^\mu$ , что эквивалентно  $g^{ab} = g^{\lambda\mu} \Gamma_\lambda^a \Gamma_\mu^b$  или  $g_{ab} g^{\lambda\mu} \Gamma_\lambda^a \Gamma_\mu^b = r$ .

**Вектор-потенциалы калибровочных полей как коэффициенты связности расслоенного пространства.** Дифференцируя выражение для

$\Gamma_\mu^a$  (11.6) и используя уравнения структуры расслоенного пространства, а также уравнения (11.4), (11.5), нетрудно получить закон преобразования этой величины ( $\mu = 1, \dots, 4; a = 1, \dots, r$ ):

$$d\Gamma_\mu^a - \Gamma_\nu^a \omega_\mu^\nu + f_{bc}^a \Gamma_\mu^b \omega^c + \omega_\mu^a = \Gamma_{\mu\nu}^a \omega^\nu. \quad (11.8)$$

Если взять частные значения форм  $\omega^\nu = 0; \omega_\mu^a = -\partial_\mu \varepsilon^a; \omega^c = -\varepsilon^c; \omega_\mu^\nu = \partial \delta x^\nu / \partial x^\mu$ , то получим известный закон преобразования для вектор-потенциалов калибровочных полей  $A_\mu^a$ :

$$\delta A_\mu^a - A_\nu^a (\partial \delta x^\nu / \partial x^\mu) - f_{bc}^a A_\mu^b \varepsilon^c - \partial_\mu \varepsilon^a = 0.$$

Заметим, что здесь учитываются преобразования вектор-потенциала как по групповому индексу, так и по пространственно-временному.

Поскольку с точки зрения дифференциальной геометрии характер величины определяется ее законом преобразования, можно отождествить вектор-потенциалы калибровочного поля  $A_\mu^a$  с коэффициентами связности главного расслоенного пространства  $\Gamma_\mu^a$ , базой которого является  $V_4$ , а структурной группой — калибровочная группа  $G_r$  [4, 39]. Такое отождествление приводит к превращению уравнений движения частиц, взаимодействующих с калибровочным полем, в свободные уравнения. Покажем это.

Ковариантные производные в расслоенном пространстве для произвольных геометрических объектов строятся, исходя из их закона преобразования относительно  $G_r$  и произвольных непрерывных преобразований координат в базе. При этом используется понятие производной Ли. Приведем здесь алгоритм нахождения ковариантной производной, из которого станет ясно, что ковариантная производная в расслоенном пространстве совпадает с ковариантной производной по Янгу и Миллсу, включающей взаимодействие с калибровочным полем  $A_\mu^a$ .

Поле произвольного геометрического объекта в расслоенном пространстве задается уравнениями вида

$$dY^J + \Phi_a^J(Y) \omega^a = Y_\mu^J \omega^\mu, \quad (11.9)$$

где  $J$  — компоненты объекта;  $a = 1, \dots, r; \mu = 1, \dots, n$  (для  $V_4$   $n = 4$ );  $\Phi_a^J(Y)$  — произвольные функции  $Y$ . Если функции  $\Phi_a^J$  линейны по  $Y$ , то говорят, что задан линейный объект. Ковариантный дифференциал получается при замене в (11.9) произвольных форм  $\omega^a$  инвариантными формами:  $\tilde{\omega}^a = \omega^a - \Gamma_\mu^a \omega^\mu$ . Он имеет вид

$$\nabla Y^J = dY^J + \Phi_a^J(Y) \tilde{\omega}^a = (Y_\mu^J + \Gamma_\mu^a \Phi_a^J) \omega^\mu.$$

Ковариантная производная произвольного геометрического объекта представляет собой коэффициент при  $\omega^\mu$  и, следовательно, имеет вид

$$Y_{;\mu}^J = Y_\mu^J + \Gamma_\mu^a \Phi_a^J(Y). \quad (11.10)$$

В частности, для линейных представлений  $G_r$ , которые задаются соотношениями

$$\bar{\delta}\psi = I \varepsilon^a \psi - (\partial\psi/\partial x^\mu) dx^\mu$$

или

$$\bar{\delta}\psi - I \varepsilon^a \psi = -(\partial\psi/\partial x^\mu) dx^\mu,$$

из (11.9) и (11.10) получаем

$$\psi_{;\mu} = -(\partial\psi/\partial x^\mu) + I A_\mu^a \psi. \quad (11.11)$$

Здесь  $I$  — генератор представления  $G_r$ . Легко видеть, что выражение (11.11) совпадает с ковариантной производной Янга—Миллса. Таким образом, если взаимодействие с калибровочным полем вводится через замену обычных производных ковариантными в смысле Янга—Миллса (минимальное взаимодействие), то соответствующие уравнения (или лагранжианы) можно рассматривать как свободные, но определенные в расслоенном пространстве с объектом связности  $\Gamma_\mu^a = A_\mu^a = v^a v_\mu$ .

Тензор кривизны расслоенного пространства определяется из уравнений структуры (10.22) при замене в них произвольных форм  $\omega^a$  инвариантными формами  $\tilde{\omega}^a$ . В этом случае вместо (10.22) получим уравнения структуры

$$D\tilde{\omega}^a = 1/2 f_{bc}^a \tilde{\omega}^b \wedge \tilde{\omega}^c + R_{\mu\nu}^a \omega^\mu \wedge \omega^\nu, \quad (11.12)$$

где  $R_{\mu\nu}^a$  — тензор кривизны расслоенного пространства, выражаемый через коэффициенты связности следующим образом:

$$R_{\mu\nu}^a = \partial_{[\mu} \Gamma_{\nu]}^a - 1/2 f_{bc}^a \Gamma_{[\mu}^b \Gamma_{\nu]}^c. \quad (11.13)$$

Если в качестве слоя взять касательное пространство,  $\Gamma_\mu^a$  перейдут в коэффициенты Риччи (или в символы Кристоффеля), а  $R_{\mu\nu}^a$  превратится в обычный тензор кривизны.

Легко видеть, что  $R_{\mu\nu}^a$  точно так же выражается через  $\Gamma_\mu^a$ , как тензор напряженности калибровочного поля  $F_{\mu\nu}^a$  — через вектор-потенциал  $A_\mu^a$ :

$$F_{\mu\nu}^a = A_{[\nu, \mu]}^a - 1/2 f_{bc}^a A_{[\mu}^b A_{\nu]}^c. \quad (11.14)$$

Если  $\Gamma_\mu^a = A_\mu^a$ , то  $F_{\mu\nu}^a = R_{\mu\nu}^a$ . Таким образом, отождествление вектор-потенциалов калибровочных полей с коэффициентами связности расслоенного пространства приводит к отождествлению тен-

зора напряженности калибровочного поля с тензором кривизны этого пространства.

Вторая ковариантная производная линейного геометрического объекта (как и вторая ковариантная производная в смысле Янга—Миллса), будучи антисимметризована, выражается через тензор кривизны расслоенного пространства:

$$\psi^J_{;[\mu\nu]} = I^J_K R^a_{\mu\nu} \omega^K. \quad (11.15)$$

Итак, локализация калибровочных групп, т. е. введение над каждой точкой пространства—времени группы Ли  $G_r$  (или соответствующей алгебры) так, что отнесенные к разным точкам, эти группы изоморфны друг другу, означает переход к главному расслоенному пространству. Базой этого пространства является пространство—время  $V_4$ , слоем — группа  $G_r$ , рассматриваемая как многообразие. Локально, т. е. в окрестности каждой точки, расслоенное пространство представляет собой прямую сумму двух пространств  $G_r \times V_4$ , а касательное пространство — прямую сумму двух касательных пространств  $T_{V_4} \times A_r$  ( $T_{V_4}$  — касательное пространство к  $V_4$ ;  $A_r$  — алгебра Ли группы  $G_r$ ). Введение калибровочного поля, описываемого вектор-потенциалом  $A^a_\mu$ , означает введение связности расслоенного пространства. Если тензор напряженности калибровочного поля  $F^a_{\mu\nu} = 0$ , то введенная связность имеет нулевую кривизну. Минимальные взаимодействия с калибровочным полем, которые соответствуют замене обычных производных ковариантными в смысле Янга—Миллса, означают переход к ковариантному дифференцированию в расслоенном пространстве. При этом уравнения, включающие взаимодействие с  $A^a_\mu$ , остаются свободными.

Уравнения калибровочных полей с геометрической точки зрения означают, что рассматриваются связности на главном расслоенном пространстве, такие, что дивергенция соответствующих тензоров кривизны равна нулю  $R^{\mu\nu}_{a;\nu} = 0$  или заданной величине  $R^{\mu\nu}_{a;\nu} = J^{\mu}_a$ . В случае касательного расслоения над  $V_n$  при  $n \leq 3$  эти уравнения тождественно сводятся к условию постоянства скалярной кривизны  $R = \text{const}$ . При  $n > 3$  условие  $R = \text{const}$  является следствием равенства нулю дивергенции тензора кривизны.

Калибровочные поля можно классифицировать по алгебраическим свойствам тензора поля. Электромагнитные поля разбиваются при этом на два типа: волновые и неволновые [40]. Гравитационные поля бывают трех типов, причем волновые, неволновые и смешанного типа поля могут присутствовать в каждом из них [41]. Поля Янга—Миллса разбиваются на четыре типа. В каждый из типов II—IV могут попасть как волновые, так и неволновые поля. Тип I является неволновым [42]. Учет дифференциальных свойств тензора поля позволяет сделать алгебраическую классификацию более детальной (учесть свойства групп голономии расслоенного пространства).

## § 12. Классификация решений классических уравнений калибровочных полей

**Введение.** Существует три вида классификаций решений классических уравнений калибровочных полей, которые стали возможны благодаря геометрическому подходу. Первая из них использует тот математический факт, что компоненты тензора кривизны произвольного многообразия (в данном случае расслоенного пространства) вместе со своими ковариантными производными образуют алгебру группы голономии этого многообразия. С такой точки зрения уравнения калибровочного поля приводят к ограничениям на группу голономии и структуру многообразия. При наличии дополнительных калибровочных условий появляется зависимость между пространственно-временными и внутренними свойствами симметрии калибровочных полей. Она позволяет получить некоторые физически оправданные критерии отбора решений. Эта классификация впервые была предложена Лосом в 1965 г. [6] и развивалась в работах его школы.

Другая классификация представляет собой классификацию калибровочных полей по алгебраическим свойствам тензора поля и строится аналогично классификации Петрова полей тяготения. Эта классификация является локальной. Она позволяет связать инварианты, построенные из компонент тензора поля, и собственные векторы тензора поля со свойствами симметрии решений и возможными типами асимптотического поведения калибровочных полей (Егучи, 1976 г. [42]).

Третий вид классификации решений использует понятие групп гомотопии многообразия, т. е. групп деформаций замкнутых путей. Этот подход полезен при описании процессов в макроскопических упорядоченных средах, в частности в теории фазовых переходов. Возможность изучения свойств сплошной среды с помощью групп гомотопии и других топологических характеристик объясняется тем, что неоднородное пространство можно рассматривать как модель сплошной среды, а дефекты структуры сплошной среды можно описывать как нарушение связности многообразия (топологические дефекты). Они проявляют себя физически точно так же, как внешние источники калибровочных полей. Поэтому становится возможной аналогия между свойствами элементарных частиц и свойствами дефектов в упорядоченных средах, а также топологическая классификация частицеподобных решений уравнений калибровочных полей. Топологические классификации являются асимптотическими в том смысле, что они исследуют поведение калибровочных полей в тех областях, где тензор поля равен нулю, а вектор-потенциал становится связностью абсолютного параллелизма [18].

Ниже рассмотрены первая и третья классификации.

**Классификация калибровочных полей по группам голономии.**  
**Определения.** Группа голономии расслоенного пространства определяется следующим образом [5]. При заданной точке  $z$  в главном

расслоенном пространстве  $E$  группой голономии  $\mathcal{H}_z$  данной связности в точке  $z$  называется совокупность элементов  $g \in G$ , таких, что точки  $z$  и  $zg^{-1}$  могут быть соединены горизонтальным путем.

Более наглядно группа голономии получается следующим образом. Выберем вектор в пространстве, касательном к слою (т. е. в алгебре Ли), с началом в точке  $z$  фиксированного слоя и обнесем выбранный слой по замкнутому пути в базе. При переносе слоя начало вектора, касательного к слою (вертикального вектора), переносится по горизонтальному пути. В результате переноса слой оказывается преобразованным, а точка  $z$  исходного слоя переходит в  $z' = zg^{-1}$ , где  $g \in G$ .

Группа голономии представляет собой группу преобразований векторов пространства, касательного к слою (т. е. векторов алгебры Ли), полученную в результате параллельного переноса их по всевозможным замкнутым путям в базе, выходящим из данной точки  $x$ . Если рассматривать только пути, лежащие в заданной окрестности точки, то *группу голономии* называют *локальной*. Если перенос осуществляется только вдоль путей, стягиваемых в точку, то *группу голономии* называют *ограниченной*. Если группа голономии определена во всем пространстве и выбор путей не ограничен, она называется просто *группой голономии*. При перенесении векторного пространства группа голономии состоит из линейных преобразований векторов и называется *однородной*. Если переносится не векторное, а аффинное пространство, группа голономии *неоднородна*, так как может содержать сдвиги касательного пространства.

Структура группы голономии отражает свойства пространства в некоторой области, хотя сама она определяется в каждой точке этой области отдельно.

Всякий элемент ограниченной неоднородной группы голономии  $\rho_x(V_n)$ , где  $V_n$  — дифференцируемое многообразие, представляет собой произведение конечного числа элементов, получаемых из элементов локальных неоднородных групп голономии  $\rho_u^*$  ( $u \in V_n$ ) переносом вдоль путей, соединяющих точку  $u$  с точкой  $x$ . То же самое справедливо для ограниченной однородной группы голономии  $\sigma_x(V_n)$ .

Группы голономии в разных точках  $z$  являются сопряженными подгруппами  $G_r$ , причем если  $z$  и  $z'$  принадлежат базе, то  $\mathcal{H}_z = \mathcal{H}_{z'}$ , а если  $z$  и  $z'$  принадлежат одному слою и  $z' = z\gamma$ , то  $\mathcal{H}_{z'} = \gamma^{-1}\mathcal{H}_z\gamma$ , где  $\gamma \in G_r$ . Свойства группы голономии тесно связаны с топологическими свойствами базы, а именно с топологическим инвариантом базы — группой Пуанкаре. Группа Пуанкаре определяется числом классов замкнутых путей на многообразии, не переводимых друг в друга непрерывной деформацией (т. е. не гомотопных друг другу). Ограниченная однородная группа голономии  $\sigma_z$  является нормальным делителем  $\mathcal{H}_z$ . При этом существует отображение (гомоморфизм)  $f: \pi_x$  на  $\mathcal{H}_z/\sigma_z$ , где  $\pi_x$  — группа Пуанкаре базы в точке  $x = pz$ . Таким образом, меняя топологию  $V_i$ , т. е.  $\pi_x$ , можно дополнительно учесть дискретные симметрии элементарных частиц.

**Группа голономии, калибровочная группа и структура многообразия.** Как показал Э. Картан [36], в случае аффинной связности без кручения, заданной на групповом пространстве конечной группы Ли  $G_r$ , ограниченная группа голономии совпадает с производной подгруппой ее присоединенной группы. Иначе говоря, если известна  $G_r$ , ограниченная группа голономии строится следующим образом: нужно найти группу всех автоморфизмов  $G_r$  (присоединенную группу), состоящую из преобразований вида  $\gamma^{-1}G\gamma$ , где  $\gamma \in G$ , и затем найти производную подгруппу этой группы, содержащую все ее коммутаторы, т. е. элементы вида  $a \cdot b \cdot c \dots a^{-1} \cdot b^{-1} \cdot c^{-1}$ , где  $a, b, c$  принадлежат присоединенной группе и число их произвольно.

Производная подгруппа является нормальным делителем соответствующей группы. Поэтому для простой группы производная подгруппа совпадает с самой группой. Но в этом случае и присоединенная группа тоже совпадает с самой группой. Следовательно, простую калибровочную группу можно рассматривать не только как фундаментальную группу связанного с ней риманова пространства, но и как группу голономии этого пространства. Восстановление калибровочной группы по ограниченной группе голономии  $\mathcal{H}$  связано в общем случае с поисками нормализаторов этой группы.

Любая группа Ли может быть реализована в виде группы голономии пространства аффинной связности, но для римановых пространств (т. е. наделенных метрикой) это не так. Выбор группы голономии сильно ограничивает возможную структуру риманова пространства, а в некоторых случаях (когда группа голономии узкая или необычная, т. е. не совпадает с ортогональной группой в касательном пространстве) полностью ее определяет [43]. Необычными группами голономии риманова пространства могут быть следующие группы:  $U(n/2)$ ;  $SU(n/2)$ ;  $Sp(n/4)$ ,  $Sp(1) \cdot Sp(n/4)$ ;  $G_2(n=7)$ ;  $Spin_7(n=8)$ ;  $Spin_9(n=16)$ . Попытка связать калибровочные группы и внутренние симметрии с такими группами голономии привела бы к пространствам большей размерности, чем 4 (кроме разрешимой группы и ее подгрупп, для которых возможно  $n=4$ ).

В произвольном многообразии  $V_n$  группа голономии характеризует структуру параллельного переноса и степень отклонения геометрии  $V_n$  от евклидовой. Для аналитической связности нулевой кривизны ограниченная группа голономии сводится к тождественному преобразованию.

Если группа голономии уже группы  $G_r$ , действующей в слое, можно безболезненно редуцировать группу, действующую в слое, до группы голономии, поскольку все преобразования векторов, разнесенных по всему  $V_4$ , принадлежат группе голономии и не выходят за ее рамки. Геометрически суженность группы голономии по сравнению с максимально возможной группой  $GL(n)$  означает возможность зафиксировать часть реперов в слое, которые не преобразуются при параллельном переносе. Это происходит, например, из-за некоторой степени однородности или симметрии базы.

Структура многообразия определяется группой голономии неод-

нозначно. На одном и том же многообразии можно ввести разные связности, и они, вообще говоря, дадут разные группы голономии. Поэтому, зная только связность (или группу ее голономии), еще нельзя сказать, о каком многообразии идет речь. Могут быть разные многообразия с одинаковыми группами голономии. Простейший пример: на одной полости гиперболоида можно ввести евклидову связность. Тензор кривизны для такой связности равен нулю. В то же время для связности, индуцированной на 2-мерном гиперболоиде при вложении его в 3-мерное евклидово пространство, гиперболоид представляет собой пространство постоянной кривизны, т. е. тензор кривизны индуцированной связности отличен от нуля.

Группы голономии многообразий связаны также с их группами движений. Стационарная подгруппа группы движений одновременно является подгруппой группы голономии. Это легко видеть из следующих рассуждений.

Если в многообразии задано поле ковариантно-постоянного тензора (например, поле метрического тензора в римановом пространстве), это поле определяет в точке  $x$  многообразия тензор, инвариантный относительно группы голономии  $\mathcal{H}_x(V_n)$ , и наоборот, всякий тензор в точке  $x$ , инвариантный относительно группы голономии  $\mathcal{H}_x(V_n)$ , порождает при параллельном переносе в многообразии поле, ковариантная производная которого равна нулю. Таким образом, существование ковариантно-постоянного поля метрического тензора на многообразии приводит к тому, что группа голономии в каждой точке  $x_0$  такого многообразия совпадает с группой движения плоского пространства, наделенного той же метрикой  $g_{\mu\nu}(x_0)$ , или с одной из ее подгрупп. Отсюда следует, что для псевдориманова пространства  $V$ , и римановой связности (т. е. символов Кристоффеля) группой голономии может быть только группа Лоренца или ее подгруппа. Необычные группы голономии, о которых говорилось вначале, соответствуют необычным связностям.

Если рассматривать группы, описывающие внутренние симметрии элементарных частиц, как группы голономии псевдориманова пространства, а элементарные частицы — как их представления, получим концепцию неточечных частиц. Зависимость волновой функции частиц от конечной области войдет через структуру группы голономии, представлением которой они будут определяться.

Некоторые решения уравнений Янга—Миллса с точечным источником, не обладающие сферической симметрией. Положительная определенность энергии поля и фиксированная пространственно-временная симметрия решений как ограничения на структуру группы голономии. Понятие группы голономии расслоенного пространства удобно использовать для анализа классов решений классических уравнений калибровочных полей, поскольку решить эти уравнения на геометрическом языке означает найти связность главного расслоенного пространства над  $V_4$ . Такой анализ показывает, что физические требования типа положительной определенности энергии поля, условий Лоренца (т. е. ограничение на переносимый

полем спин), а также выбор определенной пространственно-временной симметрии решений представляют собой ограничения на возможную структуру соответствующей им группы голономии. Тем самым возникает зависимость между пространственно-временными и внутренними свойствами симметрии решений.

В римановом пространстве тензор кривизны и его ковариантные производные, а точнее, их свертки с произвольными векторами  $v^\lambda$ ;  $\omega^\mu$ ;  $u_1^{\nu_1}$ ;  $u_2^{\nu_2}$ ; ... в точке  $x$  вида

$$R_{\beta\lambda\mu}^\alpha v^\lambda \omega^\mu; \dots u^{\nu_k} \dots u_{\nu_1}^{\nu_1} \nabla_{\nu_k} \dots \nabla_{\nu_1} R_{\beta\lambda\mu}^\alpha v^\lambda \omega^\mu \quad (12.1)$$

определяют элементы алгебры Ли  $d\sigma_x^*$  локальной однородной группы голономии.

Аналогичным образом в расслоенном пространстве алгебра Ли локальной однородной группы голономии определяется тензором кривизны и его ковариантными производными (т. е. тензором напряженности калибровочного поля  $F_{\mu\nu}$  и его ковариантными производными). С этой точки зрения уравнения калибровочного поля представляют собой ограничения на ковариантные производные тензора кривизны. По ним можно определить алгебру Ли группы голономии, если известна пространственно-временная симметрия решений. Иначе говоря, если мы ищем решения уравнений Янга—Миллса, обладающие заданной симметрией в  $V_4$ , то мы ограничиваем калибровочную группу.

Например, для калибровочных полей с точечными источниками справедливы следующие теоремы [6, 44]: 1) сферически-симметричные аналитические решения для калибровочного поля точечного заряда имеют абелевы группы голономии; 2) для калибровочного поля с абелевой группой голономии уравнения Янга—Миллса и тождества Бианки редуцируются к уравнениям Максвелла. Поэтому все сферически-симметричные решения уравнений Янга—Миллса с точечным источником кулоновоподобны, вернее, могут быть выбором калибровки приведены к кулоновой форме. В частных случаях калибровочной симметрии  $O(3)$  и  $SU(3)$  это было показано Икедой и Миячи и Лосом [см. (2.26), (2.30)]. Эти кулоновоподобные решения соответствуют дальнедействующим силам, подобно электромагнитным и гравитационным полям. Для того чтобы получить калибровочное поле неэлектромагнитного типа, нужно найти решение с неабелевой группой голономии [6].

Рассмотрим пример такого решения с неполупростой группой голономии. Как вектор-потенциалы, так и компоненты тензора напряженности будем записывать в операторной форме  $\Gamma, F_{\mu\nu}$ , не конкретизируя вид матриц, по которым должно вестись разложение. Уравнения Янга—Миллса в операторной форме имеют вид

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu. \quad (12.2)$$

Пусть  $t, r, \theta, \varphi$  — сферические координаты в пространстве—времени  $V_4$ , которое для простоты считается плоским (пространство Мин-

ковского). Будем искать решения этих уравнений для точечного заряда, не являющиеся сферически-симметричными, в виде

$$\Gamma_t = [f(\theta)/r]A; \quad \Gamma_r = 0; \quad \Gamma_\theta = 0; \quad \Gamma_\varphi = h(\theta)B, \quad (12.3)$$

где  $f$  и  $h$  — вещественные функции, зависящие только от  $\theta$ ;  $A$  и  $B$  — постоянные матрицы.

Плотность тока  $J^\mu$  отлична от нуля только на мировой линии заряда  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} F_{tr} &= (f/r^2)A; \quad F_{t\theta} = -(f'/r)A; \\ F_{t\varphi} &= (fh/r)[AB]; \quad F_{\varphi r} = 0; \\ F_{\varphi\theta} &= -h'B; \quad F_{r\theta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.4)$$

Для плотности тока получим

$$\left. \begin{aligned} J^t &= (r^3)^{-1}(f''A + f'A \cos \theta - (fh^2/\sin^2 \theta)[B[AB]]); \\ J^r &= 0; \quad J^\theta = 0; \\ J^\varphi &= -(r^4 \sin^2 \theta)^{-1}(h''B - h'B \cos \theta) - f^2 h[A[AB]]. \end{aligned} \right\} \quad (12.5)$$

Уравнения (12.5) представляют собой систему нелинейных уравнений в частных производных для функций  $f(\theta)$  и  $h(\theta)$ . Потребуем, чтобы функции  $f$ ,  $f'$ ,  $fh/\sin \theta$ ,  $h'/\sin \theta$  были ограничены в интервале

$$0 < \theta < \pi. \quad (12.6)$$

Такие решения назовем *регулярными*. Тривиальные решения  $f(\theta) = 0$ ,  $h(\theta) = 0$  отбросим.

Для точечного заряда уравнения (12.5) приводят к соотношениям

$$[B[AB]] = \alpha A; \quad [[AB]A] = \beta B, \quad (12.7)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — вещественные числа. Уравнения (12.7) показывают, что группа голономии порождается операторами  $A$ ,  $B$  и  $[AB]$  (производная подгруппа).

Введем новую переменную  $z = \cos \theta$ . Тогда уравнения (12.5) примут вид

$$f'' - 2zf'/(1-z^2) - \alpha fh^2/(1-z^2)^2 = 0; \quad (12.8)$$

$$h'' + \beta f^2 h/(1-z^2) = 0, \quad (12.9)$$

где штрих означает дифференцирование по  $z$ , а условия регулярности решений переходят в следующие:

$$f, f'(1-z^2)^{1/2}, fh(1-z^2)^{-1/2} \text{ и } h \text{ ограничены на } -1 < |z| < 1. \quad (12.10)$$

Операторы  $A$  и  $B$  можно нормировать так, чтобы  $|\alpha|$  и  $|\beta|$  равнялись единице (если они не исчезают). Тогда представляются три возможности: 1)  $\alpha = 0$ ;  $|\beta| = 1$ ; 2)  $|\alpha| = |\beta| = 1$ ; 3)  $|\alpha| = 1$ ;  $|\beta| = 0$ .

Пусть  $\alpha = 0$ ;  $|\beta| = 1$ . Единственное регулярное решение (12.8):  $f(z) = \text{const}$ . При  $\beta = -1$  (12.9) имеет регулярное решение, отличное от нуля только в том случае, если  $f = 0$ . Это решение  $h = h_0 + h_1 z$ , где  $h_0$  и  $h_1$  постоянны. При  $\beta = 1$  (12.9) имеет регулярное решение только в том случае, если

$$f^2 = m(m+1); \quad m \geq 0 \text{ и целое.} \quad (12.11)$$

Это решение имеет вид

$$h(z) = (1 - z^2) (d/dz) P_m(z), \quad (12.12)$$

где  $P_m(z)$  — полиномы Лежандра степени  $m$ .

Из (12.7) следует, что при  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$   $\mathbf{B}$  и  $[\mathbf{A}\mathbf{B}]$  порождают абелеву инвариантную подгруппу  $\mathcal{H}$ . При этом можно показать, что  $\text{Sp } \mathbf{B}^k = 0$  для любого положительного целого  $k$ , откуда следует, что  $\mathbf{B}$  — нильпотентная матрица. Следовательно,  $\exp(\omega \mathbf{B})$  — полином, так что  $\mathcal{H}$  некомпактна. В соответствии с (12.7) имеем

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_1 + a_2 \mathbf{L}_2 + a_3 \mathbf{L}_3; \quad \mathbf{B} = b_2 \mathbf{L}_2 + b_3 \mathbf{L}_3, \quad (12.13)$$

где  $\mathbf{L}_1$ ,  $\mathbf{L}_2$  и  $\mathbf{L}_3$  — генераторы  $\mathcal{H}$ , удовлетворяющие коммутационным соотношениям:

$$[\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2] = \mathbf{L}_3; \quad [\mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3] = 0; \quad [\mathbf{L}_3, \mathbf{L}_1] = \mathbf{L}_2. \quad (12.14)$$

Здесь алгебра Ли рассматривается над полем вещественных чисел. Поэтому  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  вещественны.

Если слой представляет собой 2-мерное комплексное линейное векторное пространство, всегда можно выбрать базис в нем так, чтобы

$$\mathbf{L}_1 = \pm \begin{pmatrix} \gamma + i & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}; \quad \mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{L}_3 = \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (12.15)$$

где  $\gamma$  — комплексное число. Представление (12.15) имеет инвариантное подпространство, но из-за некомпактности  $\mathcal{H}$  оно не вполне приводимо. Неприводимых 2-мерных представлений алгебры Ли  $\mathcal{H}$  не существует.

Анализ других случаев ( $|\alpha| = |\beta| = 1$ ;  $|\alpha| = 1$ ;  $|\beta| = 0$  и  $|\alpha| = |\beta| = 0$ ) показывает, что максимально общее решение для калибровочного поля точечного заряда дается формулами (12.11), (12.12). Это решение не сферически-симметрично. Соответствующая ему группа голономии не полупроста и не компактна. Исследование асимптотического поведения компонент этого решения показывает, что одна из них ведет себя на бесконечности как кулоновский потенциал (хотя вблизи  $r = 0$  поведение довольно сложное), а остальные компоненты — короткодействующие. Решение (12.11), (12.12) можно интерпретировать как описывающее два «пузыря», находящихся на большом расстоянии друг от друга и взаимодействующих друг с другом «почти» электромагнитно. Вблизи «пузырей» и внутри них поле короткодействующее, типа ядерных сил. Иными словами, «пу-

зрыи» (или янг-миллсовские «частицы») — это чисто полевые образования, напоминающие в этом смысле геоны Уилера.

Юзес [44] рассматривал решения уравнений Янга—Миллса, обладающие плоскостью симметрии. Наличие плоскости симметрии определялось условием равенства нулю ковариантных производных по  $y$  и  $z$  тензора напряженности поля и его ковариантных производных. Было показано, что для решений уравнений (12.2), обладающих этим свойством, группа голономии абелева, а уравнения Янга—Миллса переходят в уравнения Максвелла, если имеется хотя бы одна область пространства—времени, в которой нет источников поля.

При физической интерпретации решений уравнений калибровочных полей важным моментом является требование положительной определенности плотности энергии поля. В отсутствие источников положительная определенность плотности энергии обеспечивается полупростотой и компактностью группы голономии соответствующих решений. Решения (12.11), (12.12) не удовлетворяют этому требованию. Поэтому они содержат неисчезающие компоненты, не дающие вклада в тензор энергии — импульса. Другой пример того же рода — решение свободных уравнений Янга—Миллса, регулярное, с неабелевой группой голономии, удовлетворяющее в фиксированный момент времени  $x^0 = t_0$  требованию

$$F_{01} = bF_{23}; F_{02} = bF_{31}; F_{03} = bF_{12}, \quad (12.16)$$

где  $b = \text{const}$ .

Анализ показывает, что условия (12.16) выполняются во все моменты времени  $x^0 > t_0$ , если  $b = \pm i$ , а вектор-потенциалы (коэффициенты связности) удовлетворяют при  $b = i$  условию  $\partial_0 \Gamma_1 = i(\partial_2 \Gamma_3 - \partial_3 \Gamma_2 - [\Gamma_2 \Gamma_3]) \text{cycl}$ .

Это решение в качестве группы голономии имеет комплексифицированную группу голономии 3-мерного подпространства  $x^0 = \text{const}$ . Такая группа голономии некомпактна. Тензор энергии — импульса калибровочного поля в этом случае равен нулю.

Если считать физическими только те решения, которые дают положительную плотность энергии поля, можно указать целые классы решений, которые отбрасываются этим требованием. Например, можно показать, что не существует частицеподобных (т. е. регулярных и в определенном смысле локализуемых) решений свободных уравнений Янга—Миллса, группа голономии которых компактна и полупроста, а поле относится к одному из следующих типов: 1) постоянное поле, для которого существует такая калибровка, что вектор-потенциалы не зависят от времени; 2) статическое поле, для которого тензор напряженности  $F_{\kappa\lambda}$  ковариантно постоянен во времени, и 3) стационарное поле, тензор напряженности которого удовлетворяет условию  $\nabla_t F_{\kappa\lambda} = [T, F_{\kappa\lambda}]$ , где  $T$  — операторное поле  $T(x)$ , обладающее специальными свойствами (например,  $\nabla_x T$  принадлежит алгебре Ли группы голономии и др.).

Таким образом, простота и компактность группы голономии сильно ограничивают выбор решений классических уравнений

Янга—Миллса. Они являются в сущности физическими требованиями, гарантирующими положительную определенность плотности энергии поля. В свою очередь, структура группы голономии сильно зависит от пространственно-временной симметрии решений. Тем самым требование положительной определенности энергии накладывает ограничения и на возможную пространственно-временную конфигурацию калибровочного поля.

**Топологическая классификация дефектов в упорядоченных средах.** Топологические концепции используются в калибровочных теориях поля для классификации точечных сингулярностей и изучения глобальных свойств калибровочных полей [45]. Геометрическая конструкция расслоенного пространства над  $V_4$ , типовой слой которого представляет собой пространство внутренних состояний системы, позволяет развить аналогию между свойствами элементарных частиц и дефектов в упорядоченных средах. Эта аналогия привлекательна не только как путь к единой физической картине мира, но и как новый источник доступных экспериментальному изучению физических моделей для проверки теоретико-полевых концепций.

Важную часть исследований в области физики фазовых переходов и свойств конденсированных сред составляет изучение дефектов, появляющихся в упорядоченной фазе и приводящих к образованию различных наблюдаемых макроструктур. При этом оказывается необходимым построить классификацию элементарных дефектов и выяснить способы образования их скоплений. Элементарные дефекты (точки, линии, стенки и т. д.) можно классифицировать, используя непрерывность свойств среды, т. е. топологические характеристики.

Тип упорядочения в среде описывается параметром порядка. Например, в упорядоченном сплаве параметр порядка — вещественный скаляр, в сверхтекучей жидкости — комплексный скаляр, в изотропном ферромагнетике — вектор. Параметр порядка определяется в каждой точке упорядоченной среды и, по определению, характеризует внутреннее состояние среды в этой точке. В отсутствие искажений внутреннее состояние должно быть одинаковым во всех точках образца. Появление дефектов сопровождается изменением внутреннего состояния среды от точки к точке.

Внутреннее состояние среды можно представить как точку в некоем абстрактном пространстве внутренних степеней свободы. Подпространство, образованное точками, отвечающими всем возможным значениям параметра порядка одинаковой амплитуды, называется также *многообразием внутренних состояний* [46]. Например, для вещественного скалярного параметра порядка многообразие внутренних состояний состоит из двух точек ( $\pm 1$ ). Для комплексного скалярного параметра порядка оно представляет собой окружность; для векторного параметра порядка это сфера и т. д. Многообразие внутренних степеней свободы обладает важными топологическими характеристиками: размерностью и связностью многообразия. В теории критических явлений вблизи точки фазового перехо-

да большую роль играет размерность внутреннего пространства. В теории дефектов основными являются свойства связности внутреннего пространства.

Рассмотрим линейный дефект (вихрь) в 3-мерном объеме сверхтекучей жидкости. Для того чтобы описать этот дефект, окружим его замкнутой петлей. Изменение фазы  $\Delta\varphi/2\pi$  комплексного параметра порядка при обходе по замкнутому контуру является топологическим инвариантом: каждому обходу вокруг вихря вдоль замкнутого контура в обычном пространстве сопоставляется определенный замкнутый путь в многообразии внутренних состояний. Этот замкнутый путь (более точно — класс эквивалентных замкнутых путей, в которые данный путь может быть переведен непрерывной деформацией внутри многообразия внутренних состояний) топологически характеризует линейный дефект. Если замкнутый путь можно непрерывно деформировать в точку многообразия, то линейный дефект не является топологически стабильным, так как его можно непрерывно деформировать к отсутствию дефектов. Если замкнутый путь на многообразии нельзя непрерывно стянуть в точку, линейный дефект называется *топологически стабильным*.

Обобщим эту конструкцию на среды и дефекты произвольных размерностей  $d$  и  $d'$ . Окружим дефект подпространством размерности  $r$  такой, что  $d' + 1 + r = d$ . В 3-мерном пространстве дефект-стенка окружен двумя точками, т. е. 0-мерной сферой  $S_0$ , линейный дефект — замкнутой петлей (1-мерной сферой  $S_1$ ), точечные дефекты — сферой (2-мерной сферой  $S_2$ ).

В каждой точке окружающего подпространства  $S_r$  существует некое внутреннее состояние, которое представляется точкой в многообразии внутренних состояний  $F$ . Тем самым определяется отображение  $S_r$  в  $F$ . Возможные отображения  $S_r$  в  $F$  можно разбить на классы эквивалентных отображений, допускающих непрерывную деформацию друг в друга на  $F$ . Совокупность этих классов называется  $r$ -й группой гомотопии многообразия  $F$  и обозначается  $\pi_r(F)$ .

В случае 3-мерного объема сверхтекучей жидкости известно, что многообразии внутренних состояний — одномерная сфера  $F = S_1$  и  $\pi_0(S_1) = 0$ ,  $\pi_1(S_1) = Z$ ,  $\pi_2(S_1) = 0$ , где 0 означает тривиальную группу, состоящую из одного элемента, а  $Z$  — аддитивную группу целых чисел. Отсюда следует, что в сверхтекучей жидкости не существует стабильных стенок и стабильных точечных дефектов, но возможны стабильные вихревые линии, которые можно характеризовать целым числом (положительным или отрицательным) — *силой вихря*. В 3-мерных изотропных ферромагнетиках, для которых  $F = S_2$ , возможны стабильные точечные дефекты, но нет стабильных линейных дефектов.

Введение понятия  $n$ -компонентного параметра порядка позволяет изучить большую категорию систем, включающих разобранные выше системы как частные случаи при  $n = 1$  (вещественный скалярный параметр порядка),  $n = 2$  (комплексный скаляр), обычный век-

тор  $n = d$ . Для  $n$ -векторного параметра порядка многообразие внутренних состояний есть  $F = S_{n-1}$ , так как амплитуда предполагается постоянной. Как известно [47],  $\pi_r(S_m) = 0$  для  $r < m$ ;  $\pi_m(S_m) = Z$ . Следовательно, топологически стабильные дефекты имеют размерность  $d' = d - n$ . Это значит, что для  $n > d$  топологически стабильных дефектов не существует. При  $0 < n < d$  имеется один вид дефектов (точки — для  $n = d$ , линии — для  $n = d - 1$ , стенки — для  $n = d - 2$  и т. д.; другие дефекты могут появиться при  $d > 4$ . При  $n < 0$  стабильные дефекты отсутствуют.

Заметим, что границей области, в которой могут существовать дефекты («треугольника дефектов»), в  $(n - d)$ -плоскости является диагональ  $n = d$ , играющая важную роль в критических явлениях, и линия  $n = 0$ , описывающая разупорядоченные системы. Случай  $n = 0$  соответствует стабильному дефекту, размерность которого совпадает с размерностью пространства. Поэтому вся система в целом может рассматриваться как сердцевина дефекта с неупорядоченной структурой.

В одноосном нематическом жидком кристалле параметром порядка является линейный элемент, т. е. вектор без направления. Для  $n$ -компонентного параметра порядка многообразие внутренних состояний  $F = P_{n-1}$  — вещественное  $(n - 1)$ -мерное проективное пространство. Для обычных нематиков в 3-мерном пространстве  $F = P_2$ , т. е. проективная плоскость. Для 2-мерных нематиков  $F = P_1 = S_1$ . Тогда  $\pi_1(P_m) = Z_2$ ,  $\pi_r(P_m) = \pi_r(S_m)$  для  $r > 1$ , где  $Z_2$  — 2-элементная группа целых чисел по модулю 2. Поэтому, например, в обычных 3-мерных нематиках кроме точечных дефектов, общих для них и для соответствующих векторных систем, возможны топологически стабильные линейные дефекты, обладающие свойством быть собственными античастицами. Два нематических линейных дефекта могут распадаться на точечные дефекты.

В сверхтекучей А-фазе  $^3\text{He}$  в пренебрежении ядерно-спиновыми степенями свободы орбитальный параметр порядка представляет собой систему из трех ортогональных векторов. Многообразие внутренних состояний  $F = SO(3) = P_3$ . Поэтому А-фазу можно рассматривать как разновидность нематика высокой размерности. Предсказывается, что в 3-мерном объеме  $^3\text{He}$  не будет стенок и точек, а также линий, являющихся собственными античастицами. Если попытаться построить точечный дефект для одного из трех ортогональных векторов, с необходимостью появляются струнные сингулярности для двух других векторов, прикрепленные к точечному дефекту. Эта ситуация напоминает дираковский монополь.

**Топологическая классификация частицеподобных решений.** Частицеподобные решения уравнений Янга — Миллса в евклидовом пространстве — времени (инстантоны, монополи) естественно классифицируются с помощью характеристических классов. Характеристические классы (в частности, классы Черна) — это простейшие глобальные инварианты, измеряющие отклонение структуры расслоенного пространства от прямого произведения. Они тесно связа-

ны с понятием кривизны. Характеристический класс есть полная кривизна, соответствующая некоторой связности. В то же время характеристические классы определяют поведение гладких векторных полей с изолированными нулями на компактном ориентируемом многообразии. Связь между простейшим характеристическим классом — характеристикой Эйлера  $\chi(M)$  многообразия  $M$  — и числом изолированных нулей гладкого векторного поля  $v$  дается теоремой Хопфа:  $\chi(M) = \Sigma$  нулей  $v$ . Свойства магнитных монополей и инстантонов можно рассматривать с единой точки зрения, если обратиться к глобальным свойствам калибровочных преобразований.

Рассмотрим  $d$ -мерное евклидово пространство, конформное сфере  $S^d$ . Оно может быть покрыто несколькими локальными картами. Пусть каждая карта покрывает область  $R_i$ , причем в областях перекрытия соседних карт  $R_i \cap R_j$  заданы функции перехода  $\varphi_{ij}$ . Калибровочные поля в  $R_i$  и  $R_j$  определены так, что для  $x \in R_i \cap R_j$

$$A_\mu^{(i)}(x) = \varphi_{ij}^{-1}(x) A_\mu^{(j)}(x) \varphi_{ij}(x) + \varphi_{ij}^{-1}(x) \partial_\mu \varphi_{ij}(x).$$

Глобальные калибровочные преобразования состоят из деформаций областей  $R_i$  и обычных калибровочных преобразований для каждого  $A_\mu^{(i)}$ . Будем говорить, что набор калибровок, глобально переводимых друг в друга, образует калибровочный тип. В абелевом случае этот подход позволяет описать монополю Дирака без странных сингулярностей [48]. Калибровочный тип характеризуется в этом случае условием квантования Дирака.

Калибровочный тип на компактифицированном евклидовом пространстве  $S_4$  однозначно характеризуется гомотопическим классом  $\pi_3(G)$  функций перехода  $\varphi_{12}$ , осуществляющих отображение области  $R_1 \cup R_2$ , гомеоморфной  $S^3$ , на полупростую группу  $G$ , если  $G$  связна. Его можно определить с помощью второго класса Черна  $c_2 = (1/8\pi^2) \text{Sp}(\Omega \wedge \Omega)$ , где  $\Omega = 1/2 F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$  — форма кривизны расслоенного пространства. Калибровочный тип характеризуется числом

$$q = \int c_2 = \int_{R_1} c_2 + \int_{R_2} c_2 - \int_{R_1 \cap R_2} c_2 = (1/8\pi^2) \int_{S^3} (J_\mu^{A(1)} - J_\mu^{A(2)}) d\sigma^\mu = \\ = -(1/24\pi^2) \int_{S^3} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Sp}(\varphi_{12}^{-1} \partial_\nu \varphi_{12} \varphi_{12}^{-1} \partial_\alpha \varphi_{12} \varphi_{12}^{-1} \partial_\beta \varphi_{12}) d\sigma^\mu, \quad (12.17)$$

где  $J_\mu^A = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Sp}(A_\nu \partial_\alpha A_\beta + 2/3 A_\nu A_\alpha A_\beta)$ . В квантовой теории поля  $J_\mu^A$  называется *аномальным током*. Второй класс Черна выражается через дивергенцию аномального тока благодаря тождеству

$$c_2 = (1/32\pi^2) \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \text{Sp}(F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}) d^4x = (1/8\pi^2) \partial_\mu J_\mu^A d^4x. \quad (12.18)$$

(Здесь  $F_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} A_{\nu]} + [A_\mu, A_\nu]$ .)

В электродинамике Максвелла имеем аналогичное тождество:

$$F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} \equiv \partial_\mu (\varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda} A_\nu F_{\tau\lambda}) \equiv \partial_\mu J^{\mu A}.$$

Для произвольных калибровочных полей в псевдоевклидовом пространстве  $V_4$  имеем

$$F_{\mu\nu}^a * F_a^{\mu\nu} \equiv \partial_\mu [\varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda} (A_\nu^a F_{a\tau\lambda} + 1/3 f_{abc} A_\nu^a A_\tau^b A_\lambda^c)] = \partial_\mu J^{\mu A}.$$

При  $F_{\mu\nu}^a * F_a^{\mu\nu} = 0$ , т. е.  $\mathbf{E}^a \mathbf{H}_a = 0$ , аномальный ток локально сохраняется ( $\partial_\mu J^{\mu A} = 0$ ). Поэтому возникает сохраняющийся заряд

$$Q_m = \int \varepsilon^0 ikl (A_i^a F_{akh} + 1/3 f_{abc} A_i^a A_k^b A_l^c) d^3x.$$

Условие  $Q_m = \text{const}$  в электродинамике означает, что сохраняется число вихревых линий в замкнутой системе.

Решение уравнений Янга—Миллса, описывающее магнитный монополь, имеет вид (Тофт, А. М. Поляков [49, 50]):

$$\left. \begin{aligned} \varphi^a(x) &= Fx^a/r; \quad \hat{\varphi}^a(x) = x^a/r; \\ A_0^a &= 0; \quad A_i^a = (1/e) \varepsilon_{aij} x^j/r^2. \end{aligned} \right\} \quad (12.19)$$

Здесь  $i, j = 1, 2, 3$  — пространственные индексы;  $a, b = 1, 2, 3$  — индексы в изопространстве;  $\varphi^a$  — скалярные поля Хиггса. Магнитный заряд выражается через поля Хиггса формулой

$$M = (1/4\pi) \int k_0 d^3x = -(1/8\pi e) \int \varepsilon_{0\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abc} \partial^\nu \hat{\varphi}^a \partial^\rho \hat{\varphi}^b \partial^\sigma \hat{\varphi}^c d^3x. \quad (12.20)$$

Здесь  $e$  — заряд электрона. Таким образом, магнитный заряд, лишенный сингулярных нитей, можно интерпретировать как топологическую характеристику хиггсовских полей. Однако нужно заметить, что при переходе к другой системе координат выражение для  $M$  (12.20) изменится. В него явно войдут вектор-потенциалы калибровочного поля, но полный магнитный заряд не изменится. Магнитный заряд сохраняется также во времени независимо от уравнений движения ( $\dot{M} \equiv 0$ ). Условия квантования Дирака означают, что  $eM = q$ . Ток  $k_0$  исчезает всюду, кроме нулей хиггсовского поля, где он сингулярен. Если вспомнить, что хиггсовские поля играют роль источников в уравнениях Янга—Миллса и такую же роль играют спинорные волновые функции электронов в уравнениях Максвелла, то становится понятной связь между происхождением магнитного заряда в теории Янга—Миллса и происхождением нитей магнитного потока в электродинамике. Магнитный заряд подобно потоку занимает ту область пространства, где волновые функции частиц, взаимодействующих с калибровочным полем, зануляются. Число квантов магнитного потока в нити, как и число квантов магнитного заряда в монополе, определяется некоторым интегралом по замкнутой поверхности, охватывающей область нулей волновых

функций частиц. В электродинамике эта замкнутая поверхность представляет собой  $S^1$ , а в теории Янга—Миллса —  $S^2$ .

В  $d$ -мерном конформно плоском евклидовом пространстве калибровочный тип регулярных калибровочных полей характеризуется гомотопическим классом  $\pi_{d-1}(G)$  функций перехода, определенных на  $S^{d-1}$ . Если  $d$  четно, гомотопический класс можно описывать  $(d/2)$ -ным классом Черна, определенным как

$$[(-1)^{d/2}/(2\pi i)^{d/2} (d/2)!] \sum \delta_{i_1 \dots i_{d/2}}^{j_1 \dots j_{d/2}} \Omega_{j_1}^{i_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{j_{d/2}}^{i_{d/2}}, \quad (12.21)$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным поднаборам  $(i_1 \dots i_{d/2})$  из  $d/2$  элементов, принадлежащих набору  $(1 \dots r)$ , где  $r$  — размерность матриц калибровочной группы.  $(d/2)$ -Мерный  $\delta$ -символ означает суммирование по всем перестановкам  $(j_1 \dots j_{d/2})$  из  $(i_1 \dots i_{d/2})$ , причем нечетные перестановки берутся с отрицательным знаком;  $\Omega$  — форма кривизны матричного представления калибровочной группы  $G$ . Для полупростой группы  $G$  все рассуждения, проведенные выше, легко обобщаются. Но если размерность многообразия нечетна, гомотопический класс  $\pi_{d-1}(G)$  нельзя представить в терминах формы кривизны. Это происходит потому, что любой характеристический класс, представимый в терминах  $F_{\mu\nu}$ , должен быть четной формой.

Рассмотрим теперь  $(d-1)$ -мерную сферу  $S^{d-1}$  в  $d$ -мерном евклидовом пространстве и поля Янга—Миллса на  $S^{d-1}$ . Калибровочный тип расслоения над  $S^{d-1}$  определяется гомотопической группой  $\pi_{d-2}(G)$ . Если  $d$  четно, не существует представления  $\pi_{d-2}(G)$  через кривизну, так как  $d-1$  нечетно. Если  $d$  нечетно, можно определить  $[(d-1)/2]$ -й класс Черна, который получается из общей формулы (12.21) при замене  $d \rightarrow d-1$ . Он позволяет обобщить понятие магнитного потока в 3-мерном пространстве, определяемого первым классом Черна для  $U(1)$ -расслоения, на пространства высших размерностей. Легко видеть, что интеграл от  $[(d-1)/2]$ -го класса Черна по сфере  $S^{d-1}$  не зависит от выбора сферы, пока не затрагиваются сингулярности. Таким образом, если размерность нечетная,  $[(d-1)/2]$ -й класс Черна можно использовать для описания калибровочного типа. Если калибровочное поле имеет нетривиальный  $[(d-1)/2]$ -й класс Черна, его поведение на бесконечности не будет чисто калибровочным. Следовательно, нельзя компактифицировать пространство и топология базы будет отличаться от топологии  $S^d$ .

Инстантон можно определить как классическое калибровочное поле такой конфигурации, что его нетривиальная топологическая характеристика есть  $\pi_{d-1}(G)$  в  $d$ -мерном евклидовом пространстве. Тогда монополь определяется как классическое калибровочное поле (возможно, сингулярное) такой конфигурации, что его нетривиальная топологическая характеристика есть  $\pi_{d-2}(G)$  в  $d$ -мерном евклидовом пространстве. Таким образом, если мы характеризуем псевдочастицы некоторым топологическим зарядом, вы-

раженным через  $F_{\mu\nu}$ , в соответствии с этими определениями псевдочастица будет называться инстантоном, если размерность пространства—времени четна, и моноподем, если размерность пространства—времени нечетна. Например, магнитный заряд в 3-мерном пространстве характеризуется гомотопической группой  $\pi_1(G)$ , которая соответствует классу замкнутых петель. Как известно,  $\pi_1(SU(n)) = 0$  и  $\pi_1(SO(n)) = Z_2$  при  $n \geq 3$ . Следовательно, в  $SU(n)$ -калибровочной теории в 3-мерном пространстве монополей нет. Первый класс Черна тождественно исчезает для  $SU(n)$ . Для  $SO(n)$ , вообще говоря, нельзя записать  $\pi_1(SO(n))$  в терминах тензора кривизны. Для  $SO(3)$  это было показано Ву и Янгом [48]. Если рассматривать обобщенный монополь в 5-мерном пространстве, он будет характеризоваться гомотопической группой  $\pi_3(G)$  и, следовательно, вторым классом Черна. Известно, что  $\pi_3(SU(n)) = \pi_3(Sp(n)) = Z$  для  $n \geq 2$  и  $\pi_3(SO(n)) = Z$  для  $n \leq 5$ . Тогда 5-мерный монополь может иметь бесконечное число калибровочных типов. Это же справедливо для 4-мерных инстантонов.

Рассмотрим топологию многоинстантонных решений [51]:

$$A_\mu = (i/2) \sigma_a A_\mu^a; \quad A_\mu^a = \eta_{\alpha\mu\nu} \partial_\nu \ln \rho; \quad \rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 / (x - x_i)^2, \quad (12.22)$$

где  $\sigma_a$  — матрицы Паули;  $\eta_{\alpha\mu\nu} = \epsilon_{0\alpha\mu\nu} - 1/2 \epsilon_{abc} \epsilon_{bc\mu\nu}$ , причем  $\epsilon_{0123} = 1$  и  $(\partial_\mu \omega) \omega^{-1} = (i/2) \sigma_a \eta_{\alpha\mu\nu} 2x_\nu / x^2$ ;  $\omega = (x_0 + ix_a \sigma^a) / \sqrt{x^2}$ .

Функция  $\rho$  — общее решение уравнения  $(1/\rho) \square \rho = 0$ , эквивалентного условию самодуальности  $F_{\mu\nu}$ . Выражение (12.22) можно преобразовать к виду

$$A_\mu = -(1/\rho) \sum_{i=1}^n [\lambda_i^2 / (x - x_i)^2] (\partial_\mu \omega_i) \omega_i^{-1}, \quad (12.23)$$

где  $\omega_i = [(x - x_i)_0 + i(x - x_i)_a \sigma_a] / [(x - x_i)^2]^{1/2}$ .

Тензор напряженности калибровочного поля имеет вид

$$F_{\mu\nu} = i \frac{2}{\rho} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{(x - x_i)^4} - \frac{1}{\rho} \sum_{i,j=1}^n \frac{\lambda_i^2 \lambda_j^2 (x - x_i, x - x_j)}{(x - x_i)^4 (x - x_j)^4} \right] \eta_{\alpha\mu\nu} \sigma^a.$$

Очевидно, что  $F_{\mu\nu}$  не сингулярно при  $x = x_i$ , хотя вектор-потенциалы  $A_\mu$  сингулярны [см. (12.23)], так как сингулярности в (12.23) устранимы чисто калибровочным преобразованием. Глобальные свойства этого решения удобно изучать изложенным выше методом гомотопических классов.

Разделим все пространство на  $n$  областей  $R_1, \dots, R_n$  так, чтобы в каждой области  $R_i$  содержалась только одна сингулярная точка  $x_i$ , а ее пересечение с соседними областями происходило только на бесконечности. Необходимо расположить области  $R_i$  так, чтобы пе-

рекрывались только соседние области  $R_i$  и  $R_{i+1}$ . В каждой области  $R_i$  регулярное калибровочное поле определяется как

$$A_\mu^{(i)} = \frac{1}{\rho} \sum_{l \neq i} \left[ \frac{\lambda_l^2}{(x-x_l)^2} \omega_i^{-1} \partial_\mu \omega_i - \frac{\lambda_l^2}{(x-x_l)^2} \omega_i^{-1} (\partial_\mu \omega_l) \omega_l^{-1} \omega_i \right]. \quad (12.24)$$

Функции  $\omega_i$  сингулярны при  $x = x_i$ . В каждой области пересечения  $R_i \cap R_{i+1} (\simeq S^3)$  определим функции перехода  $\varphi_{i, i+1} = \omega_{i+1}^{-1} \omega_i$ . Тогда

$$A_\mu^{(i)} = \varphi_{i, i+1}^{-1} A_\mu^{(i+1)} \varphi_{i, i+1} + \varphi_{i, i+1}^{-1} \partial_\mu \varphi_{i, i+1}. \quad (12.25)$$

Мы видим, что при  $|x| \rightarrow \infty$   $\varphi_{i, i+1} \rightarrow 1$  и  $A_\mu^{(i)} \rightarrow O(1/|x|^2)$ . Вектор-потенциал (12.25) приводит к тому же тензору поля, что и (12.23), так как они связаны между собой калибровочным преобразованием (сингулярным)

$$A_\mu^{(i)} = \omega_i^{-1} \hat{A}_\mu \omega_i + \omega_i^{-1} \partial_\mu \omega_i.$$

где  $\hat{A}_\mu$  — решение (12.22).

Глобальный калибровочный тип этого решения характеризуется интегралом от второго класса Черна. В то же время  $q = \sum_{i=1}^{n-1} (\text{интегралов от гомотопических классов } \varphi_{i, i+1}) = n - 1$ , так как интеграл от гомотопического класса (или число оборотов)  $\varphi_{i, i+1}$  равен единице для каждого  $i$ .

Выберем систему координат так, чтобы сингулярные точки  $x_i$  и  $x_{i+1}$  лежали на оси времени  $x_0 = t$ , причем  $t_i > 0$ ,  $t_{i+1} < 0$ . Для простоты предположим, что область пересечения  $R_i \cap R_{i+1}$  представляет собой гиперсферу между  $t_{i+1}$  и  $t_i$ . Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_{i, i+1} &= \{ [r^2 + (t - t_{i+1})^2] [r^2 + (t - t_i)^2] \}^{-1} (t - t_{i+1}) \times \\ &\times (t - t_i) + r^2 - i x_a \sigma_a (t_{i+1} - t_i); \\ r^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \end{aligned}$$

Для любой гиперсферы  $S^3$  между  $t_i$  и  $t_{i+1}$  имеем  $\varphi_{i, i+1} \rightarrow 1$  при  $r \rightarrow \infty$  и  $\varphi_{i, i+1} \rightarrow -1$  при  $r \rightarrow 0$ . Таким образом, когда  $x$  пробегает  $S^3$ , значение функции  $\varphi_{i, i+1}$  пробегает  $SU(2)$ -групповое многообразие, причем каждая точка на  $SU(2)$  встречается один и только один раз. Поэтому интеграл от гомотопического класса равен единице. Этот результат справедлив для любой области пересечения, так как непрерывные деформации этой области вызывают непрерывные изменения  $\varphi_{i, i+1}$ , если не затрагиваются сингулярности.

С изложенной выше точки зрения туннелирование из одного классического вакуума в другой, связанный с первым калибровочным преобразованием (процесс, описываемый инстантоном), соответствует наличию в некоторой области пространства—времени го-

мотопически нетривиальных функций перехода. Поэтому  $n$ -инстантонное решение (12.23) можно обобщить, записав вектор-потенциал для любой комбинации инстантонов и антиинстантонов. Такая конфигурация полей не будет решением уравнений поля, хотя интеграл действия останется конечным. Простейший пример инстантон-антиинстантонной конфигурации дает

$$A_\mu = -\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\lambda_1^2}{(x-x_1)^2} (\partial_\mu \omega_1) \omega_1^{-1} + \frac{\lambda_2^2}{(x-x_2)^2} (\partial_\mu \omega_2) \omega_2^{-1} + \frac{\lambda_3^2}{(x-x_3)^2} (\partial_\mu \omega_{32}) \omega_{32}^{-1} \right], \quad (12.26)$$

где  $\omega_{32} = \omega_2 \omega_3^{-1} \omega_2^{-1}$ . Здесь использованы две функции перехода  $\varphi_{12}$  и  $\varphi_{23}^{-1}$ . Обратная функция перехода отвечает антиинстантону. Решения типа (12.26) используются при изучении взаимодействия инстантонов.

**Солитоны.** Солитоны удовлетворяют условию  $H = \text{const}$  (энергия постоянна). Они были получены впервые в 2-мерных моделях теории поля как топологически нетривиальные решения уравнения синус-Гордон

$$\partial^2 \psi / \partial t^2 - \partial^2 \psi / \partial \xi^2 = -\gamma \sin \psi. \quad (12.27)$$

Геометрический смысл этого уравнения состоит в том, что оно описывает в гармонических координатах 2-мерную поверхность постоянной кривизны [52]. Действительно, 2-мерный интервал в гармонических координатах имеет вид  $ds^2 = \sin^2(\psi/2) du^2 + \cos^2(\psi/2) dv^2$ , а единственная компонента тензора кривизны  $R_{1212}$  пропорциональна скалярной кривизне  $K = (\partial^2 \psi / \partial t^2 - \partial^2 \psi / \partial \xi^2) / \sin \psi$ . Обозначив  $u = t$ ,  $v = \xi$ ,  $K = -\gamma$ , получим отсюда (12.27). Статические решения 2-мерного уравнения (12.27) описывают также одномерное движение математического маятника, если  $\psi = \alpha$ , т. е. углу отклонения от положения неустойчивого равновесия. Солитонное решение  $\alpha = 4 \arctg \exp(\sqrt{\gamma} t)$  отвечает случаю, когда движение маятника начинается из верхнего (нестабильного) положения равновесия с нулевой скоростью. Очевидно, что маятник возвратится в это же положение равновесия через бесконечное время, но угол  $\alpha$  изменится при этом на  $2\pi$ . Поэтому формально можно сказать, что маятник перешел из положения равновесия при  $\alpha = 0$  в другое положение равновесия при  $\alpha = 2\pi$ . На языке квантовой теории этот процесс отвечает переходу из одного вакуума в другой.

В 2-мерных калибровочных теориях поля со спонтанным нарушением симметрии возникает гамильтониан скалярного поля

$$H = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \pi^2 + \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - \mu^2 \varphi^2 + \frac{\lambda \varphi^4}{2} \right], \quad \text{где } \pi = \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Если вакуумное среднее поле  $\varphi$  не равно нулю ( $\varphi^2 = \mu^2/\lambda$ ), имеется топологически нетривиальная экстремаль потенциальной энергии, определяемая из уравнения

$$\varphi_c'' + \mu^2\varphi_c - \lambda\varphi_c^3 = 0. \quad (12.28)$$

Топологическая нетривиальность состоит в том, что при  $x \rightarrow \pm\infty$  решение выходит на разные константы  $\varphi_c(\pm\infty) = \pm\bar{\varphi}$  (подобно фазе математического маятника). Решение  $\varphi_c(x) = (\mu/\sqrt{\lambda}) \operatorname{th}(\mu x/\sqrt{2})$  содержит один «переворот» граничных значений (один кинк) на интервале  $-\infty < x < \infty$ . В более сложных случаях возможны решения, содержащие несколько переворотов граничных значений поля на интервале изменения независимой переменной. Такие решения называются *n*-кинковыми (или *n*-солитонными). Как правило, они не являются статическими. Число солитонов называется *топологическим квантовым числом*.

В теории поля топологически нетривиальные солитонные решения возникают тогда, когда наложено дополнительное условие постоянства амплитуды поля  $\langle \varphi^2 \rangle = \text{const}$ , но направление вектора  $\varphi$  в пространстве полей не фиксировано. На границах области определения  $\varphi$  может иметь разные знаки.

Квантование солитонных решений приводит к появлению частиц экстремально больших масс. Действительно, флуктуации поля в окрестности солитонного решения ведут себя как «частицы» в потенциальной яме, размеры которой определяются градиентами поля. Спектр колебательных уровней энергии вблизи  $\varphi_c$  приводит к спектру масс [50, 53]:

$$M_n = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\mu^3}{\lambda} + \frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{2}} \mu + \frac{\mu}{\sqrt{2}} \sqrt{n(4-n)}. \quad (12.29)$$

Этот спектр масс содержит зависимость от размеров ямы  $l \sim \sqrt{2}/\mu$  и обратной величины константы связи  $\lambda$ . Поэтому при малой константе связи масса (энергия) «протяженных частиц» может быть очень велика. С формулой (12.29) связана гипотеза о существовании сильновзаимодействующих частиц, построенных из слабовзаимодействующих [54].

В реальном 4-мерном случае существуют аналогичные решения, сосредоточенные вокруг конечного замкнутого контура (струна), испытывающего периодические нелинейные колебания. Эти решения описывают струны (или вихри в сверхтекучей жидкости), взаимодействующие через безмассовое скалярное поле. Поскольку энергия и действие связаны соотношением  $H_{\pm} - 2U = L_{\mp}$ , где  $U$  потенциал, знаки  $+$  и  $-$  означают евклидову и псевдоевклидову сигнатуру  $V_4$ , существует связь между солитонами и инстантонами.

### § 13. Калибровочные поля и структура пространства — времени

**Введение.** Существует несколько способов установить связь между калибровочным полем и структурой пространства—времени. Если спроецировать слой на касательное пространство к базе, т. е. отождествить внутренние и пространственно-временные переменные, калибровочное поле проявляет себя в отклонениях геометрии и топологии  $V_4$  от евклидовой (через кривизну, кручение или неметричность переноса в зависимости от свойств проекции, а также появление топологических ненулевых зарядов). Простейшим примером является  $SL(2, C)$ -калибровочная теория тяготения, которая в качестве группы калибровок использует группу Лоренца, преобразующую в каждой точке  $V_4$  локальный реперный базис касательного пространства. Эта теория для метрической связности эквивалентна теории Эйнштейна. Аналогичным образом можно получить вейлевскую геометрическую трактовку электродинамики, где возникают неметрические коэффициенты связности.

Второй способ состоит в отождествлении вектор-потенциалов калибровочного поля с коэффициентами связности конфигурационного пространства высшей размерности, в котором  $V_4$  рассматривается как гиперповерхность. В этом случае касательное пространство к  $V_4$  является частью касательного пространства к  $V_{r+4}$ . Коэффициенты связности, описывающие гравитационное поле, составляют часть компонент полных коэффициентов связности. Если предположить, что волновые функции зависят периодически от внутренних переменных, можно при таком подходе получить обобщение оператора массы [16].

Третий способ — отождествление вектор-потенциалов калибровочных полей с недиагональными компонентами метрики конфигурационного  $(r + 4)$ -мерного пространства, в котором  $V_4$  рассматривается как поверхность. На этом пути удается получить геометрическую интерпретацию массы калибровочного поля, а также показать, что лагранжиан системы гравитационных и янг-миллсовских полей представляет собой скалярную кривизну  $(r + 4)$ -мерного расслоенного пространства [9, 12—15]. Такой подход обобщает единую теорию гравитации и электромагнетизма Калузы—Клейна на неабелевы калибровочные поля.

Обобщением геометродинамики является совместное решение системы уравнений Янга—Миллса—Эйнштейна, а также совместное решение системы уравнений для скалярных (хиггсовских), векторных (калибровочных) и тензорных (гравитационных) полей. Здесь получены новые типы частицеподобных решений нелинейных классических уравнений, рассмотренные в предыдущем параграфе.

**Калибровочные поля и неевклидовость пространства—времени.** Интерпретацию калибровочных полей как проявление неевклидовости пространства—времени  $V_4$  можно получить, используя проек-

цию слоя на касательное пространство к базе с помощью реперов. В общем случае оказывается, что калибровочные поля порождают в  $V_4$  геометрию с кручением и отличной от нуля ковариантной производной метрического тензора [3, 4].

При обычном дифференциально-геометрическом подходе геометрия многообразия определяется полностью заданием трех величин [55]: метрического тензора  $g_{\mu\nu}$ , его ковариантной производной  $Q_{\mu\nu\tau} = -g_{\nu\tau;\mu}$  и тензора кручения  $S_{\mu\nu}^\lambda$ . Если  $Q_{\mu\nu\tau} = 0$ , перенесение называется *метрическим*. Если  $Q_{\mu\nu\tau} = -\Gamma_{\mu}^\lambda g_{\nu\tau}$ , где  $\Gamma_\mu$  — некоторый вектор, перенесение называется *полуметрическим* и при  $S_{\mu\nu}^\lambda = 0$  — *вейлевым*. Если  $S_{\mu\nu}^\lambda = 0$ , перенесение *симметрическое*; при  $S_{\mu\nu}^\lambda = p_{[\mu} \delta_{\nu]}^\lambda$  — *полусимметрическое*. Все эти разновидности геометрий в  $V_4$  можно получить с помощью отображения слоя на базу.

Полный коэффициент связности  $V_4$  имеет вид

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa = \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} + S_{\mu\lambda}^\kappa - S_\lambda^\kappa{}_\mu - S_\mu^\kappa{}_\lambda + \frac{1}{2}(Q_{\mu\lambda}^\kappa + Q_\lambda^\kappa{}_\mu - Q^\kappa{}_{\mu\lambda}), \quad (13.1)$$

где  $\left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\}$  — символ Кристоффеля второго рода:

$$\left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\kappa\sigma} (\partial_\mu g_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\lambda}) - \Omega_{\mu\lambda}^\kappa + g_{\mu\tau} g^{\kappa\sigma} \Omega_{\lambda\sigma}^\tau + \\ + g_{\lambda\tau} g^{\kappa\sigma} \Omega_{\mu\sigma}^\tau = \frac{1}{2} g^{\kappa\sigma} (\partial_\mu g_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\lambda}). \quad (13.2)$$

Здесь  $\Omega_{\mu\sigma}^\tau$  — коэффициенты неголономности системы координат;

знак  $=$  определяет равенство в голономной системе координат;

$$S_{\mu\lambda}^\kappa = \Gamma_{[\mu\lambda]}^\kappa + \Omega_{[\mu\lambda]}^\kappa = \Gamma_{[\mu\lambda]}^\kappa. \quad (13.3)$$

Заметим, что если считать заданными  $g_{\lambda\sigma}$ ,  $Q_{\mu}^{\lambda\kappa}$  и  $S_{\mu\lambda}^\kappa$ , то не только знакпеременная часть  $\Gamma_{\mu\lambda}^\kappa$ , но и  $\Gamma_{[\mu\lambda]}^\kappa$  будет зависеть от выбора кручения  $S_{\mu\lambda}^\kappa$ . Этой зависимости нет в том и только в том случае, если  $S_{\mu\lambda\kappa}$  — полностью антисимметричный тензор. Заметим также, что символы Кристоффеля симметричны только в голономной системе координат.

Пусть для векторов касательного пространства выполняются соотношения:

$$\Phi^i = h_\mu^i \Phi^\mu; \quad \Phi_i = h_i^\mu \Phi_\mu; \quad (13.4)$$

$$\nabla_\mu \Phi^i = h_\nu^i \nabla_\mu \Phi^\nu. \quad (13.5)$$

Тогда можно выразить калибровочное поле  $A_\mu(kl)$  через реперы и коэффициенты связности в базе  $\Gamma_{\mu\tau}^\nu$ :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\tau = h_i^\tau \partial_\mu h_\nu^i - h_i^\tau A_\mu(pq) I_k^i h_\nu^k. \quad (13.6)$$

С помощью (13.6) легко получить ковариантную производную метрического тензора:

$$g_{\lambda\nu; \mu} = 2A_{\mu}(pq) h_{i(\lambda} I_{(pq)}^i h_{\nu)}^k. \quad (13.7)$$

Аналогичные формулы можно получить при отображении на базу пространства 4-мерного представления произвольной группы  $G_r$ . Для этого достаточно заменить матрицы представления группы Лоренца матрицами представления  $G_r$ :  $I_k^i$  и калибровочное поле  $A_{\mu}(pq)$

заменить вектор-потенциалом  $A_{\mu}^a$ . Формулы для группы  $SU(2)$  можно получить, отождествляя компоненты  $A_{\mu}(pq)$  с двумя вектор-потенциалами: «электрическим»  $A_{\mu}^a = A_{\mu}(0, a)$  и «магнитным»  $*A_{\mu}^a = \varepsilon^{abc} A_{\mu}(b, c)$ . Если представление  $G_r$  таково, что все матрицы  $I_k^i$  вещественны и антисимметричны, то (13.7) переходит в

$$g_{\lambda\nu; \mu} = 0. \quad (13.8)$$

Для симметричных коэффициентов связности  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  из формулы (13.6) следует

$$\Gamma_{[\mu\nu]}^{\tau} = h_i^{\tau} \partial_{[\mu} h_{\nu]}^i - h_i^{\tau} A_{[\mu}^a I_{\nu]}^i h_{\nu]}^k = 0, \quad (13.9)$$

а также

$$A_{\mu}^a h_{i[\tau} I_{\nu]}^i h_{\nu]}^k = (h_{\tau i} \partial_{[\mu} h_{\nu]}^i + h_{\nu i} \partial_{[\tau} h_{\mu]}^i - h_{\mu i} \partial_{[\nu} h_{\tau]}^i) + \\ + 1/2 (Q_{\tau\mu\nu} - Q_{\nu\mu\tau}). \quad (13.10)$$

Если матрицы  $I_k^i$  симметричны, формула (13.10) дает

$$Q_{\nu\mu\tau} - Q_{\tau\mu\nu} = 2 (h_{\tau i} \partial_{[\mu} h_{\nu]}^i + h_{\nu i} \partial_{[\tau} h_{\mu]}^i - h_{\mu i} \partial_{[\nu} h_{\tau]}^i) = 4\Delta_{\mu, \tau\nu}. \quad (13.11).$$

Если  $I_k^i$  антисимметричны, то получим  $Q_{\mu\nu\tau} = 0$  и

$$A_{\mu}^a h_{i\tau} I_{\nu]}^i h_{\nu]}^k = \Delta_{\mu, \tau\nu}. \quad (13.12)$$

Здесь  $\Delta_{\tau, \mu\nu}$  — коэффициент связности Риччи. С помощью величин  $\omega_{\tau\nu}^a = h_{\tau i} I_{\nu]}^i h_{\nu]}^k$  и обратных  $\omega^{a\lambda}$ , связанных с первыми соотношениями  $\omega_{\nu\lambda}^b \omega^{a\lambda} = \lambda \delta_a^b$ ;  $\omega^a = g_{ab} \omega^b$ , где  $g_{ab} = f_{am}^l f_{lb}^m$  — метрика на группе, можно переписать соотношение (13.12) в виде  $A_{\mu}^a = (1/\lambda) \omega^{a\lambda} \Delta_{\mu, \nu\lambda}$ . Аналогично формулу (13.6) можно представить в виде

$$A_{\mu}^a = \lambda^{-1} \omega^{a\lambda} (h_{\lambda i} \partial_{\mu} h_{\nu]}^i - \Gamma_{\lambda, \mu\nu}). \quad (13.13)$$

Коэффициенты вращения Риччи отличны от нуля только в неголономной системе координат ( $\Omega_{\mu\nu}^\tau = h_i^\tau \partial_{[\mu} h_{\nu]}^i \neq 0$ ). Они описывают перенос ортогональной системы реперов. В голономной системе координат при  $\Gamma_{[\mu\nu]}^\tau = 0$  из (13.11), (13.12) следует  $Q_{\nu\mu\tau} = Q_{\tau\mu\nu}$ ,  $A_\mu^a = 0$ . Если  $\Gamma_{[\mu\nu]}^\tau \stackrel{h}{=} S_{\mu\nu}^\tau \neq 0$ , получим для симметричных и антисимметричных  $I_k^a$  соответственно:

$$Q_{\nu\mu\tau} - Q_{\tau\mu\nu} = 2(S_{\nu\tau\mu} + S_{\nu\mu\tau} - S_{\tau\mu\nu}); \quad (13.14)$$

$$A_\mu^a = (2\lambda)^{-1} \omega^{\nu\tau} (S_{\nu\tau\mu} + S_{\nu\mu\tau} - S_{\tau\mu\nu}). \quad (13.15)$$

Таким образом, если  $V_4$  представляет собой риманово пространство без кручения, то калибровочные поля могут быть связаны только с неголономностью системы координат подобно инерциальным силам.

Условия (13.15) эквивалентны условиям ковариантного постоянства реперов:

$$h_{\nu;\mu}^i = \partial_\mu h_{\nu}^i - A_{\mu a}^i I_k^a h_{\nu}^k - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda h_{\lambda}^i = 0; \quad (13.16)$$

$$h_{i;\mu}^\lambda = \partial_\mu h_i^\lambda + h_k^\lambda A_{\mu a}^i I_k^a + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda h_i^\nu = 0. \quad (13.17)$$

Условия (13.16) и (13.17) обеспечивают переход локального базиса представления  $G_r$  в себя при параллельном переносе в  $V_4$ . В то же время они означают, что реперы в каждой точке  $x = \text{const}$  удовлетворяют уравнениям (10.27) для коэффициентов дифференцируемых отображений. Существует ли система реперов, удовлетворяющая нашим условиям? Условия интегрируемости (13.16) имеют вид

$$h_{i;[\mu\nu]}^\lambda = R_{\mu\nu\tau}^\lambda h_i^\tau + F_{\mu\nu a}^a I_k^a h_i^\lambda + S_{\mu\nu}^\sigma h_{i;\sigma}^\lambda,$$

где  $F_{\mu\nu}^a$  — тензор напряженности калибровочного поля, а

$$R_{\nu\mu\tau}^\lambda = \partial_{[\nu} \Gamma_{\mu]}^\lambda{}_{\tau} + \Gamma_{[\nu|\sigma]}^\lambda \Gamma_{\mu]}^\sigma{}_{\tau} + \Omega_{\nu\mu}^\sigma \left( \Gamma_{\sigma\tau}^\lambda + A_{\sigma a}^a \omega_{\tau}^\lambda \right)$$

(вертикальными черточками обозначены индексы, не участвующие в антисимметризации). При  $S_{\mu\nu}^\sigma = 0$  вследствие (13.16) и (13.17) отсюда следует формула, связывающая тензор кривизны  $V_4$  и тензор напряженности калибровочного поля:

$$R_{\nu\mu\lambda}{}^\tau h_\tau^i = F_{\mu\nu a}^a I_k^i h_\lambda^k \quad (13.18)$$

или

$$R_{\nu\mu\lambda}{}^\tau = \omega_{\lambda}^\tau F_{\mu\nu}^a. \quad (13.19)$$

Выполнение (13.19) обеспечивает также интегрируемость (13.17). Из формулы (13.19) следует, что если  $I_k^i$  — антисимметричная матрица, то  $R_{\nu\mu}^\lambda = 0$ , что является необходимым и достаточным условием равнообъемности перенесения.

Тензор кривизны Риччи получается свертыванием (13.19) с  $g^{\lambda\nu}$ :

$$R_\mu^\tau = F_{\mu\nu}^a \omega^{\tau\nu}. \quad (13.20)$$

Выражение для скалярной кривизны имеет вид

$$R = F_{\mu\nu}^a \omega^{\mu\nu}. \quad (13.21)$$

Эта величина инвариантна относительно локальных калибровочных преобразований и может быть использована в качестве линейного лагранжиана для произвольного калибровочного поля. Варьируя (13.21) по метрике, можно получить аналог уравнений Эйнштейна для произвольного калибровочного поля:

$$R_\mu^\tau - 1/2 \delta_\mu^\tau R = F_{\mu\nu}^a \omega^{\tau\nu} - 1/2 \delta_\mu^\tau F_{\lambda\nu}^a \omega^{\lambda\nu} = *F_{a\tau\nu} * \omega_{\mu\nu} = 0.$$

Таким образом, если 4-мерное представление  $G_r$  задается антисимметричными вещественными матрицами, в  $V_4$  получаем метрическое перенесение с кручением. Если матрицы  $I_k^i$  симметричны, ковариантная производная от метрического тензора отлична от нуля и перенесение неравнообъемно. Его можно сделать равнообъемным, только введя соответствующее симметрическое перенесение  $\overset{s}{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$ , для чего нужно выбрать специальную неголономную систему координат.

**Пример. Теория Вейля [20].** При интерпретации электромагнитного поля в рамках 4-мерной геометрии пространства — времени Вейль, Эддингтон, В. А. Фок используют дополнительные коэффициенты связности  $\Gamma_\mu$ , соответствующие группе инвариантности относительно растяжений интервала:  $ds'^2 = \sigma(x) ds^2$ .

Проецирование 4-мерного представления этой абелевой калибровочной группы на касательное пространство дает в  $V_4$  [4]:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= h_i^\lambda \partial_\mu h_\nu^i - ie \delta_\nu^\lambda A_\mu; \\ \Gamma_{\mu\kappa}^\alpha &= 1/2 \partial_\mu \ln | -g | + 2Q_\mu = 1/2 \partial_\mu \ln | -g | - 4ie A_\mu; \\ S_{\mu\nu}^\lambda &= -ie A_{[\mu} \delta_{\nu]}^\lambda; Q_{\mu\lambda\nu} = -2ie g_{\lambda\nu} A_\mu. \end{aligned} \right\} \quad (13.22)$$

Таким образом, электромагнитное поле соответствует полуметрическому переносу в  $V_4$  ( $Q_\mu = -2ie A_\mu$ ) с кручением ( $S_\mu = -3ie A_\mu$ ).

Поскольку  $Q_\mu$  получилось отличным от нуля, ковариантное дифференцирование не перестановочно с поднятием и опусканием ин-

дексов. Перенесение не сохраняет объем, так как  $F_{\mu\nu} = \frac{1}{4} R_{\mu\nu\tau} \neq 0$ .

В геодезической системе координат  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$  и  $A_\mu = -(i/8e) \times \times \partial_\mu \ln | -g |$ . Легко видеть, что в этом случае  $F_{\mu\nu} = 0$ .

Равенство (13.22) инвариантно относительно некоординатных преобразований метрики вида

$$g'_{\mu\nu} = \sigma(x) g_{\mu\nu} \quad (13.23)$$

и связанных с ними преобразований  $A_\mu$ :

$$A'_\mu = A_\mu - (i/2e) \partial_\mu \ln \sigma(x) = A_\mu + e^{-1} \partial_\mu \alpha(x), \quad (13.24)$$

где  $\alpha(x) = -(i/2) \ln \sigma(x)$ .

Таким образом, градиентная инвариантность в электродинамике, соответствующая калибровочным преобразованиям волновых функций

$$\psi' = \exp[i\alpha(x)] \psi = \exp\left[\frac{1}{2} \ln \sigma(x)\right] \psi, \quad (13.25)$$

оказывается следствием инвариантности коэффициентов связности  $V_4$  относительно конформных преобразований метрики  $g'_{\mu\nu} = \exp[2i\alpha(x)] g_{\mu\nu}$ . Если преобразования (13.23) считать координатными, то давно отмечавшаяся конформная инвариантность уравнений Максвелла становится следствием объединения в одной группе симметрии лоренц-инвариантности и градиентной инвариантности. С конформными преобразованиями координат связана также интерпретация электромагнитного поля как калибровочного, соответствующего группе движения прямой  $x' = \alpha(x) + \beta$  [56]. В этом случае калибровочная группа разрешима. Ее группа голономии абелева (нормальный делитель).

**Теория тяготения как  $SO(3,1)$ -калибровочная теория поля.** Если теория тяготения строится как теория калибровочного поля, ассоциированного с локальной группой Лоренца, преобразующей ортогональный базис касательного пространства к  $V_4$ , основной полевой переменной являются коэффициенты связности Риччи  $\Delta_\mu(ik)$ . Они преобразуют друг в друга ортогональные базисы, отнесенные к разным точкам  $V_4$ , и играют роль вектор-потенциалов поля тяготения. Физически измеримыми величинами, характеризующими реальное поле тяготения, являются компоненты тензора кривизны

$$R_{\mu\nu}(ik) = \partial_{[\nu} \Delta_{\mu]}(ik) - \frac{1}{2} f_{lm}^{ik} \Delta_{[\mu}(lm) \Delta_{\nu]}(pq). \quad (13.26)$$

Лагранжиан, аналогичный лагранжиану Янга—Миллса, имеет вид [57, 58]

$$L = (\lambda^2/4\pi) R_{\mu\nu}(ik) R^{\mu\nu}(ik). \quad (13.27)$$

Уравнения поля тяготения получаются варьированием (13.27) по связности  $\Delta_\mu(ik)$ . Они имеют вид

$$R^{\mu\nu}(ik);_{\mu} = 0. \quad (13.28)$$

Покажем, как связана калибровочная теория тяготения с теорией Эйнштейна.

Коэффициенты связности Риччи выражаются через символы Кристоффеля следующим образом:

$$\Delta_{\mu}(ik) = h_{\tau}^k \partial_{\mu} h_i^{\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^{\tau} h_i^{\nu} h_{\tau}^k, \quad (13.29)$$

где  $h_i^{\tau}$  — векторы репера,  $\Gamma_{\mu\nu}^{\tau}$  — символы Кристоффеля. Если (13.29) выполнено, реперные компоненты тензора кривизны связаны с компонентами тензора Римана соотношением

$$h_{\lambda}^i h_k^{\mu} R_{\sigma\tau}(ik) = R_{\sigma\tau\lambda}^{\mu}. \quad (13.30)$$

Тогда вместо (13.28) имеем

$$R^{\mu\nu\tau\lambda}_{;\mu} = 0. \quad (13.31)$$

Однако, используя свойства симметрии тензора кривизны, можно показать, что в произвольном псевдоримановом многообразии  $V_4$  справедливо тождество:

$$C^{\mu}_{\nu\tau\lambda; \mu} \equiv R^{\mu}_{\nu\tau\lambda; \mu} - 1/6 g_{\nu} [\lambda R; \tau], \quad (13.32)$$

где  $C^{\mu}_{\nu\tau\lambda}$  — тензор конформной кривизны. Поскольку при  $n \leq 3$  все  $V_n$  конформно-плоские, т. е.  $C^{\mu}_{\nu\tau\lambda} = 0$ , уравнения (13.31) сводятся к  $R = \text{const}$ . В гармонической системе координат это уравнение имеет вид уравнения синус-Гордон и допускает частицеподобные решения — солитоны. При  $n \geq 3$  условие  $R = \text{const}$  получается из (13.31) сверткой по  $\nu, \tau$  при учете свернутых тождеств Бианки. Поэтому можно считать, что в отсутствие источников уравнения калибровочной теории тяготения имеют вид

$$C^{\mu}_{\nu\tau\lambda; \mu} = 0. \quad (13.33)$$

Для полей тяготения общего вида, относящихся к типу  $N$  по Петрову, уравнения (13.33) конформно-инвариантны.

Если  $g_{\mu\nu}$  рассматривается в качестве другой независимой переменной, описывающей поле тяготения, то полный лагранжиан представляет собой сумму эйнштейновского и янг-миллсовского членов [4, 32, 57]:

$$\mathcal{L} = R + (\lambda^2/4\pi) R_{\mu\nu\tau\lambda} R^{\mu\nu\tau\lambda}.$$

Варьируя  $\mathcal{L}$  по  $g^{\mu\nu}$ , получим обобщение уравнений Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} = (\lambda^2/4\pi) C_{\mu\tau\lambda\nu} R^{\tau\lambda}. \quad (13.34)$$

Очевидно, что все пространства Эйнштейна в вакууме удовлетворяют (13.31) и (13.34). Конформно-эйнштейновы пространства, удовлетворяющие (13.31), являются волновыми (тип  $N$ ). Используя дважды дуальный тензор кривизны  $\tilde{R}^{\mu\nu\tau\lambda} = 1/4 \eta^{\mu\nu\alpha\beta} \eta^{\tau\lambda\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  и тот факт, что из (13.34) следует  $R = 0$ , можно показать, что из (13.31), (13.34) следует

$$\tilde{R}^{\mu\nu\tau\lambda}_{;\mu} \equiv 0; \quad \tilde{R}_{\mu\nu} = (\lambda^2/4\pi) C_{\mu\tau\lambda\nu} \tilde{R}^{\tau\lambda}.$$

Таким образом, система уравнений (13.31)—(13.34) симметрична относительно замены  $R^{\mu\nu\tau\lambda} \rightarrow \tilde{R}^{\mu\nu\tau\lambda}$  и имеет класс дважды само- и антисамодуальных решений  $R^{\mu\nu\tau\lambda} = \pm \tilde{R}^{\mu\nu\tau\lambda}$ . Дважды дуальные решения в псевдоримановом пространстве обладают рядом свойств, характерных для инстантонов в римановом пространстве. Например, они зануляют тензор энергии—импульса гравитационного поля, а лагранжиан (13.27) сводят к дивергенции от аномального тока. Поэтому, как и в случае инстантонов, интеграл действия определяется граничными значениями поля и для компактного ориентируемого многообразия конечен. В то же время условию самодуальности  $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \pm R_{\alpha\beta\gamma\delta}^*$  в псевдоримановом пространстве удовлетворяет только пространство Минковского. Дважды дуальные гравитационные поля подобно инстантонам минимизируют интеграл действия с лагранжианом (13.27). Эти результаты можно получить, используя тождества [32]

$$R_{\mu\nu\tau\lambda} \tilde{R}^{\alpha\nu\tau\lambda} \equiv 1/4 \delta_{\mu}^{\alpha} R_{\gamma\nu\tau\lambda} \tilde{R}^{\gamma\nu\tau\lambda} \equiv 1/4 \delta_{\mu}^{\alpha} (-C_{\gamma\nu\tau\lambda} C^{\gamma\nu\tau\lambda} + 2R_{\nu}^{\nu} R_{\nu}^{\nu} - 2/3 R^2);$$

$$R_{\mu\nu\tau\lambda} R^{\alpha\nu\tau\lambda} + \tilde{R}^{\alpha\nu\tau\lambda} \tilde{R}_{\mu\nu\tau\lambda} \equiv 1/2 \delta_{\mu}^{\alpha} R_{\gamma\nu\tau\lambda} R^{\gamma\nu\tau\lambda};$$

$$(R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \tilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta})(R^{\alpha\beta\gamma\delta} + \tilde{R}^{\alpha\beta\gamma\delta}) \equiv 8(R_{\alpha}^{\alpha} R_{\beta}^{\beta} - 1/4 R^2).$$

Условия

$$R_{\mu\tau\lambda\delta} = \tilde{R}^{\mu\tau\lambda\delta} \quad (13.35)$$

и

$$R_{\mu\tau\lambda\delta} = -\tilde{R}^{\mu\tau\lambda\delta} \quad (13.36)$$

определяют тензор кривизны как простой и изотропный битензор, соответственно [41] и эквивалентны условиям

$$C^{\mu\tau\lambda\sigma} = 1/12 (g^{\mu\sigma} g^{\tau\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\tau\sigma}) R \quad (13.37)$$

и

$$\delta_{[\lambda}^{\mu} R_{\sigma]}^{\tau} + \delta_{[\sigma}^{\tau} R_{\lambda]}^{\mu} = 1/2 \delta_{[\lambda}^{\mu} \delta_{\sigma]}^{\tau} R. \quad (13.38)$$

Из (13.37) следует, что  $R = 0$  и  $C^{\mu\tau\lambda\sigma} = 0$ . Таким образом, (13.35) приводит к конформно-плоским пространствам нулевой скалярной кривизны. Уравнение (13.34) редуцируется к  $R_{\mu\nu} = 0$ . Теория Эйнштейна допускает единственное пустое пространство такого рода — это плоское пространство—время. Если же  $V_4$ , удовлетворяющее (13.35), не пусто, его метрика может быть получена из вакуумной метрики  $g_{\mu\nu}^0$  конформным преобразованием  $g_{\mu\nu} = e^{2\sigma} g_{\mu\nu}^0$ , где скалярная функция  $\sigma(x)$  подчиняется уравнению  $\square\sigma + g^{\mu\nu}\sigma_{\mu}\sigma_{\nu} = 0$ . Тензор энергии—импульса материи в этом случае связан с  $\sigma(x)$  уравнением  $T_{\mu\nu} = 2\sigma_{\nu;\mu} - 2\sigma_{\nu}\sigma_{\mu} + g_{\mu\nu}\sigma_{\alpha}\sigma^{\alpha}$ . Здесь  $\sigma_{\nu} = \partial_{\nu}\sigma$ ;  $\sigma_{\nu;\mu} = \nabla_{\mu}\sigma_{\nu}$ . Если  $\sigma_{\nu}$  — вектор Киллинга, то  $\square\sigma = 0$ ,

$\sigma_\alpha \sigma^\alpha = 0$ ,  $T_{\mu\nu} = -2\sigma_\mu \sigma_\nu$ . Этим условиям удовлетворяет тензор энергии—импульса электромагнитного излучения, записанный в формализме Ньюмена—Пенроуза.

Уравнение (13.38) приводит к  $R^\mu_\nu = 1/4 \delta^\mu_\nu R$ , что представляет собой необходимое и достаточное условие того, чтобы  $V_4$  с локальной метрикой Минковского было пространством Эйнштейна [41]. Физической моделью такого пространства является однородное пространство, всюду с одинаковой плотностью заполненное материей.

Для полей (13.36) уравнение отклонения геодезических принимает вид

$$d^2 \eta^\mu / ds^2 + \omega^\mu_\tau \eta^\tau = 0, \quad (13.39)$$

где  $\omega^\mu_\tau = C^\mu_{\nu\tau\lambda} (dx^\nu/ds) (dx^\lambda/ds) + \delta^\mu_\tau R/12$ . Величина  $C^\mu_{\nu\tau\lambda}$  конформно-инвариантна. Величина  $R$  при конформных преобразованиях интервала  $ds^{2'} = e^{2\sigma} ds^2$  переходит в  $R' = e^{-2\sigma} (R + 6\Box\sigma + 6\sigma_\mu \sigma^\mu)$ . Требование  $R = \text{const}$  при конформных преобразованиях приводит к ограничению на  $\sigma(x)$ :  $\Box\sigma + \sigma_\nu \sigma^\nu + R(1 - e^{2\sigma})/6 = 0$ .

В евклидовой теории тяготения регулярное локализованное решение (инстантон) было впервые построено Хокингом [59] с помощью аналитического продолжения метрики Шварцшильда в евклидову область. Решение Хокинга обладает конечным действием. Характеристика Эйлера для этого решения  $\chi = 2$ .

Большой интерес представляет также изучение свойств сингулярностей гравитационных полей через их асимптотические свойства в псевдоримановом  $V_4$ . В ОТО, интегрируя компоненты тензора кривизны, получаем массу источника поля. Подобным образом во всех локально калибровочно-инвариантных теориях интегрируя компоненты поля, получаем характеристики источников калибровочного поля в полном соответствии с программой геометризационного взаимодействия.

**Движение частиц в калибровочном и гравитационном полях.** Как известно, в ОТО уравнения движения частиц являются следствием уравнений поля. Покажем, что это справедливо для всех калибровочных полей, если заданы не только уравнения Эйнштейна, но и уравнения калибровочного поля.

Тензор энергии—импульса калибровочного поля определяется как вариационная производная лагранжиана (5.11) по метрике. В силу (8.14) он ковариантно сохраняется и, по определению, локально калибровочно-инвариантен. Уравнения Эйнштейна с тензором энергии—импульса калибровочного поля в правой части имеют вид

$$R^\mu_\nu = \kappa (F_a^{\mu\tau} F_{\nu\tau}^a - 1/4 \delta^\mu_\nu F_a^{\lambda\tau} F_{\lambda\tau}^a). \quad (13.40)$$

Беря ковариантную дивергенцию (13.40) и учитывая, что  $R^\tau_\tau = 0$ , получаем

$$1/2 F_a^{\mu\tau} F_{[\nu\tau; \mu]}^a + F_a^{\mu\tau} ;_\mu F_{\nu\tau}^a = 0. \quad (13.41)$$

Уравнения Эйнштейна являются уравнениями поля для метрики, тогда как уравнения Янга—Миллса определяют связность, вообще говоря, независимо от метрики. Если уравнения Янга—Миллса свободны и существует несингулярный вектор-потенциал, (13.41) удовлетворяются тождественно. Если же кроме полей имеются частицы, в уравнениях калибровочного поля появляется в правой части ток, а в уравнениях Эйнштейна (13.40) — тензор энергии—импульса частиц. Тогда (13.41) переходит в

$$T_{\nu;\mu}^{\mu} = J_a^{\mu} F_{\nu\mu}^a, \quad (13.42)$$

откуда получаем дифференциальный аналог уравнений Лоренца, описывающих движение частиц в электромагнитном поле:

$$\nabla_0 T_i^0 = \dot{p}_i = J_a^{\mu} F_{i\mu}^a + \nabla_k T_i^k. \quad (13.43)$$

В случае гравитации вместо (13.40)—(13.42) получим:

$$R_{\nu}^{\mu} = (\lambda^2/4\pi)(R_{\tau\lambda\sigma}^{\mu} R_{\nu}^{\tau\lambda\sigma} - 1/4 \delta_{\nu}^{\mu} R^{\alpha\tau\lambda\sigma} R_{\alpha\tau\lambda\sigma}); R^{\mu}_{\tau\lambda\sigma;\mu} R_{\nu}^{\tau\lambda\sigma} = 0$$

$$\text{и при } T_{\nu}^{\mu} \neq 0 \quad T_{\nu;\mu}^{\mu} = (\lambda^2/4\pi\kappa) R_{[\sigma;\lambda]} R_{\nu}^{\tau\lambda\sigma}.$$

Интересно отметить, что уравнения движения частиц (13.42) свободны не только в отсутствие калибровочного поля, но и при  $J_a^{\mu} F_{i\mu}^a = 0$ . В абелевом случае (электродинамика) уравнения калибровочного поля вытекают из уравнений Эйнштейна (13.40) и в этом смысле не самостоятельны [32].

**Геометрическое происхождение внутренних симметрий и массы калибровочного поля.** Произвольное риманово пространство локально можно рассматривать как поверхность, вложенную в 10-мерное евклидово пространство. При этом возникает шесть дополнительных измерений, которые можно интерпретировать как внутренние степени свободы элементарных частиц. Удобно выбрать во вмещающем пространстве систему координат так, чтобы координатные векторы, дополнительные к пространственно-временным, были к ним ортогональны. Тогда преобразования «внутренних» степеней свободы не будут затрагивать пространства—времени. Иначе говоря, преобразования калибровочной группы будут коммутировать с преобразованиями группы Лоренца. В 6-мерном внутреннем пространстве, возникающем при имбединге, действует ортогональная группа  $O(6)$ , которая имеет в качестве подгруппы группу  $SU(3)$ , классифицирующую состояния элементарных частиц. Различные способы вложения дают различные группы внутренних симметрий. Динамические симметрии, описываемые киральными группами типа  $SU(2) \times SU(2)$  или  $SU(3) \times SU(3)$ , также можно получить с помощью имбединга.

Если  $V_4$  обладает некоторой степенью симметрии, его класс вложимости может быть меньше шести. Так, статическое сферически-симметричное поле Шварцшильда вложимо в плоское пространство шести измерений. Его класс вложимости равен двум. Совокупность

15 генераторов ортогональной группы  $O(6)$  содержит одно преобразование в 2-мерной плоскости, коммутирующее с группой Лоренца. Это преобразование можно рассматривать как внутреннюю симметрию [10].

Относительно некоторых полей тяготения можно указать нижнюю или верхнюю границу класса вложимости. Например, не существует риманова и псевдориманова многообразия  $V_4$  с  $R_{\mu\nu} = 0$ , вложимого в 5-мерное плоское пространство. Единственное  $V_4$  с  $R_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$ , вложимое в 5-мерное пространство, есть пространство постоянной кривизны. Единственный вид решений уравнений Эйнштейна с некогерентной материей ( $p = 0$ ), вложимый в 5-мерное пространство, — фридмановские космологические модели. Если материя вращается,  $V_4$  не может быть вложено в 5-мерное пространство. Таким образом, свойства внутренних симметрий, возникающих при имбединге, определяются свойствами материи в римановом пространстве—времени.

Число дополнительных размерностей резко увеличится, если все пространство—время, а не только окрестность некоторой точки, рассматривать как поверхность в некотором плоском пространстве большей размерности. Для такого глобального вложения  $V_4$  с гиперболической сигнатурой\* нужно пространство, имеющее, вообще говоря, более 230 измерений. Однако часто число измерений для глобального вложения современных космологических моделей гораздо меньше. Размеры области  $\Delta V_4$ , в которой выполняются свойства внутренней симметрии (или ортогональность  $V_4$  и дополнительного подпространства), можно связать с радиусом действия калибровочного поля, ассоциированного с внутренней симметрией или с массой его квантов [7—9].

Таким образом, имбединг позволяет интерпретировать внутренние симметрии элементарных частиц как следствие искривления пространства—времени на малых расстояниях. Эта связь должна проявляться сильнее в районах с большой кривизной. На этом пути возможна зависимость между космологическими свойствами Вселенной и свойствами элементарных частиц.

**Единая теория гравитации и электромагнетизма Калузы—Клейна.** В основе 5-мерных теорий, развивавшихся Эйнштейном, Калузой, О. Клейном, Манделем, В. А. Фоком, Ю. Б. Румером [2, с. 190; 11, 60, 61], геометрически объединявших электродинамику и гравитацию, лежит замечание Ф. Клейна о том, что каждая механическая задача о движении материальной точки с помощью пространства высшего числа измерений может быть сведена к определению пути светового луча, проходящего в соответствующей среде. Вместо 4-мерного риманова пространства в 5-мерной оптике (или 5-оптике) рассматривается 5-мерное многообразие, в котором 5-я координата пропорциональна действию  $S$ :  $x^5 = S/mc$ . Траектории заряженных

\* Т. е. когда метрика приводится к виду  $g_{\mu\nu} = (-1, -1, -1, 1)$ .

массивных частиц, взаимодействующих с электромагнитным полем в  $V_4$ , соответствуют тогда траекториям луча света, распространяющегося в 5-мерном римановом многообразии с метрическим тензором

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{ik} + g_i g_k & g_i \\ g_k & 1 \end{pmatrix}. \quad (13.44)$$

Контравариантные компоненты  $g^{\mu\nu}$  имеют вид

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g^{ik} & -g^i \\ -g^k & 1 + g^{ik} g_i g_k \end{pmatrix}. \quad (13.45)$$

Здесь  $g_i = (e/mc^2)A_i$ , где  $A_i$  — электромагнитный вектор-потенциал,  $e$  — электрический заряд.

Существование кванта действия  $S$  отражается в топологической замкнутости пятой координаты. Иными словами, координатная линия пятой координаты представляет собой окружность  $S^1$ . Легко видеть, что компоненты 5-мерного метрического тензора не зависят от  $x^5$ . Это условие отражает независимость наблюдаемых явлений от пятой координаты и называется *условием цилиндричности*. Оно означает ортогональность  $V_4$  и  $x^5$  в выбранной метрике.

О. Клейн и В. А. Фок показали, что квантовомеханическая задача о движении частицы со спином нуль может быть сформулирована как задача о распространении скалярных волн в 5-мерном пространстве, если на зависимость скалярной волновой функции  $\psi$  от пятой координаты наложить условие цикличности:

$$\Psi(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) = \psi(x^1, x^2, x^3, x^4) \exp(imcx^5/\hbar).$$

В самом деле, волновое уравнение для 5-мерного пространства  $\partial^2\psi/\partial x^{\alpha 2} = 0$  соответствует в этом случае в 4-мерном пространстве уравнению Прока:  $[\square - (mc/\hbar)^2]\psi = 0$ .

Аналогично для векторных полей. Уравнения Прока для массивных векторных мезонов в 4-мерной формулировке благодаря условию цилиндричности превращаются в 5-мерные уравнения Максвелла. Таким образом, 5-оптика объединяет электродинамику и динамику массивных векторных мезонов в единую 5-мерную теорию Максвелла. Физически это значит, что она приводит к необходимости учитывать в электромагнитной теории света при наличии коротких волн  $\lambda \ll \hbar/mc$  кроме обычных фотонов еще и «тяжелые фотоны» — векторные мезоны. Как заметил Ю. Б. Румер [60], при описании звуковых волн в неограниченном плоскопараллельном слое возникает сходная ситуация. Если в звуковом поле представлены только длинные волны  $\lambda > l$ , где  $l$  — толщина слоя,  $\lambda$  — длина волны звука, то имеются только обычные 2-мерные фононы, распространяющиеся без дисперсии. Если же в звуковом поле представлены и короткие волны  $\lambda < l/n$ , то необходимо учитывать и 2-мерные «тяжелые фононы», распространяющиеся с дисперсией. При

этом возникает альтернатива: 1) отказаться от 2-мерного описания звукового поля и перейти к 3-мерному уравнению или 2) сохраняя 2-мерное описание, ввести наряду с обычными 2-мерными фонанами «тяжелые фононы».

5-Оптика приводит к появлению дополнительного скалярного гравитационного поля  $\chi$ , которое в классической теории нельзя отделить от обычного гравитационного поля, связанного с 4-мерным метрическим тензором, но которое можно выделить при квантовании 5-мерной теории. Это поле связано с 5-мерным метрическим тензором соотношением  $g_{55} = 1 + \chi$ . Наличие  $\chi$ -поля в 5-оптике приводит к исчезновению особенности у кулоновского потенциала при  $r = 0$  в задаче о поле заряженной точечной массы.

Заметим, что в теории Калузы—Клейна вектор-потенциалы электромагнитного поля трактуются как компоненты метрики (4 + 1)-мерного конфигурационного пространства. Поэтому градиентные преобразования второго рода оказываются тензорными преобразованиями недиагональных компонент 5-мерного метрического тензора.  $A_\mu$  отличны от нуля при таком подходе только в специальных (неинерциальных) системах отсчета и при наличии 5-мерного принципа эквивалентности могли бы считаться нефизическими величинами вместе с  $F_{\mu\nu}$ , играющими роль коэффициентов связности. Однако присутствие тензорного поля  $g_{\mu\nu}$ , векторного поля  $A_\mu$  и скалярного поля  $\chi$  делает теорию Калузы-Клейна привлекательной для обобщений на случай калибровочных теорий со спонтанным нарушением симметрии в римановом  $V_4$  и суперсимметричных теорий.

**Обобщение теории Калузы—Клейна на произвольные калибровочные поля.** Структура объемлющего пространства, возникающая при вложении риманова  $V_4$ , локально идентична структуре расслоенного пространства. Введение метрики в объемлющем пространстве позволяет описать свойства любого калибровочного поля как свойства метрики объемлющего пространства [12—15].

При переходе к  $(r + 4)$ -мерному пространству, обобщающему 5-мерное пространство Калузы—Клейна, необходимо представить метрический тензор в виде:

$$\left. \begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \left( \begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} + g_{ab} \frac{A_\mu^a A_\nu^b}{A_\nu^b} & g_{ab} \frac{A_\mu^a}{A_\nu^b} \\ \hline g_{ab} \frac{A_\nu^a}{A_\nu^b} & g_{ab} \end{array} \right), & \mu, \nu = 1 \dots 4; a, b = 1, \dots, r; \\ & \alpha, \beta = 1, \dots, r + 4. \\ g^{\alpha\beta} &= \left( \begin{array}{c|c} g^{\mu\nu} & -g^{\mu\nu} \frac{A_\nu^b}{A_\nu^b} \\ \hline -g^{\mu\nu} \frac{A_\mu^a}{A_\nu^b} & g^{ab} + g^{\mu\nu} \frac{A_\mu^a A_\nu^b}{A_\nu^b} \end{array} \right). \end{aligned} \right\} \quad (13.46)$$

Преобразования координат сохраняют локальную ортогональность  $V_4$  и  $V_{n-4}$ , если  $x^{\mu'} = f(x^\mu)$ ;  $x^{a'} = \varphi(x^\mu, x^a)$ .

Как показал Кернер [13], скалярная кривизна расслоенного пространства с метрикой (13.46) имеет вид

$$R = K + g^{\mu\nu} g^{\lambda\nu} g_{ab} F_{\nu\lambda}^a F_{\mu\sigma}^b + g^{\mu\nu} g_{ab} A_\mu^a A_\nu^b.$$

Выбирая специальным образом систему координат, можно избавиться от последнего члена и записать скалярную кривизну в инвариантном виде:

$$R = K + g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}g_{\alpha\beta}F_{\nu\lambda}^{\alpha}F_{\mu\sigma}^{\beta} = K + L_A,$$

где  $K$  — скалярная кривизна базы;  $L_A$  — лагранжиан калибровочного поля. Легко видеть, что лагранжиан  $L = \sqrt{-g} R$ , где  $g$  — детерминант метрического тензора  $V_A$ , описывает единым образом систему гравитационного и калибровочного полей. Варьирование  $L$  по  $A_{\mu}^{\alpha}$  и  $g^{\mu\nu}$  приводит к обобщению уравнений Янга—Миллса на риманово пространство — время:  $g^{\nu\lambda}F_{\mu\lambda}^{\alpha}{}_{;\nu} = 2g^{\nu\lambda}f_{bc}^{\alpha}A_{\lambda}^b F_{\mu\nu}^c$  и уравнениям Эйнштейна для случая, когда источником гравитационного поля служит тензор энергии — импульса калибровочного поля (13.40).

#### § 14. Электродинамика сплошной среды в геометрическом аспекте

**Дислокации среды как источники электромагнитного поля.** Как уже говорилось, геометрия многообразия определяется полностью заданием трех величин: поля симметричного тензора второго ранга, его ковариантной производной и тензором кручения. В случае 3-мерной сплошной среды этим геометрическим понятиям соответствуют: тензор деформаций (симметричный тензор второго ранга), его ковариантная производная и тензор плотности дислокаций.

Задание кручения можно заменить заданием ковариантной дивергенции некоторой антисимметричной тензорной плотности. Поэтому уравнения Максвелла в среде можно рассматривать чисто геометрически как уравнения, определяющие кручение через источники поля. В этом случае компоненты тензора кручения играют роль коэффициентов пропорциональности между напряженностью электромагнитного поля в среде и током.

Как известно, классические уравнения электромагнитного поля в среде (или в вакууме при наличии материальных источников) связывают два типа физически различных величин: характеристики поля и характеристики вещества. Для того чтобы найти поле с помощью этих уравнений, необходимо задать либо сами источники и характеристики среды, либо их выражение через характеристики поля. В последнем случае дополнительно к уравнениям поля постулируют соотношения типа линейной связи между током и полем (например, закон Ома) или представляют ток как движение заряженных частиц, для которых пишется уравнение движения. Чтобы сделать электродинамику сплошной среды чисто геометрической теорией, необходимо выразить источники поля через геометрические величины так, чтобы уравнения поля стали свободными. Поскольку неоднородную неизотропную сплошную среду можно рассматривать как модель неевклидова пространства, такой подход позволяет при-

дать характеристикам среды геометрический смысл. При этом естественно возникает связь между источниками и полями.

Пусть уравнения электромагнитного поля в среде имеют вид:

$$\hat{G}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0; \quad (14.1)$$

$$F_{[\mu\nu;\tau]} = 0, \quad (14.2)$$

где точка с запятой означает ковариантное дифференцирование по полной связности с кручением, квадратные скобки означают альтернацию по всем индексам внутри скобок; крышка — тензорную плотность. Выражение для тензора поля имеет вид (здесь  $x^4 = ict$ ):

$$\left. \begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & B^z & -B^y & -iE_x \\ -B^z & 0 & B^x & -iE_y \\ B^y & -B^x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}; \\ G^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iD^x \\ -H_z & 0 & H_x & -iD^y \\ H_y & -H_x & 0 & -iD^z \\ iD^x & iD^y & iD^z & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (14.3)$$

Ковариантное дифференцирование в уравнениях (14.1)—(14.2) ведется по неизвестной связности, которая в общем случае имеет вид (13.1). Раскрывая левую часть уравнений (14.1), получаем

$$\hat{G}^{\nu\lambda}{}_{;\nu} = \partial_\nu (\hat{G}^{\nu\lambda}) + \Omega_{\nu\tau}^\lambda \hat{G}^{\nu\tau} - 2\Omega_{\nu\tau}^\tau \hat{G}^{\nu\lambda} + S_{\nu\tau}^\lambda \hat{G}^{\nu\tau} - 2S_{\nu\tau}^\tau \hat{G}^{\nu\lambda}. \quad (14.4)$$

В (14.4) сумма подчеркнутых членов зависит только от выбора системы координат (криволинейная, вращающаяся и т. п.) и не зависит от выбора параллельного переноса. Поэтому в голономной системе координат уравнения (14.1) равносильны уравнениям

$$\partial_\nu (\hat{G}^{\nu\lambda}) = 2S_{\nu\tau}^\tau \hat{G}^{\nu\lambda} - S_{\nu\tau}^\lambda \hat{G}^{\nu\tau}. \quad (14.5)$$

Отождествляя правую часть (14.5) с током источников, находим соотношение между током и компонентами поля, обобщающее закон Ома:

$$\hat{J}^\lambda = 2S_{\nu\tau}^\tau \hat{G}^{\nu\lambda} - S_{\nu\tau}^\lambda \hat{G}^{\nu\tau} = 2^* S^{\nu\lambda\tau} * G_{\nu\tau}. \quad (14.6)$$

Аналогично вторая пара уравнений Максвелла  $\partial_{[\mu} F_{\tau\nu]} = 0$  приводит к соотношению

$$2S_{\nu\tau}^\tau * F^{\nu\lambda} = S_{\nu\tau}^\lambda * F^{\nu\tau}, \quad (14.7)$$

где  $*F^{\nu\lambda} = (1/2\sqrt{-g})\epsilon^{\nu\lambda\mu\tau} F_{\mu\tau}$ ;  $\epsilon^{\nu\lambda\mu\tau}$  — дискриминантный тензор. При наличии магнитных источников вместо (14.7) получим

$$2S_{\nu\tau}^\tau * F^{\nu\lambda} - S_{\nu\tau}^\lambda * F^{\nu\tau} = *J_m^\lambda. \quad (14.8)$$

Система уравнений (14.1)—(14.2) дуально инвариантна, если выполняются условия (14.6)—(14.7) при наличии источников только

электрического типа или (14.6)—(14.8)—при наличии источников обоих типов. Равенства (14.6) приводят к соотношениям [25]:

$$J^i = 2iS_{k0} [{}^i D^k] - \varepsilon^{ikl} S_{kl} {}^n H_n; \quad (14.9)$$

$$J^0 = 2iS_{ki} [{}^k D^i] - \varepsilon^{ikl} S_{[ik} {}^0 H_{l]}. \quad (14.10)$$

Таким образом, электрический ток может возбуждаться как электрическим, так и магнитным полем, причем плотность тока линейно связана с напряженностями этих полей. Уравнения (14.9)—(14.10) устанавливают связь между электродинамикой сплошной среды и теорией дислокаций в ней, так как кручение выражается через плотность дислокаций и является измеримой характеристикой.

В частном случае полусимметрической геометрии, т. е. когда тензор кручения представим в виде  $S_{\nu\sigma}{}^\mu = \frac{1}{4} S_{[\nu} \delta_{\sigma]}^\mu$ , получим

$$J^\mu = S_\nu G^{\nu\mu}; \quad (14.11)$$

$$S_\nu {}^*F^{\nu\mu} = 0 \quad (14.12)$$

или

$$J^i = iS_0 D^i - \varepsilon^{ikl} S_k H_l; \quad J^0 = -iS_k D^k;$$

$$S_k B^k = 0; \quad S_0 B^i = i\varepsilon^{ikl} S_k E_l.$$

Обозначим инварианты электромагнитного поля в среде как

$$I_1 = G^{\mu\nu} {}^*G_{\mu\nu} = i(HD); \quad I_2 = {}^*F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = i(BE); \quad L = G^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(BH - DE).$$

Из (14.11)—(14.12) следует, что

$$(L/2)S_\lambda = F_{\lambda\mu} J^\mu; \quad (14.13)$$

$$(I_1/4)S_\tau = {}^*G_{\tau\mu} J^\mu. \quad (14.14)$$

Свертывая (14.11) с  $S_\mu$ , получаем  $S_\mu J^\mu = 0$ , т. е. 4-мерные векторы тока и кручения ортогональны друг другу. Из (14.14) следует, что

$$(I_1/4)S_i = -J^0 H_i - i\varepsilon_{ikh} J^k D^l,$$

т. е. при  $I_1 \neq 0$  3-вектор кручения напоминает силу Лоренца, действующую на магнитный заряд.

Свертывая (14.14) с  ${}^*F^{\tau\nu}$ , находим соотношение между плотностью магнитной энергии и вектором плотности тока:

$$(HB) = (i/J^0)\varepsilon_{ikh} J^i D^k B^l = (i/S_0)\varepsilon^{ikh} S_i E_k H_l.$$

Таким образом, геометрические свойства среды связаны с характером энергетических процессов в ней. Если представить электродинамику произвольной сплошной среды в виде свободной теории, то в случае полусимметрической геометрии компоненты вектора кручения  $S_i$  представляют собой с точностью до множителя отношение силы Лоренца к инварианту действия электромагнитного поля, а временная компонента  $S_0$  — отношение джоулевых потерь к этому ин-

варианту. Проводимость оказывается равной  $S_0$  [см. (14.11)]. С точки зрения геометрической теории дислокации ведут себя так же, как внешние источники.

**Об инвариантных свойствах тензора энергии—импульса в электродинамике сплошной среды.** Как известно, понятие фотона в среде является плохо определенным. Отчасти это связано с неоднозначностью определения тензора энергии — импульса (ТЭИ) в произвольной среде. Используя результаты предыдущих параграфов, определим ТЭИ электромагнитного поля в произвольной среде как вариационную производную лагранжиана [26]

$$\hat{L} = -(1/16\pi) \sqrt{-g} G^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (14.15)$$

по метрике  $g_{\mu\nu}$ . Тензоры  $G^{\mu\nu}$  и  $F_{\mu\nu}$  имеют вид (14.3). ТЭИ выглядит следующим образом:

$$\hat{T}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} T^{\mu\nu} = -(\sqrt{-g}/8\pi) g_{\tau\lambda} (G^{\mu\tau} F^{\nu\lambda} + *G^{\mu\tau} *F^{\nu\lambda}). \quad (14.16)$$

В силу (8.14) ТЭИ (14.16) ковариантно сохраняется и, по определению, симметричен и локально калибровочно-инвариантен. Он позволяет получить инвариантные квадратичные соотношения между энергией и импульсом фотона в среде, аналогичные уравнению массовой оболочки в квантовой механике. Эти соотношения справедливы для плотностей потоков импульса и энергии, т. е. выполняются не для отдельных частиц, а для единичных объемов среды. В простых средах (однородных, изотропных, недиспергирующих, покоящихся, прозрачных), а также в вакууме из этих квадратичных соотношений можно «извлечь корень» и получить аналог известных из квантовой механики линейных соотношений между энергией и импульсом фотона  $E = cp$ , где  $E$  — энергия фотона,  $p$  — его импульс,  $c$  — скорость света. В общем случае это сделать нельзя.

Закон сохранения энергии — импульса в среде имеет вид

$$0 \equiv \nabla_{\mu} T^{\mu\nu} \equiv -(1/8\pi) [g_{\tau\lambda} F^{\nu\lambda} \nabla_{\mu} G^{\mu\tau} + 1/2 g^{\nu\lambda} G^{\mu\tau} \nabla_{[\mu} F_{\lambda\tau]} + g_{\tau\lambda} G^{\nu\lambda} \nabla_{\mu} F^{\mu\tau} + 1/2 g^{\nu\lambda} F^{\mu\tau} \nabla_{[\mu} G_{\lambda\tau]}]. \quad (14.17)$$

Тождество (14.17) связывает законы сохранения ТЭИ и уравнения поля. Легко видеть, что для получения закона сохранения  $\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$  в произвольной среде необходимо иметь четыре группы уравнений, определяющие величины  $\nabla_{\mu} G^{\mu\tau}$ ,  $\nabla_{[\mu} G_{\lambda\tau]}$ ,  $\nabla_{\mu} F^{\mu\tau}$  и  $\nabla_{[\mu} F_{\lambda\tau]}$ . Используемые обычно материальные уравнения  $B = \mu H$  и  $D = \varepsilon E$  представляют собой частный случай условий вида

$$G^{\mu\tau} = g^{\mu\lambda} g^{\tau\sigma} F_{\lambda\sigma} \quad (14.18)$$

и справедливы в простых средах и вакууме. Условия (14.18) уменьшают вдвое число необходимых уравнений. ТЭИ в этом случае принимает вид

$$\tilde{T}_{\nu}^{\mu} = -(1/4\pi) (G^{\mu\tau} F_{\nu\tau} - 1/4 \delta_{\nu}^{\mu} G^{\alpha\tau} F_{\alpha\tau}). \quad (14.19)$$

Тензор  $\tilde{T}_\nu^\mu$  ковариантно сохраняется и удовлетворяет тождествам

$$\tilde{T}_\mu^\alpha \tilde{T}_\nu^\mu \equiv (1/16\pi)^2 \delta_\nu^\alpha (I_1, I_2 + L^2). \quad (14.20)$$

Электромагнитная волна в вакууме определяется как поле, для которого все инварианты равны нулю, т. е.  $I_1 = I_2 = L = 0$ . Обобщим это условие на сплошную среду и определим электромагнитную волну в среде как поле, для которого  $I_1 = I_2 = L = 0$ . Тогда из тождества (14.20) следует

$$\sum_i \tilde{T}_i^0 \tilde{T}_0^i + (\tilde{T}_0^0)^2 = 0. \quad (14.21)$$

Компоненты  $\mathbf{p}^A = \tilde{T}_0^i = (1/4\pi c)[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$  и  $\mathbf{p}^M = \tilde{T}_i^0 = (c/4\pi)[\mathbf{B} \times \mathbf{D}]$  представляют собой векторы плотности потока импульса в форме Абрагама ( $\mathbf{p}^A$ ) и в форме Минковского ( $\mathbf{p}^M$ ) соответственно. Из (14.21) следует, что эффективно  $\mathbf{p}^A$  и  $\mathbf{p}^M$  ведут себя как ко- и контравариантные пространственные компоненты одного 4-мерного вектора. Уравнение (14.21) можно рассматривать как аналог уравнения массовой оболочки  $\mathbf{p}^2 + m^2 = 0$  для плотностей потоков соответствующих величин. В простых средах  $\mathbf{p}^M = -c^2 n^2 \mathbf{p}^A$  и (14.21) переходит в  $(\mathbf{p}^M)^2 = c^2 n^2 (T_0^0)^2$  или  $(\mathbf{p}^A)^2 = (1/c^2 n^2)(T_0^0)^2$ , где  $n^2 = \epsilon\mu$ . Извлекая корень в каждом из этих соотношений, получаем:

$$|\mathbf{p}^M| = cn \tilde{T}_0^0; \quad (14.22)$$

$$|\mathbf{p}^A| = (1/cn) \tilde{T}_0^0. \quad (14.23)$$

При интегрировании по 3-мерному объему  $\mathbf{p}^M$  приводит к вектору импульса  $\mathbf{P}^M$ , который в силу теоремы Нетер сохраняется (с точностью до поверхностных натяжений) и в простых средах удовлетворяет соотношению

$$|\mathbf{P}^M| = (c/4\pi) \left| \int [\mathbf{B} \times \mathbf{D}] d^3 v \right| = cn \int \tilde{T}_0^0 d^3 v = \mathcal{E}nc. \quad (14.24)$$

Соотношение (14.24), будучи хронометрически-инвариантным, справедливо в любой системе координат, связанной с данной системой отсчета, и имеет квантовый аналог. Действительно, заменяя  $\mathbf{P}^M$  на  $\hbar p$ , а  $\mathcal{E}$  на  $\hbar\omega$  ( $p$  — волновой вектор,  $\omega$  — частота фотона), из (14.24) получаем аналог дисперсионного уравнения  $p = \omega n$  ( $\omega$ ). С помощью  $\mathbf{p}^A$  можно построить инвариантный поверхностный импульс

$$\mathbf{P}^A = (4\pi c)^{-1} \int_\sigma \epsilon_{ikl} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]^i d\sigma^{kl} = (cn)^{-1} \int_\sigma \tilde{T}_0^0 \mathbf{p}^A N d\sigma / |\mathbf{p}^A| \quad (14.25)$$

( $\mathbf{N}$  — нормаль к поверхности  $\sigma$ ), для которого справедливо  $\mathbf{P}^A = (nc)^{-1} \mathcal{E}$ .

Сравнивая (14.24) и (14.25), видим, что плотность импульса  $\mathbf{p}^M$  представляет собой импульс единицы объема среды, а плотность импульса  $\mathbf{p}^A$  — импульс единичного поверхностного слоя. Этим объясняется разница в законах дисперсии этих величин.

Выведем теперь инвариантное соотношение между потоком плотности импульса и тензором натяжений. Из (14.20) в случае плоской волны, т. е. при  $I_1 = I_2 = L = 0$ , следует

$$\sum_k \tilde{T}_k^i \tilde{T}_i^k + \tilde{T}_0^i \tilde{T}_i^0 = 0 \quad (14.26)$$

(по  $i$  нет суммирования!). В простых средах  $\tilde{T}_0^i$  и  $\tilde{T}_i^0$ , а также  $\tilde{T}_i^k$  и  $\tilde{T}_k^i$  пропорциональны друг другу. Поэтому из (14.26) следует

$$\sum_k (\tilde{T}_i^k)^2 = c^2 n^2 (\tilde{T}_0^i)^2 = (c^2 n^2)^{-1} (\tilde{T}_i^0)^2. \quad (14.27)$$

Выбирая систему координат так, чтобы  $\sum_k$  свелась к одному члену, и обозначая соответствующее направление вектором  $l^k/|l|$ , из (14.17) находим

$$\tilde{T}_i^k = (cn)^{-1} (l^k/|l|) \tilde{T}_i^0 = (v^k/c) P_i^M, \quad (14.28)$$

где  $v^k$  — групповая скорость света. В произвольной среде не существует пропорциональности между энергией и импульсом, но справедливы квадратичные соотношения (14.20). При изменении системы отсчета линейные соотношения (14.22), (14.23), (14.28) нарушаются, но квадратичные (14.20), (14.21), (14.26) остаются верными в общем случае для сред с материальными уравнениями (14.18). В случае плоской волны связь между плотностью энергии поля и тензором натяжений имеет вид:  $(T_0^0)^2 = \sum_{i,k} T_i^k T_k^i$ . Если поле неволновое, то в сопутствующей системе отсчета, т. е. при  $T_0^i = 0$ , справедливо  $3(T_0^0)^2 = \sum_{i,k} T_i^k T_k^i$ .

Рассмотрим теперь свойства другого ТЭИ, который можно получить, варьируя по метрике лагранжиан  $L' = (1/4\pi) G^{\alpha\beta} *F_{\alpha\beta}$ . Интеграл действия, соответствующий этому лагранжиану, описывает топологические свойства поля. Обозначим

$$\delta L' / \delta g_{\mu}^{\alpha} = K_{\alpha}^{\mu} = (1/8\pi) (G^{\mu\sigma} *F_{\alpha\sigma} - *G^{\mu\sigma} F_{\alpha\sigma}). \quad (14.29)$$

Свойства симметрии тензоров  $T_{\alpha}^{\mu}$  и  $K_{\alpha}^{\mu}$  различны. Если  $T_{\alpha}^{\mu}$  симметричен относительно замены  $G^{\mu\sigma} \rightarrow F^{\mu\sigma}$  и дуально инвариантен, т. е. не изменяется при замене  $G^{\mu\sigma} \rightarrow *G_{\mu\sigma}$ ,  $F_{\mu\sigma} \rightarrow *F^{\mu\sigma}$ , то  $K_{\alpha}^{\mu}$  симметричен относительно другой замены:  $G^{\mu\sigma} \rightarrow *G^{\mu\sigma}$  и изменяет знак при дуальном сопряжении  $G^{\mu\sigma} \rightarrow *G_{\mu\sigma}$ ,  $F_{\mu\sigma} \rightarrow *F^{\mu\sigma}$ . В простых средах с материальными уравнениями (14.18)  $K_{\alpha}^{\mu} = 0$  и не дает вклада в энергию — импульс поля. Но если свойства среды таковы, что

$$G^{\mu\sigma} = g^{\mu\lambda} g^{\sigma\rho} *F_{\lambda\rho}, \quad (14.30)$$

то  $T_{\alpha}^{\mu} = 0$ , а  $K_{\alpha}^{\mu} = (1/4\pi) (F^{\mu\sigma} F_{\nu\sigma} - \frac{1}{4} \delta_{\nu}^{\mu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}) = \tilde{K}_{\alpha}^{\mu}$ . Таким об-

разом, в средах, где справедливо соотношение (14.30), энергия и импульс поля определяются тензором  $\tilde{K}_\alpha^\mu$ . В этих средах все инварианты поля совпадают по величине:  $-I_1 = I_2 = L' = I$ . Тензор  $\tilde{K}_\alpha^\mu$  удовлетворяет квадратичным инвариантным соотношениям

$$\tilde{K}_\mu^\alpha \tilde{K}_\nu^\mu \equiv -(1/128\pi^2) \delta_\nu^\alpha I^2, \quad (14.31)$$

из которых для фотона, т. е. при  $I = 0$ , вытекают те же соотношения между энергией и импульсом поля, а также между импульсом и тензором натяжений, которые были получены выше с помощью  $\tilde{T}_\alpha^\mu$ .

В самом общем случае, когда не предполагается заранее никаких материальных уравнений, имеют место следующие квадратичные инвариантные соотношения:

$$K_\mu^\alpha T_\nu^\mu + T_\mu^\alpha K_\nu^\mu \equiv -(\beta/8) \delta_\nu^\alpha [(FF)(G^*G) + (F^*F)(GG)];$$

$$\text{Sp}(T^2) \equiv (\beta/8)[(G^*G)(F^*F) + (GF)^2 + (FF)(GG) + (G^*F)^2];$$

$$\text{Sp}(K^2) \equiv (\beta/8)[-(G^*G)(F^*F) + (GF)^2 - (FF)(GG) + (G^*F)^2];$$

$$\text{Sp}(T^2) - \text{Sp}(K^2) \equiv (\beta/4)[(GG)(FF) + (G^*G)(F^*F)];$$

$$\text{Sp}(T^2) + \text{Sp}(K^2) \equiv \text{Sp}[T(G)T(F)] \equiv (\beta/4)[(GF)^2 + (G^*F)^2].$$

Здесь индексы суммирования по парам индексов внутри круглых скобок опущены,  $T(G) = -(1/4\pi)[G^{\mu\tau}G_{\nu\tau} - (1/4)\delta_\nu^\mu(GG)]$ ;  $T(F) = -(1/4\pi)[F^{\mu\tau}F_{\nu\tau} - (1/4\pi)(FF)]$ .

Таким образом, в произвольной среде квадратичные инвариантные соотношения связывают уже не отдельно энергию и импульс, а энергию, импульс и тензор натяжений среды. Выбор материальных уравнений с геометрической точки зрения означает введение метрики, причем такой, что ее компоненты описывают не гравитационное поле, а диэлектрические и магнитные свойства среды. В простых средах (14.18) приводит к диагональной метрике, предложенной И. Е. Таммом [62]:  $g_{\mu\nu} = \sqrt{\mu} (1, 1, 1, (\epsilon\mu)^{-1})$ . Вакуум описывается плоской метрикой.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пуанкаре А. Наука и гипотеза. Пер. с франц. М., Т-во тип. А. И. Мамонтова, 1904.
2. Эйнштейн А. Собр. соч. Т. 2. М., «Наука», 1966.
3. Копорлева Н. Р., Сокolik Н. А. — Nucl. Phys., 1965, v. 72, p. 667.
4. Коноплева Н. П. Геометрическое описание калибровочных полей. В кн.: Тр. Междунар. семинара «Векторные мезоны и электромагнитные взаимодействия». Дубна, ОИЯИ, 1969.
5. Лихерович А. Теория связностей в целом и группы голономии. Пер. с франц. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
6. Loos H. G. — Nucl. Phys., 1965, v. 72, p. 677; Nuovo cimento, 1968, v. 58A, p. 365; 1968, v. 53A, p. 202.
7. Ne'eman Y., Rosen J. — Rev. Mod. Phys., 1965, v. 37, p. 391.
8. Rosen J., Rosen N., Ne'eman Y. Coral Gables Conf. symmetry principles high energy. Miami, 1964. San Francisco — London, 1964.

9. Коноплева Н. П. Тезисы докл. Междунар. семинара «Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике». М., ФИАН СССР, 1971.
10. Broglie L., de, Bohm D., Hilliot P., Halbwads F., Takabayashi T., Vigier J.-P. — Phys. Rev., 1963, v. 129, p. 438.
11. Kaluza Th. Zum Unitätsproblem der Physik. Berlin, Berichte, 1921, S. 966.
12. Witt B., de. Dynamical Theories of Groups and Fields. New York — London — Paris, 1965.
13. Kerner R. — Ann. Inst. Henry Poincaré, 1968, v. 9A, p. 143.
14. Trautman A. — Rep. Math. Phys., 1970, v. 1, p. 29.
15. Cho Y. M. — J. Math. Phys., 1975, v. 16, p. 2029.
16. Коноплева Н. П., Соколик Г. А. — Докл. АН СССР, 1964, т. 154, с. 310.
17. Kerbrat-Lunc H. — Compt. rend. Acad. sci., 1964, v. 259, p. 3449.
18. Atiyah M. F., Ward R. S. Comm. Math. Phys., 1977, v. 55, p. 117.
19. Atiyah M. F., Hitchin N. J., Drinfeld V. G., Manin Yu. I. — Phys. Lett., 1978, v. 65A, p. 185.
20. Weyl H. Gravitation und Electricität. Berlin, Sitzber. Preuss. Akad. Wiss., 1918.
21. Тоннела М. А. Основы электромагнетизма и теории относительности. Пер. с франц. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
22. Схоутен Я. Тензорный анализ для физиков. Пер. с англ. М., «Наука», 1965.
23. Kondo K. Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Sciences by Means of Geometry. Vol. I. Tokyo, Gakujuitsu Bunken Fukyu — Kai.
24. Куни И. А. Теория упругих сред с микроструктурой. М., «Наука», 1975.
25. Иосифьян А. Г.; Коноплева Н. П. Тезисы докладов Советской гравитационной конференции. Ереван, 1972, с. 232.
26. Коноплева Н. П. — Изв. вузов. Радиофизика, 1976, т. 19, с. 1025.
27. Rainich G. Y. — Trans. Amer. Math. Soc., 1925, v. 27, p. 106.
28. Уилер Дж. Гравитация, нейтрино и Вселенная. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
29. Newman E. T., Penrose R. — J. Math. Phys., 1962, v. 3, p. 566.
30. Cremmer E., Scherk J. — Nucl. Phys., 1976, v. B108, p. 409.
31. Coleman S. — Comm. Math. Phys., 1977, v. 55, p. 113; v. 56, p. 1.
32. Коноплева Н. П. В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 3. М., Атомиздат, 1970, с. 103.
33. Рам Ж., де. Дифференцируемые многообразия. Пер. с франц. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
34. Коноплева Н. П., Соколик Г. А. В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М., Атомиздат, 1966, с. 22.
35. Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. — Тр. Моск. мат. о-ва, 1953, т. 2, с. 275; Тр. 13-го мат. съезда. М., Изд-во АН СССР, 1958, т. 3, с. 409.
36. Картан Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства. Пер. с франц. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
37. Лумисте Ю. Г. В кн.: Тр. геометрического семинара. М., 1966, т. 1. с. 191.
38. Евтушик Л. Е. — Изв. вузов. Сер. мат., 1969, № 2 (81), с. 32.
39. Коноплева Н. П. Тезисы докладов III Межвузовской научной конференции по проблемам геометрии. Казань, КГУ, 1967.
40. Синг Дж. Общая теория относительности. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
41. Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности. М., «Наука», 1966.
42. Eguchi T. — Phys. Rev., 1976, v. 13, p. 1561.
43. Алексеевский Д. А. Функциональный анализ и его приложения, 1968, т. 2, вып. 2, с. 1.
44. Uzes C. — Ann. Phys., 1968, v. 50, p. 534.

45. Yoneya T. — J. Math. Phys., 1977, v. 18, p. 1759.
46. Toulouse G., Kleman M. — J. Phys. Lett., 1976, v. 37, p. 149.
47. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М., «Наука», 1973.
48. Wu T.T., Yang C. N. — Phys. Rev. D. 1976, v. 14, p. 437; Nucl. Phys., 1976, v. B107, p. 365.
49. t'Hoofft G. — Nucl. Phys., 1974, v. B79, p. 276.
50. Поляков А. М. — Письма ЖЭТФ, 1974, т. 20, с. 430.
51. t'Hoofft G. — Phys. Rev. Lett., 1976, v. 37, p. 8; Jackiw R., Rebbi C. — Phys. Rev. Lett., 1976, v. 37, p. 172.
52. Lund F., Regge T. — Phys. Rev. D, 1976, v. 14, p. 1524.
53. Фаддеев Л. Д., Тахтаджян Л. А. — ТМФ, 1974, т. 21, с. 160.
54. Фаддеев Л. Д. — Письма ЖЭТФ, 1975, т. 21, с. 141.
55. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Т. 1. Пер. с англ. М. — Л., ГТТИ, 1939.
56. Коноплева Н. П., Соколик Г. А. — Докл. АН СССР, 1967, т. 177, с. 302.
57. Коноплева Н. П. — Вестн. МГУ. Сер. физ., 1965, № 3, с. 73.
58. Yang C. N. — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 445.
59. Hawking S. W. — Phys. Lett., 1977, v. 60A, p. 81.
60. Румер Ю. Б. Исследование по 5-оптике. М., Гостехиздат, 1956.
61. Фок В. А. Применение идей Лобачевского в физике. М., ГТТИ, 1950.
62. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М., Гостехиздат, 1946.

## КВАНТОВАНИЕ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

### § 15. Основные идеи построения квантовой теории калибровочных полей

Геометрическая природа калибровочных полей проявляется и при построении их квантовой теории.

Попытки квантовать геометрические поля стандартными методами приводят к трудностям и противоречиям, которые встречаются уже в задаче ковариантного квантования электромагнитного поля, простейшего по своей геометрической структуре. Здесь трудности можно обойти, квантуя электромагнитное поле по методу Ферми с использованием индефинитной метрики (см., например, [1—3]). Оказалось, однако, что некритическое перенесение обоснованного в квантовой электродинамике метода Ферми на более сложные системы может привести к нарушению унитарности теории. Впервые это было обнаружено Фейнманом [4] в 1963 г. на примерах теории поля Янга—Миллса и поля тяготения. Фейнман наметил путь к устранению обнаруженной им трудности. Он показал, что унитарность диаграммы, имеющей вид замкнутого кольца, можно восстановить, если вычесть из нее другую диаграмму, тоже имеющую вид кольца и описывающую распространение фиктивной частицы.

Метод Фейнмана не давал возможности прямого обобщения на более сложные диаграммы. Решение проблемы для любых диаграмм было дано в 1967 г. де Виттом [5], а также Л. Д. Фаддеевым и В. Н. Поповым [6, 7] с помощью существенно различных подходов. Объединяет оба подхода применение метода континуального интегрирования, дающего схему ковариантной теории возмущений для калибровочных полей.

Наметим идею, которая является основной во всей дальнейшей схеме построения квантовой теории.

Поля, получающиеся друг из друга калибровочными преобразованиями (например,  $A_\mu$  и  $A_\mu + \partial_\mu \Lambda$  в электродинамике), описывают одну и ту же физическую (геометрическую) ситуацию и поэтому физически (геометрически) неразличимы. Это наводит на мысль, что основными объектами теории должны стать классы полей, получающихся друг из друга калибровочными преобразованиями. Так, в электродинамике в один класс полей  $A_\mu$  объединяются все поля вида  $A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ .

Построить теорию, в которой основными объектами являются классы, помогает обращение к методу континуального (функциональ-

ного) интегрирования. Этот метод позволяет записать величины, представляющие физический интерес, в виде интегралов «по всем полям» с весом  $\exp(iS/\hbar)$ , где  $S$  — классическое действие системы,  $\hbar$  — постоянная Планка\*. В формализме континуального интеграла можно получить теорию, в которой основными объектами являются классы, если окажется возможным записать континуальный интеграл как интеграл по всем классам. Это можно сделать, если, например, вести интегрирование по однократно пересекающейся с каждым классом поверхности в многообразии всех полей. Тогда каждый класс будет иметь на указанной поверхности точно одного своего представителя. Возникающая на таких поверхностях мера интегрирования меняется при изменении формы поверхности, однако все физические результаты не должны зависеть от выбора поверхности.

Необходимая для теории калибровочных полей модификация континуального интеграла объясняется на примере квантования конечномерных механических систем в § 16—18. Изложение в § 16 и 18 следует работам Л. Д. Фаддеева [8, 9]. Применению метода континуального интеграла в теории поля посвящен § 19. Далее (см. § 20) строится модификация континуального интеграла, необходимая в теории калибровочных полей. Центральными здесь являются вопросы выбора меры в функциональном пространстве и перехода в континуальном интеграле от одной калибровки к другой. Здесь же выписаны интегралы для функций Грина и намечена теория возмущений для их вычисления. Глава завершается рассмотрением конкретных примеров. В § 21 продемонстрировано, как методом континуального интегрирования можно получить известные результаты квантовой электродинамики без обращения к индефинитной метрике. В § 22 подробно рассмотрено квантование полей типа Янга—Миллса. В частности, на этом примере реализована схема построения функций Грина,  $S$ -матрицы и теории возмущений и рассмотрен переход от одной калибровки к другой. В § 23 решена задача о ковариантном квантовании поля тяготения Эйнштейна.

Гамильтонова форма теории тяготения исследована в § 24. Здесь же построена схема канонического квантования гравитационного поля и обсуждена в формализме континуального интеграла связь ковариантного квантования с каноническим. В § 25 рассмотрены попытки построения единой калибровочно-инвариантной теории слабых и электромагнитных взаимодействий. В § 26 обсуждается описание вихреподобных возбуждений в квантовой теории поля.

Квантовая теория калибровочных полей является быстро развивающейся областью, и объем этой книги не позволил охватить многие интересные вопросы. В частности, за пределами изложения остались вопросы ренормировки калибровочных теорий [10, 11], вывод тождеств Славнова — Уорда [12], калибровочные теории в кварковых моделях, квантование суперкалибровочных и киральных теорий.

---

\* Далее будем использовать естественную в релятивистской квантовой теории систему единиц с  $\hbar = c = 1$ .

## § 16. Механические системы и фазовое пространство

Квантование классических механических систем при помощи континуального интеграла является одним из наиболее удобных из известных методов квантования и применимо к ситуациям, когда общепринятое каноническое квантование сталкивается с трудностями. Рассмотрим метод континуального интегрирования сначала в применении к квантованию механических систем с конечным числом степеней свободы. Это сделает рассуждения и выводы короче и обзорнее. Кроме того, яснее станет их общий характер. Далее произведем обобщение на теорию поля, описывающую системы с бесконечным числом степеней свободы.

Механическая система определяется функцией Лагранжа

$$L(q, \dot{q}), \quad (16.1)$$

зависящей от точки  $q$  координатного многообразия  $M$  и обобщенной скорости  $\dot{q}$  ( $\dot{q}$  задает точку касательного к многообразию  $M$  в точке  $q$  пространства  $V_q$ ). Пусть  $n$  — размерность многообразия  $M$ . На таком многообразии можно ввести обобщенные координаты  $q^1, q^2, \dots, q^n$ .

Во многих случаях и, в частности, в задаче квантования бывает удобно перейти от лагранжева формализма к гамильтонову. С этой целью вводят канонические импульсы  $p_1, \dots, p_n$ , определяемые соотношениями

$$p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (16.2)$$

Переход от скоростей  $\dot{q}^i$  к импульсам  $p_i$  соответствует переходу от касательного пространства  $V_q$  к кокасательному  $V_q^*$  (см., например, книгу Макки [13]). Многообразие  $M$  вместе с определенным в каждой его точке  $q$  кокасательным пространством  $V_q^*$  определяет фазовое пространство механической системы  $\Gamma$ . Для нас наиболее интересен случай, когда соотношения (16.2) неразрешимы относительно  $\dot{q}$ . Так будет, если, например, определитель

$$\det \parallel \partial^2 L / \partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k \parallel \quad (16.3)$$

тождественно равен нулю. Лагранжиан  $L(q, \dot{q})$  называется в этом случае сингулярным. Функции Лагранжа таких интересных полей, как электромагнитное и поле тяготения, сингулярны в указанном смысле\*.

---

\* Точнее говоря, как электромагнитное, так и гравитационное поля являются бесконечномерными аналогами конечномерной механической системы с тождественно равным нулю определителем (16.3).

Рассмотрим переход от лагранжева формализма к гамильтонову для сингулярного лагранжиана следующего вида:

$$l(\xi, \dot{\xi}) = \sum_{\alpha=1}^N f_{\alpha}(\xi) \dot{\xi}^{\alpha} - \Phi(\xi). \quad (16.4)$$

Обобщенные скорости входят здесь линейно. Всякий несингулярный лагранжиан приводится к виду (16.4), если удвоить число динамических переменных. Действительно, нетрудно проверить, что в случае несингулярного лагранжиана уравнения движения для функции Лагранжа

$$l(q, v, \dot{q}, \dot{v}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L(q; v)}{\partial v^i} (\dot{q}^i - v^i) + L(q, v) \quad (16.5)$$

эквивалентны обычным уравнениям движения для лагранжиана  $L(q, \dot{q})$ .

Для сингулярного лагранжиана переход к виду (16.4) не столь автоматичен. Дело в том, что уравнения  $\partial l / \partial v^i = 0$  сводятся к системе

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} (\dot{q}^i - v^i) = 0, \quad (16.6)$$

которая эквивалентна уравнениям  $\dot{q}^i = v^i$ , лишь при отличном от нуля определителе (16.3), т.е. в случае несингулярного лагранжиана. Можно показать, однако, что такая эквивалентность имеет место и для сингулярного лагранжиана. В примерах из теории поля лагранжиан можно с самого начала записать в форме (16.4).

Приведем уравнения движения для лагранжиана (16.4) к гамильтонову виду. Начнем с замечания, что как известно из теории дифференциальных форм первого порядка (см., например, [14]), можно найти такую замену переменных  $\xi \rightarrow (q, p, z)$

$$q = (q^1, \dots, q^n), p = (p_1, \dots, p_n), z = (z^1, \dots, z^r), 2n + r = N, \quad (16.7)$$

что форма  $\omega = \sum_{\alpha} f_{\alpha} d\xi^{\alpha}$ , участвующая в лагранжиане (16.4), примет канонический вид  $\omega = \sum_i p_i dq^i + dS$  с точностью до аддитивного слагаемого — полного дифференциала  $dS$ , добавка которого не влияет, как известно, на уравнения движения. Число пар канонических переменных совпадает с половиной ранга антисимметричной матрицы

$$\Omega_{\alpha\beta} = (\partial f_{\alpha} / \partial \xi^{\beta} - \partial f_{\beta} / \partial \xi^{\alpha}). \quad (16.8)$$

Переменные типа  $z$  отсутствуют, если эта матрица обратима. В этом случае назовем лагранжиан (16.4) регулярным. Он имеет явно гамильтонов вид:

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - H(q, p). \quad (16.9)$$

В общем случае в переменных  $q, p, z$  лагранжиан принимает вид

$$l = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - \Phi(p, q, z). \quad (16.10)$$

Соответствующие лагранжиану (16.10) уравнения движения кроме канонических уравнений

$$\dot{q}^i = \partial\Phi/\partial p_i; \quad \dot{p}_i = -\partial\Phi/\partial q^i \quad (16.11)$$

содержат еще уравнения типа

$$\partial\Phi/\partial z^a = 0, \quad a = 1, \dots, r. \quad (16.12)$$

В регулярном случае последние уравнения отсутствуют, и задача приведения уравнений движения к гамильтонову виду решается, как только найдена замена (16.7).

Естественно попытаться использовать уравнения (16.12) для исключения переменных типа  $z$ . Это можно сделать, если

$$\det \|\Phi_{ab}\| \neq 0; \quad \Phi_{ab} = \partial^2\Phi/\partial z^a \partial z^b. \quad (16.13)$$

В этом случае подстановка найденных значений  $z^a = z^a(q, p)$  в уравнения (16.11) не изменяет их гамильтонова вида, если в качестве гамильтониана использовать

$$H(q, p) = \Phi(q, p, z(q, p)). \quad (16.14)$$

Действительно, имеем, например,

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \left( \frac{\partial\Phi}{\partial p} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial p} \right) \Big|_{z=z(q, p)}, \quad (16.15)$$

и второе слагаемое в скобках правой части исчезает вследствие (16.12). Если же условие (16.13) не выполняется, можно при помощи уравнений (16.12) выразить переменные  $z$  через  $q, p$  и  $m$  параметров  $\lambda$ , где  $m < r$ , причем  $r - m$  совпадает с рангом матрицы  $\Phi_{ab}$ . Обозначим

$$\tilde{\Phi}(q, p, \lambda) = \Phi(q, p, z(q, p, \lambda)). \quad (16.16)$$

Матрица  $\partial^2\tilde{\Phi}/\partial\lambda^a\partial\lambda^b$  исчезает тождественно, так как иначе можно было бы исключить еще несколько переменных типа  $z$  из уравнений (16.12). Таким образом, параметры  $\lambda$  входят в  $\tilde{\Phi}(q, p, z)$  линейно, и функция Лагранжа в новых переменных принимает вид

$$l = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - H(q, p) - \sum_{a=1}^m \lambda_a \varphi^a(q, p). \quad (16.17)$$

Переменные  $\lambda_a, a = 1, \dots, m$  естественно назвать множителями Лагранжа, а стоящие при них коэффициенты  $\varphi^a(q, p)$  интерпретировать как связи, наложенные на динамические переменные. Уравнения связи

$$\varphi^a(q, p) = 0, \quad a = 1, \dots, m \quad (16.18)$$

позволяют исключить  $m$  переменных  $q, p$ , выразив их через остальные переменные. При этом лагранжиан (16.17) приводится к виду (16.4), но с меньшим числом переменных ( $n$  вместо  $N$ ).

Описанный процесс исключения лишних переменных можно повторять до тех пор, пока лагранжиан не примет гамильтонов вид (16.9). Процесс исключения подразумевает явное решение уравнений связи типа (16.18), что на практике часто оказывается затруднительным. Поэтому полезно иметь формализм, не требующий явного решения уравнений связи.

Естественно считать связи, т. е. функции  $\varphi^a(q, p)$ , независимыми и неприводимыми в том смысле, что уравнения связи (16.18) определяют в фазовом пространстве  $\Gamma$  поверхность  $M$  размерности  $2n - m$ , причем произвольная функция  $f$ , исчезающая на  $M$ , является линейной комбинацией связей

$$f = \sum_a c_a(q, p) \varphi^a(q, p) \quad (16.19)$$

с переменными, вообще говоря, коэффициентами  $c_a(q, p)$ .

Рассмотрим специальный, на первый взгляд, случай, когда связи  $\varphi^a$  и гамильтониан  $H$  удовлетворяют дополнительным условиям

$$\{\varphi^a, \varphi^b\} = \sum_c c_c^{ab} \varphi^c; \quad (16.20)$$

$$\{H, \varphi^a\} = \sum_b c_b^a \varphi^b, \quad (16.21)$$

где  $c_c^{ab}, c_b^a$  — некоторые функции  $q$  и  $p$ , а  $\{f, g\}$  — скобки Пуассона:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right). \quad (16.22)$$

Другими словами, мы считаем, что скобки Пуассона связей друг с другом и с гамильтонианом исчезают на  $M$ . Забегая вперед, укажем, что именно таким условиям удовлетворяют связи в теории калибровочных полей.

Для выполнения условий (16.20) необходимо, чтобы  $m$  не превосходило  $n$ .

Уравнения движения для лагранжиана (16.17) состоят из канонических уравнений

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_a \lambda_a \frac{\partial \varphi^a}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \sum_a \lambda_a \frac{\partial \varphi^a}{\partial q^i} \quad (16.23)$$

и условий (16.18).

Условия (16.20), (16.21) гарантируют выполнение уравнений (16.18) при произвольных функциях  $\lambda_a(t)$ , если они выполнены для начальных условий. Другими словами, траектория, начавшаяся на  $M$ , не покидает этой поверхности.

Наблюдаемыми величинами естественно считать не все функции на многообразии  $M$ , а только такие, на изменении которых со временем не сказывается произвол в выборе  $\lambda_a(t)$ . Этому требованию удовлетворяют функции  $f(q, p)$ , подчиняющиеся условиям

$$\{f, \varphi^a\} = \sum_b d_b^a \varphi^b. \quad (16.24)$$

Действительно, в уравнениях движения для таких функций

$$\dot{f} = \{H, f\} + \sum_a \lambda_a \{\varphi^a, f\} \quad (16.25)$$

члены, зависящие от  $\lambda_a$ , исчезают на  $M$ .

Заданная на  $M$  и удовлетворяющая условиям (16.24) функция  $f(q, p)$  существенно зависит не от всех переменных. Условия (16.24) можно рассматривать как систему  $m$  дифференциальных уравнений первого порядка на  $M$ , для которых уравнения (16.20) играют роль условий интегрируемости. Поэтому функция  $f$  однозначно определяется своими значениями на подмногообразии начальных условий для этой системы, имеющем размерность  $(2n - m) - m = 2(n - m)$ . В качестве такого подмногообразия удобно взять поверхность  $\Gamma^*$ , определяемую уравнениями

$$\chi_a(q, p) = 0, \quad a = 1, \dots, m, \quad (16.26)$$

которые называются дополнительными условиями. Функции  $\chi_a$  должны удовлетворять условию

$$\det \|\{\chi_a, \varphi^b\}\| \neq 0, \quad (16.27)$$

так как только в этом случае  $\Gamma^*$  может служить начальной поверхностью для уравнений (16.24). Удобно, кроме того, считать, что  $\chi_a$  коммутируют друг с другом\*:

$$\{\chi_a, \chi_b\} = 0. \quad (16.28)$$

В этом случае на многообразии  $\Gamma^*$  можно ввести канонические переменные. Действительно, если выполнено условие (16.27), то при помощи канонического преобразования в  $\Gamma$  можно перейти к новым переменным, в которых  $\chi_a$  примут простой вид:

$$\chi_a(q, p) = p_a, \quad (16.29)$$

где  $p_a$  ( $a = 1, \dots, m$ ) — часть канонических импульсов новой системы переменных. Обозначим  $q^a$  сопряженные с ними координаты, и пусть  $q^*$ ,  $p^*$  — остальные канонические переменные. В новых переменных условие (16.27) запишется в виде

$$\det \|\partial \varphi^a / \partial q^b\| \neq 0, \quad (16.30)$$

\* Здесь и далее коммутатором двух функций  $f$  и  $g$  на фазовом пространстве мы называем скобки Пуассона  $\{f, g\}$  (16.22). Мы говорим, что функции коммутируют, если их скобки Пуассона равны нулю.

так что уравнения (16.18) можно разрешить относительно  $q^a$ . В результате поверхность  $\Gamma^*$  задается в  $\Gamma$  уравнениями

$$p_a = 0, \quad q^a = q^a(q^*, p^*), \quad (16.31)$$

означающими, что уравнения связи (16.18) можно разрешить относительно  $q^a$ , причем  $q^*$  и  $p^*$  играют роль независимых переменных на  $\Gamma^*$ . Эти переменные оказываются каноническими. Скобку Пуассона любых функций  $f$  и  $g$ , удовлетворяющих уравнениям (16.25), можно вычислить по формуле

$$\{f, g\} = \sum_i \left( \frac{\partial f^*}{\partial p^*} \frac{\partial g^*}{\partial q^*} - \frac{\partial f^*}{\partial q^*} \frac{\partial g^*}{\partial p^*} \right), \quad (16.32)$$

где

$$f^* = f(q^a(q^*, p^*), q^*, 0, p^*); \quad g^* = g(q^a(q^*, p^*), q^*, 0, p^*). \quad (16.33)$$

Для проверки формулы (16.32) удобно вычислить скобки Пуассона в неканонических координатах  $\eta = (\varphi^a, q^*, p_a, p^*)$ . При этом

$$\{f, g\} = \sum_{\alpha, \beta} \{\eta^\alpha, \eta^\beta\} (\partial f / \partial \eta^\alpha) (\partial g / \partial \eta^\beta). \quad (16.34)$$

Вследствие условий (16.20) и (16.24) ряд членов в правой части (16.34) исчезает, и в результате она совпадает с правой частью (16.32), где  $f^* = f(\eta) |_{p_a = \varphi^a = 0}$ . Подчеркнем еще раз, что вывод о каноничности  $q^*$  и  $p^*$  существенно связан с условием (16.28).

Таким образом, имеется два способа описания наблюдаемых величин в нашей системе. При первом из них наблюдаемые — функции на  $M$  (точнее, классы функций на  $\Gamma$ ), удовлетворяющие уравнениям (16.24). Скобка Пуассона определяется как значение на  $M$  скобки Пуассона в  $\Gamma$ . Для перехода ко второму способу следует подобрать дополнительные условия  $\chi_a$ , решить уравнения (16.18) и (16.26) и построить функцию  $f^*$  согласно (16.33). Можно показать, что эта процедура не зависит от выбора дополнительных условий, так как изменение  $\chi_a$  при соблюдении условий (16.27) и (16.28) сводится к каноническому преобразованию в  $\Gamma$ .

Как уже отмечалось, на практике решать уравнения связей типа (16.18) часто затруднительно и удобнее работать с первым способом описания наблюдаемых. С другой стороны, при описании по второму способу мы имеем дело с обычным фазовым пространством и можем использовать привычные формулы механики. Таким образом, для проверки правильности той или иной формулы в первом способе описания наблюдаемых достаточно проверить, что она переходит в обычную формулу при описанном выше переходе ко второму способу. Именно так мы будем в дальнейшем поступать при работе с континуальными интегралами.

## § 17. Континуальный интеграл в квантовой механике

В 1948 г. Фейнман ввел и исследовал континуальный интеграл по траекториям в конфигурационном пространстве механической системы [15]. Для приложения к теории калибровочных полей более удобно полученное Фейнманом в 1951 г. выражение для континуального интеграла, в котором интегрирование ведется по траекториям в фазовом пространстве [16].

Рассмотрим одномерную механическую систему с функцией Гамильтона  $H(q, p)$ , где  $q$  — координата ( $-\infty < q < \infty$ );  $p$  — канонический сопряженный импульс. Каноническое квантование такой системы заключается в замене координаты  $q$  и импульса  $p$  операторами  $\hat{q}$  и  $\hat{p}$  по правилу

$$q \rightarrow \hat{q} \equiv q; \quad p \rightarrow \hat{p} = -i\partial/\partial q \quad (17.1)$$

(напомним, что мы используем систему единиц с  $\hbar = 1$ ). Операторы действуют в гильбертовом пространстве волновых функций  $\psi(q)$ . Наложив на функции  $\psi(q)$  условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(q)|^2 dq = 1, \quad (17.2)$$

можно считать квадрат модуля  $|\psi(q)|^2 = \rho(q)$  плотностью вероятности нахождения частицы в точке  $q$ .

Эволюция состояния системы во времени определяется уравнением Шредингера

$$i\partial\psi/\partial t = \hat{H}\psi, \quad (17.3)$$

в котором оператор энергии  $\hat{H}$  получается из классической функции Гамильтона  $H(q, p)$  заменой  $q$  и  $p$  операторами по правилу (17.1). Формальное решение уравнения (17.3) можно записать в виде

$$\psi(t) = \hat{U}(t, t_0)\psi(t_0), \quad (17.4)$$

где оператор эволюции

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp(i(t_0 - t)\hat{H}) \quad (17.5)$$

есть показательная функция оператора энергии  $\hat{H}$ .

Метод континуального интегрирования позволяет представить матричный элемент оператора эволюции в виде среднего по траекториям в фазовом пространстве от выражения

$$\exp(iS[t_0, t]), \quad (17.6)$$

где

$$S[t_0, t] = \int_{t_0}^t \{p(\tau)\dot{q}(\tau) - H[q(\tau), p(\tau)]\} d\tau \quad (17.7)$$

есть классическое действие для траектории  $(q(\tau), p(\tau))$  ( $t_0 \leq \tau \leq t$ ) в фазовом пространстве. Среднее по траекториям и есть *континуальный интеграл Фейнмана*. Обычно континуальный интеграл определяют как предел конечномерного интеграла. Приведем одно из возможных определений.

Разделим интервал  $[t_0, t]$  на  $N$  равных частей точками  $\tau_1, \dots, \tau_{N-1}$ . Рассмотрим на интервале  $[t_0, t]$  функции  $p(\tau)$ , постоянные на интервалах

$$[t_0, \tau), (\tau_1, \tau_2), \dots, (\tau_{N-1}, t], \quad (17.8)$$

и непрерывные функции  $q(\tau)$ , линейные на интервалах (17.8). Зафиксируем значения функции  $q(\tau)$  на концах интервала  $[t_0, t]$ , положив

$$q(t_0) = q_0; \quad q(t) = q. \quad (17.9)$$

Траектория  $(q(\tau), p(\tau))$  определяется значениями кусочно-линейной функции  $q(\tau)$  в точках  $\tau_1, \dots, \tau_{N-1}$  (обозначим их  $q_1, \dots, q_{N-1}$ ) и значениями кусочно-постоянной функции  $p(\tau)$  на интервалах  $(\tau_k, \tau_{k+1})$ . Обозначим эти значения  $p_1, \dots, p_N$ .

Рассмотрим конечномерный интеграл

$$(2\pi)^{-N} \int dp_1 dq_1, \dots, dq_{N-1} dp_N \exp[iS(t_0, t)] \equiv J_N(q_0, q; t_0, t), \quad (17.10)$$

где  $S[t_0, t]$  — действие (17.7) для только что описанной траектории  $(q(\tau), p(\tau))$ , определяемой параметрами  $q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N$ . Основное утверждение заключается в том, что предел интеграла (17.10) при  $N \rightarrow \infty$  совпадает с матричным элементом оператора эволюции:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J_N(q_0, q; t_0, t) = \langle q | \exp(i(t_0 - t)\hat{H}) | q_0 \rangle. \quad (17.11)$$

Нетрудно проверить это утверждение в случаях, когда гамильтониан  $H$  зависит только от координаты или только от импульса. Если  $H = H(q)$  ( $H$  зависит только от координаты), классическое действие для описанной выше траектории  $(q(\tau), p(\tau))$  имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t (p\dot{q} - H(q))d\tau &= p_1(q_1 - q_0) + p_2(q_2 - q_1) + \dots + \\ &+ p_N(q - q_{N-1}) - \int_{t_0}^t H(q(\tau))d\tau. \end{aligned} \quad (17.12)$$

Интегрируя в (17.10) по импульсам, получаем произведение  $\delta$ -функций

$$\delta(q_1 - q_0)\delta(q_2 - q_1)\dots\delta(q - q_{N-1}), \quad (17.13)$$

позволяющее считать выражение  $\exp[-i \int_{t_0}^t H(q(\tau))d\tau]$  равным  $\exp[i(t_0 - t)H(q_0)]$  и вынести его за знак интеграла. Дальнейшее

интегрирование по координатам  $q_1, \dots, q_{N-1}$  снимает  $\delta$ -функции, кроме одной, приводя к результату

$$\delta(q_0 - q) \exp [i(t_0 - t)H(q_0)], \quad (17.14)$$

совпадающему с матричным элементом оператора эволюции.

Если  $H = H(p)$  (зависит только от импульса), действие принимает вид

$$\int_{t_0}^t (p\dot{q} - H)d\tau = p_1(q_1 - q_0) + p_2(q_2 - q_1) + \dots \\ \dots + p_N(q - q_{N-1}) - \int_{t_0}^t H(p(\tau))d\tau. \quad (17.15)$$

Интегрируя в (17.10) сначала по координатам  $q_1, \dots, q_{N-1}$ , а затем по всем импульсам  $p_1, \dots, p_N$ , получим выражение

$$(1/2\pi) \int dp \exp [ip(q - q_0) + i(t_0 - t)H(p)], \quad (17.16)$$

равное матричному элементу оператора эволюции для гамильтониана  $\hat{H} = H(\hat{p})$ .

Доказательство формулы (17.11) усложняется, если гамильтониан нетривиально зависит от координат и импульса. В этом случае допредельное выражение (17.9) не совпадает со своим пределом — матричным элементом оператора эволюции. Формула, аналогичная (17.10), для оператора эволюции уравнения параболического типа доказана, например, в работе М. А. Евграфова [17]. Для уравнения Шредингера доказательство известно лишь в случае, когда оператор  $\hat{H}$  есть сумма функции координат и функции импульсов:

$$H = H_1(q) + H_2(p). \quad (17.17)$$

В нерелятивистской квантовой механике применяются именно гамильтонианы типа (17.17).

Континуальный интеграл, определенный как предел выражения (17.9) при  $N \rightarrow \infty$ , обозначим

$$\int_{q(t_0)}^{q(t)} \exp (iS[t_0, t]) \prod_{\tau} dp(\tau) dq(\tau) / 2\pi. \quad (17.18)$$

Такое обозначение удобно, хотя и не отражает того факта, что в допредельном выражении (17.9) число интегрирований по импульсам на единицу больше, чем по координатам.

Заметим, что континуальный интеграл, определяемый формулой (17.11) как предел конечномерного, зависит от способа аппроксимации траектории ( $q(\tau), p(\tau)$ ). Это связано с тем, что при замене аргументов функции  $H(q, p)$  не коммутирующими между собой операторами  $\hat{q}$  и  $\hat{p}$  мы не имеем естественного рецепта упорядочения. Однако операторы, имеющие физический смысл, как правило, соответствуют функциям, в которых замена аргументов некоммутирую-

щими операторами ведет к однозначному ответу. Таким является оператор энергии нерелятивистской квантовой механики, равный сумме квадратичной функции импульсов и функции координат. В таких случаях и континуальный интеграл также приводит к однозначному ответу.

Обобщим формализм континуального интеграла на системы с любым конечным числом степеней свободы.

Действие механической системы с  $n$  степенями свободы имеет вид

$$S[t_0, t] = \int \left( \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - H(q, p) \right) dt. \quad (17.19)$$

Здесь  $q^i$  —  $i$ -я каноническая координата;  $p_i$  — сопряженный с ней канонический импульс;  $H(q, p) \equiv H(q^1, \dots, q^n; p_1, \dots, p_n)$  — гамильтониан.

По определению, континуальный интеграл для матричного элемента оператора эволюции — это предел конечномерного интеграла, получающегося из (17.10) заменой

$$(2\pi)^{-N} \rightarrow (2\pi)^{-Nn}; \quad dq_n \rightarrow \prod_{i=1}^n dq_k^i; \quad dp_k \rightarrow \prod_{i=1}^n dp_{i,k}, \quad (17.20)$$

где  $q_k^i$  — значение  $i$ -й координаты в точке  $\tau_k$  ( $k = 1, \dots, N - 1$ );  $p_{i,k}$  — значение  $i$ -го импульса на интервале  $(\tau_{k-1}, \tau_k)$ . При этом необходимо считать фиксированными значения всех координат  $q^1, \dots, q^n$  на обоих концах временного интервала  $[t_0, t]$ .

Определенный таким образом континуальный интеграл будем обозначать

$$\int_{q(t_0)=q_0}^{q(t)=q} \exp(iS) \prod_t \prod_{i=1}^n dq^i(t) dp_i(t) / 2\pi. \quad (17.21)$$

## § 18. Квантование систем со связями

В предыдущем параграфе рассмотрено квантование конечномерных механических систем с действием гамильтонова вида (17.19) с помощью континуального интеграла. Теорию поля можно рассматривать как бесконечномерный аналог механической системы со связями. Квантование конечномерной системы со связями требует модификации континуального интеграла.

Покажем, как выглядит континуальный интеграл для конечномерной механической системы со связями, задаваемой каноническими переменными  $q, p$ , функцией Гамильтона  $H(q, p)$  и связями  $\varphi^a(q, p)$ , которые удовлетворяют условиям (16.20), (16.21) (см. § 16). Подберем дополнительные условия  $\chi_a(q, p)$  так, чтобы были выполнены соотношения (16.27) и (16.28). Основное утверждение со-

стоит в том, что матричный элемент оператора эволюции дается континуальным интегралом

$$\int \exp \left\{ i \int_{t_0}^t \left( \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - H(q, p) \right) d\tau \right\} \prod_{\tau} d\mu(q(\tau), p(\tau)), \quad (18.1)$$

в котором мера интегрирования определена формулой

$$d\mu(t) = (2\pi)^{m-n} \det \|\{\chi_a, \varphi^b\}\| \prod_a \delta(\chi_a) \delta(\varphi_a) \prod_{i=1}^n dq^i(t) dp_i(t). \quad (18.2)$$

Для доказательства преобразуем интеграл (18.1) с мерой (18.2) к интегралу (17.21), в котором интегрирование ведется по траекториям в физическом фазовом пространстве  $\Gamma^*$ . С этой целью перейдем к описанным в § 16 координатам  $q^a, q^*, p_a, p^*$ . При этом интеграл (18.1) превращается в интеграл с другой мерой:

$$\tilde{d}\mu = (2\pi)^{m-n} \det \|\partial\varphi^a/\partial q^b\| \prod_a \delta(p_a) \delta(\varphi^a) \prod_{j=1}^n dq^j dp_j, \quad (18.3)$$

которую можно переписать еще так:

$$\prod_a \delta(p_a) \delta(q^a - q^a(q^*, p)) dq^a dp_a \prod_{j=1}^{n-m} dq^{*j} dp_j^*/2\pi. \quad (18.4)$$

Интегрирование по  $q^a$  и  $p_a$  снимается  $\delta$ -функциями. В результате интеграл принимает вид

$$\int \exp \left\{ i \int_{t_0}^t \left( \sum_j p_j^* \dot{q}^{*j} - H^*(q^*, p^*) \right) d\tau \right\} \prod_{\tau} \prod_{j=1}^{n-m} dq^{*j} dp_j^*/2\pi, \quad (18.5)$$

совпадающий с (17.21). Поэтому можно считать формулы (18.1), (18.2) доказанными.

Заметим, что интеграл (18.1) можно переписать в виде

$$\int \exp \left\{ i \int_{t_0}^t \left( \sum_i p_i \dot{q}^i - H - \sum_a \lambda_a \varphi^a \right) d\tau \right\} \prod_{\tau} \det \|\{\chi_a, \varphi^b\}\| (2\pi)^{m-n} \times \\ \times \prod_a \delta(\chi^a) \prod_{i=1}^n dq^i dp_i \prod_b \Delta\tau d\lambda_b/2\pi. \quad (18.6)$$

Символ  $\prod_b \Delta\tau d\lambda_b/2\pi$  показывает, что в допредельном выражении фигурируют интегралы по переменным  $\lambda_b$  ( $\tau_i$  — точки деления интервала  $[t_0, t]$ ) вида

$$\int \exp \left\{ -i \sum_{i,a} \lambda_a(\tau_i) \varphi^a(q(\tau_i); p(\tau_i)) \Delta\tau \right\} \prod_{i,b} \Delta\tau d\lambda_b/2\pi, \quad (18.7)$$

Выражение (18.7) равно произведению  $\delta$ -функций

$$\prod_{i, a} \delta [\varphi^a(q(\tau_i); p(\tau_i))]. \quad (18.8)$$

Это означает, что в интеграле (18.6) можно провести интегрирование по  $\lambda_b$  и вернуться к интегралу (18.1).

Покажем теперь, что континуальный интеграл (18.1) не зависит от выбора дополнительных условий. Пусть  $\chi_a$  — бесконечно малое изменение этих условий. С точностью до линейной комбинации связей можно представить  $\delta\chi_a$  как результат инфинитезимального канонического преобразования в  $\Gamma$ , генератор которого есть линейная комбинация связей. Действительно,  $\delta\chi_a$  можно представить в виде

$$\delta\chi_a = \{\Phi, \chi_a\} + \sum_b c_{ab} \varphi^b, \quad (18.9)$$

где

$$\Phi = \sum_a h_a \varphi^a, \quad (18.10)$$

а в качестве  $h_a$  можно взять решение системы уравнений

$$\sum_b \{\chi_a, \varphi^b\} h_b = -\delta\chi_a. \quad (18.11)$$

В силу условия (16.27) эта система имеет однозначное решение. При описанном каноническом преобразовании связи заменяются своими линейными комбинациями

$$\delta\varphi^a = \sum_b A_b^a \varphi^b, \quad (18.12)$$

где  $A_b^a = \{h_b, \varphi^a\} - \sum_c h_c c_b^{ac}$ . Величины, участвующие в интеграле (18.1) и мере (18.2), изменяются следующим образом:

$$\chi_a \rightarrow \chi_a + \delta\chi_a; \quad \varphi^a \rightarrow \varphi^a + \sum_b A_b^a \varphi^b; \quad H \rightarrow H;$$

$$\prod_a \delta(\varphi^a) \rightarrow \prod_a \delta(\varphi^a + \delta\varphi^a) = \left(1 + \sum_a A_a^a\right)^{-1} \prod_a \delta(\varphi^a);$$

$$\det \|\{\chi_a, \varphi^b\}\| \rightarrow \det \|\{\chi_a + \delta\chi_a, \varphi^b + \delta\varphi^b\}\| =$$

$$= \det \|\{\chi_a + \delta\chi_a, \varphi^b\}\| \det \left\| \frac{\partial(\varphi^a + \delta\varphi^a)}{\partial\varphi^b} \right\| =$$

$$= \det \|\{\chi_a + \delta\chi_a, \varphi^b\}\| \left(1 + \sum_a A_a^a\right).$$

В результате канонического преобразования мера интегрирования отличается от меры (18.2) лишь заменой  $\chi_a \rightarrow \chi_a + \delta\chi_a$ . Это и

доказывает независимость интеграла (18.1) от выбора дополнительных условий.

Полученные континуальные интегралы для конечномерных механических систем обобщим далее на теорию поля, описывающую системы с бесконечным числом степеней свободы.

## § 19. Континуальный интеграл и теория возмущений в квантовой теории поля

Теорию поля можно рассматривать как теорию механической системы с бесконечным числом степеней свободы. При этом калибровочные поля оказываются бесконечномерными аналогами механических систем со связями.

Континуальный интеграл в теории поля можно строить различными способами. Во-первых, можно исходить из действия поля, записанного в гамильтоновой форме, и строить континуальный интеграл по фазовому пространству системы с бесконечным числом степеней свободы. Во-вторых, можно исходить из действия, не записанного в явно гамильтоновой форме, и рассматривать континуальный интеграл по всем полям, что позволяет построить явно релятивистскую теорию. При гамильтоновом подходе релятивистская инвариантность часто не очевидна и требует специального доказательства.

Объяснить и обосновать метод интегрирования по всем полям можно в том случае, когда удастся преобразовать получившиеся континуальные интегралы к интегралам гамильтонова вида.

Рассмотрим определение и правила работы с континуальными интегралами на примере теории вещественного скалярного поля с действием

$$S = \int d^4x \left( \frac{1}{2} g_0^{\mu\nu} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu} - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{g}{3!} \varphi^3 \right). \quad (19.1)$$

Здесь  $\varphi(x)$  — зависящие от точки  $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  псевдоевклидова пространства  $V_4$  полевые функции;  $g_0^{\mu\nu}$  — диагональный тензор Минковского [1, -1, -1, -1]. Действие — сумма квадратичного по полю  $\varphi$  функционала  $S_0$ , дающего действие свободного поля и интеграла от  $-(g/3!)\varphi^3$ , описывающего самодействие с константой связи  $g$ . Множитель  $1/3!$  перед  $g\varphi^3$  выбран для удобства.

При определении континуального интеграла по всем полям часто используется конечномерная аппроксимация.

Возьмем в пространстве  $V_4$  большой кубический объем  $V$ , разделенный на  $N^4$  равных маленьких кубиков  $v_i$  ( $i = 1, \dots, N^4$ ). Аппроксимируем функцию  $\varphi(x)$  в объеме  $V$  функцией, постоянной в объемах  $v_i$ , а первые производные  $\partial\varphi/\partial x_\mu$  — конечными разностями

$$[\varphi(x_\nu + \delta_{\mu\nu}\Delta l) - \varphi(x_\nu)]/\Delta l, \quad (19.2)$$

где  $\Delta l$  — длина ребра кубика  $v_i$ . Аппроксимирующая кусочно-постоянная функция  $\varphi(x)$  определяется своими значениями в объемах  $v_i$ .

Рассмотрим конечномерный интеграл

$$\int \exp(iS) \prod_{\substack{i=1 \\ x \in v_i}}^{N^*} n(x) d\varphi(x) \quad (19.3)$$

по значениям функции  $\varphi(x)$  в объемах  $v_i$ . Здесь  $S$  — интеграл действия для аппроксимирующей функции  $\varphi(x)$  с аппроксимацией (19.2) для ее первых производных;  $n(x)$  — не зависящий от  $\varphi(x)$  множитель, выбранный так, чтобы при  $V \rightarrow \infty$ ,  $v_i \rightarrow 0$  интеграл (19.3) имел асимптотический вид  $\exp(cV)$  с не зависящей от  $V$  константой  $c$ . Обычно  $n(x) = a(\Delta l)^\alpha$  с постоянными (не зависящими от  $x$ ) константами  $a$  и  $\alpha$ .

Конечномерные интегралы типа (19.3) фигурируют в допредельных выражениях при определении встречающихся в теории поля континуальных интегралов. Запишем функции Грина в виде континуальных интегралов.

*Функции Грина* — средние от произведения двух и более полевых функций с весом  $\exp(iS)$ . Например, двухточечная функция определяется формулой

$$G(x, y) \equiv -i \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle = \lim_{\substack{V \rightarrow \infty \\ v_i \rightarrow 0}} -i \frac{\int \exp(iS) \varphi(x) \varphi(y) \prod_{\substack{i=1 \\ x \in v_i}}^{N^*} n(x) d\varphi(x)}{\int \exp(iS) \prod_{\substack{i=1 \\ x \in v_i}}^{N^*} n(x) d\varphi(x)}. \quad (19.4)$$

Стоящий в правой части этой формулы предел обозначим

$$\int \exp(iS) \varphi(x) \varphi(y) \prod_x n(x) d\varphi(x) / \int \exp(iS) \prod_x n(x) d\varphi(x). \quad (19.5)$$

Функции Грина считают известными, если известен *производящий функционал*

$$Z[\eta] = \int \exp(iS + i \int \eta(x) \varphi(x) d^4x) \prod_x n(x) d\varphi(x) / \int \exp(iS) \prod_x n(x) d\varphi(x). \quad (19.6)$$

В частности, двухточечная функция Грина дается формулой

$$G(x, y) = i \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \frac{\delta}{\delta \eta(y)} Z[\eta] |_{\eta=0}. \quad (19.7)$$

В теории свободного поля функционал  $Z[\eta]$  нетрудно вычислить. Для этого при интегрировании по  $\varphi$  в числителе формулы (19.6) сделаем сдвиг:

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \varphi_0(x), \quad (19.8)$$

подобрав  $\varphi_0(x)$  из условия сокращения в показателе экспоненты членов, линейных по  $\varphi$ . Это приводит к уравнению для  $\varphi_0(x)$ :

$$-(\square + m^2)\varphi_0(x) = -\eta(x). \quad (19.9)$$

Решение этого уравнения выражается через функцию Грина  $D(x, y)$  оператора  $(-\square - m^2)$  формулой

$$\varphi_0(x) = -\int D(x, y)\eta(y)d^4y. \quad (19.10)$$

Функция Грина — это решение уравнения

$$(-\square_x - m^2)D(x, y) = \delta(x - y) \quad (19.11)$$

с  $\delta$ -функцией в правой части.

После сдвига (19.8) интеграл в числителе правой части (19.6) сводится к произведению интеграла в знаменателе на множитель

$$\exp\{(-i/2) \int \eta(x)D(x, y)\eta(y)d^4x d^4y\}, \quad (19.12)$$

который и дает значение производящего функционала в случае свободного поля. Двухточечная функция в теории свободного поля [обозначим ее  $G_0(x, y)$ ], вычисленная по формуле (19.7), есть функция Грина оператора  $(-\square - m^2)$ :

$$G_0(x, y) = D(x, y). \quad (19.13)$$

Эта функция определена уравнением (19.11) не однозначно, а лишь с точностью до аддитивной добавки — решения однородного уравнения  $(-\square - m^2)f = 0$ .

Существует, однако, наиболее естественный выбор функции  $D(x, y)$ , в пользу которого говорят многие соображения. Приведем одно из них.

Выражение  $\exp(iS)$  есть осциллирующий функционал  $\varphi(x)$ . Рассмотрим вместо него функционал  $\exp(iS_\varepsilon^*)$ , где  $S_\varepsilon$  — зависящее от неотрицательного параметра комплексное действие

$$S_\varepsilon = (1/2) \int \varphi(-\square - m^2 + i\varepsilon)\varphi d^4x, \quad (19.14)$$

подобранное так, чтобы функционал  $\exp(iS_\varepsilon)$  был по абсолютной величине меньше единицы и исчезал при  $\int \varphi^2 d^4x \rightarrow \infty$ .

Результаты получаются однозначными, если использовать при определении функций Грина «исправленное» действие  $S_\varepsilon$ , а затем в ответах перейти к пределу  $\varepsilon \rightarrow +0$ . В частности,  $D(x, y)$  становится пределом функции Грина оператора  $(-\square - m^2 + i\varepsilon)$ . Последняя определена однозначно. Она зависит от разности  $(x-y)$  и дается формулой

$$D(x-y) = (2\pi)^{-4} \int \exp(ik(x-y))/(k^2 - m^2 + i\varepsilon). \quad (19.15)$$

Предел этой функции при  $\varepsilon \rightarrow +0$  называется *причинной* или *фeyнмановской функцией Грина* и обозначается  $D_F(x-y)$ .

Таким образом, для среднего от произведения двух полей  $\varphi(x)$  и  $\varphi(y)$  в теории свободного поля имеем

$$\langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle = iD_F(x-y). \quad (19.16)$$

Среднее от произведения любого нечетного числа функций  $\varphi$  равно, очевидно, нулю. Для среднего от четного числа функций нетрудно вывести утверждение, известное под названием *теоремы Вика*.

Среднее от произведения четного числа функций  $\varphi(x_1)\dots\varphi(x_{2n})$  равно сумме произведений всевозможных попарных средних. Например,

$$\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4) \rangle = \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \rangle \langle \varphi(x_3)\varphi(x_4) \rangle + \langle \varphi(x_1)\varphi(x_3) \rangle \langle \varphi(x_2)\varphi(x_4) \rangle + \langle \varphi(x_1)\varphi(x_4) \rangle \langle \varphi(x_2)\varphi(x_3) \rangle. \quad (19.17)$$

Доказательство для среднего от  $2n$  функций получим, продифференцировав  $2n$  раз функционал (19.12) и положив  $\eta = 0$ .

Теорема Вика используется при построении формальной теории возмущений и связанной с ней диаграммной техники. Построим теорию возмущений для скалярного поля с лагранжианом (19.1). Представим функционал  $\exp(iS)$  в виде

$$\exp(iS) = \exp(iS_0)\exp(iS_1), \quad (19.18)$$

где  $S_0$  — действие свободного поля, а член

$$S_1 = -(g/3!) \int \varphi^3(x) d^4x \quad (19.19)$$

описывает самодействие. Теория возмущений основана на разложении  $\exp(iS_1)$  под знаком континуального интеграла в ряд по  $g$ :

$$\exp(iS_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ig)^n}{n! (3!)^n} \int \varphi^3(x_1)\dots\varphi^3(x_n) d^4x_1\dots d^4x_n \quad (19.20)$$

и последующем почленном интегрировании получающихся рядов. Например, для двухточечной функции Грина получается представление в виде частного двух рядов:

$$G(x, y) = -i \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ig)^n}{n! (3!)^n} \int \exp(iS_0) \varphi(x) \varphi(y)}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ig)^n}{n! (3!)^n} \int \exp(iS_0)} \rightarrow \frac{\int \varphi^3(x_1)\dots\varphi^3(x_n) d^4x_1\dots d^4x_n \prod_x n(x) d\varphi(x)}{\int \varphi^3(x_1)\dots\varphi^3(x_n) d^4x_1\dots d^4x_n \prod_x n(x) d\varphi(x)}. \quad (19.21)$$

Если разделить числитель и знаменатель в правой части (19.21) на интеграл

$$\int \exp(iS_0) \prod_x n(x) d\varphi(x), \quad (19.22)$$

то задача сводится к вычислению средних типа

$$\langle \varphi^3(x_1) \dots \varphi^3(x_n) \rangle_0 \equiv \frac{\int \exp(iS_0) \varphi^3(x_1) \dots \varphi^3(x_n) \prod_x \varphi(x) d\varphi(x)}{\int \exp(iS_0) \prod_x \varphi(x) d\varphi(x)} \quad (19.23)$$

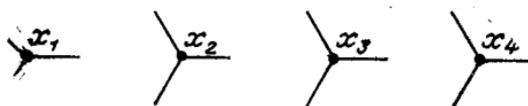
в знаменателе правой части (19.21) и к вычислению средних

$$\langle \varphi(x) \varphi(y) \varphi^3(x_1) \dots \varphi^3(x_n) \rangle_0 \quad (19.24)$$

в числителе.

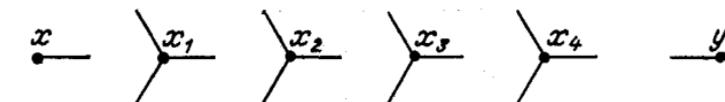
Здесь нам и понадобится теорема Вика, которая представляет средние  $\langle \dots \rangle_0$  в виде суммы всевозможных попарных средних, позволяя вычислить любой член рядов в (19.21). Фейнман указал на то, что каждому члену рассматриваемых рядов можно сопоставить рисунок — диаграмму. Теория возмущений, каждому члену ряда которой сопоставляется диаграмма, получила название *диаграммной техники* [18]. В рассматриваемой теории скалярного поля с самодействием можно прийти к диаграммам следующим образом.

Сопоставим среднему (19.23) диаграмму в виде  $n$  точек (каждая с тремя отростками), отображающих точки  $x_1, \dots, x_n$  в псевдоевклидовом пространстве  $V_4$ . Такая диаграмма для случая  $n = 4$  имеет вид



$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{c} \nearrow \\ \bullet \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow \\ \bullet \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow \\ \bullet \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow \\ \bullet \\ \searrow \end{array} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \quad (19.25)$$

Среднему (19.24) сопоставим диаграмму, получающуюся из соответствующей диаграммы для среднего (19.23) добавлением двух точек (каждая с одним отростком), изображающих точки  $x$  и  $y$  в  $V_4$ . Например, для  $n = 4$  получим



$$\begin{array}{cccccc} \bullet & \begin{array}{c} \nearrow \\ \bullet \\ \searrow \end{array} & \bullet \\ x & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y \end{array} \quad (19.26)$$

Эти диаграммы назовем *преддиаграммами* в отличие от тех, которые будут введены далее. Преддиаграммы обладают симметрией относительно перестановки отростков в каждой точке. Поэтому можно говорить о группе симметрии  $G_n$   $n$ -точечной преддиаграммы порядка

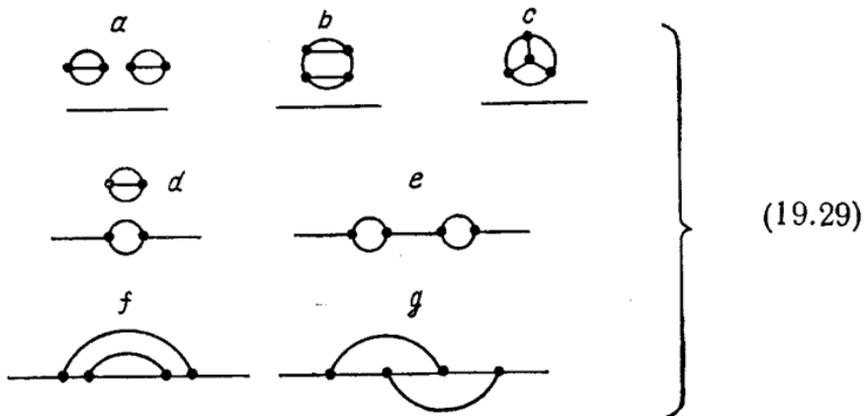
$$R_n = n!(3!)^n. \quad (19.27)$$

Симметрия преддиаграмм отражает симметрию соответствующих им средних (19.23), (19.24), не изменяющихся при перестановке аргументов  $x_1, \dots, x_n$  и при перестановке под знаком среднего в каждой тройке полевых функций  $\varphi(x_i)\varphi(x_i)\varphi(x_i) = \varphi^3(x_i)$ .

Заметим, что выражение  $R_n^{-1}$  [вместе с  $(-ig)^n$ ] фигурирует в рядах (19.21) как множитель перед средними  $\langle \dots \rangle_0$ .

Согласно теореме Вика, средние (19.23), (19.24) — суммы произведений всевозможных попарных средних. Каждому способу образования попарных средних сопоставим диаграмму, соединив линией каждую пару точек  $x_i, x_j$  преддиаграммы, если среди попарных средних есть среднее  $\langle \varphi(x_i)\varphi(x_j) \rangle$ . Число линий равно числу пар, т.е. уменьшенному вдвое числу усредняемых полевых функций.

Все диаграммы, возникающие из преддиаграммы (19.25), представлены в (19.28), а все возникающие из преддиаграммы (19.26) — в (19.29)\*:



Выражение, соответствующее диаграмме, получится, если произведение попарных средних проинтегрировать по  $x_1, \dots, x_n$ , умножив результат на  $(-ig)^n R_n^{-1}$  и на число способов, которыми данная диаграмма получается из преддиаграммы. Нетрудно заметить, что указанное число способов равно отношению  $R_n/r_{n,d}$  порядка  $R_n$  группы симметрии преддиаграммы к порядку  $r_{n,d}$  группы симметрии диаграммы, полученной из преддиаграммы соединением ее вершин линиями. В результате численный множитель перед интегралом по  $x_1, \dots, x_n$  становится равным  $(-ig)^n r_{n,d}^{-1}$ .

\* В (19.28), (19.29) не учтены диаграммы, содержащие поддиаграммы, соединенные с основной частью одной линией {  } . В операторном формализме это означает, что взаимодействие написано в виде нормального произведения  $(g/3!): \varphi^3$ .

Полученные правила соответствия можно переформулировать следующим образом. Сопоставим каждой линии, соединяющей точки  $x_i, x_j$ , функцию Грина  $D_F(x_i - x_j)$ , отличающуюся от среднего  $\langle \varphi(x_i)\varphi(x_j) \rangle_0$  множителем  $i$ , а вершине — константу связи  $g$ :

$$\left. \begin{array}{l} \overline{x_i \quad x_j} \\ \text{Y} \\ D_F(x_i - x_j) \\ g \end{array} \right\} \quad (19.30)$$

Выражение для диаграммы получится, если произведение выражений, соответствующих элементам диаграмм — вершинам и линиям, проинтегрировать по координатам вершин и умножить результат на  $i^{l-n-1} r_{n,d}^{-1}$ , где  $l$  — число линий диаграммы,  $n$  — число ее вершин,  $r_{n,d}$  — порядок группы симметрии.

Наличие множителя симметрии  $r_{n,d}$  не всегда четко отмечается в литературе. Возможно, это вызвано тем, что в квантовой электродинамике (единственной теории, в которой для сравнения с экспериментом необходимо учитывать высшие диаграммы) этот множитель равен единице для всех диаграмм, кроме вакуумных, которые при описании физических эффектов можно не рассматривать.

При вычислении вкладов от различных диаграмм в функцию Грина можно ограничиться связными диаграммами, т. е. такими, в которых можно пройти из любой вершины диаграммы в любую другую вершину, двигаясь по линиям диаграммы. При доказательстве учтем, что диаграммы, соответствующие ряду в знаменателе формулы (19.25), дают суммарный вклад вида

$$\exp \sum_i D_i^c, \quad (19.31)$$

где  $\sum_i D_i^c$  — сумма вкладов всех связных вакуумных диаграмм (без внешних линий). Формула (19.31) следует из того, что диаграмма, состоящая из  $n_1$  связных компонент первого сорта,  $n_2$  связных компонент второго сорта и т.д., имеет множителем симметрии выражение

$$r^{-1} = \prod_i ((n_i!) r_i^{n_i})^{-1}, \quad (19.32)$$

где  $r_i$  — порядок группы симметрии связной компоненты  $i$ -го сорта. Множители  $(n_i!)^{-1}$  отражают симметрию диаграммы относительно перестановок одинаковых компонент и приводят к показательной функции (19.31). Остается заметить, что сумма вкладов диаграмм в числитель (19.21) сводится к произведению суммы вкладов связных диаграмм на множитель (19.31).

В учебниках по квантовой теории поля (см., например, [1—3]) диаграммная техника строится обычно в рамках операторного мето-

да. Приведенный здесь на примере вещественного скалярного поля ее вывод с помощью континуальных интегралов представляется более естественным. Фейнман пришел к своим диаграммам именно через континуальный интеграл.

Для конкретных расчетов более удобна диаграммная техника в импульсном пространстве. Она возникает, если перейти к преобразованию Фурье  $\tilde{\varphi}(k)$  функций поля  $\varphi(x)$ :

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-4} \int \exp(ikx) \tilde{\varphi}(k) d^4k \quad (19.33)$$

и рассматривать в качестве функций Грина средние вида

$$\langle \tilde{\varphi}(k_1) \dots \tilde{\varphi}(k_n) \rangle. \quad (19.34)$$

Выражения, соответствующие элементам диаграмм — вершинам и линиям, принимают вид

$$\left. \begin{array}{l} \frac{k_1}{k_2} \\ \begin{array}{c} k_1 \\ / \quad \backslash \\ k_2 \quad k_3 \end{array} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \delta(k_1+k_2)(k_1^2-m^2+i\epsilon)^{-1} \\ g\delta(k_1+k_2+k_3) \end{array} \quad (19.35)$$

Вклад конкретной диаграммы в импульсной диаграммной технике получится, если произведение выражений, соответствующих, согласно (19.35), ее элементам, проинтегрировать по всем внутренним импульсам и умножить результат на  $r_{n,d}^{-1} (i/(2\pi)^4)^{l-n-1}$ , где  $n$  — число вершин;  $l$  — число линий;  $r_{n,d}$  — порядок группы симметрии диаграммы.

Отметим, что функции Грина в импульсном пространстве содержат множителем  $\delta(\sum_i k_i)$ , обеспечивающую сохранение 4-импульса:

$$G(k_i) = M(k_i) \delta(\sum_i k_i). \quad (19.36)$$

Зная функции Грина, можно вычислить элементы  $S$ -матрицы по формуле

$$S(k_1, \dots, k_n) = \lim_{k_i^2 \rightarrow m_i^2} M(k_i) \left\{ \prod_{i=1}^n (k_i^2 - m_i^2) \theta(\pm k_i^0) |2k_i^0|^{-1/2} (2\pi)^{-3/2} \right\}. \quad (19.37)$$

Доказательство этой формулы здесь не приводится, его можно найти во многих учебниках по квантовой теории поля.

Объяснение и обоснование континуальным интегралам по всем полям в квантовой теории поля можно дать в случае, когда удастся преобразовать их к интегралам в гамильтоновой форме, являющимся обобщением на теорию поля интегралов, полученных выше при квантовании конечномерных механических систем.

Продолжая рассматривать пример вещественного скалярного поля, запишем в гамильтоновой форме континуальный интеграл

$$\int \exp(iS) \prod_x n(x) d\varphi(x), \quad (19.38)$$

Для этого рассмотрим интеграл

$$\int \exp(iS[\varphi, \pi]) \prod_x n(x) d\varphi(x) d\pi(x), \quad (19.39)$$

где выражение

$$S[\varphi, \pi] = \int (\pi \partial_0 \varphi - \pi^2/2 - (\nabla \varphi)^2/2 - m^2 \varphi^2/2 - g\varphi^3/3!) d^4x \quad (19.40)$$

совпадает с действием (19.1) при замене  $\pi(x)$  на  $\partial_0 \varphi(x)$ . Действие (19.42) имеет гамильтонов вид. Соответствующая функция Гамильтона есть

$$H = \int d^3x (\pi^2/2 + (\nabla \varphi)^2/2 + m^2 \varphi^2/2 + g\varphi^3/3!), \quad (19.41)$$

где функции  $\varphi(x)$ ,  $\pi(x)$  имеют смысл плотности координаты и сопряженного ей импульса. Покажем, что интеграл (19.39) по переменным  $\varphi(x)$  и  $\pi(x)$  сводится к интегралу (19.38) по всем полям. Для этого заметим, что интеграл по  $\pi$  в формуле (19.39) можно взять в явном виде, если сделать сдвиг

$$\pi(x) \rightarrow \pi(x) + \partial_0 \varphi(x), \quad (19.42)$$

после которого интеграл превращается в произведение интеграла (19.38) по  $\varphi$  и интеграла по  $\pi$ :

$$\int \exp[-(i/2) \int \pi^2(x) d^4x] \prod_x d\pi(x), \quad (19.43)$$

сводящегося к произведению нормировочных множителей. В формулах для функций Грина — средних от произведения нескольких полей — интегралы типа (19.43) входят в числитель и знаменатель и поэтому сокращаются.

Таким образом, удалось привести континуальный интеграл в теории вещественного скалярного поля к гамильтонову виду, искусственно введя интеграл по новой переменной — каноническому импульсу. Такой прием будет использован далее при доказательстве гамильтоновости конкретных систем квантовой теории поля.

Схема континуального интегрирования по всем полям дает метод квантования бозе-полей. В операторном формализме такое квантование сводится к замене полевых функций операторами с бозевскими перестановочными соотношениями.

Квантование ферми-полей можно реализовать с помощью континуального интеграла по антикоммутирующим переменным (подробнее в книге Ф. А. Березина [19]). Для этого необходимы следующие основные факты.

Интеграл по ферми-полям (по бесконечной грассмановой алгебре с инволюцией) определяется как предел интеграла по алгебре с

единицей и конечным четным числом образующих  $x_i, x_i^*$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) с перестановочными соотношениями

$$x_i x_j + x_j x_i = 0; x_i^* x_j^* + x_j^* x_i^* = 0; x_i x_j^* + x_j^* x_i = 0. \quad (19.44)$$

Любой элемент алгебры  $f(x, x^*)$  есть полином вида

$$f(x, x^*) = \sum_{a_i, b_i=0, 1} c_{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n} x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} (x_1^*)^{b_1} \dots (x_n^*)^{b_n} \quad (19.45)$$

с коэффициентами  $c_{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n}$  из поля комплексных чисел. В силу перестановочных соотношений (19.42) при  $i = j$  имеем  $x_i^2 = (x_i^*)^2 = 0$ , так что степени образующих выше первой исчезают. Можно ограничиться порядком расположения множителей, принятым в (19.45), так как любой другой порядок можно привести к нему с помощью перестановочных соотношений (19.44).

Определим операцию инволюции, действующую на элемент (19.45) по правилу

$$f \rightarrow f^* = \sum_{a_i, b_i=0, 1} \bar{c}_{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n} x_n^{b_n} \dots x_1^{b_1} (x_n^*)^{a_n} \dots (x_1^*)^{a_1}. \quad (19.46)$$

На описанной алгебре можно ввести интеграл

$$\int f(x, x^*) dx^* dx \equiv \int f(x_1, \dots, x_n, x_1^*, \dots, x_n^*) dx_1^* dx_1 \dots dx_n^* dx_n, \quad (19.47)$$

определив его соотношениями

$$\int dx_i = 0; \int dx_i^* = 0; \int x_i dx_i = 1; \int x_i^* dx_i^* = 1 \quad (19.48)$$

и требованием, чтобы символы  $dx_i, dx_i^*$  антикоммутировали друг с другом и с образующими, если наложить естественное условие линейности:

$$\int (c_1 f_1 + c_2 f_2) dx^* dx = c_1 \int f_1 dx^* dx + c_2 \int f_2 dx^* dx. \quad (19.49)$$

При интегрировании суммы (19.45) отличен от нуля только вклад от слагаемого, у которого  $a_i = b_i = 1$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

В дальнейшем будут полезны две формулы:

$$\int \exp(-x^* A x) dx^* dx = \det A; \quad (19.50)$$

$$\int \exp(-x^* A x + \eta^* x + x^* \eta) dx^* dx / \int \exp(-x^* A x) dx^* dx = \exp(\eta^* A^{-1} \eta), \quad (19.51)$$

где  $x^* A x = \sum_{i, k} a_{ik} x_i^* x_k$  — квадратичная форма образующих  $x_i, x_i^*$ , соответствующая матрице  $A$ . Выражения  $\eta^* x = \sum_i \eta_i^* x_i$ ;  $x^* \eta = \sum_i x_i^* \eta_i$  — линейные формы образующих  $x_i, x_i^*$ , коэффициенты которых  $\eta_i, \eta_i^*$  антикоммутируют друг с другом и с образующими. Элементы  $\eta_i, \eta_i^*$  вместе с образующими  $x_i, x_i^*$  можно считать образую-

щими более широкой алгебры. Выражение  $\eta^* A^{-1} \eta$  в формуле (19.49) есть квадратичная форма матрицы  $A^{-1}$ , обратной матрице  $A$ .

Показательная функция в подынтегральных выражениях формул (19.50) и (19.51) определяется разложением в ряд, где в силу перестановочных соотношений (19.44) лишь несколько первых членов разложения отличны от нуля.

Формулу (19.50) нетрудно доказать, заметив, что вклад в интеграл дает лишь  $n$ -й член разложения показательной функции. Формула (19.51) доказывается сдвигом  $x \rightarrow x + \tilde{\eta}$ ,  $x^* \rightarrow x^* + \tilde{\eta}$ , уничтожающим линейную форму по  $x$ ,  $x^*$  в подынтегральной экспоненте.

Подробное доказательство и некоторые обобщения формул (19.50), (19.51) можно найти в монографии Ф. А. Березина [19].

## § 20. Квантовая теория калибровочных полей

Изложим теперь общий способ квантования калибровочных полей в формализме континуального интеграла по всем полям. Напомним, что калибровочное поле есть связность расслоенного пространства, базой которого служит пространство — время  $V_4$ , а слоем является конечномерное пространство представлений некоторой группы  $G_0$ . Обозначим калибровочное поле  $A$ , а его компоненты  $A_\mu^a$ , где  $\mu = 0, 1, 2, 3$  — пространственно-временной и  $a$  — «изотопический» индексы. Калибровочная группа  $G$  есть прямое произведение групп  $G$ , действующих в каждой точке  $V_4$ :

$$G = \prod_x G_0(x). \quad (20.1)$$

Пусть  $\Omega$  — элемент калибровочной группы, являющийся функцией на  $V_4$  со значением в  $G_0$ . Обозначим  $A^\Omega$  результат действия элемента  $\Omega$  на поле  $A$ . Совокупность полей  $A^\Omega$ , когда  $A$  фиксировано, а  $\Omega$  пробегает калибровочную группу, называется обычно *орбитой калибровочной группы*.

Как мы видели, квантование поля с действием  $S$  сводится к усреднению функционала  $\exp(iS)$  по всем полям. В теории калибровочных полей действие  $S[A]$  калибровочно-инвариантно, т. е. одинаково для всех полей, получающихся друг из друга калибровочными преобразованиями:

$$S[A^\Omega] = S[A]. \quad (20.2)$$

Другими словами, действие есть функционал на классах полей, получающихся друг из друга калибровочными преобразованиями. В этой ситуации естественно возникает задача перейти от интегрирования по всем полям к интегрированию по классам полей. Ниже излагается один из возможных подходов к этой задаче.

Для построения континуального интеграла необходимо выбрать меру в многообразии всех полей  $A$ . Простейшей является мера

$$d\mu [A] = \prod_x \prod_{\mu, a} dA_{\mu}^a(x), \quad (20.3)$$

где символ  $\prod_x$  был определен в § 19. Назовем эту меру *локальной*.

В конкретных примерах из теории калибровочных полей мера (20.3) обладает свойством калибровочной инвариантности:

$$d\mu [A^{\Omega}] = d\mu [A]. \quad (20.4)$$

Инвариантность действия  $S [A]$  и меры  $d\mu [A]$  относительно калибровочных преобразований  $A \rightarrow A^{\Omega}$  приводит к тому, что соответствующий континуальный интеграл

$$\int \exp (iS [A]) d\mu [A] \quad (20.5)$$

становится пропорциональным «объему орбиты», т.е. континуальному интегралу

$$\int_x \prod d\Omega (x) \quad (20.6)$$

по калибровочной группе  $G$ . Здесь  $\prod_x d\Omega (x)$  — инвариантная мера на группе  $G$ , равная произведению на группах  $G_0$ , действующих в каждой точке пространства—времени  $V_4$ .

Излагаемый здесь подход к интегрированию по классам состоит в явном выделении этого множителя для континуального интеграла. Такое выделение можно реализовать несколькими способами. Идея одного из них состоит в переходе от интеграла (20.5) к интегралу по поверхности в многообразии всех полей, однократно пересекающей  $\epsilon$  орбитами калибровочной группы.

Пусть уравнение поверхности есть

$$f (A) = 0. \quad (20.7)$$

Уравнение  $f (A^{\Omega}) = 0$  должно иметь при любом  $A (x)$  единственное решение относительно  $\Omega (x)$ .

Введем функционал  $\Delta_f [A]$ , определив его условием

$$\Delta_f [A] \int_x \prod \delta [f (A^{\Omega} (x))] d\Omega (x) = 1. \quad (20.8)$$

Здесь мы интегрируем по калибровочной группе  $G$  бесконечномерную  $\delta$ -функцию  $\prod_x \delta (f (A^{\Omega} (x)))$ . Такая  $\delta$ -функция есть функционал,

определяемый заданием правила его интегрирования с другими функционалами. В дальнейшем будет приведено несколько конкретных примеров вычисления интегралов типа (20.8). Заметим, что функционал  $\Delta_f [A]$  калибровочно-инвариантен, т.е.

$$\Delta_f [A^{\Omega}] = \Delta_f [A]. \quad (20.9)$$

Чтобы выделить из континуального интеграла (20.4) множитель (20.6), вставим под знак интеграла левую часть формулы (20.8) (равную единице) и сделаем замену переменной  $A^\Omega \rightarrow A$ . Мера  $d\mu [A]$  и функционалы  $S [A]$ ,  $\Delta_f [A]$  инвариантны при такой замене. Интеграл (20.4) сводится к произведению объема группы на интеграл

$$\int \exp (iS [A]) \Delta_f [A] \int_x \text{П}\delta (f (A)) d\mu [A]. \quad (20.10)$$

Именно этот интеграл будет исходным в квантовой теории калибровочных полей.

Покажем, что интеграл (20.10), формально зависящий от выбора поверхности  $f (A) = 0$ , на самом деле инвариантен по отношению к выбору поверхности. Для доказательства вставим под знак интеграла (20.10) «другую единицу»:

$$1 = \Delta_g [A] \int_x \text{П}\delta (g (A (x))) d\Omega (x), \quad (20.11)$$

где  $g (A) = 0$  — уравнение другой поверхности, которая, как и поверхность  $f (A) = 0$ , однократно пересекается с орбитами группы.

Изменив порядок интегрирования по  $A$  и  $\Omega$ , сделав затем сдвиг  $A^\Omega \rightarrow A$  и, наконец, снова поменяв местами порядок интегрирования по  $A$  и  $\Omega$ , приведем интеграл (20.10) к виду

$$\int \exp (iS [A]) \Delta_g [A] \int_x \text{П}\delta (g (A)) d\mu [A]. \quad (20.12)$$

Описанный прием позволяет переходить в континуальном интеграле от одной поверхности к другой, или, как еще можно сказать, от одной калибровки к другой. В частности, такой способ удобен при переходе от гамильтоновой формы континуального интеграла к интегралу в релятивистской калибровке. Ниже мы проследим такой переход на конкретных примерах.

Можно указать метод выделения из континуального интеграла объема калибровочной группы более общий, чем только что описанный. Рассмотрим калибровочно-неинвариантный функционал  $F [A]$ . Определим функционал  $\Phi [A]$  уравнением

$$\Phi [A] \int_x F [A^\Omega] \text{П}d\Omega (x) = 1. \quad (20.13)$$

Этот функционал калибровочно-инвариантен. Конечно, необходимо потребовать, чтобы континуальный интеграл в левой части выражения (20.13) действительно существовал. Вставив левую часть (20.13) в интеграл (20.5) и сделав затем сдвиг  $A^\Omega \rightarrow A$ , получим произведение объема группы (20.6) на интеграл:

$$\int \exp (iS [A]) \Phi [A] F [A] d\mu [A]. \quad (20.14)$$

Введенный выше интеграл (20.10) — частный случай (20.14). Независимость интеграла (20.14) от выбора функционала доказывается так

же, как и независимость интеграла (20.10) от выбора поверхности  $f(A) = 0$ .

Функции Грина в теории калибровочных полей определим как средние от произведения функций поля в различных точках пространства — времени  $V_4$ . Производящий функционал для функций Грина имеет вид

$$Z[\eta] = \frac{\int \exp \{iS[A] + i \int \eta A d^4 x\} F[A] \Phi[A] d\mu[A]}{\int \exp (iS[A]) F[A] \Phi[A] d\mu[A]}, \quad (20.15)$$

где  $S[A]$  — действие поля  $A$ ;  $d\mu[A]$  — локальная калибровочно-инвариантная мера; функционалы  $F$  и  $\Phi$  определены выше;  $\int \eta A d^4 x$  есть линейный функционал

$$\int \left( \sum_{\mu, \alpha} \eta_{\alpha}^{\mu}(x) A_{\mu}^{\alpha}(x) \right) d^4 x, \quad (20.16)$$

где  $\eta_{\alpha}^{\mu}(x)$  — произвольные пробные функции.

Функции Грина — вариационные производные функционала (20.15) — зависят от выбора калибровки, т. е. от выбора функционала  $F[A]$ . Физические результаты, получаемые усреднением калибровочно-инвариантных функционалов, от выбора калибровки не зависят.

Отметим характерное отличие теории возмущений в теории калибровочных полей от развитой в § 19 для теории скалярного поля. Пусть действие  $S$  содержит малый параметр  $\varepsilon$ . Действие  $S_0$ , соответствующее нулевому значению параметра  $\varepsilon$ , будем считать квадратичной формой полевых функций. Именно так обстоит дело в большинстве примеров из теории поля.

При построении теории возмущений в формализме континуального интеграла в § 19 функционал  $\exp(iS)$  мы разлагали в ряд вида

$$\exp(iS) = \exp(iS_0) \exp(iS_1) = \exp(iS_0) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n / n! \quad (20.17)$$

по степеням  $\varepsilon$ . Получившийся функциональный ряд затем почленно интегрировали, вычисляя отдельные члены ряда теории возмущений с помощью теоремы Вика, которая следует из того, что  $S_0$  — невырожденная квадратичная форма.

В теории калибровочных полей под знак континуального интеграла кроме функционала  $\exp(iS)$  входит еще произведение функционалов  $F\Phi$ . Это произведение в теории возмущений также разлагается в ряд по  $\varepsilon$ . Если  $F$  —  $\delta$ -функционал, его разложение в ряд по  $\varepsilon$  затруднительно. Поэтому следует так выбирать уравнение поверхности  $f(A) = 0$ , чтобы оно не содержало параметра  $\varepsilon$ . Таковы, например, уравнения, выделяющие лоренцеву и кулонову калибровки в электродинамике, а также в теории Янга—Миллса. В теории тяготения уравнениями с аналогичными свойствами являются, например, условия гармоничности.

Отметим, что функция  $\Delta_f [A]$  зависит от параметра  $\varepsilon$  даже в том случае, когда уравнение  $f(A) = 0$  этого параметра не содержит. При этом необходимо разлагать функционал  $\Delta_f [A] \exp(iS[A])$  в ряд вида

$$\exp(iS[A]) \sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon^n/n!) b_n [A]. \quad (20.18)$$

В общем случае произведение

$$F_0 \Phi_0 \exp(iS_0) \equiv M_0, \quad (20.19)$$

где  $F_0, \Phi_0$  — главные члены функционалов  $F$  и  $\Phi$ , должно быть таким, чтобы при интегрировании с  $M_0$  произведениями полей выполнялась теорема Вика. Это свойство выполняется, если  $M_0$  есть экспонента от невырожденной квадратичной формы или произведение экспоненты с вырожденной квадратичной формой на  $\delta$ -функционал, соответствующий плоской поверхности, ортогональной нулевым направлениям этой квадратичной формы.

Построение теории возмущений, возникающей из разложения (20.18), будет рассмотрено подробнее на конкретных примерах. Только что сформулированное правило, обеспечивающее справедливость теоремы Вика, там будет выполняться.

## § 21. Квантовая электродинамика

Покажем, как работает общая схема квантования калибровочных полей, на конкретных примерах\*. Начнем с электромагнитного поля, наиболее простого по геометрической структуре.

Действие свободного электромагнитного поля

$$S = 1/4 \int (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 d^4x \quad (21.1)$$

инвариантно относительно абелевой группы калибровочных преобразований:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x). \quad (21.2)$$

Из предыдущего параграфа следует, что квантование калибровочных полей осуществляется с помощью континуального интеграла от функционала

$$\Phi F \exp(iS), \quad (21.3)$$

\* В этом и следующем параграфах будем писать векторные индексы, внизу, не делая различия между ко- и контравариантными составляющими. Повторяющиеся греческие индексы показывают суммирование с учетом псевдоевклидовой метрики, повторяющиеся латинские — суммирование по значениям 1, 2, 3. Например,  $k^2 \equiv k_\mu k_\mu = k_0^2 - \mathbf{k}^2$ ;  $\partial_\mu A_\mu = \partial_0 A_0 - \partial_1 A_1 - \partial_2 A_2 - \partial_3 A_3$ ;  $k_i k_i = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$ ;  $\delta_{\mu\nu}$  — тензор Минковского (с отличными от нуля составляющими  $\delta_{00} = -\delta_{11} = -\delta_{22} = -\delta_{33} = 1$ ).

где  $S$  — действие системы;  $F$  — произвольный калибровочно-инвариантный функционал, а функционал  $\Phi^{-1}$  — среднее от  $F$  по калибровочной группе.

Локальная мера интегрирования, имеющая в данном случае вид

$$d_\mu [A] = \prod_x \prod_{\mu=0}^3 dA_\mu(x), \quad (21.4)$$

очевидно, калибровочно-инвариантна. Остается выбрать функционал  $F[A]$ . Наиболее удобны для дальнейшего построения теории возмущений функционалы вида:

$$\left. \begin{aligned} F_1[A] &= \prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu(x)); \\ F_2[A] &= \prod_x \delta(\operatorname{div} A(x)); \\ F_3[A] &= \exp\left\{(-i/2d_l) \int (\partial_\mu A_\mu)^2 d^4x\right\}. \end{aligned} \right\} \quad (21.5)$$

Функционалы  $F_1$  и  $F_2$  приводят к явно релятивистскому квантованию, а использование  $F_3$  удобно при переходе к гамильтоновой теории. Соответствующие калибровочно-инвариантные функционалы даются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1^{-1}[A] &= \int \prod_x \delta(\partial_\mu(A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x))) d\lambda(x); \\ \Phi_2^{-1}[A] &= \int \prod_x \delta(\operatorname{div} \mathbf{A}(x) + \nabla \lambda(x)) d\lambda(x); \\ \Phi_3^{-1}[A] &= \int \exp\left\{-(i/2d_l) \int (\partial_\mu(A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x)))^2 d^4x\right\} \prod_x d\lambda(x). \end{aligned} \right\} \quad (21.6)$$

Все эти функционалы не зависят на самом деле от поля  $A_\mu(x)$ , в чем можно убедиться, сделав в первом и третьем из них сдвиг  $\lambda \rightarrow \lambda - \square^{-1} \partial_\mu A_\mu$ , а во втором  $\lambda \rightarrow \lambda - \Delta^{-1} \operatorname{div} \mathbf{A}$ . Поэтому с точностью до (бесконечного) постоянного множителя можно считать, что

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 1. \quad (21.7)$$

Теперь вид континуального интеграла определен во всех трех случаях.

Использование функционала  $F_3$  означает интегрирование по полям, удовлетворяющим уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (21.8)$$

Это хорошо известное условие кулоновой калибровки. Покажем, как интеграл с функционалом  $F_{\mathbf{a}}$  можно преобразовать к интегралу явно гамильтонова вида. Такое преобразование в § 19 для вещественного скалярного поля было сделано введением интеграла по вспомогательному полю. В нашем случае к цели приводит континуальный интеграл вида

$$\int \exp(iS[A_{\mu}, F_{\mu\nu}]) \prod_x \delta(\operatorname{div} \mathbf{A}(x)) \prod_{\mu} dA_{\mu}(x) \prod_{\mu < \nu} dF_{\mu\nu}(x) \quad (21.9)$$

с действием

$$S[A_{\mu}, F_{\mu\nu}] = \int (1/4)F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - (1/2)F_{\mu\nu}(\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu})d^4x, \quad (21.10)$$

зависящим не только от вектора  $A_{\mu}(x)$ , но и от антисимметричного тензора  $F_{\mu\nu}(x)$ . В классической теории  $F_{\mu\nu}$  — напряженность электромагнитного поля:

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}. \quad (21.11)$$

При переходе к квантовой теории необходимо считать функции  $A_{\mu}$ ,  $F_{\mu\nu}$  независимыми и интегрировать по ним как по независимым переменным. Интеграл по  $F_{\mu\nu}$  в (21.9) можно взять точно. Для этого достаточно сделать сдвиг

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} + \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}, \quad (21.12)$$

превращающий интеграл (21.9) в произведение интеграла по  $A_{\mu}$  и интеграла по  $F_{\mu\nu}$  вида

$$\int \exp(i(1/4) \int F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}d^4x) \prod_x \prod_{\mu < \nu} dF_{\mu\nu}(x). \quad (21.13)$$

Этот интеграл есть просто нормировочная постоянная.

Перепишем действие (21.10) в трехмерных обозначениях:

$$\int [E\partial_0\mathbf{A} - (1/2)\mathbf{E}^2 + (1/2)\mathbf{H}^2 - (\mathbf{H}, \operatorname{rot} \mathbf{A}) + A_0 \operatorname{div} \mathbf{E}]d^4x, \quad (21.14)$$

где

$$E_i = F_{0i}; H_1 = F_{23}; H_2 = F_{31}; H_3 = F_{12}. \quad (21.15)$$

Возьмем в (21.9) интеграл по  $\mathbf{H}$ , что сводится к замене  $\mathbf{H} \rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{A}$  в действии (21.14). Затем проинтегрируем по  $A_0$ , что дает функционал

$$\int_x \delta(\operatorname{div} \mathbf{E}(x)). \quad (21.16)$$

Получим

$$\int \exp(iS[\mathbf{A}, \mathbf{E}]) \int_x \delta(\operatorname{div} \mathbf{A}(x)) \delta(\operatorname{div} \mathbf{E}(x)) \prod_{i=1}^3 dA_i(x) dE_i(x) \quad (21.17)$$

с действием гамильтонова вида

$$\int [E\partial_0\mathbf{A} - (1/2)\mathbf{E}^2 - (1/2)(\operatorname{rot} \mathbf{A})^2]d^4x. \quad (21.18)$$

Интеграл (21.17) является аналогом интегралов, рассмотренных в § 18 при квантовании конечномерных механических систем со связями. Здесь роль связи играет  $\operatorname{div} \mathbf{E}$ , роль дополнительного условия — уравнения кулоновой калибровки (21.8). Независимыми переменными можно считать поперечные в трехмерном смысле составляющие векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{E}$  векторного потенциала и напряженности электрического поля.

Разобранная схема квантования электромагнитного поля позволяет построить формализм квантовой электродинамики без введения индефинитной метрики.

Необходимость модификации континуального интеграла в квантовой электродинамике отмечалась Бялыницким-Бирулей [20], который, по-видимому, впервые рассмотрел континуальный интеграл с  $\delta$ -функционалом  $\prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu)$  (однако без указания на возможность появления дополнительного множителя типа  $\Delta_f$  при переходе к теории поля с неабелевой калибровочной группой).

Лагранжиан спинорной квантовой электродинамики

$$L(x) = \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu(x)) - m)\psi(x) - (1/4)(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x))^2, \quad (21.19)$$

где  $\gamma_\mu$  — матрицы Дирака, содержит кроме электромагнитного поля  $A_\mu(x)$  четырехкомпонентные спиноры  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ , описывающие фермиевское электрон-позитронное поле. Трехлинейный член  $e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu$  описывает взаимодействие электромагнитного поля с электронно-позитронным. Лагранжиан (21.19) инвариантен относительно абелевой группы калибровочных преобразований:

$$\left. \begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x); \\ \psi(x) &\rightarrow \exp(i e \lambda(x)) \psi(x); \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) \exp(-ie \lambda(x)). \end{aligned} \right\} \quad (21.20)$$

В схеме континуального интегрирования следует считать компоненты спиноров  $\psi_\alpha(x)$ ,  $\bar{\psi}_\alpha(x)$  антикоммутирующими между собой элементами грассмановой алгебры и интегрировать функционал  $\exp(iS)$  по мере

$$\prod_x \left( \prod_\mu dA_\mu(x) \prod_\alpha d\bar{\psi}_\alpha(x) d\psi_\alpha(x) \right) \equiv \prod_x dA d\bar{\psi} d\psi. \quad (21.21)$$

Наметим построение теории возмущений по параметру  $e$  — коэффициенту при трехлинейном члене взаимодействия электромагнитного поля с электронно-позитронным. Функционалы  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  не зависят от параметра  $e$ , так что дело сводится к почленному интегрированию ряда

$$\exp(ie\Delta S) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} (\Delta S)^n. \quad (21.22)$$

Вид функций Грина зависит от выбора функционала  $F[A]$ . Найдем производящие функционалы для невозмущенных функций, соответствующих нулевому значению параметра  $e$ . При выборе  $F = F_1$  необходимо вычислить интеграл

$$Z_0[\eta] = \frac{\int \exp i(S_0 + \int (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + \eta_\mu A_\mu) d^4x) \prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu) dAd\bar{\psi}d\psi}{\int \exp(iS_0) \prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu) dAd\bar{\psi}d\psi}, \quad (21.23)$$

где  $\bar{\eta}$ ,  $\eta$ ,  $\eta_\mu$  — источники полей  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$ ,  $A_\mu$ . Интегрирование в (21.23) ведется по полям  $A_\mu(x)$ , удовлетворяющим условию Лоренца:

$$\partial_\mu A_\mu(x) = 0. \quad (21.24)$$

Поэтому интегралы с функционалом  $F_1[A]$  назовем *интегралами в лоренцевой калибровке*. Вычисляется функционал (21.23) стандартным приемом — сдвигом:

$$\psi \rightarrow \psi + \psi_0; \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} + \bar{\psi}_0; \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + A_\mu^{(0)}, \quad (21.25)$$

уничтожающим линейные по  $\bar{\psi}$ ,  $\psi$ ,  $A_\mu$  члены в показателе подынтегральной экспоненты числителя (21.23). Чтобы при сдвиге (21.25) не изменился  $\delta$ -функционал  $F_1[A]$ , достаточно выбрать поле  $A_\mu^{(0)}(x)$  поперечным, т. е. удовлетворяющим условию (21.24). Выражение для функционала  $Z_0[\eta]$  получается равным

$$\exp[-i \int \bar{\eta}(x) G(x-y) \eta(y) d^4x d^4y - (i/2) \int \eta_\mu(x) D_{\mu\nu}^{\text{tr}}(x-y) \eta_\nu(y) d^4x d^4y], \quad (21.26)$$

где

$$\left. \begin{aligned} G(x-y) &= (2\pi)^{-4} \int d^4p \exp(ip(x-y)) (\hat{p} + m)/(p^2 - m^2 + i0); \\ D_{\mu\nu}^{\text{tr}}(x-y) &= (2\pi)^{-4} \int d^4k \exp(ik(x-y)) (-k^2 \delta_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu)/(k^2 + i0)^2. \end{aligned} \right\} \quad (21.27)$$

Здесь  $(p, x-y) = p_\mu(x-y)_\mu$ ;  $\hat{p} = \gamma_\mu p_\mu$ .

Необходимость замены  $k^2 \rightarrow k^2 + i0$  в подынтегральных выражениях для функций Грина была объяснена в § 19. Из формулы (21.26) следует справедливость теоремы Вика, что приводит к диаграммной технике, в которой каждой электронной, соответственно фотонной, линии сопоставляется функция  $G$ , соответственно  $D_{\mu\nu}^{\text{tr}}$ , каждой вершине — константа связи  $e$ .

Аналогичные схемы теории возмущений, различающиеся лишь видом фотонной функции Грина, возникают при использовании функционалов  $F_2$  и  $F_3$ . Интегралы с функционалом  $F_2$  назовем *интегра-*

лами в кулоновой калибровке. Невозмущенная функция Грина в кулоновой калибровке дается формулами

$$\left. \begin{aligned} D_{\mu\nu}^q(x-y) &= (2\pi)^4 \int d^4 k \exp(i(k, x-y)) \tilde{D}_{\mu\nu}^q(k); \\ \tilde{D}_{00}^q(k) &= k^{-2}; \tilde{D}_{0i}^q(k) = 0; \tilde{D}_{ij}^q(k) = (k^2 + i0)^{-1} (\delta_{ij} - k_i k_j / k^2). \end{aligned} \right\} (21.28)$$

Невозмущенная функция  $D_{\mu\nu}$  для функционала  $F_3$  имеет вид  $(k^2 - i0)^{-2} (-k^2 \delta_{\mu\nu} + (1 - d_l) k_\mu k_\nu)$ . (21.29)

Эта формула особенно проста при  $d_l = 1$ . Соответствующую функцию Грина  $\delta_{\mu\nu} (-k^2 - i0)^{-1}$  называют обычно *функцией в фейнмановской калибровке*.

Таким образом, получены три схемы теории возмущений, различающиеся видом фотонных функций Грина. Эти схемы хорошо известны и ведут к одним и тем же результатам для физических величин.

Метод континуального интегрирования удобен и при выводе точных соотношений, являющихся следствием калибровочной инвариантности. Для иллюстрации выведем тождество Уорда, а также связь функций Грина в разных калибровках.

Рассмотрим электронную функцию Грина в лоренцевой калибровке:

$$\begin{aligned} G_L(x-y) &= -i \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle_L \equiv \\ &\equiv -i \frac{\int \exp(iS) \psi(x) \bar{\psi}(y) \prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu) dAd\bar{\psi}d\psi}{\int \exp(iS) \prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu) dAd\bar{\psi}d\psi}. \end{aligned} \quad (21.30)$$

Поворот спинорных полей  $\psi(x) \rightarrow \exp\{iec(x)\}\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) \times \exp\{-iec(x)\}$  в интеграле числителя (21.30) ведет к появлению в подынтегральном выражении множителя

$$\exp i e \{c(x) - c(y) + \int c(z) \partial_\mu j_\mu(z) d^4z\}, \quad (21.31)$$

где  $j_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ . Дифференцируя по  $c(z)$  и положив затем  $c \equiv 0$ , получаем формулу

$$G_L(x-y)(\delta(x-z) - \delta(y-z)) = i \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \partial_\mu j_\mu(z) \rangle_L, \quad (21.32)$$

из которой после перехода к импульсному представлению следует тождество Уорда [25]:

$$G^{-1}(\hat{p}) - G^{-1}(\hat{q}) = (p - q)_\mu \Gamma_\mu(p, q), \quad (21.33)$$

связывающее электронную функцию Грина  $G(\hat{p})$  и неприводимую вершинную часть  $\Gamma_\mu(p, q)$ . Видно, что это тождество справедливо при любой калибровке фотонной функции, так как при его выводе замена переменных в континуальном интеграле затрагивала только спинорные поля.

Проследим теперь переход от кулоновой калибровки к лоренцевой на примере одноэлектронной функции:

$$G_R(x-y) = -i \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle_R \equiv \\ \equiv -i \frac{\int \exp(iS) \psi(x) \bar{\psi}(y) \prod_x \delta(\operatorname{div} \mathbf{A}) dA d\bar{\psi} d\psi}{\int \exp(iS) \prod_x \delta(\operatorname{div} \mathbf{A}) dA d\bar{\psi} d\psi}. \quad (21.34)$$

Вставим в числитель и знаменатель правой части этой формулы интеграл  $\int_x \Pi \delta(\partial_\mu A_\mu - \square \lambda) d\lambda(x)$ , который, как показано выше, не зависит от  $A_\mu(x)$ , а затем сделаем не меняющее действие преобразование (21.20). При этом  $\delta$ -функция  $\delta(\partial_\mu A_\mu - \square \lambda)$  превращается в  $\delta(\partial_\mu A_\mu)$ , а  $\delta(\operatorname{div} \mathbf{A})$  — в  $\delta(\operatorname{div} \mathbf{A} + \Delta \lambda)$ . В числителе появляется множитель  $\exp\{ie(\lambda(x) - \lambda(y))\}$ , в котором можно заменить  $\lambda(x)$  решением  $c(x)$  уравнения

$$\Delta c(x) + \operatorname{div} \mathbf{A}(x) = 0, \quad (21.35)$$

т. е. функцией

$$(1/4\pi) \int |\mathbf{x} - \mathbf{z}|^{-1} \delta(x_0 - z_0) \operatorname{div} \mathbf{A} d^4z \equiv \int l_i(\mathbf{x} - \mathbf{z}) A_i(\mathbf{z}) d^4z, \quad (21.36)$$

где  $l_i(\mathbf{x} - \mathbf{z}) = \delta(x_0 - z_0) (\partial/\partial x_i) (4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{z}|)^{-1}$ . После этого интегралы по  $\lambda(x)$  в числителе и знаменателе сокращаются. Получившаяся формула

$$G_R(x-y) = -i \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \exp\{ie \int (l_i(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - l_i(\mathbf{y} - \mathbf{z})) A_i(\mathbf{z}) d^4z\} \rangle_L \quad (21.37)$$

выражает функцию Грина электрона в кулоновой калибровке после разложения по степеням  $e$  в виде ряда по функциям Грина

$$\left\langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \prod_{k=1}^n A_{i_k}(z_k) \right\rangle_L$$

в лоренцевой калибровке.

## § 22. Поля Янга — Миллса

Теория поля Янга—Миллса [22] — простейший пример теории с неабелевой калибровочной группой.

Векторное поле Янга—Миллса, связанное с простой компактной группой Ли  $G$ , удобно описывать матрицами  $B_\mu(x)$  со значениями в алгебре Ли этой группы:

$$B_\mu(x) = \sum_{a=1}^n b_\mu^a(x) \tau_a. \quad (22.1)$$

Здесь  $\tau_a$  — линейно-независимые матрицы в присоединенном представлении алгебры Ли, нормированные условиями

$$\text{tr } \tau_a \tau_b = -2\delta_{ab}; \quad (22.2)$$

$n$  — число параметров группы;  $b_\mu^a(x)$  — числовая функция с векторным индексом  $\mu$  и изотопическим  $a$ . Как известно, в присоединенном представлении последний индекс можно использовать и для нумерации матричных элементов, так что

$$(B_\mu)_{ab} = (\tau_c)_{ab} b_\mu^c = t_{abc} b_\mu^c, \quad (22.3)$$

где  $t_{abc}$  — структурные константы группы, антисимметричные по всем трем индексам.

Лагранжиан поля Янга—Миллса

$$\mathcal{L}(x) = 1/8 \text{tr } F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (22.4)$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu B_\mu - \partial_\mu B_\nu + \varepsilon [B_\mu, B_\nu], \quad (22.5)$$

инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$B_\mu \rightarrow \Omega B_\mu \Omega^{-1} + (1/\varepsilon) \partial_\mu \Omega \Omega^{-1} \quad (22.6)$$

с матрицей  $\Omega$ , действующей в присоединенном представлении группы.

При квантовании в формализме континуального интеграла удобны аналоги функционалов  $F[A]$ , используемых в § 21 для квантовой электродинамики. Здесь они имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} F_1[B] &= \prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu(x)) \equiv \prod_x \prod_a \delta(\partial_\mu b_\mu^a(x)); \\ F_2[B] &= \prod_x \delta(\text{div } \mathbf{B}(x)) = \prod_x \prod_a \delta(\text{div } \mathbf{b}^a(x)); \\ F_3[B] &= \exp\left((i/4d_l) \int \text{tr}(\partial_\mu B_\mu(x))^2 d^4x\right) = \\ &= \exp\left((-i/2d_l) \int \sum_a (\partial_\mu b_\mu^a(x))^2 d^4x\right). \end{aligned} \right\} \quad (22.7)$$

Функционалы  $F_1$  и  $F_2$  выделяют среди всех полей поля, удовлетворяющие условиям:

$$f_L[B] = \partial_\mu B_\mu = 0 \text{ для } F_1; \quad f_R[B] = \text{div } \mathbf{B} = 0 \text{ для } F_2. \quad (22.8)$$

Каждое из этих уравнений матричное и представляет собой на самом деле  $n$  дополнительных условий (по числу параметров группы  $G$ ).

Множитель  $\Phi$ , соответствующий функционалу  $F_1$ , обозначим  $\Delta_L$ . В континуальном интеграле этот множитель стоит перед  $\delta$ -функционалом от  $\partial_\mu B_\mu$ , и потому достаточно знать его значение толь-

ко для поперечных полей ( $\partial_\mu B_\mu = 0$ ). В этом случае весь вклад в интеграл

$$\Delta_L^{-1} [B] = \int_x \prod \delta (\partial_\mu B_\mu^\Omega (x)) d\Omega (x) \quad (22.9)$$

вносит окрестность единичного элемента, в которой можно сделать замену

$$\Omega (x) = 1 + \varepsilon u (x), \quad (22.10)$$

где  $u (x)$  — элемент алгебры Ли, и оставить в  $\partial_\mu B_\mu^\Omega$  только линейные по  $u$  члены

$$\partial_\mu B_\mu^\Omega = \partial_\mu (B_\mu + \varepsilon [u, B_\mu] + \partial_\mu u) = \square u - \varepsilon [B_\mu, \partial_\mu u] \equiv \hat{A} u, \quad (22.11)$$

где  $\square = \hat{A}_0$  — оператор Даламбера. Вместо матриц  $u (x)$  введем столбец

$$u (x) = \sum_{a=1}^n \tau_a u_a (x), \quad (22.12)$$

на который оператор  $\hat{A}$  действует по правилу

$$\begin{aligned} (\hat{A} u)_a &= (\square u - \varepsilon [B_\mu, \partial_\mu u])_a \equiv (\square \delta_{ac} - \varepsilon (B_\mu)_{ac} \partial_\mu) u_c = \\ &= \square u_a - \varepsilon t_{abc} b_\mu^b \partial_\mu u_c. \end{aligned} \quad (22.13)$$

Интеграл (22.9) можно записать в виде

$$\Delta_L^{-1} [B] = \int_x \prod_a \delta ((\hat{A} u)_a) du_a. \quad (22.14)$$

Формально  $\Delta_L [B]$  есть определитель оператора  $\hat{A}$ . Выделив тривиальный (бесконечный) множитель  $\det \square$ , можно затем разложить логарифм  $\Delta_L [B]$  в ряд по  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \ln \Delta_L [B] &= \ln (\det \hat{A} / \det \hat{A}_0) = \text{Sp} \ln (1 - \varepsilon \square^{-1} B_\mu \partial_\mu) = \\ &= - \sum_{n=2}^{\infty} (\varepsilon^n / n) \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \text{tr} [B_\mu (x_1) \dots B_{\mu_n} (x_n)] \times \\ &\times \partial_{\mu_1} D (x_1 - x_2) \dots \partial_{\mu_n} D (x_n - x_1). \end{aligned} \quad (22.15)$$

Здесь  $D (x)$  — фейнмановская функция Грина оператора Даламбера (19.17). Символ  $\text{Sp}$  в (22.15) и далее означает след в операторном смысле в отличие от  $\text{tr}$  — следа матрицы.

Соответствующий множитель в кулоновой калибровке обозначим  $\Delta_R$ . Аналогичные вычисления приводят к формуле

$$\begin{aligned} \ln \Delta_R [B] &= \text{Sp} \ln (1 - \varepsilon \Delta^{-1} B_i \partial_i) = \\ &= - \sum_{n=2}^{\infty} (\varepsilon^n / n) \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \text{tr} (B_{i_1} (x_1) \dots B_{i_n} (x_n)) \times \\ &\times \partial_{i_1} \tilde{D} (x_1 - x_2) \dots \partial_{i_n} \tilde{D} (x_n - x_1), \end{aligned} \quad (22.16)$$

где

$$\bar{D}(x) = -(2\pi)^{-4} \int (d^4k/k^2) \exp(i(kx)) = -\delta(x_0)(4\pi|x|)^{-1}. \quad (22.17)$$

Индексы  $i_1, \dots, i_n$  в (22.16) пробегает значения 1, 2, 3. Множитель  $\Phi_3[B]$  дается формулой

$$\Phi_3^{-1}[B] = \int \exp\left\{\frac{i}{4d_l} \int \text{tr}(\partial_\mu B_\mu^\Omega(x))^2 d^4x\right\} \Pi d\Omega(x). \quad (22.18)$$

Для интеграла в правой части (22.18) не удается получить замкнутое выражение, аналогичное формулам (22.15), (22.16), представляющим множители  $\Delta_L, \Delta_R$  в виде определителей. Это обстоятельство, как показано ниже, не мешает и в том случае развить простую схему теории возмущений.

Построим сначала теорию возмущений в лоренцевой калибровке. Она возникает при разложении в ряд по  $\varepsilon$  функционала

$$\Delta_L[B] \exp(iS[B]) = \exp(iS + \ln \Delta_L[B]). \quad (22.19)$$

Выражение  $\ln \Delta_L$  удобно интерпретировать как добавку к действию  $S$ . Член  $n$ -го порядка разложения  $\ln \Delta_L$  в ряд по  $\varepsilon$  приведет к появлению в диаграммах вершины с  $n$  выходящими линиями. Явное выражение для этого члена, следующее из (22.15), подсказывает интерпретацию вершины как кольца с  $n$  выходящими линиями, по которому распространяется фиктивная скалярная частица, взаимодействующая с векторным полем по закону  $\sim \varepsilon t_r (\varphi B_\mu \partial_\mu \varphi)$ . Этому утверждению можно придать точный смысл, если записать определитель в виде интеграла по антикоммутирующим переменным  $\eta^a, \bar{\eta}^a$ :

$$\det(\square - \varepsilon B_\mu \partial_\mu) = \int \exp\left\{i \int L(B_\mu, \bar{\eta}, \eta) d^4x\right\} \Pi \bar{d}\eta^a(x) d\eta^a(x), \quad (22.20)$$

где

$$\begin{aligned} L(B_\mu, \bar{\eta}, \eta) &= -\frac{1}{2} \text{tr} \bar{\eta} (\square - \varepsilon B_\mu \partial_\mu) \eta = \\ &= \bar{\eta}^a \square \eta^a - \varepsilon t_{abc} b_\mu^c \bar{\eta}^a \partial_\mu \eta^b. \end{aligned} \quad (22.21)$$

Формула (22.20) является бесконечномерным аналогом (19.50). Она показывает, что нашу систему можно рассматривать как систему бозе-полей  $b_\mu^a(x)$ , взаимодействующих друг с другом и со скалярными ферми-полями  $\eta^a(x), \bar{\eta}^a(x)$ .

Построение теории возмущений и диаграммной техники во многом аналогично намеченному в § 22 для квантовой электродинамики. Элементы диаграммной техники в теории Янга—Миллса—линии двух сортов, соответствующие поперечным векторным и фиктивным скалярным частицам, а также вершины, описывающие взаимодействие векторных частиц со скалярными и друг с другом.

Будем изображать векторные частицы сплошными, а фиктивные скалярные частицы — пунктирными линиями. Элементы диаграмм — вершины и линии вида

$$\begin{array}{c}
 \frac{\mu a \quad p \quad \nu b}{G_{\mu\nu}^{ab}(p)} \qquad \qquad \frac{a \quad p \quad b}{G^{ab}(p)} \\
 \\
 \left. \begin{array}{l}
 \begin{array}{c}
 \mu_1 \mu a \text{ --- } \square \begin{array}{l} \nearrow p_2 \nu b \\ \searrow p_3 \rho \sigma \end{array} \\
 V_{\mu, \nu \rho}^{abc}
 \end{array} \\
 \begin{array}{c}
 p_1 \mu a \text{ --- } \times \begin{array}{l} \nearrow p_3 \rho \sigma \\ \searrow p_4 \sigma d \end{array} \\
 V_{\mu\nu, \rho\sigma}^{abcd}
 \end{array} \\
 \begin{array}{c}
 p_1 \mu a \text{ --- } \bullet \begin{array}{l} \nearrow p_2 b \\ \searrow p_3 c \end{array} \\
 V_{\mu}^{abc}
 \end{array}
 \end{array} \right\} \quad (22.22)
 \end{array}$$

Выпишем выражения для изображенных в (22.22) элементов диаграмм в импульсном представлении:

$$\left. \begin{array}{l}
 G_{\mu\nu}^{ab}(p) = -\delta_{ab}(p^2 \delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu)(p^2 + i0)^{-2}; \\
 G^{ab}(p) = -\delta_{ab}(p^2 + i0)^{-1}; \\
 V_{\mu, \nu \rho}^{abc} = i \varepsilon t_{abc}(p_{1\nu} \delta_{\mu\rho} - p_{1\rho} \delta_{\mu\nu}); \\
 V_{\mu\nu, \rho\sigma}^{abcd} = \varepsilon^2 t_{abe} t_{cde}(\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}); \\
 V_{\mu}^{abc} = (i\varepsilon/2) t_{abc}(p_3 - p_2)_\mu.
 \end{array} \right\} \quad (22.23)$$

Чтобы найти вклад данной диаграммы, необходимо произведение выражений, соответствующих всем ее элементам, проинтегрировать по независимым 4-импульсам, просуммировать по независимым дискретным индексам и умножить результат на

$$r^{-1} (i/(2\pi)^4)^{l-v-1} (-2)^s, \quad (22.24)$$

где  $v$  — число вершин диаграммы;  $l$  — число ее внутренних линий;  $s$  — число замкнутых циклов фиктивных скалярных частиц;  $r$  — порядок группы симметрии диаграммы. Заметим, что  $l - v - 1 = c$  есть число независимых контуров диаграммы.

Покажем, что в развитой теории возмущений поперечную функцию Грина  $G_{\mu\nu}^{ab}$  можно без изменения физических результатов заменить функцией с произвольной продольной частью:

$$G_{\mu\nu}^{ab}(d, p) = -\delta_{ab}(p^2 + i0)^{-2}(p^2 \delta_{\mu\nu} + (d_l - 1)p_\mu p_\nu). \quad (22.25)$$

Первоначальное доказательство этого факта, данное де Виттом [5], было громоздким. Приведем здесь доказательство, предложенное Тофтом [10]. Рассмотрим семейство калибровочных условий вида

$$\partial_\mu B_\mu(x) - c(x) = 0. \quad (22.26)$$

Среднее от калибровочно-инвариантного функционала  $X$  по полям с калибровочным условием (22.26) записывается в виде

$$\langle X \rangle = \frac{\int X[B] \exp(iS[B]) \Delta_c[B] \prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu - c) dB}{\int \exp(iS[B]) \Delta_c[B] \prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu - c) dB}, \quad (22.27)$$

где  $\Delta_c[B]$  — множитель, соответствующий условию (22.26). Числитель и знаменатель в правой части (22.27) не зависят от  $c$ . Используя это обстоятельство, перепишем выражение (22.27) в виде

$$\langle X \rangle = \frac{\int \exp\{(i/4d_l) \int \text{tr} c^2 d^4 x\} dc \int X[B] \exp(iS[B]) \Delta_c[B] \prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu - c) dB}{\int \exp\{(i/4d_l) \int \text{tr} c^2 d^4 x\} dc \int \exp(iS[B]) \Delta_c[B] \prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu - c) dB}, \quad (22.28)$$

т. е. как частное континуальных интегралов по переменной  $c(x) = \sum_a \tau_a c^a(x)$ . Проинтегрировав по  $c$ , получим для среднего  $\langle X \rangle$  выражение

$$\langle X \rangle = \frac{\int X[B] \tilde{\Delta}[B] \exp\{i(S[B] + (1/4)d_l) \int \text{tr} (\partial_\mu B_\mu)^2 d^4 x\} \prod_x dB}{\int \tilde{\Delta}[B] \exp\{i(S[B] + (1/4)d_l) \int \text{tr} (\partial_\mu B_\mu)^2 d^4 x\} \prod_x dB}. \quad (22.29)$$

Множитель

$$\tilde{\Delta}[B] = \Delta_c[B] |_{c=\partial_\mu B_\mu} \quad (22.30)$$

определяется равенством

$$\Delta_c^{-1}[B] = \int \prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu^\Omega - c) d\Omega(x). \quad (22.31)$$

Вычисление множителя  $\Delta_c[B]$  аналогично вычислению  $\Delta_L$  (22.9). Весь вклад в интеграл (22.31) вносит окрестность единичного элемента, в которой можно сделать замену (22.10) и оставить в  $(\partial_\mu B_\mu - c)$  только линейные по  $u$  члены:

$$\partial_\mu B_\mu^\Omega - c = \partial_\mu (\varepsilon[u, B_\mu] + \partial_\mu u) = \tilde{A}. \quad (22.32)$$

Оператор  $\tilde{A}$  действует на столбец  $u(x)$ , определенный выше формулой (22.12), по правилу

$$(\tilde{A}u)_a = \square u_a - \varepsilon t_{abc} \partial_\mu (b_\mu^b u_c); \quad (22.33)$$

оператор  $\tilde{A}$  является сопряженным по отношению к  $\hat{A}$ , поэтому определители операторов  $\hat{A}$  и  $\tilde{A}$  совпадают:

$$\tilde{\Delta}[B] = \det \tilde{A} = \det \hat{A} = \Delta_L[B]. \quad (22.34)$$

Вычисление  $\langle X \rangle$  как частного континуальных интегралов (22.29) по теории возмущений приводит к диаграммной технике с функцией Грина векторной частицы (22.25). Вклад множителя  $\Delta_L[B] = \tilde{\Delta}[B]$  по-прежнему интерпретируется как вклад дополнительных диаграмм, описывающих взаимодействие векторных частиц с фиктивными скалярными частицами.

Развитая теория возмущений — не единственно возможная. Другая форма теории возмущений и диаграммной техники возникает в так называемом *формализме первого порядка*. Этот формализм получается, если записать лагранжиан (22.4) в виде

$$L(x) = -(1/8)\text{tr} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (1/4)\text{tr} F_{\mu\nu}(\partial_\nu B_\mu - \partial_\mu B_\nu + \varepsilon[B_\mu, B_\nu]) \quad (22.35)$$

и интегрировать по  $B_\mu$ ,  $F_{\mu\nu}$  как по независимым переменным. Термин «формализм первого порядка» означает, что знак производной входит в лагранжиан (22.35) в степени не выше первой.

Используя лоренцеву калибровку, получим континуальный интеграл вида

$$\int \exp(iS[B, F]) \Delta_L[B] \prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu) dB dF, \quad (22.36)$$

где выражение

$$dB(x) dF(x) = \prod_a \prod_\mu db_\mu^a(x) \prod_{\mu < \nu} df_{\mu\nu}^a(x), \quad (22.37)$$

так же как и  $B(x)$ , калибровочно-инвариантно.

Если под знаком интеграла (22.36) провести разложение функционала  $\Delta_L[B] \exp(iS[B, F])$  в ряд по  $\varepsilon$ , то получим новый вариант диаграммной теории возмущений с тремя линиями, соответствующими функциям  $\langle BB \rangle$ ,  $\langle BF \rangle$ ,  $\langle FF \rangle$ , и одной вершиной, описывающей трехлинейное взаимодействие  $\varepsilon FBB$ . Элементы диаграммной техники имеют вид:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{\mu a \quad p \quad \nu b} \\ G_{\mu\nu}^{ab}(p) \\ \overline{\mu\nu a \quad p \quad \rho b} \\ G_{\mu\nu, \rho}^{ab}(p) \\ \overline{\mu\nu a \quad p \quad \rho\sigma b} \\ G_{\mu\nu, \rho\sigma}^{ab}(p) \end{array} \right\} \quad (22.38)$$

$$\begin{array}{l} \rho_1 \mu\nu a \\ \rho_2 \mu b \\ \rho_3 \nu c \end{array} \quad \nu_{\mu\nu}^{abc}$$

где поле  $B$  изображено одинарной линией, поле  $F$  — двойной. Вы-  
ражения, соответствующие элементам (22.38), даются формулами

$$\left. \begin{aligned} G_{\mu\nu}^{ab} &= \delta_{ab} (-p^2 \delta_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu) (p^2 + i0)^{-2}; \\ G_{\mu\nu, \rho}^{ab} &= i \delta_{ab} (p_\nu \delta_{\mu\rho} - p_\mu \delta_{\nu\rho}) (p^2 + i0)^{-1}; \\ G_{\mu\nu, \rho\sigma}^{abcd} &= \delta_{ab} (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho} - (p^2 + i0)^{-1} \times \\ &\times (\delta_{\mu\rho} p_\nu p_\sigma + \delta_{\nu\sigma} p_\mu p_\rho - \delta_{\mu\sigma} p_\nu p_\rho - \delta_{\nu\rho} p_\mu p_\sigma)); \\ V_{\mu\nu}^{abc} &= \epsilon t_{abc}. \end{aligned} \right\} \quad (22.39)$$

Линии и вершины, описывающие распространение фиктивных ска-  
лярных частиц и их взаимодействие с векторными, остаются такими  
же, как и в формализме второго порядка, так как множитель  $\Delta_L$ ,  
зависящий только от  $B$ , но не от  $F$ , остается тем же самым.

Формализм первого порядка удобен для перехода к каноническо-  
му квантованию. Рассмотрим такой переход, исходя из интеграла по  
 $B_\mu$  в кулоновой калибровке с источниками, являющимися произво-  
дящим функционалом для функций Грина:

$$Z[\eta] = \frac{\int \exp \{ iS[B, F] + i \int (\eta_{\mu a} b_{\mu a} + 1/2 \eta_{\mu\nu a} f_{\mu\nu a}) d^4x \} \Delta_R[B] \prod_x \delta(\operatorname{div} \mathbf{B}) dB dF}{\int \exp (iS[B, F]) \Delta_R \prod_x \delta(\operatorname{div} \mathbf{B}) dB dF} \quad (22.40)$$

Как и в электродинамике, возьмем в качестве динамических пе-  
ременных поперечные в трехмерном смысле составляющие полей  $B_i$ ,  
 $F_{0i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Будем считать, что источники стоят при выбран-  
ных динамических переменных, т. е. удовлетворяются условия

$$\eta_{0a} = \eta_{ika} = \partial_i \eta_{0ia} = \partial_i \eta_{ia} = 0. \quad (22.41)$$

В трехмерных обозначениях лагранжиан (22.35) принимает вид  
 $L(x) = \operatorname{tr} \{ -(1/8) F_{ik} F_{ik} + (1/4) F_{0i} F_{0i} + (1/4) F_{ik} (\partial_k B_i - \partial_i B_k +$   
 $+ \epsilon [B_i, B_k] - (1/2) F_{0i} \partial_0 B_i - (1/2) B_0 (\partial_i F_{0i} - \epsilon [B_i, F_{0i}]) \}. \quad (22.42)$

Отсутствие источников при  $B_0$ ,  $F_{ik}$  позволяет проинтегрировать  
в (22.38) по этим переменным, что сводится к появлению  $\delta$ -функцио-  
нала

$$\prod_x \delta(\partial_i F_{0i} - \epsilon [B_i, F_{0i}]) \quad (22.43)$$

и к замене  $F_{ik}$  на

$$H_{ik} \equiv \partial_k B_i - \partial_i B_k + \epsilon [B_i, B_k] \quad (22.44)$$

в интеграле по оставшимся переменным  $B_i, F_{0i}$ . Вставим в интеграл  
(22.40) множитель

$$\int_x \prod \delta(\Delta c + \partial_i F_{0i}) dc(x), \quad (22.45)$$

не зависящий на самом деле от  $F_{0i}$ , и сделаем затем сдвиг  $F_{0i} \rightarrow F_{0i} - \partial_i c$ . При этом функционал  $\prod \delta (\Delta c + \partial_i F_{0i})$  превращается в  $\prod \delta (\partial_i F_{0i})$ , а  $\prod \delta (\partial_i F_{0i} - \varepsilon [B_i, F_{0i}])$  — в выражение  $\prod \delta (\Delta c - \partial_i F_{0i} - \varepsilon [B_i, \partial_i c] + \varepsilon [B_i, F_{0i}])$ , равное  $\prod \delta (\Delta c - \varepsilon \times [B_i, \partial_i c] + \varepsilon [B_i, F_{0i}])$ , так как  $\partial_i F_{0i} = 0$ .

Пусть  $c_0(x)$  — решение уравнения

$$\Delta c_0 - \varepsilon [B_i, \partial_i c] = -\varepsilon [B_i, F_{0i}], \quad (22.46)$$

выражающееся через зависящую от  $B$  функцию Грина:

$$c_0(x) = -\varepsilon \int D(x, y; B) [B_i(y), F_{0i}(y)] d^3 y. \quad (22.47)$$

После сдвига  $c \rightarrow c + c_0$  возникает функционал  $\prod \delta (\Delta c - \varepsilon [B_i, \partial_i c])$ , и функцию  $c(x)$  можно положить равной нулю везде, кроме аргумента этого  $\delta$ -функционала. Интеграл

$$\int_x \prod \delta (\Delta c - \varepsilon [B_i, \partial_i c]) dc(x) \quad (22.48)$$

сокращается с множителем  $\Delta_R[B]$ . В итоге функционал (22.40) приводится к виду

$$Z[\eta] =$$

$$= \frac{\int \exp \{iS[B_i, F_{0i}] + i \int (\eta_i^\alpha b_i^\alpha + \eta_{0i}^\alpha f_{0i}^\alpha) d^4 x\} \prod_x \delta(\partial_i B_i) \delta(\partial_i F_{0i}) dB dF}{\int \exp \{iS[B_i, F_{0i}]\} \prod_x \delta(\partial_i B_i) \delta(\partial_i F_{0i}) dB dF}, \quad (22.49)$$

где

$$S[B_i, F_{0i}] = \int dx_0 (\int f_{0i}^\alpha \partial_0 b_i^\alpha d^3 x - H); \quad (22.50)$$

$$H = \int d^3 x (1/4 h_{ik}^\alpha h_{ik}^\alpha + 1/2 f_{0i}^\alpha f_{0i}^\alpha + 1/2 \partial_i c_0^\alpha \partial_i c_0^\alpha). \quad (22.51)$$

В этих формулах  $S[B_i, F_{0i}]$  — действие, соответствующее гамильтониану  $H$ , где поперечные поля в  $b_i, f_{0i}$  имеют смысл канонически-сопряженных координат и импульсов.

Как показано в § 19 на примере скалярного поля, формализм континуального интеграла по канонически-сопряженным координатам и импульсам эквивалентен каноническому квантованию. В применении к системе с гамильтонианом (22.51) каноническое квантование сводится к замене функций  $b_i^\alpha, f_{0i}^\alpha$ , через которые выражаются  $h_{ik}^\alpha, c_0^\alpha$ , операторами  $\hat{b}_i^\alpha(x), \hat{f}_{0j}^\alpha(y)$  с перестановочными соотношениями

$$[\hat{b}_i^\alpha(x), \hat{f}_{0j}^\alpha(y)] = i\delta_{\alpha\beta} \delta_{ij}^{tr}(x-y) \equiv (i\delta_{\alpha\beta}/(2\pi)^3) \int d^3 k \exp(i(\mathbf{k}, \mathbf{x} - \mathbf{y})) (\delta_{ij} - k_i k_j/k^2). \quad (22.52)$$

Гамильтониан (22.51) становится самосопряженным и положительно определенным оператором энергии. Такое квантование поля Янга—Миллса было предложено Швингером [23]. Таким образом, формализм континуального интеграла приводит к каноническому квантованию Швингера. Подчеркнем, что наличие множителя  $\Delta_R[B]$  в исходном интеграле (22.40) было существенно для приведения его к явно гамильтонову виду.

Рассмотрим построение  $S$ -матрицы для поля Янга—Миллса. Естественно исходить из континуального интеграла в кулоновой калибровке. Именно в этой калибровке интеграл приводится к интегралу по каноническим переменным. Унитарность  $S$ -матрицы здесь очевидна, во всяком случае при вычислении ее элементов по теории возмущений.

Элемент  $S$ -матрицы, описывающий превращение  $m$  входящих частиц в  $(n - m)$  выходящих, выражается через преобразование Фурье  $G_{i_1 \dots i_n}^{a_1 \dots a_n}(p_1, \dots, p_n)$  функции Грина в кулоновой калибровке:

$$\langle b_{i_1}^{a_1}(x_1) \dots b_{i_n}^{a_n}(x_n) \rangle_R \equiv \frac{\int \exp(iS) \Delta_R[B] b_{i_1}^{a_1}(x_1) \dots b_{i_n}^{a_n}(x_n) \prod_x \delta(\operatorname{div} \mathbf{B}(x)) dB(x)}{\int \exp(iS) \Delta_R[B] \prod_x \delta(\operatorname{div} \mathbf{B}(x)) dB(x)} \quad (22.53)$$

формулой

$$S_{i_1 \dots i_n}^{a_1 \dots a_n}(p_1, \dots, p_n) = \lim_{p_k^2 \rightarrow 0} \left( \prod_{k=1}^n Z_R^{-1/2} u_k(\hat{e}_k)_{i_k j_k} \right) G_{i_1 \dots i_n}^{a_1 \dots a_n}(p_1, \dots, p_n), \quad (22.54)$$

где

$$(\hat{e}_k)_{ij} = \delta_{ij} - (p_k)_i (p_k)_j / p_k^2 \quad (22.55)$$

есть оператор (поперечной) поляризации, а множители  $u_k$  равны  $p_k^2 \theta(p_k^0) |2p_k^0|^{-1/2} (2\pi)^{-3/2}$  для входящих частиц и  $p_k^2 \theta(-p_k^0) |2p_k^0|^{-1/2} \times \times (2\pi)^{-3/2}$  для выходящих. Наконец,  $Z_R$  есть вычет при  $p^2 \rightarrow 0$  полной одночастичной функции Грина в кулоновой калибровке в предположении, что при  $p^2 \rightarrow 0$  функция Грина имеет вид

$$G_{ij}^{ab} = [Z_R \delta_{ab} / (p^2 + i0)] (\delta_{ij} - p_i p_j / p^2) \quad (22.56)$$

(конечно, с точностью до инфракрасных особенностей).

Выражения для элементов  $S$ -матрицы в кулоновой калибровке не являются явно релятивистски-инвариантными. Преобразуем их, перейдя к релятивистской лоренцевой калибровке.

Вставим в континуальные интегралы в числителе и знаменателе множитель

$$\Delta_L [B] \int_x \prod \delta ((\partial_\mu B_\mu^\Omega) d\Omega (x)), \quad (22.57)$$

равный единице. Сделаем затем сдвиг  $B^\Omega \rightarrow B$ ,  $B \rightarrow B^{\Omega^{-1}}$ . Получится интеграл по калибровочной группе

$$\int (B^{\Omega^{-1}}(x_1))_{i_1}^{a_1} \dots (B^{\Omega^{-1}}(x_n))_{i_n}^{a_n} \prod_x \delta (\operatorname{div} \mathbf{B}^{\Omega^{-1}}) d\Omega (x), \quad (22.58)$$

из которого можно вынести произведение  $(B^{\Omega^{-1}}(x_1))_{i_1}^{a_1} \dots (B^{\Omega^{-1}}(x_n))_{i_n}^{a_n}$ . Оставшийся интеграл по  $\Omega$  сокращается с  $\Delta_R [B]$ .

Выражение (22.53) для функции Грина принимает вид

$$\frac{\int \exp (iS) \Delta_L [B] (B^{\Omega^{-1}}(x_1))_{i_1}^{a_1} \dots (B^{\Omega^{-1}}(x_n))_{i_n}^{a_n} \prod_x \delta (\partial_\mu B_\mu) dB}{\int \exp (iS) \Delta_L [B] \prod_x \delta (\partial_\mu B_\mu) dB}. \quad (22.59)$$

В (22.59) матрица  $\Omega^{-1}$  выбирается из условия трехмерной поперечности поля  $\mathbf{B}^{\Omega^{-1}}$  ( $\operatorname{div} \mathbf{B}^{\Omega^{-1}} = 0$ ). При разложении  $B^{\Omega^{-1}}$  по степеням  $\varepsilon$  возникает ряд

$$B^{\Omega^{-1}}(x) = B^{\operatorname{tr}} - (\varepsilon/2)[\Delta^{-1} \operatorname{div} \mathbf{B}, B + B^{\operatorname{tr}}]^{\operatorname{tr}} + \dots \quad (22.60)$$

Здесь приведены два первых члена разложения, а индекс  $\operatorname{tr}$  означает трехмерно-поперечную часть соответствующего вектора. Интеграл (22.59) можно вычислять по теории возмущений, если предварительно разложить функции  $B^{\Omega^{-1}}$  в ряды (22.60), сопоставив каждому члену разложения, зависящему от произведения  $m$  полей  $B$ , вершину с  $m$  выходящими из нее линиями.

Таким образом, переход к лоренцевой калибровке для функций Грина оказывается достаточно сложным. Однако при построении  $S$ -матрицы достаточно знать функции Грина только на массовой оболочке (все  $p_k^2 \rightarrow 0$ ). При этом множители  $u_k$  исчезают, а переход к лоренцевой калибровке сводится к вставкам во внешние концы:

$$\begin{array}{l} \overline{G_R} \\ \\ \begin{array}{c} G_R \quad G_R \\ \diagdown \quad / \\ \textcircled{R} \\ / \quad \diagdown \\ G_R \quad G_R \end{array} \end{array} = \begin{array}{l} \textcircled{G} \text{---} G_L \text{---} \textcircled{G} \\ \\ \begin{array}{c} \textcircled{G} \quad G_L \quad G_L \quad \textcircled{G} \\ \diagdown \quad / \\ \textcircled{L} \\ / \quad \diagdown \\ \textcircled{G} \quad G_L \quad G_L \quad \textcircled{G} \end{array} \end{array} \quad (22.61)$$

Вклад в эту вставку (обозначим его  $\sigma$ ) дают все поддиаграммы, начинающиеся с вершины, порожденной разложением (22.60), и заканчивающиеся вершиной, соединенной с остальной частью диаграммы только одной линией. Именно в диаграммах указанной структуры обращение в нуль множителей  $u_h$  компенсируется полюсами одночастичных функций  $G_L$  в лоренцевой калибровке (с вычетами  $Z_L$ ). Вклад всех остальных диаграмм исчезает при выходе на массовую оболочку, а функция Грина (22.59) в кулоновой калибровке отличается от соответствующей функции в лоренцевой калибровке множителем  $\sigma^n$ . Из сравнения одночастичных функций (первое из диаграммных равенств (22.61)) следует, что  $\sigma = (Z_R/Z_L)^{1/2}$ , т. е. выражается через отношение вычетов. В результате оказывается, что на массовой оболочке можно перейти к функциям Грина в лоренцевой калибровке и  $Z_R$  заменить на  $Z_L$ , тем самым записав  $S$ -матричный элемент в явно лоренц-инвариантном виде.

В заключение этого параграфа рассмотрим поправки второго порядка теории возмущений к функции Грина. Они представляют интерес потому, что указывают на ситуацию, противоположную известной ситуации *нуль-заряда* в квантовой электродинамике [1, 2].

Функция Грина фотона в поперечной калибровке при  $k^2 \gg m^2$  ( $m$  — масса электрона) имеет вид

$$D_{\mu\nu}^{\text{tr}} = (k^2 + i0)^{-1} (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_{\mu\nu} - k_{\mu} k_{\nu}) (k^2 + i0 - P)^{-1} \simeq \\ \simeq (k^2 + i0)^{-2} (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_{\mu} k_{\nu}) (1 - (e^2/12\pi^2) \ln(-k^2/m^2))^{-1}, \quad (22.62)$$

если в качестве собственно энергетической части ограничиться однопетлевой диаграммой второго порядка, взяв ее асимптотику при  $k^2 \gg m^2$ . Приближение (22.62) имеет нефизический («призрачный») полюс при  $(e^2/12\pi^2) \ln(-k^2/m^2) \approx 1$ . Существование такого полюса в точной функции Грина фотона привело бы к серьезным противоречиям с рядом общих положений теории.

Для поля Янга—Миллса формула для функции Грина при больших  $k^2$  имеет вид

$$G_{\mu\nu}^{ab} = \delta_{ab} (k^2 + i0)^{-2} (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_{\mu} k_{\nu}) (1 + (11e^2/12\pi^2) \ln(-k^2/M^2))^{-1}, \quad (22.63)$$

где  $M^2$  — перенормировочная константа. В этой формуле перед логарифмическим членом в знаменателе стоит знак «+», и трудности с нефизическим полюсом и нуль-зарядом не возникают. Этот факт рассматривался в работах [24, 25]. Позднее было показано, что ситуация не меняется и при учете высших диаграмм теории возмущений.



Квантовая теория тяготения строится в значительной степени с надеждами на то, что гравитационное поле может стать естественным «физическим регуляризатором», устраняющим бесконечности из квантовой теории поля. Гравитационное поле можно рассматривать как частный случай калибровочного поля, а его квантование осуществлять по общей схеме квантования калибровочных полей. Здесь мы будем рассматривать только гравитационные поля без особенностей (типа «черных дыр») и асимптотически плоские на бесконечности. Калибровочные преобразования — это координатные преобразования, не затрагивающие пространственной бесконечности, а группа симметрии — группа Пуанкаре.

Особенности квантования гравитационного поля связаны в первую очередь с его самодействием. Поэтому будем рассматривать главным образом «свободное» самодействующее гравитационное поле.

Среди различных способов параметризации гравитационного поля наиболее распространены два: метод метрического тензора и метод подвижного репера (тетрады). Приведем их формулировку.

В формализме метрического тензора гравитационное поле описывается потенциалами  $g_{\mu\nu}(x)$  и символами Кристоффеля  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho(x)$ . Последние можно считать как независимыми динамическими величинами (формализм Палатини), так и функциями  $g_{\mu\nu}$ :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = (1/2)g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (23.1)$$

Контравариантная  $g^{\mu\nu}$ -матрица обратна  $g_{\mu\nu}$ ,  $g$  — определитель матрицы  $g_{\mu\nu}$ .

Для асимптотически-плоского гравитационного поля многообразие пространства—времени топологически эквивалентно 4-мерному евклидову пространству и может быть параметризовано глобальными координатами  $x_\mu$  ( $-\infty < x_\mu < \infty$ ;  $\mu = 0, 1, 2, 3$ ). Эти координаты будем считать согласованными с условиями на пространственной бесконечности, так что

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O(r^{-1}); \quad \Gamma_{\mu\nu}^\rho = O(r^{-1}), \quad (23.2)$$

где  $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ ;  $\eta_{\mu\nu}$  — тензор Минковского с сигнатурой (+---).

Функционал действия, имеющий вид

$$S = (2\kappa^2)^{-1} \int \{ -\Gamma_{\mu\rho}^\rho \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \partial_\rho (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma) \} d^4 x, \quad (23.3)$$

где  $\kappa$  — константа Ньютона, инвариантен по отношению к группе координатных преобразований, действующей на величины  $g^{\mu\nu}$ ,  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  по правилам:

$$\left. \begin{aligned} \delta g^{\mu\nu} &= -\eta^\lambda \partial_\lambda g^{\mu\nu} + g^{\mu\lambda} \partial_\lambda \eta^\nu + g^{\nu\lambda} \partial_\lambda \eta^\mu; \\ \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= -\eta^\lambda \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \partial_\lambda \eta^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \partial_\mu \eta^\lambda + \\ &+ \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \eta^\rho - \partial_\mu \partial_\nu \eta^\rho. \end{aligned} \right\} \quad (23.4)$$

Здесь выписаны формулы инфинитезимальных преобразований;  $\eta^\mu$  — бесконечно малые компоненты векторного поля, порождающего координатные преобразования

$$\delta x^\mu = \eta^\mu(x). \quad (23.5)$$

Варьирование действия (23.3) по  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  приводит к уравнениям, решения которых — функции (23.1). В этом смысле  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  можно считать независимыми переменными.

При подстановке в (23.3) явного выражения (23.1) символов Кристоффеля  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  через метрический тензор действие приобретает вид

$$S = (4\kappa^2)^{-1} \int (h^{\rho\sigma} \partial_\rho h^{\mu\nu} \partial_\nu h_{\mu\sigma} - (1/2) h^{\rho\sigma} \partial_\rho h^{\mu\nu} \partial_\sigma h_{\mu\nu} + (1/4) h^{\rho\sigma} \partial_\rho \ln h \partial_\sigma \ln h) d^4x, \quad (23.6)$$

где для удобства использована контравариантная плотность

$$h^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}; \quad h = \det h^{\mu\nu}. \quad (23.7)$$

В формализме подвижного репера гравитационное поле описывается компонентами репера  $e^{\mu a}(x)$  и коэффициентами кручения  $\omega_{\mu ab}(x) = -\omega_{\mu ba}(x)$ . Набор  $e^{\mu a}(x)$  образует матрицу с положительным определителем  $e(x)$ . Функционал действия

$$S = (2\kappa^2)^{-1} \int \{ \omega_{\mu ab} \partial_\mu (e^{-1} e^{\mu a} e^{\nu b}) - \omega_{\mu ab} \partial_\nu (e^{-1} e^{\mu a} e^{\nu b}) + e^{-1} e^{\mu a} e^{\nu b} (\omega_{\mu ac} \omega_{\nu b}^c - \omega_{\nu ac} \omega_{\mu b}^c) \} \quad (23.8)$$

инвариантен по отношению к координатным преобразованиям

$$\left. \begin{aligned} \delta e^{\mu a} &= -\eta^\lambda \partial_\lambda e^{\mu a} + e^{\lambda a} \partial_\lambda \eta^\mu; \\ \delta \omega_{\mu ab} &= -\eta^\lambda \partial_\lambda \omega_{\mu cb} - \omega_{\lambda ab} \partial_\mu \eta^\lambda \end{aligned} \right\} \quad (23.9)$$

и к локальным лоренцевым вращениям

$$\left. \begin{aligned} \delta e^{\mu a} &= \eta_b^a e^{\mu b}; \\ \delta \omega_{\mu ab} &= -\eta_a^c \omega_{\mu cb} + \eta_b^c \omega_{\mu ac} + \partial_\mu \eta_{ab}. \end{aligned} \right\} \quad (23.10)$$

Варьирование  $S$  по  $\omega$  приводит к уравнениям, которые позволяют явно выразить  $\omega$  через  $e$ . Решение удобно записать в виде

$$\omega_{\mu ab} = e_\mu^c \omega_{cab} \equiv (1/2) e_\mu^c (\Omega_{abc} + \Omega_{bca} - \Omega_{cab}), \quad (23.11)$$

где

$$\Omega_{abc} = e_{\mu a} \Omega_{bc}^\mu \equiv e_{\mu a} (e_b^\nu \partial_\nu e_c^\mu - e_c^\nu \partial_\nu e_b^\mu).$$

Можно считать, что это уже сделано, так что  $S$  — функционал только переменных  $e^{\mu a}$ .

О формализме первого порядка говорят, если переменные  $g_{\mu\nu}$  и  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  (или  $e^{\mu a}$  и  $\omega_{\mu ab}$ ) считаются независимыми. Если же  $\Gamma$  выражены через  $g$ , а  $e$  — через  $\omega$ , то говорят о формализме второго порядка.

Описание свободного гравитационного поля в терминах  $g^{\mu\nu}$  и  $e^{\mu a}$  эквивалентно. Различное число компонент — 10 в первом случае и 16 во втором — компенсируется различием в калибровочной группе, параметризуемой четырьмя функциями в первом случае и десятью во втором. Формализм подвижного репера удобен для описания взаимодействия со спинорным полем.

Эквивалентность формализмов первого и второго порядков может исчезать при включении взаимодействий с другими полями. Геометрически формула (23.11) определяет связность без кручения. Минимальное взаимодействие гравитационного поля со спинорным в формализме первого порядка приводит к появлению кручения [26].

Дальнейшее изложение будет проведено в основном на примере тензорного формализма второго порядка.

Координатные преобразования метрического тензора образуют неабелеву калибровочную группу, зависящую от четырех произвольных функций (формула (23.4) дает инфинитезимальные преобразования). Поэтому, согласно общей схеме квантования калибровочных полей, при квантовании системы с действием  $S$  надо интегрировать функционал  $\exp(iS)$  по поверхности в многообразии всех полей, заданной четырьмя уравнениями. В качестве таких уравнений удобно взять условия гармоничности де Дондера—Фока [27]

$$\partial_\nu (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = l^\mu(x), \quad (23.12)$$

где  $l^\mu(x)$  — заданное векторное поле. Произвол в выборе  $l^\mu(x)$  будет удобен для формальных преобразований. Условия гармоничности (23.12) являются аналогом лоренцевой калибровки в электродинамике и теории Янга—Миллса.

Условия (23.12) не общеквариантны и именно поэтому могут служить для параметризации классов. Аналог уравнения  $f(A^a) = 0$  представляет собой сложное нелинейное уравнение для параметров координатного преобразования, переводящего данную метрику в гармоническую. В рамках теории возмущений это уравнение имеет единственное решение.

Локальная калибровочно-инвариантная мера имеет вид\*

$$\prod_x g^{5/2}(x) \prod_{\mu \leq \nu} dg^{\mu\nu}(x) = \prod_x h^{-5/2}(x) \prod_{\mu \leq \nu} dh^{\mu\nu}(x). \quad (23.13)$$

\* После выхода первого издания книги появились работы [28—30], в которых приведены аргументы в пользу меры Лейтвиллера  $d\mu = \prod_x (g^{7/2} g^{00} \prod_{\mu \leq \nu} dg^{\mu\nu})$  в теории тяготения вместо используемой здесь меры (23.13).

В этих же работах показано, что отличие мер порождает слагаемые чисто перенормировочного типа, роль которых — устранить расходимости из теории возмущений. В остальном структура теории возмущений не изменяется. Поэтому, ограничившись данным примечанием, мы не изменяем изложения теории возмущений для поля тяготения.

Для доказательства калибровочной инвариантности меры (23.13) рассмотрим произведение  $\prod_x$  как произведение по «физическим» точкам. Преобразование метрического тензора в одной и той же «физической» точке дается первой из формул (23.4) без первого члена, так что

$$\delta g^{\mu\nu} = g^{\mu\lambda} \partial_\lambda \eta^\nu + g^{\nu\lambda} \partial_\lambda \eta^\mu; \quad \delta g = -2g \partial_\mu \eta^\mu. \quad (23.14)$$

Поэтому

$$\prod_{\mu \leq \nu} d(g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}) = (1 + 5\partial_\mu \eta^\mu) \prod_{\mu \leq \nu} dg^{\mu\nu}; \quad g + \delta g = (1 - 2\partial_\mu \eta^\mu) g. \quad (23.15)$$

Отсюда для фиксированной «физической» точки следует инвариантность выражения  $g^{5/2} \prod_{\mu \leq \nu} dg^{\mu\nu}$ , которая обеспечивает калибровочную инвариантность меры (23.13).

Имея параметризацию классов (23.12) и меру (23.13), получим следующее выражение для континуального интеграла:

$$\int_x \exp(iS) \Delta_h [g] \prod_x \left[ \prod_\mu \delta(\partial_\nu g^{\mu\nu} - l^\mu) \left( g^{5/2} \prod_{\mu \leq \nu} dg^{\mu\nu} \right) \right], \quad (23.16)$$

где в соответствии с (20.8) функционал  $\Delta_h [g]$  определяется уравнением

$$\Delta_h [g] \int_x \prod_x \left[ \prod_\mu \delta(\partial_\nu (h^{\mu\nu})^\Omega - l^\mu(x)) \right] d\Omega(x) = 1 \quad (23.17)$$

и выражается через интеграл по калибровочной группе от  $\delta$ -функционала.

Вычислим этот интеграл. Выражение  $\Delta_h [g]$  входит в интеграл (23.16) только на поверхности, определяемой уравнениями (23.12). Для таких  $g^{\mu\nu}$  полный вклад в интеграл (23.17) дает бесконечно малая окрестность единичного элемента группы. В этой окрестности действие преобразований группы на  $h^{\mu\nu}$  и меру на калибровочной группе  $d\Omega$  можно параметризовать введенными выше (23.5) инфинитезимальными функциями  $\eta^\mu(x)$ . В такой параметризации

$$\partial_\nu (h^{\mu\nu})^\Omega - l^\mu = \partial_\nu (h^{\nu\lambda} \partial_\lambda \eta^\mu) - \partial_\lambda (\partial_\nu h^{\mu\nu} \eta^\lambda). \quad (23.18)$$

Мера  $d\Omega$  в единичном элементе имеет простой вид:

$$d\Omega = \prod_x \prod_\mu d\eta^\mu(x). \quad (23.19)$$

В результате интеграл в (23.17) записывается следующим образом:

$$\int_{x, \mu} \prod_x \delta(\partial_\nu (h^{\nu\lambda} \partial_\lambda \eta^\mu) - \partial_\lambda (\partial_\nu h^{\mu\nu} \eta^\lambda)) d\eta^\mu(x). \quad (23.20)$$

Формально этот интеграл равен  $(\det \hat{A})^{-1}$ , где  $\hat{A}$  — оператор, действующий на четверку функций  $\eta^\mu$  по правилу

$$(\hat{A}\eta)^\mu = \partial_\nu (h^{\nu\lambda} \partial_\lambda \eta^\mu) - \partial_\lambda (\partial_\nu h^{\mu\nu} \eta^\lambda). \quad (23.21)$$

Таким образом, найдено, что

$$\Delta_h [g] = \det \hat{A}. \quad (23.22)$$

Для формулировки теории возмущений удобно представить  $\det \hat{A}$  как гауссов интеграл по вспомогательным полям. Эти поля должны быть антикоммутирующими, так как интеграл должен давать первую степень определителя. Этим требованиям удовлетворяет выражение

$$\det \hat{A} = \int \exp \left( i \int \bar{\theta}^\mu (x) A_{\mu\nu} \theta^\nu (x) d^4 x \right) \prod_{x, \mu} d\bar{\theta}^\mu (x) d\theta^\mu (x), \quad (23.23)$$

где  $\theta^\mu (x)$ ,  $\bar{\theta}^\mu (x)$  — антикоммутирующие классические поля, удовлетворяющие соотношению

$$\theta^\mu (x) \theta^\nu (y) + \theta^\nu (y) \theta^\mu (x) = 0 \quad (23.24)$$

и аналогичным соотношениям для  $(\theta, \bar{\theta})$ ,  $(\bar{\theta}, \bar{\theta})$ . Теперь интеграл (23.16) можно записать в виде

$$\int \exp \left\{ iS [g] + i \int \theta^\mu A_{\mu\nu} [g] \theta^\nu d^4 x \right\} \prod_x \left[ \prod_\mu \delta (\partial_\nu h^{\mu\nu} - e^\mu) \times \right. \\ \left. \times \left( g^{5/2} \prod_{\mu \leq \nu} dg^{\mu\nu} \right) \right] \prod_\mu d\bar{\theta}^\mu d\theta^\mu \quad (23.25)$$

и непосредственно применить для формулировки теории возмущений. Однако преобразуем его еще, воспользовавшись произволом в выборе  $l^\mu$ . Метод преобразования, предложенный Тофтом [10], был объяснен в § 22 на примере поля Янга—Миллса. Интеграл (23.25) не зависит от  $l^\mu$  по самому построению. Поэтому можно усреднить его по  $l^\mu$  с произвольным весом. Возьмем в качестве веса экспоненту от квадратичной формы полей:

$$\exp \left\{ (i\alpha/4) \int l^\mu (x) \eta_{\mu\nu} l^\nu (x) d^4 x \right\}, \quad (23.26)$$

где  $\eta_{\mu\nu}$  — тензор Минковского. Усреднение проводится явно и дает выражение

$$\int \exp \left\{ iS [g] + (i\alpha/4) \int \partial_\rho h^{\mu\rho} \eta_{\mu\nu} \partial_\sigma h^{\nu\sigma} d^4 x + i \int \bar{\theta}^\mu A_{\mu\nu} \theta^\nu d^4 x \right\} \times \\ \times \prod_x g^{5/2} \left( \prod_{\mu \leq \nu} dg^{\mu\nu} \right) \left( \prod_\mu d\bar{\theta}^\mu d\theta^\mu \right), \quad (23.27)$$

содержащее квадратичную форму продольных частей поля  $h^\mu$  с произвольным коэффициентом  $\alpha$ . Из данного рассуждения следует, что интеграл не зависит от  $\alpha$ .

Получим из выражения (23.27) диаграммную технику теории возмущений. Будем считать независимыми переменными в континуальном интеграле (23.27)  $h^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}$ , а также  $\theta^\mu$ ,  $\bar{\theta}^\mu$ . Положим

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \chi^{\mu\nu} \quad (23.28)$$

и будем считать  $u^{\mu\nu}$  тензорным полем, описывающим гравитационное поле. Функционал действия принимает вид

$$S = S_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n S_{n+2}, \quad (23.29)$$

где  $S_2$  — квадратичная форма;  $S_n$  — форма степени  $n$  и переменных  $u^{\mu\nu}$  и их первых производных.

Линеаризация (23.12) во многих отношениях может быть неестественной. Она может нарушать сигнатуру метрического тензора, если  $u^{\mu\nu}$  недостаточно мало. Существуют параметризации, свободные от этого недостатка, например экспоненциальная параметризация

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\lambda} (\exp \kappa \Phi)^{\lambda\nu}. \quad (23.30)$$

В принципе можно вычислить разложение (23.29) и в этой параметризации. Отметим, что квадратичная форма  $S_2$  от выбора параметризации не зависит.

Вследствие инвариантности действия по отношению к преобразованиям (23.4) квадратичная форма

$$S_2 = 1/4 \int (-\eta_{\nu\sigma} \delta_{\rho}^{\alpha} \delta_{\mu}^{\beta} + 1/2 \eta^{\alpha\beta} \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + 1/4 \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \eta^{\alpha\beta}) \times \\ \times \partial_{\alpha} u^{\mu\nu} \partial_{\beta} u^{\rho\sigma} d^4 x \quad (23.31)$$

вырождена. Она не содержит продольных компонент. Введением вспомогательных фиктивных полей  $\theta^{\mu}$ ,  $\bar{\theta}^{\mu}$  мы добились того, что квадратичная форма в экспоненте подынтегрального выражения в (23.27) стала невырожденной. Тем самым однозначно определяются операторы, обратные операторам квадратичных форм по  $u^{\mu\nu}$ ,  $\theta^{\mu}$ ,  $\bar{\theta}^{\mu}$ , т. е. пропагаторы частиц, соответствующие линиям диаграмм.

Будем изображать сплошной линией пропагатор гравитона  $\langle h^{\mu\nu} h^{\rho\sigma} \rangle$ , а пунктирной — пропагатор фиктивной векторной частицы  $\langle \theta^{\mu} \bar{\theta}^{\nu} \rangle$ . Вершины диаграммы порождены формами  $S_{n+2}$  из разложения (23.29), а также формой  $\int \bar{\theta}^{\mu} A_{\mu\nu} \theta^{\nu} d^4 x$ , включающей трехлинейное взаимодействие  $\sim \bar{\theta}^{\mu} \theta^{\nu}$  гравитона с фиктивной векторной частицей.

Элементы диаграммной техники имеют вид

$$\text{---} , \quad \text{- - - - -} , \\ \text{---} \cdot \text{---} , \quad \text{---} \cdot \text{---} , \quad \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} , \quad \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} , \quad \dots \quad (23.32)$$

Выражение, соответствующее пропагатору гравитона, дается формулой

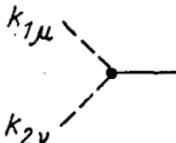
$$G^{\mu\nu,\rho\sigma}(k) = (2/k^2) (\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} + (\alpha^{-1} - 2) \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma}) + \\ + (2(1 - \alpha^{-1}) k^{-4}) (2k^{\mu} k^{\nu} \eta^{\rho\sigma} + 2k^{\rho} k^{\sigma} \eta^{\mu\nu} - k^{\mu} k^{\rho} \eta^{\nu\sigma} - k^{\nu} k^{\rho} \eta^{\mu\sigma} - \\ - k^{\mu} k^{\sigma} \eta^{\nu\rho} - k^{\nu} k^{\sigma} \eta^{\mu\rho}), \quad (23.33)$$

которая содержит параметр  $\alpha$ . Величина  $\alpha^{-1}$  аналогична параметру  $d_i$  в квантовой электродинамике и теории Янга—Миллса и имеет смысл коэффициента при продольной части пропагатора. Физические результаты не зависят от произвола в выборе параметра  $\alpha$ .

Пропагатор фиктивной векторной частицы имеет вид

$$G^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu}/k^2, \quad (23.34)$$

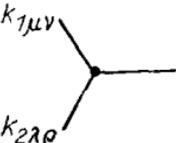
а вершина взаимодействия ее с гравитонами дается выражением



$$k_{3\rho\sigma} = \frac{\alpha}{2} [\delta_{\sigma}^{\mu} k_{3\rho} + \delta_{\rho}^{\mu} k_{3\sigma}] - \delta_{\nu}^{\mu} (k_{1\rho} k_{2\sigma} + k_{1\sigma} k_{2\rho}), \quad (23.35)$$

причем  $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ .

Приведем также выражение для вершины третьего порядка, соответствующее линеаризации (23.28):



$$k_{3\sigma\tau} = \frac{\alpha}{32} \left\{ \frac{k_1^2}{2} (\eta_{\mu\lambda} \eta_{\rho\sigma} \eta_{\tau\nu} + \eta_{\mu\tau} \eta_{\nu\lambda} \eta_{\rho\sigma} + \right.$$

$$\begin{aligned} & + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\lambda} \eta_{\rho\tau} + \eta_{\nu\sigma} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\tau} + \eta_{\mu\tau} \eta_{\lambda\rho} \eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} \eta_{\lambda\tau} + \\ & + \eta_{\nu\tau} \eta_{\mu\rho} \eta_{\lambda\sigma} + \eta_{\nu\sigma} \eta_{\mu\rho} \eta_{\lambda\tau} + k_1^2 \eta_{\mu\nu} (\eta_{\rho\sigma} \eta_{\lambda\tau} + \eta_{\rho\tau} \eta_{\lambda\sigma}) + \\ & + (k_{2\mu} k_{3\nu} + k_{2\nu} k_{3\mu}) \eta_{\lambda\rho} \eta_{\sigma\tau} + (k_{2\mu} k_{3\nu} + k_{2\nu} k_{3\mu}) (\eta_{\lambda\sigma} \eta_{\rho\tau} + \eta_{\lambda\rho} \eta_{\sigma\tau}) - \\ & - k_{1\nu} k_{1\tau} (\eta_{\mu\lambda} \eta_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\rho} \eta_{\lambda\sigma}) - k_{1\nu} k_{1\sigma} (\eta_{\mu\lambda} \eta_{\rho\tau} + \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\tau}) - k_{1\mu} k_{1\tau} \times \\ & \times (\eta_{\nu\lambda} \eta_{\rho\tau} + \eta_{\nu\rho} \eta_{\lambda\sigma}) - k_{1\mu} k_{1\sigma} (\eta_{\nu\lambda} \eta_{\rho\tau} + \eta_{\nu\rho} \eta_{\lambda\tau}) - k_{2\nu} k_{3\rho} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\mu\tau} - \\ & - k_{2\nu} k_{3\lambda} \eta_{\rho\sigma} \eta_{\mu\tau} - k_{2\mu} k_{3\rho} \eta_{\lambda\sigma} \eta_{\nu\tau} - k_{2\mu} k_{3\lambda} \eta_{\rho\sigma} \eta_{\nu\tau} - k_{2\nu} k_{3\rho} \eta_{\lambda\tau} \eta_{\mu\sigma} - \\ & - k_{2\nu} k_{3\lambda} \eta_{\rho\tau} \eta_{\mu\sigma} - k_{2\mu} k_{3\rho} \eta_{\lambda\tau} \eta_{\nu\sigma} - k_{2\mu} k_{3\lambda} \eta_{\rho\tau} \eta_{\nu\sigma} + \text{сумма по} \\ & \text{перестановкам пар } (\mu, \nu), (\sigma, \tau), (\lambda, \rho). \end{aligned} \quad (23.36)$$

Вклад от данной диаграммы получается, если произведение выражений вида (23.33)—(23.36), сопоставленных ее элементам, проинтегрировать по внутренним импульсам, а результат умножить на

$$r^{-1} (-1)^s (i/(2\pi)^4)^{l-v-1}, \quad (23.37)$$

где  $r$  — порядок группы симметрии диаграммы;  $l$  — число внутренних линий;  $v$  — число вершин;  $s$  — число петель фиктивных векторных частиц.

Соответствующие этим полям фиктивные векторные частицы являются фермионами, т. е. для них нарушается связь спина и статис-

тики. Это показывает, что их роль сводится к вычитанию вкладов не физических степеней свободы.

Помимо описанных диаграмм теория возмущений содержит вклады перенормировочного типа, пропорциональные степеням  $\delta^{(4)}(0)$ . Эти вклады порождаются локальным множителем  $\prod_x h^{-5/2}(x)$ , участвующим в мере. При линейризации (23.28) имеем

$$\prod_{x, \mu \leq \nu} dh^{\mu\nu} = \prod_{x, \mu \leq \nu} du^{\mu\nu}. \quad (23.38)$$

Этот множитель следует учитывать при построении теории возмущений. Формально его роль сводится к появлению добавки к действию вида

$$\Delta S = (5/2)i\delta^{(4)}(0) \int \ln h(x) d^4x, \quad (23.39)$$

которая порождает вершины, пропорциональные  $\delta^{(4)}(0)$ . Появление таких перенормировочных членов отмечалось во многих работах, посвященных нелинейным теориям (см. [31, 32]). Заметим, что эти члены отсутствуют в экспоненциальной параметризации (23.30). В ней мера (23.13) с точностью до постоянного множителя имеет простой вид:

$$\prod_x \prod_{\mu \leq \nu} d\Phi^{\mu\nu} \quad (23.40)$$

без всяких локальных добавок.

Таким образом, получена диаграммная теория возмущений в формализме континуального интеграла по полям  $g^{\mu\nu}$  (или  $h^{\mu\nu}$ ). В ряде случаев, в частности при переходе к гамильтоновой формулировке, более удобен формализм первого порядка. О формализме первого порядка говорят, если переменные  $g^{\mu\nu}$  и  $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$  считаются независимыми. Мера в этом случае (с точностью до степеней объема) имеет вид

$$g^{15/2} \prod_{\mu \leq \nu} dg^{\mu\nu} \prod_{\substack{\mu \leq \nu \\ \rho}} d\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = h^{5/2} \prod_{\mu \leq \nu} dh^{\mu\nu} \prod_{\substack{\mu \leq \nu \\ \rho}} d\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}. \quad (23.41)$$

Степень определителя  $g$  в мере такая, что после взятия гауссова интеграла по переменным  $\Gamma$  мера совпадает с (23.13).

Опишем возникающую в формализме первого порядка диаграммную технику. Элементы диаграмм, связанные с фиктивными векторными частицами, не изменяются. Помимо тензорного пропагатора  $\langle uu \rangle$  (23.33) в схему теории возмущений входят пропагаторы  $\langle u, \gamma \rangle$  и  $\langle \gamma\gamma \rangle$ . Трём разным пропагаторам соответствуют линии

$$\left. \begin{aligned} \langle uu \rangle &= \text{---} ; \\ \langle u\gamma \rangle &= \text{---} \text{---} ; \\ \langle \gamma\gamma \rangle &= \text{---} . \end{aligned} \right\} \quad (23.42)$$

В импульсном представлении они имеют вид

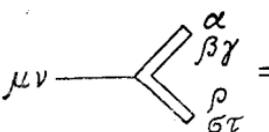
$$G_{\sigma\tau}^{\mu\nu,\rho}(k) = (i/2)(\eta_{\sigma\alpha}\delta_{\beta}^{\rho}k_{\tau} + \eta_{\tau\alpha}\delta_{\beta}^{\rho}k_{\sigma} - \eta_{\sigma\alpha}\eta_{\tau\beta}k^{\rho})G^{\mu\nu,\alpha\beta}(k) \equiv \equiv \Omega_{\sigma\tau,\alpha\beta}^{\rho}(k)G^{\alpha\beta,\mu\nu}(k);$$

$$G_{\sigma\tau,\mu\nu}^{\rho\lambda}(k) = 1/4(\delta_{\mu}^{\rho}\delta_{\sigma}^{\lambda}\eta_{\nu\tau} + \delta_{\nu}^{\rho}\delta_{\sigma}^{\lambda}\eta_{\mu\tau} + \delta_{\mu}^{\rho}\delta_{\tau}^{\lambda}\eta_{\nu\sigma} + \delta_{\nu}^{\rho}\delta_{\tau}^{\lambda}\delta_{\mu\sigma}) - - 1/6(\delta_{\nu}^{\lambda}\delta_{\tau}^{\rho}\eta_{\mu\sigma} + \delta_{\mu}^{\lambda}\delta_{\tau}^{\rho}\eta_{\nu\sigma} + \delta_{\nu}^{\lambda}\delta_{\sigma}^{\rho}\eta_{\mu\tau} + \delta_{\mu}^{\lambda}\delta_{\sigma}^{\rho}\eta_{\nu\tau}) + + \Omega_{\mu\nu,\alpha\beta}^{\lambda}(k)\Omega_{\sigma\tau,\gamma\delta}^{\rho}(-k)G^{\alpha\beta,\gamma\delta}(k). \quad (23.43)$$

Единственная гравитонная вершина порождается трехлинейной формой

$$(\kappa/2)\int u^{\mu\nu}(\gamma_{\mu\sigma}^{\rho}\gamma_{\rho\nu}^{\sigma} - \gamma_{\mu\nu}^{\rho}\gamma_{\rho\sigma}^{\sigma})d^4x \quad [(23.44)$$

и имеет выражение



$$= \frac{\kappa}{8}\{2(\delta_{\mu}^{\sigma}\delta_{\nu}^{\tau} + \delta_{\nu}^{\sigma}\delta_{\mu}^{\tau})(\delta_{\rho}^{\beta}\delta_{\alpha}^{\gamma} + \delta_{\alpha}^{\beta}\delta_{\rho}^{\gamma}) - \delta_{\mu}^{\sigma}\delta_{\alpha}^{\tau}\delta_{\nu}^{\rho}\delta_{\rho}^{\beta} - \delta_{\mu}^{\sigma}\delta_{\nu}^{\beta}\delta_{\rho}^{\gamma}\delta_{\alpha}^{\tau} - - \delta_{\nu}^{\sigma}\delta_{\alpha}^{\tau}\delta_{\mu}^{\rho}\delta_{\rho}^{\beta} - \delta_{\nu}^{\sigma}\delta_{\alpha}^{\tau}\delta_{\mu}^{\rho}\delta_{\rho}^{\beta} - \delta_{\mu}^{\tau}\delta_{\alpha}^{\sigma}\delta_{\nu}^{\rho}\delta_{\rho}^{\beta} - \delta_{\mu}^{\tau}\delta_{\alpha}^{\sigma}\delta_{\nu}^{\rho}\delta_{\rho}^{\beta} - \delta_{\nu}^{\tau}\delta_{\alpha}^{\sigma}\delta_{\mu}^{\rho}\delta_{\rho}^{\beta} - - \delta_{\nu}^{\tau}\delta_{\alpha}^{\sigma}\delta_{\mu}^{\rho}\delta_{\rho}^{\beta}\}.$$

Перенормировочные элементы, пропорциональные  $\delta^{(4)}(0)$ , порождаются локальным множителем  $\Pi \int h^{5/2}(x)$  в мере (23.41), вклад которого можно интерпретировать как добавку к действию вида

$$\Delta S = -(5/2)i\delta^{(4)}(0)\int \ln h(x)d^4x. \quad (23.46)$$

Мы подробно рассмотрели случай гравитационного поля в пустоте. Введение взаимодействия с другими полями не изменит существенно схемы построения теории возмущений. Для полей материи с невырожденными лагранжианами, взаимодействующих с гравитационным полем, новых фиктивных частиц не возникает. Такие частицы и соответствующие им диаграммы появляются только при включении поля с калибровочной группой более широкой, чем в теории тяготения, например, электромагнитного поля или поля Янга—Миллса. Не рассматривая этот случай подробно, при-

ведем выражение для континуального интеграла, соответствующего взаимодействующим электромагнитному и гравитационному полям:

$$\left. \begin{aligned} & \int \exp \{iS [g^{\mu\nu}, A_\mu]\} \Delta [g] \prod_x \delta [\partial_\mu (h^{\mu\nu} A_\nu)] \times \\ & \times \prod_\mu \delta_\nu (\partial_\nu h^{\mu\nu}) g^{5/2} \prod_{\mu \leq \nu} dg^{\mu\nu} \prod_\mu dA_\mu; \\ & S_i [g^{\mu\nu}, A_\mu] = S_g - 1/4 \int (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \times \\ & \times (\partial_\lambda A_\rho - \partial_\rho A_\lambda) g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} \sqrt{-g} d^4 x, \end{aligned} \right\} \quad (23.47)$$

где  $S_g$  — действие свободного гравитационного поля;  $\Delta [g]$  равно произведению определителей

$$\det \hat{A} \det (\partial_\nu (h^{\mu\nu} \partial_\nu)), \quad (23.48)$$

в котором  $\hat{A}$  — оператор (23.21). Наличие в этом произведении нетривиального второго множителя показывает, что несущественная фиктивная скалярная частица, которую можно было бы ввести при описании электромагнитного поля, также взаимодействует с гравитационным полем. Таким образом, в ковариантной теории возмущений для электромагнитного и гравитационного полей участвует фиктивная нейтральная скалярная частица.

## § 24. Каноническое квантование гравитационного поля

В предыдущем параграфе построены формализм ковариантного квантования гравитационного поля и релятивистская теория возмущений по общей схеме квантования калибровочных полей, намеченной в § 20. При переходе к каноническому (операторному) квантованию возникают две задачи: 1) привести действие гравитационного поля к гамильтоновой форме; 2) преобразовать континуальный интеграл в форме (23.25) к интегралу по каноническим переменным. Первая из указанных проблем могла бы быть решена сразу после написания Эйнштейном уравнений теории тяготения (1916 г.). Однако прошло более сорока лет, прежде чем ее решение было дано Дираком в 1958 г. [33]. По-видимому, дело было в недостаточном внимании к проблеме, а также в ее технической сложности.

Рассмотрим переход к гамильтоновой теории в формализме континуального интеграла. Гамильтонова формулировка классической теории тяготения была впервые разработана Дираком [33]. Несколько вариантов такой формулировки было получено многими авторами [32—37, 8]. При построении явно гамильтоновой формы уравнений Эйнштейна встречается трудная задача — решение уравнений связи. Рассмотрим обобщенную гамильтонову формулировку теории тяготения, при которой не надо решать уравнения связи, а можно ограничиться лишь проверкой их коммутационных соотношений.

Такая обобщенная формулировка является теоретико-полевым аналогом развитой в § 16 формулировки для конечномерных механических систем. Покажем, что действие гравитационного поля можно привести к виду, аналогичному (16.17) для конечномерных систем, причем соответствующие связи и гамильтониан удовлетворяют условиям (16.20), (16.21). Будем следовать методу, предложенному Л. Д. Фаддеевым в форме, специально приспособленной для гравитационного поля [8]. Для этих целей удобно использовать формализм первого порядка. Рассмотрим выражение для действия гравитационного поля в виде (23.3) и соберем члены в плотности функции Лагранжа, содержащие производные по времени:

$$(2\kappa^2)^{-1} (\Gamma_{\mu\nu}^0 \partial_0 h^{\mu\nu} - \Gamma_{\mu 0}^0 \partial_0 h^{\mu 0}) = (2\kappa^2)^{-1} (\Gamma_{ik}^0 \partial_0 h^{ik} + (\Gamma_{i0}^0 - \Gamma_{ik}^k) \partial_0 h^{i0} - \Gamma_{0i}^i \partial_0 h^{00}). \quad (24.1)$$

Это выражение не содержит переменных  $\Gamma_{00}^\mu$ , которые входят в  $L(h, \Gamma)$  линейно и имеют смысл множителей Лагранжа. Стоящие при  $\Gamma_{00}^\mu$  множители (обозначим их  $A_{\mu}^{00}$ ) являются связями. Уравнения связей

$$\left. \begin{aligned} A_0^{00} &= h^{ik} \Gamma_{ik}^0 + h^{00} \Gamma_{00}^0 + \partial_i h^{i0} = 0; \\ A_i^{00} &= 2h^{k0} \Gamma_{ik}^0 + h^{00} (\Gamma_{i0}^0 - \Gamma_{ik}^k) + \partial_i h^{00} \end{aligned} \right\} \quad (24.2)$$

дают возможность выразить переменные  $\Gamma_{0i}^i$ ,  $\Gamma_{i0}^0 - \Gamma_{ik}^k$  через  $\Gamma_{ik}^0$  и  $h^{\mu\nu}$ . При этом члены, содержащие производные по времени, принимают вид

$$(2\kappa^2)^{-1} (\Gamma_{ik}^0/h^{00}) \partial_0 (h^{00} h^{ik} - h^{i0} h^{k0}), \quad (24.3)$$

если опустить слагаемые

$$\begin{aligned} &(2\kappa^2 h^{00})^{-1} (\partial_0 h^{00} \partial_i h^{i0} - \partial_i h^{00} \partial_0 h^{i0}) = \\ &= (1/2\kappa^2) (\partial_0 \ln h^{00} \partial_i h^{i0} - \partial_i \ln h^{00} \partial_0 h^{i0}), \end{aligned} \quad (24.4)$$

исчезающие при интегрировании по частям.

Формула (24.3) подсказывает, что естественными динамическими переменными являются

$$q^{ik} = h^{i0} h^{k0} - h^{00} h^{ik}; \quad \pi_{ik} = -(1/h^{00}) \Gamma_{ik}^0. \quad (24.5)$$

Переменные  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ , отличные от  $\Gamma_{ik}^0$ , являются нединамическими, и их можно исключить с помощью уравнений связи

$$\partial L(h, \Gamma) / \partial \Gamma_{\mu\nu}^\rho = 0, \quad \Gamma_{\mu\nu}^\rho \neq \Gamma_{ik}^0. \quad (24.6)$$

В систему (24.6) входят уравнения (24.2) вместе с уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \partial_k h^{i0} + h^{is} \Gamma_{sk}^0 + h^{00} \Gamma_{k0}^i + h^{0s} \Gamma_{sk}^i - h^{i0} \Gamma_{ks}^s &= 0; \\ \partial_k h^{ij} + h^{i\sigma} \Gamma_{\sigma k}^j + h^{j\sigma} \Gamma_{\sigma k}^i - h^{ij} \Gamma_{k\sigma}^\sigma &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (24.7)$$

Решение системы (24.2), (24.7), выражающее «нединамические»  $\Gamma_{i0}^0$ ,  $\Gamma_{i0}^k$ ,  $\Gamma_{ij}^k$  через  $h^{\mu\nu}$ ,  $\Gamma_{ik}^0$ , имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{i0}^0 &= \Gamma_{is}^s - \partial_i h^{00}/h^{00} - (h^{0s}/h^{00}) \Gamma_{is}^0; \\ \Gamma_{i0}^k &= -(1/h^{00}) (\partial_i h^{k0} + h^{0s} \Gamma_{is}^k - h^{k0} \Gamma_{is}^s + h^{ks} \Gamma_{is}^0); \\ \Gamma_{ij}^k &= \Gamma_{ij}^{*k} + (h^{k0}/h^{00}) \Gamma_{ij}^0. \end{aligned} \right\} \quad (24.8)$$

Здесь  $\Gamma_{ij}^{*k}$  — трехмерные коэффициенты связности, порожденные трехмерной метрикой  $g_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ).

Подставим найденные выражения (24.8) для  $\Gamma_{i0}^0$ ,  $\Gamma_{i0}^k$ ,  $\Gamma_{ij}^k$  в плотность функции Лагранжа  $L(h, \Gamma)$ . Пренебрегая слагаемыми типа дивергенции, исчезающими при интегрировании по трехмерному пространству, с учетом асимптотических условий (23.2), приведем результат подстановки к виду

$$\frac{1}{2\kappa^2} (\pi_{ik}(x) \partial_0 q^{ik}(x)) - H(x) - \left( \frac{1}{h^{00}(x)} - 1 \right) T_0(x) - \frac{h^{i0}(x)}{h^{00}(x)} T_i(x); \quad (24.9)$$

$$\left. \begin{aligned} T_0(x) &= q^{ij} q^{kl} (\pi_{ik} \pi_{jl} - \pi_{ij} \pi_{kl}) + g_3 R_3; \\ T_i(x) &= 2 (\nabla_i (q^{kl} \pi_{kl}) - \nabla_k (q^{kl} \pi_{il})); \\ H(x) &= T_0(x) - \partial_i \partial_k q^{ik}(x). \end{aligned} \right\} \quad (24.10)$$

Здесь  $q_3 = \det g_{ik}$ ;  $R_3$  — трехмерный скаляр кривизны, порожденный трехмерной метрикой  $g_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ). Символ  $\nabla_k$  в выражениях для связей  $T_i$  означает ковариантную производную по отношению к метрике  $g_{ik}$ .

Арновитт, Дезер и Мизнер [34] отметили, что канонические переменные в выражении для связей имеют наглядный геометрический смысл. Функции  $g^{ik}$ ,  $\pi_{ik}$  служат коэффициентами первой и второй квадратичных форм поверхности  $x^0 = \text{const}$ , погруженной в четырехмерное пространство—время с метрикой  $g_{\mu\nu}$  и связностью  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ . Точнее,  $q^{ik}$  — контравариантная плотность метрики веса  $+2$ ,  $\pi_{ik}$  — ковариантная плотность метрики веса  $-1$ . Связи — это известные в теории поверхностей соотношения Кодаци и Гаусса (см., например, [38]).

Формула (24.9) представляет собой решение задачи приведения действия гравитационного поля к обобщенному гамильтонову виду, аналогичному (16.17) для конечномерной системы со связями. Связи  $T_\mu$ , как можно проверить, находятся в инволюции. Для записи явных соотношений удобно ввести величины

$$T(\eta) = \int T_k(x) \eta^k(x) d^3x; \quad T_0(\varphi) = \int T_0(x) \varphi(x) d^3x. \quad (24.11)$$

Здесь  $\eta$  — векторное поле;  $\varphi$  — скалярное поле, точнее, скалярная плотность веса — 1. Имеют место соотношения

$$\left. \begin{aligned} \{T(\eta_1), T(\eta_2)\} &= T([\eta_1, \eta_2]); \\ \{T(\eta), T_0(\varphi)\} &= T_0(\eta\varphi); \\ \{T_0(\varphi), T_0(\psi)\} &= T(\varphi\eta_\psi - \psi\eta_\varphi), \end{aligned} \right\} \quad (24.12)$$

где  $[\eta_1, \eta_2]$  — скобка векторных полей, т.е. векторное поле с компонентами  $\eta_1^i \partial_i \eta_2^k - \eta_2^i \partial_i \eta_1^k$ ;  $\eta\varphi = \eta^i \partial_i \varphi - \partial_i \eta^i \varphi$ ;  $\eta_\varphi$  — векторное поле с компонентами  $q^{ik} \partial_k \varphi$ . Соотношения (24.12) — теоретико-полевой аналог равенств (16.20). Первая строка в (24.12) показывает, что связи  $T_k(x)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) имеют смысл генераторов координатных преобразований. Остальные соотношения не имеют простого группового смысла.

Отметим дивергенцию  $(-\partial_i \partial_k q^{ik})$  в плотности гамильтониана  $H(x)$ . Если выполнены уравнения связей  $T_\mu = 0$ , гамильтониан  $H$  сводится к трехмерному интегралу от дивергенции, т.е. к интегралу по бесконечно удаленной поверхности. Последний интеграл определяется асимптотикой функций  $q^{ik}$  при  $r = |x| \rightarrow \infty$ . Для асимптотически плоского гравитационного поля имеем

$$q^{ik} = \delta^{ik} (1 + \kappa^2 M / 2\pi r) + O(r^{-2}), \quad (24.13)$$

где  $M$  — полная масса, которую можно вычислить, интегрируя  $H(x)$ :

$$\begin{aligned} H &= \int H(x) d^3 x = -(1/2\kappa^2) \int \partial_i \partial_k q^{ik} d^3 x = \\ &= -(1/2\kappa^2) \lim_{S \rightarrow \infty} \oint_S \partial_k q^{ik} dS_i = M. \end{aligned} \quad (24.14)$$

Таким образом, можно считать, что  $H = \int H(x) d^3 x$  имеет смысл энергии гравитационного поля. Подынтегральное выражение

$$H(x) = T_0(x) - \partial_i \partial_k q^{ik}(x), \quad (24.15)$$

имеющее смысл плотности энергии, равно сумме двух квадратичных форм — квадратичной формы первых производных от  $q^{ik}$  и квадратичной формы «импульсов»  $\pi_{ik}$  — как и полагается плотности энергии волнового поля. В данном случае это энергия гравитационного поля, которое имеет две поляризации в соответствии с обычным подсчетом:

$$2 = 6 \text{ (координат)} - 4 \text{ (связи)}. \quad (24.16)$$

В приближении слабого поля гамильтониан представляется квадратичной формой от полностью поперечных компонент линеаризованного поля.

Именно это обстоятельство, а также показанное выше равенство (24.14) энергии гравитационного поля массе служат оправданием выбора действия этого поля в виде (23.3), где производные действуют не на символы Кристоффеля  $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ , а на метрический тензор  $g_{\mu\nu}$ .

После того как действие гравитационного поля приведено к обобщенному гамильтонову виду, можно построить гамильтонову форму континуального интеграла, выбрав предварительно дополнительные условия. Часто используют условия, впервые предложенные Дираком [30]:

$$\partial_h (q^{-1/3} q^{ik}) = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad \pi = q^{ik} \pi_{ik}, \quad (24.17)$$

где  $q = \det q^{ik}$ . Эти условия имеют простой геометрический смысл: поверхность  $x^0 = \text{const}$  минимальна, а координаты  $x^1, x^2, x^3$  на ней «гармоничны» [уравнения  $\partial_h (q^{-1/3} q^{ik}) = 0$  — это условия «трехмерной гармоничности»].

Для доказательства эквивалентности канонической и релятивистской форм континуального интеграла более удобны другие дополнительные условия, а именно:

$$\ln q = \Phi(x); \quad q^{ik} = 0, \quad i \neq k, \quad (24.18)$$

где  $\Phi$  — функция с асимптотикой  $c/r$  на бесконечности. Соотношения (16.27), (16.28) для этих условий выполняются. Матрица скобок Пуассона условий (24.18) со связями определяется формулами:

$$\left. \begin{aligned} (\hat{C}\eta)^0 &= \{T_\eta, \ln q - \Phi(x)\} = -\eta^s \partial_s \ln q - 4\partial_s \eta^s + 4\pi \eta^0; \\ (\hat{C}\eta)^1 &= \{T_\eta, q^{23}\} = -\eta^s \partial_s q^{23} + q^{2s} \partial_s \eta^3 + q^{3s} \partial_s \eta^2 - \\ &\quad - 2q^{23} \partial_s \eta^s - 2(\pi^{23} - q^{23} \pi) \eta^0; \\ (\hat{C}\eta)^2 &= \{T_\eta, q^{31}\} = -\eta^s \partial_s q^{31} + q^{3s} \partial_s \eta^1 + \\ &\quad + q^{1s} \partial_s \eta^3 - 2q^{31} \partial_s \eta^s - 2(\pi^{31} - q^{31} \pi) \eta^0; \\ (\hat{C}\eta)^3 &= \{T_\eta, q^{12}\} = -\eta^s \partial_s q^{12} + q^{1s} \partial_s \eta^2 + q^{2s} \partial_s \eta^1 - \\ &\quad - 2q^{12} \partial_s \eta^s - 2(\pi^{12} - q^{12} \pi) \eta^0, \end{aligned} \right\} \quad (24.19)$$

где

$$T_\eta = \int (T_0 \eta^0 + T_i \eta^i) d^3x. \quad (24.20)$$

Матрица  $C$  не вырождена, если кривизна метрики  $g_{ih}$  отлична от нуля.

Введем обозначения:

$$\ln q - \Phi = \chi_0; \quad q^{23} = \chi_1; \quad q^{31} = \chi_2; \quad q^{12} = \chi_3. \quad (24.21)$$

Континуальный интеграл в гамильтоновой форме для гравитационного поля выглядит следующим образом:

$$\int \exp \left\{ i \int \left( \pi_{ik} \partial_0 q^{ik} - \frac{\hbar^{0i}}{\hbar^{00}} T_i - \left( \frac{1}{\hbar^{00}} - 1 \right) T_0 - H(x) \right) d^4 x \right\} \times \\ \times \det \{ T_\mu, \chi_\alpha \} \prod_x \left[ \prod_{a=0}^3 \delta(\chi_a) \prod_{i \leq k} d\pi_{ik} dq^{ik} d \frac{1}{\hbar^{00}} \prod_{i=1}^3 d \left( \frac{\hbar^{0i}}{\hbar^{00}} \right) \right]. \quad (24.22)$$

Приведем это выражение к виду, где интегрирование ведется только по полю  $g^{\mu\nu}$ . Это даст возможность идентифицировать искомую меру интегрирования. С этой целью надо проинтегрировать по полям  $\pi_{ik}$ . От  $\pi_{ik}$  зависит не только функционал  $\exp(iS)$ , но и определитель  $\det \{ T_\mu, \chi_\alpha \}$ . Запишем этот определитель в виде континуального интеграла по антикоммутирующим переменным  $\eta^\mu, \bar{\eta}^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ):

$$\det \{ T_\mu, \chi_\alpha \} = \\ = \int \exp \left[ i \int \bar{\eta}^\mu C_{\mu\nu}(\pi, q) \eta^\nu d^4 x \right] \prod_x d\bar{\eta}^\mu(x) d\eta^\mu(x). \quad (24.23)$$

Функции  $\pi_{ik}$  входят только в коэффициенты  $C_{\mu 0}$  оператора  $\hat{C}$ , не содержащие производных, причем линейным образом. Сделаем в интеграле по  $\pi_{ik}$  сдвиг:

$$\pi_{ik} \rightarrow \pi_{ik} + \pi_{ik}(g), \quad (24.24)$$

где  $\pi_{ik}(g)$  — выражение  $\pi_{ik} = -(1/\hbar^{00}) \Gamma_{ik}^0$  через метрический тензор согласно (23.1). При таком сдвиге функционал действия  $S[g^{\mu\nu}, \pi_{ik}]$  — интеграл от выражения (24.9) — переходит в

$$S[g^{\mu\nu}] = (2\chi^2)^{-1} \int (1/\hbar^{00}) q^{ij} q^{kl} (\pi_{ik} \pi_{jl} - \pi_{ij} \pi_{kl}) d^4 x. \quad (24.25)$$

Здесь  $S[g^{\mu\nu}]$  — действие (23.3), в котором символы Кристоффеля  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  выражены через метрический тензор. Квадратичная форма  $\bar{\eta}^\mu C_{\mu\nu}(\pi_{ik}, q^{ik}) \eta^\nu$  превращается в

$$\bar{\eta}^\mu C_{\mu\nu}[\pi_{ik}(g), q^{ik}] \eta^\nu + \bar{\eta}^\mu l_\mu(\pi_{ik}) \eta^0, \quad (24.26)$$

где  $l_\mu(\pi_{ik})$  — линейные формы по  $\pi_{ik}$ , явный вид которых не понадобится. Сделаем теперь в интеграле еще один сдвиг, уничтожающий линейную по  $\pi_{ik}$  форму  $\bar{\eta}^\mu l_\mu(\pi_{ik}) \eta^0$ . Вместо этой формы возникает форма, квадратичная по  $\bar{\eta}^\mu \eta^0$  и не содержащая производных, а поэтому равная нулю тождественно, так как  $(\eta^0)^2 \equiv 0$ . После этого

возьмем гауссов интеграл по  $\pi_{ih}$ . Интеграл же по  $\eta^\mu, \bar{\eta}^\mu$  снова можно записать как определитель оператора  $\hat{C}_1$ , отличающегося от оператора  $\hat{C}$  тем, что в нем символы  $\pi_{ih}$  заменены их выражениями через метрический тензор. Действие оператора  $\hat{C}_1$  определяется формулами:

$$\left. \begin{aligned} (\hat{C}_1 \eta)^0 &= -\eta^\lambda \partial_\lambda \ln q - 4\partial_s \eta^s - [(h^{0s}/h^{00}) \partial_s \ln q + \\ &+ 4\partial_s (h^{0s}/h^{00})] \eta^0; \\ (\hat{C}_1 \eta)^1 &= -\eta^\lambda \partial_\lambda q^{23} + q^{2s} \partial_s \eta^3 + q^{3s} \partial_s \eta^2 - 2q^{23} \partial_s \eta^s + \\ &+ \left\{ -\frac{h^{0s}}{h^{00}} \partial_s q^{23} + q^{2s} \partial_s \left( \frac{h^{03}}{h^{00}} \right) + q^{3s} \partial_s \left( \frac{h^{02}}{h^{00}} \right) - 2q^{23} \partial_s \left( \frac{h^{0s}}{h^{00}} \right) \right\} \eta^0; \\ (\hat{C}_1 \eta)^2 &= -\eta^\lambda \partial_\lambda q^{31} + q^{3s} \partial_s \eta^1 + q^{1s} \partial_s \eta^3 - 2q^{31} \partial_s \eta^s + \\ &+ \left\{ -\frac{h^{0s}}{h^{00}} \partial_s q^{31} + q^{3s} \partial_s \left( \frac{h^{01}}{h^{00}} \right) + q^{1s} \partial_s \left( \frac{h^{03}}{h^{00}} \right) - 2q^{31} \partial_s \left( \frac{h^{0s}}{h^{00}} \right) \right\} \eta^0; \\ (\hat{C}_1 \eta)^3 &= -\eta^\lambda \partial_\lambda q^{12} + q^{1s} \partial_s \eta^2 + q^{2s} \partial_s \eta^1 - 2q^{12} \partial_s \eta^s + \\ &+ \left\{ -\frac{h^{0s}}{h^{00}} \partial_s q^{12} + q^{1s} \partial_s \left( \frac{h^{02}}{h^{00}} \right) + q^{2s} \partial_s \left( \frac{h^{01}}{h^{00}} \right) - 2q^{12} \partial_s \left( \frac{h^{0s}}{h^{00}} \right) \right\} \eta^0. \end{aligned} \right\} (24.27)$$

Локальные множители в произведениях дифференциалов вместе с локальным множителем, возникшим от интегрирования по  $\pi_{ih}$ , и самими дифференциалами собираются в выражение

$$\prod_x (h^{00})^{-4} q^{-2} \prod_{\mu \leq \nu} dh^{\mu\nu}. \quad (24.28)$$

Множители перед дифференциалами можно привести к виду

$$h^{00})^{-1} h^{-5/2} q^{1/2}, \quad (24.29)$$

причем последний множитель можно опустить вследствие условия связи  $q = \exp \Phi$ . В результате наш континуальный интеграл принимает вид

$$\int \exp(iS[h]) \det \hat{B}_1 \prod_x \left\{ \left[ \prod_a \delta(\chi_a) \right] h^{-5/2} \prod_{\mu \leq \nu} dh^{\mu\nu} \right\}, \quad (24.30)$$

где оператор  $\hat{B}_1$  отличается от  $\hat{C}_1$  локальным множителем  $(h^{00})^{-2}$ .

Покажем теперь, что выписанный интеграл является интегралом по классам гравитационных полей в смысле § 20, причем клас-

сы параметризуются условиями (24.21), а инвариантная мера имеет вид (23.13). Для этого достаточно проверить, что  $\det \hat{B}_1$  совпадает с множителем  $\Delta_x [h]$ , определяемым из условия

$$\Delta_x [h] \int \prod_x \left( \prod_a \delta(\chi_a^2) \right) d\Omega(x) = 1. \quad (24.31)$$

Интеграл в этом выражении можно вычислить тем же способом, что и интеграл в формуле (23.17). При этом получится

$$\Delta_x [h] = \det \hat{B}, \quad (24.32)$$

где оператор  $\hat{B}$  определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} (\hat{B}\xi)^0 &= -\zeta^\lambda \partial_\lambda \ln q - 4\partial_s \zeta^s + 4(h^{0s}/h^{00}) \partial_s \zeta^0; \\ (\hat{B}\xi)^1 &= -\zeta^\lambda \partial_\lambda q^{23} + q^{2s} \partial_s \zeta^3 + q^{3s} \partial_s \zeta^\lambda - 2q^{2s} \partial_s \zeta^s - \\ &\quad - \{(h^{02}/h^{00}) q^{3s} + (h^{03}/h^{00}) q^{2s} - 2(h^{0s}/h^{00}) q^{23}\} \partial_s \zeta^0; \\ (\hat{B}\xi)^2 &= -\zeta^\lambda \partial_\lambda q^{31} + q^{3s} \partial_s \zeta^1 + q^{1s} \partial_s \zeta^3 - 2q^{31} \partial_s \zeta^s - \\ &\quad - \{(h^{03}/h^{00}) q^{1s} + (h^{01}/h^{00}) q^{3s} - 2(h^{0s}/h^{00}) q^{31}\} \partial_s \zeta^0; \\ (\hat{B}\xi)^3 &= -\zeta^\lambda \partial_\lambda q^{12} + q^{1s} \partial_s \zeta^2 + q^{2s} \partial_s \zeta^1 - 2q^{12} \partial_s \zeta^s - \\ &\quad - \{(h^{01}/h^{00}) q^{2s} + (h^{02}/h^{00}) q^{1s} - 2(h^{0s}/h^{00}) q^{12}\} \partial_s \zeta^0. \end{aligned} \right\} \quad (24.33)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\det \hat{B} = \det \hat{B}_1. \quad (24.34)$$

Действительно, можно перейти от одного оператора к другому треугольной заменой

$$\xi^0 = \eta^0; \quad \xi^i = \eta^i + (h^{0i}/h^{00}) \eta^0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (24.35)$$

Итак, явно унитарная гамильтонова форма континуального интеграла после формальных замен переменных интегрирования преобразована к интегралу по классам эквивалентных полей при некоторой конкретной параметризации классов. Соответствующая инвариантная мера имеет вид (23.13). Этим оправдано лоренц-инвариантное выражение для континуального интеграла (23.16), которое представляет собой запись этого же интеграла в другой параметризации классов.

Следующая, более трудная задача состоит в последовательном проведении перенормировочной процедуры, основанной на инвариантной регуляризации. Трудности обусловлены громоздкостью теории, а также тем, что с формальной точки зрения она не является перенормируемой.

## § 25. Попытки построения калибровочно-инвариантной теории электромагнитных и слабых взаимодействий

Рассмотренные выше примеры калибровочно-инвариантных теорий строятся как часть более широкой теоретической схемы, включающей в себя все существующие взаимодействия. Построение такой общей модели — наиболее сложная задача, стоящая перед физикой элементарных частиц. Более частная — это идея объединения электромагнитного и слабого взаимодействий ( $EM + W$ ) при помощи мультиплетов калибровочных полей, давно привлекающая к себе внимание теоретиков. Реализация этой идеи вызвала к жизни некоторые модели, из которых наибольшую известность получила модель Вейнберга — Салама [39]. В этом параграфе будет кратко рассмотрена модель Вейнберга — Салама, а также калибровочно-инвариантная модель электромагнитного и слабого взаимодействий лептонов, предложенная Л. Д. Фаддеевым [40]. Как и любые теории калибровочных полей, эти модели наиболее естественно формулируются на языке континуальных интегралов.

В основу модели Вейнберга — Салама положена идея спонтанного нарушения первоначально существующей инвариантности относительно калибровочных преобразований векторных безмассовых полей типа Янга — Миллса. Калибровочной группой модели служит группа  $U(2)$ , изоморфная группе унитарных матриц второго порядка, сводящаяся к произведению группы  $U(1)$  фазовых преобразований на группу унитарных матриц второго порядка с единичным определителем.

Порождаемая группой  $U(2)$  связность образована векторными полями двух типов — мультиплетом  $A_\mu^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) янг-миллсовского типа и полем  $B_\mu$ . Кроме этих полей в модели имеются поля лептонов и поля вспомогательных скалярных полей, приводящие к спонтанному нарушению калибровочной  $U(2)$ -инвариантности. Из полей лептонного типа в модель входят поля электронного типа:

$$L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi_e^v; \quad R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi_e, \quad (25.1)$$

где  $\psi_e$  — поле электронов;  $\psi_e^v$  — поле электронного нейтрино. Скалярные поля образуют дублет

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_- \end{pmatrix}. \quad (25.2)$$

Лагранжиан модели имеет вид

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g[A_\mu, A_\nu])^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 - \\ & - \bar{R}\gamma^\mu(\partial_\mu - ig' B_\mu)R - \bar{L}\gamma^\mu(\partial_\mu + igtA_\mu - (i/2)g'B_\mu)L - \\ & - \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi - igtA_\mu + (i/2)g'B_\mu \varphi)^2 - G_e(\bar{L}\varphi R + \bar{R}\varphi L) + \\ & + M_1^2 \varphi \varphi^+ - h_1(\varphi^+ \varphi)^2, \end{aligned} \quad (25.3)$$

где  $g, g'$  — константы связи соответственно мультиплетта  $A_\mu$  и синглета  $B_\mu$ .

Механизм спонтанного нарушения симметрии и образования массы, предложенный впервые Хиггсом [41], сводится к появлению аномального среднего

$$\lambda = \langle \varphi^0 \rangle \quad (25.4)$$

для нулевой компоненты  $\varphi$ -поля. Такой механизм встречается в теории сверхтекучести. Перейдем от первоначальных полей к новым «физическим» полям, вычтя из  $\varphi$ -полей их аномальные средние. В качестве таких полей можно взять  $\varphi^-$ -поле и поля

$$\varphi_1 = (\varphi^0 + \bar{\varphi}^0 - 2\lambda)/\sqrt{2}; \quad \varphi_2 = (\varphi^0 - \bar{\varphi}^0)/i\sqrt{2}. \quad (25.5)$$

В первом порядке теории возмущений величина  $\lambda$  определяется из условия максимума выражения  $-M_1^2 \varphi^+ \varphi + h (\varphi^+ \varphi)^2$  при подстановке в него  $\varphi^0 = \lambda, \varphi^- = 0$ . Это приводит к формуле

$$\lambda^2 = M_1^2/2h. \quad (25.6)$$

В результате оказывается, что поле  $\varphi_1$  имеет массу  $M_1$ , а поля  $\varphi_2$  и  $\varphi^-$  остаются безмассовыми. Появление безмассовых возбуждений в моделях со спонтанным нарушением симметрии впервые было четко отмечено Голдстоуном [42]. Однако здесь эти возбуждения не имеют непосредственного физического смысла и могут быть устранены калибровочными преобразованиями.

Масса  $\varphi_1$ -мезона оказывается очень большой (по сравнению с массой электрона  $m_e$ ), и по этой причине свяэью  $\varphi$  с остальными полями можно пренебречь. В результате оказывается, что эффект появления аномального среднего (25.4) можно в первом приближении учесть простой заменой поля  $\varphi$  его вакуумным ожиданием:

$$\langle \varphi \rangle = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (25.7)$$

При такой замене исходный лагранжиан (25.3) превращается в выражение

$$\begin{aligned} & -1/4 (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g [A_\mu, A_\nu])^2 - 1/4 (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 - \\ & - \bar{R} \gamma_\mu (\partial_\mu - ig' B_\mu) R - \bar{L} \gamma_\mu (\partial_\mu + ig t A_\mu - i/2 g' B_\mu) L - 1/8 \lambda^2 g^2 ((A_\mu^1)^2 + \\ & + (A_\mu^2)^2) - 1/8 (g A_\mu^3 + g' B_\mu)^2 - \lambda G_e \bar{\psi}_e \psi_e. \end{aligned} \quad (25.8)$$

Электрон получает массу

$$m_e = \lambda G_e. \quad (25.9)$$

Заряженное векторное поле

$$W_\mu = (A_\mu^1 + i A_\mu^2)/\sqrt{2} \quad (25.10)$$

описывает промежуточный бозон с массой

$$M_W = \lambda g/2. \quad (25.11)$$

Из нейтральных полей  $A_\mu^3, B_\mu$  можно образовать комбинации

$$\left. \begin{aligned} Z_\mu &= (g^2 + g'^2)^{-1/2} (gA_\mu^3 + g' B_\mu); \\ A_\mu &= (g^2 + g'^2)^{-1/2} (-g' A_\mu^3 + gB_\mu) \end{aligned} \right\} \quad (25.12)$$

с массами

$$M_Z = 1/2 \lambda (g^2 + g'^2)^{1/2}; \quad M_A = 0. \quad (25.13)$$

Таким образом, одна из компонент мультиплета векторных полей  $A_\mu$  имеет нулевую массу, и эту компоненту следует считать фотонным полем.

Член взаимодействия лептонов с векторными полями можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{ig}{2\sqrt{2}} \bar{\psi}_e (1 + \gamma_5) \nu W_\mu + \frac{igg'}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} \bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_e W_\mu + \\ & + \frac{i(g^2 + g'^2)^{1/2}}{4} \left[ \frac{3(g'^2 - g^2)}{g'^2 + g^2} \bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_e - \bar{\psi}_e \gamma_\mu \gamma_5 \psi_e + \bar{\nu} \gamma_\mu (1 + \right. \\ & \left. + \gamma_5) \nu \right] Z_\mu. \end{aligned} \quad (25.14)$$

Второе слагаемое в (25.14) показывает, что электронный заряд есть

$$e = gg' (g^2 + g'^2)^{-1/2} \quad (25.15)$$

и, таким образом, меньше, чем каждый из затравочных зарядов  $g, g'$ . Предполагая, что  $W_\mu$  связан, как обычно, с адронами и мюоном, получаем соотношение

$$G_W/\sqrt{2} = g^2/8 M_W^2 = 1/2\lambda^2. \quad (25.16)$$

Из (25.12), (25.16) следует, что массы промежуточных бозонов очень велики:

$$M_Z > 80 \text{ ГэВ}; \quad M_W > 40 \text{ ГэВ} \quad (25.17)$$

по сравнению не только с массой электрона, но и с массой адронов.

Модель Вейнберга — Салама приводит к взаимодействию нейтральных токов. Чтобы убедиться в этом, исключим поле промежуточных бозонов, сделав преобразование  $W_\mu \rightarrow W_\mu + W_\mu^0$ , исключая линейные по  $W_\mu$  члены взаимодействия с лептонами. Это приводит к прямому взаимодействию лептонных токов вида

$$\sum_{a,b} \int d^4x d^4y j^a(x) j^b(y) D(x-y), \quad (25.18)$$

где

$$D(x-y) = (2\pi)^{-4} \int (k^2 - M_W^2 - i0)^{-1} \exp[ik(x-y)] d^4k \quad (25.19)$$

есть пропагатор  $W$ -поля массы  $M_W$ . При больших  $M_W$  можно пренебречь в знаменателе подынтегрального выражения  $k^2$  по сравнению с  $M_W^2$  и заменить выражение (25.19)

$$- M_W^{-2} \delta(x - y). \quad (25.20)$$

После такой замены члены лептонного взаимодействия будут пропорциональны

$$\sum_{a, b} \int d^4 x j^a(x) j^b(x); \quad (25.21)$$

слагаемые  $\int d^4 x j^a(x) j^b(x)$  соответствуют взаимодействию нейтральных токов. Такое взаимодействие характерно для модели Вейнберга — Салама и отсутствует в  $(V - A)$ -варианте модели слабого взаимодействия.

Наличие взаимодействия нейтральных токов было подтверждено экспериментально [43, 44]. Это серьезный аргумент в пользу модели Вейнберга — Салама.

Методы теории калибровочных полей [7—9, 45—48] позволяют оправдать предположение о перенормируемости модели [39]. Для более простых примеров это было сделано Тофтом [11]. Здесь мы не доказываем перенормируемости модели Вейнберга — Салама. Заметим только, что построение корректной теории возмущений следует проводить согласно общей схеме квантования калибровочных полей, изложенной в этой главе.

Несмотря на полученное к настоящему времени качественное согласие выводов из модели Вейнберга — Салама с экспериментом, эту модель нельзя еще с полной уверенностью считать единственным приемлемым вариантом единой калибровочной теории слабых и электромагнитных взаимодействий. Эта модель обладает рядом эстетических недостатков, из которых отметим два: 1) использование непростой группы  $U(2)$  в качестве калибровочной группы нарушает идею универсальности взаимодействия; 2) введение линейного мультиплет скалярных полей с последующим спонтанным нарушением симметрии (механизм Хиггса) не имеет естественного толкования в рамках идеи калибровочной инвариантности.

Калибровочно-инвариантная модель электромагнитного и слабого взаимодействий лептонов, свободная от этих недостатков, предложена Л. Д. Фаддеевым [40]. Рассмотрим ее, следуя в основном работе [40].

Модель Фаддеева основана на простейшей нетривиальной калибровочной группе  $O(3)$  (трехмерной группе вращения) и содержит только триплет векторных полей. Вместо скалярного поля Хиггса здесь вводится поле направлений  $n(x)$  в зарядовом пространстве, определяющее в нем нейтральное подпространство. Набор физических частиц в модели включает в себя известные лептоны, фотоны и заряженные промежуточные бозоны.

Остановимся на геометрических идеях, лежащих в основе модели.

Классические поля делятся на два класса: 1) сечения некоторого расслоения над многообразием пространства — времени, инвариантные по отношению к локальному действию калибровочной группы; 2) связности в этом расслоении, задающие параллельный перенос полей первого класса.

Слой является обычно произведением линейного пространства, в котором реализуется представление группы Лоренца в соответствии со спинами рассматриваемых полей первого класса и внутреннего (зарядового) пространства, в котором действует группа внутренней симметрии. При пренебрежении эффектами тяготения нетривиальная связность порождается только последней группой и задается набором векторных полей Янга—Миллса [22], число которых совпадает с размерностью калибровочной группы. В рассматриваемой модели набор полей первого класса содержит спинорные поля лептонов, а калибровочная группа — это группа  $O(3)$ . В качестве внутреннего пространства взято произведение линейного пространства ее представления и нелинейного многообразия, в котором она действует. Линейной компоненте слоя сопоставлен мультиплет спинорных полей лептонов. Простейшей возможностью для нее является представление векторного представления  $R^3$ . Лептоны, т. е.  $\mu, e, \nu = \nu_e + \nu_\mu$  (антимюон, электрон и нейтрино), объединяются в трехмерный вектор, так что пространство  $R^3$  хорошее и с физической точки зрения.

Можно отличить нейтральный лептон от заряженного, если указать, какой из генераторов группы  $O(3)$  является зарядом. Таким образом, задание заряда равносильно введению направления в  $R^3$ , которое можно назвать нейтральным. В результате возникает многообразие направлений  $S^2$ , которое считается прямым множителем во внутреннем пространстве.

Итак, в модели присутствуют три фермиона  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ , объединенных в изовектор  $\psi \in R^3$ , набор скалярных полей  $n_1, n_2, n_3$ , удовлетворяющих условию

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (25.22)$$

и образующих единичный вектор  $n \in S^2$ , и три векторных поля  $Z_\mu^1, Z_\mu^2, Z_\mu^3$ , образующих изовектор  $Z_\mu \in R^3$ .

Удобно ввести три вещественные антисимметричные матрицы:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (25.23)$$

задающие представление алгебры Ли группы  $O(3)$ , и рассматривать набор  $V_1, V_2, V_3$  как трехмерный вектор  $V$ .

Действие калибровочной группы запишем в инфинитезимальной форме:

$$\delta\psi = \psi \wedge \varepsilon; \delta n = n \wedge \varepsilon; \delta Z_\mu = \partial_\mu \varepsilon + Z_\mu \wedge \varepsilon, \quad (25.24)$$

где  $\varepsilon = \varepsilon(x)$  — вектор бесконечно малого локального поворота. Здесь и далее используются обозначения  $(\cdot)$ ,  $\wedge$  для скалярного и векторного произведений в  $R^3$ , например  $\psi \wedge \varepsilon = (V, \varepsilon)\psi$ .

Через поля  $Z_\mu$  и  $n$  можно построить еще два триплета векторных полей:

$$Y_\mu = \partial_\mu n + Z_\mu \wedge n; X_\mu = n \wedge Y_\mu, \quad (25.25)$$

которые векторно преобразуются при калибровочных преобразованиях

$$\delta Y_\mu = Y_\mu \wedge \varepsilon; \delta X_\mu = X_\mu \wedge \varepsilon. \quad (25.26)$$

Эти поля можно использовать в дополнение к полю  $Z_\mu$  при определении ковариантной производной поля  $\psi$ , получая матрицы путем тензорного умножения  $Z_\mu$ ,  $Y_\mu$  на  $n$ .

Рассмотрим конкретную комбинацию:

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi + (Z_\mu, V)\psi + (X_\mu \otimes n + n \otimes X_\mu) \gamma_5 \psi, \quad (25.27)$$

построенную с помощью матрицы  $\gamma_5$  ( $\gamma_5^\dagger = -\gamma_5$ ,  $\gamma_5^2 = -1$ ). Она выделена дополнительным условием коммутации  $\nabla_\mu$  с преобразованием

$$\left. \begin{aligned} \delta\psi &= \alpha n(n, \gamma_5 \psi); \delta n = 0; \\ \delta Z_\mu &= \alpha Y_\mu; \delta X_\mu = \alpha Y_\mu, \end{aligned} \right\} \quad (25.28)$$

где  $\alpha$  — бесконечно малая константа. Выражение (25.27) определяет инфинитезимальную связность, ассоциированную с группой  $SU(3)$ .

Лептонное число  $L$ , порожденное обычным фазовым преобразованием

$$\delta\psi = i\beta\psi; \delta n = 0; \delta Z_\mu = 0, \quad (25.29)$$

где  $\beta$  — константа (не зависит от  $x$ ), и заряд  $Q$ , порожденный генератором  $(V, n)$ , определяют полный набор квантовых чисел для классификации лептонов. Преобразование (25.28) при этом производит дополнительную классификацию нейтральных лептонов, абсолютизируя различие их противоположных спиральностей.

Лагранжиан, инвариантный по отношению к описанным преобразованиям, имеет вид

$$L = (1/2i) \{ \bar{\psi} \gamma_\nu \nabla_\mu \psi - (\gamma_\mu \nabla_\mu \bar{\psi}) \psi \} + (1/e^2) L_{YM} + (m^2/2e^2) (Y_\mu, Y_\mu), \quad (25.30)$$

где  $L_{YM}$  — лагранжиан Янга — Миллса для поля  $Z_\mu$ :

$$L_{YM} = -1/4 (Z_{\mu\nu}, Z_{\mu\nu}); Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu + Z_\mu \wedge Z_\nu. \quad (25.31)$$

Константа  $e$  безразмерна,  $m$  имеет размерность массы.

Выпишем отдельно члены лагранжиана (25.31), описывающие взаимодействие фермионов с векторным полем:

$$L_1 = i (Z_\mu, v_\mu) + i (X_\mu, a_\mu), \quad (25.32)$$

где

$$v_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu V \psi; \quad a_\mu = (\bar{\psi} n) \gamma_\mu \gamma_5 \psi + \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 (n \psi). \quad (25.33)$$

Выражение (25.33) аналогично стандартной  $(V - A)$ -структуре в обычной теории слабых взаимодействий. Эта аналогия подтверждается поведением  $L_1$  по отношению к операторам пространственного отражения  $P$  и отражения заряда  $R_Q$ . Швингер [50] определил геометрически отражение  $R_Q$  как переход к античастицам с последующим изменением знака нейтрального направления в зарядовом пространстве  $R^3$ . В явном виде  $R_Q$  определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \psi^\parallel &\rightarrow \psi^{*\parallel}; \quad \psi^\perp \rightarrow \psi^{*\perp}; \quad n \rightarrow -n; \\ Z_\mu^\parallel &\rightarrow -Z_\mu^\parallel; \quad Z_\mu^\perp \rightarrow Z_\mu^\perp; \quad Y_\mu \rightarrow Y_\mu; \quad X_\mu \rightarrow X_\mu, \end{aligned} \right\} \quad (25.34)$$

где

$$Z_\mu^\parallel = (Z_\mu, n); \quad Z_\mu^\perp = Z_\mu - (Z_\mu, n) n. \quad (25.35)$$

Заметим, что  $X_\mu^\parallel = Y_\mu^\parallel = 0$ . Билинейные формы  $v_\mu, a_\mu$  преобразуются следующим образом:

$$v_\mu^\parallel \rightarrow -v_\mu^\parallel; \quad v_\mu^\perp \rightarrow v_\mu^\perp; \quad a_\mu^\parallel \rightarrow a_\mu^\parallel; \quad a_\mu^\perp \rightarrow -a_\mu^\perp, \quad (25.36)$$

так что при отражении заряда второе слагаемое в (25.32) меняет знак. Оно же меняет знак при пространственном отражении, так что взаимодействие  $L_1$  инвариантно относительно преобразования комбинированной четности  $R_Q P$ .

Рассмотрим теперь возможную структуру массовых членов для фермионов, имея в виду, что их можно добавлять к затравочному лагранжиану (25.30) или вычислять динамически. Возьмем три матрицы  $I, i(V, n), n \otimes n$ , линейной комбинацией которых может быть матрица массового члена  $M$ . Условие инвариантности по отношению к преобразованию (25.29) дает матрицу  $M$  вида

$$M = a (I - n \otimes n) + i b (V n), \quad (25.37)$$

причем коэффициенты  $a$  и  $b$  имеют размерность массы.

Для физической интерпретации модели рассмотрим ее в частной калибровке  $n = n_0$ , где  $n_0$  — постоянный вектор  $(0, 0, 1)$ . Это условие означает, что заряд связан с матрицей  $-i(V_3)$  и поле  $\psi_3$  нейтрально. Поля  $\psi_1 + i\psi_2, \psi_1 - i\psi_2$  имеют массы  $a + b, a - b$  и заряды  $1, -1$  соответственно. Нейтральное поле  $\psi_3$  имеет массу  $0$ . Поля  $X_\mu, Y_\mu$  имеют компоненты

$$X_\mu^1 = Z_\mu^1; \quad X_\mu^2 = Z_\mu^2; \quad X_\mu^3 = 0; \quad Y_\mu^1 = Z_\mu^2; \quad Y_\mu^2 = -Z_\mu^1; \quad Y_\mu^3 = 0, \quad (25.38)$$

так что взаимодействие  $L_1$  принимает вид:

$$L_1 = Z_\mu^1 (v_\mu^1 + a_\mu^1) + Z_\mu^2 (v_\mu^2 + a_\mu^2) + Z_\mu^3 v_\mu^3. \quad (25.39)$$

Последнее слагаемое в лагранжиане (25.30) дает массовый член для векторных мезонов  $Z_\mu^1, Z_\mu^2$ . В результате лагранжиан  $L_1$  описывает слабое  $(V - A)$ -взаимодействие электронов,  $\mu$ -мезонов и нейтрино, переносимое промежуточными массивными векторными бозонами  $W_\mu^\pm$ , и взаимодействие заряженных лептонов с электромагнитным полем в стандартной форме:

$$e\{A_\lambda(\bar{\psi}_e\gamma_\lambda\psi + \bar{\psi}_{(\mu)}\gamma_\lambda\psi_{(\mu)}) + W_\lambda((\bar{\psi}_e\gamma_\lambda(1+i\gamma_5)\psi_e + \bar{\psi}_{(\mu)}\gamma_\lambda(1+i\gamma_5)\psi_{(\mu)}) + \text{с. с.}\}, \quad (25.40)$$

если произвести отождествление

$$\left. \begin{aligned} Z_\mu^3 &= eA_\mu; \quad Z_\mu^1 \pm Z_\mu^2 = eW_\mu^\pm; \\ \psi_1 + i\psi_2 &= \psi_\mu^*; \quad \psi_1 - i\psi_2 = \psi_e; \quad \psi_3 = \psi_{\nu_e} + \psi_{\nu_\mu}^* \end{aligned} \right\} \quad (25.41)$$

Постоянная  $e$  при этом имеет смысл электрического заряда,  $e/m$  есть константа слабого взаимодействия;  $m$  — масса промежуточного бозона.

При квантовании описанной модели удобно использовать в качестве калибровочного условия условие поперечности векторных полей:

$$\partial_\mu Z_\mu = 0. \quad (25.42)$$

При этом, в соответствии с общими методами квантования калибровочных полей, к лагранжиану (25.30) следует добавить компенсирующий член, содержащий взаимодействие векторных частиц с фиктивными скалярными фермионами. В поперечной калибровке поле  $n(x)$  не только не исчезает из лагранжиана, но входит в него существенно нелинейно. Вопрос о правильном квантовании поля  $n(x)$  имеет важнейшее значение. Можно надеяться, что применение методов континуального интегрирования поможет получить правильный ответ.

## § 26. Вихреподобные возбуждения в квантовой теории поля

В последнее время концепция возбуждений типа квантовых вихрей, возникшая в теории сверхпроводимости и сверхтекучести, переносится на релятивистскую квантовую теорию поля. Основанием для этого служит гипотеза, что сильновзаимодействующие частицы (если не все, то по крайней мере некоторые из них) являются вихреподобными возбуждениями. Такая гипотеза позволяет снизить число фундаментальных полей. Необходимость в этом ощущается особенно сильно в последнее время, когда число открытых сильновзаимодействующих частиц вместе с резонансами стало порядка 100—200. В этой ситуации стандартная схема теории поля, сопоставляющая каждой частице фундаментальное поле, становится громоздкой, не-

эффективной для практического использования и непривлекательной с точки зрения красоты теории.

Вихреподобные возбуждения существуют как в точно решаемых моделях, где они получили название *солитоны*, так и в других теориях. Рассмотрим сначала одну из простейших моделей релятивистской теории поля, в которой возможны вихреподобные возбуждения, — модель Голдстоуна [42] с одним временным и двумя пространственными измерениями. Затем рассмотрим возможность существования вихреподобных возбуждений в некоторых моделях теории поля в четырехмерном пространстве — времени и, в частности, в калибровочных теориях с полями Янга — Миллса.

Метод континуального интегрирования представляется наиболее подходящим в этой области, где возбуждения существенно коллективные и образованы многими исходными частицами.

Перейдем к рассмотрению релятивистской модели Голдстоуна. Функционал действия этой модели удобно записать в евклидовых переменных:

$$S = - \int ( |\nabla\psi|^2 - \lambda |\psi|^2 + (g/4) |\psi|^4 ) d^4x. \quad (26.1)$$

Функционал (26.1) описывает комплексное скалярное поле, самодействующее с константой связи  $g > 0$ . Коэффициент  $\lambda$  положителен. Это соответствует тому, что при выключенном взаимодействии ( $g = 0$ ) имеются частицы с отрицательным значением квадрата массы (*таххионы*).

Голдстоун обратил внимание на то, что при включении взаимодействия в системе происходит бозе-конденсация [42]. В результате появляются частицы нулевой и конечной массы (с положительным квадратом). Частицы конечной массы, как будет видно, неустойчивы и имеют конечное время жизни.

Вид функционала действия (26.1) напоминает соответствующий функционал для неидеального бозе-газа. Естественно предположить, что в модели Голдстоуна могут существовать возбуждения типа квантовых вихрей, характерные для сверхтекучих бозе-систем.

Прежде чем рассмотреть непосредственно квантовые вихри, построим для модели Голдстоуна теорию возмущений, не содержащую инфракрасных расходимостей и удобную, в частности, для вычисления времени жизни нестабильной частицы. Не будем пока конкретизировать размерность модели  $n$ .

Плотность конденсата определяется в первом приближении из условия максимума выражения

$$\lambda |\psi|^2 - (g/4) |\psi|^4 \quad (26.2)$$

и равна

$$\rho_0 = |\psi_0|^2 = 2\lambda/g. \quad (26.3)$$

Перейдем в действии (26.1) к полярным координатам  $\psi = \sqrt{\rho} \exp(i\varphi)$ ,  $\bar{\psi} = \sqrt{\rho} \exp(-i\varphi)$ , а затем вместо  $\rho$  введем переменную  $\pi = \rho - \rho_0$ . В переменных  $\varphi$ ,  $\pi$  действие имеет вид

$$S = - \int [(\rho_0 + \pi)(\nabla\varphi)^2 + (\nabla\pi)^2/4(\rho_0 + \pi) + g\pi^2/4] dx + (\lambda^2/g) \int dx. \quad (26.4)$$

Здесь выражение  $(\lambda^2/g) \int dx$  — вклад бозе-конденсата.

Сделаем в континуальном интеграле по переменным  $\varphi(x)$  и  $\pi(x)$  преобразование:

$$\varphi \rightarrow \varphi/\sqrt{2\rho_0}; \quad \pi \rightarrow \sqrt{2\rho_0} \pi, \quad (26.5)$$

превращающее выражение (26.4) в

$$S = - \int \left[ \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2} \sqrt{2/\rho_0} \pi (\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{(\nabla\pi)^2}{1 + \sqrt{2/\rho_0} \pi} + 2\lambda\pi^2 \right) \right] dx + \frac{\lambda}{g} \int dx. \quad (26.6)$$

Константа  $\sqrt{2/\rho_0}$  определяет силу взаимодействия  $\varphi$ - и  $\pi$ -полей, а также самодействия  $\pi$ -поля.

Заметим, что из формулы (26.6) следует неустойчивость системы взаимодействующих тахионов относительно сколь угодно слабого стабилизирующего возмущения. Действительно, если при фиксированном  $\lambda$  рассмотреть в (26.6) предел  $g \rightarrow +0$ , то получим, что второе слагаемое в (26.6) стремится к бесконечности, а первое превращается в квадратичную форму, описывающую невзаимодействующие безмассовые частицы и частицы с положительным квадратом массы  $m^2 = 2\lambda$ . Учет взаимодействия делает массивную частицу неустойчивой.

Построим теорию возмущений в терминах переменных  $\varphi$ ,  $\pi$ . Элементами диаграмм теории возмущений будут две линии, соответствующие полям  $\varphi$  и  $\pi$ , одна вершина, соответствующая  $\varphi - \pi$ -взаимодействию, и бесконечное число вершин, соответствующих  $\pi - \pi$ -взаимодействию. Приведем выражения для линий, вершины  $\varphi - \pi$ -взаимодействия и первой из вершин  $\pi - \pi$ -взаимодействия:

$$\left. \begin{array}{l} \text{---} -k^{-2}; \\ \text{---} - (k^2 + 2\lambda)^{-1}; \\ \begin{array}{c} k_1 \\ \diagup \\ k_3 = \text{---} \\ \diagdown \\ k_2 \end{array} \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} (k_1 k_2); \\ \begin{array}{c} k_1 \\ \diagup \\ k_3 = \text{---} \\ \diagdown \\ k_2 \end{array} - \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} (k_1 k_2). \end{array} \right\} \quad (26.7)$$

Здесь  $\varphi$ -поле обозначено одинарной линией,  $\pi$ -поле — двойной. В  $\pi - \pi$ -вершине черточками отмечены выходы вершины, несущие импульсы  $k_1$  и  $k_2$ . Скалярное произведение именно этих импульсов фигурирует в выражении, соответствующем этой вершине.

Выражение, соответствующее диаграмме теории возмущений, можно получить, проинтегрировав произведение выражений, соответствующих элементам диаграммы, по независимым импульсам и умножив результат на множитель

$$(1/r) (-1/(2\pi)^n)^c, \quad (26.8)$$

где  $r$  — порядок группы симметрии,  $c$  — число независимых контуров диаграммы. Так как построение теории происходит в евклидовых переменных, то для получения физических результатов необходимо соответствующие диаграммам выражения продолжить в область физических энергий и импульсов.

Полученная теория возмущений не содержит инфракрасных расходимостей, но расходится при больших импульсах и формально является неперенормируемой. Поэтому более последовательно было бы сначала проинтегрировать по быстропеременным составляющим  $\psi_1, \bar{\psi}_1$ , полей  $\psi, \bar{\psi}$ , определяемых как часть разложений Фурье

$$\psi(x) = \int \exp(ikx) \psi(k) dk; \quad \bar{\psi}(x) = \int \exp(-ikx) \bar{\psi}(k) dk, \quad (26.9)$$

а именно, интегралы от  $\psi(k) \exp(ikx), \bar{\psi}(k) \exp(-ikx)$  по области  $|k| > k_0$ . В интеграле по медленно меняющимся полям ( $\psi_0(x) = \psi(x) - \psi_1(x), \bar{\psi}_0(x) = \bar{\psi}(x) - \bar{\psi}_1(x)$ ) уже можно перейти к полярным координатам. Проинтегрировав функционал  $\exp S$  по быстропеременным составляющим полей  $\psi_1, \bar{\psi}_1$ , получим функционал  $\exp \tilde{S}$ , содержащий только медленно меняющиеся составляющие полей  $\psi, \bar{\psi}$ . Выражение для  $\tilde{S}$  в первом приближении совпадает с выражением для  $S$  и отличается от него поправками, которые сокращают расходимости при интегрировании по медленно меняющимся полям. Эти поправки здесь рассматривать не будем. Импульс  $k_0$ , разделяющий большие и малые импульсы, можно оценить по порядку величины. Результат такой оценки формулируется в виде неравенств

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\lambda} \ll k_0 \ll \sqrt{\lambda/g} \text{ для } n = 4; \\ \sqrt{\lambda} \ll k_0 \ll \lambda/g \text{ для } n = 3, \end{aligned} \right\} \quad (26.10)$$

которым можно удовлетворять, если мала константа связи  $g$ .

В качестве примера приложения теории возмущений с элементами (26.7) вычислим время жизни массивной частицы, определяемое диаграммой второго порядка:

$$\Sigma_2 = \text{---} \bigcirc \text{---} \quad (26.11)$$

Диаграммы, возникающие за счет  $\pi - \pi$ -взаимодействия, не дают вклада в мнимую часть. Физически это соответствует тому, что рас-

пад массивной частицы на две другие такой же массы невозможен. Соответствующее диаграмме (26.11) выражение имеет вид

$$-\frac{1}{2} \frac{2}{\rho_0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k_1 \frac{(k_1 k_2)^2}{k_1^2 k_2^2} = -\frac{g}{2\lambda (2\pi)^n} \int d^n k_1 \frac{(k_1 k_2)^2}{k_1^2 k_2^2}. \quad (26.12)$$

Рассмотрим мнимую часть этого выражения при  $k^2 = -2\lambda$ . Вследствие равенства  $k = k_1 + k_2$  имеем

$$k_1 k_2 = 1/2 [(k_1 + k_2)^2 - k_1^2 - k_2^2] = -\lambda - (k_1^2 + k_2^2)/2;$$

$$(k_1 k_2)^2 = \lambda^2 + \lambda (k_1^2 + k_2^2) + 1/4 (k_1^2 + k_2^2)^2.$$

Вклад в мнимую часть дает только первое слагаемое  $\lambda^2$  в правой части последней формулы. Остальные слагаемые приводят к вещественным, хотя и формально расходящимся интегралам вида  $\int d^n k_1/k_2$ ,  $\int d^n k_1$ ,  $\int (k_2^2/k_1^2) d^n k_1$ ; таким образом,

$$\text{Im } \Sigma = -\text{Im} [g/2 (2\pi)^n] \int d^n k_1/k_1^2 k_2^2. \quad (26.13)$$

Интеграл в этой формуле сходится для  $n = 3$  и расходится для  $n = 4$ . Мнимая часть интеграла конечна как при  $n = 3$ , так и при  $n = 4$ . Совершив аналитическое продолжение  $k^2 \rightarrow -2\lambda + i0$ , получим

$$\text{Im } \Sigma = g\sqrt{2\lambda}/2^5 \text{ для } n = 3; \quad \text{Im } \Sigma = 2\lambda/2^5 \pi \text{ для } n = 4. \quad (26.14)$$

Соответствующие формулы для времени жизни  $\pi$ -частицы имеют вид

$$\tau = 2^6 g^{-1}, \quad n = 3, \quad \tau = 2^7 \pi g^{-1} (2\lambda)^{-1/2}, \quad n = 4. \quad (26.15)$$

Модифицируем теперь континуальный интеграл для учета квантовых вихрей. Рассмотрим случай  $n = 3$  (одномерное время и двумерное пространство). Квантовым вихрям соответствуют линии в трехмерном пространстве  $(x_0, x_1, x_2)$ , на которых обращаются в нуль функции  $\psi, \bar{\psi}$ , по которым происходит интегрирование. Фаза  $\phi$  функции  $\psi$  получает приращение  $2\pi n$  ( $n$  — целое) при обходе вокруг линии. Рассмотрим здесь только вихри с приращением фазы  $\pm 2\pi$  ( $|n| = 1$ ). Состояния с  $|n| > 1$  неустойчивы и распадаются на вихри с  $|n| = 1$ .

Отдельному вихрю соответствует решение уравнения

$$-\Delta\psi - \lambda\psi + (g/2)\bar{\psi}\psi = 0, \quad (26.16)$$

полученного вариацией действия  $S$  (26.1) по  $\bar{\psi}$ , зависящее от переменных в плоскости, ортогональной мировой линии, и имеющее вид  $f(r) \exp(i\theta)$ , где  $\theta$  — полярный угол,  $f(r)$  — вещественная функция расстояния  $r$  от оси вихря. Уравнение (26.16) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции  $f(r)$ :

$$f'' + f'/r - f/r^2 + \lambda f - gf^3/2 = 0, \quad (26.17)$$

совпадающему с соответствующим уравнением в теории бозе-газа, рассмотренным Л. П. Питаевским [51]. Решение этого уравнения обращается в нуль при  $r = 0$  и стремится к  $\sqrt{\rho_0}$  при  $r \rightarrow \infty$ . Характерную длину  $\lambda^{-1/2}$  естественно назвать *радиусом ствола вихря*.

Чтобы описать ситуацию с несколькими вихрями [52], заключим каждую мировую линию в трубку радиусом  $r_0$ , значительно большим, чем радиус ствола вихря  $\lambda^{-1/2}$ . Сумму интегралов по вихревым трубкам в функционале действия  $S$  можно в первом приближении представить в виде

$$-\sum_i m_B(r_0) \int ds_i. \quad (26.18)$$

Здесь  $ds_i$  — элемент длины  $i$  вихревой линии;  $m_B(r_0)$  — масса (энергия) вихря, заключенная в трубке. Вторая величина логарифмически зависит от  $r_0$  и дается формулой

$$m_B(r_0) = 2\pi\rho_0 \ln(r_0/a), \quad (26.19)$$

где  $a$  — параметр порядка радиуса ствола вихря.

Выделим вклад в действие (26.4) от вихревых трубок и сделаем затем замену переменных (26.5). Получим выражение

$$-\int \left[ \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\rho_0}} \pi (\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{(\nabla\pi)^2}{1 + \sqrt{2/\rho_0} \pi} + 2\lambda\pi^2 \right) \right] \times \\ \times dx - \sum_i m_B(r_0) \int ds_i + (\lambda^2/g) \int dx. \quad (26.20)$$

Функционал  $\exp S$  необходимо интегрировать по полям  $\varphi$ ,  $\pi$ , а также по траекториям центров вихрей. Функция  $\varphi(x)$  в действии (26.20) неоднозначна и получает приращение

$$\pm 2\pi \sqrt{2\rho_0} = \pm q. \quad (26.21)$$

Величина  $q$ , обратно пропорциональная константе связи  $\varphi - \pi$  и  $\pi - \pi$ -взаимодействий, имеет смысл электрического заряда. Чтобы доказать это, перейдем к континуальному интегралу по новой переменной, имеющей смысл векторного интеграла электромагнитного поля. Проведем такой переход при малой константе  $\sqrt{2/\rho_0}$ , характеризующей  $\varphi - \pi$ - и  $\pi - \pi$ -взаимодействия. В пренебрежении этой константой вклад поля  $\varphi$  в функционал (26.20) дается квадратичной формой

$$-1/2 \int (\nabla\varphi)^2 dx. \quad (26.22)$$

Следует, однако, учесть, что сейчас функция  $\varphi$  неоднозначна и получает приращение  $\pm q$  при обходе вокруг вихревой линии. Восстановим однозначность, сделав сдвиг

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \varphi_0(x) \quad (26.23)$$

на функцию  $\varphi_0(x)$  — решение трехмерного уравнения Лапласа, «вбирающее» в себя неоднозначность. Для нахождения функции  $\varphi_0(x)$  заметим, что ее трехмерный градиент  $\nabla\varphi_0(x) = \mathbf{h}(x)$  есть решение задачи магнитостатики в трехмерном пространстве, заданной уравнениями

$$\text{rot } \mathbf{h} = q\mathbf{j}; \quad \text{div } \mathbf{h} = 0. \quad (26.24)$$

Здесь  $\mathbf{j}$  — сумма единичных линейных токов, текущих по траекториям центров вихрей. Функция  $\varphi_0(\mathbf{x})$  есть неоднозначный скалярный потенциал магнитного поля  $\mathbf{h}$ , порождаемого системой линейных токов. Квадрат градиента  $(\nabla\varphi)^2$  под интегралом (26.22) превращается в сумму  $(\nabla\varphi)^2 + (\nabla\varphi_0)^2$ . Интеграл от первого слагаемого описывает невзаимодействующее поле и не представляет интереса. Интеграл же от  $(\nabla\varphi_0)^2 = h^2$  пропорционален энергии магнитного поля системы линейных токов.

Обычно решают задачу магнитостатики (26.24) с помощью векторного потенциала  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{h} = \text{rot } \mathbf{a}$ ,  $\text{div } \mathbf{a} = 0$ ). Для системы линейных токов векторный потенциал  $\mathbf{a}$  есть сумма вкладов от линейных токов:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = (q/4\pi) \sum_i \int d\mathbf{l}(y) / |\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \quad (26.25)$$

Выражение, получающееся из (26.22) заменой  $\varphi \rightarrow \varphi_0$ , можно представить в виде двойной суммы вкладов от различных токов:

$$S_1 = -(q^2/8\pi) \sum_{i,k} \iint d\mathbf{l}_i(\mathbf{x}) d\mathbf{l}_k(\mathbf{y}) / |\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \quad (26.26)$$

Слагаемые с  $i = k$  в (26.26) расходятся при  $\mathbf{x}$ , близких к  $\mathbf{y}$ . Эта расходимость — результат приближения, в котором вихри считаются точечными, а соответствующие им токи — линейными. Выделение центров вихрей кружками радиусом  $r_0$ , большим, чем радиус ствола вихря, но меньшим, чем среднее расстояние между вихрями, ведет к тому, что двойные интегралы в (26.26) фактически берутся по области  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| > r_0$ , а расходимости исчезают. Выражение (26.26), описывающее в нелокальной форме взаимодействие вихрей, можно преобразовать, записав его через континуальный интеграл по формуле

$$\exp S_1 = \frac{\int \exp \left\{ -dx \left[ \frac{1}{2} (\text{rot } \mathbf{A})^2 + iq (\mathbf{A} \mathbf{j}) \right] \right\} \prod_x \delta(\text{div } \mathbf{A}) \prod_i dA_i}{\int \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int dx (\text{rot } \mathbf{A})^2 \right\} \prod_x \delta(\text{div } \mathbf{A}) \prod_i dA_i}. \quad (26.27)$$

Здесь  $\mathbf{A}$  — переменная континуального интегрирования, имеющая смысл векторного потенциала, причем его разложение

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int_{k < \tilde{k}_0} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{k}) d^3 k \quad (26.28)$$

ограничено сверху импульсами, меньшими  $\tilde{k}_0 \sim r_0^{-1}$ . Калибровка  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  в трехмерной евклидовой теории есть аналог лоренцевой калибровки  $\partial_\mu A_\mu = 0$  в четырехмерном псевдоевклидовом случае. Формула (26.27) доказывается сдвигом  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{A}_0$ , уничтожающим линейную форму по  $\mathbf{A}$  в подынтегральной экспоненте числителя.

Таким образом, часть функционала действия, описывающая взаимодействие вихрей с полем фазы  $\varphi$ , можно преобразовать к виду

$$-m_B(r_0) \sum_i \int ds_i - iq \int (\mathbf{jA}) d^3x -^{1/2} \int (\text{rot } \mathbf{A})^2 d^3x, \quad (26.29)$$

соответствующему системе заряженных частиц в электромагнитном поле. Заметим, что действие (26.29) калибровочно-инвариантно в отличие от исходного действия (26.1).

Квантовые вихри существуют как самостоятельные частицы. Очевидный закон сохранения разности числа вихрей, вращающихся в положительном и отрицательном направлениях, служит аналогом закона сохранения разности числа частиц и античастиц.

Масса одиночного вихря, строго говоря, бесконечна за счет энергии  $\varphi$ -поля, окружающего вихрь. Можно говорить только о конечной массе (энергии) внутри конечного объема. Например, масса (энергия)  $m_B(r)$  внутри круга радиусом  $r$  с центром, совпадающим с центром вихря, дается формулой (26.19) с заменой  $r_0 \rightarrow r$ .

Модель Голдстоуна с квантовыми вихрями можно назвать простейшей моделью сильных + электромагнитных взаимодействий в  $(2+1)$ -мерном пространстве — времени. Квантовые вихри здесь играют роль протонов,  $\pi$ -частицы — роль  $\pi$ -мезонов,  $\varphi$ -частицы — роль фотонов. Поводом для такой аналогии служат свойства частиц и соответствующих им полей. Действительно, взаимодействие между квантовыми вихрями на больших расстояниях переносится  $\varphi$ -полем, а на малых — также и  $\pi$ -полем, аналогично тому как взаимодействие между протонами на больших расстояниях переносится фотонами, а на малых — также и  $\pi$ -мезонами. Кроме того, распад массивной  $\pi$ -частицы на две безмассовые  $\varphi$ -частицы можно считать аналогом распада  $\pi$ -мезона на два  $\gamma$ -кванта. Наконец, для квантовых вихрей сохраняется разность числа «частиц» и «античастиц». Эта разность имеет смысл электрического заряда, совпадающего в этой модели с барионным.

Рассмотрим теперь возможность существования вихреподобных возбуждений в некоторых моделях теории поля в четырехмерном пространстве — времени. Обобщением модели Голдстоуна здесь служит модель с тремя вещественными скалярными полями и функционалом действия вида

$$S = -^{1/2} \int d^4x \left[ \sum_a (\nabla \varphi_a)^2 - \lambda \sum_a \varphi_a^2 + (g/2) \left( \sum_a \varphi_a^2 \right)^2 \right], \quad (26.30)$$

который записан здесь в евклидовых переменных. Условие  $\delta S = 0$  есть уравнение

$$-\Delta_4 \varphi_a - \lambda \varphi_a + g \left( \sum_a \varphi_a^2 \right) \varphi_a = 0. \quad (26.31)$$

Это уравнение имеет постоянное решение  $\varphi_a = \text{const}$  с условием

$$\sum_a \varphi_a^2 = \lambda/g, \quad (26.32)$$

а также решение, описывающее вихреподобное возбуждение, не зависящее от «временной» координаты  $x_4$ , вида

$$\varphi_a = (x_a/r) f(r), \quad (26.33)$$

где  $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$  — расстояние от выделенного начала координат в трехмерном пространстве. Уравнение (26.31) сводится к уравнению второго порядка для функции  $f$  вида

$$f'' + 2f'/r - 2f/r^2 + \lambda f - gf^3 = 0. \quad (26.34)$$

Нас интересует решение этого уравнения, ведущее себя пропорционально  $r$  при  $r \rightarrow 0$  и стремящееся к константе  $(\lambda/g)^{1/2}$  при  $r \rightarrow \infty$ . Можно показать, что такое решение этого уравнения действительно существует. Однако функционал

$$\frac{1}{2} \int_{r < r_0} \left[ \sum_a (\nabla \varphi_a)^2 - \lambda \sum_a \varphi_a^2 + (g/2) \left( \sum_a \varphi_a^2 \right)^2 \right] dx, \quad (26.35)$$

дающий энергию возбуждения в объеме  $r < r_0$ , пропорционален  $r_0$  в пределе  $r_0 \rightarrow \infty$ . Таким образом, вихреподобное возбуждение имеет бесконечную энергию и не может быть интерпретировано как новая частица.

Более сложные вихреподобные решения существуют в моделях с полями Янга — Миллса. Например, для системы с действием

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int \left[ \sum_{a, \mu} (\partial_\mu \varphi_a + \varepsilon \varepsilon_{abc} b_\mu^b \varphi_c)^2 - \lambda \sum_a \varphi_a^2 + (g/2) \left( \sum_a \varphi_a^2 \right)^2 \right] d^4 x - \\ & - \frac{1}{2} \int \sum_{a, \mu} (\partial_\mu b_\nu^a - \partial_\nu b_\mu^a + \varepsilon \varepsilon_{abc} b_\mu^b b_\nu^c)^2 d^4 x \end{aligned} \quad (26.36)$$

можно искать решение вида

$$\begin{aligned} \varphi_a(x) &= x_a u(r) r^{-1}; \quad b_i^a(x) = \varepsilon_{iab} x_b [a(r) - (\varepsilon r)^{-1}]; \\ b_0^a(x) &= 0. \end{aligned} \quad (26.37)$$

Такое решение независимо предложено и исследовано Тофтом [53] и А. М. Поляковым [54]. Было показано, что оно имеет конечный функционал энергии и, таким образом, может быть сопоставлено новой частице. Плотность энергии убывает  $\sim r^{-4}$  при  $r \rightarrow \infty$ , как и плотность энергии точечного заряда. Однако в этом случае энергия есть аналог энергии магнитного поля, а потому и само решение названо магнитным монополем. Заметим еще, что изотопический вектор  $\varphi_a(x)$ , согласно (26.37), стремится к различным пределам при  $r \rightarrow \infty$  в зависимости от направления вектора  $\mathbf{r}$  (имеет структуру «ежа»).

Поиски других, более реалистических моделей теории поля с вихреподобными решениями являются в настоящее время весьма актуальной задачей. Не исключено, что именно на этом пути лежит ключ к построению последовательной теории сильных взаимодействий [55—64].

1. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., Гостехиздат, 1957.
2. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., «Наука», 1969.
3. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
4. Feynman R. P. — Acta Phys. Polon., 1963, v. 24, N 6, p. 697.
5. Witt B. S., de. — Phys. Rev., 1967, v. 160, N 5, p. 1113; v. 162, N 5, p. 1195, 1239.
6. Faddeev L. D., Popov V. N. — Phys. Lett., 1967, v. 25B, p. 30.
7. Попов В. Н., Фаддеев Л. Д. Теория возмущений для калибровочно-инвариантных полей. Препринт Ин-та теор. физ. АН СССР. Киев, 1967.
8. Фаддеев Л. Д. Гамильтонова форма теории тяготения. Тезисы 5-й Международной конференции по гравитации и теории относительности. Тбилиси, 1968.
9. Фаддеев Л. Д., — Теор. и мат. физика, 1969, т. 1, № 1, с. 3.
10. t'Hooft G. — Nucl. Phys. B., 1971, v. 33, N 1, p. 173.
11. t'Hooft G. — Nucl. Phys. B, 1971, v. 35, N 1, p. 167—188.
12. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М., «Наука», 1978.
13. Макки Дж. Лекции по математическим основам квантовой механики. Пер. с англ. М., «Мир», 1965.
14. Картан Э. Интегральные инварианты. Пер. с англ. Л., Гостехиздат, 1940.
15. Feynman R. P. — Rev. Mod. Phys., 1948, v. 20, N 2, p. 367—387.
16. Feynman R. P. — Phys. Rev., 1951, v. 84, N 2, p. 108—128.
17. Евграфов М. А. — Докл. АН СССР, 1970, т. 191, № 5, с. 979.
18. Биленький С. М. Введение в диаграммную технику Фейнмана. М., Атомиздат, 1971.
19. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М., «Наука», 1965.
20. Bialinicki-Birula I. J. — J. Math. Phys., 1962, v. 3, N 6, p. 1094.
21. Ward J. S. — Phys. Rev. Lett., 1949, v. 77, N 2, p. 293; Phys. Rev. Lett., 1950, v. 78, N 2, p. 182.
22. Yang C. N., Mills R. L. — Phys. Rev., 1954, v. 96, N 1, p. 191.
23. Schwinger J. — Phys. Rev., 1962, v. 125, N 3, p. 1043; v. 127, N 1, p. 324.
24. Gross D. T., Wilczek F. — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 30, N 26, p. 1343 — 1346.
25. Politzer H. D. — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 30, N 26, p. 1346—1349.
26. Weyl H. — Phys. Rev., 1950, v. 77, N 5, p. 699—705.
27. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М., «Наука», 1965.
28. Fradkin E. S., Vilkovisky G. A. — Phys. Rev. D, 1974, v. 8, p. 4241.
29. Kaku M. — Nucl. Phys. B, 1975, v. 91, p. 99.
30. Aragone C., Chela-Flores J. — Nuovo cimento B, 1975, v. 25, p. 225.
31. Umezawa H., Takahashi Y. — Progr. Theor. Phys., 1953, v. 9, p. 14—32, 501—523.
32. Lee T. D., Yang C. N. — Phys. Rev., 1962, v. 128, N 2, p. 885.
33. Dirac P. A. M. — Proc. Roy. Soc., 1958, v. A246, p. 326—332; p. 333—343.
34. Arnowitt R., Deser S., Misner C. W. — Phys. Rev., 1960, v. 117, N 6, p. 1595—1602.
35. Schwinger J. — Phys. Rev., 1963, v. 130, N 3, p. 1253; v. 132, N 3, p. 1317.
36. Bergman P. — Rev. Mod. Phys., 1961, v. 33, N 4, p. 510—514.
37. Andersen T. L. — Rev. Mod. Phys., 1964, v. 36, N 4, p. 929—938.
38. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
39. Weinberg S. — Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, N 21, p. 1264—1266.

40. Фаддеев Л. Д. Калибровочно-инвариантная модель электромагнитного и слабого взаимодействия лептонов. Препринт Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1972.
41. Higgs P. W. — Phys. Rev., 1966, v. 145, N 4, p. 1156—1163.
42. Goldstone J. — Nuovo cimento, 1961, v. 19, N 1, p. 154—164.
43. Hasert F. J. — Phys. Lett. B, 1973, v. 46, N 1, p. 121—124.
44. Hasert F. J. e. a. — Phys. Lett. B, 1973, v. 46, N 1, p. 138—140.
45. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. — Теор. и мат. физ., 1970, т. 3, с. 18.
46. Mandelstam S. — Phys. Rev., 1968, v. 175, N 5, p. 1580; p. 1604.
47. Фрадкин Е. С. О функциональном методе в квантовой статистике и в теории многих частиц. — В сб.: Проблемы теоретической физики. М., «Наука», 1969, с. 386.
48. Fradkin E. S., Tyutin I. V. — Phys. Lett. B, 1969, v. 30, N 8, p. 562—563; — Phys. Rev. D, 1970, v. 2, N 12, p. 2841—2856.
49. Veltman M. — Nucl. Phys., 1968, v. 7B, p. 637.
50. Schwinger J. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1958, v. 44, N 9, p. 956—965.
51. Питаевский Л. П. — Журн. эксперим. и теор. физ., 1961, т. 40, вып. 2, с. 646—651.
52. Попов В. N. Quantum vortices in the relativistic Goldstone model. — Proc. of XII Winter school of theoretical physics in Karpacz, p. 397—403.
53. t'Hooft G. — Nucl. Phys. B, 1974, v. 79, N 1, p. 276—284.
54. Поляков А. М. — Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 20, вып. 6, с. 430.
55. Фаддеев Л. Д. — Письма в ЖЭТФ, 1975, т. 21, с. 25.
56. Арефьева И. Я., Корепин В. Е. — Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 20, с. 312.
57. Корепин В. Е., Кулиш П. П., Фаддеев Л. Д. — Письма в ЖЭТФ, 1975, т. 21, с. 138.
58. Корепин В. Е., Фаддеев Л. Д. — Теор. и мат. физ., 1975, т. 25, с. 147.
59. Dashen R. E., Haslacher В.; Neveu A. — Phys. Rev. D, 1974, v. 10, N 12, p. 4125.
60. Christ N., Lee T. D. — Phys. Rev. D., 1975, v. 12, N 6, p. 1607.
61. Tomboulis E. — Phys. Rev. D., 1975, v. 12, N 6, p. 1678.
62. Jackiw R., Woo N. — Phys. Rev. D, 1975, v. 12, N 6, p. 1705.
63. Faddeev L. D. Vortex-line solutions of a unified model of electromagnetic and weak interactions of leptons. München preprint MPI-PAE/Pth 16, 1974.
64. Faddeev L. D., Korepin V. E. — Phys. Reports, 1978, v. 42C, N 1, p. 3—87.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
<b>Глава I. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИЛИ ГЕОМЕТРИЯ?</b> . . . . .	<b>6</b>
§ 1. Принципы относительности, геометрия и взаимодействие . . . . .	6
§ 2. Калибровочные поля и физика элементарных частиц . . . . .	22
Список литературы . . . . .	49
<b>Глава II. ЛАГРАНЖЕВА ТЕОРИЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ</b> . . . . .	<b>52</b>
§ 3. Введение . . . . .	52
§ 4. Теоремы Нетер . . . . .	55
§ 5. Локальная калибровочная инвариантность лагранжиана и вторая теорема Нетер . . . . .	63
§ 6. Обратные теоремы Нетер . . . . .	69
§ 7. Изопериметрические задачи в теории с локальной симметрией . . . . .	73
§ 8. Тензорные калибровочные поля и производные Ли . . . . .	81
Список литературы . . . . .	91
<b>Глава III. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ</b> . . . . .	<b>93</b>
§ 9. Калибровочные поля и единая геометрическая теория взаимодействий . . . . .	93
§ 10. Внешние формы на многообразии и уравнения структуры пространства . . . . .	99
§ 11. Калибровочные поля как коэффициенты связности главного расслоенного пространства над $V_4$ . . . . .	108
§ 12. Классификация решений классических уравнений калибровочных полей . . . . .	115
§ 13. Калибровочные поля и структура пространства — времени . . . . .	133
§ 14. Электродинамика сплошной среды в геометрическом аспекте . . . . .	146
Список литературы . . . . .	152
<b>Глава IV. КВАНТОВАНИЕ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ</b> . . . . .	<b>155</b>
§ 15. Основные идеи построения квантовой теории калибровочных полей . . . . .	155
§ 16. Механические системы и фазовое пространство . . . . .	157

§ 17. Континуальный интеграл в квантовой механике . . . . .	163
§ 18. Квантование систем со связями . . . . .	166
§ 19. Континуальный интеграл и теория возмущений в квантовой теории поля . . . . .	169
§ 20. Квантовая теория калибровочных полей . . . . .	179
§ 21. Квантовая электродинамика . . . . .	183
§ 22. Поля Янга — Миллса . . . . .	189
§ 23. Квантование гравитационного поля . . . . .	202
§ 24. Каноническое квантование гравитационного поля . . . . .	211
§ 25. Попытки построения калибровочно-инвариантной теории электромагнитных и слабых взаимодействий . . . . .	219
§ 26. Вихреподобные возбуждения в квантовой теории поля . . . . .	226
Список литературы . . . . .	235



**Нелли Павловна Коноплева** — кандидат физико-математических наук, руководитель лаборатории теоретической физики, автор около 50 научных работ, посвященных лагранжевой и геометрической классической теории калибровочных полей, истории физики и философским проблемам естествознания.

Наиболее известными результатами Н. П. Коноплевой являются геометрическая теория калибровочных полей как связностей главного расслоенного пространства над  $V_4$  (1964—1969) и последовательная лагранжева теория калибровочных полей общего вида, естественно включающая гравитацию (1966—1972). Н. П. Коноплева впервые предложила регулярный метод получения законов сохранения и дополнительных условий в теориях с локальной симметрией и показала, что при локализации пространственно-временной симметрии роль калибровочных полей могут играть любые тензорные или однородные преобразующиеся поля.



**Виктор Николаевич Попов** — доктор физико-математических наук, сотрудник Ленинградского Отделения Математического института АН СССР. Основное направление научных исследований — континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике.

В. Н. Попову принадлежит ряд известных результатов в квантовой теории калибровочных полей и в теории сверхтекучих бозе- и ферми-систем. Им совместно с академиком Л. Д. Фаддеевым предложен метод квантования калибровочных полей в формализме континуальных интегралов, получивший широкое международное признание и дальнейшее развитие в работах советских и зарубежных исследователей. В настоящее время этот метод является наиболее распространенным подходом в квантовой теории калибровочных полей. Основы метода излагаются в данной книге.